



Modèles hyper-réduits pour la simulation simplifiée du soudage en substitut de calcul hors d'atteinte

Tuan Dinh Trong

► To cite this version:

Tuan Dinh Trong. Modèles hyper-réduits pour la simulation simplifiée du soudage en substitut de calcul hors d'atteinte. Matériaux. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. NNT : 2018PSLEM023 . tel-02097067

HAL Id: tel-02097067

<https://pastel.hal.science/tel-02097067>

Submitted on 11 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Modèles hyper-réduits pour la simulation simplifiée du soudage en
substitut de calculs hors d'atteinte

École doctorale n°432

SCIENCES ET MÉTIERS DE L'INGÉNIEUR

Spécialité MÉCANIQUE

Soutenue par **Tuan DINH TRONG**
le 07 septembre 2018

Dirigée par **David RYCKELYNCK**

COMPOSITION DU JURY :

M Khemais SAANOUNI, Président
Université de Technologie Troyes

M Pierre KERFRIDEN, Rapporteur
Université de Cardiff

M Pierre JOYOT, Rapporteur
ESTIA

M Elie HACHEM, Examineur
MINES ParisTech

M David RYCKELYNCK, Examineur
MINES ParisTech

M Sofiane HENDILI, Examineur
EDF-R&D

Remerciements

Après plus de trois ans, cette thèse est devenue selon moi un extraordinaire souvenir que ce soit d'un point de vue intellectuel qu'humain. Tout d'abord, je souhaite remercier mon directeur de thèse David Ryckelynck pour son encadrement, sa patience et sa disponibilité. Après chaque réunion, ses remarques pertinentes ainsi que ses conseils ont toujours été précieux. De plus, il m'a sans arrêt redonné la motivation nécessaire à la recherche et à l'innovation.

Du côté d'EDF, je souhaite exprimer ma gratitude envers Jean Angles qui m'a fait confiance en me donnant la possibilité de travailler sur ce sujet. Un grand merci à David Albrecht pour la liberté qu'il m'a accordée en début de thèse, mais aussi pour l'énergie qu'il a su me transmettre. Ensuite, je souhaite remercier sincèrement Sofiane Hendili pour son encadrement jusqu'à la fin de ma thèse ainsi que pour l'esprit de rigueur et de pragmatisme qu'il a su m'enseigner. J'ai vraiment beaucoup apprécié travailler avec lui pendant ma thèse. Je suis aussi très reconnaissant envers Josselin Delmas pour son organisation au sein du projet SPAR et pour avoir contribué activement à l'application de mon sujet au cas industriel. Enfin et surtout, je me suis tellement amusé à développer avec Mickaël Abbas. Son point de vue algorithmique architectural et son travail empli d'enthousiasme m'ont beaucoup impressionnés.

Je voudrais à présent remercier Khemais Saanouni pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens également à remercier mes rapporteurs Pierre Kerfriden et Pierre Joyot pour leurs lectures particulièrement attentives ainsi que la qualité de leurs remarques. Il est indispensable de remercier mon examinateur Elie Hachem, de par son domaine expertise varié, m'a permis d'aborder ma thèse sous des regards différents lors de la soutenance.

Je remercie également mon collaborateur Pablo Pereira Alvarez pour son superbe application pendant son stage qui m'a permis d'obtenir des résultats importants pour conclure ma thèse. Je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues au sein du département MRI à EDF Chatou. Leur accueil chaleureux et leur disponibilité m'ont permis de réaliser ma thèse dans un cadre autant agréable que productif. Parmi eux, je souhaite remercier tout particulièrement Xavier Yau, mon collègue de bureau, mon frère, pour toutes les discussions que nous avons eues et toutes les activités que nous avons passées ensemble. Merci encore à Nazih Benoumechiara pour m'avoir converti en Data Science.

Pour finir, je souhaite remercier du fond du cœur l'ensemble de mes proches. Merci à mes parents pour m'avoir toujours fait confiance et encouragé dans mes choix ainsi que toutes les valeurs qu'ils m'ont transmises. Merci à mes amis pour tous les moments de bonheur que nous avons partagés. Je terminerai par remercier infiniment Anna pour ses encouragements et son soutien inconditionnels.

Table des matières

Liste des tableaux	v
Liste des figures	vii
Introduction	1
1 Etude bibliographique	4
1.1 Contexte de l'étude	5
1.1.1 Soudage et ses procédés	5
1.1.2 Cas industriel	8
1.2 Etudes du soudage et son modèle de simulation	10
1.2.1 Physique du soudage	10
1.2.2 Formulations des problèmes thermomécaniques	13
1.2.3 Chargements et comportements en soudage	16
1.2.4 Modèle éléments finis pour le soudage	20
1.2.5 Méthodes simplifiées pour la SNS	22
1.3 Réduction d'ordre de modèles non-linéaires	27
1.3.1 Principes de base pour la réduction de modèle	27
1.3.2 La méthode POD (Proper Orthogonal Decomposition)	29
1.3.3 L'EIM (Empirical Interpolation Method)	35
1.3.4 La gappy POD	36
1.3.5 La méthode PGD (Proper Generalized Decomposition)	37
1.3.6 Réduction de modèle locale hiérarchique	38
1.4 Méthode d'hyper-réduction de modèle	38
1.4.1 Introduction de l'hyper-réduction par un problème aux limites	39
1.4.2 Construction du modèle hyper-réduit	40
1.4.3 Formulation d'équation de bilan par hyper-réduction	41
1.5 Conclusion de l'étude bibliographique	44
2 Méthodes d'hyper-réduction adaptées au soudage	45
2.1 Développements dans <i>code_aster</i> de l'hyper-réduction	46
2.1.1 Intrusivité de l'hyper-réduction dans <i>code_aster</i>	46
2.1.2 Projection de type Petrov-Galerkin sur le RID	47
2.1.3 Mise en œuvre dans la résolution du système	49
2.1.4 La prévision du champ de contrainte	51
2.2 Cas test de soudage simple par Hyper Réduction : mise en œuvre, efficacité et limites de la méthode	52

2.2.1	Modèles éléments finis du cas test	52
2.2.2	Modèles hyper-réduits	54
2.2.3	Résultats numériques par hyper-réduction	56
2.2.4	Limites de la méthode d'hyper réduction pour la SNS	60
2.3	Modèle directionnel enrichi par hyper-réduction	62
2.3.1	Formulation des équations	62
2.3.2	Numérotation et construction de la base réduite directionnelle	64
2.3.3	Mise en œuvre dans la programmation de <i>code_aster</i>	65
2.3.4	Résultats du modèle directionnel dans le cas test simple	66
2.4	Modèle mixte entre directionnel et 3D	68
2.4.1	Présentation générale	68
2.4.2	Mise en œuvre dans <i>code_aster</i> du modèle mixte	70
2.4.3	Résultats du modèle mixte dans le cas test simple	70
2.5	Hyper-réduction hybride POD-éléments finis	72
2.5.1	Introduction	72
2.5.2	Modèle couplés HR-EF	73
2.5.3	Mise en œuvre du modèle hybride dans <i>code_aster</i>	74
2.5.4	Validation par un cas test purement mécanique	76
2.6	Etude de convergence et comparaison des modèles hyper-réduits	77
2.6.1	Cas test de performance	78
2.6.2	Etude paramétrique	79
2.6.3	Etude de convergence sur le nombre de modes	80
2.6.4	Etude de convergence sur la taille du RID	81
2.7	Conclusion sur les modèles hyper-réduits	82
3	Application de l'hyper-réduction au soudage multipasse	85
3.1	Introduction du principe d'une hyper-réduction progressive	85
3.2	Modèle éléments finis du soudage multipasse	87
3.2.1	Introduction du soudage multipasse	87
3.2.2	Exemple d'un cas test du soudage multipasse	89
3.3	Stratégie de décalage des champs physiques	91
3.3.1	Première application de l'hyper-réduction	93
3.3.2	Décalage des champs thermiques	96
3.3.3	Décalage des champs mécaniques	98
3.4	Validation la stratégie de décalage	100
3.4.1	Résultats thermiques	100
3.4.2	Etude du nombre de cordons éléments finis à calculer	101
3.4.3	Résultats mécaniques	103
3.5	Hyper-réduction de plusieurs cordons	105
3.6	Conclusion sur la mise en œuvre de l'hyper-réduction pour le soudage multipasse	106
4	Application sur un cas industriel	107
4.1	Introduction du cas industriel	107
4.2	La réparation Overlay	108
4.2.1	Principe des rechargement Overlay partiel et complet	109
4.2.2	Essais expérimentaux	110

4.3	Modèle numérique de l'essai expérimental Overlay partiel haute énergie	113
4.3.1	Géométrie et maillage	114
4.3.2	Paramètres du problème thermique	116
4.3.3	Paramètres du problème mécanique	118
4.3.4	Résultats des simulations par éléments finis	118
4.4	Simulation de l'essai Overlay par hyper-réduction	123
4.4.1	Méthodologie	124
4.4.2	Résultats par l'hyper-réduction	125
4.5	Conclusion sur l'application industrielle	132
5	Conclusion et perspectives	134
5.1	Conclusion	134
5.2	Perspectives	135
A	La source de soudage	136
A.1	Source de chaleur type Goldak	136
A.2	Source de chaleur triangulaire	138
B	Caractéristiques des matériaux	139
B.1	Paramètres physiques de l'acier inoxydable 316L	139
B.2	Paramètres physiques de revêtement inoxydable	140
C	Décomposition aux valeurs singulières	145
C.1	Méthode de Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)	145
C.2	Lien entre SVD et problèmes aux valeurs propres	146
D	Développements dans <i>code_aster</i>	148
D.1	Opérateur DEFI_BASE_REDUITE	148
D.1.1	Structure de données résultats de type <i>mode_empi</i>	149
D.1.2	Paramètres pour la commande DEFI_BASE_REDUITE	149
D.2	Opérateur DEFI_DOMAINE_REDUIT	151
D.2.1	Paramètres pour la commande DEFI_DOMAINE_REDUIT	151
D.2.2	Construction le RID au sein d'un maillage	152
D.3	Opérateur REST_REDUIT_COMPLET	152
D.3.1	Paramètres pour la commande REST_REDUIT_COMPLET	152
	Bibliographie	154

Liste des tableaux

1.1	Comparaison du temps de calcul dans la soudure en X	24
3.1	Erreur du calcul thermique (température) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la solution EF du cordon 4 sans décalage spatial pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-3}$ et 3 couches d'éléments autour des points magiques.	94
3.2	Erreur du calcul mécanique (déplacement et contrainte) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la solution EF du cordon 4 sans décalage spatial pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-6}$ et 6 couches d'éléments autour des points magiques.	97
3.3	Erreur du calcul thermique (température) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la prévision du cordon 5 par décalage pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-3}$ et 3 couches d'éléments autour des points magiques.	101
3.4	Erreur de température par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque l'on construit son modèle hyper-réduit avec un terme d'accroissement.	101
3.5	Erreur de température pour le calcul sur le modèle hyper-réduit ou hybride lorsque on décale la solution du cordon précédent pour le cordon actuel.	102
3.6	Erreur du calcul mécanique (déplacement et contrainte) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la prévision par décalage des évolutions du cordon 4 pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-6}$ et 6 couches d'éléments autour des points magiques pour le RID.	104
3.7	Erreur du calcul par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la prévision par 2 décalages des champs du post-traitement du cordon 3.	105
4.1	Informations sur le maillage utilisé pour la simulation de la réparation Overlay partiel haute énergie.	115
4.2	Temps de calcul moyen pour chaque simulation d'un cordon de soudure par éléments finis dans <i>code_aster</i> par calcul parallèle avec 12 processus et 2 nœuds.	119
4.3	Température maximale à l'instant final de chaque cordon.	121
4.4	Analyse le calcul hyper-réduit sur le dixième cordon en fonction des paramètres construisant le modèle hybride.	128

B.1	Données thermophysiques du 316L fournie par FARAMATOME . . .	140
B.2	Données du module de Young, coefficient de dilatation et limite conventionnelle d'élasticité à 0.2% de 316L qui dépendent de température. .	141
B.3	Données des contraintes en fonction de déformation totale dépend de la température pour 316L fournies par CEA/EDF	141
B.4	Données thermophysiques du revêtement inoxydable	142
B.5	Données du module de Young, coefficient de dilatation et limite d'élasticité du revêtement inoxydables qui dépendent de température. . . .	143
B.6	Contrainte en fonction de la déformation plastique et dépendant de la température pour le revêtement inoxydable	144

Liste des figures

1.1	Système d'installation de soudage à l'arc à l'électrode enrobé	5
1.2	Zone de soudure dans le procédé SAEF	6
1.3	Schéma du procédé TIG	7
1.4	Effet de l'angle de la pointe de tungstène sur l'arc	8
1.5	Rechargement par soudage de type Overlay à l'extérieur	9
1.6	Schéma du soudage multipasse dans le rechargement de type Overlay	9
1.7	Différents physiques dans un bain de fusion en soudage TIG	11
1.8	Comparaison des contraintes résiduelles	13
1.9	Paramètres thermiques des aciers inoxydables 316L et 308L.	18
1.10	Paramètres mécaniques des aciers inoxydables 316L et 308L.	19
1.11	Données pour la relation plastique de l'acier 316L.	20
1.12	Schéma des regroupements des passes dans la méthode « macro-dépôt »	23
1.13	Schéma de sélection des passes par RNP pour la soudure en X	23
1.14	Champ de contrainte résiduelle de soudage selon différentes méthodes	24
1.15	Description de la méthode locale/globale	25
1.16	Méthode « locale/globale » dans le projet MUSICA	25
1.17	Déformation de la méthode « locale/globale » projet MUSICA	26
1.18	Procédure de construction du modèle hyper-réduit	41
1.19	Modèle hyper-réduit dans la résolution du problème	42
2.1	Schéma d'application de l'hyper-réduction dans <i>code_aster</i>	49
2.2	Géométrie du cas test de soudage simple	52
2.3	Maillage pour le cas test de soudage simple.	53
2.4	Champ de température issu du calcul par éléments finis.	54
2.5	Champ de déplacement en fin du calcul par EFs.	54
2.6	Champ de contrainte équivalent von Mises en fin du calcul par EFs.	55
2.7	Modes empiriques de température pour le modèle POD classique 3D.	55
2.8	RID sous forme maillage pour le calcul thermique.	56
2.9	Premier mode empirique du champ de déplacement.	56
2.10	Premier mode empirique du champ de contrainte.	57
2.11	Champ de température issu du calcul par hyper-réduction.	58
2.12	RID pour le calcul mécanique en fonction du nombre de couches d'éléments.	59
2.13	Champ de déplacement en fin de calcul par HR.	59
2.14	Champ de contrainte équivalent von Mises en fin de calcul par HR.	59
2.15	Etude paramétrique du modèle hyper-réduit classique 3D.	61
2.16	Fonction de forme par éléments finis en 1D	63

2.17	Procédure de la construction du modèle directionnel.	66
2.18	Modes empiriques de tranche dans le cas test de soudage simple. . . .	67
2.19	Champ de température par le modèle directionnel du calcul HR. . . .	67
2.20	Etude paramétrique du modèle hyper-réduit directionnel.	68
2.21	Le rectangle rouge représente un domaine Ω_D que nous recommandons d'utiliser en sélectionnant les modes de tranche pour définir le modèle mixte.	70
2.22	Exemple de mode $N + p$ d'un modèle mixte sur une tranche qui présente un fort gradient dans la zone de recouvrement des domaines Ω_D et Ω_P . Cette zone contient une rangée d'éléments au bord de Ω_D	70
2.23	Procédure de la construction du modèle mixte	71
2.24	Champ de température issu du calcul hyper-réduit sur le modèle mixte.	71
2.25	Etude paramétrique du modèle hyper-réduit directionnel.	72
2.26	Modèle hybride entre HR et correction EF.	75
2.27	Procédure de construction de la zone de couplage entre HR et correction EF.	75
2.28	La géométrie du cas test d'une fissure sur une plaque trouée sous pression.	76
2.29	Champ de contrainte équivalent de von Mises après le calcul éléments finis sur la plaque trouée dans deux cas différents : un cas sans fissure (a) et un cas avec une fissure (b).	77
2.30	Champ de contrainte équivalent de von Mises après le calcul hyper-réduit sur deux modèles différents.	78
2.31	Résultat par éléments finis en thermique et en mécanique du procédé de soudage sur une grande plaque.	78
2.32	Etude paramétrique sur l'émissivité dans la simulation thermique du soudage. Les modèles hyper-réduits sont générés à partir du résultat EF lors d'un calcul avec émissivité égale à 0.75.	80
2.33	Etude paramétrique sur la vitesse de la source de chaleur au soudage. Les modèles hyper-réduits sont générés à partir du résultat EF lors d'un calcul avec vitesse égale à 2 mm/s	80
2.34	Erreur de température et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème thermique de soudage en fonction du nombre de modes dans le cas test sur un gros modèle avec le modèle hyper-réduit et hybride.	81
2.35	Erreur de déplacement et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de modes.	82
2.36	Erreur de la prévision du champ de contrainte après le calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de modes.	82
2.37	Erreur de température et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème thermique de soudage en fonction du nombre de couches d'éléments autour des points magiques.	83
2.38	Erreur de déplacement et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de couches d'éléments autour des points magiques.	83

2.39	Erreur de la prévision du champ de contrainte après le calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de couches d'éléments autours des points magiques.	84
3.1	Exemple simple pour le développement de modes empiriques dédiés au soudage multipasse.	88
3.2	Deux démarches pour la modélisation du soudage multipasse : en haut les cordons restant sont remplis d'un matériau imaginaire, en base des modèles emboîtés où le maillage évolue par passe de soudage.	88
3.3	Géométrie du cas test de soudage multipasse.	90
3.4	Maillage du cas test de soudage multipasse, la partie supérieure représente les cordons ajoutés.	90
3.5	Résultat thermique du soudage multipasse avec 5 cordons de soudure : à gauche pour le premier cordon, à droite pour le dernier cordon. . .	91
3.6	Champ de contrainte équivalent de von Mises du soudage multipasse avec 5 cordons de soudure : en haut pour le cordon 1, en bas pour le cordon 5.	92
3.7	Comparaison entre le résultat thermique (champ de température) d'un cordon et sa projection sur le modèle complet : en haut le cordon 3 simulé, en bas sa projection.	94
3.8	Comparaison entre le champ de déplacement (\mathbf{u}_z) du cordon 3 et sa projection sur le modèle complet : en haut le déplacement calculé, en bas le déplacement projeté.	95
3.9	Comparaison entre le champ de contrainte (σ_{zz}) du cordon 3 et sa projection sur le modèle complet : en haut la contrainte calculée, en bas la contrainte projetée.	96
3.10	Schéma du décalage du cordon m pour construire une prévision du cordon $m + 1$ qui est utilisée pour créer la matrice des snapshots dans la construction du modèle hyper-réduit lié au cordon $m + 1$	97
3.11	Comparaison entre la prévision et le résultat : à gauche prévision du cordon 5 par décalage spatial du cordon 4, à droite prévision du cordon 5 par éléments finis.	97
3.12	Champ de déplacements (en magnitude) : à gauche à la fin du cordon 3, à droite à la fin du cordon 4.	98
3.13	Champ de contraintes (en magnitude) : à gauche à la fin du cordon 3, à droite à la fin du cordon 4.	99
3.14	Comparaison entre la prévision des déplacements et le résultat EF : à gauche par décalage, à droite par éléments finis.	99
3.15	Comparaison entre la prévision des contraintes et le résultat EF : à gauche par décalage, à droite par éléments finis.	100
3.16	Comparaison entre le résultat par hyper-réduction en appliquant le décalage et le résultat par éléments finis du cinquième cordon : à gauche par hyper-réduction, à droite par éléments finis.	100
3.17	Synthèse des erreurs de température de tous les résultats possibles à comparer avec la solution éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.	102

3.18	Comparaison entre le résultat par hyper-réduction en appliquant le décalage et le résultat éléments finis du cinquième cordon : à gauche par hyper-reduction, à droite par éléments finis.	103
3.19	Synthèse des erreurs de déplacement de tous les résultats possibles à comparer avec la solution éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.	104
3.20	Synthèse des erreurs de contrainte de tous les résultats possibles à comparer avec la solution éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.	104
3.21	A gauche l'écart de contrainte de von Mises $\sigma_{eq}^{HR+EF} - \sigma_{eq}^{EF}$ (MPa) reconstruit par Gappy POD en dehors du RID, à droite la contrainte σ_{eq}^{EF} (MPa), le tout à la fin de la simulation du cordon 5.	105
4.1	Schéma des études expérimentales réalisées et des études numériques à effectuer. Ici, PATCH signifie OVERLAY partiel, à distinguer de l'OVERLAY complet[4].	108
4.2	Schémas des rechargements sur tubes : a) Rechargement de type Overlay complet. b) Rechargement extérieur type Overlay partiel soudé à faible énergie. c) Rechargement extérieur type Overlay partiel soudé à haute énergie.	112
4.3	Mode de déformation attendus : Overlay partiel : a) cintrage ; b) pliage. Overlay complet : c) diminution de diamètre.	113
4.4	Schéma du système de maintien des tubes et de mise en rotation[3].	114
4.5	Paramètres de soudage utilisés.	114
4.6	Algorithme de création le maillage en réduisant le nombre de mailles et en assurant que tous les éléments sont hexagonaux.	115
4.7	Maillage utilisé pour la simulation du cas Overlay partiel haute énergie et le zoom sur la zone où on dépose la première couche.	116
4.8	Section d'un cordon de soudure déposé sur le tube dans la réparation Overlay partiel haute énergie.	117
4.9	Représentation des points appliqués par les conditions aux limites en mécanique.	118
4.10	Champ de température du premier cordon (à gauche) et du dixième cordon (à droite) après la même durée d'exécution du procédé.	120
4.11	Vue sur le même plan perpendiculaire au sens de soudage, des cordons 1, 2, 3, 4, 5, 10. Ici, la zone rouge représente la zone fondue qui dépasse la température de fusion ($T_f = 1500^\circ C$). La zone bleue foncée représente les basses températures (inférieur à $T_f/2$).	121
4.12	Champ de contrainte équivalente von Mises du premier cordon (en haut) et du dixième cordon (en bas) après la simulation par EF.	122
4.13	Déformations résiduelles du tube après dix premiers cordons de soudure de réparation Overlay partiel haute énergie.	123
4.14	Déplacements suivant une direction sur une section du tube pour montrer la déformation de type cintrage.	123
4.15	Zone plastifiée sur le tube après dix cordons de soudure.	124

4.16	Champ de température du dixième cordon en deux modèles différents : en haut modèle hybride entre hyper-réduction et correction EF, en bas modèle éléments finis.	126
4.17	Synthèse des erreurs de température de tous les résultats possibles à comparer avec la solution par éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.	126
4.18	Erreur de température par HR à comparer avec la solution par EF en fonction du numéro de cordon calculé p à partir du cordon m	127
4.19	Champ de contrainte équivalente de type von Mises du dixième cordon en deux modèles différents : en haut modèle hybride entre hyper-réduction et correction EF, en bas modèle éléments finis.	129
4.20	Erreurs des champs de déplacements à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon à calculer.	130
4.21	Erreurs des champs de contraintes à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon à calculer.	130
4.22	Erreur des champs de déplacements à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon calculé p à partir du cordon m	131
4.23	Erreur des champs de contrainte à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon calculé p à partir du cordon m	132
4.24	En haut l'écart de contrainte de von Mises $\sigma_{eq}^{HR+EF} - \sigma_{eq}^{EF}$ (MPa) reconstruit par Gappy POD en dehors du RID, en bas la contrainte σ_{eq}^{EF} (MPa), le tout à la fin de la simulation du cordon 7.	133
A.1	Repères Lagrangien et Eulérien	136
A.2	Distribution en puissance de la source de chaleur en fonction Goldak .	137
A.3	Distribution en puissance de la source de chaleur triangulaire	138
D.1	Procédure de construire la base réduite sous la programmation de <i>code_aster</i>	150
D.2	Procédure de créer le RID sous la programmation de <i>code_aster</i> . . .	151
D.3	Procédure pour créer le RID sous forme de maillage	153
D.4	Présentation de la construction du domaine réduite en fonction de nombre de couche d'éléments.	153

Introduction

Dans le cadre du projet SPAR (Simuler Pour Anticiper les Réparations), EDF-R&D fait des modélisations numériques de soudage pour prédire les défauts du soudage. Bien que la simulation numérique du soudage (SNS) soit aujourd’hui possible avec le code de calcul éléments finis *code_aster*, elle reste toujours un problème complexe. En effet, ce type de simulation doit prendre en compte :

- un nombre important de paramètres dont certains sont déterminés par recalage à l’aide d’outils d’optimisation ;
- des phénomènes non-linéaires qui viennent des chargements thermomécaniques et des comportements physiques des matériaux ;
- des maillages de grandes tailles, avec un raffinement important dans les zones soudées.

Par conséquent, la résolution du problème thermomécanique non-linéaire de soudage nécessite un temps de calcul élevé, ce qui est un facteur aggravant la complexité de la SNS.

De plus, dans certains cas industriels, comme ceux rencontrés dans le projet SPAR, le procédé de soudage induit un nombre important de passes de soudage ; on parle alors de soudage multipasse. Sachant que le temps de calcul pour la simulation numérique d’une passe de soudage est de l’ordre de la dizaine d’heure, il est difficile d’envisager la simulation de procédés de soudage multipasse qui nécessitent des temps de calcul incompatibles avec les contraintes de temps de l’ingénieur d’étude. Il s’agit donc en pratique de simulations hors d’atteintes.

Dans ce contexte, nous proposons une méthode qui permet de diminuer les temps de calcul tout en conservant des résultats pertinents pour les effets du soudage. Cette méthode, dite d’hyper-réduction de modèle non seulement simplifie l’espace d’approximation du modèle éléments finis mais aussi réduit le maillage sur lequel sont réalisées les simulations. Cette méthode fait partie des méthodes dites de réduction d’ordre de modèle. L’objectif principal de ces méthodes est de réduire la complexité du modèle en projetant le système d’équations de bilan sur une base réduite bien choisie. Ces méthodes peuvent être appliquées dans différentes disciplines tel que la thermomécanique, la dynamique, l’électromagnétisme, la mécanique des fluides etc.

Pendant le procédé de soudage, lorsque la source de chaleur se déplace sur une direction rectiligne pour former le cordon de soudure, nous voyons que sur tous les plans perpendiculaires à la direction du soudage, les évolutions du champ de température se ressemblent en se décalant dans le temps. De ce fait, nous étudions dans ce document ce un modèle hyper-réduit directionnel dont l’espace d’approximation tient compte de la direction de soudage. Cette approche a été évaluée pour la résolution de problème thermique en SNS. Elle est particulièrement bien adaptée à

simulation de régimes stationnaires faisant suite à un régime transitoire court.

Nous nous sommes également intéressés à la simulation de l'ajout de cordons de soudure par un modèle hyper-réduit. De façon classique, l'espace d'approximation de l'hyper-réduction est engendré par des modes empiriques. Ceux-ci doivent de façon anticipée pouvoir décrire les transformations thermomécaniques à simuler. Cela est rendu possible lorsque l'on connaît les prévisions de plusieurs simulations éléments finis avant de réaliser des simulations par hyper-réduction. On parle alors d'étape *offline*, l'apprentissage artificiel des modes empiriques, et d'étape *online* qui exploite les modes pour y projeter les équations de bilan. Pour la SNS une telle approche est inconcevable, car explorer l'espace des processus d'ajout de cordons de soudure en soudage multipasse conduirait à la réalisation d'un nombre de simulations trop important, sachant que la durée d'une simulation est déjà jugée trop longue et hors d'atteinte. C'est particulièrement problématique pour la partie mécanique de la SNS. Les effets mécaniques du soudage sont en général plus globaux que les effets thermiques. La notion de régime stationnaire en mécanique est moins pertinente qu'en thermique. L'approche directionnelle n'a donc pas été étendue à la simulation mécanique.

Dans ce mémoire nous explorons l'utilisation d'approximation hybrides, modes empiriques/approximations par éléments finis, pour l'hyper-réduction du soudage multipasse. Conformément à l'esprit de l'hyper-réduction, l'approximation par éléments finis y est restreinte à un sous-domaine du domaine géométrique occupée par l'assemblage à souder. Les modes empiriques servent alors essentiellement à propager l'effet des conditions aux limites. En pratique, on va ajouter une phase de calcul éléments finis après la phase de calcul hyper-réduit pour trouver des corrections locales qui tiennent compte de l'ajout de cordons de soudure. Comme le calcul hyper-réduit est réalisé sur la base réduite qui contient des informations globales, la correction éléments finis va ajouter les effets locaux du modèle pour améliorer les résultats. Un couplage fort des deux niveaux d'approximation traduit le couplage local/global. L'approche hybride a permis de développer différentes stratégies de construction de bases réduites qui tiennent compte du procédé d'ajout de matière. Ces stratégies consistent à décaler en espace des résultats de simulations partielles afin d'en extraire des bases réduites étendues.

Ce manuscrit de thèse présente les études sur l'hyper-réduction, directionnelle et hybride, les validations par des cas-tests de soudage, et des applications à des cas industriels. Le travail réalisé au cours de cette thèse se décompose en quatre parties :

- une étude bibliographique qui introduit le contexte du sujet en précisant les phénomènes physiques pris en compte lors de la simulation numérique du soudage. Ensuite, on présente le principe de la méthode de réduction d'ordre de modèle et on fait un état de l'art sur les méthodes déjà développées dans le cadre de la SNS. On y trouve des travaux ayant des similitudes avec les travaux présentés ici pour l'hyper-réduction, ainsi qu'une première justification du choix de l'hyper-réduction.
- la formulation des équations de bilan développées dans *code_aster* pour la méthode hyper-réduction. A partir des difficultés liées au soudage pendant le calcul hyper-réduit, nous présentons les nouveaux modèles hyper-réduits. Ce sont le modèle directionnel pour le soudage et le modèle hybride pour

améliorer les calculs en hyper-réductions. Ces modèles sont validés par des cas-tests simples.

- la présentation de stratégies de mise en œuvre des modèles hyper-réduits spécifiques au calcul du soudage multipasse.
- l'exploitation du modèle hyper-réduit de soudage multipasse pour la réalisation d'une étude de réparation sur une configuration représentative des installations du parc nucléaire d'EDF.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Ce chapitre représente la recherche bibliographique pour le sujet de thèse. Il concerne des études sur le soudage et sa simulation numérique. En expliquant les phénomènes mis en jeu lors du soudage, nous montrons la complexité d'un modèle du procédé soudage. Cette complexité nous a conduit à choisir de développer une méthode d'hyper-réduction.

*Premièrement, on rappelle le contexte du sujet de thèse : « **la simulation numérique du soudage** ». En introduisant les procédés de soudage qui sont souvent utilisés avec les caractéristiques inhérentes aux procédés, on peut constater que l'opération de soudage est multi-physique, réalisée de manière complexe et dépend de plusieurs paramètres. Les contraintes résiduelles et les déformations induites sont les principales grandeurs recherchées dans une étude industrielle. Il est généralement nécessaire d'effectuer des simulations pour accéder à ces grandeurs.*

*Dans la deuxième section, nous introduisons les formulations des équations en thermomécanique, les conditions aux limites, les caractéristiques de matériaux ainsi que les paramètres à étudier. Ensuite, nous rappelons les modèles numériques qui permettent de simuler l'opération de soudage par la méthode des éléments finis. «**Les méthodes simplifiées**» qui existent dans l'industrie sont présentées par la suite. Elles réduisent la complexité dans le calcul mais elles changent également la physique du soudage.*

Comme ces simplifications possèdent des limites, on pense aux méthodes de réduction d'ordre de modèle. Les principes de base des méthodes a priori et a posteriori de réduction de modèle nous donnent une autre idée pour construire un modèle simple de la SNS. Dans la troisième section, nous allons introduire une série des méthodes de réduction d'ordre de modèle. Cela nous donne des idées pour choisir une méthode pour la SNS dans code_aster . Notons que pour cette étude nous acceptons de développer une approche faiblement intrusive, car nous pouvons compléter les sources de code_aster .

Les raisons favorables au choix de l'hyper-réduction sont exposée à la fin de ce chapitre. On rappelle également quelques limites de cette approche, dont certaines sont traitées dans ce mémoire.

1.1 Contexte de l'étude

Cette section décrit les principes de bases du soudage : la définition, les applications et les différentes techniques. Les procédés de soudage sont détaillés pour expliquer la complexité pour l'opération de soudage. Elle dépend de plusieurs paramètres donc les études paramétriques sont demandées pour le calcul du soudage. En plus, on introduit le contexte industriel avec le cas du soudage multipasse.

1.1.1 Soudage et ses procédés

Le soudage est un moyen d'assemblage permanent. Il a pour objet d'assurer la continuité de la matière à assembler. Dans le cas des métaux, cette continuité est réalisée à l'échelle de l'édifice atomique. En dehors du cas idéal où les forces interatomiques et la diffusion assurent lentement le soudage des pièces métalliques mises entièrement en contact suivant des surfaces parfaitement compatibles et exemptes de toute pollution, il est nécessaire de faire intervenir une énergie d'activation pour réaliser rapidement la continuité recherchée.

Le soudage est un processus de fabrication qui relie les matériaux, habituellement des métaux ou des matières thermoplastiques, en provoquant la fusion ou par la diffusion locale grâce à un apport de chaleur et éventuellement un apport de métal. Le développement sans cesse croissant de nouveaux procédés toujours plus performants permet de garantir des joints soudés de bonne qualité, avec une très bonne reproductibilité.

Dans le secteur de l'énergie, l'opération de soudage est souvent appliquée aux aciers de tout type avec le procédé de soudage à l'arc électrique avec les électrodes non fusibles TIG (Tungstène Inert Gas) ou le procédé de soudage à l'arc avec les électrodes enrobées. Ces deux types de procédé sont présentés par la suite, ainsi que les paramètres procédés qui leur sont respectivement associés.

Soudage à l'arc à l'électrode enrobée

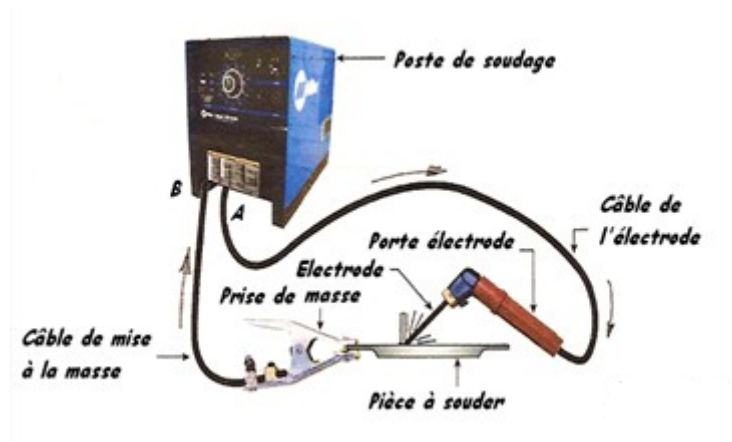


FIGURE 1.1 – Système d'installation de soudage à l'arc à l'électrode enrobée [52]

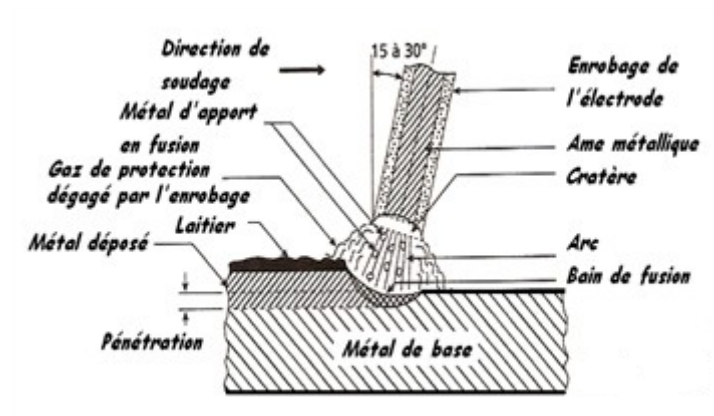


FIGURE 1.2 – Zone de soudure dans le procédé SAE [52]

Le soudage à l'arc à l'électrode enrobée (SAE), appelé SMAW (Shielded Metal Arc Welding) en anglais, est un procédé de soudage à l'arc manuel qui utilise une électrode consommable recouverte avec un flux pour poser la soudure. L'électrode enrobée, ou baguette de soudage, est constituée d'une âme métallique et d'un enrobage.

Un courant électrique à partir d'une alimentation est utilisé pour former un arc électrique entre l'électrode et les métaux à assembler. Lorsque l'on approche l'électrode enrobée des pièces à assembler, il se crée un arc électrique qui dégage un fort pouvoir calorifique qui provoque la fusion de l'électrode (cf. figure [figure 1.1](#)). Au moment où la soudure est posée, le revêtement du flux de l'électrode se désintègre, dégageant des vapeurs qui servent de gaz de protection et fournissant une couche de laitier (slag en anglais), les deux protègent la soudure contre la contamination atmosphérique (cf. [figure 1.2](#)).

Après les laitiers durcissent en refroidissant, il faut les relever pour dégager le cordon de soudure. Comme l'électrode fond au fur et à mesure que la soudure progresse, le soudeur doit périodiquement arrêter de souder, enlever le reste d'électrode et insérer une nouvelle électrode dans le support de l'électrode. Cette activité, combinée avec l'enlèvement des laitiers, réduit le temps que le soudeur peut consacrer à la soudure proprement dite. Ce qui fait du procédé SAE l'un des moins efficaces. Selon [18], la proportion de temps que l'opération consacre à déposer le métal d'apport est de l'ordre de 25%.

Cependant, en raison de la souplesse du procédé et de la simplicité de son fonctionnement, le SAE est l'un des premiers et des plus appréciés des procédés de soudage. Il domine les autres procédés de soudage dans l'industrie en ce qui concerne la maintenance et la réparation. Quoiqu'il en soit le procédé SAE continue à être largement utilisé dans la construction de structures d'acier lourdes et dans la fabrication industrielle.

Soudage à l'arc avec l'électrode non fusible (procédé TIG)

Un arc électrique est établi entre l'extrémité d'une électrode réfractaire en tungstène (qui peut être en tungstène pur avec le pourcentage de 1 % et 2 % ou en Zir-

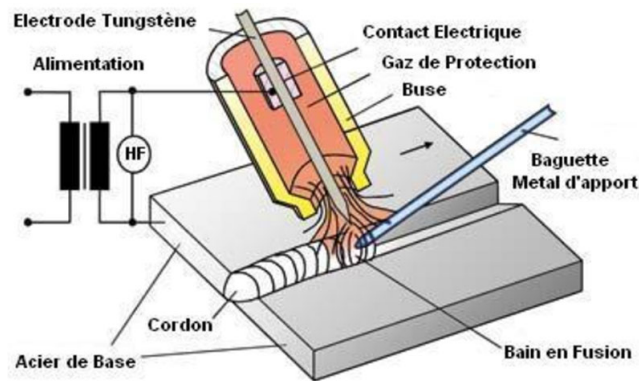


FIGURE 1.3 – Schéma du procédé TIG

conium mais ce dernier type est réservé au soudage de l'aluminium) et la pièce à souder, sous la protection d'un gaz inerte (argon, hélium ou mélange argon-hélium). Le métal d'apport est ajouté si nécessaire sous forme d'une baguette ou d'un feuillard placé dans le bain de fusion et ne doit pas traverser l'arc électrique ni venir en contact avec la pointe de l'électrode.

Le soudage TIG (Tungstène Inert Gas), appelé GTAW (Gas Tungsten Arc Welding) aux États-Unis, est un procédé de soudage à l'arc avec une électrode non fusible, en présence (ou pas) d'un métal d'apport. L'électrode et le bain fondu sont protégés contre l'oxydation de l'air par un bouclier de gaz inerte, généralement de l'argon pur. Parfois un mélange Argon-Hélium est utilisé pour augmenter la pénétration du bain de fusion, l'ajout d'Hélium permettant d'augmenter la tension d'arc en raison du potentiel d'ionisation plus élevé de celui-ci. L'Hydrogène, parfois présent dans le mélange gazeux, joue un rôle similaire à l'Hélium (cf. [figure 1.3](#)).

Contrairement à d'autres procédés de soudage comme le laser ou le faisceau d'électrons, qui mettent en jeu de fortes densité d'énergie ($>10^6$ W/cm²) et provoquent la vaporisation d'une partie du métal, le TIG ne provoque que la fusion du métal, avec dans certain cas une vaporisation très localisée.

Le soudage TIG n'apporte que des calories à la pièce à souder, et s'effectue sans métal d'apport, contrairement à d'autres procédés à l'arc (électrode enrobée, MIG, MAG, ...). Néanmoins, d'après [27], un supplément de matière peut être apporté, sous forme de fil ou baguette. Le métal d'apport peut être de même constitution que le métal de base (soudage homogène), ou de constitution différente (soudage hétérogène).

Le soudage TIG est un procédé facilement automatisable, il est très utilisé, entre autre, dans l'industrie nucléaire pour la réalisation des tuyauteries de circuit primaire ou secondaire des centrales nucléaires de type REP. Le TIG est en effet bien adapté pour la fabrication de tubes roulés soudés en acier inoxydable austénitique. Normalement on impose le courant constant avec pôle positif relié à la pièce à souder (polarité directe), qui permet de localiser le plus grand apport de chaleur sur le métal à fondre.

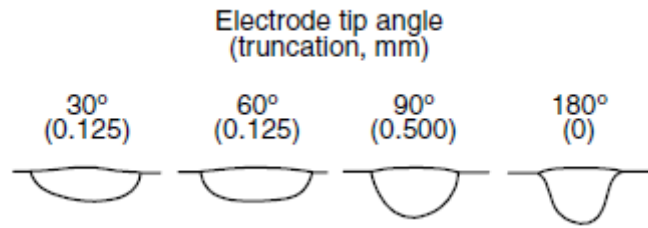


FIGURE 1.4 – Effet de l’angle de la pointe de tungstène sur l’arc [45]

Paramètres du procédé de soudage

Dans la plupart des procédés de soudage, la torche et/ou l’arc électrique sont mobiles ce qui permet de mieux assurer la continuité de matériaux. En particulier dans le procédé TIG automatique, le soudage est effectué par un robot, ce qui permet de contrôler la vitesse de déplacement de la torche, c’est-à-dire que l’on peut imposer une vitesse constante ou bien la faire varier en cours de soudage. En revanche, dans le procédé SAEE, la vitesse est difficile à connaître car elle est imposée manuellement.

Les procédés à l’arc de soudage sont alimentés à partir d’une source électrique, les grandeurs physiques importantes sont l’intensité du courant électrique (A), la tension (V) et la vitesse qui forment la puissance électrique. La puissance réelle est toujours inférieure à la puissance de la source, le rendement dépend de plusieurs facteurs, il est souvent très difficile à mesurer précisément. Même entre deux opérations de soudage consécutives, ce coefficient n’est pas égal, à cause de plusieurs raisons. Par exemple dans [45], pendant le procédé TIG, la forme de la pointe de l’électrode affecte la forme et la distribution de la densité de puissance de l’arc. Dès que la pointe de l’électrode devient émoussée, le diamètre de l’arc est réduit et la distribution de densité de puissance augmente. L’arc devient plus serré quand l’angle de la pointe de tungstène augmente. Ceci a des conséquences non seulement la quantité du gaz sortant mais aussi sur la forme du bain de fusion (cf. [figure 1.4](#)).

1.1.2 Cas industriel

En général, la soudure produit des déformations et des contraintes résiduelles, ce qui influe sur sa qualité et sa résistance mécanique. Bien que de nombreux ingénieurs et chercheurs aient fait de grands efforts pour contrôler les défauts de soudage, des problèmes d’ingénierie restent ouverts. Il est nécessaire de simuler numériquement le soudage pour prévoir les déformations et contraintes résiduelles ainsi que les défauts des pièces soudées.

La méthode des éléments finis est un outil d’analyse numérique puissant utilisé pour anticiper des problèmes de soudage. Pour la modélisation du soudage, il existe plusieurs paramètres comme les paramètres du procédé, les propriétés des matériaux, les conditions aux limites, dont certains sont mal connus ce qui implique de réaliser plusieurs calculs pour l’analyse paramétrique. Nous proposons de développer une étude numérique de l’influence de ces paramètres sur les contraintes résiduelles de soudage en exploitant une méthode d’hyper-réduction permettant de réaliser des études paramétriques en plus grand nombre et sur plus de paramètres, tout en

conservant une durée d'étude raisonnable. Ce type d'étude paramétrique a pour but de mieux comprendre l'effet des paramètres de soudage afin de mieux les choisir.

Dans le cadre du projet **Simuler Pour Anticiper les Réparations** (SPAR), le groupe (P18) *Modélisation sous incertitude, Simulation et Physique du Soudage et des Procédés* d'EDF-R&D étudie les méthodes de réparation par soudage en faisant notamment la SNS pour prévoir les effets du soudage. Une des applications du projet SPAR concerne les tuyauteries du circuit secondaire dans les REP qui peuvent présenter une sous-épaisseur localement. Des réparations doivent alors être engagées pour assurer la résistance à la pression de ces tuyaux. Parmi les différentes solutions de réparation, le rechargement par l'extérieur et par soudage est envisagé pour rétablir l'épaisseur nécessaire permettant de répondre simplement à la présence de ces défauts [3]. Par la suite, on parlera de rechargement de type Overlay lorsque la surépaisseur est déposée sur toute la circonférence.

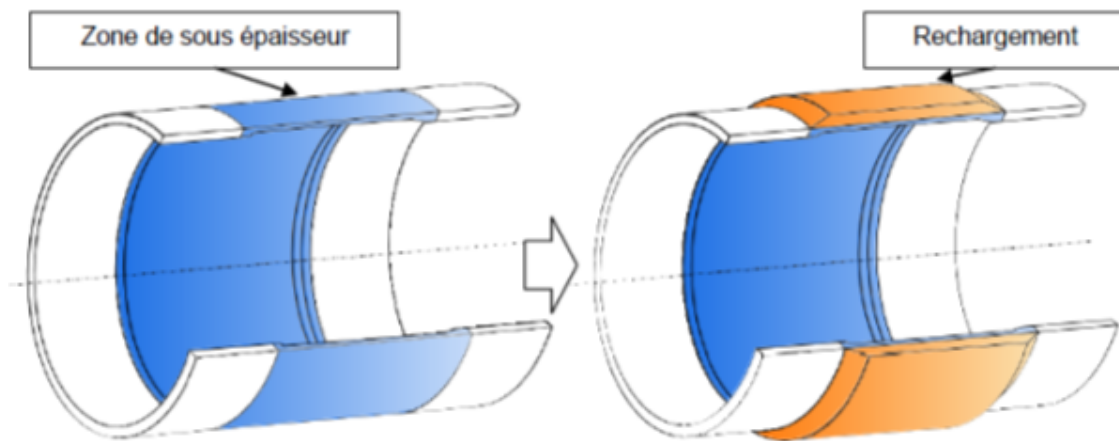


FIGURE 1.5 – Rechargement par soudage de type Overlay à l'extérieur sur la zone sous-épaisseur [3]



FIGURE 1.6 – Schéma du soudage multipasse dans le rechargement par soudage de type Overlay [3]

Le principe des rechargements par soudage est de constituer une surépaisseur résistante, sur la circonférence externe du tuyau (cf. [figure 1.5](#)). Il s’agit donc dans ce projet de retrouver par la simulation, en temps de calcul raisonnables les déformations globales ainsi que les contraintes résiduelles engendrées par le rechargement de type Overlay. Ce type de chargement demande normalement plusieurs passes de soudure (cf. [figure 1.6](#)). Dans ce projet, le soudage multipasse apparaît comme un mode d’assemblage très fréquent mais pose un problème de temps de simulation. Par exemple, dans [\[3\]](#), le nombre de passe est d’environ 200, avec un temps de calcul pour chaque passe de 20 heures, et par conséquent environ une demie année pour réaliser le calcul complet. C’est pourquoi nous souhaitons réduire la durée des simulations afin de prédire le comportement et les conséquences du soudage sur les structures soudées.

1.2 Etudes du soudage et son modèle de simulation

Le contexte général et industriel sont présentés dans la [section 1.1](#). Cependant, pour résoudre ce problème, nous devons comprendre les difficultés des contextes. C’est pour ça que nous trouvons dans cette section les explications du soudage et sa modélisation éléments finis. Nous commençons par les phénomènes physiques qui nous permettent d’écrire les équations de bilan pour chaque phénomène et identifier les conditions de chargement. On en déduit en général que la simulation de soudage est un modèle grand et complexe qui prend normalement beaucoup de temps de calcul. Cette section se termine par l’introduction des méthodes simplifiées de SNS qui sont appliquées dans l’industrie, en présentant les avantages et les inconvénients de ces méthodes.

1.2.1 Physique du soudage

Dans l’opération de soudage, les gradients thermiques très localisés mis en jeu lors du soudage engendrent des dilatations locales qui provoquent l’apparition de champs de déformations et de contraintes incompatibles. Pour certains matériaux, l’histoire thermique associée à l’opération de soudage engendre des changements de microstructures à l’état solide qui influencent l’état de contraintes résiduelles et de distorsions du joint soudé [\[8, 70\]](#). Comme expliqué dans [\[9\]](#), on peut alors distinguer deux types de contraintes : les contraintes d’origine thermique engendrées durant toute la durée du processus de soudage et les contraintes d’origine métallurgique (éventuellement) engendrées pendant la durée des transformations de phases métallurgiques.

Du point de vue physique, le gaz de l’électrode en état plasma va fondre la pièce à souder en très haute température. Et comme nous voudrions calculer les contraintes résiduelles, il faut étudier les phénomènes mécaniques qui sont liés avec les phénomènes thermiques et métallurgiques. Ces interactions sont complexes et dépendent des plusieurs paramètres.

Le plasma et le bain fondu

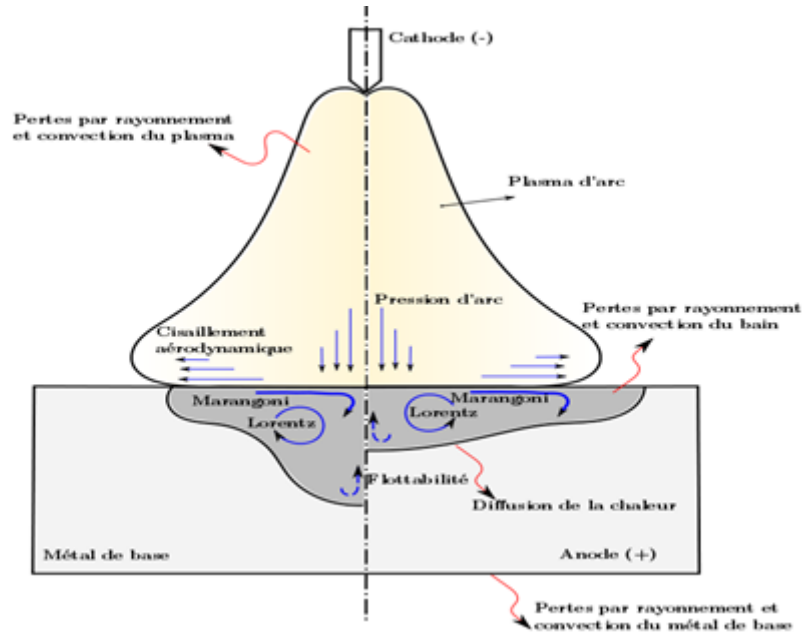


FIGURE 1.7 – Différents phénomènes physiques dans un bain de fusion en soudage TIG [46]

La différence de potentiel entre anode (pièce à souder) et cathode (électrode) crée un courant électrique, qui engendre un champ magnétique auto-induit. Ce champ magnétique crée à son tour des forces de Lorentz qui vont entraîner le gaz en projection vers la surface de la pièce. Ce gaz possède une résistance électrique. L'énergie produite par effet Joule, due au passage du courant, va maintenir le gaz dans un état ionisé (plasma), à haute température. C'est l'énergie calorifique provenant de ce plasma, constitué d'électrons, de particules lourdes (ions, atomes de gaz de protection), d'éléments métalliques vaporisés, et possédant une forte conductivité électrique, qui permet de faire fondre la pièce. Le plasma agit donc à la fois comme un flux de chaleur à la surface et comme une source de courant non uniforme à travers le métal de base [27].

La description physique du bain de fusion fait appel aux disciplines que sont la dynamique des fluides, les transferts thermiques et l'électromagnétisme. Le bain de fusion est soumis à plusieurs forces, volumiques (flottabilité, forces électromagnétiques) ou surfaciques (forces de tension de surface, forces de cisaillement aérodynamiques, pression d'arc) qui conditionnent, selon leurs orientations et leurs amplitudes, l'allure du joint soudé (cf. figure 1.7). En effet, certaines forces impliquées dans la formation du bain de fusion conduisent à des écoulements qui vont favoriser la pénétration du bain et par conséquent conduire à un bain pénétrant, c'est-à-dire un bain étroit et profond. C'est le cas par exemple des forces électromagnétiques et de la pression d'arc. D'autres force comme les forces de cisaillement aérodynamique, au contraire vont rendre le bain plus mouillant, c'est-à-dire plus étalé et peu profond (cf. [46]).

Les différentes interactions

Comme le procédé de soudage est réalisé à haute température, cela implique un phénomène thermo-métallo-mécanique couplé. Par conséquent, une simulation numérique du soudage doit prendre en compte les phénomènes couplés entre eux :

- Thermique \mapsto Métallurgique : les propriétés thermo-physiques dépendent des phase en présence.
- Métallurgique \mapsto Thermique : les transformations métallurgiques s'accompagnent d'effets de chaleur latente qui modifient les distributions de température.
- Thermique \mapsto Mécanique : les variations des caractéristiques mécaniques de matériaux avec la température, et les dilatations et contractions d'origine thermique.
- Mécanique \mapsto Thermique : l'évolution de la déformation irréversible ainsi que des variables internes d'écrouissage conduit à une dissipation d'énergie sous forme de chaleur. Toutefois, cette élévation de température d'origine mécanique est souvent négligeable en comparaison de celle provenant de l'apport de chaleur délivrée par le procédé de soudage, compte tenu des déformations et vitesses de déformation relativement faibles qui sont mises en jeu.
- Métallurgique \mapsto Mécanique : l'influence de l'histoire métallurgique sur l'histoire mécanique résulte principalement de quatre facteurs. Le premier réside dans les dilatations et contractions provoquées par les transformations métallurgiques. Le second facteur est le phénomène de plasticité de transformation. Le troisième est le phénomène de restauration de l'écrouissage. Enfin le dernier facteur correspond au comportement particulier lié à l'aspect multi-phasé du matériau.
- Mécanique \mapsto Métallurgique : l'application d'une contrainte modifie l'énergie stockée dans le matériau et la structure atomique du réseau. La présence d'une sollicitation mécanique peut donc jouer un rôle sur les transformations métallurgiques.

Dans le cadre de cette thèse, nous considérons seulement les aciers inoxydables sans effet de transformation de phase, donc le modèle de soudage reste un problème thermomécanique.

Les déformations et contraintes résiduelles sur la pièce à souder

L'existence de ce phénomène est expliqué dans [73]. Lors du procédé de soudage, un champ de température est appliqué sur la pièce à souder, ce champ est non uniforme, très élevé dans la zone fondue et ZAT. Les gradients thermiques affectent la dilatation thermique donc il existe des zones plastiques dues aux grandes déformations thermiques. Les déformations et contraintes résiduelles de soudage sont produites par la contraction plastique qui est induite par la suite de la dilatation thermique et la contraction dans la partie soudée au cours du procédé thermique. Le chauffage et le refroidissement localisé non uniforme pendant le soudage se traduit par une répartition complexe des contraintes résiduelles dans la zone de joint, ainsi que la déformation ou distorsion indésirables de la structure soudée. En plus, selon [35], le chargement mécanique affecte la déformation plastique sur la pièce à souder

et la transformation de phase implique la déformation interne (dans les joints) dans la microstructure. Lors de tels facteurs affectent les phénomènes, rendent difficile une prédiction précise de la déformation et contrainte résiduelle.

Des méthodes expérimentales sont mises en œuvre pour la mesure des contraintes résiduelles de soudage. Comme, par exemple, la diffraction par rayon X (X-Rayon Diffraction XRD) et le contrôle par ultrasons (Ultrasonic Testing UT). Des résultats de mesures de contraintes résiduelles de soudage sont présentées dans [37]. Les mesures présentées dans la [figure 1.8](#), montrent que les contraintes résiduelles sont maximales dans la zone de liaison. C'est bien normal parce que la température est grande en se formant en état solide (dans la zone fondue ZF, la température est plus grande mais elle est en état fluide), la transformation de phase entre liquide et solide prend en compte la grande différence des microstructures. Donc pour le calcul des contraintes résiduelles, on ne s'intéresse que la zone en état solide, en particulier la ZAT (zone affectée thermiquement).

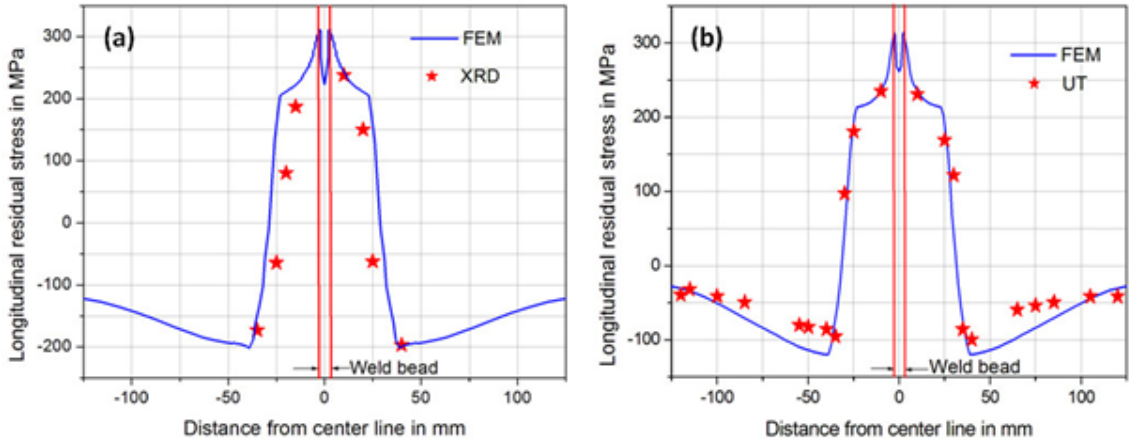


FIGURE 1.8 – Comparaison des contraintes résiduelles entre a) FEM et XRD ;b) FEM et UT [37]

1.2.2 Formulations des problèmes thermomécaniques

Dans ce travail de thèse, la simulation numérique de soudage est réalisée en résolvant un problème thermomécanique (cf. [section 1.2.1](#)). En pratique, dans *code_aster*, on réalise d'abord le calcul thermique pour obtenir le champ de température. Ensuite, on utilise ce champ comme données pour définir la déformation d'origine thermique dans la simulation mécanique dont la loi de comportement est élastoplastique non-linéaire. La température permet également de définir les paramètres matériau. Il s'agit d'un couplage faible des simulations.

Par la suite, de manière séparée, on rappelle la formulation faible du problème thermique, puis celle du problème mécanique

Equation de chaleur

Equations locales. Nous considérons le domaine Ω occupé par la pièce à souder et caractérisé par sa masse volumique ρ , sa chaleur spécifique à pression constante C_p

et une conductivité thermique isotrope λ . La conduction de la chaleur est régie par l'équation de la chaleur, dont l'inconnue est le champ de température $T(\mathbf{x}, t)$, avec $\mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F]$ qui est l'intervalle temporel sur lequel l'évolution thermique est recherchée et $r(\mathbf{x}, t)$ est une source de chaleur donnée. Le calcul thermique s'effectue par la résolution de l'équation non linéaire de la chaleur dans le volume Ω :

$$\dot{\beta}(T) - \operatorname{div}(\lambda \nabla T)(\mathbf{x}, t) = r(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

où β est l'enthalpie. En l'absence de changement de phase on a :

$$\dot{\beta}(T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

Conditions aux limites. L'équation de la chaleur (1.1) doit être complétée par une condition aux limites en tout point de $\partial\Omega$. On ne considère que deux possibilités : un flux de chaleur imposé sur une surface de normale \mathbf{n} ou une température imposée. Les conditions aux limites sont donc, en termes des données T^D et q^D , de la forme :

$$-\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = q^D \quad \text{sur } S^{(q)} \times [0, t^F] ; \quad T = T^D \quad \text{sur } S^{(T)} \times [0, t^F] \quad (1.2)$$

Conditions initiales. Enfin, il faut préciser les conditions initiales, c'est à dire donner le champ de température à l'instant $t = 0$:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

Equilibre thermique. Les équations gouvernant l'équilibre thermique d'un corps se déduisent simplement des équations (1.1) et (1.2) en supposant les grandeurs indépendantes du temps. Il n'y a plus de conditions initiales dans ce cas (1.3), et les équations locales sont :

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) + r = 0 \text{ dans } \Omega, \quad T = T^D \text{ sur } S^{(T)}, \quad -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = q^D \text{ sur } S^{(q)}$$

Formulation faible du problème thermique. La résolution numérique du problème thermique, d'inconnue $T(\mathbf{x}, t)$, passe par une forme faible de l'équation de la chaleur (1.1), des conditions aux limites (1.2) et la condition initiale (1.3). La formulation faible de l'équation de la chaleur peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \beta(T) \omega d\Omega \right) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda \nabla T) \omega d\Omega - \int_{\Omega} r \omega d\Omega = 0 \quad (1.4)$$

En utilisant la relation

$$\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{v}) = f \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

on en déduit que :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda \nabla T) \omega d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla \omega d\Omega - \int_{\partial\Omega} \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \omega dS \quad (1.5)$$

Cette formulation nécessite d'introduire les espaces affine et vectoriel associé noté respectivement $\mathcal{T}(T^D)$ et $\mathcal{T}(0)$. Il s'agit d'espaces de champs de température admissibles, définis par :

$$\mathcal{T}(T^D) = \left\{ T \mid T \text{ continu et régulier sur } \Omega ; T = T^D \text{ sur } S^{(T)} \right\},$$

$$\mathcal{T}(0) = \left\{ T \mid T \text{ continu et régulier sur } \Omega ; T = 0 \text{ sur } S^{(T)} \right\}.$$

La formulation faible du problème thermique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } T(\mathbf{x}, t) \in T^D + \mathcal{T}(0) \text{ avec } T^D \in \mathcal{T}(T^D) \text{ tel que} \\ & \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \beta(T) \omega d\Omega \right) + \int_{\Omega} \lambda \nabla T \nabla \omega d\Omega \\ & = \int_{\Omega} r \omega d\Omega - \int_{S^{(q)}} q^D \omega dS \quad (\forall t \in [0, t^F], \forall \omega \in \mathcal{T}(0)) \\ & T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (1.6)$$

Thermoélastoplasticité non-linéaire

Dans le problème mécanique, nous écrivons les équations locales qu'en théorie doivent vérifier les champs de déplacement \mathbf{u} , de déformation $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et de contrainte $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP), nous avons la relation :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \right) (\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, t^F]. \quad (1.7)$$

La déformation $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ peut être décomposée en trois parties : déformation élastique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$, déformation plastique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et la déformation induite par la dilatation thermique $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T - T_{ref})\tilde{\mathbf{I}}$, avec α le coefficient de dilatation thermique, $T(\mathbf{x}, t)$ le champ de température solution du problème (1.6), T_{ref} la température de référence et $\tilde{\mathbf{I}}$ le tenseur d'identité d'ordre 2 pour les matériaux à dilatation isotrope. On peut en déduire que :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \alpha(T - T_{ref})\tilde{\mathbf{I}} \quad (1.8)$$

L'équilibre du domaine est sollicité par des densités de forces de volume \mathbf{g} , des déplacements \mathbf{u}^D imposés sur une partie $S^{(u)}$ de la frontière $\partial\Omega$ et une densité surfacique d'efforts \mathbf{F}^D sur la partie complémentaire $S^{(F)}$ de $\partial\Omega$. Alors, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{g} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F] \quad (1.9)$$

et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^D \quad \text{sur } S^{(u)} \times [0, t^F] \quad (1.10a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^D \quad \text{sur } S^{(F)} \times [0, t^F] \quad (1.10b)$$

D'après la loi de comportement élastique, on peut toujours écrire :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \iff \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\tilde{\mathbf{S}}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{soit } \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} : \tilde{\tilde{\mathbf{S}}} = \tilde{\tilde{\mathbf{S}}} : \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \tilde{\tilde{\mathbf{I}}} \quad (1.11)$$

où $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{S}}}$ sont respectivement le tenseur de Hooke et de souplesse du matériau en ordre 4. Pour la partie plastique, nous définissons un *domaine d'élasticité* dans l'espace des contraintes, décrit à l'aide d'un *critère* $f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T) \leq 0$ en introduisant aussi la *déformation plastique cumulée* $p(t)$ pour définir la loi d'écoulement plastique :

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{dt} = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T); \quad \dot{p} \geq 0; \quad f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T) \leq 0; \quad \dot{p} f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T) = 0 \quad (1.12)$$

Les équations ci-dessus constituent la *formulation forte* du problèmes mécanique paramétré par la température locale. Elles relèvent de trois catégories essentielles :

- Equations de compatibilité cinématique : (1.7, 1.8, 1.10a),
- Equations d'équilibre : (1.9, 1.10b),
- Equations de comportement : (1.11, 1.12).

On introduit l'ensemble des déplacements *cinématiquement admissibles* :

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}^D) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ continu et régulier sur } \Omega; \mathbf{v} = \mathbf{u}^D \text{ sur } S^{(u)} \right\}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{0}) = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \text{ continu et régulier sur } \Omega; \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } S^{(u)} \right\}$$

On obtient ainsi la formulation faible suivante pour le problème d'équilibre (sous contraintes des équations 1.8, 1.12) :

trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}(\mathbf{u}^D)$ tel que, $\forall t \in [0, t^F]$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}[\mathbf{v}] : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{g} \mathbf{v} d\Omega + \int_{S^{(F)}} \mathbf{F}^D \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}(\mathbf{0}) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \tilde{\mathbf{A}} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}[\mathbf{u}] - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \alpha(T - T_{ref})\tilde{\mathbf{I}}) \\ \frac{d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{dt} &= \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T); \quad \dot{p} \geq 0; \quad f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T) \leq 0; \quad \dot{p}f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, p; T) = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2.3 Conditions aux limites et comportements des matériaux en soudage

Suite aux équations des problèmes thermomécaniques de [section 1.2.2](#), nous considérons le cas particulier du soudage. Ici, nous allons compléter tous les termes dans les formulations faibles en thermique (1.6) et en mécanique (1.13).

Chargements thermomécaniques

Dans la simulation thermique du soudage, il est important de déterminer la source de chaleur qui modélise l'apport de chaleur lors du procédé du soudage. Nous considérons une source volumique, représentée par le terme $r(\mathbf{x}, t)$ dans l'[équation 1.1](#), et dont l'unité est le $W.m^{-3}$. Il existe plusieurs façons de décrire cette fonction, comme dans [\[27\]](#). Dans ce cadre de thèse, nous utilisons deux fonctions : la fonction la plus simple pour la source triangulaire ([A.2](#)) et la plus complexe avec la fonction Goldak ([A.1](#)). Ces deux fonctions, décrites en [annexe A](#), dépendent des paramètres suivants :

- la vitesse du déplacement du procédé suivant la direction soudure (V_s),
- la puissance efficace (produit du rendement avec la tension et l'intensité de l'arc électrique : $Q_0 = \eta UI$),
- les paramètres qui décrivent la répartition spatiale de l'intensité de la source : la section et la largeur dans la direction de soudage pour la source triangulaire; la largeur et la profondeur pour la source Goldak.

Les conditions aux limites données par l'[équation 1.2](#) se composent de la température imposée T^D et du flux de chaleur $q^D = -\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$. La température imposée

est une condition de type Dirichlet. Ce type de condition peut être éliminé dans certains cas (charges cinématiques) :

$$T(\mathbf{x}, t) = T^D(\mathbf{x}, t) \text{ sur } S^{(1)} \quad (1.14)$$

Par contre, les flux de chaleur sont des conditions de type Neumann. Nous pouvons énumérer d'abord le flux normal imposé :

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = g(\mathbf{x}, t) \text{ sur } S^{(2)}. \quad (1.15)$$

où $g(\mathbf{x}, t)$ est une fonction de la variable d'espace et/ou de temps, \mathbf{n} désigne la normale à la frontière $S^{(2)}$. Un autre type de chargement est modélisé par les transferts convectifs sur les bords du domaine :

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = h_{ext} (T_{ext} - T(\mathbf{x}, t)) \text{ sur } S^{(3)}. \quad (1.16)$$

où T_{ext} représentant la température du milieu extérieur, et h_{ext} indique le coefficient d'échange convectif sur la frontière $S^{(3)}$. Il existe également la condition aux limites par rayonnement à l'infini de corps gris :

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \sigma_{th} \epsilon_{th} \left[(T + 273.15)^4 - (T_{\infty} + 273.15)^4 \right] \text{ sur } S^{(4)} \quad (1.17)$$

Les caractéristiques à définir lors de la définition de ce chargement sont l'émissivité ϵ_{th} , la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma_{th} = 5.67 \times 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$ et la température à l'infini T_{∞} . Les valeurs de température sont exprimées en degrés Celsius, $-273.15^\circ C$ est la température du zéro absolu.

Pendant les essais de soudage, dans certains cas, la température imposée (1.14) et le flux normale imposé (1.15) ne sont pas présents. Par contre, l'échange par convection (1.16) et par rayonnement (1.17) sont indispensables. Ces chargements sont définis sur la même frontière appelée $S^{(q)}$. Alors, nous avons la condition thermique en soudage :

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = h_{ext} (T_{ext} - T) + \sigma_{th} \epsilon_{th} \left[(T + 273.15)^4 - (T_{\infty} + 273.15)^4 \right] \text{ sur } S^{(q)}. \quad (1.18)$$

Depuis l'équation 1.18, nous prenons en compte deux paramètres :

- émissivité du matériau ϵ_{th} que l'on estime être dans l'intervalle $[0.6, 0.9]$
- le coefficient d'échange convectif h_{ext} que l'on prend entre 5 et $25 W.m^{-2}.K^{-1}$.

Dans la simulation mécanique de soudage, nous avons seulement trois types de chargements y compris le chargement thermique. Ce sont le déplacement imposé où on encastre la pièce à souder pour éviter le mouvement de corps rigides. Sinon, une pression sur une surface spécifique est nécessaire pour fixer la pièce soudée. Nous ne traitons pas la force de volume (en particulier la gravité). Donc, l'équation 1.9 devient :

$$\text{div } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F]$$

Comportement des matériaux

Les matériaux choisis pour les essais de soudage sont les aciers inoxydables. Ici, nous avons deux types d'aciers : le 316L et le revêtement inoxydable (ou 308L), qui constituent respectivement le métal de base et le métal d'apport de l'opération de soudage. Tous les paramètres physiques en thermomécanique sont fournis dans la [section B.1](#) pour acier 316L et dans la [section B.2](#) pour le revêtement inoxydable. Par la suite, nous présentons la loi de comportement choisie pour modéliser le comportement thermomécanique des deux aciers.

Les données thermiques sont présentées dans la [figure 1.9](#), sont principalement la conductivité $\lambda(T)$ ([figure 1.9a](#)) et la capacité volumique $\rho C_p(T)$ ([figure 1.9b](#)). Ces paramètres dépendent de la température. Pour la conductivité, la dépendance est presque linéaire, il n'y a pas beaucoup de différence de valeurs entre les deux matériaux, surtout en haute température. Par contre, on trouve que la fonction de capacité volumique est non linéaire pour les températures les plus hautes.

Dans la partie mécanique, on considère le coefficient de dilatation thermique ([figure 1.10b](#)) pour nous permettre de calculer la déformation thermique. Nous avons également le module de Young ([figure 1.10a](#)). Ces deux paramètres dépendent de la température, avec une dépendance non-linéaire à haute température.

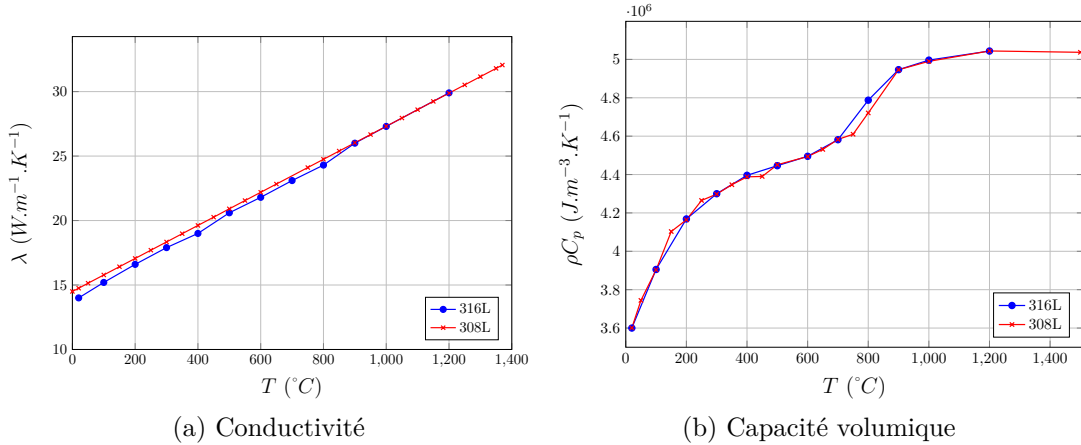


FIGURE 1.9 – Paramètres thermiques des aciers inoxydables 316L et 308L.

Pour décrire la plasticité, on utilise le critère de von Mises, qui s'écrit :

$$\sigma_{eq} - R \leq 0$$

où R est la *fonction d'écrouissage* et σ_{eq} est la *contrainte équivalente de von Mises*, définie par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{s}} : \tilde{\mathbf{s}}} \text{ avec } \tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \tilde{\mathbf{1}} \quad (1.19)$$

$\tilde{\mathbf{s}}$ étant le *déviateur de contraintes*. Les relations de comportement plastique depuis l'[équation 1.12](#) deviennent :

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{dt} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma_{eq}} \tilde{\mathbf{s}}; \quad \dot{p} \geq 0; \quad \sigma_{eq} - R \leq 0; \quad \dot{p}(\sigma_{eq} - R) = 0.$$

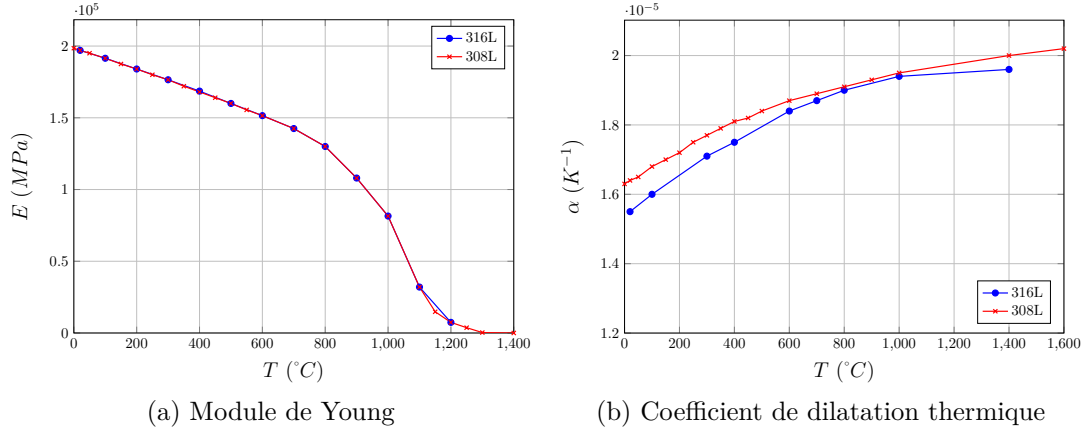


FIGURE 1.10 – Paramètres mécaniques des aciers inoxydables 316L et 308L.

On choisit un écrouissage isotrope non linéaire pour modéliser le comportement élastoplastique des matériaux considérés (316L et 308L). Dans ce cas, l'écrouissage doit être caractérisé par une fonction tabulée qui définit la contrainte d'écoulement par traction σ en fonction de la déformation totale ε et de la température T . Cette fonction $\sigma(\varepsilon, T)$ est déduite d'une série d'essais de traction à différentes températures et à même vitesse de déformation de $0.03\%/s$ (voir [section B.1](#)). En interne des routines de *code_aster*, et de manière transparente pour l'utilisateur, la fonction $\sigma(\varepsilon, T)$ est transformée en la fonction d'écrouissage $R(p, T)$ de la façon suivante : à une température donnée, on va utiliser le premier point pour trouver le module de Young ($E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$ où $\varepsilon_1 \neq 0$). En $p_1 = 0$, nous avons $R(0) = \sigma_1 = \sigma_Y$ où σ_Y la limite d'élasticité. Les autres points de la courbe $(\varepsilon_i, \sigma_i)$ deviennent les points $(p_i, R(p_i))$ avec $p_i = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E}$, $R(p_i) = \sigma_i$.

Remarque

Les données pour les courbes de traction de l'acier 316L ([tableau B.3](#)) sont mesurées avec une limite de conventionnelle d'élasticité à 0.2%. Pour avoir la cohérence avec le module de Young depuis le [tableau B.2](#), il faut retirer 0.2% de toutes les valeurs de déformation. Depuis la [figure 1.11](#), nous pouvons trouver des courbes de contrainte-déformation par traction simple ([figure 1.11a](#)) et la transformation en fonction d'écrouissage ([figure 1.11b](#)). Par contre, les données de l'acier 308L ([tableau B.6](#)) sont fournies par la courbe $(\varepsilon_i^p, \sigma_i)$. On peut utiliser les valeurs de la limite d'élasticité ([tableau B.5](#)) à différente température pour reconstruire la courbe $(\varepsilon_i, \sigma_i)$ avec $\varepsilon_i = \varepsilon_i^p + \frac{\sigma_Y}{E}$. On peut en déduire que : $p_i = \varepsilon_i^p - \frac{\sigma_i - \sigma_Y}{E}$.

Soit T la température considérée, s'il existe k tel que $T \in [T_k, T_{k+1}]$, où k désigne l'indice des courbes de traction pour la température T_k , on construit point par point la courbe $R(p, T)$ en interpolant à partir de $R(p, T_k)$ et $R(p, T_{k+1})$ pour toutes les valeurs de p de la réunion des valeurs des abscisses des courbes k et $k + 1$.

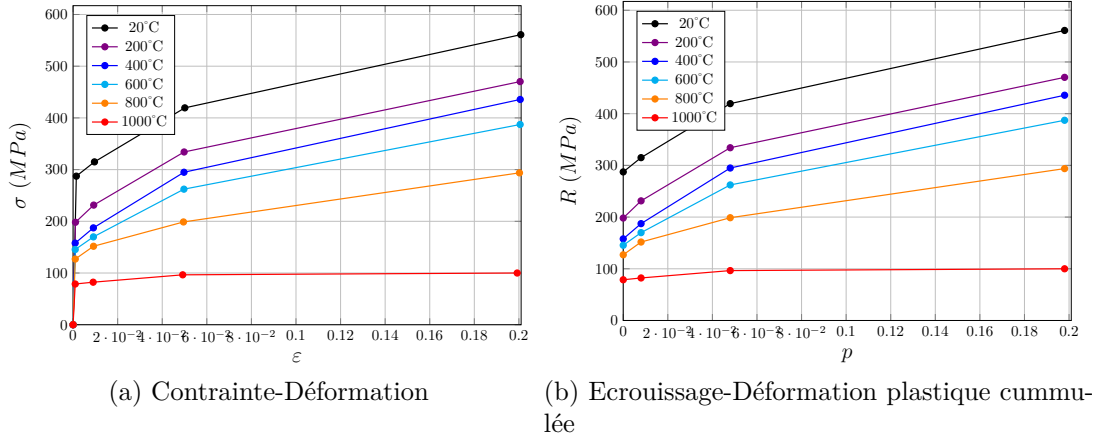


FIGURE 1.11 – Données pour la relation plastique de l'acier 316L.

1.2.4 Modèle éléments finis pour le soudage

Introduction

La Méthode des Eléments Finis (*Finite Element Method*) (FEM) est la méthode standard pour la conception et le dimensionnement de structures [28, 15]. Elle consiste à utiliser une approximation des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

La FEM en effet exploite un maillage introduisant une discrétisation spatiale, donc \mathcal{N}_u degrés de liberté en mécanique et \mathcal{N}_T degrés de liberté en thermique. Les composantes $(q_i)_{i=1}^{\mathcal{N}_u}$ représentent les valeurs nodales du champ de déplacement \mathbf{u} par les fonctions de forme $(\varphi_i)_{i=1}^{\mathcal{N}_u}$. On note $(\theta_i)_{i=1}^{\mathcal{N}_T}$ les valeurs nodales de température et $(\varphi_i)_{i=1}^{\mathcal{N}_T}$ les fonctions de forme associées. Les champs approchés par la FEM s'écrivent alors de la façon suivante :

$$T_{FEM}(\mathbf{x}, t) = T^D + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} \varphi_i(\mathbf{x}) \theta_i(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F] \quad (1.20a)$$

$$\mathbf{u}_{FEM}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_u} \varphi_i(\mathbf{x}) q_i(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F] \quad (1.20b)$$

Formulations éléments finis des problèmes thermomécaniques du soudage

Tout d'abord, on considère la simulation thermique. D'après la section 1.2.3, le calcul du soudage est un problème thermomécanique non linéaire. Maintenant, on définit les ensembles des champs de température admissibles dans la méthode des éléments finis :

$$\mathcal{T}_h = \left\{ \omega \mid \omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} \varphi_i(\mathbf{x}) \theta_i(t) \right\} \subset \mathcal{T}(0).$$

On a bien évidemment que $\mathcal{T}_h = \text{span}(\varphi_i)_{i=1}^{\mathcal{N}_T}$. La substitution des équation 1.5 et équation 1.18 dans l'équation 1.4 nous donne la nouvelle formulation faible pour le

problème thermique du soudage :

$$\begin{aligned}
 &\text{trouver } T(\mathbf{x}, t) \in T^D + \mathcal{T}_h \text{ tel que : } \forall t \in [0, t^F], \forall \omega \in \mathcal{T}_h \\
 &\quad \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \beta(T) \omega d\Omega \right) + \int_{\Omega} \lambda(T) \nabla T \nabla \omega d\Omega - \int_{\Omega} r \omega d\Omega \\
 &\quad - \int_{S(q)} \left\{ h_{ext} (T_{ext} - T) + \sigma_{th} \epsilon_{th} \left[(T + 273.15)^4 - (T_{\infty} + 273.15)^4 \right] \right\} \omega dS = 0 \\
 &\quad T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Pour le problème mécanique, nous définissons un sous-espace des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{C}_h = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N_u} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) q_i(t) \right\} \subset \mathcal{C}(0).$$

La formulation FEM de la simulation mécanique avec une évolution thermique est résumée par :

$$\begin{aligned}
 &\text{trouver } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{u}^D + \mathcal{C}_h \text{ avec } \mathcal{C}_h = \text{span}(\boldsymbol{\varphi})_{i=1}^{N_u} \text{ tel que} \\
 &\quad \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e[\mathbf{u}] : \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(T) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}[\mathbf{v}] d\Omega - \int_{S(F)} \mathbf{F}^D \mathbf{v} dS = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_h \\
 &\quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \\
 &\quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \alpha(T) \cdot (T - T_{ref}) \tilde{\mathbf{I}} \\
 &\quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{dt} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma_{eq}} \tilde{\mathbf{s}} \quad \dot{p} \geq 0 \quad \sigma_{eq} - R(p) \leq 0 \quad \dot{p}[\sigma_{eq} - R(p)] = 0
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Algorithme de Newton-Raphson pour le modèle non-linéaire

L'intégration temporelle des équations éléments finis est réalisée à l'aide de schémas implicites qui conduisent à la résolution d'une suite de problèmes linéaires consistant à annuler un vecteur résidu. Ce vecteur est noté de façon générique $\mathbf{r}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^N$, où $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur d'une prévision des variables nodales, en thermique ou en mécanique. L'étape de correction linéaire correspond alors au système de grande taille suivant :

$$\mathbf{J} \delta \mathbf{q} = -\mathbf{r}(\mathbf{q}) \tag{1.23}$$

où $\delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ est la correction recherchée des variables nodales et \mathbf{J} est la matrice jacobienne lorsque l'algorithme de Newton Raphson est utilisé.

La complexité numérique de cette étape de résolution peut représenter bien plus que 50% de la complexité totale de la simulation éléments finis. La réduction du nombre d'inconnues de cette étape linéaire vise à en réduire la complexité numérique pour accélérer les simulations. L'ordre d'un modèle étant son nombre d'inconnues, on parle alors de réduction d'ordre de modèle.

1.2.5 Méthodes simplifiées pour la SNS

Depuis les sections précédentes, nous avons montré que la SNS est complexe, comportant des calculs thermomécaniques couplés avec des équations non linéaires. De plus, dans le cas industriel, nous étudions de grandes structures avec des maillages raffinés dans la zone soudée. La durée des simulations est un frein à l'analyse de l'effet des paramètres du procédé. Cette section va introduire quelques méthodes simplifiées pour la SNS qui sont déjà disponibles.

Méthode "macro-dépôt"

Le calcul des contraintes résiduelles par la modélisation du soudage suit un processus très habituelle : Tout d'abord, on fait des mesures sur la maquette (thermique, thermocouple, etc.) et des macrographies. Ensuite, à partir des résultats expérimentaux, on définit l'apport de chaleur par une source de chaleur équivalente, et on trouve le champ de température imposé qui est utilisé dans les simulations mécaniques. L'apport de chaleur est calibré manuellement à l'aide des capteurs et la modélisation devient un calcul thermomécanique complet.

La méthode « macro-dépôt » consiste en une SNS simplifiée grâce à des « macro-dépôts » qui rassemble des passes en un bloc constitué de plusieurs passes de soudage. On obtient ainsi un état résiduel de fin de soudage. L'apport de chaleur dans les macro-dépôts (flux volumique imposé) est recalé de manière à reproduire sur le modèle 3D un état de référence. Cet état de référence est défini par des études paramétriques intermédiaires sur un modèle 2D multipasse. C'est-à-dire que l'on doit réaliser les simulations mécaniques sur tous les passes en 2D pour trouver un état mécanique de référence. Il faut donc faire le choix d'un l'état mécanique de référence.

Par exemple dans la modélisation du cas OVERLAY du projet SPAR-2, une simulation complète de l'ensemble des 150 cordons n'est pas envisageable si l'on considère les temps de calcul nécessaire (200 x 20h en moyenne pour un calcul sur *code_aster*). Pour diminuer les temps de calcul, nous faisons l'hypothèse de la macro-déposition qui consiste à déposer numériquement tous les cordons d'une couche en une fois [3].

Méthode NRP (Nombre de Passes Réduites)

La méthode NRP (Nombre de Passes Réduites) suit la même démarche qu'un calcul multipasse classiques, mais un nombre réduit de passes est considéré. On va choisir les passes essentielles pour la SNS, grâce au rayon de la zone plastique générée par la dernière passe déposée. L'effet thermique des passes incluses dans le rayon de zone plastique de la dernière passe déposée n'est pas considéré. Cette zone plastique est déterminée soit analytiquement grâce aux paramètres technologiques et matériaux soit numériquement.

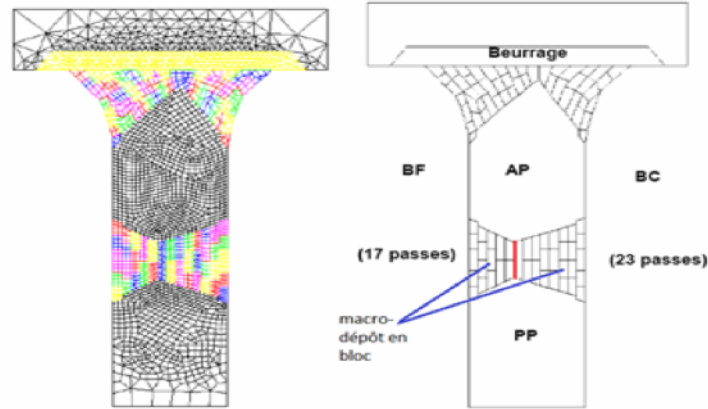


FIGURE 1.12 – Schéma des blocs qui regroupent les passes dans la méthode « macro-dépôt » [32]

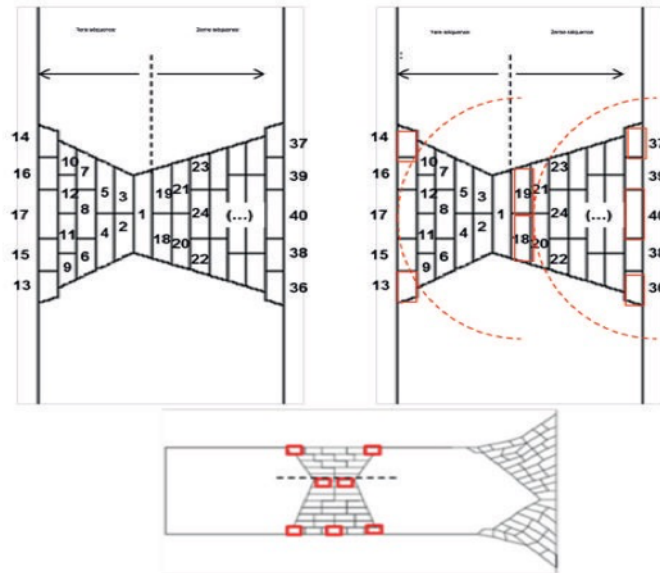


FIGURE 1.13 – Schéma de sélection des passes par la méthode RNP pour la soudure en X [32]

Application à une soudure en X pour la méthode « macro-dépôt » MD et la méthode de nombre de passe réduite NPR

Les deux méthodes ci-dessus sont appliquées dans [32]. On considère ici le cas d'une soudure en X de 40 passes qui est représentative de celle rencontrée sur une cloison d'un générateur de vapeur. A titre d'exemple et pour réduire les temps de calculs on raisonne sur un modèle 2D uniquement. La calibration de l'apport de chaleur des macro-dépôts est issue des études existantes sur modèle 3D. Les blocs de passes sont présentés dans la [figure 1.12](#), se composent d'un bloc coté BF et d'un bloc coté BC. En plus, pour la méthode NPR le choix des passes est illustré dans la [figure 1.13](#) : seulement 7 cordons sont considérés au lieu de 40 dans le

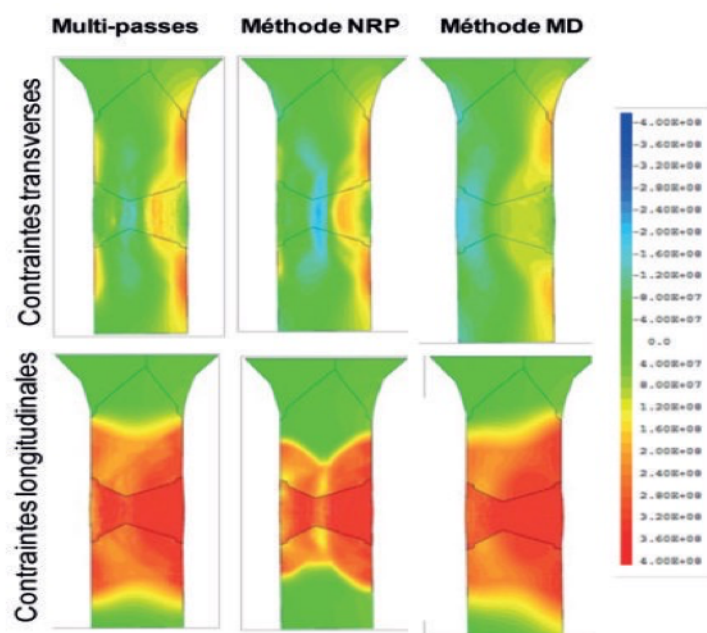


FIGURE 1.14 – Champ de contrainte résiduelle de soudage dans les directions transverses et longitudinales selon différentes méthodes [32]

modèle complet. La figure 1.14 montre la comparaison entre les deux méthodes et la simulation multipasse classique, et le tableau 1.1 vous donne le temps de calcul dans les trois cas.

L'état de contraintes à l'issue de soudage est très bien reproduit par les deux méthodes simplifiées. La méthode de macro-dépôts divise les temps de calcul d'un facteur 20. Elle est utilisée sur des modèles 3D de composants. Elle nécessite néanmoins des études paramétriques intermédiaires pour définir l'apport de chaleur et ne prend pas en compte l'effet de la dernière passe de soudage. La méthode NRP, ne divise les temps de calculs que par 10, demande une prévision des déformations plastiques perfectible mais elle présente l'avantage d'être prédictive et ouvre de nouvelles perspectives industrielles.

Temps réel indicatif sur machine (*4 CPU)			
	Modèle multipasse	Méthode NRP	Méthode « macro-dépôt »
Modèle 2D	6 heures	35 mins	18 mins
Modèle 3D	1 mois	105 heures	35 heures

TABLE 1.1 – Comparaison du temps de calcul dans la soudure en X

Méthode "locale/globale"

L'approche locale/globale s'appuie sur deux niveaux de modélisation et vise à coupler les résultats obtenus sur un modèle local (premier niveau) avec une simulation globale sur l'ensemble de la structure (deuxième niveau).

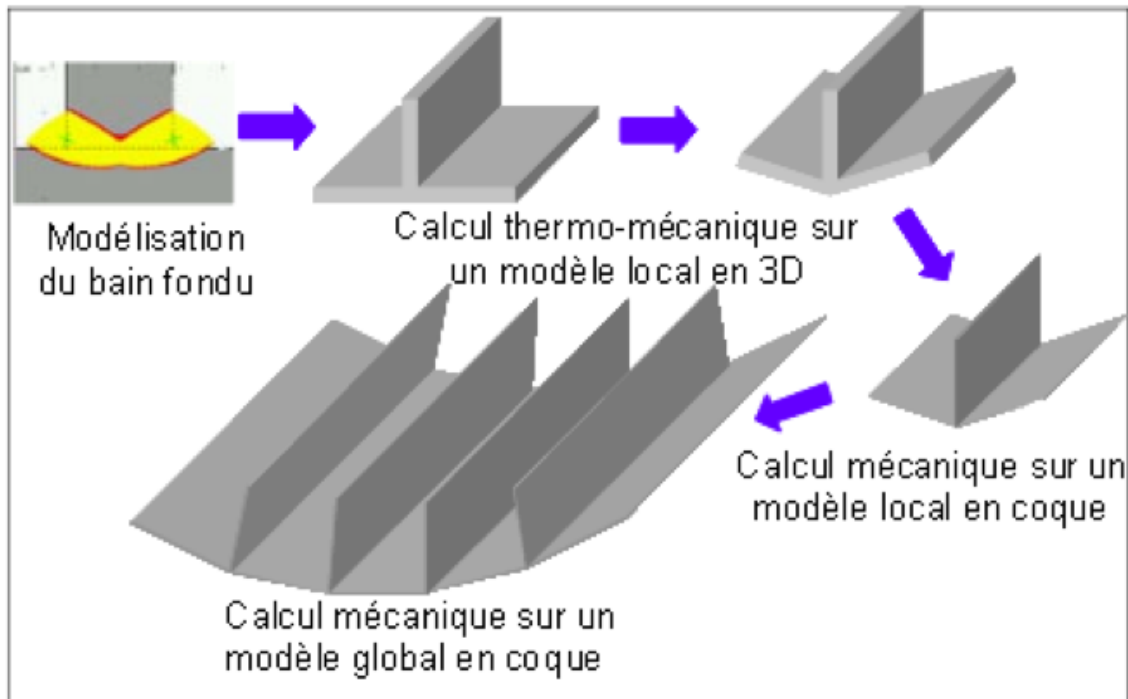


FIGURE 1.15 – Description de la méthode locale/globale [30]

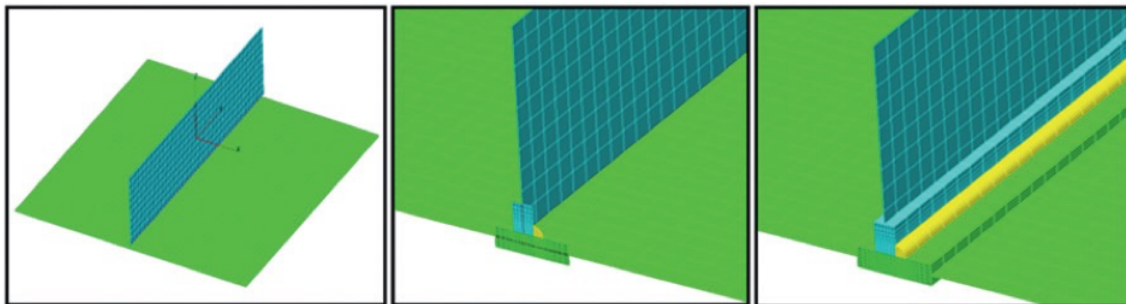


FIGURE 1.16 – Méthode « locale/globale » dans le projet MUSICA [10]

Les déformations plastiques induites par le soudage sont supposées être localisées à proximité du joint soudé. Il est donc possible de déterminer les déformations plastiques en utilisant un modèle 3D local, ne concernant que le joint et son voisinage. Au niveau de la structure complète, la distorsion globale est supposée due aux déformations plastiques locales induites par le soudage et le comportement global peut être considéré comme élastique. Les déformations plastiques locales sont donc reportées, en tant que déformations initiales, dans un modèle 3D global, concernant cette fois toute la structure et étant évidemment beaucoup moins raffiné dans la zone soudée. Ensuite une simple analyse élastique est menée pour déterminer les distorsions résiduelles (cf. [30]).

La simulation locale doit refléter les conditions de soudage telles qu'elles existent sur la structure réelle, ce qui demande de choisir des conditions aux limites adaptées. Les problèmes soulevés par cette approche sont doubles. Il s'agit tout d'abord de retrouver des distributions de températures correctes sur un modèle incomplet de la

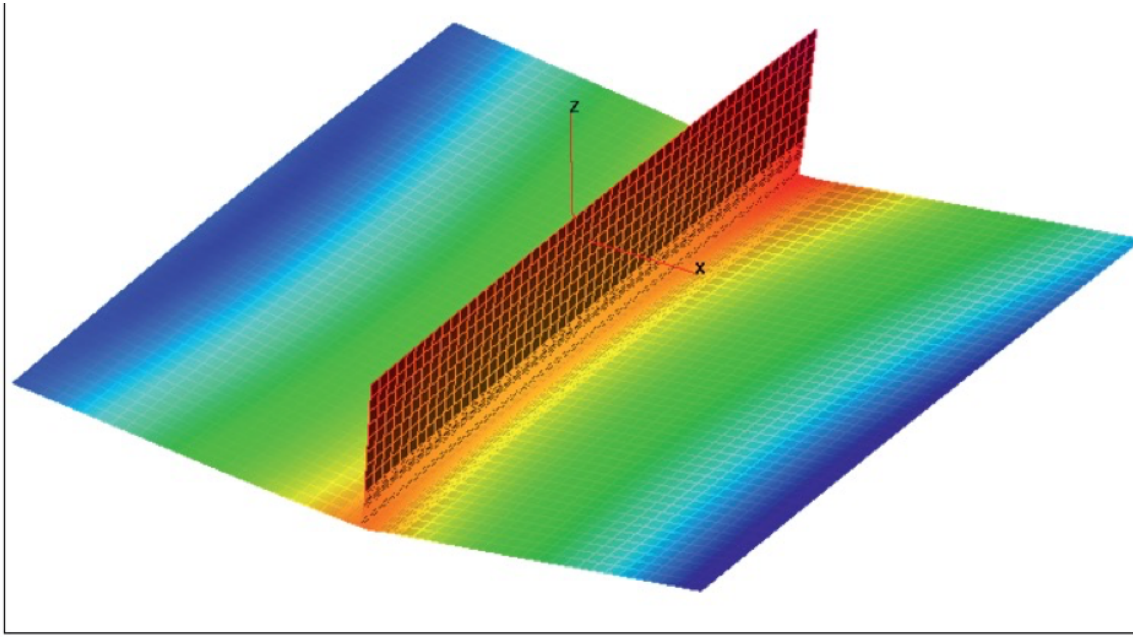


FIGURE 1.17 – Déformation calculée à partir de la méthode « locale/globale » dans le projet MUSICA [10]

structure. Ensuite, il est nécessaire d'étudier la taille du modèle local et les conditions aux limites appliquées à sa frontière pour reproduire correctement les conditions mécaniques imposées par le reste de la structure, et donc évaluer correctement les déformations plastiques induites par le soudage. Cette méthode est donc appliquée pour calculer la déformation plastique dans la zone de la source de chaleur (aspect local). Ce champ évolue sur la ligne principale du soudage qui soude sur la pièce (aspect global).

La méthode « locale/globale » est appliquée également dans le projet MUSICA (cf. [10]) qui tente, d'une part, d'améliorer le concept de source équivalente, et d'autre part de nous rapprocher du cas industriel en intégrant davantage de paramètres physiques, et donc en modélisant directement le procédé. Dans ce projet, la méthode est appliquée par les étapes d'insertion du modèle « local » (constitué d'éléments finis volumiques) dans le modèle « global » (constitué d'éléments finis de type coque) (cf. figure 1.15). Par exemple, dans le calcul des distorsions résiduelles sur un « cas-test », un assemblage en « T » représentatif d'une configuration-types des industries de la mécanique, les étapes d'insertion sont montrées dans figure 1.16. La méthode donne accès aux déformations de la structure complète, comme le montre la figure 1.17. Des comparaisons entre les déformations mesurées par une machine de mesure tridimensionnelle (MMT), calculées par méthode « classique » transitoire ou par méthode « locale/globale » ont montré des écarts inférieurs à 10% sur la flèche maximale (cf. [49]).

1.3 Réduction d'ordre de modèles non-linéaires

Les méthodes simplifiées pour la simulation numérique du soudage qui sont présentées dans la [section 1.2.5](#) permettent une bonne réduction du temps de calcul. Cependant, elles ont des points critiques à remarquer :

- La géométrie et la structure dans le procédé du soudage sont changée comme la méthode « macro-dépôt » et « locale/globale ».
- Ne peut pas être appliqué sur le modèle 3D comme la méthode NRP
- Globalement, elles changent le modèle physique du soudage.

Dans cette section, on présente la méthode de réduction de modèle qui conserve la géométrie et la structure, est applicable sur tous les modèles et peut être un complément des méthodes précédentes. Peu de travaux concernent la réduction d'ordre de modèle pour la SNS et ils sont très récents. Dans ce mémoire, on souhaite conserver le plus possible les paramètres physiques du modèle FEM d'origine.

On va commencer par l'introduction de la réduction de modèle, notamment pour la SNS. Puis, nous considérons des méthodes proches de la méthode d'hyper-réduction.

1.3.1 Principes de base pour la réduction de modèle

Pour un système mécanique industriel, la discrétisation utilisée dans la méthode des éléments finis est telle qu'elle peut générer des modèles de grande taille (il n'est pas rare de voir des modèles de taille supérieure à un million de degrés de liberté). Dans ce contexte la réduction de modèle a plusieurs objectifs : (i) réduire le nombre de variables permettant de représenter les solutions, et (ii) donner une expression des modèles non-linéaires en fonction seulement de ces variables.

Le premier objectif est souvent réalisé en projetant le système d'équations FEM sur une base réduite bien choisie, les variables originales \mathbf{X} sont exprimées en fonction d'un ensemble de variables plus petit $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$, le plus souvent par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire. Les équations, en général, sont ensuite réduites en appliquant une projection de Galerkin.

Le second objectif, consiste à améliorer les performances du modèle réduit obtenu par projection de Galerkin en proposant une expression des modèles non-linéaires réduits directement en fonction des paramètres $\boldsymbol{\mu}$.

Les méthodes de réduction de modèle sont exploitées pour mener des études paramétriques, ou pour construire de façon approchée des surfaces de réponse. Dans le cadre de la réduction d'ordre des modèles non linéaires, nous distinguons deux grades classes d'approches paramétriques :

- Les méthodes *a posteriori* pour lesquelles les bases réduites sont générées à partir de résultats de calculs éléments finis paramétriques issus d'un plan d'expérience numérique préalable. On peut parler de phase d'apprentissage automatique (machine learning).
- Les méthodes *a priori*, terme introduit dans [60], pour lesquelles les bases réduites et les prévisions dont elles sont issues sont générées simultanément. Cela peut inclure un processus d'adaptation des bases réduites, à la volée en cours de simulation.

Pour les méthodes *a posteriori* on distingue une étape hors ligne (offline) et une étape en ligne (online). La première consiste à réaliser les simulations du plan d'expérience numérique et à construire les bases réduites. En général, on se soucie peu de la complexité numérique de l'étape hors ligne. L'étape en ligne consiste à exploiter les bases réduites construites pour rechercher une solution approchée du problème paramétrique pour différentes valeurs de paramètre. Si possible, le maximum de produits matriciels est calculé avant l'étape en ligne des méthodes *a posteriori* pour réduire la complexité numérique des calculs en ligne.

Les méthodes *a priori* de réduction de modèle, en général, ne font pas apparaître d'étape hors ligne. Des simulations exploitant une approximation éléments finis sont réalisées à la demande au cours de la construction des bases réduites en tenant compte d'indicateur d'erreur d'approximation. Ainsi, avec les méthodes *a priori* on peut commencer la construction de l'approximation en base réduite sans avoir besoin de fournir de prévision éléments finis du problème paramétrique à réduire. Ce type d'approche est recommandée lorsque la complexité numérique de l'étape hors ligne est jugée trop grande au regard du temps de calcul ou des ressources informatiques disponibles. C'est en particulier le cas en mécanique des matériaux, quand il s'agit de résoudre des problèmes paramétriques à loi de comportement non-linéaire dépendant du temps comme proposé dans [63].

Dans la méthode des éléments finis, un champ recherché \mathbf{X} est résolu en se liant avec $(\varphi_i)_{i=1}^N$ la fonction de la forme dans la méthode des éléments finis et \mathcal{N} le nombre total de degré de liberté. La solution de la formulation faible est de la forme : $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}^D + \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) q_i(t)$. Les résultats sont les variables $(q_i)_{i=1}^N$ à chaque instant.

Dans la réduction de modèle, les variables \mathbf{q} sont présentée par $\mathbf{q} = \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}$. Alors, les inconnues sont les variables réduites $(\gamma_k)_{k=1}^N$ associées aux modes empiriques $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^N$, $N \ll \mathcal{N}$ tel que :

$$\boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) V_{ik}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.24)$$

Le champ inconnu se présente par : $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}^D + \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t)$. En général, les premiers modes empiriques, à faible gradient, ont plus de sens physique que les fonctions de forme de la méthode des éléments finis et la complexité numérique du modèle de réduction est bien diminuée.

La matrice \mathbf{V} contient pour chaque colonne les valeurs nodales d'un mode empirique $\boldsymbol{\psi}_k$. Cette matrice est utilisée pour construire les fonctions des modes de dimension plus faible que les fonctions de forme de la méthode des éléments finis, elle est donc la matrice des modes empiriques de la base réduite.

Pour évaluer l'erreur d'approximation par réduction, on propose ici une norme $\mathcal{L}^2(\Omega \times [0, t^F])$, qui permet d'évaluer la qualité de la solution réduite \mathbf{X} par rapport à la solution exacte du problème complet \mathbf{X}^h . L'estimateur le plus simple à considérer est la différence relative entre la solution approchée et la solution complète définie par :

$$\eta = \frac{\|\mathbf{X}(\cdot) - \mathbf{X}^h(\cdot)\|}{\|\mathbf{X}^h(\cdot)\|}, \quad \text{avec } \|\mathbf{X}^h(\cdot)\|^2 = \int_0^{t^F} \int_{\Omega} \mathbf{X}^h \mathbf{X}^h d\Omega dt \quad (1.25)$$

1.3.2 La méthode POD (Proper Orthogonal Decomposition)

Introduction

La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition*) (POD) est également connue sous le nom de décomposition de Karhunen-Loève [29] ou analyse d'Hotelling [41]. De plus, elle possède des liens très étroits avec la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD) présentée en annexe C. La POD classique a été introduite par Lumley [51] alors que la *snapshot* POD a été introduite par Sirovich [69].

La POD est une technique élégante et très efficace d'analyse de données, qui permet d'extraire une base réduite d'un ensemble de champs appartenant à un espace vectoriel noté \mathcal{X} . Ici, \mathcal{X} est l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\Omega \times [0, t^F]$, soit $\mathcal{L}_2(\Omega \times [0, t^F])$. Ensuite la base réduite permet d'approximer un système de dimension élevée par un autre de dimension nettement plus faible. Pour introduire la méthode POD, il faut considérer le cadre général des méthodes d'approximation. Le problème à résoudre peut s'énoncer de la manière suivante : comment approcher une fonction $\mathbf{X}^h \in \mathcal{X}$, dépendante des variables d'espace \mathbf{x} et de temps t , par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions à variables séparées du type :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t), \quad \text{avec} \quad \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^h\|}{\|\mathbf{X}^h\|} \leq \epsilon_{tol} \quad (1.26)$$

où ψ_k est le k -ième mode empirique de la base POD réduite.

Evidemment, on peut s'attendre à ce que cette approximation devienne exacte lorsque le nombre de terme N de la sommation atteint la dimension de l'espace auquel appartient \mathbf{X}^h . Ici, on suppose cette dimension finie. Elle est notée \mathcal{N} . Cependant, puisque cette représentation n'est certainement pas unique, il est logique de chercher à vouloir construire la meilleure approximation possible pour une valeur de N donnée.

Supposons que nous ayons choisi pour fonctions $(\psi_k)_{k=1}^N$ une base orthonormale pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$, *i.e.*

$$\langle \psi_{k_1}, \psi_{k_2} \rangle = \int_{\Omega} \psi_{k_1}(\mathbf{x}) \psi_{k_2}(\mathbf{x}) d\Omega = \delta_{k_1 k_2}$$

Alors on donne immédiatement l'expression $\gamma_l(t) = \int_{\Omega} \mathbf{X}^h(\mathbf{x}, t) \psi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{X}^h, \psi_l \rangle$, où la notation $\langle *, * \rangle$ représente le produit scalaire de deux fonctions.

Nous allons supposer que l'on connaît les valeurs de la fonction \mathbf{X}^h en n instants différents. Résoudre le problème d'approximation (1.26) peut alors être modifié en la recherche de la base orthonormée $(\psi_k(\mathbf{x}))_{k=1}^N$ avec $N \leq n$ solution du problème :

$$\min \sum_{i=1}^n \left\| \mathbf{X}^h(\mathbf{x}, t_i) - \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{X}^h(\mathbf{x}, t_i), \psi_k(\mathbf{x}) \rangle \cdot \psi_k(\mathbf{x}) \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 \quad (1.27)$$

Lien avec la SVD

Dans le cas particulier de données numériques issues de simulations éléments finis, on cherche une représentation par éléments finis des modes empiriques à l'aide

de la matrice \mathbf{V} introduite précédemment. On a donc $\mathbf{X}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}) q_i^h(t)$. On introduit alors la matrice masse pour réécrire le produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \langle \mathbf{X}^h, \psi_l \rangle = \mathbf{q}^{hT} \mathbf{M} \mathbf{V}[:, l]$$

où $\mathbf{V}[:, l]$ désigne la colonne l de la matrice \mathbf{V} . Le produit scalaire entre deux modes empiriques devient alors :

$$\langle \psi_{k_1}, \psi_{k_2} \rangle = \mathbf{V}[:, k_1]^T \mathbf{M} \mathbf{V}[:, k_2] = \widetilde{\mathbf{V}}[:, k_1]^T \widetilde{\mathbf{V}}[:, k_2], \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T, \quad \widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{L}^T \mathbf{V}$$

où \mathbf{L} est l'unique matrice triangulaire inférieure inversible de la décomposition de Cholesky de \mathbf{M} . On posant $\tilde{\mathbf{q}}^h = \mathbf{L}^T \mathbf{q}^h$ on obtient de façon similaire :

$$\langle \mathbf{X}^h, \psi_l \rangle = \tilde{\mathbf{q}}^{hT} \widetilde{\mathbf{V}}[:, l]$$

Revenons au cas où plusieurs prévisions sont disponibles sous la forme de données numériques. On peut les ranger dans une matrice $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}^h(t_1), \dots, \mathbf{q}^h(t_n)]$ appelée matrice des *snapshots*. Le problème 1.27 devient alors, trouver $\mathbf{V} = \mathbf{L}^{-T} \widetilde{\mathbf{V}}$ réalisant la minimisation suivante :

$$\min \sum_{i=1}^n \left\| \tilde{\mathbf{q}}^h(t_i) - \widetilde{\mathbf{V}} \left(\widetilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{q}}^h(t_i) \right) \right\|_F^2, \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{q}}^h(t_i) = \mathbf{L}^T \mathbf{q}^h(t_i) \quad (1.28)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius, qui par définition est :

$$\|\widetilde{\mathbf{Q}}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j \widetilde{Q}_{ij}^2} \quad (1.29)$$

La solution $\widetilde{\mathbf{V}}$ de ce problème de minimisation est donnée par la Décomposition aux Valeurs Singulières (*Singular Value Decomposition*) SVD de la matrice $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{L}^T \mathbf{Q}$. La SVD est un outil important de factorisation des matrices rectangulaires, elle est présentée dans annexe C. Soit $\widetilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors il existe une factorisation de la forme :

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{V}} \Sigma \mathbf{W}^T \quad (1.30)$$

Supposons que le rang de matrice $\widetilde{\mathbf{Q}}$ est $d \leq \min(m, n)$, nous avons la matrice diagonale $\mathbf{D} = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_d]$. En plus, toutes les valeurs $\lambda_i = \sigma_i^2 > 0$ sont les valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{Q}} \widetilde{\mathbf{Q}}^T$ ou $\widetilde{\mathbf{Q}}^T \widetilde{\mathbf{Q}}$. Il s'ensuit que $\widetilde{\mathbf{Q}}$ peut être exprimé par :

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{V}}^d \mathbf{D} (\mathbf{W}^d)^T \quad (1.31)$$

où $\widetilde{\mathbf{V}}^d \in \mathbb{R}^{m \times d}$ et $\mathbf{W}^d \in \mathbb{R}^{n \times d}$ sont donné par :

$$\widetilde{V}_{ij}^d = \widetilde{V}_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d,$$

$$W_{ij}^d = W_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d,$$

En nommant $\mathbf{\Gamma}^d = \mathbf{D}(\mathbf{W}^d)^T \in \mathbb{R}^{d \times n}$, on écrit l'équation 1.31 sous forme : $\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{V}}^d \mathbf{\Gamma}^d$. Alors, dans [74], il est démontré que pour tout $j \in (1, \dots, n)$, la solution du problème 1.27 peut être exprimées par : $\mathbf{X}_j^h = \sum_{i=1}^d \Gamma_{ij}^d \mathbf{V}[:, i]$. Autrement dit, la matrice $\mathbf{V}^d = \mathbf{L}^{-T} \widetilde{\mathbf{V}}^d$ forme une base réduite pour le problème d'approximation (1.26). Par la propriété de la SVD, cette base est orthonormée.

Pour encore réduire la complexité numérique du calcul ou diminuer la dimension de base réduite, nous allons dans la méthode POD ajouter après la méthode SVD un critère pour choisir seulement les valeurs singulières qui satisfont :

$$|\sigma_i| \geq \mu_{POD} * \max_k |\sigma_k| \text{ ou } \lambda_i \geq \mu_{POD}^2 * \max_k \lambda_k \quad \forall i = 1, \dots, d$$

Avec μ_{POD} un coefficient (un critère) que l'on choisit. L'idée est de choisir seulement les valeurs singulières assez grandes par rapport à la valeur singulière maximale parce qu'elles ont plus d'effet sur le résultat que les valeurs plus petites. A partir des valeurs singulières choisies, on peut construire la matrice $\mathbf{V}_{POD} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ qui contient un ensemble de vecteurs singuliers correspondant aux valeurs singulières choisies. Ici, N représente le nombre de modes empiriques et chaque colonne de la matrice \mathbf{V}_{POD} est le mode empirique que l'on veut déterminer. Il faut remarquer que $N \leq d \leq \min(m, n)$. L'algorithme 1 détaille la POD en utilisant la SVD sur la matrice des snapshots. Avec cette base réduite, nous trouvons la solution réduite $\boldsymbol{\gamma}_{POD}$ tel que $\mathbf{Q} \approx \mathbf{V}_{POD} \boldsymbol{\gamma}_{POD}$. Donc l'erreur d'approximation des snapshots calculés est :

$$\epsilon_{POD} = \frac{\|\mathbf{Q} - \mathbf{V}_{POD} \boldsymbol{\gamma}_{POD}\|_F}{\|\mathbf{Q}\|_F} \quad (1.32)$$

Depuis la définition de la norme de Frobenius (1.29) et la propriété de méthode SVD, [58] a démontré que l'erreur d'approximation peut s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_{POD} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}}$$

Ci dessus et dans la suite de ce mémoire nous donnons le même poids à chaque degré de liberté en substituant la matrice identité à la matrice \mathbf{L} . Les modes empiriques calculés par la SVD sont alors sensible au maillage, mais cela n'a pas d'incidence par la suite puis que l'on raisonne à maillage fixé.

La POD incrémentale

La méthode incrémentale consiste à construire une base orthonormale de type Gram Schmidt, que l'on réduit par la méthode SVD. Nous proposons ici de bien séparer ces deux étapes, alors qu'elles sont imbriquées dans [16, 64]. Cette séparation d'étape facilite l'implémentation de la méthode dans *code_aster*. L'objectif de cette méthode est de compresser les données en cours de simulation pour permettre le traitement de très gros modèles aux éléments finis.

L'approche étant incrémentale, une simulation courante peut enrichir une base réduite générée par des simulations précédentes [61]. On suppose connue une première base réduite orthonormale notée $\mathbf{V}^{(n_0)}$ et une matrice de coordonnées réduites

Algorithm 1 Reduced basis created by using POD on a snapshot matrix

Input: $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with μ_{POD}

Output: $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times N}$; $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times n}$

Using SVD : $\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^T$ by sorting $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$ with $\lambda_i = \sigma_i^2$; $d = \text{rank}(\mathbf{Q})$

for $i = 1$ **to** d **do**

if $\lambda_i < \mu_{POD} \times \lambda_1$ **then**

$N = i - 1$

break for

end if

end for

$\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{V}[:, : N]$

$\mathbf{\Gamma} \leftarrow (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{Q}$

associée $\mathbf{\Gamma}^{(n_0)}$ ($n_0 > 1$). Le produit de ces matrices, $\mathbf{V}^{(n_0)} \mathbf{\Gamma}^{(n_0)}$, est une représentation approchée des snapshots éventuellement obtenus par des simulations précédentes. La première base $\mathbf{V}^{(1)}$, est une base orthonormale constituée d'un vecteur. Elle est initialisée par un vecteur qui représente le premier snapshot. Dans ce cas :

$$\mathbf{V}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{q}_1\|} \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{\Gamma}^{(1)} = \|\mathbf{q}_1\|$$

où \mathbf{q}_1 est le premier snapshot considéré pour construire la base réduite.

Au cours de la simulation courante, la base réduite est actualisée par chaque snapshot à l'aide d'une orthogonalisation de Gram-Schmidt. Puis à la fin de la simulation courante, on procède à une compression de la matrice des coordonnées réduites par une décomposition par SVD. Cette dernière étape pourrait être implémentée dans un logiciel autre que *code_aster*, par exemple en langage Python, car sa complexité numérique est faible.

A l'incrément i de la procédure incrémentale, les données nécessaires sont le nouveau snapshot \mathbf{q}_i avec $i = 1, \dots, m$ issu d'un calcul incrémental, ϵ_0, μ_{POD} les paramètres pour sélectionner les modes significatifs et $\mathbf{V}^{(n)}, \mathbf{\Gamma}^{(n)}$. En cas d'extension de la base réduite, les résultats sont la base réduite d'indice $(n+1)$, $\mathbf{V}^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{N \times N^{(n+1)}}$, de $N^{(n+1)}$ vecteurs et les coordonnées réduites associées $\mathbf{\Gamma}^{(n+1)}$. Ces coordonnées servent à représenter tous les snapshots déjà calculés, par la simulation en cours mais aussi par les simulations précédentes. Il s'agit d'une matrice réduite de snapshots.

La formule de récurrence à l'incrément i est la suivante, projection du nouveau snapshot dans la base réduite :

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{V}^{(n)T} \cdot \mathbf{q}_i; \quad \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{V}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\gamma}_i$$

Si $\|\delta \mathbf{q}_i\| < \epsilon_0 \|\mathbf{q}_i\|$ alors l'approximation en base réduite est satisfaisante et l'on complète la matrice réduite des snapshots en rajoutant à $\mathbf{\Gamma}^{(n)}$ une colonne qui contient $\boldsymbol{\gamma}_i^{(n)}$. Et si $\|\delta \mathbf{q}_i\| \geq \epsilon_0 \|\mathbf{q}_i\|$, alors il faut enrichir la base réduite par le résidu normé de la projection :

$$\mathbf{V}^{(n+1)} = \left[\mathbf{V}^{(n)}, \frac{1}{\|\delta \mathbf{q}_i\|} \delta \mathbf{q}_i \right]; \quad \mathbf{\Gamma}^{(n+1)} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_i \\ \|\delta \mathbf{q}_i\| \end{pmatrix} \right]$$

Quand la simulation en cours est arrivée à son terme, on réalise une SVD :

$$\mathbf{\Gamma}^{(n+1)} = \mathbf{B}^{(n+1)} \mathbf{\Lambda}^{(n+1)} \mathbf{W}^{(n+1)T} + \mathbf{R}^{(n+1)}$$

où $\mathbf{B}^{(n+1)}$ contient les k premiers vecteurs propres à gauches tels que :

$$\lambda_1^{(n+1)} > \dots > \lambda_k^{(n+1)} > \mu_{POD}^2 * \lambda_1^{(n+1)} > \lambda_{k+1}^{(n+1)}$$

On actualise la base réduite par :

$$\mathbf{V}^{(n+2)} = \mathbf{V}^{(n+1)} \mathbf{B}^{(n+1)} ; \mathbf{\Gamma}^{(n+2)} = \mathbf{B}^{(n+1)T} \mathbf{\Gamma}^{(n+1)}$$

Cet algorithme de décomposition a deux paramètres μ_{POD} et ϵ_0 . Ce dernier est choisi assez petit, de l'ordre 10^{-8} , pour ne pas perdre de snapshots qui pourraient être utiles. On peut trouver la détaille de cette méthode dans l'algorithme 2.

Propriétés :

- La base réduite $\mathbf{V}^{(n+2)}$ est orthonormale.
- Si ϵ_0 tend vers zéro, nous obtenons une décomposition tronquée par SVD de la matrice des snapshots \mathbf{Q} .

Démonstration : Considérons $\mathbf{V}^{(n+2)T} \mathbf{V}^{(n+2)}$.

$$\mathbf{V}^{(n+2)T} \mathbf{V}^{(n+2)} = \mathbf{B}^{(n+1)T} \mathbf{V}^{(n+1)T} \mathbf{V}^{(n+1)} \mathbf{B}^{(n+1)}$$

Or si $\mathbf{V}^{(n)}$ est orthonormale, par construction $\mathbf{V}^{(n+1)}$ est orthonormale, car quand on complète la base réduite on a :

$$\mathbf{V}^{(n)T} \delta \mathbf{q}_i = 0$$

Comme l'algorithme est initialisé par une base orthonormale, on a donc :

$$\mathbf{V}^{(n+1)T} \mathbf{V}^{(n+1)} = \mathbf{I}_{N^{(n+1)}}$$

où $\mathbf{I}_{N^{(n+1)}}$ est la matrice identité dans $\mathbb{R}^{N^{(n+1)}}$. On en déduit :

$$\mathbf{V}^{(n+2)T} \mathbf{V}^{(n+2)} = \mathbf{B}^{(n+1)T} \mathbf{B}^{(n+1)}$$

avec

$$\mathbf{B}^{(n+1)T} \mathbf{B}^{(n+1)} = \mathbf{I}_{N^{(n+2)}}$$

On a bien une base réduite orthonormale. Puis, on note le résidu de la décomposition $\widetilde{\mathbf{R}}$:

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{Q} - \mathbf{V}^{(n+2)} \mathbf{\Gamma}^{(n+2)}$$

Pour $\epsilon_0 = 0$ on a par construction :

$$\mathbf{V}^{(n+2)T} \widetilde{\mathbf{R}} = 0$$

De plus :

$$\mathbf{V}^{(n+2)T} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}^{(n+1)} \mathbf{W}^{(n+1)T} + \mathbf{B}^{(n+1)T} \mathbf{R}^{(n+1)}$$

Donc $\mathbf{V}^{(n+2)} \mathbf{\Lambda}^{(n+1)} \mathbf{W}^{(n+1)T}$ est une décomposition par SVD tronquée de \mathbf{Q} .

Cette décomposition incrémentale a été implémentée dans *code_aster* pour représenter les variables primales, températures et déplacements, et les variables duales projetées aux nœuds du maillage. Pour ces dernières, il s'agit des flux de chaleur et des contraintes mécaniques. Les variables thermiques et les variables mécaniques sont traitées séparément, pour avoir des bases réduites respectives.

Dans le cadre de la méthode POD, on cherche une approximation des champs sous la forme de tenseur d'ordre deux en séparant la variable d'espace, de la variable temps ou de la variable paramètre. Lorsqu'il y a plusieurs paramètres, il est possible de chercher une représentation approchée sous la forme de tenseurs d'ordre supérieur à deux, en séparant les variables d'espace de temps et les différents paramètres. Il faut alors considérer une représentation au format de Tucker des solutions approchées. L'équivalent de la méthode SVD peut alors être remplacée par la méthode HOSVD [26] ou la décomposition de Tucker [71]. Actuellement seule la méthode PGD intègre ce type de décomposition [54, 57] en mécanique.

Algorithm 2 Reduced basis actualized by using incremental POD Gram-Schmidt

Input: $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m]$; μ_{POD} ; ϵ_0

In/Output: \mathbf{V} ; $\mathbf{\Gamma}$

if $\mathbf{V}, \mathbf{\Gamma}$ not present then

$\mathbf{V} \leftarrow \frac{\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{q}_1\|}$; $\mathbf{\Gamma} \leftarrow \|\mathbf{q}_1\|$

end if

for $i = 2$ to m do

$\boldsymbol{\gamma}_i = (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{q}_i$; $\delta \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{V} \boldsymbol{\gamma}_i$

if $\|\delta \mathbf{q}_i\| \geq \epsilon_0 \|\mathbf{q}_i\|$ then

$\mathbf{V} \leftarrow \left[\mathbf{V}, \frac{\delta \mathbf{q}_i}{\|\delta \mathbf{q}_i\|} \right]$; $\mathbf{\Gamma} \leftarrow \left[\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_i \\ \|\delta \mathbf{q}_i\| \end{pmatrix} \right]$

else

$\mathbf{\Gamma} \leftarrow [\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\gamma}_i]$

end if

end for

Using POD : $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{W}^T + \mathbf{R}$

$\mathbf{\Gamma} \leftarrow (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{Q}$ with $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]$; $\lambda_1 > \dots > \lambda_k > \mu_{POD}^2 * \lambda_1 > \lambda_{k+1}$

$\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}$; $\mathbf{\Gamma} \leftarrow \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma}$

Projection de Galerkin sur des modes POD

En remplaçant dans les formulations éléments finis l'espace vectoriel des fonctions de test et d'approximation par le sous-espace engendré par les modes POD, représentées par la matrice de base réduite \mathbf{V} , on obtient des formulations de type POD Galerkin. Cela revient à remplacer dans (1.22) par $\mathcal{C}_{ROM} = \text{span}(\boldsymbol{\psi}_k^u)_{k=1}^{N_u}$ l'espace engendré par les modes POD de déplacement. On obtient alors un problème d'ordre réduit pour l'étape de correction linéaire depuis l'équation 1.23 :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{J} \mathbf{V} \delta \boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{V}^T \mathbf{r}(\mathbf{q}), \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{V} \delta \boldsymbol{\gamma} \quad (1.33)$$

Dans [75] cette approche a été appliquée à la simulation de transformations martensitiques. Ces travaux ont montré l'aptitude des modes POD à approcher finement les solutions d'équations non linéaires à fort contenu physique.

L'inconvénient de cette approche est qu'elle conserve une complexité linéaire en \mathcal{N} , notamment pour le calcul de $\mathbf{V}^T \mathbf{r}(\mathbf{q})$, qui pour les problèmes non linéaires à effet de seuil comme la plasticité ne peut être anticipé par des calculs hors ligne.

1.3.3 L'EIM (Empirical Interpolation Method)

L'EIM repose plutôt sur l'utilisation de fonctions de base construites en échantillonnant à un ensemble de points proprement sélectionnés, au lieu d'utiliser des fonctions de base prédéfinies. La méthode d'interpolation empirique est d'abord introduit en [12] et initialement conçu pour traiter les problèmes non affines dans le contexte de méthodes des bases réduites (RB methods) ([39]). De plus, les points d'interpolation (où l'approximation est requise égale à la fonction à interpoler) sont ajoutés de manière adaptative et itérative sans avoir besoin de recalculer sur tous les points existants, de sorte que EIM a un caractère hiérarchique.

Le but d'EIM est d'approximer une fonction non-linéaire d'un paramètre typiquement $\mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\mu})$ grâce à un opérateur qui interpole cette fonction à certains points attentivement sélectionnés dans Ω . Etant donné un système interpolateur défini par un espace d'approximation $\mathcal{V}_M = \text{span}(\boldsymbol{\rho}_m)_{m=1}^M$ et des points interpolations $T_M = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_M\} \subset \Omega$ couramment appelés des *points magiques*. L'interpolant $\mathbf{u}_M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ de \mathbf{u} admet une expansion séparable

$$\mathbf{u}_M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\rho}_m(\mathbf{x}) \gamma_m(\boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.34)$$

et satisfait les M contraintes d'interpolation :

$$\mathbf{u}_M(\mathbf{t}_i, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}(\mathbf{t}_i, \boldsymbol{\mu}), \quad i = 1, \dots, M \quad (1.35)$$

L'algorithme d'EIM consiste à générer en même temps l'espace d'approximation et les points d'interpolation. Il construit d'abord une suite d'espaces emboîtés $\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_M$ puis en déduit des ensembles emboîtés des points d'interpolation $T_1 \subset \dots \subset T_M$ de la fonction \mathbf{u} initiale sur la suite d'espace ainsi construite. Cette méthode d'approximation permet également d'avoir une erreur, cf. de majorer la norme $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_M\|$ entre la fonction initiale et son interpolée en quelques points par la distance de \mathbf{u} à l'espace d'interpolation. Dans les faits, la méthode EIM est un type d'algorithme *glouton* (*greedy*). La construction de l'espace d'interpolation dépend largement en temps et en qualité de la pertinence de l'espace d'échantillonnage pour le paramètre $\boldsymbol{\mu}$. La méthode permet ainsi de ramener les équations différentielles paramétriques non-affines à des équations affines. Elle permet une séparation des paramètres des variables de l'équation différentielle. L'algorithme simplifiée de l'EIM est détaillée dans [58].

Une alternative à l'EIM pour l'approximation d'une fonction non affinement paramétrée est la méthode dite d'interpolation empirique discrète (DEIM), introduite à l'origine dans [19]. L'algorithme proposé n'est vraiment qu'une transcription de

l'EIM au cas discret, sans algorithme glouton. Les considérations sur l'estimation d'erreur sont analysées dans [20]. La DIEM approxime les fonctions par des projections sur un sous-espace de faible dimension engendré par une base réduite. Dans le cadre de la thèse, nous exploitons les points d'interpolation d'une base réduite à d'autres fins que l'interpolation de champs. Supposons que nous avons une base $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N]$ orthonormée. La DEIM nous permet de trouver l'ensemble des points d'interpolation $\mathcal{P}_N = \{p_1, \dots, p_N\}$. La construction de cette liste est réalisée par chaque vecteur de base \mathbf{V} (de manière discrète). L'algorithme 3 explique comment trouver des points d'interpolation.

Algorithm 3 Interpolation indices for DEIM in [19] of a reduced basis

Input: $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N] \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times N}$ with $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$
Output: $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ such that $\text{rank}(\mathbf{V}[\mathcal{P}, :]) = N$
 $p_1 = \arg \max_{i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}} |v_{i1}|$
 $\mathcal{P} \leftarrow p_1$
for $l = 2, \dots, N$ **do**
 $\mathbf{U} \leftarrow [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{l-1}]$
 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{U}[\mathcal{P}, :]^{-1} \mathbf{v}_l[\mathcal{P}]$
 $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{v}_l - \mathbf{U}\mathbf{\Gamma}$
 $p_l = \arg \max_{i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}} |r_i|$
 $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup p_l$
end for

Dans [25] on trouve une application de la méthode DEIM au cas du soudage en tenant compte d'une source de chaleur mobile, mais sans apport de matière. Le résidu des équations de bilan n'est calculé qu'en quelques points d'interpolation puis il est reconstruit sur l'ensemble du domaine Ω . La projection Galerkin de ce résidu peut alors être précalculée en partie pour éliminer la dépendance en \mathcal{N} des calculs en ligne. Par exemple, si \mathbf{V}^r est la base d'approximation des résidus, \mathcal{P} les indices d'interpolation associés et \mathbf{V}^q la base d'approximation des variables primales (température ou déplacement), alors la projection des résidus des méthodes EIM s'écrit :

$$\mathbf{V}^{qT} \mathbf{r}(\mathbf{V}^q \boldsymbol{\gamma}) \approx \mathbf{V}^{qT} \mathbf{V}^r (\mathbf{V}^r[\mathcal{P}, :])^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{V}^q \boldsymbol{\gamma})[\mathcal{P}]$$

où les produits à complexité en \mathcal{N} , dans $\mathbf{V}^{qT} \mathbf{V}^r (\mathbf{V}^r[\mathcal{P}, :])^{-1}$, sont précalculés. Le terme $\mathbf{V}^r (\mathbf{V}^r[\mathcal{P}, :])^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{V}^q \boldsymbol{\gamma})[\mathcal{P}]$ correspond à un vecteur résidu reconstruit pour tout ses indices. Cette approche nécessite le développement d'une base réduite pour représenter les forces généralisées issues de la méthode des éléments finis. Ces forces ne sont pas des sorties standards des simulations. L'EIM rend donc l'étape hors ligne intrusive. De plus, il peut être nécessaire de collecter les forces généralisées ou les résidus en cours de traitement itératif des termes non linéaires. Ceci augment l'intrusivité de l'approche.

1.3.4 La gappy POD

La gappy POD est une extension de la méthode POD standard qui gère les ensembles de données incomplètes. Elle a été développé par Everson et Sirovich

dans [31] qui vient du contexte de la reconstruction d'images, telles que des visages humains, à partir de données partielles ([44]). Dans [76], la gappy POD est utilisé pour traiter les problèmes de reconstruction d'écoulement instationnaire, tels que ceux rencontrés lorsque des données de mesure de débit sont limitées. Cette méthode est souvent évaluée en tant qu'une technique de reconstruction de données pour des mesures comme proposé dans [68].

Le but de la méthode est de pouvoir reconstruire un champ complet à partir de données lacunaires de ce champ ayant préalablement formé un modèle réduit. Cela consiste simplement à minimiser l'erreur : $\epsilon^2 = \int_{\Omega_Z} \|\tilde{\phi}(\mathbf{x}) - \Psi \cdot \mathbf{u}\|^2 d\Omega$. Avec $\tilde{\phi}(\mathbf{x})$ les données lacunaires dans le domaine Ω_Z . La base réduite Ψ est liée avec le champ recherché \mathbf{u} .

Dans la GNAT [17] la Gappy POD est exploitée pour reconstruire des résidus d'équations de bilan à partir de résidus calculés sur un maillage réduit. Si l'on reprend l'exemple donné plus haut pour l'EIM, la projection du résidu reconstruit devient alors :

$$\mathbf{V}^q T \mathbf{r}(\mathbf{V}^q \boldsymbol{\gamma}) \approx \mathbf{V}^q T \mathbf{V}^r ((\mathbf{V}^r[\mathcal{P}^G, :])^T \mathbf{V}^r[\mathcal{P}^G, :])^{-1} (\mathbf{V}^r[\mathcal{P}^G, :])^T \mathbf{r}(\mathbf{V}^q \boldsymbol{\gamma})[\mathcal{P}^G]$$

où \mathcal{P}^G est l'ensemble des indices des résidus calculés dans le maillage réduit, et où les produits à complexité en \mathcal{N} , dans $\mathbf{V}^q T \mathbf{V}^r ((\mathbf{V}^r[\mathcal{P}^G, :])^T \mathbf{V}^r[\mathcal{P}^G, :])^{-1} (\mathbf{V}^r[\mathcal{P}^G, :])^T$, sont précalculés. En pratique, la GNAT requière en plus une base réduite pour les matrices jacobiniennes afin de projeter celle-ci sur \mathbf{V}^q .

1.3.5 La méthode PGD (Proper Generalized Decomposition)

La PGD, pour "Proper Generalized Decomposition", trouve son origine dans [47] sous le nom de "radial time-space approximation", comme faisant partie de la méthode LATIN [48]. Elle a été appliquée à la résolution de problème thermomécaniques non linéaires dans [23].

La PGD présente un avantage, par la mise en place de coordonnées supplémentaires, comme le décrivent [21] et [38]. Comme la POD, la PGD approxime la solution à l'aide de l'hypothèse de séparation des variables comme une somme de produits de fonctions. Prenons la fonction solution $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\mu})$, où \mathbf{x} représente la variable d'espace, t le temps et $\boldsymbol{\mu}$ les paramètres. Elle sera approximée sous la forme :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^N \phi_k^x(\mathbf{x}) \phi_k^t(t) \phi_k^\mu(\boldsymbol{\mu}) \quad (1.36)$$

Mais à la différence de la POD, cette fonction est inconnue au préalable, on ne connaît pas les modes et on les calcule "à la volée". Ceci permet de conserver une variable comme une inconnue et ainsi d'avoir un problème résolu quelque soit la valeur de cette variable. La PGD fait la décomposition tensorielle d'ordre D quelconque tandis que la POD reste toujours une décomposition d'ordre 2.

On obtient ainsi un métamodèle en fin de schéma de résolution [22]. La représentation à variable séparées est obtenue a priori, en même temps que l'on cherche une solution approchée des équations aux dérivées partielles [6, 54]. La convergence de

la PGD a été démontrée dans [33]. Cette approche a été mise en œuvre pour estimer des contraintes résiduelles dans [57]. Dans des travaux récents, elle a été appliquée au soudage sans tenir compte de l'apport de matière [2]. Dans [1] un couplage de la PGD avec la DEIM et la POD permet de traiter des équations non linéaires.

La méthode PGD comme la méthode LATIN est une méthode très intrusive dans le sens où ces méthodes ne permettent pas de conserver la boucle d'assemblage classique de la méthode des éléments finis dans laquelle les lois de comportement sont intégrées par des schémas incrémentaux en temps.

1.3.6 Réduction de modèle locale hiérarchique

Une des nombreuses possibilités de séparation de variable de la PGD a conduit dans [14] à proposer un modèle 3D de milieu élastique de type plaque, en séparant l'effet d'une variable d'espace surfacique et l'effet d'une variable d'espace d'épaisseur.

Une approche similaire a été mise en œuvre pour des modes propres et des modes empiriques POD dans [56] pour la simulation d'écoulements réactifs dans des tuyaux. Dans ce cas on introduit une coordonnée unidimensionnelle x_1 complétée de coordonnées transverses \mathbf{y} avec $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{y})$. L'approximation hiérarchique s'écrit alors

$$\mathbf{X}(x_1, \mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^N \phi_k^{2D}(\mathbf{y}) \varphi_k^{1D}(x_1) \gamma_k(t) \quad (1.37)$$

où l'approximation par mode ne porte que sur les champs transverses de la variables \mathbf{y} et où l'on a conservé une approximation unidimensionnelle par éléments finis avec $\varphi_k^{1D}(x_1)$.

Cette approche permet de tenir compte du caractère directionnel de l'écoulement, en ne simplifiant que la représentation transverse des champs de vitesse.

1.4 Méthode d'hyper-réduction de modèle

La méthode d'hyper-réduction cherche à réduire le nombre d'inconnues à calculer pour trouver une solution approchée d'équations aux dérivées partielles et aussi à restreindre le domaine sur lequel ces équations sont considérées. Ainsi la taille du résidu des équations de bilan s'en trouve directement réduit avant d'être projeté sur des modes. Bien que la première version de l'hyper-réduction était a priori dans [61], nous nous intéressons ici à la version a posteriori de l'approche car elle est moins intrusive.

Diverses méthodes d'hyper-réduction a posteriori sont proposées dans la littérature pour restreindre le calcul de résidus \mathbf{r} à quelques indices $i \in \mathcal{F}$, avant de projeter les équations de bilan sur une base réduite. On distingue trois grands types de méthodes :

- les méthodes d'interpolation [12, 19] ou la méthode gappy POD [36, 17] qui estiment un résidu reconstruit $\tilde{\mathbf{r}}$ en exploitant seulement $(r_i)_{i \in \mathcal{F}}$; dans les méthodes d'interpolation, \mathcal{F} est engendré par la méthode elle-même pour avoir $[V_{ik}]$, $i \in \mathcal{F}$ et $k = 1, \dots, N$, is carrée de rang N (invertible) ;

- les méthode de quadrature [34] qui estiment les intégrales en espace sous-jacentes dans le produit $\mathbf{V}^T \mathbf{r}$ en exploitant des résidus non assemblés ;
- des problèmes aux limites restreints à un domaine réduit d'intégration (reduced integration domain RID) [?, 66], noté Ω_Z , qui couvre le support des fonctions de forme dont l'indice est dans \mathcal{F} .

Cette dernière approche conserve intégralement la boucle d'assemblage de la méthode des éléments finis. Nottons qu'elle peut être d'employée avec une méthode de décomposition de domaine comme la méthode FETI pour paralléliser les calculs [63].

1.4.1 Introduction de l'hyper-réduction par un problème aux limites

Un modèle hyper-réduit est un modèle éléments finis pour lequel on contraint les champs inconnus à évoluer dans un espace réduit dont les équations de bilan sont restreintes à un sous-domaine appelé domaine réduit d'intégration (**RID**). Cette méthode a été proposée en thermique non-linéaire dans [61] puis étendue à la mécanique des matériaux dans [62] et aux études paramétriques en grande dimension dans [67]. Une première étude de l'hyper-réduction de problèmes thermoplastiques a été proposée dans [77, 78], sans tenir compte de sources de chaleurs mobiles.

L'espace réduit des champs recherchés est défini par les bases réduites construites par la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres (**POD**) [31, 50]. En pratique, on effectue une décomposition de la matrice des snapshots $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N \times N_t}$ par la Décomposition aux Valeurs Singulières (**SVD**). Puis on sélectionne les valeurs singulières les plus significatives, et les modes propres à gauche associés que l'on stocke dans la matrice de base réduite $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Le RID, noté Ω_Z , est construit en tenant compte de la forme des modes empiriques de la base réduite, mais aussi de la forme de l'équation aux dérivées partielles à résoudre. Pour le cas du soudage, le domaine réduit est construit à l'aide de contributions d'origine thermique et mécanique. Il est constitué d'éléments attachés à des points d'interpolation de différentes bases réduites. Comme proposé dans [66] ces points sont obtenus par la méthode d'interpolation empirique discrète (**DEIM**). Pour le cas du soudage, le domaine réduit reçoit la contribution des points d'interpolation des bases réduites en température, en déplacement, en gradient de température et en contrainte. Le RID est donc construit à la fin de l'étape hors ligne, dès que les bases réduites sont disponibles. Cependant, il peut être étendu si nécessaire pour y ajouter une zone d'intérêt au cours de l'étape en ligne. On utilisera cette possibilité pour traiter le soudage multipasse pour insérer de nouveaux cordons de soudure dans le modèle hyper-réduit. Conformément à la propriété fondamentale (section 2.1.2), la restriction à Ω_Z des bases réduites en température, en déplacement, en gradient de température et en contrainte, donne des bases réduites.

Le modèle hyper-réduit est utilisé pour la résolution dans l'étape en ligne (cf. figure 1.18). Pour d'écrire la méthode, on ne distingue pas s'il s'agit de la résolution d'un problème thermique ou d'un problème mécanique. La méthode s'étend à l'un ou l'autre des problèmes en suivant les mêmes principes généraux. On considère donc la résolution d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω , dont les équations éléments finis sont connues. On note $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ le résidu des équations

de bilan relatives à la formulation par éléments finis du problème de mécanique ou de thermique. L'hyper-réduction permet de construire une solution approchée du problème à traiter en considérant des équations de bilan restreintes à $\Omega_Z \subset \Omega$.

Quand le domaine réduit d'intégration couvre tout le domaine, la méthode d'hyper-réduction donne les mêmes équations que la méthode POD-Galerkin, où les fonctions test sont les modes empiriques ou des combinaisons linéaires de ceux-ci. Quand le domaine réduit ne couvre pas tout le domaine et que seules les équations de bilan du domaine réduit sont considérées, il apparaît des bords où les conditions aux limites ne sont pas connues. Elles sont fixées de façon implicite par la forme des modes empiriques et par la valeur des coordonnées réduites issues des équations de bilan. Il convient alors d'écrire les équations de bilan pour lesquelles on a toutes les contributions. Il faut aussi que le problème réduit soit bien posé, c'est-à-dire qu'il y ait suffisamment d'équations de bilan ou que le rang du système d'équations réduites soit égal au nombre de modes empiriques. En pratique c'est généralement le cas, notamment en exploitant des points d'interpolation de \mathbf{V} pour la construction de Ω_Z . Dans le cas contraire on rajoute une couche d'éléments voisins au domaine réduit.

Les équations de bilan disponibles sont celles associées aux nœuds du maillage qui ne sont pas connectés à des éléments en dehors du domaine réduit. En effet, en dehors du domaine réduit aucune contribution à la forme faible des équations n'est calculée. Cette distinction entre nœuds connectés ou non au reste du domaine permet de définir des fonctions test tronquées, qui sont nulles en tout nœud connecté à l'extérieur du domaine réduit. Ces fonctions test définissent les équations de bilan disponibles en n'utilisant que le domaine réduit. Ensuite, pour obtenir autant d'équations que d'inconnues réduites, on prend comme fonctions tests les modes empiriques tronqués, c'est à dire mis à zéro sur les nœuds connectés à l'extérieur du domaine réduit. La formulation faible ainsi obtenue est une formulation de Petrov-Galerkin faisant intervenir des fonctions tests différentes des fonctions d'approximation.

1.4.2 Construction du modèle hyper-réduit

L'hyper-réduction du modèle dans [66] est une méthode *a posteriori*. L'étape *offline* de cette méthode est une combinaison de deux méthodes : POD et DEIM.

Tout d'abord, nous allons essayer d'écrire les solutions sur un espace inférieur aux espaces des éléments finis. C'est à dire $\mathcal{T}_{ROM} = \text{span}(\psi_k)_{k=1}^N$ et $\mathcal{C}_{ROM} = \text{span}(\psi_k)_{k=1}^N$ (ici $N < \mathcal{N}$). Les solutions des champs recherchés devient :

$$\mathbf{u}_{ROM}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F] \quad (1.38a)$$

$$T_{ROM}(\mathbf{x}, t) = T^D + \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F] \quad (1.38b)$$

Avec $(\psi_k)_{k=1}^N$ sont des fonctions de modes empiriques liant avec des fonction de forme éléments finis par la matrice de base réduite \mathbf{V} trouvée par POD (section 1.3.2). Plus précisément, nous trouvons la description des modes empiriques par rapport

avec les fonctions de forme par éléments finis et la matrice de base réduite dans l'équation 1.24.

L'application de méthode DEIM sur la base réduite \mathbf{V} nous donne une liste \mathcal{P}_N des points d'interpolation. A partir de \mathcal{P}_N , nous construisons le domaine réduit, noté $\Omega_Z \subset \Omega$, sous forme maillage qui est l'ensemble des éléments associés avec ces points d'interpolation ou les nœuds liés. La liste \mathcal{P}_N peut être rassemblée depuis plusieurs liste des points d'interpolation. Par exemple, dans le calcul mécanique, depuis la base réduite \mathbf{V}^u pour le champ de déplacement et la base réduite \mathbf{V}^σ pour le champ de contrainte, on obtient par la DEIM deux listes de points d'interpolation, notées $\mathcal{P}_N^u, \mathcal{P}_N^\sigma$. Il est possible d'insérer une liste des nœuds particuliers demandées par les utilisateurs, notée $\mathcal{P}^{\text{Users}}$. On a au final $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}_N^u \cup \mathcal{P}_N^\sigma \cup \mathcal{P}^{\text{Users}}$ la liste des nœuds magiques. Le RID, noté Ω_Z est construit sous forme de type *maillage* à partir de \mathcal{P}_N (voir D.2.2).

En résumé, pour la construction d'un modèle hyper-réduit, il faut suivre les étapes suivantes [cf. figure 1.18] :

- Construire les matrices des snapshots qui récupèrent les résultats de tous les degrés de liberté correspondant à chaque instant lors des simulations de référence. Les résultats nécessaires sont la température, le gradient thermique pour le calcul thermique et le déplacement, la contrainte pour la mécanique.
- Appliquer la méthode POD sur deux matrices des snapshots pour trouver des matrices de base réduite correspondant aux chaque grandeur physique.
- Par la méthode DEIM, trouver à chaque matrice de base réduite la liste des degrés de liberté interpolés. On rassemble ces liste pour obtenir la liste des nœuds magiques.
- Avec cette liste des nœuds magiques, construire le nouveau maillage des mailles qui concernent ces nœuds. Ce nouveau maillage va être utilisé pour le calcul hyper-réduit.

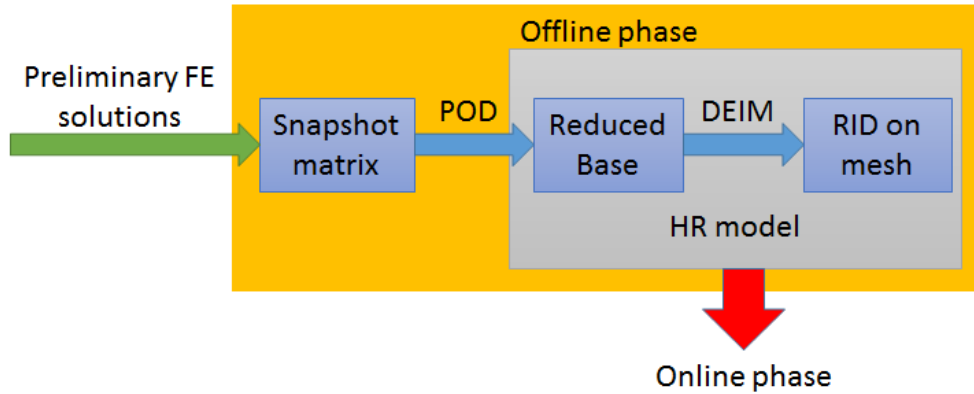


FIGURE 1.18 – Procédure de construction du modèle hyper-réduit

1.4.3 Formulation d'équation de bilan par hyper-réduction

Considérons maintenant dans le cas général de la formulation éléments finis, toutes les équation de bilan sont décrites en thermique ($\mathcal{L}(T) = 0$) ou en mécanique

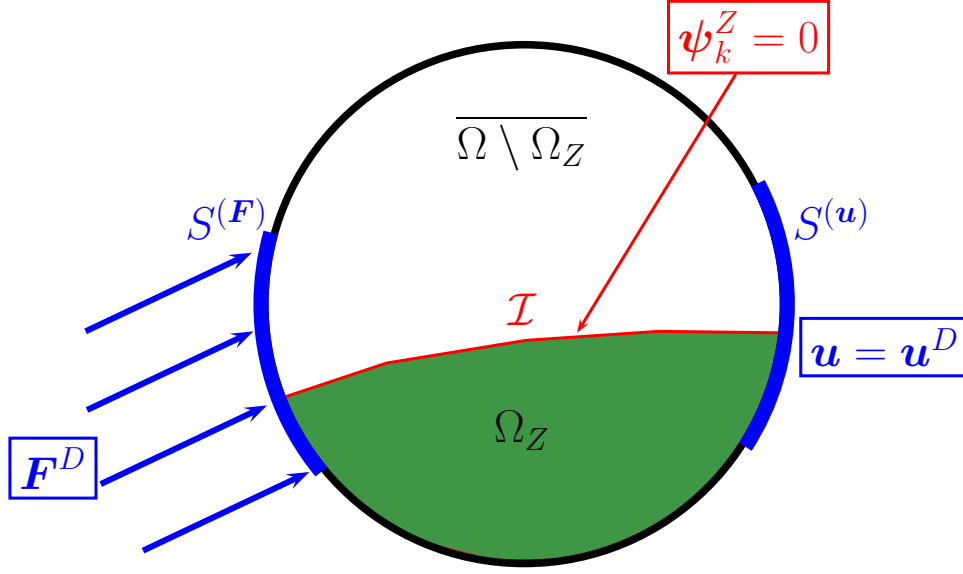


FIGURE 1.19 – Représentation du modèle hyper-réduit dans la résolution du problème dans un domaine

($\mathcal{L}(\mathbf{u}) = 0$). Sous la formulation faible du problème thermique (1.21) et mécanique (1.22), en utilisant les approximations des champs recherchés par la méthode des éléments finis (1.20a, 1.20b), nous arrivons à écrire les équations de bilan sous forme l'intégral :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(T) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{u}) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Considérons le domaine $\Omega_Z \subset \Omega$, on note la liste des degrés de liberté dans le RID, qui ne sont pas connectés aux éléments hors du RID :

$$\mathcal{F}_Z = \left\{ i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}, \int_{\Omega \setminus \Omega_Z} \varphi_i^2 d\Omega = 0 \right\} \quad (1.39)$$

On note $\overline{\Omega \setminus \Omega_Z}$ la partie complémentaire du RID complétée de son bord. Par construction de Ω_Z , il existe une interface notée \mathcal{I} entre Ω_Z et le reste du domaine :

$$\mathcal{I} = \Omega_Z \cap \overline{\Omega \setminus \Omega_Z}$$

Or, dans le problème à traiter, il n'y pas de conditions aux limites connues pour écrire des équations de bilan restreintes à Ω_Z . Pour résoudre cette difficulté, nous imposons des conditions de type Dirichlet sur \mathcal{I} (voir figure 1.19) comme proposé dans [66].

La condition de type Dirichlet imposée sur \mathcal{I} requière une partition des modes POD en deux parties : la partie interne au RID $\psi_k^Z = \sum_{i \in \mathcal{F}_Z} \varphi_i \cdot V_{ik}$ et le reste ψ_k^δ . Ils vérifient alors que :

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \psi_k^Z(\mathbf{x}) + \psi_k^\delta(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, N, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Par construction du RID, $(\psi_k^Z)_{k=1}^N$ forme une base réduite pour écrire des équations de bilan réduites, restreintes à Ω_Z , car les points d'interpolation de \mathbf{V} sont dans Ω_Z . De plus, les équations de comportement sont locales, nous pouvons écrire la formulation faible par hyper-réduction :

$$\int_{\Omega_Z} \mathcal{L}(\mathbf{u}) \psi_k^Z(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_Z$$

Ensuite, on utilise une combinaison linéaire des champs ψ_k^δ pour paramétrer les conditions aux limites de type Dirichlet sur \mathcal{I} . On introduit alors N paramètres notés $(\tilde{\gamma}_k)_{k=1}^N$ pour d'écrire les conditions aux limites complémentaires :

$$\mathbf{u}^\mathcal{I}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k^\delta(\mathbf{x}) \tilde{\gamma}_k(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \quad (1.40)$$

La solution de champ recherché qui est restreinte sur le domaine réduit Ω_Z est donc complétée et présentée par :

$$\mathbf{u}_{HROM}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \mathbf{u}^\mathcal{I} + \sum_{k=1}^N \psi_k^Z(\mathbf{x}) \gamma_k(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_Z, t \in [0, t^F] \quad (1.41)$$

Il reste à choisir des équations de fermetures pour déterminer les nouvelles inconnues que sont les paramètres $(\tilde{\gamma}_k)_{k=1}^N$. Pour retrouver une approximation du champ \mathbf{u} conforme à l'approximation en base réduite usuelle, on choisit :

$$\tilde{\gamma}_k(t) = \gamma_k(t), \quad k = 1, \dots, N, \quad \forall t \in [0, t^F]$$

où les $(\gamma_k)_{k=1}^N$ sont donnés par les équations de bilan restreintes au RID et projetée sur la base $(\psi_k^Z)_{k=1}^N$. Ainsi, on vérifie que l'équation 1.41 devient :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F]$$

Ou bien sous sa forme discrète : $\mathbf{q} = \mathbf{V} \boldsymbol{\gamma}$, où $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ est l'approximation du vecteur des degrés de liberté par la méthode d'hyper-réduction.

Il nous reste à préciser les équations de bilan restreintes au RID et projetées sur la base $(\psi_k^Z)_{k=1}^N$ pour représenter les fonctions tests de la forme faible des équations. Ces modes sont bien cinématiquement admissibles à zéro car, par construction, ils s'annulent sur l'interface \mathcal{I} où sont imposées des conditions de Dirichlet paramétrées en $\tilde{\gamma}$. Ainsi, la formulation de l'hyper-réduction s'écrit : dans Ω_Z , trouver $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$ tel que :

$$\sum_{i \in \mathcal{F}_Z} V_{ik} r_i(\mathbf{V} \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.42)$$

où V_{ik} est le terme en ligne i et colonne k de \mathbf{V} .

1.5 Conclusion de l'étude bibliographique

Le soudage est un phénomène multi physique qui produit des défauts mécaniques (contraintes et déformations résiduelles). Pour toutes les techniques du soudage et tous les procédés, le soudage dépend de plusieurs paramètres qui sont difficile à mesurer. La SNS est nécessaire pour anticiper les défauts du soudage, mais c'est un calcul non linéaire, complexe qui nous demande beaucoup de temps du calcul. En plus, pour chaque simulation, on a besoin des études paramétriques pour bien définir le modèle de soudage, donc plusieurs des calculs similaires doivent être réalisés. Et si l'on place dans le problème industriel, le soudage multipasse où le nombre de passes devient important, cela nous conduit à des simulations hors d'atteinte.

Il existe déjà plusieurs méthodes pour simplifier la modélisation de soudage. Les méthodes de réduction d'ordre de modèle apparaissent comme les meilleurs méthodes en réduisant la complexité numérique du problème. Nous avons les méthodes *a posteriori* et *a priori* de réduction de modèle. Elles ont pour l'objectif de trouver une solution approchée sur une approximation en base réduite ou domaine réduit. On a donc choisi la méthode d'hyper-réduction parce que c'est la méthode la plus efficace.

L'hyper-réduction permet de conserver une formulation de type problème aux limites où la boucle d'assemblage de la méthode des éléments finis est préservée. L'intégration des lois de comportement est également préservée. Un maillage restreint au domaine réduit d'intégration permet d'accéder à des gains en temps de calcul de façon peu intrusive. Dans la version *a posteriori* de l'hyper-réduction, seule l'étape de résolution du système linéaire de l'algorithme de Newton Raphson est modifiée.

La méthode d'hyper-réduction (HR) est donc introduite de façon *a posteriori*. Elle vient en complément de méthodes simplifiées déjà disponibles. Méthode d'hyper-réduction a toujours besoin des résultats de calculs stockés dans une matrice de snapshots comme des données de référence. Ensuite, la première étape consiste à générer la base réduite à partir de la matrice des snapshots et à trouver le domaine réduit d'intégration (en géométrie) pour cette base. Le modèle hyper-réduit contient donc la base réduite et le domaine réduit d'intégration. La deuxième étape va utiliser ce modèle pour la résolution du problème thermomécanique.

Chapitre 2

Méthodes d'hyper-réduction adaptées au soudage

La méthode d'hyper-réduction pour la simulation numérique du soudage a été développée dans un code industriel chez EDF en utilisant la méthode des éléments finis, code_aster .

Ce chapitre va d'abord présenter la programmation dans code_aster pour utiliser la méthode d'hyper-réduction. On va valider ce développement par un cas test de soudage simple. Au cours de cet essai, les difficultés liées au soudage sont illustrées. Elles nous posent des problèmes dans la précision de l'hyper-réduction selon l'approche classique. Nous avons donc proposé de nouveaux modèles pour améliorer les calculs hyper-réduits.

Dans les études paramétriques de soudage, nous considérons l'approche du modèle directionnel qui introduit des modes sur tous les plans perpendiculaires à la direction de soudage. On montre que ce nouveau modèle qui prend en compte le caractère directionnel du soudage va améliorer les études paramétriques car il a un domaine de validité plus large avec plus de modes empiriques.

Cependant, le modèle directionnel étant plus grand, il nous mène à des calculs plus longs. Nous proposons alors un modèle mixte entre modèle 3D et modèle directionnel pour optimiser le temps de calcul et l'erreur commise dans les études paramétriques.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à l'effet de l'ajout de cordons de soudure dans le soudage multipasse. En régime stationnaire, les prévisions locales peuvent être décalées d'un cordon à un autre. Il est donc raisonnable de chercher à décaler une partie des modes empiriques pour passer d'un cordon à un autre. L'hypothèse de régime stationnaire étant rarement acceptable, nous proposons d'améliorer ces calculs. Pour cela, on couple le modèle hyper-réduit avec un modèle éléments finis local. Cette approche hybride va prendre en compte les nouvelles conditions et va corriger les effets des nouveaux cordons.

Avec ces trois nouveaux modèles proposés, nous faisons des études paramétriques et des études de convergence pour comparer des modèles et optimiser leurs paramètres.

2.1 Développements dans *code_aster* de l'hyper-réduction

D'après l'étude bibliographique ([section 1.4](#)), l'hyper-réduction se décompose en trois étapes :

- Générer le modèle hyper-réduit. C'est l'étape *offline* de la méthode. Elle consiste d'abord en l'application de la méthode POD sur la matrice des résultats afin de construire la base réduite sous forme matricielle qui est l'ensemble des modes empiriques. Ensuite, le RID est déterminé par la méthode DEIM à partir de la base réduite des variables primales (température ou déplacement) et des variables duales (gradient thermique ou contrainte) ;
- Utiliser des modèles hyper-réduits dans la résolution du système. Pour les schémas d'intégration implicites, cela passe par la projection des systèmes d'équations linéaires avec des fonctions tests dédiées et la modification des critères de convergence sur les résidus des équations de bilan. Comme nous choisissons la version *a posteriori* de l'hyper-réduction, les modèles hyper-réduits restent inchangés pendant cette étape dite *online* ;
- Reconstruire les résultats en dehors du domaine d'intégration réduit à partir des solutions par hyper-réduction à l'aide de la méthode Gappy POD. La prévision des champs primaux (température, déplacement) et des champs duaux (gradient thermique, contrainte) sur le modèle complet nécessite une base complète pour chaque type de champ.

Les nouvelles fonctionnalités de *code_aster* développées au cours de cette thèse permettent désormais de réaliser les trois étapes décrites ci-dessus afin de résoudre par hyper-réduction des problèmes génériques de mécanique et de thermique. Ces nouvelles fonctionnalités concernent les opérateurs suivants de *code_aster* :

- `DEFI_BASE_REDUITE`
- `DEFI_DOMAINE_REDUIT`
- `REST_REDUIT_COMPLET`
- `THER_NON_LINE`
- `STAT_NON_LINE`

Les trois premiers opérateurs ont été ajoutés au cours du travail de thèse. L'introduction de ces trois opérateurs se trouve dans l'[annexe D](#). Ils permettent de réaliser la première et la troisième étape de la méthode d'hyper-réduction.

Par contre, les deux derniers opérateurs existaient déjà et ils nous permettent de réaliser des calculs thermiques et mécaniques non linéaires. Des mots clés spécifiques ont été ajoutés pour activer la méthode d'hyper-réduction lors de l'exécution de ces deux opérateurs.

2.1.1 Discussion sur le degré d'intrusion des développements de l'hyper-réduction dans *code_aster*

Un logiciel de calcul par éléments finis transforme des données d'entrées relatives à un modèle physique en des sorties standards. Celles-ci correspondent à des prévisions de champs (déplacements, contraintes, températures) qui dépendent des données d'entrée. Par définition, une méthode de réduction de modèle est dite non

2.1. DÉVELOPPEMENTS DANS *CODE_ASTER* DE L'HYPER-RÉDUCTION

intrusive si elle n'exploite que les données d'entrées et les sorties standards de la méthode des éléments finis.

La partie *offline* de l'hyper-réduction est non-intrusive, parce qu'elle n'exploite que des sorties standards et des paramètres additionnels pour la réduction de modèle. Sa mise en œuvre dans *code_aster* est présentée dans la [section D.1](#) et la [section D.2](#).

Par contre, la partie *online* de l'hyper-réduction est intrusive, mais nous souhaitons montrer dans cette section que l'on a su développer une approche peu intrusive. Bien que cette méthode utilise un maillage réduit, nous utilisons des outils de maillage standard et nous ne modifions pas les structures de données relatives au maillage et à la représentation des champs.

De plus, la boucle d'assemblage des résidus de l'équation d'équilibre et des matrices jacobiniennes n'est pas modifiée par la méthode d'hyper-réduction. Il s'en suit que l'intégration des lois de comportement n'est absolument pas modifiée par la mise en œuvre de l'hyper-réduction.

La suite de cette section concerne les programmations pour la procédure *online* de la méthode d'hyper-réduction dans *code_aster*.

2.1.2 Projection de type Petrov-Galerkin sur le RID

Nous démontrons ici un résultat fondamental pour la mise en œuvre de la méthode d'hyper-réduction.

Propriété : Si une famille de fonctions intégrables, notées $(\psi_k)_{k=1}^N$, est une famille libre quand elle est restreinte à un ensemble discret de points $\{\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_m\}$, avec nécessairement $m \geq N$, alors cette famille est libre sur tout domaine contenant ces points.

Démonstration par l'absurde. Soit une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^m , de composantes $w_{\alpha k} = \psi_k(\tilde{\mathbf{x}}_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, m$. Ceci n'est possible que si $m \geq N$. Supposons que les fonctions $(\psi_k)_{k=1}^N$ définies sur Ω , soient des fonctions liées sur un domaine $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Alors, il existe un vecteur de coefficients de norme non nulle, noté $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^N$, tel que :

$$\sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \tilde{\gamma}_k = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \tilde{\Omega}, \quad \|\tilde{\gamma}\| > 0$$

Si de plus :

$$\tilde{\mathbf{x}}_\alpha \in \tilde{\Omega} \quad \forall \alpha = 1, \dots, N$$

alors :

$$\sum_{k=1}^N w_{\alpha k} \tilde{\gamma}_k = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \text{ avec } \|\tilde{\gamma}\| > 0$$

Cette dernière relation n'est pas possible si la matrice ω contient des vecteurs linéairement indépendants, car :

$$\sum_{k=1}^N w_{\alpha k} \tilde{\gamma}_k = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma}_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$$

Cette propriété permet de construire un domaine réduit par union de sous-domaines, tout en garantissant que les bases réduites restreintes au domaine réduit

seront des bases réduites, si le domaine réduit contient des points d'interpolation de ces bases réduites. En effet les points d'interpolation construits par la méthode DEIM (Discrete empirical interpolation) [19] sont des points $\{\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N\}$ pour lesquels $(\psi_k(\tilde{\mathbf{x}}_i))_{k=1}^N, i = 1, \dots, N$ sont les éléments d'une matrice inversible. Donc les colonnes et les lignes de cette matrice, forment une famille libre de vecteurs dans leur espace vectoriel respectif.

En utilisant la liste des degrés de liberté dans le RID $\mathcal{F}_Z = \{i_1, \dots, i_{N_Z}\}$ qui est définie dans l'équation 1.39, on introduit la matrice identité tronquée $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N_Z \times N}$ avec $\mathbf{Z}^T = [\dots, \mathbf{e}_i^T, \dots], \forall i \in \mathcal{F}_Z$, où \mathbf{e}_i est le i -ème vecteur de base canonique de \mathbb{R}^N . Alors, la formulation d'un problème d'ordre réduit pour l'étape de correction linéaire (1.33) devient :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{J} \mathbf{V} \delta \gamma = -\mathbf{V}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{r}(\mathbf{q}), \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{V} \delta \gamma \quad (2.1)$$

Cette formulation revient à ne considérer qu'une sélection d'équations avant d'en écrire la projection sur la base réduite. Elle est en fait la projection des équations de bilan linéarisées restreintes à des « points » d'échantillonnage. C'est une projection de type Petrov-Galerkin. Cependant, la complexité numérique des produits matriciels est toujours proportionnelle à N si l'on ne tient pas compte des termes nuls. On peut éviter l'utilisation d'une base réduite sur tout le domaine pour réduire encore la complexité du problème.

A partir de la démonstration précédente, la restriction de base réduite à \mathcal{F}_Z , notée $\mathbf{V}[\mathcal{F}_Z, :] = \mathbf{Z} \mathbf{V}$ est une base réduite. De la même manière, on introduit la matrice jacobienne restreinte $\mathbf{J}[\mathcal{F}_Z, :] = \mathbf{Z} \mathbf{J}$ et le résidu restreint $\mathbf{r}[\mathcal{F}_Z] = \mathbf{Z} \mathbf{r}$. On obtient ainsi une nouvelle forme de l'équation 2.1 qui s'écrit :

$$\mathbf{V}[\mathcal{F}_Z, :]^T \mathbf{J}[\mathcal{F}_Z, :] \mathbf{V} \delta \gamma = -\mathbf{V}[\mathcal{F}_Z, :]^T \mathbf{r}[\mathcal{F}_Z] \quad (2.2)$$

Or la matrice jacobienne est une matrice creuse. Il existe $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ tel que :

$$\tilde{\mathcal{F}}_Z = \{j \in \{1, \dots, N\}, \exists i \in \mathcal{F}_Z \quad J_{ij} \neq 0\} \quad (2.3)$$

On a forcément $\mathcal{F}_Z \subset \tilde{\mathcal{F}}_Z$ puisque les termes diagonaux de la matrice jacobienne sont non nuls. On en déduit que :

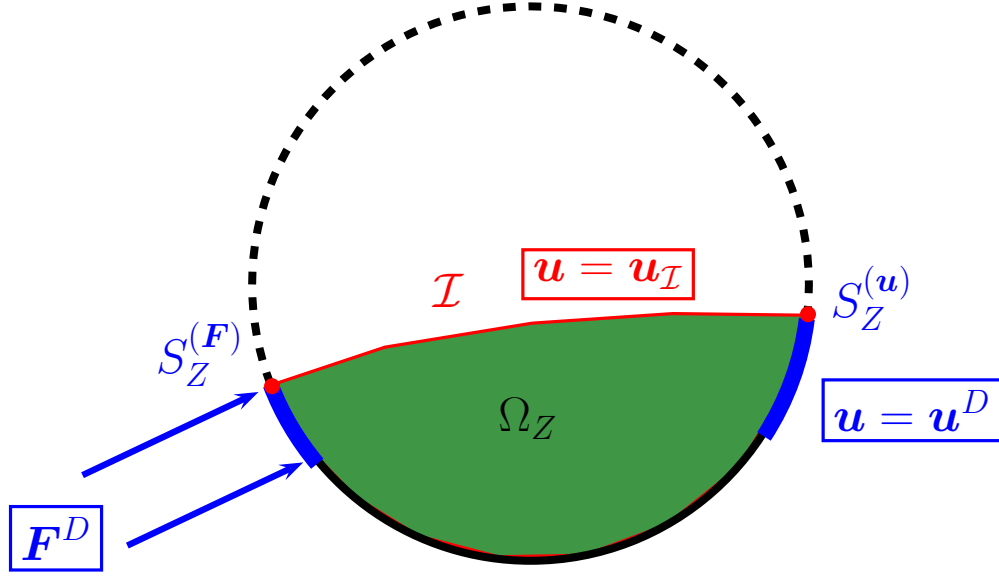
$$\mathbf{J}[\mathcal{F}_Z, :] \mathbf{V} = \mathbf{J}[\mathcal{F}_Z, \tilde{\mathcal{F}}_Z] \mathbf{V}[\tilde{\mathcal{F}}_Z, :] \quad (2.4)$$

En pratique, J_{ij} est non nul pour des degrés de liberté (i, j) appartenant à un élément commun. En ne chargeant que les éléments connectés à \mathcal{F}_Z , on obtient :

$$\Omega_Z = \cup_{i \in \mathcal{F}_Z} \text{support}(\varphi_i)$$

Ceci est rigoureusement l'application inverse de l'équation 1.39 qui définit le maillage réduit que l'on va charger dans la structure de donnée du calcul par éléments finis. En substituant l'équation 2.4 dans l'équation 2.2, nous arrivons à écrire la projection de type Petrov-Galerkin seulement sur le domaine d'intégration réduit :

$$\mathbf{V}[\mathcal{F}_Z, :]^T \mathbf{J}[\mathcal{F}_Z, \tilde{\mathcal{F}}_Z] \mathbf{V}[\tilde{\mathcal{F}}_Z, :] \delta \gamma = -\mathbf{V}[\mathcal{F}_Z, :]^T \mathbf{r}[\mathcal{F}_Z] \quad (2.5)$$


 FIGURE 2.1 – Schéma d'application de l'hyper-réduction dans *code_aster* .

2.1.3 Mise en œuvre dans la résolution du système thermique et mécanique

Comme tous les termes de la nouvelle formulation (2.5) sont restreints dans le domaine réduit par les listes des indices \mathcal{F}_Z et $\tilde{\mathcal{F}}_Z$, la complexité numérique des produits matriciels est proportionnelle à $\mathcal{N}_Z < \mathcal{N}$ et $\tilde{\mathcal{N}}_Z < \mathcal{N}$. Où \mathcal{N}_Z et $\tilde{\mathcal{N}}_Z$ sont respectivement la taille de deux listes \mathcal{F}_Z et $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. La figure 2.1 illustre comment l'hyper-réduction est appliquée dans la programmation de *code_aster*, en ne considérant que le domaine réduit $\Omega_Z \subset \Omega$, y compris les surfaces où s'appliquent les chargements. On définit ici $S_Z^{(F)} = \Omega_Z \cap S^{(F)}$ et $S_Z^{(u)} = \Omega_Z \cap S^{(u)}$, où $S^{(F)}$ et $S^{(u)}$ sont les deux surfaces sur lesquelles sont respectivement appliquées des conditions aux limites de type Neumann (force imposée) et de type Dirichlet (déplacement imposé).

On considère maintenant la liste des degrés de liberté sur l'interface $\mathcal{I} = \Omega_Z \cap \overline{\Omega \setminus \Omega_Z}$, notée \mathcal{F}_I . Il est facile de montrer que $\tilde{\mathcal{F}}_Z = \mathcal{F}_Z \cup \mathcal{F}_I$. Dans la programmation de *code_aster*, il est impossible de charger la matrice jacobienne $\mathbf{J}[\mathcal{F}_Z, \tilde{\mathcal{F}}_Z]$ car la matrice demandée est toujours carrée. Par contre, on peut construire tous les termes de la projection de type Petrov-Galerkin à partir de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ avec les conditions de type Dirichlet sur \mathcal{F}_I en plus. Ceci est équivalent à la formulation 2.5.

Nous avons à notre disposition le domaine réduit sous forme d'un groupe de nœuds dans le maillage. Ici, nous ne modifions pas la structure de données du maillage pour conserver la numérotation de degré de liberté. Alors, les termes suivants sont sélectionnés facilement dans le RID par *code_aster* :

$$\mathbf{V}_Z = \mathbf{V}[\tilde{\mathcal{F}}_Z, :]; \mathbf{J}_Z = \mathbf{J}[\tilde{\mathcal{F}}_Z, \tilde{\mathcal{F}}_Z]; \mathbf{r}_Z = \mathbf{r}[\tilde{\mathcal{F}}_Z]$$

avec \mathbf{V} , \mathbf{J} et \mathbf{r} respectivement la matrice de base réduite, la matrice jacobienne et le résidu. En supposant que $\mathbf{B}_Z = \mathbf{J}_Z \mathbf{V}_Z$, on définit $\hat{\mathbf{B}}$ et $\hat{\mathbf{r}}$ avec l'application des

conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\widehat{\mathbf{B}}[i, :] = \begin{cases} \mathbf{B}_Z[i, :] & \forall i \in \mathcal{F}_Z \\ 0 & \forall i \in \mathcal{F}_I \end{cases} ; \widehat{\mathbf{r}}[i] = \begin{cases} \mathbf{r}_Z[i] & \forall i \in \mathcal{F}_Z \\ 0 & \forall i \in \mathcal{F}_I \end{cases}$$

On en déduit le système final hyper-réduit à résoudre dans *code_aster* :

$$\mathbf{V}_Z^T \widehat{\mathbf{B}} \delta \boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{V}_Z^T \widehat{\mathbf{r}} \quad (2.6)$$

Dans *code_aster*, les coordonnées réduites $\boldsymbol{\gamma} = \sum_n \delta \boldsymbol{\gamma}^n$ sont sauvegardées pour nous permettre de reconstruire le résultat sur le domaine complet à l'aide de la commande `REST_REDUIT_COMPLET` (annexe D.3). Ici, n étant l'itération de Newton pendant la résolution du système non linéaire 2.6.

Remarque : Critère de convergence

Si l'on oublie dans un premier temps les conditions aux limites de Dirichlet, on doit résoudre un système non-linéaire de la forme :

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}_j) = \mathbf{L}_j^{int} - \mathbf{L}_j^{ext} = 0 \quad (2.7)$$

où \mathbf{L}_j^{ext} désigne désormais, à l'instant t_j , le chargement extérieur tandis que le chargement interne est donné par \mathbf{L}_j^{int} . Ce problème est résolu à l'aide de la méthode de Newton. Le champ à rechercher \mathbf{q}_j à l'instant t_j est approché par :

$$\mathbf{q}_j \approx \delta \mathbf{q}_j^0 + \delta \mathbf{q}_j^1 + \dots + \delta \mathbf{q}_j^n \quad (2.8)$$

On note $\delta \mathbf{q}_j^n$ l'incrément de champ recherché \mathbf{q}_j entre deux itérations de Newton n et $n - 1$. La valeur $\delta \mathbf{q}_j^0$ est calculée pendant la phase de prédiction.

Pour valider la résolution du système, on définit un critère de convergence. En fait, après chaque itération de Newton n , on recalcule l'incrément de résidu, noté $\delta \mathbf{r}_j^n$. La résolution sur l'instant t_j s'arrête lorsque la norme infinie du résidu est inférieure à la valeur ε_m spécifiée par l'utilisateur :

$$\|\delta \mathbf{r}_j^n\|_\infty \leq \varepsilon_m \quad (2.9)$$

L'équation 2.9 est le critère de convergence *absolu*. Il y a également un critère de convergence *relatif* qui revient à vérifier que le résidu est suffisamment petit, comme précédemment, et ceci *relativement* à une quantité représentative du chargement.

$$\frac{\|\delta \mathbf{r}_j^n\|_\infty}{\|\mathbf{r}_j^0\|_\infty} \leq \varepsilon_r \quad (2.10)$$

où \mathbf{r}_j^0 est le résidu calculé au début de l'incrément à l'instant t_j avec ε_r est une valeur donnée par l'utilisateur.

Cependant, les critères de convergence 2.9 et 2.10 ne sont pas vérifiés car seulement une partie du domaine Ω est considérée. Pour évaluer la convergence du système non-linéaire hyper-réduit (2.6), nous utilisons un critère de convergence adapté pour l'hyper-réduction :

$$\|\mathbf{V}_Z^T \delta \widehat{\mathbf{r}}_j^n\|_\infty \leq \varepsilon_m \quad (2.11)$$

Cela signifie que l'on ne prend pas en considération les résidus des équations de bilan pour les degrés de liberté de l'interface, comme si nous y avions mis des conditions de type Dirichlet. La solution à l'interface suit la solution dans le domaine réduit d'intégration grâce aux modes empiriques. Notons que la base réduite \mathbf{V}_Z est inchangée après chaque itération de Newton.

2.1.4 La prévision du champ de contrainte

La méthode Gappy POD proposée dans [31] permet de compléter des données manquantes si l'on dispose d'une base réduite connue en tout point. Or, les bases POD construites pour la réduction des modèles éléments finis sont connues en tout point du maillage. Cette approche a été proposée en complément de l'hyper-réduction dans [62] pour mettre en place une méthode a posteriori. Elle permet de reprendre un calcul par éléments finis après une prévision par hyper-réduction suivie d'une reconstruction des champs de variables internes sur tout le domaine.

Nous considérons ici la reconstruction des champs de contraintes à l'aide de la base réduite associée, qui, rappelons-le, a été construite avec des valeurs de contraintes projetées aux nœuds du maillage. On note $(\psi_k^\sigma)_{k=1}^{N^\sigma}$ la base réduite POD des modes empiriques pour les contraintes. En tout point \mathbf{x} de Ω , $\psi_k^\sigma(\mathbf{x})$ est un tenseur de contrainte. Comme le RID contient les points magiques de cette base réduite, la restriction de $(\psi_k^\sigma)_{k=1}^{N^\sigma}$ à Ω_Z est une base réduite. La projection sur $(\psi_k^\sigma)_{k=1}^{N^\sigma}$ des contraintes calculées par hyper-réduction dans Ω_Z , notée σ^{HR} , est donc un problème à solution unique : Trouver $\gamma^\sigma \in \mathbb{R}^{N^\sigma}$ tel que :

$$\gamma^\sigma = \arg \min_{\gamma^* \in \mathbb{R}^{N^\sigma}} \int_{\Omega_Z} \left(\sigma^{HR} - \sum_k \psi_k^\sigma \gamma_k^* \right) : \left(\sigma^{HR} - \sum_k \psi_k^\sigma \gamma_k^* \right) d\Omega \quad (2.12)$$

Les modes empiriques étant connus en tout point du domaine Ω , on obtient la contrainte reconstruite, notée σ^{GP} :

$$\sigma^{GP}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \psi_k^\sigma(\mathbf{x}) \gamma_k^\sigma(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.13)$$

On note $\mathbf{V}^\sigma \in \mathbb{R}^{N^\sigma \times N^\sigma}$ la base réduite des contraintes en tout point \mathbf{x} de Ω et \mathbf{V}_Z^σ la même base réduite restreinte à Ω_Z . Supposons que par le calcul hyper-réduit, on trouve des contraintes dans le RID qui se rangent dans la matrice, notée \mathbf{Q}_Z^σ . Le problème 2.12 a une unique solution : trouver $\gamma^\sigma \in \mathbb{R}^{N^\sigma}$ tel que :

$$\gamma^\sigma = \arg \min_{\gamma^* \in \mathbb{R}^{N^\sigma}} \|\mathbf{Q}_Z^\sigma - \mathbf{V}_Z^\sigma \gamma_k^*\| \quad \Rightarrow \quad \gamma^\sigma = (\mathbf{V}_Z^{\sigma T} \mathbf{V}_Z^\sigma)^{-1} \cdot (\mathbf{V}_Z^{\sigma T} \mathbf{Q}_Z^\sigma) \quad (2.14)$$

La reconstruction du champ de contrainte en tout point du domaine Ω (2.13) est réalisée par $\mathbf{Q}^\sigma = \mathbf{V}^\sigma \gamma^\sigma$.

Les contraintes sont calculées aux points d'intégration numérique, puis transférées aux nœuds du maillage. La forme intégrale de l'équation (2.12) ne s'applique pas aux contraintes définies par des valeurs *nodales*. Sur l'interface \mathcal{I} une partie de la contribution des contraintes n'est pas prise en compte car certains éléments n'appartiennent pas au RID. Les contraintes nodales sont donc fausses. On note \mathcal{F}_Z^σ la liste des numéros d'équation du champ de contrainte dans le RID en excluant la contribution des nœuds sur l'interface \mathcal{I} . On définit également la base réduite \mathbf{V}_Z^σ et la matrice de snapshots de contrainte \mathbf{Q}_Z^σ associés avec la liste \mathcal{F}_Z^σ :

$$\mathbf{V}_Z^\sigma = \mathbf{V}^\sigma[\mathcal{F}_Z^\sigma, :]; \quad \mathbf{Q}_Z^\sigma = \mathbf{Q}_{HR}^\sigma[\mathcal{F}_Z^\sigma, :]$$

Avec \mathbf{V}^σ la matrice de base réduite associée au champ de contrainte du domaine complet et \mathbf{Q}_{HR}^σ la matrice des snapshots liée aux contraintes dans RID par le calcul hyper-réduit.

On va utiliser V_Z^σ, Q_Z^σ dans l'équation 2.14 pour trouver les coordonnées réduites du champ de contrainte γ^σ . La prévision du champ de contrainte est mise en œuvre dans *code_aster* par l'opérateur REST_REDUIT_COMPLET (annexe D.3).

2.2 Cas test de soudage simple par Hyper Réduction : mise en œuvre, efficacité et limites de la méthode

L'objectif de cette section est de présenter l'étape de validation des développements permettant la mise en œuvre d'un calcul hyper-réduit avec *code_aster*. Cette étape de validation est réalisée sur un problème thermomécanique 3D de soudage sans apport de matière. Cette étude de validation permet également de mettre en lumière les limitations de l'application de la méthode classique de l'hyper-réduction sur une problématique de soudage. Par la suite, ce problème thermomécanique sera systématiquement considéré comme cas test de validation des différentes méthodes développées dans ce travail de thèse et présentées dans les sections suivantes.

2.2.1 Modèles éléments finis du cas test

La pièce est une éprouvette parallélépipédique de longueur 100 mm, de largeur 60 mm et d'épaisseur 6 mm (cf. figure 2.2). Le matériau choisi est l'acier inoxydable 316L. Au milieu de la pièce, sur la surface supérieure, une ligne de fusion est appliquée à une vitesse constante V_s suivant Ox . Par symétrie suivant le plan (O, x, z) , la modélisation ne considère que la moitié de la pièce.

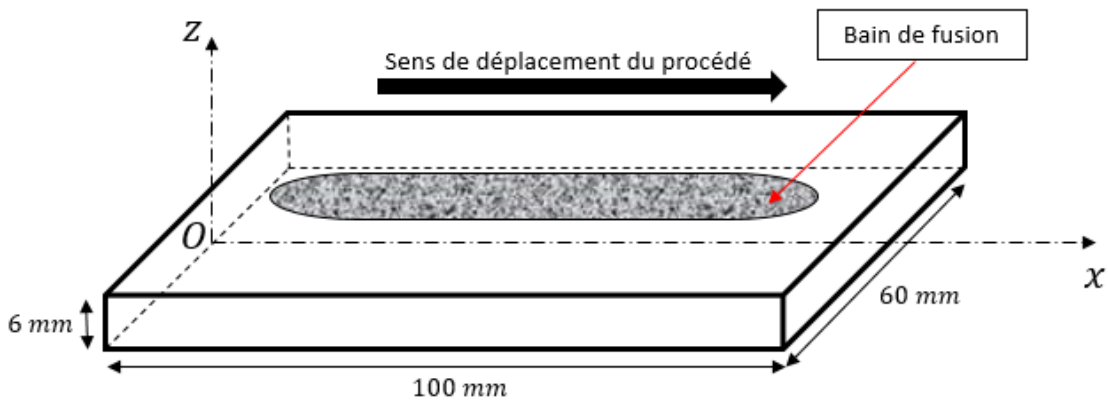


FIGURE 2.2 – Géométrie du cas test de soudage simple

Le déroulement de l'essai est le suivant :

- de 0 s à 1 s, le procédé de soudage n'est pas encore en cours, c'est juste une période de préchauffage, pour prendre en compte les conditions aux limites. À la fin de cette phase, on a un champ de température stabilisé.

2.2. CAS TEST DE SOUDAGE SIMPLE PAR HYPER RÉDUCTION : MISE EN ŒUVRE, EFFICACITÉ ET LIMITES DE LA MÉTHODE

- de 1 s à 39 s, la torche du procédé commence à souder sur l'éprouvette en se déplaçant avec une vitesse constante, nous représentons le procédé du soudage par une source de chaleur.
- de 39 s à 144 s, la torche est enlevée, c'est la période de refroidissement.

L'apport de chaleur généré par la ligne de fusion est modélisé par une source thermique de type Goldak [cf. [section A.1](#)] définie par les paramètres suivants :

- sa position initiale : $x_0 = 12 \text{ mm}$, $y_0 = 0 \text{ mm}$, $z_0 = 6 \text{ mm}$;
- ses dimensions : $a = 5.1 \text{ mm}$, $f = 4$, $b = 4.3 \text{ mm}$, $c = 3.2 \text{ mm}$;
- les paramètres du procédé : $Q_0 = \eta UI$ avec $\eta = 0.75$; $U = 12 \text{ V}$; $I = 200 \text{ A}$; $V_s = 2 \text{ mm/s}$

Les chargements thermiques prennent en compte les échanges thermiques par rayonnement (avec l'émissivité choisie $\epsilon_{th} = 0.75$) et par convection avec l'air extérieur (le coefficient d'échange est $h_{ext} = 15 \times 10^{-6} \text{ W.mm}^{-2}.K^{-1}$). La température à l'extérieur est imposée à $T_{ext} = 20^\circ C$.

Lors de la création du maillage, il faut raffiner la zone tout au long de la ligne de fusion. La partie autour du bain de fusion est souvent maillée finement et régulièrement. Pour ce cas test, on s'autorise un maillage fin et régulier dans tout le domaine. Supposons que l'incrément en espace suivant l'axe principal de soudage Ox est Δx . Afin d'assurer un apport de chaleur régulier, nous choisissons l'incrément de temps suivant :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2V_s}$$

Des éléments hexaédriques sont considérés pour la construction du maillage. On a finalement un maillage de 5712 nœuds ([figure 2.3](#)) avec 125 instants de calcul. Le matériau choisi est l'acier inoxydable 316L dont les données sont présentées en [section B.1](#).

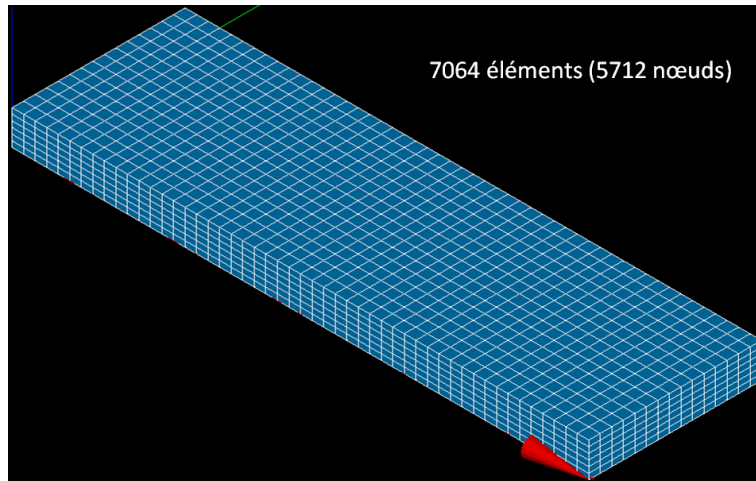


FIGURE 2.3 – Maillage pour le cas test de soudage simple.

Le chargement mécanique consiste en l'encastrement de la surface opposée au plan de symétrie.

La résolution de ce type de problème thermomécanique avec *code_aster* est réalisée de manière découplée : on réalise d'abord un calcul thermique pour obtenir un champ de température (cf. [figure 2.4](#)) qui servira ensuite de donnée d'entrée pour

le calcul mécanique. La [figure 2.5](#) montre le champ de déplacements u_x, u_y, u_z à la fin du calcul mécanique tandis que la [figure 2.6](#) représente le champ de contrainte équivalent de von Mises σ_{eq} défini par l'équation 1.19.

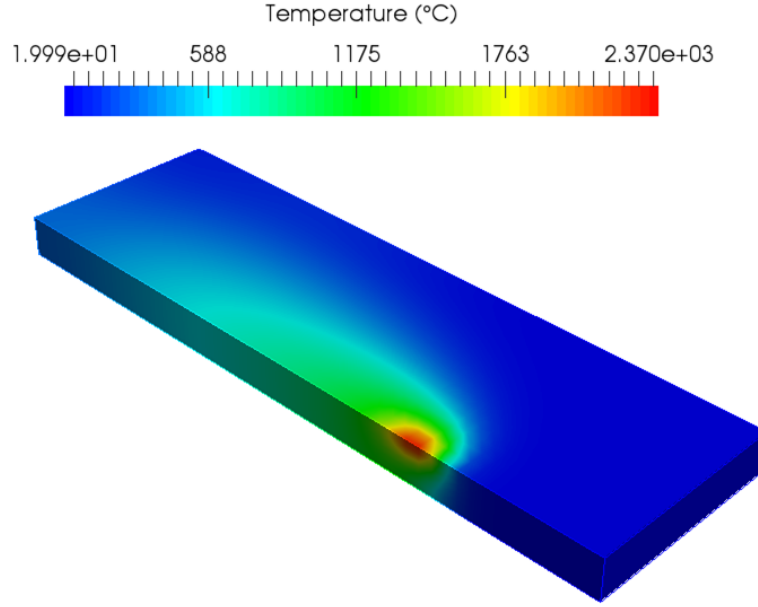


FIGURE 2.4 – Champ de température issu du calcul par éléments finis.

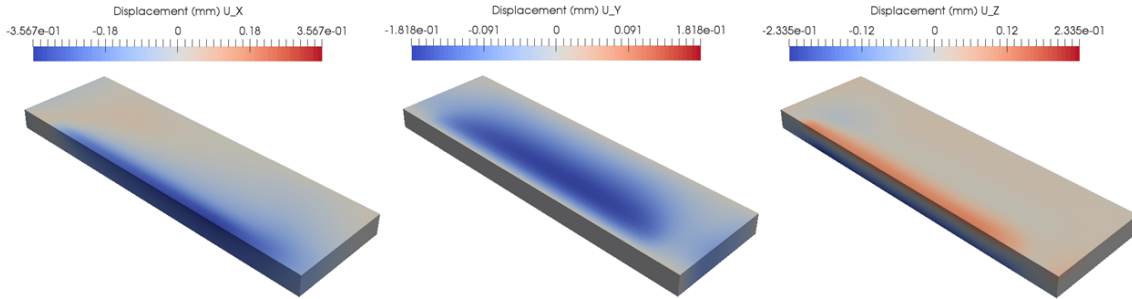


FIGURE 2.5 – Champ de déplacement (u_x, u_y, u_z) en fin du calcul mécanique par éléments finis.

2.2.2 Modèles hyper-réduits

Avec la commande `DEFI_BASE_REDUIITE`, nous pouvons construire les modes empiriques générés à partir des solutions EF préliminaires. D'abord, on va déterminer la base réduite pour le champ de température. Les modes empiriques par POD classique sont illustrés sur la [figure 2.7](#). Ici, nous choisissons les modes avec le paramètre $\mu_{POD} = 10^{-3}$. Ainsi on a retenu les 45 modes empiriques $(\psi_k^T)_{k=1}^{45}$ qui sont les modes les plus significatifs pour représenter le champ de température du cas-test considéré.

La base réduite pour le champ de gradient thermique est également déterminée à l'aide de l'opérateur `DEFI_BASE_REDUIITE`. Avec la même valeur du paramètre $\mu_{POD} = 10^{-3}$, on a 84 modes pour le champ du gradient thermique. Ils sont combinés

2.2. CAS TEST DE SOUDAGE SIMPLE PAR HYPER RÉDUCTION : MISE EN ŒUVRE, EFFICACITÉ ET LIMITES DE LA MÉTHODE

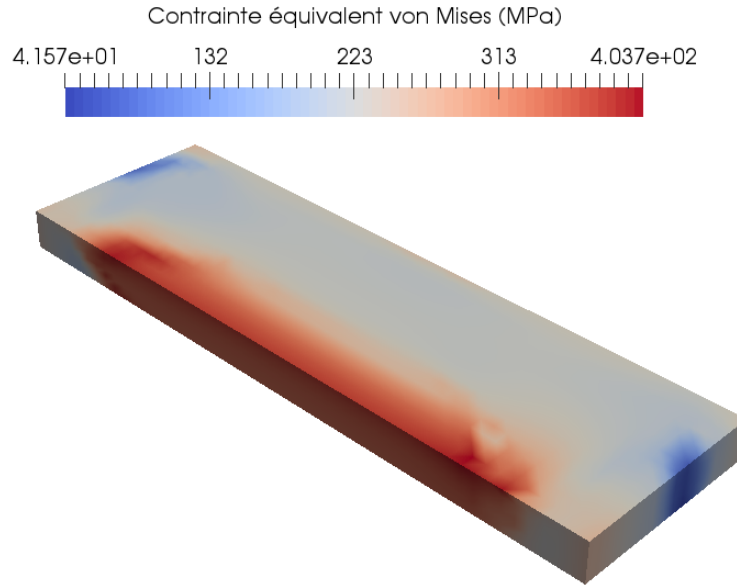


FIGURE 2.6 – Champ de contrainte équivalent de type von Mises en fin du calcul mécanique par éléments finis.

avec les 45 modes empiriques pour le champ de température afin de construire le domaine d'intégration réduit (RID) à l'aide de l'opérateur `DEFI_DOMAINE_REDUIT`. La [figure 2.8](#) représente le RID sous forme d'un groupe de mailles. Le nombre de couches d'éléments autour des points d'interpolation est un paramètre dont dépend la taille finale du RID. Ici, sans ajouter des couches d'éléments, nous avons un domaine réduit de 444 nœuds (384 éléments), alors que le maillage total contient 5712 nœuds (7064 éléments).

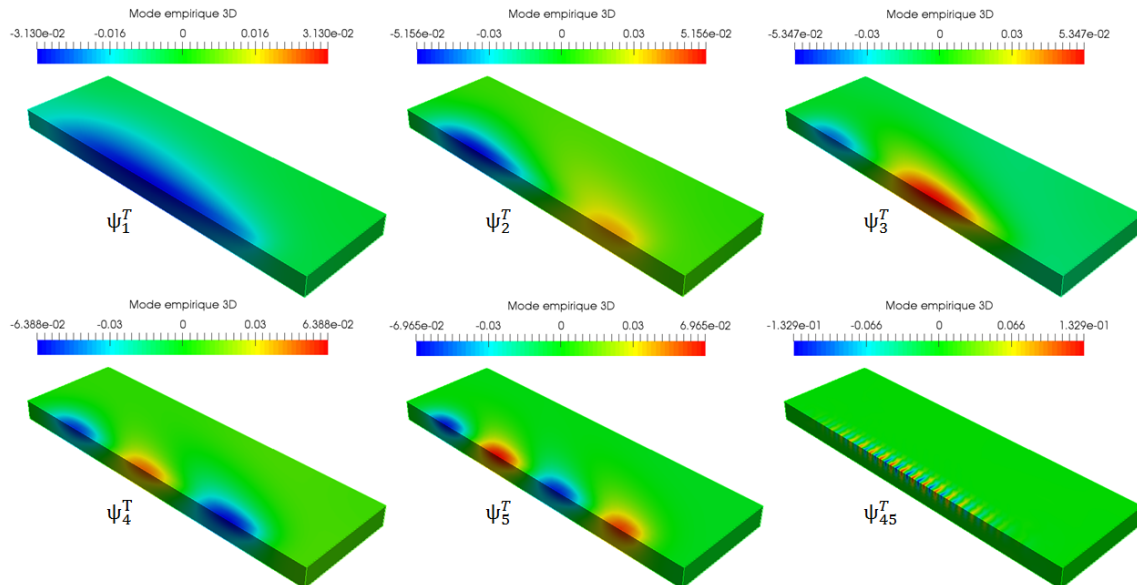


FIGURE 2.7 – Modes empiriques du champ de température pour le modèle POD classique 3D.

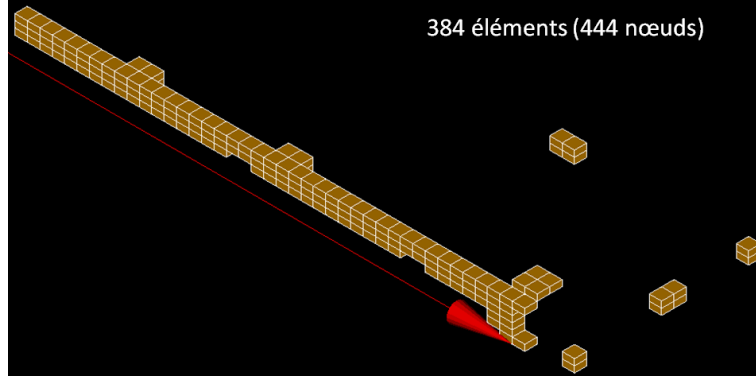


FIGURE 2.8 – Représentation du domaine d'intégration réduit (RID) pour le calcul thermique.

De la même manière, pour le calcul mécanique, on doit récupérer la base réduite pour le champ de déplacement, notée ψ^u qui définit la matrice de base réduite V^u . On a aussi la base réduite pour le champ de contrainte, notée ψ^σ et V^σ . Si on fixe le paramètre $\mu_{POD} = 10^{-3}$, on récupère alors 26 modes de déplacement et 75 modes de contrainte. Le champ de température étant un champ scalaire, il y a une seule composante pour sa base réduite. Par contre, comme les champs de déplacement et contrainte sont des champs de vecteurs et de tenseurs, leur base réduite contient plusieurs composantes. C'est-à-dire $\psi_k^u = (\psi_k^{u_x}, \psi_k^{u_y}, \psi_k^{u_z})$ contient trois composantes comme dans la figure 2.9 et $\psi_k^\sigma = (\psi_k^{\sigma_{xx}}, \psi_k^{\sigma_{yy}}, \psi_k^{\sigma_{zz}}, \psi_k^{\sigma_{xy}}, \psi_k^{\sigma_{yz}}, \psi_k^{\sigma_{xz}})$ contient six composantes représentées dans la figure 2.10. La construction d'une base réduite vectorielle est expliquée en annexe D.1.2.

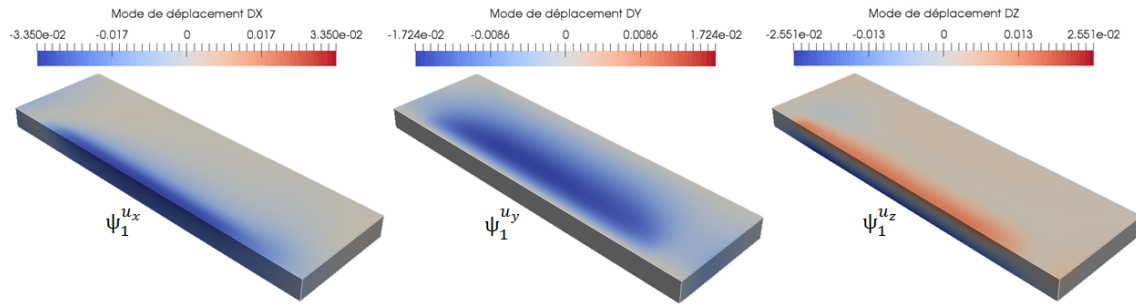


FIGURE 2.9 – Représentation du premier mode empirique du champ de déplacement pour chaque composante.

2.2.3 Résultats numériques par hyper-réduction

La méthode d'hyper-réduction nous permet de réduire le temps de calcul. Pour vérifier la précision de ces calculs, on va simuler à nouveau le cas test de soudage simple à l'aide du modèle hyper-réduit. Dans un premier temps, on conserve les conditions aux limites, les paramètres de soudage et du matériau. On compare les prévisions obtenues avec les résultats éléments finis pour trouver l'erreur de calcul par hyper-réduction. Comme l'indique le lemme de C  a, l'erreur de projection des

2.2. CAS TEST DE SOUDAGE SIMPLE PAR HYPER RÉDUCTION : MISE EN ŒUVRE, EFFICACITÉ ET LIMITES DE LA MÉTHODE

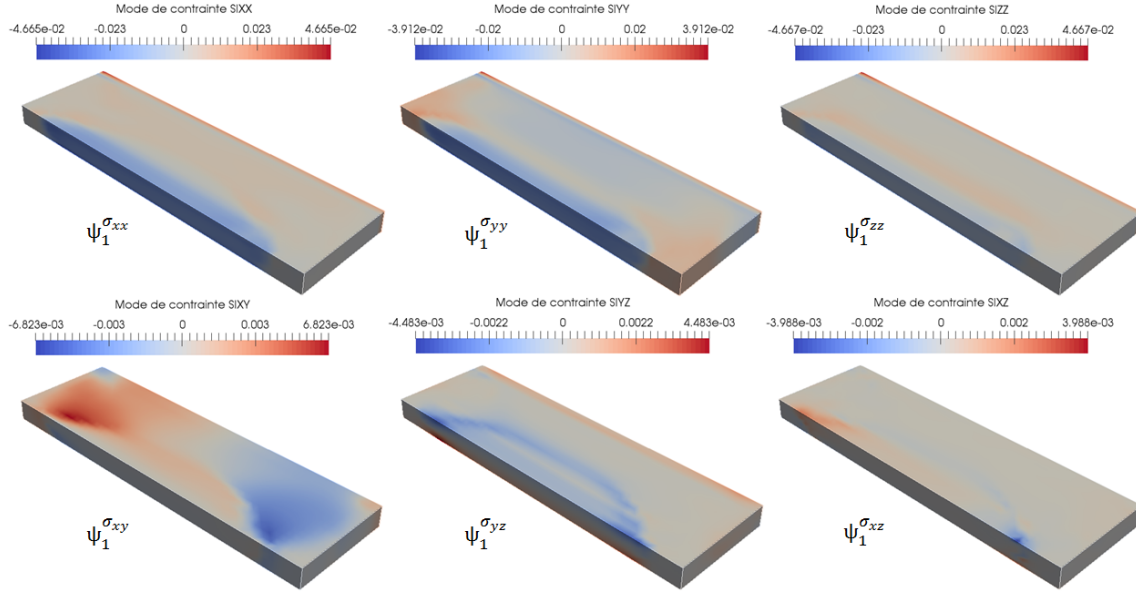


FIGURE 2.10 – Représentation du premier mode empirique du champ de contrainte pour chaque composante.

solutions dans un espace d'approximation diffère de l'erreur de prévision de la solution par projection des équations dans le même espace d'approximation. C'est ce que l'on quantifie ici numériquement.

Résultats thermiques

Pour appliquer l'hyper-réduction dans le calcul thermique (THER_NON_LINE), nous avons la base réduite et le RID sous forme d'un groupe de mailles. On ne définit les éléments finis que sur les mailles du domaine réduit comme expliqué dans le schéma de la [figure 2.1](#).

Il faut remarquer qu'une modification des conditions aux limites est nécessaire, il faut en restreindre leur application sur le RID. Ensuite, il faut redéfinir les conditions aux limites. Elles sont de type cinématique définies par l'opérateur AFFE_CHAR_CINE

Le résultat du calcul hyper-réduit en thermique pour le modèle classique 3D est présenté dans la [figure 2.11](#). Ce résultat hyper réduit est, en première approximation, proche de la solution EF illustrée dans la [figure 2.4](#).

Pour évaluer la précision des calculs, nous reconstruisons le champ de température sur tout le domaine Ω et définissons les erreurs relatives. Supposons que les solutions thermiques par éléments finis sont stockées dans la matrice de snapshots $Q^{(T)}$. La base réduite pour le champ de température $V^{(T)}$ est restreinte dans le domaine Ω_Z pour nous donner la base de troncature $V_Z^{(T)} = V^{(T)}[\tilde{\mathcal{F}}_Z, :]$. On va utiliser cette base pour déterminer les coordonnées réduites $\gamma_{HR}^{(T)}$ à partir de l'équation 2.6. La reconstruction du champ de température sur le domaine complet est réalisée par la commande REST_REDUIT_COMPLET. On reconstruit la matrice de snapshots du calcul par hyper-réduction $Q_{HR}^{(T)}$ en appliquant la formule suivante :

$$Q_{HR}^{(T)} = V^{(T)} \cdot \gamma_{HR}^{(T)}$$

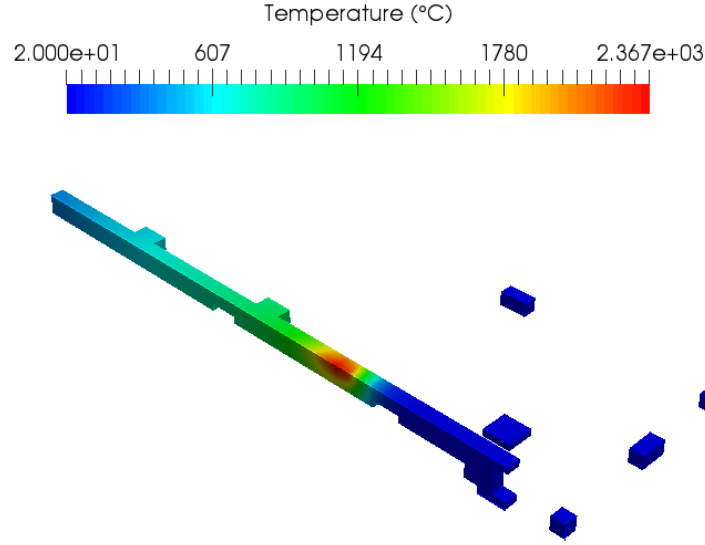


FIGURE 2.11 – Champ de température issu du calcul par hyper-réduction.

L'erreur relative entre le calcul hyper-réduit et le calcul éléments finis pour le champ de température est exprimée par :

$$\eta^T = \frac{\|Q^{(T)} - Q_{HR}^{(T)}\|_F}{\|Q^{(T)}\|_F} \quad (2.15)$$

On définit aussi le speed-up comme étant le rapport entre la durée du calcul éléments finis et la durée du calcul hyper-réduit.

On obtient $\eta^T \approx 0.365\%$ pour ce cas-test simple avec un speed-up de sept. Bien évidemment, ces deux valeurs dépendent du nombre de modes et de la taille du domaine d'intégration réduit (RID).

Résultats mécaniques

De la même manière que pour le calcul thermique, l'application de l'hyper-réduction lors le calcul mécanique (STAT_NON_LINE) est mise en œuvre à partir des deux bases réduites de déplacement et de contrainte et du RID déterminé à partir de ces deux bases. On notera que le RID du calcul mécanique est différent de celui du calcul thermique.

Le premier domaine réduit représenté dans la figure 2.12a contient seulement une couche d'éléments autour des points magiques (ou les nœuds d'interpolation). Avec ce RID, le calcul hyper-réduit ne converge pas. Ce problème de convergence est résolu en augmentant le nombre de couches d'éléments afin d'étendre la taille du RID. Ici, nous choisissons 3 couches (figure 2.12b).

Le résultat du calcul hyper-réduit en mécanique est présenté dans la figure 2.13 pour le déplacement et la figure 2.14 pour la contrainte équivalente de type von Mises. On peut comparer ces résultats avec ceux dans la figure 2.5 et la figure 2.6.

Comme dans la partie thermique, pour vérifier la précision des calculs, on reconstruit les champs de déplacement et de contrainte sur tout le domaine Ω et on définit des erreurs pour chaque champ. On ne présente ici que le résultat au dernier

2.2. CAS TEST DE SOUDAGE SIMPLE PAR HYPER RÉDUCTION : MISE EN ŒUVRE, EFFICACITÉ ET LIMITES DE LA MÉTHODE

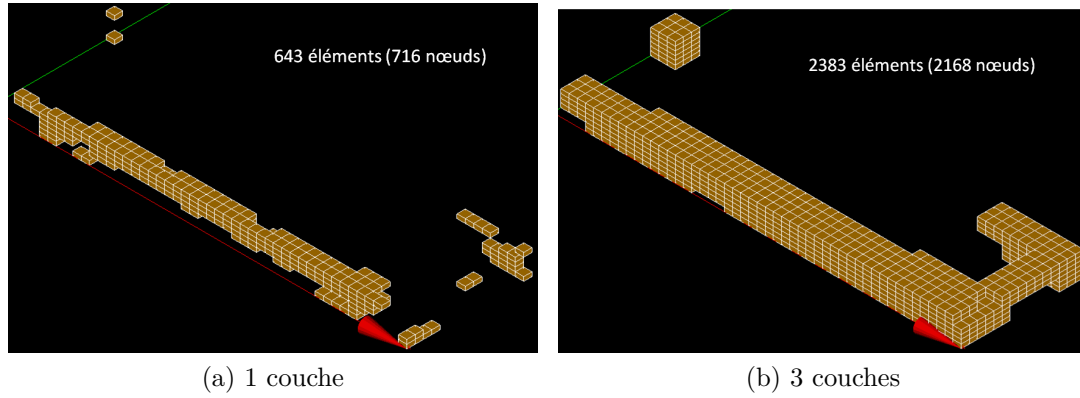


FIGURE 2.12 – Représentation du domaine d'intégration réduit (RID) pour le calcul mécanique en fonction du nombre de couches d'éléments.

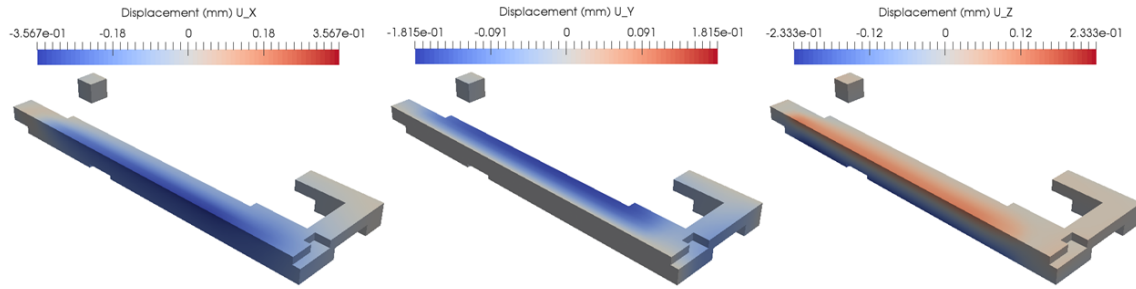


FIGURE 2.13 – Champ de déplacement (u_x, u_y, u_z) en fin de calcul mécanique par hyper-réduction.

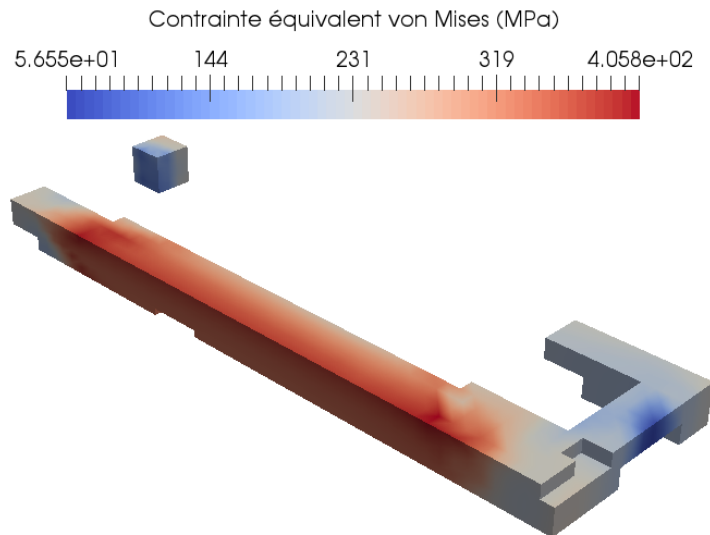


FIGURE 2.14 – Champ de contrainte équivalent de type von Mises en fin de calcul mécanique par hyper-réduction.

pas de calcul, c'est à dire pour le dernier snapshot. Supposons que les solutions mécaniques par éléments finis au dernier instant sont stockées dans les snapshots $\mathbf{q}_{N_t}^u$

pour le déplacement et $\mathbf{q}_{N_t}^\sigma$ pour la contrainte (N_t est le nombre d'instant calculé). Nous avons également des bases réduites associées pour chaque champ \mathbf{V}^u , \mathbf{V}^σ et les coordonnées réduites correspondantes γ^u , γ^σ . Attention, γ^u est trouvée lors d'un calcul hyper-réduit en mécanique mais γ^σ est trouvée par la gappy POD à partir de la commande `REST_REDUIT_COMPLET`.

L'erreur relative η^u entre le calcul hyper-réduit et le calcul éléments finis pour le champ de déplacement est exprimée par :

$$\eta^u = \frac{\|\mathbf{q}_{N_t}^u - \mathbf{V}^u \gamma_{N_t}^u\|_F}{\|\mathbf{q}_{N_t}^u\|_F} \quad (2.16)$$

et l'erreur relative η^σ pour le champ de contrainte est exprimée par :

$$\eta^\sigma = \frac{\|\mathbf{q}_{N_t}^\sigma - \mathbf{V}^\sigma \gamma_{N_t}^\sigma\|_F}{\|\mathbf{q}_{N_t}^\sigma\|_F} \quad (2.17)$$

Nous avons dans ce cas test simple $\eta^u = 0.209\%$ et $\eta^\sigma = 1.313\%$ avec un speed-up de 9.

2.2.4 Limites de la méthode d'hyper réduction pour la SNS

Les résultats présentés dans la section 2.2.3 montre l'efficacité de la méthode d'hyper réduction pour la résolution avec `code_aster` d'un cas test simple de soudage. En effet, on constate que le calcul hyper-réduit est assez précis (erreur d'ordre inférieure à 1%) et permet de réduire le temps de calcul (avec un speed-up de sept pour la thermique et de neuf pour la mécanique). Cependant, l'apport de la méthode d'hyper-réduction pour des problématiques industrielles liées à la SNS (Simulation Numérique du Soudage) reste à vérifier.

Dans la suite de cette section, nous identifions les limites de la méthode pour répondre aux besoins industriels que sont l'analyse paramétrique et le soudage multipasse. Puis nous présenterons dans les sections suivantes les méthodes d'hyper réduction développées dans ce travail de thèse et industrialisées dans `code_aster` pour répondre aux besoins de la SNS.

Etudes paramétriques

Supposons un champ recherché \mathbf{u} sur le domaine Ω . La solution du problème éléments finis à l'instant $t \in [0, \dots, t^F]$ est donnée par :

$$\mathbf{u}_{EF}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}^D + \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) q_i(\boldsymbol{\mu}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}. \quad (2.18)$$

où $\boldsymbol{\mu}$ le vecteur des paramètres (y compris le temps) et \mathcal{D} un espace donné des paramètres. Selon l'équation 1.41, la solution du calcul hyper-réduit à partir d'une base réduite donnée $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k=1}^N$ et d'un domaine réduit $\Omega_Z \subset \Omega$ est approximée par :

$$\mathbf{u}_{HR}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}^D + \mathbf{u}^I + \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\psi}_k^Z(\mathbf{x}) \gamma_k(\boldsymbol{\mu}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_Z, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}. \quad (2.19)$$

2.2. CAS TEST DE SOUDAGE SIMPLE PAR HYPER RÉDUCTION : MISE EN ŒUVRE, EFFICACITÉ ET LIMITES DE LA MÉTHODE

Avec ψ_k^Z les modes empiriques restreints dans Ω_Z à partir des modes ψ_k , \mathbf{u}^T est la condition limite sur l'interface du RID comme introduite dans l'équation 1.40.

En suivant la définition dans [65], nous introduisons le domaine de validité pour le modèle hyper-réduit donné :

$$\mathcal{D}_V = \left\{ \mu \in \mathcal{D} \mid \frac{\|\mathbf{u}_{EF}(\mu) - \mathbf{u}_{HR}(\mu)\|}{\|\mathbf{u}_{EF}(\mu)\|} \leq \epsilon_D \right\} \quad (2.20)$$

où ϵ_D est une valeur de tolérance donnée. Le domaine de validité dépend de la base réduite choisie et du domaine d'intégration réduit. Dans notre situation, le modèle hyper-réduit donné est construit à partir d'une solution de référence, notée $\mathbf{u}_{EF}(\mu_0)$ avec μ_0 la valeur de référence des paramètres.

Nous avons effectué les études paramétriques pour l'émissivité et la vitesse de la source de chaleur à l'aide du modèle hyper-réduit présenté dans la section 2.2.2. La valeur de référence pour l'émissivité est 0,75 et celle pour la vitesse est 2 mm.s^{-1} . Le résultat est montré dans la figure 2.15. On constate que l'erreur du calcul sur ce modèle est d'autant plus grande que la valeur du paramètre est éloignée de celle de référence. Ainsi l'erreur est minimale pour la valeur de référence μ_0 . Si on fixe ϵ_D , on peut trouver $\mu_a < \mu_0$ et $\mu_b > \mu_0$ tel que l'erreur du calcul est égale à ϵ_D . Le domaine de validité est $\mathcal{D}_V = [\mu_a, \mu_b]$. Ce domaine est vraiment petit pour le modèle hyper-réduit classique. Dans la suite, on propose un nouveau modèle hyper-réduit, appelé *modèle directionnel* qui aura un domaine de validité plus étendu.

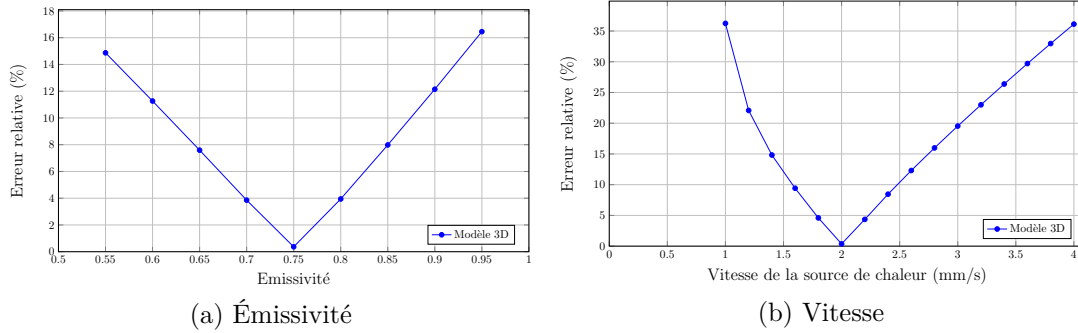


FIGURE 2.15 – Étude paramétrique du modèle hyper-réduit classique 3D.

Effets de l'ajout d'un cordon dans le soudage multipasse

On peut d'ors et déjà anticiper les limites de la méthode d'hyper réduction pour traiter l'application industrielle qui concerne le soudage multipasse lors de la réparation par Overlay (cf chapitre 1 , à compléter). L'étape offline pour la construction de la base réduite associée au modèle numérique de cette problématique n'est pas envisageable étant donné que les temps de calcul sont particulièrement élevés (de l'ordre de plusieurs mois).

La méthode d'hyper-réduction proposée étant définie *a posteriori*, on a toujours besoin de résultats de référence, ici les résultats numériques par éléments finis. Dans le cadre spécifique du soudage multipasse, une stratégie de résolution, présentée

dans la [section 3.3](#), a été développée afin de remédier aux temps de calcul trop élevés pour l'obtention de l'état de référence de l'ensemble des cordons. Le principe de cette méthode consiste à ne simuler par éléments finis qu'un nombre restreint de cordons. L'état de référence des cordons suivants est obtenu en appliquant une stratégie de décalage des champs. Cette stratégie de décalage des champs permet d'obtenir des bases réduites qui décrivent correctement le comportement global des passes à prédire mais pas de prendre en compte certains effets locaux spécifiques à chaque passe. Ces effets locaux sont alors capturés en utilisant un modèle hybride entre hyper-réduction et correction éléments finis. Ce modèle est présenté dans la [section 2.5](#).

On propose ici le modèle hybride entre hyper-réduction et correction éléments finis. Il s'agit d'un couplage du modèle hyper-réduit avec un modèle EF local. Le modèle EF local apporte une correction locale qui prend compte les conditions aux limites sur la nouvelle passe, au moment du calcul. Ces corrections nous permettent d'améliorer l'erreur de modélisation du soudage multipasse.

2.3 Modèle directionnel enrichi par hyper-réduction

Dans le calcul thermique, lorsque la source de chaleur se déplace sur une direction rectiligne pour former le cordon de soudure, nous observons que sur tous les plans perpendiculaires à la direction du soudage, les évolutions du champ de température se ressemblent en se décalant dans le temps et l'espace. Autrement dit, l'ensemble des snapshots sur chaque tranche sont identiques quand le régime stationnaire de la source de chaleur est atteint. On peut remplacer la matrice des snapshots sur tout le modèle par la matrice des snapshots sur toutes les tranches.

De plus, la représentation des modes empiriques du champ de température dans le cas test de soudage simple ([figure 2.7](#)) montre que ces modes se forment comme des ondes suivant la ligne principale de soudure. Ces structures ondulatoires prennent en compte la caractère directionnel de soudage. À partir du même principe que celui utilisé dans la [section 1.3.6](#), on propose le modèle réduit directionnel, en utilisant le fait que le procédé de soudage est toujours maintenu sur une direction. Cette approche ne simplifie que la présentation transverse du champ de température. On estime qu'elle est plus représentative et plus explicative pour le problème thermique et qu'elle va donc améliorer les résultats des études paramétriques.

2.3.1 Formulation des équations

Supposons que la source de chaleur se déplace le long de l'axe Ox , en considérant le domaine $\Omega = [0, L_X] \times S$, il est possible de séparer les variables (x, t) et les variables (y, z) pour l'approximation des températures :

$$T_{ROM}(x, y, z, t) = T^D + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \phi_l^{2D}(y, z) \theta_l(x, t) \quad (2.21)$$

où T^D est un champ connu qui vérifie les conditions de Dirichlet du problème de référence. Les modes $(\phi_l^{2D})_{l=1}^{\tilde{N}}$ sont appelés *modes transverses* ou *modes de tranche*.

2.3. MODÈLE DIRECTIONNEL ENRICHI PAR HYPER-RÉDUCTION

Cette décomposition s'obtient par la méthode SVD appliquée à une matrice de snapshot où chaque colonne correspond à un champ défini dans (y, z) . Donc les modes de tranche ϕ_l^{2D} se présentent sur chaque plan (y, z) comme dans la [figure 2.18](#). Les coordonnées réduites liées à ces modes θ_l dépendent non seulement du temps mais aussi de la coordonnée d'espace suivant Ox . En pratique, chaque plan $S(y, z)$ du maillage a une fonction de forme éléments finis associée notée $(\varphi_j^{1D}(x))_{j=1}^{N_X}$ et représentée dans la [figure 2.16](#). Les modes sont répétés sur chaque plan suivant la direction principale de la ligne de fusion. On en déduit une décomposition unidirectionnelle des θ_l :

$$\theta_l(x, t) = \sum_{j=1}^{N_X} \varphi_j^{1D}(x) \tilde{\gamma}_p(t) \text{ avec } l = 1, \dots, \tilde{N}; p = (j-1)\tilde{N} + l \quad (2.22)$$

Avec N_X le nombre de tranches et \tilde{N} le nombre de modes pour chaque plan. Les coordonnées réduites $\tilde{\gamma}_p$ sont associées aux nouveaux modes. On en déduit des modes directionnels 3D pour le champ recherché qui ne sont plus des modes POD :

$$T_{ROM}(x, y, z, t) = T^D + \sum_{p=1}^{N_X \times \tilde{N}} \hat{\psi}_p(x, y, z) \tilde{\gamma}_p(t) \quad (2.23)$$

avec $j = 1, \dots, N_X$; $l = 1, \dots, \tilde{N}$; $p = (j-1)\tilde{N} + l$ et

$$\hat{\psi}_p(x, y, z) = \phi_l^{2D}(y, z) \varphi_j^{1D}(x) \quad (2.24)$$

En procédant ainsi, le domaine réduit proposé conserve la séparation des variables telle que $\Omega_Z = [0, L_X] \times S_Z$, avec $S_Z \subset S$. Ce domaine réduit peut ensuite être complété par des contributions 3D des bases réduites en déplacement et en contrainte dans le calcul mécanique (ou par les bases réduites en température et en gradient thermique).

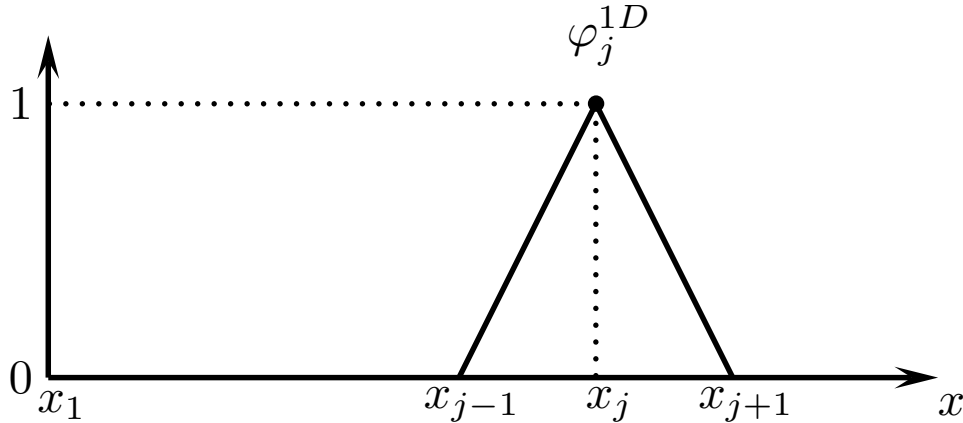


FIGURE 2.16 – Fonction de forme par éléments finis en 1D

2.3.2 Numérotation et construction de la base réduite directionnelle

La méthode d'hyper-réduction demande une étape hors ligne (offline) pour construire la base réduite et le domaine d'intégration réduit (RID). Dans le modèle 3D, la numérotation des nœuds ne joue aucun rôle. Par contre, pour le modèle directionnel, on ne considère que les tranches pour appliquer la SVD. Il faut donc classer les nœuds suivant l'ordre des tranches. Dans chaque tranche, le rangement doit être le même. C'est pour cela que nous travaillons avec un maillage en quadrangles par tranche et en hexaèdres en 3D, afin de classer les nœuds par leurs coordonnées.

Supposons encore que le procédé de soudage est maintenu suivant la direction Ox . Tout d'abord, nous devons définir une fonction pour identifier le numéro de tranche, notée κ . Pour chaque nœud, grâce à sa coordonnée en x , on peut déterminer à quel numéro de plan se trouve ce nœud :

$$j = \kappa(x) \text{ avec } j \in \{1, \dots, N_X\}$$

avec N_X le nombre de plans suivant Ox . Ensuite, on considère la numérotation sur chaque plan. Comme tous les plans sont identiques, on peut définir une fonction qui détermine le numéro de degré de liberté i^{2D} sur ce plan. On note χ en fonction des coordonnées en y et z qui nous permet de trouver i^{2D} :

$$i^{2D} = \chi(y, z) \text{ avec } i^{2D} \in \{1, \dots, \mathcal{N}_S\}$$

où \mathcal{N}_S le nombre de degrés de liberté sur une tranche. Avec \mathcal{N} est le nombre de degrés de liberté pour tout le domaine, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_S \times N_X$$

Donc, pour un nœud M avec ses coordonnées (x, y, z) , on peut trouver le numéro de plan j où il se situe et le numéro de degré de liberté i^{2D} sur son plan. Avec cette nouvelle numérotation, on peut redéfinir le numéro de degré de liberté du nœud M :

$$i = (j - 1)\mathcal{N}_S + i^{2D}$$

La [figure 2.17](#) montre la procédure pour construire le modèle directionnel. Par rapport au modèle classique en 3D, la matrice de snapshots $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N \times N_t}$ n'est pas utilisée. Elle est transformée par la matrice de snapshots des tranches, notée $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_S \times N_T}$. Ici, N_T est le nombre de snapshots de tranche, c'est le produit du nombre de tranches par le nombre d'instant :

$$N_T = N_X \times N_t$$

Chaque colonne de la matrice de tranche représente le résultat d'un plan perpendiculaire à la direction de soudage à l'instant du calcul. A l'aide de la nouvelle numérotation, on peut ranger les données des résultats en fonction de leur plan d'indice j et de leurs numéros de degré de liberté sur chaque plan i^{2D} :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = [\dots, \tilde{\mathbf{q}}_j(t_1), \dots, \tilde{\mathbf{q}}_j(t_n), \dots]$$

2.3. MODÈLE DIRECTIONNEL ENRICHI PAR HYPER-RÉDUCTION

L'application de la POD sur la matrice de snapshots des tranches $\widetilde{\mathbf{Q}}$ nous donne la matrice de base réduite pour les tranches $\widetilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_S \times \widetilde{N}}$. Chaque plan contient \widetilde{N} modes et avec la matrice $\widetilde{\mathbf{V}}$, nous pouvons exprimer les modes transverses ou modes de tranches avec les fonctions de forme éléments finis du plan, notées $(\varphi_{i^{2D}}^{2D}(y, z))_{i^{2D}=1}^{\mathcal{N}_S}$:

$$\phi_l^{2D}(y, z) = \sum_{i^{2D}=1}^{\mathcal{N}_S} \varphi_{i^{2D}}^{2D}(y, z) \cdot \widetilde{V}_{i^{2D}l} \quad (2.25)$$

avec $l = 1, \dots, \widetilde{N}$ le numéro de mode transverse. Ces modes transverses sont utilisés dans l'équation 2.21. De plus, les modes directionnels 3D $\widehat{\psi}_p(x, y, z)$ présentés dans l'équation 2.23 sont des modes pour tout le domaine ce qui nous permet de les utiliser dans le calcul hyper-réduit. Ils sont reliés avec la fonction de forme éléments finis $(\varphi_i(x, y, z))_{i=1}^{\mathcal{N}}$ par :

$$\widehat{\psi}_p(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(x, y, z) \cdot \widehat{V}_{ip} \quad (2.26)$$

La matrice $\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times \widehat{N}}$ est la matrice de base réduite du modèle directionnel avec $\widehat{N} = N_X \times \widetilde{N}$ le nombre de modes directionnels. Les modes $\widehat{\psi}_p$ et la matrice $\widehat{\mathbf{V}}$ du modèle directionnel sont équivalents avec les modes ψ_k et la matrice \mathbf{V} du modèle 3D.

Maintenant, nous voulons construire $\widehat{\mathbf{V}}$ à partir de $\widetilde{\mathbf{V}}$. On va utiliser le fait que $\varphi_i(x, y, z) = \varphi_j^{1D}(x) \cdot \varphi_{i^{2D}}^{2D}(y, z)$ et $\widehat{\psi}_p(x, y, z) = \varphi_j^{1D} \cdot \phi_l^{2D}(y, z)$ avec $j = 1, \dots, N_X$; $i^{2D} = 1, \dots, \mathcal{N}_S$; $l = 1, \dots, \widetilde{N}$. En combinant avec les deux équations 2.25 et 2.26, on en déduit la relation :

$$\widehat{V}_{ip} = \widetilde{V}_{i^{2D}l} \quad \forall j = 1, \dots, N_X ; \text{ avec } i = (j-1)\mathcal{N}_S + i^{2D} \text{ et } p = (j-1)\widetilde{N} + l$$

Cette relation vérifie bien que $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ et $p = 1, \dots, \widehat{N}$. Dans $\widehat{\mathbf{V}}$ tous les modes en tranche sont répétés sur chaque plan.

2.3.3 Mise en œuvre dans la programmation de *code_aster*

Le développement du modèle directionnel impacte la programmation de la commande `DEFI_BASE_REDUIITE` qui est présentée dans la section D.1. La structure de données résultats de type *mode_empi* est inchangée car la base réduite directionnelle est de même type que la base réduite du modèle 3D. Par contre, la procédure de construction de la base réduite est modifiée et nécessite de définir le type de la base réduite (3D ou directionnel). Si le type de base est directionnel, les paramètres suivants sont demandés :

- l'axe principal de soudage qui présente la direction de soudage. Pour des raisons de simplicité, le choix possible est restreint aux axes Ox, Oy, Oz . Les plans sont classés en fonction de leur coordonnée suivant la direction de soudage. Nous pouvons récupérer κ dans la structure de numérotation ;
- la section de référence qui est identique sur tous les plans perpendiculaires à la direction de soudage. La numérotation des nœuds sur cette section nous fournit χ et on va appliquer cette fonction dans tous les plans.

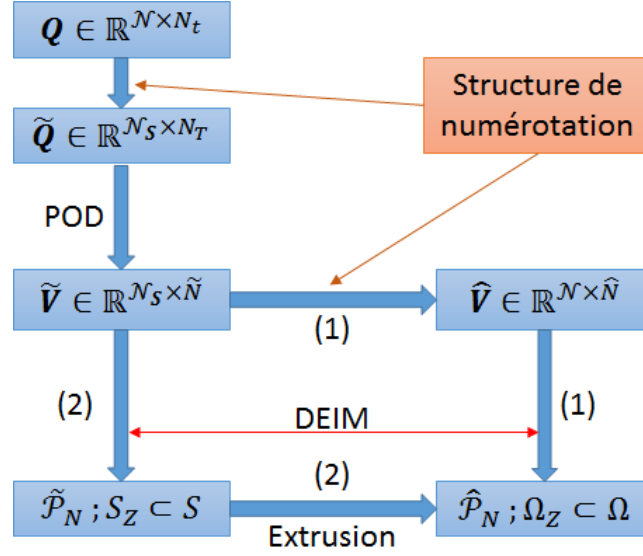


FIGURE 2.17 – Procédure de la construction du modèle directionnel.

La construction de la base réduite du modèle directionnel est détaillée dans la section précédente. Nous avons la matrice de base réduite en tranche $\tilde{\mathbf{V}}$ et la matrice de base réduite du modèle directionnel $\hat{\mathbf{V}}$. À partir de ces deux matrices, il y a deux manières de construire le domaine d'intégration réduit (RID) (cf. [figure 2.17](#)) :

1. Appliquer la DEIM sur la matrice $\hat{\mathbf{V}}$ pour avoir la liste des points d'interpolation $\hat{\mathcal{P}}_N$, puis en déduire le domaine $\Omega_Z \subset \Omega$.
2. Appliquer la DEIM sur la matrice $\tilde{\mathbf{V}}$ pour avoir la liste des points d'interpolation $\tilde{\mathcal{P}}_N$ sur chaque plan, puis en déduire le domaine réduit $S_Z \subset S$ par tranche. Ce domaine est ensuite extrudé suivant la direction de soudage pour trouver le domaine réduit du modèle complet.

Ces deux solutions sont cohérentes, elles nous donnent le même RID à la fin. Dans le développement de *code_aster*, nous avons choisi la première stratégie.

2.3.4 Résultats du modèle directionnel dans le cas test simple

Pour valider le modèle directionnel, nous avons utilisé le cas test de soudage simple présenté dans la [section 2.2](#). À partir de la même solution du modèle éléments finis de ce cas-test, nous construisons la base réduite pour le modèle directionnel ou la base réduite de tranche comme dans la [figure 2.18](#). Nous avons $\tilde{N} = 9$ modes empiriques par tranche et $N_X = 51$ tranches, ce qui nous fait un total de $\hat{N} = 459$ modes empiriques pour le modèle directionnel. Ce nombre important de modes implique un nombre élevé de points magiques, et, par conséquent, on obtient un RID dont la taille est du même ordre de grandeur que celle du domaine complet (cf. [figure 2.19](#)).

Le RID étant très étendu, on doit réaliser un calcul hyper-réduit directionnel sur un domaine assez grand qui couvre la moitié du domaine complet (cf. [figure 2.19](#)). Nous avons sur ce modèle une erreur acceptable $\eta^T = 0.234\%$ mais un speed up

2.3. MODÈLE DIRECTIONNEL ENRICHI PAR HYPER-RÉDUCTION

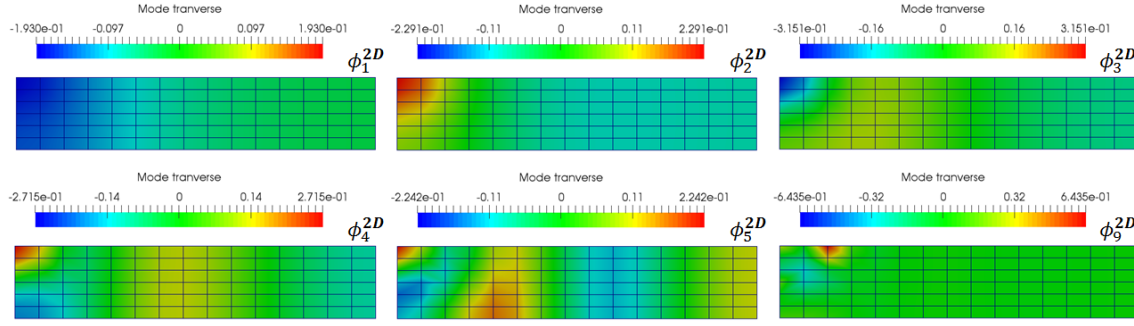


FIGURE 2.18 – Modes empiriques de tranche dans le cas test de soudage simple.

peu intéressant de l'ordre de 1. Ceci s'explique par la taille du RID par rapport au domaine complet et un nombre élevés de modes.

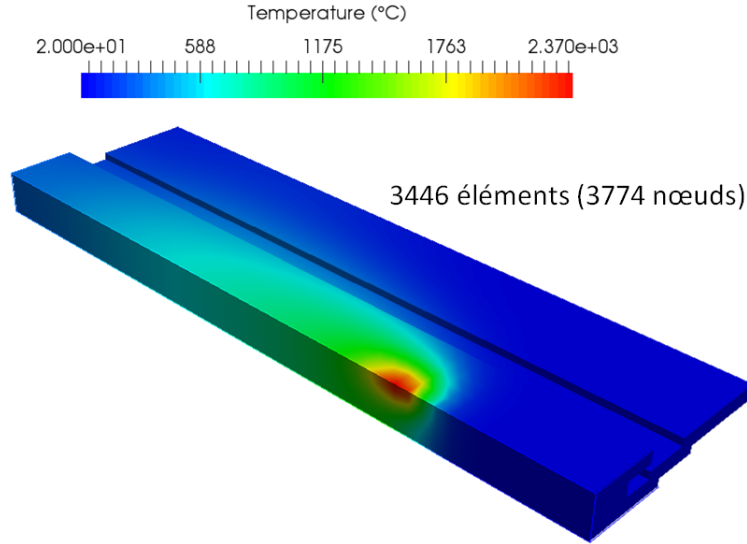


FIGURE 2.19 – Champ de température issu du calcul hyper-réduit sur le modèle directionnel.

Ce problème sera atténué et on obtiendra un meilleur speed up > 1 sur un cas plus gros. L'efficacité du modèle hyper réduit directionnel appliqué au cas test de soudage simple n'est pas démontrée sur ce cas-test. Nous verrons par la suite que l'efficacité de la méthode est améliorée sur un cas-test pour lequel le nombre de degrés de liberté est plus élevé et la zone soudée est bien moins étendue dans la structure.

Nous avons également effectué les études paramétriques pour l'émissivité et la vitesse de la source de chaleur à l'aide du modèle hyper-réduit directionnel (cf. [figure 2.20](#)). On obtient un domaine de validité plus grand que celui obtenu avec le modèle hyper-réduit 3D (cf. [figure 2.15](#)).

Nous avons essayé de construire un modèle directionnel analogue dans le calcul mécanique. En suivant les mêmes étapes, on obtient $\widetilde{N} = 25$ modes empiriques par tranche, ce qui fait au total $\widehat{N} = 1275$ modes empiriques pour le modèle directionnel en mécanique. Ce nombre de modes est logiquement très élevé car l'approche

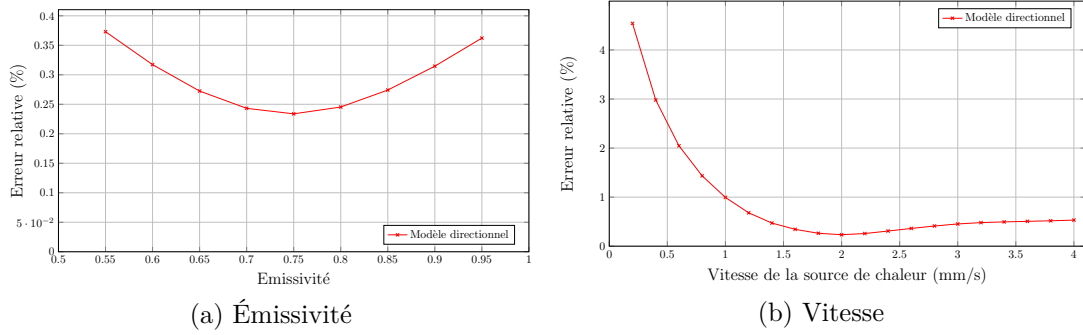


FIGURE 2.20 – Etude paramétrique du modèle hyper-réduit directionnel.

directionnelle est inadaptée aux phénomènes *mécaniques* du soudage. Le caractère directionnel du procédé de soudage fait que le résultat thermique est très représentatif sur le plan perpendiculaire à l'axe principal. Cependant, dans le calcul mécanique, cette propriété n'est plus vérifiée, le résultat sur chaque tranche nous donne plus de modes empiriques variés. On en déduit que le concept du modèle directionnel est seulement utilisable dans le calcul thermique du soudage.

2.4 Modèle mixte entre directionnel et 3D

Le modèle directionnel a un très grand nombre de modes empiriques 3D (459 modes dans le cas test de soudage simple) si le nombre de tranches N_X est grand (ce qui est le cas des longs cordons de soudure). Pour réduire le nombre de modes directionnels, il est possible de restreindre la portée spatiale de l'approximation directionnelle dans la direction de soudage, si celle-ci est complétée dans le reste du domaine. Dans ce cas, il sera nécessaire d'actualiser l'approximation directionnelle au cours de l'avancée de la source de chaleur, pour que sa portée reste sous la source de chaleur à chaque instant.

2.4.1 Présentation générale

En suivant la méthode proposée dans [11], il est possible de coupler différentes bases réduites à l'aide d'une décomposition du domaine complet en sous-domaines. Nous rappelons que la propriété d'orthogonalité des vecteurs de la base n'est pas une propriété nécessaire à la mise en œuvre de la méthode d'hyper-réduction, comme indiqué dans [61]. Ceci facilite la mise en œuvre du couplage de bases réduites.

Pour les simulations thermiques, nous proposons de découper Ω en deux sous-domaines se recouvrant sur une bande d'éléments : Ω_D et Ω_P , avec $\Omega_D \cap \Omega_P \neq \emptyset$, $\Omega_D \cup \Omega_P = \Omega$. Dans une première approche, nous conservons l'approximation par modes empiriques 3D sur tout le domaine, mais nous lui ajoutons une correction par modes directionnels sur Ω_D :

$$T(\mathbf{x}, t) = T^D + \sum_{k=1}^{\bar{N}} \bar{\psi}_k(\mathbf{x}) \bar{\gamma}_k(t)$$

avec $(\bar{\psi}_k)_{k=1}^N$ modes empiriques 3D construits par la méthode POD sur Ω et $(\bar{\psi}_k)_{k=N+1}^{\bar{N}}$ modes directionnels restreints à Ω_D , c'est à dire nuls en dehors de Ω_D .

Pour restreindre les modes directionnels, nous considérons la représentation discrète de ces modes. Notons \mathbf{V}^D la matrice de représentation 3D de N_D modes directionnels. Notons \mathcal{F}_D la liste des degrés de liberté qui ne sont pas connectés à $\Omega \setminus \Omega_D$ et $\bar{\mathbf{V}}$ la matrice du modèle réduit mixte. Les premières colonnes contiennent les modes 3D sur le domaine complet Ω , c'est à dire $\bar{V}_{ik} = V_{ik}$ avec $k = 1, \dots, N$. On choisit alors les dernières colonnes de cette matrice telles que :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ik} &= V_{ip}^D, \quad i \in \mathcal{F}_D, \quad k = N + p, \quad p = 1, \dots, N_D \\ \bar{V}_{ik} &= 0, \quad i \notin \mathcal{F}_D, \quad k > N \end{aligned}$$

Si des modes directionnels sont linéairement liés aux modes 3D, il faut les retirer de la base mixte.

Cette première approche n'est pas très satisfaisante car elle peut contenir des modes ayant un fort gradient dans la zone de recouvrement $\Omega_D \cap \Omega_P$, comme le montre la figure 2.22. Ceci nuit à la stabilité de la méthode d'approximation.

En étudiant la forme des modes de tranche du modèle directionnel, il est possible d'ajuster la cohérence entre Ω_D et les modes directionnels que l'on souhaite coupler aux modes POD 3D. Le rectangle rouge sur la figure 2.21 représente un domaine Ω_D que nous recommandons d'utiliser en sélectionnant les modes de tranche pour définir le modèle mixte. On évite ainsi une zone à fort gradient lors du passage de Ω_D à Ω_P pour ces modes. Plus la zone affectée thermiquement par le soudage sera restreinte dans Ω , plus il sera pertinent de mettre en place le modèle mixte, sous réserve qu'il y ait effectivement une évolution des températures dans Ω_P . S'il n'y a pas d'évolution significative des températures dans Ω_P , il n'est pas intéressant de mettre en place un modèle mixte, le modèle directionnel seul suffit.

L'algorithme de construction du domaine réduit est inchangé pour le modèle mixte. Pour améliorer cette approche, nous préconisons de bien séparer le domaine Ω en un domaine Ω_D où on construit le modèle directionnel et le reste $\Omega \setminus \Omega_D$ où les modes POD 3D sont générés. Cette nouvelle approche évite le fort gradient thermique sur la zone de recouvrement $\Omega_D \cap \Omega_P$ car il existe seulement les modes directionnels sur cette zone. Nous notons \mathbf{V}^P la matrice des modes POD 3D sur $\Omega \setminus \Omega_D$ avec N_P modes et $\bar{\mathcal{F}}_D$ la liste des degrés de liberté connectés à Ω_D . La définition de la matrice du modèle réduit mixte $\bar{\mathbf{V}}$ est :

$$\bar{V}_{ik} = \begin{cases} V_{ip}^D, & i \in \bar{\mathcal{F}}_D, \quad k = N_P + p, \quad p = 1, \dots, N_D \\ V_{ik}^P, & i \notin \bar{\mathcal{F}}_D, \quad k = 1, \dots, N_P \\ 0 & \text{pour les autres cas.} \end{cases} \quad (2.27)$$

La matrice $\bar{\mathbf{V}}$ qui contient $\bar{N} = N_P + N_D$ modes empiriques représente bien le couplage entre le modèle directionnel sur Ω_D et le modèle POD 3D sur le reste.

Remarque : Une autre façon de limiter le nombre de modes 3D du modèle directionnel est de ne pas faire intervenir tous les modes de tranche loin de la source de chaleur. Par exemple, sans avoir à modifier l'algorithme de résolution par hyper-réduction, on peut générer la base 3D des modes directionnels en y plaçant les trois premiers modes tout le long de la ligne de soudage, mais en ne mettant les modes de tranche restants que sur a tranches précédant la source de chaleur et b tranches après celle-ci.

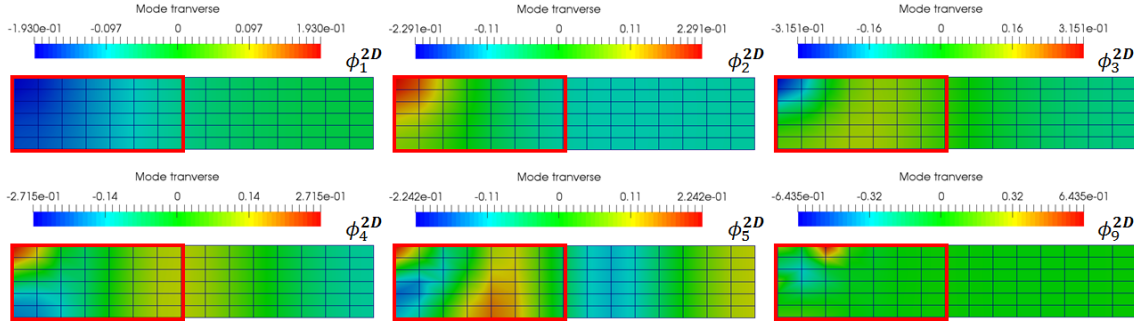


FIGURE 2.21 – Le rectangle rouge représente un domaine Ω_D que nous recommandons d'utiliser en sélectionnant les modes de tranche pour définir le modèle mixte.

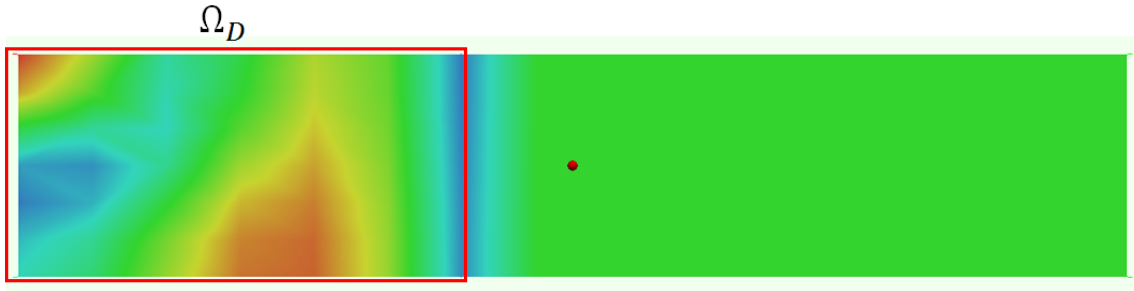


FIGURE 2.22 – Exemple de mode $N + p$ d'un modèle mixte sur une tranche qui présente un fort gradient dans la zone de recouvrement des domaines Ω_D et Ω_P . Cette zone contient une rangée d'éléments au bord de Ω_D .

2.4.2 Mise en œuvre dans *code_aster* du modèle mixte

Comme pour le modèle directionnel, on développe le modèle mixte entièrement dans la commande `DEFI_BASE_REDUITE`. Si le type de base est *mixte*, les paramètres suivants sont ajoutés :

- la zone où s'applique le modèle directionnel (Ω_D) ;
- l'axe principal de soudage ;
- la section sur Ω_D qui représente le plan identique suivant la direction du cordon de soudure.

Le paramètre le plus important est la zone directionnelle Ω_D . Avec cette zone, on suit la procédure dans la [figure 2.23](#).

2.4.3 Résultats du modèle mixte dans le cas test simple

A partir du cas test de soudage simple, nous avons $N_P = 17$ modes POD 3D en dehors du domaine Ω_D et $N_D = 301$ modes directionnels (7 modes par tranche sur 43 tranches au total). Le nombre de modes dans le modèle mixte est donc $\bar{N} = 318$. Le RID du modèle mixte est plus petit que celui du modèle directionnel mais reste encore plus grand que le RID du modèle 3D (cf. [figure 2.24](#)).

Afin de comparer le modèle mixte aux modèles 3D et directionnel, on calcule l'erreur η^T et le speed up, puis on réalise des études paramétriques pour l'émissivité et la vitesse de soudage. On obtient une valeur de $\eta^T = 0.289\%$, un speed-up de deux

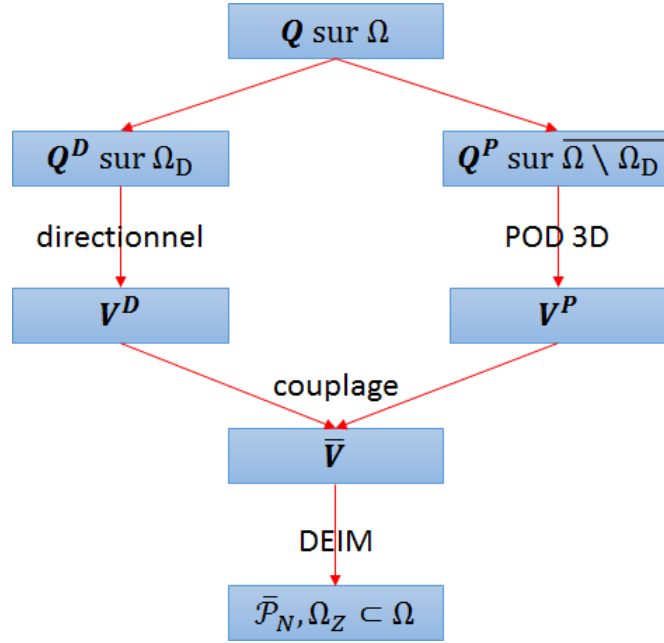


FIGURE 2.23 – Procédure de la construction du modèle mixte

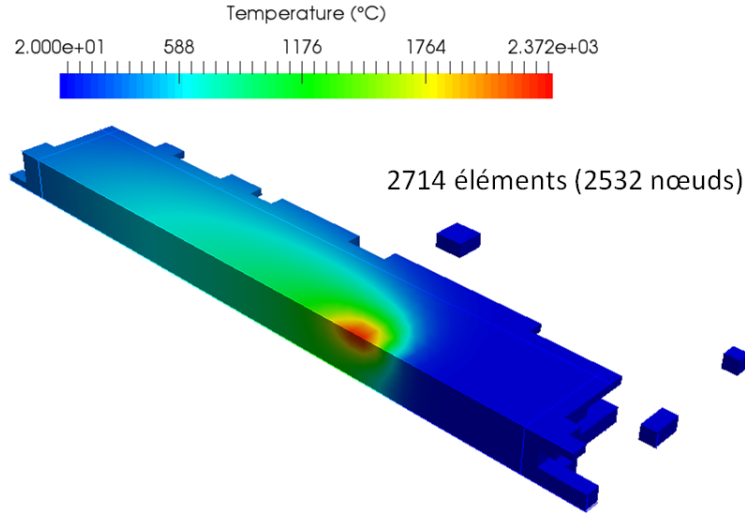


FIGURE 2.24 – Champ de température issu du calcul hyper-réduit sur le modèle mixte.

et un domaine de validité illustré dans la [figure 2.25](#). On peut conclure alors que, d'un point de vue de l'efficacité et de l'étendue du domaine de validité, le modèle mixte se classe comme intermédiaire entre le modèle 3D et le modèle directionnel.

Comme pour le modèle directionnel (cf. section [2.3](#)), le modèle mixte est appliqué uniquement pour la simulation thermique du soudage car le caractère directionnel est spécifique à l'évolution du champ de température. Les deux modèles hyper-réduits, directionnel et mixte, nous permettent de réduire le temps de calcul dans l'étude paramétrique du comportement thermique du soudage. Comme nous le verrons dans la section [2.6.2](#), ces deux modèles se caractérisent par un domaine de validité assez grand.

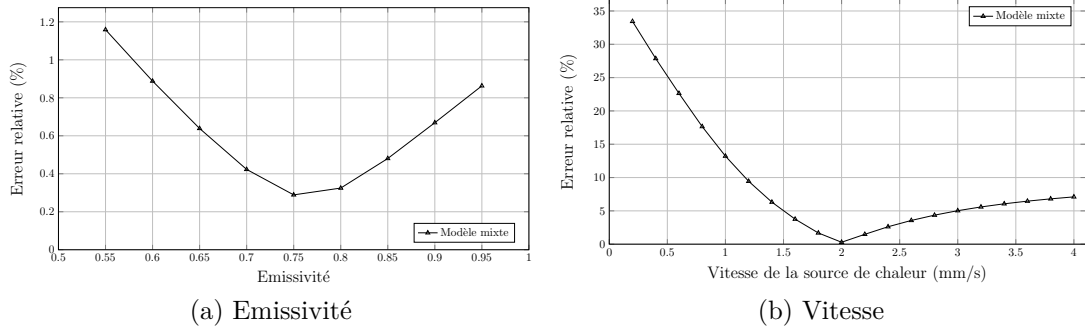


FIGURE 2.25 – Etude paramétrique du modèle hyper-réduit directionnel.

2.5 Hyper-réduction hybride POD-éléments finis

La méthode d'hyper-réduction nous permet de résoudre le problème sur un sous domaine $\Omega_Z \subset \Omega$ à l'aide des espaces de modes empiriques. Ces modes sont générés à partir des solutions de référence donc ils apportent des informations dites *globales*. Dans l'application de l'hyper-réduction, si les conditions sont différentes de celles utilisées pour les solutions de référence, cela induit des erreurs sur le résultat. Dans cette section, on considère une approche hybride qui couple le modèle hyper-réduit avec le modèle éléments finis local (*Local Finite Element*)(LFE). Cette approche a été initialement proposée dans [11] pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. On va donc ajouter une étape de calcul EF sur le domaine réduit pour calculer les effets locaux. La solution finale du modèle hybride est la combinaison entre la solution par hyper-réduction et la correction éléments finis sur certaines zones.

2.5.1 Introduction

Nous proposons un nouveau protocole de modélisation hyper-réduite qui prend en compte les modifications topologiques dans les structures. Nous supposons que les modifications topologiques et les adaptations de maillage sont limitées à un sous-domaine appelé zone d'intérêt. Cette zone d'intérêt est entourée d'un modèle d'ordre hyper-réduit qui propage les conditions aux limites en utilisant des modes empiriques.

Dans ce modèle, une décomposition de domaine en deux sous-domaines est effectuée : un sous-domaine est la zone d'intérêt, la partie restante est appelée le domaine de bord. Une approche numérique récente qui couple des approximations hyper-réduites et des approximations d'éléments finis est étendue. Cela conduit à une stratégie hybride entre un modèle complet et un modèle réduit. Ici, nous profitons de la polyvalence des éléments finis pour prendre en compte les modifications morphologiques. Une approximation hyper-réduite est définie sur le domaine de bord. Il vise à propager les conditions aux limites de la zone d'intérêt. Dans ce sous-domaine, les deux approximations interagissent. L'approche proposée nous permet de développer des approximations pour les champs qui sont autour de la zone d'intérêt. Les

équations décrivant ces champs sont mises en place sur un domaine d'intégration réduit (RID), en suivant une méthode d'hyper-réduction.

Du point de vue du calcul, l'approche proposée associe une approximation éléments finis et une approximation hyper-réduite en introduisant une technique de décomposition de domaine telle que proposée dans [11] pour la solution des équations de Navier-Stokes. Des modèles hybrides entre hyper-réduction et éléments finis ont été proposés dans la littérature pour améliorer les erreurs après des approximations de base réduite pour des problèmes spécifiques. La modélisation hybride a été proposée dans [40] pour des problèmes non linéaires ayant des termes non linéaires restreints à un sous-domaine. La plasticité peut avoir lieu dans le domaine de bord. Dans [43], la modélisation hybride des équations de transfert de chaleur utilise des solutions analytiques dans le domaine de bord. Dans [7, 59, 42], les modes empiriques ont été couplés à des approximations d'éléments finis pour des problèmes de structures non linéaires impliquant une conduction thermique, de la plasticité ou de l'endommagement. Dans la simulation de l'endommagement, les défauts critiques sont connus pour générer des modifications morphologiques. Ici, les équations d'équilibre dans le domaine de bord sont configurées à l'aide d'un domaine d'intégration réduit (RID).

Les formulations dans le modèle hybride ressemblent à des équations hyper-réduites, mais il faut faire attention aux termes de couplage dans la zone d'intérêt afin de coupler fortement l'approximation éléments finis locale (LFE) et l'approximation de base réduite.

2.5.2 Modèle couplés HR-EF

Supposons que la base réduite du champ de déplacement est disponible. Elle est notée ψ_k tel que :

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{V}_{ik}, \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times N}, \quad \text{rank}(\mathbf{V}) = N < \mathcal{N}$$

La zone d'intérêt, désignée par Ω_H , est définie par une liste donnée \mathcal{F}_H des degrés de liberté où l'approximation LFE est imposée :

$$\Omega_H = \cup_{i \in \mathcal{F}_H} \text{support}(\varphi_i)$$

Pour des raisons de simplicité, les degrés de liberté sont rangés de sorte que $\mathcal{F}_H = \{1 + \mathcal{N} - \text{Card}(\mathcal{F}_H), \dots, \mathcal{N}\}$. Donc les modes empiriques du modèle hybride sont exprimés par :

$$\psi_k^H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{V}_{ik}^H, \quad k = 1, \dots, N + \text{Card}(\mathcal{F}_H) \quad (2.28)$$

avec

$$\mathbf{V}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ici $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{\text{Card}(\mathcal{F}_H) \times \text{Card}(\mathcal{F}_H)}$ est la matrice identité associée aux degrés de liberté dans \mathcal{F}_H . Officiellement, lorsque le domaine Ω_H est pris en compte pour le modèle hybride, les modes en \mathbf{V}^H doivent être projetés en utilisant les fonctions de forme des éléments finis. Dans la suite, nous supposons que $\text{rank}(\mathbf{V}^H) = N + \text{Card}(\mathcal{F}_H)$. Comme l'équation 1.38a, les approximations du modèle hybride deviennent :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \sum_{k=1}^{N+\text{Card}(\mathcal{F}_H)} \psi_k^H(\mathbf{x}) \gamma_k(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t^F] \quad (2.30)$$

De manière simplifiée, nous pouvons écrire l'équation 2.30 dans le domaine réduit Ω_Z par les modes ψ_k^H restreints dans Ω_Z . Ici, on ne considère que la zone d'intérêt Ω_H où on trouve le couplage entre hyper-réduction et éléments finis local. Comme $\Omega_H \subset \Omega_Z$, on divise Ω_Z en Ω_H et la partie restante Ω_R (cf. figure 2.26). L'interface entre Ω_H et Ω_R est désignée par $\mathcal{J} = \Omega_H \cap \Omega_R$. La solution par hyper-réduction va être propagée pour compléter les conditions de bord sur \mathcal{J} , s'écrit :

$$\mathbf{u}^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k^Z(\mathbf{x}) \gamma_k(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{J}$$

Si on restreint les modes hybrides ψ_k^H dans la zone d'intérêt Ω_H , notés $\psi_k^{HH} = \sum_{i \in \mathcal{F}_H} \varphi_i \mathbf{V}_{ik}^H$, la solution du champ recherché sur la zone d'intérêt est exprimée par :

$$\mathbf{u}_{HR-EF}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \mathbf{u}^{\mathcal{J}} + \sum_{k=1}^{N+\text{Card}(\mathcal{F}_H)} \psi_k^{HH}(\mathbf{x}) \gamma_k^H(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_H \quad (2.31)$$

$\gamma_k^H(t)$ sont les coordonnées réduites du modèle couplé HR-EF. En pratique, après la phase de calcul éléments finis local, nous trouvons une correction éléments finis, notée δq . La solution finale devient : $q_H = \mathbf{V} \gamma + \delta q$

2.5.3 Mise en œuvre du modèle hybride dans *code_aster*

Avant d'appliquer le modèle hybride, il faut préparer la zone de voisinage Ω_R . A partir de la liste des nœuds sur l'interface \mathcal{I} du RID, on va ajouter quelques couches d'éléments autour de ces nœuds mais toujours dans le RID. Dans la figure 2.27, on ajoute une couche d'éléments dans le RID (les éléments en gris). Pour que la zone hybride Ω_H ne soit pas vide, il faut que la taille du RID soit assez grande par rapport à la zone Ω_R . On impose donc dans la construction du RID et de la zone couplée que le nombre de couches d'éléments autour des points magiques soit supérieur au nombre de couches d'éléments autour des nœuds sur l'interface. La procédure de préparation des zones de couplage est effectuée dans la commande `DEFI_DOMAINE_REDUIT`.

La correction EF locale est couplée avec l'hyper-réduction pendant l'étape en ligne du calcul hyper-réduit. Après chaque instant de calcul par Hyper-Réduction, on ajoute une étape de calcul EF sur le RID pour corriger les effets locaux, en figeant la solution sur une interface épaisse Ω_R . C'est-à-dire que nous ajoutons une condition de pénalisation sur Ω_R pour ne pas calculer les corrections EF sur cette

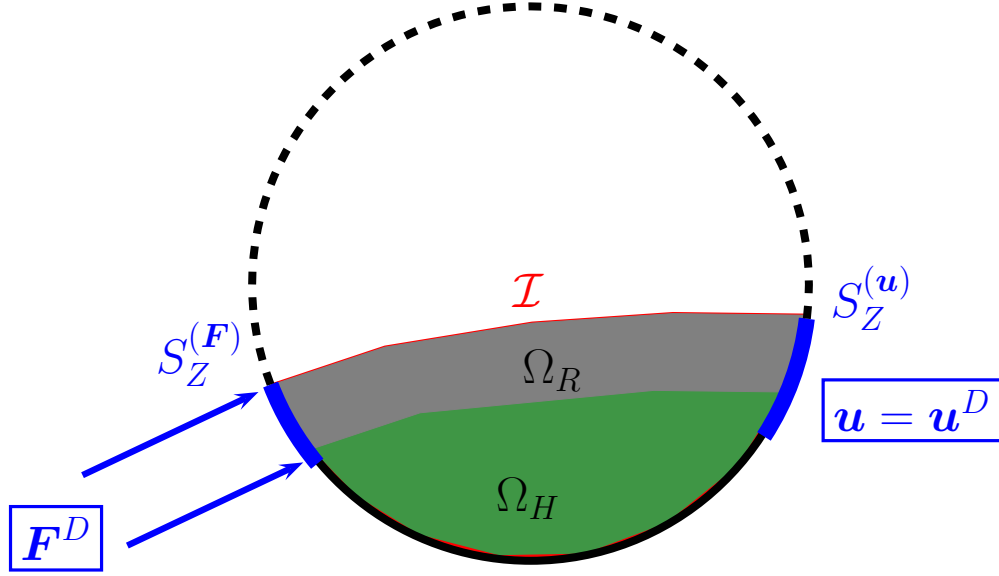
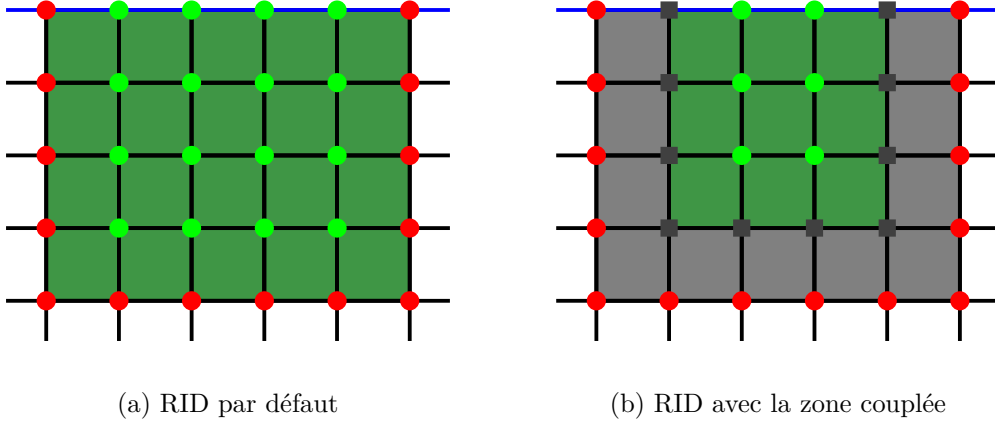


FIGURE 2.26 – Modèle hybride entre HR et correction EF.



(a) RID par défaut

(b) RID avec la zone couplée

FIGURE 2.27 – Procédure de construction de la zone de couplage entre HR et correction EF.

zone. Seule la zone hybride Ω_H est prise en compte dans cette étape. L'étape de pénalisation est décrite par l'équation ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{J}_{HH} & \mathbb{J}_{HR} & 0 \\ \mathbb{J}_{RH} & p * \mathbb{J}_{RR} & \mathbb{J}_{RI} \\ 0 & \mathbb{J}_{IR} & p^2 * \mathbb{J}_{II} \end{pmatrix} \delta \mathbf{u}_{EF} = - \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{HROM} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{ici } p = 10^3 \quad (2.32)$$

Avec la correction EF $\delta \mathbf{u}_{EF}$ dans l'équation 2.32, la solution finale pour chaque instant devient alors :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{HROM} + \delta \mathbf{u}_{EF}$$

2.5.4 Validation par un cas test purement mécanique

Cas test d'une fissure sur une plaque trouée chargée en compression

On considère un cas test simple en mécanique (pas d'effet thermique). Dans la [figure 2.28](#), nous avons une plaque carrée avec une longueur de côté de 80 mm . Dans le centre de la plaque, nous avons un trou rond de rayon 20 mm . Cette plaque est soumise à une pression P sur les deux surfaces inférieure et supérieure et présente une fissure de longueur $a = 2\text{ mm}$ sur la frontière entre le trou et la plaque.

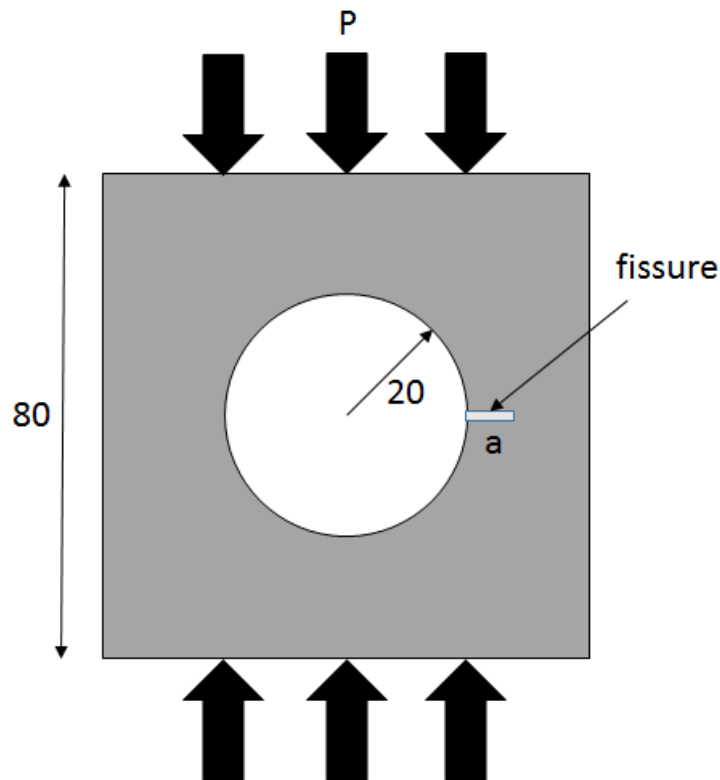


FIGURE 2.28 – La géométrie du cas test d'une fissure sur une plaque trouée sous pression.

Deux simulations éléments finis sont menées sur ce cas. Le premier calcul considère le cas où nous n'avons pas de fissure ([figure 2.29a](#)). On va utiliser la solution de cette simulation comme donnée de référence pour générer la base réduite et le RID. Le modèle hyper-réduit construit à partir de cette solution est utilisé par la suite.

Dans le cas où il existe une fissure ([figure 2.29b](#)), nous voyons bien que la contrainte est plus importante au bout de la fissure. La fissure est introduite ici en relâchant la condition aux limites de Dirichlet sur une partie du plan de symétrie de la plaque.

Résultats par modèle hyper-réduit et modèle hybride

On va utiliser le modèle hyper-réduit généré par la solution du cas sans fissure pour le calcul dans le cas avec fissure. L'objectif est de changer complètement les

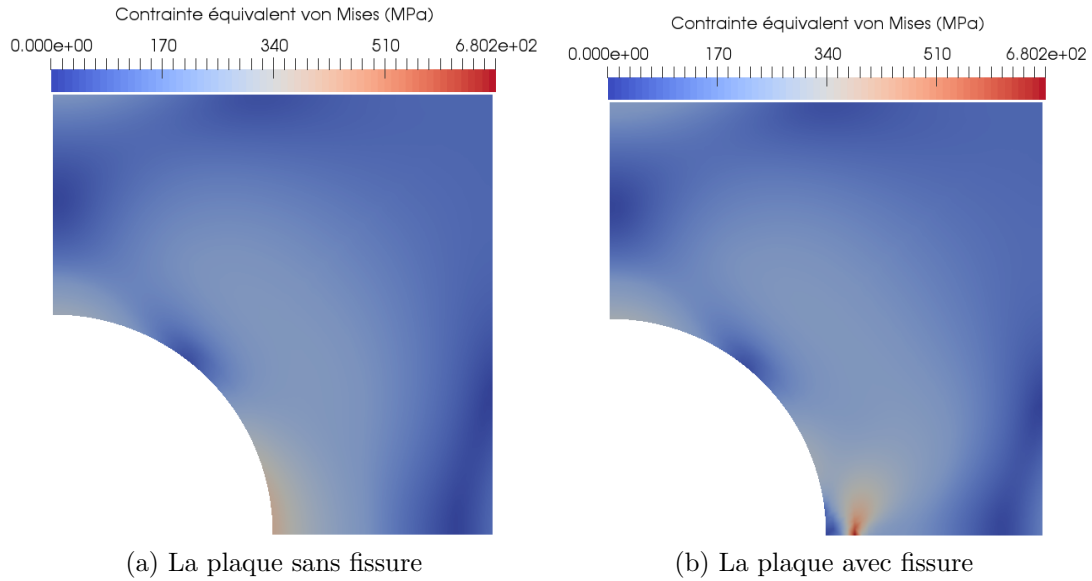


FIGURE 2.29 – Champ de contrainte équivalent de von Mises après le calcul éléments finis sur la plaque trouée dans deux cas différents : un cas sans fissure (a) et un cas avec une fissure (b).

conditions aux limites. La base réduite de l'hyper-réduction représente des modes empiriques qui prennent en compte le comportement et les conditions aux limites. Si les conditions sont changées, cette base devient fautive pour ce calcul. C'est pour cela que le résultat du modèle hyper-réduit, le résultat sur le RID (figure 2.30a) est faux et différent avec la solution EF.

Par contre, avec le modèle hybride entre HR et correction EF, le résultat est proche de la solution EF. On observe bien la présence de la fissure en visualisant le champ de contrainte. Cela s'explique par la prise en compte des nouvelles conditions aux limites lors de la phase de calcul EF local.

2.6 Etude de convergence et comparaison des modèles hyper-réduits

Nous avons présenté trois nouvelles approches qui sont adaptées aux difficultés lorsque nous effectuons la modélisation du soudage :

- le modèle directionnel qui prend en compte le caractère directionnel de la thermique du soudage pour améliorer les études paramétrique ;
- le modèle mixte entre modèle directionnel et modèle 3D qui couple ces deux modèles pour optimiser le temps de calcul tout en garantissant une erreur d'approximation acceptable lors des études paramétriques ;
- le modèle hybride, entre l'hyper-réduction et la correction éléments finis, qui permet de bien appréhender des conditions aux limites absentes lors de la construction de la base réduite.

Dans cette section, nous allons étudié l'efficacité des trois modèles sur un cas test

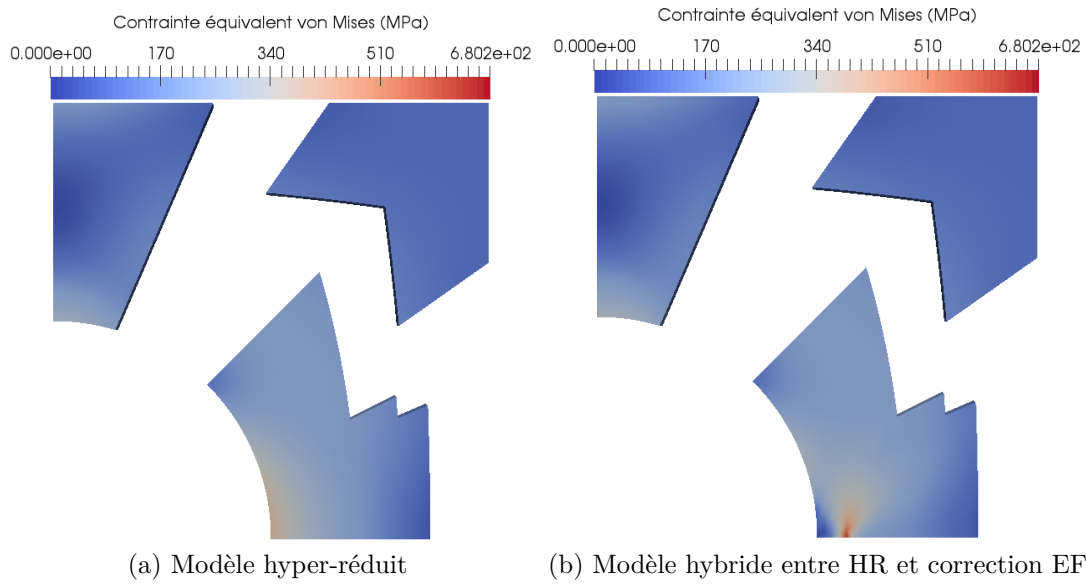


FIGURE 2.30 – Champ de contrainte équivalent de von Mises après le calcul hyper-réduit sur deux modèles différents.

dont le nombre de nœuds (environ 112000) est plus élevé que celui du cas test de validation considéré les sections précédentes.

2.6.1 Cas test de performance

Le modèle choisi est une plaque en acier inoxydable 316L de longueur 100 mm, de largeur 400 mm et d'épaisseur 10 mm. Une ligne de fusion est appliquée au centre de la plaque, sur la surface supérieure. En même temps, les deux surfaces opposées et parallèles à la direction du soudage sont bloquées. Le résultat est présenté dans la [figure 2.31](#).

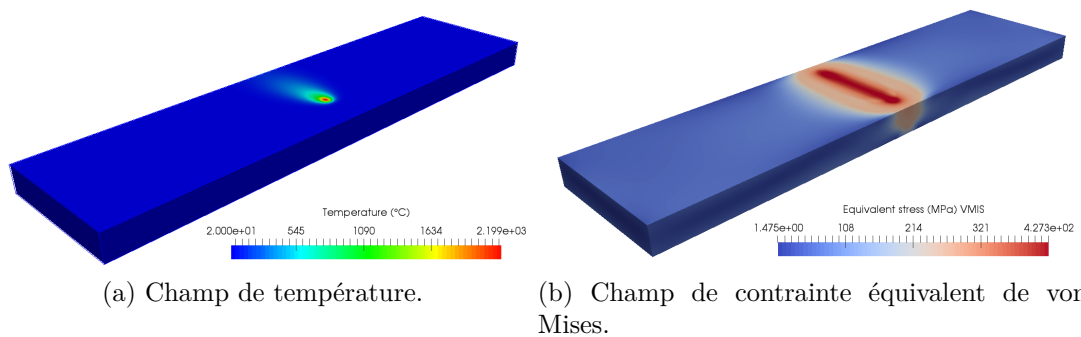


FIGURE 2.31 – Résultat par éléments finis en thermique et en mécanique du procédé de soudage sur une grande plaque.

Nous allons utiliser ces résultats pour construire les modèles hyper-réduits en

thermique et en mécanique. Avec ces modèles, nous effectuons :

- des études paramétriques sur les paramètres du soudage en utilisant les modèles 3D, directionnel et mixte pour comparer la performance de ces trois modèles. On considère seulement des calculs thermiques ;
- des études de convergence en fonction du nombre de modes avec le modèle hyper-réduit et le modèle hybride. On considère également le modèle POD-Galerkin mais on n'utilise plus le modèle directionnel ou mixte (car on fait aussi des calculs mécaniques) ;
- des études de convergence en fonction de la taille du RID pour le modèle hyper-réduit et le modèle hybride.

2.6.2 Etude paramétrique

L'étude paramétrique considérée pour le cas test simple de validation est à présent réalisée sur le cas test de performance. Lors de cette étude paramétrique, trois modèles hyper-réduits sont comparés : modèle 3D, modèle directionnel et modèle mixte.

On obtient 45 modes pour le modèle 3D, tandis que le modèle directionnel se compose de 561 modes empiriques au total et 400 modes pour le modèle mixte. La procédure de construction du modèle hyper réduit implique que la taille du RID dépende du nombre de modes. Plus le nombre de modes du modèle est élevé, plus la taille du RID de ce modèle est grande. Par conséquent, la taille du RID du modèle 3D est la plus petite, puis vient celle du modèle mixte et ensuite celle du modèle directionnel. Ce classement est le même du point de vue du speed up. En effet, le modèle 3D a un speed up de l'ordre de 70, tandis que le modèle directionnel accélère le calcul avec un facteur de 3. Ensuite, le modèle mixte réduit le temps de calcul 6 fois par rapport au modèle EF. Le calcul sur le modèle hyper-réduit 3D est plus rapide mais l'avantage des modèles directionnel et mixte se trouve dans l'étude paramétrique.

Comme dans le cas test de soudage simple, nous effectuons les études paramétriques sur l'émissivité (figure 2.32) et la vitesse de la source de chaleur (figure 2.33). Dans chaque étude, au lieu de réaliser plusieurs calculs par éléments finis, on va faire des calculs hyper-réduits sur une base réduite fixée et un RID inchangé. La base réduite et le RID sont générés à partir du résultat par un calcul EF avec une valeur de paramètre dite de référence. Nous avons donc trois types de modèles hyper-réduits différents : 3D, directionnel et mixte. Ensuite, pour chaque valeur du paramètre considéré, le résultat avec un de ces trois modèles est comparé avec le résultat par éléments finis (qui est supposé être le résultat de référence). Cela nous permet d'obtenir une erreur afin de quantifier la précision du modèle. Pendant l'étude paramétrique, chaque valeur de paramètre nous donne trois erreurs différentes dépendant du type de modèle.

En comparant les trois modèles, on en déduit que le domaine de validité du modèle directionnel est beaucoup plus grand que celui du modèle 3D. L'erreur de calcul avec les modèles directionnel et mixte ne change pas beaucoup si la valeur de paramètre est différente avec celle de référence. Enfin, le modèle mixte reste comme un intermédiaire entre le modèle 3D et le modèle directionnel. Si on veut un domaine

de validité assez grand, avec un speed up acceptable, le modèle mixte est la meilleure approche à choisir.

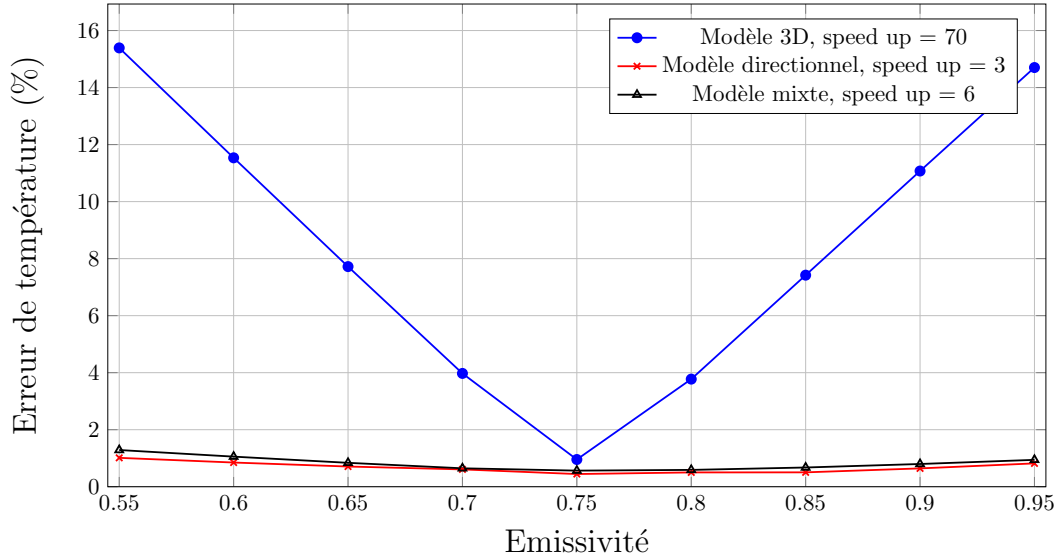


FIGURE 2.32 – Etude paramétrique sur l'émissivité dans la simulation thermique du soudage. Les modèles hyper-réduits sont générés à partir du résultat EF lors d'un calcul avec émissivité égale à 0.75.

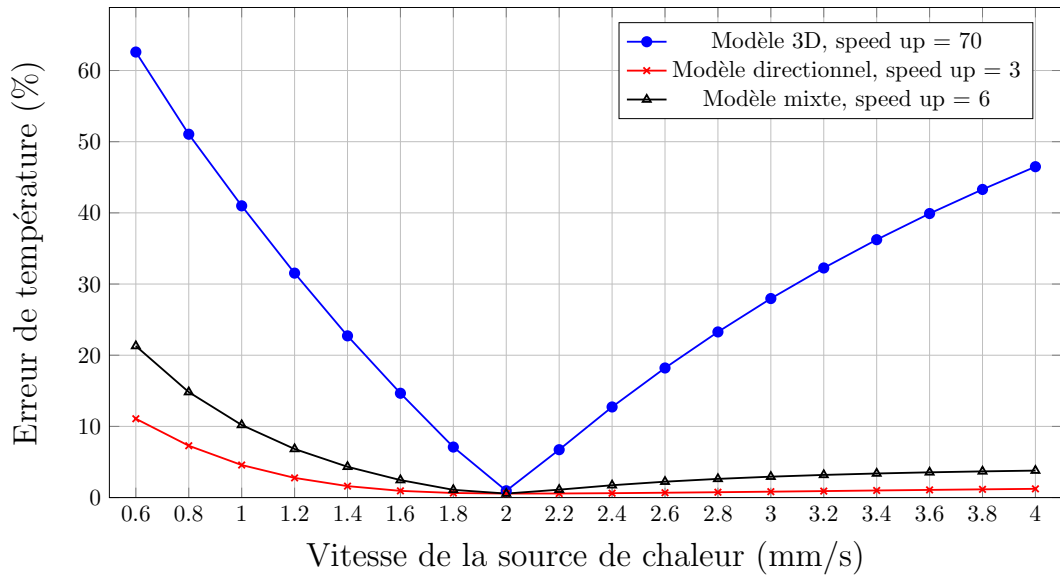


FIGURE 2.33 – Etude paramétrique sur la vitesse de la source de chaleur dans la simulation thermique du soudage. Les modèles hyper-réduits sont générés à partir du résultat EF lors d'un calcul avec vitesse égale à 2 mm.s^{-1} .

2.6.3 Etude de convergence sur le nombre de modes

On considère à présent le nombre de modes comme un paramètre de modélisation qui pilote la taille de la base réduite et l'erreur de calcul. Trois modèles sont présentés

2.6. ETUDE DE CONVERGENCE ET COMPARAISON DES MODÈLES HYPER-RÉDUITS

dans cette étude : modèle Galerkin POD 3D, modèle hyper-réduit et modèle hybride. Le modèle Galerkin POD 3D est le modèle d'ordre réduit qui n'est pas défini sur un RID mais sur le domaine complet. Dans le calcul thermique (figure 2.34a) et le calcul mécanique (figure 2.35a), le modèle Galerkin POD 3D atteint toujours la meilleure solution. En fait, l'erreur de ce modèle est très proche de l'erreur d'approximation de la méthode POD définie dans la [équation 1.32](#).

En général, les erreurs sur la température, le déplacement et les contraintes diminuent si on prend plus de modes pour la base réduite. Une base qui contient plus de modes est plus représentative. Ici, la taille du RID est fixée. Le RID doit couvrir tous les points magiques trouvés des bases réduites. Donc le RID est choisi à partir de la base réduite la plus grande (elle contient 50 modes).

Pour le speed up, le modèle POD accélère avec un facteur entre 2 et 3. Ici on ne réduit pas beaucoup le temps de calcul parce que le calcul est effectué sur tout le domaine. Par contre les deux modèles hyper-réduit et hybride, réduisent beaucoup mieux le temps de calcul (speed up de 80 et 40). Le modèle hybride prend plus de temps parce qu'il doit passer en plus une étape de correction EF. D'autre part, pour chacun de ces trois modèles réduits, on constate que le nombre de modes va affecter l'erreur de calcul mais qu'il ne change pas beaucoup les temps de calcul.

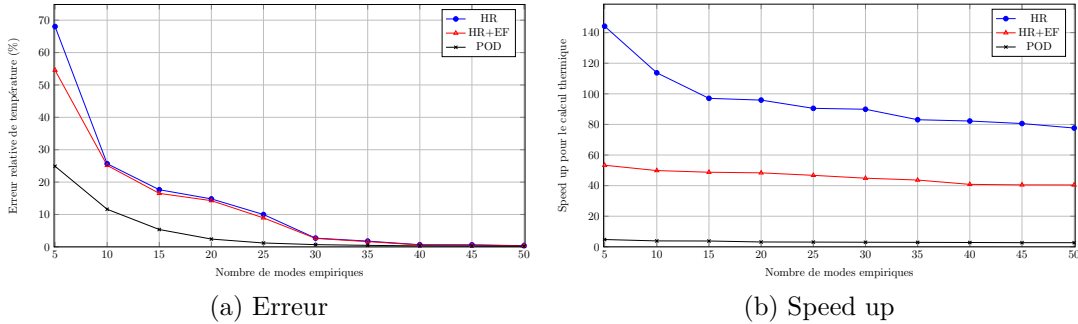


FIGURE 2.34 – Erreur de température et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème thermique de soudage en fonction du nombre de modes dans le cas test sur un gros modèle avec le modèle hyper-réduit et hybride.

2.6.4 Etude de convergence sur la taille du RID

On considère maintenant le nombre de couches d'éléments qui va piloter la taille du RID. Comme le modèle Galerkin POD est défini sur le domaine total, nous ne considérons dans cette étude que deux modèles : hyper-réduit et hybride. On fixe un nombre de modes pour la base réduite et on change la taille du RID en modifiant le nombre de couches d'éléments autour des points magiques.

L'erreur du calcul thermique (figure 2.37a) et mécanique (figure 2.38a) décroît si la taille du RID est grande mais reste constante si le nombre de couches est supérieur à 8. Cependant, le speed up est vraiment influencé par la taille du RID. Il est normal que plus le domaine réduit est grand, plus le temps de calcul est grand. L'erreur de calcul, particulièrement celle sur la contrainte (figure 2.36 et figure 2.39),

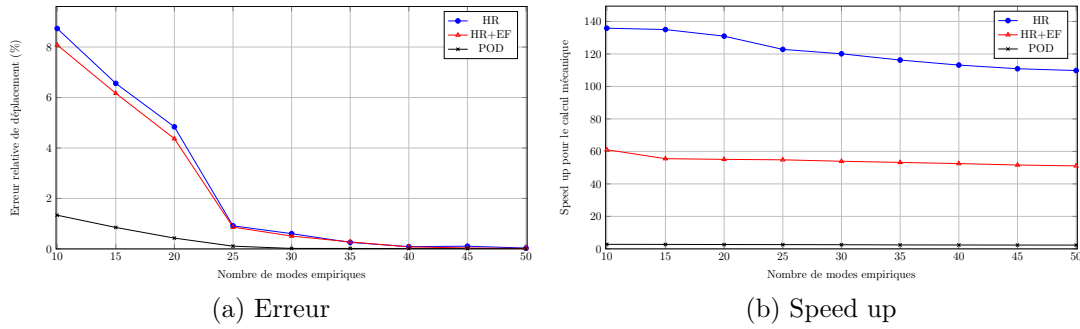


FIGURE 2.35 – Erreur de déplacement et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de modes.

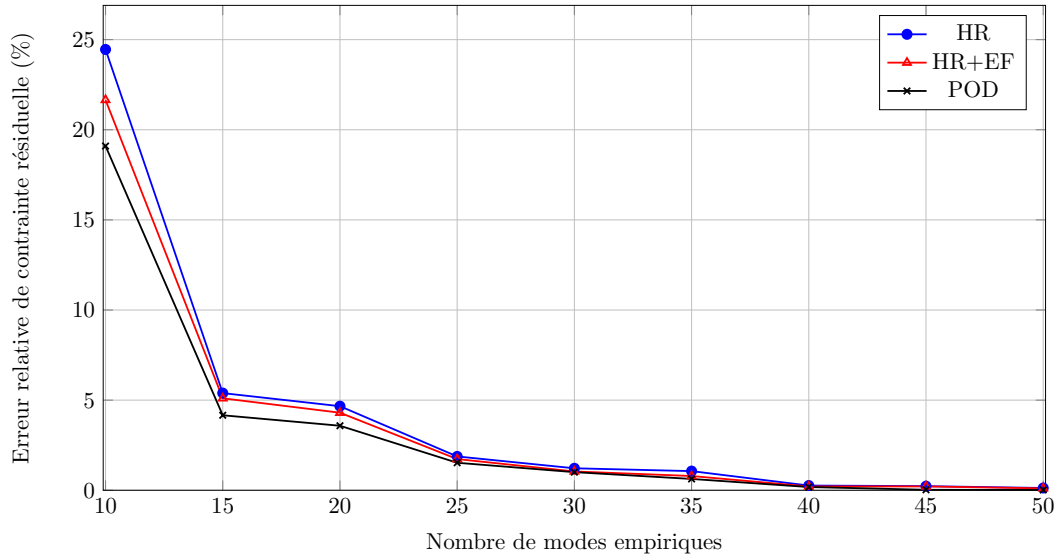


FIGURE 2.36 – Erreur de la prévision du champ de contrainte après le calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de modes.

n'est pas trop différente entre les deux modèles parce qu'il n'y a pas de changement de conditions aux limites ou de comportement. Le calcul hyper-réduit est déjà très proche de la solution et le calcul hybride n'est pas trop amélioré. On observera l'intérêt du modèle hybride dans le chapitre suivant.

2.7 Conclusion sur les modèles hyper-réduits

Les développements de l'hyper-réduction dans le code industriel *code_aster* ont consisté à modifier quelques fonctions usuelles de ce logiciel. La validation par un cas test de soudage simple, montre la performance de l'hyper-réduction : le temps de calcul est bien réduit avec une erreur acceptable pour de petit domaine de variation des paramètres. Pour comparer le modèle hyper-réduit avec son modèle initial, deux résultats sont considérés : l'erreur par rapport au résultat EF pour vérifier la précision et l'accélération des prévisions par rapport au résultat EF pour valoriser la

2.7. CONCLUSION SUR LES MODÈLES HYPER-RÉDUITS

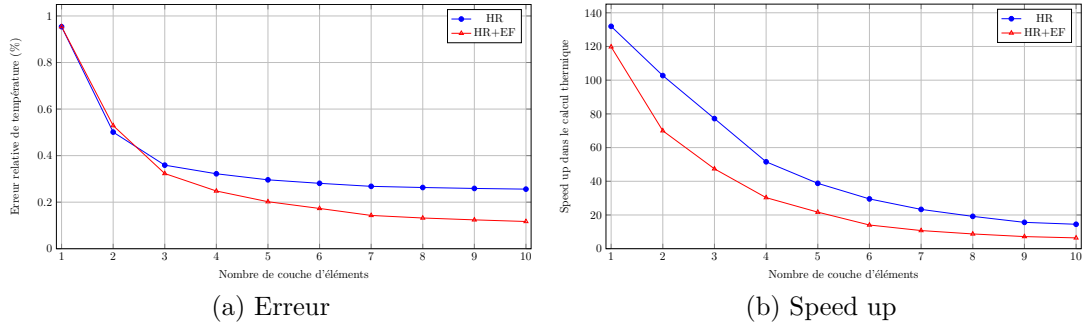


FIGURE 2.37 – Erreur de température et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème thermique de soudage en fonction du nombre de couches d'éléments autour des points magiques.

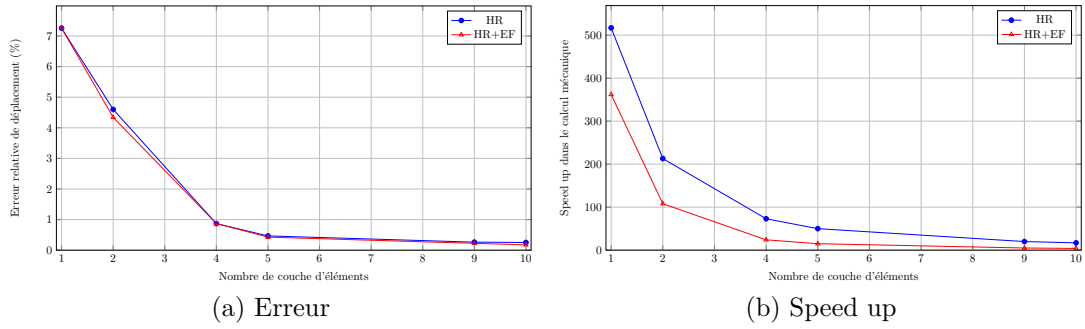


FIGURE 2.38 – Erreur de déplacement et accélération du calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de couches d'éléments autour des points magiques.

performance du calcul. Ces deux résultats dépendent évidemment du modèle hyper-réduit. Deux facteurs sont importants : la taille de la base réduite et la taille du RID. En faisant les études de convergences des erreurs d'approximation, on constate deux choses :

- si le RID est inchangé, plus le nombre de modes est grand, plus le calcul est précis
- si le nombre de modes est fixé, plus la taille du RID est grande, plus le calcul est lent.

Cependant dans certains cas de soudage, des difficultés subsistent concernant la précision des prévisions par hyper-réduction. Cela vient des études paramétriques où l'erreur augmente rapidement quand la valeur d'un paramètre est loin de celle utilisée pour construire le modèle hyper-réduit. Nous ne souhaitons pas étendre la phase d'apprentissage (offline) à plus d'une simulation éléments finis. Nous avons proposé un modèle directionnel qui prend en compte les caractéristiques directionnelles du soudage pour améliorer les résultats de l'étude paramétrique. Ce modèle a plus de modes empiriques que le modèle classique en 3D mais son domaine de validité est plus grand, en n'exploitant qu'une seule simulation par éléments finis en apprentissage.

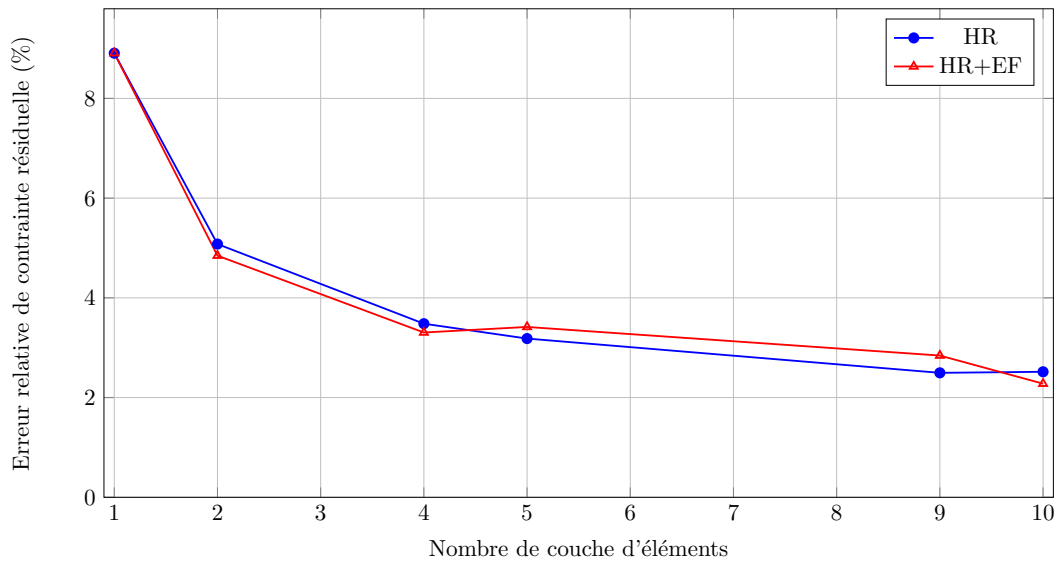


FIGURE 2.39 – Erreur de la prévision du champ de contrainte après le calcul hyper-réduit dans le problème mécanique de soudage en fonction du nombre de couches d'éléments autour des points magiques.

Le modèle mixte entre le modèle directionnel et le modèle classique 3D nous permet d'accélérer le temps des études paramétriques tout en conservant une bonne précision sur la zone du soudage. Cette approche n'a été mise en œuvre qu'en thermique. Son extension à la mécanique semble possible, quoique plus délicate à programmer.

Pour la partie mécanique, si les conditions aux limites ou les paramètres des matériaux sont différents par rapport à ceux qui ont servi à construire la modèle réduit, alors la base réduite ne contient pas les modes empiriques correspondant aux nouvelles conditions. Pour cette raison, le couplage entre le modèle hyper-réduit et le modèle à correction locale par EF est proposé. Ce modèle hybride va ajouter une étape de correction éléments finis pour prendre en compte les nouvelles conditions et corriger localement les résultats sur le RID. Les études de convergence dans ce chapitre ne montrent pas beaucoup d'avantages au modèle hybride car les conditions aux limites sont identiques. Cependant, un petit exemple d'une fissure sur une plaque trouée chargée en compression a validé l'intérêt de ce modèle. En plus, nous allons utiliser le modèle hybride dans les chapitres suivants afin d'améliorer un calcul hyper-réduit pour le soudage multipasse.

Chapitre 3

Application de l'hyper-réduction au soudage multipasse

Dans le contexte industriel, la simulation du soudage multipasse est bien souvent hors d'atteinte. C'est à dire qu'il est difficile d'aller au bout des simulations, faute de temps ou de moyen de calcul disponible. On peut alors revenir à des hypothèses simplificatrice comme la modélisation 2D. Mais dans certains cas ces hypothèses ne sont pas applicables. L'objectif de ce travail est d'utiliser un modèle hyper-réduit pour calculer plusieurs cordons sans jamais réaliser jusqu'au bout une simulation éléments finis. Ce chapitre va donc présenter une stratégie dédiée à la simulation du soudage multipasse.

3.1 Introduction du principe d'une hyper-réduction progressive

Nous commençons par l'introduction du modèle éléments finis du soudage multipasse. L'approche est incrémentale. Le problème cible est la simulation de M cordons de soudure, numérotés de 1 à M par ordre de réalisation des cordons. Les cordons sont similaires. Le temps de calcul du modèle éléments finis croît proportionnellement avec le nombre de cordon à simuler. Nous considérons la simulation de l'ajout de cordons de soudure, après avoir réalisé la simulation de m premiers cordons par la méthode des éléments finis. Le modèle hyper-réduit proposé est construit progressivement afin de tenir compte de l'effet thermomécanique des cordons ajoutés. Le modèle hyper-réduit étant construit progressivement, il évolue au cours de la simulation simplifiée du soudage. Une approche progressive aurait pu également être développée pour la simulation d'un seul cordon, à mesure que la source de chaleur avance. Mais faire évoluer un modèle hyper-réduit à chaque instant est plus complexe à mettre en œuvre qu'un modèle directionnel. Pour la simulation d'un seul cordon un modèle directionnel est donc bien adapté. Mais ici, pour passer d'un cordon à un autre, nous n'avons pas trouvé d'autre alternative que de construire progressivement le modèle hyper-réduit, en l'actualisant au début de la simulation simplifiée de chaque nouveau cordon.

D'un point de vue théorique, on cherche à représenter une solution dans un

repère mobile dont l'origine est le point de départ du soudage d'un cordon. On note les coordonnées de ce point dans un référentiel fixe $\mathbf{X}_o(\theta)$, où θ est une variable de temps décrivant l'avance de la source de chaleur pour passer d'un cordon à un autre. La durée de soudage d'un cordon est notée $\Delta\theta$. On note $\tilde{\mathbf{x}}$ les coordonnées mobiles des points de la structure lorsque $t \in [\theta, \theta + \Delta\theta]$: $\tilde{\mathbf{x}}(\theta) = \mathbf{x} - \mathbf{X}_o(\theta)$, où \mathbf{x} sont les coordonnées dans un référentiel fixe (celui du maillage). Dans le repère mobile, la source de chaleur n'est fonction que de $t - (n - 1) \Delta\theta$ et de $\tilde{\mathbf{x}}$, où n est le numéro du cordon traité. On se trouve donc dans une situation où l'on suit une onde progressive, avec un pas de temps $\Delta\theta$, pour un vecteur d'onde \mathbf{k} , de norme unitaire, tel que :

$$\mathbf{X}_o(\theta) = \mathbf{X}_o(0) + d \mathbf{k} I\left(\frac{\theta}{\Delta\theta}\right)$$

où d est le décalage transverse de la source de chaleur pour passer d'un cordon à un autre après une période de temps $\Delta\theta$ et $I(\cdot)$ est la division entière. En régime stationnaire dans un milieu infini, il convient d'introduire un changement de variable sur la variable de temps θ en introduisant la variable ξ :

$$\xi = \theta - \frac{\Delta\theta}{d} \mathbf{k} (\mathbf{X}_o(\theta) - \mathbf{X}_o(0))$$

Ceci conduit à la propriété suivante :

$$\xi = \theta - I\left(\frac{\theta}{\Delta\theta}\right) \Delta\theta$$

ξ est donc un temps local pour décrire le soudage d'un cordon.

Si l'on connaissait une équation aux dérivées partielles décrivant le passage d'un cordon à un autre, elle pourrait alors être formulée avec les variables ξ et $\tilde{\mathbf{x}}$. Dans ce cas la discrétisation par différence finie des dérivées temporelles ferait intervenir naturellement l'écart $\xi^{m+1} - \xi^m$ pour passer du cordon m au cordon $m + 1$ avec une formule de récurrence paramétrée par les prévisions en $(\xi^i)_{i=1}^m$. Nous proposons ici de définir cette formule de récurrence de façon empirique en exploitant les prévisions disponibles en $((t^i, \tilde{\mathbf{x}}^i))_{i=1}^m$.

L'idée générale est d'effectuer un calcul par hyper-réduction pour un cordon quelconque de numéro compris entre $m + 1$ et M , en connaissant les résultats de simulation des cordons 1 à m . Pour éviter le développement d'une méthode trop intrusive, nous souhaitons éviter pour l'instant, le recours à d'autres simulations éléments finis pour construire le modèle hyper-réduit. Plus précisément, nous souhaitons nous restreindre à une approche a posteriori de l'hyper-réduction. On conserve ainsi une étape de post-traitement des résultats de simulations éléments finis, généralement appelée étape "offline", et une étape d'exploitation du modèle hyper-réduit dite "online". Evidemment, la distinction "offline"/"online" n'a plus lieu d'être ici, dans une première approche. Par la suite, on pourra revenir à une meilleure prise en compte de résultats issus de simulations antérieures. Dans ce chapitre, nous supposons qu'avant la simulation du premier cordon, le cordon numéro 1, il n'y a aucun résultat disponible pour construire un modèle hyper-réduit.

Si on utilise, de façon classique, les résultats du ou des cordons précédents pour générer la base réduite et le domaine réduit, on constate que le modèle hyper-réduit ne permet pas d'estimer l'effet d'un nouveau cordon. Les modes empiriques

construits par la méthode POD ne sont pas capables d'estimer la propagation spatiale des transformations thermomécaniques qui accompagnent le mouvement de la source de chaleur nécessaire au soudage. Même si on utilise le modèle hybride, qui nous permet de corriger des effets locaux, l'information extraite par la méthode POD sur les cordons précédents n'est pas pertinente. Les corrections à réaliser par la partie éléments finis de l'approximation hybride ne peuvent plus être uniquement locales. Il faut donc trouver une approche alternative à la méthode POD pour extraire l'information pertinente des résultats des m premiers cordons pour simuler les cordons $m + 1$ à M . Il s'agit uniquement d'améliorer la construction des modes empiriques.

On suppose que les paramètres de soudage sont communs à tous les cordons de 1 à M , exceptée la position du point au début du cordon. Une stratégie de décalage spacial des modèles hyper-réduits est proposée pour améliorer le calcul hyper-réduit en soudage multipasse. Elle consiste à raisonner dans le référentiel mobile où les positions sont données par $\tilde{\mathbf{x}}$. Nous allons déplacer dans l'espace, en suivant la trajectoire de la source de chaleur, les champs thermiques (température, flux de chaleur) et mécaniques (déplacement, contrainte) issus des m premières simulations. Le décalage spacial n'est pas une simple translation des champs, quelques modifications sont apportées aux champs calculés pour construire une prévision, par extrapolation, des champs relatifs au soudage des cordons $m + 1$ à M . Ci-dessous, on montre que le modèle hyper-réduit, ou sa variante hybride plus efficace, engendré par cette prévision donne une solution approchée avec un temps de calcul réduit pour la passe de soudage étudiée. La stratégie de décalage est validée numériquement à la fin de ce chapitre en présentant les résultats thermomécaniques obtenus par hyper-réduction.

3.2 Modèle éléments finis du soudage multipasse

Pour comprendre la problématique du soudage multipasse, nous proposons un cas d'étude. Puis, nous choisissons le modèle éléments finis ayant le meilleur compromis précision/rapidité de simulation. Dans ce chapitre, on développe la stratégie de construction des modes empiriques pour une simulation qui n'est pas hors d'atteinte. Cela nous permet de valider l'approche proposée par comparaison avec des simulations éléments finis qui ont été menées jusqu'à leur terme.

3.2.1 Introduction du soudage multipasse

Sur une structure de grande taille, nous devons réaliser plusieurs passes de soudage pour assurer la continuité du matériau à souder. Sur la [figure 3.1](#), nous avons une plaque assez grande et sur sa surface supérieure, nous devons effectuer M cordons de soudure. Tous les cordons sont faits de manière consécutive à partir du cordon 1. Dans ce cas là, le sens de déplacement de chaque cordon de soudure est imposé suivant une unique direction. L'apport de matière pour un cordon est pris en compte, en activant des éléments présents dans un maillage purement géométrique des cordons de soudure. A la fin de la simulation du cordon m , les éléments des cordons $\{1, \dots, m\}$ sont activés.

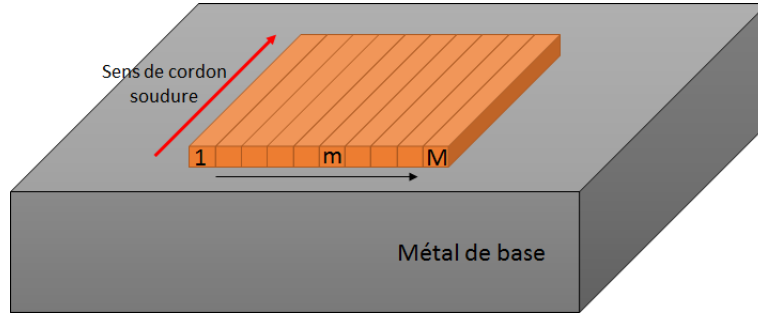


FIGURE 3.1 – Exemple simple pour le développement de modes empiriques dédiés au soudage multipasse.

La simulation numérique du soudage multipasse est complexe. Dans le modèle éléments finis, le maillage doit couvrir la géométrie finale, c'est-à-dire le domaine complet Ω . Dans [3], la modélisation éléments finis de la couche finale est remplacée par la méthode macro-dépôt présentée dans la section 1.2.5. Au lieu de simuler toutes les passes, on calcule l'état final avec une source de chaleur équivalente. Dans le cadre du projet SPAR, la modélisation du soudage multipasse a été restreinte aux cas 2D uniquement.

Deux types de modèles sont envisageables : un modèle où les cordons qui n'ont pas été simulés contiennent un matériau imaginaire, ou un modèle constitué d'une série de modèles emboîtés où le maillage des cordons est progressif. On définit ici Ω_P domaine couvert par le métal de base, $\{\Omega_{C_1}, \dots, \Omega_{C_m}, \dots, \Omega_{C_M}\}$ sont respectivement les domaines des cordons $\{1, \dots, m, \dots, M\}$. Le domaine complet Ω est l'union de tous ces domaines.

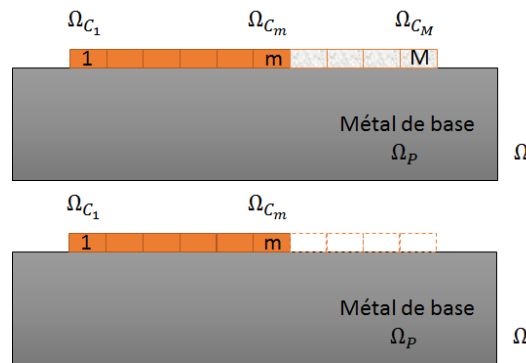


FIGURE 3.2 – Présentation de deux démarches pour la modélisation du soudage multipasse : en haut les cordons restant à simuler sont remplis d'un matériau imaginaire, en bas des modèles emboîtés où le maillage évolue en suivant la progression du soudage.

Les deux types de modélisation du soudage multipasse en 3D existent dans *code_aster*. A l'étape de simulation du cordon $m + 1$, un matériau imaginaire est affecté aux cordons $m + 1$ à M . Sur le reste du domaine de simulation on attribue localement le ou les matériaux réels. Les propriétés imaginaires sont choisies pour

que le matériau ne conduise pas la chaleur (pendant la phase thermique) et pour qu'il se déforme facilement (pendant la phase mécanique).

Dans la [figure 3.2](#), on constate que le calcul de chaque cordon est toujours réalisé sur Ω . La différence entre chaque cordon est le champ des propriétés matériau. Dans le cordon m , les domaines $\{\Omega_P, \Omega_{C_1}, \dots, \Omega_{C_m}\}$ ont les propriétés physiques des vrais matériaux. Par contre, on met en place les propriétés physiques du matériau "imaginaire" sur les domaines $\{\Omega_{C_{m+1}}, \dots, \Omega_{C_M}\}$. Dans la simulation thermique, on peut utiliser les paramètres matériaux de l'air pour le matériau "imaginaire". Dans la simulation mécanique, on suppose que le matériau "imaginaire" est très mou avec un module de Young très inférieure par rapport à ceux du métal de base et des cordons.

La deuxième technique nous permet de prendre en compte le fait que l'apport de matière soit progressif avec un maillage progressif. Elle consiste à exploiter le concept de modèles emboîtés de *code_aster* : les modèles sont utilisés pour affecter une modélisation sur tout ou une partie du maillage. Les modèles emboîtés sont notés $(\Omega_m)_{m=1}^M$. Il y a autant de modèles que de cordons, soit, M modèles. On a $\Omega_m = \Omega_P \cup \bigcup_{u=1}^m \Omega_{C_u}$ et on peut montrer que $\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_M \subseteq \Omega$. La [figure 3.2](#) représente aussi le modèle emboîté Ω_m pour le m -ème cordon de soudure. Les géométries des cordons suivants à partir de $m + 1$ ne sont pas prises en compte.

En pratique, on préfère utiliser la technique des modèles emboîtés. Premièrement, il s'agit d'une modélisation plus proche de la réalité où l'apport de matière se fait progressivement, en rajoutant un cordon après l'autre. Deuxièmement, on évite d'avoir des interactions inattendues entre les cordons à matériau réel et ceux à matériau imaginaire qui pourraient influencer la résolution non linéaire du problème mécanique et ralentir ou empêcher sa convergence. Pour finir, elle semble bien adaptée à l'hyper-réduction progressive que l'on souhaite développer, car elle fait intervenir des transferts de champs que nous devons exploiter.

3.2.2 Exemple d'un cas test du soudage multipasse

On considère à présent un cas test de soudage multipasse assez simple. Le but est de récupérer pour chaque cordon les résultats thermomécaniques éléments finis pour construire le modèle hyper-réduit et comparer les résultats obtenus par hyper-réduction avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

Géométrie et maillage du cas test

Nous avons choisi de modéliser une plaque carrée de côté 100 mm et de 20 mm d'épaisseur. Sur la surface supérieure de cette plaque, nous allons réaliser 5 passes de soudage. Pour simplifier le problème, on suppose que la géométrie de chaque cordon est identique, c'est à dire que du cordon 1 au cordon 5, on a toujours un cordon de soudure de largeur 4 mm avec une épaisseur de 2 mm et de longueur 68 mm comme dans la [figure 3.3](#).

Le soudage commence à 40 mm de l'extrémité de la plaque. Le maillage est régulier. Pour chaque cordon, on a deux mailles en largeur, une maille sur l'épaisseur et la longueur est maillée de manière conforme avec la plaque. Nous obtenons un maillage de 28996 nœuds au total (cf. [figure 3.4](#)).

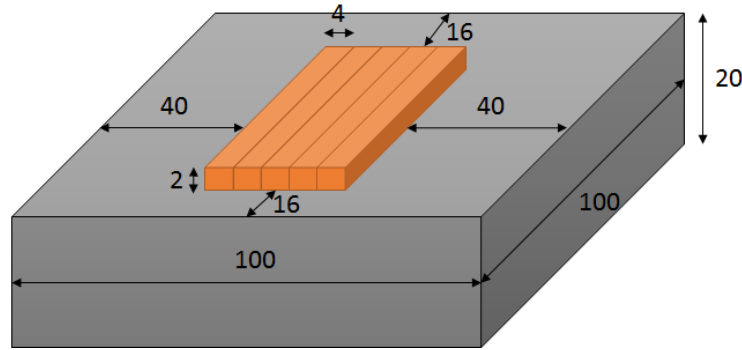


FIGURE 3.3 – Géométrie du cas test de soudage multipasse.

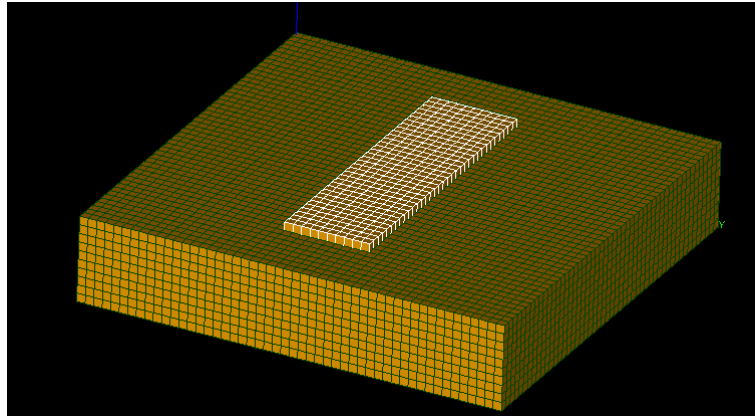


FIGURE 3.4 – Maillage du cas test de soudage multipasse, la partie supérieure représente les cordons ajoutés.

Comme nous avons choisi d'utiliser des modèles emboîtés pour modéliser le soudage multipasse, nous devons identifier plusieurs groupes de mailles qui seront activés progressivement.

Calcul thermique

En suivant une procédure similaire au cas test de soudage simple (mono-passe) sur la [section 2.2](#), nous avons le déroulement suivant pour chaque cordon :

- pendant 30 seconds, la torche du procédé soude avec une vitesse de $V_s = 2 \text{ mm/s}$ sur la plaque, nous représentons le procédé du soudage par la source de chaleur triangulaire (présenté dans la [section A.2](#))
- puis après, on attend 300 seconds de refroidissement avant de commencer le cordon suivant.

La source de chaleur est de forme triangulaire, elle est moins complexe que la source de chaleur Goldak. Sur la [section A.2](#), on trouve la description de la source triangulaire. Les paramètres définissant la source volumique triangulaire sont :

- sa position initiale : $x_0 = 20 \text{ mm}$,
- ses dimensions : longueur $L = 10 \text{ mm}$, section du cordon $S = 4 \times 2 = 8 \text{ mm}^2$.
- les paramètres du procédé : $Q_0 = \eta UI$ avec $\eta = 0.6$; $U = 12 \text{ V}$; $I = 200 \text{ A}$; $V_s = 2 \text{ mm/s}$.

3.3. STRATÉGIE DE DÉCALAGE DES CHAMPS PHYSIQUES

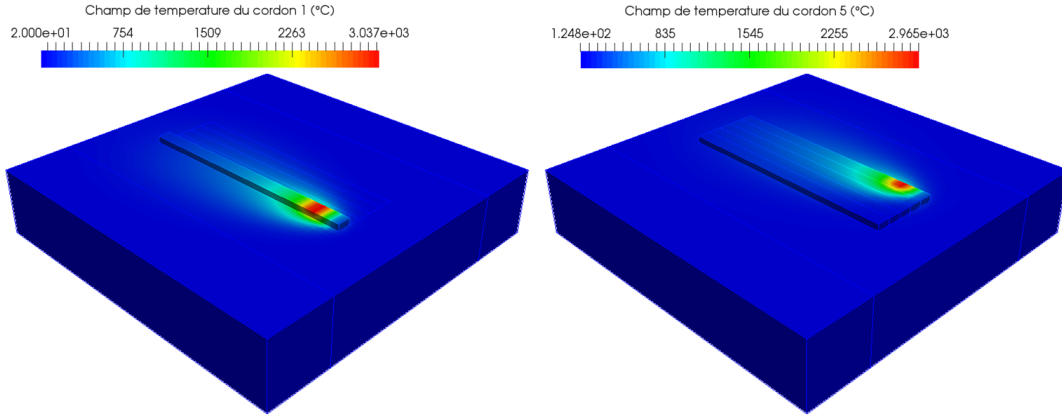


FIGURE 3.5 – Résultat thermique du soudage multipasse avec 5 cordons de soudure : à gauche pour le premier cordon, à droite pour le dernier cordon.

Cette source est appliquée sur la géométrie du cordon considéré. Par rapport au cas test de soudage simple, les paramètres sont inchangés (émissivité, coefficient d'échange, température ambiante). Cependant, il faut faire attention avec la surface de rayonnement et de convection avec l'air, elle n'est pas la même entre chaque cordon. Dans les modèles emboîtés, il faut préparer les surfaces pour chaque cordon et les insérer dans le modèle qui convient.

La modélisation thermique est réalisée dans une boucle, quand le calcul du cordon m est terminé, on utilise le champ de température simulé au dernier instant comme un état initial du cordon $m + 1$. Cependant, nous travaillons sur deux domaines différents notés Ω_m et Ω_{m+1} . Il nous manque donc des informations sur $\Omega_{C_{m+1}} = \Omega_{m+1} \setminus \Omega_m$. La solution est d'imposer la température ambiante sur ce domaine. La solution thermique est illustrée sur la [figure 3.5](#). Sur cette figure, nous avons le champ de température du premier et du dernier cordon.

Calcul mécanique

La modélisation mécanique de chaque cordon va tenir compte de la simulation thermique de ce cordon comme une source de chargement par dilatation thermique. En plus, nous avons des conditions de blocage sur la plaque pour éviter le mouvement de corps rigides. La technique de reprise de résultat du cordon précédent au dernier instant pour la condition initiale du cordon après est bien prise en compte. Par rapport au calcul thermique, on a besoin ici de plus de champs physiques : champ de déplacement, de contrainte et des variables internes (la loi de comportement est élastoplastique). Le champ de contrainte équivalent de type von Mises du premier cordon et dernier cordon est montré dans la [figure 3.6](#).

3.3 Stratégie de décalage des champs physiques

La simulation d'un soudage multipasse est la simulation qui pose numériquement le plus de difficultés parmi tous les procédés de soudage. La technique des modèles

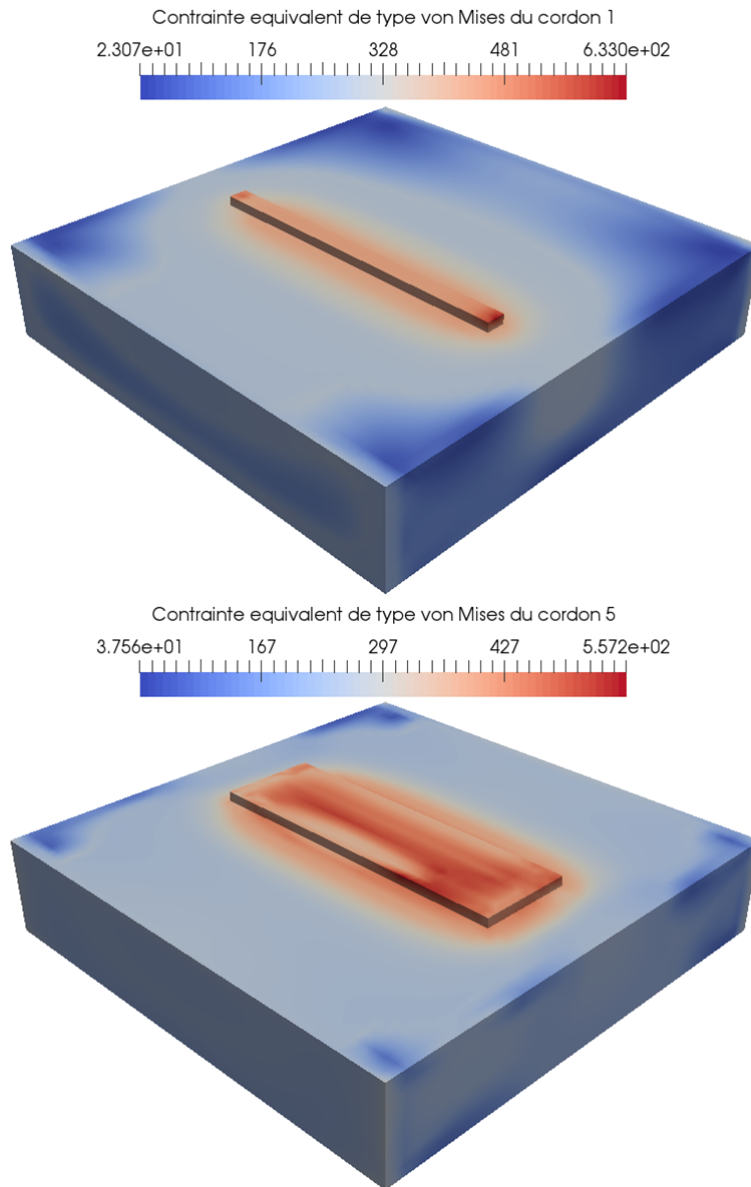


FIGURE 3.6 – Champ de contrainte équivalent de von Mises du soudage multipasse avec 5 cordons de soudure : en haut pour le cordon 1, en bas pour le cordon 5.

emboîtés n'est pas facile à mettre en œuvre et on obtient des modèles numériques de tailles extrêmement grandes. En plus, le temps de calcul croît proportionnellement avec le nombre de passes que l'on simule. Pour accélérer le calcul, on propose une stratégie qui consiste à calculer une prévision du résultat d'un cordon et de l'utiliser pour construire une base réduite de modes empiriques qui permet de faire un calcul par hyper-réduction. De cette façon on évite de faire un long calcul par la méthode des éléments finis.

3.3.1 Première application de l'hyper-réduction

Les calculs éléments finis dans la section précédente (cf. section 3.2.2) nous fournissent des résultats pour construire les matrices de snapshots du modèle hyper-réduit. Cependant, ce sont des résultats sur différents modèles emboîtés $\Omega_1 \subset \dots \Omega_m \subset \dots \subset \Omega_M = \Omega$. Nous devons réaliser une étape préliminaire qui consiste à projeter toutes les solutions sur un seul modèle, ici le modèle qui contient le maillage entier. Cette étape de projection sur le modèle complet est nécessaire pour les mises en œuvres dans *code_aster* de l'hyper-réduction, car on a besoin d'une solution sur le maillage complet pour conserver la structure de numérotation des degrés de liberté. Quand on calcule la solution sur un modèle différent du modèle complet, les parties qui ne sont pas dans le modèle ne contiennent aucun degré de liberté. L'algorithme qui calcule les bases réduites a besoin de l'information sur le maillage complet. Cela n'a pas de sens si certains nœuds n'ont aucun degré de liberté. La projection sur un maillage complet permet aussi de donner un format tensoriel aux champs calculés par les modèles emboîtés, en introduisant une seule base de représentation des fonctions de la variable d'espace $\tilde{\mathbf{x}}$.

Dans *code_aster*, nous avons l'opérateur `PROJ_CHAMP` qui nous permet de projeter les champs physiques d'un modèle sur d'autre. Donc, nous pouvons projeter les solutions à partir du modèle Ω_m sur Ω sauf pour les points qui ne sont pas présentes dans Ω_m . En ces points, on va imposer des valeurs constantes. En thermique, ce sera le champ de température ambiant. Sur la figure 3.7, le champ de température sur le modèle du cordon 3 (Ω_3) est combiné avec le champ de température constant de 20°C sur le reste pour avoir des snapshots du domaine complet.

En mécanique, on crée un champ de déplacement et un champ de contrainte nuls pour toutes leurs composantes. La figure 3.8 montre la différence du champ de déplacement entre le résultat éléments finis du cordon 3 et sa projection sur le modèle complet tandis que la figure 3.9 permet de faire la comparaison des champs de contrainte. Par la suite, pendant la construction du modèle hyper-réduit, nous allons utiliser les solutions projetées sur le modèle complet pour créer les matrices de snapshots.

La première application de l'hyper-réduction au soudage multipasse est réalisée sur l'exemple de la section précédente. On calcule par la méthode des éléments finis le champ de température et de flux de chaleur de chaque passe i , pour $i \in \{1, \dots, m\}$, avec $m < M$. On veut maintenant calculer le cordon $m + 1$. Pour pouvoir appliquer la méthode d'hyper-réduction, on a besoin d'une base réduite calculée à partir d'une matrice de snapshots issue de résultats éléments finis. On commence par utiliser la solution du cordon m projetée sur le domaine complet, sans décalage spatial. Cette projection est rangée dans une matrice de snapshots, noté \mathbf{Q}_m , dont le nombre de colonnes est le nombre de pas de temps pour la simulation d'un cordon. De cette matrice est extraite la base réduite \mathbf{V}_m et le RID. Pour être utilisée dans le calcul hyper-réduit du cordon $m + 1$, ce RID est défini dans Ω_{m+1} , noté Ω_{m+1}^Z . On choisit ici $m = 4$ et on veut appliquer l'hyper-réduction sur le cordon $M = 5$. L'erreur du calcul thermique est présentée dans le tableau 3.1 tandis que l'erreur sur calcul mécanique est présentée dans le tableau 3.2.

Les erreurs dans les deux calculs thermique et mécanique sont trop importantes pour espérer traiter ainsi plusieurs cordons par hyper-réduction, sans décalage spa-

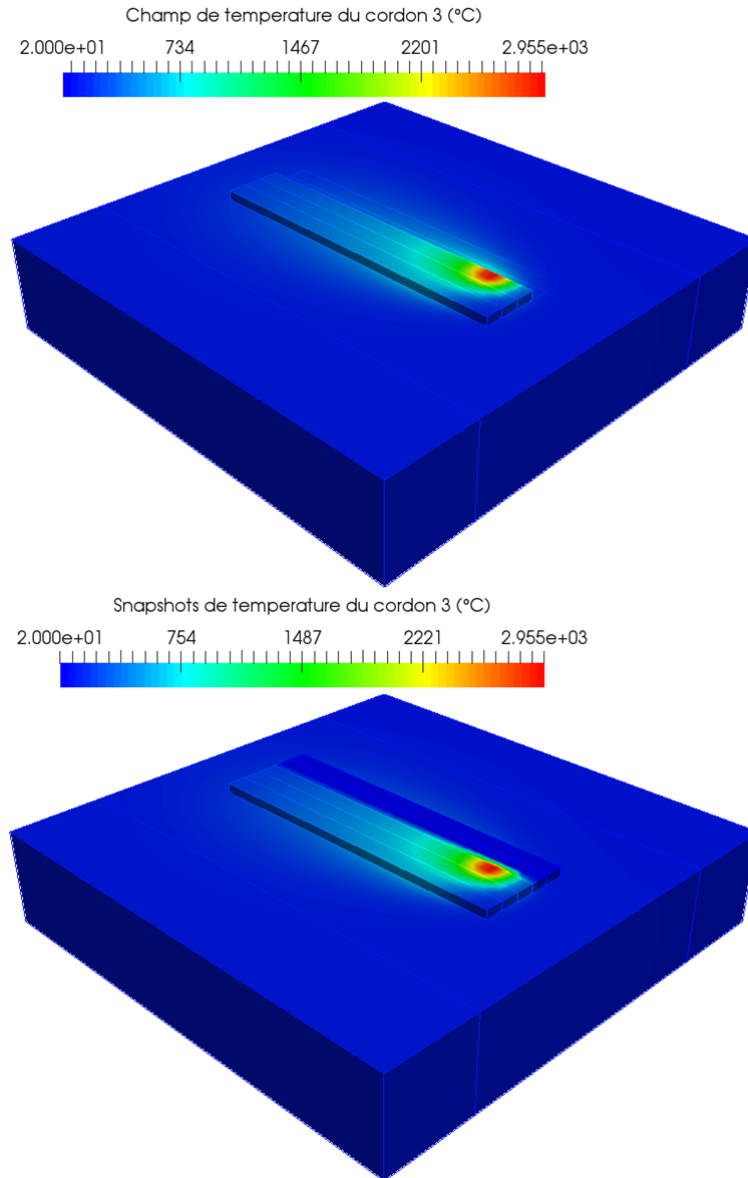


FIGURE 3.7 – Comparaison entre le résultat thermique (champ de température) d'un cordon et sa projection sur le modèle complet : en haut le cordon 3 simulé, en bas sa projection.

	Modèle hyper-réduit HROM	Modèle hybride HR+EF
η^T (%)	22.96	12.07

TABLE 3.1 – Erreur du calcul thermique (température) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la solution EF du cordon 4 sans décalage spatial pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-3}$ et 3 couches d'éléments autour des points magiques.

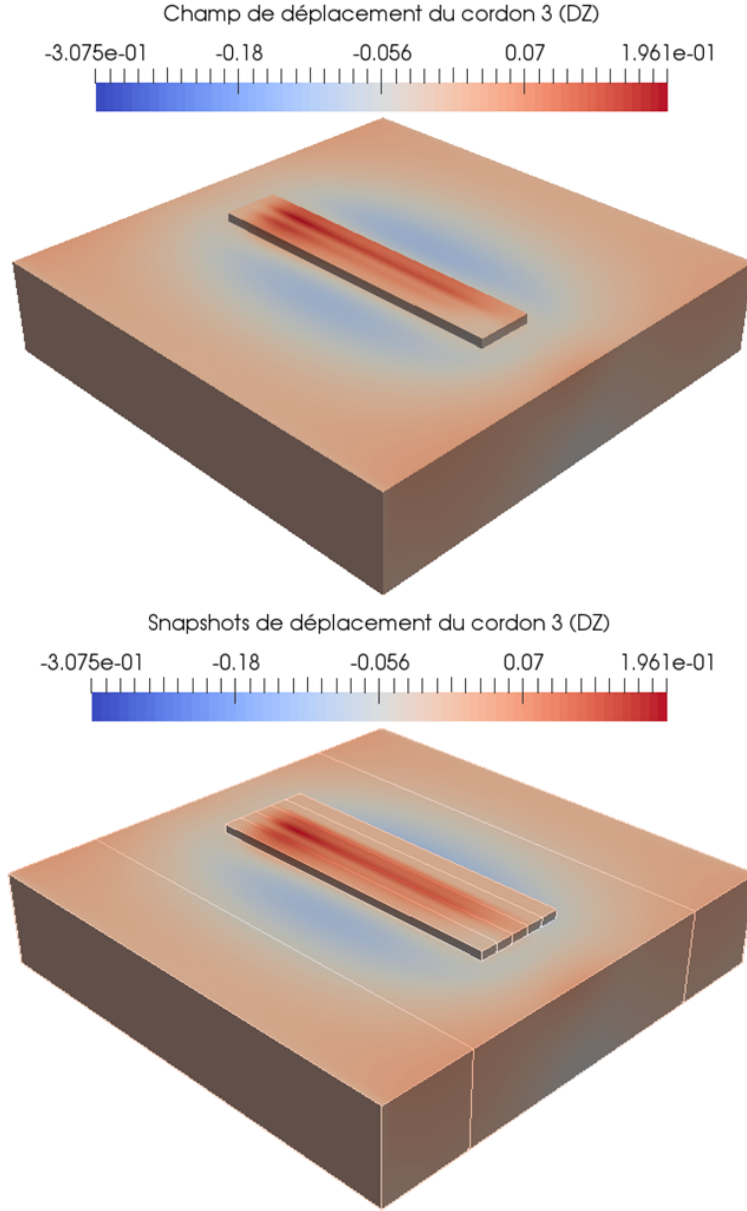


FIGURE 3.8 – Comparaison entre le champ de déplacement (u_z) du cordon 3 et sa projection sur le modèle complet : en haut le déplacement calculé, en bas le déplacement projeté.

tial. Même avec le modèle hybride qui améliore le résultat par une correction éléments finis locale, les calculs simplifiés ne sont pas assez précis. Pour pouvoir appliquer la méthode d'hyper-réduction, nous devrions avoir une solution approchée pour le cordon considéré, ou une prévision de champ. C'est pour cela que nous proposons une stratégie de décalage spatial des résultats antérieurs pour simuler un nouveau cordon.

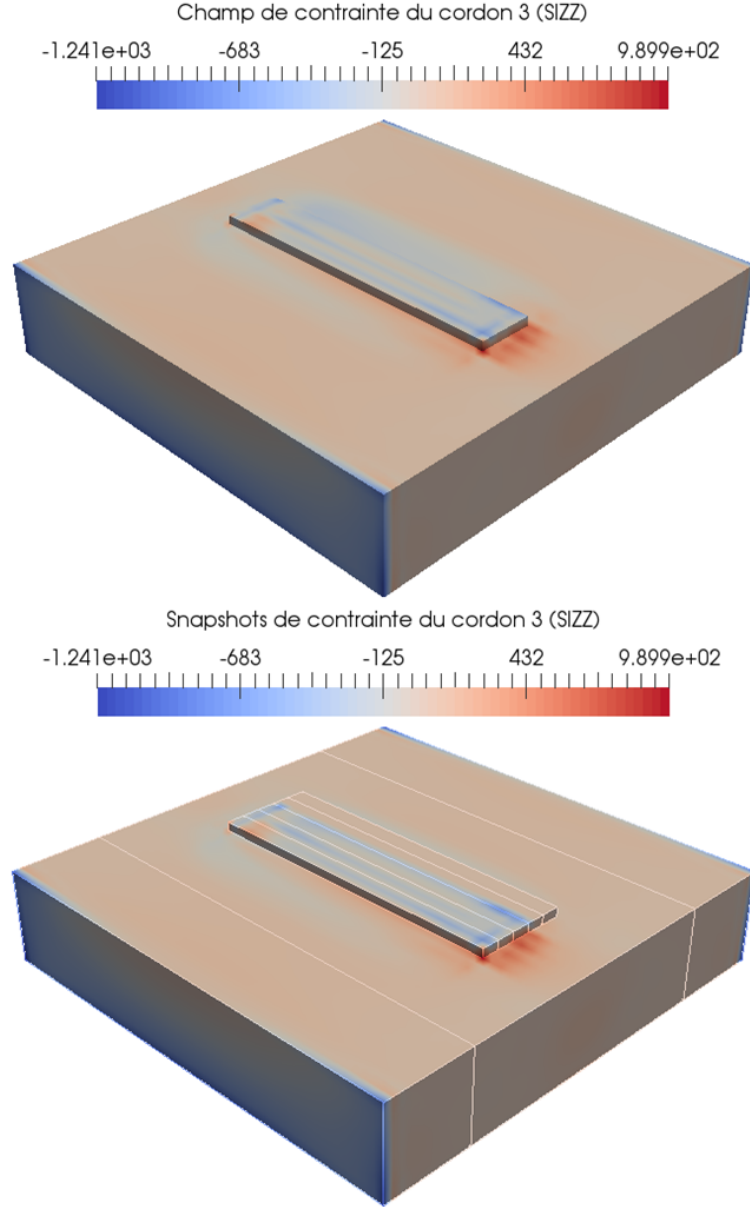


FIGURE 3.9 – Comparaison entre le champ de contrainte (σ_{zz}) du cordon 3 et sa projection sur le modèle complet : en haut la contrainte calculée, en bas la contrainte projetée.

3.3.2 Décalage des champs thermiques

Pour construire la prévision en thermique, on décale la solution du cordon m , rangée dans la matrice de snapshots \mathbf{Q}_m^T d'une distance d dans le sens de la progression du soudage, où d est la distance entre deux cordons, tel que l'on voit dans la [figure 3.10](#). Les snapshots décalées sont rangées dans la matrice notée $\tilde{\mathbf{Q}}_m^T$. De cette façon, la source de chaleur passe sur le cordon $m + 1$ et la diffusion thermique imite celle du cordon m . Pour commencer, cette prévision de température est simplement dupliquée dans la matrice de snapshots $\hat{\mathbf{Q}}_{m+1}^T$. C'est à partir de cette matrice que

3.3. STRATÉGIE DE DÉCALAGE DES CHAMPS PHYSIQUES

	Modèle hyper-réduit HROM	Modèle hybride HR+EF
$\eta^u(\%)$	22.35	14.08
$\eta^\sigma(\%)$	100.66	45.64

TABLE 3.2 – Erreur du calcul mécanique (déplacement et contrainte) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la solution EF du cordon 4 sans décalage spatial pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-6}$ et 6 couches d'éléments autour des points magiques.

l'on construit la base réduite et le RID pour notre calcul hyper-réduit.

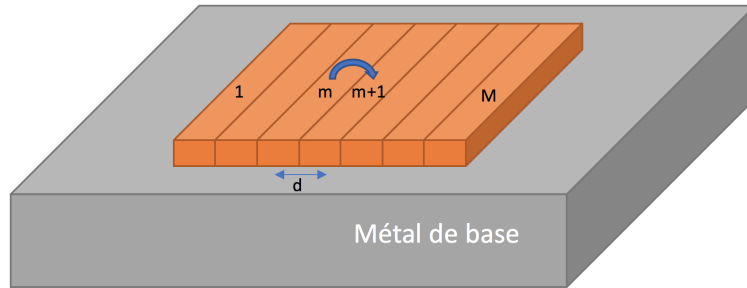


FIGURE 3.10 – Schéma du décalage du cordon m pour construire une prévision du cordon $m+1$ qui est utilisée pour créer la matrice des snapshots dans la construction du modèle hyper-réduit lié au cordon $m+1$.

Le décalage des champs physiques est effectué à l'aide de l'opérateur `PROJ_CHAMP` qui projette les champs physiques depuis un maillage initial sur un maillage déplacé dans l'espace (ici une translation de d suivant une direction comme dans la figure 3.10).

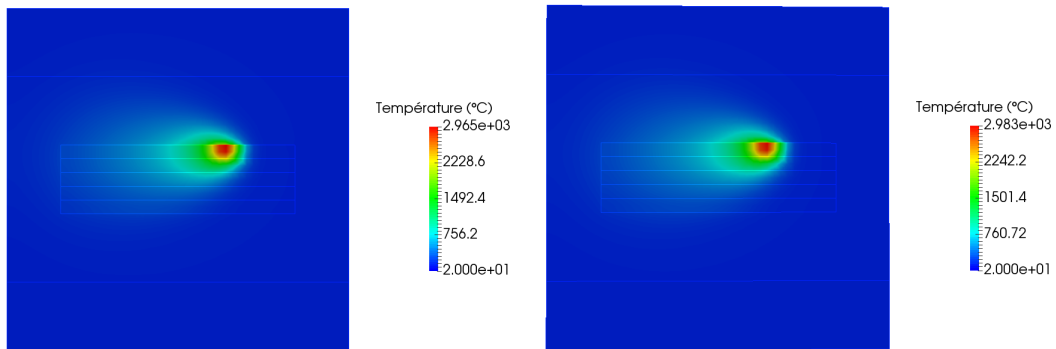


FIGURE 3.11 – Comparation entre la prévision et le résultat : à gauche prévision du cordon 5 par décalage spatial du cordon 4, à droite prévision du cordon 5 par éléments finis.

Sur la figure 3.11, nous voyons la similitude des prévisions de champ de température avec la stratégie de décalage. Nous obtenons une erreur de température de

9.4%. Par la suite, nous allons utiliser cette prévision, notée \widehat{Q}_5 pour construire le modèle hyper-réduit du cordon 5.

3.3.3 Décalage des champs mécaniques

La stratégie de décalage présentée précédemment ne marche que pour le problème thermique. En mécanique, il faut tenir compte de l'accumulation des déformations et des contraintes résiduelles sur les cordons précédents. Quand on décale une solution mécanique, on néglige ces contraintes et la prévision du résultat est très différente de la solution éléments finis. Dans ce cas, le modèle hyper-réduit engendré par cette prévision n'est pas optimale.

Quand on post-traite des résultats mécaniques, on remarque que les contraintes continuent d'augmenter sur les cordons qui ont déjà été soudés mais aussi sur la plaque, autour de la zone des cordons. On observe un comportement similaire pour le champ de déplacement. En plus, on observe que les contraintes avancent dans la direction du dépôt de cordon sur l'ensemble du maillage. Cela nous donne une idée sur la façon de construire une prévision du résultat du cordon suivant : on va construire un champ de prévision à partir du résultat précédent en rajoutant un terme d'accroissement.

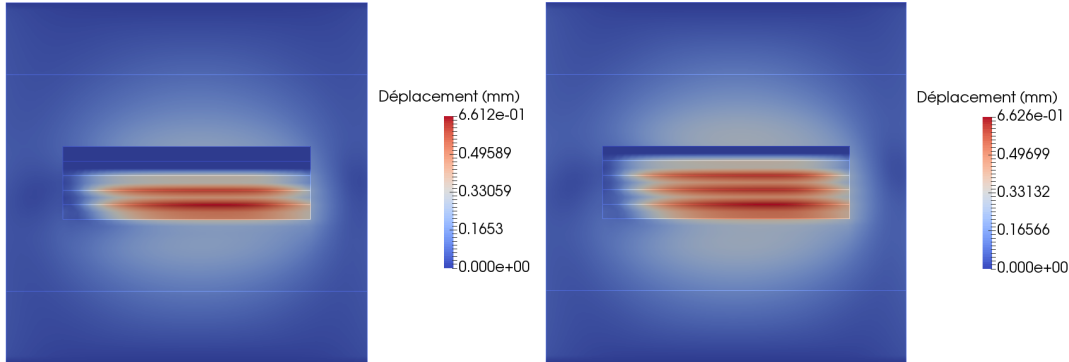


FIGURE 3.12 – Champ de déplacements (en magnitude) : à gauche à la fin du cordon 3, à droite à la fin du cordon 4.

On sépare Ω le volume total de la pièce en deux zones : Ω_S pour le domaine autour du soudage multipasse et Ω_B pour le domaine proche du bord. On note Q_m^u et Q_m^σ les snapshots de déplacements et de contraintes, respectivement, de la projection du cordon m sur le maillage complet sans décalage spatial. Les accroissements seront donc $\Delta Q_m^u = Q_m^u - Q_{m-1}^u$ et $\Delta Q_m^\sigma = Q_m^\sigma - Q_{m-1}^\sigma$. Ces champs mesurent l'évolution des déplacements et des contraintes pendant le calcul du cordon m par rapport résultats du cordon $m - 1$. En plus, à partir de ΔQ_m^u et ΔQ_m^σ , on aura $\Delta \widetilde{Q}_m^u$ et $\Delta \widetilde{Q}_m^\sigma$ les champs d'accroissement décalés d'une distance d , c'est-à-dire, de la même façon qu'en thermique.

On traite les champs de déplacements et de contraintes de façon différente pour s'adapter aux particularités observées. Comme on voit dans la [figure 3.12](#) et la [figure 3.13](#), entre les deux snapshots, les déplacements et les contraintes augmentent en amplitude sur la plaque et des nouveaux déplacements et contraintes apparaissent

3.3. STRATÉGIE DE DÉCALAGE DES CHAMPS PHYSIQUES

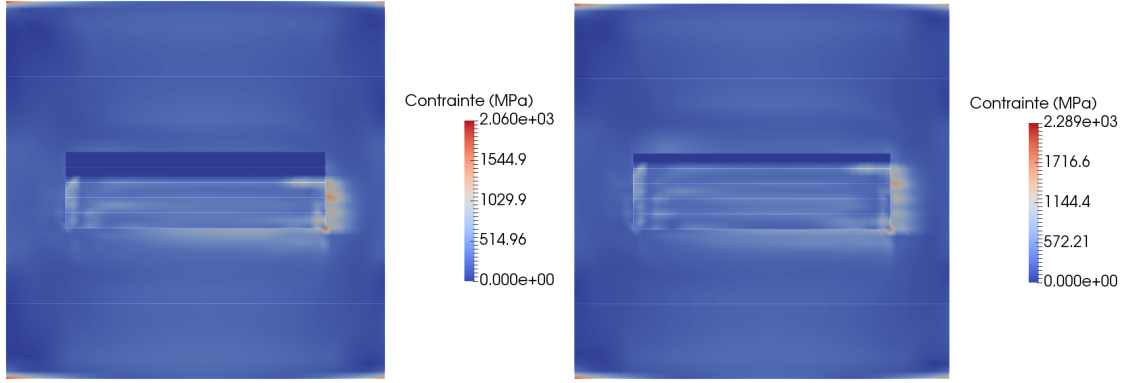


FIGURE 3.13 – Champ de contraintes (en magnitude) : à gauche à la fin du cordon 3, à droite à la fin du cordon 4.

sur le cordon 4. On suppose qu'entre les résultats du cordon 4 et du cordon 5 on observera le même comportement. Donc, sur le domaine autour du soudage multipasse Ω_S , on rajoute le décalage $\Delta \tilde{Q}_4^u$, $\Delta \tilde{Q}_4^\sigma$ pour faire apparaître les nouveaux champs sur le cordon 5, en augmentant aussi les valeurs sur les cordons précédents. Sur le domaine proche du bord, on rajoute seulement ΔQ_4^u ; ΔQ_4^σ .

En généralisant les observations faites sur une plaque de 5 cordons, on aura donc que la prévision des déplacements et des contraintes du cordon $m + 1$ est :

$$\widehat{Q}_{m+1}^u = Q_m^u + \mathbb{1}_{\Omega_S} \Delta \tilde{Q}_m^u + \mathbb{1}_{\Omega_B} \Delta Q_m^u \quad (3.1)$$

$$\widehat{Q}_{m+1}^\sigma = Q_m^\sigma + \mathbb{1}_{\Omega_S} \Delta \tilde{Q}_m^\sigma + \mathbb{1}_{\Omega_B} \Delta Q_m^\sigma \quad (3.2)$$

$\mathbb{1}_{\Omega_S}$ et $\mathbb{1}_{\Omega_B}$ sont les matrices relatives aux fonctions indicatrices des domaines Ω_S et Ω_B . On voit sur la [figure 3.14](#) et dans la [figure 3.15](#) que les prévisions que l'on obtient sont assez proches des résultats éléments finis. Nous avons une erreur de 5.45% pour le champ de déplacement et une erreur de 26.31% pour le champ de contrainte.

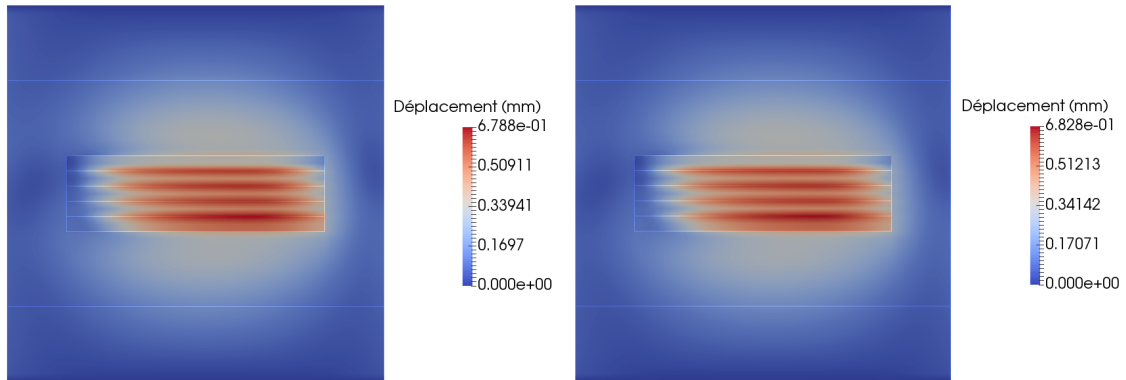


FIGURE 3.14 – Comparaison entre la prévision des déplacements et le résultat EF : à gauche par décalage, à droite par éléments finis.

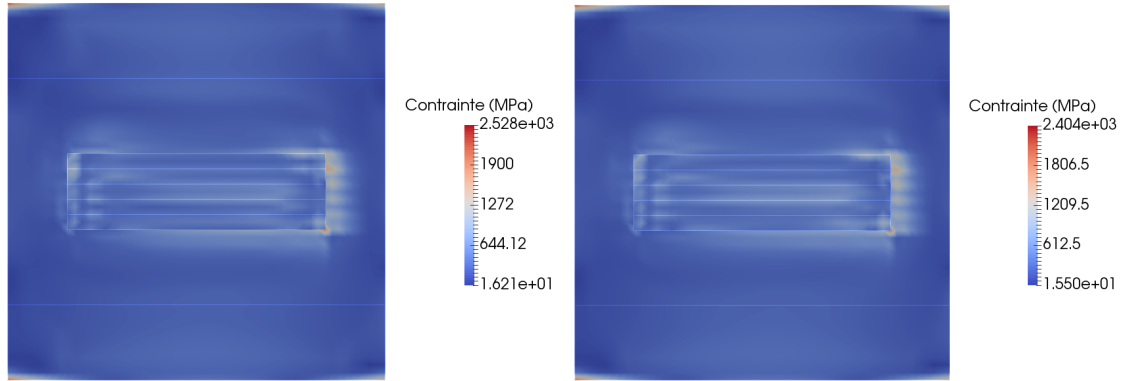


FIGURE 3.15 – Comparaison entre la prévision des contraintes et le résultat EF : à gauche par décalage, à droite par éléments finis.

3.4 Validation la stratégie de décalage

L'objectif de cette section est de montrer que l'on peut utiliser la technique de décalage de champs présentée de la section précédente pour l'application de l'hyper-réduction au soudage multipasse.

3.4.1 Résultats thermiques

Premièrement, on applique le décalage du champ de température dans la section 3.3.2 pour construire une prévision d'un cordon et l'utiliser pour le calcul hyper-réduit. Puis, on compare les résultats avec ceux du calcul éléments finis qui sont présentés dans la section 3.2.2.

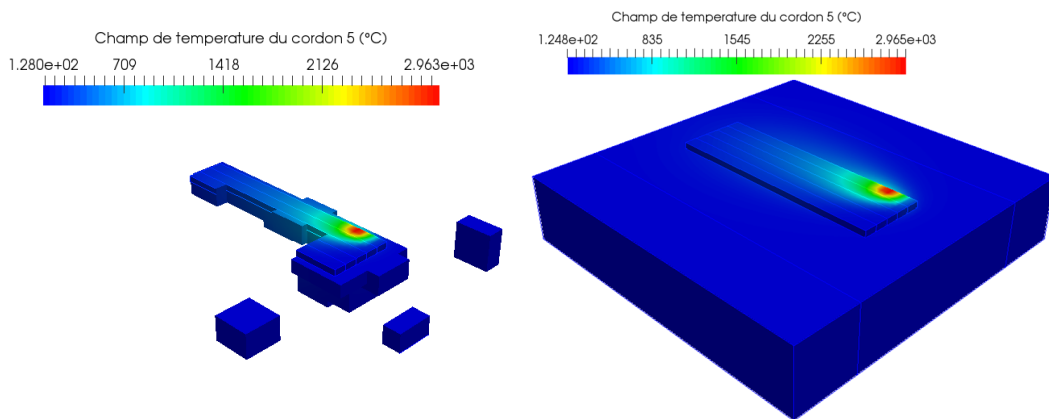


FIGURE 3.16 – Comparaison entre le résultat par hyper-réduction en appliquant le décalage et le résultat par éléments finis du cinquième cordon : à gauche par hyper-réduction , à droite par éléments finis.

La figure 3.16 montre le résultat du calcul hyper-réduit sur le RID du cordon 5. Ce RID et la base réduite ont été construits à partir de la prévision pour le cordon 5,

3.4. VALIDATION LA STRATÉGIE DE DÉCALAGE

notée $\widehat{\mathbf{Q}}_5^T$. Nous avons choisi $\mu_{POD} = 10^{-3}$ pour générer la base réduite et 3 couches d'éléments autour des points magiques pour créer le RID. Le [tableau 3.3](#) montre les erreurs du calcul hyper-réduit à l'aide de la prévision. Le résultat est nettement amélioré par rapport aux erreurs dans le [tableau 3.1](#) où on utilise seulement la solution sans décalage.

	Modèle hyper-réduit HROM	Modèle hybride HR+EF
η^T (%)	2.32	2.27

TABLE 3.3 – Erreur du calcul thermique (température) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la prévision du cordon 5 par décalage pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-3}$ et 3 couches d'éléments autour des points magiques.

La correction éléments finis améliore les résultats mais les calculs sont plus coûteux. On observe que le speed-up est plus faible quand on l'utilise : un speed up de 20 pour le modèle hyper-réduit et un speed up de 10 pour le modèle hybride entre HR et correction EF. C'est normal car on rajoute quelques itérations de calcul pour chaque instant de calcul. Dans chaque cas, on a un speed-up assez élevé.

On essaye encore une fois la stratégie de décalage des évolutions de champ de température comme pour les champs mécaniques (cf. section [3.3.3](#)). Cette nouvelle stratégie donne une meilleure prévision (une erreur de température d'ordre 1.49%) par rapport avec la stratégie plus simple applicable seulement pour la thermique (une erreur de température d'ordre 9.4%). Cependant, les erreurs reportées dans le [tableau 3.4](#) nous disent qu'avec cette nouvelle prévision, le calcul hyper-réduit est moins bon. Par contre, nous pouvons utiliser le résultat de la nouvelle prévision directement sans avoir besoin de faire le calcul hyper-réduit qui décale la solution d'une passe pour avoir la solution de plusieurs passes de la source de chaleur pour tous les cordons.

	Modèle hyper-réduit HROM	Modèle hybride HR+EF
η^T (%)	2.82	2.66

TABLE 3.4 – Erreur de température par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque l'on construit son modèle hyper-réduit avec un terme d'accroissement.

3.4.2 Etude du nombre de cordons éléments finis à calculer

Jusqu'à maintenant, le résultat que l'on décalait était toujours \mathbf{Q}_{M-1} , $m = M-1$, pour construire une prévision du cordon M , notée $\widehat{\mathbf{Q}}_M$. Dans le cas de la plaque à 5 cordons, on a décalé le résultat du quatrième cordon pour avoir une prévision du cinquième. Maintenant nous proposons de faire varier la valeur de M , pour ne calculer que les $M - 1$ premiers cordons par la méthode des éléments finis avant de déterminer des modes empiriques. Nous allons décaler le cordon 1 pour calculer

le cordon 2, décaler le cordon 2 pour calculer le cordon 3, etc. L'objectif est de trouver un nombre de cordons à calculer par la méthode des éléments finis qui soit raisonnable.

Cordon à calculer M	Modèle hyper-réduit	Modèle hybride
2	29.63%	10.05%
3	16.41%	7.97%
4	3.22%	2.99%
5	2.32%	2.27%

TABLE 3.5 – Erreur de température pour le calcul sur le modèle hyper-réduit ou hybride lorsque on décale la solution du cordon précédent pour le cordon actuel.

Les paramètres pour construire le modèle hyper-réduit sont toujours les mêmes : $\mu_{POD} = 10^{-3}$ et 3 couches d'éléments autour des points magiques. Cela nous donne un speed-up similaire pour tous les calculs : speed up de 20 sur le modèle hyper-réduit et speed up de 10 sur le modèle hybride. Le [tableau 3.5](#) montre que les résultats sont meilleurs quand on s'éloigne du premier cordon. C'est normal car quand on s'éloigne on atteint un état stationnaire et les champs se ressemblent beaucoup, donc le champ décalé est très proche du vrai champ. Au contraire, sur les premiers cordons on peut avoir des champs très différents. Par exemple, quand on décale la solution du premier cordon pour avoir une prévision du deuxième, on décale sur le premier cordon la température de la partie de la plaque qui est proche du cordon, ce qui donne une prévision fautive et donc un résultat très différent.

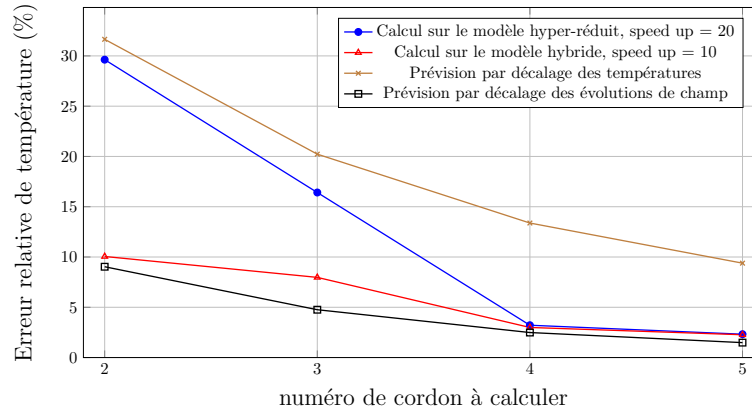


FIGURE 3.17 – Synthèse des erreurs de température de tous les résultats possibles à comparer avec la solution éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.

En conclusion, pour le calcul thermique, nous avons différentes possibilités d'obtenir le résultat d'un cordon en connaissant le résultat du cordon précédent :

- la prévision simple en décalant le champ de température du cordon précédent,
- la prévision par décalage des évolutions de champ de température du cordon précédent en espace,
- la solution par le calcul sur le modèle hyper-réduit engendré par l'une des deux prévisions,

— la solution par le calcul sur le modèle hybride.

La [figure 3.17](#) montre les erreurs de quatre résultats présentés par rapport à la solution de référence (ici la solution éléments finis) en fonction du nombre de cordon à calculer. On en déduit que la prévision par décalage des évolutions de champ donne le meilleur résultat avec la solution sur le modèle hyper-réduit hybride. La stratégie de décalage est plus précise lorsque le nombre de cordon à calculer est plus élevé, c'est à dire lorsque l'on est de plus en plus proche du régime stationnaire.

3.4.3 Résultats mécaniques

Dans le problème mécanique, nous devons appliquer la stratégie de décalage des évolutions de champs pour construire une prévision du cordon considéré. Avec cette prévision, nous avons choisi $\mu_{POD} = 10^{-6}$ pour récupérer la base réduit du problème mécanique et 6 couches d'éléments additionnels autour des points magiques pour construire le RID. La [figure 3.18](#) montre le résultat du calcul hyper-réduit sur le RID du cordon 5. Avec de tels paramètres, nous avons un RID assez grand, le speed up du calcul sur le modèle hyper-réduit est de 8, tandis que le speed up du calcul sur le modèle hybride est de 4. De la même manière qu'avec les résultats thermiques, on étudie la précision du calcul hyper-réduit sur le cordon 5. Le [tableau 3.6](#) montre son erreur en déplacement et contrainte pour deux types de modèles hyper-réduits : classique et hybride. A l'aide de la nouvelle prévision pour le cordon 5, le résultat est meilleur, en particulier le résultat sur le modèle hybride.

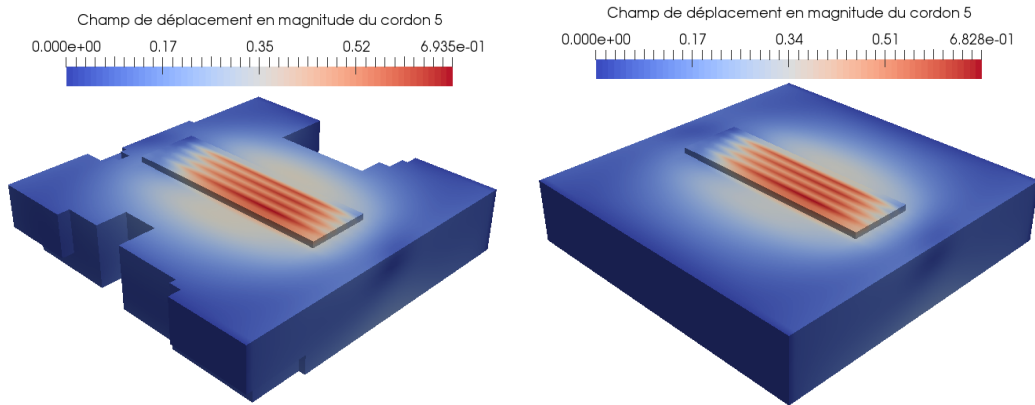


FIGURE 3.18 – Comparaison entre le résultat par hyper-réduction en appliquant le décalage et le résultat éléments finis du cinquième cordon : à gauche par hyper-réduction, à droite par éléments finis.

Ensuite, nous étudions l'effet du numéro de cordon à calculer. On décale les évolutions des champs du cordon précédent $M - 1$ pour construire une prévision pour le cordon à calculer M . On compare cette prévision et les solutions obtenues à partir des différents modèles hyper-réduits avec la solution éléments finis de chaque cordon. Sur la [figure 3.19](#), nous avons les erreurs de déplacement. La meilleure approche est celle du modèle hyper-réduit hybride avec décalage des évolutions de snapshots. Mais la prévision par décalage seul nous donne aussi un bon résultat. Par contre, pour le

CHAPITRE 3. APPLICATION DE L'HYPER-RÉDUCTION AU SOUDAGE MULTIPASSE

	Modèle hyper-réduit HROM	Modèle hybride HR+EF
$\eta^u(\%)$	12.2	5.08
$\eta^\sigma(\%)$	44.36	9.05

TABLE 3.6 – Erreur du calcul mécanique (déplacement et contrainte) par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la prévision par décalage des évolutions du cordon 4 pour construire le modèle hyper-réduit : $\mu_{POD} = 10^{-6}$ et 6 couches d'éléments autour des points magiques pour le RID.

champ de contrainte, la [figure 3.20](#) montre que le calcul sur le modèle hybride est le plus précis parce que nous avons ajouté une phase de correction les effets locaux qui prennent en compte le comportement et le chargement.

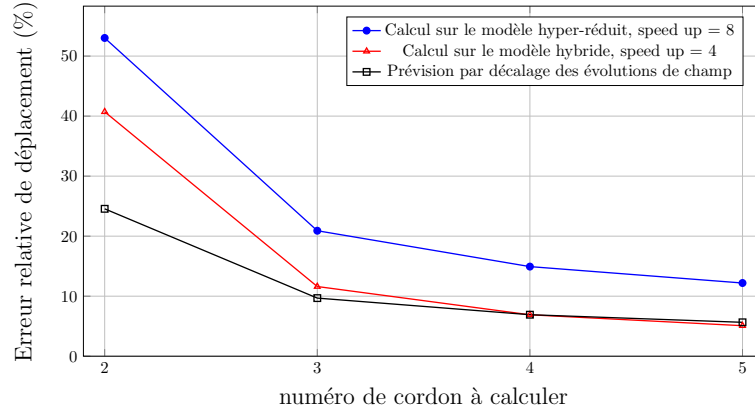


FIGURE 3.19 – Synthèse des erreurs de déplacement de tous les résultats possibles à comparer avec la solution éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.

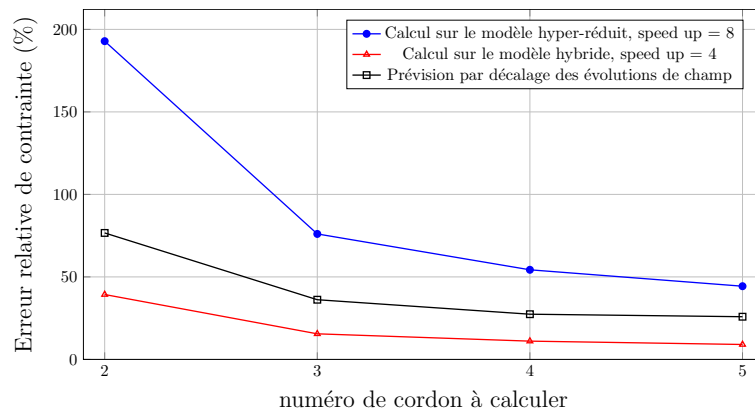


FIGURE 3.20 – Synthèse des erreurs de contrainte de tous les résultats possibles à comparer avec la solution éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.

3.5 Hyper-réduction de plusieurs cordons

Maintenant, on essaye à aller plus loin en prenant $m < M - 1$. Les résultats des cordons $m + 1$ à M sont trouvés par hyper-réduction. On réalise un décalage sur plusieurs pas de cordon. Ici on considère $m = 3$ calcul éléments finis de cordons successifs. Ensuite, on retrouve le résultat des cordons numéros 4 et 5 par l'hyper-réduction avec la technique de décalage comme nous avons introduit précédemment. Il suffit de prévoir par hyper-réduction le soudage du cordon 5, puisque le cas du cordon 4 a déjà été traité dans la section précédente.

	Modèle hyper-réduit HROM	Modèle hybride HR+EF
$\eta^T(\%)$	3.22	2.92
$\eta^u(\%)$	28.5	13.26
$\eta^\sigma(\%)$	106.79	47.91

TABLE 3.7 – Erreur du calcul par hyper-réduction sur le cordon 5 lorsque nous utilisons la prévision par 2 décalages des champs du post-traitement du cordon 3.

Le [tableau 3.7](#) présente l'erreur sur le cordon 5 après la deuxième application du calcul hyper-réduit avec la stratégie de décalage des prévisions du cordon 3. Deux décalages successifs sont donc faits. On constate que pour la thermique, l'erreur de température ne change presque pas. Nous pouvons bien utiliser l'hyper-réduction pour les cordons suivants sans avoir besoin des résultats éléments finis. Par contre, le problème mécanique devient plus complexe. Il faut remarquer que nous devons trouver tous les champs mécaniques avant de commencer un nouveau cordon. La difficulté ici est d'estimer le champ des variables internes issu de la loi de comportement du matériau. Pour le déterminer, nous intégrons la loi de comportement à partir de champ de déplacement trouvé. Cette étape implique des erreurs supplémentaires pour la prévision du champ de contrainte. Il ne faut donc pas être surpris de voir s'accumuler des erreurs sur les contraintes et les déplacements. La stratégie mise en place ici n'est pas encore assez pertinente pour être industrialisée en l'état.

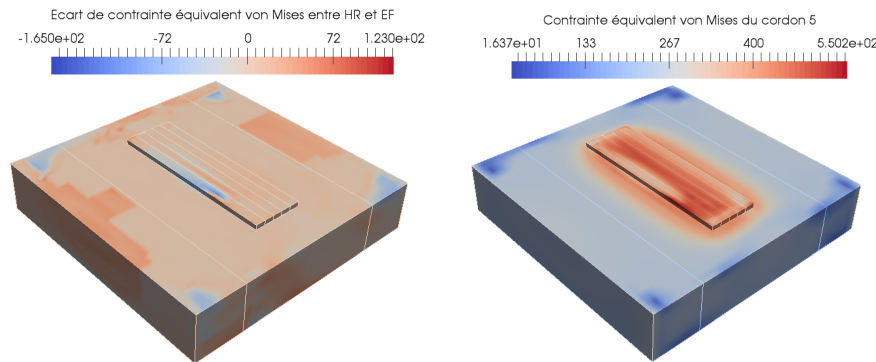


FIGURE 3.21 – A gauche l'écart de contrainte de von Mises $\sigma_{eq}^{HR+EF} - \sigma_{eq}^{EF}$ (MPa) reconstruit par Gappy POD en dehors du RID, à droite la contrainte σ_{eq}^{EF} (MPa), le tout à la fin de la simulation du cordon 5.

Globalement le maximum des erreurs relatives locales est important pour les contraintes. Mais, si on regarde la carte des écarts de contrainte de von Mises sur la [figure 3.21](#), on constate que ces écarts sont importants en dehors du domaine d'intégration réduit. Dans les zones à forte contrainte, l'erreur relative est moins importante. C'est utile de le noter, car les critères de fissuration à chaud ou les critères de durée de vie sont sensibles aux fortes contraintes de von Mises. L'erreur sur la contrainte de von Mises est de l'ordre de 20% dans les zones les plus critiques. De plus, il faut noter que l'hyper-réduction hybride combinée à la Gappy POD, surestime la contrainte de von Mises dans les zones les plus critiques. Cela conduit en pratique à des critères plus conservatifs pour prévoir la santé du matériau après soudage. Pour finir, il est clair que la reconstruction des contraintes en dehors du domaine réduit doit être améliorée. Nous préconisons de toujours inclure dans le domaine réduit les zones critiques.

3.6 Conclusion sur la mise en œuvre de l'hyper-réduction pour le soudage multipasse

Pour appliquer la méthode d'hyper-réduction à la simulation du soudage multipasse, nous avons proposé des stratégies de décalage des champs thermomécaniques. À partir des résultats éléments finis de tous les cordons de soudure, on a réussi à construire une bonne prévision de champ pour chaque cordon. Cette prévision est créée depuis la solution du cordon précédent avec des techniques de décalage et de combinaison linéaire de champs. On utilise cette prévision pour construire un modèle hyper-réduit dédié au cordon à calculer. Cette technique nous permet de trouver des résultats acceptables par hyper-réduction d'un cordon en connaissant le résultat éléments finis du cordon précédent.

Le résultat sur le modèle hybride donne les meilleurs résultats en terme de précision. Cependant, on ne peut pas appliquer la stratégie de décalage pour les premiers cordons car la prévision n'est pas assez proche des résultats obtenus par éléments finis. Il est conseillé de mettre en œuvre cette stratégie à partir des cordons de soudure assez loin du premier cordon. Trois devrait suffire. Plus on s'éloigne, plus on arrive à atteindre le régime stationnaire. Et les prévisions par décalage deviennent similaires entre des cordons proches.

Nous préconisons de toujours inclure dans le domaine réduit les zones les plus critiques.

À l'avenir, pour le développement d'une meilleure construction des modes empiriques par une méthode de décalage, il serait judicieux de traiter plus de cordons, mais des cordons moins longs. Par exemple, 3 fois plus de cordons 3 fois moins longs. Cela permettrait de déterminer une loi de décalage plus précise. Il serait aussi judicieux de tenir compte de simulations linéaires complètes à la fois en thermique et en mécanique. Celles-ci sont en générale faisable en un temps raisonnable. Ces simulations devraient permettre également d'améliorer la construction de la loi de décalage des prévisions.

Chapitre 4

Application sur un cas industriel

Ce chapitre présente une application de l'hyper-réduction dans un cas industriel pour illustrer ce que l'on peut considérer comme un cas de simulation hors d'atteinte. On va appliquer les développements réalisés dans `code_aster` et la stratégie de décalage, à la simulation du soudage multipasse pour mettre en œuvre le modèle hybride (hyper-réduction et correction par éléments finis) dans ce cas industriel.

On commence par introduire le contexte industriel puis la réparation Overlay réalisée par soudage multipasse. Les résultats expérimentaux de trois essais de soudage Overlay sont disponibles. L'un d'eux est la réparation Overlay Partiel à haute énergie. C'est ce dernier essai que nous allons modéliser par hyper-réduction pour valider la méthode de modélisation numérique proposée.

La simulation thermomécanique de ce cas est réalisée sur le cluster d'EDF pour accélérer les calculs. Cependant, le temps de calcul reste trop élevé pour ce problème car le nombre de passes est très élevé (environ une centaine). Nous proposons de mettre en œuvre la méthode d'hyper-réduction avec son modèle hybride et sa stratégie de décalage liée au soudage multipasse. A partir de quelques cordons de soudure simulés par éléments finis, on continue la simulation par la méthode d'hyper-réduction pour tous les cordons restants. La présence d'un régime stationnaire pour tous les champs physiques améliore la précision des prévisions hyper-réduites.

4.1 Introduction du cas industriel

Le cas industriel considéré dans ce chapitre est étudié dans le cadre du projet de la R&D d'EDF dédié au soudage dont un des objectifs est de contribuer aux enjeux industriels d'EDF et en particulier à ceux ayant trait à la durée de fonctionnement des centrales. Les outils développés ont pour but d'anticiper les conséquences thermomécaniques et métallurgiques d'une opération de soudage.

L'étude des déformations sur tuyauteries dues à des rechargements de type Overlay complet et partiel est une des premières étapes de l'évaluation des méthodes de rechargements de type Overlay Complet et Overlay Partiel sur tuyauterie. Le but est de disposer d'éléments techniques factuels pour pouvoir proposer une solution de réparation par rechargement extérieur sur les tuyauteries localement en sous-épaisseur interne et ne présentant pas de caractère évolutif en service. Cette méthode de réparation apparaît comme envisageable mais doit passer actuellement par la réalisation

systématique d'essais représentatifs pour évaluer l'influence du soudage sur la géométrie et le dimensionnement des composants concernés.

Une approche par simulation numérique du soudage (SNS), développée à EDF R&D, permet de comprendre l'effet des paramètres d'étude (énergie de soudage, direction de soudage, géométrie des couches et nombre de passes ou de couches) et en diminuant le nombre d'essais représentatifs nécessaires. Suivant cette approche trois essais représentatifs (sur acier non allié) des cas d'applications potentiels ont été menés. Pour compléter ces essais et en vue de la simulation des rechargements sur tube, des mesures de température sur plaques ont été effectuées (cf. [figure 4.1](#)).

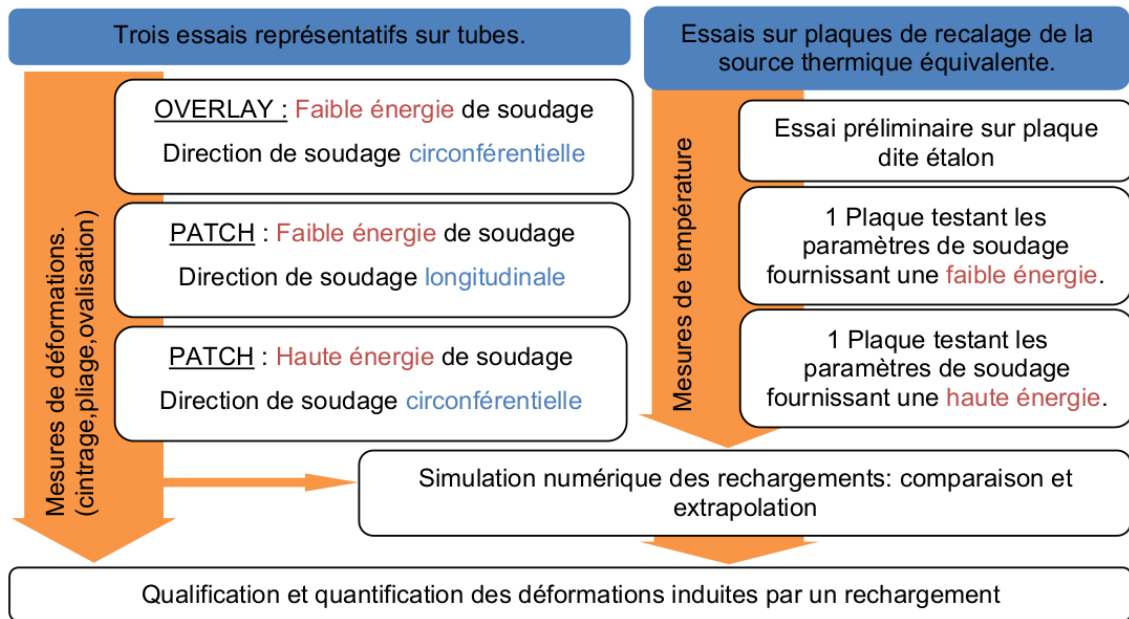


FIGURE 4.1 – Schéma des études expérimentales réalisées et des études numériques à effectuer. Ici, PATCH signifie OVERLAY partiel, à distinguer de l’OVERLAY complet[4].

Dans le cadre de cette thèse, nous exploitons les données générées dans le cadre de cette étude dans le seul but d’évaluer la précision des prévisions fournies par la méthode d’hyper-réduction.

Nous présentons dans la section suivante le principe de la réparation de type overlay ainsi que les essais expérimentaux représentatifs réalisés par l’Institut de Soudure.

4.2 La réparation Overlay

Les tuyauteries secondaires peuvent faire l’objet de manque d’épaisseur localement par défaut de fabrication. Des réparations doivent être engagées pour assurer la résistance à la pression de ces tuyaux. Parmi les différentes solutions de réparation, le rechargement par soudage pour rétablir l’épaisseur nécessaire pourrait répondre simplement à ces événements fortuits. On résume ici la description du procédé et l’intérêt porté à ce type d’opération.

4.2.1 Principe des rechargement Overlay partiel et complet

Le principe des rechargements Overlay partiel et complet est de constituer par soudage une surépaisseur résistante, sur la circonférence externe d'un tuyau (cf. [figure 1.5](#)). Cette surépaisseur peut être constituée de manière préventive ou pour une réparation. Cette couche peut être déposée sur toute la circonférence du tuyau (Overlay complet) ou sur une partie seulement (Overlay partiel) suivant le cas rencontré. La couche déposée doit alors suivre la géométrie du composant et répondre aux exigences mécaniques en termes de résistance, de rupture ou de propagation de défauts. Généralement la largeur déposée doit être suffisante pour couvrir la zone affectée et pour permettre un contrôle non-destructif.

La mise en œuvre demande généralement une étude préalable de conception. Il est généralement nécessaire de mesurer la sous-épaisseur du matériau de base. Les changements de diamètres extérieurs doivent être pris en compte et la conception du rechargement doit être bien étudiée afin d'éviter de générer, dans des endroits tels que les intrados de coude, des contraintes de traction pouvant favoriser l'amorçage et la propagation de défauts.

D'un point de vue réalisation, il n'y a pas de spécificité propre aux rechargements Overlay partiel/complet. Le choix de la technique de soudage est réalisé en fonction de l'accessibilité de la zone à réparer, de la surface à recharger ou de la possibilité d'automatisation.

Avantages et inconvénients

Ce procédé de rechargement de l'épaisseur par l'extérieur présente de nombreux avantages dont la facilité de mise en œuvre. Comme alternatives, il existe plusieurs méthodes de mitigations, l'INLAY ou bien la mise en place d'un embout de remplacement.

Parmi les avantages de l'Overlay complet ou partiel, citons :

- Amélioration de l'état de contraintes
- Temps d'interventions courts
- Bonne inspectabilité du dépôt
- Pas de risque de pollution du circuit (pas d'ouverture)

Le Weld OVERLAY est fréquemment utilisé outre-Atlantique, au niveau des pressuriseurs, dans des cas de socket welding. Cette méthode permet de prolonger la durée de vie d'assemblage soudé en attente par exemple du prochain arrêt de tranche pour remplacer l'assemblage. Parmi les exigences demandées dans le code ASME [\[55\]](#), citons :

- L'épaisseur totale du dépôt ne doit jamais excéder l'épaisseur originale de la paroi du composant.
- L'épaisseur doit être suffisante pour assurer la tenue du composant. De plus, excepté sur les bords de la zone rechargée, cette épaisseur doit être uniforme.
- Le matériau sous la surface à recharger doit être examiné afin d'établir avec précision le profil de l'épaisseur réelle de l'intégralité de la zone concernée.
- La zone rechargée doit s'étendre sur une certaine distance de part et d'autre de la zone affectée.
- L'angle de raccordement entre la surface déposée et la surface existante ne

doit pas excéder 45 degrés. La configuration finale doit permettre les examens requis.

- La résistance en traction du métal déposé doit au moins être égale à celle du matériau initial.

L'inconvénient majeur est la nécessité de mener des analyses mécaniques expérimentales ou numériques de façon à s'assurer de la tenue mécanique et de ne pas engendrer de nouveaux défauts.

Applications potentielles sur le parc

De nombreux cas de composants en sous-épaisseurs auraient pu être traités par rechargement extérieur par exemple un échangeur SES (générateur d'eau surchauffée) [72] possédant un défaut de fabrication de la soudure circulaire entraînant une fuite.

Seules mises en œuvre sur CNPE de la technique PATCH, deux cas de reconstitution extérieure d'épaisseur ont été réalisés sur le CNPE de Gravelines [13]. Des sous-épaisseurs de fabrication ont été constatées en amont et aval des tuyères de mesure de débit des turbo-pompes alimentaires. Ces sous-épaisseurs ne correspondent pas à des dégradations en service mais à un usinage excessif dû à la non-concentricité du diamètre interne du tube.

De nombreuses justifications ont été apportées avant de procéder à la réparation par rechargement [24][53]. De ces justifications ressortent les exigences suivantes :

- Qualification du métal d'apport (tenue mécanique, soudabilité) ;
- Contrôle non destructif avant et après rechargement ;
- Essais destructifs (sur essai représentatif) ;
- Relevés dimensionnels et d'ovalisation.

La tenue des deux réparations a été justifiée par des calculs éléments finis et grâce à un essai représentatif effectué parallèlement au rechargement.

Appropriation et perspectives d'études

Il apparaît que ce procédé de réparation permettrait de répondre simplement à des fortuits sur des nuances, des diamètres ou des géométries très variables. Néanmoins une étude spécifique semble être nécessaire pour chaque cas de sous-épaisseur. Une telle étude passerait obligatoirement par des essais représentatifs pour évaluer les conséquences mécaniques du soudage sur la géométrie et le dimensionnement des composants concernés. Il faudrait aussi une justification mécanique. L'objectif à terme est de proposer une codification de l'OVERLAY dans le RSEM [5].

4.2.2 Essais expérimentaux

La section suivante décrit les essais menés par l'Institut de Soudure.

De façon à pouvoir quantifier directement les effets mécaniques d'une opération de rechargement de type Overlay complet ou partiel, il a été effectué des tests sur trois tubes représentatifs des applications potentielles pour le parc. Ces essais sur tubes sont déclinés suivant trois possibilités de réalisation, un rechargement axisymétrique Overlay complet et deux rechargements de type Overlay partiel. Les

trois tubes ont donc subi chacun une opération de rechargement extérieur. Ces trois opérations ont été réalisées sur deux couches de 100 passes chacune.

Les matériaux utilisés

Les maquettes d'expérimentation ont été réalisées à partir de tube en acier P265GH Schedule 80S de diamètre DN300. Le diamètre intérieur du tube est de 300 mm et son épaisseur de 12.8 mm. Le rechargement a été réalisé avec le procédé TIG automatique et un fil de type G3Si1 de diamètre 1.2 mm.

Les configurations évaluées

Trois configurations de rechargement ont été évaluées. Chaque maquette est composée d'un tube de longueur 1900 mm pour apprécier correctement les déformations de cintrage. Le schéma pour chaque maquette est représenté dans la [figure 4.2](#).

- Maquette Overlay complet : Dépôt sur l'extérieur du tube d'épaisseur 4 mm minimum (obtenu en 2 couches), sur toute la circonférence du tube, de longueur 150 mm et centré sur la longueur du tube. Le soudage a été réalisé à plat avec mise en rotation du tube et une énergie de soudage de 8 kJ.cm^{-1} (sans tenir compte du coefficient de rendement thermique), en plaçant les points d'amorçage sur la même génératrice du tube.
- Maquette Overlay partiel haute énergie : Dépôt sur l'extérieur du tube d'épaisseur 4 mm minimum (obtenu en 2 couches), sur 120° de la circonférence du tube, de longueur 350 mm et centré sur la longueur du tube. Le soudage a été réalisé avec mise en rotation du tube et une énergie de soudage de 16 kJ.cm^{-1} (sans tenir compte du coefficient de rendement thermique) en plaçant les points d'amorçage sur la même génératrice du tube.
- Maquette Overlay partiel faible énergie : Dépôt sur l'extérieur du tube d'épaisseur 4 mm minimum (obtenu en 2 couches), sur 120° de la circonférence du tube, de longueur 350 mm et centré sur la longueur du tube. Le soudage a été réalisé longitudinalement avec une énergie de soudage de 8 kJ.cm^{-1} (sans tenir compte du coefficient de rendement thermique) en plaçant les points d'amorçage sur le même diamètre du tube.

Pour ces trois cas de rechargement extérieur, les déformations attendues peuvent être de l'ordre du cintrage, du pliage ou de la diminution de diamètres. Le cas Overlay complet étant axisymétrique, on s'attend à ce que le retrait du rechargement par soudage provoque uniquement une diminution du diamètre au voisinage de la zone rechargée.

Pour le cas Overlay partiel, la localisation du rechargement peut provoquer, au premier ordre, un cintrage des tubes et plus localement, un pliage (cf. [figure 4.3](#)). On s'attend aussi à ce que le sens de soudage et le choix des paramètres de soudage aient une influence sur les trois modes de déformations attendus.

Le matériel de soudage

Le soudage a été effectué en position "à plat" (PA) et la rotation du tube a été assurée par un positionneur placée à l'une des extrémités du tube. Les déformations

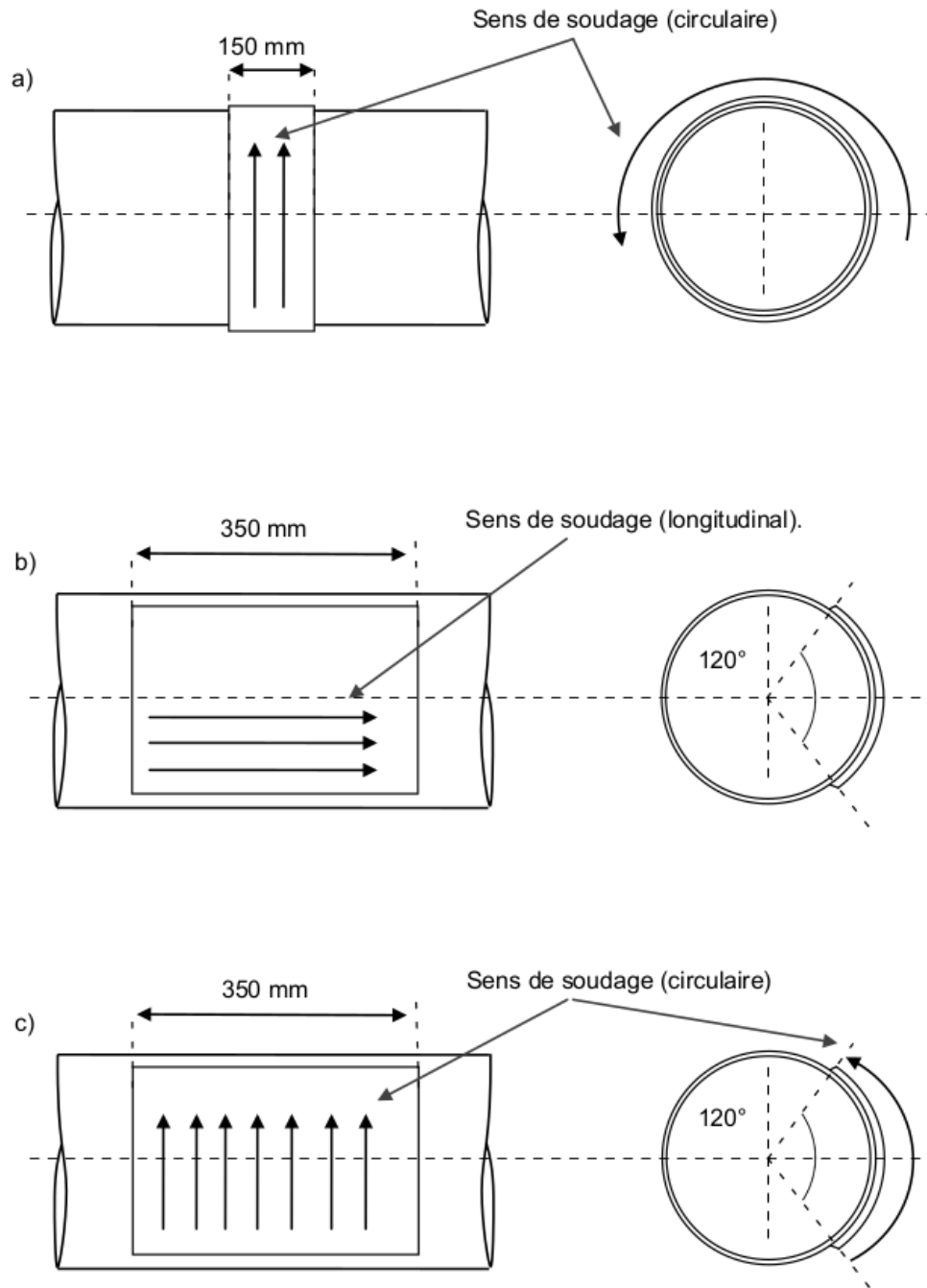


FIGURE 4.2 – Schémas des rechargements sur tubes de 1900 mm, sans soudure DN300, d'épaisseur 12.8 mm et de matériau P265GH. a) Rechargement de type Overlay complet. b) Rechargement extérieur type Overlay partiel soudé à faible énergie. c) Rechargement extérieur type Overlay partiel soudé à haute énergie.[4].

devant être laissées libres, la seconde extrémité du tube a été maintenue par un équilibreur muni d'une lunette de centrage. La vitesse de rotation a été ajustée à l'aide d'un tachymètre. Pour les rechargements en rotation, la torche de soudage était fixe. Pour les rechargements longitudinaux, la torche était montée sur une poutre motorisée.

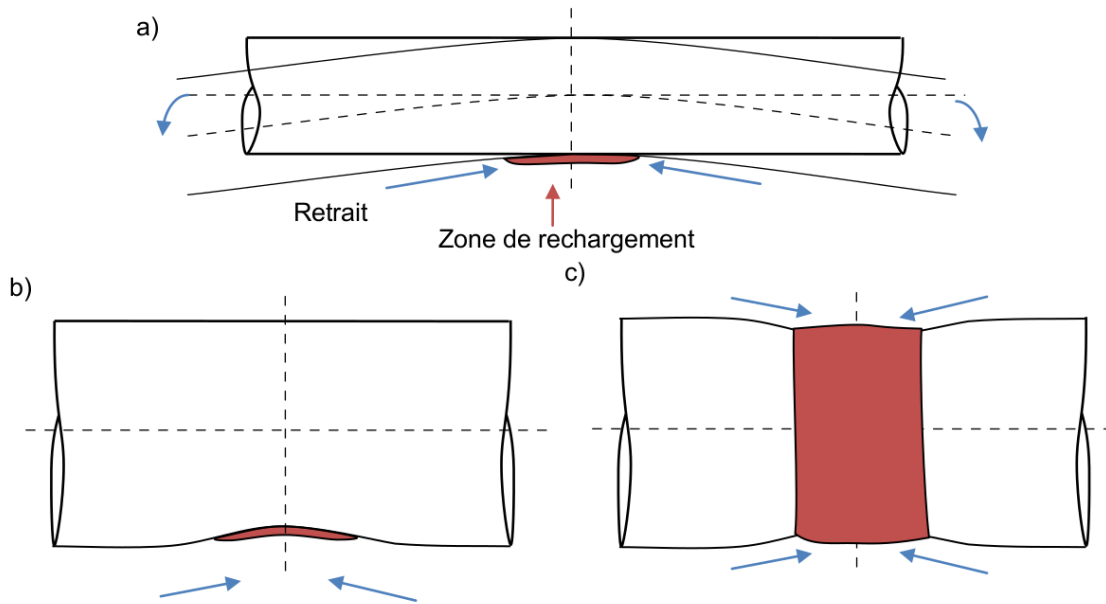


FIGURE 4.3 – Mode de déformation attendus : Overlay partiel : a) cintrage ; b) pliage. Overlay complet : c) diminution de diamètre.[4].

Afin de permettre à la société en charge d'effectuer les mesures de déformations à l'état brut de livraison et après soudage, des « plots d'instrumentation » permettant l'installation de capteurs ont été placés sur le tube (carrés bleu sur la [figure 4.4](#)). Ces plots en acier ont été maintenus sur le tube par soudage en minimisant l'énergie de soudage afin de ne pas induire de prédéformation du tube.

En cours de soudage, la température interpasse (maximum 250°C) a été mesurée à l'aide d'une sonde de température équipée d'un thermocouple de contact, dans la zone de soudage juste avant amorçage de l'arc. L'intensité, la tension et la vitesse de rotation ont également été relevées.

Paramètres de soudage

On note ici les paramètres de soudage utilisés pour les trois tubes (cf. [figure 4.5](#)). Ces paramètres sont aussi utilisés pour la simulation numérique.

4.3 Modèle numérique de l'essai expérimental Overlay partiel haute énergie

D'après [4], par un suivi de mesure de déformation, il est intéressant de noter que le cintrage est plus important sur la première couche dans le cas du Overlay partiel haute énergie, mais plus marqué à la fin de la seconde couche dans le cas du Overlay partiel faible énergie. Le cas Overlay complet ne produit que très peu de déformation en cintrage et en ovalisation. Par contre la diminution du diamètre est relativement importante.

Le cas Overlay complet est axisymétrique, on peut le simuler en 2D. Entre deux

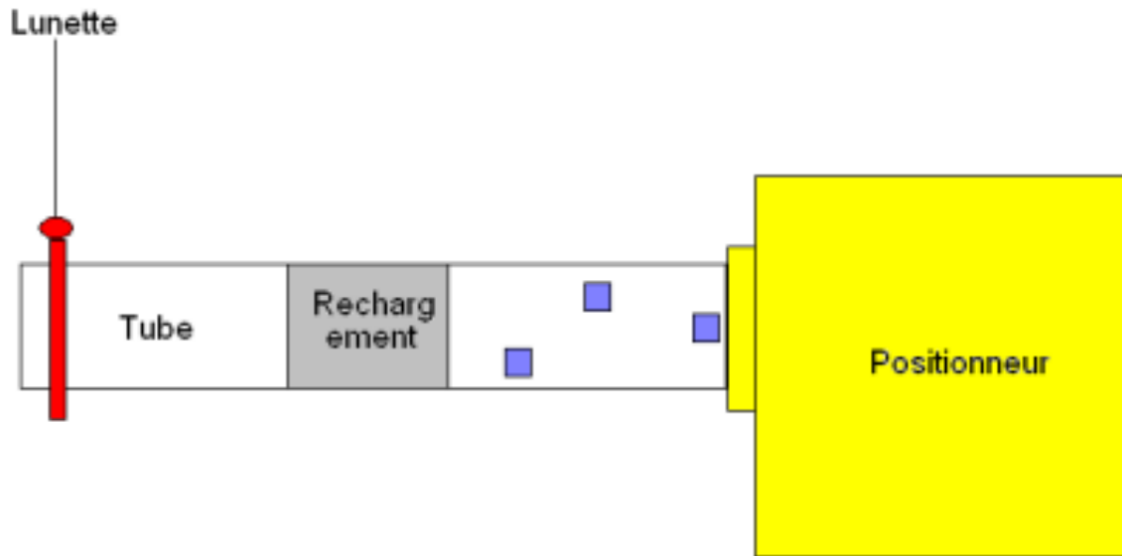


FIGURE 4.4 – Schéma du système de maintien des tubes et de mise en rotation[3].

Paramètres	Overlay complet (1 ^{ère} et 2 ^{ème} couche)	Overlay partiel faible énergie (1 ^{ère} et 2 ^{ème} couche)	Overlay partiel haute énergie	
			1 ^{ère} couche	2 ^{ème} couche
Intensité (A)	170	170	194	182
Tension (V)	16	16	17.8	17.8
Vitesse de Déplacement (cm/min)	20	20	13	12
Température interpasses maximum désirée (°C)	250			
Energie de soudage (kJ/cm)	8.1	8.1	15.9	16.1

FIGURE 4.5 – Paramètres de soudage utilisés.

cas Overlay partiel, l'essai Overlay partiel haute énergie est le plus critique dès la première couche. Donc, parmi les trois tubes présentés dans les essais expérimentaux, on décide de simuler le cas Overlay partiel haute énergie.

4.3.1 Géométrie et maillage

Cette partie décrit la géométrie et le maillage utilisés dans la simulation Overlay partiel haute énergie.

Géométrie

Les dimensions initiales du tube sont données dans la section 4.2.2. Il s'agit d'un tube de diamètre intérieure 300 mm avec 12.8 mm d'épaisseur et de longueur 1900 mm. L'axe de symétrie du tube est orienté selon Oz . Ensuite, on dépose des cordons de soudure pour former deux couches sur l'extérieur du tube et sur 120° de

la circonférence du tube, de longueur 350 mm et centré sur la longueur du tube (cf. [figure 4.2 c](#)). Les couches ont pour dimensions :

- couche 1 : 3.4 mm d'épaisseur pour 114 cordons,
- couche 2 : 2.2 mm d'épaisseur pour 91 cordons.

Nous simulons la première couche avec 3.4 mm d'épaisseur pour 100 cordons, cela nous donne une largeur de 3.5 mm pour chaque cordon de soudure.

Partitionnement et maillage

Comme nous allons effectuer une modélisation en 3D, le maillage choisi ne possède que des éléments hexagonaux. Le modèle contient deux parties : le tube et la couche de soudage. Sur la couche, nous devons raffiner localement le maillage. Sur chaque cordon de soudure, nous avons au moins deux éléments sur la largeur du cordon. Et sur la circonférence de chaque cordon, nous avons besoin également de raffiner pour avoir une surface courbe bien discrétisée. La description du tube, avant soudage, est découpée en deux zones.

- La zone qui reçoit les cents cordons de soudure, cette zone doit être plus grande et plus large que la première couche pour avoir des meilleurs résultats sur le tube. Sur cette zone, on doit mailler très fin comme sur la première couche, de manière concordante sur l'interface du tube et de la couche, où les nœuds sont communs.
- Le reste du tube. Sur cette zone, on peut mailler plus grossièrement. Cependant, afin d'avoir seulement des éléments hexagonaux, nous devons partitionner le tube et mailler de manière particulière comme sur la [figure 4.6](#). Entre l'interface de deux zones, nous réservons une zone intermédiaire où on impose un élément sur les deux côtés et récupérer un facteur de 3 pour réduire le nombre d'éléments sur les deux autres.

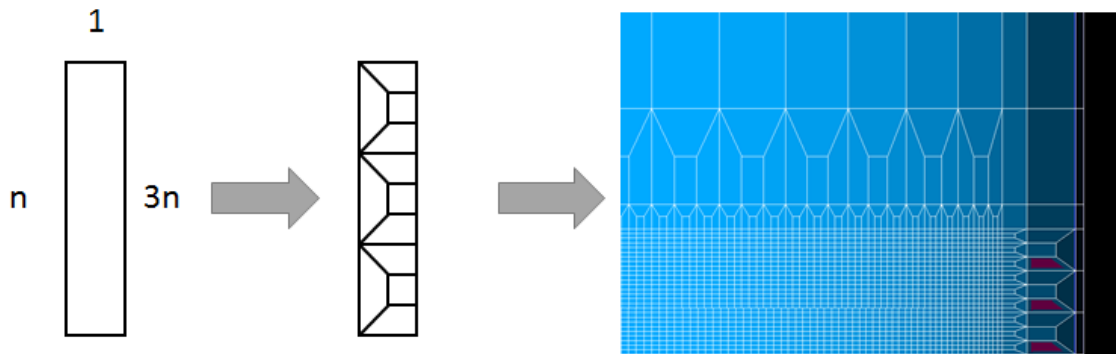


FIGURE 4.6 – Algorithme de création le maillage en réduisant le nombre de mailles et en assurant que tous les éléments sont hexagonaux.

Type d'élément	Nombre
Nœud	239157
Ligne SEG2	28170
Surface QUAD4	114792
Volume HEXA8	202880

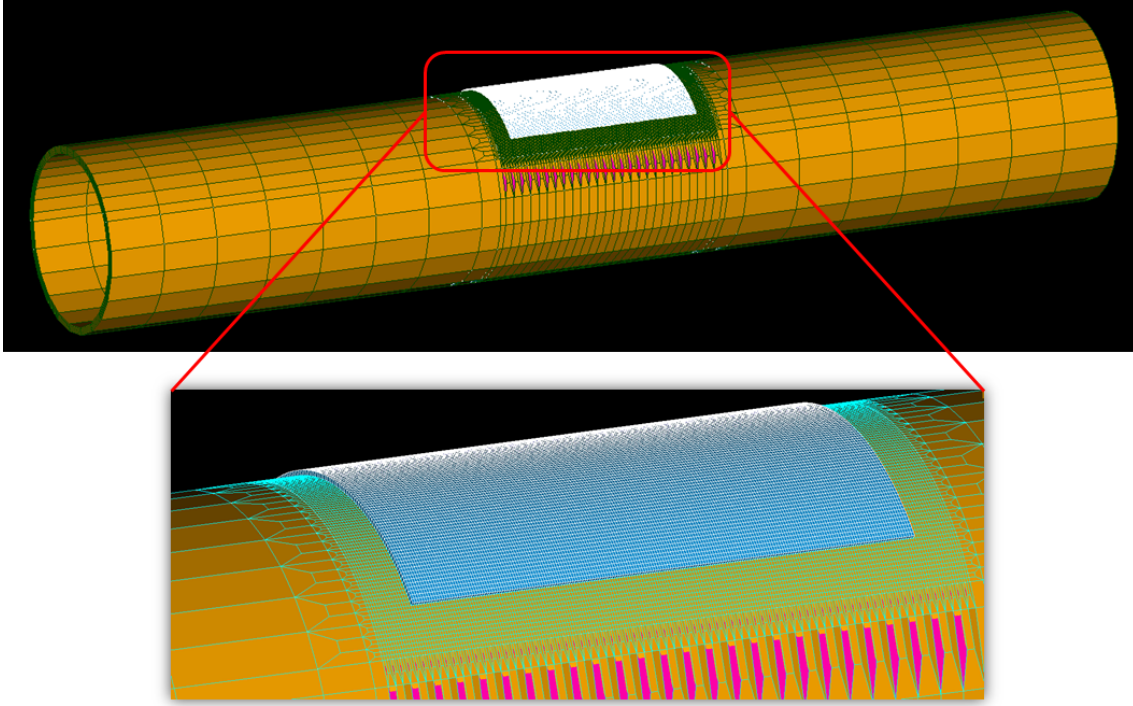


FIGURE 4.7 – Maillage utilisé pour la simulation du cas Overlay partiel haute énergie et le zoom sur la zone où on dépose la première couche.

TABLE 4.1 – Informations sur le maillage utilisé pour la simulation de la réparation Overlay partiel haute énergie.

Le maillage ainsi obtenu est assez grand avec beaucoup d'éléments sur la zone soudée (la zone la plus intéressante) comme sur la [figure 4.7](#). Les informations concernant ce maillage sont données dans le [tableau 4.1](#).

4.3.2 Paramètres du problème thermique

Pour tous les essais de soudage, les conditions aux limites sont le rayonnement et la convection avec l'air sur les surfaces à l'extérieur du tube ou du cordon de soudure déposé. Les paramètres entrés sont l'émissivité $\epsilon_{th} = 0.8$ et le coefficient d'échange avec l'air $h_{ext} = 15 \times 10^{-6} W.mm^{-2}.K^{-1}$. Depuis le [chapitre 3](#), nous avons décidé de choisir les modèles emboîtés pour simuler le soudage multipasses. Ici, pour la première couche de cent cordons de soudure, nous devons préparer cent modèles à partir du premier cordon qui est le modèle le plus petit : $\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_{100} \subseteq \Omega$. Dans chaque modèle, la surface extérieure pour les conditions aux limites est adaptée.

La source thermique est de forme triangulaire. Par rapport à la source de forme Goldak, elle est plus simple, et contient moins de paramètres à déterminer. Les paramètres définissant la source volumique triangulaire sont :

- la position initiale donnée en coordonnées (x, y) du point où on commence à souder sur le tube ;
- les dimensions : longueur $L = 12 mm$, section du cordon $S = 3.4 \times 3.5 = 11.9 mm^2$ parce que la largeur d'un cordon est de $3.5 mm$ et l'épaisseur de la

4.3. MODÈLE NUMÉRIQUE DE L'ESSAI EXPÉRIMENTAL OVERLAY PARTIEL HAUTE ÉNERGIE

- première couche est de 3.4 mm comme dans la [figure 4.8](#) ;
- les paramètres expérimentaux du procédé sont reportés dans la [figure 4.5](#).
Nous avons $I = 194\text{ A}$; $U = 17.8\text{ V}$; $V_S = 13\text{ cm/min}$.

Le procédé de soudage est réalisé sur 120° de la circonférence du tube, la distribution d'énergie de la source thermique est exprimée suivant l'arc du rayon extérieur du tube. Ici la longueur de l'arc est $L = 12\text{ mm}$. Pour tenir compte de cet effet, on modifie la fonction de distribution de la source de chaleur triangulaire sur la circonférence du tube. La variable de cette fonction est maintenant l'angle sur l'arc par rapport avec la position initiale.

Il nous reste le rendement du procédé η à déterminer. Cette valeur va déterminer la puissance efficace de la source thermique. Dans [4], nous avons effectué des essais de recalage de la Source Thermique Equivalente menés sur des plaques. Ces plaques sont faites en matériau similaire (P295GH) et de même épaisseur (12.8 mm) que les tubes décrits précédemment. Des cordons de soudage ont été déposés sur ces plaques avec les mêmes paramètres opératoires que pour les tubes représentatifs. Une instrumentation en thermocouples a permis des relevés de température au cours du soudage de ces plaques. Ces mesures de température étaient nécessaires pour recalculer le rendement avec une simulation par éléments finis. Nous avons identifié $\eta = 0.6$ pour la source thermique sous forme triangulaire.

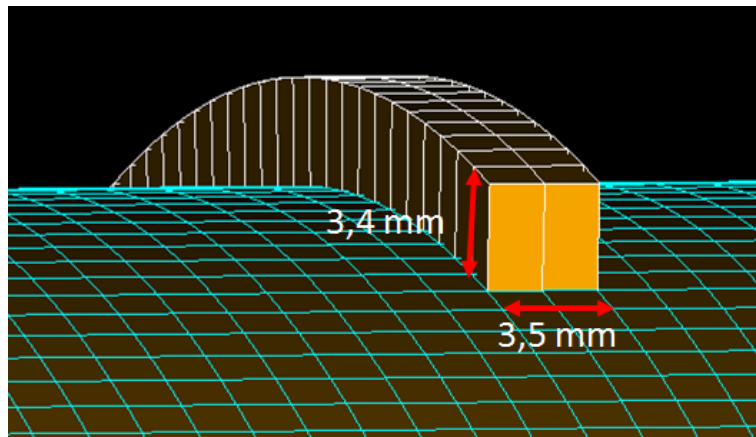


FIGURE 4.8 – Section d'un cordon de soudure déposé sur le tube dans la réparation Overlay partiel haute énergie.

Les tubes fournis sont en acier P265GH. Une recherche bibliographique n'a pas permis de décrire le comportement plastique du matériau d'étude (P265GH) dans les gammes de températures atteintes par le soudage. Un matériau proche en composition (P295GH) a été utilisé pour modéliser le comportement élastoplastique du matériau d'étude. Pour les simulations thermiques relatives au soudage, il est nécessaire de disposer de l'évolution de la conductivité et de la chaleur spécifique en fonction de la température. Les données thermophysiques du P295GH sont retrouvées dans [3]. Ici, pour assurer que la température maximum n'est pas trop élevée et pour mieux représenter la convection du bain de fusion, nous avons ajouté une valeur très grande sur la valeur de la conductivité à température 2000°C .

4.3.3 Paramètres du problème mécanique

Le champ de température provenant de la simulation thermique est utilisé comme chargement thermique dans le problème mécanique. En outre, nous avons des conditions de fixation pour éviter des mouvements de corps rigide dans la simulation. D'après le schéma du système de maintien des tubes représenté dans la [figure 4.4](#), nous avons décidé de bloquer une extrémité du tube sur certaines directions.

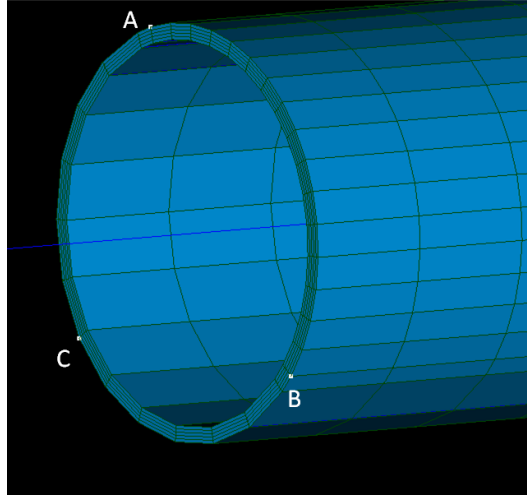


FIGURE 4.9 – Représentation des points appliqués par les conditions aux limites en mécanique.

Sur la [figure 4.9](#), nous avons trois points A, B, C qui sont liés aux trois nœuds du maillage. On va bloquer le déplacement suivant Oz sur tous les trois points. Le déplacement suivant Ox est bloqué sur A et B. Puis, sur A et C, le déplacement suivant Oy est imposé nul. Ces types de conditions aux limites nous permettent d'éviter la translation et la rotation suivant l'axe Oz du tube.

Remarque : Pour les calculs mécaniques, il est nécessaire de disposer du module d'Young, du coefficient de Poisson, du coefficient de dilatation thermique et d'une description du comportement plastique. Les données du matériau P295GH sont fournies jusqu'à la température de $1200^{\circ}C$, au delà de cette température, on n'a plus de données. Nous supposons que les caractéristiques du matériau sont identiques à partir de $1200^{\circ}C$. En plus, pour la courbe de traction à $1200^{\circ}C$ qui décrit le comportement plastique à cette température, on a choisi une loi d'écrouissage isotrope linéaire avec un module d'écrouissage cent fois inférieur au module d'Young à cette température.

4.3.4 Résultats des simulations par éléments finis

Le déroulement de l'essai pour chaque cordon de soudure se compose de deux parties :

- La mise en place du procédé de soudage. Avec une vitesse de 13 cm/min , la torche doit parcourir l'arc de 120° de rayon extérieur du tube (environ 34 cm).

4.3. MODÈLE NUMÉRIQUE DE L'ESSAI EXPÉRIMENTAL OVERLAY PARTIEL HAUTE ÉNERGIE

- Le refroidissement entre deux passes consécutives. On laisse la maquette se refroidir pendant 300 secondes pour assurer une température interpasses toujours inférieure à 250°C .

Dans la liste des instants de calcul, l'incrément Δt est uniforme au cours du soudage et pour les premiers instants du refroidissement. Afin d'assurer un apport d'énergie le plus régulier et constant possible, l'incrément dans la simulation thermique du soudage doit satisfaire la condition suivante :

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{2V_s}$$

Avec ΔL est l'incrément en espace suivant la longueur du cordon de soudure qui est présenté sur le maillage. Dans la structure du maillage de la [figure 4.7](#), l'incrément ΔL est la longueur de l'arc de l'angle 1° avec le rayon extérieur du tube. Cela nous fait un incrément des instants $\Delta t \approx 1.31\text{s}$. Au total, dans le problème thermique, nous avons 180 instants de calcul pour chaque simulation d'un cordon. Pour la mécanique, nous devons subdiviser encore les pas de temps afin que la résolution numérique des équations converge facilement ($\Delta t \approx 0.65\text{s}$ pendant le procédé de soudage et quelques secondes après pendant le refroidissement). En fin de simulation, la liste des instants du calcul mécanique contient 300 instants.

Temps de calcul

Nous avons réalisé avec la version parallèle (MPI) de *code_aster* la simulation par éléments finis du soudage multi-passe. Ces calculs ont été réalisés sur le cluster d'EDF, avec 12 processus et 2 nœuds de calcul. Ici, on décide de simuler les dix premiers cordons par éléments finis. Voici le temps de calcul moyen pour chaque cordon de soudure, il est donné dans le [tableau 4.2](#).

Le problème thermique demande moins de temps de simulation. Cependant, avec plusieurs cordons de soudure, le temps pour obtenir le champ de température pour tous les passes devient important. Par exemple, la première couche qui contient 100 passes de soudage nous exige environ 200 heures ou 8 jours de calcul.

Le calcul mécanique est plus long mais il faut remarquer que nous avons utilisé un maillage linéaire pour la simulation. Il est recommandé d'utiliser le maillage quadratique pour obtenir des meilleurs résultats. Mais le temps passé avec le maillage quadratique est bien sûr encore plus long. En plus, le stockage et la mémoire nécessaires pendant le calcul mécanique doivent être attentivement gérés.

Type de simulation	Temps de calcul moyen pour chaque cordon
Thermique	2.5 heures
Mécanique	12 heures

TABLE 4.2 – Temps de calcul moyen pour chaque simulation d'un cordon de soudure par éléments finis dans *code_aster* par calcul parallèle avec 12 processus et 2 nœuds.

Solution thermique

Comme dans le chapitre précédent, la modélisation thermique est réalisée dans une boucle, le champ de température au dernier instant d'un cordon est utilisé au

premier instant du cordon suivant. Cependant, le modèle du cordon précédent est plus petit que celui du cordon suivant parce que nous travaillons sur des modèles emboîtés. Pour la partie manquante, on impose la température égale à la température ambiante. La représentation des solutions thermiques est montrée sur la [figure 4.10](#) pour le premier cordon et pour le dixième cordon. Sur ces deux figures, on constate des similitudes du champ de température entre deux cordons.

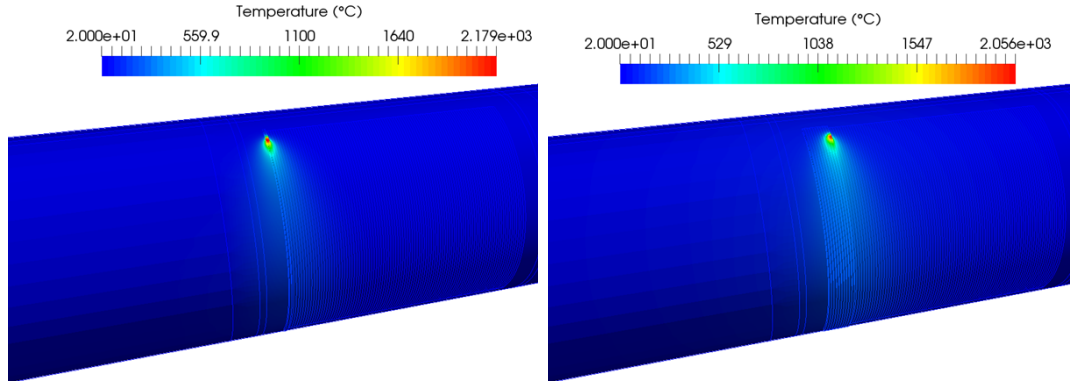


FIGURE 4.10 – Champ de température du premier cordon (à gauche) et du dixième cordon (à droite) après la même durée d'exécution du procédé.

Nous nous intéressons maintenant au régime stationnaire du champ de température au cours de soudage multipasse.

Attention : on ne parle pas ici de la notion de stationnarité bien connue en soudage et observée lors du dépôt d'une passe de soudage. Le régime stationnaire que nous souhaitons identifier est spécifique aux soudage multipasse. Ce régime stationnaire est atteint lorsque l'affectation thermique d'un cordon m est quasi-identique à l'affectation thermique d'un cordon $m+1$.

On va considérer la zone fondue et la zone affectée thermiquement (ZAT) pour chaque cordon. Sachant que la température à fusion de ce matériau est de $T_f = 1500^\circ\text{C}$, la zone affectée thermiquement est définie comme toute la partie avec la température inférieure à T_f mais supérieure à $T_f/2$. Comme on peut le constater dans la [figure 4.11](#), la zone fondue et la ZAT du premier et du deuxième cordon sont très différentes de celles observées sur les autres cordons. A partir du quatrième cordon, la zone fondue et la ZAT semblent identiques.

Un autre type de résultat qui peut être analysé pour l'étude de la stationnarité du soudage multipasse, est la température maximale au début et à la fin du soudage de chaque cordon. Le [tableau 4.3](#) représente la température maximale à l'instant final. Etant donné que l'état final du cordon m devient l'état initial du cordon $m+1$, on a alors une température maximale à l'instant final du cordon m qui correspond à la température maximale au début du cordon $m+1$. Sachant que la température au début du cordon 1 est supposée constante et égale à température ambiante, on déduit de [tableau 4.3](#) que ces deux températures maximales de début et de fin de soudage de chaque cordon ne changent pas beaucoup lorsque on s'éloigne du premier cordon. C'est à dire avec un nombre de cordon assez grand, la température maximale au début et à l'instant final convergent vers une valeur fixe.

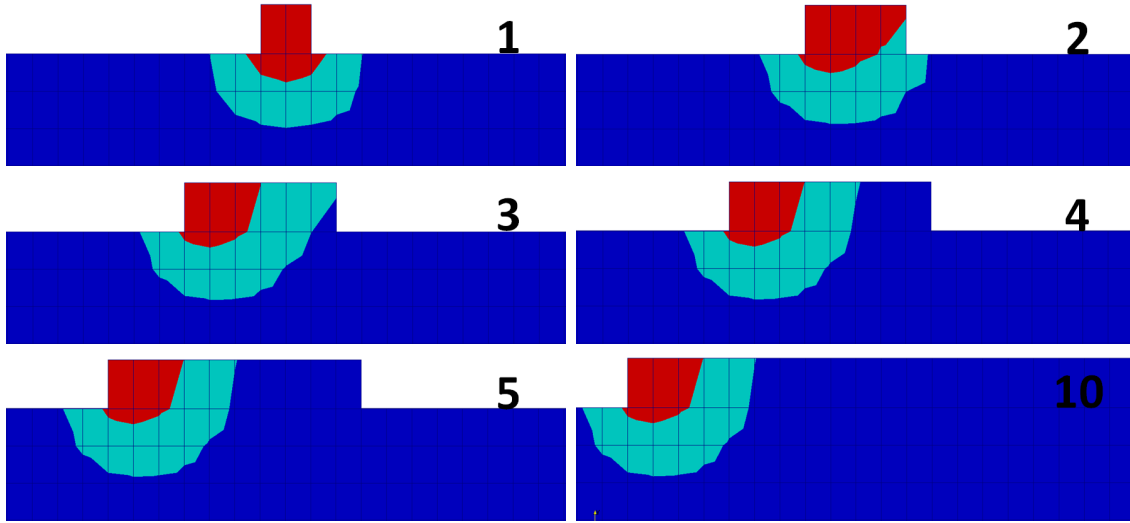


FIGURE 4.11 – Vue sur le même plan perpendiculaire au sens de soudage, des cordons 1, 2, 3, 4, 5, 10. Ici, la zone rouge représente la zone fondue qui dépasse la température de fusion ($T_f = 1500^\circ\text{C}$). La zone bleue foncée représente les basses températures (inférieur à $T_f/2$).

Numéro de cordon	1	2	3	4	5
T_{max} à l'instant final ($^\circ\text{C}$)	67.4	85.9	95.0	99.9	102.6
Numéro de cordon	6	7	8	9	10
T_{max} à l'instant final ($^\circ\text{C}$)	104.2	105.2	105.9	106.3	106.6

TABLE 4.3 – Température maximale à l'instant final de chaque cordon.

Champs de contraintes et de déformations résiduelles

Pour la simulation mécanique, la technique de reprise du résultat d'un cordon au dernier instant comme condition initiale du cordon suivant est également mise en œuvre. Cet état initial est caractérisé par le champ de déplacement aux nœuds, et par les champs de contraintes et de variables internes définis aux points de Gauss de chaque élément.

La visualisation dans la [figure 4.12](#) du champ de contrainte équivalente de type von Mises du premier cordon et dernier cordon ne permet pas de retrouver la même similitude que celle observée dans la [figure 4.10](#) pour les champs de température de ces deux cordons.

Maintenant, on va regarder la déformation résiduelle du tube après les dépôts des dix premiers cordons de soudure. Le déplacement à la fin de la simulation mécanique du cordon 10 est pris en compte pour visualiser la déformée du tube. On multiplie ce vecteur de déplacement par un facteur de 10 pour mieux visualiser les effets de soudage multipasse. Sur la [figure 4.13](#), on voit très bien qu'il existe des diminutions de rayon à partir des premiers cordon comme attendu.

En plus, sur la [figure 4.14](#), on peut constater clairement que dans la zone de rechargement le déplacement est orienté vers l'intérieur du tube. Par contre, à l'ex-

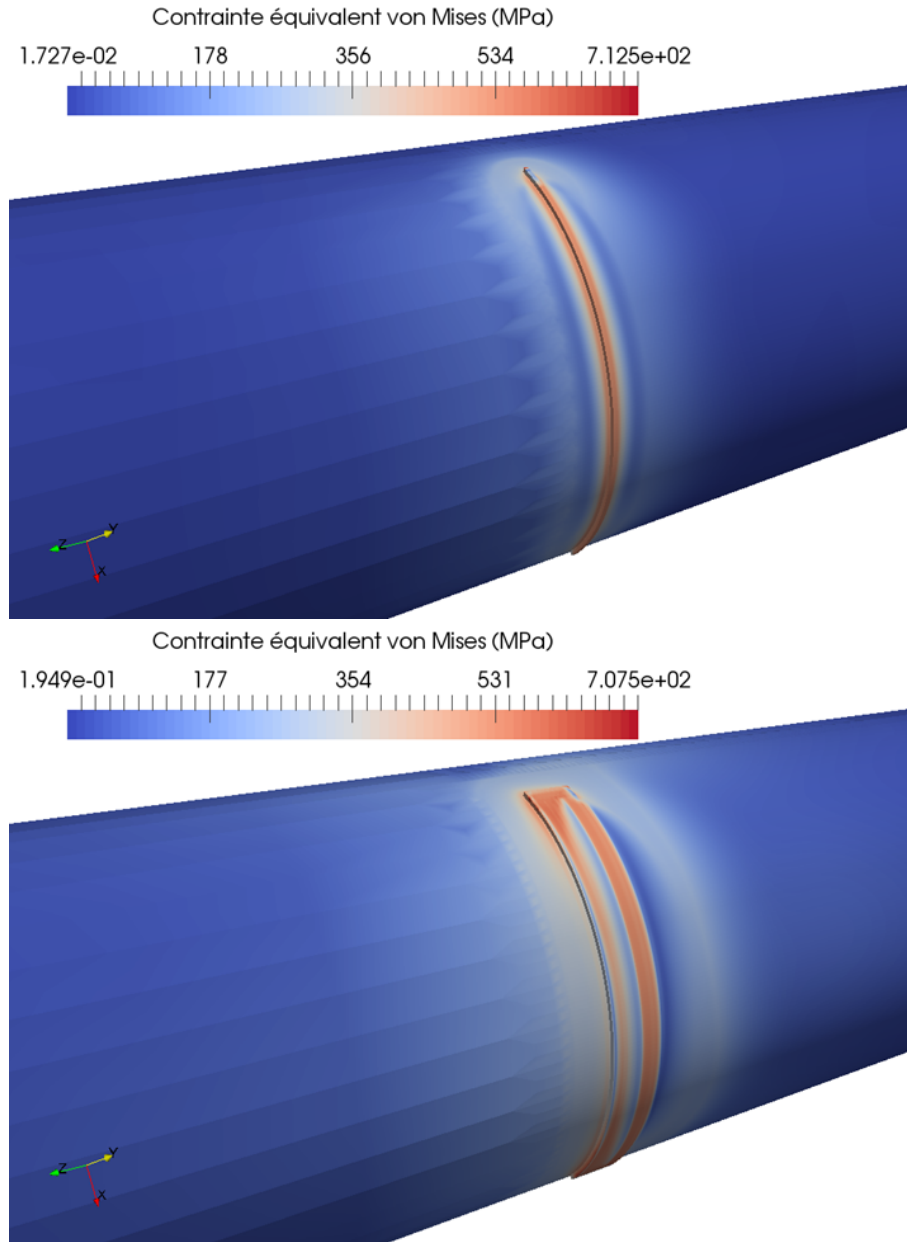


FIGURE 4.12 – Champ de contrainte équivalente von Mises du premier cordon (en haut) et du dixième cordon (en bas) après la simulation par éléments finis.

trémité du tube qui est à contrainte libre, le tube s'est levé, ce qui correspond à un mode de déformation de type cintrage.

Comme la loi de comportement est choisie élastoplastique et que l'on s'intéresse à l'état résiduel, on a besoin de connaître la zone plastifiée sur le tube et sur tous les cordons. D'après la [figure 4.15](#). Cette zone se trouve autour des cordons avec une couronne de voisinage sur le tube. Cette conclusion est très importante, car la réintégration de loi de comportement sur seulement la zone plastifiée peut suffire. On n'a pas besoin de réintégrer le comportement élastoplastique sur tout le domaine, dans la phase de post-traitement de déformations simulées par hyper-réduction.

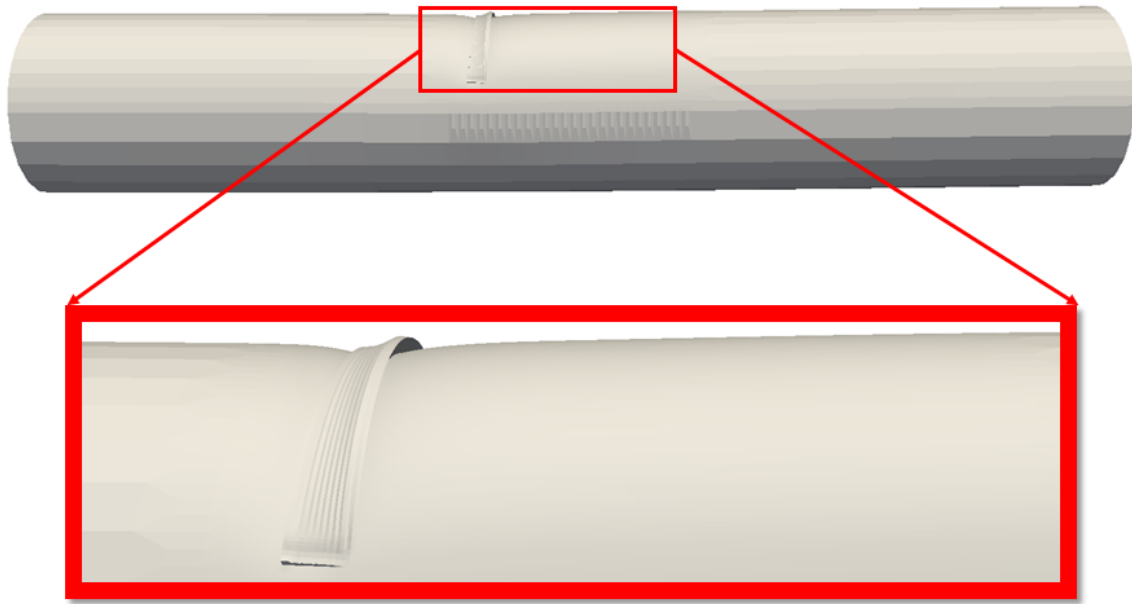


FIGURE 4.13 – Déformations résiduelles du tube après dix premiers cordons de soudure de réparation Overlay partiel haute énergie.

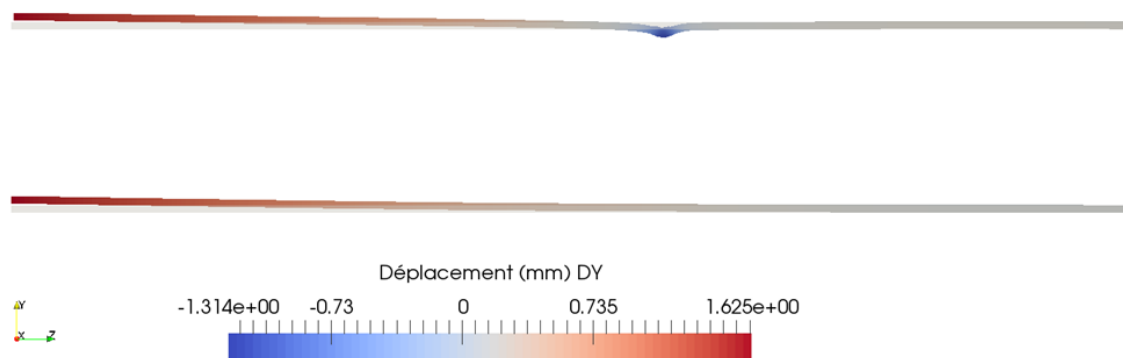


FIGURE 4.14 – Déplacements suivant une direction sur une section du tube pour montrer la déformation de type cintrage.

4.4 Simulation de l'essai Overlay par hyper-réduction

Le modèle éléments finis présenté dans la [section 4.3](#) nous permet de récupérer des bons résultats pour visualiser la contrainte et la déformation résiduelle de la réparation Overlay. Cependant, le temps de calcul moyen par cordon identifié dans la [section 4.3.4](#) ne permet d'envisager la simulation des deux cents cordons nécessaires pour ce type de rechargement. Nous sommes bien dans le cas d'une simulation par éléments finis hors d'atteinte. Dans cette section, nous allons appliquer la méthode d'hyper-réduction pour réduire le temps de calcul et évaluer sa pertinence par des résultats numériques.

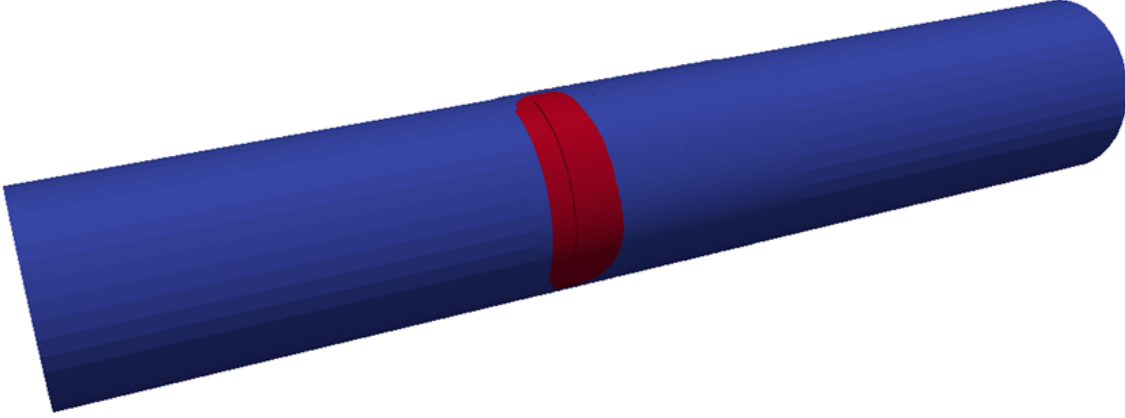


FIGURE 4.15 – Zone plastifiée sur le tube après dix cordons de soudure.

4.4.1 Méthodologie

En considérant le problème thermomécanique, on applique la méthodologie présentée dans le [chapitre 3](#) qui consiste à simuler par éléments finis le comportement des m premiers cordons puis à utiliser l'hyper réduction pour les cordons suivants. Dans cette étude, cette méthodologie sera appliquée uniquement aux 10 premiers cordons.

On rappelle qu'à partir du m ième cordon, les étapes suivantes sont réalisées pour simuler par hyper-réduction le $m + 1$ ième cordon :

1. décalage de champs de résultat du cordon m pour construire une prévision du cordon $m + 1$,
2. construction de la base réduite et du RID pour le cordon $m + 1$ à partir de la prévision construite précédemment,
3. calcul hyper-réduit hybride sur ce RID et avec cette base réduite,
4. post-traitement pour la reconstruction des champs sur le domaine complet ou sur une zone d'intérêt.

La première étape consiste à utiliser la stratégie de décalage qui est présentée dans le chapitre précédent. A partir des résultats du cordon précédent par éléments finis ou par hyper-réduction sur le modèle complet, on va déplacer des champs thermophysiques en espace pour construire une bonne prévision de champ pour chaque cordon. Le décalage des champs thermiques est simple, avec l'aide de l'opérateur `PROJ_CHAMP` qui projette le champ de température depuis un maillage initial sur un maillage déplacé dans l'espace. Ici, on suppose que la largeur de chaque cordon est identique (3.5 mm), donc la distance entre deux cordons adjacents est $d = 3.5\text{ mm}$. Une translation de d suivant l'axe Oz est suffisante pour le décalage du champ thermique. Par contre, pour les champs mécaniques, nous devons décaler l'évolution des champs à partir du résultat précédent et on va la considérer comme un terme d'accroissement.

Dans la deuxième étape, on va créer le modèle hyper-réduit hybride. Depuis la prévision de champ pour chaque cordon, on utilise la commande `DEFI_BASE_REDUITE`

pour générer la base réduite de température, et celle de gradient thermique (déplacement et contrainte pour la mécanique). Ensuite, on prend ces deux bases comme des entrées de la commande `DEFI_DOMAINE_REDUIT` pour construire le domaine réduit d'intégration RID, y compris la zone voisinage pour le modèle hybride.

La troisième étape est justement l'étape en ligne de la méthode d'hyper-réduction. C'est l'étape sur laquelle on évalue la performance de cette méthode. Ici, dans le cas de soudage multipasse, il est recommandé d'utiliser le calcul hybride entre hyper-réduction et la correction par éléments finis.

En fin, la quatrième et dernière étape consiste à reconstruire le champ de résultat sur le domaine complet qui va être utilisé pour le cordon suivant. Il faut remarquer que dans la mécanique, si nous voulons continuer l'hyper-réduction à partir du $m + 1$ ème cordon, on applique les étapes décrites précédemment en ajoutant une étape préliminaire de réintégration de la loi de comportement. Comme constaté dans la section précédente, cette réintégration de la loi de comportement peut être restreinte au sous-domaine plastifiant.

4.4.2 Résultats par l'hyper-réduction

Dans cette section, nous allons montrer les résultats de simulation par l'hyper-réduction et les comparer avec ceux par éléments finis en calculant les erreurs sur des champs. Il faut également évaluer le temps d'exécution de chacune des étapes pour déterminer le facteur d'accélération des simulations pour chaque cordon, car ce résultat est très important dans le cas industriel.

Résultat thermique

La [figure 4.16](#) montre le résultat du calcul sur le modèle hybride du cordon 10, il est comparé avec le résultat sur le modèle éléments finis. Ce modèle réduit a été construit à partir de la prévision du cordon 10 obtenu par décalage du résultat par éléments finis du cordon 9. Nous avons choisi $\mu_{POD} = 10^{-3}$ pour générer la base réduite et 3 couches d'éléments autour des points magiques pour créer le RID. Ce RID contient plus d'éléments à gauche que d'éléments à droite du tube, ce qui est normal parce que les dix premiers cordons sont posés à gauche de l'axe symétrique du tube.

Le temps de calcul dans l'étape en ligne est d'environ 5 minutes, on a donc récupéré un speed up de 30. Cependant, dans le cadre du projet industriel, il faut prendre en compte le temps de toutes les autres étapes. Dans le calcul thermique de cette étude, le temps total pour passer les 4 étapes précédentes pour un cordon de soudure ne dépasse pas 15 minutes. C'est assez efficace vu que le temps de calcul du modèle éléments finis est en moyenne de 2.5 heures.

Maintenant, nous proposons de faire varier le numéro de cordon à calculer $m + 1$, afin d'étudier l'erreur de calcul par hyper-réduction après le décalage du résultat éléments finis du cordon précédent m . L'objectif est de trouver un nombre de cordon à calculer à partir duquel le calcul par hyper-réduction est assez précis et atteint le régime stationnaire.

La [figure 4.17](#) montre deux courbes d'erreurs :

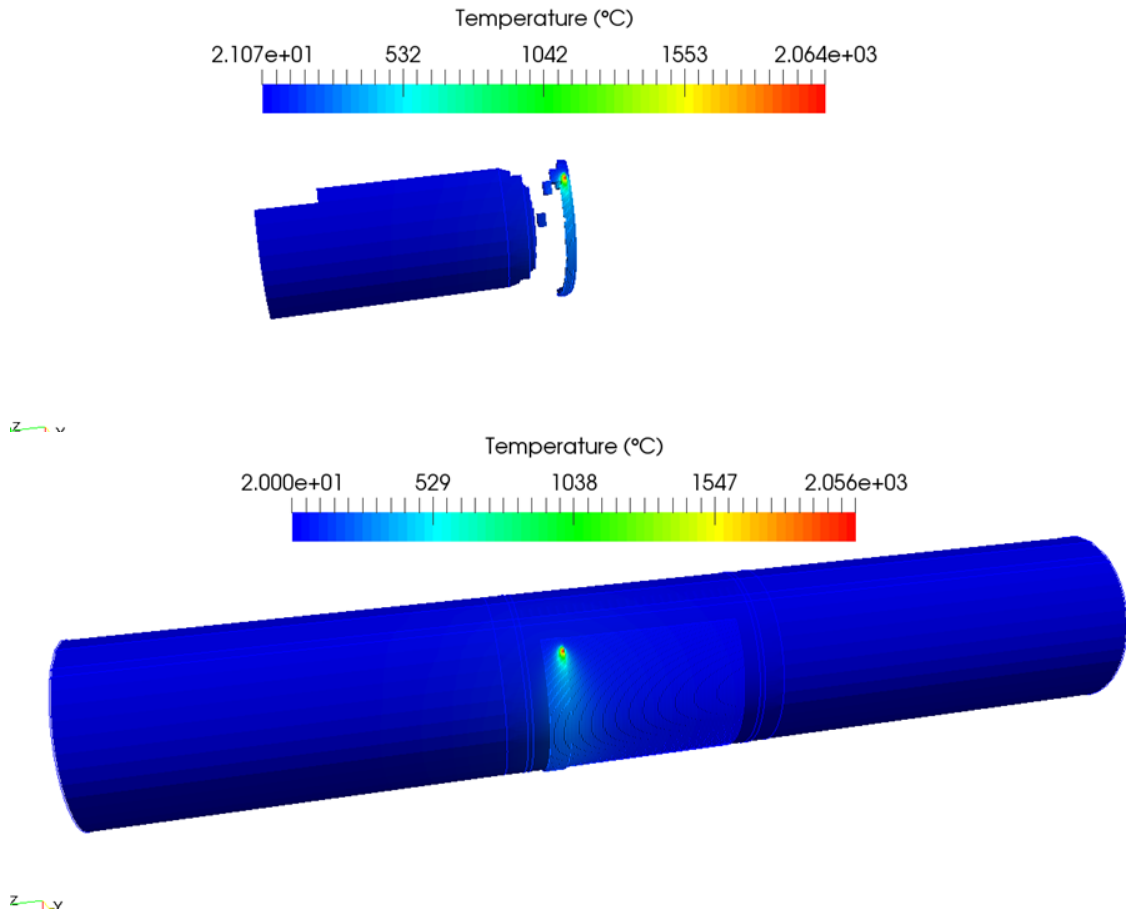


FIGURE 4.16 – Champ de température du dixième cordon en deux modèles différents : en haut modèle hybride entre hyper-réduction et correction EF, en bas modèle éléments finis.

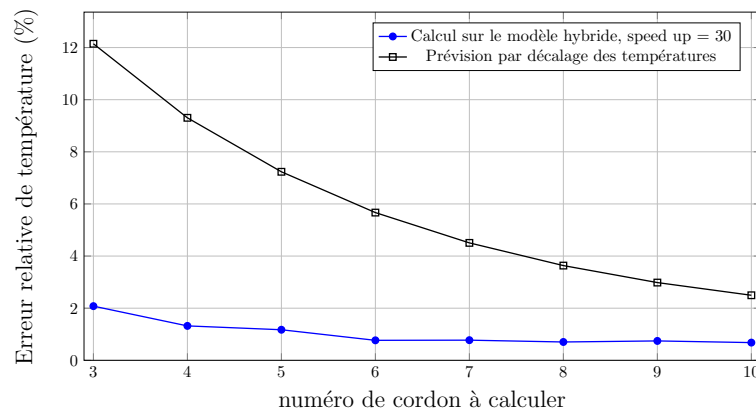


FIGURE 4.17 – Synthèse des erreurs de température de tous les résultats possibles à comparer avec la solution par éléments finis en fonction du numéro de cordon à calculer.

4.4. SIMULATION DE L'ESSAI OVERLAY PAR HYPER-RÉDUCTION

- une première courbe d'erreur entre la solution de référence (solution par éléments finis) et la solution obtenue par décalage de champs du cordon précédent ;
- une deuxième courbe d'erreur entre la solution de référence et la solution du modèle hyper-réduit hybride (modèle hyper-réduit construit à partir du décalage de champs du cordon précédent)

On en déduit que lorsqu'on s'éloigne du premier cordon de soudure, on atteint un état stationnaire et les champs thermiques se ressemblent beaucoup. Plus le numéro de cordon à calculer est grand, plus la prévision devient stable. On constate également que le résultat avec le modèle hybride est assez précis, et cela dès les premiers cordons. On peut dire qu'à partir du cordon 5, on atteint le régime stationnaire. Comme le résultat éléments finis du premier et deuxième cordon (la zone fondue et la ZAT, la température maximale à l'instant final) sont très différents des autres cordons, la technique de décalage de champ de température ne fonctionne pas très bien dans ce cas. On ne présente donc pas ici leurs erreurs avec la stratégie de décalage pour $m < 3$.

Ensuite, en fixant $m = 5$, on va appliquer l'hyper réduction sur plusieurs cordons, du $m + 1$ jusqu'au cordon $m + p$. Pour cela, on considère le résultat par éléments finis du cordon $m = 5$. Ensuite, on retrouve le résultat du cordon $m + 1 = 6$ par un calcul sur le modèle hybride et on va utiliser ce résultat pour décaler et construire la prévision du cordon $m + 2 = 7$. On va répéter ce procédure jusqu'au cordon 10. L'objectif est d'utiliser la méthode d'hyper-réduction à partir du cordon m , cordon à partir duquel le régime devient stationnaire, jusqu'au cordon $m + p$. En appliquant cette stratégie, nous allons significativement réduire le temps de calcul dans le soudage multipasse.

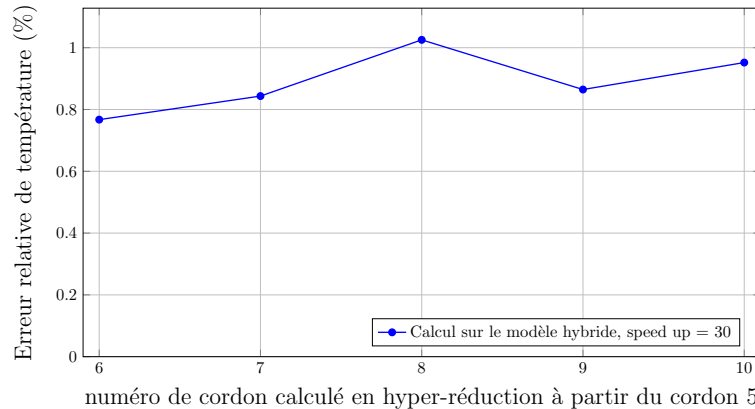


FIGURE 4.18 – Erreur de température de solution par HR à comparer avec la solution par EF en fonction du numéro de cordon calculé p à partir du cordon m .

La [figure 4.18](#) montre les erreurs de simulation par hyper-réduction du cordon 6 jusqu'au cordon 10, pour $m = 5$. On trouve que le régime stationnaire est bien confirmé. Donc dans le calcul thermique, nous pouvons ne simuler que quelques premiers cordons par éléments finis. Pour les cordons restants, on peut appliquer la méthode d'hyper-réduction en plusieurs fois en assurant des bons résultats. En extrapolant ces résultats, au lieu de réaliser cent cordons par éléments finis en 250

heures de calcul thermique, l'hyper-réduction aurait besoin de $2.5 \times 5 = 12.5$ heures pour les 5 premiers cordons et $0.25 \times 95 = 23.75$ heures pour les 95 cordons restants. Donc cela demande environ 36.25 heures par rapport aux 250 heures de calcul par éléments finis sur cents passes de soudage. Cette extrapolation reste à confirmer en vérifiant que l'erreur reste constante jusqu'au dernier cordon. De plus, il faudra certainement réaliser un calcul éléments finis pour les derniers cordons (nombre de cordon à déterminer).

Résultat mécanique

Le modèle hyper-réduit en mécanique est plus complexe que celui en thermique. Il faut préparer un modèle avec plus de modes et un RID plus grand pour faire converger le calcul et obtenir des bons résultats. Le [tableau 4.4](#) représente le résultat d'une petite analyse sur les influences des paramètres construisant le modèle hyper-réduit hybride (μ_{POD} et le nombre de couches d'éléments autour des points d'interpolation des modes). Les résultats trouvés sont le nombre de modes, le temps de calcul à l'étape en ligne et l'erreur de déplacement et de contrainte. Parmi les couples de paramètres, on a choisi $\mu_{POD} = 10^{-5}$ et 5 couches d'éléments qui donnent une accélération des simulations de l'ordre 14 et des erreurs acceptables. Le résultat du calcul sur le modèle hybride du cordon 10 avec ces paramètres est montré sur la [figure 4.19](#). Ici, le modèle hybride décalé est construit à partir de la solution éléments finis du cordon 9. Le RID est un peu plus grand sur la zone hors du soudage car le nombre de couche sur cette zone est égale à 5, ce qui n'est pas vraiment nécessaire. Pour mieux optimiser le RID, on peut restreint le nombre de couche sur la zone hors du soudage pour obtenir un RID plus petit.

μ_{POD}	Nombre de couches	Nombre de modes	Temps de calcul	η^u	η^σ
10^{-4}	4	51	13 minutes	2.28%	12.7%
10^{-5}	5	131	51 minutes	0.37%	2.01%
10^{-6}	6	247	2 hrs 37 mins	0.08%	0.47%

TABLE 4.4 – Analyse le calcul hyper-réduit sur le dixième cordon en fonction des paramètres construisant le modèle hybride.

En suivant la même méthodologie que celle du cas thermique, on commence par l'analyse du modèle hybride décalé sur un nouveau cordon, en faisant varier m . La méthode d'hyper-réduction est appliquée une seule fois, la solution décalée est récupérée par un calcul éléments finis. La [figure 4.20](#) montre les erreurs en déplacement tandis que la [figure 4.21](#) montre les erreurs en contrainte par le calcul sur le modèle hybride et la prévision par décalage la solution EF du cordon précédent. On constate que les résultats obtenus est meilleur que ceux dans la chapitre précédente. Deux explications sont trouvées : la première est liée au numéro du dernier cordon calculé par éléments finis. Dans le [chapitre 3](#), on se limite par le nombre de cordon maximum $M = 5$ où on atteint pas suffisamment le régime stationnaire du soudage multipasse. Donc les erreurs en déplacement et en contrainte sur les cordons précédents (cf. [figure 3.19](#) et [figure 3.20](#)) sont moins bonnes. La deuxième raison concerne la condition limite dans chaque simulation. L'encastrement dans la [chapitre 3](#) génère

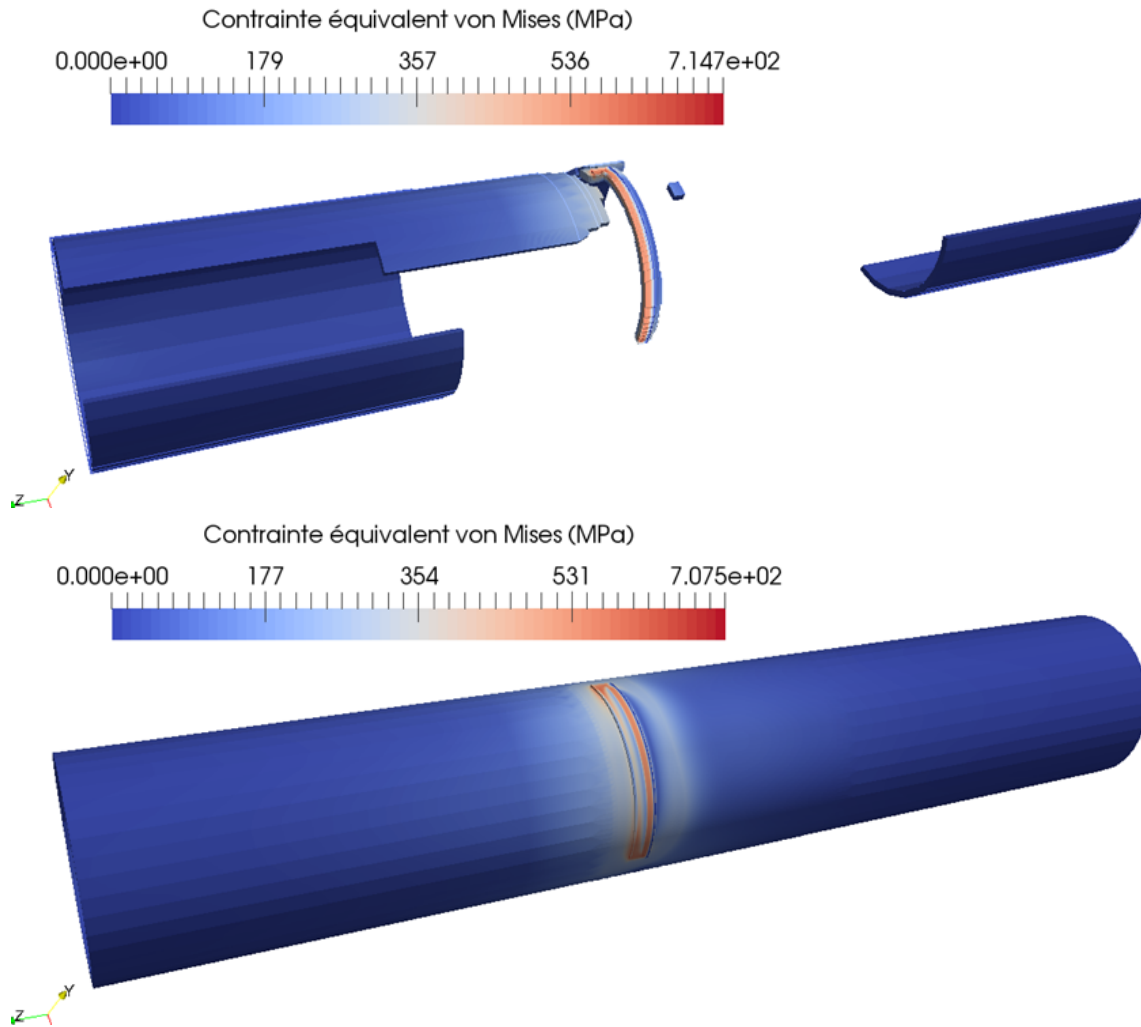


FIGURE 4.19 – Champ de contrainte équivalente de type von Mises du dixième cordon en deux modèles différents : en haut modèle hybride entre hyper-réduction et correction EF, en bas modèle éléments finis.

plus de contraintes loin de la zone de soudage. Sur la [figure 4.20](#), on constate que l'étape de décalage des déplacements donne une erreur plus faible que la simulation par hyper-réduction, pour $m + 1 > 7$. Mais on constate aussi que ce n'est pas le cas pour les contraintes. Or ce sont bien les contraintes qui nous intéressent. L'hyper-réduction apporte donc bien une amélioration de la technique de décalage de champ. On peut penser que la norme 2 utilisée pour estimer l'erreur sur les déplacements est moins pertinente qu'une norme sur les déformations (ou norme H1).

En suivant la même méthodologie comme dans le cas thermique, on commence par l'analyse du modèle hybride décalé sur un nouveau cordon. Rappelez que la méthode d'hyper-réduction est appliquée une seule fois, la solution décalée est récupérée par un calcul éléments finis. Les [figure 4.20](#) et [figure 4.21](#) montrent les erreurs en déplacement et en contrainte par le calcul sur le modèle hybride et la prévision par décalage de la solution EFs du cordon précédent. On constate que les résul-

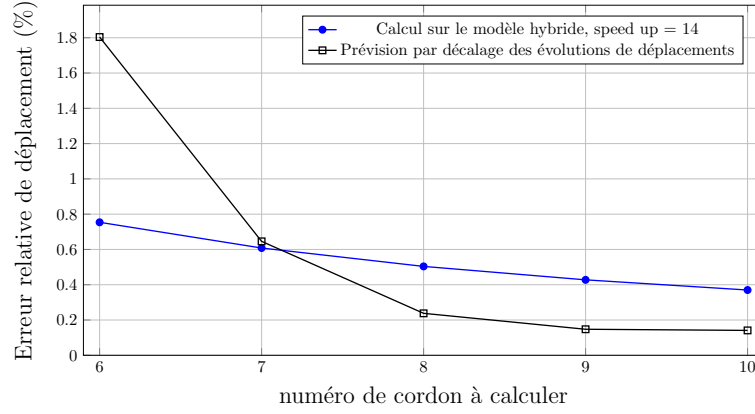


FIGURE 4.20 – Erreurs des champs de déplacements à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon à calculer.

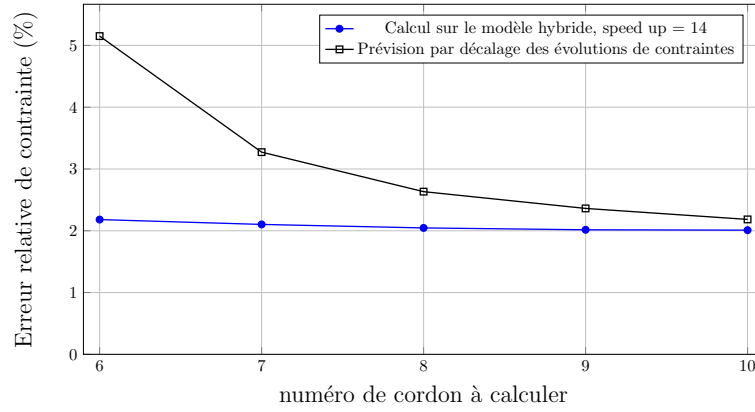


FIGURE 4.21 – Erreurs des champs de contraintes à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon à calculer.

tats obtenus sont meilleurs que ceux du chapitre précédente. Deux explications sont trouvées : la première consiste au numéro de cordon à calculer. Dans la [chapitre 3](#), on se limite par le nombre de cordon maximum $M = 5$ où on atteint pas assez dans le régime stationnaire du soudage multipasse. Donc les erreurs en déplacement et contrainte sur les cordons précédents (cf. [figure 3.19](#) et [figure 3.20](#)) sont moins bonnes. La deuxième raison concerne la condition limite dans chaque simulation. L'encastrement dans la [chapitre 3](#) n'est pas compatible avec la stratégie de décalage des champs, en particulier le champ de contraintes qui est restreint beaucoup à deux surfaces extrémités de la plaque. Par contre, le chargement mécanique dans le cas overlay est très favorable. L'idée de cette condition limite est déjà espérée pour la stratégie de décalage donc on récupère des meilleurs solutions.

Hyper-réduction de plusieurs cordons

Maintenant, on essaye à appliquer la stratégie de décalage avec modèle hybride en hyper-réduction de manière continue. C'est à dire à partir du cordon m calcul par éléments finis de cordons successifs. Les résultats des cordons $m + 1$ à $m + P$ sont trouvés par hyper-réduction. Ici, on décide à faire des simulations par éléments

4.4. SIMULATION DE L'ESSAI OVERLAY PAR HYPER-RÉDUCTION

finis jusqu'à le cordon $m = 5$ et on veut trouver des solutions des cordons $m + 1 = 6$ à $m + P = 10$ en réalisant des calculs par hyper-réduction. Notons $p \in \{1, \dots, P\}$ est le numéro de cordon calculé à partir du cordon m . Nous souhaitons trouver la solution du cordon $m + p$ en ayant la solution du cordon $m + p - 1$ (soit par éléments finis, soit par hyper-réduction). On applique la méthodologie avec la technique de décalage comme nous avons introduit au début de cette section (4.4.1). Dans ce cas là, nous avons les cordons 7, 8, 9, 10 à évaluer les erreurs de calcul car le cordon 6 a été déjà traité dans la section précédente.

Les figure 4.22 et figure 4.23 présentent les erreurs sur les cordons 6, 7, 8, 9, 10 après plusieurs applications du calcul hyper-réduit avec la stratégie de décalage des prévisions du cordon 5. Cinq décalages successifs sont donc faits. Il faut remarquer que depuis le cordon 7, on n'utilise plus la solution par éléments finis du cordon précédent, mais la solution par hyper-réduction. Pour être conforme à la méthodologie proposée, nous devons trouver tous les champs mécaniques avant de commencer un nouveau cordon. La difficulté ici est d'estimer le champ des variables internes issu de la loi de comportement du matériau. Pour le déterminer, nous intégrons la loi de comportement à partir de champ de déplacement trouvé. Cette étape non seulement prend beaucoup de temps pour la réintégration (environ 2.5 heures) mais aussi implique des erreurs supplémentaires pour la prévision du champ de contrainte. On constate que pour les premiers p , l'erreur de déplacement et contrainte ne sont pas très grande (cordons 7, 8). Cependant, pour les cordons 9, 10, les erreurs montent très rapidement. Ce n'est pas surpris car les erreurs s'accumulent après plusieurs fois d'appliquer la stratégie de décalage et hyper-réduction (des erreurs qui viennent des projections, des réintégrations de champs).

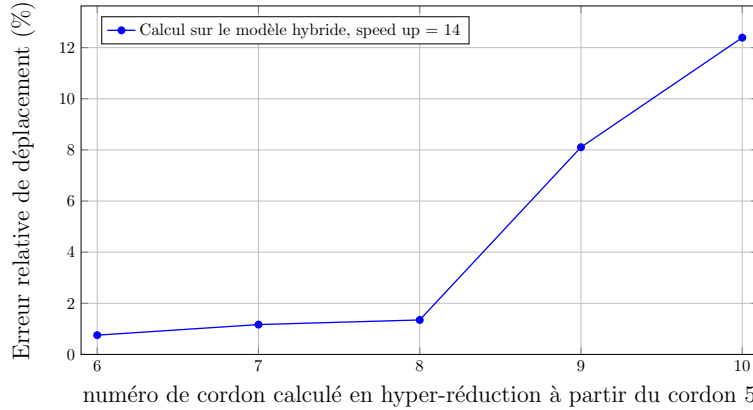


FIGURE 4.22 – Erreur des champs de déplacements à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon calculé p à partir du cordon m .

Si on regarde la carte des écarts de contrainte de von Mises sur la figure 4.24, on constate que ces écarts sont importants dans le domaine d'intégration réduit. C'est à dire dans les zones à forte contrainte ou la zone plastifiée sur le tube subi par des cordons de soudure. C'est utile de le noter, car on va peut être considérer seulement la zone plastifiée autour des cordons. Tous les variables internes dans la zone restant sont négligés. Nous pouvons donc réaliser des calculs hyper-réduit sans avoir besoin de réintégrer la loi de comportement sur tous les champs. Pour finir, il est clair que

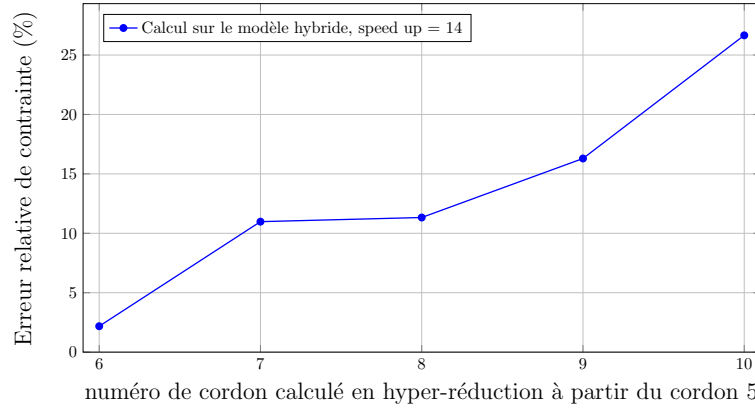


FIGURE 4.23 – Erreur des champs de contrainte à partir des solutions par HR en fonction du numéro de cordon calculé p à partir du cordon m .

la reconstruction des contraintes en dehors du domaine réduit doit être améliorée à fin d'éviter les erreurs accumulées après plusieurs cordons. Nous préconisons de toujours inclure dans le domaine réduit les zones plastifiées pour obtenir des meilleurs résultats.

4.5 Conclusion sur l'application industrielle

Dans ce chapitre nous avons décrit de façon détaillée un exemple de simulation hors d'atteinte.

La simulation thermique par hyper-réduction donne de très bonnes estimations de la solution du problème aux éléments finis, avec une erreur inférieure à 2%. L'approche de décalage des champs de température permet d'obtenir des bases réduites bien adaptées. Ceci est dû au fait qu'un régime quasiment stationnaire s'établit rapidement en thermique.

La simulation mécanique est plus complexe car l'effet des conditions aux limites y est plus importante qu'en thermique. Localement, l'état de déformation est moins assimilable à un régime mécanique stationnaire. Nous avons choisi un domaine réduit plus grand qu'en thermique pour que la correction locale par éléments finis soit plus importante. En conséquence, les accélérations des simulations sont moins importantes qu'en thermique. En prenant en compte les étapes de simulation éléments finis des premiers cordons, de décalage de champ, d'intégration de la loi de comportement et de résolution des équations hyper-réduites, les simulations ont une durée de 3 – 4 heures contre 12 heures pour la simulation par éléments finis classique. Il y a cependant une accumulation d'erreur encore trop importante pour simuler un très grand nombre de cordons. La stratégie de décalage des champs mécaniques doit encore être améliorée.

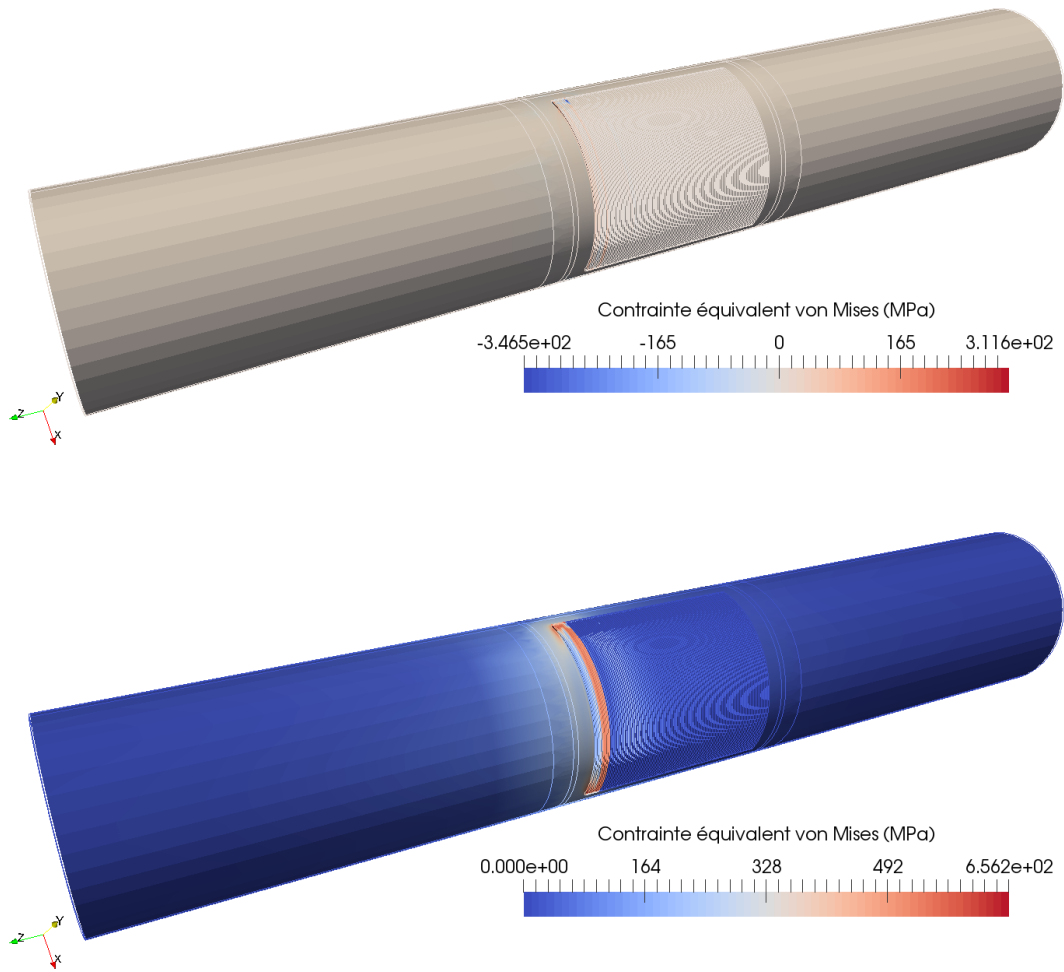


FIGURE 4.24 – En haut l'écart de contrainte de von Mises $\sigma_{eq}^{HR+EF} - \sigma_{eq}^{EF}$ (MPa) reconstruit par Gappy POD en dehors du RID, en bas la contrainte σ_{eq}^{EF} (MPa), le tout à la fin de la simulation du cordon 7.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Nous nous sommes intéressés aux limites de la méthode d’hyper-réduction de modèle pour la simulation du soudage multipasse afin de proposer des solutions raisonnables en terme d’application industrielle.

Dans l’approche classique, les bases réduites de l’hyper-réduction sont construites par la méthode POD. Cette dernière méthode doit être alimentée par des résultats de simulation éléments finis. Or la simulation du soudage multipasse est un cas de complexité particulier. Il est fréquent que pour les applications industrielles, la simulation du procédé jusqu’à la fin soit hors d’atteinte. L’objet de cette thèse et d’étendre la méthode d’hyper-réduction à ce type de simulation hors d’atteinte. Ce travail nous a conduit à revisiter les méthodes simplifiées utilisées pour estimer les températures, les déplacements et les contraintes, par reconstruction de champ. L’articulation entre reconstruction et hyper-réduction a été traitée dans les chapitres 3 et 4 de ce mémoire. Le chapitre 3 porte sur les études de convergence numérique des schémas proposés. Le chapitre 4 met en lumière l’applicabilité à un cas industriel, en révélant toutefois que la croissance des erreurs au cours de la simulation des cordons de soudures ne permet pas en l’état de nos connaissances de traiter plus de 10 cordons avec des erreurs inférieures à 20%. Nous sommes néanmoins convaincu de la pertinence de la combinaison de méthodes de reconstruction et de la méthode d’hyper-réduction pour réduire les simulations hors d’atteintes.

La précision des résultats numériques n’aurait pas été la même sans l’hyper-réduction hybride introduite en chapitre 2. Elle est inspirée de la littérature dans le domaine. Nous avons montré que la précision de cette méthode ainsi que sa complexité numérique, sont situées entre l’hyper-réduction classique et une méthode d’hyper-réduction directionnelle que nous avons développé. Cette dernière n’a été développée que pour les problèmes thermiques, car elle est plus complexe à mettre en œuvre en mécanique. Une approche mixte entre hyper-réduction usuelle 3D et hyper-réduction directionnelle a également été développée pour augmenter l’accélération des simulations thermiques. Ces méthodes permettent des études paramétriques accélérées, avec un domaine de validité de l’hyper-réduction qui a largement été étendu par rapport à l’approche d’hyper-réduction 3D classique.

Toutes les méthodes développées sont disponibles dans *code_aster*. Elles sont

génériques. Elles peuvent être appliquées à des problèmes thermiques, mécaniques ou thermomécaniques, très divers. Les développements réalisés ont été fait de façon à ce qu'ils soient le moins intrusifs possible. Ni la formulation des lois de comportement, ni les méthodes de maillage, ni la description des conditions aux limites n'ont été affectées par ces développements.

5.2 Perspectives

Nous avons vu que les bases réduites des modèles directionnels ont un nombre de modes qui est linéairement croissant avec le nombre de nœuds dans la direction du soudage. Les bases ont donc potentiellement un très grand nombre de modes. Nous préconisons de développer des bases réduites directionnelles qui dépendent du temps, ou plus exactement de la position de la source de chaleur, dans le cadre d'une approche mixte 3D-directionnelle.

La prévision des champs de contrainte par la méthode de décalage, fonctionne moins bien sur les pièces de petite dimension que sur les pièces de grande dimension. Il faudrait donc à l'avenir, développer une approche qui tienne mieux compte de l'effet des conditions aux limites sur la construction des contraintes. Pour finir, on a vu que bien souvent, le domaine plastifiant ne couvre pas toute la pièce simulée. En dehors de la zone plastifiante, les variables internes n'évoluent pas. Or, dans la stratégie de décalage des champs mécaniques pour l'hyper-réduction, il est nécessaire d'actualiser les variables internes par intégration de la loi de comportement. Cette étape pourrait être simplifiée, en restreignant cette intégration à la zone plastifiante uniquement. Il faudrait alors un modèle prédictif de l'évolution de la zone plastifiante, lors du passage d'un cordon à un autre, dans la simulation.

Annexe A

La source de soudage

On suppose que la source de chaleur est mobile. Elle se déplace en translation rectiligne à vitesse constante selon un axe en coordonnées cartésiennes. Deux repères sont alors considérés :

- Un repère "Lagrangien" lié à la pièce soudée (O, X, Y, Z)
- Un repère "Eulérien" lié à la source de chaleur (O', x, y, z) qui suit dans le déplacement

Si la source se déplace à vitesse constante V , parallèlement à X , et qu'elle est en $X=0$ pour $t=0$, alors on a les relations suivantes pour les coordonnées d'un point :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X = x + V.t \\ Y = y \\ Z = z \end{pmatrix}$$

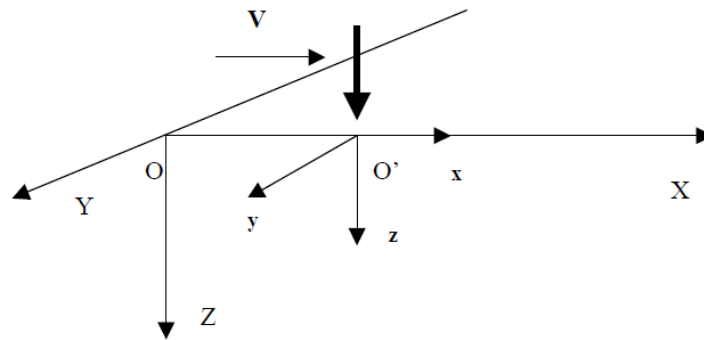


FIGURE A.1 – Repères Lagrangien et Eulérien

A.1 Source de chaleur type Goldak

Pour simuler la source de chaleur du soudage, nous utilisons la fonction dite de « Goldak » qui permet de représenter, en trois dimensions, une source de chaleur avec une répartition supposée gaussienne. Soit la fonction Gaussienne :

$$q(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sqrt{2\pi}^3} \cdot \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{2\sigma_z^2} \right] \quad (\text{A.1})$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$2\sigma_x = a; 2\sigma_y = b; 2\sigma_z = c$$

Avec a, b, c les rayons de l'ellipsoïde suivant l'axe Ox, Oy, Oz . La fonction A.1 devient alors :

$$q(x, y, z) = \frac{3\sqrt{3}}{abc\sqrt{\pi^3}} \cdot \exp \left[-\frac{3(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{3(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{3(z-z_0)^2}{c^2} \right] \quad (\text{A.2})$$

Si l'on suppose souder une plaque plane, la source de chaleur ne doit être appliquée que sur une moitié de volume de l'ellipsoïde. On normalise donc la fonction sur une moitié de volume uniquement. La source thermique équivalente d'un procédé de soudage d'énergie linéique Q_0 est représenté alors par :

$$q(x, y, z) = \frac{Q_0 6\sqrt{3}}{abc\sqrt{\pi^3}} \cdot \exp \left[-\frac{3(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{3(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{3(z-z_0)^2}{c^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

Dans ce cas, on suppose le soudage dans la direction x à la vitesse V , alors $x(t) = X - Vt; y = Y; z = Z$ par le changement de repère (cf. figure A.1). De plus la puissance transmise est donné par : $Q_0 = \eta UI$ avec η son rendement, U la tension, I l'intensité du procédé TIG.

Un cut-off peut être utilisé sur une ellipsoïde de rayon a, b, c . A ces distances, l'amplitude n'est plus que de 5% l'amplitude maximum de la fonction.

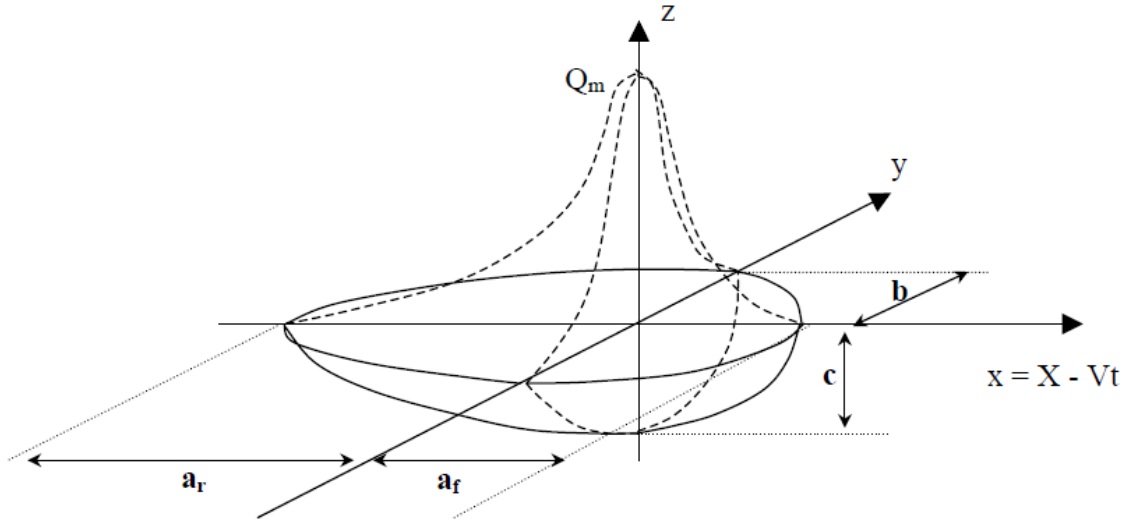


FIGURE A.2 – Distribution en puissance de la source de chaleur en fonction Goldak

Dans le cadre du soudage, l'avancement de la torche provoque une dissymétrie de la répartition. On peut représenter cet effet en posant un rayon pour l' « avant » de la source et un autre pour l' « arrière » de la source de chaleur (cf. figure A.2)

$$q(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{Q_0 12\sqrt{3}}{(a_r + a_f)bc\sqrt{\pi^3}} \cdot \exp \left[-\frac{3(x-x_0)^2}{a_f^2} - \frac{3(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{3(z-z_0)^2}{c^2} \right], & x(t) < x_0 \\ \frac{Q_0 12\sqrt{3}}{(a_r + a_f)bc\sqrt{\pi^3}} \cdot \exp \left[-\frac{3(x-x_0)^2}{a_r^2} - \frac{3(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{3(z-z_0)^2}{c^2} \right], & x(t) > x_0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Avec a_f le rayon "avant" de l'ellipsoïde et a_r le rayon "arrière". On peut définir le rapport entre la partie "avant" et la partie "arrière" de la source : $f = \frac{a_r}{a_f}$. Cette valeur est variée de 1 à 4, dépend de la vitesse de la source de chaleur. Dans ce cas, nous choisissons 4 en supposant que : $a_r + a_f = 2a$.

A.2 Source de chaleur triangulaire

Le calcul thermique peut être effectué avec une autre fonction plus simple. Ici l'apport de chaleur est représenté par une source volumique de flux de chaleur, imposée dans le volume du cordon, progressant le long du trajet de soudage. Les caractéristiques de cette source sont les suivantes :

- Valeur de flux imposée dans un volume égale à la section du cordon, multiplié par une longueur L dans la direction du soudage.
- Valeur de flux constante sur la section du cordon
- Répartition triangulaire du flux dans la direction du soudage (cf. [figure A.3](#)).

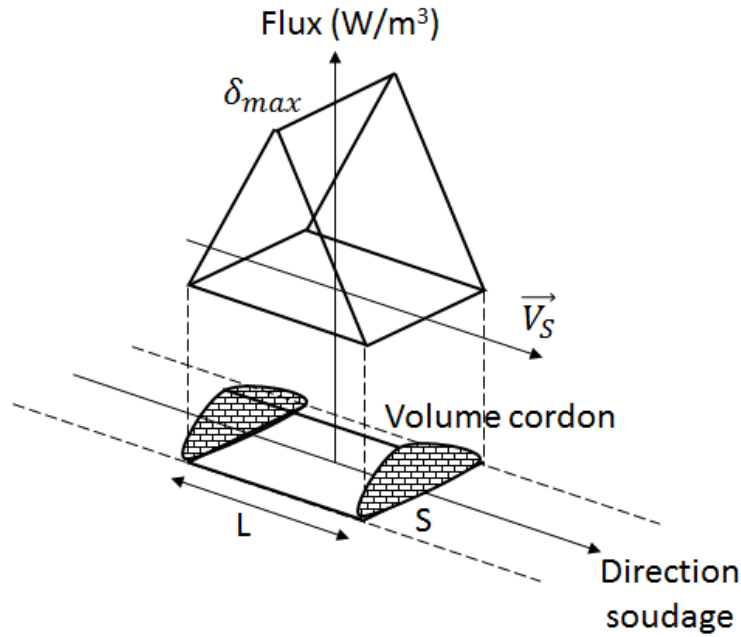


FIGURE A.3 – Distribution en puissance de la source de chaleur triangulaire

La valeur de flux maximale δ_{max} est fixée de manière à égale la puissance efficace de soudage ηUI , avec η son rendement, U la tension et I l'intensité :

$$S \times (L/2) \times \delta_{max} = \eta UI = E \times V_S \quad (\text{A.5})$$

Avec S la section du cordon perpendiculairement au soudage, L longueur du cordon. La progression de la source le long du trajet sur les éléments du cordon de soudure s'effectue à vitesse constante.

Annexe B

Caractéristiques des matériaux

Cette partie est un recueil de caractéristiques thermo-mécaniques relatives aux aciers inoxydables qui sont fréquents à utiliser dans les centrales nucléaires. Ici, on considère seulement deux types de aciers inoxydables : 316L et 308L (revêtement inoxydable). Pour chaque matériau, on a rassemblé les caractéristiques nécessaires à des simulations thermo-élasto-plastiques. Plus précisément, il s'agit :

- de la conductivité thermique,
- de la capacité calorifique volumique,
- du coefficient de dilatation,
- des températures et de l'enthalpie volumique de, changement d'état liquide/solide,
- du module d'Young,
- du coefficient de Poisson,
- de la limite d'élasticité conventionnelle,
- et de la courbe de traction.

Pour le coefficient de Poisson, nous proposons de choisir la valeur de 0.3 constante pour toutes les températures. Et comme on ne considère pas d'état liquide, on n'a pas besoin des températures et de l'enthalpie volumique de changement d'état solide/liquide (choisi 1400°C comme température de fusion).

Pour les autres grandeurs, on prend les valeur en fonction de température en allant de 0 à 1600°C . Les données sont récupérées à partir des plusieurs sources.

B.1 Paramètres physiques de l'acier inoxydable 316L

Les paramètres thermophysiques sont la conductivité thermique $\lambda(\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$, la capacité thermique volumique $\rho C_p(\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1})$ de l'acier 316L en fonction de la température. Ces données sont issues des bases de données FRAMATOME (cf. [tableau B.1](#)).

Les données mécaniques dont on dispose sont issues de différentes sources. Ces sources sont :

- Les données FRAMATOME : il s'agit des valeurs de modules de Young et de

- coefficient de dilatation (cf. [tableau B.2](#)).
- Les données CEA/EDF fournies par le CEA Cadarache : il s'agit de la limite conventionnelle d'élasticité à 0.2% et des courbes de traction dans le domaine plastique en fonction de la température pour une vitesse de déformation de 0,03%/s. Elles sont données dans [tableau B.3](#).

B.2 Paramètres physiques de revêtement inoxydable

On appellera revêtement inoxydable l'ensemble des deux aciers 308L et 309L (norme AISI). Ils sont les matériaux du circuit primaire des REP français. Pour les paramètres thermophysiques, on prend les valeurs "moyenne" du RCC-M jusqu'à 900°C) et on se raccorde aux données de FRAMASOFT pour des températures supérieures (cf. [tableau B.4](#)).

Pour les caractéristiques mécaniques, le choix des données est le suivant : valeurs du RCC-M pour les basses températures ($T < 450^\circ\text{C}$) et on le prolonge aux températures plus élevées par les données de FARAMATOME jusqu'à 1000°C. Pour les températures les plus élevées, on prend les données de FRAMASOFT (cf. [tableau B.5](#)).

La loi élasto-plastique du revêtement inoxydable est exprimé par les courbes en traction de contrainte en fonction de déformation plastique pour chaque température (cf. [tableau B.6](#)).

$T(^{\circ}\text{C})$	$\lambda(\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$	$\rho C_p(\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1})$
20	14.0	3600000
100	15.2	3905300
200	16.6	4168500
300	17.9	4300050
400	19.0	4396000
500	20.6	4446000
600	21.8	4495000
700	23.1	4581500
800	24.3	4787500
900	26.0	4946500
1000	27.3	4996200
1200	29.9	5043650

TABLE B.1 – Données thermophysiques du 316L fournie par FARAMATOME

$T(^{\circ}C)$	$E(MPa)$	$\alpha(*10^{-6}.K^{-1})$	$\sigma_Y(MPa)$
20	197000	15.5	287
100	191500	16.0	237
200	184000	-	198
300	176500	17.1	172
400	168000	17.5	157
500	160000	-	151
600	151500	18.4	145
700	142500	18.7	136
800	130000	19.0	127
900	108000	-	115
1000	81500	19.4	79
1100	32000	-	38
1200	7400	-	24
1300	-	-	18
1400	-	19.6	2

TABLE B.2 – Données du module de Young, coefficient de dilatation et limite conventionnelle d'élasticité à 0.2% de 316L qui dépendent de température.

20°C		200°C		300°C	
$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$	$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$	$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$
0.34585	287.33	0.307696	198.16	0.297716714	172.47
1.15987	314.94	1.125739	231.36	1.1136665722	200.62
5.21290	419.42	5.181576	334.1	5.174005666	307.12
20.28476	560.97	20.255565	470.24	20.25576204	451.42
400°C		500°C		600°C	
$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$	$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$	$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$
0.293946429	157.83	0.29478125	151.65	0.296019802	145.47
1.1115	187.32	1.11195	179.12	1.112125413	169.87
5.175529762	294.89	5.1764625	282.34	5.173049505	262.17
20.25932143	435.66	20.2619625	419.14	20.25559736	387.23
700°C		800°C			
$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$	$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$		
0.295578947	136.2	0.297692308	127		
1.11277196	160.7	1.116730769	151.75		
5.148526316	211.65	5.152884615	198.75		
20.23894035	340.49	20.22596154	293.75		
900°C		1000°C			
$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$	$\epsilon(\%)$	$\sigma(MPa)$		
0.306824074	115.37	0.296625767	78.75		
1.12314815	137.5	1.100920245	82.25		
5.149305556	161.25	5.118404908	96.5		
20.15659259	169.12	20.12269939	100		

TABLE B.3 – Données des contraintes en fonction de déformation totale dépend de la température pour 316L fournies par CEA/EDF

$T(^{\circ}C)$	$\lambda(W.m^{-1}.K^{-1})$	$\rho C_p(J.m^{-3}.K^{-1})$
0	14.5	-
20	14.75	3601000
50	15.14	3744000
100	15.78	3903000
150	16.42	4103000
200	17.06	4164000
250	17.7	4265000
300	18.34	4298000
350	18.98	4347000
400	19.62	4388000
450	20.26	4390000
500	20.91	4451000
550	21.55	-
600	22.19	4494000
650	22.83	4531000
700	-	4583000
750	24.11	4610000
800	24.75	4721000
850	25.39	-
900	26.03	4946000
950	26.67	-
1000	27.31	4990000
1050	27.95	4103000
1100	28.60	-
1150	29.24	-
1200	29.88	5044000
1250	30.52	-
13000	31.16	-
1350	31.8	-
1370	32.06	-
1500	-	5037000

TABLE B.4 – Données thermophysiques du revêtement inoxyuable

$T(^{\circ}C)$	$E(MPa)$	$\alpha(*10^{-6}.K^{-1})$	$\sigma_Y(MPa)$
0	198500	16.3	-
20	197000	16.4	350
50	195000	16.5	-
100	191500	16.8	310
150	187500	17.0	-
200	184000	17.2	280
250	180000	17.5	-
300	176500	17.7	260
350	172000	17.9	-
400	168000	18.1	240
450	164000	18.2	-
500	160000	18.4	218
550	155500	-	-
600	151500	18.7	196
700	142500	18.9	170
800	130000	19.1	145
900	108000	19.3	118
1000	81500	19.5	80
1100	32000	-	36
1150	14800	15.5	-
1200	7400	-	10
1250	3700	-	-
1300	30	-	2
1400	0	20.0	0
1600	-	20.2	-

TABLE B.5 – Données du module de Young, coefficient de dilatation et limite d'élasticité du revêtement inoxydables qui dépendent de température.

$T(^{\circ}C)$		$\epsilon_p(\%)$							
		0	1	2	4	6	8	10	15
20	$\sigma(MPa)$	350	388	410	452	486	518	548	620
100	$\sigma(MPa)$	310	334	356	395	426	453	479	534
200	$\sigma(MPa)$	280	305	326	363	391	416	438	481
300	$\sigma(MPa)$	260	289	311	345	371	392	412	448
400	$\sigma(MPa)$	240	266	286	317	341	360	379	412
500	$\sigma(MPa)$	218	241	260	288	310	327	344	374
600	$\sigma(MPa)$	196	217	234	259	279	294	309	336
700	$\sigma(MPa)$	170	188	203	225	242	255	268	292
800	$\sigma(MPa)$	145	161	173	192	206	218	229	249
900	$\sigma(MPa)$	118	131	141	156	168	177	186	202
1000	$\sigma(MPa)$	80	89	95	106	114	120	126	137
1100	$\sigma(MPa)$	36	40	43	48	51	54	57	62
1200	$\sigma(MPa)$	10	11	12	13	14	15	16	17
1300	$\sigma(MPa)$	2	2	2	2	2	2	2	2
1400	$\sigma(MPa)$	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE B.6 – Contrainte en fonction de la déformation plastique et dépendant de la température pour le revêtement inoxyuable

Annexe C

Décomposition aux valeurs singulières

La Décomposition aux Valeurs Singulières (*Singular Value Decomposition*) (SVD) est une méthode d'approximation qui a fait l'objet de nombreux travaux. Elle est présentée comme une approche préliminaire pour comprendre les différentes façon de considérer la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (*Proper Orthogonal Decomposition*) (POD) en dimension finie.

En considérant \mathcal{N} localisations distinctes, la matrice des *snapshots* \mathbf{Q} à valeurs réelles et de dimension $\mathcal{N} \times N_t$ s'écrit :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1) & \dots & \mathbf{u}_{N_t}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}) & \dots & \mathbf{u}_{N_t}(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

L'objectif de la SVD est de minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre la fonction \mathbf{u} et sa représentation approchée \mathbf{u}_{SVD} :

$$\min \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{N_t} (\mathbf{u}_j(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}_{SVD}(\mathbf{x}_i, t_j)) \quad (\text{C.2})$$

C.1 Méthode de Décompostion aux Valeurs Singulières (SVD)

La SVD de la matrice rectangulaire \mathbf{Q} à valeur réelles, de dimension $\mathcal{N} \times N_t$ et de rang d est la factorisation :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}^T, \quad (\text{C.3})$$

où \mathbf{V} et \mathbf{W} sont des matrices orthogonales, respectivement de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ et $N_t \times N_t$. $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale de dimension $\mathcal{N} \times N_t$, elle contient les valeurs réelles $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ appelées valeurs singulières de \mathbf{Q} avec $p = \min(\mathcal{N}, N_t)$ telles que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d > \sigma_{d+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

Le rang d donne le nombre de valeurs singulières non nulles et les d premières colonnes de \mathbf{V} et de \mathbf{W} donnent les vecteurs singuliers gauche et droit respectivement.

La solution du problème de minimisation (équation C.2) est donnée par la SVD tronquée à l'ordre N . La représentation approchée \mathbf{u}_{SVD} est obtenue en considérant les N premières valeurs singulières $(\sigma_k)_{k=1}^N$ et les vecteurs singuliers $(\mathbf{V}_k)_{k=1}^N$ et $(\mathbf{W}_k)_{k=1}^N$ associés.

Toutefois, le calcul direct des valeurs singulières et des vecteurs singuliers gauches et droits associés est souvent fastidieux et il est préférable de les déterminer par la résolution de problème aux valeurs propres équivalents.

C.2 Lien entre SVD et problèmes aux valeurs propres

La SVD est vue comme un problème aux valeurs propres en considérant les matrices carrées $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ qui s'interprètent comme une représentation discrète du tenseur des corrélations spatio-temporelles. Elle introduit à l'ordre N les fonctions de forme $(\psi_k)_{k=1}^N$ et des fonctions du temps $(\gamma_k)_{k=1}^N$ telles qu'un champ \mathbf{u} à approximer s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_{SVD}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathcal{I} \quad (\text{C.4a})$$

$$\mathbf{u}_{SVD}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t), \mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathcal{I} \quad (\text{C.4b})$$

Lorsque $N_t < \mathcal{N}$, la résolution du problème aux valeurs propres lié à la matrice $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ de dimension $N_t \times N_t$ est bien moins coûteux numériquement que la résolution du problème équivalent pour la matrice $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Cette remarque met en lumière qu'il existe en pratique deux approches différentes pour la POD. La matrice $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ est liée à la méthode des *snapshots* alors que la matrice $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ est liée à la méthode classique. La méthode classique est utilisée de préférence lorsque $N_t \gg \mathcal{N}$ et que la méthode des *snapshots* est utilisée de préférence lorsque $N_t \ll \mathcal{N}$.

Méthode *snapshots* SVD En multipliant les deux membres de la SVD par \mathbf{Q}^T à gauche, on obtient une matrice de dimension $N_t \times N_t$ donnée par :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{W} \Sigma^2 \mathbf{W}^T \quad (\text{C.5})$$

car $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{\mathcal{N}}$ puisque \mathbf{V} est orthogonale.

Or, comme $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ est une matrice symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Sa décomposition sur la base propre s'écrit :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T, \quad (\text{C.6})$$

où \mathbf{U} est une matrice orthogonale de dimension $N_t \times N_t$, $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale de dimension $N_t \times N_t$ contenant les valeurs propres réelles $(\lambda_i)_{i=1}^{N_t}$.

On en déduit que $\mathbf{U} = \mathbf{W}$ et $\mathbf{\Lambda} = \Sigma^2$. Le couple $(\mathbf{V}, \mathbf{\Lambda})$ représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$. A l'ordre N , les fonctions de forme $(\psi)_{k=1}^N$ sont les N premiers vecteurs singuliers $(\mathbf{W}_k)_{k=1}^N$.

Méthode SVD classique En multipliant les deux membres de la SVD par \mathbf{Q}^T à droite, on obtient une matrice de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ donnée par :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{V}^T \quad (\text{C.7})$$

car $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{I}_{N_t}$ puisque \mathbf{W} est orthogonale.

Or, comme $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ est une matrice symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Sa décomposition sur la base propre s'écrit :

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T, \quad (\text{C.8})$$

où \mathbf{U} est une matrice orthogonale de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ contenant les valeurs propres réelles $(\lambda_i)_{i=1}^{\mathcal{N}}$.

On en déduit que $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ et $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Sigma}^2$. Le couple $(\mathbf{V}, \mathbf{\Lambda})$ représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$. A l'ordre N , les fonctions de forme $(\psi)_{k=1}^N$ sont les N premiers vecteurs singuliers $(\mathbf{V}_k)_{k=1}^N$.

Annexe D

Développements dans *code_aster*

Chez EDF, le logiciel *code_aster* propose bien des fonctionnalités standards d'un code de calcul thermo-mécanique. Ses modélisations, ses algorithmes et ses solveurs bénéficient de travaux continus d'amélioration et de complétude. Résolument ouvert, il est chaîné, couplé et encapsulé de façon multiple. Dans une étude industrielle, il devient indispensable de prendre en compte les non-linéarités : matériau, géométrie, chargement, etc. Pour chacune d'entre elles *code_aster*, au travers des opérateurs `THER_NON_LINE` (pour le phénomène thermique), `STAT_NON_LINE` (pour le phénomène mécanique) propose des solutions adaptées.

Cependant, les organisations de ces deux opérateurs sont assez complexes, en particulier le solveur du problème mécanique non-linéaire. Pendant la mise en place de la méthode d'hyper-réduction, on change peu de choses dans la programmation dans ces deux opérateurs, tous sont indiqués dans la [section 2.1](#). Le principe est de changer les équations de résolution non linéaire de type Newton-Raphson avec la projection Petrov-Galerkin sur la base réduite restreinte dans le RID.

Il nous reste la programmation pour l'étape *offline* où on va créer la structure des données du modèle hyper-réduit. Ce modèle est ensuite bien utilisé dans les deux opérateurs du calcul thermo-mécanique précédents. On a décidé d'ajouter trois nouveaux opérateurs dans *code_aster* :

- commande `DEFI_BASE_REDUITE` qui génère la base réduite d'un champ recherché. Elle est utilisée dans l'étape *offline* et demande des résultats de référence ;
- commande `DEFI_DOMAINE_REDUIT` qui construit le domaine réduit à partir des bases réduites trouvées. On complète l'étape *offline* de l'hyper-réduction en trouvant l'interface du RID, notée \mathcal{I} pour le calcul dans l'étape *online* ;
- commande `REST_REDUIT_COMPLET` qui reconstruit la solution du calcul hyper-réduit sur le domaine complet. Cet opérateur est utilisé après l'étape *online* de l'hyper-réduction.

D.1 Opérateur `DEFI_BASE_REDUITE`

Le but de l'opérateur est de construire la base réduite d'un champ résultat par les méthodes de réduction d'ordre du modèle y compris la méthode de décomposition orthogonale (POD).

L'opérateur s'appuie sur une structure de données des résultats de type *evol_ther* ou *evol_noli* et réalise des méthodes de réduction d'ordre du modèle sur le transitoire.

Deux types de bases peuvent être produites :

- les bases dites « primales » : elles s'appuient sur les champs de déplacement pour la mécanique et sur les champs de température pour la thermique ;
- les bases dites « duales » : elles s'appuient sur les champs de contraintes pour la mécanique et sur les champs de flux pour la thermique.

L'opérateur produit un concept de type *mode_empi*.

D.1.1 Structure de données résultats de type *mode_empi*

Toutes les informations concernant la base réduite est sauvegardées dans le concept de type *mode_empi*. C'est un variable de *code_aster* qui existe comme des données résultats, du même type avec les résultats de type *evol_ther* pour la thermique et de type *evol_noli* pour la mécanique. En principe, le concept de type *mode_empi* doit contenir des informations suivantes :

- le modèle qui affecte sur un maillage (ou un groupe de maillage). Il nous dit aussi le problème est en thermique ou mécanique.
- le type de champ de résultat : déplacements, températures, contraintes, flux chaleur
- le résultat des modes empiriques qui correspondent avec le type de champ. Il est capable de les visualiser dans *ParaVis* y compris une valeur de singulière liée avec chaque mode.

D.1.2 Paramètres pour la commande **DEFI_BASE_REDUITE**

Pour utiliser cet opérateur, il est nécessaire de fournir les paramètres suivants :

- le nom de la structure de données résultat à analyser pour générer la base réduite. Deux types de résultat possibles : *evol_noli* pour la mécanique et *evol_ther* en thermique ;
- le type de champ de cette base réduite. Si le type de résultat est *evol_noli*, deux choix disponibles sont déplacement ou contrainte. Pour le résultat de type *evol_ther*, on peut choisir entre température et le flux chaleur.
- la méthode choisie pour générer la base. On ne considère que deux méthodes : POD et POD incrémentale. Les paramètres suivants sont demandés lorsque l'un des deux méthodes a été choisie :
 1. la valeur de tolérance qui nous permet de décider le nombre de mode empirique par POD (paramètre μ_{POD}).
 2. le nombre de modes empiriques retenus pour la construction de base réduite. Ce paramètre est facultatif, mais s'il est actif, on n'utilisera plus la valeur de tolérance.
 3. si la méthode choisie est POD incrémentale, on a besoin la valeur de tolérance qui nous permet de choisir des snapshots (paramètre ϵ_0).

Ces paramètres peuvent être modifiés pour contrôler la construction de base réduite. D'après le résultat fourni et le type de champ choisi, on va d'abord arranger les

données de résultat dans une matrice de snapshots. Chaque snapshot va prendre tous les résultats dans un instant calculé, c'est-à-dire tous les composants d'un champ donné. Si on note N_0 le nombre de nœuds dans le maillage total, alors le nombre d'équations est différent selon champ de résultat :

$$\mathcal{N}^T = N_0$$

$$\mathcal{N}^u = 3 \times N_0$$

$$\mathcal{N}^\sigma = 6 \times N_0$$

Avec $\mathcal{N}^T, \mathcal{N}^u, \mathcal{N}^\sigma$ le nombre d'équations pour le champ de température, déplacement et contrainte. Donc les snapshots pour chaque type de champ sont définis différemment :

$$\mathbf{q}_j^{(T)} = [\dots; T(\mathbf{x}_i, t_j); \dots]^T$$

$$\mathbf{q}_j^u = [\dots; u_x(\mathbf{x}_i, t_j); u_y(\mathbf{x}_i, t_j); u_z(\mathbf{x}_i, t_j); \dots]^T$$

$$\mathbf{q}_j^\sigma = [\dots; \sigma_{xx}(\mathbf{x}_i, t_j); \sigma_{yy}(\mathbf{x}_i, t_j); \sigma_{zz}(\mathbf{x}_i, t_j); \sigma_{xy}(\mathbf{x}_i, t_j); \sigma_{yz}(\mathbf{x}_i, t_j); \sigma_{xz}(\mathbf{x}_i, t_j); \dots]^T$$

où $i = 1, \dots, N_0$ et $j = 1, \dots, N_t$. Puis, les matrices de snapshots sont rassemblées $\mathbf{Q} = [\dots, \mathbf{q}_j, \dots]$.

Ensuite, on utilise les algorithmes 1 et 2 dans la programmation. Ici, la Décomposition aux Valeur Singulière (SVD) est effectuée à l'aide du package LAPACK dans le langage Fortran. Ensuite, avec les paramètres donnés, on détermine la taille de base réduite et la sauvegarde dans la structure de données résultats de type *mode_empi*. La [figure D.1](#) résume la procédure de commande `DEFI_BASE_REDUITE`.

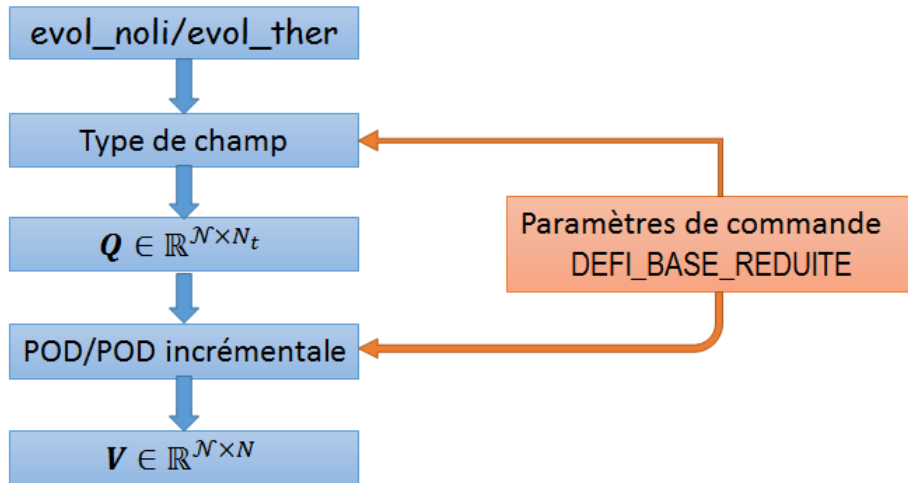


FIGURE D.1 – Procédure de construire la base réduite sous la programmation de *code_aster*

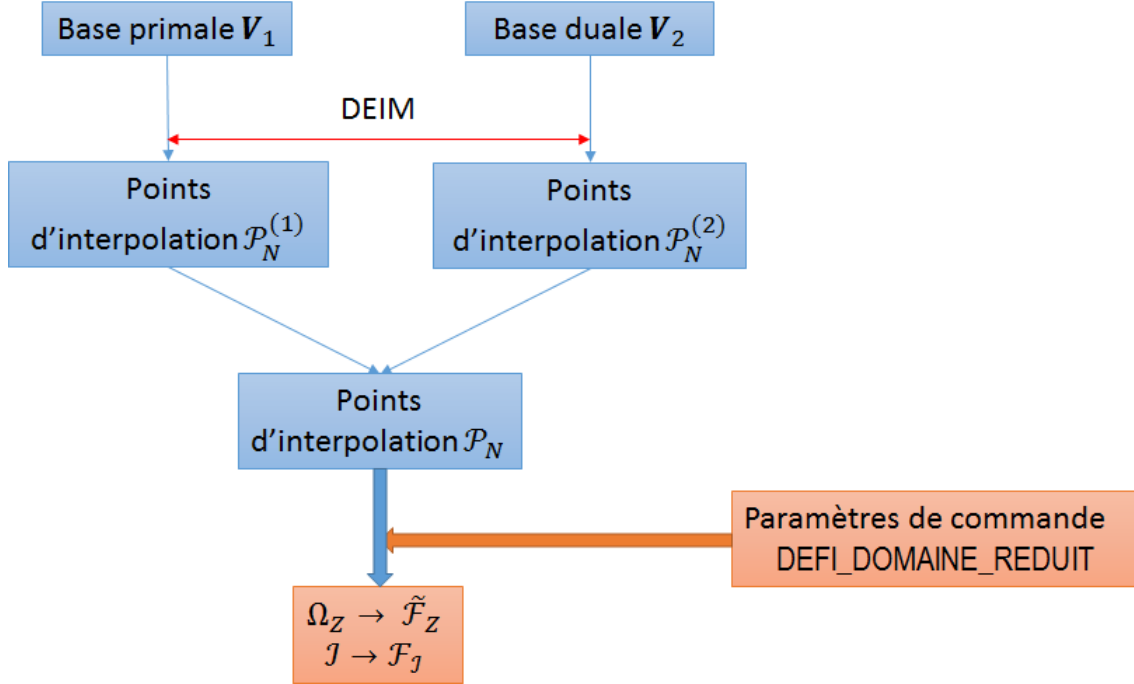


FIGURE D.2 – Procédure de créer le RID sous la programmation de *code_aster*

D.2 Opérateur DEFI_DOMAINE_REDUIT

Le but de l'opérateur est d'enrichir un maillage existant par des groupes (de mailles ou de nœuds) en définissant un sous domaine appelé domaine réduit d'intégration (RID) .

L'opérateur s'appuie sur une ou plusieurs structure de données par des résultats de type *mode_empi* pour déterminer des nœuds spécifiques, appelés points d'interpolation, en appliquant la méthode d'interpolation empirique discrète (DEIM). Le domaine réduit d'intégration est l'ensemble des mailles positionnées au voisinage de ces points d'interpolation.

L'opérateur enrichit la structure de donnée de type *maillage* en créant deux groupes :

- un groupe de mailles correspondant au domaine réduit ;
- un groupe de nœuds correspondant à l'interface entre le domaine réduit et le reste du domaine initial.

D.2.1 Paramètres pour la commande DEFI_DOMAINE_REDUIT

La rentrée de cette commande a besoin des paramètres ci-dessous :

- nom des structures de données résultat de type *mode_empi* à analyser pour générer les points d'interpolation. Il faut renseigner simultanément deux base : une base "primale" et une base "duale". Ils viennent du même phénomène (thermique ou mécanique).
- nom du groupe de mailles correspondant au RID ;
- nom du groupe de nœuds contenus dans l'interface entre le RID et le reste du domaine.

- nombre de couche d'élément autour un point d'interpolation, la valeur par défaut est de 1.

D.2.2 Construction le RID au sein d'un maillage

La [figure D.2](#) résume la procédure de commande `DEFI_DOMAINE_REDUIT`. L'application de la méthode DEIM est réalisée avec l'aide de l'algorithme [3](#). On obtient ensuite la liste des points d'interpolation $\mathcal{P}_N^{(1)}$ pour la base réduite "primale" et la liste $\mathcal{P}_N^{(2)}$ pour la base "duale". Plus exactement, dans le cas thermique, nous avons deux listes $\mathcal{P}_N^{(T)}$ pour la base réduite de température et $\mathcal{P}_N^{(q)}$ pour le flux de chaleur. C'est pareil dans le calcul mécanique, deux listes sont obtenues : $\mathcal{P}_N^{(u)}$ (déplacement) et $\mathcal{P}_N^{(c)}$ (contrainte).

La liste des points d'interpolation pour le domaine réduit peut être l'ensemble des plusieurs listes, voire la liste donnée par les utilisateurs. Nous récupérons à partir de cette liste des nœuds principaux pour le RID. La [figure D.3](#) explique comment nous définissons le RID dans `code_aster` à partir des nœuds d'interpolation. Tout d'abord, on prend en compte tous les mailles qui connectent à ces nœuds. Ensuite, on rassemble tous ces éléments pour fonder le domaine réduit sous forme un groupe de maille avec tous les nœuds appartenant dans RID. Enfin, un groupe de nœud pour présenter l'interface entre le RID et le reste du domaine est créer. Il est par définition un ensemble des nœuds qui lient simultanément avec les éléments du RID et les éléments hors du RID.

La taille du domaine réduit est flexible. Nous pouvons agrandir le RID avec le paramètre nombre de couches d'éléments comme dans la [figure D.4](#). Cette option nous permet de varier la taille du domaine réduit qui existe comme un paramètre sur l'erreur du calcul hyper-réduit.

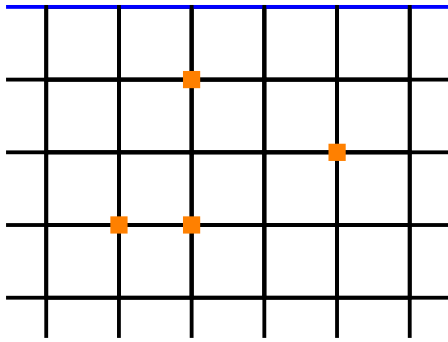
D.3 Opérateur `REST_REDUIT_COMPLET`

Le but de l'opérateur est de reconstruire le champ primaire (déplacement, température) et le champ dual (contrainte, flux de chaleur) sur tous les domaines à partir des résultats hyper-réduits sur le RID et la base réduite de chaque type (primaire ou dual). L'opérateur produit un concept de type `evol_noli` pour le problème mécanique et de type `evol_ther` pour le problème thermique. Ce résultat s'appuie sur le modèle complet où on affecte le maillage total.

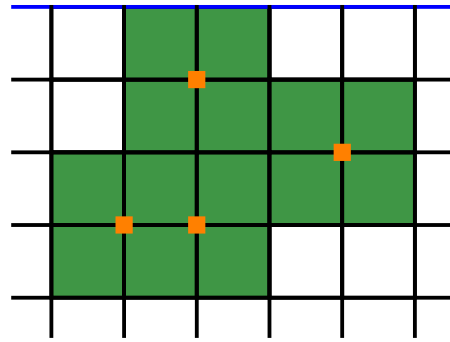
D.3.1 Paramètres pour la commande `REST_REDUIT_COMPLET`

La rentrée de cette commande a besoin des paramètres ci-dessous :

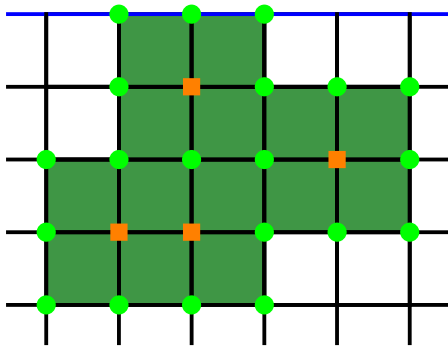
- nom du modèle sur lequel va être reconstruit la structure de données résultat.
- La base primale va servir à reconstruire les champs primaux : déplacement pour la mécanique et température pour la thermique. Il faut que cette base ait été construite sur le modèle donné précédemment.
- le résultat réduit qui donne toutes les informations nécessaires pour reconstruire les résultats sur le modèle donné.



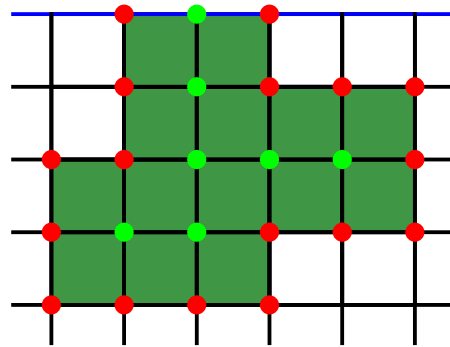
(a) Mise en place des nœuds d'interpolation



(b) Identification des mailles connectées

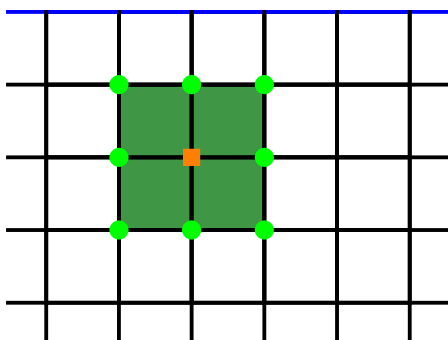


(c) Assemblage des éléments du RID

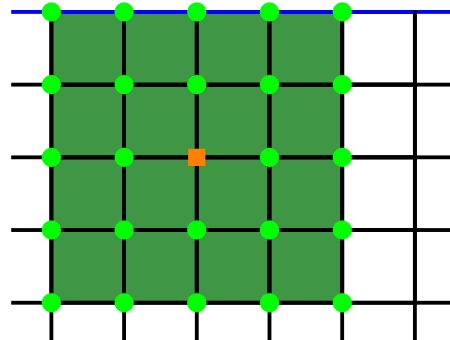


(d) Détermination l'interface du RID

FIGURE D.3 – Procédure pour créer le domaine réduit d'intégration (RID) du modèle hyper-réduit au sein d'un maillage : (a)→(b)→(c)→(d)



(a) le RID par défaut



(b) le RID avec une couche supplémentaire

FIGURE D.4 – Présentation de la construction du domaine réduite en fonction de nombre de couche d'éléments.

Bibliographie

- [1] J. V. Aguado, D. Borzacchiello, C. Ghnatios, F. Lebel, R. Upadhyay, C. Bine-truy, and F. Chinesta. A simulation app based on reduced order modeling for manufacturing optimization of composite outlet guide vanes. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 4(1) :1, 2017. 38
- [2] D. C. Aiguilera. *Advanced Numerical Simulations for Conventional and Non-Conventional Welding Processes : A Model Order Reduction Approach*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2017. 38
- [3] D. Albrecht. Calcul des déformations induites par un rechargement de type overlay, 2013. x, 9, 10, 22, 88, 114, 117
- [4] D. Albrecht. Etude des déformations sur tuyauteries dues à des rechargements de type overlay et patch : Modélisation et simulations thermiques, 2013. x, 108, 112, 113, 117
- [5] F. Alias and A. Pruvost. Appropriation et état des lieux de l’utilisation de la technique de réparation par rechargement overlay. D450712007073, 2012. 110
- [6] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids : Part ii : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2) :98–121, 2007. 37
- [7] A. Ammar, E. Pruliere, J. Férec, F. Chinesta, and E. Cueto. Coupling finite elements and reduced approximation bases. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 18(5-6) :445–463, 2009. 73
- [8] A. Andrieu. Mécanismes et modélisation multi-échelle de la rupture fragile trans-et inter-granulaire des aciers rep en lien avec le vieillissement thermique. *PhD Ecole des Mines de Paris*, 2013. 10
- [9] J. Angles. Notice d’utilisation pour la simulation numérique du soudage. http://www.code-aster.org/doc/v11/fr/man_u/u2/u2.03.05.pdf, 2010. 10
- [10] O. ASSERIN, M. AFZALI, F. BOITOUT, P. GILLES, and D. LAWRJANIEC. Simulation numerique du soudage : Le projet multipartenaire musica. 25, 26
- [11] J. Baiges, R. Codina, and S. Idelsohn. A domain decomposition strategy for reduced order models. application to the incompressible navier–stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267 :23–42, 2013. 68, 72, 73

- [12] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A. T. Patera. An ‘empirical interpolation’ method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathematique*, 339(9) :667–672, 2004. [35](#), [38](#)
- [13] G. Billard, D. et Bergeot. Cahier des clauses techniques particulières pour rechargement des tubes amont et aval des tuyères app 001 et 002 yp sur les tuyauteries 5 app 535 ty-6 app 534 ty- 6 app 535 ty. D5130DTMSFDI-RECHARGEMENT, 2008. [110](#)
- [14] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, and A. Poitou. Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3d solutions with 2d computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201 :1–12, 2012. [38](#)
- [15] M. Bonnet and A. Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Ecole Polytechnique, 2005. [20](#)
- [16] M. Brand. Incremental singular value decomposition of uncertain data with missing values. *Computer Vision—ECCV 2002*, pages 707–720, 2002. [31](#)
- [17] K. Carlberg, C. Farhat, J. Cortial, and D. Amsallem. The gnat method for nonlinear model reduction : effective implementation and application to computational fluid dynamics and turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 242 :623–647, 2013. [37](#), [38](#)
- [18] H. B. Cary. *Modern welding technology*. Prentice-Hall, 1979. [6](#)
- [19] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5) :2737–2764, 2010. [35](#), [36](#), [38](#), [48](#)
- [20] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen. A state space error estimate for pod-deim nonlinear model reduction. *SIAM Journal on numerical analysis*, 50(1) :46–63, 2012. [36](#)
- [21] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Proper generalized decomposition of multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1114–1132, 2010. [37](#)
- [22] F. Chinesta, A. Leygue, F. Bordeu, J. V. Aguado, E. Cueto, D. González, I. Alfaro, A. Ammar, and A. Huerta. Pgd-based computational vademecum for efficient design, optimization and control. *Archives of Computational methods in Engineering*, 20(1) :31, 2013. [37](#)
- [23] J. Cognard, P. Ladeveze, and P. Talbot. A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30(9) :583–593, 1999. [37](#)
- [24] B. Cohen. Note technique : Justification des réparations effectuées en 2008 sur les lignes 5 app 534 et 535 ty du cnpe de gravelines. D4507081270, 2008. [110](#)
- [25] A. Cosimo, A. Cardona, and S. Idelsohn. Improving the k-compressibility of hyper reduced order models with moving sources : applications to welding and phase change problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 274 :237–263, 2014. [36](#)

- [26] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4) :1253–1278, 2000. 34
- [27] L. Depradeux. *Simulation numérique du soudage-acier 316L : validation sur cas tests de complexité croissante*. PhD thesis, Villeurbanne, INSA, 2004. 7, 11, 16
- [28] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval, 1981. 20
- [29] R. Dony et al. Karhunen-loeve transform. *The transform and data compression handbook*, 1 :1–34, 2001. 29
- [30] Y. Duan, F. Boitout, J.-B. Leblond, and J.-M. Bergheau. Simulation numérique du soudage de grandes structures par une approche locale/globale. *Mécanique & Industries*, 9(2) :97–102, 2008. 25
- [31] R. Everson and L. Sirovich. Karhunen-loeve procedure for gappy data. *JOSA A*, 12(8) :1657–1664, 1995. 37, 39, 51
- [32] L. D. F. Rossillon. Méthode simplifiée de simulation numérique du soudage multipasses. <http://www.code-aster.org/UPLOAD/DOC/Presentation/08-Rossillon-expose.pdf>, 2013. 23, 24
- [33] A. Falco and A. Nouy. A proper generalized decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional eckart–young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) :469–480, 2011. 38
- [34] C. Farhat, P. Avery, T. Chapman, and J. Cortial. Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(9) :625–662, 2014. 39
- [35] Z. Feng. *Processes and mechanisms of welding residual stress and distortion*. Elsevier, 2005. 12
- [36] D. Galbally, K. Fidkowski, K. Willcox, and O. Ghattas. Non-linear model reduction for uncertainty quantification in large-scale inverse problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 81(12) :1581–1608, 2010. 38
- [37] K. Ganesh, M. Vasudevan, K. Balasubramanian, N. Chandrasekhar, S. Mahadevan, P. Vasantharaja, and T. Jayakumar. Modeling, prediction and validation of thermal cycles, residual stresses and distortion in type 316 ln stainless steel weld joint made by tig welding process. *Procedia Engineering*, 86 :767–774, 2014. 13
- [38] C. Ghnatios, F. Masson, A. Huerta, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta. Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213 :29–41, 2012. 37
- [39] M. A. Grepl, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A. T. Patera. Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(3) :575–605, 2007. 35

- [40] H. He, T. Wang, and G. Chen. A hybrid coordinates component mode synthesis method for dynamic analysis of structures with localized nonlinearities. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(3) :031002, 2016. 73
- [41] H. Hotelling. New light on the correlation coefficient and its transforms. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 15(2) :193–232, 1953. 29
- [42] P. Kerfriden, J.-C. Passieux, and S. P.-A. Bordas. Local/global model order reduction strategy for the simulation of quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(2) :154–179, 2012. 73
- [43] E.-J. Kim, M. Bernier, O. Cauret, and J.-J. Roux. A hybrid reduced model for borehole heat exchangers over different time-scales and regions. *Energy*, 77 :318–326, 2014. 73
- [44] M. Kirby and L. Sirovich. Application of the karhunen-loeve procedure for the characterization of human faces. *IEEE Transactions on Pattern analysis and Machine intelligence*, 12(1) :103–108, 1990. 37
- [45] S. Kou. *Welding metallurgy*. John Wiley & Sons, 2003. 8
- [46] K. Koudadje. *Etude expérimentale et modélisation numérique du bain de fusion en soudage TIG d’aciers*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2013. 11
- [47] P. Ladevèze. Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, 300(2) :41–44, 1985. 37
- [48] P. Ladevèze and P. GERMAIN. La méthode à grand incrément de temps pour l’analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l’univers, Sciences de la Terre*, 309(11) :1095–1099, 1989. 37
- [49] D. Lawrjaniec, O. Asserin, F. BOITOUT, P. GILLES, H. LIEURADE, P. LE MASSON, P. MOURGUE, and G. SHI. Vers une simplification de la mise en oeuvre et une meilleure prédictibilité de la simulation du soudage. *Soudage et techniques connexes*, 64(7-8) :31–37, 2010. 26
- [50] J. Lumley and B. Podvin. Dynamical systems theory and extra rates of strain in turbulent flows. *Experimental thermal and fluid science*, 13(3) :180–189, 1996. 39
- [51] J. L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric turbulence and radio wave propagation*, 1967. 29
- [52] J. Maton. Technologie du soudage. <http://www.rocdacier.com/ressource.n.491/table-des-matieres-technologie-du-soudage-par-jean-maton.html>, 2014. 5, 6
- [53] A. Michaut. Note technique : Etude des réparations de la ligne 1 app 534 ty-6 au niveau des tubes 14 et 16 de la tranche 1 de gravelines. D4507081681, 2009. 110

- [54] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23) :1603–1626, 2010. [34](#), [37](#)
- [55] C. of ASME Boiler and pressure Vessel Code. Code cases n-561-1. alternative requirements for wall thickness restoration of class 2 and high energy class 3 carbon steel piping section xi, division 1., 1998. [109](#)
- [56] S. Perotto, A. Ern, and A. Veneziani. Hierarchical local model reduction for elliptic problems : a domain decomposition approach. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(4) :1102–1127, 2010. [38](#)
- [57] E. Prulière, J. Férec, F. Chinesta, and A. Ammar. An efficient reduced simulation of residual stresses in composite forming processes. *International Journal of Material Forming*, 3 :1339–1350, 2010. [34](#), [38](#)
- [58] A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri. *Reduced basis methods for partial differential equations : an introduction*, volume 92. Springer, 2015. [31](#), [35](#)
- [59] A. Radermacher and S. Reese. Model reduction in elastoplasticity : proper orthogonal decomposition combined with adaptive sub-structuring. *Computational Mechanics*, 54(3) :677–687, 2014. [73](#)
- [60] D. Ryckelynck. Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(7) :499–505, 2002. [27](#)
- [61] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of computational physics*, 202(1) :346–366, 2005. [31](#), [38](#), [39](#), [68](#)
- [62] D. Ryckelynck. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :75–89, 2009. [39](#), [51](#)
- [63] D. Ryckelynck and D. M. Benziane. Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17) :1134–1142, 2010. [28](#), [39](#)
- [64] D. Ryckelynck, F. Chinesta, E. Cueto, and A. Ammar. On the a priori model reduction : overview and recent developments. *Archives of Computational methods in Engineering*, 13(1) :91–128, 2006. [31](#)
- [65] D. Ryckelynck, L. Gallimard, and S. Jules. Estimation of the validity domain of hyper-reduction approximations in generalized standard elastoviscoplasticity. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(1) :6, 2015. [61](#)
- [66] D. Ryckelynck, K. Lampoh, and S. Quilicy. Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, 51(2) :309–317, 2016. [39](#), [40](#), [42](#)
- [67] D. Ryckelynck, F. Vincent, and S. Cantournet. Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225 :28–43, 2012. [39](#)
- [68] P. Saini, C. M. Arndt, and A. M. Steinberg. Development and evaluation of gappy-pod as a data reconstruction technique for noisy piv measurements in gas turbine combustors. *Experiments in Fluids*, 57(7) :1–15, 2016. [37](#)

- [69] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. i. coherent structures. *Quarterly of applied mathematics*, 45(3) :561–571, 1987. 29
- [70] N. T. Trinh. *Sur la modélisation du comportement thermomécanique et métallurgique des aciers. Application au procédé de soudage et de traitements thermiques*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2008. 10
- [71] L. R. Tucker. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31(3) :279–311, 1966. 34
- [72] M. Turlure. Ecart nécessitant une analyse mécanique. analyse de nocivité des indications non volumiques dans la soudure circulaire a3-a4 de l'échangeur 0se002ex de cruas. ENAM09083, 2009. 110
- [73] Y. Ueda, H. Murakawa, and N. Ma. *Welding deformation and residual stress prevention*. Elsevier, 2012. 12
- [74] S. Volkwein. Model reduction using proper orthogonal decomposition. *Lecture Notes, Institute of Mathematics and Scientific Computing, University of Graz*. see [http ://www. uni-graz. at/imawww/volkwein/POD. pdf](http://www.uni-graz.at/imawww/volkwein/POD.pdf), 2011. 31
- [75] L. X. Wang and R. V. Melnik. Model reduction applied to square to rectangular martensitic transformations using proper orthogonal decomposition. *Applied numerical mathematics*, 57(5-7) :510–520, 2007. 35
- [76] K. Willcox. Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition. *Computers & fluids*, 35(2) :208–226, 2006. 37
- [77] Y. Zhang, A. Combescure, and A. Gravouil. Efficient hyper reduced-order model (hrom) for parametric studies of the 3d thermo-elasto-plastic calculation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 102 :37–51, 2015. 39
- [78] Y. Zhang, A. Combescure, and A. Gravouil. Modèle thermique hyper-réduit avec source mobile : formulation dans le repère mobile. *S01 Modélisation avancée en mécanique des solides et des fluides*, 2015. 39

Résumé

Le soudage multipasse est mis en œuvre pour recharger des tuyauteries présentant localement des sous-épaisseurs. La simulation numérique facilite le choix des nombreux paramètres de soudage. La réduction des modèles permet d'accélérer ces choix. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux cas pour lesquels il est difficile de réaliser intégralement la simulation du soudage, faute de temps ou par manque de moyens de calcul. Ce sont des simulations hors d'atteintes. Or, les prévisions manquantes ne permettent pas la mise en œuvre d'une méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres pour extraire une base réduite de modes empiriques à partir des données produites par simulation numérique. Nous proposons donc soit un modèle directionnel bien adapté au soudage, soit une étape d'extrapolation des données de simulations par décalage spatial des prévisions calculées. Ces deux approches sont complémentaires de la méthode d'hyper-réduction, dans laquelle les équations de bilan sont restreintes à un maillage réduit. Ces méthodes permettent de démarrer une simulation numérique du soudage avec un modèle éléments finis, puis de poursuivre cette simulation par un modèle hyper-réduit. Cela évite d'avoir à réaliser de nombreuses études paramétriques et permet de traiter des simulations qui sont hors d'atteintes. Ce mémoire se termine par un chapitre traitant du cas de rechargement d'un tube, pour lequel EDF a mis en œuvre un essai instrumenté.

Mots Clés

simulation numérique du soudage, hyper-réduction, méthodes numériques simplifiées, élastoplasticité, thermomécanique

Abstract

Multi-pass welding is used to recharge pipes with local sub-thickness. Numerical simulation facilitates the selection of many welding parameters. Reducing the order of models speeds up these choices. In this work, we were interested in cases where it is difficult to carry out the entire welding simulation due to time constraints or lack of calculation means. These computations are called out of reach simulations. However, the missing forecasts do not allow the implementation of an orthogonal decomposition method to extract a reduced basis of empirical modes from the data produced by numerical simulations. To overcome this difficulty, we propose either a directional model well adapted to welding, or a step of extrapolation of the simulation data by spatial shift of the already calculated forecasts. These two approaches are complementary to the hyper-reduction method, in which the balance equations are restricted to a reduced mesh size. These methods allow to start a numerical simulation of welding with a finite element model, then to continue this simulation with a hyper-reduced model. This avoids the need for numerous preliminary parametric studies and allows simulations that are out of reach. This manuscript ends with a chapter dealing with the case of reloading a tube, for which EDF has carried out an instrumented test.

Keywords

welding numerical simulation, hyper-reduction, simplified numerical method, elastoplasticity, thermomechanic