HAL
open science

Analyse des tolérances des systèmes complexes – Modélisation des imperfections de fabrication pour une analyse réaliste et robuste du comportement des systèmes

Edoh Goka

▶ **To cite this version:**

Edoh Goka. Analyse des tolérances des systèmes complexes – Modélisation des imperfections de fabrication pour une analyse réaliste et robuste du comportement des systèmes. Génie mécanique [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2019. Français. NNT : 2019ENAM0019 . tel-02193978

HAL Id: tel-02193978

https://pastel.hal.science/tel-02193978

Submitted on 25 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2019-ENAM-0019

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

Pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Conception "

Présentée et soutenue publiquement par

Edoh GOKA

le 12 Juin 2019

Analyse des tolérances des systèmes complexes - Modélisation des imperfections de fabrication pour une analyse plus réaliste et robuste du comportement des systèmes

Directeur de thèse : **Jean-Yves DANTAN**

Co-encadrement de la thèse : **Lazhar HOMRI, Pierre BEAUREPAIRE**

Jury

M. Luc MATHIEU, Professeur des Universités, Université Paris Sud	Président
M. Jean-Marc LINARES, Professeur des Universités, Aix-Marseille Université	Rapporteur
M. François VILLENEUVE, Professeur à l'Université Grenoble Alpes	Rapporteur
M. Christian GOGU, Maître de conférences (HDR) – Université Paul Sabatier	Examinateur
M. Jean-Yves DANTAN, Professeur, LCFC, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. Lazhar HOMRI, Maître de conférences, LCFC, Arts et Métiers ParisTech	Examinateur
M. Pierre BEAUREPAIRE, Maître de conférences, SIGMA-Clermont	Examinateur
M. Antoine DUMAS, Docteur Ingénieur, Phimeca SA	Invité

T H È S E

Arts et Métiers ParisTech- Campus de Metz

Laboratoire de Conception Fabrication Commande

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je rédige ces derniers paragraphes de mes travaux de recherche menés au sein du laboratoire LCFC (Laboratoire de Conception Fabrication et Commande). Que ce fut une excellente aventure durant ces 3 ans de thèse où rien n'était gagné d'avance. A force de sacrifice, de rigueur, de discipline et de travail tout s'est bien déroulé, et ici je tiens à remercier les personnes qui ont contribuées à ce joyeux dénouement.

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment **Luc MATHIEU**, professeur des Universités à Paris Sud pour avoir accepté présider mon jury de thèse. Mes remerciements également vont aux professeurs des Universités **Jean-Marc LINARES** et **François VILLENEUVE**, qui ont accepté rapporter avec rigueur mes travaux de thèse et qui m'ont permis de les enrichir.

Je remercie aussi **Christian GOGU**, maitre de conférences (HDR) à l'université Paul Sabatier pour avoir examiné mes travaux et **Antoine DUMAS**, Docteur-Ingénieur à Phiméca pour avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Je tiens du fond de mon cœur à remercier mon directeur de thèse **Jean-Yves DANTAN**, professeur des universités à l'ENSAM de Metz, mes encadrants **Lazhar HOMRI** et **Pierre BEAUREPAIRE**, maitres de conférences respectivement à l'ENSAM de Metz et à SIGMA-Clermont, pour leur pédagogie, leur rigueur, leurs investissements de tous les jours, leur côté humain et leur patience. Merci de m'avoir pris comme votre doctorant et de m'avoir fait découvrir ce monde du tolérancement géométrique que j'ai eu le plaisir d'embrasser.

Un grand merci à tous mes collègues et amis du laboratoire : Jelena, Wahb, Yves, Ismail (Taleb), Ismail (El Mouayni), Juan, Jose, Tian, Wu, Zhicheng, Qing, Li, Mohammad, Uzair, Paul, Malek, Roozbeh sans oublier Stéphanie, Sandra pour les échanges enrichissants, les aides et les bons moments conviviaux passés ensemble.

Enfin, j'exprime une grande gratitude à mes parents, frères et sœurs qui sont au pays, pour leurs prières, leurs aides, leur patience et leurs encouragements de tous les jours. Merci pour leurs sacrifices et leur support indéfectible qui ont permis que leur fils ou frère soit aujourd'hui un docteur. Je vous aime énormément.

Table des matières

Liste des figures v

Liste des tableaux vii

Introduction 1

Contexte 1

Positionnement et problématiques de la thèse 3

Méthodologie de recherche 5

Objectifs de la thèse 5

Plan du mémoire 5

Chapitre 1 : Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques sans défauts de forme 8

1.1 Introduction 8

1.2 Analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques 10

1.2.1 Modélisation des variations géométriques 11

1.2.2 Modélisation du comportement géométrique d'un mécanisme 18

1.2.3 Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 24

1.3 Les différentes méthodes d'analyse des tolérances du projet AHTOLA 26

1.3.1 Simulation de Monte Carlo et optimisation 26

1.3.2 La méthode FORM pour la résolution du problème fonctionnel 29

1.4 Conclusion 30

Chapitre 2 : Modélisation des imperfections de fabrication et du comportement géométrique des liaisons 32

2.1 Introduction 32

2.2 Modélisation des imperfections de fabrication : les défauts de forme 33

2.2.1 Les méthodes paramétriques 35

2.2.2 Les méthodes basées sur le morphing du maillage 38

2.2.3 Les méthodes basées sur les bruits blancs 39

2.2.4 Le skin modèle 40

2.2.5 Les méthodes modales 43

2.2.6 Comparaison et analyse des méthodes de modélisation de défauts de forme 50

2.2.7 La méthode de la Décomposition Métrique Modale 50

2.2.8 Synthèse 56

2.3 Modélisation du comportement géométrique des liaisons 57

2.3.1 Synthèse des travaux sur la modélisation du comportement géométrique des liaisons 57

2.3.2 Prise en compte des types de contacts dans la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique 61

2.4 Conclusion 73

Chapitre 3 : Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques - techniques de résolution 75

3.1 Introduction 76

3.2 Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques - méthode classique 76

3.2.1 Condition d'assemblage – formalisation de son problème d'optimisation et evaluation de la probabilité de non-assemblage 77

3.2.2 Condition de fonctionnalité – formalisation de son problème d'optimisation et évaluation de la probabilité de non-fonctionnalité 80

3.2.3 Synthèse 83

3.3 Choix de l'algorithme d'optimisation 84

3.3.1 Démarche 85

3.3.2 Résultats – Comparaisons 88

3.3.3 Synthèse 93

3.4 Nouvelle approche d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste des jeux 94

3.4.1 Construction de la densité par l'estimation par noyaux 95

3.4.2 Génération de nouvelles variables basés sur l'estimation par l'estimation par noyaux 97

3.4.3 Intégration des nouvelles variables dans la démarche de l'analyse des tolérances 100

3.4.4 Justification de la proposition d'un modèle probabiliste pour la caractérisation du jeu 102

3.5 Conclusion 104

Chapitre 4 : Applications 105

4.1 Introduction 105

4.2 Assemblage et exigence fonctionnelle d'un moteur électrique 106

4.2.1 Formulation et modélisation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 106

4.2.2 Résultats 112

4.3 Assemblage d'une pompe PIERBURG 119

4.3.1 Formulation et modélisation du problème d'assemblage 120

4.3.2 Résultats 123

4.4 Conclusion 124

Conclusion et perspectives 126

Annexe A : Table des notations 133

A.1 Notations générales 133

A.2 Notations relatives à l'analyse des tolérances 133

A.3 Notations relatives aux modèles probabilistes 134

Annexe B 135

B.1 Défauts de forme élémentaires d'une surface plane 135

B.2 Défauts de forme élémentaires d'un cylindre 139

B.3 Défauts de forme élémentaires d'un anneau (surface plane circulaire) 144

Annexe C 148

C.1 Méthode du simplexe standard 148

C.2 Méthode du simplexe révisé 151

C.3 Algorithme de SLSQP 152

C.4 Algorithme de CVXPY 153

Annexe D 155

D.1 Modélisation du comportement géométrique 155

D.2 Valeurs des paramètres 161

Annexe E 162

E.1 Similarités entre les répartitions des données originales et des données issues de l'estimation par noyaux 162

E.2 Résultats des simulations du tableau 4.2 165

Annexe F 169

E.1 Modélisation du comportement géométrique 169

F.2 Valeurs des paramètres 174

Bibliographie 175

RESUME 189

Liste des figures

Figure 0.1 : Le cadre de la thèse 2
Figure 0.2 : Positionnement des travaux de thèse 4
Figure 0.3 : Plan du document de thèse 7
Figure 1.1 : (a) Surface nominale, (b) Surface non-idéale, (c) Surface de substitution, (d) différents types de surface pour une surface nominale cylindrique (Dumas, 2014) 12
Figure 1.2 : Représentation du torseur écart pour une surface cylindrique 14
Figure 1.3 : Représentation de jeu entre deux pièces 16
Figure 1.4 : (a) contact fixe, (b) contact glissant, (c) contact flottant (Dantan et Ballu, 2002) 17
Figure 1.5 : Boucle topologique et graphe d'assemblage d'un mécanisme 20
Figure 1.6 : Contrainte de non-interpénétration entre deux surfaces 21
Figure 1.7 : Considération des points d'écriture des contraintes d'interface : (a) contact flottant plan-plan, (b) contact flottant cylindre-cylindre (Dantan, 2000) 22
Figure 1.8 : Méthode de la simulation de Monte Carlo couplée à l'algorithme d'optimisation 29
Figure 2.1 : Classification des méthodes de modélisation des défauts de forme (librement adaptée de (Yan et Ballu, 2018a)) 34
Figure 2.2 : Illustration d'une courbe de Bézier avec cinq points de contrôle 36
Figure 2.3 : Surface NURBS Bicubique (Les Piegl et Wayne Tiller, 1997b) 37
Figure 2.4 : Application de la méthode du morphing du maillage à une surface plane 38
Figure 2.5 : Application de la distribution gaussienne 1D sur un plan (Yan et Ballu, 2018a) 40
Figure 2.6 : Génération de la forme du Skin modèle durant la phase de prédiction (Schleich et al., 2015a) 41
Figure 2.7 : Différentes étapes de génération des formes du Skin modèle : (a) Segmentation et discrétisation, (b) Simulation des défauts de fabrication et ajustements, (c) Combinaison (Yan et Ballu, 2016) 42
Figure 2.8 : Plan aléatoire à gauche et plan TFD à droite 44
Figure 2.9 : Plan aléatoire à gauche et plan TCD à droite 45
Figure 2.10 : Exemple de champ aléatoire d'un processus stochastique unidimensionnel avec comme fonction de covariance $C(x_1, x_2) = a^2.exp(-(x_1 - x_2)^2 / l_0^2)$ et utilisant l'expansion de

Karhunen-Loève. Les 30 premiers vecteurs propres et valeurs propres correspondants ont été utilisés pour la modélisation. 47
Figure 2.11 : Exemple de champ aléatoire d'un processus stochastique bidimensionnel avec comme fonction de covariance $C(x_1, x_2) = a^2.exp(-(x_1 - x_2)^2 / l_0^2)$ et utilisant l'expansion de Karhunen-Loève. Les 50 premiers vecteurs propres et valeurs propres correspondants ont été utilisés pour la modélisation. 47
Figure 2.12 : Formes modales naturelles d'un plan carré (Samper et Formosa, 2006) 49
Figure 2.13 : Superposition des défauts élémentaires des surfaces cylindrique et plane (En rouge le cylindre nominal sans défauts et en blanc le cylindre avec défauts de forme) 54
Figure 2.14 : Représentation d'un plan (à gauche) et d'un cylindre (à droite) avec défauts de forme 54
Figure 2.15 : Surface sans et avec défauts de forme 56
Figure 2.16 : Boucle topologique entre deux pièces 62
Figure 2.17 : Différents types de contraintes d'interface 64
Figure 2.18 : Définition du jeu entre de la liaison entre deux surfaces cylindriques 65
Figure 2.19 : Composantes des torseurs jeux selon l'état des surfaces et la nature du contact 67
Figure 2.20 : Identification des points pour développer les contraintes d'interface 70
Figure 2.21 : Illustration d'une contrainte d'interface entre deux points 72
Figure 3.1 : (a) Assemblage entre deux pièces ; (b) Graphe des liaisons de l'assemblage 79
Figure 3.2 : Procédure de l'analyse des tolérances 83
Figure 3.3 : Composantes du vecteur $\underline{\mathbf{G}^*_{kj/ij}}$ d'un contact glissant plan-plan à contour circulaire 86
Figure 3.4 : Approche globale améliorée de l'analyse des tolérances 101
Figure 4.1 : Représentation simplifiée 3D du moteur électrique 106
Figure 4.2 : Vue en coupe du moteur électrique 107
Figure 4.3 : Spécifications géométriques de la pièce 1 107
Figure 4.4 : Spécifications géométriques de la pièce 2 108
Figure 4.5 : Spécifications géométriques de la pièce 3 108
Figure 4.6 : graphe de liaisons du moteur électrique 109
Figure 4.7 : Représentation des données : (a) données originales, (b) Echantillons tirés de l'estimation par noyaux 116
Figure 4.8 : Lignes de niveaux des données de l'estimation par noyaux comparées aux points des données originales 117

Figure 4.9 : Graphe de liaisons de la pompe PIERBURG 120
Figure C.1 : Algorithme du simplexe standard 150
Figure E.1 : Comparaison de la répartition des paramètres du torseur jeu (w, α, β) pour F ~ $\mathcal{N}$(2.5x10-3, 10-4) 162
Figure E.2 : Comparaison de la répartition des paramètres du torseur jeu (w, α, β) pour F ~ $\mathcal{N}$(2.5x10-3, 10-2) 163
Figure E.3 : Comparaison de la répartition des paramètres du torseur jeu (w, α, β) pour F ~ $\mathcal{U}$(1.5x10^{-3}, 3.5x10^{-3}) 163
Figure E.4 : Lignes de niveau de la fonction de densité de probabilité des données issues de l'estimation par noyaux, comparées aux points des données originales pour F ~ N(2.5x10^{-3}, 10^{-2}) 164
Figure E.5 : Lignes de niveau de la fonction de densité de probabilité des données issues de l'estimation par noyaux, comparées aux points des données originales pour F ~ $\mathcal{U}$(2x10^{-3}, 3x10^{-3}) 164

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Classes de surface avec leur degré d'invariance et la représentation de leur torseur écart 15
Tableau 2.1 : Analyse par rapport aux critères des méthodes paramétriques 38
Tableau 2.2 : Analyse de la technique du morphing du maillage par rapport aux critères 39
Tableau 2.3 : Analyse des méthodes basées sur les bruits blancs par rapport aux critères 40
Tableau 2.4 : Analyse de la méthode de la forme du Skin modèle par rapport aux critères 42
Tableau 2.5 : Analyse de la TFD par rapport aux critères 44
Tableau 2.6 : Analyse de la TCD par rapport aux critères 46
Tableau 2.7 : Analyse de la méthode stochastique par rapport aux critères 48
Tableau 2.8 : Analyse de la méthode modale basée sur les modes vibratoires par rapport aux critères 49
Tableau 2.9 : Comparaison de toutes les méthodes de modélisation des défauts de forme par rapport aux deux critères 50
Tableau 2.10 : Quelques déformations élémentaires du cylindre 51
Tableau 2.11 : Analyse de la DMM par rapport aux critères 55
Tableau 2.12 : Etat de l'art des études sur les différents types de contacts 60
Tableau 3.1 : Résultats des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{1a/2a}}$ en fonction des algorithmes et des types de maillage (en gris les résultats divergents) 90
Tableau 3.2 : Résultats sur les violations de contraintes des simulations locales 89
Tableau 3.3 : Résultats des probabilités de défaillance en fonction des algorithmes des simulations locales et globales (en gris les résultats divergents) 92
Tableau 3.4 : Résultats sur les violations de contraintes pour les simulations globales (Nmc = 10) 93
Tableau 3.5 : Conclusion sur le choix du meilleur algorithme 93
Tableau 3.6 : Résultats en fonction des différents nombres N_{KDE} 103
Tableau 4.1 : Résultats des simulations 113
Tableau 4.2 : Temps de calcul en fonction du nombre de points de discrétisation 113
Tableau 4.3 : Les paramètres de la simulation locale sur le contact glissant 1a/2a 114
Tableau 4.4 : Résultats de la simulation F ~ N(2.5x10-3, 10-4), Nmc = 100000 118

Tableau 4.5 : Comparaison entre les deux méthodes d'analyse des tolérances pour la pompe PIERBURG 123
Tableau 4.6 : Résultats en fonction des différents écarts nominaux des diamètres 124
Tableau 4.7 : Résultats en fonction des écarts nominaux des diamètres et de la translation . 124
Tableau C.1 : Algorithme généralisé du simplexe 148
Tableau D.1 : Valeurs des coordonnées des points et des dimensions nominales du mécanisme 161
Tableau E.1 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{N}(2.5x10^{-3}, 10^{-6})$, Nmc = 100000 165
Tableau E.2 : Résultats de la simulation F ~ N(2.5x10-3, 10-4), Nmc = 100000..... 166
Tableau E.3 : Résultats de la simulation F ~ N($2.5x10^{-3}$, 10^{-2}), Nmc = 100000..... 166
Tableau E. 4 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{U}(2x10^{-3}, 3x10^{-3})$, Nmc = 100000 167
Tableau E.5 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{U}(1.5x10^{-3}, 3.5x10^{-3})$, Nmc = 100000 167
Tableau E.6 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{U}(-7.5x10^{-3}, 1x10^{-2})$, Nmc = 100000 168
Tableau F.1 : Valeurs des coordonnées des points et des dimensions nominales du mécanisme 174
Tableau F. 2 : Ecarts-types des composantes des torseurs de spécification..... 174

Introduction

Les variations géométriques des pièces sont omniprésentes lors de leur fabrication. Ces imperfections inhérentes aux procédés de fabrication entraînent une dégradation des caractéristiques du produit, et donc de sa qualité, pouvant conduire à une certaine proportion de produits non fonctionnels ou non assemblables. Ces imperfections sont inévitables et sont bien expliquées par les axiomes sur les imprécisions de fabrication dans (Srinivasan, 2007) :

Axiome de variabilité en production : « *de fait, personne n'est capable de réaliser une forme géométrique exactement conforme à sa définition fonctionnelle (exactitude) de plus, personne n'est capable de reproduire exactement une forme réalisée (dispersion)* ».

Il est important pour avoir des produits de qualité, de maitriser ces imperfections géométriques, en les définissant, en les modélisant et en les simulant.

L'analyse des tolérances des systèmes mécaniques a pour but de quantifier le niveau de qualité d'un système en vérifiant si les tolérances de conception permettent de garantir l'assemblage et la fonctionnalité du mécanisme. L'analyse des tolérances est un élément clé lors de la conception d'un produit car elle permet :

- d'estimer et d'améliorer la qualité du produit,
- de diminuer les coûts de fabrication,
- de réduire les rebuts en production.

Contexte

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet FUI AHTOLAND qui fait suite au projet ANR AHTOLA (ANR-11-MONU-0013). Le projet regroupe des partenaires académiques LCFC-Arts et Métiers ParisTech (Campus de Metz), l'Institut Pascal SIGMA-Clermont, et des partenaires industriels Phimeca, Mecamaster, Pierburg, Valeo, Radiall. Le projet vise à développer des approches sur l'analyse des tolérances de systèmes hyperstatiques par les partenaires académiques (LCFC et SIGMA-Clermont), qui seront implémentées dans des logiciels de Phimeca et Mecamaster et seront testés par la suite sur des applications industrielles développées par Pierburg, Valeo et Radiall (voir Figure 0.1). Ce projet part des perspectives du projet AHTOLA dans lequel des méthodes probabilistes d'analyse des tolérances de systèmes

hyperstatiques avec jeux ont été développées. Le projet FUI AHTOLAND traite des problématiques suivantes :

- développement et implémentation d'approches d'analyse des tolérances à partir d'une représentation du système incluant les défauts de forme,
- développement et implémentation d'approches d'analyse des tolérances de système au comportement multi-physique,
- développement et implémentation d'analyse de sensibilité afin d'analyser l'impact des tolérances et des capabilités sur les probabilités de défaillance.

L'objectif général de la thèse est de développer une méthode de modélisation des imperfections de fabrication pour une analyse des tolérances plus réaliste et robuste des systèmes hyperstatiques avec jeux. La thèse est dirigée par le Pr. Jean-Yves DANTAN (Arts et Métiers Paris Tech) et encadrée par le MCf. Lazhar HOMRI (Arts et Métiers Paris Tech) et le MCf. Pierre BEAUREPAIRE (SIGMA-Clermont).

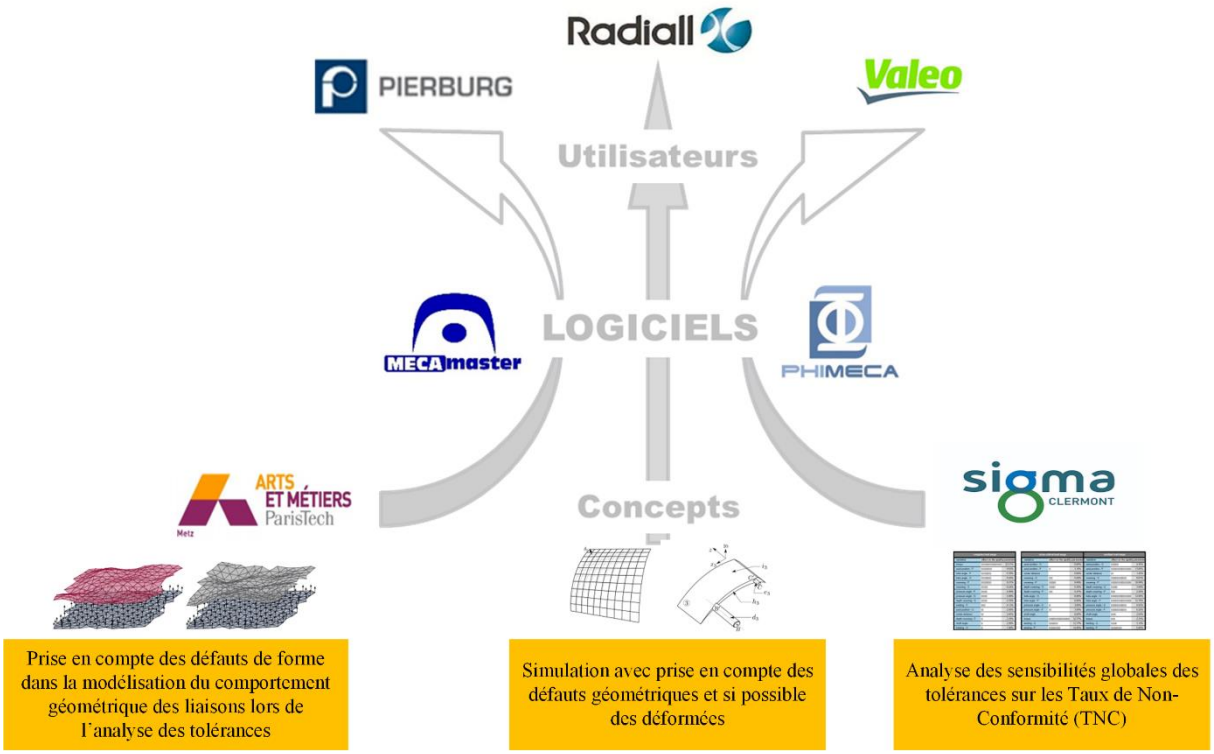


Figure 0.1 : Le cadre de la thèse

Positionnement et problématiques de la thèse

L'analyse des tolérances est un outil d'aide à la décision utilisé pour vérifier si les tolérances octroyées à chacune des composantes d'un produit permettent le respect des conditions d'assemblage et des exigences fonctionnelles. Grâce à l'analyse des tolérances, la qualité des produits est améliorée, le coût de la production et le nombre de rebut à la production sont réduits (Qureshi et al., 2012). L'analyse des tolérances est sujette à trois problématiques :

- Modéliser les défauts géométriques inhérents au processus de fabrication (usure des outils, variabilité des opérateurs, …),
- Modéliser le comportement géométrique des systèmes mécaniques à l'aide de modèles mathématiques,
- Développer des méthodes d'analyse des tolérances pour estimer le niveau de qualité de systèmes mécaniques.

Au fil des années, de nombreuses méthodes ont été proposées pour réaliser l'analyse des tolérances de différents systèmes mécaniques. La Figure 0.2 montre le classement des méthodes actuelles en fonction des systèmes mécaniques étudiés. Ce classement est important car il permet de positionner les travaux de thèse et fixe les limites d'application des différentes méthodes développées. Ainsi, plusieurs formulations mathématiques ont été proposées afin de modéliser le comportement des différents systèmes mécaniques. Les travaux de thèse se situent au niveau des modèles de comportement des systèmes ayant des fonctions explicites et implicites comme fonction réponse des systèmes (voir Figure 0.2). Cependant, force est de constater que la plupart des méthodes existantes dans les logiciels du marché, considèrent des défauts simplifiés, très éloignés de ce qui peut être observés sur les pièces réelles. Les surfaces réelles sont composées en plus des défauts géométriques (défauts dimensionnels, d'orientation et de position), des défauts de forme et des défauts de rugosité. Et dans les études, ce sont souvent des approximations de ces surfaces réelles qui sont utilisées et de ce fait, les défauts de forme et les défauts de rugosité sont négligés. Les industriels sont alors confrontés à l'absence de solutions logicielles d'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques compatibles avec les logiciels Conception Assistée par Ordinateur (CAO), introduisant de nouvelles fonctionnalités telle que la considération des défauts de forme, pour une analyse plus réaliste des tolérances. Ainsi, se formulent les problèmes de la thèse et aussi les besoins des partenaires industriels :

- Comment modéliser les défauts géométriques de la géométrie des systèmes mécaniques ?
- Comment simuler l'impact des défauts de forme sur le comportement géométrique des systèmes ? En particulier comment simuler l'impact des défauts de forme sur les conditions d'assemblage et de fonctionnement des systèmes ?

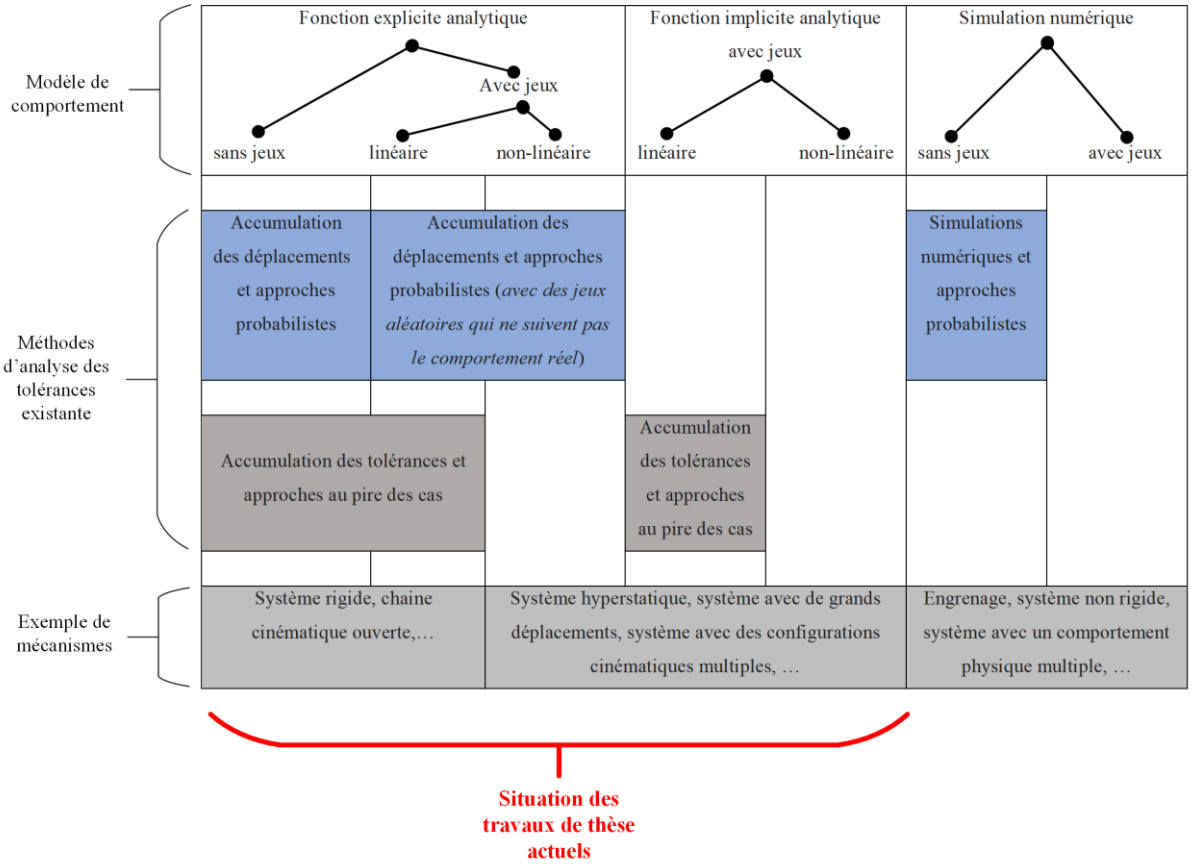


Figure 0.2 : Positionnement des travaux de thèse

La résolution de ces problèmes permet de réduire les incertitudes associées aux modèles utilisés dans l'analyse des tolérances, en intégrant dans le modèle du comportement du système les imperfections inhérentes au procédé de fabrication et en particulier les défauts de forme. Les défauts de rugosité ne sont pas considérés dans les développements de ces travaux de thèse.

Méthodologie de recherche

Dans le projet précédent AHTOLA, des méthodes probabilistes ont été développées afin de réaliser l'analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques. Ainsi, étant donné que le projet actuel AHTOLAND s'inscrit dans la continuité du projet précédent avec comme finalité des applications informatiques, les modélisations et méthodes qui sont proposées dans ces travaux de thèse doivent être compatibles avec les techniques déjà développées. Comme évoqué dans la section précédente, pour réaliser l'analyse des tolérances, trois problématiques doivent être résolues. Les travaux de cette thèse vont approfondir particulièrement les deux premières problématiques de l'analyse des tolérances qui découleront sur de nouvelles fonctionnalités des logiciels CAO existants. Ainsi, la méthode de modélisation des défauts de forme et les nouveaux aspects de la modélisation du comportement géométrique des systèmes mécaniques, doivent posséder des propriétés permettant leur intégration et utilisation dans les méthodes probabilistes déjà développées antérieurement.

Objectifs de la thèse

Les objectifs de cette thèse portent sur la modélisation des imperfections inhérentes aux procédés de fabrication, la modélisation réaliste et robuste du comportement géométrique de systèmes mécaniques hyperstatiques. Ils peuvent être résumés comme suit :

- Développer une méthode permettant de modéliser les défauts de forme et qui soit compatible avec les méthodes probabilistes développées.
- Intégrer ces défauts dans la modélisation du comportement géométrique d'un mécanisme hyperstatique avec jeu et évaluer leurs impacts.

Plan du mémoire

Ce manuscrit est divisé en quatre chapitres (voir Figure 0.3) qui sont présentés comme suit.

Le premier chapitre est consacré à la présentation des méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances sans défauts de forme. Les différentes étapes de l'analyse des tolérances des systèmes hyperstatiques avec jeux sont expliquées. Les étapes portent sur les méthodes de

modélisation des variations géométriques, les modélisations des comportements géométriques et les techniques (modèles probabilistes) d'analyse des tolérances.

Le deuxième chapitre décrit d'abord la méthode proposée pour la modélisation des imperfections géométriques inhérentes au processus de fabrication. Une synthèse des travaux antérieurs sur la génération des défauts de forme est présentée puis la méthode modale de modélisation des défauts de forme est développée afin de répondre aux exigences de l'approche probabiliste pour l'analyse des tolérances. Ensuite, le processus de modélisation du comportement géométrique de systèmes mécaniques hyperstatiques est présenté en considérant les différents types de contacts et en intégrant les défauts de forme. L'introduction de ces défauts de forme impacte la méthode de modélisation du comportement géométrique définie à l'aide des contraintes. En particulier, les contraintes caractérisant les contacts sont impactées et une redéfinition des différentes contraintes est requise. Les différents contacts sont ainsi modélisés différemment. Les contacts fixes et glissants sont à prendre d'une manière différente par rapport aux contacts flottants. Cette différence apparait dans la définition des composantes du jeu modélisant ces contacts.

Le troisième chapitre porte tout d'abord sur la présentation d'une première méthode d'analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques en intégrant les défauts de forme et les différents comportements des types de contacts. La technique d'analyse des tolérances est basée sur l'application de la simulation de Monte Carlo couplée à une technique d'optimisation. Toutefois, cette technique d'analyse des tolérances est améliorée en introduisant une nouvelle technique d'optimisation qui permet de modéliser le comportement géométrique des contacts fixes et glissants. La procédure globale d'analyse des tolérances d'un système mécanique est modifiée par rapport à celle déjà développée précédemment. Cette nouvelle optimisation est réalisée à chaque itération de Monte Carlo et cela demande des efforts numériques importants. Afin d'apporter des améliorations à ce processus, un modèle probabiliste du jeu entre les surfaces en contact (fixe et glissant) est développé. L'introduction du modèle probabiliste des jeux des contacts fixes et glissants permet d'avoir une nouvelle procédure de réalisation de l'analyse des tolérances.

Le quatrième chapitre se focalise sur les applications des différents outils développés sur des exemples de systèmes mécaniques hyperstatiques.

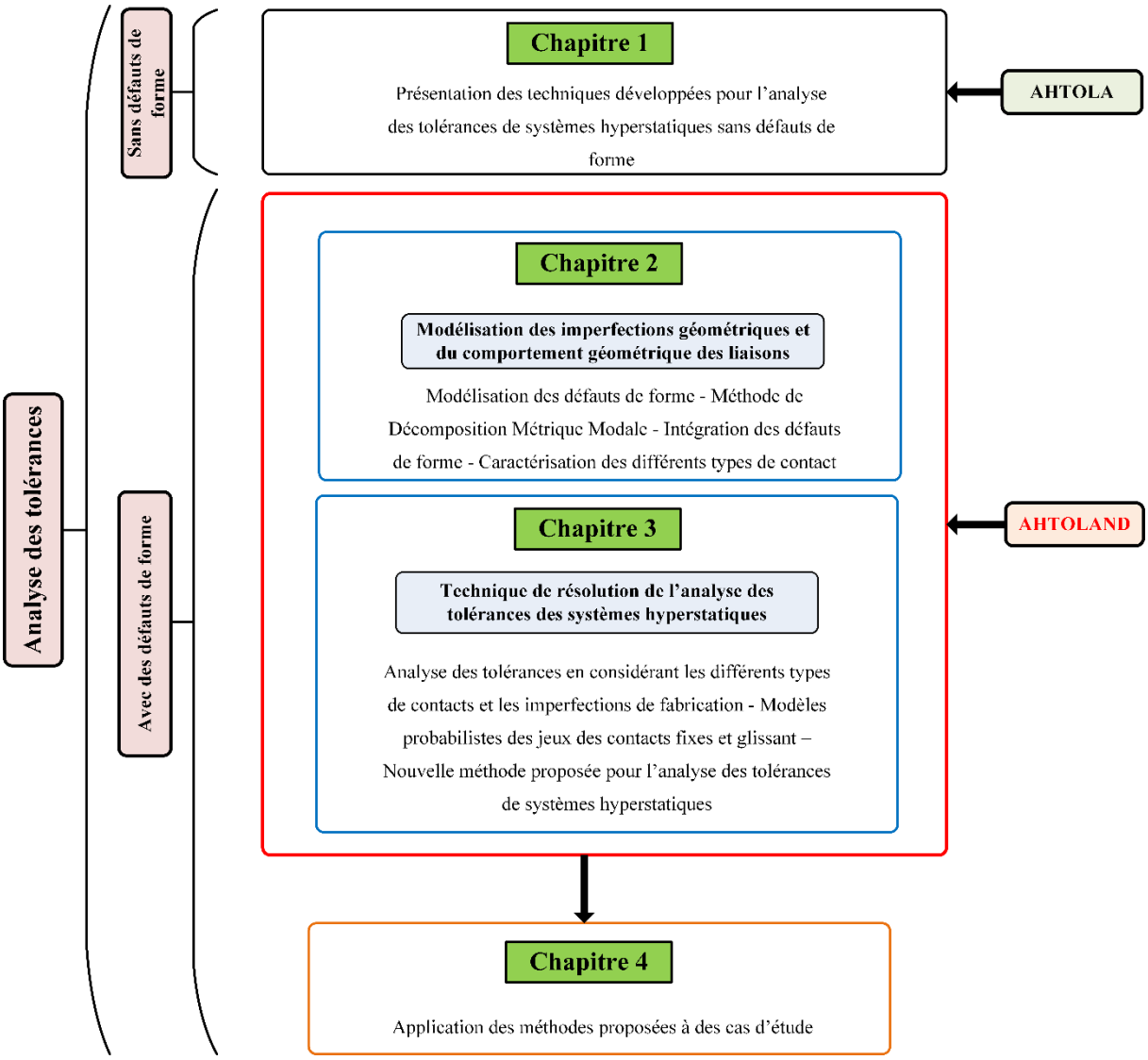


Figure 0.3 : Plan du document de thèse

Chapitre 1 : Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques sans défauts de forme

Sommaire

1.1 Introduction 8

1.2 Analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques 10

1.2.1 Modélisation des variations géométriques 11

1.2.2 Modélisation du comportement géométrique d'un mécanisme 18

1.2.3 Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 24

1.3 Les différentes méthodes d'analyse des tolérances du projet AHTOLA 26

1.3.1 Simulation de Monte Carlo et optimisation 26

1.3.2 La méthode FORM pour la résolution du problème fonctionnel 29

1.4 Conclusion 30

1.1 Introduction

Ce chapitre présente une synthèse des travaux sur les méthodes probabilistes de l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques sans défauts de forme, développées principalement dans le projet AHTOLA.

L'analyse des tolérances est un outil d'aide à la décision, utilisé durant la phase de conception pour vérifier le respect des spécifications géométriques et des tolérances des éléments d'un produit au regard des conditions d'assemblage et des conditions fonctionnelles. Globalement, il s'agit de répondre pendant l'analyse des tolérances aux trois questions suivantes :

- comment modéliser les variations géométriques des surfaces d'un mécanisme et les jeux entre deux surfaces potentiellement en contact ?

- comment modéliser le comportement géométrique du système ?
- quels sont les techniques et modèles mathématiques associés à la réalisation de l'analyse des tolérances ?

Pour répondre à ces trois problématiques de l'analyse des tolérances, deux types d'approche sont généralement proposés (voir Figure 0.2) : une approche par accumulation des tolérances et une approche par accumulation des déplacements.

L'approche par accumulation des tolérances est basée sur la méthode d'analyse au pire des cas pour définir des tolérances garantissant la probabilité de rebut égal à zéro. Les dimensions et les tolérances sont définies de telle manière que toutes les combinaisons possibles des pièces du mécanisme assurent son assemblage. Des domaines de variations admissibles sont définis par rapport aux écarts géométriques et aux jeux (domaines écarts et domaines jeux).

Les spécifications géométriques simples sont représentés par :

- les domaines écarts (Giordano et al., 2001; Mansuy et al., 2011; Petit, 2004), des polytopes (Gouyou et al., 2016; L. Homri, 2014) ;
- des T-maps (Davidson et al., 2002; Singh et al., 2013);
- les enveloppes convexes de spécifications (Dantan et Ballu, 2002; Dantan et al., 2005).

Ces concepts sont d'hypothétiques volumes euclidiens qui représentent tous les écarts possibles (la taille, l'orientation et la position des caractéristiques). Pour l'analyse des tolérances, cette représentation mathématique des tolérances permet le calcul de l'accumulation des tolérances par la somme de Minkowski des domaines écarts et jeux. L'utilisation de cette méthode au pire des cas, conduit souvent à des tolérances plus serrées et à des coûts de production élevés à cause du fait que l'occurrence qui permet de calculer les pires des cas soit faible (Hong et Chang, 2002).

L'approche par accumulation des déplacements est quant à elle basée sur la méthode d'analyse statistique. Elle a pour but de déterminer la qualité d'un produit pas le biais d'une probabilité de défaillance ou d'un taux de rebut (Beaucaire et al., 2013; J-Y Dantan, A-J Qureshi, 2009; Morse, 2004; Nigam et Turner, 1995). Les écarts géométriques sont modélisés par des variables aléatoires qui suivent des distributions statistiques. Les paramètres des jeux sont modélisés par des variables libres et constituent les inconnues à identifier pour déterminer les configurations possibles d'assemblage et de fonctionnement du système mécanique. L'utilisation de la

méthode d'analyse statistique conduit à des tolérances plus larges. Les coûts de productions basées sur cette méthode sont moins élevés et les produits sont d'une qualité optimale (Hong et Chang, 2002). Cette méthode de l'analyse statistique a été déployée tout au long du projet AHTOLA dans le cadre des travaux de Dumas (2014).

L'analyse statistique des tolérances constitue la méthode de base du projet AHTOLA et elle représente la méthode qui est décrite dans ce chapitre pour l'étude des systèmes mécaniques hyperstatiques. Les méthodes d'analyse statistique ont été appliquées dans de nombreux travaux à de différents types de mécanisme : isostatique et hyperstatique. Les mécanismes isostatiques sont plus simples à étudier. L'étude des mécanismes hyperstatiques est plus complexe (Ballu et al., 2008). Plus récemment, Dumas *et al.* (2015a) ont proposé une démarche d'analyse statistique des tolérances des systèmes hyperstatiques avec jeux.

L'approche statistique permet d'évaluer les probabilités de respect des contraintes liées à l'assemblage et à la fonctionnalité d'un système mécanique et cela par le calcul des deux probabilités associées (Dumas, 2014; J-Y Dantan, A-J Qureshi, 2009).

Les travaux développés dans la littérature sont basés sur certaines hypothèses fortes qu'il est nécessaire d'énumérer :

- les défauts de forme des pièces sont négligés, ainsi, les surfaces considérées dans l'analyse sont les surfaces de substitution ;
- Les solides sont considérés comme rigides ;
- Les rotations entre les surfaces et les pièces sont supposées petites.

La prochaine section décrit les étapes ayant permis de calculer les probabilités de non-assemblage et de non-fonctionnalité, permettant ainsi de réaliser l'analyse des tolérances des systèmes hyperstatiques dans le cadre du projet AHTOLA.

1.2 Analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques

L'objectif de cette section est de présenter les trois problématiques de l'analyse des tolérances :

- la modélisation des écarts géométriques inhérents aux processus de fabrication et les jeux entre les pièces ;
- la modélisation du comportement géométrique du système ;
- le développement de techniques d'analyse pour évaluer la qualité du système.

La sous-section 1.2.1 est consacrée à la définition des différentes variations géométriques ainsi que la technique de modélisation choisie. La sous-section 1.2.2 décrit les étapes de modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique. Ces étapes sont constituées de plusieurs formulations mathématiques qui sont présentées en détail. Enfin la sous-section 1.2.3 présente la formalisation mathématique des problèmes d'assemblage et fonctionnel.

1.2.1 Modélisation des variations géométriques

Les variations géométriques représentent les écarts observés entre une surface dite idéale (une surface parfaite sans défauts) et une surface non-idéale (une surface avec des imperfections). Il est donc nécessaire de maîtriser ces variations géométriques afin d'apporter des garanties sur la qualité des produits. Il existe plusieurs modèles de surfaces comme le stipule la norme ISO17450-1 et peuvent être regroupés en trois groupes (voir Figure 1.1) :

- Le modèle nominal est une surface parfaite, sans défauts et constitue l'intention du concepteur.
- Le skin modèle représente la surface non-idéale ou la surface réelle des pièces fabriquées qui sont sujettes à toutes les imperfections causées durant le processus de fabrication, de mesure et d'assemblage [ISO17450-1]. C'est une surface non-idéale qui représente l'interface physique de la pièce avec son environnement (Ballu et Mathieu, 1996; Charpentier et al., 2012).
- Le modèle de substitution représente une surface souvent utilisée pour approximer la surface non-idéale. C'est une représentation de la surface non-idéale pilotée par un nombre fini de paramètres qui assurent un compromis entre le niveau de détail, la difficulté de calcul et la validité des résultats. Les orientations et les positions de ce modèle dépendent de la surface réelle (Dantan, 2000). Plusieurs choix sont disponibles pour obtenir la surface de ce modèle : la tangente à l'intérieur de matière, la tangente à l'extérieur de matière et la méthode des moindres carrés (Dumas, 2014). C'est ce modèle de substitution qui est utilisé dans l'analyse des tolérances de ce chapitre.

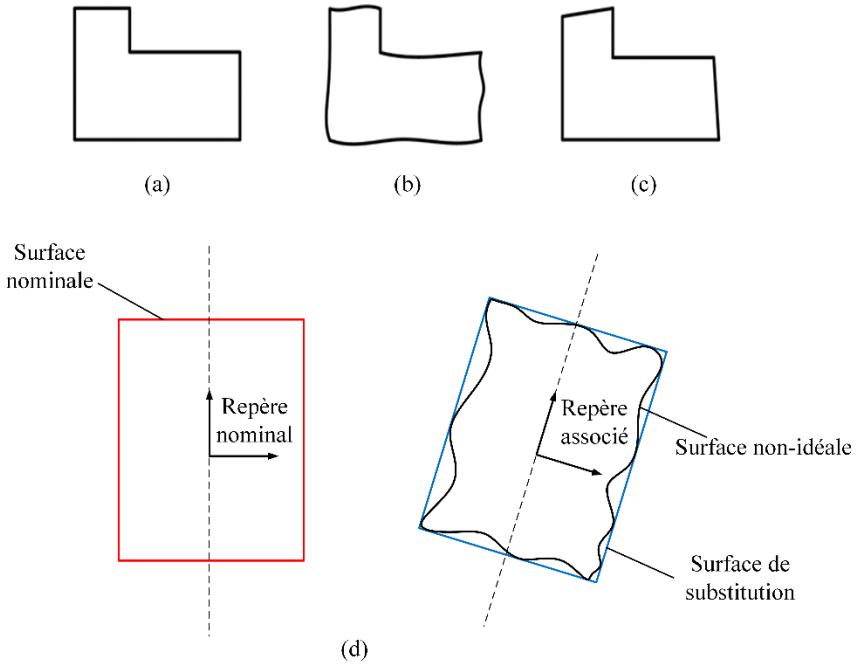


Figure 1.1 : (a) Surface nominale, (b) Surface non-idéale, (c) Surface de substitution, (d) différents types de surface pour une surface nominale cylindrique (Dumas, 2014)

Les écarts géométriques observés sur les surfaces des pièces fabriquées et dans un mécanisme sont de caractéristiques et natures différentes. On distingue : les écarts intrinsèques, les écarts de situation et les jeux entre les surfaces des liaisons et les caractéristiques fonctionnelles.

Les écarts intrinsèques sont comme le nom l'indique, intrinsèques à la surface, ils dépendent du type de surface, ils représentent les variations des paramètres intrinsèques des surfaces de substitution comme le cas de la variation du rayon pour une surface cylindrique (Dantan, 2000). Plus précisément, la variation intrinsèque du cylindre constitue la variation du rayon entre la surface de substitution du cylindre et la surface nominale du cylindre (Qureshi et al., 2012).

Les écarts de situation définissent les déplacements en position, en orientation d'une surface de substitution par rapport à sa surface nominale (Dantan, 2000). Ils sont composés des défauts de translations, de rotations. Ce sont ces écarts de situation ajoutés aux écarts intrinsèques qui décrivent les écarts entre la surface nominale et la surface de substitution.

Les jeux constituent les déplacements en position et en orientation entre deux surfaces de substitution, qui sont nominalement en contact. Leur présence est indispensable dans un mécanisme hyperstatique afin que ce dernier puisse s'assembler ou fonctionner.

La première problématique de l'analyse des tolérances consiste à modéliser mathématiquement à la fois les différents écarts des surfaces et les jeux au niveau des contacts. Ainsi, de nombreux outils ou modèles mathématiques existent dans la littérature permettant de modéliser ces écarts :

- *avec des vecteurs ou le tolérancement vectoriel* (Chase et Parkinson, 1991) ;
- *par les torseurs de petits déplacements* (Bourdet et al., 1996; Dantan et al., 2005; Dumas et al., 2015b; Qureshi et al., 2012; Sergent et al., 2011) ;
- *par les matrices* (Gupta et Turner, 1993; Roy et Li, 1999; Zou et Morse, 2004) ;
- *par l'approche cinématique* (M-H Kyung, E. Sacks, 2003; Sacks et Joskowicz, 1997).

Dans le projet AHTOLA, l'approche retenue est basée sur le *torseur de petits déplacements*. Le concept du torseur de petits déplacements a été proposé par Bourdet *et al.* (1996) pour caractériser les défauts géométriques des surfaces usinées en métrologie et en fabrication. Cependant, différents outils et modèles d'analyse peuvent être déployés avec d'autres modélisations des écarts et des jeux. Le concept du torseur de petits déplacements est basé sur le mouvement des solides rigides. Il modélise l'ensemble des déplacements en tout point. Plusieurs types de torseurs ont été définis pour représenter les différents types de défauts géométriques et jeux dans un mécanisme (Ballot, 1995; Petit, 2004) :

- Le torseur écart : il permet de décrire les déplacements relatifs d'une surface nominale rigide par rapport à la surface de substitution associée à la surface réelle (Dantan, 2000);
- Le torseur jeu : il permet de décrire les déplacements relatifs d'une surface de substitution par rapport à une autre surface de substitution ; ces deux surfaces de substitution étant nominalement en contact (Ballot, 1995; Giordano et Duret, 1993);
- Le torseur défaut : il permet de décrire les déplacements relatifs entre deux ou plusieurs surfaces d'une même pièce (Giordano et Duret, 1993);
- Le torseur pièce : il permet de décrire les déplacements entre une pièce nominale et un repère global fictif (Ballot, 1995).

Dans le cadre du projet AHTOLA, deux torseurs sont principalement utilisés pour modéliser les variations géométriques dans la démarche de l'analyse des tolérances : les torseurs écarts et les torseurs jeux. Ces deux concepts sont ainsi détaillés.

Le torseur écart décrit les déplacements d'orientation et de position d'une surface de substitution par rapport au repère de référence associé à sa géométrie nominale (voir Figure 1.2). Il est défini en un point spécifique du repère. Deux vecteurs sont utilisés afin de former

les composantes de ce torseur écart : le vecteur des petites rotations $\mathbf{R} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ et le vecteur des petites translations $\mathbf{T}_{\mathrm{M}} = (u_M,\ v_M,\ w_M)$ représentant respectivement les rotations autour des trois axes Ox, Oy et Oz et les translations du point *M* suivant ces trois axes. Certaines des composantes de ce torseur écart peuvent être nulles lorsqu'elles sont associées à des degrés d'invariance de la surface considérée. Les degrés d'invariance représentent les directions dans lesquelles la rotation ou la translation ne change pas globalement la position ou l'orientation de la surface. Le tableau 1.1 présente les degrés d'invariance de différentes classes de surfaces (plan, cylindre, sphère, cône, tore). Un torseur écart d'une surface *a* dans une pièce *i* et écrit en un point *M* peut être généralement exprimé par :

$$\{T_{ia/i}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{iai} & u_{iai,M} \\ \beta_{iai} & v_{iai,M} \\ \gamma_{iai} & w_{iai,M} \end{Bmatrix}_M \tag{1.1}$$

Par exemple, le torseur écart d'une surface cylindrique d'axe Oz (voir Figure 1.2) est donné par : $\{T_{3c/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3c3} & u_{3c3,M} \\ \beta_{3c3} & v_{3c3,M} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M$.

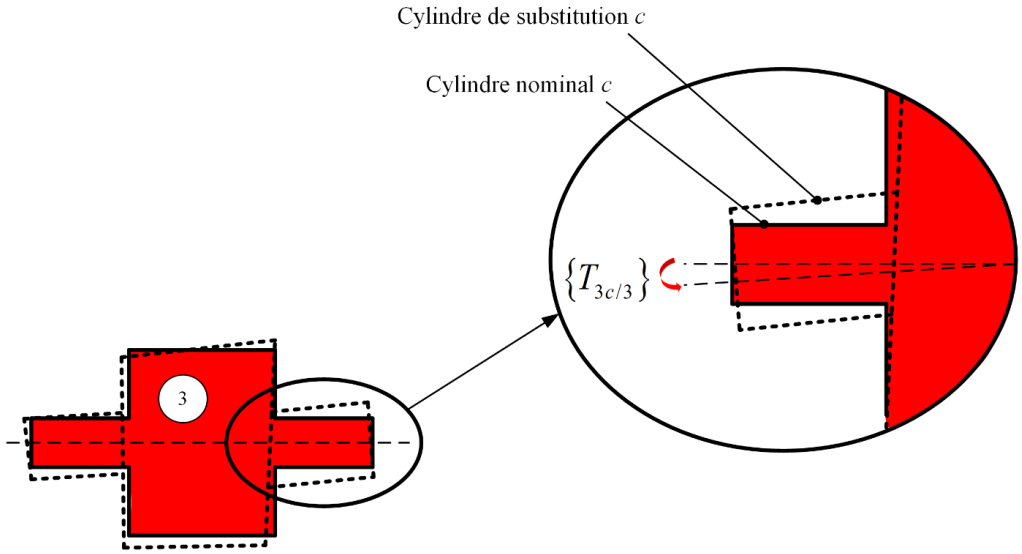
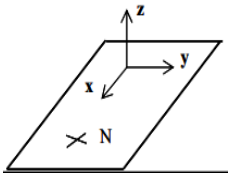
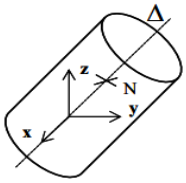
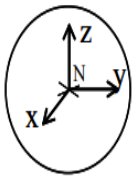
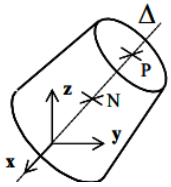
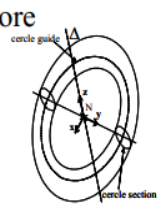


Figure 1.2 : Représentation du torseur écart pour une surface cylindrique

Le Tableau 1.1 présente la caractérisation des 5 surfaces par rapport à leur degré d'invariance et leur torseur écart, souvent rencontrées en tolérancement.

Tableau 1.1 : Classes de surface avec leur degré d'invariance et la représentation de leur torseur écart

Surface de substitution S	**Classe d'invariance**	**Degrés d'invariance**	**Elément de situation**	**Torseur écart**
Plan 	Plane	1 rotation **z** (γ) 2 translations **x** et **y** (u, v)	S	$\{T\}_M = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & w \end{Bmatrix}$
Cylindre 	Cylindrique	1 rotation **x** (α) 1 translation **x** (u)	Δ: axe de S	$\{T\}_M = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$
Sphère 	Sphérique	3 rotations **x**, **y**, **z** (α, β, γ)	N : centre de S	$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \\ 0 & w \end{Bmatrix}$
Cône 	Surface de révolution	1 rotation **x** (α)	Δ: axe de S P : centre de la petite base	$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$
Tore 	Surface de révolution	1 rotation **x** (α)	Δ: axe de S N : centre du cercle guide	$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$

Le torseur jeu comme le torseur écart, est défini dans une base vectorielle donnée et en un point donné. Un torseur jeu représente le déplacement possible en position et en orientation d'une surface de substitution par rapport à une autre des deux pièces potentiellement en contact. L'expression d'un torseur jeu entre une surface *b* sur la pièce *i* et une surface *b* sur la pièce *j* est donnée par :

$$\left\{\mathbf{g}_{ib/jb}\right\}_M = \begin{Bmatrix} \alpha_{ibjb} & u_{ibjb} \\ \beta_{ibjb} & v_{ibjb} \\ \gamma_{ibjb} & w_{ibjb} \end{Bmatrix}_{R_0} \tag{1.2}$$

La Figure 1.3 représente le torseur jeu entre deux surfaces cylindriques nominalement en contact et d'axe Oz.

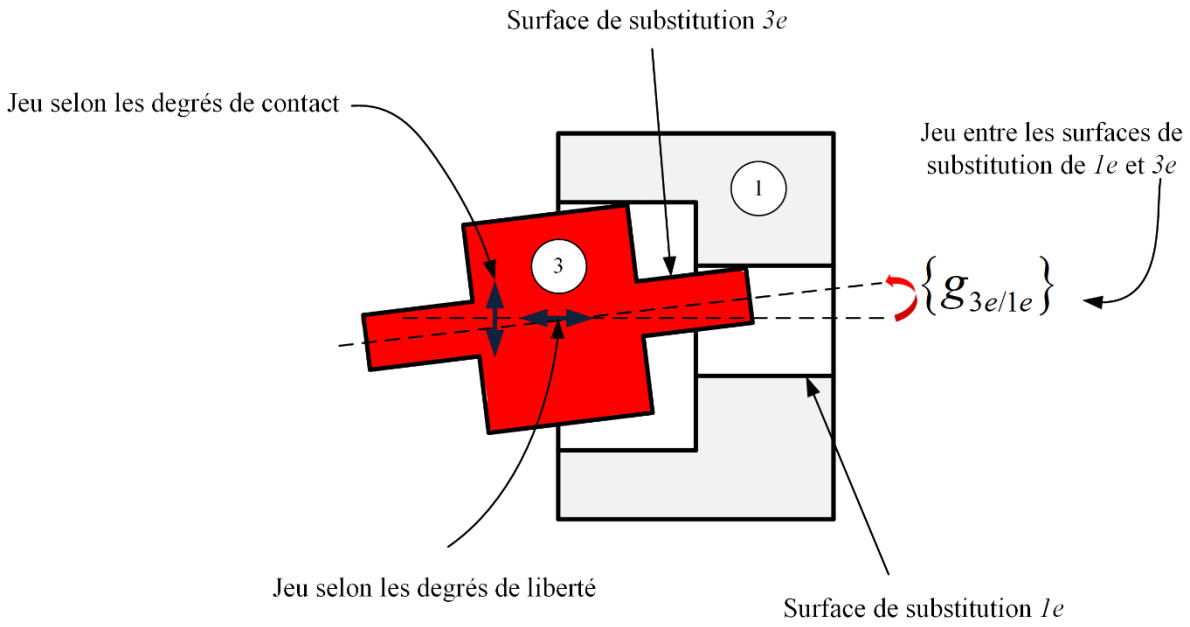


Figure 1.3 : Représentation de jeu entre deux pièces

Les composantes des six degrés de liberté composant ce torseur jeu $\{g_{1a/2a}\}_M$ dépendent de la nature du contact et doivent être déterminées par une méthode d'analyse (Dantan et Ballu, 2002). En effet, il existe 3 types de contacts, souvent rencontrés dans les systèmes mécaniques (Dantan, 2002; Dantan et Ballu, 2002) (voir Figure 1.4) : les contacts fixes, les contacts glissants et les contacts flottants.

Les contacts fixes possèdent des surfaces en contact maintenues dans une position particulière grâce à une contrainte mécanique qui empêche tout déplacement relatif des deux surfaces lors d'une utilisation du mécanisme. Les composantes du torseur jeu dans ce type de contact sont fixées à zéro dans l'hypothèse où les surfaces sont considérées sans défauts de forme.

Les contacts glissants ont également leurs surfaces de liaison aussi maintenues par une action mécanique qui laisse admissible les déplacements tangentiels lors d'une utilisation normale ; les déplacements relatifs non tangentiels (déplacements normaux, déplacements par rapport aux normales des surfaces en liaison) ne sont pas possibles. Les composantes du torseur jeu dans le cas d'un contact glissant sont ceux des déplacements cinématiques i.e. des déplacements qui sont possibles. Les autres composantes sont fixées à zéro ou à des valeurs spécifiques connues.

Les contacts flottants sont des contacts où tous les déplacements relatifs des deux surfaces sont possibles (déplacements tangentiels et normaux). Le torseur jeu d'un contact flottant possède toutes les composantes des six degrés de liberté qui sont inconnus.

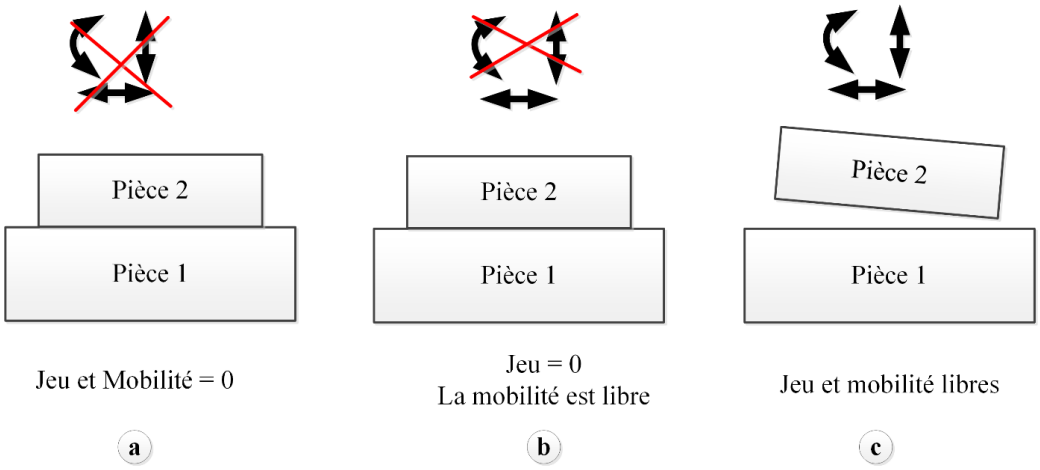


Figure 1.4 : (a) contact fixe, (b) contact glissant, (c) contact flottant (Dantan et Ballu, 2002)

Les caractéristiques fonctionnelles décrivent les déplacements en position, en orientation entre deux surfaces de substitution qui sont fonctionnellement en relation (Dantan, 2000; Dantan et Qureshi, 2009). Elles sont aussi modélisées à l'aide de torseurs jeu nommés torseurs jeux fonctionnels.

Toutes les composantes de ces variations géométriques présentées ci-dessus sont incluses dans la définition des contraintes modélisant le comportement géométrique d'un système mécanique.

Synthèse : cette première partie a permis de définir les écarts géométriques et le concept du jeu rencontrés dans les systèmes mécaniques hyperstatiques. Le concept du torseur de petits déplacements est la méthode choisie pour modéliser les écarts géométriques et les jeux grâce aux torseurs écarts et aux torseurs jeux. Les composantes des torseurs écarts caractérisent les écarts de situation. Ces composantes et les écarts intrinsèques constituent les écarts géométriques et sont représentés par **X**. L'ensemble des composantes des torseurs jeux est représenté par $\mathbf{G}$. Ces notations sont adoptées pour la suite de la présentation des travaux de ce chapitre.

Cependant, l'ensemble **G** subira une modification dans sa définition dans le cadre des travaux de thèse qui suivront. Plus amples informations concernant les notations utilisées dans ce manuscrit peuvent être trouvées dans l'annexe A. Une distinction est faite par rapport aux composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants d'une part, et des composantes des torseurs jeux des contacts flottants d'autre part.

1.2.2 Modélisation du comportement géométrique d'un mécanisme

La modélisation mathématique des interactions entre les différentes pièces d'un système mécanique permet de construire son modèle de comportement. Ainsi, un ensemble de contraintes permet de traduire mathématiquement le comportement géométrique d'un système mécanique : les équations de compatibilité, les contraintes d'interface et les conditions fonctionnelles.

1.2.2.1 Les équations de compatibilité

Les équations de compatibilité représentent les contraintes sur les déplacements inhérentes aux boucles topologiques (Ballot et Bourdet, 1998; Dantan et Ballu, 2002; Dantan et al., 2005). Elles représentent donc les relations de compatibilité entre les écarts et les jeux. L'ensemble des équations de compatibilité forment un système d'équations linéaires. Ces équations permettent de modéliser la propagation des défauts géométriques et des jeux dans un assemblage. En effet, dans un mécanisme, les défauts d'une pièce ont des influences sur une autre pièce. Il est donc nécessaire d'écrire les équations reliant ces différents écarts et jeux pour caractériser l'équilibre entre les positions et les orientations entre les différentes pièces dans le

mécanisme. L'ensemble des équations de compatibilité est identifiée par une relation de la forme : $C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=0$.

La structure topologique d'un système mécanique est modélisé par un graphe (Ballu et Mathieu, 1999; L. Homri, 2014). Un graphe est composé de plusieurs cycles. Un cycle est défini comme une chaine finie qui part d'un sommet pour en finir à ce même sommet et correspond à une boucle topologique (voir Figure 1.5). Chaque cycle du graphe permet d'écrire 6 équations de compatibilité, chacune écrite suivant les axes de chaque composante des torseurs (3 translations et 3 rotations).

Pour la formalisation, les torseurs des équations de compatibilité doivent être définis tous au même point du repère. Les torseurs qui ne le sont pas, peuvent être ramenés à ce point commun en utilisant la relation de Varignon.

Le nombre de boucle topologique dans un graphe nécessaire pour formuler les équations de compatibilité d'un système mécanique est donné par la relation :

$$N_{boucles}=N_{liaisons}-N_{pièces}+1 \tag{1.3}$$

En se basant sur la boucle topologique identifié dans la Figure 1.5 par la flèche bleue, les équations de compatibilité peuvent être ainsi développées faisant appel généralement à la relation de Chasles sur les déplacements (Dantan, 2000).

Les équations de compatibilité de la boucle topologique considérée dans graphe d'assemblage (exemple, Figure 1.5) et exprimés au point M, sont données par les équations suivantes :

$$\left\{T_{3/3}\right\}=\left\{T_{3/3e}\right\}_M+\left\{g_{3e/1e}\right\}_M+\left\{T_{1e/1}\right\}_M+\left\{T_{1/1d}\right\}_M+\left\{g_{1d/3d}\right\}_M+\left\{T_{3d/3}\right\}_M=0 \tag{1.4}$$

$$\begin{cases}-\alpha_{3e3}+\alpha_{3e1e}+\alpha_{1e1}-\alpha_{1d1}-\alpha_{3d1d}+\alpha_{3d3}=0\\ -\beta_{3e3}+\beta_{3e1e}+\beta_{1e1}-\beta_{1d1}-\beta_{3d1d}+\beta_{3d3}=0\\ \gamma_{3e1e}-\gamma_{3d1d}=0\\ -u_{3e3}+u_{3e1e}+u_{1e1}-u_{1d1}-u_{3d1d}+u_{3d3}=0\\ -v_{3e3}+v_{3e1e}+v_{1e1}-v_{1d1}-v_{3d1d}+v_{3d3}=0\\ w_{3e1e}-w_{3d1d}=0\end{cases} \tag{1.5}$$

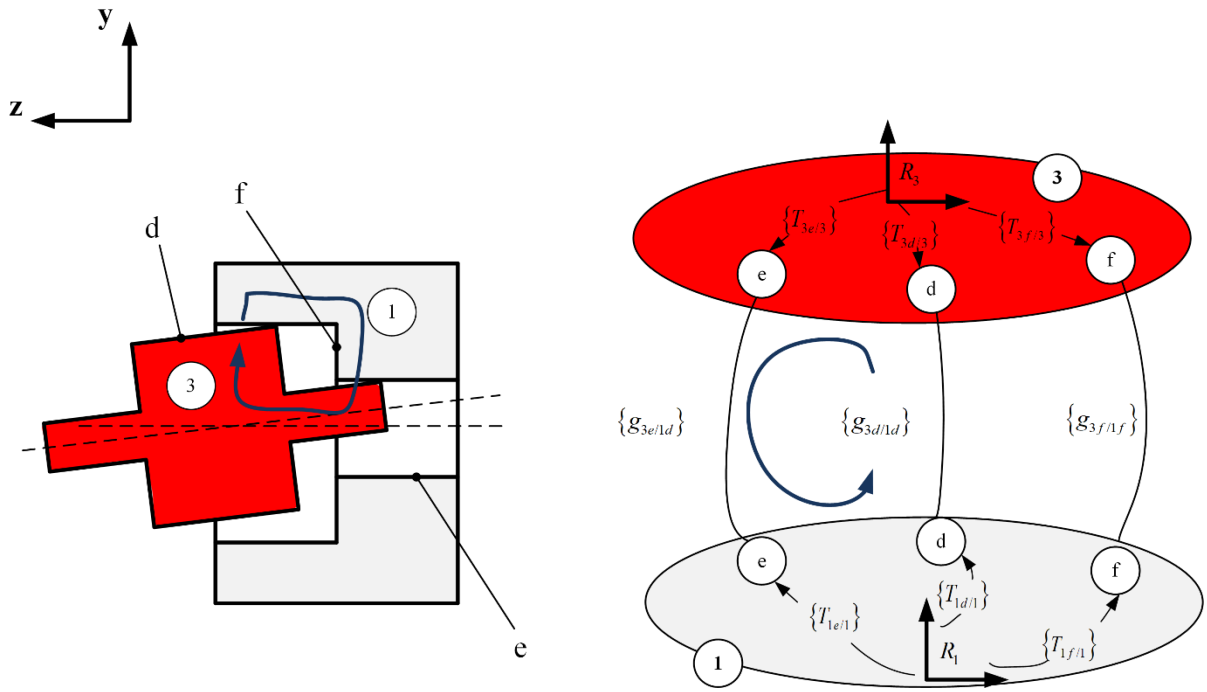


Figure 1.5 : Boucle topologique et graphe d'assemblage d'un mécanisme

Après la définition des compositions de déplacements entre les différentes pièces d'un mécanisme, il faut dans un second temps modéliser mathématiquement, le second phénomène physique qui correspond aux conditions de non-interpénétration entre les surfaces potentiellement en contact.

1.2.2.2 Les contraintes d'interface

Les contraintes d'interface limitent les déplacements relatifs des deux surfaces de substitution d'une liaison et caractérisent la non-interpénétration ou association entre les surfaces de substitution qui sont nominalement en contact (Dantan, 2000; Dumas et al., 2015b; Gaunet, 1994; Giordano et Duret, 1993; Qureshi et al., 2012; Roy et Li, 1999). Les jeux entre deux surfaces de substitution sont donc limités. Développer les contraintes d'interface revient à développer des inégalités ou égalités limitant ces jeux. Dans le cas d'un contact flottant (Dantan et Ballu, 2002), les positions relatives des surfaces de substitution sont contraintes technologiquement par la non-interpénétration. Les contraintes d'interface sont alors identifiées par : $C_i(\mathbf{X},\mathbf{G}) \leq 0$. Dans le cas d'un contact fixe ou glissant, les positions relatives sont

technologiquement contraintes dans une configuration donnée par une action mécanique. Par conséquent, les contraintes d'interface sont identifiées dans ce cas par : $C_{i^*}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=0$.

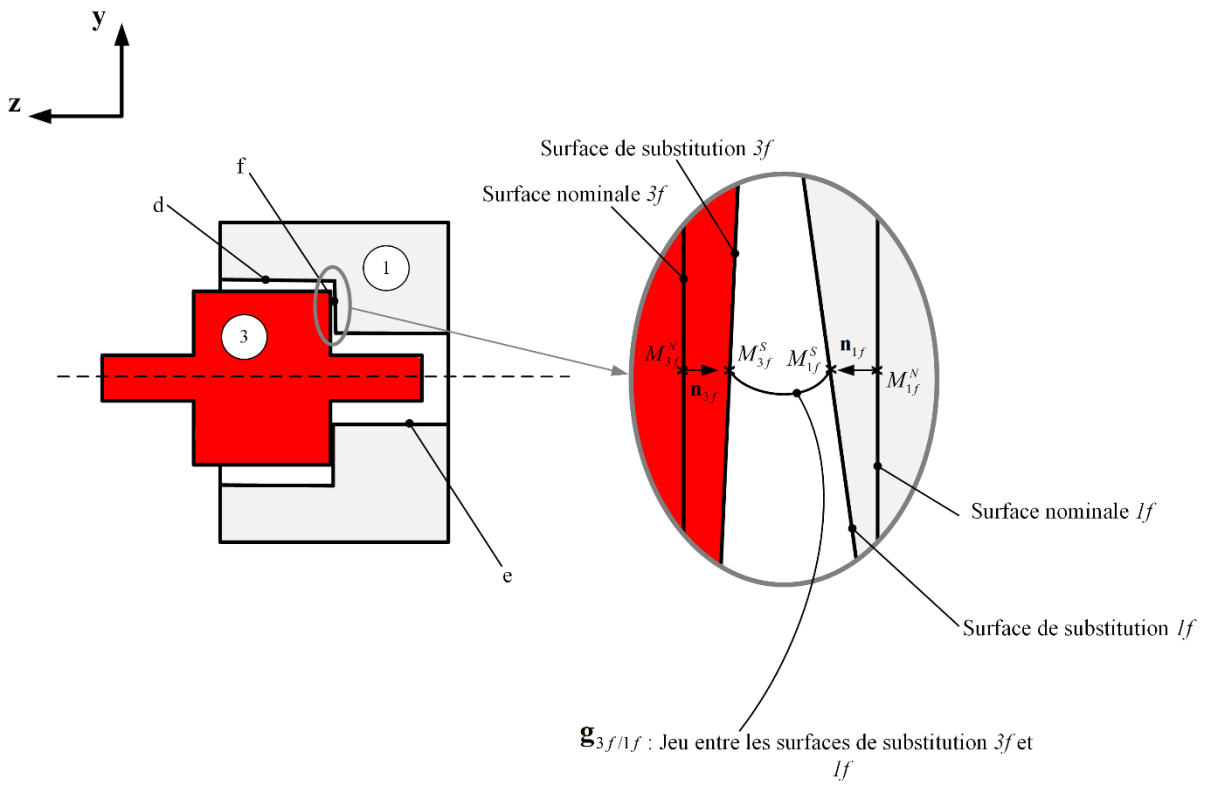


Figure 1.6 : Contrainte de non-interpénétration entre deux surfaces

En prenant l'exemple de la Figure 1.6, les contraintes d'interface peuvent être développées entre les surfaces *3f* et *1f*, en utilisant l'inégalité suivante :

$$\mathbf{M}_{3f}^{\mathbf{S}}\mathbf{M}_{1f}^{\mathbf{S}}.\mathbf{n}_{3f} \geq 0 \tag{1.6}$$

Pour des pièces rigides sans défaut de forme, les contraintes d'interface peuvent être écrites seulement aux points extrêmes de chaque élément de contact. Dans le cas d'un contact flottant entre deux surfaces planes avec jeu, les contraintes d'interface sont écrites uniquement au niveau des points des extrémités (A, B, C et D, voir Figure 1.7a).

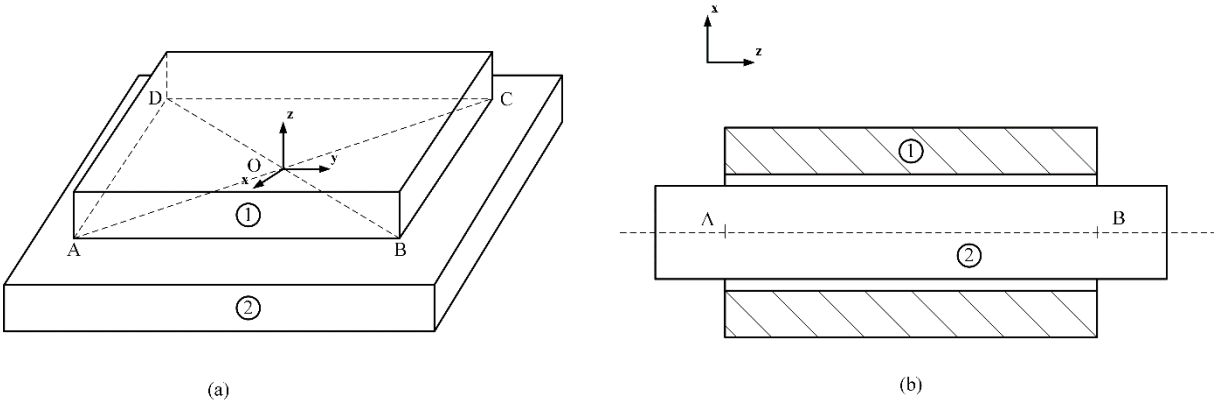


Figure 1.7 : Considération des points d'écriture des contraintes d'interface : (a) contact flottant plan-plan, (b) contact flottant cylindre-cylindre (Dantan, 2000)

Si les contraintes d'interface sont vérifiées au niveau de ces points du contour de l'élément de contact alors elles sont vérifiées pour l'ensemble des points de la surface de contact (Dantan, 2000). De même pour le contact flottant cylindre-cylindre (voir Figure 1.7b), les contraintes d'interface sont uniquement développées aux points extrêmes A et B. La vérification de ces contraintes d'interface à ces points signifie qu'elles sont aussi vérifiées à tous les points du cylindre de contact.

L'écriture des contraintes d'interface peut parfois conduire à des contraintes non-linéaires sous forme quadratique qui nécessitent d'être linéarisées pour la suite de l'analyse des tolérances et cela par souci de simplification des calculs et aussi pour avoir un ensemble de contraintes (de compatibilité et d'interface) linéaires. Un exemple de linéarisation des contraintes d'interface a été développé au cours des travaux de Dumas (2014) et permet de n'avoir que des équations et inéquations linéaires. Par exemple, dans le cas d'un contact pivot glissant (voir Figure 1.7b), la contrainte d'interface peut être donnée par l'inéquation :

$$C_i\left(u,v\right)=u^2+v^2-\Delta R^2 \tag{1.7}$$

où u et v représentent les composantes de jeux représentant les translations suivant l'axe Ox et Oy et ΔR représente la différence de rayon entre l'alésage et l'arbre.

La linéarisation développée par Dumas *et al.* (2015b), consiste à discrétiser le cercle de déplacement possible en polygone dont le nombre de facette dépend d'un paramètre N_d. La méthode de linéarisation du premier ordre du développement de Taylor de la fonction de

contrainte d'interface (C_i), est utilisée en un point M_k de coordonnées ($x_{M_k} = \Delta R.\cos\theta_k, y_{M_k} = \Delta R.\sin\theta_k$) où $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{N_d}$, et $k = 1,...,N_d$.

La contrainte d'interface quadratique peut être linéarisée comme suit :

$$C_i\ (u,v) = u.\cos\theta_k + v.\sin\theta_k \leq \Delta R \text{ avec } \theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}, \text{ et } k = 1,...,N_d \tag{1.8}$$

1.2.2.3 Les conditions fonctionnelles

Une condition fonctionnelle décrit une aptitude à l'emploi (montabilité, étanchéité, ...). Elle se traduit par des contraintes géométriques sur les surfaces appelées "surfaces fonctionnelles" : jeu minimum, ajustement, condition de non dépassement de pièces, réserve de filetage dans un assemblage vissé, garantie de longueur suffisante pour un guidage, un centrage etc. Ce sont des exigences sur le déplacement relatif entre des surfaces en condition fonctionnelle. Une condition fonctionnelle est identifiée par : $C_f\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \geq 0$. L'ensemble $\mathbf{G}$ de cette inégalité, comporte les composantes du torseur jeu fonctionnel.

Une condition fonctionnelle peut être exprimée à l'aide d'un domaine qui modélise les déplacements possibles de la surface fonctionnelle à l'intérieur de sa zone des tolérances associée (dans le cas de l'approche par accumulation des tolérances) (Ameta et al., 2011; Mansuy, 2012) ou à l'aide des contraintes représentées grâce aux inéquations qui limitent les déplacements de la surface fonctionnelle dans un intervalle donné (dans le cas de l'approche par accumulation des déplacements) (Dumas et al., 2015b). Les conditions fonctionnelles d'une surface dont les déplacements sont contraints dans un intervalle $I = \left[I_{\min}, I_{\max}\right]$ sont traduites généralement par les inéquations :

$$\begin{cases} C_f - I_{\min} \geq 0 \\ -C_f + I_{\max} \geq 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Des formalisations mathématiques des conditions d'assemblage et de fonctionnalité ont été développées par Dantan *et al.* (2005). Ces formalisations ont pour objectif d'évaluer les probabilités de non-assemblage et de non-fonctionnalité d'un système mécanique.

Synthèse : la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique est traduite mathématiquement par un ensemble de contraintes : les équations de compatibilité, les contraintes d'interfaces et les conditions fonctionnelles. La modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique permet de décrire deux phénomènes :

- la composition des déplacements dans les boucles topologiques. Ainsi, les écarts géométriques et les jeux du système mécanique sont liés entre eux. Les équations de compatibilité permettent de décrire ce phénomène ;
- la non-interpénétration de matière qui est traduite par les contraintes d'interface.

Cet ensemble de formulations mathématiques constitue les contraintes des optimisations qui sont réalisées lors de l'analyse des tolérances.

Cependant, dans le cadre des travaux de thèse actuels, une attention particulière est portée sur les contraintes d'interface. Les défauts de forme qui sont intégrés ont un impact sur la modélisation de ces contraintes d'interface.

1.2.3 Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel

L'analyse des tolérances par approche d'accumulation des déplacements a pour but d'estimer la qualité d'un produit au moyen d'un indicateur. Les indicateurs dans le projet AHTOLA représentent les probabilités de non-assemblage et de non-fonctionnalité. Des formalisations mathématiques de ces conditions ont été proposées par Dantan *et al.* (2005) à l'aide des notions de quantificateurs (' $\exists$ ' (il existe) et ' $\forall$ ' (pour tout)).

- **Condition d'assemblage - Probabilité de non assemblage**

Une condition d'assemblage d'un mécanisme exige d'identifier les positions des pièces d'un système mécanique tel qu'elles puissent s'assembler. La condition d'assemblage peut être traduite par (Dantan, 2000; Dantan et al., 2005; Qureshi et al., 2012): « *Il existe une configuration des jeux du mécanisme telle que les équations de compatibilité et les contraintes d'interface soient respectées* ». **Une configuration** est une position relative particulière entre les pièces d'un mécanisme permettant la non-interférence entre les surfaces dans le contact. La condition d'assemblage ou de montabilité peut être mathématiquement exprimée par :

$$\exists \mathbf{G} \in \left\{ \mathbf{G} \in \mathbf{R}^m : C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \leq 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \right\} \tag{1.10}$$

La probabilité de non-assemblage $\mathrm{P_{na}}$ peut ainsi être formalisée de la manière suivante (Dumas et al., 2015c) :

$$\mathrm{P_{na}} = 1 - \mathrm{Prob}\left(\exists \mathbf{G} \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \leq 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0\right) \quad (1.11)$$

Le calcul de la probabilité de non assemblage découle de la résolution d'un problème d'optimisation où la fonction objectif est fonction des composantes des torseurs et les contraintes à respecter : les équations de compatibilité, les contraintes d'interfaces. Dans ce problème d'optimisation, les valeurs des composantes des torseurs jeux qui sont trouvées ne sont pas importantes car c'est juste leur existence qui est vérifiée. Leur existence traduit l'existence d'une configuration de jeux telle que les pièces s'assemblent.

- **Condition fonctionnelle - Probabilité de non fonctionnalité**

(Dantan, 2000; Dantan et al., 2005; Qureshi et al., 2012) proposent la définition suivante pour une condition fonctionnelle respectée : « *Pour toutes les configurations admissibles du mécanisme, les conditions d'assemblage et la ou les contraintes fonctionnelles sont respectées* ». Pour les configurations admissibles du mécanisme, il n'est pas nécessaire de vérifier le respect de la condition fonctionnelle pour chacune d'elles, mais il suffit de chercher la configuration qui donne la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle. Si pour cette configuration la condition fonctionnelle est vérifiée alors elle l'est pour toutes les autres configurations du système mécanique. Mathématiquement, cette condition fonctionnelle peut être exprimée par :

$$\forall \mathbf{G} \in \left\{\mathbf{G} \in \mathbf{R}^m : C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \leq 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0\right\}, C_f\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \geq 0 \quad (1.12)$$

Basée sur cette équation (1.12) la fonctionnalité d'un système mécanique est vérifiée. La probabilité de non-fonctionnalité $\mathrm{P_{nf}}$ d'un système est définie par A. Dumas (2015):

$$\mathrm{P_{nf}} = 1 - \mathrm{Prob}\left\{\left(\min_{\mathbf{G}} C_f\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \geq 0\right) \text{ sujet à } C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) \leq 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0\right\} \quad (1.13)$$

En se basant sur cette équation (1.13), la détermination de la probabilité de non fonctionnalité représente un problème d'optimisation dont l'objectif est de déterminer les composantes du torseur jeu fonctionnel assurant les conditions fonctionnelles et en tenant en compte l'ensemble des équations de compatibilité et des contraintes d'interface. Ainsi, dans cette optimisation, les

valeurs des composantes des torseurs jeux à déterminer sont importantes vu qu'elles doivent respecter un certain seuil ou appartenir à un intervalle donné pour le bon fonctionnement du mécanisme.

Après avoir formulé mathématiquement les probabilités d'assemblage et de fonctionnalité, différentes techniques de résolution peuvent être développées. La section suivante synthétise quelques-unes.

1.3 Les différentes méthodes d'analyse des tolérances du projet AHTOLA

Les formulations mathématiques des conditions d'assemblage et de fonctionnalité ont permis de poser les bases mathématiques des techniques d'analyse des tolérances d'un système mécanique. Différentes approches de quantification ont été développées dans la littérature et permettent de considérer les systèmes hyperstatiques avec jeux : la simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation, la méthode FORM système. Cette section permet de présenter une synthèse de ces méthodes. Ces méthodes sont par la suite adaptées et améliorées lors de l'introduction des défauts de forme des pièces dans une démarche d'analyse des tolérances.

1.3.1 Simulation de Monte Carlo et optimisation

Cette méthode a été développée et testée au cours de la thèse de Qureshi (2011). L'objectif de la méthode est de simuler et d'évaluer les influences des défauts géométriques sur les exigences d'assemblage et de fonctionnalité. La simulation de Monte Carlo (MC) est utilisée pour simuler les défauts géométriques et une optimisation permet de déterminer la pire configuration des jeux permettant l'assemblage et le fonctionnement du système mécanique. La procédure est effectuée pour un nombre donné d'échantillon de défauts géométriques afin de déterminer les probabilités de défaillance et de non fonctionnalité.

Dans un premier temps, les différentes contraintes modélisant le comportement géométrique du système mécanique sont développées : les équations de compatibilité, les contraintes d'interface et les conditions fonctionnelles. Puis, un échantillon $\mathbf{X}^{(i)},\ i=1,...,N_{mc}\ \left(\mathbf{X}^{(i)} \in \mathbf{X}\right)$ de défauts géométriques est généré tel qu'il vérifie les spécifications géométriques pré-stipulées sur les dessins techniques du mécanisme. Cet échantillon est défini selon une distribution

statistique, par exemple une loi normale de moyenne les dimensions nominales et en définissant les écarts types à l'aide des intervalles des tolérances. Ensuite, une optimisation est utilisée pour déterminer les composantes des torseurs jeux qui permettent d'identifier la pire configuration des jeux telle que les pièces du mécanisme puissent s'assembler et fonctionner. L'existence d'une solution minimisant ces composantes de torseurs jeux et qui respectent les contraintes du comportement géométrique du mécanisme, signifie l'existence d'une configuration des jeux telle que les pièces s'assemblent. Dans le cas contraire, cela signifie que pour cet échantillon de défauts géométriques, l'assemblage est impossible. De plus, lors de l'optimisation, quand une solution est trouvée, les composantes optimisées des torseurs jeux fonctionnels sont introduites dans les conditions fonctionnelles afin de les vérifier. Des fonctions indicatrices sont utilisées pour dénombrer le nombre des occurrences des évènements dont les probabilités sont calculées. A la fin de la simulation de Monte Carlo, les probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité sont calculées ; elles sont égales au nombre d'occurrences de ces évènements, divisé par le nombre d'échantillons. La Figure 1.8 présente la méthode de l'analyse des tolérances basée sur la simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation. L'estimation des probabilités de défaillance en se basant sur les fonctions indicatrices est donnée par :

- Probabilité de non-assemblage :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{na}} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I_{Dfa}\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) \tag{1.14}$$

où N_{mc} représente le nombre total d'échantillons générés par la simulation de Monte Carlo et I_{Dfa} représente la fonction indicatrice définie par :

$$I_{Dfa}\left(\mathbf{X}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } R_f\left(\mathbf{X}\right) \text{ n'a pas de solution} \\ 0 \text{ si } R_f\left(\mathbf{X}\right) \text{ a une solution} \end{cases} \tag{1.15}$$

avec

$$\begin{aligned} R_f\left(\mathbf{X}\right) = \min_{\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^p} C_f\left(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}\right) \\ \text{sous} \quad C_c^{(j)}\left(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}\right) = 0 \quad \forall j = \left\{1, \ldots, N_{comp}\right\} \\ C_i^{(l)}\left(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}\right) \leq 0 \quad \forall l = \left\{1, \ldots, N_{c_i}\right\} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Avec N_{comp} le nombre total d'équations de compatibilité, N_{c_i} le nombre total de contraintes d'interfaces.

- Probabilité de non-fonctionnalité :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{nf}} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I_{Df}\left(\mathbf{X}^{(i)}\right) \tag{1.17}$$

où N_{mc} représente le nombre total d'échantillons générés par la simulation de Monte Carlo et I_{Df} représente la fonction indicatrice définie par :

$$I_{Df}\left(\mathbf{X}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } C_f\left(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}\right) \leq 0 \\ 0 \text{ si } C_f\left(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}\right) > 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

où $\tilde{\mathbf{G}}$ représente les valeurs des torseurs jeux issues de l'optimisation.

Le développement des contraintes du comportement géométrique du mécanisme peut conduire à l'obtention des contraintes non-linéaires qui peuvent être soit des équations ou des inéquations. Qureshi et al. (2012) proposent l'utilisation de techniques numériques d'optimisation globale non-linéaire comme les méthodes basées sur les gradients ou les méthodes de recherche directe. Mais l'utilisation de ces méthodes numériques peut conduire à des violations de contraintes. Pour pallier ce problème, Dumas *et al.* (2015b) proposent une méthode de linéarisation décrite dans la Section 1.2.2 afin de pouvoir utiliser un algorithme d'optimisation linéaire comme l'algorithme du simplexe (Bertsimas et Tsitsiklis, 1997; Nelder, 1965; Nocedal et Wright, 1999).

Toutefois, la simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation, est une méthode coûteuse en temps de calcul. Dans le but de réduire de temps de simulation, deux méthodes ont été proposées par Dumas (2014), l'une pour le problème d'assemblage et l'autre pour le problème fonctionnel.

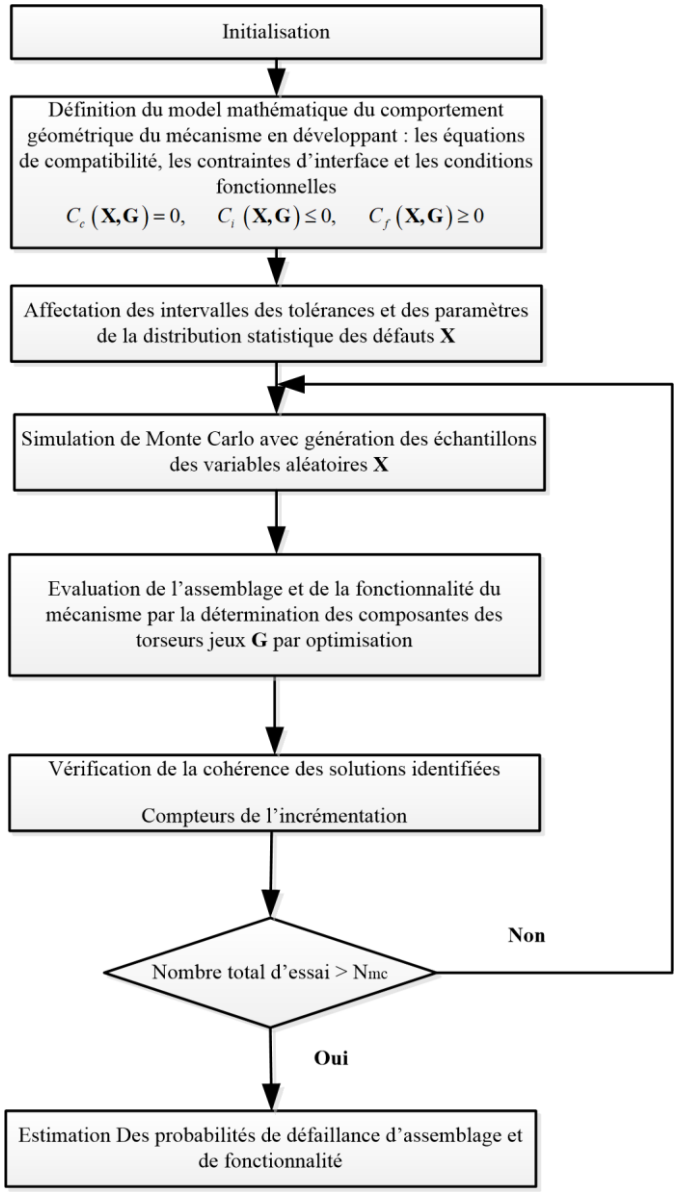


Figure 1.8 : Méthode de la simulation de Monte Carlo couplée à l'algorithme d'optimisation

1.3.2 La méthode FORM pour la résolution du problème fonctionnel

La méthode proposée pour la résolution du problème fonctionnel est basée sur une méthode de fiabilité système. Cette méthode a été utilisée dans plusieurs recherches (Ballu et al., 2008; Beaucaire et al., 2013; Dumas et al., 2015a). Avant de pouvoir utiliser cette méthode de fiabilité, l'ancienne formulation du problème d'analyse des tolérances est transformée à une formulation sous forme d'un problème de fiabilité système. Le calcul de la probabilité de non-fonctionnalité (P_{nf}) dans cette formulation sous forme d'un problème de fiabilité système est effectué grâce à l'utilisation de la forme duale de Lagrange de l'optimisation. La probabilité P_{nf} est désormais

décrite sous forme d'une intersection d'évènements. Chaque configuration de jeux du mécanisme est définie comme un évènement de défaillance. Etant donné que les évènements sont nombreux, un algorithme préliminaire de recherche sélectif (Kim et al., 2013) des configurations de défaillance dominantes du mécanisme est appliqué. La méthode de fiabilité nommée First Order Reliability Method (FORM) est appliquée pour déterminer la probabilité P_{nf} avec un temps de résolution plus faible que celui de la méthode MC. La différence entre la méthode de formulation système de Dumas *et al.* (2015a) par rapport aux autres recherches utilisant la même technique est que la pire configuration est déterminée par une procédure d'optimisation alors que pour les autres méthodes, cela revient au technicien de le stipuler lors de la résolution. En plus les formulations des autres méthodes basées sur l'union des intersections des évènements, ne peuvent pas être appliquées aux mécanismes complexes (Dumas et al., 2015a).

Synthèse : Différentes techniques d'analyse des tolérances ont été proposées dans le cadre du projet AHTOLA : une technique d'optimisation couplée à la simulation de Monte Carlo, la méthode FORM système pour la résolution de problème fonctionnel. Une synthèse de ces techniques a été présentée dans cette partie.

Dans le cadre du projet AHTOLAND, la simulation de Monte Carlo couplée à la technique d'optimisation est la méthode qui est choisie afin de réaliser l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques. Toutefois, des modifications sont apportées afin de prendre en compte les défauts de forme et le comportement géométrique des différents types de contacts.

1.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de faire la synthèse de démarches d'analyse statistique des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques avec jeux développées dans la littérature et plus particulièrement au sein du projet AHTOLA. Cette démarche repose sur des solutions aux trois problématiques fondamentales à savoir la modélisation des variations géométriques, la modélisation du comportement géométrique du système mécanique, et le développement de techniques de résolution numérique. Une attention particulière est donnée à la modélisation du

comportement géométrique en particulier le développement des conditions d'assemblage et de fonctionnalité faisant appel à des outils mathématiques comme les notions de quantificateurs et de probabilités. Ensuite, certaines techniques de l'analyse des tolérances proposées dans la littérature et qui sont en relation avec les travaux qui sont développés dans ce manuscrit, ont été analysées.

Les différents développements de ce chapitre constituent une base pour la suite afin mieux cerner les travaux développés dans le projet AHTOLAND : la considération des défauts de forme des surfaces, leurs impacts dans la modélisation mathématique des contraintes d'assemblage et de fonctionnalité. La procédure adaptée pour une analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques avec jeux est modifiée et améliorée. Les enjeux sont :

- comment générer les défauts de forme des surfaces ?
- comment simuler les impacts de l'intégration des défauts de forme lors de l'analyse des liaisons entre les surfaces ?

Chapitre 2 : Modélisation des imperfections de fabrication et du comportement géométrique des liaisons

Sommaire

2.1 Introduction 32

2.2 Modélisation des imperfections de fabrication : les défauts de forme 33

2.2.1 Les méthodes paramétriques 35

2.2.2 Les méthodes basées sur le morphing du maillage 38

2.2.3 Les méthodes basées sur les bruits blancs 39

2.2.4 Le skin modèle 40

2.2.5 Les méthodes modales 43

2.2.6 Comparaison et analyse des méthodes de modélisation de défauts de forme 50

2.2.7 La méthode de la Décomposition Métrique Modale 50

2.2.8 Synthèse 56

2.3 Modélisation du comportement géométrique des liaisons 57

2.3.1 Synthèse des travaux sur la modélisation du comportement géométrique des liaisons 57

2.3.2 Prise en compte des types de contacts dans la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique 61

2.4 Conclusion 73

2.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse au développement d'une méthode de modélisation des défauts de forme et à leurs impacts dans le comportement géométrique de systèmes mécaniques. Il a été montré

dans quelques travaux que les défauts de forme, jouent un rôle non négligeable dans l'assemblage de systèmes mécaniques. Lê *et al.* (2014) ont montré au travers d'études expérimentales et théoriques les impacts des défauts de forme sur une liaison constituée de deux surfaces planes. Grandjean *et al.* (2013) ont aussi montré que les défauts de forme peuvent conduire à de nombreux cas d'impossibilité d'assemblage. Ainsi, le premier objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de modélisation des défauts de forme observés sur les surfaces des pièces fabriquées.

La modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique passe par un ensemble de contraintes traduisant les relations entre ses différentes pièces mécaniques et ses différents types de contacts. Ces contraintes doivent désormais prendre en compte les défauts de forme. Le deuxième objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique hyperstatique, qui prend en compte les différents types de contacts (fixe, glissant et flottant) et les défauts de forme.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : la section 2.2 présente premièrement une liste non-exhaustive de méthodes permettant de modéliser des défauts de forme. Ensuite, une comparaison est réalisée entre les différentes méthodes de modélisations afin de choisir la méthode la plus adéquate avec les développements mathématiques associés à l'analyse des tolérances présentés dans le chapitre 1. La méthode de la Décomposition Modale Métrique (DMM) est par la suite décrite car elle représente la méthode proposée pour la modélisation des défauts de forme et introduite dans les formulations mathématiques de l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques. La section 2.3 présente tout d'abord un état de l'art sur les différentes modélisations des assemblages en considérant les différents types de contact. Puis, une méthode est proposée pour modéliser géométriquement le comportement des mécanismes hyperstatiques en considérant les différents types de contact. Et à la fin, la nouvelle procédure proposée pour réaliser l'analyse des tolérances de mécanismes hyperstatiques en considérant les défauts de forme et les différents types de contact est décrite. Une synthèse de tous les développements de ce chapitre est détaillée dans la section 2.4.

2.2 Modélisation des imperfections de fabrication : les défauts de forme

Les variations géométriques des pièces sont omniprésentes tout au long du cycle de vie des produits en partant de la conception, en passant par la fabrication, l'inspection, l'assemblage et enfin durant son utilisation.

Plusieurs méthodes existent dans la littérature et permettent de modéliser les défauts de forme des surfaces de pièces mécaniques. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer sans être exhaustif : *les courbes et surfaces de Bézier, les courbes et surfaces B-spline, les courbes et surfaces NURBS* (David F. Rogers, 2001; Les Piegl et Wayne Tiller, 1997), *la transformée discrète de cosinus* (Huang et Ceglarek, 2002), *la transformée discrète de Fourier, le Skin modèle* (Schleich, 2017), *la décomposition modale discrète, les polynômes de Zernike* (Zernike, 1942), *les polynômes de Tchebychev* (Favreliere, 2009), *la décomposition en ondelettes* (Favreliere, 2009), *les harmoniques sphériques* (Wyant et Creath, 1992), *les champs aléatoires, l'analyse modale géométrique, la méthode de bruit blanc*. De cette liste non exhaustive, deux catégories peuvent être distinguées : (1) celle qui permet de représenter les surfaces géométriques complexes continues avec des défauts de forme, (2) et celle qui modélisent mathématiquement les défauts de forme de surfaces discrètes. Une revue et une comparaison de ces différentes méthodes de modélisation de défauts de forme est donnée par Abhishek Das 2016, Yan et Ballu (2018). La Figure 2.1 présente une classification de méthodes de modélisation des défauts de forme tirée de Yan et Ballu (2018). Une liste non-exhaustive de ces méthodes de modélisation des défauts de forme est présentée dans les sous-sections qui suivent. L'ensemble des techniques de cette liste ont été implémentées et comparées.

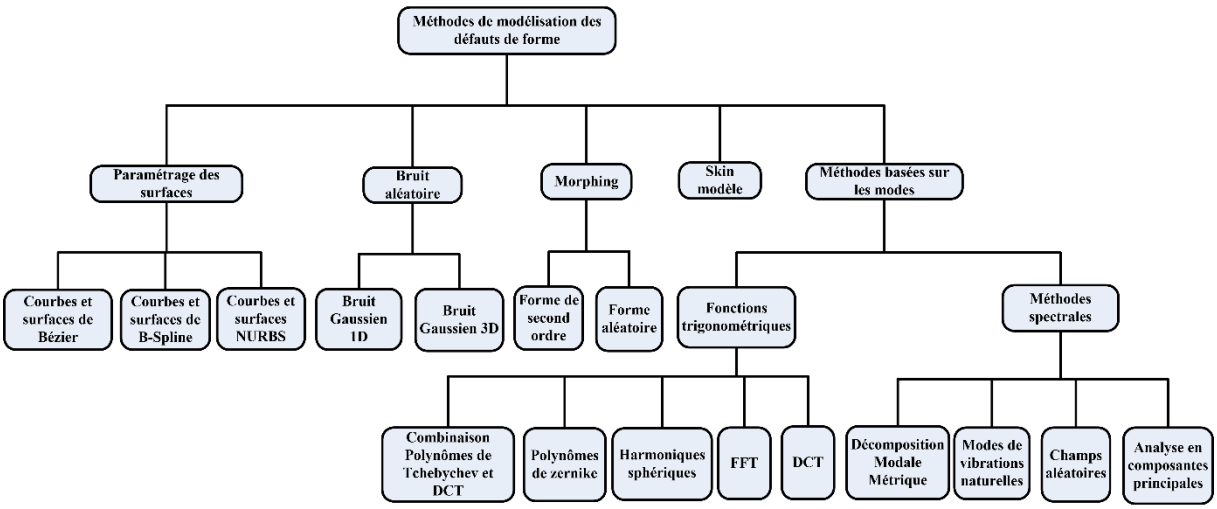


Figure 2.1 : Classification des méthodes de modélisation des défauts de forme (librement adaptée de (Yan et Ballu, 2018)

Ces méthodes présentées ont à la fois des avantages et des inconvénients. Yan et Ballu (2018) ont présenté une comparaison de ces différentes méthodes en se basant sur quelques critères comme les types défauts à modéliser, la complexité de la surface, l'intégration des données de mesures, le contrôle paramétrique et la complexité des calculs. Cependant, compte tenu des objectifs des travaux de thèse, d'autres critères de comparaison sont établis afin de choisir la méthode la plus appropriée permettant de représenter les défauts de forme et pouvant aussi entrer dans les simulations d'assemblage et de fonctionnalité des mécanismes. Ces critères émis sont :

- Critère 1 : la méthode choisie doit permettre de représenter les défauts de forme et les ondulations.
- Critère 2 : la méthode doit être compatible avec une représentation probabiliste du champ des défauts. Les amplitudes des défauts découlant de la méthode doivent être modélisées par des lois de probabilité.
- Critère 3 : la méthode doit être compatible avec les méthodes probabilistes développées antérieurement et interprétable (représentativité du paramétrage). Les paramètres doivent donc avoir un sens physique et technologique. Etant donné que l'une des entrées du problème d'analyse des tolérances est la distribution statistique des défauts, la représentativité est importante car la définition de ces distributions doit être aisée, flexible et adaptable.
- Critère 4 : la méthode doit permettre de réaliser la simulation locale d'un contact (aptitude à retrouver les points de contact).

Les méthodes sont présentées et une vérification est faite quant au respect de ces critères.

2.2.1 Les méthodes paramétriques

Le paramétrage des contours, des surfaces et des volumes est une technique souvent utilisée dans la conception pour modéliser les caractéristiques continues des pièces. Des méthodes sont utilisées comme les courbes et surfaces de Bézier, les courbes et surfaces B-Spline et enfin des courbes et surfaces NURBS. Ce sont des outils bien connus et généralement utilisés en Conception Assistée par l'Ordinateur (CAO) ou par les systèmes de fabrication. Ces méthodes sont nommées dans leur ordre chronologique car les courbes et surfaces B-Spline sont une

généralisation des courbes et surfaces Bézier, de même que les courbes et surfaces NURBS sont une généralisation des courbes et surfaces B-Spline.

La courbe de Bézier est une courbe polynômiale paramétrique qui permet de décrire la forme des surfaces dans la conception. Le concept a été développé pour la première fois par un ingénieur français Pierre Bézier de la société Renault en 1962. Les courbes et surfaces de Bézier sont définies par l'intermédiaire des points nommés points de contrôle et par la base de Bernstein. Un exemple de courbe de Bézier avec cinq (5) points de contrôle est représenté sur la Figure 2.2. Les descriptions mathématiques des courbes et surfaces de Bézier peuvent être trouvées dans (Les Piegl et Wayne Tiller, 1997).

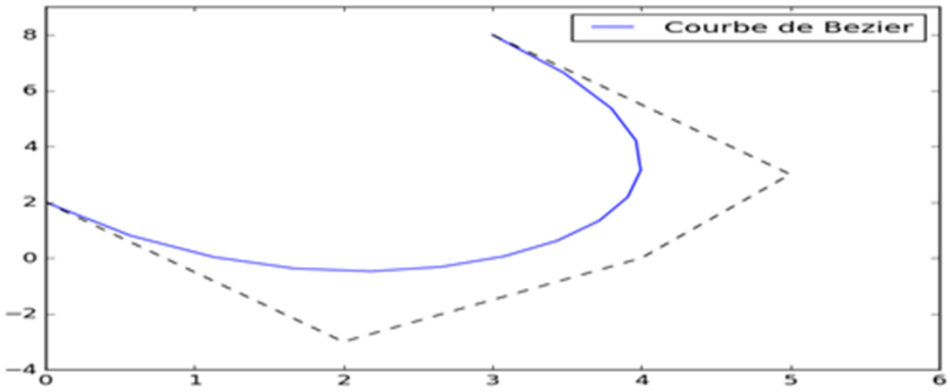


Figure 2.2 : Illustration d'une courbe de Bézier avec cinq points de contrôle

Les courbes et surfaces B-Spline découlent d'une généralisation des courbes et surfaces de Bézier. Les courbes B-Spline sont obtenues grâce à la base B-Spline qui contient aussi la base de Bernstein. Contrairement aux courbes de Bézier, les courbes B-Spline ont des points de contrôle indépendants de son degré. Les NURBS (Non Uniform Rational Basis Spline) sont une généralisation des B-Spline. Ce sont des outils mathématiques permettant de représenter les objets géométriques. Les surfaces NURBS furent premièrement utilisées dans la conception des carrosseries de voitures, des ailes d'avions, des coques de bateau grâce à la précision des surfaces obtenues (David F. Rogers, 2001). Aujourd'hui, elles sont très utilisées dans les logiciels de conception 3D tels que Maya, Autodesk etc. Un exemple de surface NURBS est montré par la Figure 2.3. Plus amples informations sur les descriptions mathématiques sur les courbes et surfaces B-Spline et NURBS peuvent être trouvées dans (Les Piegl et Wayne Tiller, 1997).

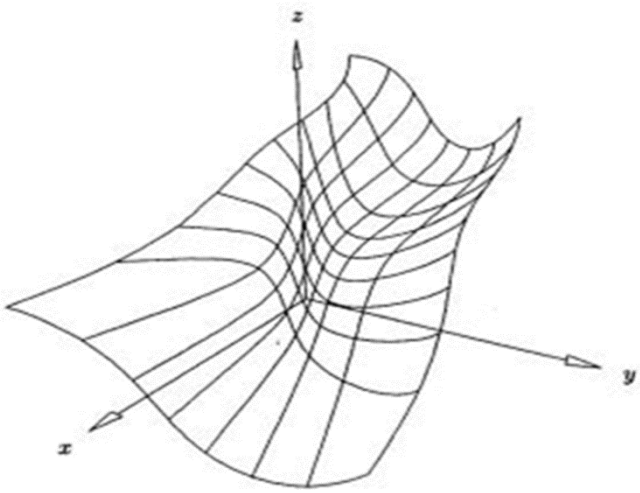


Figure 2.3 : Surface NURBS Bicubique (Les Piegl et Wayne Tiller, 1997)

Aujourd'hui, l'utilisation des méthodes paramétriques ont dépassé le cadre mécanique car elles sont utilisées par exemple pour les images de synthèses, les jeux vidéo, en robotique, dans les arts virtuels (les films, les industries de divertissement, l'art et la sculpture) (David F. Rogers, 2001; E. Dimas et D. Briassoulis, 1999; Les Piegl et Wayne Tiller, 1997). Ces méthodes paramétriques sont très utiles car elles servent à approximer correctement les surfaces 2D comme 3D. Cependant, les méthodes paramétriques possèdent quelques inconvénients tels que la difficulté d'obtention des bases de calcul (par exemple les bases B-Spline), la difficulté de manipulation des formes lorsque leur complexité est élevée car les paramètres de modélisation sont plus nombreux et ce qui peut conduire à des efforts numériques importants. En plus, ces courbes et surfaces sont difficiles à obtenir car un mauvais choix d'un paramètre (par exemple les facteurs poids pour les méthodes NURBS) peut conduire à une forme non souhaitée. Ce sont des méthodes coûteuses en calculs même si il existe des optimisations intéressantes pour les NURBS. Elles ont besoin de beaucoup d'espace en mémoire pour définir de simples surfaces comme le cercle ou la sphère.

Tableau 2.1 : Analyse par rapport aux critères des méthodes paramétriques

Modélisation	Continue, peut être discrétisée
Paramétrage	Points de contrôle
Applicabilité du critère 1	Les méthodes paramétriques peuvent représenter les défauts de forme. La modélisation des ondulations génère une augmentation des degrés des surfaces
Applicabilité du critère 2	Le paramétrage de ces méthodes paramétriques est basé sur les points de contrôle, donc sur des cordonnées de ces points. Il est donc possible de définir un modèle probabiliste sur ces coordonnées de points.
Applicabilité du critère 3	La représentativité technique des points de contrôle ne permet pas facilement d'associer un modèle probabiliste à partir des connaissances classiques des systèmes de production.
Applicabilité du critère 4	La recherche des points de contact entre deux surfaces paramétriques est réalisable mais coûteux en temps de calcul. Cette modélisation a été testée dans le cas des engrenages (Dantan, 2015), une représentation discrète permet de diminuer le temps de simulation des contacts.

2.2.2 Les méthodes basées sur le morphing du maillage

Le morphing du maillage est une méthode souvent utilisée dans le graphisme informatique et qui permet de transformer un maillage original en un autre maillage de manière continue. Le but est de simuler les variations de la forme des pièces à l'aide d'un certain nombre de points de contrôle choisis sur la géométrie nominale maillée et sur laquelle est appliquée la procédure de maillage par morphing. Les points du maillage sont déplacés par l'application de la procédure de morphing qui consiste à déplacer localement des points (points de contrôle) choisis sur le maillage de la pièce. Plus amples descriptions sur cette technique peuvent être trouvées dans les travaux de Franciosa *et al.* (2011), Yan et Ballu (2018).

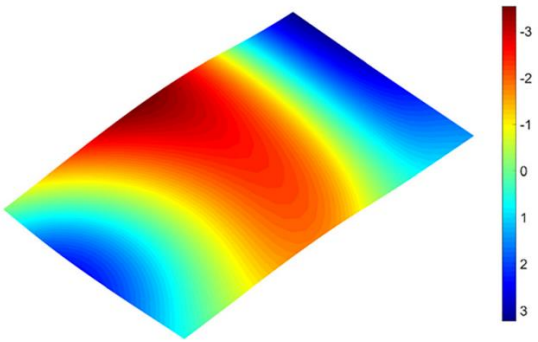


Figure 2.4 : Application de la méthode du morphing du maillage à une surface plane (Yan et Ballu, 2018)

Cette méthode du morphing du maillage est basée sur une approche de déformation contrainte. Pour l'utilisation à la fin de la procédure de maillage par morphing, l'utilisateur n'a qu'à faire entrer la position des points de contrôle, le rayon d'influence et la fonction d'interpolation (Franciosa et al., 2011). Le point de départ de l'utilisation de cette méthode est un modèle CAO maillé. Cette méthode de morphing de maillage a été utilisée par Franciosa *et al.* (2011) pour générer des pièces variationnelles dans une simulation d'assemblage PCFR, ou dans la création des modèles 3D de simulation pour l'évaluation de la qualité perçue durant les premières phases du projet (Wagersten et al., 2014).

Cependant, cette méthode de morphing du maillage permet difficilement de modéliser les défauts des surfaces 3D de pièces et le nombre de points de contrôle augmente de manière significative avec l'augmentation de la complexité des géométries des surfaces (Abhishek Das, 2016). D'où le manque de flexibilité de cette méthode qui est donc incompatible avec les méthodes probabilistes déjà développées.

Tableau 2.2 : Analyse de la technique du morphing du maillage par rapport aux critères

Modélisation	Continue
Paramétrage	Points de contrôle, rayons d'influence
Applicabilité du critère 1	Le morphing du maillage peut représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Le paramétrage de cette technique du morphing du maillage est basé sur les points de contrôle, donc sur des cordonnées de ces points. Il est donc possible de définir un modèle probabiliste sur ces coordonnées de points.
Applicabilité du critère 3	La représentativité technique des points de contrôle ne permet pas facilement d'associer un modèle probabiliste à partir des connaissances classiques des systèmes de production.
Applicabilité du critère 4	La recherche des points de contact entre deux surfaces modélisées à l'aide du morphing est réalisable mais coûteux en temps de calcul.

2.2.3 Les méthodes basées sur les bruits blancs

Les méthodes basées sur les bruits blancs, sont des méthodes statistiques de modélisation des imperfections de surface en utilisant la distribution gaussienne. Cette méthode a été proposée par Zhang *et al.* (2011) en utilisant la distribution gaussienne 1D et la distribution gaussienne 3D. La loi gaussienne est une loi de probabilité continue qui est souvent utilisée afin de modéliser les phénomènes réels et est basée sur deux paramètres importants qui sont : la

moyenne (souvent notée μ), l'écart-type (souvent noté σ) et la matrice de covariance. Les descriptions mathématiques de ces méthodes de modélisation basées sur les méthodes aléatoires peuvent être trouvées dans (Zhang et al., 2011).

La Figure 2.5 montre le résultat de l'application de la méthode basée sur la distribution gaussienne 1D sur un plan avec une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0.01$.

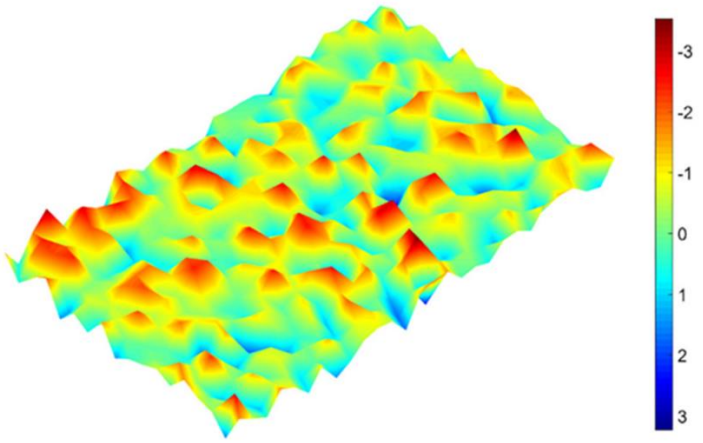


Figure 2.5 : Application de la distribution gaussienne 1D sur un plan (Yan et Ballu, 2018)

Ces méthodes basées sur les bruits aléatoires sont basées sur les déplacements aléatoires de chaque point de la surface et n'est pas adéquate pour modéliser toutes sortes de défauts d'un modèle (Yan et Ballu, 2018).

Tableau 2.3 : Analyse des méthodes basées sur les bruits blancs par rapport aux critères

Modélisation	Discrète
Paramétrage	La distribution gaussienne 1D ou 3D
Applicabilité du critère 1	Les bruits blancs peuvent représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	La méthode utilise déjà la loi gaussienne pour modéliser les défauts
Applicabilité du critère 3	Les méthodes déjà développées du projet AHTOLA peuvent s'appliquer mais les amplitudes du paramétrage n'ont pas de sens physique.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

2.2.4 Le skin modèle

Cette méthode qui permet de représenter la surface non-idéale d'un élément en tenant compte des déviations provenant du processus de fabrication et d'assemblage. Ballu et Mathieu (1993)

furent les premiers à présenter ce concept de représentation de surface réelle d'un élément dans la proposition d'un langage univoque (GeoSpelling) pour la conception, la fabrication et l'inspection. Ce concept de Skin Modèle est aussi adopté par le GPS (Geometrical Product Specification) de l'ISO et est défini comme l'interface physique entre une pièce et son environnement comprenant les déviations géométriques venant à la fois de la fabrication et de l'assemblage. Nabil Anwer *et al*. (2013) présentent ce concept comme composé d'un nombre infini de points représentant les défauts d'une pièce. Mais en pratique, pour sa représentation, on considère un nombre fini de points afin de modéliser la forme du Skin Modèle. Ce dernier est alors utilisé pour les simulations d'assemblage ou pour représenter un assemblage. Du point de vue mathématique, le Skin Modèle est défini comme une surface non unique, fermée et orientée (sans d'intersection propre), permettant de représenter tous les défauts géométriques d'une pièce. La forme du Skin modèle peut être obtenue durant deux phases : la phase de prédiction (Déviation systématique et Déviation aléatoire) et la phase d'observation.

Durant la phase de prédiction, deux méthodes ont été développées et qui permettent d'obtenir le skin model shape. Il y a une première méthode qui est proposée par Schleich *et al.* (2015a) et qui est basée sur différentes étapes pour générer les formes du Skin modèle. Leur méthodologie est montrée sur la Figure 2.6. Une seconde méthode proposée par Yan et Ballu, (2016) est basée sur trois étapes importantes qui sont : (i) la segmentation et la discrétisation, (ii) la simulation des défauts de fabrication et les ajustements, (iii) la combinaison.

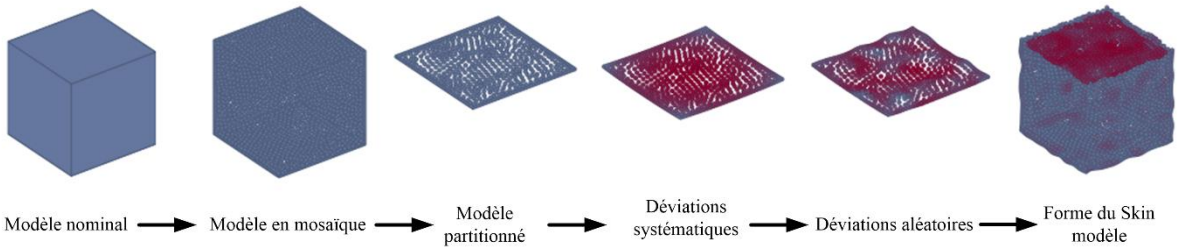


Figure 2.6 : Génération de la forme du Skin modèle durant la phase de prédiction (Schleich et al., 2015a)

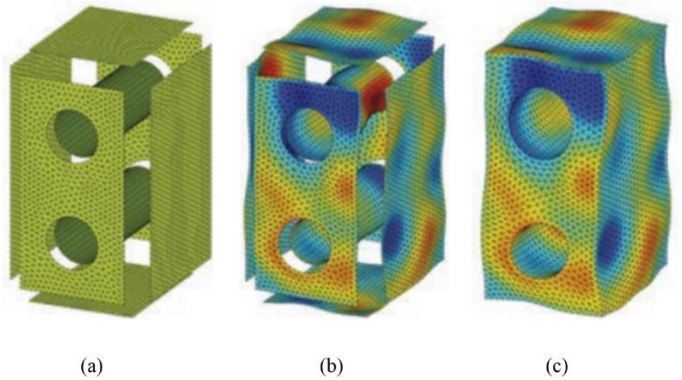


Figure 2.7 : Différentes étapes de génération des formes du Skin modèle : (a) Segmentation et discrétisation, (b) Simulation des défauts de fabrication et ajustements, (c) Combinaison (Yan et Ballu, 2016)

Durant la phase d'observation une méthode est proposée par Schleich (2017), Schleich *et al.* (2015a) et permet de générer un nouveau lot de formes de Skin modèle des pièces à partir des observations des défauts de forme des surfaces d'un lot de pièce.

Plusieurs exemples de l'utilisation du Skin Modèle ont été réalisés sur le plan ou sur un cube. Le Skin Modèle permet de représenter la surface réelle d'une pièce sujette à des défauts. Ce concept peut représenter les surfaces 2D et 3D. En plus c'est une méthode utilisée dans le tolérancement, dans la fabrication et dans l'inspection. Cependant, la méthode du Skin modèle conduit à des temps de simulations élevés à cause de ses différentes étapes de modélisation.

Tableau 2.4 : Analyse de la méthode de la forme du Skin modèle par rapport aux critères

Modélisation	discrète
Paramétrage	Modèle probabiliste de génération des défauts
Applicabilité du critère 1	Le skin model shape peut représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Possibilité d'établir une loi de probabilité sur déviations aléatoires
Applicabilité du critère 3	Le modèle de génération des défauts est difficilement définissable à partir d'une connaissance classique des systèmes de production.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

2.2.5 Les méthodes modales

Les méthodes modales sont des méthodes qui permettent de modéliser les imperfections des surfaces des pièces en faisant une somme pondérées des modes des surfaces. Toute cette partie traite uniquement d'un problème discrétisé à base de modes. Un mode représente une déformation donnée de la surface. Ces modes peuvent être indépendants les uns par rapport aux autres et peuvent être exprimés dans une base. Ces modes utilisés dans la modélisation des défauts de forme des surfaces sont sous plusieurs formes : combinaison linéaire des fonctions cosinus et sinus, combinaison de fonction polynomiales ou des décompositions en modes propres (Yan et Ballu, 2016), etc.

Différentes stratégies peuvent être appliquées pour déterminer les modes et leur amplitude respective. Il est important de remarquer que ces modes définissent une base. Le choix d'une base modale revient à faire un changement de base pour un problème en dimension élevé. Il n'y a pas une façon unique de procéder au changement de base car toutes les bases sont acceptables. Cependant, les lois des amplitudes doivent être adaptées à chaque base car ces amplitudes sont possiblement corrélées.

Les sous-sections suivantes présentent quelques méthodes modales usuelles dans le domaine de la modélisation des défauts de forme.

2.2.5.1 La décomposition en séries de Fourier (en Anglais *DFT-Discrete Fourier Transform*)

La décomposition en séries de Fourier est basée sur la transformée de Fourier. Elle permet de décomposer la forme d'une géométrie dans une base d'harmoniques en cosinus et en sinus. Les modes les plus significatifs sont choisis et une Transformation de Fourier Discrète (TFD) inverse permet de déterminer la géométrie en fonction des modes choisis. Souvent, les calculs sont réalisés à l'aide de matrices, dans le but de les simplifier. Les formulations mathématiques de cette transformation en séries de Fourier sont détaillées dans (Henke et Summerhays, 1999).

La TFD est utilisée dans l'ajustement harmonique des surfaces planes mesurées (E. Capello et Q. Semeraro, 2000), dans l'étude des rugosités des surfaces (Raja et Radhakrishnan, 1977) et dans la modélisation des défauts technologiques du cylindre (Henke et Summerhays, 1999), dans le traitement des données en 2D pour assigner la circularité au niveau d'un cylindre (Ni

Weihua et Yao Zhenquiang, 2013). Elle peut être utilisée pour la modélisation des défauts d'un plan et aussi sur d'un cylindre mais combinée cette fois-ci aux polynômes de Legendre ou Tchebychev pour les défauts de section (Ni Weihua et Yao Zhenquiang, 2013)

Un exemple d'un plan avec défauts de forme résultant de l'application de la TFD est représenté par la Figure 2.8 où pour les coordonnées du plan aléatoire, les hauteurs ont été tirées aléatoirement. Pour la TFD inverse nous avons pris six modes respectivement suivant les axes x et y. Au total, 36 modes ont été choisis pour obtenir la surface avec défauts.

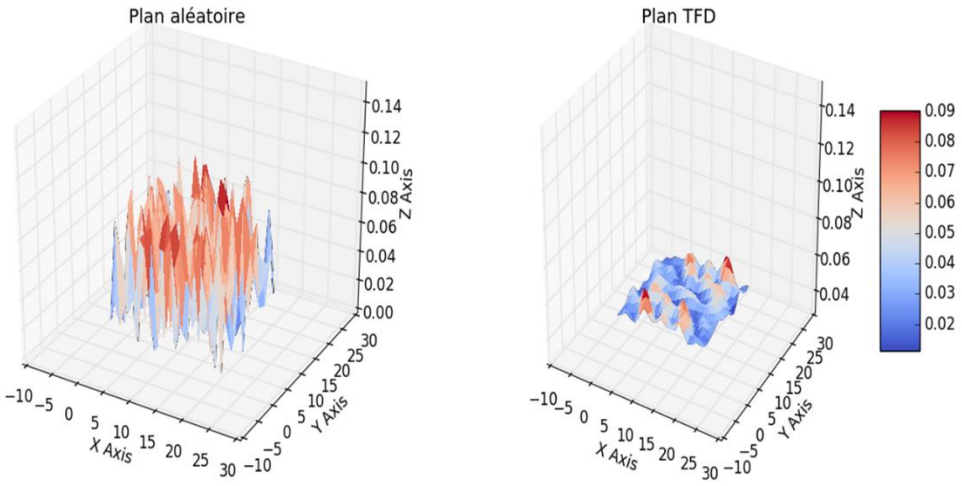


Figure 2.8 : Plan aléatoire à gauche et plan TFD à droite

L'un des avantages de cette méthode est qu'elle est facile à implémenter avec un gain de temps significatif avec la mise en forme matricielle. Pour les géométries simples, les séries de Fourier élémentaires ou les modes composants les défauts de forme sont facile à obtenir mais pour une géométrie complexe, sa modélisation est plus compliquée à obtenir.

Tableau 2.5 : Analyse de la TFD par rapport aux critères

Modélisation	Discrète
Paramétrage	Les amplitudes des harmoniques de sinus et cosinus
Applicabilité du critère 1	La TFD peut représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Il est possible d'établir l'application des lois de probabilité sur les amplitudes de la TFD
Applicabilité du critère 3	Les amplitudes de la TFD telle que présentée, n'ont pas de sens physique.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

2.2.5.2 La Transformée en Cosinus Discrète (en Anglais *DCT-Discrete Cosine Transform*)

La Transformée en Cosinus Discrète (TCD) est une méthode moins générale que la transformée de Fourier et permet d'avoir une description de la forme par une combinaison des harmoniques en cosinus. Ces harmoniques, appelées communément modes, forment une base orthogonale assurant ainsi l'indépendance des paramètres. La TCD permet dans un premier temps de décomposer la forme d'une géométrie dans des harmoniques en cosinus et dans un second temps, elle permet de reconstruire cette géométrie en se basant sur certains modes principaux de la géométrie. C'est une méthode qui a été utilisée dans la modélisation des défauts d'un plan (Huang et Ceglarek, 2002), pour le filtrage des données de coordonnées provenant des mesures (Lecompte et al., 2010), dans le traitement des images et dans les interpolations (Khayam, 2003). Plus de détails mathématiques concernant la TCD peuvent être trouvés dans (Huang et Ceglarek, 2002).

La TCD est appliquée à une surface plane aléatoire et les résultats sont montrés sur la Figure 2.9.

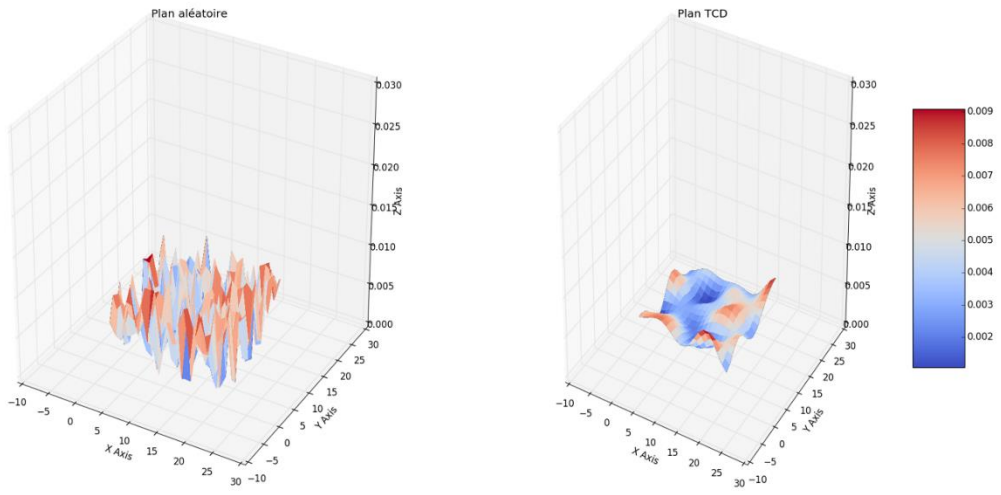


Figure 2.9 : Plan aléatoire à gauche et plan TCD à droite

C'est une méthode efficace pour représenter les défauts d'une géométrie. Elle est facile à mettre sous forme matricielle et permet de gagner en temps de calcul. Cependant, pour l'instant, son utilisation est limitée à la modélisation des défauts d'un plan. La représentation des autres surfaces telles que la sphère, le cylindre, le tore, le cube etc, n'a pas encore été réalisée.

Tableau 2.6 : Analyse de la TCD par rapport aux critères

Modélisation	Discrète
Paramétrage	Les amplitudes des harmoniques de cosinus
Applicabilité du critère 1	La TCD peut représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Il est possible d'établir l'application des lois de probabilité sur les amplitudes de la TCD
Applicabilité du critère 3	Les amplitudes des harmoniques de la TCD telle que présentée, n'ont pas de sens physique.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

2.2.5.3 Les champs aléatoires

Les champs aléatoires permettent de modéliser aléatoirement les imperfections de surfaces. La représentation paramétrique d'un champ aléatoire est donnée par l'expression suivante :

$$Y(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}, \varsigma_1, \varsigma_2, \ldots) \tag{2.1}$$

où x est en général un vecteur de coordonnées spatiales continues de dimension *n ;* ς est un ensemble de paramètres aléatoires. La variation d'un champ aléatoire est caractérisée par deux facteurs : la fonction moyenne et la fonction covariance.

Il existe plusieurs méthodes de décomposition du noyau de la covariance permettant après de modéliser stochastiquement les imperfections des surfaces. Et parmi elles on peut citer : **l'expansion de Karhunen-Loève** (Matteo Broggi, 2011).

Un exemple de représentation de champs aléatoires unidimensionnel et bidimensionnel par l'expansion de Karhunen-Loève en utilisant des matrices de covariance connues est présenté sur les Figure 2.10 et Figure 2.11.

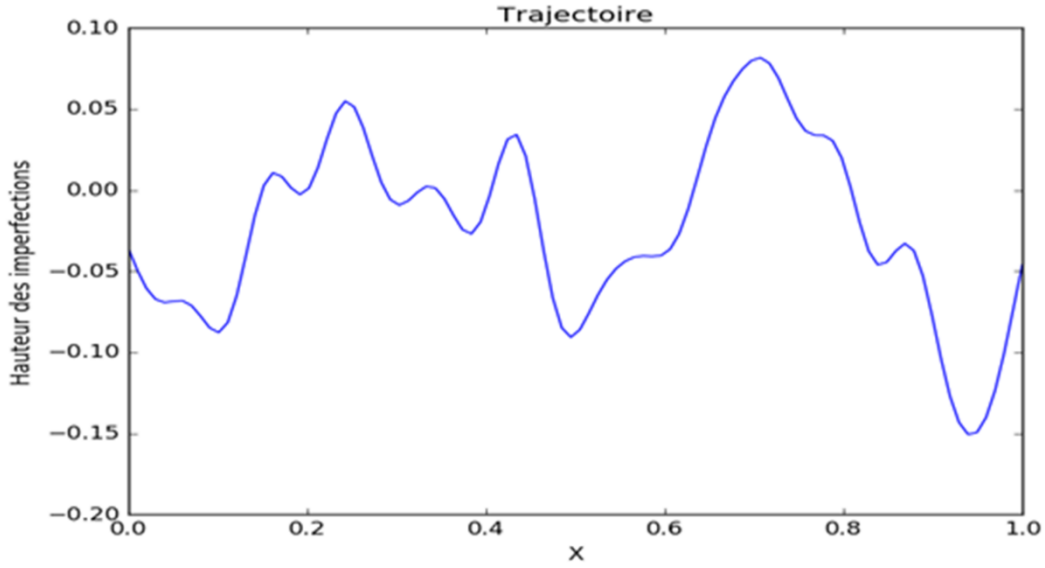


Figure 2.10 : Exemple de champ aléatoire d'un processus stochastique unidimensionnel avec comme fonction de covariance $C(x_1, x_2) = a^2.exp(-(x_1 - x_2)^2 / l_0^2)$ *et utilisant l'expansion de Karhunen-Loève. Les 30 premiers vecteurs propres et valeurs propres correspondants ont été utilisés pour la modélisation.*

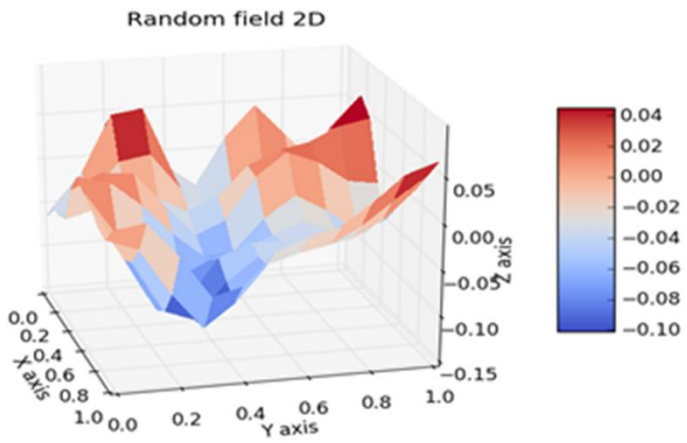


Figure 2.11 : Exemple de champ aléatoire d'un processus stochastique bidimensionnel avec comme fonction de covariance $C(x_1, x_2) = a^2.exp(-(x_1 - x_2)^2 / l_0^2)$ *et utilisant l'expansion de Karhunen-Loève. Les 50 premiers vecteurs propres et valeurs propres correspondants ont été utilisés pour la modélisation.*

C'est une méthode intéressante lorsque l'on dispose de données statistiques permettant la définition de la matrice de covariance. Elle a été utilisée dans la modélisation des imperfections d'une surface cylindrique (Matteo Broggi, 2011 ; C. A. Schenk, G. I. Shueller, 2003). C'est une méthode qui représente les éléments 1D, 2D et 3D et est applicable à un large spectre de géométries.

Tableau 2.7 : Analyse de la méthode stochastique par rapport aux critères

Modélisation	Discrète
Paramétrage	Les modes, la matrice de covariance
Applicabilité du critère 1	Les champs aléatoires peuvent représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Possibilité d'application des lois de probabilité sur les amplitudes d'un champ aléatoire
Applicabilité du critère 3	Les amplitudes d'un champ aléatoire telle que présentée, n'ont pas de sens physique.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

2.2.5.4 La méthode modale basée sur les modes vibratoires

Cette méthode permet d'obtenir les défauts d'une surface à partir d'une superposition des déformations des différents modes de vibration. Ces modes sont des harmoniques avec des fréquences différentes. Ils sont obtenus grâce à l'analyse modale de la structure et permettent de construire une base à partir des vecteurs modaux. Ainsi, une surface finale avec des défauts de forme s'obtient par la superposition des modes. Cette méthode modale est née de la corrélation entre les vibrations sonores d'une cloche et ses défauts géométriques (S. Samper, 2009). L'analyse vibratoire est utilisée dans la détermination des défauts élémentaires des géométries. Ainsi, la résolution de l'équation du mouvement de la structure (M. Gérardin et D. Rixen, 1997) permet de déterminer les vecteurs déplacements des points de discrétisation. La somme pondérée de ces vecteurs de déplacement par leur coefficient modal respectif permet d'obtenir la surface finale de la géométrie avec des défauts de forme. Les amplitudes des modes de cette méthode sont obtenues grâce aux données de la métrologie.

Cette méthode modale a été appliquée pour la représentation des défauts d'un plan, d'un cylindre et d'une demi-sphère (Samper et Formosa, 2006 ; Hugues Favreliere, 2009 ; Favrelière, Samper et Adragna, 2010). Un exemple de décomposition modale d'un plan est présenté sur la Figure 2.12.

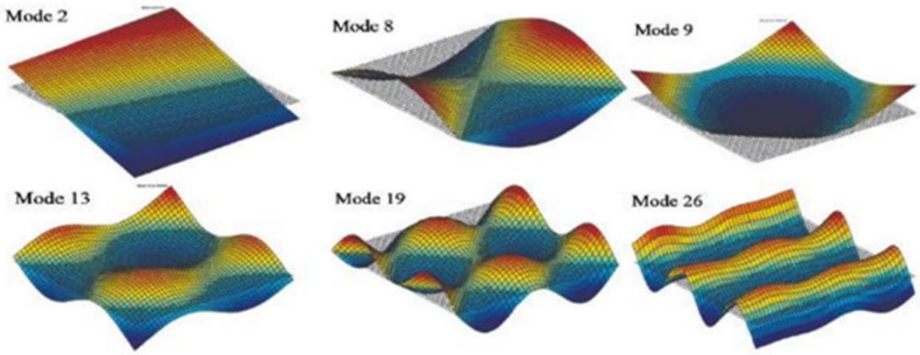


Figure 2.12 : Formes modales naturelles d'un plan carré (Samper et Formosa, 2006)

La méthode modale comme décrite ci-dessus utilise les équations de mouvement issues de la mécanique et la méthode des éléments finis pour la résolution après maillage de la géométrie. La décomposition modale permet de représenter les défauts de forme sur tous types de géométries (curviligne et surfacique) et permet de caractériser en plus les défauts de forme, les défauts de position, d'orientation, d'ondulation ou encore de rugosités (Adragna, 2007). Cette méthode est générique et est utilisable quelle que soit la base choisie.

Tableau 2.8 : Analyse de la méthode modale basée sur les modes vibratoires par rapport aux critères

Modélisation	Continue et discrète
Paramétrage	Les amplitudes des modes vibratoires
Applicabilité du critère 1	Cette méthode modale peut représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Possibilité d'application des lois de probabilité sur les amplitudes des différents modes vibratoires
Applicabilité du critère 3	La représentativité technique de cette méthode modale ne permet pas facilement d'associer un modèle probabiliste à partir des connaissances classiques des systèmes de production.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

Des méthodes de modélisation des défauts de forme des surfaces ont été présentées dans ces dernières sections dans le but de déterminer celle qui est compatible avec les objectifs de la thèse et avec les méthodes probabilistes d'analyse des tolérances qui ont été déjà développées. Pour ce faire, une comparaison des différentes méthodes est proposée dans la section suivante.

2.2.6 Comparaison et analyse des méthodes de modélisation de défauts de forme

Le Tableau 2.9 synthétise les analyses et les comparaisons par rapport aux critères préétablis sur les différentes méthodes de modélisation des défauts de forme.

Tableau 2.9 : Comparaison de toutes les méthodes de modélisation des défauts de forme par rapport aux deux critères

Méthodes	Critère 1	Critère 2	Critère 3	Critère 4
Les méthodes paramétriques	✓	✓	✗	✓
TFD	✓	✓	✗	✓
TDC	✓	✓	✗	✓
Skin Modèle	✓	✓	✗	✓
Méthodes basées sur les bruits blancs	✓	✓	✗	✓
Méthodes basées sur le Morphing	✓	✓	✗	✓
Les champs aléatoires	✓	✓	✗	✓
Méthode Modale basée sur l'analyse vibratoire	✓	✓	✗	✓

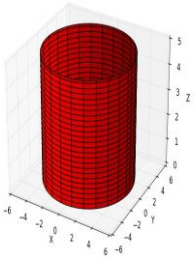
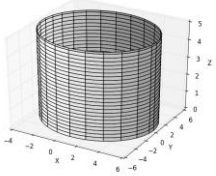
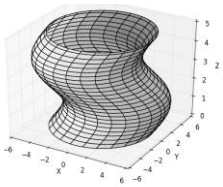
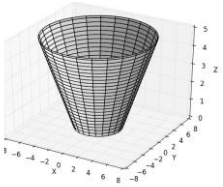
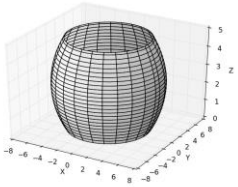
Les comparaisons démontrent la non-existence d'une méthode pouvant satisfaire l'ensemble des critères préétablis. Ainsi, après analyse des différents concepts, nous nous sommes orientés vers la modification de l'approche modale afin de générer un champ de défauts complexes à partir d'un nombre restreint de paramètres et afin de définir les modes telle que l'amplitude de chaque mode ait un sens physique, d'où la proposition d'une nouvelle méthode nommée la méthode de la Décomposition Modale Métrique (DMM).

2.2.7 La méthode de la Décomposition Métrique Modale

La méthode n'utilise ni les équations du mouvement de la mécanique vibratoire, ni la méthode des éléments finis. La méthode de la Décomposition Modale Métrique (DMM) permet d'obtenir la surface avec défauts en appliquant des translations à chaque point du maillage de la surface nominale. Les translations sont appliquées à l'aide des vecteurs modaux. Chaque translation à l'aide d'un vecteur modal appliquée à la surface nominale constitue un défaut élémentaire

comme montré sur le Tableau 2.10. La surface finale avec défauts de forme est alors obtenue par la superposition des défauts élémentaires ou modes. En comparaison avec la méthode modale développée dans la sous-section 2.2.5.4 qui utilise les modes vibratoires, la DMM utilise les modes dits « technologiques » qui correspondent aux impacts observés sur les pièces issues des procédés de fabrication. Ainsi, chaque vecteur modal correspond à un mode « technologique » i.e. à une déformation élémentaire. Les vecteurs modaux ont été normés pour que chaque amplitude ait un sens métrique. Un ensemble de vecteurs modaux développés pour des surfaces plane, circulaire et cylindrique est rassemblé dans l'Annexe B.

Tableau 2.10 : Quelques déformations élémentaires du cylindre

Surface nominale	Vecteur modal	Déformation élémentaire
	$\mathbf{f}_{elliptique}(x,y,z) = k * \begin{pmatrix} \cos\theta * \cos\theta \\ \sin\theta * \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$	
	$\mathbf{f}_{\text{sinusoidal}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$	
	$\mathbf{f}_{Conique}(x,y,z) = k * \begin{pmatrix} 2 * \cos\theta * \left(\frac{2}{5}z - 1\right) \\ 2 * \sin\theta * \left(\frac{2}{5}z - 1\right) \\ 0 \end{pmatrix}$	
	$\mathbf{f}_{tonneau} = k \begin{bmatrix} \cos(\theta).\left[1 - 4\left(\frac{2}{5}z - 1\right)^2\right] \\ \sin(\theta)\left[1 - 4\left(\frac{2}{5}z - 1\right)^2\right] \\ 0 \end{bmatrix}$	

Un champ modal est défini suivant les axes Ox, Oy et Oz par :

$$\mathbf{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_x(x,y,z)\\ \mathbf{f}_y(x,y,z)\\ \mathbf{f}_z(x,y,z)\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Ce vecteur $\mathbf{f}(x,y,z)$ est appliqué à chaque point $\mathrm{M}_n(x_n,y_n,z_n)$ de la surface nominale pour obtenir un point $\mathrm{M}_f(x_f,y_f,z_f)$ de la surface finale avec défauts de forme, comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix}x_f\\ y_f\\ z_f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{f}_x(x_n,y_n,z_n)\\ \mathbf{f}_y(x_n,y_n,z_n)\\ \mathbf{f}_z(x_n,y_n,z_n)\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Le champ modal total représentant les défauts de forme de la surface est défini par la somme pondérée des modes élémentaires appliqués à chaque nœud de la surface :

$$\mathbf{f}_{pa,A_0}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_{xpa,A_0}\\ \mathbf{f}_{ypa,A_0}\\ \mathbf{f}_{zpa,A_0}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{pa,j}*\mathbf{f}_{pa,j,A_0} \tag{2.4}$$

où $\mathbf{f}_{pa,A_0}$ est le champ modal total de la surface *a* de la pièce *p* et exprimé au point A_0 ; $\mathbf{f}_{pa,j,A_0}$ est le vecteur modal correspondant au $j^{ième}$ défaut de forme élémentaire écrit en un point A_0 de la surface *a* de la pièce *p* ; $\lambda_{pa,j}$ représente le coefficient d'amplitude du $j^{ième}$ défaut de forme élémentaire de la surface *a* de la pièce *p*. Les vecteurs modaux dépendent de la classe de la surface et les défauts élémentaires qui peuvent être considérés par rapport aux procédés de fabrication.

Avant de pouvoir utiliser la DMM qui peut ressembler aux méthodes DCT ou DFT, les vecteurs modaux doivent être normés. Sans cette normalisation, les coefficients d'amplitude ($\lambda_{pa,j}$) tels que définis n'ont pas de sens physique. Les modes tels qu'ils sont définis ne permettent de relier de manière unique les défauts de forme aux cotations spécifiées sur les dessins techniques. Les vecteurs modaux doivent être normés afin que les coefficients d'amplitude des modes soient métriques. Nous nous limitons à calculer la norme maximale du champ vectoriel modal pour

tous les points de la surface avant de normer ce maximum à 1 mm comme le montre la relation suivante :

$$\max\left(\left\|\mathbf{f}_j(M)\right\|\right)_{1\le j\le n} = 1[\mathrm{mm}] \tag{2.5}$$

Où *M* représente un point appartenant au cylindre, *n* étant le nombre total de modes développés.

Ce processus de normalisation des vecteurs modaux est différent de celui appliqué par Adragna (2007) où les vecteurs modaux sont projetés dans l'espace euclidien avant d'utiliser la norme infinie. Les coefficients d'amplitude des modes ($\lambda_{pa,j}$) peuvent être également tirées des distributions probabilistes dérivées des processus de fabrication (Moroni et Polini, 2003).

L'obtention des différents modes est faite à partir des caractéristiques intrinsèques et des degrés d'invariance de la surface nominale. Tous les défauts de forme dépendront de la surface nominale ou de la classe de surface. Nous distinguons quatre types de modes :

- Les modes rigides qui ne changent pas la nature de la surface : les modes de translation et de rotation de la surface qui correspondent aux premiers modes naturels. Rappelons que lors de l'analyse des tolérances, ces modes rigides ne sont pas considérés dans la modélisation de la surface réelle car ils sont déjà pris en compte par les composantes du vecteur **X**.
- Les modes de « dilatation » qui correspondent à une variation des caractéristiques intrinsèques de la surface.
- Les modes d'ondulation qui sont définis par des déviations sinusoïdales le long des Eléments Géométriques de Référence Minimum (EGRM) de la surface.
- Les modes de section : ces modes définissent les variations des caractéristiques intrinsèques en utilisant les coordonnées polaires. Ces modes font varier le profil ou la géométrie de la section droite d'une surface d'où leur nom. En prenant par exemple le cas d'un cylindre d'axe **z,** de rayon **r** et d'angle polaire **θ**, les modes de sections font varier le rayon **r** en fonction de **z** et/ou **θ**. Ce qui fait changer complètement la forme du cylindre.
- Les modes quelconques sont ceux qui n'appartiennent pas aux catégories précitées.

Les différents modes de différentes surfaces (plan, cylindre, plan circulaire) ont été développés au cours de nos travaux. Le développement des modes dépend de la nature de la surface comme nous le montre la Figure 2.13 où par exemple pour une surface plane, les modes de section

n'existent pas. Plus d'information sur les différents modes développés pour chaque surface, sont disponibles dans l'Annexe B.

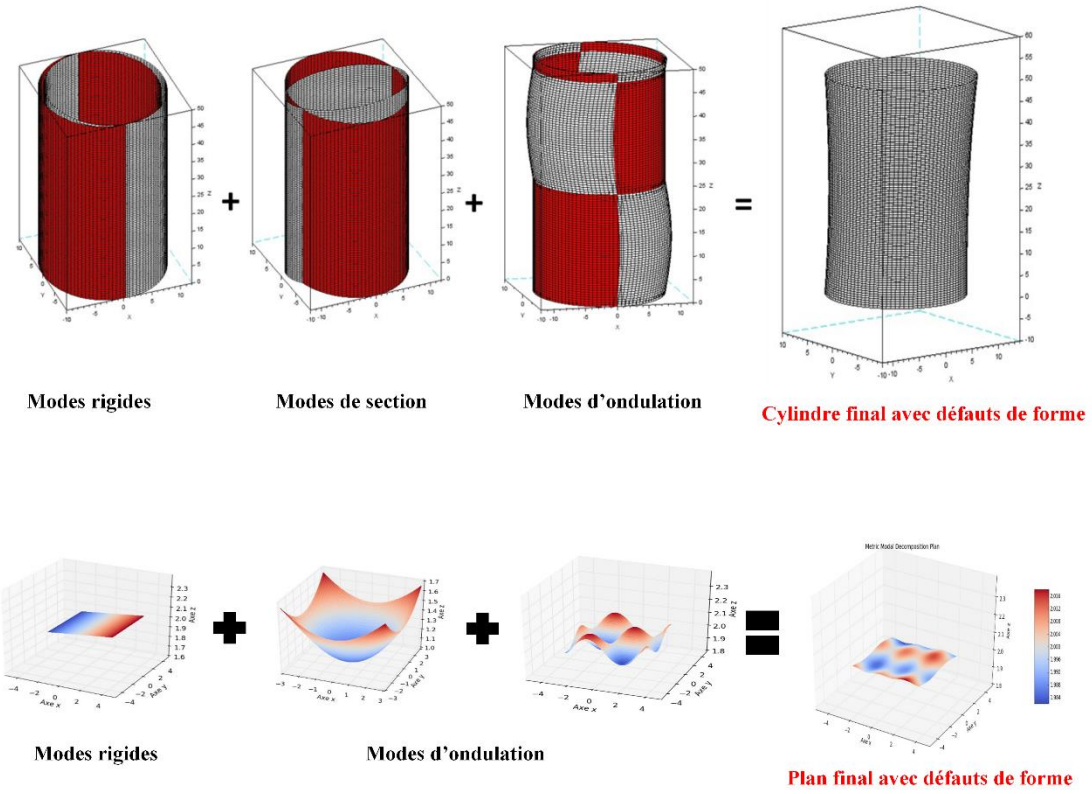


Figure 2.13 : Superposition des défauts élémentaires des surfaces cylindrique et plane (En rouge le cylindre nominal sans défauts et en blanc le cylindre avec défauts de forme)

Des exemples de surfaces plane et cylindrique avec défauts de forme obtenues en appliquant la méthode de la Décomposition Métrique Modale sont montrés sur Figure 2.14. Ces surfaces montrent bien les déviations des différents nœuds des maillages des surfaces.

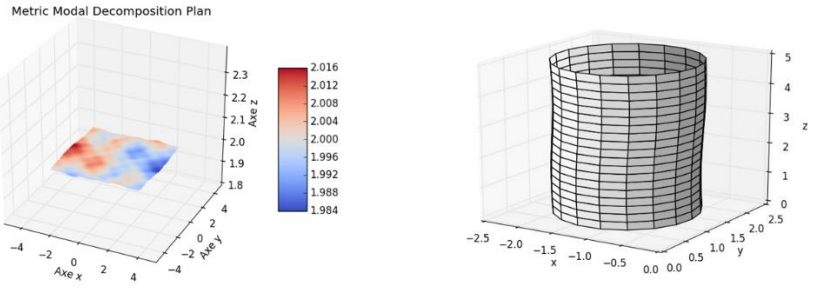


Figure 2.14 : Représentation d'un plan (à gauche) et d'un cylindre (à droite) avec défauts de forme

Les modes développés pour représenter la surface finale avec des défauts de forme, sont obtenus grâce au processus de fabrication (Homri et al., 2017). Ils sont définis en se basant sur les expériences et/ou les connaissances en fabrication. En fonction de certains procédés de fabrication tels que l'usinage, la fabrication additive etc., certains types de défauts sont récurrents. A titre d'exemple, certains défauts dérivés de la fabrication additive ont été identifiés dans (Dantan et al., 2017; Huang et al., 2018). Ces travaux permettent tout d'abord de déterminer les différents types de défauts de forme spécifiques à la fabrication additive. Ensuite, grâce aux données de mesure des pièces fabriquées, les amplitudes des différents modes sont déterminées. Par ces travaux, nous avons pu monter que la méthode de la Décomposition Métrique Modale est utilisable dans le cadre de l'identification des modes liés à un procédé de fabrication (fabrication additive) et dans le cadre de l'analyse des tolérances avec défauts de forme (Dantan et al., 2017).

Compte tenu de tous les avantages qu'apporte la méthode de la Décomposition Modale Métrique, elle est la méthode que nous avons choisie pour la suite des travaux de manuscrit. Cette méthode a été utilisée dans ce manuscrit pour modéliser les défauts de forme des surfaces planes et cylindriques. Cependant, elle peut être appliquée aux autres types de surfaces (sphère, tore, surface complexe, etc.).

La méthode de Décomposition Modale Métrique est une méthode efficace pour représenter à la fois les surfaces 2D comme 3D. En plus la représentativité des différents modes par des amplitudes métriques, permet d'obtenir une signature modale dont les amplitudes ont un sens physique.

Tableau 2.11 : Analyse de la DMM par rapport aux critères

Modélisation	Discrète
Paramétrage	Les amplitudes des modes
Applicabilité du critère 1	La DMM peut représenter les défauts de forme et les ondulations
Applicabilité du critère 2	Les amplitudes des modes « technologiques » peuvent être modélisées par une loi de probabilité issue des procédés de fabrications
Applicabilité du critère 3	La représentativité technique de la DMM permet facilement d'associer un modèle probabiliste à partir des connaissances classiques des systèmes de production.
Applicabilité du critère 4	Les représentations par maillage permettent une simulation des contacts entre surfaces.

Les surfaces non-idéales considérées lors de l'analyse des tolérances sont obtenues grâce à un ensemble de modes. Les modes rigides permettent d'avoir les surfaces de substitution comme illustrée par la Figure 2.15. Les surfaces de substitution sont modélisées à l'aide des composantes des torseurs écarts qui composent le vecteur **X** (i.e. les défauts d'orientation, de position et intrinsèques). Les ondulations des surfaces sont obtenues grâce aux amplitudes des défauts de forme élémentaires des autres types de modes (i.e. les modes rigides ne sont plus concernés). L'ensemble de ces amplitudes des défauts de forme élémentaires forme le vecteur $\mathbf{F} = \{ f_1, f_2, ..., f_n \}$ où n représente le nombre total de points de discrétisation de la surface. Le vecteur **F** ne contient donc pas les amplitudes des modes rigides.

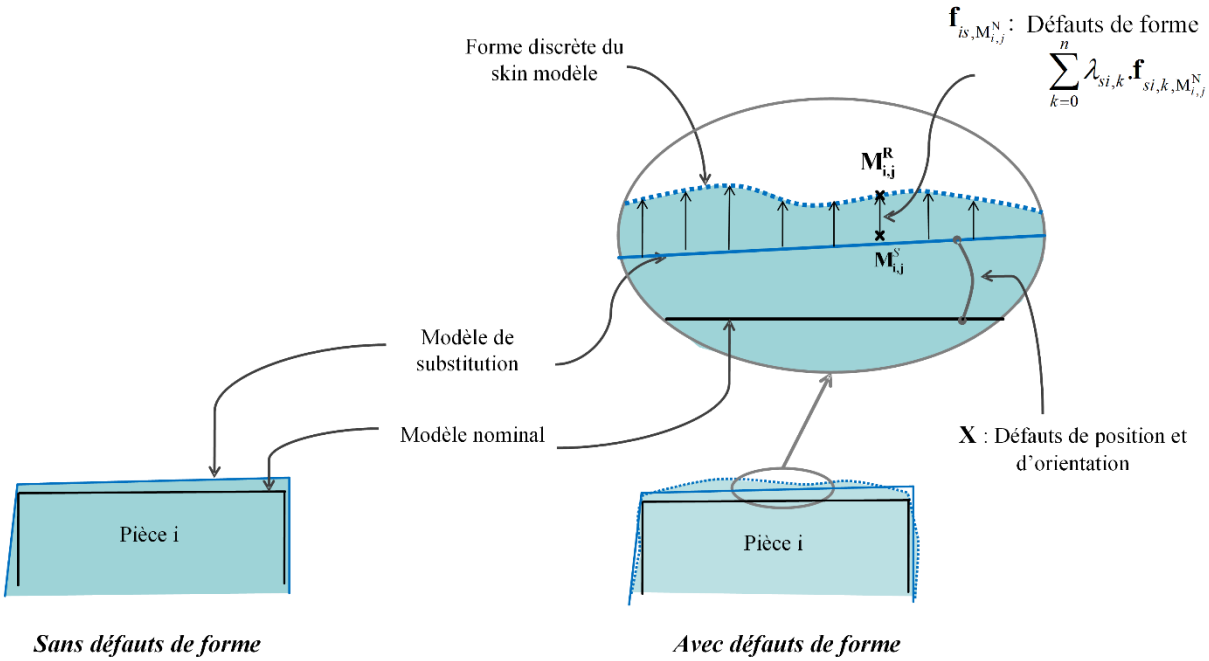


Figure 2.15 : Surface sans et avec défauts de forme

2.2.8 Synthèse

Dans cette section, des méthodes de la littérature permettant de modéliser les imperfections de fabrication des surfaces ont été présentées. Des critères de comparaison ont été émis afin de déterminer la plus adéquate et compatible avec les objectifs et les méthodes de la thèse. Aucune de ces techniques de modélisation ne nous satisfaisait. Nous avons proposé une nouvelle méthode inspirée de la représentation modale. Elle permet de représenter les défauts de forme

sur tous types de surface en considérant les géométries de dimension 2D comme 3D et sa représentation des vecteurs modaux est compatible avec les modélisations géométriques et les méthodes probabilistes développées dans le projet AHTOLA. Elle est la méthode que nous allons utiliser dans l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques avec la considération des défauts de forme observés sur les surfaces des pièces par le biais du vecteur **F** (vecteur dont les composantes sont les amplitudes des champs modaux finaux de chaque point de discrétisation et ne prenant pas en compte les modes rigides). Aussi, plus d'informations concernant les notations utilisées tout au long de ce manuscrit peuvent être trouvées dans l'Annexe A.

2.3 Modélisation du comportement géométrique des liaisons

Les systèmes mécaniques sont composés de pièces, avec des types de contact différents et sont sujets à des imperfections de fabrication. Cette section traite la problématique de la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique hyperstatique avec défauts de forme. Une fois ces derniers modélisés comme décrit dans la section précédente, ils sont intégrés dans la formalisation mathématique par des contraintes caractérisant le comportement géométrique du système. Parmi ces contraintes, les plus impactées sont les contraintes d'interface. Elles sont alors reformulées et les conditions d'assemblage et de fonctionnalité sont redéfinies. Les contacts doivent être modélisés en intégrant les défauts de forme. Les trois types de contacts (Chapitre 1) sont considérés et analysés selon différentes méthodes.

Ainsi cette section présente tout d'abord, une synthèse des travaux sur les approches d'analyses des liaisons. Ensuite, sont présentées les méthodes proposées dans cette thèse pour la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique en considérant les différents types de contacts.

2.3.1 Synthèse des travaux sur la modélisation du comportement géométrique des liaisons

Un système mécanique hyperstatique est composé souvent de trois types de contacts (Dantan et al., 2005) : les contacts fixes, glissants et flottants. L'analyse de chaque type de contacts est différente lorsque les surfaces potentiellement en contact sont considérées avec défauts de

forme. Plusieurs travaux de recherches ont été menés en considérant une combinaison de ces trois types de contact et avec différentes natures des mécanismes : 2D ou 3D, isostatique ou hyperstatique, prise en compte ou non des défauts de forme. Afin de simplifier la présentation des travaux sur la modélisation des contacts, ils sont décrits en fonction du type de contact étudié.

- **Les contacts fixes et glissants**

Lin *et al.* (2018) ont proposé dans leurs travaux un algorithme nommé « *Tooth Contact Analysis* », utilisé pour étudier l'assemblage entre les arbres et un engrenage cycloïdal. Hummel et Chassapis (2000) proposent un algorithme d'optimisation couplé avec des relations d'interférences géométriques pour obtenir les paramètres résultant de la conception assurant la non-interférence entre des surfaces pour des tolérances données. Raghu et Melkote (2004) ont étudié les impacts des séquences de serrage sur la position des pièces en utilisant les erreurs géométriques de fixation à travers des modèles expérimentaux et de simulations. Cependant, ces différentes méthodes ne considèrent pas les défauts de forme dans les contacts. D'autres travaux ont permis de prendre en compte les défauts de forme dans la simulation des assemblages des contacts fixes et glissants. Nous pouvons citer : les travaux de Adragna *et al.* (2008) où les points de contact entre deux surfaces avec défauts de forme sont étudiés. Grandjean *et al.* (2013) ont utilisé les domaines de déviations pour étudier l'assemblage de pièces planes soumises à une force externe. Morière *et al.* (2010) proposent la minimisation des distances entre pièces et considèrent comme contraintes, la non-interpénétration des pièces. Schleich *et al.* (2015b) utilisent des optimisations numériques avec des fonctions objectifs différentes pour étudier l'assemblage entre deux pièces modélisées à l'aide de la forme du skin modèle. Lê *et al.* (2014) utilisent la notion de la surface de différence convexe et le *gap hull* pour étudier la liaison entre deux surfaces planes sujettes à des défauts de forme. Hu *et al.* (1999) présentent une méthode basée sur la transformée de Fourier rapide combinée à une méthode du gradient conjugué pour analyser numériquement le contact élastique de surfaces imparfaites. De même, Putignano *et al.* (2012) proposent une méthode numérique basée sur l'approche de la fonction de Green et un maillage adaptatif non-uniforme pour l'étude de contacts mécaniques entre deux surfaces imparfaites. Enfin, Samper *et al.* (2010) proposent la détermination du *Hull* convexe et des points de contacts pour rechercher les différentes configurations d'assemblage entre deux pièces planes avec des défauts de forme.

- **Les contacts flottants**

D'autres travaux se sont plutôt penchés sur l'étude de l'assemblage des contacts flottants. Cammarata (2017) a utilisé le principe des travaux virtuels et un modèle de contact des liaisons pour déterminer les déplacements à chaque nœud et les déplacements/rotations relatifs dans les liaisons cinématiques. Zou et Morse (2004) proposent la méthode de GapSpace pour modéliser les contacts flottants entre des pièces de systèmes mécaniques 2D sans considérer les défauts de forme. Marziale et Polini (2010) proposent la méthode de l'ajustement de petite cinématique (en Anglais *Small Cinematic Adjustment*) pour simuler les assemblages sans défauts de forme d'un système mécanique 2D. Li et Roy (2001) proposent l'emploi d'une structure d'ensemble de configurations pour déterminer la meilleure configuration dans le positionnement relatif au sein d'un assemblage de pièces polyédriques. Franciosa *et al.* (2010) utilisent les alignements '*Against'* et '*Fit'* pour modéliser les relations entre pièces en contact flottant et utilisent un solveur de contraintes séquentielles pour résoudre le problème d'assemblage. Shen *et al.* (2005) développent une approche pour l'assemblage des contacts flottants composés d'arbres et d'alésages. Dans le cas d'approches permettant de prendre en compte les défauts de forme pour l'étude des contacts flottants, Schleich et Wartzack (2015a) proposent de déterminer le positionnement relatif des contacts avec jeux au moyen de techniques d'enregistrement des contraintes et de la notion de la surface de différence dans un problème de positionnement séquentiel. De plus, Schleich et Wartzack (2018) utilisent l'estimation du *gap hull* pour l'assemblage de liaisons mécaniques flottantes.

Les travaux de Louhichi *et al.* (2015), Sodhi et Turner (1994) peuvent également être cités car leurs études ont modélisé les trois types de contacts (fixe, glissant et flottant). Cependant, leurs travaux ne prennent pas en compte les défauts de forme.

Au regard de toutes les méthodes présentées (voir Tableau 2.12), une analyse plus réaliste et complète d'un système mécanique 3D passe par la prise en compte des défauts de forme et des différents types de contacts dans la modélisation de son comportement géométrique. Ainsi, l'objectif au niveau de cette section est de proposer des méthodes de modélisation du comportement géométrique des contacts fixes, glissants et flottants lors de leur processus d'assemblage. Les méthodes de modélisation du comportement géométrique des liaisons qui sont proposées, doivent être compatibles avec les méthodes d'analyse des tolérances déjà

développées au cours du projet AHTOLA et aussi être compatibles avec le paramétrage et la description mathématique proposée.

Tableau 2.12 : Etat de l'art des études sur les différents types de contacts

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">2D</th><th colspan="3">3D</th></tr>
<tr><th>Imperfections</th><th>Sans défauts de forme</th><th>Avec défauts de forme</th><th colspan="2">Sans défauts de forme</th><th colspan="2">Avec défauts de forme</th></tr>
<tr><td>Contact fixe</td><td rowspan="2">(Li et Roy, 2001)</td><td rowspan="2">(Adragna et al., 2008)</td><td rowspan="2">(Lin et al., 2018)
(Hummel et Chassapis, 2000)
(Li et Roy, 2001)
(Raghu et Melkote, 2004)</td><td rowspan="4">(Louhichi et al., 2015)
(Sodhi et Turner, 1994)</td><td rowspan="2">(Grandjean et al., 2013)
(Schleich et al., 2015b)
(Lê et al., 2014)
(Hu et al., 1999)
(Putignano et al., 2012)
(Samper et al., 2010)
(Morière et al., 2010)
(Schleich et Wartzack, 2014)</td><td rowspan="4">Proposition de la thèse</td></tr>
<tr><td>Contact glissant</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Contact flottant</td><td rowspan="2">(Zou et Morse, 2004)
(Marziale et Polini, 2010)
(Shen et al., 2005)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">(Franciosa et al., 2010)
(Shen et al., 2005)
(Cammarata, 2017)
(Rameau et al., 2018)</td><td rowspan="2">(Schleich et Wartzack, 2015b)
(Schleich et Wartzack, 2018)</td></tr>
<tr></tr>
</table>

2.3.2 Prise en compte des types de contacts dans la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique

Comme évoqué dans le chapitre 1, le comportement géométrique d'un système mécanique est modélisé par des contraintes permettant de décrire son comportement. Avant de définir ces contraintes, il est convenable de définir certaines notations qui sont utilisées par la suite. Nous distinguons les paramètres descripteurs des jeux des contacts flottants et des jeux des contacts fixes et glissants. $\left\{g^{*}_{ia/jk}\right\}$ représente la notation du torseur jeu d'un contact fixe ou glissant tandis que $\left\{g^{'}_{ia/jk}\right\}$ représente la notation du torseur jeu d'un contact flottant. La différence entre $\left\{g^{*}_{ia/jk}\right\}$ et $\left\{g^{'}_{ia/jk}\right\}$ (voir Figure 2.19) vient de la considération des déplacements non cinématiques au niveau de $\left\{g^{*}_{ia/jk}\right\}$. Le regroupement de toutes les composantes des $\left\{g^{*}_{ia/jk}\right\}$ du système mécanique forme le vecteur $\mathbf{G}^{*}$ alors que le regroupement de toutes les composantes des $\left\{g^{'}_{ia/jk}\right\}$ forme le vecteur $\mathbf{G}^{'}$. L'union des deux vecteurs $\mathbf{G}^{*}$ et $\mathbf{G}^{'}$ forme le grand vecteur $\mathbf{G}$, qui représente l'ensemble de toutes les composantes des torseurs jeux des contacts fixes, glissants et flottants.

Les contraintes sont ainsi définies et formulées mathématiquement :

- **Les équations de compatibilité** ne sont pas impactées par la prise en compte des défauts de forme ; et elles décrivent la composition des déplacements des pièces les unes par rapport aux autres et aussi des jeux au niveau des contacts à l'intérieur des boucles topologiques. La Figure 2.16 montre un exemple de boucle topologique entre deux pièces mécaniques. L'identification et la formulation d'une équation de compatibilité restent inchangées : $C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=0$. Ces équations de compatibilité sont mises sous forme matricielle dans le but de leur utilisation dans le processus de l'analyse des tolérances. Leur forme matricielle telle que décrite signifie que tous les torseurs écarts et les torseurs jeux sont exprimés au même point. La forme matricielle est représentée par :

$$\left[\mathrm{C_{omp}}\right]\left[\mathbf{G}^{'}\right]=\left[\mathbf{X}\right]+\left[\mathbf{G}^{*}\right] \tag{2.6}$$

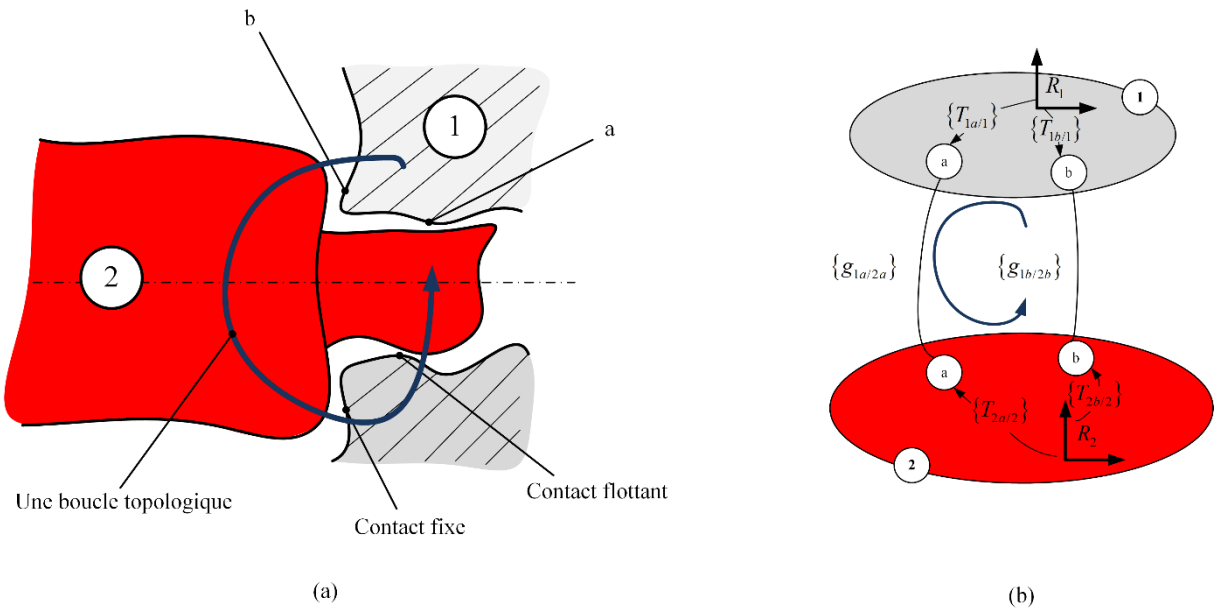


Figure 2.16 : Boucle topologique entre deux pièces

***Exemple** : Mise sous forme matricielle des équations de compatibilité*

Pour cet assemblage de la Figure 2.16, différents torseurs (torseurs écarts et torseurs jeux) sont développés afin de formaliser les équations de compatibilité. Les torseurs sont :

$$\{T_{1a/1}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{1a1} & u_{1a1} \\ \beta_{1a1} & v_{1a1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \{T_{2a/2}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2a2} & u_{2a2} \\ \beta_{2a2} & v_{2a2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \{g_{1a/2a}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{1a2a} & u_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} & v_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} & w_{1a2a} \end{Bmatrix}$$
$$\{T_{1b/1}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{1b1} & 0 \\ \beta_{1b1} & 0 \\ 0 & w_{1b1} \end{Bmatrix}, \quad \{T_{2b/2}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{2b2} & 0 \\ \beta_{2b2} & 0 \\ 0 & w_{2b2} \end{Bmatrix}, \quad \{g_{1b/2b}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha^*_{1b2b} & u^*_{1b2b} \\ \beta^*_{1b2b} & v^*_{1b2b} \\ \gamma^*_{1b2b} & w^*_{1b2b} \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

En choisissant la boucle topologique de l'assemblage, nous obtenons l'équation suivante :

$$\{T_{1/1}\} = \{T_{1/1a}\}_A + \{g_{1a/2a}\}_A + \{T_{2a/2}\}_A + \{T_{2/2b}\}_A + \{g_{1b/2b}\}_A + \{T_{1b/1}\} = 0$$

$$\begin{cases} -\alpha_{1a1} + \alpha_{1a2a} + \alpha_{2a2} - \alpha_{2b2} - \alpha^*_{1b2b} + \alpha_{1b1} = 0 \\ -\beta_{1a1} + \beta_{1a2a} + \beta_{2a2} - \beta_{2b2} - \beta^*_{1b2b} + \beta_{1b1} = 0 \\ \gamma_{1a2a} - \gamma^*_{1b2b} = 0 \\ -u_{1a1} + u_{1a2a} + u_{2a2} - u^*_{1b2b} = 0 \\ -v_{1a1} + v_{1a2a} + v_{2a2} - v^*_{1b2b} = 0 \\ w_{1a2a} - w^*_{1b2b} - w_{2b2} - w_{1b1} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Cette Eq. (2.8) est mise sous forme matricielle. Et cette mise en forme matricielle des équations de compatibilité est celle retenue pour l'implémentation informatique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} \\ u_{1a2a} \\ v_{1a2a} \\ w_{1a2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1a1} - \alpha_{2a2} + \alpha_{2b2} + \alpha^*_{1b2b} - \alpha_{1b1} \\ \beta_{1a1} - \beta_{2a2} + \beta_{2b2} + \beta^*_{1b2b} - \beta_{1b1} \\ \gamma^*_{1b2b} \\ u_{1a1} - u_{2a2} + u^*_{1b2b} \\ v_{1a1} - v_{2a2} + v^*_{1b2b} \\ w^*_{1b2b} + w_{2b2} + w_{1b1} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

- **Les contraintes d'interface** sont des inéquations ou équations modélisant la non-interpénétration au niveau des contacts. Etant donné que les contraintes d'interface sont formalisées en s'appuyant sur les distances entre les surfaces en liaison, leur formalisation est fortement impactée par les défauts de forme. Les contraintes d'interface sont désormais définies en fonction des composantes des écarts intrinsèques du vecteur (**X**), le vecteur dont ses composantes sont l'ensemble des composantes des torseurs jeux (**G**) et le vecteur (**F**) dont les composantes sont l'ensemble des amplitudes des défauts de forme. Une contrainte d'interface des contacts flottants est désormais formalisée par : $C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}^{'},\mathbf{F}\right) \leq 0$. Les contraintes d'interface des contacts flottants sont également transformées sous forme matricielle en vue de leur utilisation et cette formulation matricielle signifie que tous les torseurs sont exprimés au même point :

$$\left[\mathrm{C}_{\text{interface/Flottant}}\right]\left[\mathbf{G}^{'}\right] \leq \left[\mathbf{X}+\mathbf{F}\right] \tag{2.10}$$

Où $\left[\mathrm{C}_{\text{interface/Flottant}}\right]$ représente la matrice contenant les coefficients des composantes des torseurs jeux et des composantes des déplacements cinématiques des torseurs jeux des contacts glissants.

L'ensemble des composantes des torseurs jeux permettant l'assemblage des contacts fixes et glissants est représenté par le vecteur $\mathbf{G}^*$. Par conséquent, les contraintes d'interface de ces contacts fixes et glissants sont formalisées par : $C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{G}^*\right)=0$.

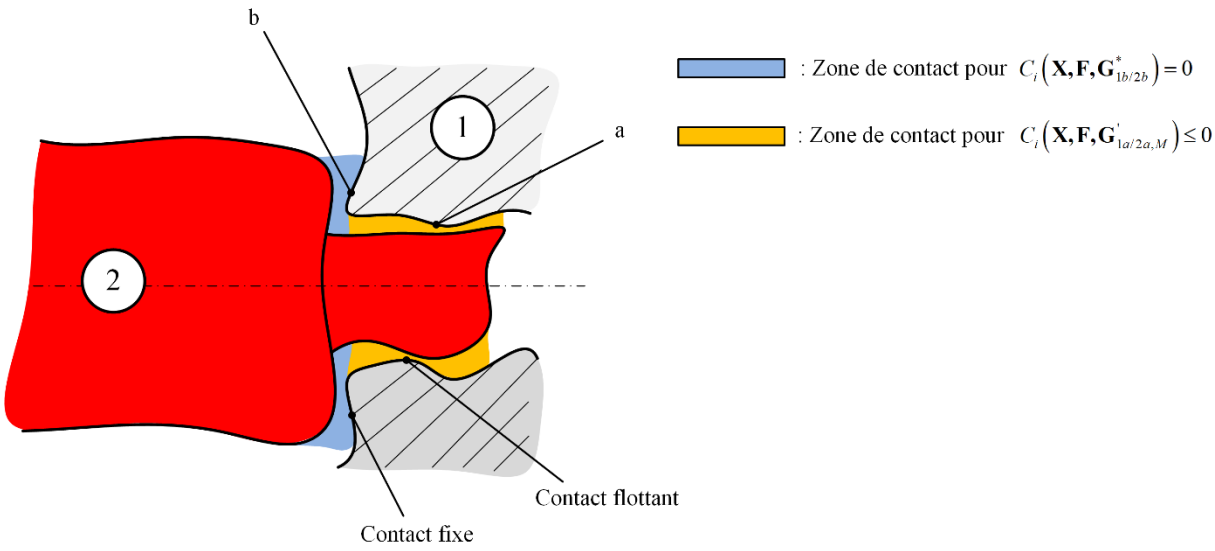


Figure 2.17 : Différents types de contraintes d'interface

- **Les conditions fonctionnelles** qui sont des inéquations qui décrivent l'aptitude à l'emploi d'un système mécanique et se traduisent par de différentes contraintes géométriques. L'apparition des défauts de forme sur les surfaces a des impacts sur ces surfaces appelées « surfaces fonctionnelles ». Une condition fonctionnelle est formalisée par : $C_f\left(\mathbf{X},\mathbf{G},\mathbf{F}\right)\geq 0$.

Il reste à décrire comment ces contraintes sont formalisées mathématiquement pour la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique avec défauts de forme.

2.3.2.1 Modélisation des jeux

Un jeu représente localement les distances entre les deux surfaces de substitution potentiellement en contact et le torseur jeu représente le déplacement en position et en orientation d'une des surfaces de substitution par rapport à l'autre. Les jeux jouent un rôle important dans l'assemblage de systèmes mécaniques hyperstatiques car c'est grâce à eux que

l'assemblage est possible pour un système mécanique hyperstatique (Dumas et al., 2015a). Les jeux d'un système mécanique ne peuvent pas être considérés comme des variables aléatoires car les pièces peuvent se déplacer librement tant que les contraintes de non-interpénétration sont respectées. Cette nature des jeux rend difficile la modélisation du comportement géométrique des systèmes mécaniques hyperstatiques. Dans ces travaux de thèse, les configurations des contacts entre deux surfaces réelles sont modélisées et les contraintes sur les composantes des torseurs jeux sont déduites.

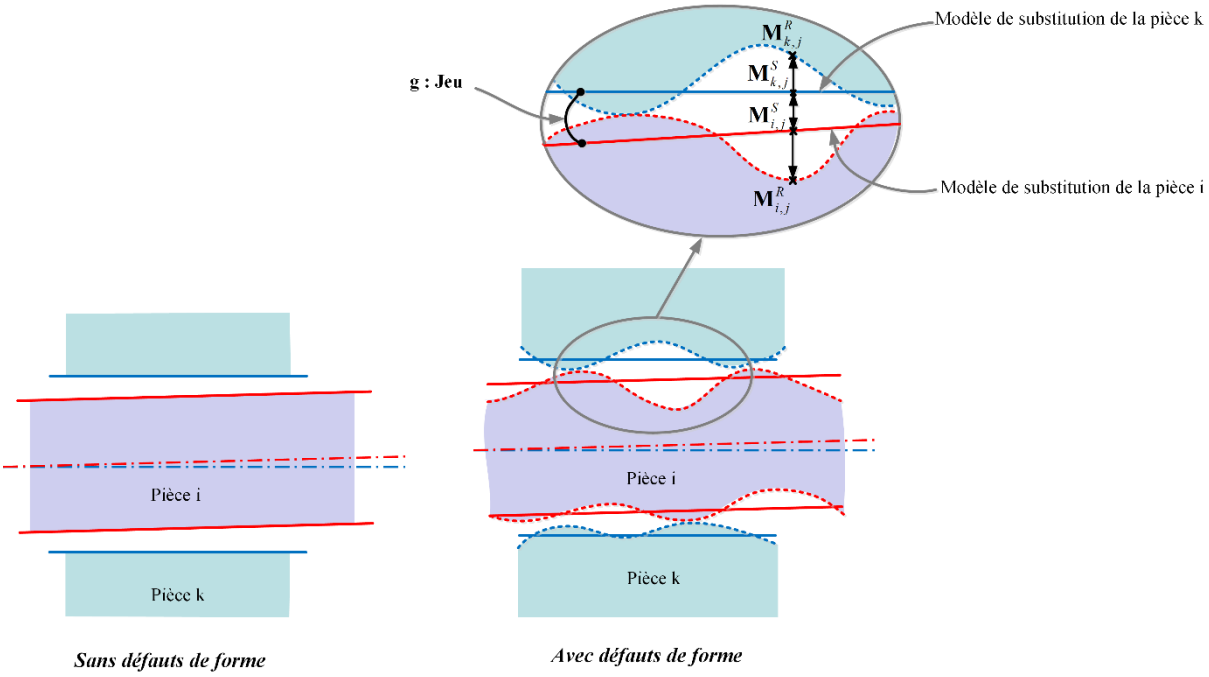


Figure 2.18 : Définition du jeu entre de la liaison entre deux surfaces cylindriques

Il existe plusieurs approches qui permettent de modéliser le jeu des liaisons comme évoqué dans la section 1.2.1. Dans ces travaux de thèse, la méthode des torseurs de petits déplacements est utilisée. Chaque jeu est caractérisé par un torseur entre les EGRM des surfaces. Les composantes de ce torseur jeu varient suivant la nature du contact et la classe des surfaces en contact. La Figure 2.18 illustre la modélisation du jeu entre deux surfaces réelles.

Après avoir décrit la configuration du jeu entre deux surfaces réelles, introduisons la modélisation du comportement géométrique des différents types de contact.

2.3.2.2 Modélisation géométrique du comportement des contacts fixes et glissants

Un contact fixe est une liaison caractérisée par la présence d'une force qui empêche tous les déplacements tangentiels et rotationnels. Pour les contacts glissants, seuls les déplacements suivants les degrés de libertés sont possibles. Lorsque les défauts de forme ne sont pas considérés sur les surfaces rigides en contact, toutes les composantes du torseur jeu d'un contact fixe sont nulles, tandis que pour un contact glissant, seuls les déplacements cinématiques existent ; les composantes des déplacements non-cinématique sont nulles. Ces deux concepts sont montrés sur la Figure 2.19.

Lorsque les défauts de forme sont considérés les composantes « nulles » des torseurs jeux des contacts fixes et glissants sont fonctions de ces défauts. Ces composantes de déplacements non-cinématiques ont un impact sur l'assemblage et le fonctionnement de l'ensemble du système mécanique. De ce fait, les valeurs de ces déplacements non cinématiques doivent être déterminées. Ces déplacements non-cinématiques peuvent s'expliquer par le fait que les points de contact lors d'un assemblage dépendent principalement des imperfections locales (par exemple les points de contacts se situent au niveau des « bosses » des deux surfaces). La détermination des valeurs des déplacements non cinématiques et cinématiques du torseur jeu, permet de déterminer la configuration admissible permettant l'assemblage des deux surfaces du contact.

Nous proposons de déterminer les composantes des torseurs jeux à l'aide d'une méthode d'optimisation. La notation du torseur jeu d'un contact entre la surface *a* de la pièce *i* et la surface *a* de la pièce *j* et exprimé à un point M, est formalisé par : $\left\{ g_{ia/ja} \right\}_M$.

Les changements de notation des torseurs jeux des contacts fixes et glissants sont montrés par la Figure 2.19. Cette dernière montre en effet, le contact entre deux surfaces planes et les composantes de ces torseurs jeux pour chaque état des surfaces de contacts.

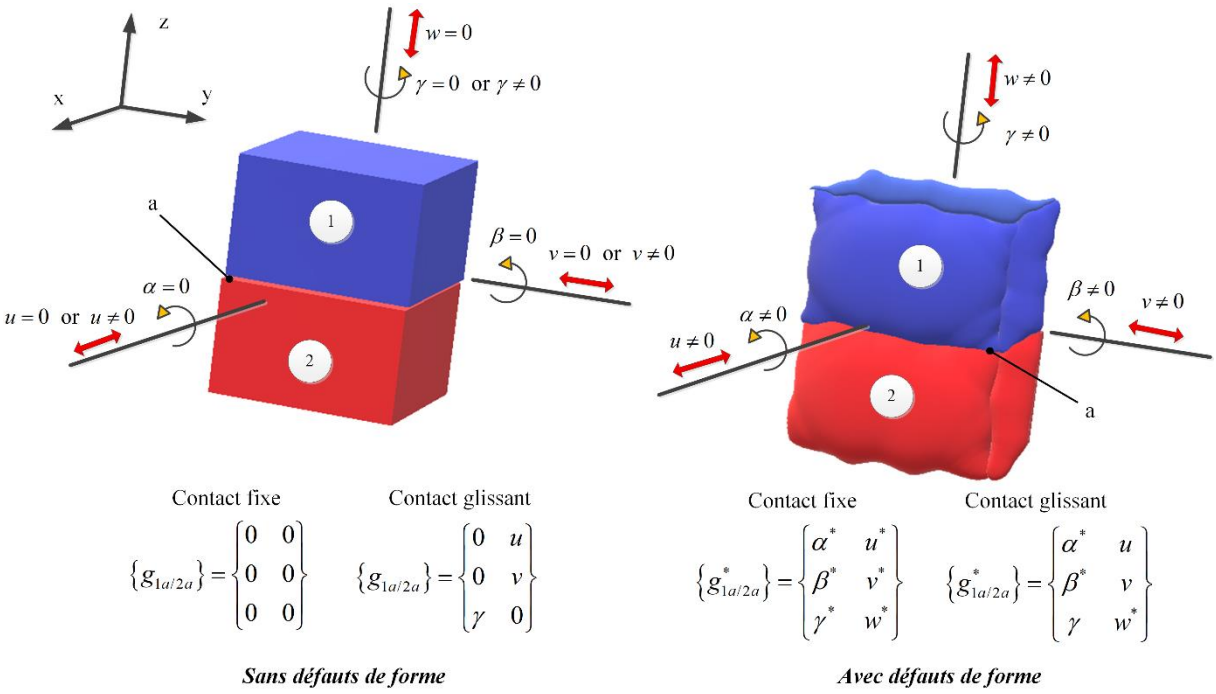


Figure 2.19 : Composantes des torseurs jeux selon l'état des surfaces et la nature du contact

La détermination des composantes du torseur jeu $\left\{g^*_{ia/jk}\right\}$ d'un contact fixe ou glissant est effectuée à l'aide de la Méthode de la Distance Signée (MDS). Considérons deux surfaces S_k et S_i avec des défauts de forme. Soient $\mathbf{M}^R_{k,j}$ et $\mathbf{M}^R_{i,j}$ deux points « en face à face » et appartenant respectivement aux surfaces réelles S_k et S_i. Soit $\mathbf{n}$ un vecteur normal de la surface nominale de la surface réelle S_k . La distance signée est définie par le produit scalaire entre le vecteur normal $\mathbf{n}$ et le vecteur $\mathbf{M}^R_{k,j}\,\mathbf{M}^R_{i,j}$. Les conditions de non-interpénétration se traduisent par : les distances doivent être supérieures ou égales à zéro. De plus, les points $\mathbf{M}^R_{k,j}$ et $\mathbf{M}^R_{i,j}$ doivent être « face à face ». La vérification de cette contrainte « face à face » est traduite de la manière suivante :

$$\left\|\mathbf{M}^R_{k,j}\mathbf{M}^R_{i,j}\wedge\mathbf{n}\right\|\leq\varepsilon,\qquad \varepsilon \text{ positif} \tag{2.11}$$

Les conditions que doivent respecter les distances signées sont formalisées mathématiquement par :

$$\begin{cases} \forall \left(\mathbf{M}_{k,j}^{R}, \mathbf{M}_{i,j}^{R}\right) \in \left(S_k, S_i\right),\ \mathbf{M}_{k,j}^{R}\mathbf{M}_{i,j}^{R}.\mathbf{n} \geq 0 \\ \text{avec} \\ \left\|\mathbf{M}_{k,j}^{R}\mathbf{M}_{i,j}^{R} \wedge \mathbf{n}\right\| \leq \varepsilon, \qquad \varepsilon \ \text{ positif} \end{cases} \tag{2.12}$$

Rappelons que les distances signées sont appliquées sous l'hypothèse que l'écart entre les normales entre une surface nominale et sa surface réelle est négligeable.

Afin de déterminer les composantes de torseur jeu modélisant un contact fixe ou glissant, une technique d'optimisation est utilisée et est basée sur le respect des conditions sur les distances signées présentées ci-dessus. Soit $\mathbf{G}_{kj/ij,M}^{*}$ le vecteur dont les composantes sont les composantes des déplacements non-cinématiques du torseur jeu du contact fixe ou glissant entre la surface *j* de la pièce *k* et la surface *j* de la pièce *i* exprimé à un point *M*. Par exemple, la relation suivante formalise le vecteur $\mathbf{G}_{1a/2a,M}^{*}$ du contact glissant avec défauts de forme de la Figure 2.19 :

$$\mathbf{G}_{1\mathrm{a}/2\mathrm{a},M}^{*} = \begin{bmatrix} w_M \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Cette technique d'optimisation consiste à minimiser une fonction des composantes du torseur jeu $\mathbf{G}_{kj/ij,M}^{*}$ tel que les distances signées entre les deux surfaces réelles soient supérieures ou égales à zéro. La fonction objectif de ce problème d'optimisation est définie comme étant une fonction des composantes de $\mathbf{G}_{kj/ij,M}^{*}$ tandis que les contraintes sont représentées par les distances signées qui doivent être supérieures ou égales à zéro. Le problème d'optimisation est formalisé mathématiquement par :

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{G}_{kj/ij,M}^{*}}{\mathrm{Min}}\ f\left(\mathbf{G}_{kj/ij,M}^{*}\right) \\ \text{sous}\ \ \forall \left(\mathbf{M}_{k,j}^{R}, \mathbf{M}_{i,j}^{R}\right) \in \left(S_k, S_i\right),\ \mathbf{M}_{k,j}^{R}\mathbf{M}_{i,j}^{R}.\mathbf{n} \geq 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Cette optimisation est conduite pour chaque contact fixe et glissant du système mécanique afin de déterminer leur vecteur $\mathbf{G}_{kj/ij,M}^{*}$ respectif.

La fonction objectif du contact glissant avec défauts de forme de l'exemple de la Figure 2.19 peut se formaliser : minimisation de la composante w_M exprimée au centre de la liaison. La

détermination des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{kj/ij,M}$ permet de déterminer la configuration admissible d'assemblage sans interférences pour chaque contact.

Les composantes des différents $\mathbf{G}^{*}_{kj/ij,M}$ du système mécanique formant le vecteur $\mathbf{G}^{*}$ et déterminées à cette étape, sont introduites dans le développement des équations de compatibilité et des conditions fonctionnelles afin de réaliser l'analyse des tolérances du système mécanique hyperstatique.

2.3.2.3 Modélisation géométrique du comportement des contacts flottants

Les contacts flottants sont caractérisés par les six composantes du torseur jeu associé. Ces six composantes du torseur jeu d'un contact flottant sont inconnues. Afin de modéliser le comportement de chaque contact flottant, des contraintes sont introduites et limitent les jeux en fonction des défauts de forme ; ces contraintes sont formalisées à partir du phénomène de non-interpénétration des pièces. Cette sous-section présente la procédure de formalisation de ces contraintes d'interface.

Afin de formaliser les contraintes d'interface, les surfaces impliquées dans les contacts doivent être discrétisées. La discrétisation des surfaces permet d'écrire les contraintes d'interface pour les points des surfaces du contact « se faisant face » ou appartenant à la même normale. La disposition des points des deux surfaces afin d'écrire les contraintes d'interface est montrée sur la Figure 2.20. Dans nos travaux, les surfaces ont été discrétisées en un maillage de points par l'utilisation du théorème de maillage de Shannon (Strohmer et Tanner, 2015). En d'autres termes, la fréquence des points du maillage doit être deux fois la fréquence de représentation des défauts de forme.

Le développement des contraintes d'interface est obtenu par l'application de l'Eq. (2.15). Cette contrainte est développée comme stipulée ci-dessous, en considérant deux points appartenant respectivement aux deux surfaces réelles en contact. Ces deux points doivent appartenir à la même normale (Figure 2.20). L'idée de cette contrainte est qu'il faut que la somme des distances entre ces deux points « se faisant face » soit supérieure ou égale à zéro. La relation de Chasles est appliquée au vecteur dérivé des deux points et plus amples développements sont effectués en considérant les vecteurs normaux et les différents jeux comme montré par l'Eq. (2.15). Ces inéquations représentant les contraintes d'interface sont développés uniquement

pour les contacts flottants. Considérons $\mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{k,j}}}$ le vecteur contenant les composantes des translations du torseur jeu $\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{kj/ij}}$.

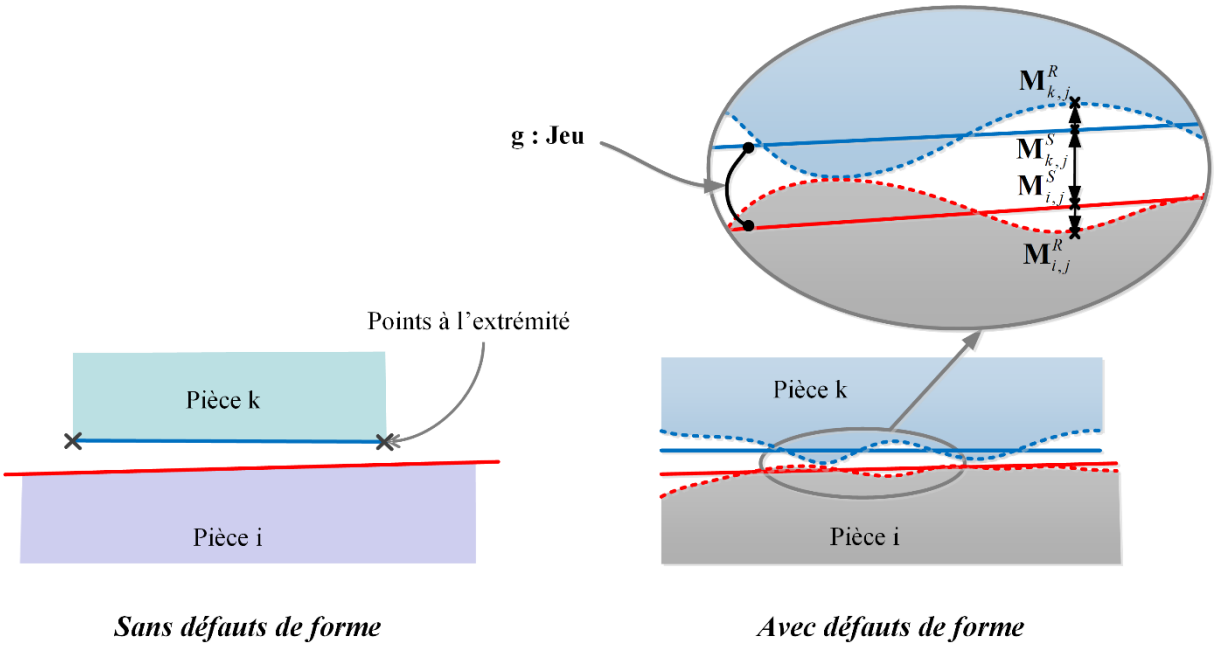


Figure 2.20 : Identification des points pour développer les contraintes d'interface

En se basant par exemple sur le cas du contact de la Figure 2.20, la configuration de contact entre les deux points est physiquement admissible dans le cas où :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}^R_{k,j}\mathbf{M}^R_{i,j} \geq 0 \\
&\mathbf{M}^R_{k,j}\mathbf{M}^S_{k,j} + \mathbf{M}^S_{k,j}\mathbf{M}^S_{i,j} + \mathbf{M}^S_{i,j}\mathbf{M}^R_{i,j} \geq 0 \\
&f_{1,M^N_{k,j}}.\mathbf{n}_1 + \mathbf{G_n} - \mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{k,j}}} - f_{2,M^N_{i,j}}.\mathbf{n}_2 \geq 0 \quad (\mathbf{G_n} : \text{ vecteur du jeu nominal}) \\
&f_{1,M^N_{k,j}}.\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_1 + \Delta g - \mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{k,j}}}.\mathbf{n}_1 - f_{2,M^N_{i,j}}.\mathbf{n}_2.\mathbf{n}_1 \geq 0 \quad (\Delta g = \mathbf{G_n}.\mathbf{n}_1)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ainsi, la contrainte d'interface associée aux deux points $\mathbf{M}^R_{k,j}$ et $\mathbf{M}^R_{i,j}$ est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{k,j}}}.\mathbf{n}_1 \leq \Delta g + f_{1,M^N_{k,j}} + f_{2,M^N_{i,j}} \tag{2.16}$$

où $\mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{k,j}}}$ représente le vecteur translation du torseur jeu du contact flottant des deux surfaces S_k et S_i, Δg correspond au jeu nominal entre les surfaces nominales de ces deux surfaces réelles (S_k, S_i), $f_{1,M^N_{k,j}}$ et $f_{2,M^N_{i,j}}$ représentent les amplitudes des défauts de forme aux points $M^S_{k,j}$ et $M^S_{i,j}$ appartenant respectivement aux surfaces de substitution des surfaces nominales k et i .

Le nombre de contraintes d'interface de l'Eq. (2.16) dépend de la densité des points du maillage comme illustrée par la Figure 2.20 (modèle avec défauts de forme). Cette opération est répétée pour toutes les surfaces des contacts flottants présents dans le système mécanique. Le nombre de contraintes formalisées en tenant en compte des défauts de forme est bien plus grand que le nombre de contraintes sans défauts de forme. Dans le cas d'un système mécanique sans défauts de forme, les contraintes d'interface sont écrites en respectant le déplacement d'une surface du contact par rapport à l'autre et seuls les points aux extrémités des surfaces sont considérés comme cela est montré par la Figure 2.20 (modèle sans défauts de forme) ou dans le chapitre 1. Ceci explique le nombre réduit de contraintes d'interface en nombre par rapport au cas où les défauts de forme sont considérés. Etant donné que le nombre de contraintes d'interface augmente avec la considération des défauts de forme, le temps de simulation pour réaliser l'analyse des tolérances du système mécanique, augmente aussi. La considération des défauts de forme a un impact considérable sur le temps de simulation à cause du nombre de contraintes d'interface qui doivent être vérifiées.

***Exemple** : illustration détaillée de la formalisation d'une contrainte d'interface en un point*

Soit $\{g_{1a/2a}\}_A$ le torseur jeu entre les deux surfaces cylindriques 1a et 2a initialement écrit au point A :

$$\{g_{1a/2a}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{1a2a} & u_{1a2a,A} \\ \beta_{1a2a} & v_{1a2a,A} \\ \gamma_{1a2a} & w_{1a2a,A} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

Soit $M^N_{1a,j}$ un point appartenant la surface nominale 2a et dont les coordonnées sont données par :

$$\mathbf{AM}_{1a,j}^{N} = \begin{pmatrix} R_{1a}.\cos\theta \\ R_{1a}.\sin\theta \\ l_{1a,j} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

où R_{1a} *représente le rayon de la surface cylindrique 1a.*

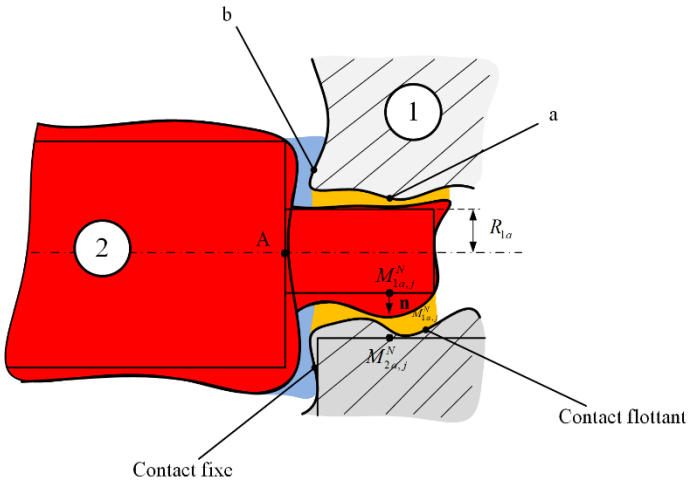


Figure 2.21 : Illustration d'une contrainte d'interface entre deux points

En réécrivant ce torseur jeu en un autre point $M_{1a,j}^{N}$ *à l'aide de la relation de Varignon, nous obtenons le vecteur :*

$$\mathbf{t}_{\left\{g'_{1a/2a}\right\}_{M_{1a,j}^{N}}} = \begin{pmatrix} u_{1a2a,A} \\ v_{1a2a,A} \\ w_{1a2a,A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{1a}.\cos\theta \\ R_{1a}.\sin\theta \\ l_{1a,j} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_{\left\{g'_{1a/2a}\right\}_{M_{1a,j}^{N}}} = \begin{pmatrix} u_{1a2a,A} + l_{1a,j}.\beta_{1a2a} - R_{1a}.\sin\theta.\gamma_{1a2a} \\ v_{1a2a,A} + R_{1a}.\cos\theta.\gamma_{1a2a} - l_{1a,j}.\alpha_{1a2a} \\ w_{1a2a,A} + R_{1a}.\sin\theta.\alpha_{1a2a} - R_{1a}.\cos\theta.\beta_{1a2a} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

En appliquant (2.16) à ce vecteur $\mathbf{G}'_{1a2a,M_{a,j}^{N}}$ *qui constitue la contrainte d'interface, nous obtenons :*

$$\mathbf{t}_{\left\{g'_{1a/2a}\right\}_{M_{1a,j}^{N}}}.\mathbf{n}_{M_{1a,j}^{N}} \leq \left(\frac{d_{1a} - d_{2a}}{2}\right) + \left\| f_{1a,M_{1a,j}^{N}} \right\| + \left\| f_{2a,M_{2a,j}^{N}} \right\| \quad \text{où } \mathbf{n}_{M_{1a,j}^{N}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta.u_{1a2a,A} + l_{1a,j}.\cos\theta.\beta_{1a2a} - l_{1a,j}.\sin\theta.\alpha_{1a2a} + \sin\theta.v_{1a2a,A} \leq \left(\frac{d_{1a} - d_{2a}}{2}\right) + \left\| f_{1a,M_{1a,j}^{N}} \right\| + \left\| f_{2a,M_{b,j}^{N}} \right\| \tag{2.20}$$

où d_{1a} et d_{2a} représentent respectivement les diamètres des surfaces nominales cylindriques 1a et 2a.

L'Eq. (2.20) est mise sous forme matricielle pour son utilisation :

$$\begin{bmatrix} -l_{1a,j}.\sin\theta & l_{1a,j}.\cos\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} \\ u_{1a2a,A} \\ v_{1a2a,A} \\ w_{1a2a,A} \end{bmatrix} \leq \left[\left(\frac{d_{1a} - d_{2a}}{2}\right) + \left\| f_{1a,M_{1a,j}^{N}} \right\| + \left\| f_{2a,M_{b,j}^{N}} \right\| \right] \tag{2.21}$$

Pour modéliser les contacts flottants d'un système mécanique, un ensemble de contraintes doit être formalisé pour les surfaces en liaison. La procédure pour écrire une contrainte entre deux points appartenant à deux surfaces réelles d'un contact avec défauts de forme, est montrée par les Eqs. (2.15), (2.16) et l'exemple ci-dessus. Les contraintes d'interface considérées dans le processus de l'analyse des tolérances sont en fonction des défauts géométriques, des jeux et des défauts de forme : $C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{G}^{'},\mathbf{F}\right) \leq 0$.

Ces ensembles de contraintes d'interface qui ont été développés sont par la suite ajoutés aux équations de compatibilité et de condition fonctionnelle pour modéliser le comportement géométrique d'un système mécanique hyperstatique.

2.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de modélisation des défauts de forme et de l'intégrer dans le processus de l'analyse des tolérances. La méthode de modélisation des défauts de forme doit être compatible avec les méthodes probabilistes d'analyse des tolérances déjà proposée dans le projet AHTOLA.

Ainsi, dans un premier temps, quelques méthodes de modélisation des défauts de forme des surfaces ont été présentées. Chaque méthode a ses limites et ses avantages. Cependant leurs analyses par rapport aux critères que nous avons élaborés ne permettent pas de choisir une méthode. Nous avons alors fait le choix de proposer une nouvelle méthode nommée : méthode de la décomposition modale métrique. C'est une méthode issue de la modification de l'approche modale qui permet de représenter les surfaces complexes avec des paramètres restreints et des amplitudes ayant un sens physique. Les raisons du choix de la méthode de décomposition modale métrique sont :

- elle représente à la fois les géométries de dimension 2D comme 3D ;
- les amplitudes des défauts ont une signification physique donc compréhensible pour les industriels ;
- c'est une méthode qui utilise des modes « technologiques » issus des procédés de fabrication ;
- c'est une méthode qui permet de représenter les défauts de forme et les ondulations ;
- elle est également compatible avec les méthodes probabilistes développées antérieurement.

Dans un second temps, la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique est décrite en intégrant les défauts de forme et en prenant en compte les différents types de contacts. Une différenciation d'analyse des contacts est proposée. Des techniques basées sur la notion de distance signée et une optimisation sont proposées pour l'analyse des contacts fixes et glissants tandis qu'un ensemble de contraints d'interface est proposé pour analyser les contacts flottants.

Les différents développements de ce chapitre, sont désormais intégrés dans les techniques d'analyse des tolérances utilisées pour étudier les systèmes mécaniques hyperstatiques.

Chapitre 3 : Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques - techniques de résolution

Sommaire

3.1 Introduction 76

3.2 Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques - méthode classique 76

3.2.1 Condition d'assemblage – formalisation de son problème d'optimisation et evaluation de la probabilité de non-assemblage 77

3.2.2 Condition de fonctionnalité – formalisation de son problème d'optimisation et évaluation de la probabilité de non-fonctionnalité 80

3.2.3 Synthèse 83

3.3 Choix de l'algorithme d'optimisation 84

3.3.1 Démarche 85

3.3.2 Résultats – Comparaisons 88

3.3.3 Synthèse 93

3.4 Nouvelle approche d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste des jeux 94

3.4.1 Construction de la densité par l'estimation par noyaux 95

3.4.2 Génération de nouvelles variables basés sur l'estimation par l'estimation par noyaux 97

3.4.3 Intégration des nouvelles variables dans la démarche de l'analyse des tolérances 100

3.4.4 Justification de la proposition d'un modèle probabiliste pour la caractérisation du jeu 102

3.5 Conclusion 104

3.1 Introduction

L'objectif de l'analyse des tolérances par l'approche statistique est de déterminer les indicateurs : les probabilités d'assemblage et de fonctionnalité des systèmes mécaniques hyperstatiques. Il existe plusieurs techniques qui permettent de réaliser l'analyse des tolérances de systèmes mécaniques comme évoqué dans le chapitre 1. La simulation de Monte Carlo est la méthode de référence qui a été utilisée pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques. La simulation de Monte Carlo couplée à une technique d'optimisation proposée dans les travaux de Qureshi (2011), est adaptée dans le contexte de cette thèse pour répondre à la problématique de l'analyse des tolérances. Cette méthode est aussi adoptée comme méthode de référence dans ce manuscrit. Les objectifs de ce chapitre sont de montrer l'adaptation de cette méthode de référence pour tenir compte des développements du chapitre précédent à savoir l'intégration des défauts de forme et la distinction entre les différents types de contact. Ensuite, une nouvelle méthode est proposée afin de réduire le temps de calcul de la simulation de Monte Carlo : la section 3.3 détaille la méthode proposée basée sur la méthode de l'estimation par noyaux (en Anglais *Kernel Density Estimation* (KDE)) afin de déterminer des modèles probabilistes des composantes des jeux des contacts fixes et glissants qui sont intégrés par la suite dans l'optimisation et la simulation de Monte Carlo.

3.2 Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques - méthode classique

La méthode de Monte Carlo (MC) est une méthode classique d'analyse statistique des tolérances. Pour un système mécanique hyperstatique, la fonction réponse dans l'analyse des tolérances n'est pas toujours explicite comme pour les systèmes mécaniques isostatiques (Dumas et al., 2015a). Dans ce contexte, la MC est très appropriée dans le cas d'une fonction réponse implicite des systèmes mécaniques hyperstatiques.

L'objectif de l'analyse des tolérances statistique utilisée dans ce manuscrit est de calculer les probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité : la probabilité de défaillance d'assemblage ($\tilde{P}_{na}$) et la probabilité de défaillance de fonctionnalité ($\tilde{P}_{nf}$). La méthode développée dans ce chapitre prend en compte (i) l'introduction d'un ensemble de défauts de forme dans les différentes contraintes modélisant le comportement géométrique d'un système mécanique hyperstatique, (ii) une optimisation pour l'étude de chaque contact fixe et glissant. Cette optimisation basée sur la notion de distances signées, permet de déterminer les

configurations possibles des jeux d'assemblage des contacts fixes et glissants du système mécanique. Une optimisation est ainsi menée sur chaque contact fixe et glissant à chaque itération de la simulation de MC.

Afin de calculer les deux probabilités de défaillance, un grand nombre N_{mc} d'échantillons des variations géométriques est généré. A chaque itération de Monte Carlo, un échantillon des ensembles **X** et **F** est tiré aléatoirement suivant des lois de probabilité définies et les conditions d'assemblage et de fonctionnalité sont vérifiées.

3.2.1 Condition d'assemblage – formalisation de son problème d'optimisation et evaluation de la probabilité de non-assemblage

La condition d'assemblage est formalisée mathématiquement en se basant sur la notion du quantificateur « $\exists$ » tirée des travaux de Dantan *et al.* (2005), Qureshi *et al.* (2012). Toutefois, cette formalisation est modifiée dans les travaux de thèse de ce manuscrit afin de prendre en compte les défauts de forme. La condition d'assemblage est alors traduite par : « *il existe une configuration admissible des jeux du système mécanique telle que les équations de compatibilité, les contraintes d'interface soient respectées* ». Sa traduction mathématique est donnée par :

$$\exists \mathbf{G} \in \left\{ \mathbf{G} \in \mathbf{R}^m : C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{G}^{'}\right) \leq 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{G}^{*}\right) = 0 \right\} \tag{3.1}$$

Le but de la méthode d'optimisation pour la vérification de la condition d'assemblage est de minimiser les composantes des torseurs jeux des contacts flottants et les composantes des déplacements cinématiques des torseurs glissants sous la contrainte du respect des équations de compatibilité et des contraintes d'interface. Cette optimisation permet de trouver, lorsqu'elle converge les meilleures composantes des torseurs jeux qui permettent l'assemblage du système mécanique. La fonction objectif de l'optimisation est alors une fonction des composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{G}}^{'}$. Pour cette optimisation la fonction objectif et les contraintes sont linéaires. Le problème d'optimisation peut alors être formulé mathématiquement par :

$$R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right) = \begin{cases} \underset{\mathbf{G}^{'}}{\text{Min}} \ \text{f}\left(\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right) \\ \text{sous} \quad C_c\left(\mathbf{X}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}^{'},\mathbf{G}^{*(k)}\right) = 0 \qquad \forall\ k = \left\{1,...,N_{mc}\right\} \\ \qquad\quad C_i\left(\mathbf{X}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}^{'},\mathbf{F}^{(k)}\right) \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

où $C_c\left(\mathbf{X}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}^{'},\mathbf{G}^{*(k)}\right)$ représente l'ensemble des équations de compatibilité des k^{ième} échantillons de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{G}^{*}$. $C_i\left(\mathbf{X}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}^{'},\mathbf{F}^{(k)}\right)$ représente l'ensemble des contraintes d'interface des contacts flottants exprimées en fonction des k^{ième} échantillons de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{G}^{*}$. $\tilde{\mathbf{G}}^{'}$ représente le vecteur rassemblant toutes les composantes des torseurs jeux des contacts flottants et les composantes des déplacements cinématiques des contacts glissants ; les composantes de $\tilde{\mathbf{G}}^{'}$ sont les variables qui doivent être déterminées par cette optimisation ; les composantes de $\tilde{\mathbf{G}}^{'}$ définissent la pire configuration des jeux assurant l'assemblage du système mécanique. $\mathbf{G}^{*(k)}$ représente le vecteur regroupant les composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants obtenues par d'autres optimisations (les simulations locales, chapitre 2, sous-section 2.3.1) en fonction des k^{ième} échantillons de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{F}$, et $\mathbf{G}$ est le vecteur regroupant toutes les composantes des torseurs jeux i.e. $\mathbf{G}=\left\{\mathbf{G}^{*},\mathbf{G}^{'}\right\}$. N_{mc} représente le nombre total d'échantillons générés par la simulation de Monte Carlo.

Au cours du processus de résolution du problème d'assemblage, l'Eq. (3.2) est mise sous forme matricielle comme le montre la formalisation suivante :

$$R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\tilde{\mathbf{G}}^{'}}{\text{Min}} \quad \text{f}\left(\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right) \\ sous \quad \left[C_{omp}\right]\left[\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right]=\left[\mathbf{X}^{(k)}+\mathbf{G}^{*(k)}\right] \\ \qquad \left[C_{\text{Interface}}\right]\left[\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right]\leq\left[\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}}+\mathbf{F}^{(k)}\right]\end{cases} \qquad \forall\ k=\left\{1,...,N_{mc}\right\} \qquad (3.3)$$

où $\left[C_{omp}\right]$ représente la matrice contenant les coefficients des composantes des torseurs jeux des contacts flottants et des composantes des déplacements cinématiques des contacts glissants ; $\left[C_{\text{Interface}}\right]$ représente la matrice contenant les coefficients des composantes des contacts flottants ; $\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}}$ est un vecteur contenant les composantes des écarts intrinsèques du k^{ième} échantillon du vecteur $\mathbf{X}$.

Exemple : *Formalisation d'un problème d'assemblage entre deux pièces*

La figure montre l'assemblage entre deux pièces composé d'un contact fixe (1b/2b) et d'un contact flottant (1a/2a).

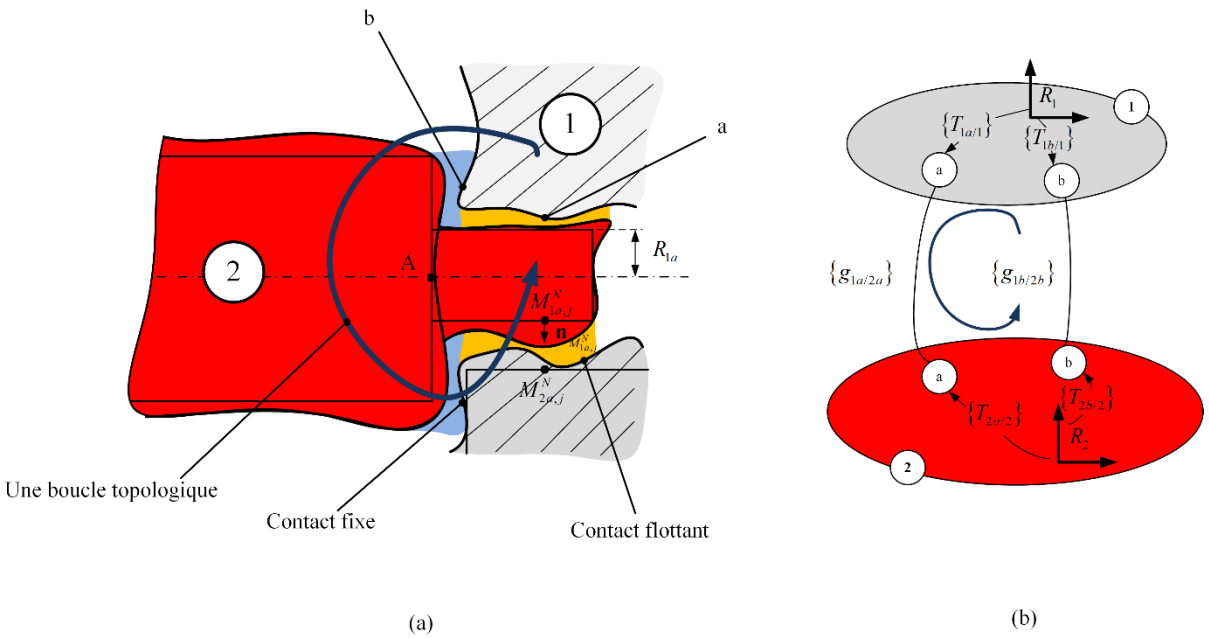


Figure 3.1 : (a) Assemblage entre deux pièces ; (b) Graphe des liaisons de l'assemblage

La formalisation mathématique sous forme matricielle du problème d'assemblage de ce contact est obtenue en combinant les Eqs. (2.9) et (2.21) *du chapitre 2 :*

$$\begin{cases} \text{Min} \quad f\left(\alpha_{1a2a},\beta_{1a2a},\gamma_{1a2a},u_{1a2a,A},v_{1a2a,A},w_{1a2a,A}\right) \\ \textit{sous} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} \\ u_{1a2a,A} \\ v_{1a2a,A} \\ w_{1a2a,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1a1}-\alpha_{2a2}+\alpha_{2b2}+\alpha^*_{1b2b}-\alpha_{1b1} \\ \beta_{1a1}-\beta_{2a2}+\beta_{2b2}+\beta^*_{1b2b}-\beta_{1b1} \\ \gamma^*_{1b2b} \\ u_{1a1,A}-u_{2a2,A}+u^*_{1b2b} \\ v_{1a1,A}-v_{2a2,A}+v^*_{1b2b} \\ w^*_{1b2b}+w_{2b2,A}+w_{1b1,A} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -l_{1a,j}.\sin\theta & l_{1a,j}.\cos\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} \\ \gamma_{1a2a} \\ u_{1a2a,A} \\ v_{1a2a,A} \\ w_{1a2a,A} \end{bmatrix} \le \left[\left(\frac{d_{1a}-d_{2a}}{2} \right) + \left\| f_{1a,M^N_{1a,j}} \right\| + \left\| f_{2a,M^N_{b,j}} \right\| \right] \end{cases}$$

(3.4)

Les composantes du torseur jeu $\{g_{1b/2b}\}_A$ *sont considérées comme connues car elles sont obtenues par la simulation locale décrite dans la partie 2.3.2.2 du chapitre 2.*

Apres avoir défini le problème d'assemblage et la technique d'optimisation permettant de déterminer le vecteur $\tilde{\mathbf{G}}'$, la simulation de Monte Carlo est lancée pour un nombre N_{mc} d'échantillons des vecteurs **X** et **F**. Les composantes du vecteur $\mathbf{G}^*$ sont déterminées par d'autres optimisations sur les torseurs jeux des contacts fixes et glissants, à chaque itération de la simulation de Monte Carlo. La combinaison de la simulation de Monte Carlo et des techniques d'optimisations permet de calculer la probabilité de non-assemblage qui représente une indication sur la qualité des produits fabriqués. Cette probabilité de non-assemblage est obtenue en utilisant la relation :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{na}} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I_{Dfa}\left(\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)}\right) \tag{3.5}$$

où I_{Dfa} représente la fonction indicatrice définie par :

$$I_{Dfa}\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right) \text{ n'a pas de solution} \\ 0 \text{ si } R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right) \text{ a une solution} \end{cases} \tag{3.6}$$

3.2.2 Condition de fonctionnalité – formalisation de son problème d'optimisation et évaluation de la probabilité de non-fonctionnalité

Les conditions de fonctionnalité sont aussi développées en se basant sur la notion du quantificateur « ∀ » tirée des travaux de Dantan *et al.* (2005), Qureshi *et al.* (2012). La définition de la condition de fonctionnalité a déjà été donnée dans le chapitre 1. Toutefois, une modification est faite à sa formalisation mathématique afin de prendre en compte les défauts de forme :

$$\forall \mathbf{G} \in \left\{\mathbf{G} \in \mathbf{R}^m : C_c\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right) = 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{G}'\right) \leq 0 \cap C_i\left(\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{G}^*\right) = 0\right\}, C_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{G}\right) \geq 0 \tag{3.7}$$

La formalisation mathématique du problème fonctionnel est transformée en un problème d'optimisation. Cette optimisation permet de déterminer les jeux fonctionnels de la pire des configurations des jeux. La fonction objectif de l'optimisation est alors une fonction des composantes du vecteur contenant les composantes du torseur jeu fonctionnel ($\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}$). Cette fonction objectif est minimisée telle que les équations de compatibilité, les contraintes d'interface et les conditions fonctionnelles soient vérifiées. Le problème d'optimisation du problème fonctionnel est alors formalisé mathématiquement par :

$$R_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\mathbf{G}'_{\text{fonctionnel}}}{\text{Min}} & C_f\left(\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}},\mathbf{F}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}\right)\\ \text{sous} & C_c\left(\mathbf{X}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}',\mathbf{G}^{*(k)}\right)=0\\ & C_i\left(\mathbf{X}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}',\mathbf{F}^{(k)}\right)\leq 0\end{cases}\qquad \forall\ k=\{1,\ldots,N_{mc}\} \tag{3.8}$$

où $\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}$ représente le vecteur contenant les composantes du torseur jeu fonctionnel qui sont évaluées par cette optimisation.

Dans la procédure de l'analyse des tolérances, l'Eq. (3.8) est mise sous forme matricielle :

$$R_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}}{\text{Min}} & C_f\left(\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}},\mathbf{F}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}\right)\\ \textit{sous} & \left[C_{omp}\right]\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]=\left[\mathbf{X}^{(i)}+\mathbf{G}^{*(k)}\right]\\ & \left[C_{\text{Interface}}\right]\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]\leq\left[\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}}+\mathbf{F}^{(k)}\right]\end{cases}\qquad \forall\ k=\{1,\ldots,N_{mc}\} \tag{3.9}$$

Toutes ces formalisations mathématiques permettent d'évaluer lors de l'analyse des tolérances la probabilité de non-fonctionnalité d'un système mécanique, en utilisant les relations suivantes :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\text{nf}}=\frac{1}{N_{mc}}\sum_{i=1}^{N_{mc}}I_{Df}\left(\mathbf{X}^{(i)},\mathbf{F}^{(i)}\right) \tag{3.10}$$

où I_{Df} représente la fonction indicatrice définie par :

$$I_{Df}\left(\mathbf{X}\right)=\begin{cases}1 \text{ si } R_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\leq 0\\ 0 \text{ si } R_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)>0\end{cases} \tag{3.11}$$

Le processus de l'analyse des tolérances d'un système mécanique hyperstatique en considérant les différents types de contact est constitué de plusieurs étapes. Les premiers problèmes rencontrés sont les problèmes d'assemblage et fonctionnel au regard de la vérification de certaines tolérances attribuées aux différentes entités des pièces mécaniques. Ces problèmes d'assemblage et fonctionnel sont résolus à l'aide des formalisations mathématiques utilisant les notions de quantificateurs « $\exists$ » et « $\forall$ ». Ces formalisations mathématiques des problèmes d'assemblage et fonctionnel sont ensuite transformées en deux problèmes d'optimisation. La première optimisation qui concerne le problème d'assemblage, a pour objectif de déterminer les composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{G}}'$ telles que les équations de compatibilité et les contraintes d'interface soient respectées. La deuxième optimisation concernant le problème fonctionnel, a pour objectif de déterminer les composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}'$ telles que les équations de compatibilité, les contraintes d'interface et les conditions fonctionnelles soient respectées. Toutefois, avant la formalisation des différentes contraintes, les composantes du vecteur $\mathbf{G}^*$ doivent être déterminées par des optimisations sur les torseurs jeux des contacts fixes et glissants. Les composantes de $\mathbf{G}^*$ sont considérées comme connues avant de lancer les optimisations sur les problèmes d'assemblage et fonctionnel. Toutes ces techniques d'optimisations sont couplées à une simulation de Monte Carlo qui génère aléatoirement N_{mc} échantillons des vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{F}$. La détermination de $\mathbf{G}^*$ par optimisation à chaque itération de MC, constitue la différence par rapport à la méthode précédente proposée par Qureshi *et al.* (2012). L'analyse des tolérances permettent de déterminer la probabilité de non-assemblage et la probabilité de non-fonctionnalité à l'aide des Eqs. (3.5) et (3.10). La Figure 3.2 illustre les étapes de la méthode proposée.

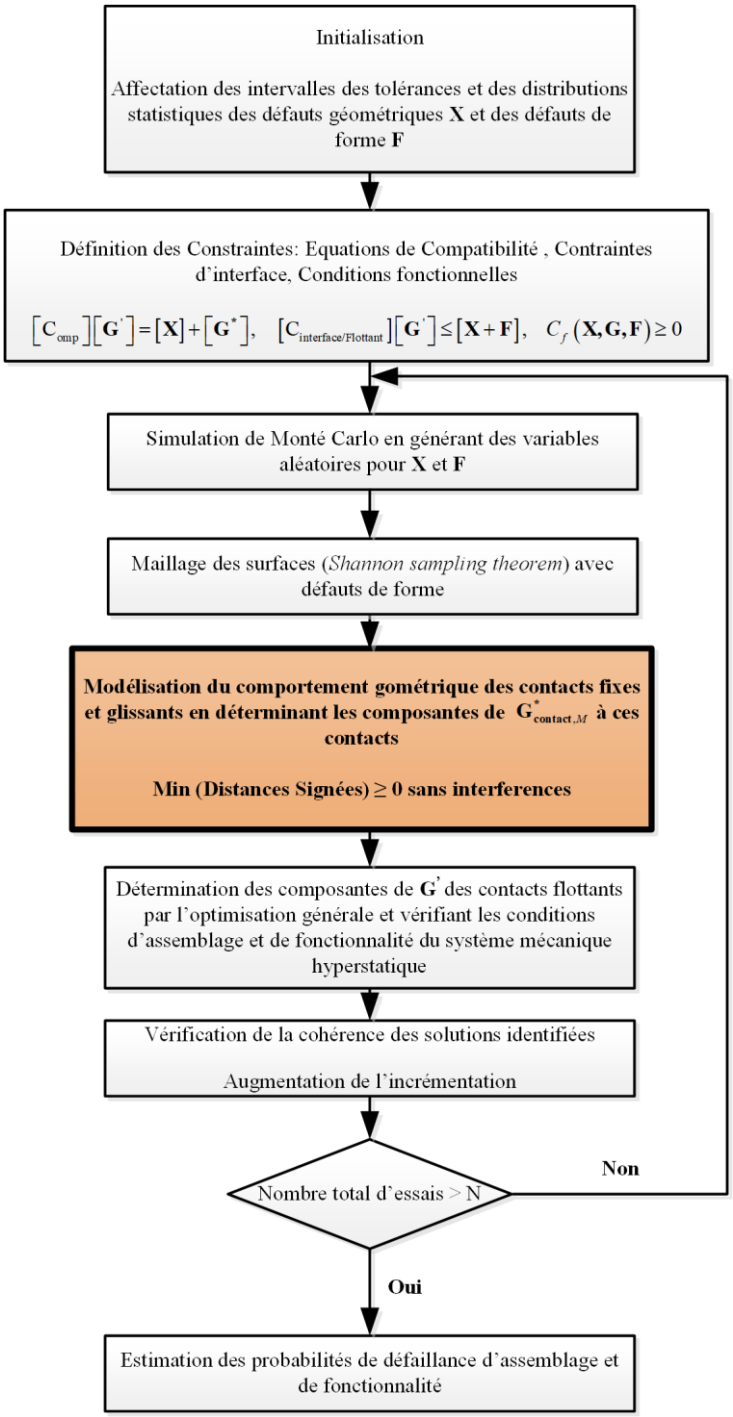


Figure 3.2 : Procédure de l'analyse des tolérances

3.2.3 Synthèse

Pour synthétiser, l'objectif de cette section est de proposer une nouvelle méthode d'analyse des tolérances qui prend en compte les défauts de forme et la modélisation du comportement géométrique des différents types de contacts. Ainsi, la méthode précédente d'analyse des

tolérances basée sur la simulation MC et une technique d'optimisation a été modifiée afin de prendre en compte les défauts de forme. La nouvelle méthode d'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques, est composée de trois différents types de problèmes d'optimisation. Ces problèmes d'optimisation nécessitent un algorithme de résolution efficace et juste. De ce fait, des simulations et comparaisons sont menées sur quelques algorithmes de résolution de problèmes d'optimisation afin de choisir le meilleur. Ces comparaisons sont présentées dans la section suivante et sont réalisées sur un système mécanique qui est présenté en détail dans le chapitre 4.

3.3 Choix de l'algorithme d'optimisation

Cette section propose de déterminer le meilleur algorithme permettant de réaliser à la fois les optimisations sur les composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants et aussi l'optimisation accompagnant la simulation de MC. En effet, plusieurs algorithmes existent dans la littérature pour résoudre les problèmes d'optimisation. Un choix est donc nécessaire pour déterminer le plus adéquat avec les problèmes d'optimisation rencontrés dans les techniques d'analyse des tolérances. Pour atteindre cet objectif, des simulations sont réalisées en considérant le cas du moteur électrique comme cas d'étude. Ce moteur électrique est décrit plus en détail dans le chapitre suivant. Ainsi les simulations réalisées à la fois sur la simulation locale et sur la méthode générale de l'analyse des tolérances, ont pour but de déterminer l'algorithme possédant les caractéristiques suivantes :

- La justesse : les composantes du torseur jeu déterminées sont analysées pour vérifier la similarité des résultats suivant les algorithmes et les types de maillages. De plus, les contraintes du problème d'optimisation sont analysées pour vérifier des violations ou non. Enfin, les probabilités estimées sont analysées pour vérifier la similitude des résultats pour les mêmes échantillons suivant les algorithmes.
- L'efficacité : les temps de calcul des algorithmes sont analysés afin de déterminer celui qui permet la résolution des problèmes d'optimisation avec un temps faible.

La démarche suivie et les algorithmes étudiés sont présentés dans la sous-section 3.3.1. Les résultats et les comparaisons entre les algorithmes pour déterminer le meilleur, sont proposés dans la sous-section 3.3.2.

3.3.1 Démarche

Les simulations employées pour choisir le meilleur algorithme ont été réalisées à deux niveaux.

Le premier niveau concerne les simulations locales sur les composantes du torseur jeu du contact *1a/2a* (voir Figure 4.2, section 4.2). Cinq échantillons d'amplitude des défauts de forme ont été tirés et appliqués aux surfaces du contact. Ces tirages d'amplitude sont les mêmes pour tous les algorithmes choisis. Les optimisations sont aussi réalisées en considérant différents types de maillage : 100, 625, 2500 et 10000 points de discrétisation. Le but de ces simulations est d'analyser les variations des composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ déterminées pour chaque tirage, en fonction des algorithmes et du type de maillage. De plus, le taux de violation des contraintes pour chaque algorithme est calculé. Le vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ est un vecteur constitué des composantes des déplacements non-cinématiques du torseur jeu $\left\{g^{*}_{1a/2a}\right\}_{M}$ du contact glissant entre les surfaces *1a* et *2a* et exprimé au point *M* situé au centre de la liaison. Le vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M} = \begin{Bmatrix} w_{1a2a,M} \\ \alpha_{1a2a} \\ \beta_{1a2a} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

La fonction objectif de chaque algorithme est en fonction des composantes $w_{1a2a,M}$, α_{1a2a}, β_{1a2a}. Un exemple des composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ dérivé d'un torseur jeu $\left\{g^{*}_{1a/2a}\right\}_{M}$ d'un contact plan-plan est montré sur la Figure 3.3.

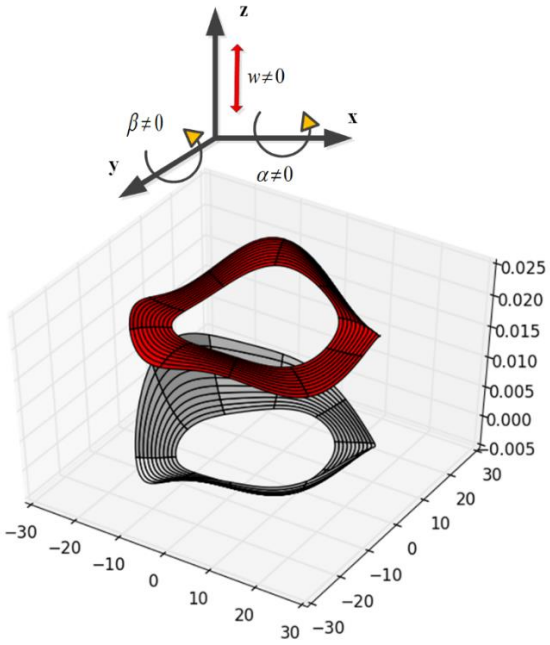


Figure 3.3 : Composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{kj/ij}$ *d'un contact glissant plan-plan à contour circulaire*

Les contraintes de ce problème d'optimisation sont les distances signées entre les deux surfaces du contact. Le problème d'optimisation à résoudre à ce niveau est exactement le même que celui qui est décrit dans l'équation (2.14) du Chapitre 2 sur les contacts fixes et glissants. Dans le cas actuel, il s'agit d'un contact glissant plan-plan.

Le deuxième niveau des simulations concerne l'analyse des tolérances menée sur le système mécanique. Il s'agit de la technique de l'analyse des tolérances décrite dans la section 3.2. Pour réaliser ces simulations, dix tirages de MC sont générés. Ces tirages sont les mêmes pour tous les algorithmes. De même, les amplitudes des défauts de forme des contraintes d'interface des contacts cylindre-cylindre (contacts *2c/3c*, *1e/3e*, *1b2b*) du système mécanique sont les mêmes pour tous les algorithmes. Cinq réalisations des composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ ont été générées pour chaque algorithme choisi et pour deux types de maillage des surfaces *1a* et *2a* (100 et 10000 points de discrétisation).

Les différents algorithmes ou solveurs choisis pour réaliser les simulations et qui sont disponibles dans le langage de programmation Python sont décrits ci-après. Tous ces algorithmes de comparaison traitent de problèmes d'optimisation linéaire sous contraintes. Les fonctions objectifs et les contraintes des différents problèmes d'optimisation sont linéaires.

Algorithme du simplexe est un algorithme très performant de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été développé en 1947 par George Dantzig (Meyer, 2011). Les problèmes d'optimisation sont résolus en se déplaçant sur les frontières d'un sommet (point extrême) vers un autre prochain sommet. L'algorithme du simplexe trouve la solution optimale en utilisant une séquence d'étapes de pivot sur le système d'équations original. De plus, l'utilisation de cet algorithme suppose la connaissance d'une solution initiale au problème d'optimisation linéaire. Plus amples informations sur cet algorithme standard du simplexe peuvent être trouvées dans (Dantzig et Thapa, 1997; Nocedal et Wright, 1999) ; ils sont résumés brièvement dans l'Annexe C. Cet algorithme du simplexe est implémenté dans le langage Python sous différentes fonctions : Linprog qui est basé sur la méthode standard du simplexe et Lpsolve qui est basé sur la méthode modifiée du simplexe. La description des deux implémentations est exposée comme suit.

- **Linprog** est une fonction qui a pour objectif de résoudre les problèmes d'optimisation linéaire. La fonction objectif et les contraints du problème d'optimisation doivent être linéaires. C'est une fonction qui est basée sur la méthode standard du simplexe.
- **Lpsolve** est un solveur de programmation linéaire basé sur la méthode modifiée du simplexe (*revised simplex method* en Anglais) et la méthode de séparation et évaluation (*Branch-and-bound method* en Anglais). La méthode modifiée du simplexe a le même principe comme la méthode standard du simplexe mais le « tableau » (*dictionnary* en Anglais) n'est plus utilisé. Il a été développé par Michel Berkelaar. Lpsolve peut résoudre des problèmes purement linéaires, ou des problèmes avec des variables mixtes (entier/binaire), des variables semi-continues ou des problèmes de modèles d'ensembles spéciaux ordonnés. La fonction objectif et les contraintes doivent être linéaires dans la formalisation du problème dans Lpsolve. Plus amples informations sur la méthode modifiée du simplexe peuvent être trouvées dans les travaux de Meyer (2011).

L'algorithme des moindres carrés séquentiels est un algorithme développé en se basant sur l'algorithme SQP (*Sequential Quadratic Programming* en Anglais) ou l'algorithme de l'optimisation quadratique successive. C'est un algorithme utilisé pour résoudre les problèmes d'optimisation non-linéaire tels que les problèmes d'optimisation avec des fonctions objectif quadratiques et des contraintes sous la forme d'un ensemble d'équations et d'inéquations.

Cependant, il peut être utilisé pour résoudre des problèmes linéaires (le cas des problèmes d'optimisation de l'analyse des tolérances de ce manuscrit). L'algorithme des moindres carrés séquentiels est basé sur l'utilisation de la matrice hessienne de la fonction objectif et le gradient des contraintes (équations et inéquations) pour effectuer l'optimisation. Il remplace le problème initial par une séquence de sous-problèmes quadratiques avec des contraintes linéarisées qui sont beaucoup plus simples à résoudre (Gill et Wong). Plus d'informations sur l'algorithme SQP peuvent être trouvées dans (Boggs et Tolle; Gill et Wong; Nocedal et Wright, 1999).

CVXPY est un langage de domaine spécifique intégré à Python et qui permet de résoudre les problèmes d'optimisation convexe. L'optimisation convexe est une optimisation dans laquelle le critère à évaluer et l'ensemble admissible sont convexes. CVXPY permet d'exprimer les problèmes d'optimisation convexes dans une syntaxe naturelle mathématique beaucoup plus simple que la forme restrictive standard d'autres solveurs (Diamond et Boyd). Les problèmes d'optimisation dans CVXPY sont convertis sous la forme conique i.e. sous une forme généralisée de la programmation linéaire. Cette conversion est réalisée en appliquant la méthode de l'implémentation des graphes des fonctions convexes proposée par (Grant et Boyd, 2008). Le problème sous la forme conique est l'équivalent au problème original et en résolvant le problème sous la forme conique, une solution est trouvée au problème original. La forme conique est une large classe qui regroupe les programmes linéaires, les programmes coniques du second ordre et des programmes semi définis. Plusieurs solveurs coniques existent dans le CVXPY : CVXOPT (Vandenberghe, 2010), ECOS (Domahidi et al., 2013), SCS (O'Donoghue et al., 2013), etc. Le solveur de résolution est choisi en fonction du type de problème d'optimisation. Le solveur qui a été choisi dans les études est le solveur ECOS. C'est un solveur de problème d'optimisation sous forme conique intégré à Python et développé par Domahidi *et al.* (2013). Il est basé sur la méthode des points intérieurs.

3.3.2 Résultats – Comparaisons

Le premier critère étudié est la justesse dans le cas des simulations locales des contacts fixes et glissants. Les résultats du Tableau 3.2 montrent que les variations des tirages de résolution et du maillage n'ont pas d'impact sur les résultats de Lpsolve et de Linprog car les composantes du torseur jeu en fonction des différents tirages sont les mêmes pour ces deux solveurs. Cependant, on note de petites différences ou divergences dans les résultats des algorithmes de

SLSQP et de CVXPY. Les algorithmes de Lpsolve et de Linprog sont les meilleurs pour la résolution des optimisations des simulations locales au regard du critère de la justesse.

De plus, des fonctions indicatrices ont été placées dans les algorithmes de résolutions des optimisations au niveau local i.e. sur les composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ afin de déterminer le taux des violations des contraintes pour chaque algorithme en fonction des différents types de maillages. Les résultats sont présentés dans le Tableau 3.1 où on peut remarquer que le taux de violation des contraintes varie entre 0 et 4%. Les violations sont plus importantes pour l'algorithme CVXPY.

La première interprétation qui peut en découler de ces résultats est : Lpsolve et Linprog sont les plus performants pour réaliser les optimisations des simulations locales. Cependant, il est à noter que les temps de calcul de Linprog sont un peu plus élevés que ceux de Lpsolve.

Tableau 3.1 : Résultats sur les violations de contraintes des simulations locales

Algorithme	**Nb de points**	**Nombre total de contraintes**	**Contraintes respectées**
Lpsolve	100	100	100
	625	625	625
	2500	2500	2499
	10000	10000	10000
SLSQP	100	100	100
	625	625	624
	2500	2500	2500
	10000	10000	10000
CVXPY	100	100	96
	625	625	624
	2500	2500	2496
	10000	10000	9998
Linprog	100	100	100
	625	625	625
	2500	2500	2500
	10000	10000	10000

Tableau 3.2 : Résultats des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a}$ en fonction des algorithmes et des types de maillage (en gris les résultats divergents)

Lpsolve																
Tirages	**1er tirage**			**2e tirage**			**3e tirage**			**4e tirage**			**5e tirage**			**Temps**
Torseur jeu	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	
100	2,79E-02	3,61E-03	1,50E-05	9,53E-02	2,81E-03	5,67E-06	8,57E-02	1,90E-03	1,19E-06	5,16E-02	0	1,66E-05	1,41E-02	0	1,02E-05	2,00E-02
625	1,65E-02	3,39E-03	0	6,64E-02	2,62E-03	1,04E-05	9,82E-02	1,60E-03	2,83E-06	-1,56E-02	0	0	4,10E-02	0	2,27E-05	0,07
2500	7,65E-03	3,87E-03	0	5,23E-02	2,88E-03	2,67E-05	7,99E-02	1,90E-03	0	-1,62E-02	0	0	1,52E-02	0	7,99E-07	0,25
10000	8,05E-03	3,87E-03	1,30E-06	5,12E-02	2,88E-03	8,73E-06	7,88E-02	1,90E-03	3,04E-06	-1,56E-02	0	0	1,38E-02	0	8,34E-06	1,3

SLSQP																
Tirages	**1er tirage**			**2e tirage**			**3e tirage**			**4e tirage**			**5e tirage**			**Temps**
Torseur jeu	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	
100	2,79E-02	3,61E-03	1,50E-05	9,53E-02	2,81E-03	5,67E-04	8,57E-02	1,90E-03	1,19E-06	5,38E-02	-3,49E-04	1,69E-05	2,22E-02	-3,80E-04	9,98E-06	4,00E-02
625	1,21E-02	3,39E-03	-0,00000428	6,64E-02	2,61E-03	1,03E-05	1,02E-01	1,60E-03	2,83E-06	-1,56E-02	0	0	4,10E-02	-0,0002165	2,27E-05	0,08
2500	1,14E-02	3,87E-03	-3,27E-03	5,23E-02	2,88E-03	2,66E-05	7,99E-05	1,90E-03	-2,09E-05	-1,62E-02	0	0	2,17E-02	-3,81E-04	-1,76E-06	0,24
10000	8,05E-03	3,87E-03	1,30E-06	5,12E-02	2,88E-03	8,73E-06	7,88E-02	1,90E-03	3,03E-06	-1,56E-02	0	0	2,15E-02	-3,81E-04	9,95E-06	7,70E-01

CVXPY																
Tirages	**1er tirage**			**2e tirage**			**3e tirage**			**4e tirage**			**5e tirage**			**Temps**
Torseur jeu	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	
100	2,79E-02	3,61E-03	1,50E-05	9,53E-02	2,81E-03	5,66E-06	8,57E-02	1,90E-03	1,19E-06	5,21E-02	-3,49E-04	1,69E-05	1,41E-02	-3,80E-04	9,98E-06	1,20E-01
625	1.65E-02	3,87E-03	-4,28E-06	6,64E-02	2,89E-03	1,04E-05	9,82E-02	1,60E-03	2,83E-06	-1,56E-02	0	0	4,10E-02	-3,81E-04	2,26E-05	0,2
2500	1,14E-02	3,87E-03	-3,27E-05	5,23E-02	2,88E-03	2,67E-05	7,99E-02	1,90E-03	-2,08E-05	-1,62E-02	0	0	1,62E-02	-3,81E-04	-1,75E-06	0,42
10000	8,05E-03	3,87E-03	1,30E-06	5,12E-02	2,88E-03	8,73E-06	7,88E-02	1,90E-03	3,03E-06	-1,56E-02	0	0	1,45E-02	-3,81E-04	9,95E-06	9,80E-01

Linprog																
Tirages	**1er tirage**			**2e tirage**			**3e tirage**			**4e tirage**			**5e tirage**			**Temps**
Torseur jeu	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	***w***	***α***	***β***	
100	2,79E-02	3,61E-03	1,50E-05	9,53E-02	2,81E-03	5,67E-06	8,57E-02	1,90E-03	1,19E-06	5,16E-02	0,00E+00	1,66E-05	1,41E-02	0	1,02E-05	1,30E-01
625	1,65E-02	3,39E-03	0,00E+00	6,64E-02	2,62E-03	1,04E-05	9,82E-02	1,60E-03	2,83E-06	-1,56E-02	0	0	4,10E-02	0	2,27E-05	0,52
2500	7,65E-03	3,87E-03	0,00E+00	5,23E-02	2,88E-03	2,67E-05	7,99E-02	1,90E-03	0,00E+00	-1,62E-02	0	0	1,52E-02	0	7,99E-07	2,71
10000	8,05E-03	3,87E-03	1,30E-06	5,12E-02	2,88E-03	8,73E-06	7,88E-02	1,90E-03	3,04E-06	-1,56E-02	0	0	1,38E-02	0,00E+00	8,34E-06	6,16E+01

La seconde série de simulations porte sur l'analyse des tolérances i.e. des simulations globales afin de déterminer les probabilités de défaillance. Les simulations ont été réalisées en faisant varier la densité du maillage et l'algorithme des optimisations des simulations locales, afin d'évaluer les probabilités d'assemblage et fonctionnelle. Ces simulations ont été réalisées pour le même nombre de tirage de MC $(N_{mc} = 10)$ et pour deux types de maillage : 100 et 10000 points de discrétisation. Le Tableau 3.3 montre uniquement les résultats pour $N_{mc} = 10$ et 100 points de discrétisation pour les simulations locales. Plus d'informations sur ces simulations peuvent être trouvées dans l'Annexe C.

Les résultats montrent les mêmes probabilités de défaillance pour les algorithmes Lpsolve, Linprog, et CVXPY. Les résultats de l'algorithme SLSQP montrent des divergences pour certains résultats de tirages. De plus, les simulations sur les violations de contraintes lors de l'analyse des tolérances sont réalisées en fonction des algorithmes pour les simulations locales et globales, et aussi en fonction des différents types de maillage. Les résultats sur ces violations sont montrés dans le Tableau 3.4. On peut remarquer une faible proportion de violation des contraintes lorsque Lpsolve, Linprog et CVXPY sont utilisés pour réaliser l'analyse des tolérances. Leur taux de violations varient entre 0 et 0.8% pour les inéquations.

Toutefois, pour l'algorithme SLSQP, une forte proportion de violation a été constaté, sauf dans le cas où les algorithmes Lpsolve et Linprog sont utilisés au niveau de la simulation locale. Cette forte proportion de violation des contraintes de l'algorithme SLSQP varie entre 39.11% et 42.67% pour les inéquations et est de 14% pour les équations.

Tableau 3.3 : Résultats des probabilités de défaillance en fonction des algorithmes des simulations locales et globales (en gris les résultats divergents)

méthode simulation globale	**Lpsolve**														
Tirages	1er tirage			2e tirage			3e tirage			4e tirage			5e tirage		
méthodes simulation locale	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time
Lpsolve	0	1	0,15600109	0	1	0,31200194	0	1	0,42120314	0	0	0,57720399	0	0	0,70200396
SLSQP	0	1	0,1404	0	1	0,327	0	1	0,468	0	1	0,592	0	0,8	0,7488
CVXPY	0	1	0,14040112	0	1	0,265	0	1	0,39	0	1	0,546	0	1	0,7176
Linprog	0	0	0,1716	0	1	0,312	0	1	0,4368	0	0	0,5777	0	0	0,702

méthode simulation globale	**SLSQP**														
Tirages	1er tirage			2e tirage			3e tirage			4e tirage			5e tirage		
méthodes simulation locale	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time
Lpsolve	0,3	0,1	0,409	0,2	0,2	1,023	0,2	0,2	1,41	0	0	1,6	0	0	1,79
SLSQP	0,3	0,1	0,4	0,5	0	0,789	0,2	0,2	1,189	0	0	1,67	0	0	2,08
CVXPY	0,4	0,1	0,456	0,1	0,1	0,89	0,1	0,1	1,29	0	0	1,71	0	0	2,09
Linprog	0	0	0,195	0,3	0,2	0,57	0,2	0,2	0,95	0	0	1,156	0	0	1,358

méthode simulation globale	**CVXPY**														
Tirages	1er tirage			2e tirage			3e tirage			4e tirage			5e tirage		
méthodes simulation locale	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time
Lpsolve	0	1	0,3588	0	1	0,7176	0	1	1,0296	0	0	1,326	0	0	1,59121013
SLSQP	0	1	0,281	0	1	0,546	0	1	0,827	0	1	1,12132	0	0,8	1,42
CVXPY	0	1	0,28080201	0	1	0,53040409	0	1	0,7950518	0	1	1,10760713	0	1	1,35720921
Linprog	0	0	0,312	0	1	0,655	0	1	0,9204	0	0	1,295	0	0	1,638

méthode simulation globale	**Linprog**														
Tirages	1er tirage			2e tirage			3e tirage			4e tirage			5e tirage		
méthodes simulation locale	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time	Pnf	Pna	Time
Lpsolve	0	1	3,65	0	1	6,895	0	1	8,97	0	0	11,6	0	0	14,24
SLSQP	0	1	3,49	0	1	8,03	0	1	9,86	0	1	12,34	0	0,8	14,38
CVXPY	0	1	5,1012	0	1	10,249	0	1	15,397	0	1	20,389	0	1	25,6465
Linprog	0	0	2,49601603	0	1	5,66283584	0	1	7,65964489	0	0	10,2648659	0	0	12,9480829

Tableau 3.4 : Résultats sur les violations de contraintes pour les simulations globales (N_{mc} = 10)

Algorithme (simulation globale)	Algorithme (Simulation locale)	Nombre total d'équations	Nombre d'équations respecté	Nombre total d'inéquations	Nombre d'inéquations respecté
Lpsolve	**Lpsolve**	14	14	450	447
	SLSQP	14	14	450	448
	CVXPY	14	14	450	448
	Linprog	14	14	450	447
SLSQP	**Lpsolve**	14	14	450	446
	SLSQP	14	12	450	274
	CVXPY	14	12	450	258
	Linprog	14	14	450	446
CVXPY	**Lpsolve**	14	14	450	448
	SLSQP	14	14	450	450
	CVXPY	14	14	450	450
	Linprog	14	14	450	448
Linprog	**Lpsolve**	12	12	450	446
	SLSQP	12	12	450	448
	CVXPY	12	12	450	448
	Linprog	12	12	450	446

3.3.3 Synthèse

Au regard de toutes les interprétations faites pour les différentes simulations (voir Tableau 3.5), Lpsolve est le mieux adapté afin de réaliser d'abord les simulations locales sur les composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ et ensuite pour mener la simulation globale i.e. l'analyse des tolérances du système mécanique combinée à la simulation de MC. Ainsi l'algorithme de la méthode modifiée du simplexe implémenté dans Lpsolve est utilisé pour les optimisations des analyses des tolérances des systèmes mécaniques présentés dans le chapitre 4.

Tableau 3.5 : Conclusion sur le choix du meilleur algorithme

Méthodes	Méthode globale	Méthode locale	Temps de calcul
Lpsolve	✓	✓	✓
SLSQP	✗	✓	✓
CVXPY	✓	✗	✓
Linprog	✓	✓	✗

La procédure de la méthode d'analyse des tolérances proposée peut parfois demander des efforts numériques importants au regard du nombre de tirage de Monte Carlo à effectuer et du nombre de contraintes qui doivent être vérifiées. Ainsi dans l'optique de réduire ces efforts numériques importants, une nouvelle méthode d'analyse des tolérances est proposée en utilisant la méthode de l'estimation par noyaux.

3.4 Nouvelle approche d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste des jeux

La méthode proposée dans cette section a pour objet de générer de nouvelles variables des composantes du torseur jeu $\left\{g^{*}_{\text{contact}}\right\}_{M}$ modélisant un contact fixe ou glissant dans l'optique de réaliser moins de simulations locales et de réduire ainsi les temps de calcul. Pour des raisons de lisibilité, nous utilisons dans toute cette section voire dans le reste du manuscrit, le vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ au lieu du torseur jeu $\left\{g^{*}_{\text{contact}}\right\}_{M}$. $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ correspond au vecteur $\mathbf{G}^{*}_{kj/ij,M}$ défini dans le chapitre 2, partie 2.3.2.2.

Dans la méthode classique de l'analyse des tolérances proposée précédemment, l'optimisation sur l'assemblage des contacts fixes et glissants est réalisée à chaque itération de MC. Dans l'optique de réduire d'éventuels efforts numériques importants, une première simulation de Monte Carlo est appliquée à chaque contact fixe ou glissant afin de déterminer les réalisations des composantes de son torseur jeu permettant de le modéliser. Nous appellerons les réalisations issues de cette simulation de MC préliminaire, les données originales. Ensuite, la densité de probabilité jointe associée aux composantes des torseurs jeux est identifiée et est par la suite utilisées pour générer de nouvelles variables des composantes des torseurs jeux. C'est la méthode de l'estimation par noyaux (en Anglais *Kernel Density Estimation*) qui est utilisée afin de déterminer la fonction de densité de probabilité jointe des composantes des torseurs jeux.

La définition mathématique de la méthode de l'estimation par noyau est donnée dans la partie 3.4.1, ensuite, la méthode permettant de générer de nouvelles variables de composantes des torseurs jeux en se basant sur la méthode du noyau est décrite dans la sous-section 3.4.2. Enfin, l'intégration des nouvelles variables générées dans la méthode de l'analyse des tolérances est décrite dans la sous-section 3.4.3.

3.4.1 Construction de la densité par l'estimation par noyaux

L'estimation par noyaux est une méthode statistique non-paramétrique qui permet d'estimer la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire (Tai et Uhlen, 2015). C'est une méthode utilisée à la fois pour les variables continues unidimensionnelles et multidimensionnelles. Avant l'application de cette méthode, une simulation de Monte Carlo est lancée afin de constituer un ensemble de réalisation des composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants. L'objectif est alors de déterminer la fonction de densité de probabilité de ces réalisations en appliquant l'estimation par noyaux. Il existe plusieurs autres méthodes permettant d'estimer la fonction densité de probabilité des variables aléatoires (Silverman, 1986) : les histogrammes, l'estimateur naïf, la méthode des plus proches voisins, l'estimateur par noyau variable, les estimateurs de séries variables et les estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée. Cependant, dans le cadre des travaux de thèse, l'estimation par noyau est la méthode que nous avons choisie. Un algorithme est employé par la suite pour générer de nouveaux échantillons pour l'analyse des tolérances. La densité de probabilité obtenue par l'estimation par noyau pour une variable aléatoire continue unidimensionnelle *y* est définie par :

$$f(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y - y^{(i)}}{h}\right) \tag{3.13}$$

où $K(.)$ représente la fonction du noyau centrée sur l'observation $y^{(i)}$, h représente est un paramètre indiquant le degré de lissage de l'estimation, *n* le nombre total de variable. Dans la littérature, plusieurs types de noyaux existent (Silverman, 1986) : le noyau de Epanechnikov, le noyau biweight, le noyau triangulaire, le noyau gaussien et le noyau rectangulaire. Le noyau gaussien a été choisi dans ces travaux de thèse compte tenu de sa simplicité et aussi de sa capacité à approximer les distributions des variables des composantes des torseurs jeux $\left\{g^{*}_{\text{contact}}\right\}$. Le noyau gaussien est défini comme suit :

$$K(u) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \tag{3.14}$$

où $u = \left(y - y^{(i)}\right)/h$.

Dans le cadre des travaux menés de cette thèse, les travaux portent sur les composantes des vecteurs $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ des contacts fixes et glissants. Les études sont confrontées dans ce cas à des

variables aléatoires continues multivariées qui peuvent être corrélées. L'estimation de la densité par la méthode multivariée de l'estimation par noyau est alors utilisée. Ainsi, $K(.)$ représente la fonction du noyau gaussien multivarié et la variable aléatoire *y* redevient un ensemble de plusieurs variables unidimensionnelles ($\mathbf{y} = [Y_1, Y_2, ..., Y_d]$ où *d* est la dimension du paramètre ***y***). La fonction du noyau gaussien multivarié peut s'écrire sous la forme (Rajagopalan et al., 1997) :

$$K(u) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\mathbf{S})^{1/2} h^d} \exp(-u/2) \tag{3.15}$$

Où $u = \frac{\left(\mathbf{y} - \mathbf{Y}^{(i)}\right)^T \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{y} - \mathbf{Y}^{(i)}\right)}{h^2}$, $\mathbf{Y}^{(i)} = \left[Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, ..., Y_d^{(i)}\right]^T$ *i*=1,…, *n*, *n* représente le nombre total d'échantillon de variables aléatoires généré grâce à la méthode du noyau, **S** représente la matrice de covariance des variables. C'est cette fonction du noyau gaussien multivarié qui est utilisée dans la suite des travaux de thèse.

Un des paramètres important de cette approche et à prendre avec précaution est la fenêtre de lissage *h*. Ce paramètre permet de contrôler le degré de lissage de la densité estimée des variables (Rajagopalan et al., 1997). Il existe plusieurs techniques permettant de déterminer la meilleure valeur pour ce paramètre *h* : la méthode de la validation croisée, la méthode du plug-in, la règle de Scott, la règle Silverman (Heidenreich et al., 2013; Scott, 1992). La méthode de la validation croisée et celle du plug-in sont des méthodes basées sur des techniques d'optimisation afin de déterminer la meilleure valeur du paramètre *h* et cela est couteux en temps de calcul (Rajagopalan et al., 1997). Ainsi, la règle de Silverman a été choisie dans ces travaux de thèse pour estimer le paramètre *h*. En se basant sur la règle de Silverman, l'expression du calcul du paramètre *h* est donnée par :

$$h = \left(\left(4/(2d+1)\right)^{1/(d+4)}\right).n^{-1/(d+4)} \tag{3.16}$$

où *n* représente le nombre total de données, *d* le nombre total de variables aléatoires (ici, le nombre des composantes du torseur jeu).

La méthode d'estimation de la densité basée sur l'estimation par noyau est par la suite utilisée afin de générer de nouvelles variables ayant les mêmes caractéristiques que celles des données originales. Cette méthode est décrite ci-après.

3.4.2 Génération de nouvelles variables basées sur l'estimation par l'estimation par noyaux

L'estimation par noyaux est tout d'abord utilisée afin de déterminer la fonction densité de la probabilité jointe des variables des composantes du vecteur $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ d'un contact fixe ou glissant. Ensuite en se basant sur la densité de probabilité jointe des variables, de nouvelles variables sont générées et leur utilisation permet de remplacer la simulation locale menée à chaque itération de Monte Carlo afin de déterminer les meilleures composantes du torseur jeu permettant à un contact fixe ou glissant de s'assembler.

Dans la méthode classique de l'analyse des tolérances décrite dans la section 3.2, un échantillon de l'ensemble **X** (ensemble des composantes des défauts géométriques et dimensionnels) est généré à chaque itération de la simulation de MC, ainsi qu'un échantillon de l'ensemble **F** des défauts de forme. Les déviations découlant de ces deux ensembles sont appliquées à chacune des surfaces des contacts fixes et glissants afin de déterminer les composantes du vecteur $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ associé à ces contacts. La simulation locale consiste à optimiser les composantes du vecteur $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ (par exemple α, β, w pour un contact plan-plan) tel que les distances signées entre les deux surfaces de la liaison soit soient supérieures ou égales à zéro. Afin d'utiliser la méthode probabiliste développée dans cette sous-section, il est indispensable d'appliquer une simulation de MC à cette simulation locale i.e. réaliser cette simulation un certain nombre de fois afin d'établir des réalisations des composantes de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$. Ces réalisations sont considérées comme les données originales et sont représentées par la suite par la matrice **D**. L'objectif après est de déterminer la densité de probabilité jointe de ces réalisations de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ et de générer de nouvelles variables permettant de réaliser l'analyse des tolérances d'un système mécanique hyperstatique. L'objectif à terme est de réaliser un nombre réduit de simulation MC préliminaire pour déterminer les données originales (i.e. $N_{KDE} < N_{mc}$) et ensuite de les utiliser en employant la méthode du noyau pour générer un nombre d'échantillons plus grand pour l'analyse des tolérances, afin de réduire le temps de simulation.

Plusieurs expériences réalisées sur l'optimisation des composantes de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ des contacts fixes et glissants révèlent qu'il y a une importante variabilité des distributions marginales de ces composantes. Aussi, la structure de dépendance entre les réalisations de ces composantes est complexe. Pour déterminer les lois marginales de chaque composante d'un vecteur

$\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$, il est envisageable par exemple d'utiliser un ensemble de lois prédéfinies (loi normale, loi uniforme, loi bêta, loi gamma etc.) combinées avec des méthodes basées sur les copules (copules Elliptiques, copules Archimédiens, copules Marshall-Olkin etc.) (Embrechts et al., 2003) pour déterminer la structure de dépendance. Toutefois, ces méthodes classiques ne sont assez flexibles pour décrire avec précision la distribution marginale et la structure de dépendance entre les réalisations des composantes de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$. L'estimation par noyaux a donc été choisie à cause de sa simplicité, sa flexibilité et aussi sa précision de générer de nouvelles variables respectant les distributions marginales originales et aussi respectant la structure de dépendance.

Un algorithme est utilisé afin de générer les nouvelles variables des composantes des torseurs jeux qui sont utilisées dans la méthode d'analyse des tolérances (voir Algorithme 1). Les nouvelles variables basée sur la méthode d'estimation par noyau ont été obtenues en utilisant les réalisations originales de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ (les données originales). Comme expliqué ci-dessous, une première simulation de MC a été lancée sur un contact fixe ou glissant afin de récolter les différentes réalisations des composantes de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$ qui formeront la matrice **D**, matrice des données originales. Certains paramètres doivent être définis pour décrire l'algorithme.

ALGORITHME 1: Générer de nouvelles variables basées sur l'estimation par noyaux

Etape 1: Considérons $\mathbf{D} = \left[\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,1}, \mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,2}, \ldots, \mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,N_{KDE}}\right]$ où $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,\mathrm{i}}$ est de taille *1* x *k, i=1 à* N_{KDE}, obtenu en réalisant N_{KDE} fois l'optimisation des paramètres du torseur jeu d'un contact fixe ou glissant. Tirer uniformément $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,\mathrm{i}}$ de $\left[\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,1}, \mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,2}, \ldots, \mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,N_{KDE}}\right]$.

Etape 2: Simuler les nouvelles variables du noyau i.e. des variables normales multidimensionnelles centrées sur $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,\mathrm{i}}$ et ayant comme écart-type $h^2 * \mathbf{S}$. Cette simulation $\mathcal{N}(\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M,\mathrm{i}}, h^2 * \mathbf{S})$ donne une matrice de dimension N_{KDE} x *k*. *h* représente le paramètre de lissage et $\mathbf{S}$ représente la matrice de covariance des variables.

Etape 3: Les nouvelles variables obtenues représentent le modèle probabiliste des composantes du torseur jeu qui sont ensuite introduites dans les contraintes à développer (équations de compatibilité, conditions fonctionnelles, contraintes d'interface).

Prenons par exemple N_{KDE} le nombre total de la première simulation de MC, *k* le nombre de composantes du torseur jeu du contact fixe ou glissant, et **D** la matrice représentant les données originales et de dimension N_{KDE} x k. Pour déterminer le modèle probabiliste associé à

l'estimation par noyaux, les données originales sont uniformément tirées et de nouvelles variables normales multidimensionnelles centrées sur le précédent tirage sont simulées. La nouvelle matrice qui est obtenue de l'application de cette loi normale représente le modèle probabiliste des composantes du torseur jeu du contact fixe ou glissant. Un algorithme a été utilisé (Rajagopalan et al., 1997) pour la détermination du modèle probabiliste et est détaillé dans l'algorithme 2 :

ALGORITHME 2: Modèle probabiliste caractérisant le jeu d'un contact fixe ou glissant

Entrée : Le nombre total des échantillons de Monte Carlo **(** N_{KDE} **)**
Entrée : Les surfaces nominales d'un contact fixe ou glissant
Entrée : Une matrice vide **D** de dimension N_{KDE} x k
Assurer : le nombre des itérations d'optimisation à un contact
Etapes//
1: Générer les amplitudes des défauts de forme pour chaque surface du contact, $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \mathbf{F}^{(N_{KDE})}\}$ où $\mathbf{F}^{(i)} = [\, f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n \,]$
n =nombre des points de maillage sur chaque surface
2: Appliquer les amplitudes des défauts de forme aux surfaces discrétisées du contact
3: Pour chaque i $\in$ N_{KDE} **faire**
4: **Calculer min** f $\left(\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}\right)$ telle que **Distances Signées (S1, S2) ≥ 0** (S_1, S_2: les surfaces non-idéales potentiellement en contact)
5: // Changer la i^{ième} ligne de **D** par les composantes de $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$
6: fin
7: Tirer uniformément $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M,\mathrm{i}}$ de **D**=$\left[\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M,1},\ \mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M,2},\ldots,\ \mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M,N_{mc}}\right]$**.** Ceci permet d'obtenir la matrice **M**.
8: Générer les variables normales multivariées **N** centrées sur 0 et ayant h^2x **S** comme écart-type, **N** est une matrice de dimension N_{KDE} x k .
Sortie :
Calculer **P = M + N**. Chaque colonne de **P** représente le modèle probabiliste de chaque composante du torseur jeu.

Le processus de détermination du modèle probabiliste associé au vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$, combine à la fois la procédure de l'algorithme 1 et la méthode d'optimisation basée sur l'introduction des distances signées comme évoqué dans le chapitre 2. Les variables du modèle probabiliste caractérisant le jeu d'un contact fixe ou glissant, sont par la suite, introduites dans le processus global de l'analyse des tolérances d'un système mécanique hyperstatique.

3.4.3 Intégration des nouvelles variables dans la démarche de l'analyse des tolérances

La méthode classique d'analyse des tolérances d'un système mécanique hyperstatique proposée dans la section 4.2, est basée sur deux méthodes d'optimisation : (i) une première optimisation concerne le vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ d'un contact fixe ou glissant, effectuée à chaque itération de MC, (ii) une deuxième optimisation est combinée à une simulation de MC et permet de vérifier si le système mécanique est globalement assemblable et fonctionnel. La méthode de détermination du modèle probabiliste des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ est principalement appliquée au niveau de la première optimisation afin d'éviter une seconde optimisation imbriquée dans l'optimisation générale.

Ainsi, une méthode permettant de déterminer les modèles probabilistes des composantes d'un vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ a été proposée dans la section 3.3.2 afin de pallier les inconvénients liés à ces efforts numériques. Le processus d'établissement de ces modèles probabilistes est détaillé précédemment. La matrice **P** contient les composantes du modèle probabiliste des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ qui sont intégrées dans le processus général de l'analyse des tolérances. Pour réaliser l'analyse des tolérances, il y a certaines contraintes qui sont développées afin de modéliser le comportement géométrique d'un système mécanique hyperstatique : les équations de compatibilité, les conditions fonctionnelles et les contraintes d'interfaces. Les composantes de la matrice **P** sont introduites principalement dans les équations de compatibilité et les conditions fonctionnelles. Ainsi, à chaque itération de MC, les composantes d'une ligne de la matrice **P** sont introduites dans les équations de compatibilité voire de conditions fonctionnelles comme variables connues. Il est important de noter que dans le cas des contacts glissants, il y a certaines composantes des torseurs jeux qui ne sont déterminées en considérant uniquement les composantes de $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$. Il s'agit des composantes associées aux déplacements cinématiques de ces contacts glissants. Ils sont ajoutées comme des variables inconnues à la seconde méthode d'optimisation où sont déterminées les composantes des torseurs des contacts flottants ($\mathbf{G}^{'}$) et qui servent ensuite à calculer les probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité d'un système mécanique. La Figure 3.4 permet de synthétiser la nouvelle méthode d'analyse des tolérances basée sur le développement d'un modèle probabiliste caractérisant le jeu des contacts fixes et glissants.

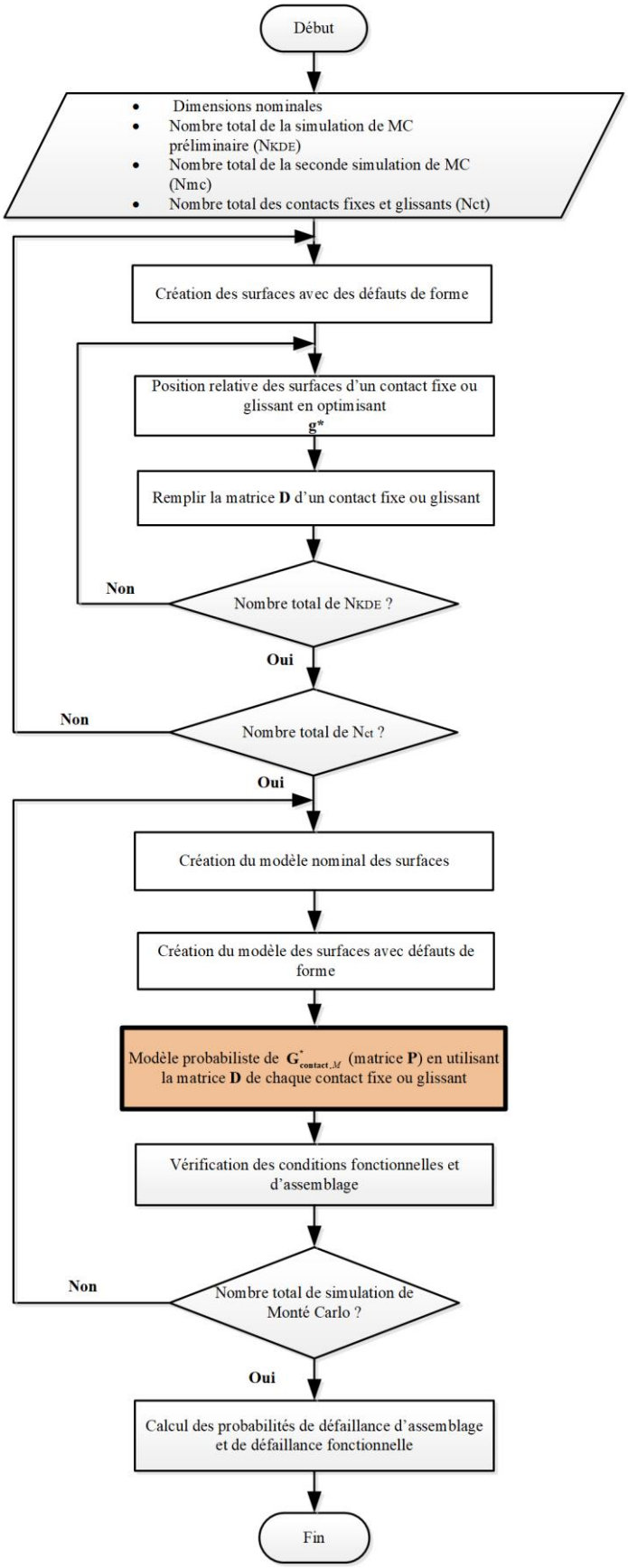


Figure 3.4 : Approche globale améliorée de l'analyse des tolérances

3.4.4 Justification de la proposition d'un modèle probabiliste pour la caractérisation du jeu

Cette partie synthétise les avantages de l'utilisation du modèle probabiliste caractérisant le jeu d'un contact fixe ou glissant.

- Certains systèmes mécaniques sont composés de plusieurs contacts fixes ou glissants identiques. Dans ce cas par exemple, l'introduction de modèles probabilistes dans la démarche globale de l'analyse des tolérances permet de réaliser juste une seule fois la simulation préliminaire de MC permettant d'obtenir la matrice des données originales (**D**). Une fois obtenue pour un contact, elle pourra être utilisée pour évaluer la fonction densité de probabilité conjointe de son contact et aussi des autres contacts identiques. En effet les contacts identiques ont les mêmes défauts élémentaires et les mêmes caractéristiques dimensionnelles. D'où les composantes du vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ qui sont évaluées sont identiques. En prenant la matrice des données originales d'un seul contact, les modèles probabilistes des composantes de son torseur et ainsi que ceux des autres contacts identiques peuvent être déterminés. Il n'est donc plus nécessaire de refaire la simulation de MC préliminaire pour les autres contacts identiques, ce qui permet de réduire le temps de calcul.
- La méthode de l'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$, permet d'étudier séparément les contacts fixes et glissants. Ainsi, un large spectre de ces contacts fixes et glissants peut être étudié en avance pour déterminer leur matrice **D** respective. Ces simulations préliminaires peuvent être gourmandes en termes de temps de calcul mais une fois que la conception des systèmes mécaniques est lancée, les modèles probabilistes sont rapidement établis et introduits dans la méthode générale de l'analyse des tolérances. Ce qui permet de gagner en temps de calcul et de conception.
- Pour réaliser l'analyse des tolérances en utilisant le modèle probabiliste des réalisations des composantes d'un vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$, deux simulations de MC sont utilisées. La première simulation de MC permet de déterminer les données originales qui sont utilisées pour développer le modèle probabiliste des composantes d'un vecteur $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ en utilisant l'estimation par noyaux. La seconde simulation de MC est associée à une technique d'optimisation et l'ensemble permet de réaliser l'analyse des tolérances du

système mécanique hyperstatique. Supposons que le paramètre N_{KDE} soit le nombre d'échantillons de la première simulation de MC et le paramètre N_{mc} soit le nombre d'échantillons de la seconde simulation de MC. Une autre utilité de l'utilisation du modèle probabiliste pour l'analyse des tolérances est de choisir un nombre N_{KDE} inférieur à N_{mc} ($N_{mc} > N_{KDE}$ ou $N_{mc} >> N_{KDE}$). En effet N_{KDE} peut être choisi de telle manière que les échantillons des données originales soient suffisants pour déterminer une densité de probabilité avec une précision acceptable et aussi obtenir des probabilités de défaillance suffisamment précises. Il n'est pas nécessaire que N_{KDE} soit égal à N_{mc}, ce qui permet de réduire le temps de calcul. Pour montrer l'utilité de la démarche proposée à ce point, une série de simulations a été lancée pour différents nombres N_{KDE}, pour un nombre N_{mc} fixe égal à 100000, pour un nombre de points de discrétisation fixe d'un contact glissant égal à 2500 et pour les amplitudes des défauts de forme suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(1.5\text{x}10^{-3}, 3.5\text{x}10^{-3})$. Les résultats sont montrés dans le Tableau 3.6 où on peut remarquer que $N_{KDE} = 10000$ est déjà suffisant pour développer le modèle probabiliste puis réaliser l'analyse des tolérances du système mécanique car les probabilités calculées sont stables.

Tableau 3.6 : Résultats en fonction des différents nombres N_{KDE}

Simulations	**Résultats**				
	2500				
N_{KDE}	**10000**	**20000**	**30000**	**50000**	**100000**
Probabilités	P_{nf} = 1.63x10^{-2} P_{na} = 3.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 3.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.63x10^{-2} P_{na} = 3.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.63x10^{-2} P_{na} = 3.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.63x10^{-2} P_{na} = 3.00x10^{-5}
T_1	10min	13min	19min	24min	50min
T_2	9h43min	9h44min	9h42min	9h45min	9h43min
Temps de calcul (T_1 + T_2)	9h53min	9h57min	10h01min	10h09min	10h33min

- Il existe d'autres méthodes que la simulation de MC pour réaliser l'analyse des tolérances d'un système mécanique hyperstatique. La méthode FORM (Dumas et al., 2015a) peut être par exemple utilisée pour résoudre les problèmes fonctionnels des systèmes mécaniques hyperstatiques. La proposition d'un modèle probabiliste des composantes du torseur jeu pour réaliser l'analyse des tolérances est une démarche qui peut être appliquée comme celle qui est proposée dans cette partie mais aussi être appliquée pour la méthode FORM.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre deux approches d'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques ont été présentées. Les deux méthodes sont basées sur des simulations de MC associées à des techniques d'optimisation. Des simulations préliminaires ont été réalisées afin de déterminer l'algorithme d'optimisation le plus adapté aux études. Plusieurs algorithmes d'optimisation ont été comparés et l'algorithme basé sur la méthode modifiée du simplexe a été choisi en raison de ses performances supérieures.

Dans la première méthode d'analyse des tolérances nommée méthode classique, des simulations locales sont appliquées sur les contacts fixes et glissants pour déterminer les configurations optimales des jeux permettant de satisfaire les contraintes de non-interpénétrations entre les surfaces potentiellement en contact. Cependant, ces simulations locales répétées à chaque itération de la méthode de MC nécessitent des efforts numériques importants. Pour pallier ce problème, des modèles probabilistes des réalisations des composantes des vecteurs $\mathbf{G}^{*}_{\mathbf{contact},M}$ des contacts fixes et glissants sont par la suite proposés. Ce modèle probabiliste est obtenu en faisant appel à l'estimation par noyaux. L'utilisation du modèle probabiliste dans la démarche d'analyse des tolérances offre plusieurs avantages dont l'utilisation d'un petit nombre d'échantillons pour déterminer les réalisations desquelles est appliquée à l'estimation par noyaux dans le but de minimiser le temps de calcul. Les différentes méthodes développées dans ce chapitre ont été appliquées à de différents systèmes mécaniques.

Chapitre 4 : Applications

Sommaire

Chapitre 4 : Applications 105
4.1 Introduction 105
4.2 Assemblage et exigence fonctionnelle d'un moteur électrique 106
4.2.1 Formulation et modélisation des problèmes d'assemblage et fonctionnel 106
4.2.2 Résultats 112
4.3 Assemblage d'une pompe PIERBURG 119
4.3.1 Formulation et modélisation du problème d'assemblage 120
4.3.2 Résultats 123
4.4 Conclusion 124

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, les différentes approches d'analyse des tolérances sont appliquées à des systèmes mécaniques hyperstatiques ; l'objectif est d'évaluer les conditions d'assemblage et fonctionnelle. La technique de base des deux méthodes proposées pour réaliser l'analyse des tolérances est une combinaison de la simulation de Monte Carlo et des optimisations. Les deux méthodes proposées sont présentées comme suit : (i) la première méthode réalise une simulation locale sur les contacts fixes et glissants à chaque itération de la simulation de MC afin de déterminer des composantes de leur torseur jeu assurant une configuration optimale d'assemblage sans interpénétrations, (ii) la deuxième méthode introduit un modèle probabiliste pour les composantes des jeux dans la simulation de MC.

Deux mécanismes sont étudiés dans ce chapitre. La section 4.2 présente l'étude d'un moteur électrique où l'exigence fonctionnelle se situe au niveau du débattement entre l'arbre et le

boitier. Sa condition d'assemblage est aussi étudiée. La section 4.3 s'intéresse uniquement à l'assemblage d'une pompe de voiture de la société PIERBURG. Ce cas n'a pas d'exigence fonctionnelle car sa fonctionnalité dépend uniquement de sa capacité à s'assembler.

4.2 Assemblage et exigence fonctionnelle d'un moteur électrique

Le système mécanique étudié dans cette section est un système mécanique hyperstatique et représente une simplification d'un moteur électrique étudié dans (Anselmetti, 2006). Ce système mécanique et ses composantes sont représentés sur les Figure 4.1-Figure 4.5. C'est un système mécanique composé de trois pièces : un arbre (pièce 3) relié au boitier (pièce 1) et à un support à l'extrémité (pièce 2). L'exigence de fonctionnalité porte sur le débattement maximal limité suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du cylindre central de l'arbre par rapport à la surface intérieure du boitier. Le torseur jeu fonctionnel *1d/3d* est contraint par une condition fonctionnelle.

4.2.1 Formulation et modélisation des problèmes d'assemblage et fonctionnel

Les différentes étapes suivies pour étudier ce moteur électrique sont décrites dans cette sous-section. Plus d'information sur les équations et contraintes développées, peuvent être trouvées dans l'Annexe D.

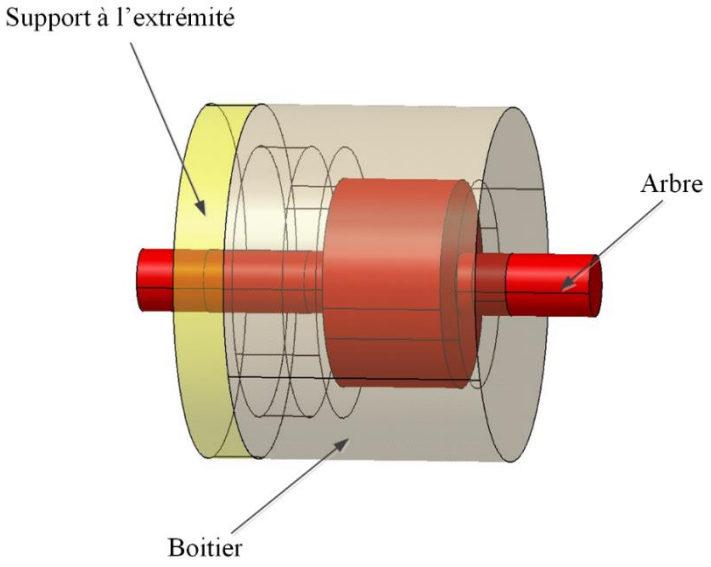


Figure 4.1 : Représentation simplifiée 3D du moteur électrique

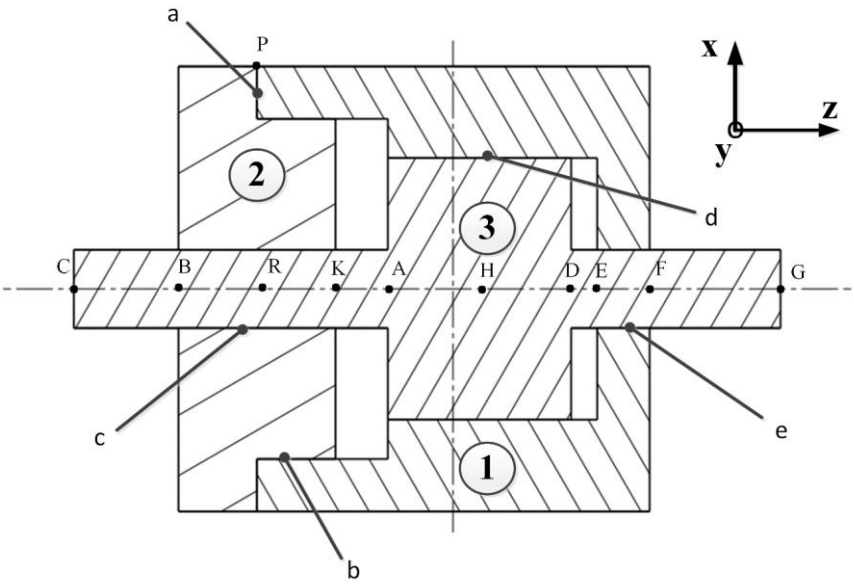


Figure 4.2 : Vue en coupe du moteur électrique

Les différentes surfaces : les surfaces des pièces mécaniques sont désignées à l'aide des lettres minuscules (par exemple *a*, *b*, etc.). Les lettres majuscules (par exemple A, B, C, etc.) sont utilisées pour désigner les différents points du repère où les torseurs écarts et torseurs jeux sont exprimés.

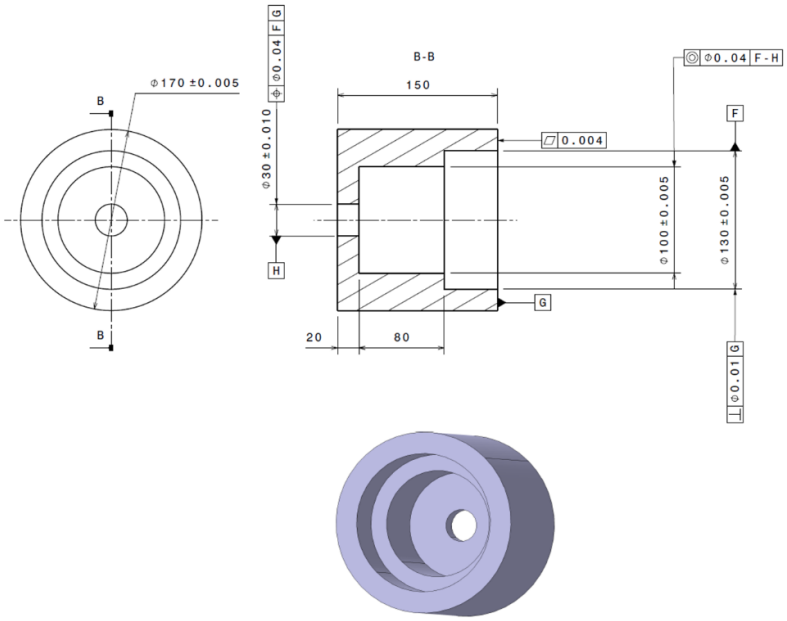


Figure 4.3 : Spécifications géométriques de la pièce 1

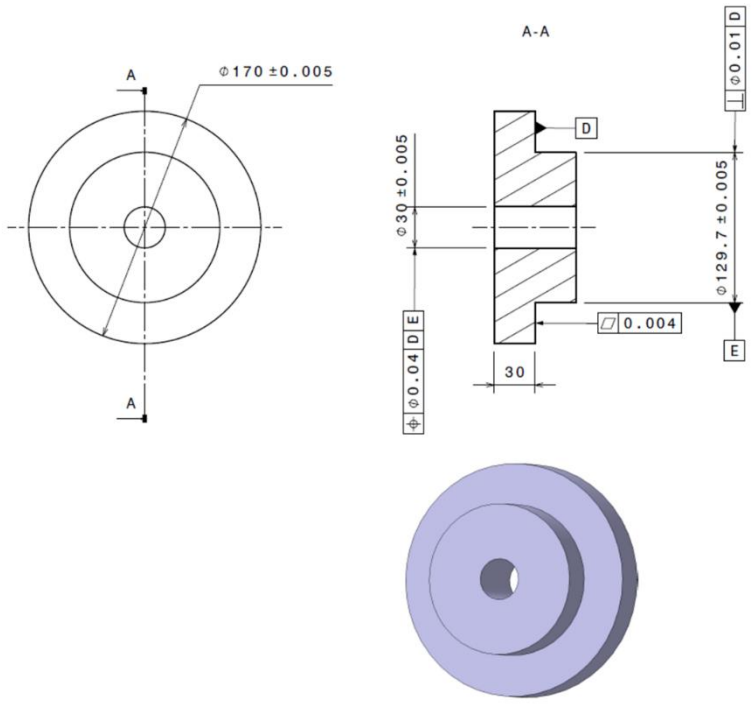


Figure 4.4 : Spécifications géométriques de la pièce 2

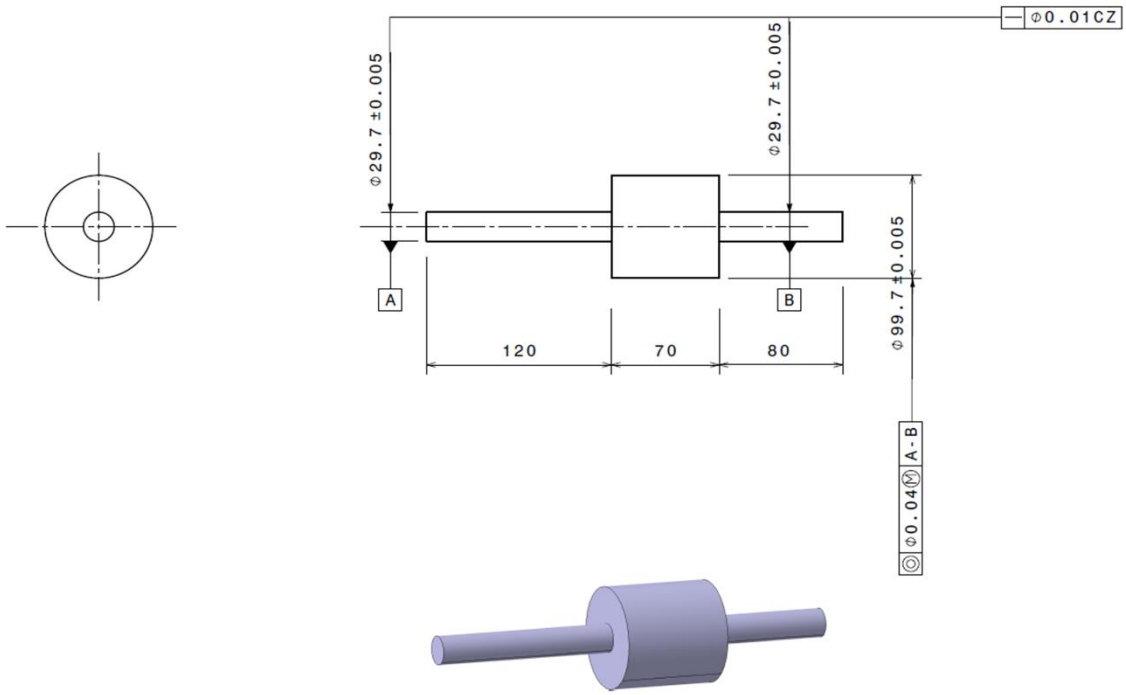


Figure 4.5 : Spécifications géométriques de la pièce 3

Les surfaces sont:

- Surface à contour circulaire plane *1a, 2a*
- Surfaces cylindriques *1b, 2b, 2c, 3c, 1d, 3d, 1e, 3e.*

Pour chaque modèle de substitution de ces surfaces, un torseur écart est défini ainsi que des écarts intrinsèques pour chaque surface cylindrique.

Boucles topologiques : Le graphe de liaison du modèle du moteur est montré sur la Figure 4.6. Il y a au total quatre liaisons mécaniques (sans celle de la condition fonctionnelle) pour trois pièces mécaniques. Le nombre de boucles topologiques permettant de développer les équations de compatibilité peut être calculé : $N_{boucles} = 4-3+1=2$. Douze équations de compatibilité sont développées pour ce système mécanique.

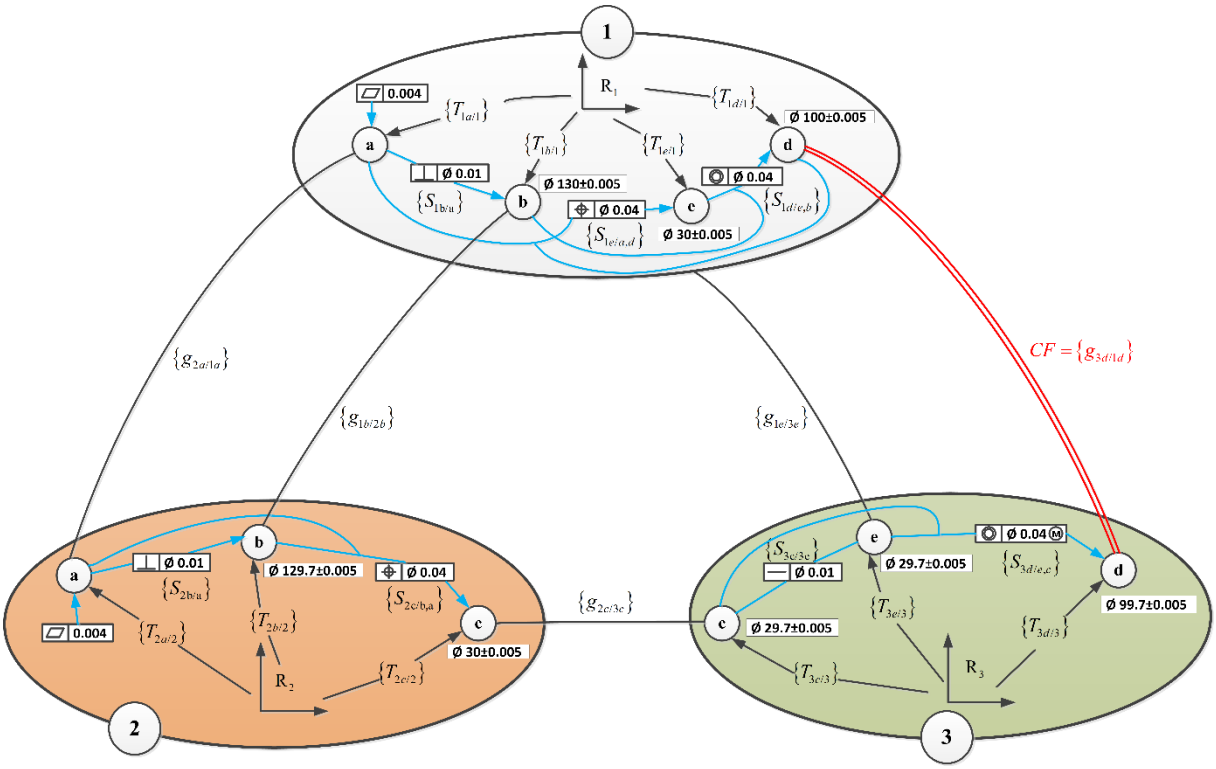


Figure 4.6 : graphe de liaisons du moteur électrique

Liaisons géométriques : Plusieurs types de liaisons sont considérés pour ce moteur électrique :

- La liaison appui plan circulaire *1a/2a* : c'est un contact qui est considéré comme glissant. Son vecteur $\mathbf{G}^*_{\mathbf{1a/2a},M}$ est l'objet de la simulation locale incrustée dans la simulation de MC générale de l'analyse des tolérances. De plus ce torseur jeu fait aussi

l'objet de l'utilisation de l'estimation par noyaux pour générer de nouveaux échantillons des réalisations des composantes de ce torseur et qui sont par la suite introduits dans le processus de l'analyse des tolérances. Le contact est discrétisé afin de développer les contraintes d'interface. Le nombre de points de discrétisation doit être choisi avec précaution car il a un impact sur le temps de simulation et sur les probabilités calculées.

- Les liaisons pivots glissants *1b/2b, 2c/3c, 1e/3e* : sont considérés comme des contacts flottants. Les surfaces sont d'abord discrétisées et ensuite des contraintes linéaires sont développées à chaque point des maillages. La procédure de développement des contraintes d'interface dans ce manuscrit est différente de celle des travaux de Dumas *et al.* (2015b). Dans leurs travaux, les contraintes développées sont d'abord quadratiques, puis une technique de linéarisation est appliquée. La discrétisation de ces surfaces cylindriques est effectuée en considérant différents cercles (en un nombre N_c par exemple) répartis suivant les surfaces longitudinales des cylindres et à de différentes distances. Chaque cercle est discrétisé en un nombre de points (en un nombre N_d par exemple) i.e. en un nombre d'angles donnés. Le nombre total de discrétisation sur une surface cylindrique est au nombre de N_cx N_d .

La condition fonctionnelle concerne la limitation de la distance de l'entrefer entre le rotor (pièce 3) et le stator (pièce 1).

Formulation du problème d'assemblage et fonctionnel :

Dans l'analyse des tolérances de ce système mécanique, plusieurs types d'optimisations sont réalisées. La première optimisation est celle concernant les paramètres du vecteur $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{G}^*_{1a/2a,M} = \begin{Bmatrix} w_{2a1a,M} \\ \alpha_{2a1a} \\ \beta_{2a1a} \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

La formulation mathématique de cette première optimisation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}}{\text{Min}} \quad \text{f}\left(w_{1a2a,M}, \alpha_{1a2a}, \beta_{1a2a}\right) \\ \text{s. c.} \quad \forall\left(\mathbf{M}^R_{1\text{a},j}, \mathbf{M}^R_{2\text{a},j}\right) \in \left(S_{1a}, S_{2a}\right),\ \mathbf{M}^R_{1\text{a},j}\mathbf{M}^R_{2\text{a},j}.\mathbf{n} \geq 0,\ j \in \left[1,\ldots,N_p\right] \end{cases} \tag{4.2}$$

où N_p représente le nombre total de points de discrétisation sur chacune des surfaces *1a* et *2a* (N_p doit être le même pour les deux surfaces), S_{1a} et S_{2a} sont les surfaces réelles des surfaces nominales *1a* et *2a*, $\mathbf{n}$ représente le vecteur normal du modèle nominale de la surface S_{2a}, $\mathbf{M}^R_{1\text{a},j}$ et $\mathbf{M}^R_{2\text{a},j}$ sont des points appartenant à la même normale et appartiennent respectivement aux surfaces S_{1a} et S_{2a}.

Cette première optimisation est réalisée à chaque itération de la simulation de MC et permet de déterminer les paramètres $w_{1a2a}, \alpha_{1a2a}, \beta_{1a2a}$ qui sont par la suite introduits dans les équations de compatibilité.

Ensuite, l'optimisation concernant le problème d'assemblage est lancée. Cette optimisation est menée sur les composantes des torseurs jeux des contacts flottants et sur les composantes des déplacements cinématiques des contacts glissants. Toutes ces composantes forment le vecteur $\tilde{\mathbf{G}}'$ qui doit être déterminé. Le problème d'optimisation pour les conditions d'assemblage est formalisé par :

$$R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right) = \begin{cases} \underset{\tilde{\mathbf{G}}' \in \mathbf{R}^{20}}{\text{Min}} \quad \text{f}\left(\tilde{\mathbf{G}}'\right) \\ \textit{sous} \quad \left[C_{omp}\right]_{[14\text{x}20]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[20\text{x}1]} = \left[\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{G}^{*(k)}_{1a/2a}\right] \\ \qquad \left[C_{\text{Interface}}\right]_{\left[(3\text{x}N_c\text{x}N_d)\text{x}20\right]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[20\text{x}1]} \leq \left[\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}} + \mathbf{F}^{(k)}\right] \end{cases} \quad \forall\ k = \left\{1,\ldots,N_{mc}\right\}$$

(4.3)

La probabilité de non-assemblage est par la suite calculée en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{\text{P}}_{\text{na}} = \text{Prob}\left(E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\right) \tag{4.4}$$

où $E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ est l'évènement suivant : « Pour des vecteurs $\mathbf{X}^{(k)}$ et $\mathbf{F}^{(k)}$ tirés, il n'existe pas de vecteur jeu $\tilde{\mathbf{G}}' \in \mathbf{R}^{20}$ tel que $R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ ait une solution ».

Les dernières optimisations concernent les composantes du torseur jeu fonctionnel $\left\{g_{3d/1d}\right\}_H$. Etant donné que le torseur $\left\{g_{3d/1d}\right\}_H$ possède deux composantes, deux conditions

fonctionnelles sont établies. Ainsi, deux problèmes optimisations sont effectués afin de déterminer ces deux composantes. Ces deux problèmes différents d'optimisation ont les mêmes contraintes qui sont les équations de compatibilité et les contraintes d'interface. Les problèmes d'optimisation sont définis sous la forme :

$$R_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}}{\text{Min}} & C_f^{(t)}\left(\mathbf{X}_{\text{Intrinsèque}}^{(k)},\mathbf{F}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}'_{\text{fonctionnel}}\right)\\ \textit{sous} & \left[C_{omp}\right]_{[14\text{x}20]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[20\text{x}1]}=\left[\mathbf{X}^{(k)}+\mathbf{G}_{1a/2a}^{*(k)}\right] \qquad \forall\ k=\{1,\ldots,N_{mc}\}\\ & \left[C_{\text{Interface}}\right]_{\left[(3\text{x}N_c\text{x}N_d)\text{x}20\right]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[20\text{x}1]}\leq\left[\mathbf{X}_{\text{Intrinsèque}}^{(k)}+\mathbf{F}^{(k)}\right]\end{cases}$$

(4.5)

avec $t=[1,\ 2]$.

La probabilité de non-fonctionnalité est ensuite calculée en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{\text{P}}_{\text{nf}}=\text{Prob}\left(\bigcup_{t=1}^{2}R_f^{(t)}\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\leq 0\right) \tag{4.6}$$

4.2.2 Résultats

- **Résultats de la méthode d'analyse des tolérances sans défaut de forme et celle avec des défauts de forme**

Les résultats concernant l'analyse des tolérances sur le système mécanique sont présentés dans le Tableau 4.1 en comparant la simulation de l'analyse des tolérances sans et avec défauts de forme. Pour cette étude, 50000 échantillons sont utilisés pour la simulation de MC, le nombre de cercle de discrétisation pour chaque cylindre $N_c=5$ et le nombre d'angles de discrétisation par cercle est $N_d=30$. Le nombre de points de discrétisation pour chacune des surfaces circulaires planes *1a* et *2a* est $N_p=10$. Douze types de défauts élémentaires et indépendants ont été choisis pour les surfaces circulaires planes. Ces défauts élémentaires sont montrés dans l'Annexe B. Il est supposé que les amplitudes des défauts de forme suivent la loi normale.

Tableau 4.1 : Résultats des simulations

Modèle	Système mécanique sans défauts de forme	Système mécanique avec défauts de forme
Probabilité de défaillance fonctionnelle	2.10^{-5}	$2*10^{-4}$
Probabilité de défaillance d'assemblage	$1.4*10^{-4}$	$3*10^{-4}$
Temps de calcul	3 min	05h23min
Nombre total de tirages de MC	50000	50000

La considération des défauts de forme a une influence sur les probabilités calculées et aussi sur le temps de calcul. Les deux probabilités de défaillance ont augmenté par rapport à celle de la simulation sans défauts de forme (10 fois pour la probabilité de non-fonctionnalité et 2 fois pour la probabilité de non-assemblage). Ainsi, les amplitudes des défauts de forme ont donc effectivement des impacts sur les probabilités de défaillance.

De plus, le temps de calcul a augmenté car la simulation considérant les défauts de forme est réalisée en discrétisant les surfaces de contacts 24 450 000 points. Etant donné les contraintes d'interface sont développées pour chacun des points des surfaces, un grand nombre de contraintes est à vérifier et cela augmente le temps des simulations. Dans le cas de la simulation où les défauts de forme ne sont pas considérés, seul les points situés aux extrémités des surfaces sont choisis pour écrire les contraintes d'interface. Ce qui n'est pas le cas lorsque les défauts de forme sont considérés. Le nombre total de contraintes que doivent satisfaire les problèmes d'optimisation est 2.6 fois plus grand. Aussi, une autre optimisation (simulation locale sur les contacts fixes et glissants) a été ajoutée à la procédure d'analyse des tolérances et contribue également à l'augmentation du temps de calcul. D'autres simulations ont été réalisées afin de montrer que le temps de simulation augmente en fonction du nombre total de contraintes (voir Tableau 4.2).

Tableau 4.2 : Temps de calcul en fonction du nombre de points de discrétisation

Nombre de points de discrétisation	24 450 000	27 500 000	33 750 000
Temps de calcul	5h23min	5h34min	5h54min

- **Résultats de la méthode classique d'analyse des tolérances et celle basée sur l'estimation par noyaux**

La seconde partie de la présentation des résultats concerne les comparaisons faites entre la méthode d'analyse des tolérances proposée basée sur la simulation de MC et celle basée sur le modèle probabiliste (l'estimation par noyaux) du vecteur $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$. Afin de réaliser ces comparaisons, deux types de lois sont choisies afin de générer les amplitudes des défauts de forme des surfaces du contact glissant *1a/2a* : loi normale et loi uniforme. Ces lois sont utilisées avec des écart-types et des intervalles différents afin de tester la robustesse de la méthode proposée basée sur l'estimation par noyaux. Le but du choix de ces deux lois est de déterminer si les distributions des amplitudes des défauts de forme ont une influence sur les distributions des composantes de $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$ si la méthode peut approximer l'impact de ces distributions et si leur structure de dépendance est gardée. Trois types de maillage ont également été considérés : le maillage grossier, le maillage classique et le maillage fin avec respectivement 100, 2500 et 10000 points de discrétisation par surface. La prise en compte des différentes échelles de maillage permet de déterminer si le maillage est suffisamment raffiné pour évaluer l'impact des défauts de forme sur le comportement des composantes de $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$ et aussi pour déterminer si les probabilités de défaillance calculées convergent vers des valeurs de références. Le Tableau 4.3 montre les différents paramètres choisis pour réaliser les simulations locales (optimisation des composantes de $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$). Ainsi, pour chaque loi, un maillage est choisi ainsi que un écart-type ou un intervalle. Au total en faisant toutes les combinaisons des lois possibles des amplitudes des défauts de forme, 18 expérimentations ont été définies : neuf pour la loi gaussienne et neuf pour la loi uniforme.

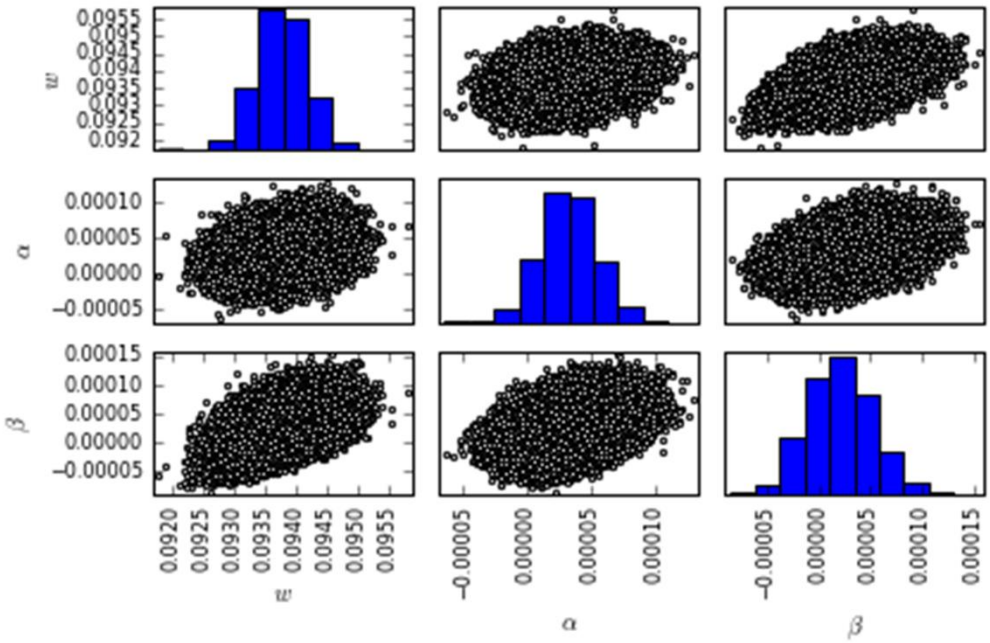
Tableau 4.3 : Les paramètres de la simulation locale sur le contact glissant 1a/2a

loi	Maillage	Ecart-types/ Intervalles
Gaussienne (μ=2.5x10^{-3})	100	10^{-6}
	2500	10^{-4}
	10000	10^{-2}
Uniforme	100	[2x10^{-3}, 3x10^{-3}]
	2500	[1.5x10^{-3}, 3.5x10^{-3}]
	10000	[-7.5x10^{-3}, 1x10^{-2}]

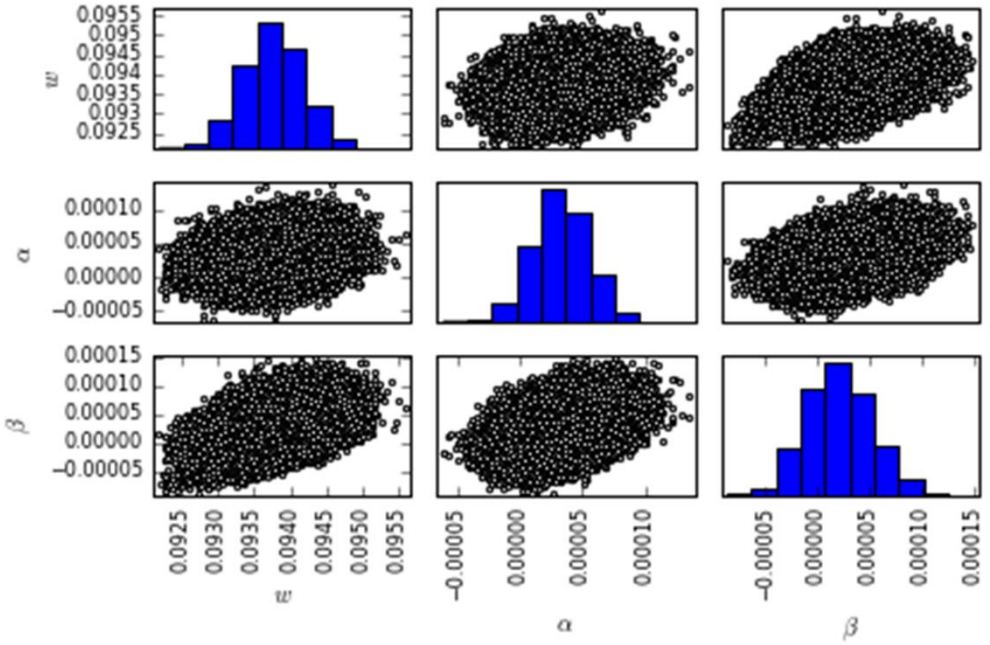
Pour des raisons de concision des résultats à présenter, une distribution de référence a été choisie et c'est uniquement ses résultats qui sont présentés dans cette section. Il s'agit de la loi gaussienne avec une moyenne (μ) égale à $2.5\text{x}10^{-3}$ et un écart-type $\sigma = 10^{-4}$ et le type de maillage de 100 points de discrétisations. Rappelons que les distributions générées à partir de ce tableau vont être utilisées à la fois pour réaliser l'analyse des tolérances du système mécanique en employant la méthode classique et la méthode basée sur le modèle probabiliste. La méthode classique d'analyse des tolérances concerne la première méthode présentée dans le Chapitre 3, section 3.2, où une autre technique d'optimisation (optimisation de $\mathbf{G}^*_{\mathbf{contact},M}$) a été ajoutée à la simulation de MC combinée à une méthode d'optimisation. Une comparaison est donc établie entre les deux méthodes d'analyse des tolérances (voir Tableau 4.4) pour la simulation $F \sim \mathcal{N}$ ($2.5\text{x}10^{-3}$, 10^{-4}). Pour les autres catégories de distribution, leurs résultats sont présentés dans l'Annexe E. Le nombre de tirages des échantillons pour réaliser les analyses des tolérances est $N_{mc} = 100000$.

Une première comparaison (voir Figure 4.7) entre les données originales qui représentent les réalisations des composantes du vecteur $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$ lors de la simulation de MC préliminaire et les échantillons tirés en se basant sur l'estimation par noyaux, permet de remarquer la similitude entre ces deux cas. En effet, l'estimation par noyaux permet d'approximer convenablement les distributions des composantes du vecteur $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$ et aussi permet de conserver leur structure de dépendance comme le montre la Figure 4.7.

En plus pour montrer la similitude entre les données originales et celles tirées en utilisant l'estimation par noyaux, les lignes de niveaux des fonctions de densité de probabilité jointe des paires des composantes de $\mathbf{G}^*_{1a/2a,M}$ provenant des données de l'estimation par noyaux et des points provenant des données originales sont représentés sur la Figure 4.8. La densité des points des données originales correspondent effectivement avec les couleurs des lignes de niveaux des données de l'estimation par noyaux.



(a)



(b)

Figure 4.7 : Représentation des données : (a) données originales, (b) Echantillons tirés de l'estimation par noyaux

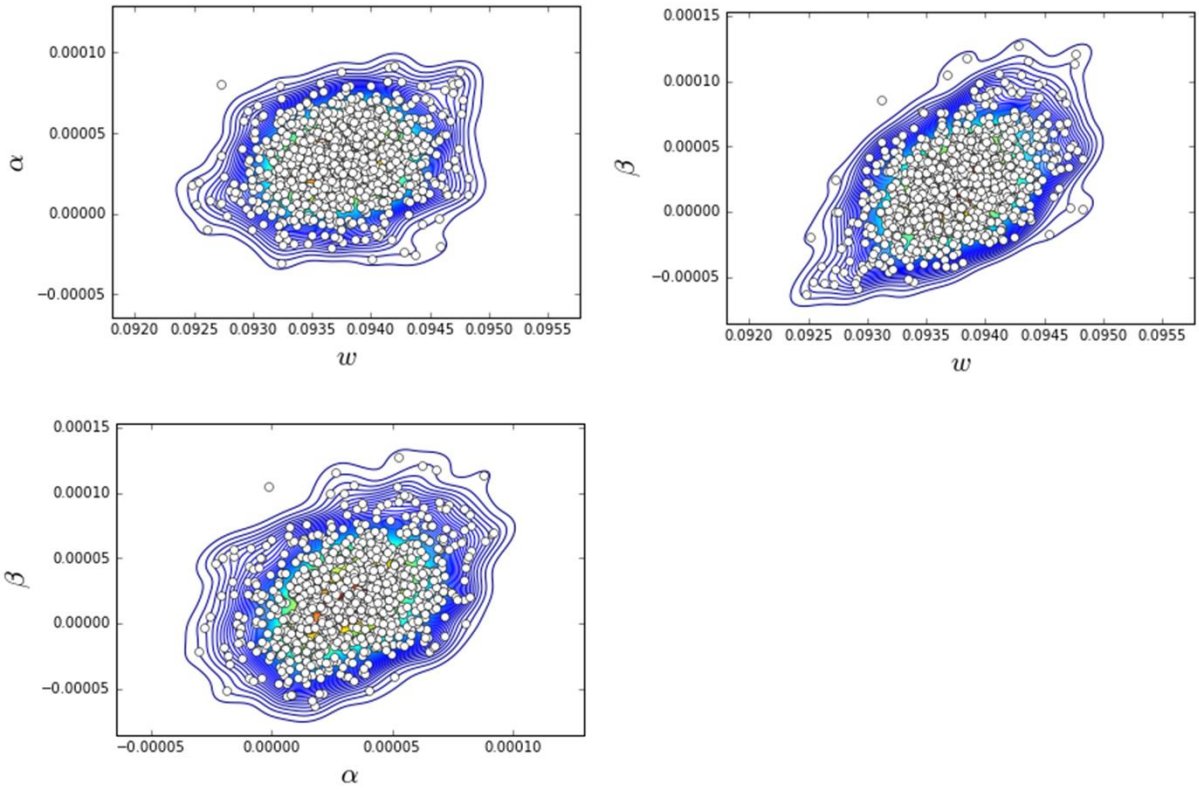


Figure 4.8 : Lignes de niveaux des données de l'estimation par noyaux comparées aux points des données originales

Il est important de remarquer que le temps total des simulations présenté dans le Tableau 4.4, dans le cas de la méthode d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste, considère à la fois le temps de la simulation de MC préliminaire lancée pour déterminer les données originales, le temps pour déterminer la fonction de densité de probabilité jointe des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ et générer de nouveaux échantillons, et finalement le temps consommé pour réaliser l'analyse des tolérances. Ainsi, T_1 représente le temps de la simulation de MC préliminaire pour déterminer les données originales et le temps utilisé pour générer les échantillons des composantes de $\mathbf{G}^{*}_{1a/2a,M}$ en se basant sur l'estimation par noyaux ; T_2 représente le temps de l'analyse des tolérances en basant sur les échantillons tirés de l'estimation par noyaux.

Tableau 4.4 : Résultats de la simulation F ~ N(2.5x10-3, 10-4), Nmc = 100000

Simulation	**Maillage**		
	100	2500	10000
Analyse des tolérances classique	P_{nf} = 1.72x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}
Temps total	10h36min	14h06min	46h32min
Analyse des tolérances utilisant les données de l'estimation par noyaux	P_{nf} = 1.73x10^{-2} P_{na} = 2.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}
T_1	13min	47min	3h36min
T_2	9h13min	9h39min	9h16min
Temps total (T_1+T_2)	9h26min	10h26min	12h52min

Des résultats de ce Tableau 4.4 et de ceux situés dans l'Annexe E, certaines conclusions peuvent être tirées. Le premier constat concerne la réduction du temps de calcul lorsque les données du modèle probabiliste sont utilisées dans l'analyse des tolérances. Le temps de calcul au fur et à mesure que le maillage est raffiné. En effet, on a une réduction de 14.50% pour le maillage à 100 points de discrétisation, de 33.55% pour le maillage à 2500 points de discrétisation et de 73.24% pour le maillage à 10000 points de discrétisation. Par conséquent, la méthode d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste permet de gagner en temps de calcul comparativement à la méthode classique d'analyse des tolérances.

Le deuxième constat concerne les probabilités de défaillance calculées en fonction des différents types de maillage. On peut remarquer que les probabilités de défaillance d'assemblage calculées pour les maillages de 2500 et 10000 points de discrétisation sont similaires tandis qu'il y a de petites différences par rapport aux probabilités de défaillance d'assemblage de 100 points de discrétisation. La même remarque peut être faite pour les résultats concernant les probabilités de défaillance fonctionnelle. Ceci signifie qu'au fur et à mesure que le nombre de points de discrétisation des surfaces augmente, les probabilités convergent vers des valeurs de référence. Ainsi, la question sur le choix du nombre de points de discrétisation pour réaliser l'analyse des tolérances est traitée. En se basant sur les résultats

et en considérant les contraintes en termes du temps de simulation et de la précision des probabilités calculées, l'analyse des tolérances utilisant un maillage de 2500 points peut être prise comme le bon compromis et uniquement en considérant les types de maillage et les types d'amplitudes des défauts de forme des études.

Le troisième constat est à propos de l'impact des distributions des amplitudes des défauts de forme sur les probabilités de défaillance calculées. Pour les deux distributions (gaussienne et uniforme) et pour les types de maillages, les probabilités de défaillance d'assemblage augmentent au fur et à mesure que les amplitudes des défauts de forme augmentent. Ces résultats sont en accord avec le retour d'expérience des ingénieurs. En effet, quand les amplitudes des défauts de forme augmentent, les surfaces du contact *1a/2a* sont plus sujettes à des interpénétrations qui peuvent empêcher l'assemblage du système mécanique. Les probabilités de défaillances d'assemblage sont donc très sensibles aux distributions choisies des défauts de forme. Cependant, il est à remarquer que les variations des distributions des amplitudes des défauts de forme ont un impact réduit sur les probabilités de défaillance fonctionnelle.

Le dernier constat concerne le temps de calcul des simulations. Les temps de calcul augmentent au fur et à mesure que le maillage devient plus fin. En effet, quand le maillage devient de plus en plus fin, le nombre de contraintes impliquées dans l'analyse des tolérances augmente aussi et cela explique les efforts numériques qui sont importants.

4.3 Assemblage d'une pompe PIERBURG

Cette section s'intéresse à l'assemblage d'une pompe de voitures fabriquée par la société PIERBURG. Cette étude concerne uniquement la vérification du problème d'assemblage. Aucune caractéristique fonctionnelle n'existe pour cette pompe car son assemblage signifie qu'elle est fonctionnelle.

Les boucles topologiques associées à la condition d'assemblage impliquent 7 pièces, et seules ces dernières sont prises en compte lors de la modélisation. La simplification du système mécanique de la pompe revient à un axe sur lequel sont positionnés une roue, un disque, une flasque mobile et 3 différentes goupilles situées entre le disque et la flasque mobile. Il s'agit de trouver une configuration des jeux entre ces pièces pour qu'elles s'assemblent. La flasque mobile est considérée comme fixée à l'axe. Ainsi, le jeu entre la flasque mobile et l'axe est nul.

4.3.1 Formulation et modélisation du problème d'assemblage

Les différentes étapes suivies pour étudier la pompe sont décrites dans cette sous-section. Plus d'information sur les équations et contraintes développées se trouvent dans l'Annexe F.

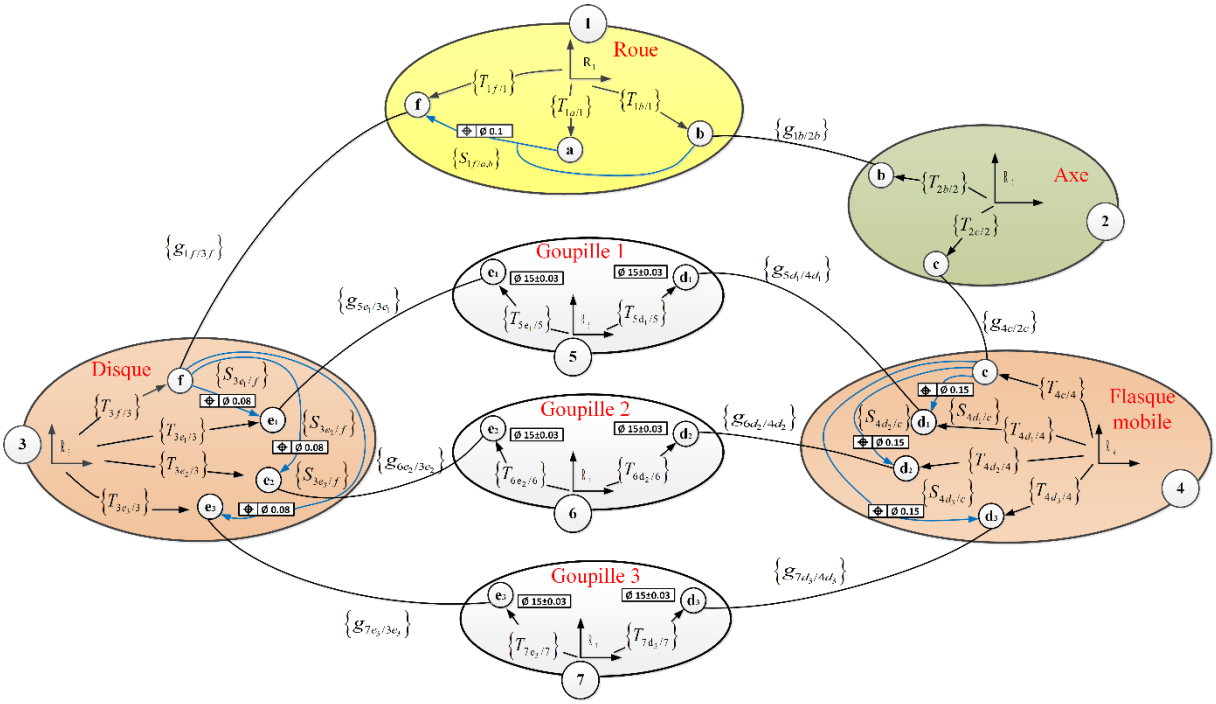


Figure 4.9 : Graphe de liaisons de la pompe PIERBURG

Les différentes surfaces : en se basant sur les relations entre les différentes pièces de la pompe, plusieurs types de surface peuvent être déduits :

- Surfaces circulaires planes : *1f, 3f*
- Surfaces cylindriques : *1b, 2b*
- Surfaces sphériques : $5e_1$, $3e_1$, $6e_2$, $3e_2$, $7e_3$, $3e_3$, $4d_1$, $5d_1$, $6d_2$, $4d_2$, $7d_3$, $4d_3$.

Un torseur écart est écrit pour chaque modèle de substitution des surfaces précitées ainsi que les écarts intrinsèques pour les diamètres des surfaces cylindriques. Il est à noter que les surfaces sphériques sont considérées comme sans défauts de forme afin de simplifier les études. Les torseurs jeux pour les contacts (liaisons rotules) entre les goupilles et le disque, sont développés comme ceux d'un contact glissant. Cependant, aucune simulation locale n'est conduite sur ces contacts pour des raisons de simplifications et aussi parce que les défauts élémentaires des sphères n'ont pas été développés dans les travaux.

Boucles topologiques : le graphe des liaisons de la pompe est présenté sur la Figure 4.9. Ce système mécanique comporte sept pièces pour neuf liaisons mécaniques. Le nombre total de

boucles topologiques peut être calculé : $N_{boucles} = 9 - 7 + 1 = 3$. Ainsi, 18 équations de compatibilité sont développées (six pour chaque boucle).

Liaisons géométriques : cette pompe est composée de plusieurs liaisons mécaniques qui doivent assurer son assemblage :

- Liaisons circulaires planes *1f/3f* : c'est un contact fixe qui est l'objet de la simulation locale. Une optimisation est conduite à chaque itération de MC afin de déterminer les composantes de son vecteur $\mathbf{G}^*_{1f/3f,M}$ assurant la meilleure configuration d'assemblage sans interpénétrations. Les surfaces de contact sont discrétisées et le nombre de points du maillage doit être choisi avec soin afin de trouver un bon compromis entre le temps de calcul et la convergence de la méthode vers la probabilité de référence.
- Liaison pivot glissant *1b/2b* : ce contact est considéré comme flottant. Des contraintes d'interface linéaires sont développées sur un maillage de la surface composé des paramètres N_c (le nombre total de cercle de discrétisation) et N_d (le nombre total d'angles de discrétisation). Le nombre total de points discrétisation sur un cylindre est donné par : N_c x N_d .
- Liaison fixe *2c/4c* : ce contact est considéré comme fixe car on considère que la flasque mobile (surface *4c*) est montée et fixée sur l'axe (surface *2c*). Les composantes du torseur jeu de ce contact sont nulles et ne participeront pas aux développements des contraintes.
- Liaisons rotules $3e_1/5e_1$, $3e_2/6e_2$, $3e_3/7e_3$, $4d_1/5d_1$, $4d_2/6d_2$, $4d_3/7d_3$: ces contacts sont considérés comme des contacts glissants et sont étudiés avec des surfaces parfaites. Les torseurs jeux sont développés en considérant les contacts comme sans défauts de forme et aucune optimisation n'est réalisée afin de déterminer les autres composantes des torseurs jeux.

Formulation du problème d'assemblage : ce système mécanique ne comporte pas de condition fonctionnelle car une fois que la pompe est assemblée, elle est fonctionnelle. Ainsi, l'accent plutôt mis sur l'assemblage de la pompe où une configuration des jeux doit être déterminée pour qu'elle s'assemble.

Une première simulation locale est menée sur les composantes du vecteur $\mathbf{G}^*_{1f/3f,M}$ du contact fixe *1f/3f* :

$$\mathbf{G}^{*}_{1f/3f,M} = \begin{Bmatrix} u_{1f3f,M} \\ v_{1f3f,M} \\ w_{1f3f,M} \\ \alpha_{1f3f} \\ \beta_{1f3f} \\ \gamma_{1f3f} \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

L'optimisation qui est réalisée sur ce contact à chaque itération de le simulation de MC, permet de déterminer les valeurs des six composantes de $\mathbf{G}^{*}_{1f/3f,M}$. La formulation mathématique de cette optimisation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{G}^{*}_{1f/3f,M}}{\text{Min}} \; f\left(u_{1f3f,M}, v_{1f3f,M}, w_{1f3f,M}, \alpha_{1f3f}, \beta_{1f3f}, \gamma_{1f3f}\right) \\ \text{s. c.} \;\; \forall\left(\mathbf{M}^{R}_{1f,j}, \mathbf{M}^{R}_{3f,j}\right) \in \left(S_{1f}, S_{3f}\right), \; \mathbf{M}^{R}_{1f,j}\mathbf{M}^{R}_{3f,j}.\mathbf{n} \geq 0, \; j \in \left[1,...,N_p\right] \end{cases} \tag{4.8}$$

où N_p représente le nombre total de points de discrétisation sur l'une des surfaces *1f* ou *3f* (N_p doit être le même pour les deux surfaces), S_{1f} et S_{3f} sont les surfaces réelles des surfaces nominales *1f* et *3f*, $\mathbf{n}$ représente le vecteur normal de la surface réelle S_{1f}, $\mathbf{M}^{R}_{1f,j}$ et $\mathbf{M}^{R}_{3f,j}$ sont des points appartenant à la même normale et appartiennent respectivement aux surfaces S_{1f} et S_{3f}.

Les six valeurs des composantes du torseur jeu qui sont déterminées par cette optimisation, sont introduites dans les équations de compatibilité.

Ensuite une optimisation générale est réalisée afin de déterminer les composantes des torseurs jeux des liaisons rotules et des autres contacts flottants. Le problème d'optimisation pour l'assemblage peut s'écrire mathématiquement comme suit :

$$R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right) = \begin{cases} \underset{\tilde{\mathbf{G}}' \in \mathbf{R}^{17}}{\text{Min}} \quad \text{f}\left(\tilde{\mathbf{G}}'\right) \\ \textit{sous} \quad \left[C_{omp}\right]_{[18\text{x}17]} . \left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[17\text{x}1]} = \left[\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{G}^{*(k)}_{1f/3f}\right] \qquad \forall\, k = \left\{1,...,N_{mc}\right\} \\ \qquad \left[C_{\text{Interface}}\right]_{\left[\left(N_c \text{x} N_d\right)\text{x}17\right]} . \left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[17\text{x}1]} \leq \left[\mathbf{X}^{(k)}_{\text{Intrinsèque}} + \mathbf{F}^{(k)}\right] \end{cases} \tag{4.9}$$

La formalisation mathématique de la probabilité de non-assemblage est donnée par :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{na}} = \mathrm{Prob}\left(E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\right) \tag{4.10}$$

où $E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ est l'évènement suivant : « Pour des vecteurs $\mathbf{X}^{(k)}$ et $\mathbf{F}^{(k)}$ tirés, il n'existe pas de vecteur jeu $\tilde{\mathbf{G}}^{'} \in \mathbf{R}^{17}$ tel que $R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ ait une solution ».

4.3.2 Résultats

L'étude de cette pompe concerne uniquement le calcul de la probabilité de défaillance d'assemblage. Les résultats concernant ce système mécanique peuvent être classés en deux catégories. La première catégorie porte sur la comparaison entre la méthode classique de l'analyse des tolérances et celle basée sur le modèle probabiliste. La seconde catégorie concerne des simulations qui montrent l'impact de l'écart nominal entre les diamètres du contact *1b/2b* (d_{1b}, d_{2b}) et l'impact de l'augmentation d'une translation d'une goupille suivant l'axe z, sur la probabilité de défaillance d'assemblage.

Les résultats de la première catégorie sont montrés dans le Tableau 4.5. On peut remarquer en effet la réduction en temps de calcul lorsque la méthode d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste est utilisée. Rappelons que cette simulation a été réalisée en choisissant un nombre d'échantillons égal à $N_{KDE} = 10000$ pour la simulation de MC préliminaire et l'écart nominal entre les deux diamètres (d_{1b}, d_{2b}) est égal à *0.01 mm*.

Tableau 4.5 : Comparaison entre les deux méthodes d'analyse des tolérances pour la pompe PIERBURG

Ecart nominal entre les diamètres d_{1b} et d_{2b}	**0.01mm**	
Méthode d'analyse des tolérances (N_{mc} = 100000)	**Méthode classique**	**Modèle probabiliste (N_{KDE} = 10000)**
$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{na}}$	$2.2\mathrm{x}10^{-3}$	$2.10\mathrm{x}10^{-3}$
Temps	16h25min	3h22min

Le Tableau 4.6 montre les résultats concernant les simulations de la seconde catégorie. La probabilité de défaillance d'assemblage diminue lorsqu'augmente l'écart entre les diamètres des cylindres *1b* (d_{1b}) et *2b* (d_{2b}) du contact flottant *1b/2b*. Ensuite, pour montrer que le modèle développé pour cette pompe respecte les réalités mécaniques, la translation d'une goupille

suivant l'axe *z* a été augmentée de *0.5 mm*. Cette augmentation est faite afin de voir si elle a un impact sur la probabilité de défaillance d'assemblage calculée. En effet, comme le montrent les résultats du Tableau 4.7, lorsque la translation d'une goupille suivant l'axe *z* augmente, la probabilité de défaillance d'assemblage augmente aussi. Ce résultat est en conformité avec les réalités mécaniques car lorsque la translation augmente, cela a des effets sur les autres pièces du système mécanique de la pompe. L'assemblage est de plus en plus difficile à obtenir. Ces résultats ont alors permis de valider les méthodes d'analyse des tolérances sur ce cas industriel.

Tableau 4.6 : Résultats en fonction des différents écarts nominaux des diamètres

Ecart nominal entre les diamètres d_{1b} et d_{2b}	**0.01mm**	**0.05mm**
Méthode d'analyse des tolérances (N_{mc} = 100000)	**Modèle probabiliste (N_{KDE} = 10000)**	
$\tilde{P}_{na}$	2.10×10^{-3}	9.90×10^{-4}
Temps (s)	3h22min	3h20min

Tableau 4.7 : Résultats en fonction des écarts nominaux des diamètres et de la translation

Ecart nominal entre les diamètres d_{1b} et d_{2b} / translation $w_{7e_3 7} + 1$	**0.01mm/** $w_{7e_3 7} + 0.5$	**0.05mm/** $w_{7e_3 7} + 0.5$
Méthode d'analyse des tolérances (N_{mc} = 100000)	**Modèle probabiliste (N_{KDE} = 10000)**	
$\tilde{P}_{na}$	1.21×10^{-1}	1.08×10^{-1}
Temps	3h24min	3h23min

4.4 Conclusion

Cette section décrit l'application des différentes méthodes d'analyse des tolérances développées sur des cas d'étude. Les probabilités de défaillance fonctionnelle et d'assemblage ont été calculées pour le premier système mécanique qui concerne un moteur électrique et uniquement la probabilité de défaillance d'assemblage a été calculée pour le second système mécanique qui concerne une pompe de la société PIERBURG.

L'étude du moteur électrique a permis tout d'abord de comparer la méthode classique d'analyse des tolérances sans défauts de forme et avec celle considérant les défauts de forme. La méthode classique d'analyse des tolérances désigne la méthode où des simulations locales sont effectuées sur les contacts fixes et glissants à chaque itération de MC afin de déterminer les composantes de leurs torseurs jeux et qui sont par la suite introduites dans les contraintes de l'optimisation générale qui est couplée à la simulation de MC. Les résultats montrent en effet les impacts des défauts de forme sur les probabilités de défaillance calculées et aussi sur le temps de simulation. Ensuite, une seconde comparaison a été faite entre la méthode classique d'analyse des tolérances à celle basée sur la méthode probabiliste des composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants. Les résultats montrent que la méthode d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste permet de réduire les temps de calculs. Une autre étude a été aussi réalisée pour déterminer le meilleur maillage permettant d'obtenir des probabilités de défaillance stables.

Les études sur la pompe de PIERBURG permettent de valider les méthodes développées sur un cas industriel. En effet, les résultats trouvés ont permis de corroborer les phénomènes physiques de la mécanique quant à l'augmentation de la probabilité de défaillance d'assemblage lorsque l'intervalle des tolérances est réduit et à la diminution de la probabilité de défaillance d'assemblage lorsque l'intervalle des tolérances augmente.

Conclusion et perspectives

Dans le cadre du projet AHTOLAND, les objectifs sont de développer une méthode de modélisation des imperfections de fabrication et des techniques plus réalistes et robustes de modélisation du comportement géométriques des systèmes mécaniques. Les méthodes développées doivent être compatibles avec les méthodes probabilistes déjà développées dans le projet précédent. Ainsi, les défauts de fabrication des pièces doivent être mis développés sous une forme probabiliste. Les résultats sur la qualité des systèmes mécaniques fabriqués doivent être exprimés en fonction des indicateurs que représentent les probabilités de non-assemblage et de défaillance fonctionnelle. Le comportement réel d'un système mécanique doit être modélisé avec précision, permettant ainsi d'apporter des solutions de modélisation aux comportements géométriques des différents types de contacts des systèmes mécaniques complexes. Afin de relever les défis de cette thèse, les études ont été subdivisées en trois axes de recherche :

- Modélisation des défauts de forme des pièces de systèmes mécaniques
- Modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique en prenant en compte les différents types de contact
- Proposition d'une méthode d'analyse des tolérances prenant en compte les différents développements.

Dans un premier temps, le premier chapitre retrace les étapes de l'analyse des tolérances ainsi que les techniques de résolution proposées dans les travaux précédents. Ces rappels sont utiles afin de choisir la technique de résolution la plus appropriée à combiner avec la modélisation des imperfections de fabrications i.e. les défauts de forme. La technique d'analyse des tolérances qui consiste à combiner une méthode d'optimisation à une simulation de Monte Carlo proposée par Qureshi *et al.* (2012), est présentée. Aussi, la méthode de résolution de problèmes fonctionnels basée sur la méthode FORM est décrite. Pour la suite des travaux de thèse, la méthode d'optimisation combinée à la simulation de Monte Carlo est la technique de résolution choisie.

Ensuite, l'accent est mis sur la méthode de modélisation des défauts de forme qui est compatible avec les techniques probabilistes de l'analyse des tolérances. Différentes techniques de

modélisations des défauts de forme existent dans la littérature et des comparaisons s'avèrent importantes afin de les départager au meilleur des cas et au pire des cas, proposer une nouvelle méthode. Les comparaisons ont montré que les différentes méthodes de la littérature ne respectent pas tous les critères préétablis. Ainsi, nous proposons la méthode de la Décomposition Modale Métrique (DMM) afin de pallier ce problème. Elle est la seule méthode qui respecte les différents critères de comparaison établis. C'est une méthode qui permet d'obtenir la surface réelle en effectuant une somme pondérée des défauts élémentaires des classes de surface par leur amplitude respective. Les défauts élémentaires ainsi que leurs amplitudes devant être utilisées dans l'analyse des tolérances dépendent du procédé de fabrication et des expériences tirées des fabrications. Une loi qui caractérise les amplitudes des défauts de forme doit être trouvée et les formes usuelles défectueuses doivent être utilisées comme défauts élémentaires. L'un des avantages de cette méthode est que les amplitudes ont un sens physique car les défauts élémentaires ont été normés et les amplitudes peuvent être exprimées dans une unité de mesure de longueur (e.g. en *millimètre*). Nous avons appliqué la DMM dans le cadre de la fabrication additive et des simulations d'assemblage ont été réalisées et qui ont permis de la valider (Dantan et al., 2017). La prochaine étape est de trouver un moyen afin d'intégrer cette méthode de modélisation des défauts de forme dans la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique.

L'intégration de ces défauts de forme est effectuée à l'aide d'un vecteur modal dont les amplitudes peuvent être modélisées par une loi de probabilité. Ensuite, une différenciation est apportée quant au comportement géométrique des différents contacts d'un système mécanique complexe. Afin d'assurer une modélisation effective et réelle des contacts fixes et glissants, nous avons proposé une simulation locale portant sur l'optimisation des composantes de leur torseur jeu respectif à chaque itération de Monte Carlo. Ensuite, pour la modélisation du comportement géométrique des contacts flottants, nous avons proposé le développement d'un ensemble de contraintes d'interface qui empêchent l'interpénétration au niveau de ces contacts. Toutes ces nouvelles modélisations sur le comportement géométrique des contacts sont ajoutées à la méthode antérieure de Qureshi *et al.* (2012) et constituent la méthode classique de l'analyse des tolérances évoquée après tout au long de ce manuscrit. Toutefois, pour pouvoir réaliser toutes ces optimisations, il faut avoir un algorithme efficace et fiable de résolution des problèmes d'optimisation. Une solution est apportée en réalisant une série de simulation de comparaison des algorithmes existants de résolution des problèmes d'optimisation afin de

choisir le meilleur. Le choix a été porté sur l'algorithme basé sur la méthode modifiée du simplexe (Meyer, 2011).

Un inconvénient de la simulation de Monte Carlo est le temps de calcul important. Ce temps de calcul étant augmenté avec les nouvelles modélisations : l'ajout d'une nouvelle optimisation à chaque itération de la simulation de Monte Carlo et l'augmentation du nombre de contraintes d'interface. Il s'avère nécessaire de proposer une méthode permettant de réduire le temps de simulation. Ainsi, nous avons proposé la méthode d'analyse des tolérances basées sur le modèle probabiliste des torseurs jeux des contacts fixes et glissants. Ce modèle probabiliste est obtenu grâce à l'utilisation de la méthode de l'estimation par noyaux. En effet, l'estimation par noyaux est appliquée pour déterminer la fonction de densité de probabilité jointe des composantes d'un torseur jeu d'un contact fixe ou glissant et ensuite une technique de création de nouveaux échantillons est employée. Une simulation préliminaire de Monte Carlo sur l'optimisation des composantes du torseur jeu d'un contact fixe ou glissant est effectuée un certain nombre de fois (N_{KDE}) afin de déterminer les données originales. La méthode de l'estimation par noyaux est par la suite appliquée sur ces données originales afin de déterminer les nouveaux échantillons à utiliser dans l'analyse des tolérances. Nous avons pu montrer par des simulations que le nombre N_{KDE} peut être choisi inférieur par rapport au nombre N_{mc} de la simulation générale de Monte Carlo. L'utilisation de ce nombre réduit N_{KDE} permet de réduire le temps de calcul car dans la méthode classique, les nombres N_{KDE} et N_{mc} sont les mêmes. Nous avons également proposé d'autres simulations qui nous permettent de déterminer le degré de maillage afin d'obtenir un compromis entre le temps de calcul et la précision des probabilités estimées. Grâce à ce maillage idéal, les probabilités estimées sont stables. Il est important de préciser que ce maillage idéal a été déterminé en fonction des amplitudes de défauts de forme données. Le changement de ces amplitudes de défauts de forme implique le changement du choix de maillage. La méthode d'analyse des tolérances basée sur le modèle probabiliste est une intéressante méthode qui est compatible avec la méthode FORM (Dumas et al., 2015a). Leur combinaison pourrait constituer une nouvelle méthode efficace et rapide pour l'analyse des tolérances des systèmes hyperstatiques.

Les deux différentes méthodes proposées d'analyse des tolérances ont été appliquées à deux systèmes mécaniques différents : un moteur électrique et une pompe de la société PIERBURG. Les résultats de ces cas d'études ont permis tout d'abord de valider les méthodes proposées et ensuite de corroborer tous les avantages déduits.

Perspectives

Les méthodes proposées dans ces travaux de thèse ont apporté de nombreuses avancées afin de rendre la modélisation du comportement géométrique du système mécanique et la technique d'analyse des tolérances beaucoup plus robustes et réalistes. Cependant, d'autres facteurs peuvent être ajoutés afin d'améliorer les différentes propositions de ces travaux de thèse :

- La méthode de Décomposition Modale Métrique a été appliquée dans cette thèse uniquement sur les surfaces planes et cylindriques. Il est important d'envisager l'étendre à toutes les autres classes de surfaces (sphère, tore, quelconque, etc.). Concernant les surfaces sphériques, on peut envisager une adaptation des harmoniques sphériques (Zhou et al., 2004) pour les modéliser.
- Les techniques d'analyse des tolérances proposées sont basées sur une hypothèse qui est la non-considération des déformations locales qu'on peut observer sur certaines pièces mécaniques. De nombreux études ont déjà été réalisés dans la littérature pour pallier ce problème (Hu et al., 1999; Liu et al., 2018). Une première approche serait de voir comment intégrer les méthodes de ces travaux dans les méthodes d'analyse des tolérances proposées dans cette thèse. De plus, dans ces travaux de thèse nous avons proposé une modélisation des contraintes d'interface des contacts flottants (Eq. (2.16)). Une seconde approche serait d'étendre cette modélisation pour prendre en compte de nouvelles variables libres qui représenteront les déformations des surfaces sous l'action d'une force extérieure. Nous obtiendrons une modélisation sous la forme :

$$\mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M_{k,j}^N}} \cdot \mathbf{n}_1 \leq \Delta g + f_{1,M_{k,j}^N} + f_{2,M_{i,j}^N} + D_e \qquad \forall\ \mathrm{e} \in \left\{1,\ldots,N_{\mathrm{Pts_Maillage}}\right\} \tag{5.1}$$

où D_e représente les nouvelles variables libres de la méthode d'optimisation et modélisent les déformations à chaque point du maillage, $N_{\mathrm{Pts_Maillage}}$ le nombre total de points du maillage de la surface du contact.

Une première simulation Eléments Finis (EF) dans un logiciel comme ABAQUS, de la pièce sous l'action de la force extérieure peut permettre de déterminer les déformations aux différents nœuds du maillage. La méthode de la régression multilinéaire peut alors être appliquée afin de faire correspondre le maillage et les déformations EF à un nouveau maillage et déformations des nœuds informatiques. Les intervalles de variations des déformations à chaque point du maillage sont par la suite déduits et

intégrés à la méthode d'optimisation de l'analyse des tolérances. L'analyse des tolérances est donc menée en considérant les déformations à chaque de discrétisation informatique comme des inconnus de la technique d'optimisation associée à la simulation de Monte Carlo.

Bilan

Apports :

- Proposition d'une méthode de modélisation des défauts de forme et intégration de ces défauts dans le processus de l'analyse des tolérances. Cette méthode permet de prendre en compte les défauts d'ondulations observés sur les pièces mécaniques fabriquées.
- Proposition d'une méthode de modélisation du comportement géométrique de systèmes mécaniques hyperstatiques en prenant en compte les différents types de contacts et aussi les défauts de forme.
- Modification de la méthode de l'analyse des tolérances qui combine la simulation de Monte Carlo à une technique d'optimisation. Cette méthode a été modifiée afin de prendre en compte le comportement géométrique des différents types de contacts et les défauts de forme.
- Développement d'une approche basée sur les modèles probabilistes des jeux des contacts fixes et glissants afin de réduire le temps de calcul. Les modèles probabilistes sont obtenus par l'utilisation de la méthode de l'estimation par noyaux.

Publications dans les revues :

- Homri, L., Goka, E., Levasseur, G., et Dantan, J.-Y. (2017). Tolerance analysis — Form defects modeling and simulation by modal decomposition and optimization. Comput.-Aided Des. 91, 46–59.: *Publié.*
- Dantan, J.-Y., Huang, Z., Goka, E., Homri, L., Etienne, A., Bonnet, N., et Rivette, M. (2017). Geometrical variations management for additive manufactured product. *CIRP Ann. - Manuf. Technol.* 161-164 : *Publié.*
- E. Goka, Homri, L., P. Beaurepaire, J-Y Dantan, (2018). Statistical tolerance analysis of over-constrained mechanical assemblies with form defects considering contact types, *J. Comput. Inf. Sci. Eng.*, 021010-1 – 021010-13 : *Publié.*
- E. Goka, P. Beaurepaire, L. Homri, J-Y Dantan, (2019). Probabilistic-based approach using Kernel Density Estimation for gap modeling in a statistical tolerance analysis, *Mech. Mach. Theory*. 139, 294-309 : *Publié.*

Publications dans les conférences :

- Goka, E., Homri, L., Beaurepaire, P., Dantan, J.-Y. (2017). Geometrical variation simulation for assembly with form defects. *ASME 2017 Int. Mech. Eng. Congr. Expo. Advanced Manufacturing*, V002T02A099.: *Publié*.
- Homri, L., Beaurepaire, P., Dumas, A., Goka, E., Gayton, N., et Dantan, J.-Y. (2018). Statistical Tolerance Analysis Technique for Over-constrained Mechanical Systems. *Procedia CIRP* 75, 232–237.: *Publié*.

Annexe A : Table des notations

A.1 Notations générales

$\bigcap$ et $\bigcup$	Intersection et Union
V	Vecteur colonne
V_i	i^{ème} élément du vecteur **V**
$\forall$	Pout tout
MC	Monte Carlo
CAO	Conception Assistée par Ordinateur

A.2 Notations relatives à l'analyse des tolérances

X	Ensemble des écarts géométriques
F	Ensemble des amplitudes des défauts de forme
$\mathbf{G}^*$	Ensemble des composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants
$\mathbf{G}'$	Ensemble des composantes des torseurs jeux des contacts flottants
G	Ensemble des composantes des torseurs jeux des contacts fixes, glissants et flottants
$\left\{g^*_{kj/ij}\right\}_M$	Torseur jeu d'un contact fixe ou glissant entre les surfaces *kj* et *ij* et exprimé au point *M*
$\left\{g'_{kj/ij}\right\}_M$	Torseur jeu d'un contact flottant entre les surfaces *kj* et *ij* et exprimé au point *M*
$\left\{g_{kj/ij}\right\}_M$	Torseur jeu d'un contact sans la prise en compte des défauts de forme
$\mathbf{G}^*_{kj/ij,M}$	Vecteur contenant les composantes des déplacements non-cinématiques du torseur jeu du contact fixe ou glissant entre les surfaces *kj* et *ij* et exprimé en un point *M*
$\mathbf{t}_{\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{k,j}}}$	Vecteur contenant les composantes des translations du torseur jeu $\left\{g'_{S_k/S_i}\right\}_{M^N_{kj/ij}}$
n	Vecteur normal d'une surface nominale
C_i	Contrainte d'interface

C_f	Condition fonctionnelle
C_c	Equation de compatibilité
N_c	Nombre de cercle de discrétisation d'un cylindre
N_d	Nombre de point de discrétisation sur un cercle
N_p	Nombre total de points de maillage d'une surface avec défauts de forme
R_f	Problème d'optimisation pour la condition fonctionnelle
R_a	Problème d'optimisation pour la condition d'assemblage

A.3 Notations relatives aux modèles probabilistes

N_{mc}	Nombre total de simulation Monte Carlo
N_{KDE}	Nombre d'échantillon de la simulation de Monte Carlo préliminaire
P_{na}	Probabilité de défaillance d'assemblage
P_{nf}	Probabilité de défaillance de fonctionnalité
u	Variables aléatoires standard Gaussiennes
y	Variables aléatoires de l'estimateur de densité de l'estimation par noyaux
$K(.)$	Fonction centrée du noyau sur une observation
n	Nombre total d'échantillon de variables aléatoires généré grâce à l'estimation par noyaux
h	Paramètre de lissage de l'estimation par noyaux
P	Matrice des échantillons du modèle probabiliste
D	Matrice des échantillons obtenus par la simulation de MC préliminaire (Données Originales)
d	Le nombre de composantes d'un torseur jeu
$X^{(i)}$	Echantillon d'une variable aléatoire

Annexe B

Il existe plusieurs classes de surfaces rencontrées dans les systèmes mécaniques et elles peuvent être regroupées sous les types de surface suivants :

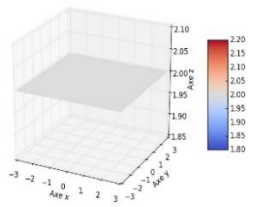
- Plane
- Cylindre (Cylindre intérieur et cylindre extérieur)
- Sphère
- Cône
- Surfaces complexes

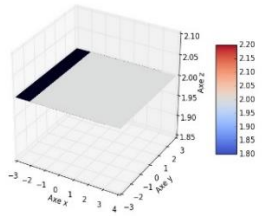
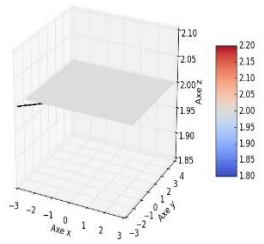
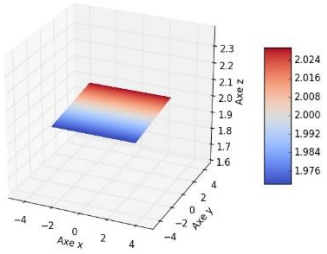
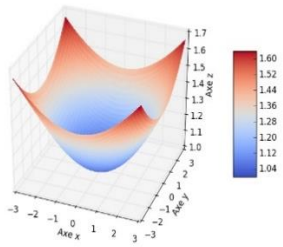
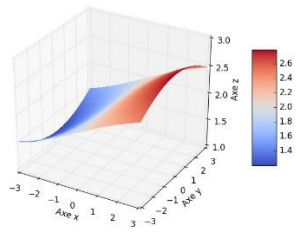
Dans cette annexe, nous présentons seulement les différents défauts élémentaires rencontrées dans le cas des surfaces plane et cylindrique. Une liste non-exhaustive de ces différents défauts élémentaires est résumée dans les tableaux suivants.

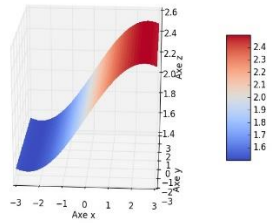
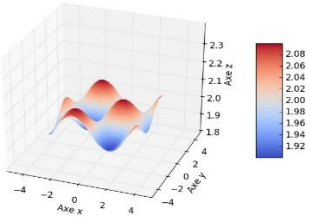
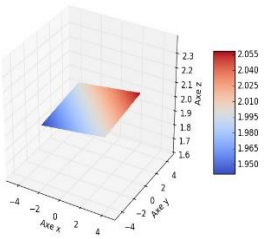
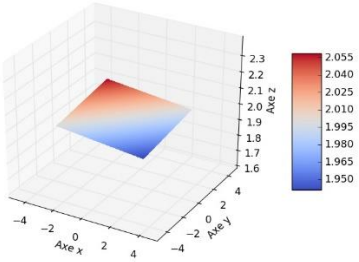
Les défauts élémentaires de ces surfaces sont obtenus grâce à l'ajout des champs modaux aux coordonnées des surfaces nominales. On applique donc ce vecteur modal u à chaque point $M_n\left(x_n, y_n, z_n\right)$ de la surface nominale pour obtenir chaque point $M_f\left(x_f, y_f, z_f\right)$ de la surface avec défauts de forme. L'équation (B.1) résume le processus d'obtention des surfaces déformées.

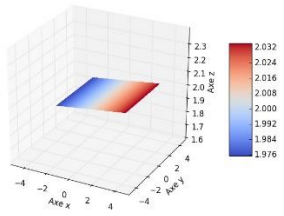
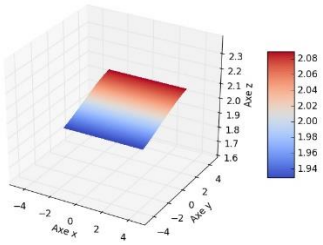
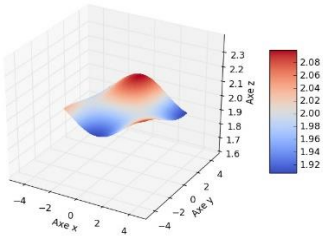
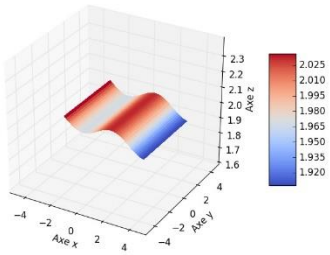
$$\begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x\left(x_n, y_n, z_n\right) \\ u_y\left(x_n, y_n, z_n\right) \\ u_z\left(x_n, y_n, z_n\right) \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

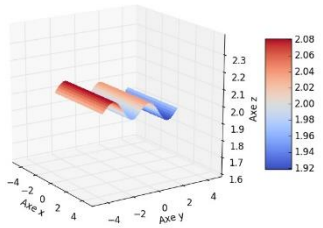
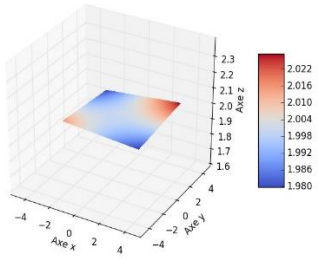
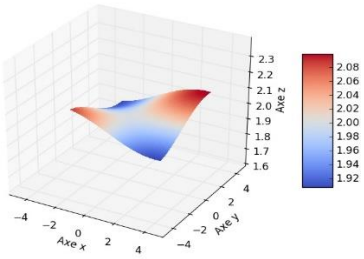
B.1 Défauts de forme élémentaires d'une surface plane

Les vecteurs champs modaux du plan	Déformations correspondantes
Surface nominale du plan	

Translation suivant (Ox)-mode 1 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
Translation suivant (Oy) - mode 2 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	
Mode 3 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10} y \end{bmatrix}$	
Mode 9 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \end{bmatrix}$	
Mode 11 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \end{bmatrix}$	

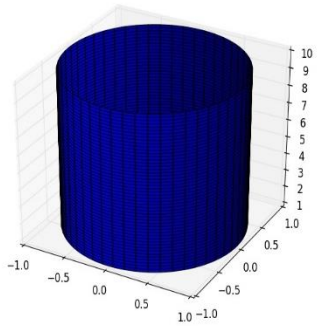
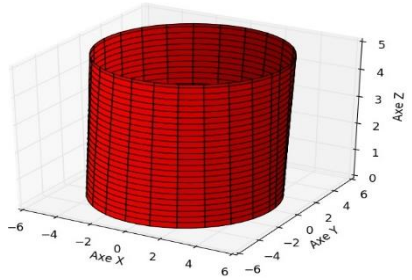
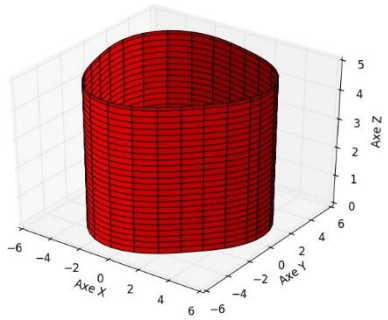
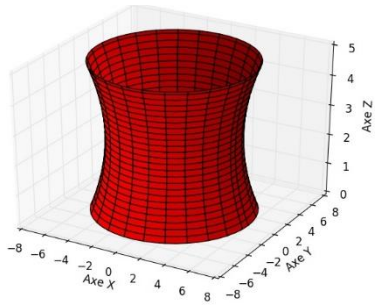
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \end{bmatrix}$	
Mode 17 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{8\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{8\pi y}{L}\right) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}y \end{bmatrix}$	
Mode 4 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ \frac{1}{10}x - \frac{1}{10}y \end{bmatrix}$	

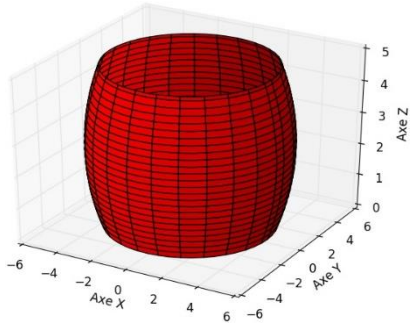
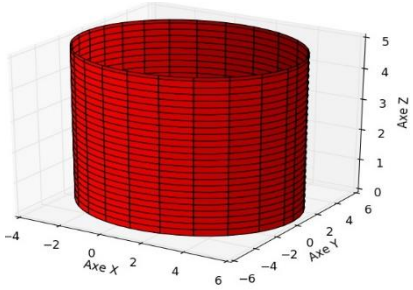
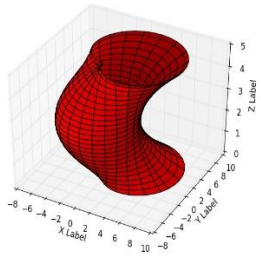
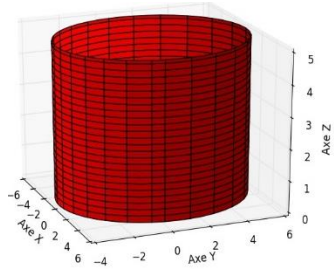
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10}x \end{bmatrix}$	
Mode 3 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{4\pi y}{2L-1}\right) \end{bmatrix}$	
Mode 10 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{6\pi y}{2L-1}\right).\cos\left(\frac{10\pi x}{2L-1}\right) \end{bmatrix}$	
Mode 12 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{6\pi x}{2L-1}\right).\cos\left(\frac{8\pi x}{2L-1}\right) \end{bmatrix}$	

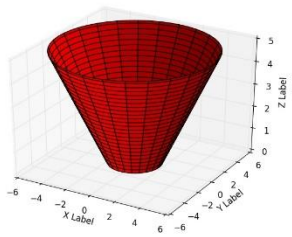
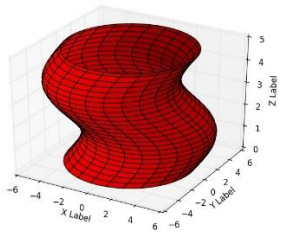
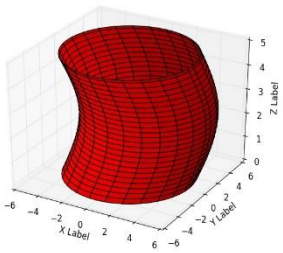
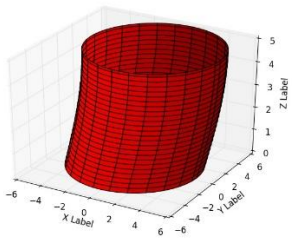
Mode 13 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{6\pi y}{2L-1}\right).\cos\left(\frac{8\pi y}{2L-1}\right) \end{bmatrix}$	
Mode 6 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{2L-1}\right).\cos\left(\frac{2\pi y}{2L-1}\right) \end{bmatrix}$	
Mode 7 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{6\pi x}{2L-1}\right).\cos\left(\frac{6\pi y}{2L-1}\right) \end{bmatrix}$	

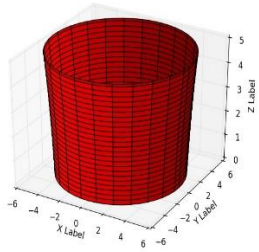
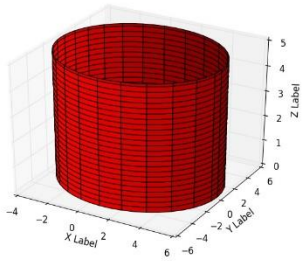
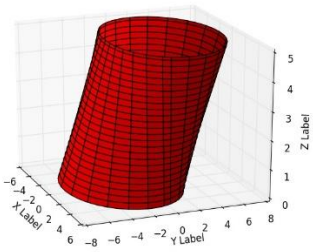
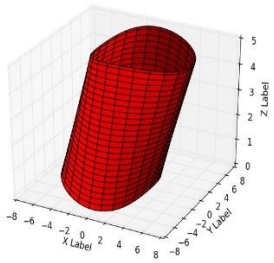
B.2 Défauts de forme élémentaires d'un cylindre

Un paramètre k devant un vecteur modal, est utilisé pour normaliser le vecteur. Rappelons également les déformations des défauts élémentaires ont été amplifiées afin de les faire ressortir.

Vecteurs champs modaux du cylindre	Déformations correspondantes
Surface du cylindre nominal	
$\vec{u} = 2*k\begin{bmatrix} \cos(\theta)*\left[\left(\frac{2}{5}z-1\right)*\sin(\theta)\right] \\ \sin(\theta)*\left[\left(\frac{2}{5}z-1\right)*\sin(\theta)\right] \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = k.\begin{bmatrix} \cos\theta.\left(\cos(n\theta)+\sin(n\theta)\right) \\ \sin\theta.\left(\cos(n\theta)+\sin(n\theta)\right) \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = 4*k\begin{bmatrix} \cos(\theta).\left[\left(\frac{2}{5}z-1\right)^2-1\right] \\ \sin(\theta).\left[\left(\frac{2}{5}z-1\right)^2-1\right] \\ 0 \end{bmatrix}$	

$\vec{u} = k\begin{bmatrix} \cos(\theta).\left[1-4\left(\frac{2}{5}z-1\right)^2\right] \\ \sin(\theta)\left[1-4\left(\frac{2}{5}z-1\right)^2\right] \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = k.\begin{bmatrix} \cos\theta.\cos\theta \\ \sin\theta.\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = k\begin{bmatrix} \cos\theta.(\cos\theta+\sin\theta)\left[4\left(\frac{2}{5}z-1\right)^2-1\right] \\ \sin\theta.(\cos\theta+\sin\theta)\left[4\left(\frac{2}{5}z-1\right)^2-1\right] \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)*\sin(\theta) \\ \sin(\theta)*\sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$	

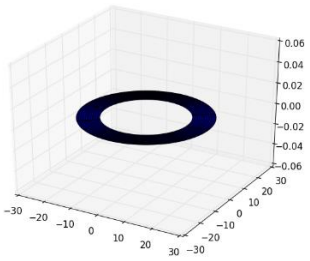
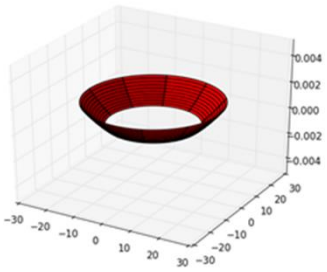
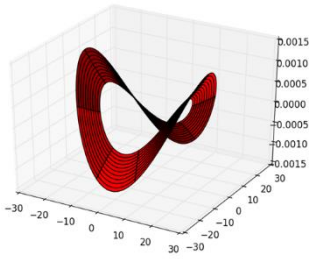
$\vec{u} = k\begin{bmatrix} 2.\cos\theta.\left(\frac{2}{5}z-1\right) \\ 2.\sin\theta.\left(\frac{2}{5}z-1\right) \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi z}{2.h}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi z}{2.h}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$	

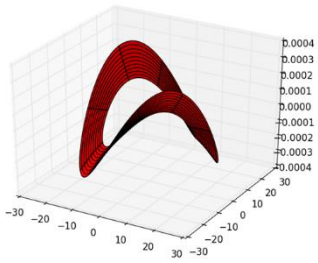
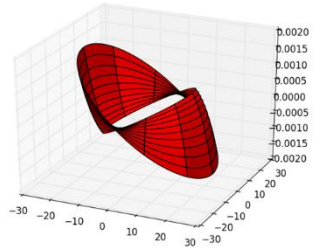
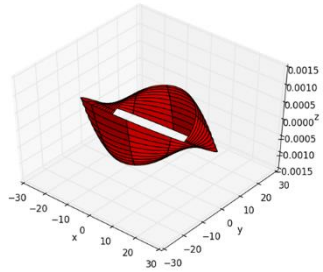
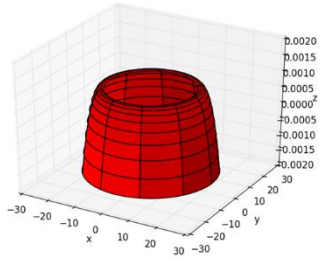
$\vec{u} = k * \begin{bmatrix} \cos\theta . e^{\left(\frac{z}{h}-1\right)} \\ \sin\theta . e^{\left(\frac{z}{h}-1\right)} \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = k . \begin{bmatrix} \cos\theta . \cos\theta \\ \sin\theta . \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = k . \begin{bmatrix} \cos\theta . \left(2\left(\frac{2}{5}z-1\right)\right) . \sin\theta \\ \sin\theta . \left(2\left(\frac{2}{5}z-1\right)\right) . \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = k . \begin{bmatrix} \cos\theta . \left(2\left(\frac{2}{5}z-1\right)\right) . \cos\theta \\ \sin\theta . \left(2\left(\frac{2}{5}z-1\right)\right) . \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	

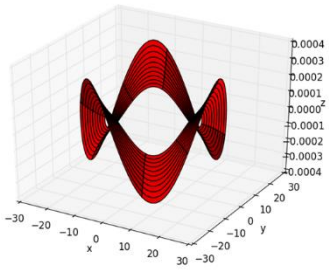
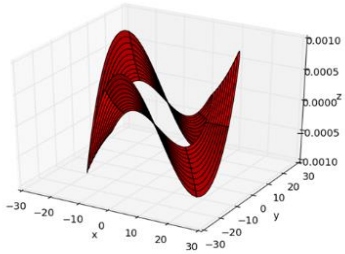
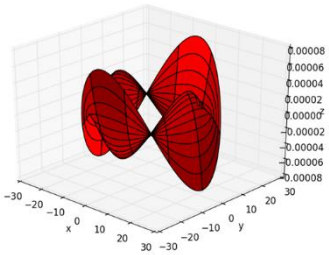
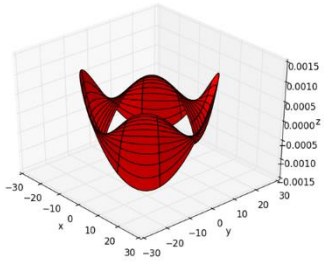
B.3 Défauts de forme élémentaires d'un anneau (surface plane circulaire)

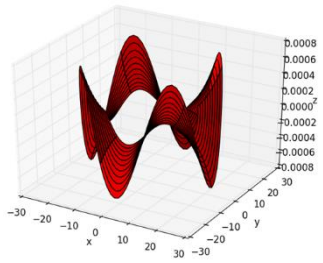
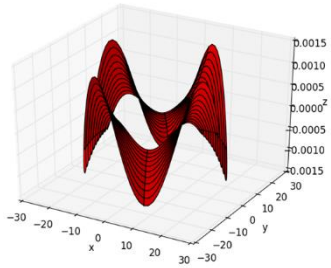
Pour obtenir les défauts de forme élémentaires de cette surface plane circulaire (sous forme d'un anneau), prenons R_1 et R_2 les deux rayons de la surface avec $R_1 < R_2$, et $\theta \in [0, 2\pi]$.

$b_1 \in \left[\frac{R_1}{R_2}, \frac{R_2}{R_2}\right]$ et $c_1 = \theta$.

Vecteurs champs modaux d'un plan circulaire	Déformations correspondantes
Surface nominal d'un plan circulaire	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(2b_1^2 - 1\right) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^2.\cos\left(2c_1\right) \end{bmatrix}$	

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^{\,2}.\sin(2c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (3b_1^{\,2} - 2).b_1.\cos(c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (3b_1^{\,2} - 2).b_1.\sin(c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (6b_1^{\,4} - 6b_1^{\,2} + 1) \end{bmatrix}$	

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^3.\cos(3c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^3.\sin(3c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (4b_1^2 - 3).b_1^2.\cos(2c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (4b_1^2 - 3).b_1^2.\sin(2c_1) \end{bmatrix}$	

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^{\,4}.\cos(4c_1) \end{bmatrix}$	
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1^{\,4}.\sin(4c_1) \end{bmatrix}$	

Annexe C

Description détaillée des algorithmes d'optimisations

C.1 Méthode du simplexe standard

L'algorithme de simplexe est une des méthodes généralement utilisées pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Il existe deux versions de cet algorithme : la méthode de simplexe dite standard où durant l'application de son algorithme le problème reste inchangé et celle dite modifiée où le problème de base est subdivisé en sous-matrices. La méthode du simplexe standard encore appelée la méthode « *full* tableau » (tableau complet en Français) est celle qui est présentée dans cette section C.1. La méthode du simplexe révisé est présentée dans la section C.2 suivante.

En général, du point de vue géométrique, l'ensemble de solution d'un problème de programmation linéaire représente un polytope convexe dans un espace à deux dimensions et un polyèdre dans un espace à trois dimensions. L'objectif de l'algorithme du simplexe à se placer sur une des intersections du polytope par exemple et ensuite à se déplacer le long des arêtes de façon à garantir l'amélioration du résultat de la fonction objectif. Un algorithme « grossier » de l'algorithme du simplexe est illustré par le Tableau C.1 (Meyer, 2011) :

Tableau C.1 : Algorithme généralisé du simplexe

Algorithme du simplexe
Choix de l'intersection initiale
Tant que la solution maximale n'est pas atteinte
Choisir une arête se rapprochant du sommet
Se déplacer jusqu'à l'intersection suivante

Un résumé de la méthode du simplexe standard est décrit comme suit en se basant sur un problème original d'optimisation linéaire.

Problème original :

$$\begin{aligned} &\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \\ &\text{s. c.} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \qquad i = 1, 2, ..., m \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{C.1}$$

Initialisation : le problème initial est modifié par l'introduction de nouvelles variables appelées variables de jeu qui permettent de transformer les inégalités en égalités. Ces variables de jeu permettent de combler l'espace entre les inéquations et les équations et appartiennent à $\mathbf{R}^+$. Le but est de faire évoluer les variables x du problème de manière à améliorer sa fonction objectif.

(1) **Calcul de la solution initiale** : pour démarrer les optimisations, l'algorithme du simplexe a besoin d'une solution initiale. Afin de la trouver, deux approches peuvent être utilisées. La première approche consiste à fixer arbitrairement les valeurs des variables des non-basiques et déduire les valeurs des basiques. Néanmoins, dans le cas où la solution initiale calculée est infaisable, la seconde approche est utilisée. Dans cette seconde approche, le problème initial est subdivisé en deux problèmes linéaires où le premier est utilisé pour trouver une solution triviale et le second pour résoudre le problème en utilisant la solution triviale précédemment trouvée.

(2) **Création d'un dictionnaire** : le problème modifié est réarrangé sous une nouvelle disposition. Les variables de jeu x_{n+1} et la fonction objectif Z sont positionnés sur le côté gauche du système d'équations et sont appelés les basiques. Les variables du problème original x_j sont positionnés sur le côté droit et sont appelés les non-basiques. La nouvelle disposition du système d'équations est représentée comme suit :

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, ..., m \\ Z &= \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j \end{aligned} \tag{C.2}$$

Cette nouvelle disposition est appelée le dictionnaire et est calculé à chaque itération de l'algorithme.

(3) **Recherche de la solution optimale** : la solution optimale est déterminée en utilisant le dictionnaire. L'approche consiste à déterminer la variable entrante et la variable sortante du système d'équations jusqu'à ce que les coefficients des variables de la fonction

objectif soient positifs ou négatifs dépendant si le problème d'optimisation est une minimisation ou maximisation. Lorsque cette condition est respectée, la solution trouvée est celle du problème d'optimisation initial. Dans le cas contraire, retour à l'étape (2) en réalisant le pivotage entre la variable entrante et celle sortante afin de créer un nouveau dictionnaire.

La variable entrante est celle qui offre un gain potentiellement plus grand à la valeur de la variable Z. Généralement, elle correspond à la variable non basique de Z ayant le coefficient positif le plus grand. La variable sortante représente la variable basique la plus contraignante. Il s'agit de la variable basique offrant le plus petit ratio positif $-\frac{s}{r}$ où s représente la constante de l'équation et r le coefficient de la variable entrante de cette équation. Le pivotage consiste à placer la variable entrante du côté des variables basiques et d'en retirer la variable sortante.

L'ensemble de la procédure de l'algorithme du simplexe standard est résumé par la Figure C.1

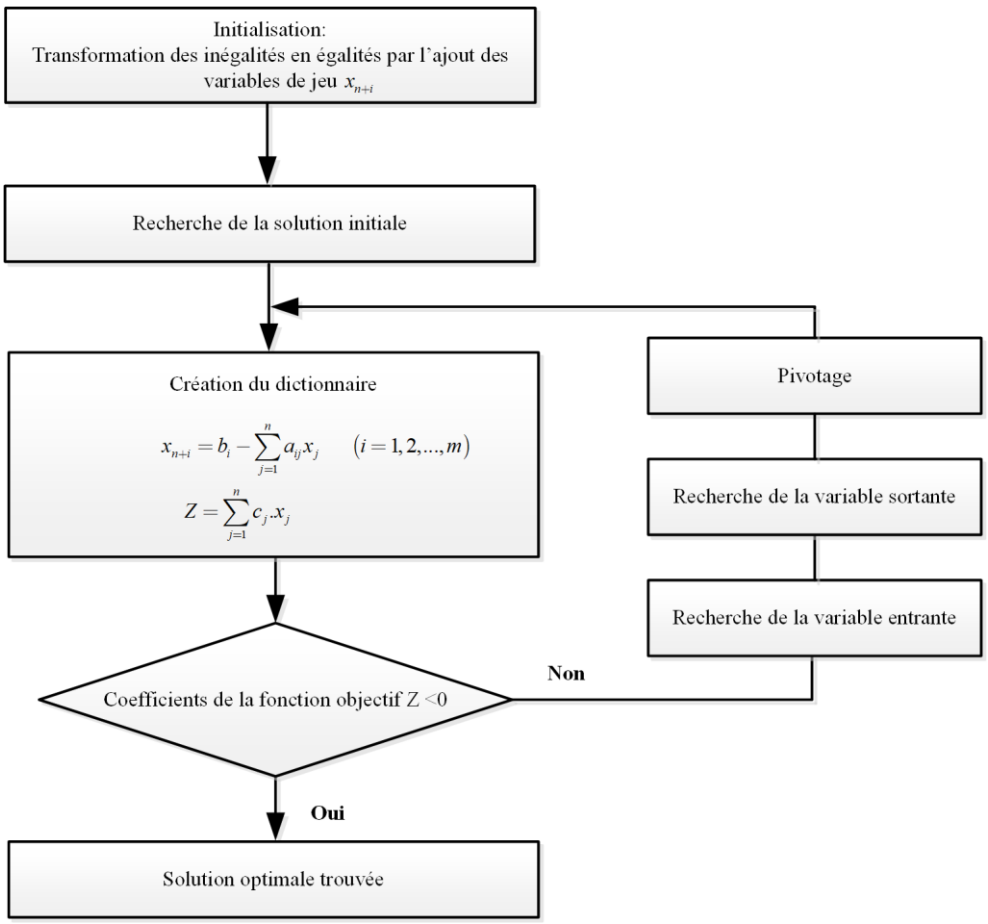


Figure C.1 : Algorithme du simplexe standard

C.2 Méthode du simplexe révisé

La méthode modifiée du simplexe possède la même procédure de résolution que la méthode standard du simplexe sauf que dans la modifiée, le « dictionnaire » n'est pas recalculé entièrement à chaque itération. C'est juste une partie qui est recalculée. Aussi, le problème original est mis sous une forme composée de vecteurs et de matrices et les variables entrante et sortante sont calculées en résolvant deux systèmes d'équations. Le problème original est donné sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbf{cx} \\ \text{s. c.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{C.3}$$

- Décomposition des contraintes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ du problème d'optimisation en deux parties : la partie basique et la partie non-basique.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A_B x_B} + \mathbf{A_N x_N} \tag{C.4}$$

- De cette équation issue de la décomposition, les variables basiques $\mathbf{x_B}$ sont déduites. La même déduction est appliquée à la valeur de la fonction objectif $\mathbf{z}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x_B} &= \mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}A_N x_N} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{c_B B^{-1} b} + \mathbf{c_N} - \mathbf{c_B B^{-1} A_N} \ \mathbf{x_N} \end{aligned} \tag{C.5}$$

  Le vecteur $\mathbf{x_B^*} = \mathbf{B^{-1}b}$ correspond aux valeurs des variables basiques liées à ce dictionnaire.

- Calcul des variables entrantes en déterminant les coefficients des variables non-basiques en utilisant $\mathbf{c_N} - \mathbf{c_B B^{-1} A_N}$.

  Premièrement, le système suivant est résolu afin de déterminer y : $\mathbf{yB} = \mathbf{c_B}$. Ensuite, $\mathbf{c_N} - y\mathbf{A_N}$ peut être calculé et les coefficients positifs qui sont déterminés peuvent être considérés comme les variables entrantes. De plus, il n'est pas nécessaire de calculer entièrement $\mathbf{c_N} - y\mathbf{A_N}$ car au cours de la procédure graduelle, une fois qu'un coefficient positif est trouvé, le calcul est arrêté. Et la variable de ce coefficient positif est choisie comme variable entrante.

- Calcul des variables sortantes en utilisant $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A_N}\mathbf{x_N}$. Des méthodes sont utilisées durant l'étape précédente et celle-ci pour simplifier le calcul de la matrice $\mathbf{B}$. Des méthodes comme la décomposition LU, la factorisation eta de la base etc. Cette simplification consiste à décomposer la matrice $\mathbf{B}$ en une suite de matrice simple à résoudre.

  La colonne $\mathbf{d}$ correspondant à la variable entrante provenant de $\mathbf{x_B}$ i.e. de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A_N}$, est calculée en résolvant le système : $\mathbf{Bd} = \mathbf{A_n}$. Ensuite, le gain maximal t des variables basiques $\mathbf{x_B^*}$ est calculé en garantissant $\mathbf{x_B^*} - t\mathbf{d} > 0$. La variable sortante est celle qui correspond à t maximal i.e. à la variable du vecteur $\mathbf{x_B^*}$ la plus contraignante.
- La mise à jour du problème : cette étape permet de mettre à jour le problème en plaçant la valeur de la variable entrante à t et de remplacer $\mathbf{x_B^*}$ par $\mathbf{x_B^*} - t\mathbf{d}$ et ensuite remplacer aussi la colonne de la variable sortante dans $\mathbf{B}$ par celle de la variable entrante.

Plus de détails sur cette méthode du simplexe révisé peuvent être trouvés dans (Meyer, 2011).

C.3 Algorithme de SLSQP

L'algorithme de SLSQP est basé sur l'algorithme de SQP (*Sequential Quadratic Programming* en Anglais) ou l'algorithme de l'optimisation quadratique successive. Son objectif est de remplacer le problème initial par une séquence de problèmes quadratiques avec des contraintes linéarisées plus simples à résoudre. L'algorithme de SQP pour un problème d'optimisation composé d'équations et d'inéquations comme contraintes est montré comme suit :

Données d'entrée : f : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, h : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ différentiables, x_0 initial point, $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^q$ et $\mu_0 \in \mathbf{R}^p$ des multiplicateurs initiaux, $\varepsilon > 0$ précision souhaitée.

Données de sortie : an approximation x^* of the solution.

1. Initialisation $k = 0$
2. Tant que $\left\|\nabla L\left(x^k, \lambda^k\right)\right\| > \varepsilon$, ($L(x, \lambda, \mu)$ est le lagrangien du problème d'optimisation),
   (a) Evaluer la matrice hessienne H, le gradient ∇f , et ici $d = x_{k+1} - x_k$
   (b) Résoudre le sous-problème quadratique :

$$(QP_k)\quad \left|\begin{array}{ll} \min & \nabla f\left(x_k\right)^{\mathrm{T}} d+\frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} H_k d \\ \text{s. c.} & g_j\left(x^k\right)+\nabla g_j\left(x^k\right)^{\mathrm{T}} d=0, \mathrm{j}=1,\ldots,q, \\ & h_i\left(x^k\right)+\nabla h_i\left(x^k\right)^{\mathrm{T}} d=0,\ i=1,\ldots,\mathrm{p}. \end{array}\right. \tag{C.6}$$

Pour obtenir la solution primale d_k et les multiplicateurs lagrangiens λ' et μ' appartenant respectivement aux contraintes d'égalité $h(x)=0$ et d'inégalités $g(x)\leq 0$.

(c) $x^{k+1}=x^k+d_k;\ \lambda^{k+1}=\lambda';\ \mu^{k+1}=\mu';\ k=k+1$

3. Retourner x_k

Les sous-problèmes quadratiques peuvent être résolus en utilisant les méthodes d'active set, la méthode des points intérieurs.

C.4 Algorithme de CVXPY

L'algorithme de CVXPY est basé sur celui du solveur ECOS qui utilise la méthode des points intérieurs pour résoudre des programmes coniques du second ordre (*Second Order Cone Programming- SOCP* en Anglais) qui sont représentés sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Min} & c^T x & \\ & \text{s. c.} & Ax=b \\ & & Gx+s=h, \quad s\in\kappa \end{array}\right. \tag{C.7}$$

où x sont des variables, s représente les variables d'écart, $c\in\mathbf{R}^n, G\in\mathbf{R}^{M\,\mathrm{x}\,n}, h\in\mathbf{R}^M, A\in\mathbf{R}^{p\,\mathrm{x}\,n}, b\in\mathbf{R}^p$ sont les données du problème, et κ est le cône

$$\kappa\in Q^{m_1}\mathrm{x}Q^{m_2}\mathrm{x}\ldots\mathrm{x}Q^{m_N}, \tag{C.8}$$

avec $Q^m=\left\{(u_0,u_1)\in\mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}^{m-1}\middle|u_0\geq\|u_1\|_2\right\}$ pour $m>1$, et $Q^1\in\mathbf{R}_+$.

Pour résoudre un problème d'optimisation sous la forme standard, premièrement, ce problème est transformé sous forme conique en suivant une procédure qui permet aussi de déterminer la solution optimale au problème :

(1) Optimisation convexe générale : initialement, le problème est écrit sous la forme d'un problème d'optimisation convexe.

(2) La canonisation : c'est un algorithme qui suppose une représentation générale du problème d'optimisation convexe et une structure de données représentant un programme de cône équivalent. Cette transformation du problème général d'optimisation convexe résulte de l'application de l'implémentation du graphe en utilisant un algorithme détaillé dans (Grant et Boyd, 2008).

(3) Le programme de cônes équivalent : à la fin de la canonisation, une forme conique standard du problème initial d'optimisation convexe est obtenue et est prête à être résolue à l'aide d'un solveur de problèmes sous forme conique.

(4) Résolution du programme conique : les problèmes d'optimisation sous forme conique peuvent être résolus en utilisant la méthode des points intérieurs qui est implémentée sous différente nom dans les logiciels de programmation (SDPT3, SeDuMi implémentés sous MATLAB, ECOS sous Python, DSDP5 et SDPA sous C et C++, …) ou en utilisant les méthodes de premier ordre (SCS sous Python, PDOS, POGS, …).

(5) Affichage des solutions : L'étape (4) précédente permet de trouver la solution au programme conique qui représente automatiquement la solution au problème initial de l'optimisation convexe.

Annexe D

Etude du moteur électrique

Analyse des tolérances avec défauts de forme

D.1 Modélisation du comportement géométrique

Points et Coordonnées. Le point *A* est choisi comme point d'origine du système mécanique où tous les torseurs sont écrits. Les coordonnées des différents points considérés du système mécanique sont :

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AG}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_6\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}l_7\\0\\l_8\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AK}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_9\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}l_{10}\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AR}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_{11}\end{pmatrix}.$$

Les valeurs des coordonnées i.e. des composantes de l'ensemble $l=\{l_1,...,l_{11}\}$ sont rassemblées dans le tableau D.1.

Définition des écarts géométriques. Les différents torseurs écarts développés pour ce système mécanique sont donnés comme suit :

$$\{T_{1a/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1a1} & 0\\ \beta_{1a1} & 0\\ 0 & w_{1a1}\end{Bmatrix}_A,\quad \{T_{2a/2}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2a2} & 0\\ \beta_{2a2} & 0\\ 0 & w_{2a2}\end{Bmatrix}_A,\quad \{T_{1b/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1b1} & u_{1b1}\\ \beta_{1b1} & v_{1b1}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,$$
$$\{T_{2b/2}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2b2} & u_{2b2}\\ \beta_{2b2} & v_{2b2}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,\quad \{T_{2c/2}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2c2} & u_{2c2}\\ \beta_{2c2} & v_{2c2}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,\quad \{T_{3c/3}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{3c3} & u_{3c3}\\ \beta_{3c3} & v_{3c3}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,$$
$$\{T_{1d/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1d1} & u_{1d1}\\ \beta_{1d1} & v_{1d1}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,\quad \{T_{3d/3}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{3d3} & u_{3d3}\\ \beta_{3d3} & v_{3d3}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_H,\quad \{T_{1e/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1e1} & u_{1e1}\\ \beta_{1e1} & v_{1e1}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,$$
$$\{T_{3e/3}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{3e3} & u_{3e3}\\ \beta_{3e3} & v_{3e3}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A \tag{D.1}$$

Définition des torseurs de spécification. Un torseur de spécification écrit au point *M* d'une surface *b* appartenant à la pièce *k* et référencé par rapport à la surface *a* est représenté par :

$$S_{kb/a}=\begin{Bmatrix}\alpha_{kba} & u_{kba}\\ \beta_{kba} & v_{kba}\\ \gamma_{kba} & w_{kba}\end{Bmatrix}_M \tag{D.2}$$

Tous les torseurs spécifications développés pour les spécifications géométriques de ce système mécanique sont :

$$S_{1b/a}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1ba} & 0\\ \beta_{1ba} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,\quad S_{1d/a}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1da} & 0\\ \beta_{1da} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_H,\quad S_{1e/d}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1ed} & u_{1ed}\\ \beta_{1ed} & v_{1ed}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_Q,$$
$$S_{2b/a}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2ba} & 0\\ \beta_{2ba} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A,\quad S_{2c/b}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2cb} & u_{2cb}\\ \beta_{2cb} & v_{2cb}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_R,\quad S_{3c/e}=\begin{Bmatrix}\alpha_{3ce} & 0\\ \beta_{3ce} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_R,$$
$$S_{3d/e}=\begin{Bmatrix}\alpha_{3de} & u_{3de}\\ \beta_{3de} & v_{3de}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_H \tag{D.3}$$

L'écart-type des composantes des torseurs de spécifications est calculé en utilisant :

$$\sigma=\frac{IT}{6.C_m} \tag{D.4}$$

L'écart-type de chaque composante des torseurs de spécifications est rassemblé dans le tableau D.2.

Définition des torseurs jeux. Il existe 4 liaisons dans ce système mécanique à considérer en plus de la liaison fonctionnelle. Tous les jeux de ce système mécanique sont développés comme suit :

$$\{g_{2a/1a}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{TBD} & u_{2a1a} \\ \beta_{TBD} & v_{2a1a} \\ \gamma_{2a1a} & \gamma_{TBD} \end{Bmatrix}_A , \quad \{g_{2b/1b}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{2b1b} & u_{2b1b} \\ \beta_{2b1b} & v_{2b1b} \\ \gamma_{2b1b} & w_{2b1b} \end{Bmatrix}_A , \quad \{g_{3c/2c}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3c2c} & u_{3c2c} \\ \beta_{3c2c} & v_{3c2c} \\ \gamma_{3c2c} & w_{3c2c} \end{Bmatrix}_A ,$$

$$\{g_{3e/1e}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3e1e} & u_{3e1e} \\ \beta_{3e1e} & v_{3e1e} \\ \gamma_{3e1e} & w_{3e1e} \end{Bmatrix}_A , \quad \{g_{3d/1d}\} = \begin{Bmatrix} - & u_{3d1d} \\ - & v_{3d1d} \\ - & - \end{Bmatrix}_H \tag{D.5}$$

Les équations de compatibilité

Le nombre total de boucles topologiques de ce système mécanique est calculé en utilisant la formule suivante: $N_{loop} = 4 - 3 + 1 = 2$.

La première boucle (1), (2) écrit au point *A* :

$$T_{1/1} = g_{1a/2a} + S_{2b/a} + g_{2b/1b} - S_{1b/a} = 0 \tag{D.6}$$

$$C_c^1(\mathbf{X},\mathbf{G}) = u_{2b1b} = 0 \tag{D.7}$$

$$C_c^2(\mathbf{X},\mathbf{G}) = v_{2b1b} = 0 \tag{D.8}$$

$$C_c^3(\mathbf{X},\mathbf{G}) = w_{2b1b} - w_{2a1a} = 0 \tag{D.9}$$

$$C_c^4(\mathbf{X},\mathbf{G}) = \alpha_{2ba} + \alpha_{2b1b} - \alpha_{1ba} - \alpha_{2a1a} = 0 \tag{D.10}$$

$$C_c^5(\mathbf{X},\mathbf{G}) = \beta_{2ba} + \beta_{2b1b} - \beta_{1ba} - \beta_{2a1a} = 0 \tag{D.11}$$

$$C_c^6(\mathbf{X},\mathbf{G}) = \gamma_{2b1b} = 0 \tag{D.12}$$

La seconde boucle (1), (2), (3) écrit au point *A* :

$$T_{1/1} = g_{1a/2a} + S_{2b/a} + S_{2c/b} + g_{2c/3c} + S_{3c/e} + g_{3e/1e} - S_{1e/d} - S_{1d/a} - S_{1b/a} = 0 \tag{D.13}$$

$$C_c^7\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=u_{2cb}-l_{11}\beta_{2cb}-u_{3c2c}-l_{11}\beta_{3ce}+u_{3e1e}-u_{1ed}+l_{12}\beta_{1ed}+l_8\beta_{1da}=0 \qquad \text{(D.14)}$$

$$C_c^8\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=v_{2cb}+l_{11}\alpha_{2cb}-v_{3c2c}+l_{11}\alpha_{3ce}+v_{3e1e}-v_{1ed}-l_{12}\alpha_{1ed}-l_8\alpha_{1da}=0 \qquad \text{(D.15)}$$

$$C_c^9\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-w_{2a1a}-w_{3c2c}+w_{3e1e}=0 \qquad \text{(D.16)}$$

$$C_c^{10}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\alpha_{2a1a}+\alpha_{2ba}+\alpha_{2cb}-\alpha_{3c2c}+\alpha_{3ce}+\alpha_{3e1e}-\alpha_{1ed}-\alpha_{1da}-\alpha_{1ba}=0 \qquad \text{(D.17)}$$

$$C_c^{11}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\beta_{2a1a}+\beta_{2ba}+\beta_{2cb}-\beta_{3c2c}+\beta_{3ce}+\beta_{3e1e}-\beta_{1ed}-\beta_{1da}-\beta_{1ba}=0 \qquad \text{(D.18)}$$

$$C_c^{12}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\gamma_{3c2c}+\gamma_{3e1e}=0 \qquad \text{(D.19)}$$

Les conditions fonctionnelles

Avant de vérifier les conditions fonctionnelles, les composantes du torseur jeu fonctionnel doivent être calculées en utilisant les boucles topologiques fonctionnelles. Cette boucle (1), (2) et (3) écrit au point est développée comme suit :

$$C_c^{13}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-l_8\beta_{2a1a}+l_8\beta_{2ba}+\left(l_8-l_{11}\right)\beta_{2cb}-u_{3c2c}-l_8\beta_{3c2c}+\left(l_8-l_{11}\right)\beta_{3ce}+u_{3de}+u_{3d1d}-l_8\beta_{1ba}=0$$

(D.20)

$$C_c^{14}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=l_8\alpha_{2a1a}-l_8\alpha_{2ba}+v_{2cb}-\left(l_8-l_{11}\right)\alpha_{2cb}-\left(l_8-l_{11}\right)\alpha_{3ce}+v_{3de}+v_{3d1d}+l_8\alpha_{1ba}=0$$

(D.21)

u_{3d1d}, v_{3d1d} sont les principaux éléments qui sont déterminés lors de l'optimisation générale de l'analyse des tolérances. Par la suite, ils sont utilisés pour vérifier les conditions fonctionnelles qui sont représentées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} C_f^1\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right):\left(\dfrac{d_{1d}-d_{3d}}{2}\right)-u_{3d1d}\geq 0 \\ C_f^2\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right):\left(\dfrac{d_{1d}-d_{3d}}{2}\right)-v_{3d1d}\geq 0 \end{cases} \qquad \text{(D.22)}$$

Les contraintes d'interface

Les contraintes d'interface qui empêchent les interpénétrations au niveau des contacts sont développées pour le système mécanique de ce moteur électrique. Concernant la liaison fonctionnelle *3d/1d*, aucune contrainte d'interface n'est écrite.

Contrainte d'interface de la liaison *1b/2b*:

$$C_i^1\left(\mathbf{X},\mathbf{G}^{'},\mathbf{F}\right)=\cos\theta.u_{2b1b}+l_{b_k}.\cos\theta.\beta_{2b1b}-l_{b_k}.\sin\theta.\alpha_{2b1b}+\sin\theta.v_{2b1b}\leq\left(\frac{d_{1b}-d_{2b}}{2}\right)+\left\|F_{2\mathrm{b},M\left(l_{b_k},\theta\right)}\right\|+\left\|F_{1\mathrm{b},M\left(l_{b_k},\theta\right)}\right\|$$

(D.23)

Contrainte d'interface de la liaison *2c/3c*:

$$C_i^2\left(\mathbf{X},\mathbf{G}^{'},\mathbf{F}\right)=\cos\theta.u_{3c2c}+l_{3c_k}.\cos\theta.\beta_{3c2c}-l_{3c_k}.\sin\theta.\alpha_{3c2c}+\sin\theta.v_{3c2c}\leq\left(\frac{d_{2c}-d_{3c}}{2}\right)+\left\|F_{3c,M\left(l_{3c_k},\theta\right)}\right\|+\left\|F_{2c,M\left(l_{3c_k},\theta\right)}\right\|$$

(D.24)

Contrainte d'interface de la liaison *1e/3e*:

$$C_i^3\left(\mathbf{X},\mathbf{G}^{'},\mathbf{F}\right)=\cos\theta.u_{3e1e}+l_{3e_k}.\cos\theta.\beta_{3e1e}-l_{3e_k}.\sin\theta.\alpha_{3e1e}+\sin\theta.v_{3e1e}\leq\left(\frac{d_{1e}-d_{3e}}{2}\right)+\left\|F_{3e,M\left(l_{3e_k},\theta\right)}\right\|+\left\|F_{2\mathrm{e},M\left(l_{3e_k},\theta\right)}\right\|$$

(D.25)

Formulation du problème d'assemblage et de fonctionnalité. Deux optimisations sont réalisées à chaque itération de MC afin de déterminer les valeurs optimales de u_{3d1d},v_{3d1d} et au même vérifier l'assemblage par l'existence des composantes des torseurs jeux des contacts flottants et des composantes des déplacements cinématiques des torseurs jeux des contacts glissants.

$$R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\tilde{\mathbf{G}}^{'}\in\mathbf{R}^{20}}{\text{Min}} & \text{f}\left(\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right)\\ \textit{sous} & \left[C_{omp}\right]_{[14\text{x}20]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right]_{[20\text{x}1]}=\left[\mathbf{X}^{(k)}+\mathbf{G}_{1a/2a}^{*(k)}\right] \\ & \left[C_{\text{Interface}}\right]_{\left[(3\text{x}N_c\text{x}N_d)\text{x}20\right]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right]_{[20\text{x}1]}\leq\left[\mathbf{X}_{\text{Intrinsèque}}^{(k)}+\mathbf{F}^{(k)}\right]\end{cases}\qquad\forall\ k=\left\{1,...,N_{mc}\right\}$$

(D.26)

La probabilité de non-assemblage est par la suite calculée en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{\text{P}}_{\text{na}}=\text{Prob}\left(E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\right)\qquad\text{(D.27)}$$

où $E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ est l'évènement suivant : « Pour des vecteurs $\mathbf{X}^{(k)}$ et $\mathbf{F}^{(k)}$ tirés, il n'existe pas de vecteur jeu $\tilde{\mathbf{G}}^{'}\in\mathbf{R}^{20}$ tel que $R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ ait une solution ».

$$R_f\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\tilde{\mathbf{G}}^{'}_{\text{fonctionnel}}}{\text{Min}} & C_f^{(t)}\left(\mathbf{X}_{\text{Intrinsèque}}^{(k)},\mathbf{F}^{(k)},\tilde{\mathbf{G}}^{'}_{\text{fonctionnel}}\right)\\ \textit{sous} & \left[C_{omp}\right]_{[14\text{x}20]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right]_{[20\text{x}1]}=\left[\mathbf{X}^{(k)}+\mathbf{G}_{1a/2a}^{*(k)}\right] \\ & \left[C_{\text{Interface}}\right]_{\left[(3\text{x}N_c\text{x}N_d)\text{x}20\right]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}^{'}\right]_{[20\text{x}1]}\leq\left[\mathbf{X}_{\text{Intrinsèque}}^{(k)}+\mathbf{F}^{(k)}\right]\end{cases}\qquad\forall\ k=\left\{1,...,N_{mc}\right\}$$

(D.27)

avec $t=\left[1,\ 2\right]$.

Grâce à cette formalisation mathématique du problème fonctionnel, la probabilité de non-fonctionnalité est ensuite calculée en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{\text{P}}_{\text{nf}}=\text{Prob}\left(\bigcup_{t=1}^{2}R_f^{(t)}\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\leq 0\right)\qquad\text{(D.28)}$$

D.2 Valeurs des paramètres

Les valeurs des dimensions nominales sont données dans le tableau D.1.

Tableau D.1 : Valeurs des coordonnées des points et des dimensions nominales du mécanisme

Dimension	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}
Valeur	-80	-120	60	80	100	140	50	30	-20	85	-50

Les écarts-types des composantes des torseurs de spécifications sont donnés dans le tableau D.2.

Tableau D.2 : Ecarts-types des composantes des torseurs de spécification

Composante	α_{1ba}	β_{1ba}	α_{1da}	β_{1da}	α_{1ed}	β_{1ed}	u_{1ed}	v_{1ed}	α_{2ba}	β_{2ba}
Ecart-type	$3*10^{-5}$	$3*10^{-5}$	$3*10^{-5}$	$3*10^{-5}$	$2*10^{-5}$	$2*10^{-5}$	$3*10^{-5}$	$3*10^{-5}$	$2*10^{-5}$	$2*10^{-5}$

Composante	α_{2cb}	β_{2cb}	u_{2cb}	v_{2cb}	α_{3ce}	β_{3ce}	α_{3de}	β_{3de}	u_{3de}	v_{3de}
Ecart-type	$3.77*10^{-6}$	$3.77*10^{-6}$	$2*10^{-5}$	$2*10^{-5}$	$2.4*10^{-3}$	$2.4*10^{-3}$	$2.4*10^{-3}$	$2.4*10^{-3}$	$2.4*10^{-3}$	$2.4*10^{-3}$

Annexe E

E.1 Similarités entre les répartitions des données originales et des données issues de l'estimation par noyaux

Afin de montrer la similarité entre les données originales et celles issues de l'estimation par noyaux, une comparaison est proposée entre les répartitions des paramètres du torseur les uns en fonction des autres. Les données de cette comparaison (voir Figures E.1 et E.2) sont issues de la simulation avec des amplitudes de défauts de forme correspondant respectivement aux distributions $F \sim \mathcal{N}(2.5\text{x}10^{-3}, 10^{-4})$ et $F \sim \mathcal{N}(2.5\text{x}10^{-3}, 10^{-2})$ et à la . Cette Comparaison montre en effet que les données de l'estimation par noyaux correspondent en général aux distributions des données originales.

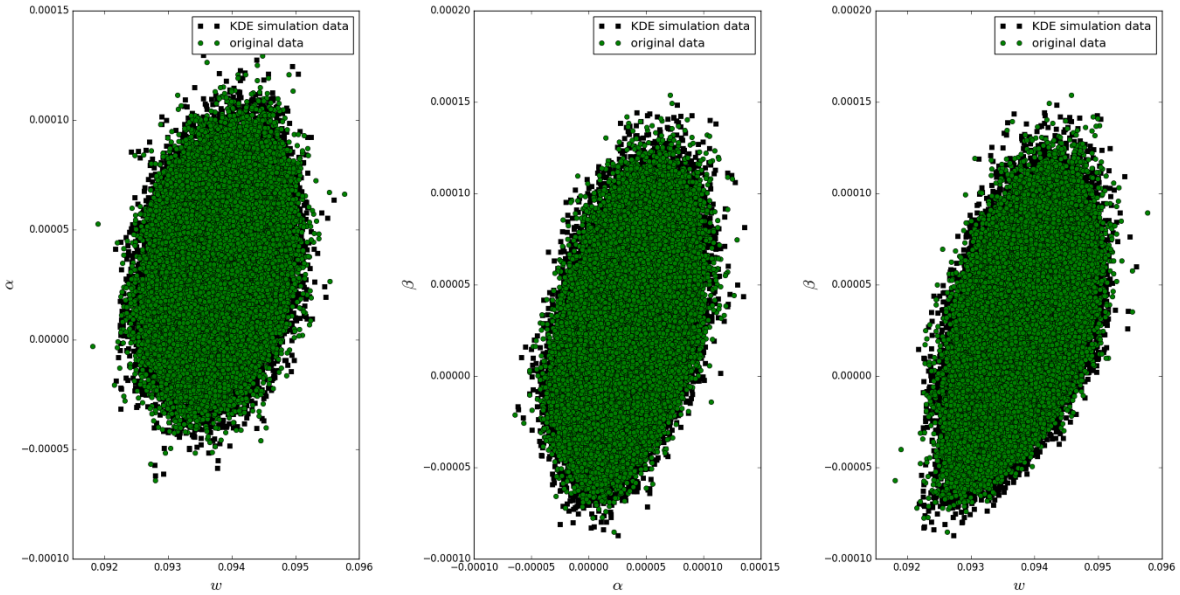


Figure E.1 : Comparaison de la répartition des paramètres du torseur jeu (w, α, β) pour F ~ ℳ(2.5x10-3, 10-4)

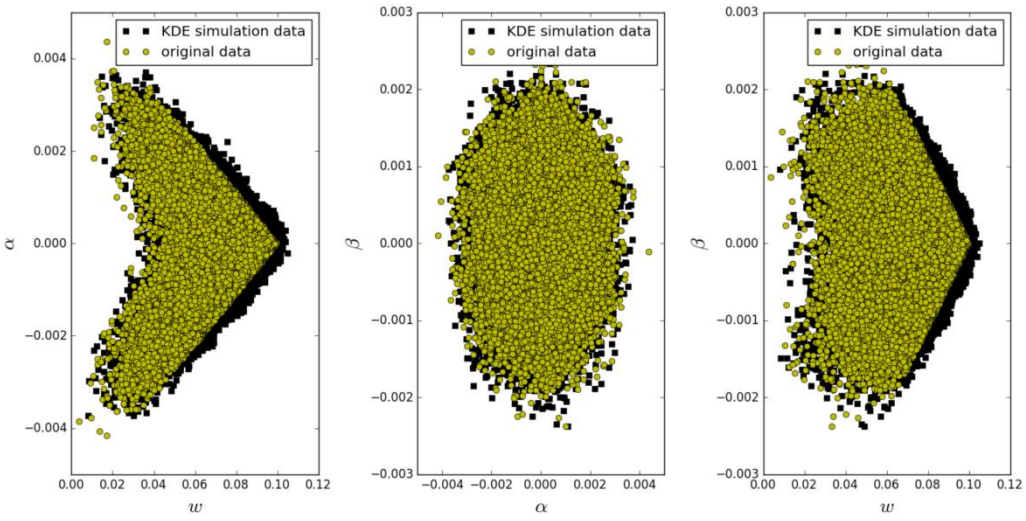


Figure E.2 : Comparaison de la répartition des paramètres du torseur jeu (w, α, β) pour F ~ $\mathcal{N}$(2.5x10-3, 10-2)

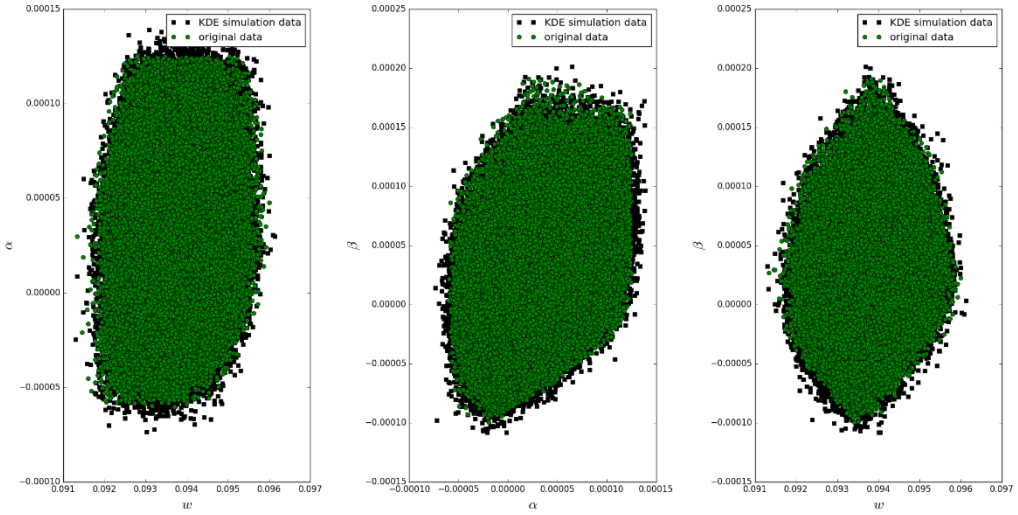


Figure E.3 : Comparaison de la répartition des paramètres du torseur jeu (w, α, β) pour F ~ $\mathcal{U}$(1.5x10^{-3}, 3.5x10^{-3})

Ensuite, la fonction de densité de probabilité jointe pour chaque paire des paramètres du torseur jeu a été tracée afin de montrer si les répartitions des points des données originales correspondent aux lignes de niveau de ces fonctions de densité de probabilité. Cette comparaison est montrée sur la Figure C.2 pour les résultats basés sur la loi normale (voir Figure E.4) et la loi uniforme (voir Figure E.5). Ces résultats ont été obtenus en utilisant 100 points de

discrétisation. On peut bien remarquer que la concentration des points des données originales correspond avec les couleurs de densité des fonctions de densité de probabilité.

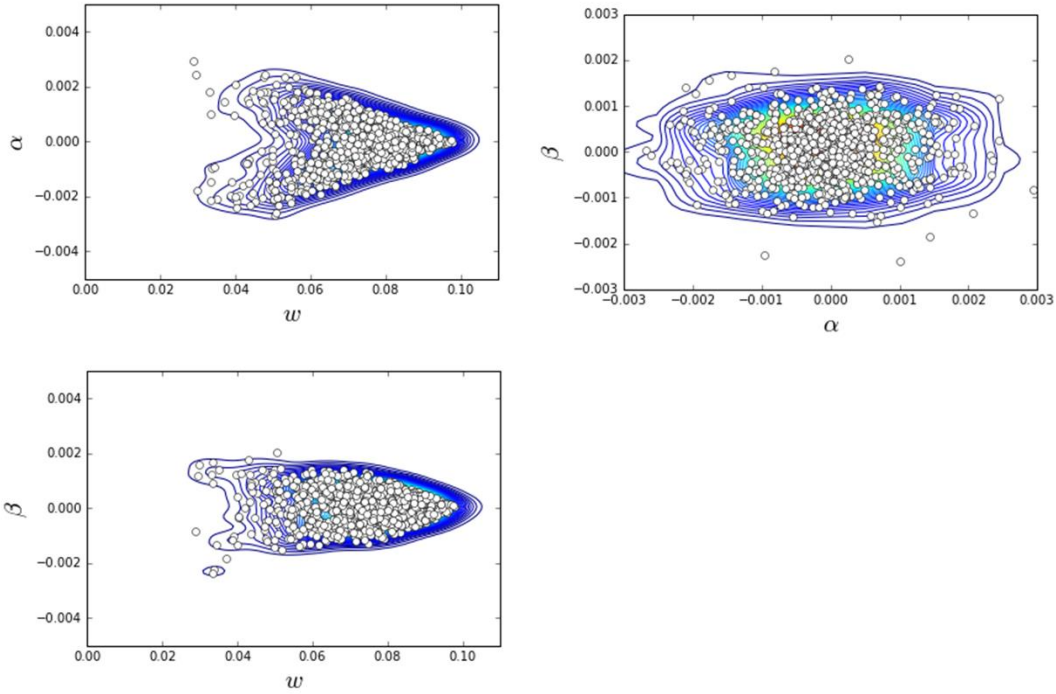


Figure E.4 : Lignes de niveau de la fonction de densité de probabilité des données issues de l'estimation par noyaux, comparées aux points des données originales pour $F \sim N(2.5x10^{-3}, 10^{-2})$

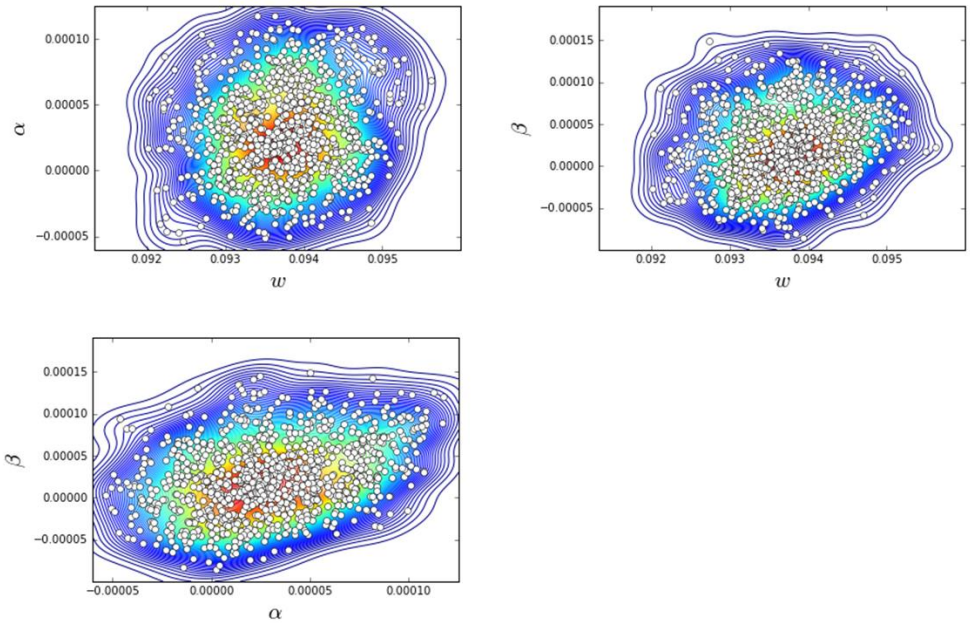


Figure E.5 : Lignes de niveau de la fonction de densité de probabilité des données issues de l'estimation par noyaux, comparées aux points des données originales pour $F \sim \mathcal{U}(2x10^{-3}, 3x10^{-3})$

E.2 Résultats des simulations du tableau 4.2

Tableau E.1 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{N}(2.5x10^{-3}, 10^{-6})$, Nmc = 100000

Simulation	**Maillage**		
	100	2500	10000
Analyse des tolérances classique	P_{nf} = 1.38x10^{-2} P_{na} = 2.00x10^{-4}	P_{nf} = 1.42x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.41x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}
Temps total (s)	13h51min	18h39min	46h42min
Analyse des tolérances utilisant les données de l'estimation par noyaux	P_{nf} = 1.58x10^{-2} P_{na} = 1.80x10^{-4}	P_{nf} = 1.63x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.62x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}
T_1	15min	46min	3h28min
T_2	9h37min	9h39min	9h53min
Temps total ($T_1 + T_2$) (s)	9h52min	10h25min	13h21min

Tableau E.2 : Résultats de la simulation F ~ N(2.5x10-3, 10-4), Nmc = 100000

Simulation	**Maillage**		
	100	2500	10000
Analyse des tolérances classique	P_{nf} = 1.72x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}
Temps total	10h36min	14h06min	46h32min
Analyse des tolérances utilisant les données de l'estimation par noyaux	P_{nf} = 1.73x10^{-2} P_{na} = 2.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}	P_{nf} = 1.64x10^{-2} P_{na} = 1.00x10^{-5}
T_1	13min	47min	3h36min
T_2	9h13min	9h39min	9h16min
Temps total ($T_1 + T_2$)	9h26min	10h26min	12h52min

Tableau E.3 : Résultats de la simulation F ~ N(2.5x10^{-3}, 10^{-2}), Nmc = 100000

Simulations	**Maillage**		
	100	**2500**	**10000**
Méthode classique d'analyse des tolérances	P_{nf} = 4.45x10^{-3} P_{na} = 8.41x10^{-1}	P_{nf} = 4.39x10^{-3} P_{na} = 8.81x10^{-1}	P_{nf} = 4.38x10^{-3} P_{na} = 8.81x10^{-1}
Temps total	12h36min	21h22min	66h23min
Méthode d'analyse des tolérances basée sur l'estimation par noyaux	P_{nf} = 4.54x10^{-3} P_{na} = 8.49x10^{-1}	P_{nf} = 4.39x10^{-3} P_{na} = 8.80x10^{-1}	P_{nf} = 4.39x10^{-3} P_{na} = 8.81x10^{-1}
T_1	12min	44min	3h30min
T_2	9h20min	9h19min	9h24min
Temps total ($T_1 + T_2$)	9h32min	10h03min	12h54min

Tableau E. 4 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{U}(2x10^{-3}, 3x10^{-3})$, Nmc = 100000

Simulation	**Maillage**		
	100	2500	10000
Analyse des tolérances classique	$P_{nf} = 1.72x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.63x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.63x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$
Temps total	10h33min	13h59min	46h42min
Analyse des tolérances utilisant les données de l'estimation par noyaux	$P_{nf} = 1.71x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.64x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.64x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$
T_1	13min	39min	3h44min
T_2	9h42min	9h40min	9h42min
Temps total ($T_1 + T_2$)	9h55min	10h19min	13h26min

Tableau E.5 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{U}(1.5x10^{-3}, 3.5x10^{-3})$, Nmc = 100000

Simulation	**Maillage**		
	100	2500	10000
Analyse des tolérances classique	$P_{nf} = 1.73x10^{-2}$ $P_{na} = 5.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.64x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.64x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$
Temps total	10h36min	14h07min	46h41min
Analyse des tolérances utilisant les données de l'estimation par noyaux	$P_{nf} = 1.71x10^{-2}$ $P_{na} = 1.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.63x10^{-2}$ $P_{na} = 3.00x10^{-5}$	$P_{nf} = 1.64x10^{-2}$ $P_{na} = 2.00x10^{-5}$
T_1	12min	50min	3h32min
T_2	9h33min	9h44min	9h36min
Temps total ($T_1 + T_2$)	9h45min	10h34min	13h08min

Tableau E.6 : Résultats de la simulation F ~ $\mathcal{U}$(-7.5x10^{-3}, 1x10^{-2}), Nmc = 100000

Simulation	**Maillage**		
	100	2500	10000
Analyse des tolérances classique	P_{nf} = 1.71x10^{-2} P_{na} = 2.00x10^{-1}	P_{nf} = 1.69x10^{-2} P_{na} = 2.15x10^{-1}	P_{nf} = 1.69x10^{-2} P_{na} = 2.15x10^{-1}
Temps total	10h39min	14h03min	46h51min
Analyse des tolérances utilisant les données de l'estimation par noyaux	P_{nf} = 1.71x10^{-2} P_{na} = 2.09x10^{-1}	P_{nf} = 1.67x10^{-2} P_{na} = 2.23x10^{-1}	P_{nf} = 1.70x10^{-2} P_{na} = 2.24x10^{-1}
T_1	15min	49min	3h34min
T_2	9h31min	9h47min	9h35min
Temps total ($T_1 + T_2$)	9h46min	10h36min	13h09min

Annexe F

Etude de la pompe de PIERBURG

Analyse des tolérances avec défauts de forme

E.1 Modélisation du comportement géométrique

Points et coordonnées. Le point *D* est choisi comme point d'origine du système mécanique où tous les torseurs sont écrits. Les coordonnées des différents points considérés du système mécanique sont :

$$\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DG}=\begin{pmatrix}0\\0\\l_6\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DH}=\begin{pmatrix}0\\l_7\\l_8\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DI}=\begin{pmatrix}l_9\\l_{10}\\l_{11}\end{pmatrix}$$

$$,\ \overrightarrow{DJ}=\begin{pmatrix}l_{12}\\l_{13}\\l_{14}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{DK}=\begin{pmatrix}l_{17}\\l_{18}\\l_{19}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DL}=\begin{pmatrix}l_{20}\\l_{21}\\l_{22}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{DM}=\begin{pmatrix}0\\l_{15}\\l_{16}\end{pmatrix}$$

Les valeurs des coordonnées i.e. des composantes de l'ensemble $l=\{l_1,...,l_{22}\}$ sont rassemblées dans le tableau F.1.

Définition des écarts géométriques. Les différents torseurs écarts développés pour ce système mécanique sont donnés comme suit :

$$\{T_{1a/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1a1} & 0\\ \beta_{1a1} & 0\\ 0 & w_{1a1}\end{Bmatrix}_D,\quad \{T_{1f/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1f1} & 0\\ \beta_{1f1} & 0\\ 0 & w_{1f1}\end{Bmatrix}_D,\quad \{T_{1b/1}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1b1} & u_{1b1}\\ \beta_{1b1} & v_{1b1}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_D,$$

$$\{T_{2b/2}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2b2} & u_{2b2}\\ \beta_{2b2} & v_{2b2}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_D,\quad \{T_{2c/2}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{2c2} & u_{2c2}\\ \beta_{2c2} & v_{2c2}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_D,\quad \{T_{3f/3}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{3f3} & 0\\ \beta_{3f3} & 0\\ 0 & w_{3f3}\end{Bmatrix}_D,$$

$$\{T_{4c/4}\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{4c4} & u_{4c4}\\ \beta_{4c4} & v_{4c4}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_D,\quad \{T_{4d_1/4}\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{4d_14}\\ 0 & v_{4d_14}\\ 0 & w_{4d_14}\end{Bmatrix}_K,\quad \{T_{4d_2/4}\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{4d_24}\\ 0 & v_{4d_24}\\ 0 & w_{4d_24}\end{Bmatrix}_L,$$

$$\left\{T_{4d_3/4}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{4d_3 4}\\ 0 & v_{4d_3 4}\\ 0 & w_{4d_3 4}\end{Bmatrix}_M \quad , \quad \left\{T_{3e_1/3}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{3e_1 3}\\ 0 & v_{3e_1 3}\\ 0 & w_{3e_1 3}\end{Bmatrix}_H \quad , \quad \left\{T_{3e_2/3}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{3e_2 3}\\ 0 & v_{3e_2 3}\\ 0 & w_{3e_2 3}\end{Bmatrix}_I \quad ,$$

$$\left\{T_{3e_3/3}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{3e_3 3}\\ 0 & v_{3e_3 3}\\ 0 & w_{3e_3 3}\end{Bmatrix}_J \quad , \quad \left\{T_{5e_1/5}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{5e_1 5}\\ 0 & v_{5e_1 5}\\ 0 & w_{5e_1 5}\end{Bmatrix}_H \quad , \quad \left\{T_{6e_2/6}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{6e_2 6}\\ 0 & v_{6e_2 6}\\ 0 & w_{6e_2 6}\end{Bmatrix}_I \quad , \tag{F.1}$$

$$\left\{T_{7e_3/7}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{7e_3 7}\\ 0 & v_{7e_3 7}\\ 0 & w_{7e_3 7}\end{Bmatrix}_J \quad , \quad \left\{T_{5d_1/5}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{5d_1 5}\\ 0 & v_{5d_1 5}\\ 0 & w_{5d_1 5}\end{Bmatrix}_K \quad , \quad \left\{T_{5d_2 5}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{5d_2 5}\\ 0 & v_{5d_2 5}\\ 0 & w_{5d_2 5}\end{Bmatrix}_L$$

Définition des torseurs de spécification. Un torseur de spécification écrit au point *M* d'une surface *b* appartenant à la pièce *k* et référencé par rapport à la surface *a* est représenté par :

$$S_{kb/a}=\begin{Bmatrix}\alpha_{kba} & u_{kba}\\ \beta_{kba} & v_{kba}\\ \gamma_{kba} & w_{kba}\end{Bmatrix}_M \tag{F.2}$$

Tous les torseurs spécifications développés pour les spécifications géométriques de ce système mécanique sont :

$$S_{1f/a}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1fa} & u_{1fa}\\ \beta_{1fa} & v_{1fa}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_D \quad , \quad S_{4d_1/\mathrm{c}}=\begin{Bmatrix}0 & u_{4d_1 c}\\ 0 & v_{4d_1 c}\\ 0 & w_{4d_1 c}\end{Bmatrix}_K \quad , \quad S_{4d_2/\mathrm{c}}=\begin{Bmatrix}0 & u_{4d_2 c}\\ 0 & v_{4d_2 c}\\ 0 & w_{4d_2 c}\end{Bmatrix}_L \quad ,$$

$$S_{4d_3/\mathrm{c}}=\begin{Bmatrix}0 & u_{4d_3 c}\\ 0 & v_{4d_3 c}\\ 0 & w_{4d_3 c}\end{Bmatrix}_M \quad , \quad S_{3e_1/f}=\begin{Bmatrix}0 & u_{3e_1 f}\\ 0 & v_{3e_1 f}\\ 0 & w_{3e_1 f}\end{Bmatrix}_H \quad , \quad S_{3e_2/f}=\begin{Bmatrix}0 & u_{3e_2 f}\\ 0 & v_{3e_2 f}\\ 0 & w_{3e_2 f}\end{Bmatrix}_I \quad , \tag{F.3}$$

$$S_{3e_1/f}=\begin{Bmatrix}0 & u_{3e_1 f}\\ 0 & v_{3e_1 f}\\ 0 & w_{3e_1 f}\end{Bmatrix}_J$$

L'écart-type des composantes des torseurs de spécifications est calculé en utilisant :

$$\sigma=\frac{IT}{6.C_m} \tag{F.4}$$

L'écart-type de chaque composante des torseurs de spécifications est rassemblé dans le tableau F.2.

Définition des jeux. Il existe 9 liaisons dans ce système mécanique à considérer en plus de la liaison fonctionnelle. Tous les jeux de ce système mécanique sont développés comme suit :

$$\left\{g_{1f/3f}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{TBD} & u_{1f3f}\\ \beta_{TBD} & v_{1f3f}\\ \gamma_{1f3f} & \gamma_{TBD}\end{Bmatrix}_D,\quad \left\{g_{1b/2b}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{1b2b} & u_{1b2b}\\ \beta_{1b2b} & v_{1b2b}\\ \gamma_{1b2b} & 0\end{Bmatrix}_D,\quad \left\{g_{4c/2c}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_D,$$

$$\left\{g_{5d_1/4d_1}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{5d_14d_1} & 0\\ \beta_{5d_14d_1} & 0\\ \gamma_{5d_14d_1} & 0\end{Bmatrix}_K,\quad \left\{g_{6d_2/4d_2}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{6d_24d_2} & 0\\ \beta_{6d_24d_2} & 0\\ \gamma_{6d_24d_2} & 0\end{Bmatrix}_L,\quad \left\{g_{7d_3/4d_3}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{7d_34d_3} & 0\\ \beta_{7d_34d_3} & 0\\ \gamma_{7d_34d_3} & 0\end{Bmatrix}_M,$$

$$\left\{g_{5e_1/3e_1}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{5e_13e_1} & 0\\ \beta_{5e_13e_1} & 0\\ \gamma_{5e_13e_1} & 0\end{Bmatrix}_H,\quad \left\{g_{6e_2/3e_2}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{6e_23e_2} & 0\\ \beta_{6e_23e_2} & 0\\ \gamma_{6e_23e_2} & 0\end{Bmatrix}_I,\quad \left\{g_{7e_3/3e_3}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{7e_33e_3} & 0\\ \beta_{7e_33e_3} & 0\\ \gamma_{7e_33e_3} & 0\end{Bmatrix}_J \tag{F.5}$$

Les équations de compatibilité

Le nombre total de boucles topologiques de ce système mécanique est calculé en utilisant la formule suivante: $N_{loop}=9-7+1=3$. Avant de pouvoir écrire toutes les équations de compatibilité, tous les torseurs n'étant pas écrits au point *D*, y sont ramenés en utilisant la relation de Varignon stipulé dans le Chapitre1.

La première boucle (3), (6), (4), (5), (3) écrit au point *D* :

$$\begin{aligned}&\left\{S_{f/3e_2}\right\}+\left\{g_{3e_2/6e_2}\right\}+\left\{T_{6e_{2/6}}\right\}+\left\{T_{6/6d_2}\right\}+\left\{g_{6d_2/4d_2}\right\}+\left\{S_{4d_2/c}\right\}+\left\{g_{4d_1/5d_1}\right\}\\&+\left\{T_{5d_1/5}\right\}+\left\{T_{5/5e_1}\right\}+\left\{g_{5e_1/3e_1}\right\}=0\end{aligned} \tag{F.6}$$

$$\begin{aligned}C_c^1(\mathbf{X},\mathbf{G})=&-l_{11}\beta_{6e_23e_2}+l_{10}\gamma_{6e_23e_2}+u_{6e_26}-u_{6d_26}-l_{18}\gamma_{5d_14d_1}+l_{19}\beta_{5d_14d_1}\\&+u_{4d_2c}-u_{3e_2f}+u_{5d_15}-u_{5e_15}+l_8\beta_{5e_13e_1}-l_7\gamma_{5e_13e_1}=0\end{aligned} \tag{F.7}$$

$$\begin{aligned}C_c^2(\mathbf{X},\mathbf{G})=&-l_9\gamma_{6e_23e_2}+l_{11}\alpha_{6e_23e_2}+v_{6e_26}-v_{6d_26}+l_{17}\gamma_{6d_24d_2}-l_{19}\alpha_{6d_24d_2}-v_{3e_2f}\\&+v_{4d_2c}-l_{17}\gamma_{5d_14d_1}+l_{19}\alpha_{5d_14d_1}+v_{5d_15}-v_{5e_15}-l_8\alpha_{5e_13e_1}=0\end{aligned} \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}C_c^3(\mathbf{X},\mathbf{G})=&-w_{3e_2f}-l_{10}\alpha_{6e_23e_2}+l_9\beta_{6e_23e_2}-w_{6e_26}-w_{6d_26}+l_{18}\alpha_{6d_24d_2}-w_{3e_2f}\\&-l_{17}\beta_{6d_24d_2}+w_{4d_2c}-l_{18}\alpha_{5d_14d_1}+l_{17}\gamma_{5d_14d_1}+w_{5d_15}-w_{5e_15}+l_7\alpha_{5e_13e_1}=0\end{aligned} \tag{F.9}$$

$$C_c^4\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\alpha_{6e_2 3e_2}+\alpha_{5d_2 4d_2}-\alpha_{5d_1 4d_1}+\alpha_{5e_1 3e_1}=0 \tag{F.10}$$

$$C_c^5\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\beta_{6e_2 3e_2}-\beta_{6d_2 4d_2}-\beta_{5d_1 4d_1}+\beta_{5e_1 3e_1}=0 \tag{F.11}$$

$$C_c^6\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\gamma_{6e_2 3e_2}+\gamma_{6d_2 4d_2}-\gamma_{5d_1 4d_1}+\gamma_{5e_1 3e_1}=0 \tag{F.12}$$

La seconde boucle (3), (7), (4), (6), (3) écrit au point *D* :

$$\begin{aligned}&\left\{S_{f/3e_3}\right\}+\left\{g_{3e_3/7e_3}\right\}+\left\{T_{7e_3/7}\right\}+\left\{T_{7/7d_3}\right\}+\left\{g_{7d_3/4d_3}\right\}+\left\{S_{4d_3/c}\right\}+\\&\left\{g_{4d_2/6d_2}\right\}+\left\{T_{6d_2/6}\right\}+\left\{T_{6/6e_2}\right\}+\left\{g_{6e_2/3e_2}\right\}=0\end{aligned} \tag{F.13}$$

$$\begin{aligned}C_c^7\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=&-l_{14}\beta_{7e_3 3e_3}+l_{13}\gamma_{7e_3 3e_3}+u_{7e_3 7}-u_{7d_3 7}+l_{16}\beta_{7d_3 4d_3}-l_{15}\gamma_{7d_3 4d_3}-l_{19}\beta_{6d_2 4d_2}\\&+l_{18}\gamma_{6d_2 4d_2}+u_{6d_2 6}-u_{6e_2 6}+l_{11}\beta_{6e_2 3e_2}-u_{3e_3 f}+u_{4d_3 c}-l_{10}\gamma_{6e_2 3e_2}=0\end{aligned} \tag{F.14}$$

$$\begin{aligned}C_c^8\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=&-l_{12}\gamma_{7e_3 3e_3}+l_{14}\alpha_{7e_3 3e_3}+v_{7e_3 7}-v_{7d_3 7}-l_{16}\alpha_{7d_3 4d_3}-l_{17}\gamma_{6d_2 4d_2}+l_{19}\alpha_{6d_2 4d_2}\\&+v_{6d_2 6}-v_{6e_2 6}+l_9\gamma_{6e_2 3e_2}-l_{11}\alpha_{6e_2 3e_2}-v_{3e_3 f}+v_{4d_3 c}=0\end{aligned} \tag{F.15}$$

$$\begin{aligned}C_c^9\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=&-l_{13}\alpha_{7e_3 3e_3}-l_{12}\beta_{7e_3 3e_3}+w_{7e_3 7}-w_{7d_3 7}+l_{15}\alpha_{7d_3 4d_3}+w_{4d_3 c}-l_{18}\alpha_{6d_2 4d_2}\\&+l_{17}\beta_{6d_2 4d_2}+w_{6d_2 6}-w_{6e_2 6}+l_{10}\alpha_{6e_2 3e_2}-l_9\beta_{6e_2 3e_2}-w_{3e_3 f}-w_{3d_3 c}=0\end{aligned} \tag{F.16}$$

$$C_c^{10}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\alpha_{7e_3 3e_3}+\alpha_{7d_3 4d_3}-\alpha_{6d_2 4d_2}+\alpha_{6e_2 3e_2}=0 \tag{F.17}$$

$$C_c^{11}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\beta_{7e_3 3e_3}+\beta_{7d_3 4d_3}-\beta_{6d_2 4d_2}+\beta_{6e_2 3e_2}=0 \tag{F.18}$$

$$C_c^{12}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\gamma_{7e_3 3e_3}+\gamma_{7d_3 4d_3}-\gamma_{6d_2 4d_2}+\gamma_{6e_2 3e_2}=0 \tag{F.19}$$

La troisième boucle (1), (3), (5), (4), (2), (1) écrit au point *D* :

$$\begin{aligned}&\left\{S_{\mathrm{a}/1f}\right\}+\left\{g_{1f/3f}\right\}+\left\{S_{f/3\mathrm{e}_1}\right\}+\left\{g_{3\mathrm{e}_1/5e_1}\right\}+\left\{T_{5e_1/5}\right\}+\left\{T_{5/5\mathrm{d}_1}\right\}+\\&\left\{g_{5d_1/4d_1}\right\}+\left\{S_{4d_1/\mathrm{c}}\right\}+\left\{g_{4\mathrm{c}/2\mathrm{c}}\right\}+\left\{T_{2c/2}\right\}+\left\{T_{2/2b}\right\}+\left\{g_{2\mathrm{b}/1\mathrm{b}}\right\}=0\end{aligned} \tag{F.20}$$

$$\begin{aligned}C_c^{13}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=&-u_{1fa}+u_{1f3f}-u_{3e_1 f}+u_{5e_1 5}-u_{5d_1 5}+l_{18}\gamma_{5d_1 4d_1}+u_{4d_1 c}+u_{2c2}-u_{2b2}\\&-u_{1b2b}-l_{18}\beta_{5e_1 3e_1}+l_7\gamma_{5e_1 3e_1}=0\end{aligned} \tag{F.21}$$

$$\begin{aligned}C_c^{14}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=&-v_{1fa}+v_{1f3f}-v_{3e_1 f}+v_{5e_1 5}-v_{5d_1 5}+l_{17}\gamma_{5d_1 4d_1}-l_{19}\alpha_{5d_1 4d_1}+v_{4d_1 c}\\&+v_{2c2}-v_{2b2}-v_{1b2b}+l_8\alpha_{5d_1 4d_1}=0\end{aligned} \tag{F.22}$$

$$C_c^{15}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=w_{1f3f}-w_{3e_1f}-l_7\alpha_{5e_13e_1}+w_{5e_15}-w_{5d_15}+l_{18}\alpha_{5d_14d_1}-l_{17}\gamma_{5d_14d_1}+w_{4d_1c}-w_{1b2b}=0 \quad \text{(F.23)}$$

$$C_c^{16}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\alpha_{1af}+\alpha_{1f3f}-\alpha_{5e_13e_1}+\alpha_{5d_14d_1}+\alpha_{2c2}-\alpha_{2b2}-\alpha_{1b2b}=0 \quad \text{(F.24)}$$

$$C_c^{17}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\beta_{1af}+\beta_{1f3f}-\beta_{5e_13e_1}+\beta_{5d_14d_1}+\beta_{2c2}-\beta_{2b2}-\beta_{1b2b}=0 \quad \text{(F.25)}$$

$$C_c^{18}\left(\mathbf{X},\mathbf{G}\right)=-\gamma_{1f3f}-\gamma_{5e_13e_1}+\gamma_{5d_14d_1}+\gamma_{1b2b}=0 \quad \text{(F.26)}$$

Les conditions fonctionnelles

Pour cette pompe de PIERBURG, il n'y a pas de conditions fonctionnelles car une fois qu'elle s'assemble, elle est fonctionnelle.

Les contraintes d'interface

Le système mécanique simplifié de la pompe ne possède qu'un seul contact flottant provenant de la liaison *1b/2b*. Ainsi, c'est à cette seule liaison qu'est développée la contrainte d'interface.

Contrainte d'interface de la liaison *1b/2b*:

$$C_i^1\left(\mathbf{X},\mathbf{G}',\mathbf{F}\right)=\cos\theta.u_{2b1b}+l_{b_k}.\cos\theta.\beta_{2b1b}-l_{b_k}.\sin\theta.\alpha_{2b1b}+\sin\theta.v_{2b1b}\leq\left(\frac{d_{1b}-d_{2b}}{2}\right)+\left\|F_{2\mathrm{b},M\left(l_{b_k},\theta\right)}\right\|+\left\|F_{1\mathrm{b},M\left(l_{b_k},\theta\right)}\right\|$$

(F.27)

Formulation du problème d'assemblage. Le problème d'assemblage peut donc être formulé de la manière suivante en ayant pour objectif l'existence des composantes des torseurs jeux permettant l'assemblage du système mécanique de la pompe.

$$R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)=\begin{cases}\underset{\tilde{\mathbf{G}}'\in\mathbf{R}^{17}}{\mathrm{Min}} & \mathrm{f}\left(\tilde{\mathbf{G}}'\right)\\ sous & \left[C_{omp}\right]_{[18\mathrm{x}17]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[17\mathrm{x}1]}=\left[\mathbf{X}^{(k)}+\mathbf{G}_{1f/3f}^{*(k)}\right] \\ & \left[C_{\mathrm{Interface}}\right]_{[(N_c\mathrm{x}N_d)\mathrm{x}17]}.\left[\tilde{\mathbf{G}}'\right]_{[17\mathrm{x}1]}\leq\left[\mathbf{X}_{\mathrm{Intrinsèque}}^{(k)}+\mathbf{F}^{(k)}\right]\end{cases} \quad \forall\ k=\left\{1,\ldots,N_{mc}\right\}$$

(F.28)

Où $N_c = 5$, $N_d = 30$.

La formalisation mathématique de la probabilité de non-assemblage est donnée par :

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{na}} = \mathrm{Prob}\left(E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)\right) \tag{F.29}$$

où $E_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ est l'évènement suivant : « Pour des vecteurs $\mathbf{X}^{(k)}$ et $\mathbf{F}^{(k)}$ tirés, il n'existe pas de vecteur jeu $\tilde{\mathbf{G}}' \in \mathbf{R}^{17}$ tel que $R_a\left(\mathbf{X},\mathbf{F}\right)$ ait une solution ».

F.2 Valeurs des paramètres

Les valeurs des dimensions nominales sont données dans le tableau F.1.

Tableau F.1 : Valeurs des coordonnées des points et des dimensions nominales du mécanisme

Dimension	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}
Valeur	-19.5	-8.6	-2.2	3.5	11.6	21	-14	3.5	7	-12.1	3.5
Dimension	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	l_{20}	l_{21}	l_{22}
Valeur	-7	-12.1	3.5	14	11.5	7	-12.1	11.5	-7	-12.1	11.5
Dimension	d_{1b}	d_{2b}									
Valeur	10	9.9									

Les écarts-types des composantes des torseurs de spécifications sont donnés dans le tableau F.2.

Tableau F. 2 : Ecarts-types des composantes des torseurs de spécification

Composante	α_{1fa}	β_{1fa}	u_{1fa}	v_{1fa}	u_{4d_1c}	v_{4d_1c}	w_{4d_1c}	u_{4d_2c}
Ecart-type	$9.7\text{x}10^{-5}$	$9.7\text{x}10^{-5}$	$1.2\text{x}10^{-2}$	$1.2\text{x}10^{-2}$	$9\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$
Composante	u_{4d_3c}	v_{4d_3c}	w_{4d_3c}	u_{3e_1f}	v_{3e_1f}	w_{3e_1f}	u_{3e_2f}	v_{3e_2f}
Ecart-type	$9\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$
Composante	v_{3e_3f}	w_{3e_3f}	$\mu_{d_{1b}}$	$\mu_{d_{2b}}$	v_{4d_2c}	w_{4d_2c}	w_{3e_2f}	u_{3e_3f}
Ecart-type	$4.8\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$	$1.6\text{x}10^{-3}$	$2.8\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$	$9\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$	$4.8\text{x}10^{-3}$

Bibliographie

Abhishek Das (2016). Shape error modelling of compliant part. In Shape variation modelling analysis and statistical control for assembly system with compliant parts, PhD thesis, University of Warwick, p. 252.

Adragna, P.A. (2007). Tolérancement des Systèmes Assemblés, une approche par le Tolérancement Inertiel et Modal. Thèse de Doctorat. Université de Savoie.

Adragna, P.A., Faverlière, H., Samper, S., et Pillet, M. (2008). Statiscal assemblies with form errors - a 2D example. In Micro-Assmbly Technologies and Applications, (Ratcchev, S., Koelmeijer, S.), pp. 23–33.

Ameta, G., Samper, S., et Giordano, M. (2011). Comparison of Spatial Math Models for Tolerance Analysis: Tolerance-Maps, Deviation Domain, and TTRS. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *11*, 1–8.

Anselmetti, B. (2006). Generation of functional tolerancing based on positioning features. Comput.-Aided Des. *38*, 902–919.

Ballot, E. (1995). Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement. Thèse de Doctorat. Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Ballot, E., et Bourdet, P. (1998). A Computation Method for the Consequences of Geometric Errors in Mechanisms. In Geometric Design Tolerancing: Theories, Standards and Applications, H.A. ElMaraghy, ed. (Boston, MA: Springer US), pp. 197–207.

Ballu, A., et Mathieu, L. (1993). Analysis of Dimensional and Geometrical Specifications: Standards and Models. In Proceedings of 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, (Cachan (France)).

Ballu, A., et Mathieu, L. (1996). Univocal expression of functional and geometrical tolerances for design, manufacturing and inspection. Comput.-Aided Toler. Proc. 4th CIRP Des. Semin. Univ. Tokyo Tokyo Jpn. April 5–6 1995 31–46.

Ballu, A., et Mathieu, L. (1999). Choice of functional specifications using graphs within the frame work of education. (Enschede (Netherlands): ISBN 0-7923-5654-3, Kluwer academic publisher), pp. 197–206.

Ballu, A., Plantec, J.-Y., et Mathieu, L. (2008). Geometrical reliability of overconstrained mechanisms with gaps. CIRP Ann.-Manuf. Technol. *57*, 159–162.

Beaucaire, P., Gayton, N., Duc, E., et Dantan, J.Y. (2013). Statistical tolerance analysis of overconstrained mechanisms with gaps using system reliability methods. Comput. Aided Des. *45*, 47–55.

Bertsimas, D., et Tsitsiklis, J.N. (1997). Introduction to linear optimization.

Boggs, P.T., et Tolle, J.W. (1996) Sequential Quadratic Programming. Acta Numerica. pp. 1-000

Bourdet, P., Mathieu, L., Lartigue, C., et Ballu, A. (1996). The concept of the small displacement torsor in metrology. Ser. Adv. Math. Appl. Sci. Adv. Math. Tools Metrol. II *40*, 110–122.

C. A. Schenk, G. I. Shueller (2003). Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections. Non-Linear Mech. 1119–1132.

Cammarata, A. (2017). A novel method to determine position and orientation errors in clearance-affected overconstrained mechanisms. Mech. Mach. Theory *118*, 247–264.

Charpentier, F., Ballu, A., et Pailhes, J. (2012). A scientific point of view of a simple industrial tolerancing process. 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, 12 pages.

Chase, K.W., et Parkinson, A.R. (1991). A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies. Res. Eng. Des. *3*, 23–37.

Dantan, J.Y. (2000). Synthèse des spécifications géométriques : modélisation par Calibre à Mobilités Internes. Thèse de Doctorat. Université Bordeaux 1.

Dantan, J.-Y. (2002). Semantic of geometrical specifications : Class of features used in specification — Gauge with Internal Mobilities. Mécanique Ind. *3*, 107–112.

Dantan, J.-Y. (2015). Comparison of Skin Model representations and Tooth Contact Analysis techniques for Gear tolerance analysis. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *15*, 021010.

Dantan, J.Y., et Ballu, A. (2002). Assembly specification by Gauge with Internal Mobilities (G.I.M.) : a specification semantics deduced from tolerance synthesis. J. Manuf. Syst. *21*, 218–235.

Dantan, J.Y., et Qureshi, A.J. (2009). Worst case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and monte carlo simulation. Comput. Aided Des. *41*, 1–12.

Dantan, J.Y., Mathieu, L., Ballu, A., et Martin, P. (2005). Tolerance synthesis: quantifier notion and virtual boundary. Comput.-Aided Des. *37*, 231–240.

Dantan, J.-Y., Huang, Z., Goka, E., Homri, L., Etienne, A., Bonnet, N., et Rivette, M. (2017). Geometrical variations management for additive manufactured product. CIRP Ann. - Manuf. Technol. 161–164.

Dantzig, G.B., et Thapa, M.N. (1997). Linear programming, 1: Introduction. Editions Springer.

David F. Rogers (2001). An introduction to NURBS with hisorical perspective (Academic Press).

Davidson, J.K., Mujezinovic, A., et Shah, J.J. (2002). A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces. ASME Trans. J. Mech. Des. *124*, 609–622.

Diamond, S., et Boyd, S. (2016) CVXPY: A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization. Journal of Machine Learning Research. pp. 1-5.

Domahidi, A., Chu, E., et Boyd, S. (2013). ECOS: An SOCP solver for embedded systems. In Control Conference (ECC), 2013 European, (IEEE), pp. 3071–3076.

Dumas, A. (2014). Développement de méthodes probabilisites pour l'anbalyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-constraints.

Dumas, A., Gayton, N., Dantan, J.-Y., et Sudret, B. (2015a). A new system formulation for the tolerance analysis of overconstrained mechanisms. Probabilistic Eng. Mech. *40*, 66–74.

Dumas, A., Dantan, J.Y., et Gayton, N. (2015b). Impact of a behavior model linearization strategy on the tolerance analysis of over-constrained mechanisms. Comput. Aided Des. *62*, 152–163.

Dumas, A., Dantan, J.-Y., Gayton, N., Bles, T., et Loebl, R. (2015c). An iterative statistical tolerance analysis procedure to deal with linearized behavior models. J. Zhejiang Univ.-Sci. A *16*, 353–360.

E. Capello et Q. Semeraro (2000). Harmonic fitting approach for plane geometry measurements. Adv. Manuf. Technol. 250–258.

E. Dimas et D. Briassoulis (1999). 3D geometric modelling based on NURBS: a review. Adv. Eng. Softw. 741–751.

Embrechts, P., Lindskog, F., et Mcneil, A. (2003). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. In Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, (Switzeland: Elsevier), pp. 329–384.

Favreliere, H. (2009). Tolérancement modal: de la métrologie vers les spécifications. Génie mécanique. Université de Savoie. PhD Thesis.

Favrelière, Samper et Adragna (2010). Caractérisation des défauts d'une surface sphérique par décomposition modale. HAL Archives-ouvertes.fr

Franciosa, P., Gerbino, S., et Patalano, S. (2010). Variational modeling and assembly constraints in tolerance analysis of rigid part assemblies: planar and cylindrical features. Int. J. Adv. Manuf. Technol. *49*, 239–251.

Franciosa, P., Gerbino, S., et Patalano, S. (2011). Simulation of variational compliant assemblies with shape errors based on morphing mesh approach. Int. J. Adv. Manuf. Technol. *53*, 47–61.

Gaunet, D. (1994). Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide au tolérancement des mécanismes en CFAO. Thèse de Doctorat. Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Gill, P.E., et Wong (2010), E. Sequential Quadratic Programming Methods, UCSD Department of Mathematics, Technical Report NA-10-03.

Giordano, M., et Duret, D. (1993). Clearance Space and Deviation Space. In 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, (Cachan (France): ISBN 2-212-08779-9), pp. 179–196.

Giordano, M., Kataya, B., et Pairel, E. (2001). Tolerance analysis and synthesis by means of clearance and deviation spaces. (Cachan (France): ISBN 1-4020-1423-6 - Kluwer academic publisher), pp. 145–154.

Goka, E., Homri, L., Beaurepaire, P., et Dantan, J.-Y. (2017). Geometrical variation simulation for assembly with form defects. ASME 2017 Int. Mech. Eng. Congr. Expo. *Advanced Manufacturing*, V002T02A099.

Gouyou, D., Teissandier, D., et Delos, V. (2016). Tolerance Analysis by Polytopes: Application to Assembly Interferences Diagnosis. Procedia CIRP *43*, 52–57.

Grandjean, J., Ledoux, Y., et Samper, S. (2013). On the role of form defects in assemblies subject to local deformations and mechanical loads. Int. J. Adv. Manuf. Technol. *65*, 1769–1778.

Grant, M.C., et Boyd, S.P. (2008). Graph Implementations for Nonsmooth Convex Programs. In Recent Advances in Learning and Control, V.D. Blondel, S.P. Boyd, et H. Kimura, eds. (Springer London), pp. 95–110.

Gupta, S., et Turner, J.U. (1993). Variational solid modeling for tolerance analysis. Comput. Graph. Appl. IEEE *13*, 64–74.

Heidenreich, N.-B., Schindler, A., et Sperlich, S. (2013). Bandwidth selection for kernel density estimation: a review of fully automatic selectors. AStA Adv. Stat. Anal. *97*, 403–433.

Henke, R., P., et Summerhays, K., D., (1999). Methods for evaluation of systematic geometric deviations in machined parts and their relationships to process variables. Precis. Eng. 273–292.

Homri, L., Goka, E., Levasseur, G., et Dantan, J.-Y. (2017). Tolerance analysis — Form defects modeling and simulation by modal decomposition and optimization. Comput.-Aided Des. *91*, 46–59.

Hong, Y.S., et Chang, T.-C. (2002). A comprehensive review of tolerancing research. Int. J. Prod. Res. 2425–2459.

Hu, Y.-Z., Barber, G.C., et Zhu, D. (1999). Numerical Analysis for the Elastic Contact of Real Rough Surfaces. Tribol. Trans. *42*, 443–452.

Huang, W., et Ceglarek, D. (2002). Mode-based decomposition of part form error by discrete-cosine-transform with implementation to assembly and stamping system with compliant parts. CIRP Ann. - Manuf. Technol. *51*, 21–26.

Huang, Z., Dantan, J.-Y., Etienne, A., Rivette, M., et Bonnet, N. (2018). Geometrical deviation identification and prediction method for additive manufacturing. Rapid Prototyp. Journal, Vol. 24 Issue: 9, pp.1524-1538, https://doi.org/10.1108/RPJ-07-2017-0137.

Hummel, S.R., et Chassapis, C. (2000). Conguration design and optimization of universal joints with manufacturing tolerances. Mech. Mach. Theory 14.

J-Y Dantan, A-J Qureshi (2009). Worst-case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and Monte Carlo simulation. Comput.-Aided Des. 1–12.

Khayam, S. ali (2003). The Discrete cosine transform (DCT): Theory and Application, Department of Electrical & Computer Engineering. ECE 802-602 : Information Theory and Coding. pp. 1-32.

Kim, D.-S., Ok, S.-Y., Song, J., et Koh, H.-M. (2013). System reliability analysis using dominant failure modes identified by selective searching technique. Reliab. Eng. Syst. Saf. *119*, 316–331.

L. Homri (2014). Stratégies de mise en oeuvre des polytopes en analyse de tolérances. Thèse de Doctorat. Université Bordeaux.

Lê, H.N., Ledoux, Y., et Ballu, A. (2014). Experimental and theoretical investigations of mechanical joints with form defects. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *14*.

Lecompte, J., Legoff, O., et Hascoet, J.Y. (2010). Technological Form Defects Identification using Discrete Cosine Transform Method. Int. J. Adv. Manuf. Technol. *51*, 1033–1044.

Les Piegl et Wayne Tiller (1997). The NURBS Book.

Li, B., et Roy, U. (2001). Relative positioning of toleranced polyhedral parts in an assembly. Iie Trans. *33*, 323–336.

Lin, K.-S., Chan, K.-Y., et Lee, J.-J. (2018). Kinematic error analysis and tolerance allocation of cycloidal gear reducers. Mech. Mach. Theory *124*, 73–91.

Liu, J., Zhang, Z., Ding, X., et Shao, N. (2018). Integrating form errors and local surface deformations into tolerance analysis based on skin model shapes and a boundary element method. Comput.-Aided Des. *104*, 45–59.

Louhichi, B., Tlija, M., Benamara, A., et Tahan, A. (2015). An algorithm for CAD tolerancing integration: Generation of assembly configurations according to dimensional and geometrical tolerances. Comput.-Aided Des. *62*, 259–274.

M. Gérardin et D. Rixen (1997). théorie des vibrations : application à la dynamique des structures (Elsevier - masson).

Mansuy, M. (2012). Aide au tolérancement tridimensionnel: Modèle des domaines. Thèse de Doctorat. Université de Savoie.

Mansuy, M., Giordano, M., et Hernandez, P. (2011). A new calculation method for the worst case tolerance analysis and synthesis in stack-type assemblies. Comput.-Aided Des. *43*, 1118–1125.

Marziale, M., et Polini, W. (2010). Tolerance analysis: a new model based on variational solid modeling. Proc. ASME 2010 10th Bienn. Conf. Eng. Syst. Des. Anal.

Matteo Broggi (2011). Computational aspects in the buckling analysis of composite cylindrical shells with random imperfections. PhD Thesis. Leopold Franzens, University of Innsbruck.

Meyer, X. (2011). Etude et implémentation de l'algorithme du simplexe standard sur GPUs. Université de Genève.

M-H Kyung, E. Sacks (2003). Nonlinear kinematic tolerance analysis of planar mechanical systems. Comput. Aided Des. 901–911.

Morière, S., Mailhé, J., Linares, J., et Sprauel, J. (2010). Assembly Method Comparison Including form Defect. In Product Lifecycle Management: Geometric Variations, (London, UK: Max Giordano, Luc Mathieu et François Villeneuve), pp. 258–270.

Moroni, G., et Polini, W. (2003). Tolerance-based Variations in Solid Modeling. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *3*, 345.

Morse, E.P. (2004). Statistical Analysis of Assemblies Having Dependent Fitting Conditions. In Design Engineering, (Anaheim, California, USA: ASME), pp. 91–95.

Nabil Anwer, alex Ballu, Luc Mathieu (2013). The skin model, a comprehensive geometric model for engineering design. CIRP Ann. - Manuf. Technol. 143–146.

Nelder, J. (1965). A simplex method for function minimization. Comput. J. *7*, 308–313.

Ni Weihua et Yao Zhenquiang (2013). Cylindricity modeling and tolerance analysis for cylindrica l compone nts. Adv. Manuf. Technol. 867–874.

Nigam, S.D., et Turner, J.U. (1995). Review of statistical approaches of tolerance analysis. Comput.-Aided Des. *27*, 6–15.

Nocedal, J., et Wright, S.J. (1999). Numerical optimization (New York: Springer).

O'Donoghue, B., Chu, E., Parikh, N., et Boyd, S. (2016). Conic Optimization via Operator Splitting and Homogeneous Self-Dual Embedding. J. Optim. Theory Appl. pp. 1-24.

Petit, J.P. (2004). Spécification géométrique des produits : méthode d'analyse de tolérances. Application en Conception Assistée par Ordinateur. Thèse de Doctorat. Université de Savoie.

Putignano, C., Afferrante, L., Carbone, G., et Demelio, G. (2012). A new efficient numerical method for contact mechanics of rough surfaces. Int. J. Solids Struct. *49*, 338–343.

Qureshi, A.J. (2011). Product robustness management : formalization by formal logic, application to set based design, and tolerancing. Thèse de Doctorat. Arts et Métiers, Paris Tech.

Qureshi, A.J., Dantan, J.Y., Sabri, V., Beaucaire, P., et Gayton, N. (2012). A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimisation and Monte-Carlo simulation. Comput. Aided Des. *44*, 132–142.

Raghu, A., et Melkote, S.N. (2004). Analysis of the effects of fixture clamping sequence on part location errors. Int. J. Mach. Tools Manuf. *44*, 373–382.

Raja, J., et Radhakrishnan, V. (1977). Analysis and Synthesis of Surface Profiles using Fourier Series. Int. J. Mach. Tool Des. Res. *17*, 245–251.

Rajagopalan, B., Lall, U., Tarboton, D.G., et Bowles, D.S. (1997). Multivariate nonparametric resampling scheme for generation of daily weather variables. Stoch. Hydrol. Hydraul. *11*, 65–93.

Rameau, J.-F., Serré, P., et Moinet, M. (2018). Clearance vs. tolerance for rigid overconstrained assemblies. Comput.-Aided Des. *97*, 27–40.

Roy, U., et Li, B. (1999). Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II.: Size, orientation and position tolerances. Comput.-Aided Des. *31*, 273–285.

S. Samper (2009). Monographie sur le tolérancement modal. Laboratoire SYMME. HAL archives-ouvertes.fr. pp. 1–50.

Sacks, E., et Joskowicz, L. (1997). Parametric kinematic tolerance analysis of planar mechanisms. Comput.-Aided Des. *29*, 333–342.

Samper, S., et Formosa, F. (2006). Form Defects Tolerancing by Natural Modes Analysis. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *7*.

Samper, S., Adragna, P.A., Favreliere, H., et Pillet, M. (2010). Modeling of 2D and 3D assemblies taking into account form errors of plane surfaces. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *9*.

Schleich, B. (2017). Skin model shapes: a new paradigm for the tolerance analysis and the geometrical variations modelling in mechanical engineering. Erlangen.

Schleich, B., et Wartzack, S. (2014). A discrete geometry approach for tolerance analysis of mechanism. Mech. Mach. Theory *77*, 148–163.

Schleich, B., et Wartzack, S. (2018). Gap hull estimation for rigid mechanical joints considering form deviations and multiple pairs of mating surfaces. Mech. Mach. Theory *128*, 444–460.

Schleich, B., Wartzack, S., Anwer, N., et Mathieu, L. (2015a). Skin Model Shapes: Offering New Potentials for Modelling Product Shape Variability. In Volume 1A: 35th Computers and Information in Engineering Conference, (Boston, Massachusetts, USA: ASME), p. V01AT02A015.

Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L., et Wartzack, S. (2015b). Contact and mobility simulation for mechanical assemblies based on skin model shapes. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *15*, 021009.

Scott, D.W. (1992). Multivariate density estimation: theory, practice, and visualization. Editions Wiley.

Sergent, A., Bui, M.-H., Favreliere, H., Duret, D., Samper, S., et Villeneuve, F. (2011). Identification of machining defects by Small Displacement Torsor and form parameterization method. ArXiv Prepr. ArXiv11023171.

Shen, Z., Shah, J.J., et Davidson, J.K. (2005). Simulation-based tolerance and assemblability analyses of assemblies with multiple pin/hole floating mating conditions. In ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, (American Society of Mechanical Engineers), pp. 429–440.

Silverman, B.W. (1986). Density estimation for statistics and data analysis. Editions Chapman & Hall.

Singh, G., Ameta, G., Davidson, J.K., et Shah, J.J. (2013). Tolerance Analysis of a Self-Aligning Coupling Assembly using Tolerance-Maps in Design. J. Mech. Des. *135*.

Sodhi, R., et Turner, J.U. (1994). Relative positioning of variational part models for design analysis. Comput.-Aided Des. *26*, 366–278.

Srinivasan, V. (2007). Computational Metrology for the Design and Manufacture of Product Geometry: A Classification and Synthesis. J. Comput. Inf. Sci. Eng. *7*, 3.

Strohmer, T., et Tanner, J. (2015). Implementations of Shannon's sampling theorem, a time-frequency approach. Sampl. Theory Signal Image Process. *4*, 17.

Tai, V.C., et Uhlen, K. (2015). Resampling of Data for Offshore Grid Design Based on Kernel Density Estimation and Genetic Algorithm. Energy Procedia *80*, 365–375.

Vandenberghe (2010), L. The CVXOPT linear and quadratic cone program solvers. http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/publications/coneprog.pdf. pp. 1-30.

Wagersten, O., Lindau, B., Lindkvist, L., et Soderberg, R. (2014). Using morphing techniques in early variations analysis. J. Comput. Inf. Sci. Eng., Vol 14, 011007-1 - 011007-9.

Wyant, J.C., et Creath, K. (1992). Basic wavefront aberration theory for optical metrology. In Applied Optics and Optical Engineering, (New York: Robert R. Shannon et James C. Wyant), p. 53.

Yan, X., et Ballu, A. (2016). Toward an Automatic Generation of Part Models with Form Error. Procedia CIRP *43*, 23–28.

Yan, X., et Ballu, A. (2018). Review and Comparison of Form Error Simulation Methods for Computer Aided Tolerancing. J. Comput. Inf. Sci. Eng, 010802-1-010802-16.

Zernike, G. (1942). Phase contrast, a new method for the microscopic observation of transparent objects. Phys. 9 686–688.

Zhang, M., Anwer, N., Mathieu, L., et Zhao, H.B. (2011). A Discrete Geometry Framework for Geometrical Product Specifications. CIRP Des. Conf., 142-148.

Zhou, K., Bao, H., et Shi, J. (2004). 3D surface filtering using spherical harmonics. Comput.-Aided Des. *36*, 363–375.

Zou, Z., et Morse, E.P. (2004). A gap-based approach to capture fitting conditions for mechanical assembly. Comput. Aided Des. *36*, 691–700.

Analyse des tolérances des systèmes complexes-Modélisation des imperfections de fabrication pour une analyse plus réaliste et robuste du comportement des systèmes

RESUME : L'analyse des tolérances a pour but de vérifier lors de la phase de conception, l'impact des tolérances individuelles sur l'assemblage et la fonctionnalité d'un système mécanique. Les produits fabriqués possèdent différents types de contacts et sont sujets à des imperfections de fabrication qui sont sources de défaillances d'assemblage et fonctionnelle. Les méthodes généralement proposées pour l'analyse des tolérances ne considèrent pas les défauts de forme. L'objectif des travaux de thèse est de proposer une nouvelle procédure d'analyse des tolérances permettant de prendre en compte les défauts de forme et le comportement géométriques des différents types de contacts. Ainsi, dans un premier temps, une méthode de modélisation des défauts de forme est proposée afin de rendre les simulations plus réalistes. Dans un second temps, ces défauts de forme sont intégrés dans la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique hyperstatique, en considérant les différents types de contacts. En effet, le comportement géométrique des différents types de contacts est différent dès que les défauts de forme sont considérés. La simulation de Monte Carlo associée à une technique d'optimisation est la méthode choisie afin de réaliser l'analyse des tolérances. Cependant, cette méthode est très couteuse en temps de calcul. Pour pallier ce problème, une approche utilisant des modèles probabilistes obtenus grâce à l'estimation par noyaux, est proposée. Cette nouvelle approche permet de réduire les temps de calcul de manière significative.

Mots-clefs : Analyse des tolérances ; défauts de forme ; types de contacts ; simulation de Monte Carlo ; optimisation ; linéarisation ; modèles probabilistes ; méthode du noyau ; système mécanique hyperstatique

Tolerance analysis of complex systems-Manufacturing imperfections modeling for a realistic and robust analysis of systems behavior

ABSTRACT: Tolerance analysis aims toward the verification of the impact of individual tolerances on the assembly and functional requirements of a mechanical system. The manufactured products have several types of contacts and their geometry is imperfect, which may lead to non-functioning and non-assembly. Traditional methods for tolerance analysis do not consider the form defects. This thesis aims to propose a new procedure for tolerance analysis which considers the form defects and the different types of contact in its geometrical behavior modeling. A method is firstly proposed to model the form defects to make realistic analysis. Thereafter, form defects are integrated in the geometrical behavior modeling of a mechanical system and by considering also the different types of contacts. Indeed, these different contacts behave differently once the imperfections are considered. The Monte Carlo simulation coupled with an optimization technique is chosen as the method to perform the tolerance analysis. Nonetheless, this method is subject to excessive numerical efforts. To overcome this problem, probabilistic models using the Kernel Density Estimation method are proposed.

Keywords: tolerance analysis; form defects; contacts types; Monte Carlo simulation; optimization; linearization; probabilistic models; Kernel Density Estimation method; over-constrained mechanical system

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY