



**HAL**  
open science

# Combinatoire énumérative et algébrique autour du PASEP

Arthur Nunge

► **To cite this version:**

Arthur Nunge. Combinatoire énumérative et algébrique autour du PASEP. Combinatoire [math.CO].  
Université Paris-Est, 2018. Français. NNT : 2018PESC1116 . tel-02085841

**HAL Id: tel-02085841**

**<https://pastel.hal.science/tel-02085841>**

Submitted on 31 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE ET  
ALGÈBRIQUE AUTOUR DU PASEP

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université Paris-Est

**Spécialité Informatique**

École Doctorale de Mathématiques et des Sciences et Techniques de l'Information et de la  
Communication

Présentée et soutenue publiquement par

Arthur Nunge

le 11 décembre 2018

**Devant le jury composé de**

Jean-Christophe Aval	Examineur
François Bergeron	Rapporteur
Enrica Duchi	Examinatrice
Matthieu Josuat-Vergès	Examineur
Philippe Nadeau	Examineur
Cyril Nicaud	Examineur
Jean-Christophe Novelli	Directeur de thèse
Vic Reiner	Rapporteur

Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge  
UMR 8049 LIGM

5, bd Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France



# Remerciements

C'est ainsi que se terminent ces trois années de thèse durant lesquelles j'ai eu l'occasion de discuter et de travailler avec de nombreuses personnes. Je consacre ce chapitre à toutes ces personnes qui m'ont accompagné et avec qui j'ai pu découvrir avec joie les plaisirs de la recherche.

Tout d'abord je souhaite remercier Jean-Christophe Novelli. Je l'ai rencontré au début de ma dernière année de master durant laquelle il a commencé par m'enseigner la combinatoire avant de me proposer un sujet de stage puis de thèse. Pendant ces années il m'a appris bien plus que la combinatoire. Je souhaite le remercier pour sa constante disponibilité, pour sa patience ainsi que de m'avoir donné la liberté dont j'avais besoin dans ma recherche. Pour toutes ces raisons je n'aurais pas pu espéré un meilleur directeur de thèse.

Je remercie François Bergeron et Vic Reiner d'avoir accepté de rapporter ce document ainsi que Jean-Christophe Aval, Enrica Duchi, Matthieu Josuat-Vergès, Philippe Nadeau et Cyril Nicaud de faire partie de mon jury de thèse.

Pendant ma thèse je suis ravi d'avoir pu collaborer avec Sylvie Corteel. Merci pour cette opportunité et pour ces échanges toujours constructifs.

Je souhaite également remercier tous les membres de l'équipe de combinatoire en commençant par Jean-Yves Thibon pour avoir si souvent partagé ses connaissances peut importe le nombre de fois où il aura fallu revenir sur un même sujet. Merci également aux autres membres (ou anciens membres) de l'équipe avec qui j'ai pu échanger scientifiquement mais surtout créer des amitiés : Nicolas Borie pour son partage de ses très bonnes méthodes pédagogiques ; Philippe Biane pour ses questions et remarques pertinentes au groupe de travail ; Olivier Bouillot pour m'avoir fait reprendre l'escalade ; Grégory Chatel pour m'avoir partagé sa curiosité inépuisable et surtout ses plus belles trouvailles ; Zakaria Chemli pour m'avoir accompagné à l'autre bout du monde ; Cyrille Chenavier pour toujours comprendre ce que l'on sous-entend ; Christophe Cordero pour ses débats constructifs ; Samuele Girardo pour nos nombreuses heures à parler de la légende arthurienne ; Matthieu Josuat-Vergès pour ses réponses à mes questions ; Lucas Randazzo pour son esprit critique ; Vincent Vong pour ses connaissances musicales et pour m'avoir parlé de Françon-Viennot.

Il y a de nombreuses autres personnes que je souhaite remercier au sein du laboratoire, je pense à Claire David pour s'être occupée de moi dès mon arrivée ainsi qu'à Marc Zipstein qui m'a appris à devenir un bon enseignant et bien plus encore. Je remercie également Philippe Gambette, Revekka Kyriakoglou, Antoine Meyer, Carine Pivoteau, Dominique Revuz. J'ai une pensée particulière pour tous ces excellents moments partagés lors de nos

déjeuners quotidiens.

Je remercie également Séverine Giboz-Crosson, Corinne Palescandolo et Nathalie Rousseau pour leur accueil très chaleureux, leur disponibilité mais surtout leur efficacité pour organiser une mission même quand je tardais à fournir certains documents. Merci aussi à Patrice Hérault qui est toujours là pour trouver une solution à nos problèmes. Il y a également Sylvie Cach et Fatima De Freitas à l'école doctorale qui ont toujours su répondre très efficacement à mes très nombreuses questions administratives.

Sans oublier tous ces enseignants et collègues qui ont contribué à mon envie de faire de l'informatique, des mathématiques et de la recherche. Je pense en particulier à Nicolas Thiéry qui a su me donner goût à l'informatique et qui m'a présenté à Jean-Christophe Novelli. Je pense également à Thierry Appourchaux et Patrick Boumier avec qui j'ai pour la première fois été plongé dans le monde de la recherche.

Je souhaite remercier mes amis, la majorité d'entre eux étant déjà cité plus haut, je rajouterai Romain Mismar qui aura été mon colocataire pendant ces trois ans et avec qui on aura partagé bien plus que le fait d'être en thèse. Je remercie également ma famille qui m'a toujours soutenu dans ce choix de faire de la recherche : Bruno, Delphine, Anaïs et Lucas ainsi qu'Ivan, Hélène, Nino et Tom. Enfin, je souhaite remercier du fond du cœur ma conjointe Florine pour m'avoir encouragé, supporté et surtout accompagné pendant toutes ces années.

# Résumé - Abstract

## Combinatoire énumérative et algébrique autour du PASEP

Cette thèse se situe à l'interface de la combinatoire énumérative et algébrique et porte sur l'étude des probabilités du *processus d'exclusion partiellement asymétrique* (PASEP), un modèle physique de déplacement de particules sur une ligne finie.

Dans un premier temps, nous démontrons bijectivement une conjecture de Novelli-Thibon-Williams concernant l'interprétation combinatoire de coefficients de matrices de transition dans l'algèbre des *fonctions symétriques non-commutatives*. Plus précisément, ces matrices expriment les coefficients de changement de base des bases complètes et rubans d'une part vers les bases monomiales et fondamentales introduites par Tevlin d'autre part. Les coefficients de ces matrices donnent un raffinement des probabilités du PASEP et sont décrits en utilisant de nouvelles statistiques sur les permutations. La conjecture stipule que ce raffinement peut se formuler via des statistiques déjà connues dans le monde du PASEP. L'objet combinatoire central dans cette bijection est une *histoire de Laguerre*, un chemin du plan introduit par Viennot.

Nous nous intéressons ensuite à une généralisation du PASEP avec deux types de particules dans le modèle : le 2-PASEP. Nous donnons ainsi plusieurs interprétations combinatoires des probabilités de ce modèle. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle famille de chemins généralisant les *histoires de Laguerre* : les *histoires de Laguerre marquées*. Nous généralisons ensuite la *bijection de Françon-Viennot* entre les histoires de Laguerre et les permutations pour définir les *permutations partiellement signées* qui nous donneront une seconde interprétation combinatoire de ces probabilités.

Dans une troisième partie, nous développons dans le cadre du 2-PASEP l'analogie de la construction algébrique que Novelli, Thibon et Williams avaient mise en place pour le PASEP. Nous généralisons tout d'abord les travaux de Tevlin afin de définir des bases monomiales et fondamentales dans l'*algèbre des compositions segmentées*. Afin de décrire les matrices de changement de base entre ces bases et d'autres déjà connues dans cette algèbre, nous définissons une algèbre indexée par les permutations partiellement signées en utilisant les statistiques définies précédemment pour décrire la combinatoire du 2-PASEP. Nous définissons également des  $q$ -analogues de ces bases afin de faire le lien avec les probabilités du 2-PASEP en fonction du paramètre  $q$  de ce modèle.

Enfin, dans une dernière partie, en utilisant le fait que les permutations partiellement signées sont en bijection avec les *permutations segmentées*, nous nous inspirons des statistiques définies précédemment pour introduire des descentes sur ces objets et ainsi définir une généralisation des polynômes eulériens sur les permutations segmentées. Pour étudier ces polynômes, nous utilisons les outils algébriques développés dans la partie précédente.

## Enumerative and algebraic combinatorics related to the PASEP

This thesis lies at the confluence of enumerative and algebraic combinatorics and studies the probabilities of the *partially asymmetric exclusion process* (PASEP), a classical physical model of particles moving on a finite line.

First, we prove bijectively a conjecture of Novelli-Thibon-Williams concerning the combinatorial interpretation of the entries of the transition matrices between some bases of the *noncommutative symmetric functions algebra*. More precisely, these matrices correspond to the transition matrices of on the one hand, the complete and ribbon bases and on the other hand, the monomial and fundamental bases, both introduced by Tevlin. The coefficients of these matrices provide a refinement of the probabilities of the PASEP and are described using new statistics on permutations. This conjecture states that this refinement can also be described using classical statistics of the PASEP. The fundamental combinatorial object in this part is a Laguerre history, a path in the plane defined by Viennot.

In the second part, we study a generalization of the PASEP using two kinds of particles: the 2-PASEP. We provide in particular several combinatorial interpretations of the probabilities of this model. In order to do so, we define a new family of paths generalizing the *Laguerre histories*: the *marked Laguerre histories*. We also generalize the *Françon-Viennot bijection* between Laguerre histories and permutations to define *partially signed permutations* giving another combinatorial interpretation of these probabilities.

In a third part, we extend the algebraic construction of Novelli, Thibon, and Williams defined for the PASEP to the 2-PASEP. First, we generalize Tevlin's work in order to define a monomial basis and a fundamental basis on the algebra over *segmented compositions*. In order to describe the transition matrices between these bases and other bases already known in this algebra, we define an algebra indexed by partially signed permutations using the statistics previously defined to describe the combinatorics of the 2-PASEP. We also define some  $q$ -analogues of these bases related to the probabilities of the 2-PASEP according to the  $q$  parameter of this model.

Finally, in the last part, using the fact that partially signed permutations and *segmented permutations* are in bijection, we use the statistics defined previously to define descents on these objects and get a generalization of the Eulerian polynomials on segmented permutations. To study these polynomials, we use the algebraic tools introduced in the previous part.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1 Objets combinatoires	17
1.1.1 Mots et permutations	17
1.1.2 Compositions	19
1.1.3 Arbres binaires	20
1.1.4 Chemins	23
1.1.5 Chemins pondérés	24
1.1.6 Permutations segmentées	28
1.1.7 Compositions segmentées	28
1.2 Le PASEP	29
1.2.1 Définition	29
1.2.2 Interprétations combinatoires	31
1.3 Algèbres de Hopf combinatoires	33
1.3.1 Définitions	33
1.3.2 Algèbre des fonctions quasi-symétriques libres	38
1.3.3 Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives	40
1.3.4 Algèbre des compositions segmentées	43
1.3.5 Des bases de <b>Sym</b> en lien avec le PASEP	45
<b>2 Équidistribution de statistiques</b>	<b>53</b>
2.1 Des permutations vers les chemins	54
2.1.1 Les statistiques via la bijection de Françon-Viennot	54
2.1.2 Une involution sur les chemins de Dyck	56
2.2 Des fonctions sous-excédentes vers les chemins	57
2.2.1 Des fonctions sous-excédentes vers les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées	58
2.2.2 Des fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées vers les chemins de Dyck pondérés	63
2.3 Équivalence des statistiques	65
2.3.1 Preuves des conjectures	65
2.3.2 D'autres propriétés de cette bijection	66



2.4	Une variante pour les statistiques . . . . .	67
2.4.1	Une autre interprétation combinatoire de $RL_n(q)$ . . . . .	67
2.4.2	Arbres binaires de recherche . . . . .	68
2.4.3	Une bijection préservant les classes co-sylvestres . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Une interprétation du 2-PASEP</b> . . . . .	<b>73</b>
3.1	Permutations partiellement signées . . . . .	74
3.2	2-PASEP et matrix ansatz . . . . .	76
3.2.1	Distributions asymptotiques . . . . .	76
3.2.2	Interprétation en termes de chemins . . . . .	81
3.2.3	Des chemins vers les permutations partiellement signées . . . . .	83
3.3	Lien avec le PASEP et formule de récurrence . . . . .	85
3.3.1	Lien entre le 2-PASEP et le PASEP . . . . .	85
3.3.2	Description récursive des probabilités du 2-PASEP . . . . .	87
3.4	Une autre interprétation . . . . .	89
3.4.1	Les histoires de Laguerre larges marquées . . . . .	89
3.4.2	Retour aux permutations partiellement signées . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Analogie des bases de Tevlin</b> . . . . .	<b>97</b>
4.1	Des sous-algèbres de $\mathbf{FQSym}^{(2)}$ . . . . .	98
4.1.1	Algèbre des permutations segmentées . . . . .	99
4.1.2	Algèbre des permutations partiellement signées . . . . .	100
4.1.3	Lien avec l'algèbre des compositions segmentées . . . . .	101
4.2	Bases de Tevlin . . . . .	103
4.2.1	Définition . . . . .	103
4.2.2	Matrices de transition . . . . .	108
4.3	Un $q$ -analogue de $\mathbf{SCQSym}$ . . . . .	117
4.3.1	Les matrices $M(P(q), M)$ et $M(R(q), M)$ . . . . .	117
4.3.2	Les matrices $M(P(q), L(q))$ et $M(R(q), L(q))$ . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Nombres eulériens généralisés</b> . . . . .	<b>129</b>
5.1	Nombres eulériens généralisés . . . . .	130
5.1.1	Triangle des nombres eulériens généralisés . . . . .	130
5.1.2	Polynômes eulériens généralisés . . . . .	136
5.2	Analogie non-commutatif . . . . .	142
5.2.1	Définition et série génératrice . . . . .	142
5.2.2	Applications . . . . .	146
5.2.3	Identités de Worpitzky . . . . .	148
	<b>Perspectives</b> . . . . .	<b>153</b>

# Introduction

## Avant-propos

La combinatoire est un sujet de recherche très vaste qui peut être défini comme l'étude des ensembles finis d'objets. Une branche de la combinatoire est la *combinatoire énumérative* qui consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble et qui a intéressé de nombreux mathématiciens depuis des siècles. On peut donner par exemple le nombre de façons de couper un ensemble en deux ou d'asseoir  $n$  personnes autour d'une table. Ces problèmes ont souvent eu historiquement pour origine des calculs de probabilités.

Une fois que l'on sait que deux ensembles d'objets sont comptés par les mêmes nombres, il est souvent intéressant d'établir une correspondance entre ces deux ensembles. Il s'agit des problèmes couverts par la *combinatoire bijective*.

La *combinatoire algébrique* cherche quant à elle à définir une structure sur ces objets en utilisant leurs propriétés naturelles pour définir des *produits* et/ou des *coproduits*. En effet, il existe souvent des façons naturelles d'assembler des objets combinatoires et on peut alors s'en servir pour définir un produit dans une algèbre basée sur nos objet. Étudier cette algèbre nous donne alors une nouvelle approche pour étudier notre classe combinatoire ; elle peut également aboutir à de nouvelles formules énumératives ainsi qu'à de nouvelles approches pour construire une bijection entre deux classes combinatoires en utilisant la structure induite par l'étude algébrique des deux classes. À l'inverse, il est possible de s'inspirer des formules énumératives connues d'une classe combinatoire ou une bijection vers une autre classe combinatoire afin de définir une structure algébrique associée qui rende compte de ces propriétés.

## Objets catalans

Parmi les suites de nombres qui comptent des objets combinatoires, une des plus présentes est la suite des *nombres de Catalan* où le  $n$ -ième nombre de Catalan  $C_n$  est égal à  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Ils furent définis par Euler pour énumérer les façons de découper un  $(n+2)$ -gone en triangles. Eugène Charles Catalan montra quant à lui que ces nombres comptent également le nombre de parenthésages corrects d'une expression. Aujourd'hui, les nombres de Catalan sont connus pour compter le nombre d'*arbres binaires* ou de *chemins de Dyck* et sont impliqués dans de très nombreux domaines de recherche. La diversité d'objets comptés par ces nombres permet d'étudier cette suite de nombres de façons très diffé-

rentes. Par exemple, en utilisant la structure récursive des arbres binaires, on obtient simplement l'équation  $G(x) = 1 + xG(x)^2$  vérifiée par la série génératrice des nombres de Catalan :  $G(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$  tandis que les chemins de Dyck sont plus adaptés pour démontrer bijectivement que  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

## Permutations

Les *permutations* sont au cœur de l'étude de nombreux domaines des mathématiques. En combinatoire, les permutations sont vues comme les différents arrangements d'un nombre donné d'objets. Par exemple, l'ordre dans lequel des coureurs arrivent après une course est une permutation. Nous représentons les permutations de taille  $n$  comme les arrangements des nombres de 1 jusqu'à  $n$  et il y a  $n!$  permutations de taille  $n$ . Il s'agit d'un objet central en combinatoire car de très nombreux problèmes se ramènent à compter des permutations vérifiant certaines propriétés. Ainsi, on peut par exemple démontrer que le  $n$ -ième nombre de Catalan est égal au nombre de permutations évitant n'importe quel *motif* de taille 3.

Il est également possible d'interpréter les permutations comme les bijections de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  dans lui-même ce qui définit naturellement une structure de groupe sur cet ensemble que l'on appelle le groupe symétrique, et qui apporte de nouvelles approches pour travailler sur les problèmes énumératifs associés aux permutations. De plus, en 1854, Cayley énonce que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique et relance l'intérêt pour la compréhension de ce groupe. C'est dans cette optique que la compréhension des représentations irréductibles du groupe symétrique a occupé de grands mathématiciens comme Dedekind et Frobenius. On sait aujourd'hui que la description des caractères irréductibles du groupe symétrique est en lien étroit avec la combinatoire des *tableaux de Young* et de l'algèbre des *fonctions symétriques*.

Les groupes symétriques peuvent également être vus comme les cas les plus simples de *groupes de Coxeter* : il s'agit des groupes de type  $A$ . Ainsi, une grande partie de la théorie du groupe symétrique se généralise aux autres groupes de Coxeter et on s'intéressera naturellement à la combinatoire de ces groupes. C'est une des motivations de l'introduction des *permutations signées*, les permutations telles que chaque valeur possède un signe positif ou négatif. Il y a donc  $2^n n!$  permutations signées de taille  $n$ .

## Histoires de Laguerre

Les chemins du quart de plan supérieur sont à l'origine de nombreux travaux de combinatoire. On peut ainsi par exemple mentionner les *chemins de Dyck* ou les *chemins de Motzkin*. Ces derniers sont les chemins du quart de plan supérieur partant de l'origine et arrivant au point  $(n, 0)$  en n'utilisant que des pas montants, descendants et horizontaux. Les chemins de Motzkin pondérés apparaissent naturellement dans l'étude des *polynômes orthogonaux* [Vie83, Fla80, FV79]. Plus précisément, le  $n$ -ième moment d'une mesure associée à n'importe quelle famille de polynômes orthogonaux est égal au nombre de chemins de Motzkin pondérés dont la pondération vérifie des contraintes décrites par la récurrence de cette suite de polynômes. Nous nous intéressons au cas particulier des *histoires*

de Laguerre qui sont des chemins de Motzkin pondérés avec certaines contraintes et qui permettent d’interpréter les moments des  $q$ -polynômes de Laguerre. La description des moments des polynômes orthogonaux peut être rendue plus précise que celle donnée par le comptage du nombre de chemins de longueur  $n$ . En effet, si  $(\mu_n)$  est la suite des moments associée à la suite des polynômes de  $q$ -Laguerre, alors la série génératrice  $\sum_n \mu_n t^n$  peut être vue comme une fraction continue dont les coefficients comptent le nombre d’histoires de Laguerre où l’on fixe le nombre de pas de certains types.

L’intérêt pour les histoires de Laguerre provient également du fait qu’elles sont énumérées par  $n!$  et en bijection avec les permutations via les bijections de Françon-Viennot [FV79] ou de Foata-Zeilberger [FZ90]. Ces bijections permettent de comprendre les moments des polynômes de Laguerre directement sur les permutations, ce qui permet de faire le lien entre les histoires de Laguerre et l’étude combinatoire des probabilités des *processus d’exclusion*.

## Processus d’exclusion

Le processus d’exclusion asymétrique (ASEP) est un modèle d’interactions de particules introduit à la fin des années 1960 en biologie [MGP68] et en mathématiques [Spi70]. Les particules peuvent se déplacer vers la gauche ou vers la droite dans une chaîne finie ainsi que rentrer ou sortir de la chaîne aux extrémités. Dans le cadre le plus général, il y a cinq paramètres qui déterminent les probabilités de déplacement des particules. Dans la chaîne, la probabilité de se déplacer vers la gauche est  $q$  fois celle de se déplacer vers la droite. Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  correspondent aux ratios entre, d’une part, la probabilité de se déplacer à droite dans la chaîne et, d’autre part et respectivement, les probabilités de rentrer à gauche, sortir à droite, sortir à gauche ou rentrer à droite de la chaîne. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement au cas  $\gamma = \delta = 0$ , et on parle alors de processus d’exclusion partiellement asymétrique (PASEP).

Bien qu’il s’agisse d’un modèle simple, il a attiré l’attention de nombreux physiciens et peut être utilisé comme un modèle pour la traduction génétique dans la synthèse des protéines [MGP68], l’étude des flux de trafic [HHSW12], ou dans la formation de chocs [DLS97]. Ce modèle a été entièrement résolu en utilisant le *matrix ansatz* [DEHP93] que nous détaillerons dans le chapitre 1. Le ASEP a également intéressé de nombreuses personnes en combinatoire. En effet, Shapiro et Zeilberger [SZ82] ont démontré que dans le cas totalement asymétrique où les particules ne se déplacent que vers la droite, les probabilités font sortir les nombres de Catalan. On peut également citer les travaux de Duchi et Schaeffer [DS05] concernant le cas totalement asymétrique. De nombreuses approches ont depuis donné des interprétations des probabilités du cas partiellement asymétrique en montrant que ces probabilités font intervenir les nombres  $n!$ . De nombreux objets combinatoires différents ont ainsi été utilisés pour décrire les probabilités en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$ , tels que les tableaux de permutations, les permutations, les *histoires de Laguerre*, ... [MV15, Cor07, SW07, JV11].

Il est possible de généraliser le ASEP en traitant deux types de particules, des particules “lourdes” qui sont soumises aux mêmes contraintes que les particules du ASEP, et des particules “légères” qui ne peuvent ni entrer ni sortir de la chaîne. Dans ce cas, on parle

de 2-ASEP. Encore une fois, ce modèle a été résolu en utilisant un matrix ansatz [Uch08]. D'un point de vue combinatoire, plusieurs approches pour interpréter les probabilités de ce modèle ont été utilisées [Man15, MV18, MV15] et ont donné lieu à des généralisations d'objets classiques, par exemple les *tableaux multi-Catalan*, les *tableaux alternatifs rhomboïdaux* ou les *assemblées de permutations*.

## Algèbres de Hopf combinatoires

Nous disons d'une algèbre qu'elle est combinatoire si elle est graduée, de dimension finie en chaque degré et si cette dimension compte le nombre d'objets d'une taille donnée d'une famille d'objets combinatoires. Il existe souvent des façons naturelles de composer deux objets combinatoires pour en former un ou plusieurs de taille plus grande. Par exemple, étant données deux *partitions* d'entiers  $n$  et  $m$ , autrement dit deux suites  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$  et  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$  vérifiant  $\sum_i \lambda_i = n$  et  $\sum_j \mu_j = m$ , on peut construire une partition de l'entier  $n + m$  en insérant les parts de  $\mu$  dans celles de  $\lambda$  pour avoir une suite décroissante. On peut construire une autre partition de  $n + m$  en sommant terme à terme les parts de  $\lambda$  et  $\mu$ . Ces différentes façons de composer des objets ensemble permettent de définir des produits dans une algèbre. De même, il existe également des façons de décomposer un objet combinatoire en deux. C'est ce que nous utilisons pour définir un coproduit. Dans l'exemple des partitions, étant donnée  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ , on considère par exemple toutes les façons d'obtenir  $\nu$  par insertion des parts de  $\mu$  dans celles de  $\lambda$ . Une algèbre de Hopf est une algèbre munie d'un produit et d'un coproduit gradués vérifiant quelques propriétés supplémentaires. Dans le cas des algèbres de Hopf combinatoires, ces propriétés supplémentaires sont automatiquement vérifiées. Le premier exemple d'algèbre de Hopf combinatoire est celui des fonctions symétriques, qui sont indexées par les partitions d'entiers, où le coproduit repose sur le dédoublement d'alphabet que nous illustrerons au chapitre 1.

En 1995, Gelfand, Krob, Lascoux, Leclerc, Retakh et Thibon définissent un analogue non commutatif de l'algèbre des fonctions symétriques [GKL<sup>+</sup>95] : l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives **Sym**. La définition de cette algèbre est à l'origine de l'intérêt pour les algèbres de Hopf en combinatoire et de nombreux papiers suivront celui-ci dans l'étude de ces algèbres de Hopf combinatoires [KLT97, DKKT97, KT97, KT99, DHT02]. Ces algèbres permettent ainsi de remplacer les séries numériques par des séries formelles indexées par les objets combinatoires directement, et en considérant les coefficients de ces séries, une fois exprimées sur différentes bases d'une autre algèbre, nous obtenons de nouvelles informations et de nouvelles propriétés vérifiées par celles-ci. On peut par exemple démontrer très naturellement l'expression de la série génératrice des *polynômes eulériens* en travaillant avec un analogue non-commutatif, défini comme une somme de permutations, et en l'exprimant sur les différentes bases de **Sym**.

## Contexte

Ce mémoire porte essentiellement sur l'étude des *processus d'exclusion* abordés de différents points de vues : à la fois d'un point de vue bijectif, en nous intéressant aux interprétations combinatoires de ces objets, mais également d'un point de vue algébrique de par leur lien avec la théorie des *algèbres de Hopf*. Ces points de vue ont déjà fait l'objet de travaux passés que nous allons succinctement rappeler.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, de nombreuses interprétations combinatoires des probabilités du PASEP ont été apportées au cours de ces dernières années. En particulier, Corteel et Williams ont défini les *tableaux de permutations* dans ce but [CW07b]. Les bijections de Steingrímsson et Williams [SW07], ainsi que de Corteel et Nadeau [CN09], permettent d'exprimer les probabilités du PASEP pour  $\alpha = \beta = 1$  en termes de *croisements* et d'*excédences faibles* d'une part et en termes de *valeurs de descentes* et de *motifs 31-2* d'autre part. Dans un second temps, dans [JV11], Josuat-Vergès utilise les *histoires de Laguerre* pour décrire la série génératrice des probabilités du PASEP pour les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$ , et applique la bijection de Françon-Viennot pour donner une description de cette même série sur les permutations en utilisant des statistiques similaires à celles de Corteel et Nadeau.

Indépendamment de ces travaux, Tevlin [Tev07] définit deux nouvelles bases de l'*algèbre des fonctions symétriques non-commutatives*, une *base monomiale* et une *base fondamentale*, et conjecture que l'expression des bases *complètes* et des *rubans* sur ces nouvelles bases ont des coefficients entiers positifs. Dans [HNTT09], les auteurs démontrent cette conjecture en décrivant combinatoirement ces coefficients via la même statistique de valeurs de descentes sur les permutations que celle utilisée par Corteel et Nadeau, et les coefficients des matrices de changement de bases induisent ainsi un raffinement des probabilités du PASEP pour  $\alpha = \beta = q = 1$ . Cette observation mène Novelli, Thibon et Williams à définir un  $q$ -analogue de l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives de sorte que l'analogie des coefficients précédents corresponde à un raffinement des probabilités du PASEP pour une valeur générale du paramètre  $q$ .

Dans le cadre du 2-PASEP, Mandelshtam et Viennot définissent une généralisation des tableaux alternatifs : les *tableaux alternatifs rhomboïdaux* [MV15]. Ils utilisent ces tableaux pour décrire les probabilités du 2-PASEP pour les 3 paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$ . Dans un second temps, les mêmes auteurs construisent une bijection entre ces objets et les *assemblées de permutations* dans [MV18], sur lesquels ils définissent des statistiques permettant de décrire la combinatoire du 2-PASEP à  $q = 1$  en utilisant des statistiques de *positions de reculs*, de *maximum de gauche à droite* et de *maximum de droite à gauche*.

## Contributions et plan du mémoire

Ce mémoire est organisé en 5 chapitres. Le chapitre 1 nous permet de rappeler les définitions des objets de base de nos travaux ainsi que les notations utilisées les concernant. Nous présentons succinctement les travaux en lien direct avec les résultats présents dans ce mémoire. Nous commençons par définir les *mots*, les *permutations*, et différents types de *chemins pondérés*. Nous donnons ensuite les principaux éléments de théorie sur le processus d'exclusion asymétrique dont nous aurons besoin. Nous présentons enfin les rappels essentiels sur la théorie des algèbres de Hopf combinatoires, en détaillant les exemples des algèbres qui seront utilisées lors de l'application à l'étude du PASEP.

Dans le chapitre 2, nous démontrons bijectivement une conjecture de Novelli, Thibon et Williams [NTW10] donnant une nouvelle interprétation combinatoire de coefficients dans des matrices de changement de bases de l'algèbre des *fonctions symétriques non commutatives*. Ces coefficients raffinent les probabilités stationnaires du PASEP. Pour démontrer ce résultat, nous construisons une nouvelle bijection des permutations vers elles-mêmes en passant par différents objets combinatoires. En plus de démontrer la conjecture attendue, la bijection que nous construisons a la propriété de préserver les *classes co-sylvestres* des permutations. Ces résultats ont donné lieu à un article publié [Num18a].

Dans le chapitre 3, nous nous inspirons d'interprétations combinatoires des probabilités du PASEP sur les permutations afin de donner une interprétation combinatoire des probabilités du 2-ASEP pour des valeurs générales du paramètre  $q$  sur des objets généralisant les permutations. Pour ce faire, nous définissons les *permutations partiellement signées* et les *histoires de Laguerre marquées*, et montrons qu'elles sont en bijection. Nous donnons des statistiques sur ces objets pour décrire la combinatoire du 2-ASEP. Nous donnons également une formule de récurrence, vérifiée par les probabilités stationnaires, qui implique une formule explicite de ces probabilités en utilisant un résultat du chapitre suivant. Dans un second temps, nous généralisons une bijection du chapitre précédent pour définir les *histoires de Laguerre larges marquées*, et obtenons une description de la combinatoire du 2-ASEP sur ces objets. Ces résultats constituent une version détaillée et développée de la première partie d'un papier court [CN17].

Les permutations partiellement signées sont en bijection avec les *permutations segmentées*. Au chapitre 4, nous définissons des algèbres indexées par ces deux familles. En utilisant les statistiques définies au chapitre précédent, nous définissons des analogues des bases monomiales et fondamentales de Tevlin [Tev07] dans l'algèbre **SCQSym** indexée par les *compositions segmentées*, et nous décrivons l'expression d'autres bases sur celles-ci. Ces matrices sont à coefficients entiers positifs, et nous montrons qu'elles fournissent un raffinement des probabilités du 2-PASEP. Dans le but de décrire ce raffinement pour des valeurs de  $q$  générales, nous définissons des  $q$ -analogues des bases précédentes et nous étudions leurs matrices de changement de base. Ces résultats constituent une version détaillée et développée de la deuxième partie du papier court [CN17].

Au chapitre 5, nous définissons une généralisation des *polynômes eulériens* en considérant une statistique de descentes sur les permutations segmentées. Nous établissons plu-

siens propriétés vérifiées par ces polynômes et donnons une forme explicite de leur série génératrice. Dans un second temps, nous étudions cette série génératrice en définissant un analogue non commutatif de ces polynômes, en utilisant l'algèbre sur les permutations segmentées définie au chapitre précédent. Ces résultats ont été présentés dans un papier court [[Nun18b](#)].





# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Objets combinatoires

#### 1.1.1 Mots et permutations

Les mots et les permutations sont des objets de base en combinatoire. De nombreuses opérations sur des objets plus complexes peuvent très souvent s'exprimer à l'aide des mots et de l'opération de concaténation. Nous aurons besoin de certaines notions et opérations classiques que nous définissons dès maintenant.

Étant donné un alphabet  $A$ , on note  $A^*$  l'ensemble des mots sur  $A$ . Par exemple, si  $A = \{a, b\}$  on a  $A^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$  où  $\epsilon$  désigne le mot vide. La taille d'un mot  $u$ , notée  $|u|$ , est donnée par son nombre de lettres. L'ensemble des mots de taille  $n$  sur  $\{a, b\}$  est fini et de cardinal  $2^n$ .

Soit  $u = u_1 \dots u_n$  un mot de taille  $n$ . Un *facteur* de  $u$  est un mot  $v = u_i u_{i+1} \dots u_{i+m}$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $i + m \leq n$ . Le mot  $u$  s'écrit alors  $u = u' v u''$  où  $u'$  et  $u''$  sont deux autres facteurs de  $u$ . Si  $v$  est placé au début de  $u$ , c'est-à-dire si  $v = u_1 \dots u_m$ , on dit que  $v$  est un *facteur gauche* ou *préfixe* de  $u$ . De même, si  $v$  est placé à la fin de  $u$ , c'est-à-dire si  $v = u_{n-m} \dots u_n$ , on dit que  $v$  est un *facteur droit* ou *suffixe* de  $u$ . Un *sous-mot* de  $u$  est un mot  $v = u_{j_1} \dots u_{j_m}$  où  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$ . Autrement dit, le sous-mot  $v$  est composé d'un sous-ensemble des lettres de  $u$  dont on a conservé l'ordre. Par exemple, si  $u = abcba$  alors  $aab$  est un préfixe,  $ba$  un suffixe,  $bc$  un facteur et  $abb$  un sous-mot de  $u$ . Les préfixes et suffixes sont des facteurs particuliers, et les facteurs sont des sous-mots particuliers. Le mot vide  $\epsilon$  est à la fois préfixe, suffixe, facteur et sous-mot de n'importe quel mot  $u$ . On parle de facteur (resp. préfixe, suffixe ou sous-mot) propre d'un mot  $u$  quand on n'inclut pas le mot vide ni  $u$  lui-même. La restriction d'un mot  $u$  à un ensemble  $S = \{i_1, \dots, i_k\}$  (notée  $u|_S$ ) est le mot obtenu à partir de  $u$  en retirant les valeurs non présentes dans  $S$ . Par exemple, si  $u = 12421534$ , on a  $u|_{\{1,3,4\}} = 14134$ .

**Définition 1.1.1.** *Un mot tassé est un mot  $u$  tel que si  $i > 1$  est une valeur de  $u$  alors  $i-1$  est également une valeur de  $u$ . En particulier, 1 est toujours une valeur de  $u$ .*

Par exemple, le mot  $u = 342142$  est un mot tassé tandis que  $v = 1124225$  n'en est pas

un car 4 est présent dans  $v$  mais pas 3. Il y a 13 mots tassés de taille 3 :

$$\{111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321\} \quad (1.1)$$

**Définition 1.1.2.** Une permutation  $\sigma$  de longueur  $n$  est un mot  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  où toutes les valeurs de 1 à  $n$  sont présentes une et une seule fois. On note  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de longueur  $n$  et  $\mathfrak{S}$  l'ensemble de toutes les permutations.

Par exemple, les permutations de taille 3 sont 123, 132, 213, 231, 312 et 321. L'ensemble des permutations de taille  $n$  est compté par  $n!$ .

Si on considère une permutation comme la fonction  $\sigma$  telle que  $\sigma(i) = \sigma_i$  alors  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe des bijections de  $[n] = \{1, \dots, n\}$  dans lui-même. En dehors de la notion d'inverse, nous n'utiliserons pas cette structure de groupe.

Toutes les notions définies sur les mots s'appliquent aussi aux mots tassés et aux permutations. Par exemple, la permutation 52431 admet entre autres le préfixe 52, le suffixe 431, le facteur 24 et le sous-mot 231. On remarque qu'en général ces mots ne sont pas eux-mêmes des permutations. Une solution pour rester dans la même classe combinatoire est de *standardiser* les mots.

**Définition 1.1.3.** Soit  $u = u_1 \dots u_n$  un mot de taille  $n$  sur un alphabet ordonné  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  (par exemple, les entiers positifs). On dit que  $u$  admet une inversion  $(i, j)$  avec  $i < j$  si  $u_i > u_j$ . Le standardisé de  $u$ , noté  $\text{std}(u)$ , est l'unique permutation  $\sigma$  de taille  $n$  dont les inversions sont exactement les inversions de  $u$ .

Par exemple, si  $u = baab$  sur l'alphabet ordonné  $A = \{a < b\}$ , alors  $u$  admet deux inversions  $(1, 2)$  et  $(1, 3)$ . La seule permutation de taille 4 ayant exactement ces deux inversions est  $\text{std}(u) = 3124$ . Algorithmiquement parlant, la standardisation revient à numéroter les lettres de  $u$  des plus petites lettres vers les plus grandes lettres et de la gauche vers la droite.

Par exemple, pour le mot  $u = baab$ , on numérote le premier  $a$  par 1 puis le deuxième  $a$  par 2. Puisqu'il n'y a plus de  $a$ , on passe alors aux  $b$  que l'on commence à numéroter par 3 pour celui de gauche et par 4 pour celui de droite. Ainsi, on obtient bien la permutation 3124. On illustre la standardisation sur un exemple plus grand en figure 1.1.

**Définition 1.1.4.** Soit  $\sigma$  une permutation de taille  $n$ . Une descente de  $\sigma$  est une position  $i < n$  telle que  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ . Un recul est une valeur  $\sigma_i$  telle que  $1 + \sigma_i$  est à sa gauche, ou de manière équivalente, où  $\sigma_i$  est une descente de  $\sigma^{-1}$ .

Par exemple, la permutation  $\sigma = 25413$  a pour descentes 2 et 3 et pour reculs les valeurs 1, 3 et 4. Son inverse  $\sigma^{-1} = 41532$  a pour descentes 1, 3 et 4 et pour reculs 2 et 3.

**Définition 1.1.5.** On dit qu'une permutation  $\sigma$  admet comme motif la permutation  $\mu$  s'il existe un sous-mot de  $\sigma$  dont le standardisé est la permutation  $\mu$ . Si  $\sigma$  n'admet pas le motif  $\mu$ , on dit qu'elle évite le motif.

$$\begin{array}{cccccccc}
h & h & a & b & d & b & b & a & a \\
& & 1 & & & & & 2 & 3 \\
\\
h & h & a & b & d & b & b & a & a \\
& & 1 & 4 & & 5 & 6 & 2 & 3 \\
\\
h & h & a & b & d & b & b & a & a \\
& & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 3 \\
\\
h & h & a & b & d & b & b & a & a \\
8 & 9 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 3
\end{array}$$

$$\text{std}(hhabdbbaa) = 891475623$$

FIGURE 1.1 – Standardisé du mot  $hhabdbbaa$  : on numérote d’abord les  $a$ , puis les  $b$ , et ainsi de suite.

Par exemple, la permutation  $\sigma = 4213$  admet le motif 312 car 413 est sous-mot de  $\sigma$  et  $\text{std}(413) = 312$ . On parlera de *motif à tiret* lorsque l’on représente  $\mu$  avec un tiret entre certaines valeurs. Attention, dans ce cas,  $\sigma$  admet  $\mu$  comme motif si les lettres de  $\mu$  non séparées par un tiret forment un facteur de  $\sigma$ . Par exemple, la permutation 4123 admet deux motifs 31-2 provenant des sous-mots 412 et 413 car les lettres 4 et 1 sont adjacentes dans  $\sigma$ . En revanche, le sous-mot 423 ne forme pas de motif 31-2 puisque 4 et 2 ne sont pas adjacentes.

On note  $\text{tot}(\sigma)$  le nombre de motifs 31-2 d’une permutation et  $\text{tot}_k(\sigma)$  le nombre de motifs 31-2 tels que la valeur  $k$  est la dernière lettre du motif.

### 1.1.2 Compositions

**Définition 1.1.6.** Une composition d’un entier  $n$  est une suite d’entiers  $I = (i_1, \dots, i_r)$  strictement positifs de somme  $n$ , on le note  $I \models n$ . L’entier  $r$  est appelé la taille de la composition et les  $i_k$  constituent les parts de  $I$ .

Lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté, on oubliera les parenthèses et les virgules. Par exemple, on note 1312 la composition  $(1, 3, 1, 2)$ .

Il y a exactement  $2^{n-1}$  compositions de taille  $n$  pour  $n > 0$ . On peut le voir au travers de la bijection suivante entre les compositions de  $n$  et les sous-ensembles de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ .

**Définition 1.1.7.** Soit  $I = (i_1, \dots, i_r)$  une composition de  $n$ . L’ensemble des descentes de  $I$  est l’ensemble  $\{i_1, i_1 + i_2, \dots, i_1 + i_2 + \dots + i_{r-1}\}$ .

La composition miroir d’une composition  $I$  (notée  $\bar{I}$ ) est la composition obtenue en inversant l’ordre des parts de  $I$ .

L’indice majeur d’une composition  $I$  (noté  $\text{maj}(I)$ ) est la somme des valeurs de  $\text{Des}(I)$ .

Par exemple, l'ensemble des descentes de  $I = 1211$  est  $\{1, 3, 4\}$ , son indice majeur est égal à 8 et la composition  $\bar{I}$  est égale à 1121.

Étant donné un ensemble  $S$ , il y a une infinité de permutations ayant leur ensemble des descentes égal à  $S$ . Afin de pouvoir définir des algèbres graduées par la suite, on utilisera une composition pour représenter l'ensemble des permutations d'une taille donnée ayant des descentes fixées.

**Définition 1.1.8.** La composition des descentes d'une permutation  $\sigma$  de taille  $n$  (noté  $\text{Des}(\sigma)$ ) est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est l'ensemble des descentes de  $\sigma$ . De même, on définit la composition des reculs de  $\sigma$  (noté  $\text{Rec}(\sigma)$ ) comme la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est l'ensemble des reculs de  $\sigma$ .

Par exemple, la composition des descentes de  $\sigma = 25413$  est  $\text{Des}(\sigma) = 212$  et sa composition des reculs  $\text{Rec}(\sigma)$  est 1211. La notion de composition des descentes se généralise à n'importe quel mot sur un alphabet ordonné. Par exemple, la composition des descentes de  $u = 661242211$  est 2322.

**Définition 1.1.9.** L'ordre de raffinement inverse des compositions (noté  $\succeq$ ) est la relation d'ordre telle que  $I \succeq J$  si et seulement si  $\text{Des}(I) \supseteq \text{Des}(J)$ . Dans ce cas, on dit que  $I$  est plus fine que  $J$ .

Par exemple,  $121213 \succeq 424$ . De manière équivalente, on a  $I \succeq J$  si et seulement si  $I$  peut être obtenue à partir de  $J$  en sommant des valeurs consécutives de  $J$ .

On définira dans une prochaine section une algèbre indexée par les compositions. Afin de définir plus simplement les produits de ses bases, on aura besoin des opérations binaires suivantes sur les compositions.

**Définition 1.1.10.** Soient  $I = (i_1, \dots, i_r)$  et  $J = (j_1, \dots, j_s)$  deux compositions. On note  $I \cdot J$  leur concaténation  $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s)$  et  $I \triangleright J := (i_1, \dots, i_{r-1}, i_r + j_1, j_2, \dots, j_s)$ .

Par exemple, pour  $I = 2113$  et  $J = 13$  on a  $I \cdot J = 211313$  et  $I \triangleright J = 21143$ .

### 1.1.3 Arbres binaires

Un *arbre binaire* se définit récursivement comme étant soit l'arbre vide  $\emptyset$ , soit un couple d'arbres binaires appelés *sous-arbre gauche* et *sous-arbre droit* greffés sur un nœud racine. On appelle *feuille* un nœud dont les deux sous-arbres sont vides. Si  $T$  est un arbre formé de la racine  $x$  et respectivement de sous-arbres gauche et droit  $A$  et  $B$ , on écrit  $T = x(A, B)$ . Cette notation est illustrée en figure 1.2. Dans ce mémoire, la racine des arbres est représentée en haut et ses sous-arbres sont dessinés en dessous d'elle.

Les arbres binaires à  $n$  nœuds sont comptés par le  $n$ -ième nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Il s'agit de la suite A000108 dans [Slo].

Nous manipulerons les *étiquetages* des arbres binaires, c'est-à-dire les façons d'associer une valeur à chaque sommet de l'arbre. Les arbres binaires en figure 1.3 sont respectivement non étiqueté à gauche et étiqueté à droite.

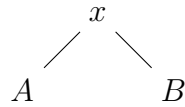


FIGURE 1.2 – Illustration de la structure récursive de l'arbre binaire  $T = x(A, B)$  où  $x$  est la racine de l'arbre,  $A$  est le sous-arbre gauche de  $x$  et  $B$  son sous-arbre droit.

**Définition 1.1.11.** *Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire étiqueté vérifiant pour chaque nœud  $x$  la condition suivante : si  $x$  est étiqueté par  $k$  alors les nœuds du sous-arbre gauche (resp. droit) de  $x$  sont étiquetés par des entiers inférieurs ou égaux (resp. strictement supérieurs) à  $k$ .*

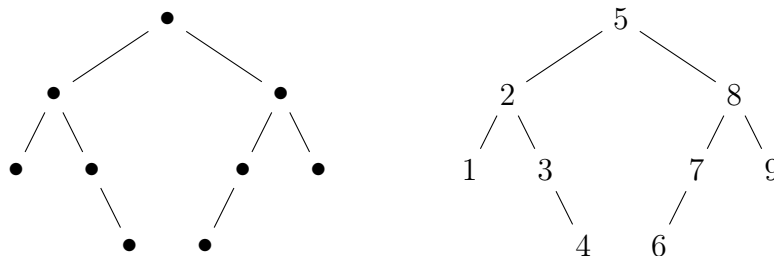


FIGURE 1.3 – Exemple d'un arbre binaire et de l'arbre binaire de recherche standard de même forme.

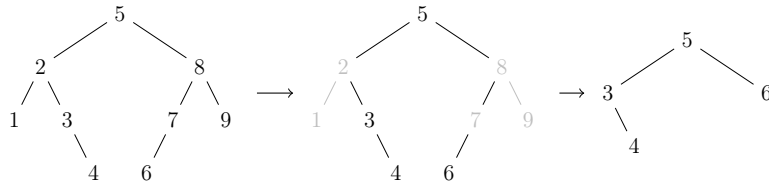
Un exemple d'arbre binaire de recherche est donné en figure 1.3. Pour un arbre binaire donné de taille  $n$ , il n'existe qu'un seul étiquetage, dit *standard*, utilisant les entiers de 1 à  $n$  une fois chacun, tel que le résultat soit un arbre binaire de recherche. On identifie donc les arbres binaires non étiquetés et les arbres binaires de recherche standard.

**Définition 1.1.12.** *La restriction d'un arbre binaire de recherche à un intervalle est l'arbre obtenu en retirant toutes les valeurs non comprises dans cet intervalle puis en effaçant les sous-arbres sans nœud, et en remontant les sous-arbres n'ayant pas de père jusqu'à obtenir un arbre binaire de recherche.*

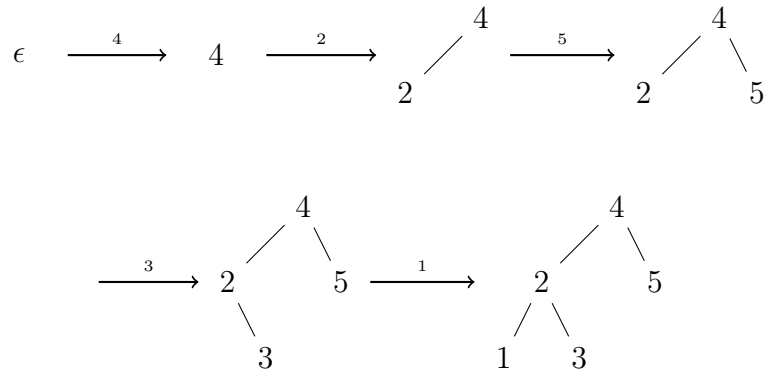
Cette description est bien définie car lorsqu'un nœud est retiré, s'il n'est pas dans l'intervalle désiré, tout son sous-arbre gauche ou tout son sous-arbre droit ne l'est pas non plus. Ainsi, il y aura au plus un sous-arbre qui remontera à cette position. De plus, remonter un sous-arbre ne change pas la structure d'arbre binaire de recherche.

Un exemple de restriction d'un arbre binaire de recherche à un intervalle est donné en figure 1.4.

La structure d'arbre binaire de recherche est utilisée couramment en algorithmique pour le stockage d'ensembles ordonnés. En particulier, l'algorithme récursif d'insertion dans un

FIGURE 1.4 – Restriction d’un arbre binaire de recherche à l’intervalle  $\{3, 4, 5, 6\}$ .

arbre binaire de recherche est bien connu. L’insertion de l’entier  $k$  dans l’arbre  $T$  se fait de la façon suivante : si  $T$  est vide alors  $k$  devient la racine de  $T$ , sinon, si  $k \leq \text{racine}(T)$  (resp.  $k > \text{racine}(T)$ ) on insère  $k$  dans le sous-arbre gauche (resp. droit) de  $T$ .

FIGURE 1.5 – Insertions successives des valeurs de  $\sigma = 13524$  de droite à gauche dans un arbre binaire de recherche.

On utilise cet algorithme pour associer un arbre binaire à chaque permutation : on insère successivement les entiers de la permutation *de la droite vers la gauche* dans un arbre  $T$  vide au départ. Ce processus est illustré en figure 1.5.

**Définition 1.1.13.** *Soit  $\sigma$  une permutation. L’ensemble des permutations ayant le même arbre binaire de recherche associé que  $\sigma$  est appelé la classe sylvestre de  $\sigma$ . On définit la classe co-sylvestre de  $\sigma$  comme l’ensemble des permutations ayant le même arbre binaire de recherche associé que  $\sigma$  quand on lit les valeurs de gauche à droite dans l’algorithme précédent.*

Les classes sylvestres sont initialement introduites dans [LR98] afin de définir une algèbre indexée par les arbres binaires à partir de l’algèbre **FQSym** indexée par les permutations que nous verrons plus loin. Dans un second temps, les auteurs de [HNT05] montrent que ces classes peuvent être construites à partir d’une règle de réécriture sur les mots et définissent ainsi la *congruence sylvestre*. Noter que deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  sont dans la

même classe sylvestre si et seulement si les permutations retournées sont dans la même classe co-sylvestre. Par exemple, la classe sylvestre de 2413 est  $\{2143, 2413, 4213\}$  et la classe co-sylvestre de 3142 est  $\{3412, 3142, 3124\}$ .

### 1.1.4 Chemins

**Définition 1.1.14.** *Un chemin de Dyck de longueur  $n$  est un chemin dans le plan ayant  $n$  pas montants et  $n$  pas descendants, partant de l'origine et ne passant jamais sous l'axe des abscisses.*

Le nombre de chemins de Dyck est également donné par le  $n$ -ième nombre de Catalan  $C_n$ . Un exemple de chemin de Dyck est donné en figure 1.6.

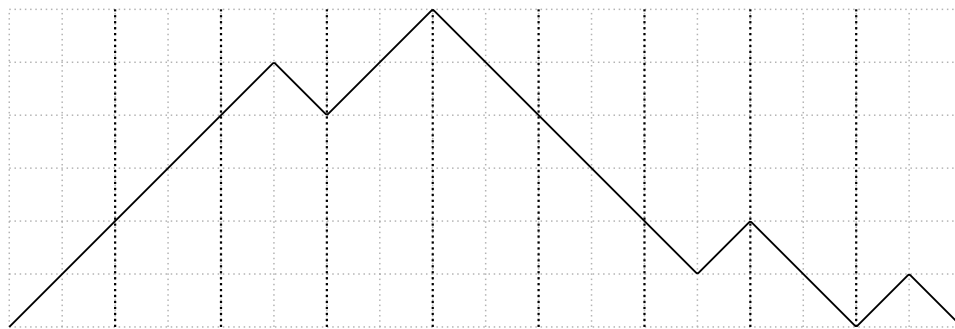


FIGURE 1.6 – Un chemin de Dyck de longueur 9.

**Définition 1.1.15.** *Un chemin de Motzkin de longueur  $n$  est un chemin dans le plan partant de l'origine et terminant en  $(n,0)$ , utilisant des pas montants, descendants et horizontaux et ne passant jamais sous l'axe des abscisses.*

Le nombre de chemins de Motzkin de longueur  $n$  est compté par les nombres de Motzkin, suite A001006 de [Slo]. Un exemple de chemin de Motzkin est donné en figure 1.7.

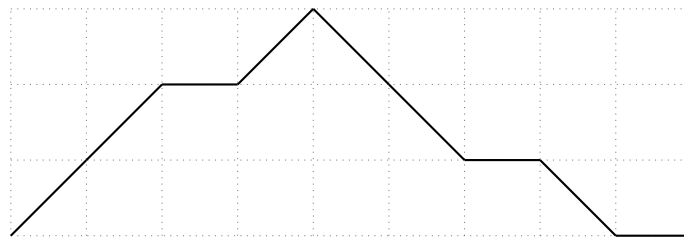


FIGURE 1.7 – Un chemin de Motzkin de longueur 9.

Pour tout chemin  $P$ , on note  $P_i$  le  $i$ -ème pas de  $P$ . On appelle *hauteur* du  $i$ -ème pas de  $P$  l'ordonnée du point de départ de  $P_i$ .



### 1.1.5 Chemins pondérés

**Définition 1.1.16.** Une histoire de Laguerre de longueur  $n$  est un chemin de Motzkin pondéré de taille  $n$  ayant deux types de pas horizontaux ( $\longrightarrow$  et  $\dashrightarrow$ ). Si le  $i$ -ème pas a pour hauteur  $h_i$ , son poids est compris entre :

- 0 et  $h_i$  si le pas est  $\longrightarrow$  ou  $\nearrow$  ;
- 0 et  $h_i - 1$  si le pas est  $\dashrightarrow$  ou  $\searrow$ .

Une histoire de Laguerre large de longueur  $n$  est un chemin de Motzkin pondéré de taille  $n$  ayant deux types de pas horizontaux. Si le  $i$ -ème pas a pour hauteur  $h_i$ , son poids est compris entre 0 et  $h_i$ .

Dans les deux cas, le poids total du chemin, noté  $\text{tw}(H)$  est la somme des poids de tous les pas du chemin.

On note  $\mathfrak{H}_n$  l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$  et  $\mathfrak{H}_n^0$  l'ensemble des histoires de Laguerre larges de longueur  $n$ .

Noter que la contrainte sur le poids d'une histoire de Laguerre implique qu'il ne peut pas y avoir de pas  $\dashrightarrow$  à hauteur 0. Un exemple d'histoire de Laguerre et d'histoire de Laguerre large est donné en figure 1.8.

Les deux exemples ont un poids total de 5.

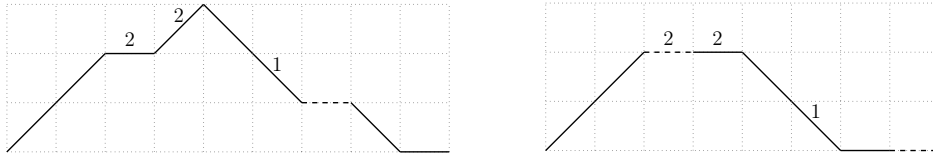


FIGURE 1.8 – Une histoire de Laguerre de longueur 9 sur la gauche et une histoire de Laguerre large de longueur 8 sur la droite.

Les histoires de Laguerre de longueur  $n$  et les histoires de Laguerre larges de longueur  $n - 1$  sont toutes deux dénombrées par  $n!$ . Pour le démontrer, on utilise la bijection de Françon-Viennot entre permutations et histoires de Laguerre définie dans [FV79]. Dans le présent document, nous avons choisi de présenter la variante de Corteel [Cor07], que nous noterons  $\psi_{FV}$  par la suite.

**Algorithme 1.1.17** (bijection de Françon-Viennot [Cor07]).

- *Entrée* : une permutation  $\sigma$  de longueur  $n$ .
- *Sortie* : une histoire de Laguerre  $L$  de longueur  $n$ .
- *Exécution* : on lit les valeurs de  $\sigma$  de la plus petite à la plus grande. Pour tout  $k = \sigma_i$ , le  $k$ -ième pas de  $L$  est
  - $L_k = \nearrow$  si  $\sigma_{i-1} > \sigma_i < \sigma_{i+1}$  ;
  - $L_k = \searrow$  si  $\sigma_{i-1} < \sigma_i > \sigma_{i+1}$  ;

- $L_k = \longrightarrow$  si  $\sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}$ ;
- $L_k = \dashrightarrow$  si  $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$ .

La pondération du  $k$ -ième pas de  $L$  est égale au nombre de motifs 31-2 de  $\sigma$  où  $k$  est représenté par le 2.

Pour que cet algorithme soit bien défini, il faut pouvoir comparer chaque valeur avec ses deux voisines. Il faut donc choisir une convention pour la première et la dernière valeur de  $\sigma$ . La première convention consiste à prendre  $\sigma_0 = 0$  et  $\sigma_{n+1} = n + 1$ ; dans ce cas, l'algorithme construit une histoire de Laguerre de longueur  $n$  à partir d'une permutation de longueur  $n$ . Si on prend la convention  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$ , la valeur  $n$  est toujours plus grande que ses voisines et l'histoire de Laguerre correspondante a donc toujours un dernier pas décroissant. En enlevant ce pas inutile, on a une bijection entre les permutations de longueur  $n$  et les histoires de Laguerre larges de longueur  $n - 1$ . On note cette bijection  $\psi_{FV}^0$ .

Un exemple d'exécution de l'algorithme 1.1.17 est donné en figure 1.9 pour  $\sigma = 528713649$ . Dans cet exemple, les valeurs 1, 2 et 3 sont entourées de valeurs plus grandes, 4, 6 et 9 sont entourées de valeurs plus petites, 7 a une valeur plus petite à sa gauche et une valeur plus grande à sa droite et 5 et 8 ont une valeur plus grande à leur gauche et une plus petite à leur droite. Les motifs 31-2 de  $\sigma$  sont obtenus à partir des sous-mots 423, 613 et 615, de sorte que  $\text{tot}_k(3) = 2$  et  $\text{tot}_k(5) = 1$ . On illustre également la convention  $\sigma_{n+1} = 0$  en figure 1.10 avec la même permutation. La seule différence avec le cas précédent est que 3 a cette fois une valeur plus petite à sa droite.

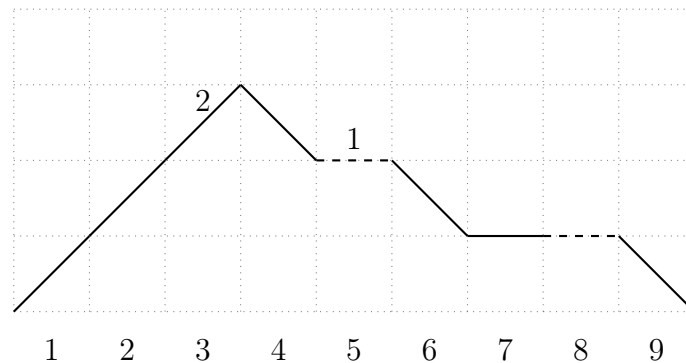


FIGURE 1.9 – L'histoire de Laguerre égale à  $\psi_{FV}(426179853)$ .

Noter qu'on peut définir une bijection entre les histoires de Laguerre et les histoires de Laguerre large en utilisant la composition  $\psi_{FV} \circ (\psi_{FV}^0)^{-1}$ . Cette bijection se décrit très simplement sur les histoires de Laguerre en ne modifiant qu'un seul pas. Dans la suite, nous privilégierons une autre bijection plus adaptée à notre étude.

La bijection réciproque de la bijection de Françon-Viennot est décrite dans l'algorithme suivant.

**Algorithme 1.1.18** ([Cor07]).

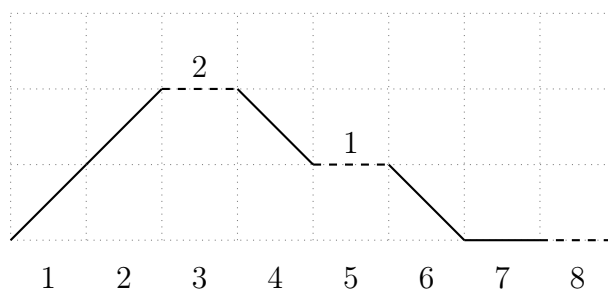


FIGURE 1.10 – L’histoire de Laguerre large égale à  $\psi_{FV}^0(426179853)$ .

- *Entrée* : une histoire de Laguerre  $L$  de longueur  $n$ .
- *Sortie* : une permutation  $\sigma$  de longueur  $n$ .
- *Initialisation* :  $\sigma = \circ$ .
- *Exécution* : pour toute valeur  $i$  allant de 1 jusqu’à  $n$ , soit  $k$  le poids du  $i$ -ème pas de  $L$ . On remplace le  $(k+1)$ -ième  $\circ$  de  $\sigma$  par
  - $\circ k \circ$  si  $L_k = \nearrow$ ;
  - $k$  si  $L_k = \searrow$ ;
  - $k \circ$  si  $L_k = \longrightarrow$ ;
  - $\circ k$  si  $L_k = \dashrightarrow$ .

Retirer le dernier  $\circ$  de  $\sigma$ .

Lorsque l’entrée de l’algorithme est une histoire de Laguerre large de longueur  $n - 1$ , il suffit de remplacer la dernière étape de l’algorithme par “remplacer le dernier  $\circ$  de  $\sigma$  par  $n$ ”.

La figure 1.11 donne une exécution de cet algorithme sur l’histoire de Laguerre de la figure 1.9.

$$\begin{aligned}
 \sigma = \circ &\rightarrow \circ 1 \circ \rightarrow \circ 2 \circ 1 \circ \rightarrow \circ 2 \circ 1 \circ 3 \circ \rightarrow 42 \circ 1 \circ 3 \circ \\
 &\rightarrow 42 \circ 1 \circ 53 \circ \rightarrow 4261 \circ 53 \circ \rightarrow 42617 \circ 53 \circ \rightarrow 42617 \circ 853 \circ \\
 &\rightarrow 426179853 \circ \rightarrow 426179853
 \end{aligned}$$

FIGURE 1.11 – Étapes successives de l’exécution de  $\psi_{FV}^{-1}$  sur l’histoire de Laguerre de la figure 1.9.

Si on ne considère pas les pondérations, il y a  $C_n$  histoires de Laguerre de longueur  $n$  et  $C_n$  histoires de Laguerre larges de longueur  $n - 1$ , soit autant que de chemins de Dyck de taille  $n$ . On peut donc représenter les histoires de Laguerre et les histoires de Laguerre larges comme des *chemins de Dyck pondérés*.

**Définition 1.1.19.** Un chemin de Dyck pondéré de longueur  $n$  est un chemin de Dyck  $D$  de longueur  $n$  auquel on associe une suite  $w$  de  $n$  entiers positifs ou nuls vérifiant les conditions suivantes : pour tout  $i$ , la pondération  $w$  vérifie  $w_i \leq (h_i - 1)/2$  où  $h_i$  est la hauteur du  $2i$ -ème pas de  $D$ .

La bijection entre histoires de Laguerre et chemins de Dyck pondérés est décrite par l'algorithme suivant.

**Algorithme 1.1.20.**

- *Entrée* : une histoire de Laguerre  $L$  de longueur  $n$ .
- *Sortie* : un chemin de Dyck pondéré  $(D, w)$ .
- *Initialisation* :  $w$  prend la valeur de la pondération de  $L$ .
- *Exécution* : pour toute valeur  $i$  allant de 1 jusqu'à  $n$ , on a
  - $D_{2i-1} = D_{2i} = /$  si  $L_i = \nearrow$  ;
  - $D_{2i-1} = D_{2i} = \backslash$  si  $L_i = \searrow$  ;
  - $D_{2i-1}D_{2i} = /\backslash$  si  $L_i = \longrightarrow$  ;
  - $D_{2i-1}D_{2i} = \backslash/$  si  $L_i = \dashrightarrow$ .

Pour construire un chemin de Dyck pondéré de taille  $n$  à partir d'une histoire de Laguerre large  $L$  de taille  $n - 1$ , on applique l'algorithme 1.1.20 à  $L$  puis on ajoute un pas montant au début du chemin obtenu et un pas descendant à la fin. On ajoute également un 0 à la fin de la pondération obtenue. Cette bijection est illustré en figure 1.12.

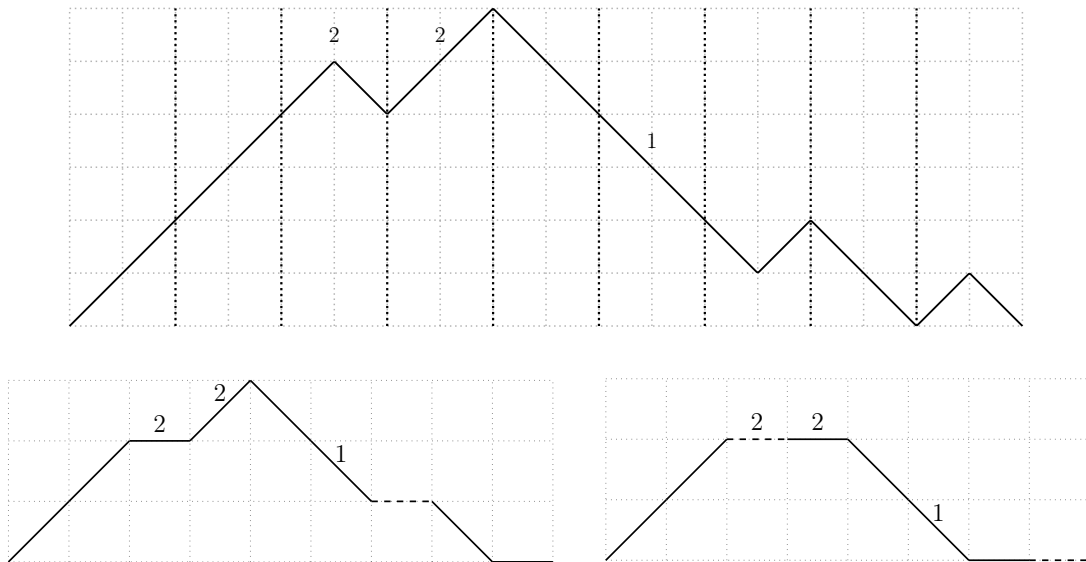


FIGURE 1.12 – Un chemin de Dyck pondéré de longueur 9, l'histoire de Laguerre (à gauche) et l'histoire de Laguerre large (à droite) associée.

En utilisant cette représentation des histoires de Laguerre et des histoires de Laguerre larges avec des chemins de Dyck pondérés, on obtient une seconde bijection très connue entre ces objets, différente de celle induite par la bijection de Françon-Viennot. Nous utiliserons au chapitre 2 une légère variante de cette bijection.

### 1.1.6 Permutations segmentées

**Définition 1.1.21.** Une permutation segmentée est une permutation dont les valeurs peuvent être séparées par des barres. On note  $\mathfrak{P}_n$  l'ensemble des permutations segmentées de taille  $n$ .

Il y a  $2^{n-1}n!$  permutations segmentées de longueur  $n$ . Par exemple, les permutations segmentées de longueur 2 sont 12, 21, 1|2 et 2|1. Pour les différencier des permutations usuelles, on notera les permutations segmentées en gras.

**Définition 1.1.22.** Soit  $\sigma$  une permutation segmentée de longueur  $n$ . Une position  $i < n$  est appelée une segmentation s'il y a une barre entre  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}$ . Une descente est une position  $i$  qui n'est pas une segmentation telle que  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ .

On note  $\text{des}(\sigma)$  le nombre de descentes de  $\sigma$  et  $\text{seg}(\sigma)$  son nombre de barres.

Par exemple, pour  $\sigma = 31|5|24$ , on a  $\text{seg}(\sigma) = 2$  et  $\text{des}(\sigma) = 1$  où la seule descente est en position 1.

Une permutation signée est une permutation dans laquelle les valeurs sont dotées d'un signe plus ou d'un signe moins. Il y a ainsi  $2^n n!$  permutations signées de taille  $n$ . On représente une valeur avec un signe moins en plaçant une barre au dessus de la valeur. Ainsi, dans la permutation signée  $\sigma = 35\bar{1}2\bar{4}$ , les valeurs 1 et 4 ont un signe négatif et toutes les autres valeurs ont un signe positif. De nombreux résultats sur les permutations se généralisent aux permutations signées. Noter qu'une permutation segmentée peut être vue comme une permutation signée : une valeur a un signe moins si et seulement si elle a une barre avant elle. En revanche, la notion de descente que nous regardons ne coïncide pas avec la notion de descente des permutations signées. Nous utiliserons cependant notre notion de descentes lorsque nous définirons une algèbre sur les permutations segmentées comme une sous-algèbre de celle sur les permutations signées définie dans [NT10].

### 1.1.7 Compositions segmentées

**Définition 1.1.23.** Une composition segmentée d'un entier  $n$  (noté  $\mathbf{I} \models n$ ) est une suite finie d'entiers strictement positifs (les parts de  $\mathbf{I}$ ) séparés par des virgules ou des barres dont la somme est  $n$ .

On note  $\ell(\mathbf{I})$  la longueur de la composition segmentée  $\mathbf{I}$ ,  $\text{seg}(\mathbf{I})$  son nombre de barres et  $\text{des}(\mathbf{I}) := \ell(\mathbf{I}) - \text{seg}(\mathbf{I})$  son nombre de valeurs qui ne sont pas suivies par une barre.

Encore une fois lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on ne représentera pas les virgules. Par exemple, on notera 21|3|11 la composition segmentée  $(2, 1|3|1, 1)$ .

**Définition 1.1.24.** L'ensemble des descentes d'une composition segmentée  $\mathbf{I}$  (noté  $\text{Des}(\mathbf{I})$ ) est l'ensemble des valeurs  $i_1 + i_2 + \dots + i_k$  où la dernière part  $i_k$  est suivie par une virgule dans  $\mathbf{I}$ .

De façon similaire, l'ensemble des segmentations de  $\mathbf{I}$  (noté  $\text{Seg}(\mathbf{I})$ ) est l'ensemble des valeurs  $i_1 + i_2 + \dots + i_k$  où la dernière part  $i_k$  est suivie par une barre dans  $\mathbf{I}$ .

Par exemple pour  $\mathbf{I} = 21|3|11$ , on a  $(\text{Des}(\mathbf{I}), \text{Seg}(\mathbf{I})) = (\{2, 7\}, \{3, 6\})$ . Noter que les compositions segmentées sont en bijection avec les paires de sous-ensembles disjoints de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  via les ensembles des descentes et des segmentations. Il y a donc  $3^{n-1}$  compositions segmentées de l'entier  $n$ . Noter également qu'avec ces notations, on a  $\text{seg}(\mathbf{I}) = |\text{Seg}(\mathbf{I})|$  et  $\text{des}(\mathbf{I}) = |\text{Des}(\mathbf{I})| + 1$ .

Afin de généraliser la notion de composition des descentes d'une permutation, nous définissons la *composition segmentée des descentes* d'une permutation segmentée.

**Définition 1.1.25.** Soit  $\sigma$  une permutation segmentée de longueur  $n$ . La composition segmentée des descentes de  $\sigma$  (noté  $\text{SDes}(\sigma)$ ) est la composition segmentée  $\mathbf{I}$  de  $n$  dont l'ensemble des segmentations est égal à l'ensemble des segmentations de  $\sigma$  et l'ensemble des descentes est égal à l'ensemble des descentes de  $\sigma$ .

Par exemple, l'ensemble des segmentations de  $\sigma = 31|5|24$  est l'ensemble des positions  $\{2, 3\}$  et l'ensemble des descentes de  $\sigma$  est  $\{1\}$ . Ainsi, on a  $\text{SDes}(31|5|24) = 11|1|2$ .

Comme pour les compositions usuelles, on définit un ordre de raffinement sur les compositions segmentées qui nous servira à définir des changements de bases de certaines algèbres dans la suite de ce mémoire. On définit tout d'abord l'*ordre de raffinement inverse* (noté  $\succeq$ ) comme la relation d'ordre telle que  $\mathbf{I} \succeq \mathbf{J}$  si et seulement si  $\text{Des}(\mathbf{I}) \supseteq \text{Des}(\mathbf{J})$  et  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = \text{Seg}(\mathbf{J})$ . Par exemple, on a  $21|3|211 \succeq 3|3|22$ .

Dans la suite, nous aurons également besoin d'une seconde relation d'ordre sur les compositions segmentées, très similaire à la première, que nous noterons  $\geq$ . Cette relation vérifie  $\mathbf{I} \geq \mathbf{J}$  si et seulement si  $\text{Des}(\mathbf{I}) \cup \text{Seg}(\mathbf{I}) \supseteq \text{Des}(\mathbf{J}) \cup \text{Seg}(\mathbf{J})$  et  $\text{Seg}(\mathbf{I}) \subseteq \text{Seg}(\mathbf{J})$ . En d'autres termes,  $\mathbf{J}$  peut être obtenue à partir de  $\mathbf{I}$  en supprimant des valeurs de son ensemble des descentes et en déplaçant des valeurs de son ensemble des descentes dans son ensemble des segmentations. Cela se traduit sur les compositions segmentées en disant qu'on obtient  $\mathbf{J}$  en sommant des valeurs adjacentes non séparées par une barre de  $\mathbf{I}$  ou en ajoutant des barres à  $\mathbf{I}$ . Par exemple, on a  $21|3|211 \geq 2|1|3|2|2$  et  $2|1|3|2|2$  est minimale pour l'ordre  $\geq$ .

## 1.2 Le PASEP

### 1.2.1 Définition

Le *processus d'exclusion asymétrique* (ASEP) est un modèle d'interaction de particules. Les particules peuvent se déplacer vers la gauche ou la droite dans une chaîne finie ainsi qu'entrer ou sortir aux bords de la chaîne avec la condition qu'il ne peut y avoir qu'au plus

une particule par emplacement. Dans le cadre le plus général, il y a cinq paramètres qui déterminent les probabilités de déplacement des particules. Dans la chaîne, la probabilité de se déplacer vers la gauche est  $q$  fois celle de se déplacer vers la droite. Les quatre autres paramètres correspondent aux probabilités d'entrée et de sortie des particules aux deux extrémités de la chaîne.

**Définition 1.2.1.** Soient  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  et  $q$  des constantes vérifiant  $(\alpha, \beta, \delta, \gamma, q) \in [0, 1]^5$ . Soit  $B_N$  l'ensemble de tous les mots en les lettres  $\{\circ, \bullet\}$ . Le ASEP est la chaîne de Markov sur  $B_N$  avec les transitions suivantes.

- Si  $X = A \bullet \circ B$  et  $Y = A \circ \bullet B$  alors  $P_{X,Y} = \frac{1}{N+1}$  (la particule se déplace à droite) et  $P_{Y,X} = \frac{q}{N+1}$  (la particule se déplace à gauche).
- Si  $X = \circ B$  et  $Y = \bullet B$  alors  $P_{X,Y} = \frac{\alpha}{N+1}$  (une particule entre à gauche).
- Si  $X = A \bullet$  et  $Y = A \circ$  alors  $P_{X,Y} = \frac{\beta}{N+1}$  (une particule sort à droite).
- Si  $X = \bullet B$  et  $Y = \circ B$  alors  $P_{X,Y} = \frac{\gamma}{N+1}$  (une particule sort à gauche).
- Si  $X = A \circ$  et  $Y = A \bullet$  alors  $P_{X,Y} = \frac{\delta}{N+1}$  (une particule entre à droite).
- Sinon  $P_{X,Y} = 0$  pour  $Y \neq X$  et  $P_{X,X} = 1 - \sum_{X \neq Y} P_{X,Y}$ .

Un état du ASEP est donné en figure 1.13. Dans cet exemple, nous représentons les probabilités non normalisées pour une meilleure lecture.

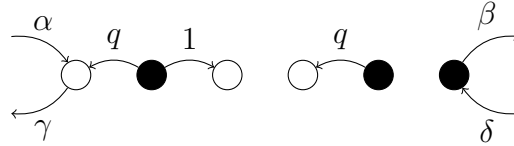
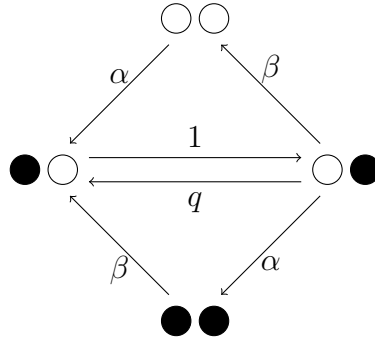


FIGURE 1.13 – Un exemple d'état du ASEP à 6 emplacements, les ronds noirs représentant les particules.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement au cas où  $\delta = \gamma = 0$  signifiant que les particules ne peuvent rentrer dans la chaîne que par la gauche et ne sortir que par la droite. Il s'agit dans ce cas du *processus d'exclusion asymétrique partiel* (PASEP). Le graphe représentant tous les états du PASEP à 2 emplacements avec les transitions est donné en figure 1.14. Les transitions qui ne changent pas d'état (les boucles) ne sont pas représentées et on a multiplié les probabilités par  $N + 1$  pour une meilleure lisibilité.

Dans la suite, nous notons  $D$  un emplacement occupé par une particule et  $E$  un emplacement vide. Par exemple, l'état  $\circ \bullet \bullet$  est noté  $EDD$ . Le ASEP a entièrement été résolu dans le cadre général à l'aide d'une description matricielle que nous donnons ci-dessous pour le PASEP.

FIGURE 1.14 – Le graphe des états du ASEP à  $N = 2$ .

**Théorème 1.2.2** ([DEHP93]). Soit  $X = (X_1, \dots, X_N) \in \{D, E\}^N$  représentant un état  $x$  du PASEP de longueur  $N$ . S'il existe des matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  et un vecteur ligne (resp. colonne)  $\langle w |$  (resp.  $|v\rangle$ ) vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathbf{DE} = \mathbf{E} + \mathbf{D} + q\mathbf{ED} \quad \langle w | \mathbf{E} = \frac{1}{\alpha} \langle w | \quad \mathbf{D} |v\rangle = \frac{1}{\beta} |v\rangle, \quad (1.2)$$

alors

$$\text{Prob}(x) = \frac{\langle w | m(X) |v\rangle}{\langle w | (\mathbf{E} + \mathbf{D})^n |v\rangle}, \quad (1.3)$$

où  $m(X)$  est le morphisme envoyant la lettre  $D$  sur la matrice  $\mathbf{D}$  et la lettre  $E$  sur la matrice  $\mathbf{E}$ .

Ainsi, le numérateur de l'équation (1.3) est un polynôme en les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$ . Il apparaît que ces polynômes sont à coefficients entiers positifs. De plus, lorsque  $\alpha = \beta = 1$  et  $q = 0$ , Shapiro et Zeilberger ont montré que le dénominateur de (1.3) est égal au  $(N+1)$ -ième nombre de Catalan. Lorsque  $q = 1$ , il est égal à  $(N+1)!$ . Ainsi, il est naturel de chercher à interpréter les coefficients du numérateur de cette fraction de façon combinatoire.

## 1.2.2 Interprétations combinatoires

Parmi les nombreuses interprétations combinatoires des probabilités stationnaires du ASEP, nous nous intéresserons essentiellement à celles faisant intervenir les permutations et les histoires de Laguerre. Dans [SW07], les auteurs interprètent les probabilités du PASEP en utilisant une statistique appelée *descente bottoms* et qui peut s'interpréter en termes de *descente tops* via une bijection simple, l'involution de Schützenberger sur les permutations. Nous définissons ici cette seconde statistique sous le nom de *descentes de Genocchi* afin d'être cohérent avec la définition de [HNTT09] que nous utiliserons d'un point de vue algébrique section 1.3.5.



**Définition 1.2.3.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . L'ensemble des descentes de Genocchi de  $\sigma$  (noté  $\text{GDes}(\sigma)$ ) est l'ensemble des valeurs de descente de  $\sigma$  :

$$\text{GDes}(\sigma) := \{\sigma_i \in [2, n] \mid \sigma_i > \sigma_{i+1}\}. \quad (1.4)$$

La composition des descentes de Genocchi de  $\sigma$  (notée  $\text{GC}(\sigma)$ ) est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\{d - 1 \mid d \in \text{GDes}(\sigma)\}$ .

Noter qu'on se place dans la convention  $\sigma_0 = 0$  et  $\sigma_{n+1} = \infty$  et donc que la dernière valeur de  $\sigma$  n'est pas une descente. On définira une statistique analogue pour la convention  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$  section 2.4.1.

Par exemple, pour  $\sigma = 5726314$ , les valeurs de descentes sont 7, 6 et 3 et donc  $\text{GC}(\sigma)$  est la composition de 7 dont l'ensemble des descentes est  $\{2, 5, 6\}$ , ce qui donne  $\text{GC}(5726314) = 2311$ . Un tableau triant les permutations de longueur 2 et 3 suivant leur composition des descentes de Genocchi est donné en figure 1.15.

2	11	3	21	12	111
12	21	123	132	213	321
			231		
			312		

FIGURE 1.15 – Les permutations de tailles 2 et 3 triées suivant leur composition des descentes de Genocchi.

En traduisant les résultats de [SW07] en la statistique GC, on a

**Théorème 1.2.4** ([SW07]). Soit  $x$  un état du PASEP à  $N$  particules et  $X$  le mot en  $D$  et  $E$  associé. Soit  $I$  la composition de  $N + 1$  dont l'ensemble des descentes est égal aux positions des  $E$  dans  $X$ . Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on a

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_N(q)} \sum_{\text{GC}(\sigma)=I} q^{\text{tot}(\sigma)}, \quad (1.5)$$

où  $Z_N = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{N+1}} q^{\text{tot}(\sigma)}$ .

Pour démontrer ce théorème, les auteurs de [SW07] construisent une composée de bijections pour faire le lien avec les tableaux de permutations. En effet, les récurrences du PASEP ne se retranscrivent pas naturellement sur les permutations. Nous donnons maintenant une description de ces probabilités en utilisant les histoires de Laguerre afin de pouvoir généraliser le théorème 1.2.4 au 2-PASEP dans le chapitre 3. Pour ce faire, on définit l'étiquetage d'une histoire de Laguerre.

**Définition 1.2.5.** Soit  $H$  une histoire de Laguerre de longueur  $n$ . L'étiquetage de  $H$  est le mot en les lettres  $D$  et  $E$  de longueur  $n - 1$  obtenu en étiquetant tous les pas sauf le premier par  $D$  pour les pas  $\rightarrow$  et  $\nearrow$  et par  $E$  pour les pas  $\dashrightarrow$  et  $\searrow$ . On note  $\text{label}(H)$  l'étiquetage de l'histoire de Laguerre  $H$ .

Par exemple, l'histoire de Laguerre en figure 1.16 a pour étiquette le mot  $DDEEEDEE$ .

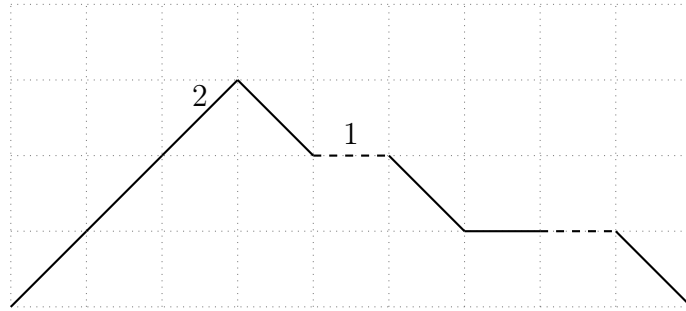


FIGURE 1.16 – Une histoire de Laguerre de longueur 9 d'étiquette  $DDEEEDEE$ .

On a alors l'interprétation combinatoire suivante.

**Théorème 1.2.6.** Soit  $x$  un état du PASEP de longueur  $N$  et  $X$  le mot en  $D$  et  $E$  associé. À  $\alpha = \beta = 1$ , on a

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_N(q)} \sum_{\text{label}(H)=X} q^{\text{tw}(H)} \quad (1.6)$$

où  $Z_N(q) = \sum_{H \in \mathfrak{H}_n} q^{\text{tw}(H)}$ .

Ce théorème découle du fait que la bijection de Françon-Viennot implique que l'étiquette du pas en position  $k$  dépend de la comparaison de la valeur  $k$  avec sa voisine de droite dans la permutation d'origine.

Dans [JV11], l'auteur exprime la série génératrice des probabilités du PASEP en termes des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$  généraux sur les histoires de Laguerre. Cependant, bien qu'il existe une description de la probabilité de chaque état pour  $\beta$  et  $q$  généraux avec  $\alpha = 1$  sur les histoires de Laguerre, on ne connaît pas de description des probabilités des états pris individuellement sur les histoires de Laguerre avec les trois paramètres.

## 1.3 Algèbres de Hopf combinatoires

### 1.3.1 Définitions

#### Espaces vectoriels d'objets combinatoires

Une *classe combinatoire* est un ensemble d'objets combinatoires muni d'une fonction taille de sorte que l'ensemble des objets ayant une taille donnée soit toujours fini. Par

exemple, on a vu qu'il y a  $2^n$  mots de longueur  $n$  sur  $A = \{a, b\}$ . L'ensemble des mots sur  $A$  muni de la fonction longueur est donc une classe combinatoire. Un autre exemple est donné par les *permutations* qui forment une des classes combinatoires les plus étudiées en combinatoire. On a vu que l'ensemble des permutations de taille  $n$  est fini et en nombre  $n!$ .

On sera rapidement amené à former des sommes formelles d'objets combinatoires. Cela revient à se placer dans l'espace vectoriel dont les bases sont indexées par ces objets. On considérera que le corps de base de l'espace vectoriel est un corps quelconque  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle. L'espace vectoriel  $E$  dont les bases sont indexées par une classe combinatoire  $C$  est *gradué*, c'est-à-dire

$$E = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \quad (1.7)$$

où  $E_n$  a ses bases indexées par  $C_n$ , les objets combinatoires de taille  $n$ . Par abus de langage, on identifie parfois dans la suite du texte une base aux objets combinatoires qui l'indexent. Notons toutefois que nous éviterons de recourir à cette ambiguïté le plus souvent, car la force des constructions algébriques est d'étudier simultanément *plusieurs bases* d'un même espace vectoriel  $E$ .

## Produits et algèbres

On enrichit souvent les espaces vectoriels d'objets combinatoires d'une notion de produit. On obtient alors des algèbres.

**Exemple 1.3.1.** *On peut par exemple définir un produit basé sur la concaténation des mots :  $A^* \times A^* \rightarrow A^*$ ,*

$$u.v \rightarrow uv. \quad (1.8)$$

*Par exemple,  $aab \cdot abab = aababab$ . De façon similaire, on définit la concaténation décalée sur les permutations*

$$\sigma \vec{\cdot} \tau = \sigma \vec{\tau} \quad (1.9)$$

*où  $\vec{\tau}$  est le mot  $\tau$  dont les lettres ont été décalées de  $|\sigma|$ . Par exemple,  $132 \vec{\cdot} 3421 = 1326754$ .*

**Exemple 1.3.2.** *Le produit de mélange sur les mots se définit récursivement par*

$$u_1 u \sqcup v_1 v := u_1 (u \sqcup v_1 v) + v_1 (u_1 u \sqcup v) \quad (1.10)$$

*et  $u \sqcup \epsilon = \epsilon \sqcup u = u$ . C'est la somme de tous les "mélanges" des lettres de  $u$  et  $v$  tels que l'ordre des lettres dans  $u$  et  $v$  respectivement ne soit pas modifié. Par exemple,*

$$ab \sqcup ba = abba + abba + abab + baba + baab + baab \quad (1.11)$$

$$= 2 abba + 2 baab + abab + baba. \quad (1.12)$$

*Comme pour la concaténation, on peut définir le produit de mélange décalé sur les permutations*

$$\sigma \bar{\sqcup} \tau = \sigma \bar{\sqcup} \vec{\tau}. \quad (1.13)$$

Par exemple,

$$12 \bar{\sqcup} 21 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312. \quad (1.14)$$

**Exemple 1.3.3.** Le produit de convolution sur les permutations est défini de la manière suivante :

$$\sigma * \tau = \sum_{\substack{\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \\ \text{std}(\nu_1) = \sigma \\ \text{std}(\nu_2) = \tau}} \nu. \quad (1.15)$$

Par exemple,

$$231 * 1 = 2314 + 2413 + 3412 + 3421. \quad (1.16)$$

Là où le produit de mélange décalé fixe les valeurs attribuées aux deux permutations et somme sur tous les choix de positions de ces valeurs, le produit de convolution fixe les positions des valeurs des deux permutations initiales et somme sur tous les choix de valeurs à leur attribuer. Comme échanger places et valeurs revient naturellement à inverser les permutations, il s'ensuit que ces deux produits sont inverses l'un de l'autre :

**Proposition 1.3.4.** Soit  $\sigma$  et  $\tau$  deux permutations.

$$\mu \in \sigma * \tau \iff \mu^{-1} \in \sigma^{-1} \bar{\sqcup} \tau^{-1}. \quad (1.17)$$

**Définition 1.3.5.** L'algèbre  $A$  d'une classe combinatoire est dite graduée si son produit vérifie la relation suivante :

$$|x \times y| = |x| + |y| \quad (1.18)$$

pour tout  $x, y \in A$ . Dit autrement, pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , le produit  $\times$  est une application de  $A_n \times A_m$  vers  $A_{n+m}$ .

L'exemple le plus simple d'algèbre graduée est l'algèbre des polynômes en une variable.

### Une description avec des diagrammes

Soit  $A$  un alphabet. On se place sur l'algèbre libre engendrée par  $A$  que l'on note  $\mathcal{A} = \mathbb{K}\langle A \rangle$  où le produit est la concaténation des mots. Cette algèbre est tout simplement l'ensemble des combinaisons linéaires des mots sur  $A$  aussi appelée algèbre des *polynômes non commutatifs* sur  $A$ . Elle est clairement associative car

$$(u.v).w = u.(v.w) = uvw \quad (1.19)$$

pour  $u, v, w \in A^*$ . Le produit  $\mu := \cdot$  est une application linéaire  $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  et l'associativité se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{I \otimes \mu} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \mu \otimes I \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{A} \end{array} \quad (1.20)$$

où  $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  est l'identité.

Le mot vide  $\epsilon$  est donc l'élément neutre pour la multiplication, c'est-à-dire

$$\forall u \in A^*, u.\epsilon = \epsilon.u = u. \quad (1.21)$$

Le mot  $\epsilon$  est l'unité de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Un élément  $k \in \mathbb{K}$  est assimilé à l'élément  $k\epsilon \in \mathcal{A}$ . On peut donc interpréter  $\epsilon$  non pas comme un mot mais comme une application  $\epsilon : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ . La propriété de l'unité s'exprime alors aussi par un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{I \otimes \epsilon} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xleftarrow{\epsilon \otimes I} \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow \simeq & \downarrow p \swarrow \simeq \\ & & \mathcal{A} \end{array} \quad (1.22)$$

Pour définir une algèbre de Hopf, nous avons aussi besoin d'un coproduit.

### Coproduits et cogèbres

À présent, si  $A = \{a, b, \dots\}$ , introduisons un nouvel alphabet  $A' = \{a', b', \dots\}$  copie de l'alphabet  $A$  et dont les lettres commutent avec celles de  $A$ . On définit l'opération  $\Delta$  sur les lettres de  $A$  par  $\Delta(a) = a + a'$ . Puis on étend l'opération de telle sorte que  $\Delta$  soit un morphisme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$\Delta(u.v) = \Delta(u).\Delta(v) \quad (1.23)$$

pour  $u, v \in A^*$ . Par exemple, si  $A = \{a, b\}$  on a

$$\Delta(aab) = (a + a')(a + a')(b + b') \quad (1.24)$$

$$= aab + aab' + aa'b + aa'b' + a'ab + a'ab' + a'a'b + a'a'b' \quad (1.25)$$

$$= aab + aab' + 2aba' + 2aa'b' + ba'a' + a'a'b'. \quad (1.26)$$

Un mot sur les alphabets  $A$  et  $A'$  se décompose en deux parties indépendantes : un mot sur  $A$  et un mot sur  $A'$ . On peut le considérer comme un élément de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ . L'opération  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  est alors un morphisme d'algèbre tel que  $\Delta(a) = a \otimes \epsilon + \epsilon \otimes a$ . Le calcul précédent s'écrit

$$\Delta(aab) = aab \otimes \epsilon + aa \otimes b + 2(ab \otimes a) + 2(a \otimes ab) + b \otimes aa + \epsilon \otimes aab. \quad (1.27)$$

L'opération  $\Delta$  est *co-associative*. Pour un mot  $u$ , on a  $\Delta(u) = \sum u_1 \otimes u_2$  sur les couples  $(u_1, u_2)$  de sous-mots complémentaires de  $u$ . Alors  $\sum \Delta(u_1) \otimes u_2 = \sum u_1 \otimes \Delta(u_2) = \sum u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$ , la somme sur les triplets complémentaires de sous-mots de  $u$ . Sur un exemple, cela donne

$$(\Delta \otimes I)\Delta(ab) = (\Delta \otimes I)((a \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes a))((b \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes b)) \quad (1.28)$$

$$= (a \otimes \epsilon \otimes \epsilon + \epsilon \otimes a \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \epsilon \otimes a)(b \otimes \epsilon \otimes \epsilon + \epsilon \otimes b \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \epsilon \otimes b) \quad (1.29)$$

$$= (I \otimes \Delta)((a \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes a))((b \otimes \epsilon) + (\epsilon \otimes b)) \quad (1.30)$$

$$= (I \otimes \Delta)\Delta(ab). \quad (1.31)$$

On écrit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow I \otimes \Delta \\
 \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\Delta \otimes I} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}
 \end{array} . \tag{1.32}$$

Ce diagramme est la version "renversée" du diagramme de l'associativité de l'algèbre (1.20). De la même façon, la *co-unité* de  $\mathcal{A}$  est l'application linéaire  $c : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $c(u) = 0$  si  $u \neq \epsilon$  et  $c(\epsilon) = 1$ , on a la version renversée du diagramme (1.22) de l'unité de l'algèbre :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} & \xleftarrow{I \otimes c} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{c \otimes I} & \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \\
 & \searrow \simeq & \uparrow \Delta & \swarrow \simeq & \\
 & & \mathcal{A} & & 
 \end{array} \tag{1.33}$$

Muni de l'opération  $\Delta$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{A}$  possède une structure de *cogèbre*. La compatibilité entre  $\Delta$  et  $\mu$  en fait une *bigèbre*.

### Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires

Dans ce paragraphe, nous allons combiner la notion d'algèbre et de cogèbre pour construire des *bigèbres*.

**Définition 1.3.6.** Soit  $\mathcal{A}$  un espace vectoriel. Si  $\mathcal{A}$  est muni d'un produit associatif  $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  et d'une unité  $\epsilon : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ , on dit que  $\mathcal{A}$  est une algèbre. Si par ailleurs,  $\mathcal{A}$  est muni d'un coproduit  $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  co-associatif et d'une co-unité  $c : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  alors  $\mathcal{A}$  est une cogèbre.

Enfin, si  $\mathcal{A}$  est à la fois une algèbre et une cogèbre et que  $\Delta$  et  $c$  sont des morphismes d'algèbres, alors  $\mathcal{A}$  est une bigèbre.

En tant qu'espace vectoriel,  $\mathcal{A}$  est *gradué*, c'est-à-dire que

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n \tag{1.34}$$

où  $\mathcal{A}^n$  est l'espace vectoriel sur les mots de taille  $n$ . En tant que bigèbre,  $\mathcal{A}$  est aussi graduée ce qui signifie que son produit  $\mu$  et son coproduit  $\Delta$  vérifient

$$\mu(\mathcal{A}^n \otimes \mathcal{A}^m) \subset \mathcal{A}^{n+m}, \tag{1.35}$$

$$\Delta(\mathcal{A}^k) \subset \bigoplus_{n+m=k} \mathcal{A}^n \otimes \mathcal{A}^m. \tag{1.36}$$

Par ailleurs, la dimension de  $\mathcal{A}^0$  est 1 (le mot vide  $\epsilon$ ) ce qui signifie que  $\mathcal{A}$  est *connexe*. On peut alors démontrer que l'*antipode* de  $\mathcal{A}$  est bien définie [Swe69, Car07]. Nous ne détaillerons pas cette propriété car nous n'en aurons pas besoin mais c'est elle qui justifie

l'appellation *algèbre de Hopf*. Par la suite, nous n'étudierons que des bigèbres graduées et connexes et parlerons donc toujours d'*algèbres de Hopf combinatoires*.

Si l'alphabet  $A$  n'est pas commutatif, le produit  $\mu$  non plus. On a  $u.v \neq v.u$ . Cependant, le coproduit  $\Delta$  que nous avons défini est *co-commutatif* : soit  $\omega : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  l'application définie par  $\omega(u \otimes v) = v \otimes u$ , alors  $\omega \circ \Delta = \Delta$ . Par la suite, on définira d'autres coproduits qui n'auront pas cette propriété.

L'exemple des polynômes non commutatifs, s'il paraît trivial, n'en est pas moins fondamental. En effet, il est souvent fastidieux de démontrer tous les axiomes relatifs au produit et au coproduit sur une bigèbre. Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est l'algèbre des polynômes non commutatifs, ce sont des propriétés élémentaires. Une technique consiste alors à exprimer une algèbre combinatoire en fonction de  $\mathcal{A}$ . Cela revient à associer à chaque objet un développement sous forme de polynômes (commutatifs ou non). Pour démontrer que l'espace en question possède une structure d'algèbre de Hopf, il suffit de démontrer que la famille de polynômes obtenue est stable par les opérations de produit et de coproduit, la compatibilité produit-coproduit étant héritée directement de  $\mathcal{A}$ . Cette technique est appelée la *réalisation polynomiale* et nous en donnons un exemple à la section suivante avec l'algèbre **FQSym**.

### 1.3.2 Algèbre des fonctions quasi-symétriques libres

#### Définition

Pour illustrer le principe de la réalisation polynomiale, expliquons la construction de l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques libres **FQSym** comme cela a été fait dans [DHT02, DHNT11]. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre abstraite définie par Malvenuto et Reutenauer sur les permutations [MR95] : elle en est une réalisation polynomiale.

**Définition 1.3.7.** Soit  $u = u_1 \dots u_n$  un mot sur l'alphabet ordonné  $A$ . L'action d'une permutation  $\sigma$  sur  $u$  est donnée par

$$u \bullet \sigma = u_{\sigma_1} \dots u_{\sigma_n}. \quad (1.37)$$

L'exécution de  $u$ ,  $\text{exec}(u)$ , est la permutation  $\sigma$  de longueur minimale telle que  $u \bullet \sigma$  soit ordonné c'est-à-dire  $u_{\sigma_1} \leq u_{\sigma_2} \leq \dots \leq u_{\sigma_n}$ .

Par exemple, si  $u = baa$  alors  $\text{exec}(u) = 231$ , et on a  $u \bullet \sigma = aab$ . L'exécution d'un mot  $u$  dépend uniquement de ses inversions, c'est-à-dire du standardisé de  $u$  tel que nous l'avons défini section 1.1.1. On a  $\text{exec}(u) = \text{exec}(\text{std}(u))$ . Par ailleurs, lorsque  $u$  est une permutation, on a  $u \bullet \sigma = u \circ \sigma$  et donc  $\text{exec}(u) = u^{-1}$ . On a donc

$$\text{exec}(u) = \text{std}(u)^{-1}. \quad (1.38)$$

On se place sur un alphabet infini et on définit les séries

$$\mathbb{F}_\sigma := \sum_{\text{exec}(u)=\sigma} u; \quad (1.39)$$

$$\mathbb{G}_\sigma := \sum_{\text{std}(u)=\sigma} u. \quad (1.40)$$

L'équation (1.38) implique directement

$$\mathbb{F}_\sigma = \mathbb{G}_{\sigma^{-1}}. \quad (1.41)$$

On a le résultat suivant [DHT02] :

**Proposition 1.3.8.** *Le produit  $\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\tau$  pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\tau \in \mathfrak{S}_m$  s'exprime comme une combinaison linéaire d'éléments  $\mathbb{G}_\nu$  avec  $\nu \in \mathfrak{S}_{n+m}$ . Plus précisément,*

$$\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\tau = \sum_{\nu \in \sigma * \tau} \mathbb{G}_\nu. \quad (1.42)$$

On rappelle que  $*$  est le produit de convolution sur les permutations que nous avons défini section 1.3.1. La preuve de cette proposition repose sur le fait que pour tout mot  $w = w_1 \dots w_r$  avec  $\nu = \text{std}(w)$  et pour tout  $i < j$ , on a

$$\text{std}(w_i \dots w_j) = \text{std}(\nu_i \dots \nu_j), \quad (1.43)$$

étant donné que le standardisé est entièrement déterminé par les inversions. Ainsi  $w$  appartient à  $\mathbb{G}_\sigma \mathbb{G}_\tau$  si et seulement si  $\text{std}(w_1 \dots w_n) = \sigma$  et  $\text{std}(w_{n+1} \dots w_{n+m}) = \tau$ , ce qui arrive si et seulement si  $\text{std}(\nu_1 \dots \nu_n) = \sigma$  et  $\text{std}(\nu_{n+1} \dots \nu_{n+m}) = \tau$ .

Noter que les équations (1.38) et (1.17) nous donnent directement la règle de multiplication des  $\mathbb{F}$  :

$$\mathbb{F}_\sigma \mathbb{F}_\tau = \sum_{\nu \in \sigma \bar{\cup} \tau} \mathbb{F}_\nu. \quad (1.44)$$

Donnons un exemple de multiplication de ces bases. Soient  $\sigma = 21$  et  $\tau = 1$ .

$$\mathbb{G}_{21} \mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_{213} + \mathbb{G}_{312} + \mathbb{G}_{321}; \quad (1.45)$$

$$\mathbb{F}_{21} \mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_{213} + \mathbb{F}_{231} + \mathbb{F}_{321}. \quad (1.46)$$

On a donc une structure d'algèbre sur les éléments  $\mathbb{G}_\sigma$ . La définition du coproduit n'est pas celle de la section 1.3.1 mais utilise toujours un doublement d'alphabet. Soit  $A'$  un second alphabet ordonné infini tel que les lettres de  $A$  soient considérées plus petites que les lettres de  $A'$  et qu'elles commutent avec les lettres de  $A'$ . L'alphabet formé de cette façon est noté  $A \oplus A'$ . Le coproduit sur  $\mathbb{G}_\sigma$  consiste à développer la somme sur  $A \oplus A'$  plutôt que sur  $A$ . Par exemple, si  $A = \{a, b, c, \dots\}$  et  $A' = \{a', b', c', \dots\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{312}(A \oplus A') &= baa + caa + cab + cbb + \dots \\ &\quad + a'aa + a'ab + a'bb + b'aa + \dots \\ &\quad + b'aa' + c'aa' + c'ab' + \dots \\ &\quad + b'a'a' + c'a'a' + c'a'b' + c'b'b' + \dots \end{aligned} \quad (1.47)$$

Comme les lettres de  $A$  et  $B$  commutent, on peut les réordonner pour séparer les deux alphabets et exprimer la somme dans  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  comme nous l'avons fait section 1.3.1 :



$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbb{G}_{312}) &= (baa \otimes \epsilon) + (caa \otimes \epsilon) + (cab \otimes \epsilon) + (cbb \otimes \epsilon) + \dots & (1.48) \\
&+ (aa \otimes a) + (ab \otimes a) + (bb \otimes a) + (aa \otimes b) + \dots \\
&+ (a \otimes ba) + (a \otimes ca) + (a \otimes cb) + \dots \\
&+ (\epsilon \otimes baa) + (\epsilon \otimes caa) + (\epsilon \otimes cab) + (\epsilon \otimes cbb) + \dots
\end{aligned}$$

Les séries qui apparaissent à gauche et à droite du signe  $\otimes$  correspondent à des éléments  $\mathbb{G}$  et on a

$$\Delta(\mathbb{G}_{312}) = \mathbb{G}_{312} \otimes 1 + \mathbb{G}_{12} \otimes \mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_1 \otimes \mathbb{G}_{21} + 1 \otimes \mathbb{G}_{312}. \quad (1.49)$$

Ici, 1 désigne l'unité de l'algèbre, c'est-à-dire  $1 = \mathbb{G}_\epsilon = \epsilon$ . De façon générale, dans  $\mathbb{G}_\sigma(A \oplus A')$ , les lettres de  $A'$  étant plus grandes que celles de  $A$ , elles correspondent aux valeurs les plus grandes de  $\sigma$  via la standardisation. De plus, dans le calcul de  $\Delta(\mathbb{G}_\sigma)$ , l'ordre des lettres primes et des lettres non primes est conservé. Ainsi, on a

**Proposition 1.3.9.**

$$\Delta(\mathbb{G}_\sigma) := \mathbb{G}_\sigma(A \oplus A') = \sum_{\sigma \in \tau \bar{\cup} \nu} \mathbb{G}_\tau \otimes \mathbb{G}_\nu. \quad (1.50)$$

De la même façon, on a

$$\Delta(\mathbb{F}_\sigma) = \sum_{\sigma \in \tau * \nu} \mathbb{F}_\tau \otimes \mathbb{F}_\nu. \quad (1.51)$$

Ce résultat est démontré dans [DHT02] et permet d'obtenir la proposition suivante.

**Proposition 1.3.10.** *L'algèbre des éléments  $(\mathbb{G}_\sigma)$  munie du produit de convolution (1.42) et du coproduit (1.50) est une algèbre de Hopf.*

On note cette algèbre **FQSym**. Ce résultat était déjà donné dans [MR95] en utilisant la base  $\mathbb{F}$  et démontré directement sur les permutations. Dans [DHT02], les auteurs utilisent comme nous l'avons vu le développement des éléments  $\mathbb{G}_\sigma$  comme sommes de mots. Dans ce cas, la preuve devient beaucoup plus simple car il ne reste à démontrer que la stabilité des éléments  $\mathbb{G}_\sigma$  par le produit et le coproduit. En effet, la co-associativité du coproduit est triviale car  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ . De même, la compatibilité du produit et du coproduit s'obtient facilement car, sur des alphabets infinis, le développement de  $\mathbb{G}_\sigma(A \oplus A')\mathbb{G}_\tau(A \oplus A')$  est équivalent au développement de  $\mathbb{G}_\sigma(A)\mathbb{G}_\tau(A)$ .

### 1.3.3 Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives est définie dans [GKL+95] comme une généralisation de l'algèbre des fonctions symétriques en remplaçant l'alphabet commutatif par un alphabet non-commutatif. Nous la définissons ici comme une sous-algèbre de **FQSym**, ce qui peut être obtenu à partir de [DHT02]. Cette algèbre est à l'origine de la théorie des algèbres de Hopf combinatoires développée depuis la fin du XX-ième siècle.

**Définition**

Considérons la sous-algèbre **Sym** de **FQSym** engendrée par les  $\mathbb{G}_{12\dots n}$  pour  $n \geq 0$ .

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $n \geq 0$  et  $S_n = \mathbb{G}_{12\dots n}$ . L'algèbre engendrée par les  $S_n$  est l'algèbre libre à un générateur par degré.*

La preuve de cette proposition repose sur le fait que pour toute composition  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , on a

$$S_{i_1} \dots S_{i_k} = \sum_{\text{Des}(w) \preceq I} w. \quad (1.52)$$

En effet, puisque  $S_i$  est la somme des mots croissants de longueur  $i$ , si  $w$  apparaît dans  $S_{i_1} \dots S_{i_k}$  alors les descentes de  $w$  sont incluse dans  $\text{Des}(I)$ . Réciproquement, si  $w$  est tel que  $\text{Des}(w) \preceq I$  alors les  $k$  facteurs successifs de  $w$  de longueurs  $i_1$  jusqu'à  $i_k$  sont croissants.

*Démonstration.* Soit  $I = (i_1, \dots, i_k)$  une composition de  $n$ . Montrons par récurrence sur  $k$  que le produit  $S_{i_1} \dots S_{i_k}$  ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de produits de longueur inférieure ou égale à  $k$ . Si  $k = 1$ , le produit est réduit à  $S_n$  qui est un des générateurs. Pour  $k > 1$ , le produit contient la somme des mots dont la composition des descentes est  $I$ . C'est le seul produit d'au plus  $k$  termes contenant ces mots. Ainsi, on ne peut pas le décomposer.  $\square$

Puisque **Sym** est l'algèbre libre à un générateur par degré, ses bases vectorielles sont de dimension  $2^{n-1}$  en degré  $n$ . On les indexera par les compositions. La première base qui nous intéresse est la base des *fonctions complètes non-commutatives*  $S^I$  qui est multiplicative :

$$S^I := S_{i_1} \dots S_{i_k} = \sum_{\text{Des}(w) \preceq I} w = \sum_{\text{Des}(\sigma) \preceq I} \mathbb{G}_\sigma. \quad (1.53)$$

Pour toute composition  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , soit

$$R_I := \sum_{\text{Des}(w)=I} w = \sum_{\text{Des}(\sigma)=I} \mathbb{G}_\sigma \quad (1.54)$$

le terme de tête de  $S^I$ . On a clairement

$$S^I = \sum_{J \preceq I} R_J. \quad (1.55)$$

Il se trouve que l'on peut exprimer les  $R_I$  en fonction des  $S^J$  : pour inverser la formule (1.55), on utilise la fonction de Möbius associée à la relation d'ordre  $\preceq$ .

**Proposition 1.3.12.** *Pour toute composition  $I$ , on a*

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J. \quad (1.56)$$

La base  $(R_I)$  est appelée la *base des rubans* de **Sym**. Son produit est décrit par la relation suivante :

$$R_I R_J = R_{I \cdot J} + R_{I \triangleright J}. \quad (1.57)$$

On rappelle que pour deux compositions  $I = (i_1, \dots, i_r)$  et  $J = (j_1, \dots, j_s)$ , la composition  $I \cdot J$  est la concaténation des deux compositions et  $I \triangleright J = (i_1, \dots, i_{r-1}, i_r + j_1, j_2, \dots, j_s)$ . Cette formule est obtenue en observant que la concaténation de deux mots ne change pas les descentes de ces mots et crée ou non une descente entre les deux mots. Ainsi, on a par exemple :

$$R_{113} R_{21} = R_{11321} + R_{1151}. \quad (1.58)$$

### Lien avec les fonctions symétriques

Considérons  $\phi_X$  l'application de *spécialisation commutative* qui envoie un monôme non-commutatif sur son analogue commutatif. Par exemple,

$$\phi_X(\text{abba}) = x_1^2 x_2^2 x_4. \quad (1.59)$$

En appliquant  $\phi_X$  aux séries  $S_n$ , on obtient des *polynômes symétriques* appelés les *fonctions homogènes complètes*  $h_n(X)$  :

$$h_n(X) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}. \quad (1.60)$$

De nombreuses propriétés de l'algèbre des polynômes symétriques se relèvent à **Sym**. En particulier, considérons la série génératrice des  $S_n$  :

$$G(t) := \sum_{n \geq 0} S_n t^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} t^n. \quad (1.61)$$

On a alors

$$G(t) = \overrightarrow{\prod}_{n \geq 1} \frac{1}{1 - ta_n}, \quad (1.62)$$

où  $\overrightarrow{\prod}_{n \geq 1}$  signifie qu'on effectue le produit pour les  $n$  croissants de gauche à droite. Soit  $E(t)$  la série inverse de  $G(t)$  :

$$E(t) := \overleftarrow{\prod}_{n \geq 1} (1 - ta_n). \quad (1.63)$$

On notera que le produit s'effectue dans le sens opposé à celui de  $G(t)$ . On a alors

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \Lambda_n t^n \quad (1.64)$$

avec

$$\Lambda_n = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1}. \quad (1.65)$$

Les  $\Lambda_n$  forment ainsi une autre base multiplicative de **Sym** appelée la base des *fonctions élémentaires non commutatives*. Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\phi_X(\Lambda_n) = e_n$  où  $e_n$  est la base des *fonctions élémentaires* de l'algèbre des polynômes symétriques. De plus, les séries génératrices des  $h_n$  et  $e_n$  sont également inverses l'une de l'autre.

### Coproduits

Puisque pour tout  $n \geq 0$ , on a  $S_n = \mathbb{G}_{12\dots n}$ , on calcule le coproduit de  $S_n$  simplement en utilisant celui de  $\mathbb{G}_{12\dots n}$  décrit par l'équation (1.50). On a

$$\Delta(S_n) = \sum_{i=0}^n S_i \otimes S_{n-i}. \quad (1.66)$$

De plus, en utilisant le fait que le coproduit est un morphisme d'algèbre et le fait que la base  $S$  soit multiplicative, on démontre aisément la propriété suivante :

**Proposition 1.3.13.** *Soit  $I = (i_1, \dots, i_r)$  une composition. On a*

$$\Delta(S^I) = \sum_{k_1=0}^{i_1} \sum_{k_2=0}^{i_2} \dots \sum_{k_r=0}^{i_r} S^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} \otimes S^{(i_1-k_1, i_2-k_2, \dots, i_r-k_r)}. \quad (1.67)$$

Ainsi par exemple,

$$\Delta(S^{21}) = S^{21} \otimes 1 + S^2 \otimes S^1 + S^{11} \otimes S^1 + S^1 \otimes S^{11} + S^1 \otimes S^2 + 1 \otimes S^{21}. \quad (1.68)$$

Le coproduit de la base des rubans est quant à lui beaucoup plus compliqué. En effet, étant donnée une composition  $I = (i_1, \dots, i_r)$ , pour calculer le coproduit de  $R_I$ , il faut calculer ce qui arrive à l'ensemble des descentes d'une permutation ayant comme ensemble des descentes  $I$ , une fois que l'on retire les  $k$  valeurs les plus grandes. Cela nécessite de traiter de nombreux cas et sous-cas puisque les valeurs retirées peuvent, ou non, contribuer aux descentes de la permutation.

### 1.3.4 Algèbre des compositions segmentées

Dans [NT07], les auteurs introduisent plusieurs algèbres de Hopf dont une algèbre indexée par les compositions segmentées, **SCQSym**. Une façon de la décrire est d'utiliser la réalisation polynomiale donnée dans [NT06].

**Définition 1.3.14.** *Soit  $u = u_1 \dots u_n$  un mot sur l'alphabet ordonné  $A$ . La suite de relation de  $u$  est la suite  $w$  de symboles choisis parmi  $\{<, >, =\}$  telle que pour tout  $i < n$ , on a :*

$$w_i = \begin{cases} < & \text{si } u_i < u_{i+1} ; \\ > & \text{si } u_i > u_{i+1} ; \\ = & \text{si } u_i = u_{i+1}. \end{cases} \quad (1.69)$$

La composition segmentée de relation  $I$  de  $u$  est la composition segmentée dont l'ensemble des descentes est l'ensemble des positions des symboles  $=$  et dont l'ensemble des segmentations est l'ensemble des positions des symboles  $>$ . On le note  $\mathbf{I} = \text{rel}(u)$ .

Par exemple, pour  $u = 1615116244543$ , on a la suite et la composition des relation suivantes :

$$\langle \rangle \langle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \iff 2|2|12|22|1|1. \quad (1.70)$$

En s'inspirant de la base des rubans de **Sym**, on définit alors la série

$$R_{\mathbf{I}} = \sum_{\text{rel}(u)=\mathbf{I}} u. \quad (1.71)$$

On a alors la propriété suivante [NT06] :

**Proposition 1.3.15.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. Le produit  $R_{\mathbf{I}}R_{\mathbf{J}}$  s'exprime comme une somme de  $R_{\mathbf{K}}$  de la façon suivante :*

$$R_{\mathbf{I}}R_{\mathbf{J}} = R_{\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}} + R_{\mathbf{I}|_{\mathbf{J}}} + R_{\mathbf{I}\triangleright\mathbf{J}}. \quad (1.72)$$

Cette proposition repose sur le fait que lorsque l'on concatène deux mots  $u$  et  $v$ , les comparaisons entre les valeurs à l'intérieur de ces mots ne changent pas. De plus, suivant la valeur de la dernière lettre de  $u$  et de la première lettre de  $v$ , on peut obtenir les trois relations de comparaison.

Pour illustrer la proposition 1.3.15, on se restreint à l'alphabet  $A = \{a, b, c\}$ .

$$R_{1|1}R_1 = (ba + ca + cb)(a + b + c) \quad (1.73)$$

$$= baa + bab + bac + caa + cab + cac + cba + cbb + cbc \quad (1.74)$$

$$= (baa + caa + cbb) + cba + (bab + bac + cab + cac + cba + cbc) \quad (1.75)$$

$$= R_{1|11} + R_{1|1|1} + R_{1|2}. \quad (1.76)$$

Dans [NT07], les auteurs démontrent que l'algèbre engendrée par la base des  $R_{\mathbf{I}}$  est libre sur  $2^{n-1}$  générateurs par degré.

Il existe plusieurs façons de généraliser la relation d'ordre de raffinement des compositions et donc plusieurs façons de généraliser la base des fonctions complètes non commutatives. En utilisant les relations  $\succeq$  et  $\geq$  définies section 1.1.7, on définit les deux bases suivantes. Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée. Alors

$$P_{\mathbf{I}} := \sum_{\mathbf{J} \preceq \mathbf{I}} R_{\mathbf{J}}; \quad (1.77)$$

$$S^{\mathbf{I}} := \sum_{\mathbf{J} \leq \mathbf{I}} R_{\mathbf{J}}. \quad (1.78)$$

Les changements de base inverses sont :

$$R_{\mathbf{I}} = \sum_{\mathbf{J} \preceq \mathbf{I}} (-1)^{\ell(\mathbf{I}) - \ell(\mathbf{J})} P_{\mathbf{J}}; \quad (1.79)$$

$$R_{\mathbf{I}} = \sum_{\mathbf{J} \leq \mathbf{I}} (-1)^{\text{des}(\mathbf{I}) - \text{des}(\mathbf{J})} S^{\mathbf{J}}. \quad (1.80)$$

On montre aisément que  $P_{\mathbf{I}}$  est la somme des mots  $w$  tels que  $\text{Des}(w) = \text{Seg}(\mathbf{I})$  et qui sont strictement croissants ailleurs avec égalité possible aux positions dans  $\text{Des}(\mathbf{I})$ . On obtient alors la propriété suivante.

**Proposition 1.3.16.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. On a*

$$P_{\mathbf{I}}P_{\mathbf{J}} = P_{\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}} + P_{\mathbf{I}\uplus\mathbf{J}}. \quad (1.81)$$

De la même façon, la fonction  $S_{\mathbf{I}}$  correspond à la somme sur les mots  $w$  tels que  $w_i > w_{i+1}$  si  $i \in \text{Seg}(\mathbf{I})$ ,  $w_i < w_{i+1}$  si  $i \notin \text{Seg}(\mathbf{I})$  et  $i \notin \text{Des}(\mathbf{I})$  et il n'y a pas de contrainte entre  $w_i$  et  $w_{i+1}$  si  $i \in \text{Des}(\mathbf{I})$ . Ainsi, on a la proposition suivante.

**Proposition 1.3.17.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. On a*

$$S^{\mathbf{I}}S^{\mathbf{J}} = S^{\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}}. \quad (1.82)$$

La base  $(S^{\mathbf{I}})$  est donc une base multiplicative. C'est pourquoi nous utilisons la notation en exposant pour les compositions segmentées en général et en indice quand  $\text{Des}(\mathbf{I}) = \emptyset$ . Par exemple, on a

$$S^{21|3|22|1} = S_2S_{1|3|2}S_{2|1}. \quad (1.83)$$

### 1.3.5 Des bases de Sym en lien avec le PASEP

#### Définition des bases monomiale et fondamentale

En s'inspirant de la définition récursive de la *base monomiale* de l'algèbre des fonctions symétriques, Tevlin définit une *base monomiale* de **Sym** dans [Tev07] comme suit.

**Définition 1.3.18.** *Soit  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Pour tout  $n$ , soit*

$$M_n := \sum_{i \geq 1} a_i^n. \quad (1.84)$$

Pour tout  $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ , on définit  $M_I$  en utilisant la relation suivante :

$$rM_{i_1, \dots, i_r} = M_{i_1}M_{i_2, \dots, i_r} - (r-1)M_{i_1+i_2, i_3, \dots, i_r}. \quad (1.85)$$

La proposition suivante découle assez naturellement de la définition.

**Proposition 1.3.19** ([Tev07]). *Étant données deux compositions  $I$  et  $J$ , on a*

$$M_I M_J = \sum_K C_{I,J}^K = \binom{\ell(K)}{\ell(I)} M_K, \quad (1.86)$$

où la somme porte sur les compositions  $K$  s'écrivant  $K = K' \cdot J$  ou  $K = K' \triangleright J$  avec  $K' \preceq I$ .

Par exemple, si  $I = 31$  et  $J = 21$ , les compositions moins fines que  $I$  sont  $31$  et  $4$ . Ainsi,

$$M_{31}M_{21} = 6M_{3121} + 3M_{331} + 3M_{421} + M_{61}. \quad (1.87)$$

Dans [Tev07], l'auteur définit également la *base fondamentale*  $L_I$  de **Sym**.

**Définition 1.3.20.** *Soit  $I$  une composition. Alors*

$$L_I := \sum_{J \succeq I} M_J. \quad (1.88)$$

En s'inspirant des changements de base entre la base complète et la base des rubans donnés aux équations (1.55) et (1.56), on en déduit le changement de base inverse :

$$M_I = \sum_{J \succeq I} (-1)^{\ell(J) - \ell(I)} L_J. \quad (1.89)$$

En utilisant le produit de la base monomiale et le changement de base ci-dessus, on a la proposition suivante.

**Proposition 1.3.21** ([Tev07]). *Soit  $I$  et  $J$  deux compositions. On a*

$$L_I L_J = \sum_K \binom{|I| + \ell(J) - \ell(I)}{\ell(K) - \ell(I)} L_K, \quad (1.90)$$

où la somme porte sur les compositions  $K$  s'écrivant  $K = K' \cdot K''$  ou  $K = K' \triangleright K''$  avec  $K' \preceq I$  et  $K'' \succeq J$ .

Par exemple, pour  $I = 31$  et  $J = 21$ , les compositions moins fines que  $I$  sont  $31$  et  $4$  et les compositions plus fines que  $J$  sont  $21$  et  $111$ . Ainsi,

$$L_{31}L_{21} = 6L_{3121} + 4L_{331} + 4L_{421} + L_{61} + 4L_{31111} + 6L_{3211} + 6L_{4111} + 4L_{511}. \quad (1.91)$$

Pour calculer le coefficient devant chaque terme, on a  $|I| + \ell(J) - \ell(I) = 4$ , on calcule donc  $\binom{4}{|K|-2}$ .

### Lien avec le PASEP

Dans [HNTT09], les auteurs se sont intéressés aux matrices de changement de bases entre la base des rubans et la base fondamentale définie ci-dessus. On a représenté ci-dessous cette matrice pour  $n = 4$ . Les points représentent les coefficients nuls.

$$RL_4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

On a alors l'interprétation combinatoire suivante des coefficients.

**Théorème 1.3.22** ([HNTT09]). *Soit  $J$  une composition de  $n$ . On a*

$$R_J = \sum_{I \models n} F_I^J L_I, \quad (1.93)$$

où  $F_I^J$  compte le nombre de permutations  $\sigma$  vérifiant  $\text{Rec}(\sigma) = J$  et  $\text{GC}(\sigma) = I$ .

On rappelle que la statistique GC définie section 1.2.2 correspond aux valeurs de descentes d'une permutation.

Pour démontrer l'équation (1.93), les auteurs de [HNTT09] utilisent le développement de la base des rubans sur la base  $\mathbb{G}$  de **FQSym** donnée à l'équation (1.54). Ils utilisent ensuite le fait qu'il est possible de quotienter la base  $\mathbb{G}$  par la relation d'équivalence  $\sim$  sur les permutations où  $\sigma \sim \tau$  si et seulement si  $\text{GC}(\sigma) = \text{GC}(\tau)$ . Ce quotient fournit une algèbre isomorphe à **Sym** et envoie la base  $\mathbb{G}_\sigma$  sur la base  $L_{\text{GC}(\sigma)}$ . Nous utiliserons ce genre de raisonnement dans la section 4.2.2 quand nous donnerons une interprétation combinatoire d'une généralisation de ces matrices.

Étant donné qu'on a montré section 1.2.2 que la statistique des descentes de Genocchi permet de donner une interprétation combinatoire des probabilités du PASEP, le théorème 1.3.22 implique que les sommes des coefficients sur les lignes de  $RL_n$  redonnent les probabilités stationnaires du PASEP. Ainsi, chaque ligne de ces matrices nous donne un raffinement de ces probabilités.

Dans le but d'obtenir de nouveaux résultats associés au PASEP, Novelli, Thibon et Williams ont défini un  $q$ -analogue de **Sym** dans [NTW10] de sorte que les coefficients de changement de base entre la base des rubans et la base fondamentale fournisse un raffinement des probabilités du PASEP pour des valeurs générales du paramètre  $q$ . Pour ce faire, ils définissent un  $q$ -analogue de la base complète  $S^J(q)$  en définissant produit non associatif sur ces éléments. Ils calculent ensuite la matrice de changement de base entre cette nouvelle base et la base monomiale dont un exemple est donné à l'équation (1.94) pour  $n = 4$ .

$$SM_4(q) = \begin{pmatrix} [1]_q & [1]_q & [1]_q & [1]_q & [1]_q & [1]_q & [1]_q & [1]_q \\ [1]_q & [4]_q & [3]_q & [2]_q[3]_q & [2]_q & [2]_q[3]_q & [2]_q[2]_q & [2]_q[2]_q[2]_q \\ [1]_q & [1]_q & [3]_q & [3]_q & [2]_q & [2]_q & [2]_q[2]_q & [2]_q[2]_q \\ [1]_q & [4]_q & [4]_q[3]_q/[2]_q & [3]_q[4]_q & [3]_q & [3]_q[3]_q & [3]_q[3]_q & [2]_q[3]_q[3]_q \\ [1]_q & [1]_q & [1]_q & [1]_q & [2]_q & [2]_q & [2]_q & [2]_q \\ [1]_q & [4]_q & [3]_q & [2]_q[3]_q & [3]_q & [3]_q[3]_q & [2]_q[3]_q & [2]_q[2]_q[3]_q \\ [1]_q & [1]_q & [3]_q & [3]_q & [3]_q & [3]_q & [2]_q[3]_q & [2]_q[3]_q \\ [1]_q & [4]_q & [4]_q[3]_q/[2]_q & [3]_q[4]_q & [4]_q & [3]_q[4]_q & [3]_q[4]_q & [2]_q[3]_q[4]_q \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

Les auteurs de [NTW10] donnent alors une interprétation de ces coefficients en termes de certaines matrices à coefficients entiers ou en termes de *mots tassés*. Ils donnent également une description récursive des coefficients. On note  $C_I^J(q)$  le coefficient de  $M_I$  dans  $S^J(q)$  :

$$S^J(q) = \sum_{I \models n} C_I^J M_I. \quad (1.95)$$



On a alors la description suivante.

**Théorème 1.3.23** ([NTW10]). *Soient  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et  $J = (j_1, \dots, j_l)$  deux compositions de  $n$ . Le coefficient  $C_I^J$  est décrit par la règle suivante :*

1. si  $i_1 < j_1$ , alors  $C_I^J = C_{i_1+i_2, i_3, \dots, i_k}^J$ ,
2. sinon,

$$C_I^J(q) = \begin{bmatrix} k + j_1 - 1 \\ j_1 \end{bmatrix}_q C_{I'}^{(j_2, \dots, j_l)}(q) \quad (1.96)$$

où  $I'$  est obtenue en soustrayant  $j_1$  à la première part de  $I$ .

Nous aurons également besoin de leur définition des  $q$ -rubans :

$$R_I(q) := \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I) - \ell(J)} S^J(q). \quad (1.97)$$

Nous donnons un exemple de la matrice de changement de base entre la base des  $q$ -rubans et la base monomiale à l'équation (1.98) pour  $n = 4$ .

$$RP_4(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q[3]_q & q+q^2 & \cdot & q & q^2 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & q+q^2 & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q[3]_q & q+2q^2+q^3+q^4 & q^3[3]_q & q+q^2 & q^2+q^3+q^4 & q^3 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q[3]_q & q+q^2 & \cdot & q+q^2 & q^2+q^3+q^4 & q^3 & \cdot \\ 1 & \cdot & q+q^2 & \cdot & q+q^2 & \cdot & q^3 & \cdot \\ 1 & q[3]_q & q+2q^2+q^3+q^4 & q^3[3]_q & q[3]_q & q^2+q^3+2q^4+q^5 & q^3[3]_q & q^6 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

Afin de décrire les coefficients de ces matrices de changement de base, les auteurs de [NTW10] ont utilisé les statistiques suivantes sur les mot tassés.

**Définition 1.3.24.** *Soit  $w$  un mot tassé. La composition des mots de  $w$  (notée  $WC(w)$ ) est la composition dont l'ensemble des descentes est l'ensemble des positions des dernières occurrences de chaque valeur de  $w$ .*

*Une inversion spéciale d'un mot tassé  $w$  est une inversion  $w_i = b > w_j = a$  (où  $i < j$ ) de sorte que  $j$  est la position de la dernière occurrence de  $a$ . On note  $\text{sinv}(u)$  le nombre d'inversions spéciales de  $u$ .*

Par exemple, pour  $w = 143425323$ , la dernière occurrence des 1 est en position 1, le dernier 4 est en position 4, le dernier 5 est en position 6, le dernier 2 est en position 8 et le dernier 3 est en position 9. Ainsi,  $WC(1543421323) = 13221$ . Le mot tassé  $w = 1143425323$  a 15 inversions dont 7 inversions spéciales. Les inversions spéciales sont aux positions  $\{(2, 8), (2, 9), (3, 8), (4, 8), (4, 9), (6, 8), (6, 9)\}$ .

Un tableau triant les mot tassés de longueur 2 et 3 suivant leurs composition des mots est donné en figure 1.17.

Si on note  $D_I^J(q)$  le coefficient de  $M_I$  dans le développement de  $R_J(q)$ , ces coefficients sont décrits dans la proposition suivante.



$$RL_4(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1+q+q^2 & 1+q & \cdot & 1 & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1+q & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & 1+q+q^2 & \cdot & 1+q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

Dans [NTW10], les auteurs interprètent les coefficients de ces matrices en utilisant des statistiques sur les permutations. Afin de simplifier une de leurs statistiques et de simplifier la compréhension du chapitre 2, nous les décrivons ici en utilisant les *fonctions sous-excédentes*. Une fonction sous-excédente de longueur  $n$  est un mot  $u$  sur les lettres  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  vérifiant  $0 \leq u_i \leq n-i$  pour tout  $i \leq n$ . Par exemple, le mot 315503200 est une fonction sous-excédente.

On montre aisément qu'il y a  $n!$  fonctions sous-excédentes de longueur  $n$ . Une bijection standard entre les permutations et les fonctions sous-excédentes consiste à prendre le code de Lehmer d'une permutation  $\sigma$ ; il s'agit du mot  $u$  tel que  $u_i$  est égal au nombre de valeurs inférieures à  $\sigma_i$  à droite de  $\sigma_i$ . Pour retrouver les résultats de [NTW10] à partir des description que nous donnons, il faut considérer le code de Lehmer de l'inverse des permutations.

Afin de décrire les coefficients des matrices  $RL_n(q)$  et  $SL_n(q)$ , les auteurs de [NTW10] ont défini la statistique suivante.

**Définition 1.3.26.** *Soit  $u$  une fonction sous-excédente de longueur  $n$ . La statistique  $LC(u)$  est construite en suivant les étapes suivantes :*

- Soit  $S = \emptyset$ . On lit les valeurs de  $Lh(\sigma)$  de droite à gauche. À chaque étape, si la valeur  $k$  est plus grande que la taille de  $S$ , on ajoute la  $(k - |S|)$ -ième valeur de  $\{1, \dots, n\} \setminus S$  à  $S$ .
- Soit  $C$  la composition dont l'ensemble des descentes est  $S$ . Alors  $LC(\sigma)$  est l'image miroir  $\overline{C}$  de  $C$ .

Par exemple, pour  $u = 315503200$ , on commence par  $S = \emptyset$ . On a ensuite  $S = \{2\}$  à la troisième étape puis  $S = \{2, 3\}$  à la quatrième étape, puis  $\{2, 3, 5\}$  à la sixième étape, puis  $\{2, 3, 4, 5\}$  à la septième étape et ne bouge alors plus jusqu'à la fin. Ainsi,  $C = 21114$  et donc  $LC(u) = 41112$ .

On définit également le *nombre d'inversions* d'une fonction sous-excédente  $u$  (noté  $\text{inv}(u)$ ) comme la somme des valeurs de  $u$ . De plus, la *composition des descentes* de  $u$  (noté  $\text{Des}(u)$ ) correspond à la définition de composition des descentes d'un mot définie section 1.1.2.

On a alors les interprétations combinatoires suivantes.

**Théorème 1.3.27** ([NTW10]). *Soient  $I$  et  $J$  deux compositions de  $n$ . On note  $PP(I, J)$  l'ensemble des fonctions sous-excédentes dont la statistique  $LC$  est égale à  $I$  et la statistique*

des reculs est plus fine que  $J$ . On a

$$S^J = \sum_{I \models n} E_I^J(q) L_I(q), \quad (1.104)$$

avec

$$E_I^J(q) = q^{\text{maj}(\bar{J})} \sum_{u \in PP} q^{\text{inv}(u)}. \quad (1.105)$$

De la même façon, si  $PP'(I, J)$  est l'ensemble des fonctions sous-excédentes dont la statistique LC est égale à  $I$  et la statistique des reculs est égale à  $J$ , on a

$$R_J = \sum_{I \models n} F_I^J(q) L_I(q), \quad (1.106)$$

avec

$$F_I^J(q) = q^{\text{maj}(\bar{J})} \sum_{u \in PP'} q^{\text{inv}(u)}, \quad (1.107)$$

où on rappelle que l'indice majeur d'une composition  $I$  est défini section 1.1.2 et est égal à la somme des valeurs de  $\text{Des}(I)$ .

Les auteurs de [NTW10] conjecturent que les coefficients  $F_I^J(q)$  peuvent également être décrits de la façon suivante :

$$F_I^J(q) = \sum_{\substack{\text{GC}(\sigma)=I \\ \text{Rec}(\sigma)=J}} q^{\text{tot}(\sigma)}. \quad (1.108)$$

Nous prouvons cette conjecture bijectivement au prochain chapitre. Pour une meilleure lisibilité, nous noterons  $\eta(u)$  le nombre  $\text{maj}(\overline{\text{LC}(u)}) - \text{inv}(u)$ .



## Chapitre 2

# Équidistribution de statistiques sur les permutations

Dans ce chapitre, nous démontrons la conjecture de [NTW10] décrite section 1.3.5. Cette conjecture énonce que le triplet de statistiques (GC, Rec, tot) donne une interprétation combinatoire des coefficients de la matrice de changement de bases entre la base des  $q$ -rubans et la base des  $q$ -fondamentales de **Sym**. Nous notons cette matrice  $RL_n(q)$ . Pour démontrer cette conjecture, nous démontrons bijectivement que le triplet de statistiques (GC, Rec, tot) a la même distribution sur les permutations que le triplet de statistiques (LC, Rec,  $\eta$ ). Puisque ce second triplet de statistiques se décrit naturellement sur les fonctions sous-excédentes comme nous l'avons fait section 1.2, et afin de gagner en clarté, nous construisons une bijection entre les permutations et les fonctions sous-excédentes envoyant le triplet de statistiques (GC, Rec, tot) sur le triplet (LC, DC,  $\eta$ ). Cette bijection se découpe en une suite de bijections au travers de plusieurs objets combinatoires :

$$P \xleftrightarrow{\psi_{FV}} HL \xleftrightarrow{\psi} HLL \xleftrightarrow{\phi_2} FSDP \xleftrightarrow{\phi_1} FS, \quad (2.1)$$

où P, HL, HLL, FSDP et FS sont respectivement les permutations, les histoires de Laguerre, les histoires de Laguerre larges, les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées et les fonctions sous-excédentes. L'idée principale est d'envoyer les permutations et les fonctions sous-excédentes sur des objets catalans pondérés ayant la même distribution de pondérations et de sorte que cette pondération raffine la troisième statistique des triplets. Pour ce faire, on utilise la bijection de Françon-Viennot définie à la section 1.1.5 d'un côté et on définit une nouvelle bijection  $\phi_1$  construisant un objet catalan à partir d'une fonction sous-excédente. Afin d'éviter les confusions entre conventions et pour simplifier la description de la bijection  $\psi$ , nous utiliserons la représentation des histoires de Laguerre et des histoires de Laguerre larges en termes de chemins de Dyck pondérés (CDP) donnée à la section 1.1.5. Le diagramme (2.1) devient :

$$P \xleftrightarrow[\text{2.1.1}]{\psi_{FV}} CDP \xleftrightarrow[\text{2.1.2}]{\psi} CDP \xleftrightarrow[\text{2.2.2}]{\phi_2} FSDP \xleftrightarrow[\text{2.2.1}]{\phi_1} FS. \quad (2.2)$$

Sous chaque bijection, on a indiqué dans quelle sous-section de ce chapitre elle est étudiée.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous étudions ce qu'il advient du triplet de statistiques (GC, Rec, tot), lorsque l'on utilise l'autre convention pour la bijection de Françon-Viennot pour retourner aux permutations à partir des histoires de Laguerre larges dans le diagramme (2.1). On obtient le diagramme suivant :

$$P \xleftrightarrow{\psi_{FV}} CDP \xleftrightarrow{\psi} CDP \xleftrightarrow{\psi_{FV}^0} P. \quad (2.3)$$

Ceci définit un autre triplet de statistiques sur les permutations (GC<sup>0</sup>, Rec, tot) très proche du premier donnant une nouvelle interprétation combinatoire des coefficients de la matrice  $RL_n(q)$ . On montre au passage que la bijection ainsi définie a également la propriété de préserver les classes co-sylvestres des permutations.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [Num18a]. Dans la section 2.1, nous étudions la bijection de Françon-Viennot  $\psi_{FV}$  et définissons une involution sur les chemins de Dyck pondéré  $\psi$ . Nous construisons un objet Catalan pondéré à partir d'une fonction sous-excédente section 2.2 en utilisant la bijection  $\phi_1$  puis nous décrivons la bijection  $\phi_2$ , une bijection catalane entre fonctions sous-excédentes décroissantes et chemins de Dyck pondérés. Nous démontrons la conjecture de [NTW10] section 2.3 et nous donnons d'autres propriétés de la bijection globale ainsi définie. Enfin, nous définissons une nouvelle bijection préservant les classes co-sylvestres section 2.4, ainsi qu'un autre triplet de statistiques sur les permutations.

## 2.1 Des permutations vers les chemins de Dyck pondérés

Considérons comment évolue le triplet de statistiques (GC, Rec, tot) en utilisant la bijection de Françon-Viennot. Comme précisé ci-dessus, nous représenterons les histoires de Laguerre en termes de chemins de Dyck pondérés en utilisant l'algorithme 1.1.20. Cette représentation étant naturelle, nous identifierons  $\psi_{FV}$  à la bijection obtenue en composant cette fonction avec la fonction envoyant une histoire de Laguerre sur un chemin de Dyck pondéré.

### 2.1.1 Les statistiques via la bijection de Françon-Viennot

**Définition 2.1.1.** *Soit  $(D, w)$  un chemin de Dyck pondéré de taille  $n$ .*

- *Le poids total de  $(D, w)$  (noté  $\text{tw}(D, w)$ ) est la somme des valeurs de  $w$ .*
- *L'ensemble des descentes de  $(D, w)$  est*

$$\text{Des}(D, w) = \{i \mid w_i > w_{i+1}\} \cup \{i \mid w_i = w_{i+1}, D_{2i} = /\} \quad (2.4)$$

*et la composition des descentes  $\text{DC}(D, w)$  est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{Des}(D, w)$ .*

— L'ensemble des descentes de Genocchi de  $(D, w)$  est

$$\text{GDes}(D, w) = \{i \in [2, n] \mid D_{2i-1} = \backslash\} \tag{2.5}$$

et, comme pour les permutations, la composition des descentes de Genocchi de  $(D, w)$  (noté  $\text{GC}(D, w)$ ) est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\{d-1 \mid d \in \text{GDes}(D, w)\}$ .

Sur le chemin de Dyck pondéré  $(D, w)$  de la figure 2.1 on a  $\text{tw}(D, w) = 5$ . Les positions  $i$  telles que  $D_{2i-1} = \backslash$  sont  $\text{GDes}(D, w) = \{5, 6, 7, 8\}$  et donc  $\text{GC}(D, w) = (4, 1, 1, 1, 2)$ . On pourra vérifier par ailleurs que  $\text{DC}(D, w) = (1, 3, 2, 1, 2)$ .

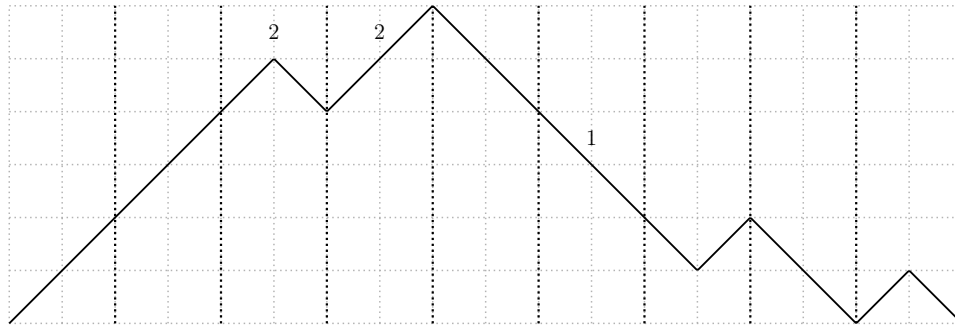


FIGURE 2.1 – Le chemin de Dyck pondéré de longueur 9 égal à  $\psi_{FV}(528713649)$ .

**Proposition 2.1.2.** Soit  $\sigma$  une permutation de taille  $n$  et  $(D, w) = \psi_{FV}(\sigma)$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\text{tw}(D, w) = \text{tot}(\sigma) ; \tag{2.6}$$

$$\text{GC}(D, w) = \text{GC}(\sigma) ; \tag{2.7}$$

$$\text{DC}(D, w) = \text{Rec}(\sigma). \tag{2.8}$$

On peut illustrer cette proposition sur la figure 2.1. En effet, pour  $\sigma = 528713649$ , on a bien  $\text{GC}(\sigma) = 41112$ ,  $\text{Rec}(\sigma) = 13212$  et  $\text{tot}(\sigma) = 5$ . On rappelle que les statistiques  $\text{Rec}$  et  $\text{tot}$  sont définies section 1.1.1 et la statistique  $\text{GC}$  section 1.2.2.

*Démonstration.* Les deux premières assertions découlent directement de notre description de  $\psi_{FV}$ . Pour démontrer la dernière, il est plus simple de considérer  $\psi_{FV}^{-1}$  qui construit une permutation  $\sigma$  à partir d'un chemin de Dyck pondéré  $(D, w)$ , comme décrit dans l'algorithme 1.1.18 via la correspondance entre les chemins de Dyck pondérés et les histoires de Laguerre. Soit  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Si  $w_k < w_{k+1}$ , alors  $k$  est à gauche de  $k+1$  dans  $\sigma$  donc ce n'est pas un recul de  $\sigma$ . En utilisant la même idée, si  $w_k > w_{k+1}$ , on montre que  $k$  est un recul de  $\sigma$ . Enfin, lorsque  $w_k = w_{k+1}$ ,  $k$  est un recul si et seulement s'il y a un  $\circ$  de créé lorsque l'on ajoute  $k$  dans  $\sigma$ , ce qui arrive si et seulement si  $D_{2k} = /$ .  $\square$



Nous avons maintenant une description du triplet de statistiques sur les chemins de Dyck pondérés mais la définition de GC sur ces objets n'est pas très naturelle. En effet, le fait que  $i$  appartienne à  $GDes(D, w)$  ou pas dépend du  $(i+1)$ -ième groupe de pas. Afin de simplifier la deuxième partie de la construction, nous modifions le chemin de Dyck pour nous donner une statistique plus naturelle.

### 2.1.2 Une involution sur les chemins de Dyck

**Définition 2.1.3.** Soit  $D$  un chemin de Dyck de longueur  $n$ . Le chemin de Dyck  $\psi(D)$  est obtenu en envoyant chaque paire de pas  $\setminus/$  en positions  $2i, 2i+1$  sur  $\setminus/$  et réciproquement.

Nous étendons cette définition aux chemins de Dyck pondérés en conservant la pondération. Notons qu'il s'agit d'une involution. Un exemple est donné en figure 2.2.

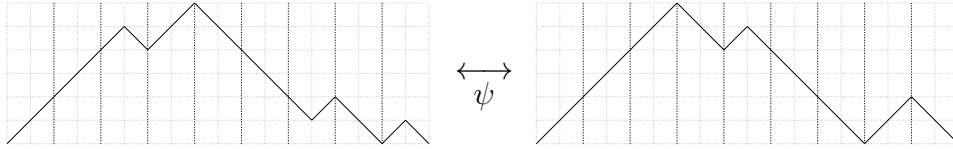


FIGURE 2.2 – Un exemple d'application de  $\psi$ .

La définition 2.1.3 définit  $\psi$  de façon visuelle. Une définition plus formelle peut être obtenue en utilisant le lemme suivant.

**Lemme 2.1.4.** Soit  $D$  un chemin de Dyck, on a :

$$\begin{cases} D_{2i} = \psi(D)_{2i+1} ; \\ D_{2i+1} = \psi(D)_{2i}. \end{cases} \quad (2.9)$$

*Démonstration.* Si  $D_{2i} = D_{2i+1}$  alors  $\psi$  ne change pas ces pas donc le résultat est clair. Sinon  $D_{2i} \neq D_{2i+1}$  et dans ce cas  $\psi$  échange ces deux valeurs, ce qui termine la preuve.  $\square$

Cette involution correspond à la deuxième partie du Diagramme (2.2).

$$P \xleftrightarrow{\psi_{FV}} CDP \xleftrightarrow{\psi} CDP \xleftrightarrow{\phi_2} FSDP \xleftrightarrow{\phi_1} FS$$

Cette bijection induit une variante de la bijection usuelle entre histoires de Laguerre et histoires de Laguerre larges utilisant les chemins de Dyck pondérés. En effet, l'involution  $\psi$  sur les chemins de Dyck peut s'interpréter comme le fait d'échanger les pas  $--\rightarrow$  et les pas  $\rightarrow$  sur les histoires de Laguerre larges. La variante que nous définissons permet de définir un analogue de la statistique GC sur une statistique très similaire. En revanche, cette bijection n'est pas intuitive sur les histoires de Laguerre sans passer par les chemins de Dyck. En effet, pour la décrire, on envoie chaque paire de pas de l'histoire de Laguerre

de départ sur un pas de l'histoire de Laguerre large d'arrivée et il faut traiter les 16 cas indépendamment.

Introduisons les nouvelles statistiques sur les chemins de Dyck pondérés correspondant à DC et GC après avoir appliqué  $\psi$ . Nous notons ces statistiques  $\text{DC}^0$  et  $\text{GC}^0$  car nous verrons section 2.4 qu'elles sont reliées aux statistiques de reculs et  $\text{GC}^0$  sur les permutations en utilisant la bijection de Françon-Viennot pour la convention  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$ .

**Définition 2.1.5.** *Les statistiques  $\text{GC}^0$  et  $\text{DC}^0$  sont définies comme suit.*

- L'ensemble des descentes de Genocchi de type 0 d'un chemin de Dyck pondéré de taille  $n$  est

$$\text{GDes}^0(D, w) = \{i \in [1, n-1] \mid D_{2i} = \setminus\} \quad (2.10)$$

et la composition des descentes de Genocchi de type 0 (noté  $\text{GC}^0(D, w)$ ) est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{GDes}^0(D, w)$ .

- L'ensemble des descentes de type 0 de  $(D, w)$  est

$$\text{Des}^0(D, w) = \{i \mid w_i > w_{i+1}\} \cup \{i \mid w_i = w_{i+1}, D_{2i+1} = /\} \quad (2.11)$$

et la composition des descentes de type 0 (noté  $\text{DC}^0(D, w)$ ) est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{Des}^0(D, w)$ .

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $(D, w)$  un chemin de Dyck pondéré, alors*

$$\text{tw}(\psi(D, w)) = \text{tw}(D, w) ; \quad (2.12)$$

$$\text{GC}^0(\psi(D, w)) = \text{GC}(D, w) ; \quad (2.13)$$

$$\text{DC}^0(\psi(D, w)) = \text{DC}(D, w). \quad (2.14)$$

*Démonstration.* Comme  $\psi$  ne change pas la pondération, le poids total est conservé.

Pour les deux autres assertions, les deux statistiques sont très proches et ne diffèrent que sur les positions des pas considérés et donc le lemme 2.1.4 termine la preuve.  $\square$

## 2.2 Des fonctions sous-excédentes vers les chemins de Dyck pondérés

Le but de cette section est de construire une bijection entre les fonctions sous-excédentes et les chemins de Dyck pondérés envoyant le triplet de statistiques  $(\text{LC}, \text{DC}, \text{inv} - \text{maj}(\overline{\text{LC}}))$  sur  $(\text{GC}^0, \text{DC}^0, \text{tw})$ . Pour ce faire, nous construisons une bijection entre fonctions sous-excédentes et un objet intermédiaire : les *fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées* qui sont représentées par un objet catalan et une pondération, puis on construit une bijection catalane entre fonctions sous-excédentes et chemins de Dyck.

### 2.2.1 Des fonctions sous-excédentes vers les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées

**Définition 2.2.1.** *Définissons une fonction sous-excédente décroissante pondérée de taille  $n$ .*

- Une fonction sous-excédente  $u$  de taille  $n$  est décroissante si le mot obtenu en retirant tous les 0 de  $u$  est strictement décroissant.
- Une pondération associée à une fonction sous-excédente décroissante est un mot  $w$  de taille  $n$  tel que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $w_k$  est inférieur ou égal au nombre de  $i < k$  tels que  $0 < u_i \leq n - k$  (i.e., le nombre de valeurs strictement positives à gauche de  $k$  qui pourraient être en position  $k$ ).

Par exemple, la fonction sous-excédente  $u = 540300200$  est décroissante. Pour ce qui est de la pondération associée, la *pondération maximale*  $W$  est celle pour laquelle chaque valeur est maximale, et est donc égale au nombre de valeurs non nulles à sa gauche inférieures ou égales à  $n$  moins sa position. La pondération maximale de  $u$  est 012221000 et donc la pondération 002201000 est valide puisque chaque valeur est plus petite que la valeur associée dans la pondération maximale, tandis que 000002000 ne l'est pas.

Les fonctions sous-excédentes décroissantes sont bien des objets catalans puisqu'il est possible de construire une bijection vers les fonctions de parking croissantes, les mots croissants dont la  $i$ -ème valeur est comprise entre 1 et  $i$  :

#### Algorithme 2.2.2.

- *Entrée* : une fonction sous-excédente décroissante  $u$ .
- *Sortie* : une fonction de parking  $v$ .
- *Exécution* :
  - $v$  est égal à l'image miroir de  $u$  ;
  - remplacer chaque 0 de  $v$  par la première valeur non-nulle à sa gauche (si elle existe) ;
  - ajouter 1 à toutes les valeurs de  $v$ .

Par exemple, pour  $u = 540300200$ , son image miroir est 002003045. L'étape suivante nous donne  $v = 002223345$  et la fonction de parking croissante associée est 113334456.

### Description de la bijection $\phi_1$ entre les fonctions sous-excédentes et les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées

Cette nouvelle bijection  $\phi_1$  peut être vue comme un algorithme qui trie une fonction sous-excédente en déplaçant successivement la plus grande valeur non triée à gauche.

#### Algorithme 2.2.3.

- *Entrée* : une fonction sous-excédente  $u$  de taille  $n$ .
- *Sortie* : une fonction sous-excédente décroissante pondérée  $(v, w)$ .

- *Initialisation* :  $v = u$  et  $w = O^n$ .
- *Exécution* :
  - *Étape 1* : le pivot est la plus grande valeur de  $v$  telle qu'une de ses occurrences ait des valeurs non nulles inférieures ou égales à sa gauche. S'il n'y a pas de pivot, l'algorithme termine. Sinon, soit  $k$  la position du pivot le plus à droite.
  - *Étape 2* : Soit  $M$  la valeur maximale parmi les valeurs inférieures ou égales au pivot sur sa gauche. Soit  $i$  la position du  $M$  le plus proche du pivot sur sa gauche. Décrémenter  $u_i$  de 1 puis échanger  $u_i$  et  $u_k$ . Incrémenter  $w_k$  de 1. Retourner à l'étape 1.

Définissons  $\phi_1(u)$  comme l'image  $(u, w)$  de cet algorithme.

Par exemple, pour  $u = 315503200$ , notre algorithme suit les étapes suivantes :

- 1)  $u = 315503200$ ,  $w = 000000000$ , alors *pivot* = 5,  $k = 4$  et  $i = 3$ ;
- 2)  $u = 31\mathbf{5}403200$ ,  $w = 000\mathbf{1}00000$ , alors *pivot* = 5,  $k = 3$  et  $i = 1$ ;
- 3)  $u = \mathbf{5}12403200$ ,  $w = 00\mathbf{1}100000$ , alors *pivot* = 4,  $k = 4$  et  $i = 3$ ;
- 4)  $u = 51\mathbf{4}103200$ ,  $w = 001\mathbf{2}00000$ , alors *pivot* = 4,  $k = 3$  et  $i = 2$ ;
- 5)  $u = 5\mathbf{4}0103200$ ,  $w = 00\mathbf{2}200000$ , alors *pivot* = 3,  $k = 6$  et  $i = 4$ ;
- 6)  $u = 540\mathbf{3}00200$ ,  $w = 00220\mathbf{1}000$  et l'algorithme termine.

Enfin,  $\phi_1(315503200) = (540300200, 002201000)$ .

Cette fonction correspond à la dernière partie du diagramme (2.2).

$$P \xleftrightarrow{\psi_{FV}} \text{CDP} \xleftrightarrow{\psi} \text{CDP} \xleftrightarrow{\phi_2} \text{FSDP} \xleftrightarrow{\phi_1} \text{FS}$$

**Proposition 2.2.4.** *La fonction  $\phi_1$  est bien définie des fonctions sous-excédentes vers les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées.*

*Démonstration.* Il est clair que  $\phi_1$  est bien définie pour toute fonction sous-excédente  $u$  et que l'algorithme termine (il y a au plus  $n - \text{pivot} - 1$  échanges pour chaque pivot).

Le résultat est décroissant au sens de la définition 2.2.1 car l'algorithme trie la fonction sous-excédente.

Afin de démontrer que le résultat est une fonction sous-excédente décroissante pondérée, nous devons démontrer que la pondération vérifie les contraintes de la définition 2.2.1. La valeur de la pondération en position  $j$  a été incrémentée au plus une fois par pivot ayant terminé à sa gauche, donc elle est inférieure au nombre de valeurs non nulles à gauche de la position  $j$  à la fin de l'algorithme. De plus, cette valeur n'a été incrémentée que par les pivots inférieurs ou égaux à  $n - j$ . Ainsi  $w$  vérifie les contraintes de la définition.  $\square$

**Lemme 2.2.5.** *Considérons une exécution de l'étape 2 de l'algorithme 2.2.3. Immédiatement après, il est possible de retrouver les positions  $i$  et  $k$ .*

*Soit  $j$  la position la plus à droite vérifiant  $w_j \neq 0$ . La position  $i$  du pivot est la position la plus à droite sur la gauche de  $j$  telle que  $u_i > u_j$ .*

*La précédente position  $k$  du pivot est la position la plus proche de  $i$  sur sa droite telle que la pondération associée soit non nulle, i.e.,  $k$  est le plus petit  $k > i$  tel que  $w_k \neq 0$ .*

*Démonstration.* On dit qu'une valeur  $u_i$  est *pondérée* si la pondération associée est non nulle, i.e.,  $w_i > 0$ .

Commençons par démontrer la deuxième partie du lemme. Considérons une étape  $S$  où un pivot  $p$  en position  $k$  doit s'échanger avec la valeur en position  $i$ . Alors, pour tout  $j$  tel que  $i < j$ , on a  $w_j = 0$ . En effet, supposons qu'il y ait un  $j$  tel que  $i < j < k$  et  $w_j \neq 0$  et soit  $S'$  l'état correspondant à l'échange précédent concernant  $u_j$  avec un pivot  $p'$ . Comme  $u_j$  est à droite de  $u_i$  à l'étape  $S$ , on a  $p'$  à droite de  $u_i$  et de  $u_j$  à l'étape  $S'$ . De plus, puisque  $p'$  s'échange avec  $u_j$ , on a soit  $u_j > u_i$  et alors après l'échange et la décrémentation, cette inégalité devient  $u_j \geq u_i$ , ou alors  $u_j = u_i$  ce qui implique que  $u_j$  est à droite de  $u_i$  puisque l'échange est avec  $u_j$ , et donc  $p'$  s'échange avec  $u_i$  par la suite. Dans les deux cas, on obtient  $u_j \geq u_i$  et puisqu'il n'y a pas d'échange impliquant  $u_j$  entre  $S'$  et  $S$ , il n'y a que  $u_i$  qui peut être décrémenté et donc on a toujours  $u_j \geq u_i$  à l'étape  $S$ . Cependant, à cette étape, l'échange est entre  $p$  et  $u_i$ , avec  $u_j$  entre les deux ce qui implique  $u_j < u_i$  et qui contredit  $u_j \geq u_i$ .

Démontrons maintenant l'autre partie du lemme. En utilisant les notations du lemme, on a nécessairement  $u_i > u_j$  donc il faut démontrer que pour tout  $s$  tel que  $i < s < j$ , on a  $u_s \leq u_j$ . Notons que chaque nouveau pivot commence à la même position que le pivot précédent ou à sa droite. De plus, comme on a démontré plus haut qu'il n'y a pas de valeur pondérée entre deux positions échangées, le pivot a fait un échange avec chaque valeur pondérée à sa droite jusqu'à  $u_j$ , et  $u_j$  était la première. Cela implique que  $u_j$  est plus grande que toutes les valeurs entre le pivot et elle-même.  $\square$

Le lemme précédent démontre que la fonction  $\phi_1$  est injective en démontrant que l'on peut trouver le précédent pivot ainsi que la valeur avec laquelle il a été échangé après chaque étape. Nous démontrons dans la section suivante que les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées sont comptées par  $n!$  ce qui démontre la proposition suivante :

**Proposition 2.2.6.** *L'application  $\phi_1$  est une bijection.*

Remarquons que la bijection réciproque découle directement du lemme 2.2.5.

### Les statistiques après application de $\phi_1$

Commençons par définir les nouvelles statistiques sur les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées.

**Définition 2.2.7.** *Soit  $(u, w)$  une fonction sous-excédente décroissante pondérée de taille  $n$ .*

- Le nombre d'inversions  $\text{inv}(u, w)$  est la somme des valeurs de  $u$  et de  $w$ .
- Le poids total  $\text{tw}(u, w)$  est la somme des valeurs de  $w$ .
- L'ensemble des descentes de  $(u, w)$  est

$$\text{Des}(u, w) = \{i \mid w_i > w_{i+1}\} \cup \{i \mid w_i = w_{i+1}, u_i > u_{i+1}\} \quad (2.15)$$

et sa composition des descentes  $\text{DC}(u, w)$  est la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{Des}(u, w)$ .

— La statistique LC de  $(u, w)$  est la composition  $\text{LC}(u)$ .

**Remarque 2.2.8.** *Établissons quelques remarques par rapport aux définitions précédentes.*

1. Les définitions ci-dessus sont également valables si la fonction sous-excédente pondérée n'est pas décroissante. De plus, si on associe une pondération nulle à une fonction sous-excédente, ces définitions donnent les mêmes statistiques que celles définies sur les fonctions sous-excédentes.
2. Remarquons que sur une fonction sous-excédente décroissante, l'image miroir de la composition de la statistique LC correspond à la composition dont l'ensemble des descentes est l'ensemble de valeurs non nulles de  $u$ . Ainsi, on a directement  $\text{tw}(u, w) = \text{inv}(u, w) - \text{maj}(\overline{\text{LC}(u, w)})$ .

**Proposition 2.2.9.** *Soit  $u$  une fonction sous-excédente, alors :*

$$\text{tw}(\phi_1(u)) = \text{inv}(u) - \text{maj}(\overline{\text{LC}(u)}); \quad (2.16)$$

$$\text{DC}(\phi_1(u)) = \text{DC}(u); \quad (2.17)$$

$$\text{LC}(\phi_1(u)) = \text{LC}(u). \quad (2.18)$$

Afin de démontrer la dernière partie de cette proposition, il faut considérer les échanges de l'algorithme 2.2.3 comme une succession d'échanges élémentaires décrits par l'algorithme suivant, où  $i$  et  $k$  découlent des notations de l'algorithme 2.2.3.

**Algorithme 2.2.10.**

- *Entrée :* une fonction sous-excédente  $u$  et deux positions  $i < k$ .
- *Sortie :* la fonction sous-excédente  $u$  où  $u_i$  est décrétement puis échangée avec  $u_k$ .
- *Initialisation :*  $j_1 = i$  et  $j_2 = k$ .
- *Exécution :*
  - *Étape 1 :* si  $j_1 = k - 1$ , aller à l'étape 2. Sinon, incrémenter  $u_{j_1+1}$  puis échanger  $u_{j_1}$  avec  $u_{j_1+1}$ . Incrémenter  $j_1$  et recommencer l'étape 1.
  - *Étape 2 :* si  $j_2 = i$ , l'algorithme termine. Sinon, décrétement  $u_{j_2-1}$  puis échanger  $u_{j_2}$  avec  $u_{j_2-1}$ . Décrétement  $j_2$  et recommencer l'étape 2.

Par exemple, si à un moment dans l'algorithme 2.2.3 on a  $u = \dots 4106 \dots$  et qu'il faut échanger 6 avec 4, les échanges de l'algorithme 2.2.10 sont :

- Commençons par l'étape 1 :
  - $u = \dots \mathbf{24}06 \dots$ ;
  - $u = \dots \mathbf{2146} \dots$ ;
- puis passons à l'étape 2 :
  - $u = \dots \mathbf{2163} \dots$ ;
  - $u = \dots \mathbf{2603} \dots$ ;
  - $u = \dots \mathbf{6103} \dots$

*Preuve de la proposition 2.2.9.* La preuve de cette proposition repose sur le premier point de la remarque 2.2.8 en démontrant que les statistiques inv, DC et LC sont invariantes à chaque étape de l'algorithme 2.2.3.

La statistique inv est invariante puisque chaque décrémentation d'une valeur de  $u$  est compensée par une incrémentation d'une valeur de  $w$ .

Afin de démontrer que l'ensemble des descentes d'une fonction sous-excédente pondérée n'est pas modifié par un échange de l'algorithme 2.2.3, il faut étudier différents cas, suivant s'il y a ou non une descente en positions  $i - 1$ ,  $i$ ,  $k - 1$ , ou  $k$ . Soit  $(u^{(1)}, w^{(1)})$  la fonction sous-excédente pondérée avant l'échange et  $(u^{(2)}, w^{(2)})$  celle après.

- Commençons par considérer ce qu'il se passe en position  $k$ .
  - Comme  $u_k^{(1)}$  est l'occurrence du pivot la plus à droite, on a  $k \neq n$  comme le pivot est non nul et  $u_k^{(1)} > u_{k+1}^{(1)}$  donc la seule solution pour ne pas avoir de descente en position  $k$  est que  $w_k^{(1)} < w_{k+1}^{(1)}$ . Mais dans ce cas, le lemme 2.2.5 indique que le pivot était en position  $k + 1$  à l'étape précédente donc  $u_i^{(1)} \leq u_{k+1}^{(1)} + 1$  et donc après l'échange,  $u_k^{(2)} \leq u_{k+1}^{(2)}$  avec  $w_k^{(2)} \leq w_{k+1}^{(2)}$  et donc  $k$  n'est pas une descente.
  - Dans tout les autres cas,  $(u^{(1)}, w^{(1)})$  a une descente en  $k$  donc  $w_k^{(1)} \geq w_{k+1}^{(1)}$  et  $w_k^{(2)} > w_{k+1}^{(2)}$  donc  $(u^{(2)}, w^{(2)})$  a aussi une descente en  $k$ .
- Si  $i \neq k - 1$ , le lemme 2.2.5 implique que  $w_{k-1}^{(1)} = 0$ . De plus,  $u_{k-1}^{(1)} < u_k^{(1)}$  donc  $k - 1$  n'est pas une descente de  $(u^{(1)}, w^{(1)})$  et c'est nécessairement aussi le cas pour  $(u^{(2)}, w^{(2)})$ .
- Si  $i = k - 1$ , il peut y avoir une descente en  $i$  ou non.
  - Comme  $u_i^{(1)} < u_k^{(1)}$ , la seule façon d'avoir une descente en  $i$  est d'avoir  $w_i^{(1)} > w_k^{(1)}$  et alors  $w_i^{(2)} \geq w_k^{(2)}$  avec  $u_i^{(2)} > u_k^{(2)}$ .
  - Si  $i$  n'est pas une descente,  $w_i^{(1)} \leq w_k^{(1)}$  et donc  $w_i^{(2)} < w_k^{(2)}$  donc  $i$  n'est pas non plus une descente de  $(u^{(2)}, w^{(2)})$ .
- Lorsque  $i < k - 1$ , on a  $w_{i+1}^{(1)} = 0$  et  $u_i^{(1)} > u_{i+1}^{(1)}$  donc  $i$  est toujours une descente de  $(u^{(1)}, w^{(1)})$  dans ce cas. De plus, on a encore  $w_{i+1}^{(2)} = 0$  avec  $u_i^{(2)} > u_{i+1}^{(2)}$  donc  $i$  est aussi une descente de  $(u^{(2)}, w^{(2)})$ .
- pour la position  $i - 1$ , supposons que  $u_{i-1}^{(1)}$  n'est pas strictement plus grand que le *pivot*. Comme  $w_{i-1}^{(1)} = w_{i-1}^{(2)}$  avec  $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$  et  $u_{i-1}^{(2)} = u_{i-1}^{(1)} \leq u_i^{(1)} < u_i^{(2)}$ , alors  $(u^{(1)}, w^{(1)})$  a une descente en  $i - 1$  si et seulement si c'est le cas de  $(u^{(2)}, w^{(2)})$ . Si  $u_{i-1}^{(1)}$  n'est pas strictement plus grand que le *pivot*, le même argument aboutit au même résultat.

Nous avons démontré que dans tous les cas, l'ensemble des descentes est invariant après chaque échange de l'algorithme 2.2.3.

Pour démontrer que LC ne change pas à chaque étape, on démontre que c'est également le cas à chaque échange élémentaire de l'algorithme 2.2.10. Puisqu'à la première étape on a  $u_{j_1} > u_{j_1+1}$  et qu'à la deuxième étape on a  $u_{j_2-1} \leq u_{j_2}$ , il faut uniquement démontrer que deux fonctions sous-excédentes  $u^{(1)}$  et  $u^{(2)}$  qui ne diffèrent qu'en positions  $j$  et  $j + 1$  telles que si  $u^{(1)} = \dots ab \dots$  avec  $a > b$  et  $u^{(2)} = \dots b+1 a \dots$ , alors  $LC(u^{(1)}) = LC(u^{(2)})$ . Il

Il y a trois cas différents. Soit  $S$  l'ensemble obtenu pendant le calcul des deux statistiques LC avant de traiter la valeur en position  $j + 1$ .

- Dans  $u^{(1)}$ , si  $b \leq |S|$  et  $a \leq |S|$ , alors après avoir traité ces deux valeurs dans  $u^{(1)}$ , l'ensemble utilisé pour calculer  $\text{LC}(u^{(1)})$  est toujours égal à  $S$ . Dans  $u^{(2)}$ , on a aussi  $a \leq |S|$  et  $b + 1 \leq a \leq |S|$  donc l'ensemble n'est pas modifié non plus.
- Dans  $u^{(1)}$ , si  $b \leq |S|$  et  $a > |S|$ , soit  $\alpha$  la  $(a - |S|)$ -ième valeur de  $[1, n] \setminus S$ . Après avoir traité ces deux valeurs pour le calcul de  $\text{LC}(u^{(1)})$ , l'ensemble est égal à  $S \cup \{\alpha\}$ . Dans  $u^{(2)}$ , après avoir traité  $a$ , l'ensemble est égal à  $S \cup \{\alpha\}$  et alors  $b + 1 \leq |S| + 1$  donc l'ensemble ne change pas non plus.
- Dans  $u^{(1)}$ , si  $b > |S|$  alors l'ensemble devient  $S \cup \{\beta\}$  où  $\beta$  est la  $(b - |S|)$ -ième valeur de  $[1, n] \setminus S$ . Puis, comme  $a > b$ , on a  $a > |S| + 1$  et donc l'ensemble est encore modifié et devient  $S \cup \{\beta, \alpha\}$  où  $\alpha$  est la  $(a - |S| - 1)$ -ième valeur de  $[1, n] \setminus (S \cup \{\beta\})$ . Pour  $u^{(2)}$ , on a aussi  $a > |S|$  donc il faut ajouter à  $S$  la  $(a - |S|)$ -ième valeur de  $[1, n] \setminus S$  qui est aussi  $\alpha$  puisque l'on a nécessairement  $\beta < \alpha$ . Lorsque l'on traite  $b + 1$ , on a  $b + 1 > |S| + 1$  donc on ajoute à l'ensemble la  $(b - |S|)$ -ième valeur de  $[1, n] \setminus (S \cup \{\alpha\})$  qui est aussi  $\beta$ , donc l'ensemble est le même dans les deux cas après avoir traité ces deux lettres.

Cela démontre le dernier point de la proposition.  $\square$

### 2.2.2 Des fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées vers les chemins de Dyck pondérés

Décrivons maintenant la bijection restante entre fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées et chemins de Dyck pondérés correspondant à la troisième partie du diagramme (2.2).

$$P \xleftrightarrow{\psi_{FV}} \text{CDP} \xleftrightarrow{\psi} \text{CDP} \xleftrightarrow{\phi_2} \text{FSDP} \xleftrightarrow{\phi_1} \text{FS}$$

Pour la décrire, nous construisons un chemin de Dyck à partir d'une fonction sous-excédente décroissante et conservons la pondération sans la modifier. Nous montrons ensuite qu'elle envoie le triplet de statistiques des fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées sur le triplet de statistiques des chemins de Dyck pondérés.

#### Description de la bijection $\phi_2$ entre fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées et chemins de Dyck pondérés

La fonction  $\phi_2$  est définie à partir d'une fonction sous-excédente décroissante pondérée  $(u, w)$  de taille  $n$  en conservant la pondération  $w$  et en construisant le chemin de Dyck  $D$  à partir de  $u$  en utilisant l'algorithme suivant.

#### Algorithme 2.2.11.

- *Entrée* : une fonction sous-excédente décroissante  $u$  de longueur  $n$ .



- *Sortie* : un chemin de Dyck  $D$  de longueur  $n$ .
- *Initialisation* :  $D_1 := /$  et  $D_{2n} := \backslash$ .
- *Exécution* : pour toute valeur  $i$  variant de 1 jusqu'à  $n - 1$ , on a
  - $D_{2i} := \backslash$  si  $n - i$  est une valeur de  $u$  et  $D_{2i} := /$  sinon ;
  - $D_{2i+1} := \backslash$  si  $u_i = 0$  et  $D_{2i+1} := /$  sinon.

Un exemple est donné en figure 2.3 pour  $n = 9$ . Les positions de tous les zéros de la fonction sous-excédente sauf le dernier sont  $\{3, 5, 6, 8\}$ , ce qui correspond aux positions  $i$  telles que  $D_{2i+1} = \backslash$ . Les valeurs non nulles de la fonction sous-excédente sont  $\{2, 3, 4, 5\}$  et correspondent aux  $n - i$  où  $i$  est la position des pas  $D_{2i} = \backslash$ .

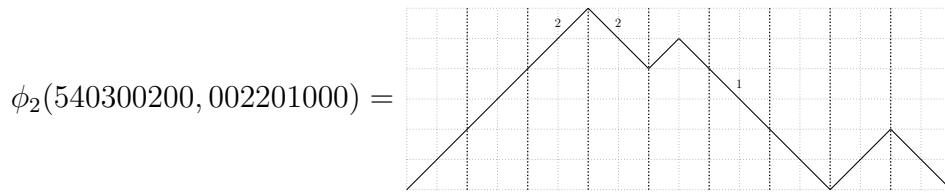


FIGURE 2.3 – Un exemple de  $\phi_2$  appliquée à la fonction sous-excédente décroissante pondérée  $(540300200, 002201000)$ .

**Lemme 2.2.12.** *Dans le chemin  $D$  construit par l'algorithme 2.2.11, soit  $h_i$  la hauteur du  $2i$ -ème pas de  $D$ . Pour tout  $i$ , la valeur de  $(h_i - 1)/2$  est égale au nombre de valeurs non nulles inférieures ou égales à  $n - i$  dans  $u$  à gauche de  $u_i$ .*

*Démonstration.* Soit  $W$  la pondération maximale associée à  $u$ . Le but est de démontrer que pour tout  $i$ , on a  $(h_i - 1)/2 = W_i$ .

Démontrons le lemme par récurrence. Pour  $i = 1$ , on a  $(h_1 - 1)/2 = 0 = W_0$  et donc la propriété est vérifiée. Supposons que la propriété soit vérifiée pour un certain  $i$ . On a  $W_{i+1} = W_i + 1$  si et seulement si  $n - i$  n'est pas une valeur de  $u$  et que  $u_i \neq 0$ , auquel cas toutes les valeurs à gauche de  $u_i$  comptent pour  $W_{i+1}$  et c'est également le cas de  $u_i$ . Dans ce cas, on a  $D_{2i} = D_{2i+1} = /$  et donc  $h_{i+1} = h_i + 2$ , et donc la propriété est vérifiée. En utilisant le même raisonnement, on a  $W_{i+1} = W_i - 1$  si et seulement si  $n - i$  est une valeur de  $u$  et que  $u_i = 0$ . Dans ce cas, on a  $h_{i+1} = h_i - 2$ . Enfin, dans les deux autres cas, on a  $W_i = W_{i+1}$  et  $h_i = h_{i+1}$ .  $\square$

**Proposition 2.2.13.** *L'application  $\phi_2$  est bien définie et est une bijection entre les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées et les chemins de Dyck pondérés.*

*Démonstration.* L'image d'une fonction sous-excédente décroissante pondérée est un chemin partant de  $(0, 0)$  et utilisant des pas  $/$  et  $\backslash$ . Le lemme 2.2.12 démontre que la hauteur de ce chemin est toujours positive et que  $h_n = 1$ . Comme  $D_{2n} = \backslash$ , le chemin termine en  $(2n, 0)$  et est donc un chemin de Dyck. Le lemme 2.2.12 démontre également que les contraintes

sur la pondération d'une fonction sous-excédente décroissante pondérée correspondent aux contraintes de son image.

Puisque les contraintes sur les pondérations sont exactement les mêmes pour les deux objets, nous devons uniquement démontrer que  $\phi_2$  est une bijection entre fonctions sous-excédentes décroissantes et chemins de Dyck pour démontrer qu'il s'agit d'une bijection entre les objets pondérés.

Comme les fonctions sous-excédentes décroissantes et les chemins de Dyck sont tous les deux des objets comptés par les nombres de Catalan, il suffit de démontrer que cette application est injective. La seule façon d'obtenir la même image à partir de deux fonctions sous-excédentes décroissantes est que les valeurs non nulles et leurs positions soient fixées, mais comme il s'agit de fonctions sous-excédentes décroissantes, il n'y a pas de choix pour l'ordre des valeurs.  $\square$

Remarquons qu'en démontrant que  $\phi_2$  est une bijection, on a démontré que les fonctions sous-excédentes décroissantes pondérées sont comptées par  $n!$ , ce qui termine la preuve de la proposition 2.2.6.

### Les statistiques après application de $\phi_2$

**Proposition 2.2.14.** *Soit  $(u, w)$  une fonction sous-excédente décroissante pondérée. On a*

$$\text{tw}(u, w) = \text{tw}(\phi_2(u, w)) ; \quad (2.19)$$

$$\text{LC}(u, w) = \text{GC}^0(\phi_2(u, w)) ; \quad (2.20)$$

$$\text{DC}(u, w) = \text{DC}^0(\phi_2(u, w)). \quad (2.21)$$

*Démonstration.* Comme la pondération est conservée, on a  $\text{tw}(u, w) = \text{tw}(\phi_2(u, w))$ . Pour l'ensemble des descentes, comme la pondération ne change pas et que les positions des zéros de  $u$  correspondent aux pas  $\setminus$  aux positions impaires de  $D$ , on a également  $\text{DC}(u, w) = \text{DC}(\phi_2(u, w))$ . De plus,  $\text{LC}(u, w)$  est la composition miroir de la composition dont l'ensemble des descentes est l'ensemble des valeurs non nulles de  $u$  et  $\text{GC}^0(D, w)$  correspond aux pas  $\setminus$  aux positions paires dans  $D$ , d'où  $\text{LC}(u, w) = \text{GC}^0(\phi_2(u, w))$ .  $\square$

## 2.3 Équivalence des statistiques

### 2.3.1 Preuves des conjectures

Nous avons maintenant introduit tous les outils nécessaires pour démontrer les conjectures de [NTW10]. Pour ce faire, nous démontrons la conjecture 6.2 qui est l'équidistribution des triplets de statistiques.

Soit  $\Phi = \psi_{FV}^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \phi_2 \circ \phi_1$ .

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $I$  et  $J$  deux compositions de  $n$ . On a*

$$\sum_{\substack{u \in \mathfrak{S}_n \\ \text{DC}(u)=I \\ \text{LC}(u)=J}} q^{\text{inv}(u) - \text{maj}(\overline{J})} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{Rec}(\sigma)=I \\ \text{GC}(\sigma)=J}} q^{\text{tot}(\sigma)}. \quad (2.22)$$

*Démonstration.* Puisqu'il s'agit d'une composition de bijections, l'application  $\Phi$  est une bijection entre fonctions sous-excédentes et permutations. Soit  $u$  une fonction sous-excédente. En utilisant les propositions 2.2.9, 2.2.14, 2.1.6 et 2.1.2 on obtient

$$\text{LC}(u) = \text{GC}(\Phi(u)) \quad (2.23)$$

$$\text{DC}(u) = \text{Rec}(\Phi(u)) \quad (2.24)$$

$$\text{inv}(u) - \text{maj}(\overline{\text{LC}(u)}) = \text{tot}(\Phi(u)) \quad (2.25)$$

qui démontre le théorème.  $\square$

**Remarque 2.3.2.** *Les autres conjectures de [NTW10] découlent directement de celle-ci.*

En démontrant ces conjectures, on démontre également qu'il est possible d'interpréter les coefficients des matrices de transition de [NTW10] en termes du triplet de statistiques (GC, Rec, tot). Cela donne également un autre  $q$ -raffinement des probabilités asymptotiquement stables du PASEP avec des statistiques qui découlent naturellement de la combinatoire du PASEP.

### 2.3.2 D'autres propriétés de cette bijection

En plus des trois statistiques que l'on a suivies, la bijection définie ci-dessus préserve également une autre statistique.

**Définition 2.3.3.** *Les maxima de gauche à droite d'une permutation sont les valeurs ayant uniquement des valeurs plus petites à leur gauche.*

*La même statistique sur les fonctions sous-excédentes est définie comme les positions des zéros.*

Par exemple, pour  $u = 315503200$  comme pour  $\sigma = \Phi(u) = 528713649$ , les maxima de gauche à droite sont 5, 8 et 9.

Noter que la définition des maxima de gauche à droite sur les fonctions sous-excédentes correspond à sa définition sur les permutations après avoir pris le code de Lehmer de l'inverse d'une permutation.

**Proposition 2.3.4.** *Soit  $u$  une fonction sous-excédente. Ses maxima de gauche à droite sont les mêmes que les maxima de gauche à droite de  $\Phi(u)$ .*

Pour démontrer cette proposition, nous devons observer comment évolue cette statistique au travers des bijections précédentes. Tout d'abord, nous aurons besoin du lemme suivant qui donne une définition équivalente des maxima de gauche à droite en termes de descentes de motifs 31-2 sur les permutations.

**Lemme 2.3.5.** *Soit  $\sigma$  une permutation. Une valeur  $k = \sigma_j$  est un maximum de gauche à droite de  $\sigma$  si et seulement si  $\sigma_{j-1} < \sigma_j$  et  $\text{tot}_k(\sigma) = 0$ .*

*Preuve du lemme 2.3.5.* Si  $k$  est un maximum de gauche à droite de  $\sigma$ , on a nécessairement  $\sigma_{j-1} < \sigma_j$  et comme il n'y a pas de valeur plus grande que  $k$  à sa gauche, on a  $\text{tot}_k(\sigma) = 0$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $i < j$  tel que  $\sigma_i > \sigma_j$  et soit  $i$  la position la plus à droite vérifiant  $\sigma_i > \sigma_j$  avec  $i < j$ . Dans ce cas,  $\sigma_i > \sigma_{i+1} < \sigma_j$  et il s'agit d'un motif 31-2 où  $k$  joue le rôle du 2.  $\square$

Avec ce lemme, nous pouvons maintenant voir comment évoluent les maxima de gauche à droite via les différentes bijections.

*Preuve de la proposition 2.3.4.* Soit  $\sigma$  une permutation et  $k$  une valeur de  $\sigma$ . Le lemme 2.3.5 montre qu'en appliquant la bijection de Françon-Viennot, la valeur  $k$  est un maximum de gauche à droite si et seulement si  $D_{2k} = \setminus$  et  $w_k = 0$  où  $(D, w) = \psi_{FV}(\sigma)$ . Grâce au lemme 2.1.4, la valeur  $k$  est un maximum de gauche à droite si et seulement si  $D_{2k+1}^0 = \setminus$  et  $w_k^0 = 0$  où  $(D^0, w^0) = \psi \circ \psi_{FV}(\sigma)$ . De plus, soit  $(u, w)$  la fonction sous-excédente décroissante pondérée obtenue en appliquant  $\phi_2^{-1}$  à  $(D^0, w^0)$ . Alors  $k$  est un maximum de gauche à droite de  $\sigma$  si et seulement si  $u_k = 0$  et  $w_k = 0$ .

Enfin, il reste à démontrer qu'une valeur en position  $k$  dans une fonction sous-excédente  $v$  est nulle si et seulement si la valeur à la même position dans  $\phi_2(v)$  est nulle avec une pondération nulle. Dans l'algorithme 2.2.3, on peut voir qu'aucun pivot ne peut s'échanger avec une valeur nulle donc une valeur nulle en début d'algorithme restera une valeur nulle avec une pondération nulle à la fin. Réciproquement, si une valeur en position  $k$  dans  $\phi_1(v)$  a une pondération nulle, alors cette valeur n'a jamais été échangée pendant l'exécution de l'algorithme et est donc nulle dans  $v$  si elle est nulle dans  $\phi_1(v)$ .  $\square$

## 2.4 Une variante pour les statistiques sur les permutations

### 2.4.1 Une autre interprétation combinatoire de $RL_n(q)$

Dans cette partie, nous changeons de convention sur les permutations : cette fois, imposons  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$ . Dans la définition des descentes de Genocchi, on compare chaque valeur avec la valeur qui suit et nous définissons une nouvelle statistique associée à cette nouvelle convention.

**Définition 2.4.1.** *Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . L'ensemble des descentes de Genocchi de type 0 est*

$$\text{GDes}^0(\sigma) = \{\sigma_i \mid i \in \{1, \dots, n\}, \sigma_i > \sigma_{i+1}\}. \quad (2.26)$$

*Notons que  $\sigma_n$  et  $n$  appartiennent toujours à  $\text{GDes}^0(\sigma)$ . Définissons également la composition des descentes de Genocchi de type 0 (noté  $\text{GC}^0$ ) comme la composition de  $n$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{GDes}^0(\sigma) \setminus \{n\}$ .*

Par exemple, pour  $\sigma = 528971364$ , on a  $\text{GDes}^0(\sigma) = \{4, 5, 6, 7, 9\}$  et  $\text{GC}^0(\sigma) = (4, 1, 1, 1, 2)$ .

Appliquons maintenant la bijection de Françon-Viennot pour cette convention :  $\psi_{FV}^0$ . On rappelle que cette bijection est décrite section 1.1.5.

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a :*

$$\text{GC}^0(\sigma) = \text{GC}^0(\psi_{FV}^0(\sigma)) ; \quad (2.27)$$

$$\text{Rec}(\sigma) = \text{DC}^0(\psi_{FV}^0(\sigma)) ; \quad (2.28)$$

$$\text{tot}(\sigma) = \text{tw}(\psi_{FV}^0(\sigma)). \quad (2.29)$$

La preuve de cette proposition est la même que la preuve de la proposition 2.1.2, la seule différence étant qu'il faut ajouter 1 à l'indice des pas dans le chemin comme on ajoute un pas supplémentaire au début du chemin quand on applique la bijection de Françon-Viennot avec cette convention.

De cette proposition découle le résultat suivant :

**Corollaire 2.4.3.** *Soit  $I$  et  $J$  deux compositions de  $n$ , on a :*

$$\sum_{\substack{\text{Rec}(\sigma)=I \\ \text{GC}^0(\sigma)=J}} q^{\text{tot}(\sigma)} = \sum_{\substack{\text{Rec}(\sigma)=I \\ \text{GC}^0(\sigma)=J}} q^{\text{tot}(\sigma)}. \quad (2.30)$$

La preuve de ce corollaire utilise la même approche que la preuve du théorème 2.3.1, en utilisant la bijection  $\Psi = (\psi_{FV}^0)^{-1} \circ \psi \circ \psi_{FV}$ .

Ce résultat donne une autre interprétation combinatoire des coefficients des matrices de transition décrites précédemment. Il implique également un autre moyen de raffiner les probabilités du PASEP en utilisant des statistiques proches de celle usuellement utilisées dans la combinatoire du PASEP.

## 2.4.2 Arbres binaires de recherche

Nous nous intéressons maintenant à démontrer une autre propriété vérifiée par la bijection  $\Psi$ . Par construction,  $\Psi$  préserve les classes de reculs. Il apparaît que  $\Psi$  préserve également les classes co-sylvestres des permutations raffinant les classes de reculs. On rappelle, comme précisé section 1.1.3, que deux permutations sont dans la même classe co-sylvestre si leur arbre binaire de recherche associé (en lisant la permutation de gauche à droite) sont égaux.

On a vu dans la section 1.1.3 l'algorithme standard pour associer un arbre binaire de recherche à une permutation. Nous donnons ici un algorithme différent qui donne le même résultat que l'insertion successive des valeurs d'une permutation lues de gauche à droite.

**Algorithme 2.4.4.**

- *Entrée : une permutation  $\sigma$  de longueur  $n$  et un intervalle  $I$  inclus dans  $[n]$ .*
- *Sortie : un arbre binaire de recherche ayant pour valeurs les valeurs de l'intervalle.*

- *Initialisation* : si  $I$  n'est pas donné, on prend  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .
- *Exécution* : si  $I = \emptyset$ , on renvoie l'arbre vide. Soit  $x$  la première valeur de  $\sigma|_I$  et  $G$  (resp.  $D$ ) l'arbre obtenu en appliquant récursivement cet algorithme à  $(\sigma, I \cap [x - 1])$  (resp.  $(\sigma, I \cap [x + 1, n])$ ). On renvoie l'arbre formé du nœud  $x$  et ayant pour sous-arbre gauche  $G$  et pour sous-arbre droit  $D$ .

Notons  $\text{BST}(\sigma)$  la fonction associée à cet algorithme.

Un exemple d'exécution de cet algorithme est donné en figure 2.4 pour la permutation  $\sigma = 528971364$ . La première valeur de  $\sigma$  est 5. Le sous-arbre gauche est construit avec  $\sigma|_{\{1,2,3,4\}} = 2134$  et le sous-arbre droit avec  $\sigma|_{\{6,7,8,9\}} = 8976$ .

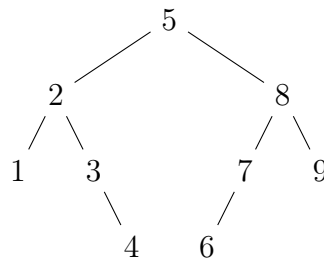


FIGURE 2.4 – L'arbre binaire de recherche associé à  $\sigma = 528971364$ .

Afin de démontrer l'égalité de deux arbres binaires de recherche, on utilisera le lemme suivant.

**Lemme 2.4.5.** *Soient  $A$  et  $A'$  deux arbres binaires de recherche. On a  $A = A'$  si et seulement si pour tout intervalle  $I$  leurs restrictions à  $I$  ont la même racine.*

Noter que le lemme précédent n'est vrai que lorsqu'il n'y a pas de doublons dans les arbres.

*Preuve du lemme 2.4.5.* Si  $A = A'$ , la propriété est clairement vraie. Soient  $A$  et  $A'$  deux arbres binaires de recherche ayant la même racine lorsqu'on les restreint à n'importe quel intervalle  $I$ . En particulier,  $A$  et  $A'$  ont la même racine (pour  $I$  égal à l'union des valeurs de  $A$  et  $A'$ ). La preuve du lemme est alors obtenue par récurrence en appliquant la propriété sur les intervalles des valeurs strictement plus petites et strictement plus grandes que la racine pour obtenir les deux sous-arbres.  $\square$

### 2.4.3 Une bijection préservant les classes co-sylvestres

Notre objectif est de démontrer les théorèmes suivants avec  $\Psi = (\psi_{FV}^0)^{-1} \circ \psi \circ \psi_{FV}$ .

**Théorème 2.4.6.** *Soit  $\sigma$  une permutation. Les deux permutations  $\sigma$  et  $\Psi(\sigma)$  appartiennent à la même classe co-sylvestre, i.e., elles ont même arbre binaire de recherche (gauche-droite) associé.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de construire un arbre binaire de recherche associé à un chemin de Dyck pondéré correspondant à celui obtenu à partir d'une permutation avant d'appliquer  $\psi_{FV}$  ou  $\psi_{FV}^0$ . Commençons par l'algorithme associé à  $\psi_{FV}$ . L'idée générale de cet algorithme est venue après avoir discuté avec Aval, Boussicault et Zubietta [ABZ17].

**Algorithme 2.4.7.**

- *Entrée* : un chemin de Dyck pondéré  $(D, w)$ .
- *Sortie* : un arbre binaire de recherche  $T$ .
- *Initialisation* : si  $I$  n'est pas donné, on prend  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .
- *Exécution* :
  - Parmi les  $i \in I$  tels que  $w_i$  est minimal, la racine  $r$  de l'arbre courant est égale au plus petit  $i$  tel que  $D_{2i} = \backslash$ .
  - S'il n'y a pas de telle position,  $r$  est la valeur maximale de  $I$  parmi celles de pondération minimale.
  - Appliquer récursivement cet algorithme en prenant l'intervalle égal aux valeurs plus petites que  $r$  dans  $I$  pour obtenir le sous-arbre gauche et aux valeurs plus grandes pour obtenir le sous-arbre droit.

Notons  $\text{BST}(D, w)$  l'application associée à cet algorithme.

Un exemple de chemin de Dyck avec son arbre correspondant est donné en figure 2.5. À la première étape, les  $i$  de pondération minimale sont  $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ . Parmi ceux là, 5 est la plus petite valeur telle que  $D_{2i} = \backslash$ . Pour obtenir le sous-arbre gauche, on applique l'algorithme à  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  sur le chemin. La pondération minimale est obtenue pour  $i \in \{1, 2\}$ . Cependant, il n'y a pas de  $i$  dans cet ensemble tel que  $D_{2i} = \backslash$ , donc  $r = 2$ . Appliquer cet algorithme respectivement à  $\{1\}$ ,  $\{3, 4\}$  et  $I = \{6, 7, 8, 9\}$  pour obtenir les parties restantes de l'arbre.

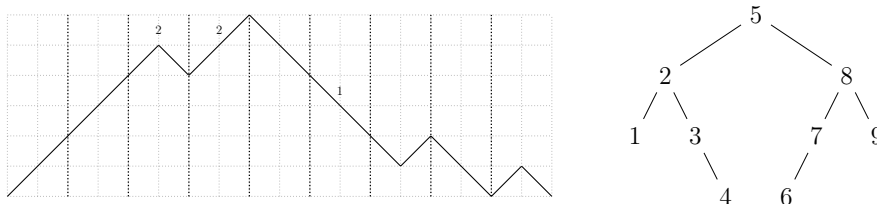


FIGURE 2.5 – Un chemin de Dyck pondéré et son arbre binaire de recherche associé.

**Remarque 2.4.8.** Nous aurons besoin par la suite d'appliquer cet algorithme sur des chemins pouvant passer sous l'axe des abscisses. Noter que cet algorithme peut également s'appliquer à n'importe quel chemin de longueur  $2n$ .



**Lemme 2.4.9.** *Soit  $\sigma$  une permutation, alors  $\text{BST}(\sigma) = \text{BST}(\psi_{FV}(\sigma))$ .*

Pour démontrer ce lemme, on utilise le lemme suivant.

**Lemme 2.4.10.** *Soit  $\sigma$  une permutation et  $i < j < k$  tels que  $\sigma_j < \sigma_k < \sigma_i$  (i.e., ils forment un motif 312), alors  $\sigma_k$  joue le rôle de 2 dans un motif 31-2 où le 1 est à droite de  $\sigma_i$ .*

*Preuve du lemme 2.4.10.* Parmi les valeurs plus grandes que  $\sigma_k$  à gauche de  $\sigma_j$ , soit  $\sigma_r$  la plus à droite. Nécessairement,  $\sigma_r > \sigma_k > \sigma_{r+1}$  et  $r \geq i$  donc cela définit un motif 31-2 de  $\sigma$  à droite de  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_k$  est le 2.  $\square$

*Preuve du lemme 2.4.9.* Cette preuve repose sur l'utilisation du lemme 2.4.5. Soit  $A = \text{BST}(\sigma)$  et  $A' = \text{BST}(D, w)$ , où  $(D, w) = \psi_{FV}(\sigma)$ . Soit  $I$  un intervalle de valeurs de  $\sigma$ .

Puisque  $A|_I = \text{BST}(\sigma|_I)$ , la racine de  $A|_I$  correspond à la première valeur de  $\sigma|_I$ . Il faut démontrer que cette valeur correspond à la position retournée par l'algorithme 2.4.7 pour le même intervalle sur  $(D, w)$ . Dans le reste de la preuve, on considérera  $\sigma = \dots \sigma_i \dots \sigma_j \dots$  où  $\sigma_i$  est la première valeur de  $I$  dans  $\sigma$  et  $\sigma_j$  est une autre valeur de  $I$ .

Pour démontrer qu'on cherche un pas de pondération minimale, il faut démontrer que pour tout motif 31-2 où  $\sigma_i$  est le 2, on a un motif 31-2 où  $\sigma_j$  est aussi le 2. En effet, pour tout motif 31-2 où  $\sigma_i$  est le 2, la valeur représentant le 3 (resp. le 1) est nécessairement plus grande (resp. plus petite) que toutes les valeurs de  $I$ , donc  $\sigma_j$  est aussi comprise entre elles et est donc aussi le 2 d'un motif 31-2.

Si  $\sigma_i > \sigma_{i-1}$  (et donc  $D_{2i} = \setminus$ ) et si  $\sigma_{j-1} < \sigma_j$  avec  $\sigma_j < \sigma_i$  alors le lemme 2.4.10 démontre qu'il existe un motif 31-2 à droite de  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_j$  est le 2 et donc la pondération associée à  $\sigma_j$  dans  $(D, w)$  est strictement plus grande que celle associée à  $\sigma_i$ . Cela démontre que si  $D_{2i} = \setminus$ , il s'agit du pas descendant le plus à gauche en position paire parmi ceux de pondération minimale avec  $i \in I$ .

Si  $\sigma_i < \sigma_{i-1}$  (et donc  $D_{2i} = /$ ) et si  $\sigma_j > \sigma_i$ , alors  $\sigma_{i-1}\sigma_i \dots \sigma_j$  est un motif 31-2 car  $\sigma_{i-1}$  est plus grand que toute valeur de  $I$ . Cela démontre que  $D_{2i}$  est le pas le plus à droite parmi les pas de pondération minimale. De plus, si  $\sigma_i > \sigma_j$  et  $\sigma_{j-1} < \sigma_j$ , on peut encore une fois utiliser le lemme 2.4.10 pour démontrer qu'il existe un motif 31-2 tel que  $\sigma_j$  est le 2 et tel que le 1 est à droite de  $\sigma_i$ , ainsi  $w_i < w_j$  et il n'y a pas de pas descendant de pondération minimale en position  $2k$  pour  $k \in I$ .

On utilise le lemme 2.4.9 pour démontrer  $A = A'$ .  $\square$

De façon similaire, on définit la fonction  $\text{BST}^0$  qui construit un arbre binaire de recherche à partir d'un chemin de Dyck pondéré égal à l'arbre binaire de recherche associé à une permutation avant d'appliquer  $\psi_{FV}^0$ .

**Définition 2.4.11.** *Soit  $(D, w)$  un chemin de Dyck pondéré. Soit  $D'$  le chemin obtenu en retirant le premier pas de  $D$  et en ajoutant un pas descendant à la fin de  $D$ . On définit  $\text{BST}^0(D, w)$  comme le résultat de  $\text{BST}(D', w)$ .*



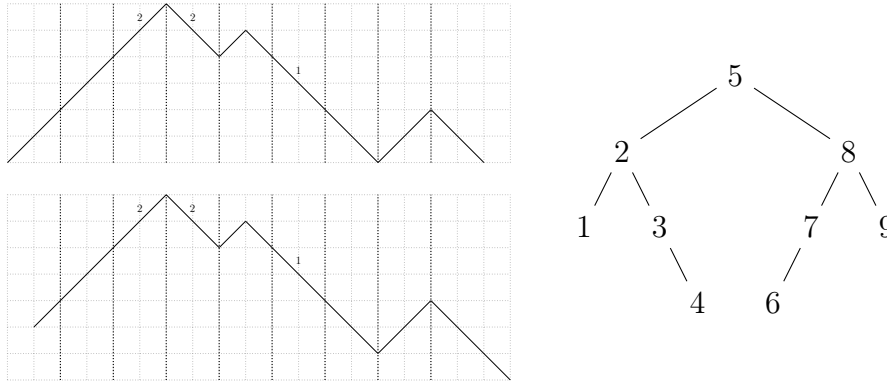


FIGURE 2.6 – Un chemin de Dyck pondéré avec son chemin intermédiaire et son arbre binaire de recherche de type 0.

Un exemple de chemin de Dyck avec son arbre binaire correspondant en utilisant  $\text{BST}^0$  est donné en figure 2.6.

Comme pour le lemme 2.4.9, nous avons le lemme suivant.

**Lemme 2.4.12.** *Soit  $\sigma$  une permutation. Alors,  $\text{BST}(\sigma) = \text{BST}^0(\psi_{FV}^0(\sigma))$ .*

La preuve de ce lemme est la même que celle du lemme 2.4.9 puisque  $\psi_{FV}^0$  correspond au même algorithme que  $\psi_{FV}$  (en fixant la convention) si on retire le premier pas du chemin obtenu et qu'on ajoute un pas décroissant à la fin.

La preuve du théorème 2.4.6 découle directement.

*Preuve du théorème 2.4.6.* Comme on peut le voir dans l'équation (2.9) dans la preuve du lemme 2.1.6, on a  $\psi(D, w)_{2i+1} = D_{2i}$  donc pour tout chemin de Dyck pondéré  $(D, w)$ , on a  $\text{BST}(D, w) = \text{BST}^0(\psi(D, w))$ . En utilisant le lemme 2.4.9 et le lemme 2.4.12 on a  $\text{BST}(\sigma) = \text{BST}(\Psi(\sigma))$ .  $\square$

**Remarque 2.4.13.** *La deuxième transformation fondamentale de Foata [Lot97] préserve la classe sylvestre d'une permutation, ce qui correspond à la classe co-sylvestre en prenant l'image miroir des permutations. Notre bijection est différente de celle de Foata et en particulier elles ne sont pas conjuguées l'une de l'autre. En effet, elles n'ont pas le même nombre de points fixes sur  $\mathfrak{S}_n$  pour des valeurs générales de  $n$ . Par exemple, pour  $n = 5$ , la seconde transformation fondamentale de Foata a 26 points fixes tandis que la nôtre en a 32. Les deux bijections diffèrent également sur le nombre d'orbites obtenues par itérations de celles-ci.*

# Chapitre 3

## Une nouvelle interprétation combinatoire des probabilités du 2-PASEP

Le processus d'exclusion asymétrique simple à deux types de particules (ou 2-ASEP) est une chaîne de Markov avec deux types de particules ( $\bullet$  et  $\circ$ ) et des emplacements vides ( $\circ$ ). Les particules peuvent se déplacer vers la gauche ou la droite et les particules  $\bullet$  peuvent entrer ou sortir de la chaîne à ses extrémités. Ce modèle est également décrit par 5 paramètres :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $q$ , les 4 premiers paramètres représentant les taux d'entrée et de sortie des particules aux extrémités et  $q$  la probabilité de recul d'une particule. Lorsqu'il n'y a pas de particule  $\circ$ , on retrouve le ASEP usuel défini section 1.2. En utilisant une méthode de matrix ansatz, Uchiyama a entièrement résolu ce modèle [Uch08]. De la même façon que pour le cas à un type de particule, nous traiterons uniquement le cas partiellement asymétrique (2-PASEP) correspondant à  $\gamma = \delta = 0$ . Tout comme pour le PASEP, les probabilités asymptotiquement stables font intervenir de nombreux objets combinatoires et ont été étudiées suivant différentes approches combinatoires [Man15, MV15, CMW16, MV18]. Dans [MV15], les auteurs généralisent les tableaux alternatifs en les *tableaux alternatifs rhomboïdaux* sur lesquels ils définissent des statistiques  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$  permettant de décrire les probabilités stationnaires du 2-PASEP. Dans un second temps, il construisent une bijection vers les *assemblées de permutations* généralisant les permutations, qu'ils utilisent pour décrire les probabilités stationnaires du 2-PASEP dans le cas  $q = 1$ . L'objectif de ce chapitre est de donner une interprétation combinatoire des probabilités du 2-PASEP pour toute valeur du paramètre  $q$  sur une généralisation des permutations, les *permutations partiellement signées*. Pour ce faire, nous définissons les *histoires de Laguerre marquées* généralisant les histoires de Laguerre puis construisons une bijection entre ces objets et les permutations partiellement signées. Dans une seconde partie, nous donnons une autre description en termes de chemins utilisant les *histoires de Laguerre larges marquées* et définissons une autre statistique sur les permutations partiellement signées pour décrire la combinatoire du 2-PASEP.

Les travaux présentés dans ce chapitre sont issus d'une collaboration avec S. Corteel

et étendent la première partie de [CN17]. Nous définissons les *permutations partiellement signées* section 3.1, ainsi que des statistiques sur ces objets dont nous aurons besoin par la suite. À la section 3.2, nous apportons une nouvelle solution à l'*ansatz matriciel* de Uchiyama et nous interprétons les probabilités stationnaires du 2-PASEP obtenues en termes d'*histoires de Laguerre marquée*. Dans un second temps, nous généralisons la bijection de Françon-Viennot pour décrire ces probabilités sur les permutations partiellement signées. Nous donnons également une formule de récurrence vérifiée par ces objets nous fournissant une expressions explicite des probabilités du 2-PASEP. Enfin, dans la section 3.4, nous décrivons une autre interprétation combinatoire des probabilités du 2-PASEP en utilisant les *histoires de Laguerre larges marquées*. En utilisant une bijection vers les permutations partiellement signées, nous obtenons également une autre interprétation combinatoire utilisant ces objets.

### 3.1 Permutations partiellement signées

Dans ce chapitre, nous interprétons les probabilités issues du 2-PASEP en utilisant des objets combinatoires généralisant les permutations. Nous allons pour cela définir une classe combinatoire comme une sous-famille des permutations signées elles-mêmes définies section 1.1.6.

**Définition 3.1.1.** *Une permutation partiellement signée est une permutation où toutes les valeurs sauf 1 ont un signe, positif ou négatif. On notera  $B'_n$  l'ensemble des permutations partiellement signées de taille  $n$ .*

Comme pour les permutations signées, nous surlignerons les valeurs qui ont un signe négatif. Par exemple, on représente par  $\bar{2}57836\bar{4}1$  la permutation partiellement signée où 2 et 4 ont un signe négatif. Dans ce chapitre, lorsque nous comparons deux valeurs d'une permutation partiellement signée, nous oublions le signe pour le faire. Par exemple, on a  $3 > \bar{2}$  et  $\bar{3} > 2$ . Puisqu'on n'utilisera jamais la structure de groupe des permutations signées, on pourra également voir les permutations partiellement signées comme des permutations dont certaines valeurs sont marquées plutôt que signées.

Notons qu'il y a exactement  $2^{n-1}n!$  permutations partiellement signées de longueur  $n$ . Ces objets sont en bijection avec les permutations segmentées définies section 1.1.6 via l'algorithme suivant.

#### Algorithme 3.1.2.

- *Entrée* : une permutation partiellement signée  $\sigma$  de longueur  $n$ .
- *Sortie* : une permutation segmentée  $\tau$  de longueur  $n$ .
- *Exécution* : soit  $\sigma$  la permutation obtenue à partir de  $\sigma$  en oubliant les signes et  $\tau = \sigma^{-1}$ . Pour toute valeur  $i$  allant de 2 jusqu'à  $n$ , si  $i$  a un signe négatif dans  $\sigma$ , on place une barre entre les positions  $i - 1$  et  $i$  dans  $\tau$ .

Nous utilisons l'inverse de  $\sigma$  dans cet algorithme car pour les permutations partiellement signées, nous choisissons des valeurs à marquer tandis que pour les permutations

segmentées, le choix se fait sur des positions. Comme pour les permutations segmentées, nous représentons les permutations partiellement signées en gras pour les différencier des permutations usuelles.

**Définition 3.1.3.** *On définit l'ensemble des valeurs signées d'une permutation partiellement signée  $\sigma$  de taille  $n$  (noté  $\text{Sign}(\sigma)$ ) comme l'ensemble*

$$\text{Sign}(\sigma) := \{i \in [2, n] \mid \bar{i} \in \sigma\}. \quad (3.1)$$

Un recul de  $\sigma$  est une valeur  $\sigma_i$  telle que  $1 + \sigma_i$  est à gauche de  $\sigma_i$  dans  $\sigma$  et telle que  $1 + \sigma_i \notin \text{Sign}(\sigma)$ . La composition segmentée des reculs de  $\sigma$  (notée  $\text{Rec}(\sigma)$ ) est la composition segmentée dont l'ensemble des segmentations est  $\{s - 1 \mid s \in \text{Sign}(\sigma)\}$  et l'ensemble des descentes correspond à l'ensemble des reculs de  $\sigma$ .

Par exemple, pour  $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$ , on a  $\text{Sign}(\sigma) = \{2, 4\}$  et les reculs de  $\sigma$  sont 4 et 6. Ainsi,  $\text{Rec}(\sigma) = 1|2|122$  dont l'ensemble des segmentations est  $\{1, 3\}$  et l'ensemble des descentes est  $\{4, 6\}$ .

Nous définissons également une généralisation de la statistique GC des permutations sur les permutations partiellement signées. Afin de contenir plus d'information, nous allons construire une composition segmentée associée aux valeurs de descentes et aux valeurs marquées d'une permutation partiellement signée.

**Définition 3.1.4.** *L'ensemble des descentes de Genocchi d'une permutation partiellement signée  $\sigma$  de longueur  $n$  (noté  $\text{GDes}(\sigma)$ ) est défini comme suit :*

$$\text{GDes}(\sigma) := \{\sigma_i \in [2, n] \mid \sigma_i \notin \text{Sign}(\sigma); \sigma_i > \sigma_{i+1}\}. \quad (3.2)$$

La composition des descentes de Genocchi de  $\sigma$  (notée  $\text{GC}(\sigma)$ ) est la composition segmentée dont l'ensemble des segmentations est  $\{s - 1 \mid s \in \text{Sign}(\sigma)\}$  et l'ensemble des descentes est  $\{d - 1 \mid d \in \text{GDes}(\sigma)\}$ .

Par exemple, pour  $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$ , on a  $\text{Sign}(\sigma) = \{2, 4\}$  et  $\text{GDes}(\sigma) = \{6, 8\}$ . Ainsi,  $\text{GC}(\bar{2}57836\bar{4}1) = 1|2|221$ .

**Définition 3.1.5.** *Un motif 31-2 d'une permutation partiellement signée  $\sigma$  est un sous-mot  $u$  de longueur 3 tel que les deux premières valeurs de  $u$  sont adjacentes dans  $\sigma$  et  $u_2 < u_3 < u_1$ , n'importe laquelle de ces valeurs pouvant être surlignée dans  $\sigma$ . On note  $\text{tot}(\sigma)$  le nombre de motifs 31-2 de  $\sigma$ .*

Le poids d'une permutation partiellement signée  $\sigma$  (noté  $\text{tw}(\sigma)$ ) est égal au nombre de motifs 31-2 de celle-ci auquel on ajoute pour chaque descente  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$  le nombre de  $\sigma_i \geq k > \sigma_{i+1}$  avec  $k \in \text{Sign}(\sigma)$ .

Par exemple, la permutation partiellement signée  $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$  a 2 motifs 31-2 venant des sous-mots 836 et 834. De plus, son poids est égal à 5 car la descente 83 ajoute 1 avec la valeur  $\bar{4}$  et la descente  $\bar{4}1$  ajoute 2 avec les valeurs  $\bar{2}$  et  $\bar{4}$ .

Afin d'utiliser les compositions segmentées pour coder les états du 2-PASEP, on associe un mot de longueur  $n - 1$  en les lettres  $A$ ,  $D$  et  $E$  à une composition segmentée  $\mathbf{I}$  de  $n$  (noté  $\text{ade}(\mathbf{I})$ ). Le mot  $\text{ade}(\mathbf{I})$  est tel que les positions des lettres  $A$  sont données par  $\text{Seg}(\mathbf{I})$  et les positions des  $E$  par  $\text{Des}(\mathbf{I})$ . Par exemple, pour  $\mathbf{I} = 1|2|221$ , on a  $\text{ade}(1|2|221) = ADADEDE$ .

Dans la suite de ce chapitre, on notera  $N = n - 1$ .

## 3.2 2-PASEP et matrix ansatz

Soient  $X$  et  $Y$  des mots quelconques de  $\{\circ, \bullet, \bullet\}^*$ . Les transitions dans la chaîne de Markov du 2-PASEP sont décrites par les relations suivantes.

$$\begin{aligned} X \bullet \circ Y &\rightarrow X \circ \bullet Y ; \\ X \bullet \circ Y &\rightarrow X \circ \bullet Y ; \\ X \bullet \bullet Y &\rightarrow X \bullet \bullet Y ; \end{aligned}$$

avec un taux 1,

$$\begin{aligned} X \circ \bullet Y &\rightarrow X \bullet \circ Y ; \\ X \circ \bullet Y &\rightarrow X \bullet \circ Y ; \\ X \bullet \bullet Y &\rightarrow X \bullet \bullet Y ; \end{aligned}$$

avec un taux  $q$ ,

$$\circ Y \rightarrow \bullet Y ;$$

avec un taux  $\alpha$  et

$$Y \bullet \rightarrow Y \circ ;$$

avec un taux  $\beta$ . De la même façon que pour le PASEP, il faut diviser chaque taux précédent par  $N + 1$  pour obtenir la probabilité associée, où  $N$  est la longueur de la chaîne. Notons que le nombre de particules  $\bullet$  ne peut pas changer dans le processus ; on le notera  $r$  par la suite. Un exemple de chaîne à trois emplacements dont deux sont occupés par des particules  $\bullet$  est donné en figure 3.1.

### 3.2.1 Distributions asymptotiques

À chaque état  $x$  du 2-PASEP avec  $N$  emplacements, on associe un mot  $X(x)$  en les lettres  $A$ ,  $D$  et  $E$  en utilisant la correspondance suivante :

$$\bullet \mapsto D ; \bullet \mapsto A ; \circ \mapsto E. \quad (3.3)$$

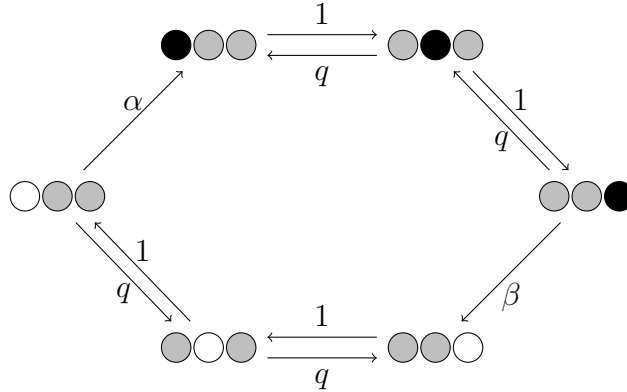


FIGURE 3.1 – La chaîne de Markov pour  $N = 3$  et  $r = 2$ .

Comme mentionné dans l’introduction, Uchiyama décrit un système d’équations matricielles, le *matrix ansatz*, généralisant celui du ASEP, dont les solutions permettent de décrire les probabilités asymptotiques stables du 2-ASEP dépendant des cinq paramètres. Nous nous intéressons ici uniquement au 2-PASEP, c’est-à-dire au cas où  $\delta = \gamma = 0$ , et nous donnons ci-dessous une description du matrix ansatz de Uchiyama dans ce cas-là.

Dans la proposition suivante, contrairement à ce que nous avons fait au théorème 1.2.2 et pour éviter d’alourdir les notations, nous identifions les lettres d’un mot en  $A$ ,  $D$  et  $E$  aux matrices  $A$ ,  $D$  et  $E$  dont nous parlons.

**Proposition 3.2.1.** [Uch08] Soient  $D, A, E$  des matrices infinies et  $\langle W |$  (resp.  $|V \rangle$ ) un vecteur ligne (resp. colonne) infini vérifiant l’ansatz suivant :

$$DE = qED + D + E ; \tag{3.4}$$

$$DA = qAD + A ; \tag{3.5}$$

$$AE = qEA + A ; \tag{3.6}$$

$$\langle W | E = \frac{1}{\alpha} \langle W | ; \tag{3.7}$$

$$D |V \rangle = \frac{1}{\beta} |V \rangle . \tag{3.8}$$

Alors la probabilité d’être dans un état  $x$  est donnée par :

$$\frac{\langle W | X(x) |V \rangle}{[y^r] \langle W | (D + yA + E)^N |V \rangle} . \tag{3.9}$$

où  $[y^r]$  signifie que l’on prend le coefficient du monôme  $y^r$  dans le polynôme à sa droite.

Après avoir énoncé ce résultat, Uchiyama donne une solution de ce système. Cependant, sa solution est difficile à traduire combinatoirement et c’est pourquoi nous fournissons

maintenant une autre solution de ce système pour  $\alpha = \beta = 1$  faisant sortir naturellement nos objets combinatoires. Considérons les matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [2]_q & [2]_q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & [3]_q & [3]_q & \dots \\ 0 & 0 & 0 & [4]_q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [2]_q & [2]_q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & [3]_q & [3]_q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \quad (3.11)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & q^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} (D + E); \quad (3.12)$$

$$\langle W | = (1, 1, 0, 0, \dots); \quad (3.13)$$

$$|V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

**Lemme 3.2.2.** *Les matrices et vecteurs précédents vérifient les équations de la proposition 3.2.1.*

*Démonstration.* Soit  $M = DE$ . Pour tout  $i, j$ , on a

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik} E_{kj} \\ &= \sum_{k=i}^{i+1} [i]_q E_{kj}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $M$  est décrite comme suit :

$$\begin{cases} M_{i,i-1} = [i]_q E_{i,i-1} = [i]_q [i-1]_q; \\ M_{i,i} = [i]_q (E_{i,i} + E_{i+1,i}) = [i]_q ([i-1]_q + [i]_q); \\ M_{i,i+1} = [i]_q E_{i+1,i+1} = [i]_q^2; \end{cases} \quad (3.15)$$

et  $M_{i,j} = 0$  si  $|i - j| > 1$ . De la même façon, soit  $N = ED$ . On a

$$\begin{cases} N_{i,i-1} &= [i-1]_q^2 ; \\ N_{i,i} &= [i-1]_q([i-1]_q + [i]_q) ; \\ N_{i,i+1} &= [i-1]_q[i]_q ; \end{cases}$$

et  $N_{i,j} = 0$  si  $|i - j| > 1$ . Pour tout  $i$ , on a

$$\begin{aligned} qN_{i,i-1} + D_{i,i-1} + E_{i,i-1} &= [i-1]_q(q[i-1]_q + 1) = [i-1]_q[i]_q ; \\ qN_{i,i} + D_{i,i} + E_{i,i} &= (q[i-1]_q + 1)([i]_q + [i-1]_q) = [i]_q([i-1]_q + [i]_q) ; \\ qN_{i,i+1} + D_{i,i+1} + E_{i,i+1} &= (q[i-1]_q + 1)[i]_q = [i]_q^2, \end{aligned}$$

ce qui est bien égal à (3.15) et donc la propriété (3.4) est vérifiée.

Pour les équations (3.5) et (3.6), nous rappelons que  $A$  est décrite par

$$\begin{cases} A_{i,i-1} &= q^i[i-1]_q ; \\ A_{i,i} &= q^i([i-1]_q + [i]_q) ; \\ A_{i,i+1} &= q^i[i]_q. \end{cases} \quad (3.16)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} (DA)_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik}A_{kj} \\ &= \sum_{k=i}^{i+1} [i]_q A_{kj}. \end{aligned}$$

On utilise la description suivante :

$$\begin{cases} (DA)_{i,i-1} &= [i]_q A_{i,i-1} = q^i [i]_q [i-1]_q ; \\ (DA)_{i,i} &= [i]_q (A_{i,i} + A_{i+1,i}) = [i]_q (q^i [i-1]_q + (q^i + q^{i+1}) [i]_q) ; \\ (DA)_{i,i+1} &= [i]_q (A_{i,i+1} + A_{i+1,i+1}) = [i]_q ((q^i + q^{i+1}) [i]_q + q^{i+1} [i+1]_q) ; \\ (DA)_{i,i+2} &= [i]_q A_{i+1,i+2} = q^{i+1} [i]_q [i+1]_q. \end{cases} \quad (3.17)$$

On peut décrire  $AD$  de la même façon :

$$\begin{cases} (AD)_{i,i-1} &= A_{i,i-1} D_{i-1,i-1} = q^i [i-1]_q^2 ; \\ (AD)_{i,i} &= A_{i,i-1} D_{i-1,i} + A_{i,i} D_{i,i} = q^i ([i-1]_q^2 + [i-1]_q [i]_q + [i]_q^2) ; \\ (AD)_{i,i+1} &= A_{i,i} D_{i,i+1} + A_{i,i+1} D_{i+1,i+1} = q^i ([i-1]_q [i]_q + [i]_q^2 + [i]_q [i+1]_q) ; \\ (AD)_{i,i+2} &= A_{i,i+1} D_{i+1,i+2} = q^i [i]_q [i+1]_q. \end{cases}$$



Ainsi, pour tout  $i$ , on a

$$\begin{aligned}
q(AD)_{i,i-1} + A_{i,i-1} &= q^i[i-1]_q(q[i-1]_q + 1) \\
&= q^i[i-1]_q[i]_q ; \\
q(AD)_{i,i} + A_{i,i} &= q^i(q[i-1]_q + 1)([i]_q + [i-1]_q) + q^{i+1}[i]_q^2 \\
&= q^i[i]_q([i-1]_q + [i]_q) + q^{i+1}[i]_q^2 ; \\
q(AD)_{i,i+1} + A_{i,i+1} &= q^i(q[i-1]_q + 1)[i]_q + q^{i+1}([i]_q^2 + [i]_q[i+1]_q) \\
&= q^i[i]_q^2 + q^{i+1}([i]_q^2 + [i]_q[i+1]_q) \\
q(AD)_{i,i+2} + A_{i,i+2} &= q^{i+1}[i]_q[i+1]_q + 0 \\
&= q^{i+1}[i]_q[i+1]_q,
\end{aligned}$$

ce qui est égal à (3.17) et donc démontre la propriété (3.5).

Considérons maintenant le produit  $AE$ . On a la description suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lll}
(AE)_{i,i-2} &= A_{i,i-1}E_{i-1,i-2} &= q^i[i-1]_q[i-2]_q ; \\
(AE)_{i,i-1} &= A_{i,i-1}E_{i-1,i-1} + A_{i,i}E_{i,i-1} &= q^i \left( [i-1]_q[i-2]_q + [i-1]_q^2 + [i]_q[i-1]_q \right) ; \\
(AE)_{i,i} &= A_{i,i}E_{i,i} + A_{i,i+1}E_{i+1,i} &= q^i \left( [i-1]_q^2 + [i]_q[i-1]_q + [i]_q^2 \right) ; \\
(AE)_{i,i+1} &= A_{i,i+1}E_{i+1,i+1} &= q^i[i]_q^2.
\end{array} \right. \quad (3.18)$$

De la même façon,  $EA$  est décrite par :

$$\left\{ \begin{array}{lll}
(EA)_{i,i-2} &= E_{i,i-1}A_{i-1,i-2} &= q^{i-1}[i-1]_q[i-2]_q ; \\
(EA)_{i,i-1} &= E_{i,i-1}A_{i-1,i-1} + E_{i,i}A_{i,i-1} &= q^{i-1}[i-2]_q[i-1]_q + q^{i-1}[i-1]_q^2 + q^i[i-1]_q^2 ; \\
(EA)_{i,i} &= E_{i,i-1}A_{i-1,i} + E_{i,i}A_{i,i} &= q^{i-1}[i-1]_q^2 + q^i[i-1]_q^2 + q^i[i]_q[i-1]_q ; \\
(EA)_{i,i+1} &= E_{i,i}A_{i,i+1} &= q^i[i-1]_q[i]_q.
\end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout  $i$ , on a

$$\begin{aligned}
q(EA)_{i,i-2} + A_{i,i-2} &= q^i[i-1]_q[i-2]_q + 0 \\
&= q^i[i-1]_q[i-2]_q ; \\
q(EA)_{i,i-1} + A_{i,i-1} &= q^i[i-1]_q[i-2]_q + q^i[i-1]_q^2 + q^i(q[i-1]_q + 1)[i-1]_q \\
&= q^i[i-1]_q[i-2]_q + q^i[i-1]_q^2 + q^i[i]_q[i-1]_q ; \\
q(EA)_{i,i+1} + A_{i,i+1} &= q^i[i-1]_q^2 + q^i(q[i-1]_q + 1)([i-1]_q + [i]_q) \\
&= q^i[i-1]_q^2 + q^i[i]_q([i-1]_q + [i]_q) \\
q(EA)_{i,i+2} + A_{i,i+2} &= q^i(q[i-1]_q + 1)[i]_q \\
&= q^i[i]_q^2,
\end{aligned}$$

ce qui est égal à (3.18) et donc démontre la propriété (3.6).

De par la structure des vecteurs lignes, il est clair qu'on a (3.7) et (3.8) ce qui termine la démonstration.  $\square$

Une façon d'obtenir une interprétation combinatoire de ces probabilités est d'interpréter chaque monôme du numérateur et du dénominateur de l'équation (3.9) comme un chemin pondéré.

### 3.2.2 Interprétation en termes de chemins

**Définition 3.2.3.** Une histoire de Laguerre marquée  $\mathbf{H}$  de taille  $(n, r)$  est une histoire de Laguerre  $H$  de longueur  $n$  dont tous les pas sauf le premier peuvent être marqués et dont  $r$  exactement le sont. Si un pas de hauteur  $h$  est marqué, son poids augmente de  $h$ .

Ainsi, un pas  $\rightarrow$  ou  $\nearrow$  a un poids compris entre 0 et  $h$  s'il n'est pas marqué et entre  $h$  et  $2h$  s'il est marqué. Un pas  $--\rightarrow$  ou  $\searrow$  a un poids compris entre 0 et  $h - 1$  s'il n'est pas marqué et entre  $h$  et  $2h - 1$  s'il est marqué.

Pour éviter les confusions, on note les histoires de Laguerre marquées en gras. Un exemple d'histoire de Laguerre marquée de taille  $(8, 2)$  est donné en figure 3.2. Les pas ayant une pondération surlignée sont les pas marqués. Dans cet exemple, le poids du deuxième pas est minimal et celui du quatrième est maximal.

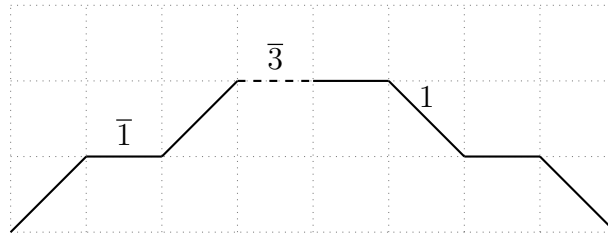


FIGURE 3.2 – Un exemple d'histoire de Laguerre marquée de  $\mathfrak{H}(ADADEDE)$  de poids total 5.

Le *poids total* d'une histoire de Laguerre marquée  $\mathbf{H}$  (noté  $\text{tw}(\mathbf{H})$ ) est la somme des poids de ses pas. Par exemple, le poids total de l'histoire de Laguerre marquée en figure 3.2 est 5. On associe un mot de longueur  $n - 1$  à une histoire de Laguerre marquée  $\mathbf{H}$  de longueur  $n$  de la façon suivante. Les pas marqués sont envoyés sur la lettre  $A$ , les pas  $\nearrow$  et  $\rightarrow$  sur la lettre  $D$  et les pas restants sur  $E$ . On ne conserve pas l'étiquette du premier pas qui est toujours  $D$ . On appelle ce mot l'étiquetage de  $\mathbf{H}$  et on le note  $\text{label}(\mathbf{H})$ . Par exemple, l'étiquetage de l'histoire de Laguerre marquée en figure 3.2 est  $ADADEDE$ .

Étant donné un mot  $X$  en les lettres  $A$ ,  $D$  et  $E$ , soit  $\mathfrak{H}(X)$  l'ensemble des histoires de Laguerre marquées dont le mot associé est  $X$  et soit  $\mathcal{Z}_X$  la fonction génératrice de tous les chemins de  $\mathfrak{H}(X)$  :

$$\mathcal{Z}_X(q) = \sum_{\mathbf{H} \in \mathfrak{H}(X)} q^{\text{tw}(\mathbf{H})}. \quad (3.19)$$

Soit  $M(N, r)$  l'ensemble des mots en les lettres  $\{A, D, E\}$  ayant  $r$  lettres  $A$ . On définit

également la fonction génératrice suivante.

$$\mathcal{Z}_{N,r}(q) = \sum_{X \in M(N,r)} \mathcal{Z}_X(q). \quad (3.20)$$

Le résultat suivant nous donne une interprétation des probabilités stationnaires du 2-PASEP en termes d'histoires de Laguerre marquées.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $x$  un état du 2-PASEP ayant  $N$  états dont  $r$  particules grises et  $X$  le mot en  $A, D$  et  $E$  associé. Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on a*

$$\text{Prob}(q) = \frac{\mathcal{Z}_{X(x)}(q)}{\mathcal{Z}_{N,r}(q)}. \quad (3.21)$$

*Démonstration.* L'idée est d'associer une histoire de Laguerre marquée à chaque monôme du produit matriciel du numérateur de (3.9). Chaque monôme provient du produit de  $N$  coefficients non nuls  $(X_k)_{i_k, j_k}$  où  $X_k \in \{A, D, E\}$  est la matrice correspondant à la  $k$ -ième lettre de  $X$ . Comme les indices  $(i_k, j_k)$  doivent vérifier  $i_k = j_{k-1}$ , ils peuvent représenter les hauteurs de pas successifs d'un chemin :  $i_k$  est la hauteur de départ du  $k$ -ième pas et  $j_k$  est sa hauteur d'arrivée. De plus, puisque les matrices  $A, D$  et  $E$  sont tridiagonales, on a  $|j_k - i_k| \leq 1$  et donc les chemins sont des chemins de Motzkin. Afin d'avoir un chemin qui commence à hauteur 0, on ajoute un pas  $\nearrow$  ou  $\rightarrow$  au début du chemin, suivant quel coefficient de  $\langle W \rangle$  a été utilisé. Pour les pas correspondant à la lettre  $D$ , on a  $j_k \in \{i_k, i_k + 1\}$  donc les pas correspondants sont  $\nearrow$  ou  $\rightarrow$ ; pour les pas  $E$ , on a  $j_k \in \{i_k, i_k - 1\}$  donc les pas correspondants sont  $\searrow$  et  $\rightarrow$ . Pour les pas  $A$ , un coefficient provient soit de la matrice  $D$ , soit de la matrice  $E$ . On choisit donc le pas associé à la bonne matrice que l'on marque pour pouvoir inverser le processus.

Le poids du  $k$ -ième pas du chemin correspond à la puissance de  $q$  utilisée dans le coefficient  $(X_k)_{i_k, j_k}$ . On note que pour la matrice  $D$  (pas  $\nearrow$  ou  $\rightarrow$ ), les poids sont compris entre 0 et  $i_k$  et pour la matrice  $E$  (pas  $\searrow$  ou  $\rightarrow$ ), les poids sont compris entre 0 et  $i_k - 1$ . Enfin, pour la matrice  $A$ , les poids sont les mêmes que pour  $D$  et  $E$  où on a ajouté  $i_k$  à cause du facteur  $\text{diag}(1, q, q^2, q^3, \dots)$ . Cela démontre que les chemins obtenus sont exactement les histoires de Laguerre marquées.

Cette construction permettant de construire un chemin à partir de chaque monôme est clairement inversible et montre donc qu'on a une bijection entre les monômes du numérateur de (3.9) et les histoires de Laguerre marquées.  $\square$

Certains cas particuliers du théorème 3.2.4 sont :

$$\mathcal{Z}_{N,r}(1) = \binom{N}{r} (N+1)! \quad (3.22)$$

$$\mathcal{Z}_{r,r}(q) = [r+1]_q! \quad (3.23)$$

La première équation découle immédiatement de la section suivante qui fournit une bijection entre les histoires de Laguerre marquées et les permutations partiellement signées. La deuxième équation découle d'une fraction continue démontrée par Heine. Une preuve bijective a été donnée par Biane [Bia93].

### 3.2.3 Des histoires de Laguerre marquées aux permutations partiellement signées

Notre objectif étant d’obtenir une interprétation combinatoire de ces probabilités en termes de généralisation des permutations, nous allons utiliser une généralisation de la bijection de Françon-Viennot (définie section 1.1.5) entre les histoires de Laguerre marquées et les permutations partiellement signées.

**Algorithme 3.2.5.**

- *Entrée* : une permutation partiellement signée  $\sigma$  de longueur  $n$ .
- *Sortie* : une histoire de Laguerre marquée  $\mathbf{H}$  de longueur  $n$ .
- *Exécution* : soit  $H = \psi_{FV}(\sigma)$  où  $\sigma$  est la permutation obtenue à partir de  $\sigma$  en ignorant les signes. Pour chaque  $\bar{i} \in \sigma$ , on marque le  $i$ -ème pas de  $H$  pour construire  $\mathbf{H}$ . Lorsque l’on marque un pas de hauteur  $h$ , on ajoute  $h$  à son poids.

On note  $\Psi_{FV}(\sigma)$  le résultat de cet algorithme. Par exemple, pour  $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$ , l’image de  $\sigma$  sans les signes est donnée sur la gauche de la figure 3.3 et la version marquée est sur la droite.

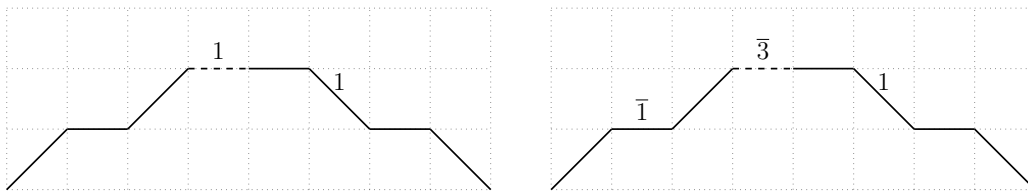


FIGURE 3.3 – Image par la bijection de Françon-Viennot pour la permutation 25783641 à gauche et pour la permutation partiellement signée  $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$  à droite.

La bijection réciproque est obtenue en se souvenant des positions des pas marqués dans l’histoire de Laguerre marquée puis en appliquant l’inverse de la bijection de Françon-Viennot usuelle. Il n’y a plus qu’à surligner les valeurs correspondant aux pas marqués.

**Proposition 3.2.6.** *La fonction  $\Psi_{FV}$  est une bijection entre les permutations partiellement signées de taille  $n$  ayant  $r$  valeurs surlignées et les histoires de Laguerre marquées de longueur  $n$  avec  $r$  pas marqués.*

De plus, soit  $\sigma \in B'_n$ . Alors on a

$$\text{ade}(\text{GC}(\sigma)) = \text{label}(\psi_{FV}(\sigma)) ; \tag{3.24}$$

$$\text{tw}(\sigma) = \text{tw}(\psi_{FV}(\sigma)). \tag{3.25}$$

*Démonstration.* Puisque les permutations et les histoires de Laguerre sont en bijection, il y a autant de permutations partiellement signées de taille  $n$  ayant  $r$  valeurs négatives que d’histoires de Laguerre marquées ayant  $r$  valeurs marquées. De plus, soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux

permutations partiellement signées ayant la même image  $\mathbf{H}$  par  $\psi_{FV}$ . Puisque la bijection de Françon-Viennot est injective sur les permutations, les permutations  $\sigma$  et  $\tau$  issues de  $\sigma$  et  $\tau$  sont égales. De plus, les positions des pas marqués de  $\mathbf{H}$  correspondent aux valeurs de signe négatif de  $\sigma$  et  $\tau$ . Elles sont donc les mêmes et donc  $\sigma = \tau$ .

Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée et  $\mathbf{H} = \psi_{FV}(\sigma)$ . Par construction,  $\text{tot}(\sigma)$  est égal au poids de  $\mathbf{H}$  si on retire les poids ajoutés aux pas marqués. Pour montrer que  $\text{tw}(\sigma) = \text{tw}(\mathbf{H})$ , on démontre que la hauteur  $h$  d'un pas marqué de  $\mathbf{H}$  en position  $k$  est égale au nombre de descentes  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$  de  $\sigma$  telle que  $\sigma_{i+1} < k < \sigma_i$ . Pour cela, on utilise la réciproque de la bijection de Françon-Viennot décrite dans l'algorithme 1.1.18 où  $h$  correspond au nombre de  $\circ$  présent lorsque l'on ajoute la valeur  $k$  dans la permutation. De plus, tout ces emplacements sauf le dernier vont être occupés par une valeur supérieure ou égale à  $k$  et vont créer une descente avec la valeur située à leur droite. Ainsi il y aura bien  $h$  descentes vérifiant la propriété voulue.

Enfin, suivant si  $k$  est négatif, forme une descente ou non, le  $k$ -ième pas de  $H$  sera étiqueté par  $A$ ,  $E$  ou  $D$  et donc  $\text{ade}(\text{GC}(\sigma))$  est égal au mot associé à  $\psi_{FV}(\sigma)$ .  $\square$

En utilisant le théorème 3.2.4 et la proposition 3.2.6 on obtient le théorème suivant.

**Théorème 3.2.7.** *Soit  $x$  un état du 2-PASEP de longueur  $N$  ayant  $r$  particules grises. Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on a*

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\text{ade}(\text{GC}(\sigma))=X(x)} q^{\text{tw}(\sigma)}, \quad (3.26)$$

où  $Z_{N,r}$  est la somme de  $q^{\text{tw}(\sigma)}$  pour toutes les permutations partiellement signées  $\sigma$  de longueur  $N + 1$  ayant  $r$  valeurs de signe négatif.

Ainsi, les permutations partiellement signées permettent de décrire les probabilités du 2-PASEP pour des valeurs quelconque du paramètre  $q$ . La propriété suivante implique cependant qu'il est possible de les décrire sur une classe plus petite d'objets combinatoires.

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $X$  un mot en les lettres  $A$ ,  $D$  et  $E$  de longueur  $N$  ayant  $r$  lettres  $A$ . Si on note  $Z_X(q) = \sum_{\text{ade}(\text{GC}(\sigma))=X} q^{\text{tw}(\sigma)}$ , alors*

$$Z_X(q) = [r + 1]_q! \widetilde{Z}_X(q), \quad (3.27)$$

où  $\widetilde{Z}_X(q)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers positifs.

*Démonstration.* En utilisant la démonstration du théorème 3.2.4, le polynôme  $Z_X(q)$  est égal au produit matriciel  $\langle W | m(X) | V \rangle$  où chaque lettre de  $X$  est envoyée sur la matrice correspondante. Dans la suite de cette démonstration, on identifie  $X$  et  $m(X)$ . Soit  $X$  de longueur  $N$  ayant  $r$  lettres  $A$ . Si  $N = r$ , le résultat découle directement de l'équation (3.23). Sinon, il est possible de réécrire  $\langle W | X | V \rangle$  en utilisant les relations de l'ansatz en proposition 3.2.1 pour l'écrire comme une combinaison linéaire de mots plus courts ou tels qu'un  $D$

s'est déplacé vers la droite ou un  $E$  vers la gauche. De plus, les équation (3.7) et (3.8) permettent de supprimer un  $E$  en début de mot ou un  $D$  en fin de mot. En notant que le nombre de  $A$  ne change pas via ces réécritures, on peut donc répéter ce processus jusqu'à écrire  $\langle W | X | V \rangle$  comme un polynôme en  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$  multiplié par  $\langle W | A^r | V \rangle = [r+1]_q!$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

La preuve ci-dessus utilise les propriétés du 2-ASEP mais n'utilise pas les propriétés combinatoires des objets que nous avons définis. Il serait intéressant d'avoir une telle démonstration et nous proposons maintenant d'en décrire une dans le cas particulier où  $q = 1$ . Nous définissons pour cela une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées.

**Définition 3.2.9.** *Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée de longueur  $n$  ayant  $r$  valeurs de signe négatif. Soient  $i_1, \dots, i_{r+1}$  les positions de ces valeurs et de 1, et soient  $u_1, \dots, u_{r+2}$  les facteurs de  $\sigma$  de la forme*

$$u_k := \sigma_{i_{k-1}+1} \dots \sigma_{i_k}, \quad (3.28)$$

avec  $i_0 = 0$  et  $i_{r+2} = n$ . Soit  $\tau$  une permutation partiellement signée, on dit que  $\sigma$  et  $\tau$  sont équivalentes ( $\sigma \sim \tau$ ) s'il existe une permutation  $\mu \in \mathfrak{S}_{r+1}$  telle que

$$\tau = u_{\tau_1} \dots u_{\tau_{r+1}} u_{r+2}. \quad (3.29)$$

Par exemple, pour  $\sigma = \bar{2}73\bar{4}5186$ , on a  $u_1 = \bar{2}$ ,  $u_2 = 73\bar{4}$ ,  $u_3 = 51$  et  $u_4 = 86$ . Pour  $\mu = 312$ , on a  $\tau = 51\bar{2}73\bar{4}86$ . L'ensemble des permutations partiellement signées équivalentes à  $\sigma$  est :

$$\{\bar{2}5173\bar{4}86, \bar{2}73\bar{4}5186, 51\bar{2}73\bar{4}86, 5173\bar{4}286, 73\bar{4}25186, 73\bar{4}51\bar{2}86\}.$$

*Démonstration de la proposition 3.2.8 dans le cas  $q = 1$ .* Pour démontrer cette proposition, on montre qu'étant données deux permutations partiellement signées  $\sigma$  et  $\tau$  telles que  $\sigma \sim \tau$ , on a  $\text{GC}(\sigma) = \text{GC}(\tau)$ . Puisqu'il y a naturellement  $(r+1)!$  permutations partiellement signées dans la classe d'une permutation ayant  $r$  valeurs de signe négatif, on obtient bien le résultat.

Tout d'abord, on a  $\text{Sign}(\sigma) = \text{Sign}(\tau)$  puisque  $\sim$  ne change pas les signes des valeurs. De plus, la valeur à droite d'une valeur non signée (autre que 1) est la même dans  $\sigma$  et dans  $\tau$  et donc  $\text{GDes}(\sigma) = \text{GDes}(\tau)$  ce qui termine la démonstration.  $\square$

Noter que la relation d'équivalence ainsi définie laisse stable GC mais ne modifie pas le poids de la permutation de façon à obtenir le facteur  $[r+1]_q!$ .

## 3.3 Lien avec le PASEP et formule de récurrence

### 3.3.1 Lien entre le 2-PASEP et le PASEP

Dans cette section, nous montrons que dans le cas où  $\alpha = \beta = q = 1$ , il est possible de calculer les probabilités du 2-PASEP directement à partir des probabilités du PASEP.

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $X$  un mot en les lettres  $A$ ,  $D$  et  $E$  ayant au moins un  $A$  et soient  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $X = X_1AX_2$ . Alors on a*

$$|\mathfrak{H}(X)| = |\mathfrak{H}(X_1DX_2)| + |\mathfrak{H}(X_1EX_2)|. \quad (3.30)$$

*Démonstration.* Si  $|X_1| = r$ , l'application consistant à retirer le marquage du  $(r+2)$ -ième pas d'une histoire de Laguerre marquée de  $\mathfrak{H}(X)$  et de diminuer le poids de ce pas de sa hauteur est une bijection entre l'ensemble à gauche de l'égalité et l'union des ensembles à droite.  $\square$

**Remarque 3.3.2.** *Noter que l'équation (3.30) et la proposition 3.2.6 impliquent une propriété similaire sur les permutations partiellement signées. Nous en aurons besoin au chapitre suivant où la statistique GC intervient dans l'interprétation combinatoire de coefficients d'une matrice de changement de base.*

**Théorème 3.3.3.** *Soit  $x$  un état du 2-PASEP de longueur  $N$  avec  $r$  particules grises. Lorsque  $\alpha = \beta = q = 1$ , on a*

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_y \text{Prob}(y), \quad (3.31)$$

où la somme porte sur tout les états du PASEP ayant des particules aux emplacements des particules  $\bullet$  de  $x$ , des emplacements libres aux emplacements libres de  $x$  et une particule ou non aux emplacements des particules  $\circ$  de  $x$ .

Par exemple, si on considère l'état  $x$  correspondant au mot  $DAE$ , soient  $x_1$  et  $x_2$  les états associés aux mots  $DEE$  et  $DDE$ . En utilisant le théorème 3.2.7, on a :

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{3 * 4!} \#\{\sigma \in B'_4 \mid \text{GC}(\sigma) = 2|11\} = \frac{14}{3 * 4!}.$$

De la même façon, on a  $\text{Prob}(x_1) = \text{Prob}(x_2) = \frac{7}{4!}$ , ce qui illustre bien l'équation (3.31).

*Démonstration.* En utilisant le théorème 3.2.4 on a

$$\text{Prob}(x) = \frac{\mathcal{Z}_{X(x)}(1)}{\mathcal{Z}_{N,r}(1)}.$$

Or, on a  $\mathcal{Z}_{N,r}(1) = \binom{N}{r}(N+1)!$  et le lemme 3.3.1 implique que  $\mathcal{Z}_{X(x)}(1)$  est égal au nombre d'histoires de Laguerre dont l'étiquetage correspond à  $X(x)$  où les  $A$  peuvent être remplacés par des  $D$  ou des  $E$ . En utilisant le théorème 1.2.6, on en déduit que  $\mathcal{Z}_{X(x)}(1) = \sum_y \text{Prob}(y)Z_N(1)$  où la somme est la même que dans (3.31) et  $Z_N(1) = (N+1)!$ . Ce qui termine la démonstration.  $\square$

### 3.3.2 Description récursive des probabilités du 2-PASEP

Dans le but d'obtenir une formule explicite pour calculer les probabilités stationnaires du 2-PASEP au chapitre suivant, nous donnons ici une récurrence vérifiée par celles-ci, ou de manière équivalente par la somme  $\mathcal{Z}_X(q)$ .

**Proposition 3.3.4.** *Soient  $X$  un mot de longueur  $N$  en les lettres  $A$ ,  $D$  et  $E$  ayant  $r$  fois la lettre  $r$  et  $s$  un entier. En posant  $k$  le nombre de lettre  $A$  ou  $E$  de  $X$ , on a*

$$\mathcal{Z}_{A^s \cdot D \cdot X}(q) = [k+1]_q \mathcal{Z}_{A^s \cdot X}(q) + \sum_{X=X_1 \cdot E \cdot X_2} q^{\kappa(X_1)} \mathcal{Z}_{A^s \cdot X_1 \cdot D \cdot X_2}(q); \quad (3.32)$$

$$\mathcal{Z}_{A^s \cdot E \cdot X}(q) = [s+1]_q \mathcal{Z}_{A^s \cdot X}(q); \quad (3.33)$$

$$\mathcal{Z}_{A^s}(q) = [s+1]_q!, \quad (3.34)$$

où  $A^s$  est le mot composé de  $s$  fois la lettre  $A$  et  $\kappa(X_1)$  est égal au nombre de  $E$  et de  $A$  dans  $X_1$ .

*Démonstration.* Commençons par observer que  $\mathcal{Z}_{A^s}(q) = \mathcal{Z}_{r,r}(q)$ , de sorte que (3.34) découle directement de (3.23).

Pour démontrer les autres parties de cette propriété, on utilise le fait que  $\mathcal{Z}_Y(q)$  est égal au produit matriciel  $\langle W | m(Y) | V \rangle$  où  $m$  est le morphisme envoyant les lettres de  $Y$  sur les matrices vérifiant l'ansatz de la proposition 3.2.1. On identifiera  $m(Y)$  et  $Y$  dans la suite de cette démonstration.

On démontre l'équation (3.33) par récurrence sur  $s$ . Si  $s = 0$ , cette équation est simplement une réécriture de (3.7) pour  $\alpha = 1$  :  $\langle W | E = \langle W |$ . Sinon, en utilisant (3.6),  $AE = qEA + A$ , on a

$$\begin{aligned} \langle W | A^s E X | V \rangle &= q \langle W | A^{s-1} E A X | V \rangle + \langle W | A^{s-1} X | V \rangle \\ &= (q[s]_q! + 1) \langle W | A^s X | V \rangle, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et on retrouve donc

$$\langle W | A^s E X | V \rangle = [s+1]_q! \langle W | S X | V \rangle.$$

Pour l'équation (3.32), on montre de façon plus générale que pour tout mot  $Y$ , on a

$$\langle W | Y D X | V \rangle = [k+1]_q \langle W | Y X | V \rangle + \sum_{X=X_1 E X_2} q^{\kappa(X_1)} \langle W | Y X_1 D X_2 | V \rangle. \quad (3.35)$$

Il suffit alors de poser  $Y = A^s$  pour obtenir le résultat. On montre cette équation par récurrence sur la longueur de  $X$ . Si  $X$  est le mot vide, cette équation est simplement une réécriture de (3.8) pour  $\beta = 1$  :  $D | V \rangle = | V \rangle$ . Sinon, soit  $X'$  le mot obtenu à partir de  $X$  en retirant la première lettre de  $X$ . Il y a trois cas.



- Si  $X = DX'$ , posons  $Y' = YD$ . On a clairement  $\langle W|YDX|V \rangle = \langle W|Y'DX'|V \rangle$ . Montrons alors que l'hypothèse de récurrence appliquée à  $\langle W|Y'DX'|V \rangle$  nous donne la même chose que pour  $\langle W|YDX|V \rangle$ . Puisque  $X$  et  $X'$  ont autant de lettres  $A$  et  $E$ , le premier terme du membre de droite de (3.35) nous donne  $[k+1]_q \langle W|Y'X'|V \rangle$ . De plus, on a un découpage  $X_1EX_2$  de  $X$  si et seulement si  $X'_1EX_2$  est un découpage de  $X'$  avec  $X_1 = DX'_1$ . De plus, dans ces découpages,  $X_1$  et  $X'_1$  ont le même nombre de  $E$  et de  $A$ . Ainsi,

$$\sum_{X'=X'_1EX_2} q^{\kappa(X'_1)} \langle W|Y'X'_1DX_2|V \rangle = \sum_{X=X_1EX_2} q^{\kappa(X_1)} \langle W|Y'X'_1DX_2|V \rangle,$$

et donc la récurrence est vérifiée en utilisant le fait que  $Y'X' = YX$  et  $Y'X'_1 = YX_1$ .

- Si  $X = AX'$ , posons  $Y' = YA$ . En utilisant (3.5) ( $DA=qAD+A$ ), on a

$$\langle W|YDX|V \rangle = q \langle W|Y'DX'|V \rangle + \langle W|YX|V \rangle. \quad (3.36)$$

Puisque  $X'$  et  $X$  ont autant de lettres  $E$ , on a un découpage  $X_1EX_2$  de  $X$  si et seulement si  $X'_1EX_2$  est un découpage de  $X'$  avec  $X_1 = AX'_1$ . De plus, dans ces découpages,  $X_1$  et  $X'_1$  ont le même nombre de  $E$  et  $X_1$  a un  $A$  de plus que  $X'_1$ . Ainsi, l'hypothèse de récurrence implique

$$\begin{aligned} \langle W|Y'DX'|V \rangle &= [k]_q \langle W|Y'X'|V \rangle + \sum_{X'=X'_1EX_2} q^{\kappa(X'_1)} \langle W|Y'X'_1DX_2|V \rangle \\ &= [k]_q \langle W|YX|V \rangle + \sum_{X=X_1EX_2} q^{\kappa(X_1)-1} \langle W|YX_1DX_2|V \rangle, \end{aligned}$$

car  $Y'X' = YX$  et  $Y'X'_1 = YX_1$ . En utilisant cette égalité dans (3.36), l'hypothèse de récurrence est vérifiée.

- Si  $X = EX'$ , posons  $Y' = YE$ . En utilisant (3.4) ( $DE = qED + E + D$ ), on a

$$\langle W|YDX|V \rangle = q \langle W|Y'DX'|V \rangle + \langle W|YX|V \rangle + \langle W|YDX'|V \rangle. \quad (3.37)$$

Puisque  $X$  commence par un  $E$ , en dehors du découpage  $X = EX'$ , on a un découpage de  $X_1EX_2$  de  $X$  si et seulement si  $X'_1EX_2$  est un découpage de  $X'$  avec  $X_1 = AX'_1$ . De plus, dans ces découpages,  $X_1$  et  $X'_1$  ont le même nombre de  $A$  et  $X_1$  a un  $E$  de plus que  $X'_1$ . Ainsi, l'hypothèse de récurrence implique :

$$\langle W|Y'DX'|V \rangle = [k]_q \langle W|Y'X'|V \rangle + \sum_{X'=X'_1EX_2} q^{\kappa(X'_1)} \langle W|Y'X'_1DX_2|V \rangle,$$

et la somme se réécrit

$$\sum_{X=X_1EX_2} q^{\kappa(X_1)-1} \langle W|YX_1DX_2|V \rangle - \frac{1}{q} \langle W|YDX'|V \rangle.$$

En utilisant cette égalité dans (3.37), l'hypothèse de récurrence est vérifiée.

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée dans tous les cas, ce qui termine la démonstration.  $\square$

Noter que la preuve qu'on a utilisée implique que les équations (3.32) et (3.33) sont vérifiées par n'importe quel objet combinatoire interprétant le 2-PASEP, l'équation (3.34) dépendant quant à elle des objets eux-mêmes.

## 3.4 Une autre interprétation

Étant donné un mot  $X$  en l'alphabet  $\{A, D, E\}$ , soit  $\tilde{X}$  l'image miroir de  $X$  où  $D$  et  $E$  sont échangés. Par exemple, pour  $X = EADA$ , on a  $\tilde{X} = AEAD$ . À l'aide d'un argument de symétrie du modèle du 2-PASEP, on sait que la probabilité d'un état  $x$  est égale à la probabilité de l'état associé au mot  $\tilde{X}(x)$ .

Cette propriété n'est cependant pas observable directement sur les histoires de Laguerre marquées ni sur les permutations partiellement signées. Dans le cadre du PASEP usuel, cette propriété existe également et s'observe sur les histoires de Laguerre larges. En s'inspirant du lien entre histoires de Laguerre et histoires de Laguerre larges établi au chapitre précédent, nous définissons donc les *histoires de Laguerre larges marquées*.

### 3.4.1 Les histoires de Laguerre larges marquées

**Définition 3.4.1.** *Une histoire de Laguerre large marquée de taille  $(N, r)$  est une histoire de Laguerre large de longueur  $N$  telle que tous les pas peuvent être marqués et  $r$  le sont. Si un pas  $\nearrow$  ou  $\longrightarrow$  de hauteur  $h$  est marqué, son poids augmente de  $h + 1$  tandis que les pas marqués  $\searrow$  ou  $\dashrightarrow$  de hauteur  $h$  voient leur poids augmenter de  $h$ .*

*Ainsi, un pas  $\longrightarrow$  ou  $\nearrow$  a un poids compris entre 0 et  $h$  s'il n'est pas marqué et entre  $h + 1$  et  $2h + 1$  s'il est marqué. Un pas  $\dashrightarrow$  ou  $\searrow$  a un poids compris entre 0 et  $h$  s'il n'est pas marqué et entre  $h$  et  $2h$  s'il est marqué.*

*L'étiquetage d'une histoire de Laguerre large marquée  $\mathbf{H}$  de longueur  $(N, r)$  est le mot de longueur  $N$  en les lettres  $A, D$  et  $E$  obtenu en envoyant les pas marqués sur  $A$ , les pas  $\nearrow$  et  $\longrightarrow$  sur  $D$  et les autres sur  $E$ . On le note  $\text{label}(\mathbf{H})$ .*

De la même façon que pour les histoires de Laguerre marquées, on représente une histoire de Laguerre large marquée en gras. Un exemple d'histoire de Laguerre large marquée est donné en figure 3.4. On note  $\mathfrak{H}^0(X)$  l'ensemble des histoires de Laguerre larges dont l'étiquetage est  $X$ .

Afin d'utiliser ces objets pour donner une interprétation combinatoire des probabilités du 2-PASEP, nous allons définir une bijection entre histoires de Laguerre marquées et histoires de Laguerre larges marquées en utilisant l'involution sur les chemins de Dyck pondérés  $\psi$  définie dans la section 2.1.2.

Soit  $\phi$  la bijection entre histoire de Laguerre et chemins de Dyck décrite dans l'algorithme 1.1.20 et  $\phi_0$  la variante construisant un chemin de Dyck pondéré à partir d'une histoire de Laguerre large.

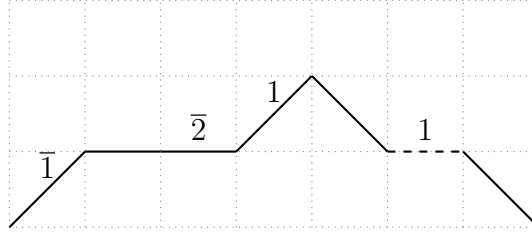


FIGURE 3.4 – Une histoire de Laguerre large marquée de longueur 8 dont l'étiquetage est  $ADADDEDE$ .

**Lemme 3.4.2.** *Soit  $H$  une histoire de Laguerre. On a*

$$\text{label}(H) = \text{label}(\phi_0^{-1} \circ \psi \circ \phi(H)) ; \quad (3.38)$$

$$\text{tw}(H) = \text{tw}(\phi_0^{-1} \circ \psi \circ \phi(H)). \quad (3.39)$$

*Démonstration.* Des définitions de l'algorithme 1.1.20 et des statistiques  $\text{GC}$  et  $\text{GC}^0$  sur les chemins de Dyck pondérés définies aux définitions 2.1.1 et 2.1.5, la  $k$ -ième lettre de  $\text{label}(H)$  est  $E$  si et seulement si  $k$  est dans l'ensemble des descentes de  $\text{GC}(\phi(H))$ . De même, si  $H^0$  est une histoire de Laguerre large, la  $k$ -ième lettre de  $\text{label}(H^0)$  est un  $E$  si et seulement si  $k$  est dans l'ensemble des descentes de  $\text{GC}^0(\phi_0(H^0))$ . Ainsi, pour montrer (3.38), il suffit de montrer que pour tout chemin de Dyck pondéré  $(D, w)$ , on a  $\text{GC}^0(\psi(D, w)) = \text{GC}(D, w)$ , ce qui est démontré à la proposition 2.1.6.

La pondération reste inchangée tout au long de chacune des bijections  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\phi_0$ , ce qui démontre l'équation (3.39).  $\square$

Notons  $\Psi = \phi_0^{-1} \circ \psi \circ \phi$ . Un exemple détaillé de  $\Psi$  est donné en figure 3.5.

**Algorithme 3.4.3.**

- *Entrée* : une histoire de Laguerre marquée  $\mathbf{H}$ .
- *Sortie* : une histoire de Laguerre large marquée  $\mathbf{H}^0$ .
- *Exécution* : soit  $H$  l'histoire de Laguerre obtenue à partir de  $\mathbf{H}$  en supprimant le marquage des pas marqués de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}^0 = \Psi(H)$ . Pour tout  $k$  tel que  $\mathbf{H}_k$  est un pas marqué, on marque le  $(k-1)$ -ième pas de  $\mathbf{H}^0$  et si ce pas est  $\rightarrow$  (resp.  $--\rightarrow$ ), on le change en  $--\rightarrow$  (resp.  $\rightarrow$ ).

Noter qu'appliquer cet algorithme à une histoire de Laguerre revient à appliquer  $\Psi$ . Il étend donc cette fonction aux objets marqués. C'est pourquoi on note également  $\Psi$  la fonction décrite par l'algorithme 3.4.3. Un exemple d'exécution de  $\Psi$  sur une histoire de Laguerre marquée est donné en figure 3.6.

**Proposition 3.4.4.** *La fonction  $\Psi$  envoyant les histoires de Laguerre marquées sur les histoires de Laguerre larges marquées est une bijection. De plus, pour toute histoire de Laguerre marquée  $\mathbf{H}$ , on a*

$$\text{label}(\mathbf{H}) = \text{label}(\Psi(\mathbf{H})) ; \quad (3.40)$$

$$\text{tw}(\mathbf{H}) = \text{tw}(\Psi(\mathbf{H})). \quad (3.41)$$

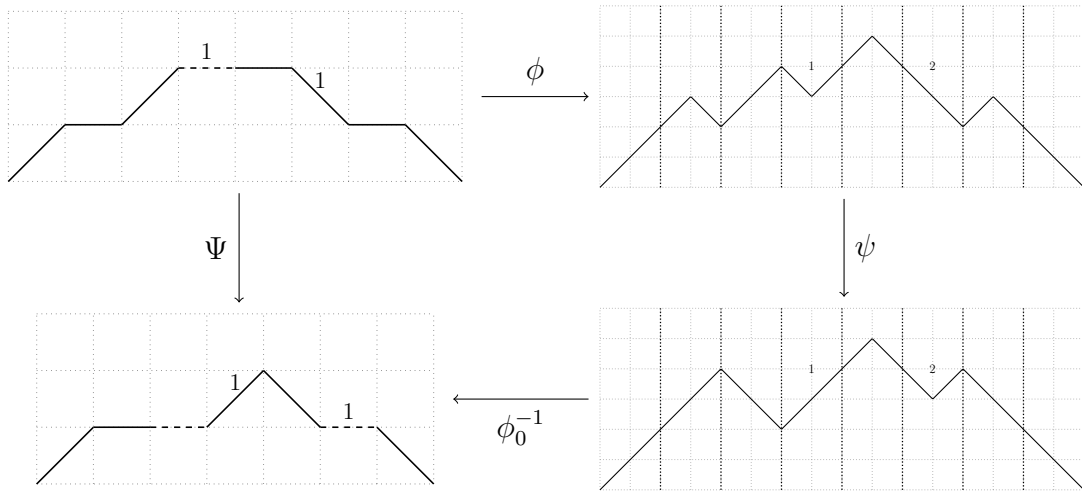


FIGURE 3.5 – Les étapes successives de  $\Psi$ .

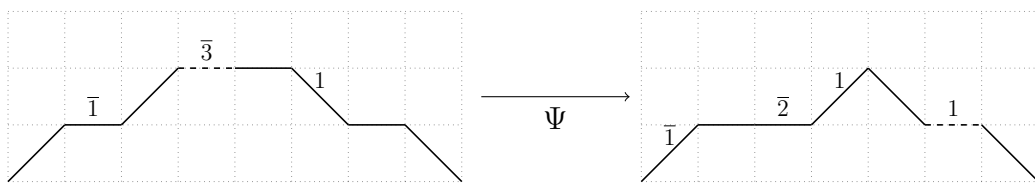


FIGURE 3.6 – Une histoire de Laguerre marquée sur la gauche et son image par  $\Psi$  sur la droite. Les étapes intermédiaires correspondant aux chemins en figure 3.5.

*Démonstration.* Le fait que  $\Psi$  soit une bijection découle directement du fait que ce soit le cas sur les objets non marqués.

Puisque les positions des  $A$  sont les mêmes dans  $\text{label}(\mathbf{H})$  et dans  $\text{label}(\Psi(\mathbf{H}))$  et que les pas non marqués de  $\psi(\mathbf{H})$  sont les mêmes que les pas de  $\psi(H)$ , l'équation (3.40) découle directement du lemme 3.4.2.

Soit  $\mathbf{H}' = \Psi(\mathbf{H})$ . L'équation (3.39) implique qu'il suffit de démontrer que le poids qu'on ajoute à un pas marqué de  $\mathbf{H}'$  correspond au poids ajouté par le marquage du pas correspondant dans  $\mathbf{H}$  pour démontrer (3.41). Pour ce faire, il est nécessaire de remarquer que la dernière étape de l'algorithme 3.4.3 consistant à inverser les pas  $--\rightarrow$  et  $\longrightarrow$  marqués revient à annuler l'effet de  $\psi$  sur le chemin de Dyck pondéré à la position correspondant à ces pas. En effet,  $\psi$  inverse les motifs  $/\setminus$  et  $\setminus/$  en position  $(2k, 2k + 1)$  ce qui correspond à inverser les pas  $--\rightarrow$  et  $\longrightarrow$  de l'histoire de Laguerre large associée.

Soient  $k$  la position d'un pas marqué de  $\mathbf{H}$  et  $h'$  la hauteur du  $(k-1)$ -ième pas de  $\mathbf{H}'$ . On veut montrer que  $h' = h - 1$  si le  $(k-1)$ -ième pas de  $\mathbf{H}'$  est un pas  $\longrightarrow$  ou  $\nearrow$  et  $h' = h$  sinon. Soit  $H$  l'histoire de Laguerre obtenue à partir de  $\mathbf{H}$  en retirant les pas marqués et leur pondération additionnelle. La description de  $\phi$  implique que la hauteur de  $\phi(H)_{2k-1}$  est  $2h$ .

De plus, le paragraphe précédent implique que la hauteur de  $\phi(H)_{2k-1}$  est égale à  $2h' + 1$  et que ce pas est montant si et seulement si  $\mathbf{H}'_{k-1}$  est un pas  $\rightarrow$  ou  $\nearrow$ . Ainsi,  $2h' + 1 = 2h - 1$  si  $\mathbf{H}'_{k-1}$  est un pas  $\rightarrow$  ou  $\nearrow$ , et  $2h' = 2h$  sinon, ce qui démontre le résultat.  $\square$

On en déduit alors l'interprétation combinatoire suivante.

**Corollaire 3.4.5.** *Soit  $x$  un état du 2-PASEP de longueur  $N$  ayant  $r$  particules grises. Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on a*

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\mathbf{H} \in \mathfrak{H}^0(X(x))} q^{\text{tw}(\mathbf{H})}, \quad (3.42)$$

où  $Z_{N,r}(q)$  est la série génératrice des poids des histoires de Laguerre larges marquées de longueur  $N$  à  $r$  pas marqués.

Nous construisons maintenant une involution sur les histoires de Laguerre larges marquées permettant de retranscrire l'involution sur les probabilités du 2-PASEP.

**Algorithme 3.4.6.**

- *Entrée* : une histoire de Laguerre large marquée  $\mathbf{H}$ .
- *Sortie* : une histoire de Laguerre large marquée  $\widetilde{\mathbf{H}}$ .
- *Initialisation* :  $\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ .
- *Exécution* : on décale tous les poids d'un cran vers la gauche dans  $\widetilde{\mathbf{H}}$ . On ne déplace pas les pas  $\dashrightarrow$  ou  $\searrow$  marqués, on ne décale que leur poids moins  $h$  et pour les pas  $\rightarrow$  ou  $\nearrow$  marqués, on ne déplace que leur poids moins  $h + 1$ . On retourne ensuite le chemin pondéré  $\widetilde{\mathbf{H}}$  et on échange les pas non marqués  $\dashrightarrow$  en  $\rightarrow$  et inversement.

Un exemple de cette transformation est donné en figure 3.7. On a alors la proposition suivante.

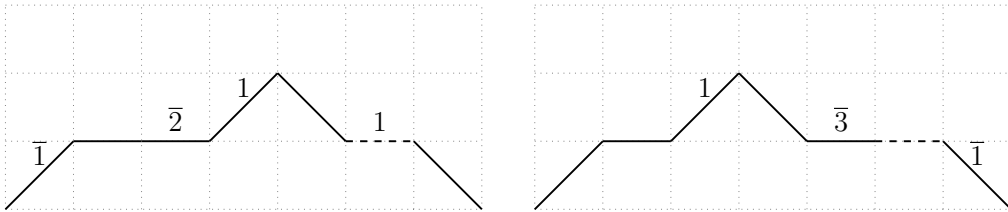


FIGURE 3.7 – Une histoire de Laguerre large marquée  $\mathbf{H}$  d'étiquetage  $ADADEEE$  à gauche et  $\widetilde{\mathbf{H}}$  sur la droite d'étiquetage  $DDDEAEA$ .

**Proposition 3.4.7.** *Soit  $\mathbf{H}$  une histoire de Laguerre large marquée et  $\widetilde{\mathbf{H}}$  le chemin pondéré obtenu par la transformation décrite par l'algorithme 3.4.6. Alors  $\widetilde{\mathbf{H}}$  est une histoire de Laguerre large marquée et cette application est une involution. De plus, on a*

$$\text{label}(\mathbf{H}) = \widetilde{\text{label}(\widetilde{\mathbf{H}})}, \quad (3.43)$$

où  $\widetilde{X}$  est l'application retournant  $X$  et échangeant les  $E$  et les  $D$ .

*Démonstration.* L'opération de décalage des poids fait que le poids d'un pas est compris entre 0 et sa hauteur d'arrivée pour les pas non marqués. Pour les pas marqués, leur poids est compris entre  $h$  et leur hauteur d'arrivée plus  $h$  pour les pas  $\dashrightarrow$  et  $\searrow$  et entre  $h + 1$  et leur hauteur d'arrivée plus  $h + 1$  pour les pas  $\rightarrow$  et  $\nearrow$ . En retournant le chemin, les hauteurs d'arrivée des pas de  $\mathbf{H}$  deviennent les hauteurs de départ des pas de  $\widetilde{\mathbf{H}}$  et donc la condition sur les poids non marqués est vérifiée. Pour les pas marqués, on a les cas suivants.

- Un pas  $\nearrow$  de hauteur de départ  $h$  dans  $\mathbf{H}$  devient un pas  $\searrow$  de hauteur de départ  $h + 1$  dont le poids est compris entre  $h + 1$  et  $2h + 2$ .
- Un pas  $\rightarrow$  (resp.  $\dashrightarrow$ ) de hauteur de départ  $h$  dans  $\mathbf{H}$  reste un pas  $\rightarrow$  (resp.  $\dashrightarrow$ ) dans  $\widetilde{\mathbf{H}}$  et son poids est encore compris entre  $h + 1$  et  $2h + 1$  (resp.  $h$  et  $2h$ ).
- Un pas  $\searrow$  de hauteur de départ  $h$  dans  $\mathbf{H}$  devient un pas  $\nearrow$  de hauteur de départ  $h - 1$  dont le poids est compris entre  $h$  et  $2h$ .

Ainsi, la condition sur les poids des pas de  $\widetilde{\mathbf{H}}$  est bien vérifiée. De plus, le fait que cette application soit une involution découle directement de sa définition.

Enfin, puisqu'un pas  $\searrow$  devient un pas  $\nearrow$  et inversement, qu'un pas non marqué  $\dashrightarrow$  devient un pas  $\rightarrow$  et inversement et qu'un pas marqué reste marqué, on retrouve bien l'équation (3.43).  $\square$

Maintenant que nous avons donné une interprétation combinatoire du 2-PASEP sur les histoires de Laguerre larges marquées, il est naturel de considérer la généralisation de la bijection de Françon-Viennot définie précédemment avec la convention  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$ .

### 3.4.2 Retour aux permutations partiellement signées

Nous adaptons ci-dessous l'algorithme 3.2.5 afin de construire une histoire de Laguerre large marquée à partir d'une permutation partiellement signée.

#### Algorithme 3.4.8.

- *Entrée* : une permutation partiellement signée  $\sigma$  de longueur  $n$ .
- *Sortie* : une histoire de Laguerre large marquée  $\mathbf{H}$  de longueur  $n - 1$ .
- *Exécution* : soit  $H = \psi_{FV}^0(\sigma)$  où  $\sigma$  est la permutation obtenue à partir de  $\sigma$  en ignorant les signes. Pour chaque  $\bar{i} \in \sigma$ , on marque le  $(i - 1)$ -ième pas de  $H$  pour construire  $\mathbf{H}$ . Lorsque l'on marque un pas de hauteur  $h$ , on ajoute  $h + 1$  à son poids si c'est un pas  $\rightarrow$  ou  $\nearrow$  et on ajoute  $h$  si c'est un pas  $\dashrightarrow$  ou  $\searrow$ .

On note  $\Psi_{FV}^0(\sigma)$  le résultat de cet algorithme.

La figure 3.8 illustre l'algorithme 3.4.8 dans le cas  $\sigma = \bar{2}3517\bar{4}86$ . L'histoire de Laguerre large sur la gauche correspond à  $\psi_{FV}^0(23517486)$  et l'histoire de Laguerre large marquée à droite est  $\psi_{FV}^0(\bar{2}3517\bar{4}86)$ .

De la même façon que pour les permutations, on définit la statistique  $\text{GC}^0$  sur les permutations partiellement signées qui est l'analogie de GC lorsque l'on se place avec la convention  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$ .

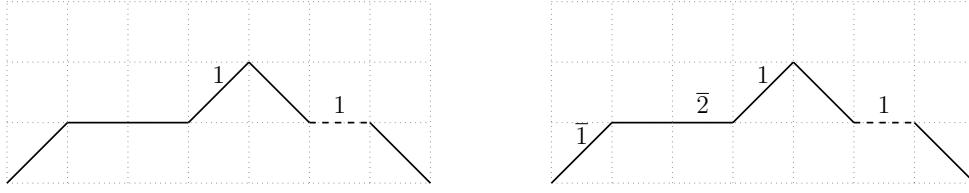


FIGURE 3.8 – Image par la bijection de Françon-Viennot avec la convention  $\sigma_0 = \sigma_{n+1} = 0$  pour la permutation 23517486 à gauche et pour la permutation partiellement signée  $\sigma = \bar{2}3517486$  à droite.

**Définition 3.4.9.** Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée de longueur  $n$ . L'ensemble des descentes de Genocchi de type 0 est

$$\text{GDes}^0(\sigma) := \{\sigma_i \mid (\sigma_i + 1) \notin \text{Sign}(\sigma), \sigma_i > \sigma_{i+1}\}. \quad (3.44)$$

On définit également la composition des descentes de Genocchi de  $\sigma$  (noté  $\text{GC}^0(\sigma)$ ) comme la composition segmentée dont l'ensemble des descentes est  $\text{GDes}^0(\sigma) \setminus \{n\}$  et l'ensemble des segmentations est  $\{s - 1 \mid s \in \text{Sign}(\sigma)\}$ .

Noter qu'avec cette convention, on a toujours  $\sigma_n > \sigma_{n+1}$  et donc on a toujours  $n \in \text{GDes}^0(\sigma)$ . Par exemple, pour  $\sigma = \bar{2}3517486$ , on a  $\text{Sign}(\sigma) = \{2, 4\}$  et  $\text{GDes}^0(\sigma) = \{5, 6, 7\}$ . Ainsi, on a  $\text{GC}^0(\sigma) = 1|2|2111$ .

Afin de décrire ce que devient le poids d'une histoire de Laguerre large marquée sur une permutation partiellement signée, nous avons besoin de définir une deuxième notion de poids.

**Définition 3.4.10.** Le poids de type 0 d'une permutation partiellement signée  $\sigma$  (noté  $\text{tw}_0(\sigma)$ ) est égal au nombre de motifs 31-2 de celle-ci auquel on ajoute pour chaque descente  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ , le nombre de  $\sigma_i > k > \sigma_{i+1}$  avec  $k + 1 \in \text{Sign}(\sigma)$ .

Par exemple, la permutation partiellement signée  $\sigma = \bar{2}3517486$  a un poids de type 0 égal à 5. En effet, il y a 2 motifs 31-2 qui sont issus des sous-mots  $53\bar{4}$  et  $7\bar{4}6$  et on a  $6 > 1 > 0$ ,  $6 > 3 > 0$  et  $5 > 3 > 1$ .

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 3.4.11.** Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée. On a

$$\text{tw}_0(\sigma) = \text{tw}(\phi_{FV}^0(\sigma)) ; \quad (3.45)$$

$$\text{ade}(\text{GC}^0(\sigma)) = \text{label}(\psi_{FV}^0(\sigma)). \quad (3.46)$$

*Démonstration.* L'équation (3.46) est démontrée de la même façon que dans la proposition 3.2.6. Concernant le premier point de la proposition,  $\text{tot}(\sigma)$  est égal à la somme des poids des pas si on ne considère pas les pondérations ajoutées aux pas marqués. En notant  $\mathbf{H} = \phi_{FV}^0(\sigma)$ , il suffit donc de montrer que si le  $k$ -ième pas de  $\mathbf{H}$  est marqué, le

pois ajouté à ce pas est égal au nombre de descentes  $\sigma_i > k > \sigma_{i+1}$ . On utilise pour ça la bijection réciproque de la bijection de Françon-Viennot. Si le  $k$ -ième pas de  $\mathbf{H}$  a pour hauteur  $h$ , cela signifie qu'au moment d'ajouter la valeur  $k$  dans la permutation, il y a  $k + 1$  emplacements qui seront occupés par une valeur supérieure ou égale à  $k$  pour créer une descente avec une valeur plus petite que  $k$ . Cependant, si le  $k$ -ième pas est un pas  $--\rightarrow$  ou  $\searrow$ , la valeur  $k$  occupe une de ces positions et donc il y a exactement  $h$  descentes  $\sigma_i > k > \sigma_{i+1}$  dans la permutation finale. Si le  $k$ -ième pas est  $\rightarrow$  ou  $\nearrow$ , la valeur  $k$  ne crée pas de descente et donc il y aura encore  $h + 1$  descentes  $\sigma_i > k > \sigma_{i+1}$  dans la permutation finale.  $\square$

L'interprétation combinatoire des probabilités stationnaires du 2-PASEP découle naturellement de la proposition précédente.

**Corollaire 3.4.12.** *Soit  $x$  un état du 2-PASEP de longueur  $N$  ayant  $r$  particules grises. Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on a*

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\text{ade}(\text{GC}^0(\sigma))=X(x)} q^{\text{two}(\sigma)}, \quad (3.47)$$

où  $Z_{N,r}$  est la somme de  $q^{\text{two}(\sigma)}$  pour toutes les permutations partiellement signées  $\sigma$  de longueur  $N + 1$  ayant  $r$  valeurs signées.





# Chapitre 4

## Analogie des bases de Tevlin dans **SCQSym**

L'algèbre **SCQSym**, introduite dans [NT07], généralise l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives de façon naturelle. En effet, en étant libre sur un générateur par degré, l'algèbre **Sym** a pour dimension  $2^{n-1}$  en degré  $n$  et peut être vue comme une algèbre sur les sommets de l'hypercube. L'algèbre **SCQSym** est, quant à elle, libre sur  $2^{n-1}$  générateurs par degré et est donc de dimension  $3^{n-1}$  en degré  $n$ . Elle peut donc être vue comme une algèbre sur les faces de l'hypercube dont les générateurs algébriques correspondent au sommets de l'hypercube.

Dans [NT07] et [NT06], Novelli et Thibon définissent cette algèbre en introduisant un analogue des bases des rubans et des bases complètes de **Sym**. Il définissent également une base  $P$  interpolant naturellement entre ces deux bases.

Nous avons vu section 1.3.5 que les relations dans **Sym** entre d'une part les bases des rubans et les bases complètes avec d'autre part les bases monomiales et les bases fondamentales de Tevlin [Tev07] donnent lieu à d'intéressantes propriétés algébriques ainsi qu'à des résultats énumératifs liés à la combinatoire du PASEP.

C'est dans ce cadre que nous nous intéressons dans ce chapitre à définir des analogues des bases monomiales et fondamentales dans **SCQSym**. Pour ce faire, nous utilisons le changement de base entre la base complète et la base monomiale de **Sym** pour définir la base des fonctions monomiales de **SCQSym** indexée par des compositions segmentées n'ayant pas de barres puis nous définissons un produit permettant d'étendre cette définition à toutes les compositions segmentées. Nous définissons ensuite la base fondamentale à partir du changement de base suivant :

$$L_I = \sum_{J \geq I} M_J, \quad (4.1)$$

généralisant celui de **Sym**.

Afin de donner une interprétation combinatoire des matrices de changement de base entre les bases définies par Novelli et Thibon et ces deux bases, nous définissons également une algèbre indexée par les permutations partiellement signée **PSQSym** et nous montrons que **SCQSym** peut être vue comme une sous-algèbre de celle-ci.

Enfin, nous nous inspirons des travaux de Novelli, Thibon et Williams [NTW10], rappelés section 1.3.5, pour définir un  $q$ -analogue de **SCQSym** et étudier les matrices de changement de base des  $q$ -versions des bases décrites ci-dessus. Nous faisons également le lien entre ces coefficients et les probabilités du 2-PASEP et fournissons une formule explicite pour calculer celles-ci au théorème 4.3.9.

Les résultats de cette section étendent la dernière partie du papier court [CN17]. Dans la section 4.1, nous définissons des algèbres indexées par les permutations segmentées et les permutations partiellement signées, vues comme des sous-algèbres de **FQSym**<sup>(2)</sup>, et nous exprimons **SCQSym** comme une sous-algèbre de celles-ci. Nous définissons les bases monomiales et fondamentales de **SCQSym** section 4.2 et décrivons les coefficients des matrices de changement de base avec les bases des rubans et des fonctions complètes. Nous définissons des  $q$ -analogues de ces matrices section 4.3 et nous établissons une formule explicite pour calculer les probabilités stationnaires du 2-PASEP.

## 4.1 Des sous-algèbres de **FQSym**<sup>(2)</sup>

Rappelons que les permutations signées, définies section 1.1.6, sont les permutations dont chaque valeur a un signe positif ou négatif. Elle sont énumérés par  $2^n n!$  en taille  $n$ .

Dans [NT10], les auteurs définissent une algèbre indexée par les permutations signées généralisant l'algèbre des fonctions quasi-symétriques libres : **FQSym**<sup>(2)</sup>. Tout comme pour **FQSym** (voir section 1.3.2), on peut décrire la base **G** en utilisant un produit de convolution :

$$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau = \sum_{\mu \in \sigma * \tau} \mathbf{G}_\mu := \sum_{\substack{\mu = \mu_1 \cdot \mu_2 \\ \text{std}(\mu_1) = \sigma \\ \text{std}(\mu_2) = \tau}} \mathbf{G}_\mu, \quad (4.2)$$

où le standardisé d'un mot signé correspond au standardisé du mot obtenu en oubliant les signes puis en remplaçant les signes à leurs positions d'origine. Par exemple, on a

$$\mathbf{G}_{\bar{2}1} \mathbf{G}_{\bar{1}} = \mathbf{G}_{\bar{2}1\bar{3}} + \mathbf{G}_{\bar{3}1\bar{2}} + \mathbf{G}_{\bar{3}2\bar{1}}. \quad (4.3)$$

L'algèbre **FQSym**<sup>(2)</sup> est également munie d'une base fondamentale **F** dont le produit est décrit par la relation suivante :

$$\mathbf{F}_\sigma \mathbf{F}_\tau = \sum_{\mu \in \sigma \bar{\sqcup} \tau} \mathbf{F}_\mu, \quad (4.4)$$

où  $\bar{\sqcup}$  est le produit de mélange décalé défini à l'exemple 1.3.2 où les valeurs se déplacent avec leur signe. Par exemple, on a

$$\mathbf{F}_{\bar{2}1} \mathbf{F}_{\bar{1}} = \mathbf{F}_{\bar{2}1\bar{3}} + \mathbf{F}_{\bar{2}\bar{3}1} + \mathbf{F}_{\bar{3}\bar{2}1}. \quad (4.5)$$

Noter qu'il y a dans cette algèbre la même relation que dans **FQSym** :

$$\mathbf{F}_\sigma = \mathbf{G}_\sigma^{-1}. \quad (4.6)$$

### 4.1.1 Algèbre des permutations segmentées

Définissons maintenant une algèbre sur les permutations segmentées, un objet combinatoire défini section 1.1.6. On définit une généralisation du *produit de convolution* sur les permutations segmentées.

**Définition 4.1.1.** *Soit  $\sigma$  et  $\tau$  deux permutations segmentées. Le produit de convolution de ces deux permutations segmentées est défini de la façon suivante :*

$$\sigma \bar{*} \tau := \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{P}_n \\ \text{std}(\mu_1) = \sigma \\ \text{std}(\mu_2) = \tau}} (\mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_1 | \mu_2), \quad (4.7)$$

où la standardisation de mots segmentés est obtenue en standardisant les mots sans tenir compte des barres.

Par exemple, pour  $\sigma = 2|1$  et  $\tau = 1$ , on a

$$2|1 \bar{*} 1 = 2|13 + 2|1|3 + 3|12 + 3|1|2 + 3|21 + 3|2|1. \quad (4.8)$$

Soit  $\sigma$  une permutation segmentée de taille  $n$ . Cette permutation segmentée peut être vue comme une somme formelle de deux permutations signées : à chaque valeur de  $\sigma$ , on associe un signe négatif si elle est précédée d'une barre et un signe positif sinon. Puisqu'il n'y a jamais de barre à gauche de la première valeur de  $\sigma$ , on a le choix du signe à attribuer à la première valeur. Soit  $\tilde{\sigma}$  la permutation signée ainsi obtenue avec un signe positif sur la première valeur et  $\bar{\sigma}$  celle avec un signe négatif.

**Définition 4.1.2.** *Pour toute permutation segmentée  $\sigma$ , on définit la fonction suivante dans  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$  :*

$$G_\sigma := G_{\tilde{\sigma}} + G_{\bar{\sigma}}, \quad (4.9)$$

Par exemple,  $G_{35|12|4} = G_{35\bar{1}2\bar{4}} + G_{\bar{3}5\bar{1}2\bar{4}}$ . On a alors la propriété suivante.

**Proposition 4.1.3.** *Soient  $\sigma \in \mathfrak{P}_n$  et  $\tau \in \mathfrak{P}_m$  deux permutations segmentées. Le produit  $G_\sigma G_\tau$  s'exprime comme une combinaison linéaire d'éléments  $G_\mu$  avec  $\mu \in \mathfrak{P}_{n+m}$ . Plus précisément,*

$$G_\sigma G_\tau = \sum_{\mu \in \sigma \bar{*} \tau} G_\mu. \quad (4.10)$$

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \sigma \bar{*} \tau$ . On veut montrer que  $G_\mu$  est bien le produit de  $G_\sigma$  par  $G_\tau$ , en d'autres termes, on veut montrer que  $G_{\tilde{\mu}}$  et  $G_{\bar{\mu}}$  appartiennent au produit. Si  $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2$ , l'élément  $G_{\tilde{\mu}}$  vient de  $G_{\tilde{\sigma}} \cdot G_{\tilde{\tau}}$  et  $G_{\bar{\mu}}$  vient de  $G_{\bar{\sigma}} \cdot G_{\bar{\tau}}$ . Sinon,  $\mu = \mu_1 | \mu_2$  et donc  $G_{\tilde{\mu}}$  vient de  $G_{\tilde{\sigma}} \cdot G_{\tilde{\tau}}$  et  $G_{\bar{\mu}}$  vient de  $G_{\bar{\sigma}} \cdot G_{\bar{\tau}}$ .

De plus, puisque le produit de convolution de  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$  est le produit de convolution de  $\mathbf{FQSym}$  tel que les signes ne changent pas, il n'y a pas d'autres éléments que ceux associés à  $G_\mu$  pour  $\mu \in \sigma \bar{*} \tau$ .  $\square$

Les  $G_\sigma$  définissent ainsi une sous-algèbre de  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$  que nous noterons  $\mathbf{SPQSym}$ .

**Remarque 4.1.4.** *Noter que  $\mathbf{SPQSym}$  n'est pas une sous-algèbre de Hopf de  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$ . En effet, le coproduit d'un élément  $\mathbf{G}_\sigma$  correspond à toutes les façons d'obtenir  $\sigma$  à partir du produit de mélange décalé et donc par exemple*

$$\Delta(\mathbf{G}_{1\bar{2}} + \mathbf{G}_{\bar{1}2}) = (\mathbf{G}_{1\bar{2}} + \mathbf{G}_{\bar{1}2}) \otimes 1 + (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_{\bar{1}}) \otimes \mathbf{G}_{\bar{1}} + 1 \otimes (\mathbf{G}_{1\bar{2}} + \mathbf{G}_{\bar{1}2}). \quad (4.11)$$

Ainsi, le coproduit de  $G_{1|2}$  ne peut pas être écrit comme une somme de produit tensoriels d'éléments de  $\mathbf{SPQSym}$  :

$$\Delta(G_{1|2}) = G_{1|2} \otimes 1 + G_1 \otimes \mathbf{G}_{\bar{1}} + 1 \otimes G_{1|2}. \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Algèbre des permutations partiellement signées

Nous avons défini section 3.1 les permutations partiellement signées et nous avons construit une bijection entre celles-ci et les permutations segmentées en utilisant l'algorithme 3.1.2. Cette bijection consiste à calculer l'inverse des permutations sous-jacentes puis à placer des barres aux positions des valeurs de signe négatif dans la permutation partiellement signée de départ. Étant donnée une permutation partiellement signée  $\sigma$ , on note  $\tau = \sigma^{-1}$  la permutation segmentée obtenue en appliquant l'algorithme 3.1.2 à  $\sigma$  et nous verrons par la suite que cette notation a également un sens au niveau des permutations signées.

Nous utilisons cette notion d'inverse pour définir une algèbre indexée par les permutations partiellement signées dont une base est notée  $F_\sigma$  et vérifie

$$F_\sigma := G_{\sigma^{-1}}. \quad (4.13)$$

Notons que l'inverse d'une permutation signée est calculé en prenant l'inverse de la permutation sous-jacente et en mettant un signe négatif à la valeur  $k$  de la permutation inverse si et seulement si la valeur en position  $k$  de la permutation signée de départ a un signe négatif. Par exemple, l'inverse de la permutation signée  $\bar{4}3\bar{1}2$  est la permutation signée  $\bar{3}4\bar{2}\bar{1}$ . Ainsi, étant donnée une permutation partiellement signée  $\sigma$ , on a

$$F_\sigma = \mathbf{F}_\sigma + \mathbf{F}_{\underline{\sigma}}, \quad (4.14)$$

où  $\underline{\sigma}$  est la permutation signée obtenue à partir de  $\sigma$  avec un signe positif sur 1 et  $\sigma$  est celle obtenue avec un signe négatif sur 1.

Afin de décrire le produit des éléments  $F_\sigma$ , nous utilisons le *produit de mélange décalé* défini ci-dessous.

**Définition 4.1.5.** *Soient  $\sigma \in B'_n$  et  $\tau \in B'_m$  deux permutations partiellement signées. Le produit de mélange décalé de  $\sigma$  et  $\tau$  est décrit par*

$$\sigma \uplus \tau := \sigma \bar{\sqcup} \tau + \sigma \underline{\sqcup} \tau, \quad (4.15)$$

où les éléments de cette somme sont vus comme des permutations partiellement signées.

Par exemple, pour  $\sigma = \bar{2}1$  et  $\tau = 1$ , on a

$$\bar{2}1 \uplus 1 = \bar{2}13 + \bar{2}1\bar{3} + \bar{2}31 + \bar{2}\bar{3}1 + 3\bar{2}1 + \bar{3}\bar{2}1. \quad (4.16)$$

Notons que l'inverse entre permutations partiellement signées et permutations segmentées implique

$$\mu \in \sigma \uplus \tau \iff \mu^{-1} \in \sigma^{-1} \bar{*} \tau^{-1}. \quad (4.17)$$

On a donc la description du produit suivante.

**Proposition 4.1.6.** *Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux permutations partiellement signées. Le produit  $F_\sigma F_\tau$  s'exprime comme une combinaison linéaire d'éléments  $F_\mu$ . Plus précisément,*

$$F_\sigma F_\tau = \sum_{\mu \in \sigma \uplus \tau} F_\mu. \quad (4.18)$$

*Démonstration.* Cette démonstration découle directement des relations (4.13) et (4.17).  $\square$

On décrit ainsi une deuxième sous-algèbre de  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$  indexée par les permutations partiellement signées, que l'on note  $\mathbf{PSQSym}$ , et qui est isomorphe à  $\mathbf{SPQSym}$ . De la même façon que précédemment, cette construction ne fournit pas une sous-algèbre de Hopf de  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$ .

### 4.1.3 Lien avec l'algèbre des compositions segmentées

L'algèbre  $\mathbf{SCQSym}$ , définie section 1.3.4, est une algèbre indexée par les compositions segmentées définie par Novelli et Thibon dans [NT07]. Nous avons rappelé la définition de la base des rubans segmentés de cette algèbre. Nous montrons ici qu'en s'inspirant de la relation entre  $\mathbf{Sym}$  et  $\mathbf{FQSym}$ , il est possible de voir  $\mathbf{SCQSym}$  comme une sous-algèbre de  $\mathbf{SPQSym}$  en exprimant la base des rubans segmentés comme une somme de  $G_\sigma$ .

Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée et  $\widetilde{R}_\mathbf{I}$  défini comme :

$$\widetilde{R}_\mathbf{I} = \sum_{\text{SDes}(\sigma)=\mathbf{I}} G_\sigma. \quad (4.19)$$

**Proposition 4.1.7.** *Les  $\widetilde{R}_\mathbf{I}$  engendrent une sous-algèbre de  $\mathbf{SPQSym}$ . Leur produit est donné par*

$$\widetilde{R}_\mathbf{I} \cdot \widetilde{R}_\mathbf{J} = \widetilde{R}_{\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}} + \widetilde{R}_{\mathbf{I}\downarrow\mathbf{J}} + \widetilde{R}_{\mathbf{I}\triangleright\mathbf{J}}. \quad (4.20)$$

*Ainsi, cette sous-algèbre est isomorphe à  $\mathbf{SCQSym}$  et on identifie  $\widetilde{R}_\mathbf{I}$  à  $R_\mathbf{I}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées et  $\sigma \in \mathfrak{P}_n$  et  $\tau \in \mathfrak{P}_m$  telles que  $\text{SDes}(\sigma) = \mathbf{I}$  et  $\text{SDes}(\tau) = \mathbf{J}$ . Soit  $\mu \in \sigma * \tau$ , on a  $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2$  ou  $\mu = \mu_1 | \mu_2$  avec  $\text{std}(\mu_1) = \sigma$  et  $\text{std}(\mu_2) = \tau$ . Ainsi,  $\text{SDes}(\sigma) = \text{SDes}(\mu_1)$  et  $\text{SDes}(\tau) = \text{SDes}(\mu_2)$  puisque la standardisation ne change ni la positions des barres ni la position des descentes d'une permutation segmentée. De plus, suivant si la dernière lettre de  $\mu_1$  est plus grande ou plus

petite que la première lettre de  $\mu_2$  ou si elle sont séparées par une barre,  $\text{SDes}(\mu)$  est égale à une des trois compositions segmentées  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{I} \triangleright \mathbf{J}$  ou  $\mathbf{I} | \mathbf{J}$ .

Réciproquement, soit  $\mu$  telle que  $\text{SDes}(\mu)$  soit égale à une des trois compositions segmentées précédentes. Si  $|\mathbf{I}| = n$  et  $|\mathbf{J}| = m$ , soit  $\mu_1$  le préfixe de longueur  $n$  de  $\mu$  et  $\mu_2$  le suffixe de longueur  $m$ . Soit  $\sigma = \text{std}(\mu_1)$  et  $\tau = \text{std}(\mu_2)$ , alors  $\text{SDes}(\sigma) = \mathbf{I}$  et  $\text{SDes}(\tau) = \mathbf{J}$  et ce sont les seules permutations segmentées de cette longueur telles que  $\mu \in \sigma * \tau$ .  $\square$

Étant donnée  $\mathbf{I}$  une composition segmentée de  $n$  et en identifiant  $\tilde{R}$  à  $R$ , on a donc

$$R_{\mathbf{I}} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{P}_n \\ \text{SDes}(\sigma) = \mathbf{I}}} G_{\sigma}. \quad (4.21)$$

On rappelle la relation entre la base des rubans et la base  $P$  donnée à l'équation (1.77) :

$$P_{\mathbf{I}} = \sum_{\mathbf{J} \preceq \mathbf{I}} R_{\mathbf{J}}. \quad (4.22)$$

En utilisant cette relation et l'équation (4.21), on en déduit :

$$P_{\mathbf{I}} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{P}_n \\ \text{SDes}(\sigma) \preceq \mathbf{I}}} G_{\sigma}. \quad (4.23)$$

Afin de donner une description similaire de la relation entre **SCQSym** et **PSQSym**, nous avons besoin de définir la notion de *recul* sur les permutations partiellement signées.

**Définition 4.1.8.** Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée. Une valeur  $\sigma_i$  est une valeur de recul de  $\sigma$  si et seulement si  $(1 + \sigma_i) \notin \text{Sign } \sigma$  et  $(1 + \sigma_i)$  est à gauche de  $\sigma_i$ . La composition segmentée des reculs de  $\sigma$  (notée  $\text{Rec}(\sigma)$ ) est la composition segmentée dont l'ensemble des descentes est égal à l'ensemble des valeurs de reculs de  $\sigma$  et dont l'ensemble des segmentations est égal à  $\{s - 1 \mid s \in \text{Sign}(\sigma)\}$ .

Par exemple, pour la permutation partiellement signée  $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$ , les valeurs de recul sont  $\{4, 6\}$ , les valeurs de signe négatif sont  $\text{Sign}(\sigma) = 2, 4$  et donc on a  $\text{Rec}(\bar{2}57836\bar{4}1) = 1|2|122$ .

**Proposition 4.1.9.** Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée. On a

$$\text{Rec}(\sigma) = \text{SDes}(\sigma^{-1}). \quad (4.24)$$

*Démonstration.* Tout d'abord, par définition de l'algorithme 3.1.2, une valeur  $k > 1$  de  $\sigma$  a un signe négatif si et seulement si la position  $k - 1$  de  $\sigma^{-1}$  est une segmentation. En particulier,  $\text{Seg}(\text{Rec}(\sigma)) = \text{Seg}(\text{SDes}(\sigma^{-1}))$ . De plus, sur les permutations,  $k$  est une valeur de recul d'une permutation  $\sigma$  si et seulement si  $k$  est une position de descente de  $\sigma^{-1}$ . Puisque les reculs de  $\sigma$  sont les valeurs  $k$  telles que  $k + 1$  n'est pas de signe négatif et qui sont des reculs de la permutation sous-jacente  $\sigma$  et que les descentes de  $\sigma^{-1}$  sont les positions qui ne sont pas des segmentations et qui sont des descentes de la permutation sous-jacente, on a  $\text{Rec}(\sigma) = \text{SDes}(\sigma^{-1})$ .  $\square$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 4.1.10.** *Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée de  $n$ . On a la relation*

$$R_{\mathbf{I}} = \sum_{\substack{\sigma \in B'_n \\ \text{Rec}(\sigma) = \mathbf{I}}} F_{\sigma}. \quad (4.25)$$

*Démonstration.* On utilise les relations (4.13) et (4.24) dans l'équation (4.21) pour obtenir le résultat.  $\square$

De la même façon que précédemment, on a également

$$P_{\mathbf{I}} = \sum_{\substack{\sigma \in B'_n \\ \text{Rec}(\sigma) \preceq \mathbf{I}}} F_{\sigma}. \quad (4.26)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous privilégierons l'utilisation de **PSQSym** à celle de **SPQSym** afin d'obtenir des liens avec la combinatoire du 2-ASEP en utilisant les statistiques du chapitre précédent mais tout ce que nous faisons peut être transposé simplement à **SPQSym**.

## 4.2 Bases de Tevlin

### 4.2.1 Définition

Notre objectif est maintenant de définir une généralisation  $M_{\mathbf{I}}$  de la base monomiale  $M_{\mathbf{I}}$  introduite par Tevlin pour **Sym** dans [Tev07]. Pour ce faire, on commence par définir cette nouvelle base pour les compositions segmentées n'ayant pas de barre puis nous définissons un analogue naturel du produit des éléments de la base monomiale de **Sym** pour cette nouvelle base.

Soit  $H_{\mathbf{I}\mathbf{J}}$  le coefficient de  $S^{\mathbf{J}}$  dans l'expression de  $M_{\mathbf{I}}$  dans **Sym**. Nous utilisons ces coefficients pour exprimer  $M_{\mathbf{I}}$  sur  $P_{\mathbf{J}}$  dans le cas où  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  n'ont pas de barre.

**Définition 4.2.1.** *Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée de  $n$  n'ayant pas de barre. On définit  $M_{\mathbf{I}}$  en utilisant la relation suivante :*

$$M_{\mathbf{I}} = \sum_{\substack{\mathbf{J} \Vdash n \\ \text{seg}(\mathbf{J}) = 0}} H_{\mathbf{I}\mathbf{J}} P_{\mathbf{J}}. \quad (4.27)$$

Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. On définit le produit suivant :

$$M_{\mathbf{I}} M_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \binom{\ell(\mathbf{K} \cdot \mathbf{J})}{\ell(\mathbf{I})} M_{\mathbf{K} \cdot \mathbf{J}} + \binom{\ell(\mathbf{K} | \mathbf{J})}{\ell(\mathbf{I})} M_{\mathbf{K} | \mathbf{J}} + \binom{\ell(\mathbf{K} \triangleright \mathbf{J})}{\ell(\mathbf{I})} M_{\mathbf{K} \triangleright \mathbf{J}}. \quad (4.28)$$



On rappelle que la relation  $\preceq$ , définie section 1.1.7, correspond à la relation  $\preceq$  sur les compositions usuelles entre chaque barre de  $\mathbf{I}$ .

**Proposition 4.2.2.** *Les relations (4.27) et (4.28) définissent une base de **SCQSym**.*

*Démonstration.* Montrons que si  $\text{seg}(\mathbf{K}) > 0$ , alors  $M_{\mathbf{K}}$  peut être exprimée comme une combinaison linéaire de produit de  $M_{\mathbf{I}}$  où  $\text{seg}(\mathbf{I}) < \text{seg}(\mathbf{K})$  ou  $\text{seg}(\mathbf{J}) = \text{seg}(\mathbf{I})$  et  $\ell(\mathbf{J}) < \ell(\mathbf{I})$ . Soit  $n = |\mathbf{K}|$ ,  $r = \text{seg}(\mathbf{K})$  et  $l = \ell(\mathbf{K})$ . Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  tels que  $\mathbf{K} = \mathbf{I}\mathbf{J}$ , alors  $M_{\mathbf{K}}$  apparaît dans le produit  $M_{\mathbf{I}}M_{\mathbf{J}}$ . De plus, tous les autres termes apparaissant dans ce produit ont moins de barres ou sont moins longs que  $\mathbf{K}$  puisque la somme porte sur les compositions moins fines que  $\mathbf{I}$ . Ainsi le produit défini par la relation (4.28) est triangulaire.

Or **SCQSym** est l'algèbre libre à  $2^{n-1}$  générateurs par degré. La partie précédente de la démonstration montre qu'il est possible d'exprimer tous les élément de la base monomiale en fonction de  $2^{n-1}$  générateurs qui sont les éléments correspondant aux compositions segmentées n'ayant pas de barre. Cette famille d'éléments est donc bien définie et forme une base de **SCQSym**.  $\square$

On observe que cette base vérifie une formule de récurrence similaire à celle décrite par l'équation (1.85) pour la base monomiale de **Sym**. Cette récurrence définit la base monomiale sur une famille de générateurs différente de celle utilisée dans la définition 4.2.1 : les fonctions indexées par des compositions segmentées de la forme  $\mathbf{I} = i_1|i_2|\dots|i_k$  (i.e., les compositions segmentées telles que  $\text{des}(\mathbf{I}) = 0$ ).

**Proposition 4.2.3.** *Soient  $\mathbf{I} = i_1|i_2|\dots|i_r$  et  $\mathbf{J}$  une composition segmentée.*

$$\binom{\ell(\mathbf{J}) + r}{r} M_{\mathbf{I}\mathbf{J}} = M_{\mathbf{I}}M_{\mathbf{J}} - \binom{\ell(\mathbf{J}) + r}{r} M_{\mathbf{I}|\mathbf{J}} - \binom{\ell(\mathbf{J}) + r - 1}{r} M_{\mathbf{I}\triangleright\mathbf{J}}. \quad (4.29)$$

*Démonstration.* La démonstration de cette proposition découle directement de l'équation (4.28) avec  $\mathbf{I} = i_1|i_2|\dots|i_r$ . En effet, la seule composition segmentée moins fine que  $\mathbf{I}$  dans ce cas-là est  $\mathbf{I}$  elle-même et il n'y a donc que trois termes dans le produit  $M_{\mathbf{I}}M_{\mathbf{J}}$ .  $\square$

On définit également une seconde base de **SCQSym** généralisant la base fondamentale de **Sym** également introduite par Tevlin dans [Tev07]. On utilise pour cela la même notion de changement de base entre la base monomiale et la base fondamentale :

$$L_{\mathbf{I}} = \sum_{\mathbf{J} \succeq \mathbf{I}} M_{\mathbf{J}}. \quad (4.30)$$

Le produit des  $L_{\mathbf{I}}$  est décrit par la proposition suivante.

**Proposition 4.2.4.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. On a*

$$L_{\mathbf{I}}L_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{K}} \binom{|\mathbf{I}| - \ell(\mathbf{I}) + \text{des}(\mathbf{J}) + \text{seg}(\mathbf{K})}{l(\mathbf{K}) - l(\mathbf{I})} L_{\mathbf{K}}, \quad (4.31)$$

où  $\mathbf{K}$  est de la forme  $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_1|\mathbf{K}_2$  ou  $\mathbf{K}_1 \triangleright \mathbf{K}_2$  avec  $\mathbf{K}_1 \leq \mathbf{I}$  et  $\mathbf{K}_2 \geq \mathbf{J}$ .

Afin de pouvoir démontrer cette proposition, nous allons avoir besoin de quelques identités combinatoires.

**Lemme 4.2.5.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées telles que  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = \text{Seg}(\mathbf{J})$  et  $a$  et  $b$  des entiers. On a*

$$\sum_{\substack{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \preceq \mathbf{J}}} \binom{a}{\ell(\mathbf{K}) + b} = \binom{a + p}{a - \text{seg}(\mathbf{I}) - 1 - b}; \quad (4.32)$$

$$\sum_{\substack{\mathbf{K} \succeq \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \succeq \mathbf{J}}} \binom{a}{\ell(\mathbf{K}) + b} = \binom{n + a - r - \text{seg}(\mathbf{I}) - 1}{n - b}; \quad (4.33)$$

où  $p = |\text{Des}(\mathbf{I}) \cap \text{Des}(\mathbf{J})|$  et  $r = |\text{Des}(\mathbf{I}) \cup \text{Des}(\mathbf{J})|$ . De plus, si  $\mathbf{I} \preceq \mathbf{J}$ , on a également

$$\sum_{\mathbf{I} \preceq \mathbf{K} \preceq \mathbf{J}} \binom{a}{\ell(\mathbf{K}) + b} = \binom{a + \ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})}{\ell(\mathbf{J}) + b}. \quad (4.34)$$

*Démonstration.* La démonstration de ces trois identités repose sur l'identité suivante vérifiée par les coefficients binomiaux :

$$\sum_{k=0}^b \binom{a}{r - k} \binom{b}{k} = \binom{a + b}{r}.$$

Commençons par démontrer (4.34). Pour cela, on compte le nombre de compositions segmentées de longueur  $k$  comprises entre  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$ . Cela revient au choix de  $k - \ell(\mathbf{I})$  valeurs présentes dans  $\text{Des}(\mathbf{J})$  et non présentes dans  $\text{Des}(\mathbf{I})$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{I} \preceq \mathbf{K} \preceq \mathbf{J}} \binom{a}{\ell(\mathbf{K}) + b} &= \sum_{k=\ell(\mathbf{I})}^{\ell(\mathbf{J})} \binom{a}{k + b} \binom{\ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})}{k - \ell(\mathbf{I})} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})} \binom{a}{k + \ell(\mathbf{I}) + b} \binom{\ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})} \binom{a}{a - \ell(\mathbf{I}) - b - k} \binom{\ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})}{k} \\ &= \binom{a + \ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})}{a - \ell(\mathbf{I}) - b}. \end{aligned}$$

En réécrivant le dernier coefficient binomial, on retrouve bien (4.34).

Pour la relation (4.32), pour avoir une composition segmentée plus petite que  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  et de longueur  $k$ , il faut  $\text{Seg}(\mathbf{K}) = \text{Seg}(\mathbf{I})$  et choisir  $k - \text{seg}(\mathbf{I})$  valeurs dans  $\text{Des}(\mathbf{I}) \cap \text{Des}(\mathbf{J})$

qui vont correspondre à  $\text{Des}(\mathbf{K})$ . Ainsi, en notant  $p = |\text{Des}(\mathbf{I}) \cap \text{Des}(\mathbf{J})|$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{K} \succeq \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \succeq \mathbf{J}}} \binom{a}{\ell(\mathbf{K}) + b} &= \sum_{k=\text{seg}(\mathbf{I})+1}^{\text{seg}(\mathbf{I})+p+1} \binom{a}{k+b} \binom{p}{k-\text{seg}(\mathbf{I})-1} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{a}{a-\text{seg}(\mathbf{I})-1-b-k} \\ &= \binom{a+p}{a-\text{seg}(\mathbf{I})-1-b} \binom{p}{k} \end{aligned}$$

Enfin, de la même façon, pour l'équation (4.33), le nombre de compositions segmentées de longueur  $k$  supérieures à  $\mathbf{I}$  et à  $\mathbf{J}$  correspond au nombre de choix de  $k - r - \text{seg}(\mathbf{I}) - 1$  valeurs parmi  $n - r - \text{seg}(\mathbf{I}) - 1$  à ajouter à  $\text{Des}(\mathbf{I}) \cup \text{Des}(\mathbf{J})$  pour former  $\text{Des}(\mathbf{K})$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{K} \succeq \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \succeq \mathbf{J}}} \binom{a}{\ell(\mathbf{K}) + b} &= \sum_{k=r+\text{seg}(\mathbf{I})+1}^n \binom{a}{k+b} \binom{n-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1}{k-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1} \binom{a}{a-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1-b-k} \binom{n-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1}{k} \\ &= \binom{a+n-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1}{a-r-\text{seg}(\mathbf{I})-1-b}. \end{aligned}$$

On retrouve (4.33) en réécrivant le coefficient binomial ci-dessus.  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.2.4.* Commençons par exprimer le produit  $L_{\mathbf{I}}L_{\mathbf{J}}$  sur la base monomiale en utilisant (4.30) :

$$L_{\mathbf{I}}L_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{K} \succeq \mathbf{I}} \sum_{\mathbf{V} \succeq \mathbf{J}} M_{\mathbf{K}}M_{\mathbf{V}}.$$

En utilisant la description du produit de la base monomiale de (4.28), le produit ci-dessus est égal à

$$\sum_{\substack{\mathbf{K} \succeq \mathbf{I} \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{J}}} \sum_{\mathbf{U} \preceq \mathbf{K}} \binom{\ell(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})}{\ell(\mathbf{K})} M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}} + \binom{\ell(\mathbf{U} | \mathbf{V})}{\ell(\mathbf{K})} M_{\mathbf{U} | \mathbf{V}} + \binom{\ell(\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V})}{\ell(\mathbf{K})} M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}}.$$

On note  $u = \ell(\mathbf{U})$  et  $v = \ell(\mathbf{V})$  et  $\mathbf{S}$  la composition segmentée dont toutes les parts sont égales à 1 et dont  $\text{Seg}(\mathbf{S}) = \text{Seg}(\mathbf{I})$ . En inversant les sommes sur  $\mathbf{K}$  et sur  $\mathbf{U}$  ainsi qu'en

utilisant (4.33) pour  $\mathbf{K}$  plus fin que  $\mathbf{I}$  et que  $\mathbf{U}$ , on a

$$L_{\mathbf{I}}L_{\mathbf{J}} = \sum_{\substack{\mathbf{U} \preceq \mathbf{S} \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{J}}} \binom{|\mathbf{I}| + u + v - r - \text{seg}(\mathbf{I}) - 1}{|\mathbf{I}|} (M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}} + M_{\mathbf{U}|\mathbf{V}}) \\ + \binom{|\mathbf{I}| + u + v - r - \text{seg}(\mathbf{I}) - 2}{|\mathbf{I}|} M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}}, \quad (4.35)$$

avec  $r = |\text{Des}(\mathbf{I}) \cup \text{Des}(\mathbf{U})|$ .

Réécrivons maintenant le membre de droite de l'équation (4.31). En observant que  $\text{Seg}(\mathbf{K}_1) = \text{Seg}(\mathbf{I})$  et que  $\text{Seg}(\mathbf{K}_2) = \text{Seg}(\mathbf{J})$ , ce terme se réécrit :

$$\sum_{\substack{\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_2 \succeq \mathbf{J}}} \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J})}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I})} L_{\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2} + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J}) + 1}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I})} L_{\mathbf{K}_1|\mathbf{K}_2} \\ + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J})}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I}) - 1} L_{\mathbf{K}_1 \triangleright \mathbf{K}_2}$$

où  $k_1 = \ell(\mathbf{K}_1)$  et  $k_2 = \ell(\mathbf{K}_2)$ . Notons que les compositions segmentées plus fines que  $\mathbf{K}_1 \triangleright \mathbf{K}_2$  sont les compositions segmentées  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$  ou  $\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}$  où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont plus fines que  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  respectivement. Ainsi, en utilisant le changement de base (4.30), la somme précédente se réécrit

$$\sum_{\substack{\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_2 \succeq \mathbf{J}}} \sum_{\substack{\mathbf{U} \succeq \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{K}_2}} \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J})}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I})} M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}} + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J}) + 1}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I})} M_{\mathbf{U}|\mathbf{V}} \\ + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J})}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I}) - 1} (M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}} + M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}).$$

En regroupant les  $M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}$ , cette somme est égale à

$$\sum_{\substack{\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_2 \succeq \mathbf{J}}} \sum_{\substack{\mathbf{U} \succeq \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{K}_2}} \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J}) + 1}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I})} (M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}} + M_{\mathbf{U}|\mathbf{V}}) + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{J})}{k_1 + k_2 - \ell(\mathbf{I}) - 1} M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}}.$$

Notons  $\mathbf{S}'$  la composition segmentée vérifiant  $\text{Des}(\mathbf{S}') = \emptyset$  et  $\text{Seg}(\mathbf{S}') = \text{Seg}(\mathbf{I})$ . En inversant les deux sommes ci-dessus et en utilisant (4.34) pour  $\mathbf{K}_2$  entre  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{V}$ , l'équation devient

$$\sum_{\substack{\mathbf{U} \succeq \mathbf{S}' \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{J}}} \sum_{\substack{\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{U}}} \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + v + 1}{k_1 + v - \ell(\mathbf{I})} (M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}} + M_{\mathbf{U}|\mathbf{V}}) + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + v}{k_1 + v - \ell(\mathbf{I}) - 1} M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}},$$

où  $v = \ell(\mathbf{V})$ . On utilise maintenant (4.32) pour  $\mathbf{K}_1$  moins fin que  $\mathbf{I}$  et que  $\mathbf{U}$  :

$$\sum_{\substack{\mathbf{U} \succeq \mathbf{S}' \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{J}}} \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + v + p + 1}{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{I}) - \text{seg}(\mathbf{I})} (M_{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}} + M_{\mathbf{U}|\mathbf{V}}) \\ + \binom{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + v + p}{|\mathbf{I}| - \text{des}(\mathbf{I}) + \ell(\mathbf{I}) - \text{seg}(\mathbf{I})} M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}},$$

où  $p = |\text{Des}(\mathbf{I}) \cap \text{Des}(\mathbf{U})|$ . On a  $p = |\text{Des}(\mathbf{I})| + |\text{Des}(\mathbf{U})| - r$ . Comme  $|\text{Des}(\mathbf{I})| = \text{des}(\mathbf{I}) - 1$  et en utilisant le fait que  $\ell(\mathbf{I}) = \text{des}(\mathbf{I}) + \text{seg}(\mathbf{I})$ , la somme précédente devient

$$\sum_{\substack{\mathbf{U} \succeq \mathbf{S}' \\ \mathbf{V} \succeq \mathbf{J}}} \binom{|\mathbf{I}| - v + \text{des}(\mathbf{U}) - r - 1}{|\mathbf{I}|} (M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}} + M_{\mathbf{U}|\mathbf{V}}) + \binom{|\mathbf{I}| - v + \text{des}(\mathbf{U}) - r - 2}{|\mathbf{I}|} M_{\mathbf{U} \triangleright \mathbf{V}}.$$

On conclut en utilisant le fait que  $\text{des}(\mathbf{U}) = u - \text{seg}(\mathbf{I})$  où  $u = \ell(\mathbf{U})$ , ce qui nous donne (4.35) et termine la démonstration.  $\square$

Maintenant que nous avons défini des généralisations des bases monomiales et fondamentales, nous nous intéressons aux matrices de changement de bases avec différentes bases de **SCQSym**.

## 4.2.2 Matrices de transition

### Base des rubans sur la base fondamentale

Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées définie par  $\sigma \sim \tau$  si et seulement si  $\text{GC}(\sigma) = \text{GC}(\tau)$ . Soit  $\mathcal{J}$  le sous-espace de **PSQSym** engendré par les différences

$$\{F_\sigma - F_\tau \mid \sigma \sim \tau\}. \quad (4.36)$$

**Proposition 4.2.6.**  *$\mathcal{J}$  est un idéal bilatère de **PSQSym** et le quotient  $\mathbf{T} = \mathbf{PSQSym}/\mathcal{J}$  est isomorphe à **SCQSym** en tant qu'algèbre. De plus, soit  $T_{\mathbf{I}}$  l'image de  $F_\sigma$  telle que  $\text{GC}(\sigma) = \mathbf{I}$  dans  $\mathbf{T}$ . Alors  $T_{\mathbf{I}}$  a les mêmes coefficients de structure que la base fondamentale.*

Pour démontrer cette proposition, nous utilisons un résultat analogue de [HNTT09] que l'on reformule comme suit.

**Proposition 4.2.7** ([HNTT09]). *Soient  $I \models n$  et  $J \models m$  deux compositions et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\tau \in \mathfrak{S}_m$  vérifiant  $\text{GC}(\sigma) = I$  et  $\text{GC}(\tau) = J$ . Pour tout  $K \models n + m$ , le nombre  $N_{I,J}^K$  de permutations  $\mu \in \sigma \sqcup \tau$  telles que  $\text{GC}(\mu) = K$  est indépendant du choix de  $\sigma$  et  $\tau$ . De plus, si on note  $K_1$  et  $K_2$  les compositions vérifiant  $|K_1| = n$  et  $K = K_1 \cdot K_2$  ou  $K = K_1 \triangleright K_2$  alors  $N_{I,J}^K$  est égal à :*

$$\begin{cases} \binom{|\mathbf{I}| + \ell(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I})}{\ell(\mathbf{K}) - \ell(\mathbf{I})} & \text{si } K_1 \preceq I \text{ et } K_2 \succeq J ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.37)$$

*Démonstration de la proposition 4.2.6.* Soient  $\sigma \in B'_n$  et  $\tau \in B'_m$  deux permutations partiellement signées. On montre que les compositions des descentes de Genocchi des permutations partiellement signées dans le produit de mélange décalé de  $\sigma$  et  $\tau$  ne dépendent que de  $\mathbf{I} = \text{GC}(\sigma)$  et  $\mathbf{J} = \text{GC}(\tau)$ . Soit  $\mathbf{K} \models n + m$  de longueur  $r$ . Calculons le nombre de permutations  $\mu$  de  $\sigma \cup \tau$  telles que  $\text{GC}(\mu) = \mathbf{K}$ , noté  $N_{\mathbf{I},\mathbf{J}}^{\mathbf{K}}$  dans la suite.

Soit  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  les compositions segmentées vérifiant  $|\mathbf{K}'| = n$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2$  ou  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \triangleright \mathbf{K}_2$  ou  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 | \mathbf{K}_2$ . On commence par montrer que  $N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{\mathbf{K}} = 0$  si on n'a pas  $\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I}$  et  $\mathbf{K}_2 \succeq \mathbf{J}$ .

Soient  $\sigma, \tau$  et  $\mu$  les permutations obtenues à partir de  $\sigma, \tau$  et  $\mu$  en oubliant les signes et  $I, J$  et  $K$  les compositions des descentes de Genocchi de ces permutations. Puisque les valeurs se déplacent avec leur signe dans le produit de mélange décalé, on a  $\mu \in \sigma \uplus \tau$  si et seulement si  $\mu \in \sigma \sqcup \tau$  et les valeurs de signe négatif de  $\mu$  sont égales à celles de  $\sigma$  plus celles de  $\tau[n]$  plus éventuellement  $n + 1$ . En particulier, si  $\text{Seg}(\mathbf{K}_1) \neq \text{Seg}(\mathbf{I})$  ou  $\text{Seg}(\mathbf{K}_2) \neq \text{Seg}(\mathbf{J})$  on a  $N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{\mathbf{K}} = 0$ . Dans la suite de la démonstration, on se restreint au cas  $\text{Seg}(\mathbf{K}_1) = \text{Seg}(\mathbf{I})$  et  $\text{Seg}(\mathbf{K}_2) = \text{Seg}(\mathbf{J})$ .

De plus, par définition,  $\text{GDes}(\mu)$  est égal aux valeurs de descentes de  $\mu$  qui ne sont pas de signe négatif, ce qui se traduit par  $\text{GDes}(\mu) = \text{Des}(\mu) \setminus \text{Sign}(\mu)$ . Ceci implique que si on n'a pas  $\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I}$ , il y a une valeur  $k < n$  qui est une valeur de descente de  $\mu$  mais pas de  $\sigma$ . C'est donc également le cas pour  $\mu$  et  $\sigma$  et donc on n'a pas  $K_1 \preceq I$ . En utilisant le même raisonnement pour  $\mathbf{K}_2$ , on montre que  $N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{\mathbf{K}} = 0$  si on n'a pas  $\mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I}$  et  $\mathbf{K}_2 \succeq \mathbf{J}$ .

En utilisant le fait que  $\text{GDes}(\mu) = \text{Des}(\mu) \setminus \text{Sign}(\mu)$ , on a

$$\#\{\mu \in \sigma \uplus \tau \mid \text{GC}(\mu) = \mathbf{K}\} = \#\{\mu \in \sigma \sqcup \tau \mid \text{Des}(\text{GC}(\mu)) \setminus \text{Seg}(\mathbf{K}) = \text{Des}(\mathbf{K})\}.$$

En notant  $\underline{\mathbf{K}}$  la composition de  $n + m$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{Des}(\mathbf{K})$  et  $\overline{\mathbf{K}}$  la composition de  $n + m$  dont l'ensemble des descentes est  $\text{Des}(\mathbf{K}) \cup \text{Seg}(\mathbf{K})$ , on peut reformuler l'égalité précédente en :

$$\#\{\mu \in \sigma \uplus \tau \mid \text{GC}(\mu) = \mathbf{K}\} = \#\{\mu \in \sigma \sqcup \tau \mid \underline{\mathbf{K}} \preceq K \preceq \overline{\mathbf{K}}\},$$

ce qui se réécrit

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{\mathbf{K}} &= \sum_{\substack{|\mathbf{K}|=|\mathbf{K}'| \\ \underline{\mathbf{K}} \preceq K \preceq \overline{\mathbf{K}}}} N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{\mathbf{K}} \\ &= \sum_{\substack{K_1 \preceq I \\ K_2 \succeq J \\ \underline{\mathbf{K}} \preceq K_1 \cdot K_2 \preceq \overline{\mathbf{K}}}} N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{K_1 \cdot K_2} + \sum_{\substack{K_1 \preceq I \\ K_2 \succeq J \\ \underline{\mathbf{K}} \preceq K_1 \triangleright K_2 \preceq \overline{\mathbf{K}}}} N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{K_1 \triangleright K_2}. \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2$ , alors

$$N_{\mathbf{I}, \mathbf{J}}^{\mathbf{K}} = \sum_{\substack{K_1 \preceq I \\ K_2 \succeq J \\ \underline{\mathbf{K}} \preceq K_1 \cdot K_2 \preceq \overline{\mathbf{K}}}} \binom{|I| + \ell(J) - \ell(I)}{\ell(K_1) + \ell(K_2) - \ell(I)}. \quad (4.38)$$

Pour  $K_1$ , la somme revient à choisir des éléments de  $\text{Des}(I) \setminus \text{Des}(\mathbf{I})$  que l'on ajoute à  $\text{Des}(\mathbf{K}_1)$ . Il y a  $\ell(I) - \text{des}(\mathbf{I})$  telles valeurs puisque  $\text{Des}(\mathbf{I}) \subset \text{Des}(I)$ . De même, la somme sur  $K_2$  revient à choisir des valeurs de  $\text{Seg}(\mathbf{J}) \setminus \text{Des}(J)$  à ajouter à  $\text{Des}(\mathbf{K})$  et

il y a  $\ell(\mathbf{J}) - \ell(J)$  telles valeurs. Si on ajoute  $k_1$  valeurs à  $K_1$  et  $k_2$  valeurs à  $K_2$ , on a  $\ell(K_1) = \text{Des}(\mathbf{K}_1) + k_1$  et  $\ell(K_2) = \text{Des}(\mathbf{K}_2) + k_2 + \ell(J) - \text{des}(\mathbf{J})$ . En utilisant le fait que

$$\binom{|I| + \ell(J) - \ell(I)}{\ell(K_1) + \ell(K_2) - \ell(I)} = \binom{|I| + \ell(J) - \ell(I)}{|I| - \text{des}(\mathbf{K}) + \text{des}(\mathbf{J}) - k_1 - k_2},$$

l'égalité (4.38) devient

$$\begin{aligned} N_{I,J}^{\mathbf{K}} &= \sum_{k_1=0}^{\ell(I) - \text{des}(\mathbf{I})} \binom{\ell(I) - \text{des}(\mathbf{I})}{k_1} \\ &\quad \times \sum_{k_2=0}^{\ell(\mathbf{J}) - \ell(J)} \binom{\ell(\mathbf{J}) - \ell(J)}{k_2} \binom{|I| + \ell(J) - \ell(I)}{|I| - \text{des}(\mathbf{K}) + \text{des}(\mathbf{J}) - k_1 - k_2}. \end{aligned}$$

Cette somme se simplifie donc en

$$\begin{aligned} N_{I,J}^{\mathbf{K}} &= \sum_{k_1=0}^{\ell(I) - \text{des}(\mathbf{I})} \binom{\ell(I) - \text{des}(\mathbf{I})}{k_1} \binom{|I| + \ell(\mathbf{J}) - \ell(I)}{|I| - \text{des}(\mathbf{K}) + \text{des}(\mathbf{J}) - k_1} \\ &= \binom{|I| + \ell(\mathbf{J}) - \text{des}(\mathbf{I})}{|I| - \text{des}(\mathbf{K}) + \text{des}(\mathbf{J})}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\text{des}(\mathbf{I}) = \ell(\mathbf{I}) - \text{seg}(\mathbf{I})$  et que  $\text{seg}(\mathbf{K}) = \text{seg}(\mathbf{I}) + \text{seg}(\mathbf{J})$ , on a

$$\begin{aligned} N_{I,J}^{\mathbf{K}} &= \binom{|I| + \text{des}(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I}) + \text{seg}(\mathbf{K})}{|I| - \text{des}(\mathbf{K}) + \text{des}(\mathbf{J})} \\ &= \binom{|I| + \text{des}(\mathbf{J}) - \ell(\mathbf{I}) + \text{seg}(\mathbf{K})}{\ell(\mathbf{K}) - \ell(\mathbf{I})} \end{aligned}$$

On observe que ce coefficient ne dépend pas de  $I$  ni de  $J$  et donc ne dépend pas du choix de  $\sigma$  et  $\tau$ . Pour  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \triangleright \mathbf{K}_2$ , le calcul est exactement le même en mettant juste un  $-1$  dans la partie basse du coefficient binomial de l'équation (4.38). Pour le cas  $\mathbf{K}_1 | \mathbf{K}_2$ , on refait le même calcul avec  $K_1 \cdot K_2$  et  $K_1 \triangleright K_2$ . En tenant compte qu'on a  $\ell(K_1) + \ell(K_2)$  dans une somme et  $\ell(K_1) + \ell(K_2) - 1$  dans l'autre, l'équation (4.38) devient une somme des coefficients binomiaux

$$\binom{|I| + \ell(J) - \ell(I) + 1}{\ell(K_1) + \ell(K_2) - \ell(I)}.$$

En refaisant les calculs, on aboutit à

$$N_{I,J}^{\mathbf{K}} = \binom{|I| + \ell(\mathbf{J}) - \text{des}(\mathbf{I}) + 1}{|I| - \text{des}(\mathbf{K}) + \text{des}(\mathbf{J})}.$$

En utilisant le fait que cette fois  $\text{seg}(\mathbf{K}) = \text{seg}(\mathbf{I}) + \text{seg}(\mathbf{J}) + 1$ , on obtient bien le résultat souhaité, ce qui termine la démonstration.  $\square$

On définit ainsi un morphisme d'algèbre  $\varphi$  de **SCQSym** dans elle-même que l'on décrit en utilisant le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{SCQSym} & \hookrightarrow & \mathbf{SPQSym} & \twoheadrightarrow & \mathbf{T} & \leftrightarrow & \mathbf{SCQSym} \\ R_I & \mapsto & \sum_{\text{Rec}(\sigma)=I} F_\sigma & & & & \\ & & F_\sigma & \mapsto & T_{\text{GC}(\sigma)} & \mapsto & L_{\text{GC}(\sigma)} \end{array} \quad (4.39)$$

**Lemme 4.2.8.** *L'application  $\varphi$  est l'identité en tant que morphisme d'algèbre.*

*Démonstration.* Pour démontrer ce lemme, on démontre qu'une famille génératrice de l'algèbre est envoyée sur elle-même. La famille des  $(R_I)_I$  où les  $I$  sont des compositions segmentées n'ayant pas de barre forme une famille génératrice.

Soit  $I \Vdash n$  et  $\widetilde{R}_I = \varphi(R_I)$ . Par définition,

$$\widetilde{R}_I = \sum_{J \Vdash n} \sum_{\substack{\text{Rec}(\sigma)=I \\ \text{GC}(\sigma)=J}} L_J.$$

Cependant, puisque les barres dans  $\text{GC}(\sigma)$  et dans  $\text{Rec}(\sigma)$  correspondent aux valeurs négatives de  $\sigma$ , on a  $\text{seg}(\text{GC}(\sigma)) = \text{seg}(\text{Rec}(\sigma))$ . Dans la somme précédente, ce nombre est égal à 0 puisque  $I$  est une composition. On peut donc restreindre la somme aux compositions segmentées  $J$  n'ayant pas de barre, ou plus simplement aux compositions de  $n$ .

$$\widetilde{R}_I = \sum_{J \Vdash n} \sum_{\substack{\text{Rec}(\sigma)=I \\ \text{GC}(\sigma)=J}} L_J.$$

Or, on a défini la base monomiale de sorte que le changement de base avec la base des rubans soit le même que dans **Sym** lorsque l'on a une composition segmentée sans barre. De plus, le raffinement utilisé pour le changement de base entre la base monomiale et la base fondamentale coïncide avec celui sur les compositions lorsque l'on se place sur des compositions segmentées sans barre. Lorsque l'on a des compositions segmentées sans barre, l'expression de  $R_I$  sur  $L_J$  est la même que pour les permutations. On a donc  $\widetilde{R}_I = R_I$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 4.2.9.** *Soit  $J$  une composition segmentée d'un entier  $n$ . On a*

$$R_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{F}_I^J L_I, \quad (4.40)$$

où  $\mathcal{F}_I^J$  est le nombre de permutations partiellement signées  $\sigma$  vérifiant  $\text{Rec}(\sigma) = J$  et  $\text{GC}(\sigma) = I$ . En particulier, les nombres  $\mathcal{F}_I^J$  sont des nombres entiers positifs.

*Démonstration.* En appliquant  $\varphi$  à  $R_J$ , on a

$$\varphi(R_J) = \sum_{I \Vdash n} \sum_{\substack{\text{Rec}(\sigma)=J \\ \text{GC}(\sigma)=I}} L_I.$$



En utilisant le lemme 4.2.8, on a  $\varphi(R_J) = R_J$  et donc l'équation précédente nous donne le résultat.  $\square$

Au chapitre précédent, nous avons montré que les probabilités asymptotiquement stables non normalisées du 2-PASEP pour  $\alpha = \beta = q = 1$  sont égales au nombre de permutations partiellement signées à GC fixé. Ainsi, les nombres  $\mathcal{F}_I^J$  nous définissent un raffinement de ces probabilités utilisant la statistique des reculs sur les permutations partiellement signées.

La matrice de transition en taille 3 est donnée ci-dessous. On a représenté les permutations partiellement signées de taille 3 triées par leur compositions segmentées de reculs et de descentes de Genocchi dans le tableau en figure 4.1.

$$\mathbf{RL}_3 = \left( \begin{array}{cccc|cccc|c}
 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 3 & \cdot \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6
 \end{array} \right) \tag{4.41}$$

GC \ Rec	3	21	12	111	2 1	11 1	1 2	1 11	1 1 1
3	123								
21		$\begin{smallmatrix} 132 \\ 312 \end{smallmatrix}$	231						
12			213						
111				321					
2 1					$\begin{smallmatrix} 12\bar{3}, 1\bar{3}2 \\ 312 \end{smallmatrix}$	$\bar{2}31$			
1 1						$\begin{smallmatrix} 21\bar{3} \\ 321 \end{smallmatrix}$			
1 2							$\begin{smallmatrix} \bar{1}23 \\ 213 \end{smallmatrix}$		
1 11							$\bar{2}31$	$\begin{smallmatrix} 13\bar{2}, 31\bar{2} \\ 321 \end{smallmatrix}$	
1 1 1									$\begin{smallmatrix} 1\bar{2}\bar{3}, 1\bar{3}\bar{2}, \bar{2}1\bar{3} \\ \bar{2}31, 31\bar{2}, 321 \end{smallmatrix}$

FIGURE 4.1 – Les permutations partiellement signées de taille 3 triées suivant leurs statistiques Rec et GC.

Pour une meilleure lisibilité, on a représenté les 0 par des points. Dans la proposition suivante, nous décrivons certaines propriétés vérifiées par ces matrices. Comme dans le théorème précédent, on note  $\mathcal{F}_I^J$  le coefficient de  $\mathbf{RL}_n$  en ligne  $I$  et colonne  $J$ .

**Proposition 4.2.10.** *Soit  $n$  un entier strictement positif et soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées de  $n$ . On a les propriétés suivantes :*

- *La matrice  $\mathbf{RL}_n$  est diagonale par blocs où les blocs sont délimités par les positions des barres dans les compositions segmentées. Plus précisément,*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}} = 0 \quad \text{si } \text{Seg}(\mathbf{I}) \neq \text{Seg}(\mathbf{J}). \quad (4.42)$$

- *Le bloc supérieur gauche de  $\mathbf{RL}_n$  est égal à la matrice de transition  $RL_n$  entre la base des rubans et la base des fondamentales de  $\mathbf{Sym}$ . Plus précisément,*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}} = F_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}} \quad \text{si } \text{seg}(\mathbf{I}) = \text{seg}(\mathbf{J}) = 0, \quad (4.43)$$

où  $G_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}$  est le coefficient défini en (1.93).

- *Chaque coefficient de  $\mathbf{RL}_n$  est la somme de 4 coefficients d'un bloc supérieur. Plus précisément, supposons  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = \text{Seg}(\mathbf{J})$  et  $\text{seg}(\mathbf{I}) > 0$ . Soient  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  telles que  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 | \mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 | \mathbf{J}_2$  et  $|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{J}_2|$ . Alors on a*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}} = \mathcal{F}_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2} + \mathcal{F}_{\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \triangleright \mathbf{J}_2} + \mathcal{F}_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2} + \mathcal{F}_{\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \triangleright \mathbf{J}_2}. \quad (4.44)$$

Cette proposition implique que tous les coefficients de la matrice peuvent être obtenus à partir de la matrice  $RL_n$  dans  $\mathbf{Sym}$ .

Pour démontrer le dernier point de cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.2.11.** *Soit  $\mathbf{J}$  une composition segmentée d'un entier  $n$  telle que  $\text{seg}(\mathbf{J}) > 0$  et soient  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  telles que  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 | \mathbf{J}_2$ . Alors on a*

$$\begin{aligned} |\{\sigma \in B'_n \mid \text{Rec}(\sigma) = \mathbf{J}\}| &= |\{\sigma \in B'_n \mid \text{Rec}(\sigma) = \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2\}| \\ &+ |\{\sigma \in B'_n \mid \text{Rec}(\sigma) = \mathbf{J}_1 \triangleright \mathbf{J}_2\}| \end{aligned} \quad (4.45)$$

Noter que la remarque 3.3.2 implique le même résultat que dans le lemme ci-dessus avec GC à la place de Rec.

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in B'_n$  vérifiant  $\text{Rec}(\sigma) = \mathbf{J}$  et soit  $k = |\mathbf{J}_1|$ . La valeur  $k + 1$  a un signe négatif dans  $\sigma$ . Changer ce signe retire  $k$  de  $\text{Seg}(\text{Rec}(\sigma))$  et ajoute ou non  $k$  à l'ensemble des reculs de  $\sigma$  suivant si  $k + 1$  est à gauche ou à droite de  $k$  dans  $\sigma$ . De plus, cette application est une bijection entre l'ensemble à gauche de l'égalité de (4.45) et l'union des ensembles à droite, ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.2.10.* Soit  $\sigma$  une permutation partiellement signée. Les barres dans  $\text{Rec}(\sigma)$  et dans  $\text{GC}(\sigma)$  correspondent aux valeurs de signe négatif de  $\sigma$ . On a donc  $\text{Seg}(\text{Rec}(\sigma)) = \text{Seg}(\text{GC}(\sigma))$ , ce qui démontre le premier point de la proposition en utilisant la description des coefficients donnée par le théorème 4.2.9.

Le deuxième point vient du fait que pour les compositions segmentées n'ayant pas de barre, la matrice de changement de base entre la base monomiale et la base  $P$  est définie



$$\mathbf{PL}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Le théorème 4.2.9 et les différents changements de base nous donnent les interprétations combinatoires suivantes.

**Corollaire 4.2.12.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées d'un même entier  $n$ . On a les descriptions suivantes.*

- $\mathcal{C}_I^{\mathbf{J}}$  compte le nombre de permutations partiellement signées  $\sigma$  vérifiant  $\text{Rec}(\sigma) \preceq \mathbf{J}$  et  $\text{GC}(\sigma) \succeq \mathbf{I}$ .
- $\mathcal{D}_I^{\mathbf{J}}$  compte le nombre de permutations partiellement signées  $\sigma$  vérifiant  $\text{Rec}(\sigma) = \mathbf{J}$  et  $\text{GC}(\sigma) \succeq \mathbf{I}$ .
- $\mathcal{E}_I^{\mathbf{J}}$  compte le nombre de permutations partiellement signées  $\sigma$  vérifiant  $\text{Rec}(\sigma) \preceq \mathbf{J}$  et  $\text{GC}(\sigma) = \mathbf{I}$ .

Les points 1 et 2 de la proposition 4.2.10 se transposent directement aux trois matrices ci-dessus puisque la relation  $\preceq$  ne change pas l'ensemble des segmentations des compositions segmentées. Pour le troisième point, il se généralise de la façon suivante.

**Proposition 4.2.13.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées telles que  $\text{seg}(\mathbf{I}) > 0$  et  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = \text{Seg}(\mathbf{J})$ . Soient également  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  telles que  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 | \mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 | \mathbf{J}_2$  et  $|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{J}_2|$ . Alors on a*

$$\mathcal{C}_I^{\mathbf{J}} = \mathcal{C}_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{D}_I^{\mathbf{J}} = \mathcal{D}_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2} + \mathcal{D}_{\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \triangleright \mathbf{J}_2} \quad (4.53)$$

$$\mathcal{E}_I^{\mathbf{J}} = \mathcal{E}_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2} + \mathcal{E}_{\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2}. \quad (4.54)$$

La preuve de la proposition ci-dessus repose sur l'identité combinatoire suivante :

$$\{\mathbf{K} \mid \mathbf{K} \preceq \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2\} = \{\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 \mid \mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I}_1; \mathbf{K}_2 \preceq \mathbf{I}_2\} \cup \{\mathbf{K}_1 \triangleright \mathbf{K}_2 \mid \mathbf{K}_1 \preceq \mathbf{I}_1; \mathbf{K}_2 \preceq \mathbf{I}_2\}. \quad (4.55)$$

*Démonstration.* Commençons par démontrer la formule donnée par (4.54). On a d'une part

$$P_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{I} \Vdash n} \mathcal{E}_I^{\mathbf{J}} L_I$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} P_J &= \sum_{K \preceq J} R_K \\ &= \sum_{K \preceq J} \sum_{I \models n} \mathcal{F}_I^K L_I. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\mathcal{E}_I^J = \sum_{K \preceq J} \mathcal{F}_I^K. \quad (4.56)$$

En prenant  $J = J_1 \cdot J_2$ , on obtient

$$\mathcal{E}_I^{J_1 \cdot J_2} = \sum_{K \preceq J_1 \cdot J_2} \mathcal{F}_I^K = \sum_{\substack{K_1 \preceq I_1 \\ K_2 \preceq I_2}} \mathcal{F}_I^{K_1 \cdot K_2} + \mathcal{F}_I^{K_1 \triangleright K_2}, \quad (4.57)$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant la relation (4.55). On peut maintenant décrire  $\mathcal{E}_{I_1|I_2}^{J_1|J_2}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{I_1|I_2}^{J_1|J_2} &= \sum_{K \preceq J_1|J_2} \mathcal{F}_{I_1|I_2}^K \\ &= \sum_{\substack{K_1 \preceq J_1 \\ K_2 \preceq J_2}} \mathcal{F}_{I_1|I_2}^{K_1|K_2} \\ &= \sum_{\substack{K_1 \preceq J_1 \\ K_2 \preceq J_2}} \mathcal{F}_{I_1 \cdot I_2}^{K_1 \cdot K_2} + \mathcal{F}_{I_1 \cdot I_2}^{K_1 \triangleright K_2} + \mathcal{F}_{I_1 \triangleright I_2}^{K_1 \cdot K_2} + \mathcal{F}_{I_1 \triangleright I_2}^{K_1 \triangleright K_2}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant la relation (4.44). À partir de là, on regroupe les termes deux par deux et on utilise l'équation (4.57). On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{I_1|I_2}^{J_1|J_2} &= \sum_{\substack{K_1 \preceq J_1 \\ K_2 \preceq J_2}} \mathcal{F}_{I_1 \cdot I_2}^{K_1 \cdot K_2} + \mathcal{F}_{I_1 \cdot I_2}^{K_1 \triangleright K_2} + \sum_{\substack{K_1 \preceq J_1 \\ K_2 \preceq J_2}} \mathcal{F}_{I_1 \triangleright I_2}^{K_1 \cdot K_2} + \mathcal{F}_{I_1 \triangleright I_2}^{K_1 \triangleright K_2} \\ &= \mathcal{E}_{I_1 \cdot I_2}^{J_1 \cdot J_2} + \mathcal{E}_{I_1 \triangleright I_2}^{J_1 \cdot J_2}, \end{aligned}$$

et on obtient bien (4.54).

Pour l'équation (4.53), la démonstration est très similaire. On a d'une part

$$R_J = \sum_{I \models n} \mathcal{D}_I^J M_I,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} R_J &= \sum_{K \Vdash n} \mathcal{F}_K^J L_K \\ &= \sum_{K \Vdash n} \mathcal{F}_K^J \sum_{I \succeq K} M_I \\ &= \sum_{I \Vdash n} \sum_{K \preceq I} \mathcal{F}_K^J M_I. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\mathcal{D}_I^J = \sum_{K \preceq I} \mathcal{F}_K^J,$$

qui est la même équation que (4.56) en inversant les indices et les exposants. Ainsi on a

$$\mathcal{D}_{I_1|I_2}^{J_1|J_2} = \mathcal{D}_{I_1 \cdot I_2}^{J_1 \cdot J_2} + \mathcal{D}_{I_1 \triangleright I_2}^{J_1 \triangleright J_2},$$

et (4.53) est démontrée.

L'équation (4.52) est la composée des deux autres équations et découle donc directement des deux cas précédents.  $\square$

La proposition 4.2.13 implique que les matrices de changement de bases précédentes sont calculables simplement à partir des matrices de changement de base analogues dans **Sym**. Nous allons nous inspirer de cette propriété pour définir des  $q$ -analogues des bases que nous avons manipulées.

## 4.3 Un $q$ -analogue de SCQSym

### 4.3.1 Les matrices $M(P(q), M)$ et $M(R(q), M)$

**Définition de  $P(q)$**

En s'inspirant de la relation décrite par l'équation (4.52), on définit un  $q$ -analogue de la base  $P$  vérifiant également cette propriété.

**Définition 4.3.1.** Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée. Soit  $P_{\mathbf{J}}(q)$  vérifiant

$$P_{\mathbf{J}}(q) = \sum_{\mathbf{I} \Vdash n} \mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) M_{\mathbf{I}}, \quad (4.58)$$

où  $\mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = 0$  si  $\text{Seg}(\mathbf{I}) \neq \text{Seg}(\mathbf{J})$ . Sinon,  $\mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q)$  est décrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{I_1|I_2}^{J_1|J_2}(q) = \mathcal{C}_{I_1 \cdot I_2}^{J_1 \cdot J_2}(q) & \text{si } \text{seg}(\mathbf{I}) > 0 ; \\ \mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = \mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.59)$$

où  $\mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q)$  sont les coefficients du développement de  $S^{\mathbf{J}}(q)$  sur  $M_{\mathbf{I}}$  dans **Sym** définis section 1.3.5.

On représente ci-dessous la matrice de changement de base entre  $P(q)$  et  $M$  pour  $n = 3$ .

$$\mathbf{PM}_3(q) = \begin{pmatrix} [1] & [1] & [1] & [1] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1] & [3] & [2] & [2][2] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1] & [1] & [2] & [2] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1] & [3] & [3] & [2][3] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [3] & [1] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [3] & [2][3] & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [2] & [2] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [3] & [2][3] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [2][3] \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

En utilisant (4.59) donnant une formule de récurrence pour la description des coefficients de  $SM_n(q)$  dans **Sym** et le théorème 1.3.23, on en déduit l'expression récursive des  $\mathcal{C}_I^J$  suivante.

**Proposition 4.3.2.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées et  $i_1$  et  $j_1$  les premières parts de  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$ . Enfin, soient  $\mathbf{I}'$  et  $\mathbf{J}'$  les compositions segmentées obtenues à partir de  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  en retirant leur première part. Le coefficient  $\mathcal{C}_I^J$  est décrit par la règle suivante :*

1. Si  $j_1 < i_1$ , alors  $\mathcal{C}_I^J(q) = \mathcal{C}_{i_1 \triangleright \mathbf{I}'}^{\mathbf{J}}(q)$ ,
2. sinon,

$$\mathcal{C}_I^J(q) = \begin{bmatrix} k + j_1 - 1 \\ j_1 \end{bmatrix}_q \mathcal{C}_{\mathbf{I}''}^{\mathbf{J}'}(q) \quad (4.61)$$

où  $k$  est la longueur de  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{I}''$  est obtenue en soustrayant  $j_1$  à la première part de  $\mathbf{I}$ .

*Démonstration.* En utilisant la définition 4.3.1, le coefficient  $\mathcal{C}_I^J(q)$  est égal à  $C_I^J(q)$  où  $I$  et  $J$  sont les compositions obtenues à partir de  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  en retirant les barres. Le théorème 1.3.23 nous donne la récurrence ci-dessus pour les compositions sans barres. La définition des coefficients des  $\mathcal{C}_I^J(q)$  implique également qu'on peut replacer les barres dans les compositions présentes dans la récurrence et obtenir (4.61).  $\square$

### La matrice $M(R(q), M)$

On commence par définir les  $q$ -rubans en utilisant la même matrice de transition sur les  $P(q)$  que dans le cas  $q = 1$  :

$$R_I(q) = \sum_{\mathbf{J} \preceq \mathbf{I}} (-1)^{\ell(\mathbf{I}) - \ell(\mathbf{J})} P_{\mathbf{J}}(q). \quad (4.62)$$

On a donc également

$$P_I(q) = \sum_{\mathbf{J} \preceq \mathbf{I}} R_{\mathbf{J}}(q). \quad (4.63)$$

Soit  $\mathcal{D}_I^J(q)$  le coefficient de  $M_I$  dans l'expression de  $R_J$ . On représente dans l'équation ci-dessous un exemple de cette matrice de changement de base dans le cas  $n = 3$ .

$$\mathbf{RM}_3(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q+q^2 & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q+q^2 & q+q^2 & q^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+q+q^2 & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+q+q^2 & q+q^2+q^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+q+q^2 & q+q^2+q^3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+2q+2q^2+q^3 & \cdot \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Les coefficients  $\mathcal{D}_I^J(q)$  vérifient les propriétés suivantes similaires au cas  $q = 1$ .

**Proposition 4.3.3.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées telles que  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = \text{Seg}(\mathbf{J})$  et  $\text{seg}(\mathbf{I}) > 0$ . Soient  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  telles que  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1|\mathbf{I}_2, \mathbf{J} = \mathbf{J}_1|\mathbf{J}_2$  et  $|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{J}_1|$ . Alors on a*

$$\mathcal{D}_I^J(q) = \mathcal{D}_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2}(q) + \mathcal{D}_{\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}^{\mathbf{J}_1 \triangleright \mathbf{J}_2}(q). \quad (4.65)$$

De plus, si  $\text{seg}(\mathbf{I}) = 0$ , on a

$$\mathcal{D}_I^J(q) = D_I^J(q), \quad (4.66)$$

où  $I$  et  $J$  sont les compositions issues de  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  et  $D_I^J(q)$  est le coefficient de  $M_I$  dans l'expression de  $R_J$  dans **Sym**.

*Démonstration.* Puisque le changement de base entre les  $q$ -rubans et les  $P(q)$  est le même que dans le cas  $q = 1$ , les coefficients  $\mathcal{D}_I^J(q)$  vérifient les mêmes relations avec les coefficients  $\mathcal{C}_I^J$ . De plus, la définition 4.3.1 implique que ces coefficients vérifient les mêmes propriétés que dans le cas  $q = 1$ , c'est donc également le cas pour  $\mathcal{D}_I^J(q)$ .  $\square$

La proposition 4.3.3 implique que les coefficients  $\mathcal{D}_I^J(q)$  sont dans  $\mathbb{N}(q)$ . De plus, en utilisant l'interprétation combinatoire des coefficients  $D_I^J$  dans [NTW10], on peut aisément donner une interprétation combinatoire des coefficients  $\mathcal{D}_I^J(q)$ . Pour cela nous définissons les *mot tassés partiellement segmentés*, qui seront appelés *mot tps* dans la suite, ainsi que des statistiques sur ces objets basées sur les statistiques analogues sur les mots tassés que nous rappelons en définition 1.3.24.

**Définition 4.3.4.** *Un mot tassé partiellement segmenté est un mot tassé  $\mathbf{u}$  dont certaines valeurs peuvent être séparées par une barre. On ne peut placer une barre après une valeur que s'il s'agit de la dernière occurrence de cette valeur. Comme pour une permutation segmentée, on note  $\text{Seg}(\mathbf{u})$  la position des barres dans  $\mathbf{u}$ .*

*Une descente de  $\mathbf{u}$  est une position  $i$  telle qu'il n'y a pas de barre entre  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_{i+1}$  et telle que  $\mathbf{u}_i > \mathbf{u}_{i+1}$ . La statistique de composition segmentée des descentes d'un mot tps  $\mathbf{u}$  (noté  $\text{SDes}(\mathbf{u})$ ) est la composition segmentée dont l'ensemble des segmentations est  $\text{Seg}(\mathbf{u})$  et dont l'ensemble des descentes est égal à l'ensemble des descentes de  $\mathbf{u}$ .*



La composition segmentée des mots d'un mot tps  $\mathbf{u}$  (notée  $\text{WC}(\mathbf{u})$ ) est la composition segmentée  $\mathbf{I}$  telle que  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = \text{Seg}(\mathbf{u})$  et telle que  $\text{Des}(\mathbf{u})$  soit égal à l'ensemble des positions des dernières occurrences des lettres de  $\mathbf{u}$ , si elles ne sont pas suivies d'une barre.

Le nombre d'inversions spéciales d'un mot tps  $\mathbf{u}$  (noté  $\text{sinv}(\mathbf{u})$ ) est égal au nombre d'inversions spéciales du mot tassé  $u$  obtenu en retirant les barres de  $\mathbf{u}$ .

Par exemple, pour  $\mathbf{u} = 2135|2214$ , la composition des descentes est  $\text{SDes}(\mathbf{u}) = 13|22$ , la composition des mots est  $\text{WC}(\mathbf{u}) = 31|211$  et il y a  $\text{sinv}(\mathbf{u}) = 7$  inversions spéciales. Noter que la contrainte sur la position des barres implique que le mot  $2|21$  n'est pas un mot tps car la barre n'est pas après la dernière occurrence d'une valeur.

On a alors l'interprétation combinatoire suivante.

**Proposition 4.3.5.** Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées d'un même entier  $n$ . On a :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = \sum_{\substack{\text{WC}(\mathbf{u})=\mathbf{I} \\ \text{SDes}(\mathbf{u})\preceq\mathbf{J}}} q^{\text{sinv}(\mathbf{u})}; \quad (4.67)$$

$$\mathcal{D}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = \sum_{\substack{\text{WC}(\mathbf{u})=\mathbf{I} \\ \text{SDes}(\mathbf{u})=\mathbf{J}}} q^{\text{sinv}(\mathbf{u})}. \quad (4.68)$$

$$(4.69)$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer l'égalité (4.69). En effet, l'égalité (4.67) de celle-ci avec le changement de base décrit par (4.63).

Soient  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1|\mathbf{I}_2$  une composition segmentée ayant au moins une barre et  $\mathbf{u}$  un mot tps tel que  $\text{WC}(\mathbf{u}) = \mathbf{I}$ . Si  $\mathbf{u}'$  est le mot tps obtenu en retirant la barre, alors  $\text{WC}(\mathbf{u}') = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{I}_2$  car les barres de  $\mathbf{u}$  sont placées après les dernières occurrences de chaque valeur par définition.

De plus, de même que pour la définition du lemme 4.2.11, le fait de retirer une barre dans  $\mathbf{u}$  peut créer ou non une descente en cette position. Ainsi, retirer une barre en position  $\ell(\mathbf{I}_1)$  est une bijection entre l'ensemble des mots tps  $\mathbf{u}$  vérifiant  $\text{SDes}(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_1|\mathbf{I}_2$  et les mots tassés  $\mathbf{u}'$  vérifiant  $\text{SDes}(\mathbf{u}') = \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2$  ou  $\text{SDes}(\mathbf{u}') = \mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2$ .

Enfin, notons que le nombre d'inversions spéciales ne dépend pas du nombre ou des positions des barres. Ainsi, en définissant

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) =: \sum_{\substack{\text{WC}(\mathbf{u})=\mathbf{I} \\ \text{SDes}(\mathbf{u})=\mathbf{J}}} q^{\text{sinv}(\mathbf{u})},$$

alors ce qu'on a démontré ci-dessus implique que les polynômes  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q)$  vérifient la récurrence décrite par (4.65). De plus, on a  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = D_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}$  si  $\text{seg}(\mathbf{I}) = \text{seg}(\mathbf{J}) = 0$  et que  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  sont les compositions associées. En effet, les statistiques que nous avons définies ci-dessus coïncident avec celles de [NTW10] sur les mots tps n'ayant pas de barres. Ainsi, on a bien

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = \mathcal{D}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q).$$

□

### 4.3.2 Les matrices $M(P(q), L(q))$ et $M(R(q), L(q))$

#### La matrice de transition $M(L(q), M)$

En nous inspirant de la matrice de changement de base  $M(L, M)$  de **Sym** décrite dans [NTW10], elle-même inspirée des matrices de changement de base entre la base de Hall-Littlewood  $\tilde{H}$  sur la base des rubans décrites dans [Hiv00], nous définissons un  $q$ -analogue de  $L(q)$  en utilisant les statistiques suivantes.

**Définition 4.3.6.** Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. Soit  $\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J})$  la statistique définie par

$$\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J}) := \begin{cases} \#\{(i, j) \in (\text{Des}(\mathbf{I}) \cup \text{Seg}(\mathbf{I})) \times (\text{Des}(\mathbf{J})) \mid i \geq j\} & \text{si } \mathbf{I} \succeq \mathbf{J} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.70)$$

De la même façon, soit  $\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{J})$  la statistique définie par

$$\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{J}) := \begin{cases} \#\{(i, j) \in \text{Des}(\mathbf{I}) \times (\text{Des}(\mathbf{J}) \cup \text{Seg}(\mathbf{J})) \mid i \leq j\} & \text{si } \mathbf{I} \succeq \mathbf{J} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.71)$$

On définit alors la base  $L(q)$  par

$$L_{\mathbf{J}}(q) := \sum_{\mathbf{I} \succeq \mathbf{J}} q^{\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J})} M_{\mathbf{I}}. \quad (4.72)$$

Pour  $q = 1$ , on retrouve l'expression de  $L_{\mathbf{J}}$  sur la base  $M$  (4.30). De plus, lorsque  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  n'ont pas de barre,  $\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J})$  est égale à la statistique analogue définie dans [NTW10]. On représente ci-dessous la matrice de changement de base pour  $n = 3$ .

$$\mathbf{LM}_3(q) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & q & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & q & . & . & . & . & . & . \\ 1 & q & q^2 & q^3 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & q & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & q & q^2 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Le changement de base inverse est obtenu en utilisant  $\text{st}'$ .

**Proposition 4.3.7.** Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée. On a

$$M_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{I} \succeq \mathbf{J}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{\ell(\mathbf{I}) - \ell(\mathbf{J})} q^{-\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{J})} L_{\mathbf{I}}. \quad (4.74)$$

Par exemple, on présente ci-dessous la matrice de changement de base calculée en utilisant (4.74) dans le cas  $n = 3$ .

$$\mathbf{ML}_3(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1/q & 1/q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1/q & \cdot & 1/q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/q^2 & -1/q^3 & -1/q^2 & 1/q^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1/q^2 & 1/q^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1/q & 1/q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{D}_n(q)$  la matrice diagonale indexée par les compositions segmentées de longueur  $n$  dont le coefficient  $d_n^{\mathbf{I}}(q)$  indexé par la composition segmentée  $\mathbf{I} = I_1|I_2|\dots|I_r$ , où  $I_k$  est une composition, est donné par

$$d_n^{\mathbf{I}}(q) := q^{(r-1)(\ell(I_1)-1)+(r-2)(\ell(I_2)-1)+\dots+\ell(I_{r-1})-1}. \quad (4.76)$$

Soient également  $\mathbf{J} = J_1|J_2|\dots|J_r$  ainsi que  $I'$  et  $J'$  les compositions dont les ensembles des descentes sont respectivement égaux à  $\text{Des}(\mathbf{I})$  et à  $\text{Des}(\mathbf{J})$  (en particulier,  $I' = I_1 \triangleright I_2 \triangleright \dots \triangleright I_r$ ). Dans le calcul de  $\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J})$ , la barre entre  $I_i$  et  $I_{i+1}$  compte autant de fois que le nombre de descentes dans  $J_1|\dots|J_i$  et donc on a

$$q^{\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J})} = q^{\text{st}(I', J')} d_n^{\mathbf{J}}(q). \quad (4.77)$$

Ainsi, on peut réécrire  $\mathbf{LM}_n(q)$  simplement :

$$\mathbf{LM}_n(q) = \mathfrak{M}_n(q) \mathfrak{D}_n(q), \quad (4.78)$$

où le coefficient  $m_{\mathbf{J}}^{\mathbf{I}}$  en ligne  $\mathbf{I}$  et colonne  $\mathbf{J}$  de  $\mathfrak{M}_n(q)$  est donné par 0 si  $\text{Seg}(\mathbf{I}) \neq \text{Seg}(\mathbf{J})$  et  $\text{st}(I', J')$  sinon. Il reste à montrer que les coefficients de  $(\mathfrak{M}_n(q) \mathfrak{D}_n(q))^{-1}$  sont donnés par

$$\left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(\mathbf{I})-\ell(\mathbf{J})} q^{-\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{J})}. \quad (4.79)$$

Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n-1\}$ . On note  $\mathfrak{M}_n^S(q)$  le bloc de la matrice  $\mathfrak{M}_n(q)$  indexé par les compositions segmentées ayant leur ensemble des segmentations égal à  $S$ . Si  $s = |S|$ , on montre que  $\mathfrak{M}_n^S(q)$  est égal à la matrice  $LM_{n-s}(q)$ , la matrice de changement de base entre les bases monomiales et fondamentales de  $\mathbf{Sym}$ .

Pour ce faire, on construit une bijection entre les compositions segmentées  $\mathbf{I}$  vérifiant  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = S$  et les compositions de  $n-s$ . Puisque  $\text{Seg}(\mathbf{I}) = S$ , l'ensemble des descentes de  $\mathbf{I}$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\} \setminus S$ . On peut donc retrancher à chaque valeur de  $\text{Des}(\mathbf{I})$  le nombre de valeurs de  $S$  inférieur à cette valeur pour obtenir un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n-s\}$ . Soit  $\eta(\mathbf{I})$  la composition de  $n-s$  dont l'ensemble des descentes est égal

à ce sous-ensemble. L'application  $\eta$  est clairement une bijection. De plus, si on a  $\mathbf{J} \preceq \mathbf{I}$ , alors  $\text{st}(\eta(\mathbf{I}), \eta(\mathbf{J})) = \text{st}(I', J')$  avec les notations précédentes. Ceci démontre que  $\mathfrak{M}_n^S(q) = LM_{n-s}(s)$  et donc les coefficients de  $(\mathfrak{M}_n(q))^{-1}$  sont égaux à

$$\left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(\eta(\mathbf{I}))-\ell(\eta(\mathbf{J}))} q^{-\text{st}'(\eta(\mathbf{I}), \eta(\mathbf{J}))} = \left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(\mathbf{I})-\ell(\mathbf{J})} q^{-\text{st}'(I', J')}.$$

De plus, on a

$$q^{\text{st}(\mathbf{I}, \mathbf{J})} = d_n^{\mathbf{I}}(q) q^{\text{st}(I', J')}.$$

En effet, en procédant de la même façon que précédemment, la barre entre  $J_i$  et  $J_{i+1}$  est compté autant de fois que le nombre de descentes de  $I_1 | \dots | I_i$ . Ainsi, les coefficients de  $\mathfrak{D}_n^{-1}(q) \mathfrak{M}_n^{-1}(q)$  sont bien décrits par

$$\left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(\mathbf{I})-\ell(\mathbf{J})} q^{-\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{J})}.$$

□

### La matrice $M(P(q), L(q))$ et lien avec le 2-PASEP

On note  $\mathcal{E}_J^{\mathbf{I}}(q)$  le coefficient de  $L_{\mathbf{I}}(q)$  dans le développement de  $P_{\mathbf{J}}(q)$  :

$$P_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{I} \# n} \mathcal{E}_J^{\mathbf{I}}(q) L_{\mathbf{I}}(q). \quad (4.80)$$

On représente ci-dessous la matrice de transition induite par ces coefficients pour  $n = 3$ .

$$\mathbf{PL}_3(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q+1 & 1 & q+2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q^2+q+1 & q^2+2q+1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q+1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q+1 & q+1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & q^2+2q+1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q^3+2q^2+2q+1 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

On a alors la description suivante des coefficients.

**Proposition 4.3.8.** *Soient  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées. On a*

$$\mathcal{E}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{K} \prec \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(\mathbf{I})-\ell(\mathbf{K})} q^{-\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{K})} \mathcal{C}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{J}}. \quad (4.82)$$

*Démonstration.* Ce résultat découle directement de la définition 4.3.1 et de (4.74).  $\square$

Étant donnée une composition segmentée  $\mathbf{I}$  d'un entier  $n$ , soit  $\mathbf{J}$  la composition segmentée de  $n$  telle que  $\text{Seg}(\mathbf{J}) = \text{Seg}(\mathbf{I})$  et telle que  $\text{Des}(\mathbf{I}) \cup \text{Seg}(\mathbf{J}) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ . On note  $e_{\mathbf{I}}(q)$  le dernier coefficient non nul de la ligne indexée par  $\mathbf{I}$  de  $SL_n(q)$ . Avec ces notations, on a

$$e_{\mathbf{I}}(q) = \mathcal{E}_{\mathbf{J}}^{\mathbf{I}}(q). \quad (4.83)$$

En utilisant (4.82), on a l'expression des coefficients  $e_{\mathbf{I}}(q)$  suivante :

$$e_{\mathbf{I}}(q) = \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{\ell(\mathbf{I}) - \ell(\mathbf{K})} q^{-\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{K})} c_{\mathbf{K}}(q), \quad (4.84)$$

où  $c_{\mathbf{K}}(q) = [s]_q^{k_1} [s-1]_q^{k_2} \dots [1]_q^{k_s}$  et où  $k_1, k_2, \dots, k_s$  sont les parts de  $\mathbf{K}$ . Ces coefficients nous intéressent car ils nous donnent une formule explicite pour calculer les probabilités asymptotiquement stables des états du 2-PASEP. Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 4.3.9.** *Soit  $x$  un état du 2-PASEP de longueur  $N$  avec  $r$  particules grises et  $X$  le mot en  $A, D$  et  $E$  associé. Soit  $\mathbf{I}$  la composition segmentée de  $N+1$  telle que  $\text{Seg}(\mathbf{I})$  est l'ensemble des positions des lettres  $A$  dans  $X$  et  $\text{Des}(\mathbf{I})$  est l'ensemble des positions des lettres  $E$  dans  $X$ . Pour  $\alpha = \beta = 1$ , on a*

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} e_{\mathbf{I}}(q), \quad (4.85)$$

où  $Z_{N,r} = \sum_{\text{Seg}(\mathbf{K}) = \text{Seg}(\mathbf{I})} e_{\mathbf{K}}(q)$ .

La démonstration de ce théorème repose sur la description récursive des coefficients  $e_{\mathbf{I}}(q)$  donnée par la proposition suivante.

**Proposition 4.3.10.** *Soit  $\mathbf{I}$  une composition segmentée d'un entier  $n$  de longueur  $r$  et soit  $\mathbf{S} = 1|1| \dots |1$  de longueur  $s$ . On a*

$$e_{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}}(q) = [s+1]_q e_{\mathbf{S}|\mathbf{I}}(q) \quad (4.86)$$

$$e_{\mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{I}}(q) = [r]_q e_{\mathbf{S}|\mathbf{I}}(q) + \sum_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}} q^{\ell(\mathbf{I}_1) - 1} e_{\mathbf{S}|\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}(q) \quad (4.87)$$

$$e_{\mathbf{S}}(q) = [s]_q! \quad (4.88)$$

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin des identités suivantes.

**Lemme 4.3.11.** *Soient  $\mathbf{I}$  une composition segmentée de longueur  $r$ ,  $\mathbf{S}$  la composition segmentée  $1|1| \dots |1$  de longueur  $s$  et  $\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}$  de longueur  $t$ . On a*

$$\text{st}'(\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}, \mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{K}) = \text{st}'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K}) + \ell(\mathbf{K}); \quad (4.89)$$

$$\text{st}'(\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}, \mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{K}) = \text{st}'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K}) + \ell(\mathbf{K}) - 1; \quad (4.90)$$

$$\text{st}'(\mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{I}, \mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{K}) = \text{st}'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K}). \quad (4.91)$$

De plus, en notant  $k_1, k_2, \dots, k_t$  les longueurs des parts de  $\mathbf{K}$ , on a

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{K}}(q) &= [s+t+1]_q [s+t]_q \cdots [t+1]_q [t]_q^{k_1} \cdots [1]_q^{k_t} \\ &= [s+t+1]_q c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q); \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{K}}(q) &= [s+t]_q \cdots [t+1]_q [t]_q^{k_1+1} [t-1]_q^{k_2} \cdots [1]_q^{k_t} \\ &= [t]_q c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q). \end{aligned} \quad (4.93)$$

*Démonstration.* Dans les équations (4.89) et (4.90), la valeur minimale de  $\text{Des}(\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I})$  est  $s+1$ . Donc le fait que  $s+1$  soit dans l'ensemble des descentes de la composition de droite ou non change la valeur de  $st'$  de 1. C'est pourquoi les termes de droite de ces deux équations diffèrent de 1. De plus, la valeur  $s+1$  dans la composition segmentée de gauche augmente  $st'$  autant de fois qu'il y a de valeurs supérieures dans l'ensemble des descentes et des segmentations de la statistique de droite, *i.e.*, autant de fois que la longueur de  $\mathbf{K}$  pour la première équation et la longueur de  $\mathbf{K}$  moins 1 pour la deuxième. Pour l'équation (4.91), passer du terme de droite au terme de gauche revient à décrémenter de 1 toutes les valeurs dans les ensembles des descentes et des segmentations qui sont supérieures à  $s+1$  dans les deux compositions segmentées. Cela ne change pas le résultat de  $st'$ .

Les égalités (4.92) et (4.93) découlent quant à elles directement de la définition des coefficients  $c_{\mathbf{J}}$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.3.10.* Pour l'équation (4.88), le coefficient  $e_{\mathbf{S}}$  est égal au coefficient inférieur droit de la matrice  $\mathbf{PL}_n(q)$  qui est seul dans son bloc. Noter qu'on a  $L_{\mathbf{S}} = M_{\mathbf{S}}$  et donc  $e_{\mathbf{S}}$  est égal à  $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}^{\mathbf{S}}(q) = [s]_q!$  d'après la proposition 4.3.2.

Intéressons-nous maintenant à démontrer (4.86). En utilisant (4.84), on a

$$e_{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}}(q) = \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{s+1+r-\ell(\mathbf{K})} q^{-st'(\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}, \mathbf{K})} c_{\mathbf{K}}(q).$$

Or, l'ensemble des  $\{\mathbf{K} \mid \mathbf{K} \preceq \mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}\}$  est égal à l'union des ensembles  $\{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{K} \mid \mathbf{K} \preceq \mathbf{I}\}$  et  $\{\mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{K} \mid \mathbf{K} \preceq \mathbf{I}\}$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}}(q) &= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{r-\ell(\mathbf{K})} q^{-st'(\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}, \mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{K}}(q) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{r+1-\ell(\mathbf{K})} q^{-st'(\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}, \mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|1 \triangleright \mathbf{K}}(q). \end{aligned}$$

En notant  $t$  la longueur de  $\mathbf{K}$  ainsi qu'en utilisant les égalités (4.89), (4.90), (4.92) et (4.93), on obtient

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{S}|1 \cdot \mathbf{I}}(q) &= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K})-t} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) [s+t+1]_q \\ &\quad + \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left( \frac{-1}{q} \right)^{r+1-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K})-t+1} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) [t]_q. \end{aligned}$$

En regroupant les sommes, on a

$$\begin{aligned}
e_{\mathbf{S}|1\cdot\mathbf{I}}(q) &= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I},\mathbf{S}|\mathbf{K})-t} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) ([s+1+t]_q - [t]_q) \\
&= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I},\mathbf{S}|\mathbf{K})-t} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) (q^t + q^{t+1} + \dots + q^{s+t}) \\
&= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I},\mathbf{S}|\mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) [s+1]_q \\
&= [s+1]_q e_{\mathbf{S}|\mathbf{I}}(q).
\end{aligned}$$

Traisons maintenant l'équation (4.87). On a

$$\begin{aligned}
e_{\mathbf{S}|1\triangleright\mathbf{I}}(q) &= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|1\triangleright\mathbf{I},\mathbf{S}|1\triangleright\mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|1\triangleright\mathbf{K}}(q) \\
&= \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I},\mathbf{S}|\mathbf{K})} [t]_q c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q),
\end{aligned}$$

en utilisant les équations (4.91) et (4.93). Ce qui peut se réécrire :

$$e_{\mathbf{S}|1\triangleright\mathbf{I}}(q) = [r]_q e_{\mathbf{S}|\mathbf{I}}(q) + \sum_{\substack{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \neq \mathbf{I}}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I},\mathbf{S}|\mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) ([t]_q - [r]_q). \quad (4.94)$$

Montrons que la somme à droite de cette expression est égale à

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}} q^{\ell(\mathbf{I}_1)-1} e_{\mathbf{S}|\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2}(q) &= \sum_{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}} q^{\ell(\mathbf{I}_1)-1} \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_1} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-1-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2, \mathbf{S}|\mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q) \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \neq \mathbf{I}}} \sum_{\substack{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \preceq \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}} q^{\ell(\mathbf{I}_1)-1} \left(\frac{-1}{q}\right)^{r-1-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2, \mathbf{S}|\mathbf{K})} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}(q).
\end{aligned}$$

Plus précisément, montrons que pour tout  $\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}$  avec  $\mathbf{K} \neq \mathbf{I}$ , le coefficient de  $\mathbf{K}$  dans la somme ci-dessus est égal à celui de  $\mathbf{K}$  dans la somme à droite de (4.94). En divisant par  $(-1)^{r-t} c_{\mathbf{S}|\mathbf{K}}$ , cette égalité se réécrit

$$\sum_{\substack{\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \mathbf{I} \\ \mathbf{K} \preceq \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2}} q^{\ell(\mathbf{I}_1)-1} \left(\frac{1}{q}\right)^{r-1-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2, \mathbf{S}|\mathbf{K})} = \left(\frac{1}{q}\right)^{r-t} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K})} ([r]_q - [t]_q). \quad (4.95)$$

Considérons un tel  $\mathbf{K}$ , on peut écrire  $\mathbf{K} = \mathbf{I}'_1 \triangleright \mathbf{I}'_2 \triangleright \dots \triangleright \mathbf{I}'_k$  avec  $\mathbf{I}'_1 \cdot \mathbf{I}'_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{I}'_k = \mathbf{I}$ . On note  $r_1, r_2, \dots, r_k$  les longueurs de ces compositions segmentées. Pour  $0 < l < k$ , soit  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}'_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{I}'_l$  et  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}'_{l+1} \cdot \dots \cdot \mathbf{I}'_k$ . Avec ces notations, on a

$$q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}_1 \triangleright \mathbf{I}_2, \mathbf{S}|\mathbf{K})} = q^{\ell(\mathbf{I}_2) - k + l} q^{-st'(\mathbf{S}|\mathbf{I}, \mathbf{S}|\mathbf{K})}.$$

En effet, la valeur  $\ell(I_1)$  augmente  $\text{st}'(\mathbf{S}|I_1 \triangleright I_2, \mathbf{S}|\mathbf{K})$  du nombre de valeurs de  $\text{Des}(\mathbf{K}) \cup \text{Seg}(\mathbf{K})$  plus grande que  $\ell(I_1)$ . Avec les notations ci-dessus, ça augmente de  $\sum_{i=l+1}^k \ell(I'_i)$ , ce qui est égal à  $\ell(I_2) - k + l$ . Ainsi, le membre de gauche de (4.95) est égal à

$$\sum_{l=1}^{k-1} q^{\ell(I_1)-1+\ell(I_2)-k+l} \left(\frac{1}{q}\right)^{r-1-t} q^{-\text{st}'(\mathbf{S}|I, \mathbf{S}|\mathbf{K})} = \left(\frac{1}{q}\right)^{r-t} q^{-\text{st}'(\mathbf{S}|I, \mathbf{S}|\mathbf{K})} \sum_{l=1}^{k-1} q^{r-2-k+l}.$$

De plus, la somme  $\sum_{l=1}^{k-1} q^{r-2-k+l}$  est égale à  $[r]_q - [r-k-1]_q$ . En notant que  $\ell(\mathbf{K}) = r-k-1$ , l'égalité (4.95) est vérifiée, ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Démonstration du théorème 4.3.9.* En utilisant les propositions 4.3.10 et 3.3.4, on obtient que  $e_I(q)$  compte le nombre d'histoires de Laguerre marquées d'étiquetage donné. On utilise alors la théorème 3.2.4 qui termine la démonstration.  $\square$

**Corollaire 4.3.12.** Avec les notations du théorème 4.3.9, on a

$$\text{Prob}(x) = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\mathbf{K} \preceq \mathbf{I}} \left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(\mathbf{I})-\ell(\mathbf{K})} q^{-\text{st}'(\mathbf{I}, \mathbf{K})} c_{\mathbf{K}}(q), \quad (4.96)$$

où  $c_{\mathbf{K}}(q) = [s]_q^{k_1} [s-1]_q^{k_2} \dots [1]_q^{k_s}$  et où  $k_1, k_2, \dots, k_s$  sont les parts de  $\mathbf{K}$ .

**La matrice**  $M(R(q), L(q))$

On note  $\mathcal{F}_{\mathbf{J}}^{\mathbf{I}}(q)$  le coefficient de  $L_{\mathbf{I}}(q)$  dans  $R_{\mathbf{J}}(q)$  :

$$R_{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{I} \# n} \mathcal{F}_{\mathbf{J}}^{\mathbf{I}}(q) L_{\mathbf{I}}(q). \quad (4.97)$$

On représente ci-dessous la matrice de transition induite par ces coefficients pour  $n = 3$ .

$$\mathbf{RL}_3(q) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q+1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q^2+q+1 & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q+1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q+1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & q^2+q+1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q^3+2q^2+2q+1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

Nous avons la conjecture suivante :

**Conjecture 4.3.13.** Soit  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}$  deux compositions segmentées d'un même entier  $n$ . On a

$$\mathcal{F}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{J}}(q) = \sum_{\substack{\sigma \in B'_n \\ \text{GC}(\sigma) = \mathbf{I} \\ \text{Rec}(\sigma) = \mathbf{J}}} q^{\text{tw}(\sigma)}. \quad (4.99)$$





# Chapitre 5

## Nombres eulériens généralisés

Les *nombres eulériens*  $A(n, k)$  sont présents dans de nombreux problèmes combinatoires. Ils comptent le nombre de permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  ayant  $k$  descentes. Ces nombres définissent naturellement un  $t$ -analogue de  $n!$ , les *polynômes eulériens* :

$$A_n(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\text{des}(\sigma)}. \quad (5.1)$$

Ces polynômes ont été très étudiés au fil du temps et le lecteur pourra se référer à [FS70, Pet15] pour en avoir une vue d'ensemble.

En combinatoire algébrique, on considère ces polynômes comme des sommes formelles de permutations vivant dans l'algèbre des fonctions quasi-symétriques libres (**FQSym**). Dans ce cas, ces polynômes sont en fait des fonctions vivant dans l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives. On retrouve aisément de nombreuses propriétés des polynômes eulériens en étudiant ces analogues non-commutatifs, voir [NT12] par exemple.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini une algèbre indexée par les permutations segmentées (**SPQSym**). Nous avons montré que l'algèbre indexée par les compositions segmentées définie par Novelli et Thibon [NT07] peut être vue comme une sous-algèbre de **SPQSym** en utilisant une statistique de descente sur les permutations segmentées. Dans ce chapitre, nous utilisons cette notion de descente pour définir des *nombres eulériens généralisés*  $T(n, k)$  ainsi qu'un raffinement naturel de ces nombres ( $K(n, i, j)$ ) énumérant les permutations ayant  $i$  barres et  $j$  descentes. Ces nombres définissent des  $t$ -analogues et des  $(q, t)$ -analogues naturels de  $2^{n-1}n!$ , le nombre de permutations segmentées de longueur  $n$  :

$$P_n(t) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} t^{\text{des}(\sigma)}; \quad (5.2)$$

$$\alpha_n(t, q) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} t^{\text{des}(\sigma)} q^{\text{seg}(\sigma)}. \quad (5.3)$$

En plus de généraliser par définition les polynômes eulériens ainsi que d'avoir de nombreuses propriétés en commun avec ceux-ci, ces polynômes font également intervenir les *nombres*

de Bell ordonnés et les nombres de Stirling de seconde espèce. De plus,  $\alpha_n$  est égal aux polynômes eulériens usuels lorsque l'on pose  $q = 0$  et aux polynômes de Bell ordonnés pour  $t = 0$ .

Dans une seconde partie, nous définissons un analogue non-commutatif  $\mathcal{A}_n(t, q)$  des polynômes  $\alpha_n$  comme une somme formelle d'éléments de **SPQSym** :

$$\mathcal{A}(t, q) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} G_\sigma. \quad (5.4)$$

Nous utilisons ces analogues pour donner une forme explicite de la série génératrice des polynômes  $\alpha_n$ . Pour ce faire, on montre que ces polynômes vivent dans l'algèbre **SCQSym** puis nous calculons leur expression sur la base des fonctions complètes. Cet analogue nous permet également de démontrer que les polynômes eulériens généralisés vérifient d'autres propriétés similaires à celles vérifiées par les polynômes eulériens usuels. Par exemple, nous montrons que les polynômes  $P_n(t)$  vérifient la relation suivante :

$$\frac{P_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} (1+t)^{k-1} \frac{k^n}{2^{k+1}}. \quad (5.5)$$

Cette relation généralise la relation similaire vérifiée par les polynômes eulériens usuels et peut être vue comme un  $t$ -analogue d'une relation de type Dobiński dans le sens de [BPS03]. Nous obtenons également une généralisation des identités de Worpitzky exprimant les dérivées discrètes de la puissance  $n$ -ième d'un nombre en fonction des nombres  $K(n, i, j)$ .

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans une version courte [Num18b]. Dans la section 5.1, nous définissons les nombres eulériens généralisés ainsi que leur raffinement et les polynômes associés. Nous donnons également plusieurs propriétés vérifiées par ces nombres et polynômes. Nous définissons l'analogue non-commutatif des polynômes eulériens généralisés section 5.2 que nous utilisons pour apporter une démonstration de l'expression explicite de la série génératrice des polynômes eulériens généralisés.

## 5.1 Nombres eulériens généralisés

### 5.1.1 Triangle des nombres eulériens généralisés

#### Définitions et premières propriétés

On rappelle que les permutations segmentées, définies section 1.1.6, sont des permutations où les valeurs peuvent être séparées par une barre.

**Définition 5.1.1.** *Le nombre eulérien généralisé  $T(n, k)$  est égal au nombre de permutations segmentées de longueur  $n$  ayant  $k$  descentes. En d'autres termes,*

$$T(n, k) = \#\{\sigma \in \mathfrak{P}_n \mid \text{des}(\sigma) = k\}. \quad (5.6)$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1						0	1					
1	1						1	1					
2	3	1					2	1	1				
3	13	10	1				3	1	4	1			
4	75	91	25	1			4	1	11	11	1		
5	541	896	426	56	1		5	1	26	66	26	1	
6	4683	9829	6734	1674	119	1	6	1	57	302	302	57	1

FIGURE 5.1 – Triangle des nombres eulériens généralisés à gauche et des nombres eulériens usuels à droite.

Les premières valeurs du triangle correspondant aux nombres  $T(n, k)$  sont représentées figure 5.1 à côté du triangle des nombres eulériens usuels. Par exemple, les trois permutations segmentées de longueur 2 n’ayant pas de descentes sont 12, 1|2 et 2|1.

On observe que les nombres de la première colonne du triangle, les  $T(n, 0)$ , sont les nombres de Bell ordonnés, suite A000670 de [Slo]. Parmi de nombreuses choses, ils comptent le nombre de *partitions ensemblistes ordonnées* de taille  $n$  : les découpages de l’ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  en sous-ensembles distincts. Par exemple, les 3 partitions ensemblistes ordonnées de  $\{1, 2\}$  sont  $\{1, 2\}$  lui-même,  $(\{1\}, \{2\})$  et  $(\{2\}, \{1\})$ . On construit une bijection entre ces objets et les permutations segmentées sans descente en triant les valeurs dans chaque sous-ensemble et en concaténant les mots obtenus avec une barre entre eux.

On rappelle que la statistique  $\text{SDes}(\sigma)$ , définie au chapitre précédent sur les permutations segmentées, construit une composition segmentée dont la longueur est égale au nombre de descentes de  $\sigma$  plus son nombre de barres plus 1. Ainsi, il est également naturel de définir les nombres  $T'(n, k)$  comptant le nombre de permutations segmentées ayant au total  $k$  descentes ou segmentations :

$$T'(n, k) = \#\{\sigma \in \mathfrak{P}_n \mid \text{seg}(\sigma) + \text{des}(\sigma) = k\}. \quad (5.7)$$

On représente en figure 5.2 le triangle de ces nombres.

On observe alors que le triangle en figure 5.2 est obtenu à partir de celui des nombres  $T(n, k)$  en retournant les lignes. Cette propriété est formalisée dans la proposition suivante.

**Proposition 5.1.2.** *Soient  $k < n$  deux entiers positifs. On a*

$$T'(n, k) = T(n, n - k - 1). \quad (5.8)$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \mathfrak{P}_n$  ayant  $\text{seg}(\sigma) + \text{des}(\sigma) = m$  descentes et barres. Soit  $\tau$  l’image miroir de  $\sigma$ . Il y a exactement  $n - 1 - m$  descentes dans  $\tau$  qui correspondent aux positions qui ne sont ni des descentes ni des barres dans  $\sigma$ .  $\square$

Tout comme pour les nombres eulériens usuels, nous nous intéressons à décrire une récurrence vérifiée par ces nombres.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1					
2	1	3				
3	1	10	13			
4	1	25	91	75		
5	1	56	426	896	541	
6	1	119	1674	6734	9829	4683

FIGURE 5.2 – Triangle des nombres  $T'(n, k)$  comptant les permutations segmentées suivant leur nombre de descentes plus segmentations.

**Proposition 5.1.3.** *Soient  $n > 0$  et  $0 \leq k < n$ . On a*

$$T(n, k) = (n - k)T(n - 1, k - 1) + (n + 1)T(n - 1, k) + (k + 1)T(n - 1, k + 1); \quad (5.9)$$

$$T'(n, k) = (n - k)T'(n - 1, k - 2) + (n + 1)T'(n - 1, k - 1) + (k + 1)T'(n, k). \quad (5.10)$$

En utilisant la proposition 5.1.2, les deux formules sont équivalentes. Nous définissons dans la suite un raffinement de ces nombres et cette proposition deviendra un corollaire d'une formule de récurrence similaire des nombres généralisés, la formule (5.16).

### Un raffinement des nombres eulériens généralisés

Du fait de la relation entre les nombres  $T(n, k)$  et  $T'(n, k)$ , on définit les *nombre eulériens généralisés raffinés*  $K(n, i, j)$  comme les nombres comptant les permutations segmentées ayant  $i$  barres et  $j$  descentes :

$$K(n, i, j) = \#\{\sigma \in \mathfrak{P}_n \mid \text{seg}(\sigma) = i, \text{des}(\sigma) = j\}. \quad (5.11)$$

Ces nombres permettent donc d'interpoler entre les nombres  $T(n, k)$  et  $T'(n, k)$ . De plus, on a les relations suivantes :

$$T(n, k) = \sum_{i=0}^{n-1-k} K(n, i, k); \quad (5.12)$$

$$T'(n, k) = \sum_{i+j=k} K(n, i, k). \quad (5.13)$$

Afin de représenter les nombres  $K(n, i, j)$  graphiquement, nous avons besoin de considérer un tétraèdre de nombres. Nous donnons en figure 5.3 des tranches de ce tétraèdre où l'on représente les nombres  $K(n, i, j)$  à  $n$  fixé pour  $n$  entre 2 et 4 et pour  $n = 5$  et 6 en figure 5.4. Par exemple, les 6 permutations segmentées de taille 3 ayant une segmentation et une descente sont  $1|32$ ,  $2|31$ ,  $3|21$ ,  $21|3$ ,  $31|2$  et  $32|1$ .

On représente ces triangles avec le paramètre  $i$  pour les lignes et le paramètre  $j$  pour les colonnes. Puisque la première ligne correspond au nombre de permutations segmentées

$n = 2 :$	$i \setminus j$	0	1		$n = 3 :$	$i \setminus j$	0	1	2		$n = 4 :$	$i \setminus j$	0	1	2	3
	0	1	1			0	1	4	1			0	1	11	11	1
	1	2				1	6	6				1	14	44	14	
						2	6					2	36	36		
												3	24			

FIGURE 5.3 – Les nombres  $K(n, i, j)$  pour  $n$  allant de 2 à 4.

$n = 5 :$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4		$n = 6 :$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5
	0	1	26	66	26	1			0	1	57	302	302	57	1
	1	30	210	210	30				1	62	832	1812	832	62	
	2	150	420	150					2	540	3060	3060	540		
	3	240	240						3	1560	4080	1560			
	4	120							4	1800	1800				
									5	720					

FIGURE 5.4 – Les nombres  $K(n, i, j)$  pour  $n = 5$  et  $n = 6$ .

sans barres comptées suivant leur nombre de descentes, on retrouve les nombres eulériens usuels. Plus précisément, la première ligne du  $n$ -ième triangle des nombres  $K(n, i, j)$  est égale à la  $n$ -ième ligne du triangle des nombres eulériens.

Les équations (5.12) et (5.13) s’observent également sur ces triangles : le nombre  $T(n, k)$  est égal à la somme des coefficients dans la  $k$ -ième colonne du  $n$ -ième triangle des nombres  $K(n, i, j)$ . De même, le nombre  $T'(n, k)$  est égal à la somme des coefficients de la  $k$ -ième diagonale du  $n$ -ième triangle des nombres  $K(n, i, j)$ . La symétrie entre les nombres  $T(n, k)$  et  $T'(n, k)$  devient quant à elle une symétrie sur les nombres  $K(n, i, j)$  décrite par la proposition suivante.

**Proposition 5.1.4.** *Soient  $n > 0$  et  $0 \leq i + j < n$ , on a*

$$K(n, i, j) = K(n, i, n - 1 - i - j). \tag{5.14}$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  vérifiant  $\text{seg}(\sigma) = i$  et  $\text{des}(\sigma) = j$ . Alors la permutation segmentée  $\tau$  miroir de  $\sigma$  a également  $j$  segmentations et  $n - 1 - i - j$  descentes.  $\square$

Nous avons précisé précédemment que les nombres  $T(n, 0)$  sont les nombres de Bell ordonnés. En considérant les nombres sur la première colonne de chaque triangle des nombres  $K(n, i, j)$ , on retrouve un raffinement naturel de ces nombres, la suite A019538 de [Slo], décrite par la formule :

$$K(n, i, 0) = (i + 1)!S(n, i + 1), \tag{5.15}$$

où les  $S(n, k)$  sont les nombres de Stirling de seconde espèce, la suite A008277 de [Slo]. En particulier, les nombres  $K(n, i, 0)$  comptent ainsi le nombre de partitions ensemblistes ordonnées de l’ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  en exactement  $i$  parts.

**Remarque 5.1.5.** *En fait, pour tout  $n$  et  $i < n$ , la  $i$ -ème ligne du  $n$ -ième triangle peut être divisée par  $(i+1)!$ . En effet, permuter les blocs délimités par les barres d'une permutation segmentée ne change ni le nombre de descentes ni le nombre de barres. Nous n'étudierons cependant pas ces nombres dans ce mémoire.*

En observant ces suites de nombres expérimentalement, nous avons conjecturé que les lignes et les colonnes de ces triangles forment des suites unimodales. Ce résultat a été démontré par [ZZ18] en caractérisant les zéros réels des polynômes que nous définissons section 5.1.2. Nous avons aussi fait des conjectures d'unimodalité sur certaines diagonales de ces triangles et du triangle en figure 5.2 qui sont encore ouvertes aujourd'hui.

De la même façon que pour les nombres  $T(n, k)$  et  $T'(n, k)$ , nous donnons une description récursive des nombres  $K(n, i, j)$  par rapport à  $n$ . Nous donnons également une récurrence sur le nombre de barres dans les permutations segmentées.

**Proposition 5.1.6.** *Soient  $n > 0$  et  $0 \leq i + j < n$ . On a*

$$\begin{aligned} K(n, i, j) = (i + j + 1) & \left[ K(n - 1, i, j) + K(n - 1, i - 1, j) \right] \\ & + (n - i - j) \left[ K(n - 1, i, j - 1) + K(n - 1, i - 1, j - 1) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pour tout  $j > 0$ , on a

$$iK(n, i, j) = (n - i - j)K(n, i - 1, j) + (j + 1)K(n, i - 1, j + 1). \quad (5.17)$$

*Démonstration.* Pour tous  $n, i, j$ , soit  $\mathcal{K}(n, i, j)$  l'ensemble des permutations segmentées de taille  $n$  ayant  $i$  barres et  $j$  descentes.

On montre qu'on peut obtenir  $\mathcal{K}(n, i, j)$  à partir de  $\mathcal{K}(n - 1, i, j)$ ,  $\mathcal{K}(n - 1, i, j - 1)$ ,  $\mathcal{K}(n - 1, i - 1, j)$  et  $\mathcal{K}(n - 1, i - 1, j - 1)$  en ajoutant  $n$  dans les permutations segmentées de ces ensembles à différentes positions.

- Pour tout  $\sigma \in \mathcal{K}(n - 1, i, j)$ . Si on ajoute  $n$  au milieu d'une descente ou en fin de bloc, chaque permutation segmentée de  $\mathcal{K}(n - 1, i, j)$  est utilisée  $i + j + 1$  fois et on obtient exactement toutes les permutations segmentées de  $\mathcal{K}(n, i, j)$  telles que  $n$  soit placé à la fin d'un bloc sans barre à sa gauche ou si  $n$  n'a pas de barre autour de lui et qu'il a deux voisins en ordre décroissant.
- Pour tout  $\sigma \in \mathcal{K}(n - 1, i - 1, j)$ . Si on ajoute  $n$  au milieu d'une descente avec une barre à sa gauche ou en début de bloc avec une barre à sa droite ou à la fin de  $\sigma$  avec une barre à sa gauche, chaque permutation segmentée est utilisée  $i + j + 1$  fois. De plus, on obtient exactement toutes les permutations de  $\mathcal{K}(n, i, j)$  ayant  $n$  seul dans son bloc ou ayant  $n$  avec une barre uniquement à sa gauche et ses deux voisins en ordre décroissant.
- Pour tout  $\sigma \in \mathcal{K}(n - 1, i, j - 1)$ . Si on ajoute  $n$  au début ou entre deux valeurs qui ne forment pas une descente et qui ne sont pas séparées par une barre, chaque permutation segmentée est utilisée  $(n - i - j)$  fois et on obtient exactement toutes les permutations de  $\mathcal{K}(n, i, j)$  ayant  $n$  en première position et non suivi d'une barre ou  $n$  n'ayant pas de barre autour de lui et deux voisins en ordre croissant.

- Pour tout  $\sigma \in \mathcal{K}(n - 1, i - 1, j - 1)$ . Si on ajoute  $n$  entre deux valeurs non séparées par une barre et ne formant pas une descente en rajoutant une barre à sa gauche, chaque permutation segmentée est utilisée  $(n - i - j)$  fois et on obtient toutes les permutations de  $\mathcal{K}(n, i, j)$  telles que  $n$  a une barre uniquement à sa gauche et que ses voisins sont en ordre croissant.

On peut vérifier qu'on obtient ainsi toutes les permutations segmentées de  $\mathcal{K}(n, i, j)$  une fois et une seule.

Pour la deuxième partie, on part des permutations segmentées de taille  $n$  avec  $i - 1$  barres et on regarde toutes les possibilités d'ajouter une barre pour obtenir une permutation segmentée de  $\mathcal{K}(n, i, j)$ . Soit on part d'une permutation segmentée de  $\mathcal{K}(n, i - 1, j)$  et on ajoute une barre entre deux valeurs ne formant pas une descente (il y a  $n - i - j$  choix), soit on part de  $\mathcal{K}(n, i - 1, j + 1)$  et on ajoute une barre entre deux valeurs formant une descente (il y a  $j + 1$  choix). Chaque permutation segmentée de  $\mathcal{K}(n, i, j)$  est obtenue  $i$  fois : une fois par barre.  $\square$

Nous illustrons la récurrence (5.16) en figure 5.5. Nous y représentons quatre tableaux découpant l'ensemble des 44 permutations segmentées de taille 4 ayant une barre et une descente pour les faire correspondre à des permutations segmentées de taille 3 ayant zéro ou une barre et zéro ou une descente. Comme dans la démonstration précédente,  $\mathcal{K}(n, i, j)$  est l'ensemble des permutations segmentées de taille  $n$  ayant  $i$  barres et  $j$  descentes.

$\mathcal{K}(3, 0, 0)$	$\mathcal{K}(4, 1, 1)$
123	1 423, 12 43

$\mathcal{K}(3, 1, 0)$	$\mathcal{K}(4, 1, 1)$
12 3	412 3, 142 3
1 23	41 23, 1 243
13 2	413 2, 143 2
2 13	42 13, 2 143
23 1	423 1, 243 1
3 12	43 12, 3 142

$\mathcal{K}(3, 1, 0)$	$\mathcal{K}(4, 1, 1)$
1 32	14 32, 1 342, 1 324
21 3	241 3, 214 3, 21 34
2 31	24 31, 2 341, 2 314
31 2	341 2, 314 2, 31 24
32 1	342 1, 324 1, 32 14
3 21	34 21, 3 241, 3 214

$\mathcal{K}(3, 0, 1)$	$\mathcal{K}(4, 1, 1)$
132	4 132, 13 42, 132 4
213	4 213, 2 413, 213 4
231	4 231, 23 41, 231 4
312	4 312, 3 412, 312 4

FIGURE 5.5 – Illustration bijective de la récurrence (5.16) pour le coefficient  $K(4, 1, 1)$ .

Comme mentionné précédemment, on utilise la récurrence (5.16) pour démontrer la proposition 5.1.3.

*Démonstration de la proposition 5.1.3.* Pour démontrer cette proposition, on démontre que l'équation (5.10) de récurrence des nombres  $T'(n, k)$  s'obtient à partir de (5.16). En effet, on a

$$T'(n, k) = \sum_{i+j=k} K(n, i, j).$$



Ainsi la récurrence des nombres  $K(n, i, j)$  nous donne

$$T'(n, k) = \sum_{i+j=k} (k+1) \left[ K(n-1, i, j) + K(n-1, i-1, j) \right] \\ + (n-k) \left[ K(n-1, i, j-1) + K(n-1, i-1, j-1) \right].$$

Or,

$$\sum_{i+j=k} K(n-1, i-1, j) = \sum_{i+j=k} K(n-1, i, j-1) = T'(n-1, k-1)$$

et

$$\sum_{i+j=k} K(n-1, i-1, j-1) = T'(n-1, k-2).$$

Ainsi on a bien

$$T'(n, k) = (k+1)T'(n-1, k) + (n+1)T'(n-1, k-1) + (n-k)T'(n, k-2).$$

□

Il existe également une expression des nombres  $K(n, i, j)$  en fonction des nombres eulériens usuels.

**Proposition 5.1.7.** Soient  $n > 0$  et  $0 \leq i + j < n$ .

$$K(n, i, j) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{j} \binom{n-1-k}{i+j-k} A(n, k). \quad (5.18)$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  une permutation de longueur  $n$  ayant  $k$  descentes. Comptons le nombre de permutations segmentées  $\sigma$  ayant  $i$  barres et  $j$  descentes que l'on peut obtenir à partir de  $\sigma$  en rajoutant des barres. Tout d'abord, il faut choisir  $j$  descentes de  $\sigma$  qui resteront des descentes de  $\sigma$  et placer des barres au milieu des autres descentes. On a alors ajouté  $k-j$  barres à  $\sigma$ , il faut donc encore en choisir  $i-k+j$  parmi les  $n-1-k$  positions restantes. On retrouve ainsi le résultat annoncé. □

Noter qu'il est également possible de démontrer ce résultat en utilisant un raisonnement par récurrence avec (5.17).

### 5.1.2 Polynômes eulériens généralisés

Dans le cadre des nombres eulériens usuels, les polynômes eulériens  $A_n(t)$  permettent d'autres approches pour étudier la combinatoire des nombres eulériens. Rappelons que  $A_n(t)$  est défini comme suit :

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A(n, k)t^k. \quad (5.19)$$

On rappelle également la définition des polynômes de Bell ordonnés dont nous aurons besoin par la suite :

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} S(n, k+1)(k+1)!t^k, \quad (5.20)$$

où les nombres  $S(n, k)$  sont encore une fois les nombres de Stirling de seconde espèce.

Nous définissons alors les polynômes  $P_n(t)$  et  $Q_n(t)$  associés aux nombres  $T(n, k)$  et  $T'(n, k)$  :

$$P_n(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} t^{\text{des}(\sigma)}; \quad (5.21)$$

$$Q_n(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} t^{\text{des}(\sigma) + \text{seg}(\sigma)}. \quad (5.22)$$

La proposition 5.1.2 implique la relation suivante entre ces polynômes :

$$P_n(t) = t^{n-1} Q_n\left(\frac{1}{t}\right). \quad (5.23)$$

Encore une fois, il est naturel de raffiner ces polynômes. Nous définissons donc les polynômes  $\alpha_n(t, q)$  :

$$\alpha_n(t, q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} t^{\text{des}(\sigma)} q^{\text{seg}(\sigma)}. \quad (5.24)$$

En évaluant les polynômes  $\alpha_n(t, q)$  en différentes valeurs on retrouve des polynômes ou des suites de nombres connus.

**Proposition 5.1.8.** *Soit  $n \geq 0$ . On a les évaluations suivantes pour  $\alpha_n(t, q)$  :*

1.  $\alpha_n(t, 0) = A_n(t)$ ,
2.  $\alpha_n(0, q) = B_n(q)$ ,
3.  $\alpha_n(t, 1) = P_n(t)$ ,
4.  $\alpha_n(t, t) = Q_n(t)$ ,
5.  $\alpha_n(t, q) = t^{n-1} \alpha_n\left(\frac{1}{t}, \frac{q}{t}\right)$ ,
6.  $\alpha_n(-1, 1) = 2^{n-1}$ .
7. *Pour tout  $m \geq 1$ , les nombres  $\alpha_n(2, m)$  comptent le nombre d'arbres planaires enracinés linéairement étiquetés de niveau  $m+2$  à  $n$  feuilles.*

Pour  $m = 1$ , les arbres du dernier point de la proposition sont également appelés les *listes de listes d'ensembles* et en général il s'agit de  $m+1$  listes imbriquées d'ensembles. Pour  $m = 2$  et  $m = 3$ , ils correspondent aux suites [A050351](#) et [A050352](#) de [Slo]. Par exemple, il y a 5 listes de listes d'ensembles pour  $n = 2$  qui sont :

$$\left\{ \left[ \left[ \{1, 2\} \right] \right], \left[ \left[ \{1\}, \{2\} \right] \right], \left[ \left[ \{2\}, \{1\} \right] \right], \left[ \left[ \{1\} \right], \left[ \{2\} \right] \right], \left[ \left[ \{2\} \right], \left[ \{1\} \right] \right] \right\}. \quad (5.25)$$

*Démonstration.* Les points (3) et (4) découlent directement des définitions de  $\alpha_n(t)$ ,  $P_n(t)$  et  $Q_n(t)$ . Le point (1) vient du fait que les permutations segmentées sans barres correspondent aux permutations usuelles et le point (2) est démontré en utilisant (5.15).

Pour le point (6), commençons par définir une relation d'équivalence  $\sim$  sur les permutations segmentées. On dit que  $\sigma$  et  $\tau$  sont équivalentes si les permutations obtenues en retirant les barres au milieu des descentes sont les mêmes. Par exemple, on a  $3|7|5|16|24 \sim 3|75|16|24$  mais  $3|7516|24 \approx 37516|24$ . Notons  $\mathcal{C}(\sigma)$  l'ensemble des permutations segmentées qui sont équivalentes à  $\sigma$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{P}_n$  et  $i$  le nombre de descentes de la permutation obtenue en retirant les barres de  $\sigma$ . Il y a alors  $2^i$  permutations segmentées dans  $\mathcal{C}(\sigma)$ . De plus, soit  $0 \leq k \leq i$ . Il y a exactement  $\binom{i}{k}$  permutations dans la classe de  $\sigma$  ayant  $k$  barres entre des valeurs décroissantes. Ainsi,

$$\sum_{\tau \in \mathcal{C}(\sigma)} (-1)^{\text{des}(\tau)} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k.$$

Or cette somme est nulle dès lors que  $i \neq 0$ . Les seules permutations segmentées seules dans leur classes sont donc celles obtenues en plaçant des barres dans la permutation  $123 \dots n$ . Il y en a bien  $2^{n-1}$ .

Une autre preuve de ce point peut être obtenue en évaluant la fonction génératrice de  $\alpha_n$  donnée dans le Théorème 5.1.11 en  $t = -1$  et  $q = 1$ .

Pour les nombres  $\alpha_n(2, m)$ , la série génératrice de ces arbres de niveau  $r$  est donnée par [Slo] :

$$\frac{r-1-(r-2)e^x}{r-(r-1)e^x},$$

ce qu'on retrouve à partir de l'expression de la série génératrice des  $\alpha_n$  donnée en (5.29) évaluée en  $t = 2$  et  $q = r - 2$ .  $\square$

Considérons la série génératrice exponentielle des polynômes  $\alpha_n$  définie par :

$$G(t, q, x) := \sum_{n \geq 0} \alpha_n(t, q) \frac{x^n}{n!}. \quad (5.26)$$

Dans le but de trouver une équation vérifiée par cette série, nous commençons par décrire une récurrence vérifiée par les polynômes  $\alpha_n$  eux-mêmes. Pour cela, on utilise la récurrence des coefficients  $K(n, i, j)$  décrite à l'équation (5.16).

**Proposition 5.1.9.** *Pour tout  $n \geq 2$ , on a*

$$\begin{aligned} \alpha_n(t, q) = & \left( (n-2)tq + (n-1)t + 2q + 1 \right) \alpha_{n-1}(t, q) \\ & + (t-t^2)(q+1) \frac{\partial}{\partial t} \alpha_{n-1}(t, q) \\ & + (1-t)(q^2+q) \frac{\partial}{\partial q} \alpha_{n-1}(t, q). \end{aligned} \quad (5.27)$$

*Démonstration.* On a

$$\alpha_n(t, q) = \sum_{i+j=0}^{i+j=n-1} K(n, i, j)t^j q^i.$$

On utilise la récurrence (5.16). Chacun des termes de la récurrence se décrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=0}^{n-1} (i+j+1)K(n-1, i, j)t^j q^i &= \sum_{i+j=0}^{n-2} (i+j+1)K(n-1, i, j)t^j q^i ; \\ \sum_{i+j=0}^{n-1} (i+j+1)K(n-1, i-1, j)t^j q^i &= q \sum_{i+j=0}^{n-2} (i+j+2)K(n-1, i, j)t^j q^i ; \\ \sum_{i+j=0}^{n-1} (n-i-j)K(n-1, i, j-1)t^j q^i &= t \sum_{i+j=0}^{n-2} (n-1-i-j)K(n-1, i, j)t^j q^i ; \\ \sum_{i+j=0}^{n-1} (n-i-j)K(n-1, i-1, j-1)t^j q^i &= tq \sum_{i+j=0}^{n-2} (n-2-i-j)K(n-1, i, j)t^j q^i. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_n(t, q) &= \left( (n-2)tq + (n-1)t + 2q + 1 \right) \sum_{i+j=0}^{n-2} K(n-1, i, j)t^j q^i \\ &\quad + (1+q-t-tq) \sum_{i+j=0}^{n-2} jK(n-1, i, j)t^j q^i \\ &\quad + (1+q-t-tq) \sum_{i+j=0}^{n-2} iK(n-1, i, j)t^j q^i. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=0}^{n-2} jK(n-1, i, j)t^j q^i &= t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i+j=0}^{n-2} K(n-1, i, j)t^j q^i ; \\ \sum_{i+j=0}^{n-2} iK(n-1, i, j)t^j q^i &= q \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i+j=0}^{n-2} K(n-1, i, j)t^j q^i ; \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

En utilisant la récurrence précédente vérifiée par les polynômes  $\alpha_n$ , on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par la série  $G$ .

**Proposition 5.1.10.** *La série génératrice  $G$  est solution de l'équation différentielle*

$$(tq - 2q - 1)G(t, q, x) + (1 - tqx - tx) \frac{\partial}{\partial x} G(t, q, x) - (t - t^2)(q + 1) \frac{\partial}{\partial t} G(t, q, x) - (1 - t)(q^2 + q) \frac{\partial}{\partial q} G(t, q, x) = -2q + tq. \quad (5.28)$$

*Démonstration.* On a

$$G(t, q, x) = 1 + x + \sum_{n \geq 2} \alpha_n(t, q) \frac{x^n}{n!}.$$

Si on dérive cette équation, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} G(t, q, x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_{n+1}(t, q) \frac{x^n}{n!}.$$

On utilise alors la récurrence donnée par (5.27) de sorte que les deux derniers termes se réécrivent simplement :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} (t - t^2)(q + 1) \frac{\partial}{\partial t} \alpha_n(t, q) \frac{x^n}{n!} &= (t - t^2)(q + 1) \frac{\partial}{\partial t} G(t, q, x) ; \\ \sum_{n \geq 1} (1 - t)(q^2 + q) \frac{\partial}{\partial q} \alpha_n(t, q) \frac{x^n}{n!} &= (1 - t)(q^2 + q) \frac{\partial}{\partial q} G(t, q, x). \end{aligned}$$

Pour le premier terme, il faut séparer les termes dépendant de  $n$  des autres. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} ((n - 1)tq + nt + 2q + 1) \alpha_n(t, q) \frac{x^n}{n!} &= x \sum_{n \geq 1} (tq + t) \alpha_n(t, q) \frac{x^{n-1}}{(n - 1)!} \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} (-tq + 2q + 1) \alpha_n(t, q) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est

$$x(tq + t) \frac{\partial}{\partial x} G(t, q, x),$$

et le second

$$(-tq + 2q + 1)G(t, q, x) + tq - 2q - 1.$$

En regroupant les différents termes de la somme, on obtient (5.28).  $\square$

Nous nous intéressons maintenant à donner une expression explicite de la série  $G$ . Cette forme nous permet d'obtenir plus simplement des liens entre certaines spécialisations des polynômes  $\alpha_n$  et différentes classes combinatoires.

**Théorème 5.1.11.** *La fonction génératrice  $G$  s'écrit*

$$G(t, q, x) = 1 + \frac{e^{x(1-t)} - 1}{1 + q - (t + q)e^{x(1-t)}}. \quad (5.29)$$

*Démonstration.* Il y a plusieurs preuves possibles de ce résultat. La première consiste à vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle (5.28).

Une autre preuve est obtenue en utilisant la série génératrice  $F(t, x)$  des polynômes eulériens usuels :

$$F(t, x) = \sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{x^n}{n!}.$$

On utilise pour ça la description du produit des séries génératrices exponentielles : soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de nombres, alors

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{m \geq 0} b_m \frac{x^m}{m!} \right) = \sum_{k \geq 0} c_k \frac{x^k}{k!},$$

où  $c_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_i b_{k-i}$ . Étant donné que les permutations segmentées de longueur  $k$  ayant une barre peuvent être vues comme les couples de permutations  $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_{k-i}$  avec  $0 < i < k$  et le choix de  $i$  valeurs parmi  $k$  à attribuer à  $\sigma$ , on a

$$(F(t, x) - 1)^2 = \sum_{k \geq 1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_k^{(1)}} t^{\text{des}(\sigma)} \frac{x^k}{k!}.$$

où  $\mathfrak{P}_k^{(r)}$  correspond aux permutations segmentées de tailles  $k$  ayant exactement  $r$  barres. De façon plus générale,

$$(F(t, x) - 1)^r = \sum_{n \geq 1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_k^{(r)}} t^{\text{des}(\sigma)} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi on a

$$G(t, q, x) = 1 + \frac{F(t, x) - 1}{2 - F(t, x)}.$$

En utilisant l'expression de  $F$  suivante

$$F(t, x) = \frac{(1-t)e^{x(1-t)}}{1 - te^{x(1-t)}},$$

on obtient l'équation (5.29).

Enfin, une troisième approche pour démontrer ce théorème est de s'intéresser à la série génératrice d'un analogue non-commutatif de ces polynômes eulériens généralisés d'un point de vue algébrique et d'en déduire cette expression. Cette idée sera développée dans la prochaine section.  $\square$

À partir du théorème 5.1.11, on peut obtenir une expression des séries génératrices des polynômes  $P_n(t)$  et  $Q_n(t)$ .

**Corollaire 5.1.12.** *La série génératrice des polynômes  $P_n(t)$  s'écrit*

$$G(t, 1, x) = 1 + \frac{e^{x(1-t)} - 1}{2 - (1+t)e^{x(1-t)}}. \quad (5.30)$$

*La série génératrice des polynômes  $Q_n(t)$  s'écrit*

$$G(t, t, x) = 1 + \frac{e^{x(1-t)} - 1}{1 + t - 2te^{x(1-t)}}. \quad (5.31)$$

*Démonstration.* Ces expressions sont obtenues en évaluant (5.29) à  $t = 1$  et  $q = t$  respectivement.  $\square$

## 5.2 Analogie non-commutatif

Les résultats de cette section sont inspirés par une approche similaire pour les polynômes eulériens présentée dans [GKL<sup>+</sup>95].

### 5.2.1 Définition et série génératrice

Soient  $n > 0$  et  $\sigma \in \mathfrak{P}_n$ . Considérons l'application  $\varphi$  défini par

$$\varphi(G_\sigma) = \begin{cases} \frac{x^n}{2^{n-1}n!} & \text{si } n > 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

**Proposition 5.2.1.** *l'application  $\varphi$  est un morphisme d'algèbre entre SPQSym et l'algèbre des polynômes.*

*Démonstration.* Soient  $\sigma \in \mathfrak{P}_n$  et  $\tau \in \mathfrak{P}_m$ . Pour montrer que  $\varphi$  est un morphisme d'algèbre, il suffit de montrer que

$$\varphi(G_\sigma G_\tau) = \varphi(G_\sigma)\varphi(G_\tau).$$

Le produit  $\Psi$  revient à choisir  $n$  positions parmi  $n+m$  pour savoir où placer les valeurs de  $\sigma$  puis à choisir le signe de  $n+1$ . Ainsi, il y a exactement  $2\binom{n+m}{n}$  permutations segmentées dans  $\sigma\bar{\tau}$  et donc

$$\begin{aligned} \varphi(G_\sigma G_\tau) &= 2\binom{n+m}{n} \frac{x^{n+m}}{2^{n+m-1}(n+m)!} \\ &= \frac{x^n}{2^{n-1}n!} \frac{x^m}{2^{m-1}m!}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\varphi$  est bien un morphisme d'algèbre.  $\square$

Soient  $t$  et  $q$  des indéterminées qui commutent avec la base  $G_\sigma$  de **SPQSym**. Le  $n$ -ième polynôme eulérien généralisé non-commutatif est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_n(t, q) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{P}_n} t^{\text{des}(\sigma)+1} q^{\text{seg}(\sigma)} G_\sigma. \quad (5.33)$$

Notons qu'en appliquant  $\varphi$  on retrouve les polynômes eulériens généralisés :

$$\varphi(\mathcal{A}_n(t, q)) = t\alpha_n(t, q) \frac{x^n}{2^{n-1}n!}. \quad (5.34)$$

Les polynômes  $\mathcal{A}_n$  définissent donc un analogue naturel des polynômes  $t\alpha(t, q)$  vus comme des sommes formelles de permutations. Afin d'obtenir des propriétés vérifiées par les polynômes  $\alpha_n$ , nous cherchons maintenant à exprimer les  $\mathcal{A}_n$  sur une autre base de sorte que le calcul de  $\varphi(\mathcal{A}_n(t, q))$  soit plus simple à réaliser.

Commençons par remarquer que les polynômes  $\mathcal{A}$  sont en fait des éléments de **SCQSym**. En effet, en regroupant les permutations par composition segmentée des descentes dans (5.33) et en utilisant (4.21), on peut exprimer le polynôme  $\mathcal{A}_n$  sur la base des rubans de **SCQSym** :

$$\mathcal{A}_n(t, q) = \sum_{\mathbf{I} \models n} t^{\text{des}(\mathbf{I})} q^{\text{seg}(\mathbf{I})} R_{\mathbf{I}}. \quad (5.35)$$

On rappelle que  $\text{seg}(\mathbf{I})$  compte le nombre de barres de  $\mathbf{I}$  et que  $\text{des}(\mathbf{I})$  compte le nombre de valeurs de  $\mathbf{I}$  qui ne sont pas suivies par une barre.

Afin d'utiliser la multiplicativité de la base complète  $S^{\mathbf{I}}$ , on calcule l'expression de  $\mathcal{A}_n$  sur cette base. On rappelle l'expression du changement de base entre la base des rubans et la bases des fonctions complètes :

$$R_{\mathbf{I}} = \sum_{\mathbf{J} \leq \mathbf{I}} (-1)^{\text{des}(\mathbf{I}) - \text{des}(\mathbf{J})} S^{\mathbf{J}}, \quad (5.36)$$

où la relation d'ordre  $\geq$  est définie en section 1.1.7. On a alors la description suivante.

**Proposition 5.2.2.** *Soit  $n \geq 0$ .*

$$\mathcal{A}_n(t, q) = \sum_{\mathbf{I} \models n} t^{\text{des}(\mathbf{I})} (1-t)^{n-\ell(\mathbf{I})} (q-t)^{\text{seg}(\mathbf{I})} S^{\mathbf{I}}. \quad (5.37)$$

*Démonstration.* Dans (5.33), on exprime la base des rubans sur la base complète en utilisant (1.80), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(t, q) &= \sum_{\mathbf{I} \models n} \sum_{\mathbf{I} \geq \mathbf{K}} t^{\text{des}(\mathbf{K})} q^{\text{seg}(\mathbf{K})} (-t)^{\text{des}(\mathbf{I}) - \text{des}(\mathbf{K})} q^{\text{seg}(\mathbf{I}) - \text{seg}(\mathbf{K})} S^{\mathbf{K}} \\ &= \sum_{\mathbf{K} \models n} t^{\text{des}(\mathbf{K})} q^{\text{seg}(\mathbf{K})} \left[ \sum_{\mathbf{I} \geq \mathbf{K}} (-t)^{\text{des}(\mathbf{I}) - \text{des}(\mathbf{K})} q^{\text{des}(\mathbf{I}) - \text{des}(\mathbf{K})} \right] S^{\mathbf{K}} \\ &= \sum_{\mathbf{K} \models n} t^{\text{des}(\mathbf{K})} q^{\text{seg}(\mathbf{K})} \left[ \sum_{u=0}^{n-\ell(\mathbf{K})} \sum_{v=0}^{\text{seg}(\mathbf{K})} \sum_{\substack{\mathbf{I} \geq \mathbf{K} \\ \ell(\mathbf{I}) = \ell(\mathbf{K}) + u \\ \text{seg}(\mathbf{I}) = \text{seg}(\mathbf{K}) - v}} (-t)^{u+v} q^{-v} \right] S^{\mathbf{K}}. \end{aligned}$$



Pour compter le nombre de compositions segmentées dans la dernière somme, on commence par choisir  $v$  valeurs dans  $\text{Seg}(\mathbf{K})$  que l'on ajoute à l'ensemble des descentes de  $\mathbf{I}$ . Cette action retire  $v$  barres à  $\mathbf{K}$  mais ne change pas la taille de  $\mathbf{I}$ . Pour obtenir une composition segmentée de longueur  $\ell(\mathbf{K}) + u$ , on choisit  $u$  valeurs non présentes dans  $\text{Des}(\mathbf{K})$  ni dans  $\text{Seg}(\mathbf{K})$  qu'on ajoute à  $\text{Des}(\mathbf{I})$ . L'équation précédente se réécrit donc :

$$\mathcal{A}(t, q) = \sum_{\mathbf{K} \models n} t^{\text{des}(\mathbf{K})} q^{\text{seg}(\mathbf{K})} \left[ \sum_{u=0}^{n-\ell(\mathbf{K})} \sum_{v=0}^{\text{seg}(\mathbf{K})} \binom{n-\ell(\mathbf{K})}{u} (-t)^u \binom{\text{seg}(\mathbf{K})}{v} \left(\frac{-t}{q}\right)^v \right] S^{\mathbf{K}}.$$

On conclut en reconnaissant le développement de  $(1-t)^{n-\ell(\mathbf{K})} (1-\frac{t}{q})^{\text{seg}(\mathbf{K})}$ .  $\square$

En utilisant l'expression de l'équation (5.37), on a

$$\mathcal{A}_n(t, q) = (1-t)^n \sum_{\mathbf{I} \models n} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\text{des}(\mathbf{I})} \left(\frac{q-t}{1-t}\right)^{\text{seg}(\mathbf{I})} S^{\mathbf{I}}. \quad (5.38)$$

Afin de simplifier les calculs, on se débarrasse du facteur  $(1-t)^n$  et on définit  $\mathcal{A}_n^*$  :

$$\mathcal{A}_n^*(t, q) := (1-t)^{-n} \mathcal{A}_n(t, q). \quad (5.39)$$

Ainsi, la série génératrice de ces polynômes est donnée par

$$\mathcal{G}^*(t, q) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{A}_n^*(t, q) = \sum_{\mathbf{I}} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\text{des}(\mathbf{I})} \left(\frac{q-t}{1-t}\right)^{\text{seg}(\mathbf{I})} S^{\mathbf{I}}. \quad (5.40)$$

Avant d'appliquer  $\varphi$  à cette égalité, définissons les séries de fonctions complètes suivantes.

$$\Pi_{i,j} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\mathbf{I} \models n \\ \text{seg}(\mathbf{I})=i \\ \text{des}(\mathbf{I})=j}} S^{\mathbf{I}}. \quad (5.41)$$

L'image de  $\Pi_{u,1}$  par  $\varphi$  est décrite dans le lemme suivant.

**Lemme 5.2.3.** *Soit  $u \geq 0$ .*

$$\phi(\Pi_{u,1}) = 2(e^{x/2} - 1)^{u+1}. \quad (5.42)$$

Nous calculons également l'image des  $\Pi_{i,j}$  pour tous  $(i, j)$  dans le lemme 5.2.7.

*Démonstration.* Les compositions segmentées  $\mathbf{I}$  d'un entier  $n$  vérifiant  $\text{seg}(\mathbf{I}) = u$  et  $\text{des}(\mathbf{I}) = 1$  sont les compositions segmentées de longueur  $u + 1$  ayant des barres entre toutes les valeurs. En particulier, ces compositions segmentées sont minimales pour  $\geq$  et donc  $S^{\mathbf{I}} = R^{\mathbf{I}}$ . Ainsi, en exprimant les  $\Pi_{u,1}$  sur la base  $G$  de **SCQSym**, on a

$$\Pi_{u,1} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{P}_n \\ \text{des}(\sigma)=0 \\ \text{seg}(\sigma)=u}} G_{\sigma}. \quad (5.43)$$

En appliquant  $\varphi$  puis (5.15), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(\Pi_{u,1}) &= \sum_{n \geq u+1} K(n, u, 0) \frac{x^n}{2^{n-1}n!} \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} S(n, u+1)(u+1)! \frac{(x/2)^n}{n!}\end{aligned}$$

où les  $S(n, u)$  sont les nombres de Stirling de seconde espèce. En utilisant le fait que  $\sum_{n \geq 1} S(n, u) u! \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^u$ , la propriété est vérifiée.  $\square$

Nous pouvons maintenant retrouver l'expression de la série génératrice des polynômes  $\alpha_n$  décrite dans le théorème 5.1.11. Ce résultat découle directement du lemme suivant.

**Lemme 5.2.4.** *On a*

$$\varphi(\mathcal{G}^*(t, q)) = \frac{(1-t) - (q-t)(e^{x/2} - 1)}{(1-t) - (q+t)(e^{x/2} - 1)}. \quad (5.44)$$

*Démonstration.* En utilisant (5.40), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^*(t, q) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{I} \Vdash n} \left( \frac{t}{1-t} \right)^{\text{des}(\mathbf{I})} \left( \frac{q-t}{1-t} \right)^{\text{seg}(\mathbf{I})} S^{\mathbf{I}} \\ &= \sum_{v \geq 0} \left( \frac{t}{1-t} \right)^v \sum_{\text{des}(\mathbf{I})=v} \left( \frac{q-t}{1-t} \right)^{\text{seg}(\mathbf{I})} S^{\mathbf{I}}.\end{aligned}$$

De plus, comme la base  $S$  est multiplicative, la série sur toutes les compositions segmentées ayant  $v$  descentes est égale à la puissance  $u$ -ième de la somme des  $\Pi_{u,1}$ . En particulier, l'équation précédente se réécrit :

$$\varphi(\mathcal{G}^*(t, q)) = \sum_{v \geq 0} \left( \frac{t}{1-t} \right)^v \left[ \sum_{u \geq 0} \left( \frac{q-t}{1-t} \right)^u \Pi_{u,1} \right]^v.$$

En appliquant  $\varphi$  et en utilisant le Lemme 5.2.3, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{G}^*(t, q)) &= \sum_{v \geq 0} \left( \frac{2t(e^{x/2} - 1)}{1-t} \right)^v \left[ \sum_{u \geq 0} \left( \frac{q-t}{1-t} \right)^u (e^{x/2} - 1)^u \right]^v \\ &= \sum_{v \geq 0} \left( \frac{2t(e^{x/2} - 1)}{1-t} \right)^v \left( \frac{1-t}{1-t - (q-t)(e^{x/2} - 1)} \right)^v \\ &= \frac{1-t - (q-t)(e^{x/2} - 1)}{(1-t) - (q-t)(e^{x/2} - 1) - 2t(e^{x/2} - 1)}.\end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation (5.44).  $\square$

À partir de là, il est possible de retrouver le résultat du théorème 5.1.11. En effet, on peut réécrire le lemme 5.2.4 en

$$1 + \sum_{n \geq 0} \frac{t\alpha_n(t, q)}{(1-t)^n} \frac{x^n}{2^{n-1}n!} = 1 + \frac{2t(e^{x/2} - 1)}{1 + q - (q+t)e^{x/2}}, \quad (5.45)$$

ce qui se réécrit

$$1 + \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n(t, q)}{(1-t)^n} \frac{x^n}{2^n n!} = 1 + \frac{e^{x/2} - 1}{1 + q - (q+t)e^{x/2}}. \quad (5.46)$$

Enfin, en posant  $x = \frac{x}{2(1-t)}$ , on retrouve l'équation (5.29).

## 5.2.2 Applications

En spécialisant  $q$  à 1 et  $x$  à  $2x$  dans le lemme 5.2.4 et en divisant chaque membre par  $(1-t)$ , on a

$$\frac{1}{1-t} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{t\alpha_n(t, 1)}{(1-t)^{n+1}} \frac{x^n}{n!} = \frac{2 - e^x}{2 - (1+t)e^x}. \quad (5.47)$$

Comme  $\alpha_n(t, 1) = P_n(t)$ , cette équation mène au résultat suivant.

**Proposition 5.2.5.** *Soit  $n > 0$ . On a*

$$\frac{P_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} (1+t)^{k-1} \frac{k^n}{2^{k+1}}. \quad (5.48)$$

*Démonstration.* Le membre de droite de l'équation (5.47) se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{2 - e^x}{2 - (1+t)e^x} &= 1 + \frac{te^x}{2 - (1+t)e^x} \\ &= 1 + \frac{t}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{(1+t)^k}{2^k} e^{x(k+1)} \\ &= 1 + t \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(1+t)^k}{2^{k+1}} (k+1)^n \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On peut maintenant identifier le coefficient de  $x^n$  dans chacun des deux membres de l'équation (5.47) pour  $n > 0$  :

$$2t \frac{P_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} (1+t)^k \frac{(k+1)^n}{2^{k+1}}.$$

En divisant par  $2t$  et en posant  $k = k + 1$  dans la somme de droite, on retrouve la proposition.

Le cas  $n = 0$  redonne  $\frac{1}{1-t}$ . □

Cette équation nous donne une généralisation du résultat similaire pour les polynômes eulériens :

$$\frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k \geq 1} t^{k-1} k^n. \quad (5.49)$$

De plus, en spécialisant  $t$  à 0 dans l'équation (5.48), on retrouve une expression connue des nombres de Bell ordonnés en tant que série.

La propriété 5.2.5 a récemment été démontré de façon différente par [ZZ18]. En effet, les auteurs montrent qu'il est possible d'exprimer les nombres  $T(n, k)$  en fonction des nombres eulériens usuels :

$$T(n, k) = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} 2^{n-i-1} A(n, i). \quad (5.50)$$

Ils obtiennent ce résultat en comptant toutes les façon d'obtenir une permutation segmentée à  $k$  descentes en rajoutant des barres à une permutation ayant  $i$  descentes. En utilisant ce résultat, ils montrent qu'on a

$$P_n(t) = 2^{n-1} A_n \left( \frac{t+1}{2} \right), \quad (5.51)$$

et donc (5.48) est obtenue en utilisant (5.51) dans (5.49).

Un autre résultat peut être obtenu en considérant l'image de (5.37) par  $\varphi$  ce qui nous donne une expression des polynômes  $\alpha_n(t, q)$  sur une base différente de l'algèbre des polynômes en  $t$  et  $q$ .

**Proposition 5.2.6.** *Soit  $n > 0$ ,*

$$\alpha_n(t, q) = \sum_{0 \leq i+j \leq n-1} t^j (q-t)^i (1-t)^{n-i-j-1} 2^j (i+j+1)! \binom{i+j}{j} S(n, i+j+1). \quad (5.52)$$

Pour démontrer cette proposition nous utilisons l'image des  $\Pi_{i,j}$  par  $\varphi$  décrite dans le lemme suivant.

**Lemme 5.2.7.** *Soient  $i \geq 0$  et  $j \geq 1$ , on a*

$$\varphi(\Pi_{i,j}) = 2^j \binom{i+j-1}{j-1} (e^{x/2} - 1)^{i+j}. \quad (5.53)$$

*Démonstration.* Pour calculer l'image de  $\Pi_{i,j}$ , on compte le nombre de permutations  $\sigma$  telles que  $G_\sigma$  apparaisse dans l'expression de  $S^{\mathbf{I}}$  où  $\text{seg}(\mathbf{I}) = i$  et  $\text{des}(\mathbf{I}) = j$ . D'après la définition de la relation d'ordre  $\geq$ , pour toute position  $k$ , si  $k$  n'appartient ni à  $\text{Des}(\mathbf{I})$  ni à  $\text{Seg}(\mathbf{I})$ , alors il n'y a pas de barre entre  $\sigma_k$  et  $\sigma_{k+1}$  et  $\sigma_k < \sigma_{k+1}$ . Si  $k \in \text{Seg}(\mathbf{I})$  alors  $k \in \text{Seg}(\sigma)$ . Enfin, si  $k \in \text{Des}(\mathbf{I})$  alors il peut y avoir une barre ou non entre  $\sigma_k$  et  $\sigma_{k+1}$  et il peut y avoir une descente ou non. Ainsi, pour chaque  $k \in \text{Des}(\mathbf{I})$ , chaque permutation segmentée apparaît deux fois : avec une barre entre  $\sigma_k$  et  $\sigma_{k+1}$  et une fois sans. Soit  $\mathbf{I}'$  la composition segmentée vérifiant  $\text{Des}(\mathbf{I}') = \emptyset$  et  $\text{Seg}(\mathbf{I}') = \text{Seg}(\mathbf{I}) \cup \text{Des}(\mathbf{I})$ , puisque  $S^{\mathbf{I}'}$

est la somme des  $G_\tau$  pour  $\tau$  vérifiant  $\text{des}(\tau) = 0$  et  $\text{Seg}(\tau) = \text{Seg}(\mathbf{I}')$ , le nombre de permutations segmentées apparaissant dans le développement de  $S^{\mathbf{I}}$  est donc égal à  $2^{\text{des}(\mathbf{I})-1}$  fois le nombre de permutations segmentées apparaissant dans le développement de  $S^{\mathbf{I}'}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \varphi \left( \sum_{\substack{|\mathbf{I}|=n \\ \text{seg}(\mathbf{I})=i \\ \text{des}(\mathbf{I})=j}} S^{\mathbf{I}} \right) &= \sum_{n \geq 1} 2^{j-1} \binom{i+j-1}{j-1} \sum_{\substack{|\mathbf{I}'|=n \\ \text{seg}(\mathbf{I}')=i+j-1 \\ \text{des}(\mathbf{I}')=1}} \varphi(S^{\mathbf{I}'}) \\ &= 2^{j-1} \binom{i+j-1}{j-1} \varphi(\Pi_{i+j-1,1}). \end{aligned}$$

On utilise alors (5.42) pour conclure.  $\square$

*Démonstration de la proposition 5.2.6.* On rappelle qu'à partir de (5.37), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(t, q) &= \sum_{\mathbf{I} \Vdash n} t^{\text{des}(\mathbf{I})} (1-t)^{n-\ell(\mathbf{I})} (q-t)^{\text{seg}(\mathbf{I})} S^{\mathbf{I}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} t^j (1-t)^{n-i-j} (q-t)^i \sum_{\substack{|\mathbf{I}|=n \\ \text{seg}(\mathbf{I})=i \\ \text{des}(\mathbf{I})=j}} S^{\mathbf{I}}. \end{aligned}$$

Pour calculer l'image par  $\varphi$  de cette expression, on calcule le terme de degré  $n$  de  $\varphi(\Pi_{i,j})$ . Comme mentionné précédemment, en utilisant la série génératrice des  $S(n, k)k!$  à  $k$  fixé, on a

$$2(e^{x/2} - 1)^{i+j} = \sum_{n \geq 1} S(n, i+j) (i+j)! \frac{x^n}{2^{n-1} n!}.$$

Puisque  $\varphi(\mathcal{A}(t, q)) = t\alpha_n(t, q) \frac{x^n}{2^{n-1} n!}$ , en appliquant  $\varphi$  à l'expression de  $\mathcal{A}_n$  ci-dessus et en utilisant le lemme 5.2.7, on a

$$\alpha_n(t, q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} t^{j-1} (1-t)^{n-i-j} (q-t)^i 2^{j-1} \binom{i+j-1}{j-1} (i+j)! S(n, i+j). \quad (5.54)$$

En décalant la somme sur  $j$ , on retrouve le résultat souhaité.  $\square$

### 5.2.3 Identités de Worpitzky

L'identité de Worpitzky est une identité bien connue sur les nombres eulériens.

$$k^n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+n-i-1}{n} A(n, i).$$

L'identité de Worpitzky est usuellement démontrée en décrivant explicitement les coefficients de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{A_n(t)}{(1-t)^n} \frac{x^n}{n!}$ . Nous proposons ici de décrire une généralisation cette identité en utilisant le raffinement des nombres eulériens généralisés  $K(n, i, j)$  et en décrivant les coefficients de la série génératrice des  $\frac{\alpha_n(t, q)}{(1-t)^n}$ . Considérons la dérivation discrète des polynômes définie sur les monômes par

$$\Delta(X^n) = (X + 1)^n - X^n. \quad (5.55)$$

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 5.2.8.** *Soient  $n, k$  et  $r$  trois entiers positifs. On a*

$$\binom{k+r}{r} \Delta^{r+1}(k^n) = \sum_{i=0}^k \binom{n+k-j-1}{n-1} K(n, r, j). \quad (5.56)$$

Soit  $G^*(t, q, x)$  la série génératrice des  $\frac{\alpha_n(t, q)}{(1-t)^n}$  :

$$G^*(t, q, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n(t, q)}{(1-t)^n} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.57)$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise une description des coefficients de cette série décrite dans le lemme suivant.

**Lemme 5.2.9.** *La série génératrice  $G^*(t, q, x)$  s'écrit*

$$G^*(t, q, x) = 1 + \sum_{r \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \binom{k+r}{r} \Delta^{r+1}(k^n) q^r t^k \frac{x^n}{n!}. \quad (5.58)$$

*Démonstration.* En posant  $x = x/2$  dans (5.46), on a

$$\begin{aligned} G^*(t, q, x) &= 1 + \frac{e^x - 1}{1 + q - (q + t)e^x} \\ &= 1 + \frac{e^x - 1}{1 - q(e^x - 1) - te^x} \end{aligned}$$

On utilise le développement de  $\frac{1}{1-X}$  pour calculer  $G^*(t, q, x) - 1$  :

$$\begin{aligned}
G^*(t, q, x) - 1 &= (e^x - 1) \sum_{k \geq 0} \left( q(e^x - 1) + te^x \right)^k \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} q^r (e^x - 1)^{r+1} t^{k-r} e^{(k-r)x} \\
&= \sum_{r \geq 0} q^r \sum_{k \geq r} \binom{k}{r} (e^x - 1)^{r+1} t^{k-r} e^{(k-r)x} \\
&= \sum_{r \geq 0} q^r \sum_{k \geq 0} \binom{k+r}{r} (e^x - 1)^{r+1} t^k e^{kx} \\
&= \sum_{r \geq 0} q^r \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{k+r}{r} \binom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} e^{ix} t^k e^{kx}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le coefficient de  $q^r t^k$  dans  $G^*(t, q, x)$  est égal à

$$\binom{k+r}{r} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} e^{(i+k)x}.$$

En développant l'exponentielle on obtient que le coefficient de  $q^r t^k \frac{x^n}{n!}$  dans  $G^*(t, q, x)$  est égal à :

$$\binom{k+r}{r} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} (i+k)^n.$$

En utilisant le fait que pour tout  $X$

$$\Delta^r (X^n) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} (X+i)^n,$$

on a bien

$$G^*(t, q, x) = 1 + \sum_{r \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \binom{k+r}{r} \Delta^{r+1} (k^n) q^r t^k \frac{x^n}{n!}.$$

□

*Démonstration du théorème 5.2.8.* En utilisant le lemme 5.2.9, le membre de gauche de (5.56) est égal au coefficient de  $q^r t^k \frac{x^n}{n!}$  dans  $G^*(t, q, x)$ . D'un autre coté, on a

$$G^*(t, q, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n(t, q) x^n}{(1-t)^n n!}.$$

On utilise le fait que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{j \geq 0} \binom{n+j-1}{j} t^j.$$

Ainsi, le coefficient de  $q^r t^k \frac{x^n}{n!}$  de  $G^*(t, q, x)$  est également égal à

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+k-j-1}{k-j} K(n, r, j),$$

ce qui termine la démonstration. □





# Perspectives

Nous proposons ici quelques perspectives découlant naturellement des résultats obtenus dans ce mémoire.

## Combinatoire du 2-PASEP

Comme nous l'avons mentionné section 1.2.2, les probabilités de chaque état du PASEP peuvent être décrites en utilisant les histoires de Laguerre pour des valeurs générales du paramètre  $\beta$  lorsque  $\alpha = 1$ . Il est également possible d'interpréter combinatoirement les coefficients de la série génératrice de ces probabilités avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$  généraux en utilisant ces mêmes objets. Il est donc naturel de chercher à obtenir des résultats similaires en utilisant les histoires de Laguerre marquées et les histoires de Laguerre larges marquées, introduites au chapitre 3, pour décrire les probabilités du 2-PASEP avec des valeurs plus générales des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

En s'inspirant des chaînes de Markov définies sur les permutations qui se projettent sur la chaîne de Markov du PASEP [CW07a], nous souhaiterions définir un analogue sur les permutations partiellement signées ou sur les histoires de Laguerre marquées. Par ailleurs, nous avons montré au chapitre 3 que les interprétations combinatoires du 2-PASEP que nous fournissons sont divisibles par  $[r + 1]_q!$  où  $r$  est le nombre de particules grises du modèle. Ainsi, avec de bon choix de transitions, nous pensons qu'il serait possible de définir une telle chaîne de Markov dont le graphe serait composé de  $(r + 1)!$  composantes connexes isomorphes se projetant sur la chaîne de Markov du 2-PASEP. Les poids d'une composante connexe se déduiraient des poids d'une autre composante par multiplication par une même puissance de  $q$  pour toute la composante, ce qui permettrait de retrouver combinatoirement le facteur  $[r + 1]_q!$ .

## Algèbres segmentées

Au chapitre 4, nous définissons une algèbre indexée par les permutations segmentées qui peut être vue comme une sous-algèbre de l'algèbre des permutations signées. Cependant, cette identification ne permet pas de définir une structure d'algèbre de Hopf. En particulier, la réalisation polynomiale de  $\mathbf{FQSym}^{(2)}$  n'est pas compatible avec la sous-algèbre que nous définissons. Ainsi, il est naturel de se demander s'il existe une réalisation polynomiale de

l'algèbre sur les permutations segmentées qui nous permettrait de définir une structure d'algèbre de Hopf dessus.

Dans [NTW10], les auteurs interprètent les coefficients des matrices de changement de bases entre les bases complètes et les bases monomiales en utilisant l'algèbre **WQSym** indexée par les mots tassés. Au chapitre 4, nous définissons des mots tassés partiellement segmentés pour donner une interprétation combinatoire des coefficients des analogues des bases de [NTW10]. Nous souhaiterions également définir une algèbre indexée par ces objets permettant de retrouver ces interprétations combinatoires directement en décrivant **SCQSym** comme une sous-algèbre de celle-ci.

En nous inspirant de la bijection entre les permutations et les fonctions sous-excédentes décrite au chapitre 2, nous sommes en mesure de définir des statistiques sur les permutations partiellement signées généralisant celles utilisées dans [NTW10] pour décrire algébriquement les coefficients de changement de base entre la base des  $q$ -rubans et la base des  $q$ -fondamentales. Afin de démontrer la conjecture 4.3.13, nous souhaitons montrer qu'il est possible de définir un  $q$ -produit de **PSQSym** qui se projette sur le  $q$ -produit de la base fondamentale de **SCQSym** induit par les définitions du chapitre 4 et permettant de donner une interprétation combinatoire des coefficients de la matrice de changement de base avec la base des rubans.

## Nombres eulériens

Nous notons à la remarque 5.1.5 du chapitre 5 que pour tous entiers  $n, i$  et  $j$ , il est possible de diviser le nombre  $K(n, i, j)$  par  $(i+1)!$ . On peut alors définir des nombres  $K'(n, i, j)$  qui comptent le nombre d'*assemblées de permutations* ayant  $i+1$  blocs et  $j$  descentes. On peut également définir des polynômes dont les coefficients sont les nombres  $K'(n, i, j)$ . Afin de décrire algébriquement ces polynômes, on cherchera à définir une algèbre indexée par les assemblées de permutations et de faire le lien avec l'algèbre **SCQSym**.

# Bibliographie

- [ABZ17] J.-C. AVAL, A. BOUSSICAULT et P. ZUBIETA : *Communication personnelle*, 2017.
- [Bia93] P. BIANE : Permutations suivant le type d'excédance et le nombre d'inversions et interprétation combinatoire d'une fraction continue de Heine. *European J. Combin.*, 14(4):277–284, 1993.
- [BPS03] P. BLASIAK, K. A. PENSON et A. I. SOLOMON : Dobiński-type relations and the log-normal distribution. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(18):L273, 2003.
- [Car07] P. CARTIER : A primer of Hopf algebras. *In Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*, pages 537–615. Springer, Berlin, 2007.
- [CMW16] S. CORTEEL, O. MANDELSHTAM et L. K. WILLIAMS : Combinatorics of the two-species asep and koornwinder moments. *arXiv :1510.05023*, 2016.
- [CN09] S. CORTEEL et P. NADEAU : Bijections for permutation tableaux. *European Journal of Combinatorics*, 30(1):295–310, 2009.
- [CN17] S. CORTEEL et A. NUNGE : 2-species exclusion processes and combinatorial algebras. *FPSAC2017 proceedings*, 2017.
- [Cor07] S. CORTEEL : Crossings and alignments of permutations. *Advances in Applied Mathematics*, 38(2):149–163, 2007.
- [CW07a] S. CORTEEL et L. K. WILLIAMS : A markov chain on permutations which projects to the pasep. *International Mathematics Research Notices*, 2007, 2007.
- [CW07b] S. CORTEEL et L. K. WILLIAMS : Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process. *Advances in applied mathematics*, 39(3):293–310, 2007.
- [DEHP93] B. DERRIDA, M. R. EVANS, V. HAKIM et V. PASQUIER : Exact solution of a 1d asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26(7):1493, 1993.
- [DHNT11] G. DUCHAMP, F. HIVERT, J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions VII : free quasi-symmetric functions revisited. *Ann. Comb.*, 15(4):655–673, 2011.
- [DHT02] G. DUCHAMP, F. HIVERT et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions. VI. Free quasi-symmetric functions and related algebras. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(5):671–717, 2002.

- [DKKT97] G. DUCHAMP, A. KLYACHKO, D. KROB et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions. III. Deformations of Cauchy and convolution algebras. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 1(1):159–216, 1997. Lie computations (Marseille, 1994).
- [DLS97] B. DERRIDA, J. L. LEBOWITZ et E. R. SPEER : Shock profiles for the asymmetric simple exclusion process in one dimension. *Journal of statistical physics*, 89(1-2):135–167, 1997.
- [DS05] E. DUCHI et G. SCHAEFFER : A combinatorial approach to jumping particles. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 110(1):1–29, 2005.
- [Fla80] P. FLAJOLET : Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Mathematics*, 32(2):125–161, 1980.
- [FS70] D. FOATA et M.-P. SCHÜTZENBERGER : *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, volume 138. Springer, 1970.
- [FV79] J. FRANÇON et G. VIENNOT : Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d’Euler et nombres de Genocchi. *Discrete Math.*, 28(1):21–35, 1979.
- [FZ90] D. FOATA et D. ZEILBERGER : Denert’s permutation statistic is indeed euler-mahonian. *Studies in applied mathematics*, 83(1):31–59, 1990.
- [GKL<sup>+</sup>95] I. M. GELFAND, D. KROB, A. LASCoux, B. LECLERC, V. S. RETAKH et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions. *Adv. Math.*, 112(2):218–348, 1995.
- [HHSW12] D. HELBING, H. J. HERRMANN, M. SCHRECKENBERG et D. E. WOLF : *Traffic and granular flow’99 : social, traffic, and granular dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Hiv00] F. HIVERT : Hecke algebras, difference operators, and quasi-symmetric functions. *Advances in Mathematics*, 155(2):181–238, 2000.
- [HNT05] F. HIVERT, J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : The algebra of binary search trees. *Theoretical Computer Science*, 339(1):129–165, 2005.
- [HNTT09] F. HIVERT, J.-C. NOVELLI, L. TEVLIN et J.-Y. THIBON : Permutation statistics related to a class of noncommutative symmetric functions and generalizations of the genocchi numbers. *Selecta Mathematica*, 15(1):105–119, 2009.
- [JV11] M. JOSUAT-VERGÈS : Combinatorics of the three-parameter PASEP partition function. *Electron. J. Combin.*, 18(1):Paper 22, 31, 2011.
- [KLT97] D. KROB, B. LECLERC et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions. II. Transformations of alphabets. *Internat. J. Algebra Comput.*, 7(2):181–264, 1997.
- [KT97] D. KROB et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions. IV. Quantum linear groups and Hecke algebras at  $q = 0$ . *J. Algebraic Combin.*, 6(4):339–376, 1997.

- [KT99] D. KROB et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions. V. A degenerate version of  $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ . *Internat. J. Algebra Comput.*, 9(3-4):405–430, 1999. Dedicated to the memory of Marcel-Paul Schützenberger.
- [Lot97] M. LOTHAIRE : *Combinatorics on words*, volume 17. Cambridge University Press, 1997.
- [LR98] J.-L. LODAY et M. O. RONCO : Hopf algebra of the planar binary trees. *Advances in Mathematics*, 139(2):293–309, 1998.
- [Man15] O. MANDELSHTAM : Multi-catalan tableaux and the two-species tasep. *arXiv preprint arXiv :1502.00948*, 2015.
- [MGP68] C. T. MACDONALD, J. H. GIBBS et A. C. PIPKIN : Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates. *Biopolymers : Original Research on Biomolecules*, 6(1):1–25, 1968.
- [MR95] C. MALVENUTO et C. REUTENAUER : Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra. *J. Algebra*, 177(3):967–982, 1995.
- [MV15] O. MANDELSHTAM et X. VIENNOT : Tableaux combinatorics of the two-species pasep. To appear in *J. Combin. Theory Ser.*, arXiv :1506.01980, 2015.
- [MV18] O. MANDELSHTAM et X. VIENNOT : Rhombic alternative tableaux and assemblies of permutations. *European Journal of Combinatorics*, 73:1–19, 2018.
- [NT06] J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : Polynomial realizations of some trialgebras. *arXiv preprint math/0605061*, 2006.
- [NT07] J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : Hopf algebras and dendriform structures arising from parking functions. *Fund. Math.*, 193(3):189–241, 2007.
- [NT10] J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : Free quasi-symmetric functions and descent algebras for wreath products, and noncommutative multi-symmetric functions. *Discrete Mathematics*, 310(24):3584–3606, 2010.
- [NT12] J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions and an amazing matrix. *Advances in Applied Mathematics*, 48(3):528–534, 2012.
- [NTW10] J.-C. NOVELLI, J.-Y. THIBON et L. K. WILLIAMS : Combinatorial Hopf algebras, noncommutative Hall-Littlewood functions, and permutation tableaux. *Adv. Math.*, 224(4):1311–1348, 2010.
- [Nun18a] A. NUNGE : An equivalence of multistatistics on permutations. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 157:435–460, 2018.
- [Nun18b] A. NUNGE : Eulerian polynomials on segmented permutations. *proceedings of FPSAC 2018*, (arXiv :1805.01797), 2018.
- [Pet15] T. K. PETERSEN : Eulerian numbers. In *Eulerian Numbers*, pages 3–18. Springer, 2015.
- [Slo] N. J. A. SLOANE : The on-line encyclopedia of integer sequences. In : <https://oeis.org/>.

- [Spi70] F. SPITZER : Interaction of markov processes. *Advances in Mathematics*, 5(2):246–290, 1970.
- [SW07] E. STEINGRÍMSSON et L. K. WILLIAMS : Permutation tableaux and permutation patterns. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(2):211–234, 2007.
- [Swe69] M. E. SWEEDLER : *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [SZ82] L. W. SHAPIRO et D. ZEILBERGER : A markov chain occurring in enzyme kinetics. *Journal of mathematical biology*, 15(3):351–357, 1982.
- [Tev07] L. TEVLIN : Noncommutative analogs of monomial symmetric functions, cauchy identity, and hall scalar product. *Proceedings of FPSAC 2007*, (arXiv :0712.2201), 2007.
- [Uch08] M. UCHIYAMA : Two-species asymmetric simple exclusion process with open boundaries. *Chaos, Solitons & Fractals*, 35(2):398–407, 2008.
- [Vie83] G. VIENNOT : *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*. Département de Mathématiques et d’Informatique, Université du Québec à Montréal, 1983.
- [ZZ18] P. B. ZHANG et X. ZHANG : Multivariate stable eulerian polynomials on segmented permutations. *arXiv preprint arXiv :1807.00984*, 2018.