



**HAL**  
open science

# Analyse de la stabilité au feu des murs en béton armé par l'approche calcul à la rupture

Mingguan Yang

► **To cite this version:**

Mingguan Yang. Analyse de la stabilité au feu des murs en béton armé par l'approche calcul à la rupture. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2018. Français. NNT : 2018PESC1169 . tel-02297575

**HAL Id: tel-02297575**

**<https://pastel.hal.science/tel-02297575>**

Submitted on 26 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR**

de l'UNIVERSITÉ PARIS-EST

**Spécialité : Structures et Matériaux**

par :

**Mingguan YANG**

intitulée :

**Analyse de la stabilité au feu des murs en béton armé par l'approche Calcul à la Rupture**

soutenue le 20 décembre 2018, devant le jury composé de :

Prof. François Buyle-Bodin	Rapporteur	Université Lille 1
Prof. Mohammed Hjiiaj	Rapporteur	INSA de Rennes
Prof. Jean-Marc Franssen	Président, Examineur	Université de Liège
Dr. Jérémy Bleyer	Examineur	Ecole des Ponts ParisTech
Prof. Patrick de Buhan	Directeur de thèse	Ecole des Ponts ParisTech
Dr. Duc Toan Pham	Encadrant de thèse	CSTB
Dr. Jean-Vivien Heck	Invité	CSTB



À Jian

À mes Parents



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur Jean-Marc Frassen de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Messieurs les Professeurs François Buyle-Bodin et Mohammed Hjiiaj qui ont assumé la lourde tâche d'examiner ce travail en détail et qui en sont les rapporteurs. Je tiens à les remercier pour les précieuses suggestions qu'ils m'ont apportées. J'adresse ma sincère reconnaissance au Docteur Jean-Vivien Heck pour avoir participé à l'évaluation de cette thèse.

Je voudrais témoigner ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Patrick De Buhan qui m'a guidé tout au long de ce travail en me laissant une grande liberté de manœuvre pour explorer mes propres idées. Il a d'abord été mon professeur, puis le directeur de mes travaux. J'ai eu la chance de bénéficier de son immense pédagogie, rendant ainsi accessible à tous le cours de Calcul à la Rupture. J'ai été encore plus touché pour ses qualités humaines, d'écoute et de compréhension tout au long de ma thèse. Enfin, je tiens à le remercier pour sa grande disponibilité ainsi que pour ces encouragements permanents.

Mon travail a pour origine la thèse de Docteur Duc Toan Pham. Je voudrais donc lui adresser mes remerciements les plus sincères pour la confiance qu'il m'a accordée et pour toutes les discussions sur l'avancement de la thèse.

Un grand merci à Jérémy Bleyer pour sa disponibilité ainsi que toutes les heures de discussion relative à l'outil numérique du Calcul à la Rupture qu'il a développé.

Ce travail a été financé par le CSTB et réalisé au sein de l'équipe EA2R, division DSSF. Je souhaite remercier Jean-François Moller, Stéphane Charuel, Romuald Avenel, Pierre Pimienta et Philippe Rivillon, de m'avoir aidé pendant la réalisation des essais. Mes remerciements vont également à Amine Lahouar, Dhionis Dhima, El Mehdi Koutaiba, Emilie Sap, Karine Jacquemet, Mara Tan, Nicolas Pinoteau, Olivier Cheze, Paul Lardet, Quentin Jullien, Romain Mege, Stéphane Hameury, Seddik Sakji et Yahia Lardet pour la bonne ambiance qu'ils ont su créer rendant les conditions optimales pour la réalisation de cette thèse.

Je voudrais remercier vivement Monsieur Ioannis Politopoulos, qui, à l'occasion d'un co-encadrement de mon projet de fin d'étude au Commissariat à l'Énergie Atomique a su me convaincre d'entreprendre une thèse.

Enfin, j'exprimerai ma gratitude envers mes parents, qui m'ont apporté leur soutien malgré la distance géographique et le décalage horaire. J'aimerais exprimer ma gratitude à ma conjointe Jian, sans qui, je n'aurais pas pu réussir. En effet, son soutien indéfectible ainsi que sa patience m'ont permis de mener à bien cette thèse.

# Résumé

Ce travail tente de proposer une méthode de dimensionnement des murs coupe-feu en béton armé de grande hauteur soumis à l'action du feu, en se référant au cadre théorique du *Calcul à la Rupture*.

En situation d'incendie, l'apparition d'un fort gradient thermique à travers la section des murs conduit à une déformée thermique importante qui est accentuée par l'«effet  $P-\delta$ » du fait de l'excentricité des efforts membranaires induits par le poids propre. Par ailleurs, la dégradation des propriétés mécaniques du béton armé à haute température conduit à un diagramme d'interaction d'autant plus réduit que l'élévation de température est plus importante. Les deux effets combinés peuvent alors conduire à la ruine de la structure, bien avant l'apparition du phénomène de flambement.

La démarche adoptée dans ce travail consiste à modéliser les murs coupe-feu comme une plaque afin de calculer sa déformée d'origine thermique. Cette dernière est ensuite introduite comme une donnée géométrique dans le calcul à la rupture.

La **Partie I** de cette thèse est ainsi consacrée au *calcul de la déformée* des murs : une modélisation des murs en plaque de *Kirchhoff-Love* est d'abord étudiée afin d'évaluer la déformée *purement* thermique, à partir de laquelle l'effet «  $P-\delta$  » est ensuite mis en évidence par une modélisation du mur comme une plaque de *von Karman*. Ces déformées sont alors comparées avec celle issue d'un essai à échelle 1 réalisé au CSTB.

La **Partie II** consiste à appliquer l'approche du *Calcul à la Rupture* au dimensionnement du mur coupe-feu ainsi déformé, modélisé comme une coque mince à faible courbure. Cette approche est d'abord appliquée pour la détermination du *domaine de résistance macroscopique* d'une plaque en béton armé soumise à un gradient de température, puis mise en œuvre pour l'analyse de stabilité au feu des murs séparatifs.

**Mots-clés** : Plaque de Kirchhoff-Love ; Plaque de von Karman ; Effet P-delta ; Calcul à la rupture ; Diagramme d'interaction; Stabilité au feu.

# Abstract

This work aims at proposing a method for the design of high-rise reinforced concrete walls under fire conditions by using the Yield Design approach.

Under fire conditions, the temperature gradient developed through the thickness of the wall leads to a potentially important out-of-plane displacements and creates an eccentricity of membrane forces induced by the self-weight. As a result, bending moments may be generated in the wall in addition to the pre-existing compressive membrane forces, leading to more important transvers displacements. This phenomenon is usually known as the “ $P$ - $\delta$  effect”. On the other hand, temperature elevation leads to the degradation of the mechanical properties of reinforced concrete, which results in the reduction of the interaction diagram of the section of walls. These two combined effects, i.e. the geometry change and the material degradation, may trigger an overall failure of the structure, even before the occurrence of any buckling phenomenon.

In this work, the firewalls are modeled as a plate in order to calculate their deformed configuration, in which a yield design analysis will then be performed to determinate their overall stability.

**Part I** of this thesis is devoted to the calculation of the deformed configuration of walls, which are firstly modeled by the Kirchhoff-Love plate to study the purely thermal deformed configuration and then by the von Karman plate model to account for the “ $P$ - $\delta$  effect”. These deformed configurations are then compared to an experiment at real scale performed at CSTB.

**Part II** of this thesis consist in an application of the Yield Design approach to the design of firewalls in their deformed configuration, modeled by a shallow shell. This approach is firstly applied to determinate the macroscopic resistance domain of a plate composed of the reinforced concrete with a thermal gradient through the thickness and then utilized to analyze the stability of firewalls under fire conditions.

**Key words** : Kirchhoff-Love plate model; von Karman plate model ;  $P$ -delta Effect ; Yield design theory ; Interaction diagram; Stability under fire.

# Table de matières

<b>1. Introduction au dimensionnement au feu des murs en béton armé</b>	1
1.1 Introduction	2
1.2. Problématique générale de la stabilité des murs coupe-feu	4
1.3. Exemples de murs séparatifs coupe-feu	7
1.4. Comportement du béton à haute température	9
1.4.1. Action thermique de l'incendie	9
1.4.2. Phénomènes physico-chimiques	10
1.4.3. Propriétés thermomécaniques	11
1.5. Dimensionnement au feu des structures en béton armé	12
1.5.1. Méthodes de calcul suivant l'Eurocode 2 partie 1-2	12
1.5.2. Méthode des éléments finis	14
1.5.3. Méthodes fondées sur l'approche du calcul à la rupture	15
1.6. Organisation du manuscrit	20
<b>Partie I : Calcul de la déformée d'origine thermique des murs en béton armé</b>	23
<b>2. Déformée d'origine purement thermique</b>	24
2.1. Position du problème	25
2.1.1. Configurations des murs retenues	25
2.1.2. Modélisation adoptée	26
2.2. Le modèle de plaque de Kirchhoff-Love : quelques rappels	27
2.2.1. Cinématique et déformations généralisées	27
2.2.2. Efforts généralisés, équations d'équilibre et conditions aux limites	29
2.2.3. Loi de comportement thermoélastique de la plaque en variables généralisées	30
2.2.4. Mise en équations du problème	33
2.2.5. Récapitulatif	35
2.3. Développement des solutions analytiques pour les plaques rectangulaires	35

2.3.1. Plaque continue libre sur deux bords latéraux et appuyée sur les autres côtés	36
2.3.2. Plaque continue appuyée sur quatre bords	40
2.3.3. Plaque avec joints horizontaux appuyée sur ses quatre bords	40
2.3.4. Récapitulatif	42
2.4. Etude paramétrique de la déformée purement thermique	43
2.4.1. Chargement thermique engendré par un feu	43
2.4.2. Influence du coefficient de Poisson et de l'éclatement	45
2.4.3. Influence des conditions aux limites	48
2.4.4. Influence des joints horizontaux	50
2.5. Conclusions et perspectives	53
<b>3. Déformée d'origine thermique avec prise en compte du poids propre</b>	<b>55</b>
3.1. Introduction	56
3.2. Prise en compte du poids propre dans le modèle de plaques de von Karman	57
3.2.1. Rappel de la cinématique de plaques de von Karman	57
3.2.2. Ecriture des équations d'équilibre	59
3.2.3. Mise en équations du modèle de plaques de von Karman	60
3.3. Déformée totale d'origine thermique	62
3.3.1. Plaque libre sur deux bords latéraux et appuyée sur les autres côtés	62
3.3.2. Plaque appuyée sur ses quatre bords	65
3.4. « Effet $P - \delta$ » dû au poids propre	67
3.4.1. Choix du nombre de termes dans les solutions approchées	67
3.4.2. Couplage entre le problème de flexion et le problème membranaire	68
3.4.3. Influence de l'éclatement et de la hauteur sur l'amplitude de l'« effet $P - \delta$ »	71
3.5. Une première validation expérimentale à grande échelle	74
3.5.1. Description de l'essai	75
3.5.2. Mesure de la température	79
3.5.3. Confrontation de la déformée calculée avec la déformée mesurée	80
3.6. Conclusions	82

<b>Partie II : Calcul à la rupture des murs en béton armé modélisés comme une plaque mince</b>	83
<b>4. Domaine de résistance des plaques à haute température</b>	84
4.1. Introduction	85
4.2. Domaine de résistance d'une plaque hétérogène périodique	87
4.2.1. Notion de cellule de base	87
4.2.2. Définition générale du critère macroscopique de plaques	88
4.3. Domaine de résistance d'une plaque en béton armé soumise à un gradient de température	89
4.3.1. Influence de la haute température sur la résistance du béton et de l'acier	90
4.3.2. Expression des critères de résistance des constituants du béton armé	92
4.3.3. Critère de résistance macroscopique à haute température	93
4.4. Evaluation numérique du critère macroscopique	95
4.4.1. Approche statique par l'intérieur	95
4.4.2. Approche cinématique par l'extérieur	97
4.4.3. Formulation du problème d'optimisation	101
4.5. Résultats numériques et étude paramétrique	103
4.5.1. Intersection du domaine de résistance par le plan ( $N_{11}$ - $M_{11}$ )	103
4.5.2. Effet du renforcement sur le domaine de résistance	106
4.5.3. Comparaison avec le critère de Nielsen	107
4.5.4. Influence de l'exposition au feu sur le domaine de résistance macroscopique	109
4.6. Conclusions	111
<b>5. Analyse de la stabilité au feu des murs</b>	113
5.1. Introduction	114
5.1.1. Discrétisation de la géométrie du mur déformé	114
5.1.2. Notion du facteur de stabilité	115
5.1.3. Organisation du chapitre	115
5.2. Position du problème de calcul à la rupture de plaques	116
5.2.1. Domaine de chargements potentiellement supportables	116

5.2.2. Approche statique par l'intérieur	119
5.2.3. Approche cinématique par l'extérieur	120
5.2.4. Application à la stabilité des murs coupe-feu	122
5.3. Mise en œuvre par la méthode des éléments finis	122
5.3.1. Traitement numérique de l'approche statique par l'intérieur	122
5.3.2. Traitement numérique de l'approche cinématique par l'extérieur	124
5.4. Application à l'analyse de stabilité des murs coupe-feu	126
5.4.1. Prise en compte de la déformée	126
5.4.2. Cas des murs continus	128
5.4.3. Cas des murs avec joints	135
5.4. Conclusions	142
<b>Conclusions et perspectives</b>	144
<b>Annexe</b>	147
<b>Bibliographie</b>	152

# Chapitre 1

## Introduction au dimensionnement au feu des murs en béton armé

Ce chapitre constitue une introduction aux enjeux du dimensionnement au feu de murs séparatifs en béton armé. Après une brève description du risque incendie et des murs séparatifs coupe-feu destinés à réduire ce risque, on présente la problématique de la stabilité de ces murs nécessitant l'élaboration de méthodes de dimensionnement spécifiques. On décrit ensuite quelques phénomènes physico-chimiques complexes intervenant dans le comportement au feu du béton, avant de présenter l'évolution de ses propriétés thermomécaniques (modules d'élasticité, capacités de résistance,...) en fonction de la hausse de la température engendrée par la propagation de l'incendie. On recense enfin quelques méthodes existantes pour le dimensionnement au feu des structures en béton armé, et tout particulièrement celles fondées sur la *théorie de Calcul à la Rupture* que le présent travail se propose de prolonger. Le chapitre se termine par une présentation de la façon dont le manuscrit est organisé.

## 1.1 Introduction

L'ingénierie incendie est un domaine qui se développe avec les enseignements tirés des sinistres incendie. Dans ce travail, nous nous intéresserons plus particulièrement aux incendies d'établissements industriels et commerciaux (EIC). La figure 1.1(a) montre un tel incendie provoqué par un court-circuit dans le plafond. La propagation du feu sur toute la façade de 130m de longueur et aux bâtiments adjacents a été très rapidement en raison de l'embrasement d'un matériau isolant combustible contenu dans les panneaux sandwichs utilisés (CIMbéton, 2010). La figure 1.1(b) correspond à l'incendie d'un entrepôt de pneus à Amiens avec des flammes ayant atteint une hauteur de 20m, ayant conduit à la destruction d'un entrepôt d'une surface de plus de 4000m<sup>2</sup> et à plus de trois millions d'euros de dégâts. Cependant, comme on peut le voir sur la figure 1.1(b), la propagation du feu a été limitée à la façade en béton.



(a)

(b)

*Figure 1.1.* Incendie aux abattoirs de Bordeaux le 8 janvier 1997 (à gauche) (source CIMbéton, 2010) et incendie de l'entrepôt de pneus de l'entreprise BBSL à Amiens le 7 mars 2013 (à droite) [photo Poulain Tony, 2017]

Résultant de l'expérience des catastrophes, les exigences relatives à la sécurité incendie sont établies par la directive européenne du 21 décembre 1988. Pendant la phase de conception de l'ouvrage, l'**évacuation** des occupants doit être facilitée pour préserver la vie humaine. Il faut également limiter l'apparition et la **propagation** du feu et de la fumée ainsi que l'**extension** du feu à des ouvrages voisins afin de retarder le plus longtemps possible la progression de l'incendie. Enfin, la **stabilité** des éléments porteurs pendant une durée déterminée doit être assurée pour permettre une **intervention** des sapeurs-pompiers.

Pour satisfaire à ces différentes exigences, diverses mesures sont souvent imposées en phase de conception des bâtiments afin de prévenir ce sinistre. Les mesures actives de **prévision**, comme sprinklers, alarmes, détecteurs, visent à la fois à la détection de l'incendie dès le départ d'un feu et à une extinction rapide. En revanche, les mesures passives de **prévention** visent à assurer la sécurité des personnes ainsi que l'engagement des secours. Ces mesures passives de prévention existent pour tout type de bâtiments. Il convient (CIMbéton, 2008) :

- ✓ d'assurer une évacuation rapide des personnes vers l'extérieur,
- ✓ de disposer de structures et de planchers résistant au feu ou s'opposant à sa propagation,
- ✓ de disposer d'écrans d'isolation à l'intérieur ou à l'extérieur des bâtiments.

Les murs séparatifs coupe-feu (CF) constituent ainsi l'une des mesures passives de **prévention** en tant qu'écrans d'isolation d'intérieur ou d'extérieur pour lutter contre la propagation et le développement de l'incendie. En vertu de l'article 8 de l'arrêté du 5 août 2002 relatif à la prévention des incendies dans les entrepôts couverts soumis à autorisation sous la rubrique 1510, les murs séparatifs coupe-feu doivent disposer d'une résistance au feu pour une durée minimale de 2h.



(a)

(b)

*Figure 1.2.* (a) Murs coupe-feu pour compartimenter l'espace d'un entrepôt (BDB<sup>1</sup>, Allemagne) et (b) vue aérienne d'un entrepôt de vêtements sans mur coupe-feu à Marseille complètement détruit après un incendie (SDIS 13, Sapeurs-pompiers des Bouches du Rhône, 1996)

Ces murs peuvent être utilisés soit à l'intérieur de bâtiments (voir la figure 1.2(a)) en établissant les barrières infranchissables aux flammes et aux gaz et constituant ainsi un compartimentage coupe-feu, soit en façade comme un écran d'isolation extérieure limitant le flux thermique transmis à l'environnement par rayonnement. Sans murs séparatifs à l'intérieur du bâtiment, le feu peut se propager très rapidement et l'incendie devient catastrophique, comme celui qui a eu lieu en 1996 dans un entrepôt de vêtements (voir la figure 1.2(b)). En l'absence d'extincteur et de mur de séparation, le feu s'est propagé sur tout le bâtiment en cinq minutes et a conduit finalement à la ruine de l'ensemble de la structure. La propagation du feu aux bâtiments voisins a été stoppée grâce à l'intervention des pompiers qui ont dû créer un mur d'eau. Sans façades à fonction d'écran thermique, la propagation du feu sur la façade conduit à la ruine de l'ensemble de la structure, comme montré sur la figure 1.1 (a).

<sup>1</sup> Bund Deutscher Baumeister (<https://www.baumeister-online.de>)

## 1.2. Problématique générale de la stabilité des murs coupe-feu

En vertu des exigences réglementaires de sécurité, tous ces murs coupe-feu ou à fonction d'écran thermique utilisés dans les bâtiments industriels doivent disposer d'une tenue au feu d'au minimum 2h. Comme nous avons vu dans l'exemple de la figure 1.2, la stabilité au feu des murs séparatifs constitue un point critique pour stopper la propagation du feu, laisser du temps pour l'intervention des pompiers et empêcher la ruine de l'édifice, d'où la nécessité d'effectuer l'*analyse de stabilité au feu* des murs séparatifs dès la phase de dimensionnement.

Dans le cas où des murs séparatifs en béton armé sont exposés au feu sur une seule face, leur stabilité fait intervenir deux phénomènes qui sont tous deux associés à la montée en température (gradient thermique) à travers l'épaisseur : le *changement de géométrie* d'une part et la *dégradation des propriétés de résistance des matériaux* d'autre part.

En effet un tel gradient thermique conduit tout d'abord à une dilatation thermique différentielle plus importante sur la face exposée que sur la face non exposée et engendre ainsi une *courbure* purement thermique. Pour les murs appuyés sur leurs bords, cette courbure purement thermique induit des déformations de flexion qui entraînent des déplacements hors-plan (flèche transversale). En raison du fait que les dimensions des murs, et notamment de leur hauteur, sont importantes, les déplacements transversaux deviennent du même ordre que l'épaisseur des murs et ne peuvent donc plus être négligés du point de vue du changement de géométrie. De plus, un tel changement de géométrie est accentué par ce qu'il est convenu d'appeler « effet  $P-\delta$  » (Bažant et Cedolin, 2010). Celui-ci a pour origine l'apparition de *moments de flexion* induits par l'excentricité par rapport au plan initial vertical du mur des *efforts membranaires* eux-mêmes engendrés par le poids propre, comme cela est illustré sur les schémas de la figure 1.3 (cas d'un mur en déformations planes). Les déformations de courbure *mécaniques* liées à ces moments de flexion vont à leur tour engendrer des déplacements transversaux supplémentaires jusqu'à obtenir une configuration d'équilibre.

Par ailleurs, comme on le verra dans la section suivante, les propriétés de résistance du béton et de l'acier subissent une *forte dégradation* à haute température. S'appuyant sur la notion du *domaine de résistance macroscopique*, qui n'est rien d'autre qu'une généralisation du *diagramme d'interaction* d'une poutre dans le cas bidimensionnel, la dégradation des propriétés de résistance du béton et de l'acier peut être représentée par une *réduction* de ce domaine de résistance. Dans le cas d'un mur en déformations planes, le domaine de résistance macroscopique peut être assimilé au diagramme d'interaction d'une poutre en béton armé, qui est un domaine contenant l'origine et délimité par des frontières ayant la forme d'arcs paraboliques, comme montré par la figure 1.4 (Pham, 2014). Dans le cas général, où les murs sont modélisés comme des *plaques*, ce domaine de résistance porte sur les tenseurs des efforts membranaires et des moments de flexion, comme nous le verrons dans le présent travail.

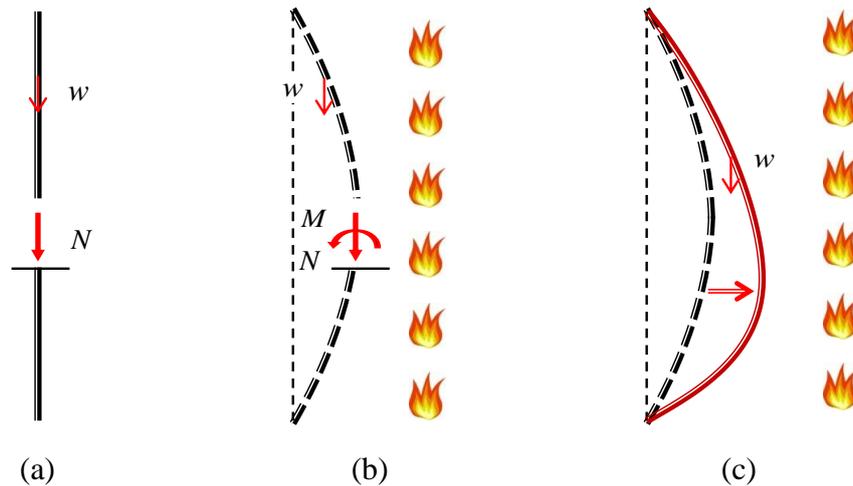


Figure 1.3. Schémas d'un mur en déformations planes à température ambiante (a), dans sa configuration déformée purement thermique (b) et dans sa configuration déformée à l'équilibre (c)

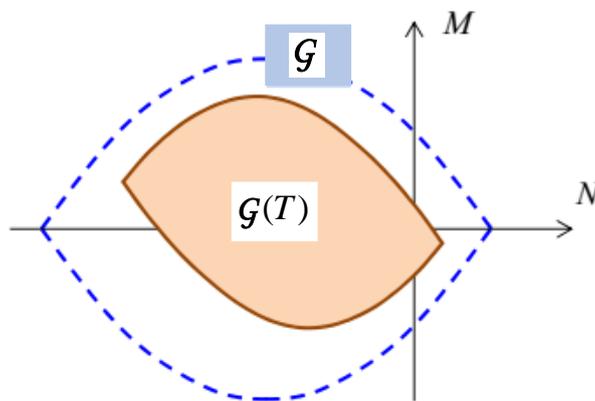


Figure 1.4. Diagrammes d'interaction d'une poutre en béton armé à température ambiante  $\mathcal{G}$  et à haute température  $\mathcal{G}(T)$  (Pham, 2014)

Il en résulte que, en condition d'incendie, les efforts intérieurs du mur et notamment les moments fléchissants sont, d'une part, amplifiés par le changement de géométrie, et d'autre part, limités par le domaine de résistance macroscopique qui se rétrécit d'autant plus que la température est plus élevée. La combinaison des deux phénomènes peut ainsi donner lieu à la *ruine de la structure*. Dans le cas d'un mur modélisé comme une poutre simplement appuyée (système *isostatique*), cette ruine coïncide avec l'atteinte du critère d'interaction en une seule section de la poutre, c'est-à-dire avec la *limite d'élasticité*. Comme le montre la figure 1.5 tirée de (Pham, 2014), la ruine de la structure se produit lorsque la courbe représentant dans le plan  $(N, M)$  la distribution des efforts généralisés le long de la poutre, devient *tangente* à la frontière du diagramme d'interaction qui se rétrécit au fur et à mesure de l'élévation de température. Dans le cas général, en raison du caractère multidimensionnel des efforts intérieurs et surtout du fait que la structure n'est plus *isostatique*, cette ruine n'est pas aussi facile à détecter. Comme nous le verrons, elle nécessitera l'utilisation des approches du *calcul à la rupture*.

La connaissance de la *configuration déformée d'équilibre* de la structure et celle de ses *capacités de résistance réduites*, toutes deux dues au chargement thermique engendré par

l'incendie, constituent les deux données essentielles permettant la mise en œuvre de l'approche du calcul à la rupture (voir figure 1.6) pour l'analyse de stabilité des structures en conditions d'incendie. Une telle approche a déjà été appliquée à une poutre simplement appuyée dans les travaux antérieurs (Pham, 2014 ; Pham *et al*, 2015(a) ; Pham *et al*, 2015(b)). Le présent travail a pour objectif de la généraliser au cas plus réaliste où les murs coupe-feu sont modélisés comme des plaques bidimensionnelles et non de simples poutres.

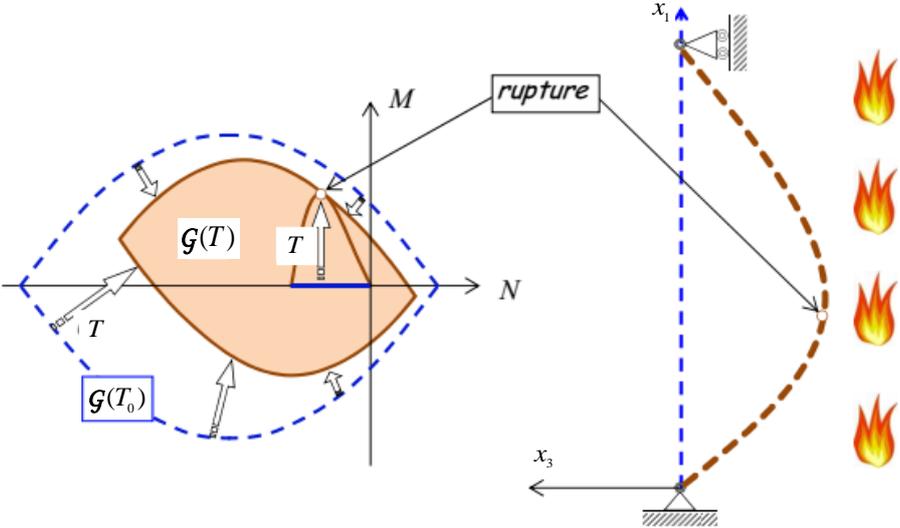


Figure 1.5. Analyse de stabilité d'une poutre simplement appuyée (à gauche) et changement de géométrie en condition d'incendie (à droite) (Pham, 2014)

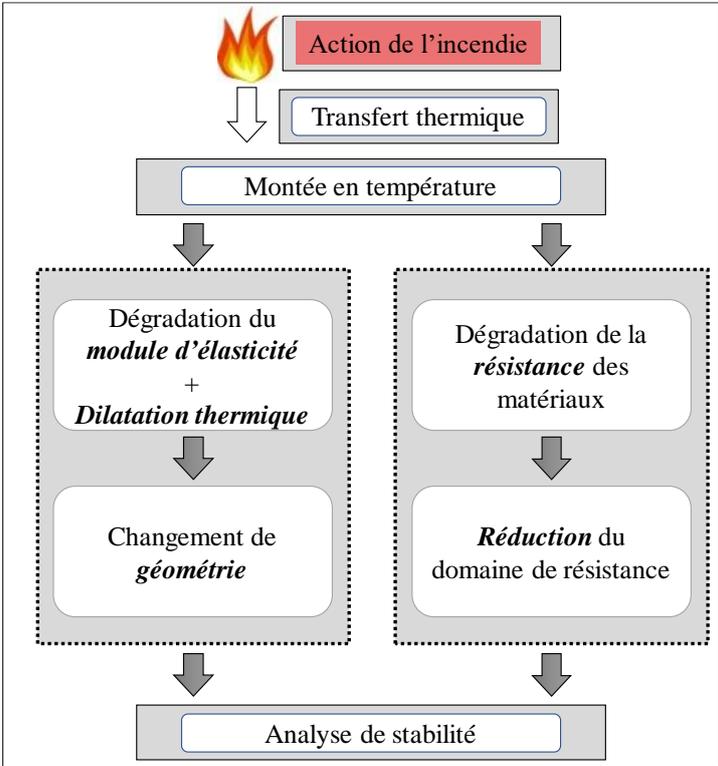


Figure 1.6. Schéma général de l'analyse de stabilité des structures en condition d'incendie par l'approche du calcul à la rupture

### 1.3. Exemples de murs séparatifs coupe-feu

Les murs séparatifs coupe-feu en béton armé peuvent être réalisés par un système constructif formé par l'assemblage de poteaux, poutres et panneaux. Une description des procédés couramment utilisés et de leurs prescriptions techniques est fournie dans le guide (CIMbéton, 2007). A titre non exhaustif, on présente ici quelques procédés relatifs au système constructif poteaux, poutres et panneaux pour la réalisation des murs séparatifs coupe-feu comme :

- ✓ Les murs séparatifs coupe-feu en béton armé coulé en place ; procédé permettant d'atteindre une dimension importante comme le mur coupe-feu du hall d'assemblage du A380 à Toulouse (voir figure 1.7) d'une dimension de 260m (longueur) par 35m (hauteur).

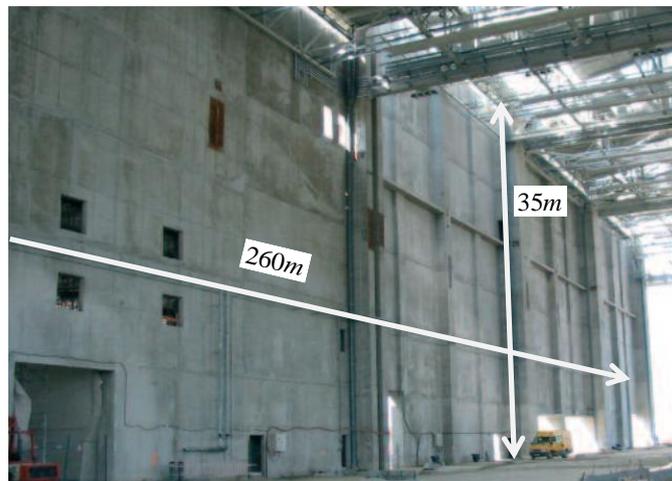


Figure 1.7. Mur coupe-feu en béton armé du hall d'assemblage du A380 à Toulouse (longueur : 260m ; hauteur : 35m ; épaisseur 25cm) (CIMbéton, 2007)

- ✓ Les murs constitués des panneaux préfabriqués en béton sont posés soit verticalement soit horizontalement (voir figure 1.8). La connexion entre des panneaux est réalisée par un système de liaison du type « tenon-mortaise », tandis que les panneaux sont insérés latéralement entre des poteaux en béton préfabriqués de section en « H » ou en « I » posés directement sur fût en pied de mur. La longueur maximale des panneaux préfabriqués est de 12,5m tandis que la largeur usuelle est de 2,5m. L'épaisseur minimale de ces panneaux, qui dépend du degré de résistance du feu qui est attendu, varie entre 11cm à 17,5cm pour les murs non porteurs et entre 15cm à 25cm pour les murs porteurs.

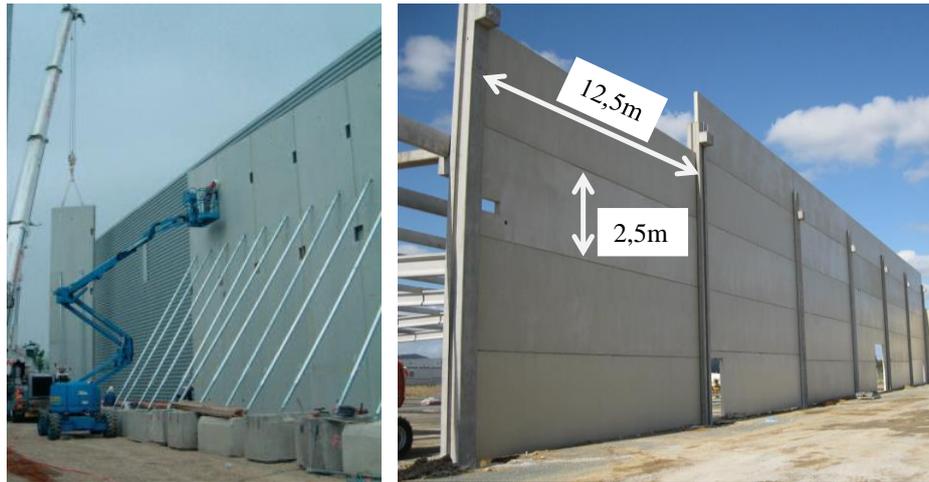


Figure 1.8. Murs constitués des panneaux préfabriqués en pose verticale (à gauche) (CIMbéton, 2007) et en pose horizontale (à droite) (Maisonbleue<sup>2</sup>, 2018)

- ✓ Les murs constitués des panneaux de béton cellulaire armé (voir figures 1.9 et 1.10), qui ont une dimension plus petite que les panneaux préfabriqués. La longueur maximale des panneaux est limitée à 7,5m tandis que la largeur des panneaux est limitée à 75cm. Ces panneaux de béton cellulaire doivent être accrochés sur une structure porteuse soit en pose verticale, soit en pose horizontale (CIMbéton, 2008). En pose verticale (voir figure 1.9), les têtes des panneaux sont scellées dans une engravure de la longrine. Dans ce cas, la hauteur des murs est limitée par la longueur des panneaux à 7,5m. En pose horizontale (voir figure 1.10), les panneaux, connectés par des liaisons de type « tenon-mortaise », peuvent être posés devant des poteaux ou entre poteaux de section en « H ». Ces murs peuvent atteindre une hauteur maximale de 17m, 22m et 28m pour l'épaisseur de 15cm, 20cm ou 25cm respectivement. Dans tous les cas, l'assemblage de panneaux repose en pied sur une longrine en béton armé.

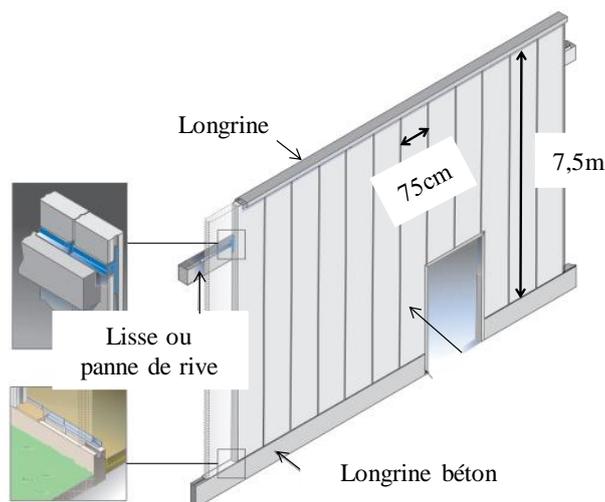


Figure 1.9. Murs constitués des panneaux de béton cellulaire armé en pose verticale (CIMbéton, 2007)

<sup>2</sup> [www.maisonbleue.fr](http://www.maisonbleue.fr)

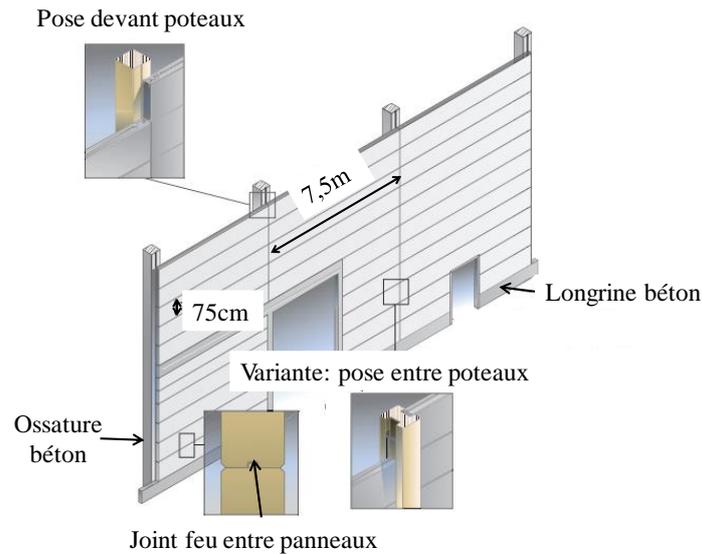


Figure 1.10. Murs constitués des panneaux de béton cellulaire armé en pose horizontale (CIMbéton, 2007)

## 1.4. Comportement du béton à haute température

### 1.4.1. Action thermique de l'incendie

Afin de déterminer l'action thermique associé à un incendie, deux approches sont souvent utilisées en ingénierie incendie : l'approche « *performancielle* » et l'approche « *prescriptive* » (Holicky *et al*, 2005). Selon l'approche *performancielle*, l'action thermique de l'incendie est basée sur les scénarios réalistes du feu, qui prend en compte tous les paramètres ayant une influence sur le développement du feu, comme la probabilité d'occurrence du feu, la charge calorifique, la vitesse de propagation, les conditions de ventilation ainsi que la géométrie du bâtiment etc. Un tel feu du caractère *naturel* comporte quatre phases (Holicky *et al*, 2005) : une phase appelée « pré-flashover » d'un feu localisé, une phase de « flashover » de l'embrasement à tout le compartiment, une phase de « post-flashover » d'un feu en plein développement, ainsi qu'une phase d'extinction. La figure 1.11(a) montre qualitativement l'évolution de la température d'un feu de type naturel en fonction de la durée de l'incendie.

En revanche, dans une approche *prescriptive*, l'action thermique est donnée par la courbe température/temps *normalisée* selon la norme internationale, par exemple ISO-834, comme montré sur la figure 1.11(b). La température ne dépend que de la durée de l'incendie et ne comporte pas de phase de décroissance. Bien que cette courbe soit loin d'être réaliste par rapport à un feu réel, elle permet d'établir toujours la même action thermique pour tester expérimentalement ou par des calculs de simulations, les éléments de construction.

Le choix de l'action thermique dépend ainsi de son domaine d'application. Bien que l'évolution d'un feu naturel soit plus réaliste et donc plus avancée, la courbe ISO continue à être utilisée dans les applications pratiques pour des raisons de simplicité. Par ailleurs, seule la courbe température/temps *normalisée* est utilisée pour déterminer par des essais la résistance

des éléments de structures (CIMbéton, 2008). S'appuyant sur un feu lié à l'incendie conventionnel (ISO-834), ces essais de résistance permettent d'évaluer l'aptitude des éléments de structures à remplir leur fonction initiale malgré l'action d'un incendie et de classer ainsi les éléments de structure en trois catégories :

- ✓ Stable au feu (SF) : seul le critère de résistance mécanique doit être satisfait ;
- ✓ pare-flammes (PF) : le critère de résistance mécanique et celui de l'étanchéité aux flammes sont tous deux requis ;
- ✓ coupe-feu (CF) : en plus des de deux critères précédents, ce critère se réfère à l'isolation thermique des éléments, qui impose, pour la surface non exposée, une température moyenne inférieure à 140°C et une température locale maximale inférieure à 180°C.

Dans ce travail, nous ne considérons que le feu normalisé comme action thermique.

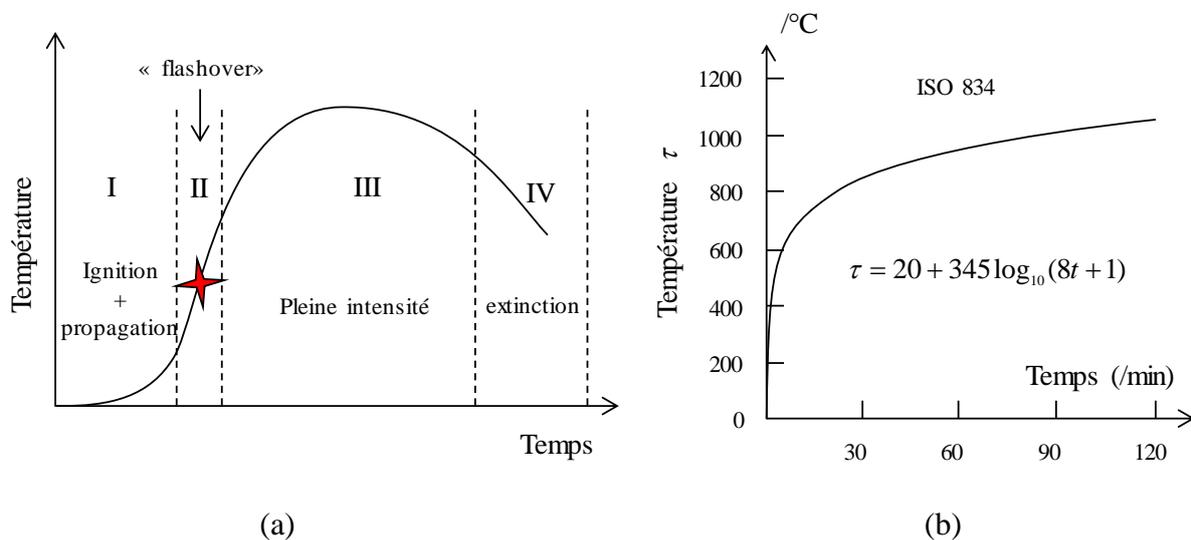


Figure 1.11. Les quatre phases d'un feu naturel (a) et évolution température/temps d'un feu ISO 834 (b)

### 1.4.2. Phénomènes physico-chimiques

Comme on peut constater dans les exemples précédents, l'utilisation du béton armé est un choix incontournable pour les murs séparatifs coupe-feu en raison de ses bien meilleures performances en cas d'incendie que les autres matériaux de construction comme le bois ou l'acier. En effet, le béton est non combustible, ne contribue pas à la charge calorifique, et dispose une bonne résistance au feu. De plus, grâce à son inertie thermique, le béton peut bien protéger les armatures à une profondeur d'enrobage suffisamment grande.

Pourtant, le béton subit une forte dégradation des propriétés mécaniques à haute température, qui résulte des plusieurs phénomènes physico-chimiques très complexes relatifs respectivement à la pâte de ciment et aux granulats (Houry, 2000). On peut identifier dans les changements relatifs à la pâte de ciment les processus comme la déshydratation de C-S-H<sup>3</sup> (entre 100°C et

<sup>3</sup> Silicates de Calcium Hydratés

800°C), la décomposition de  $\text{CH}_4$  (à partir 400°C et 500°C) ainsi que la décarbonatation du calcaire (à partir de 800°C). Ces modifications de la pâte de ciment sont accompagnées d'une transformation cristalline des granulats siliceux (à partir de 575°C) ou d'une décarbonation des granulats calcaire (Khoury, 2000).

En plus de tous ces changements physico-chimiques, la vaporisation de l'eau résultant du processus de déshydratation engendre une augmentation de la pression de vapeur d'eau dans le béton. Dans le cas où les pores capillaires sont très fins, cette pression peut dépasser la résistance en traction du béton et conduire ainsi à un phénomène d'éclatement en surface du béton, connu sous le nom d'« *écaillage* ». Bien que l'écaillage du béton ne conduise pas à la ruine proprement dite de la structure, selon le retour d'expérience de 100 incendies de bâtiments (Malhotra, 1984), la réduction de l'épaisseur d'enrobage des armatures constitue un vrai risque pour les bâtiments. Une des mesures permettant d'éviter efficacement l'écaillage du béton consiste à évacuer la pression de vapeur d'eau en créant des chemins de passage par l'introduction de fibres en polypropylène qui se fondent et disparaissent vers 170°C (Mindeguia, 2009). Ce phénomène ne sera pas pris en compte dans le présent travail.

### 1.4.3. Propriétés thermomécaniques

Malgré la complexité du comportement du béton qui fait intervenir les phénomènes précédents, on peut néanmoins obtenir les propriétés thermomécaniques du béton et leur évolution en fonction de la température, par une caractérisation à l'aide d'essais expérimentaux. Un état de l'art relatif aux essais expérimentaux du béton à haute température peut être trouvé dans les travaux de Schneider (1988), Flynn (1999) et Kodur (2014). Il est ainsi montré que l'élévation de la température change à la fois les *propriétés thermiques* du béton, telles que la diffusivité thermique, qui dérive de la conductivité thermique, ou la chaleur spécifique, ainsi que la masse volumique du béton qui dépend fortement de la formulation de ce dernier, mais surtout ses propriétés *mécaniques*, c'est-à-dire :

- ✓ les *résistances en compression et en traction*, qui diminuent toutes deux en fonction de la température. Les essais de résistance du béton ordinaire et du béton à haute performance révèlent que la réduction de la résistance du béton ayant une résistance normale est en général moins importante que celle d'un béton à haute performance qui, en raison de sa compacité plus importante et donc de sa porosité plus faible, est susceptible de subir le phénomène d'écaillage évoqué ci-dessus (Phan et al, 2000).
- ✓ le *module d'élasticité*, qui subit lui aussi une forte réduction à haute température (Schneider, 1988). Ce module est souvent déterminé à partir de la courbe de comportement unidimensionnelle du béton à haute température. Plus récemment, une nouvelle technique permettant de mesurer directement le module d'élasticité à haute température a été développée par Bahr et al (2013).

Par ailleurs, l'élévation de la température induit une *déformation d'origine thermique* comportant :

---

<sup>4</sup> Hydroxyde de Calcium  $\text{Ca}(\text{OH})_2$

- ✓ la *dilatation thermique*, qui résulte d'un effet global combinant l'expansion d'origine thermique du granulats et le rétrécissement de la pâte de ciment car les deux phénomènes apparaissent en même temps et sont difficiles à dissocier dans les mesures provenant des essais (Schneider, 1988). Dans un essai où une éprouvette de béton n'est soumise à aucun chargement mécanique (déformations libres), la déformation thermique peut être mesurée lors d'une montée en température à une vitesse d'échauffement comprise entre 2 et 50°C/min (EN1992-1-2, 2005).
- ✓ la *déformation transitoire*, qui apparaît lors d'une première montée en température, résultant de la déshydratation et des réactions physico-chimiques se produisant dans le béton. Cette déformation peut être mesurée par un essai où une éprouvette du béton est soumise, dans son état initial, à un chargement mécanique (Hager et Pimienta, 2011). Cette éprouvette est ensuite chauffée à une vitesse constante. Pour une température donnée, la déformation totale mesurée à partir de l'état initial est différente de la déformation thermique, la différence entre les deux constituant ainsi la déformation transitoire. Cette déformation transitoire dépend du niveau de contrainte préalablement appliquée à l'éprouvette et se révèle souvent négative. Plusieurs modèles (Anderberg et Thelandersson, 1976 ; Schneider, 1986 ; Diederichs, 1987 ; Khoury *et al*, 1985 ; Terro, 1998) ont été développés pour la modélisation de la déformation transitoire du béton.

S'appuyant sur des essais expérimentaux, l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) fournit des données sur l'évolution de ces propriétés thermiques et de la résistance du béton en fonction de la température. Une loi de comportement du béton dépendant de la température est également fournie sur la base de tels essais expérimentaux.

Il convient de noter que, contrairement au nombre important des recherches portant sur les propriétés précédentes, très peu d'essais ont été réalisés pour étudier l'influence de la température sur le *coefficient de Poisson*. Parmi les rares travaux recensés en ce domaine, on peut trouver ceux de Maréchal (1972) ou Bertero (1972) qui ont observé une diminution de ce coefficient en fonction de la température jusqu'à 300°C. Cette légère réduction du coefficient de Poisson jusqu'à 500°C a été confirmée par Bahr (Bahr *et al*, 2013), qui a déterminé le coefficient de Poisson à partir de la mesure du module de cisaillement. Pour des températures plus élevées, nous n'avons pas trouvé des données disponibles.

Outre un certain nombre de données se rapportant au matériau béton, l'Eurocode 2 partie 1-2 fournit également les données permettant de décrire la dégradation des propriétés mécaniques (dilatation thermique, résistance en compression et à la traction, module d'élasticité) de l'acier en fonction de la température.

## **1.5. Dimensionnement au feu des structures en béton armé**

### **1.5.1. Méthodes de calcul suivant l'Eurocode 2 partie 1-2**

L'Eurocode 2 propose trois niveaux de modèles pour le dimensionnement des structures vis-à-vis du feu d'incendie : les méthodes tabulées, les méthodes simplifiées, ainsi que les méthodes avancées.

Les *méthodes tabulées* donnent les valeurs minimales de la distance de l'axe de l'armature au parement, valeurs établies sur une base empirique confirmée par l'expérience de résultats d'essais. S'agissant des murs coupe-feu pour une exigence de tenue au feu de 2h, la distance de l'axe de l'armature au parement (l'enrobage) doit être supérieure à 25mm. Par ailleurs, l'Eurocode impose une épaisseur minimale de 200mm (resp. 120mm) pour les murs porteurs (resp. non porteurs) en béton non armé et de 140mm pour les murs porteurs en béton armé. En tant qu'approche *conservative*, cette méthode permet la vérification immédiate d'une section, permettant de se dispenser de tout calcul thermique et mécanique et facilitant ainsi la procédure de dimensionnement au feu des structures.

Contrairement aux méthodes tabulées, les *méthodes simplifiées* prennent explicitement en compte la distribution de température dans l'épaisseur du mur, ainsi que son influence sur les propriétés de résistance du béton et de l'acier dans la détermination de la capacité portante limite d'une section droite. Etant donné une distribution de la température induite par un feu *normalisé*, ces méthodes s'appuient sur une section réduite, qui peut être obtenue :

- ✓ soit par la *méthode de l'isotherme à 500°C*, qui néglige la résistance de béton au-delà de 500°C et considère une épaisseur réduite où le béton conserve ses valeurs initiales de résistance et de module d'élasticité ;
- ✓ soit par la *méthode par zones*, qui subdivise la section droite en plusieurs zones et considère, pour chacune d'entre elles, une réduction de la résistance et du module d'élasticité en fonction de la température moyenne en ignorant la zone endommagée sur les faces exposées au feu.

Dans les deux cas, la réduction de la résistance des aciers est évaluée en fonction de la température du béton aux points où sont positionnées des armatures. Une fois données la section réduite ainsi que les résistances réduites du béton et de l'acier, la capacité portante limite d'une section droite peut être calculée comme une section à froid.

Les *méthodes avancées* ont pour vocation d'aboutir à un calcul plus réaliste tant pour ce qui concerne la réponse thermique que la réponse mécanique pour les structures. La réponse thermique, dans sa partie la plus avancée, recourt à l'*approche performancielle* (voir section 1.1.2), qui utilise le feu *naturel* donné par des scénarios d'incendie réel comme action thermique. Cette approche permet de prendre explicitement en compte les mesures actives de *prévision*, comme alarmes, sprinklers, détecteur des fumées, qui peuvent respectivement réduire le risque de déclenchement de l'incendie, retarder sa propagation et aider à l'évacuation des occupants. Ce type d'analyse thermique fait souvent appel à des logiciels de simulation du développement du feu tels que FDS<sup>5</sup>.

Par ailleurs, la réponse mécanique doit prendre en compte les modifications des propriétés mécaniques en fonction de la température, les déformations et les contraintes d'origine thermique, ainsi que la non-linéarité géométrique. Pour ce qui concerne le dimensionnement aux *Etats Limites Ultimes (ELU)*, l'Eurocode 2 partie 1-2 impose que des déformations soient limitées, ce qui permet de déterminer la capacité portante des éléments individuels, des parties de la structures ou de la structure tout entière exposés au feu. Ce raisonnement portant sur des limites en *déformations* impose de déterminer au préalable ces déformations par la résolution

---

<sup>5</sup> <https://www.nist.gov/services-resources/software/fds-and-smokeview>

d'un problème d'évolution élastique ou élastoplastique, qui nécessite l'introduction d'une loi de comportement des matériaux. La résolution de tels problèmes passe notamment par l'utilisation de logiciels de *calcul par éléments finis*.

## **1.5.2. Méthode des éléments finis**

Le dimensionnement au feu des structures par la méthode des éléments finis s'appuie en général sur une analyse élastoplastique et permet une vérification de la résistance et la stabilité de la structure tout au long de la durée du feu d'incendie. En fonction de la loi de comportement du béton utilisée, on peut distinguer deux types de analyses par la méthode des éléments finis : l'analyse thermo-hydro-mécanique et l'analyse thermomécanique.

### **1.5.2.1. Analyse thermo-hydro-mécanique (THM)**

Ce type d'analyse s'appuie sur une modélisation complète des phénomènes qui se produisent dans le béton à haute température comme la montée en température, la dégradation des propriétés mécaniques du béton, ainsi que le transfert de la pression de vapeur d'eau dans le béton. Une première étude de ce dernier a été faite par Bazant et Thouguthai (1978, 1979) en proposant un équivalent de la loi de *Darcy* pour la vapeur, considérée comme un fluide. Les améliorations suivantes portent sur la prise en compte de plusieurs phases (vapeur, air sec et eau) pour le fluide (Dal Pont *et al*, 2007), les réactions physico-chimiques (déshydratation, décarbonatation, etc) (Schrefler *et al*, 2002), ainsi que la fissuration du béton (Bary *et al*, 2008) dans la modélisation du type thermo-hydro-mécanique. Ces modèles thermo-hydro-mécaniques du béton permettent de prédire notamment le changement de perméabilité due à la fissuration et à l'éclatement explosif qui pourrait met en danger des structures comme les tunnels et les enceintes de confinement dans une centrale nucléaire. Cependant, bien qu'il existe des logiciels comme HITECOSP (Brite Euram III, 1999) et CAST3M<sup>6</sup> qui permettent intégrer ces modèles du béton, leur application à l'échelle d'une structure n'est pas répandue en raison de la complexité des modèles et des temps de calcul très importants qu'ils induisent.

### **1.5.2.2. Analyse thermomécanique**

A la différence de l'analyse thermo-hydro-mécanique qui prend en compte plusieurs phénomènes complexes dans la modélisation, l'analyse thermomécanique ne considère que les phénomènes relatifs au transfert thermique et à la dégradation des propriétés mécaniques des matériaux au cours d'un chargement thermique, excluant les phénomènes de transferts hydriques. En général, ce type d'analyse suppose que le transfert de chaleur et l'analyse mécanique sont indépendants l'un de l'autre, c'est-à-dire peuvent être découplés.

Dans ce cas, un calcul de transfert de chaleur (purement thermique) permet de déterminer la distribution de température dans les différentes sections de la structure, qui est ensuite introduite comme *chargement thermique* dans l'analyse mécanique. S'appuyant sur la résolution de l'équation de chaleur par la méthode des éléments finis, l'analyse thermique peut être effectuée soit à l'aide des logiciels de simulation généraliste, comme ABAQUS, ADINA, ANSYS,

---

<sup>6</sup> <http://www-cast3m.cea.fr/>

PAFEC et LUSAS, soit à l'aide des logiciels dédiés au feu naturel (FDS) ou au feu normalisé (TASEF<sup>7</sup>, SAFIR<sup>8</sup>).

Par ailleurs, l'analyse mécanique repose souvent sur un problème d'évolution élastoplastique et nécessite une connaissance préalable des lois de comportement des matériaux à haute température, qui doivent être prédéfinies ou introduites manuellement dans les logiciels de simulation généraliste ou dans les logiciels de simulation spécialisés dédiés au feu, comme CEFICOSS (Franssen, 1987) et SAFIR (Franssen, 2005 ; Franssen et Gernay, 2017).

Dans le cas de systèmes formés par l'assemblage de poutres et de poteaux, pour lesquels les hypothèses classiques de la RDM sont retenues, il suffit de disposer d'une loi de comportement *unidimensionnelle* du béton à haute température, comme celle fournie par l'Eurocode 2 partie 1-2(EN 1992-1-1, 2005), pour analyser ce type de structures. En revanche, une loi de comportement *multidimensionnelle* est indispensable pour analyser des structures du type plaque, coque ou solide tridimensionnel. La modélisation d'un tel comportement multidimensionnel du béton à température *ambiante* s'appuie par exemple sur la théorie de la plasticité (Willam, 1975 ; Grassl et Jirasek, 2006) ou de l'endommagement (Cicekli *et al*, 2007 ; Taqieddin *et al*, 2011). Pour généraliser ces lois précédentes à température *élevée*, il est nécessaire de prendre en compte la libre dilation thermique ainsi que la déformation transitoire (Gernay et Franssen, 2012). Cependant, en raison du fait que cette déformation transitoire dépend des contraintes de confinement et de la température, une description multidimensionnelle de cette déformation transitoire (Thelandersson, 1987 ; De Borst et Peeters, 1989, Pearce et al, 2004 ; Torelli, 2016) n'est pas évidente à implémenter numériquement. Ainsi le logiciel SAFIR, qui constitue une référence dans le domaine du comportement des structures au feu, permet une prise en compte de ces déformations transitoires évaluées comme le produit du tenseur des contraintes effectives par une fonction de la température (Gernay et Franssen, 2012 ; Gernay et Franssen, 2013).

### 1.5.3. Méthodes fondées sur l'approche du calcul à la rupture

Contrairement à la résolution pas-à-pas d'un problème d'évolution par la méthode des éléments finis, l'approche du *Calcul à la Rupture*<sup>9</sup> (Salençon, 2013 ; de Bujan, 2007) constitue une méthode directe permettant de déterminer des *chargements extrêmes* sans qu'il soit besoin de recourir à une loi de comportement élastoplastique multidimensionnelle, souvent complexe et difficile à formuler, mais seulement à la connaissance des *critères de résistance* des matériaux constitutifs. Cette approche nécessite en revanche une détermination préalable du *changement de géométrie* induit par le gradient thermique couplé au chargement, ainsi que du *critère de résistance* d'un mur en béton armé à haute température, formulé en termes d'efforts généralisés (efforts membranaires, moments fléchissants,...) dans le cas où le mur est modélisé comme une *plaque*. Le chargement extrême pourra alors être encadré par des bornes inférieures

---

<sup>7</sup> <https://www.sp.se/en/index/services/calculations/tasef1/Sidor/default.aspx>

<sup>8</sup> [https://www.uee.uliege.be/cms/c\\_2383458/en/safir](https://www.uee.uliege.be/cms/c_2383458/en/safir)

<sup>9</sup> ou *Analyse Limite*

et supérieures obtenues respectivement par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture.

### 1.5.3.1. Changement de géométrie d'origine thermique du mur modélisé comme une plaque

S'appuyant sur une modélisation du mur comme une plaque mince initialement située dans un plan vertical, l'analyse du changement de géométrie de ce mur sous l'action thermique due au feu est beaucoup plus complexe que dans la configuration particulière où le mur est modélisé comme une *poutre 1D* (Pham, 2014). Elle consiste à déterminer les déplacements transversaux (c'est-à-dire hors plan) d'origine thermique. Le changement de géométrie de la plaque devra être apprécié en fonction de l'ampleur relative de ces déplacements vis-à-vis par exemple de son épaisseur. Cette première étape de calcul requiert la connaissance d'une *loi de comportement thermoélastique* du béton à haute température.

Deux types de modèles de plaques minces sont couramment utilisés dans la modélisation des murs : le modèle linéaire de *Kirchhoff-Love* (Kirchhoff, 1850 ; Love, 1892) pour les plaques en « *petits déplacements* », le modèle non-linéaire de *von Karman* (Föppl, 1897 ; von Karman, 1910) pour les plaques en « *grands déplacements* ».

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le modèle linéaire de plaques de *Kirchhoff-Love* traite séparément les problèmes relatifs aux efforts membranaires et aux moments de flexion. Pour certaines configurations et certains types de chargement, il existe des solutions analytiques donnant les déplacements transversaux de la plaque, comme celle des séries sinusoïdales doubles de *Navier* (Navier, 1823) et celle en série sinusoïdale simple de *Lévy* (Lévy, 1899). Dans le cas plus général, on recourt plutôt à la méthode des éléments finis (Hrabok et Hruby, 1984 ; Zienkiewicz *et al*, 2013) permettant d'obtenir une évaluation numérique des déplacements transversaux. Etant donné une géométrie discrétisée, la difficulté principale dans la mise en œuvre de cette méthode réside dans le choix du champ de déplacement sur chaque élément fini, qui doit être continu et à dérivées continues (continuité  $C^1$ ) à travers les arêtes de séparation des éléments, en raison de la cinématique des plaques de *Kirchhoff-Love* (Zienkiewicz *et al*, 2013). En revanche, la méthode de *Galerkin* (Galerkin, 1915) ou sa variante appelée *méthode de Galerkin sans maillage* (EFG<sup>10</sup>) (Krysl et Belytschko, 1995) consiste à discrétiser le champ de déplacement lui-même en lieu et place de la géométrie, ce qui permet de satisfaire aux exigences de la continuité  $C^1$ . S'appuyant sur la méthode de *Galerkin*, plusieurs solutions ont ainsi été développées pour évaluer la déformée purement thermique d'une plaque rectangulaire exposée au feu sur l'une de ses faces avec différentes conditions aux bords : quatre bords simplement appuyés (Boley et Weiner, 1960), deux bords simples appuyés (Das et Navaratna, 1961), trois bords simplement appuyés et un bord encastré (Parkus, 1976). La méthode de Galerkin sans maillage a été également utilisée pour calculer la déformée d'une plaque constituée des matériaux hétérogènes, encastrée sur un bord et libre sur les trois autres bords (Dai *et al*, 2005).

---

<sup>10</sup> Element free Galerkin method

Le modèle de plaque de *von Karman* doit quant à lui prendre en compte le couplage entre les efforts membranaires et les moments de flexion et traiter simultanément les deux problèmes, ce qui permet ainsi d'évaluer l'*effet du second ordre* des plaques soumis à des efforts de compression. Ce modèle aboutit à un système d'équations à dérivées partielles d'ordre quatre couplées, connu sous le nom d'«équations de *Föppl-von Kármán* ». Sans recours à l'hypothèse *ad hoc* postulée dans le travail de Von Karman (1910), Fung (1965) et Ciarlet (1979, 1980) ont complété le développement du modèle pour clarifier le passage d'un milieu tridimensionnel en transformations finies à un milieu bidimensionnel en grand déplacement transversal. En raison de la complexité des équations, l'hypothèse (Berger, 1954 ; Berger et Fife, 1968) a été acceptée que l'énergie de déformation relative au second invariant du tenseur de déformations membranaires est négligeable. Cette hypothèse permet de découpler les deux équations de *Föppl-von Kármán* et facilite ainsi la résolution du problème. Cependant, cette simplification n'est valable que dans le cas où les déplacements dans le plan des plaques sont nuls aux bords (Nowinski et Ohnabe, 1972 ; Prathap, 1979, Banerjee et Datta, 1981). Dans le cas où les plaques sont libres de se déplacer dans le plan, il est nécessaire de résoudre directement des équations de *Föppl-von Kármán*. Dans ce cas, la méthode de Galerkin est bien adaptée et a été utilisée pour l'étude des plaques rectangulaires sous pression en grand déplacement (Levy, 1942), des plaques rectangulaires sous gradient thermique (Forray et Newman, 1962), des plaques circulaires sous gradient thermique (Forray et Newman, 1960, 1961). Le point clé de l'application de cette méthode réside dans le choix des fonctions test pour la discrétisation du champ de déplacement, qui doit vérifier les conditions aux bords des plaques. Une des méthodes pour générer ces fonctions test propose d'utiliser les modes propres des plaques (Mukhopadhyay, 1979). Cette méthode a été appliquée à l'analyse de vibration des plaques de von Karman ayant une géométrie rectangulaire (Thomas et Bilbao, 2008).

L'utilisation de la méthode de *Galerkin*, que nous utiliserons dans le présent travail, donne en général une solution analytique ou semi-analytique sous forme de séries, ce qui permet d'une évaluation rapide du changement de géométrie des murs exposés au feu.

### 1.5.3.2. Capacités de résistance d'une plaque en béton armé

La seconde donnée relative à la mise en œuvre de l'approche calcul à la rupture concerne la détermination des capacités de résistance d'une plaque en béton armé, qui se traduit par un diagramme d'interaction dans le cas d'une poutre.

Dans ce dernier cas, la détermination du diagramme d'interaction à température *ambiante* s'appuie en général sur un raisonnement portant sur le respect de *limites en déformations* (voir 1.5.1). Dans le cadre de l'hypothèse selon laquelle les sections droites d'une poutre restent droites après déformation, ce raisonnement consiste à limiter les déformations axiales pour le béton en compression et pour l'acier en compression et en traction, comme indiquée sur la figure 1.12. Les « pivots » *A*, *B*, et *C* apparaissant sur cette figure correspondent respectivement à une limite de déformation relative de l'acier, au béton en compression pure et au béton en compression différentielle. Etant donné un champ de déformations associé un couple déformation axiale  $\epsilon$  et courbure  $\chi$  et respectant de telles limites en déformations, le champ de contraintes dans le béton peut être obtenu par le biais d'une loi de comportement non linéaire

du béton (EN 1992-1-1, 2005), ou être approximé par une distribution rectangulaire (Whitney, 1937 ; Darwin *et al*, 2016), comme montré sur la figure 1.13 Par ailleurs, les efforts dans les armatures peuvent être calculés à travers une loi élastique parfaitement plastique de l'acier.

Dans ces conditions, l'effort normal  $N$  et moment de flexion  $M$  peuvent être calculés par intégration de ce champ de contrainte sur toute la section (Bonet *et al*, 2004). Le couple  $(N, M)$  ainsi obtenu est représenté par un seul point sur le plan  $(N-M)$ . Faisant varier le couple des déformations généralisées  $(\epsilon, \chi)$ , on peut alors tracer dans le plan  $(N-M)$  l'ensemble des couples admissibles  $(N, M)$ , la combinaison convexe desquels permet de trouver le diagramme d'interaction, comme montré sur la figure 1.14 (Law et Gillie, 2010). Cette approche a été généralisée pour une poutre en flexion composée (Rodriguez, 1999 ; Charalampakis et Koumoussis, 2008 ; Rodriguez, 2015).

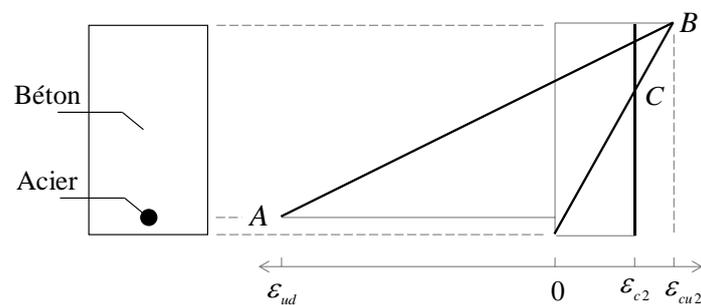


Figure 1.12. Diagramme des déformations admissibles de l'acier ( $\epsilon_{ud}$ ) et du béton en compression pure ( $\epsilon_{c2}$ ) et en compression différentielle ( $\epsilon_{cu2}$ ) (EN1992-1-1, 2005)

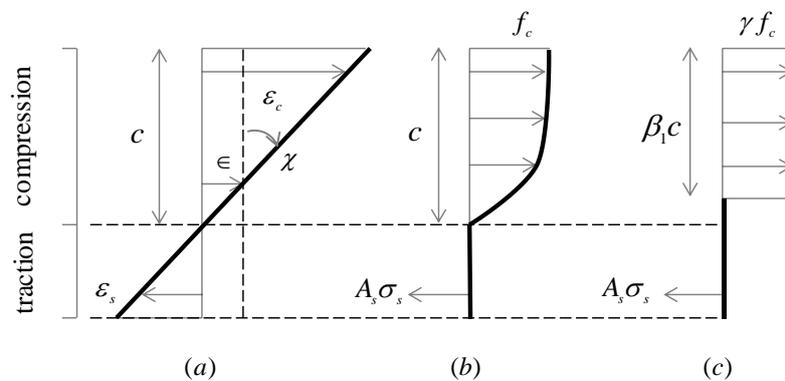


Figure 1.13. Un champ de déformation d'une section en béton armé soumise à compression et flexion unidimensionnelle (a), le champ de contrainte associé à ces déformations par une loi de comportement non linéaire (b) et le champ de contrainte simplifié en distribution rectangulaire (c) (Nilson, 2016)

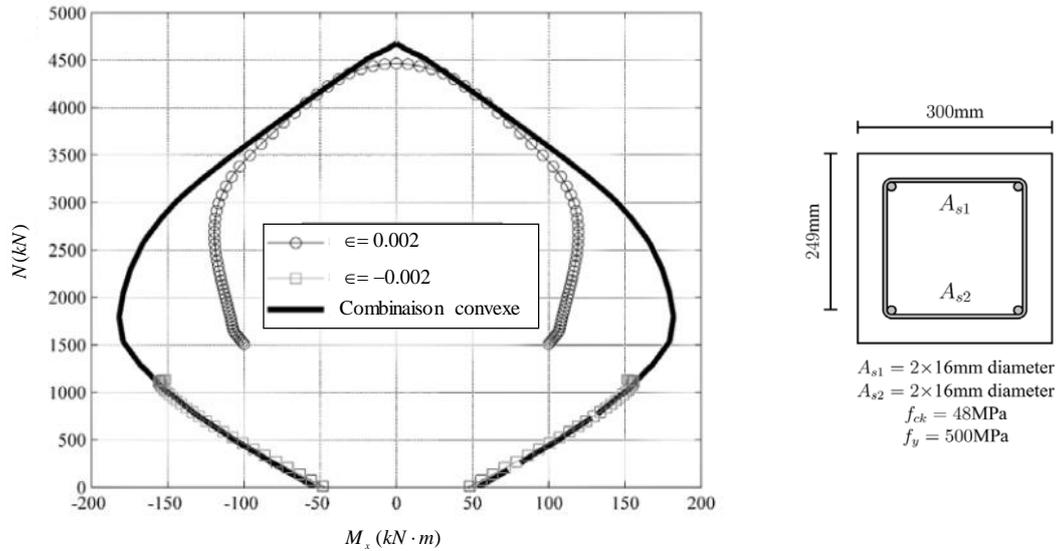


Figure 1.14. Construction du diagramme d'interaction comme enveloppe convexe des couples admissibles  $(N, M)$  (Law et Gillie, 2010)

Sous l'action d'un feu d'incendie, le gradient thermique qui en résulte induit, d'une part une *dilatation thermique* conduisant à des déformations initiales constituées d'une déformation membranaire et d'une courbure d'origine thermique, d'autre part à une modification des limites de déformations du béton et de l'acier due à l'élévation de température. Prenant en compte ces deux effets, l'approche précédente a été généralisée pour construire le diagramme d'interaction d'une poutre soumise à un gradient thermique (Caldas *et al*, 2010 ; Law et Gillie, 2010).

La généralisation de cette approche aux plaques en béton armé à haute température n'est pas évidente en raison du fait qu'elle nécessite, dans ce cas, des données décrivant les limites des déformations du béton sous sollicitations *biaxiales* (et non plus seulement *uniaxiales*), ainsi qu'une loi de comportement élastoplastique *bidimensionnelle* du béton à haute température permettant d'évaluer les champs de contraintes associés aux champs de déformations.

En revanche, qu'il s'agisse d'une poutre ou d'une plaque, il apparaît que l'approche *Calcul à la Rupture* est bien mieux adaptée au problème de la détermination de leur domaine de résistance à température ambiante, comme à haute température, car elle traite de limitations portant directement sur les champs de contraintes en lieu et place des champs de déformations et ne nécessite donc pas de données relatives aux lois de comportement du béton. Cette approche s'appuie sur un raisonnement de compatibilité entre la vérification de *l'équilibre* et celle de *la résistance locale* des matériaux constitutifs.

Dans le cas d'une poutre, le diagramme d'interaction obtenu à partir du raisonnement du calcul à la rupture montre une bonne concordance avec celui donné par l'Eurocode2 partie 1-1 (EN 1992-1-1, 2005) à température ambiante (voir figure 1.15(a)) et a été validé par comparaison avec un essai expérimental (Pham, 2014). Dans le cas de plaques en béton armé, le calcul à la rupture a été appliqué par Koechlin (Koechlin *et al*, 2008) en vue de déterminer le domaine de résistance macroscopique du béton armé à température ambiante, le critère local

étant du type *Drucker-Prager* pour le béton et du type contrainte limite en traction-compression pour l'acier.

Pour une généralisation aux plaques soumises à un gradient de température, il suffit alors, tout comme dans le cas des poutres (Pham *et al.*, 2015), de prendre en compte la dégradation des propriétés de résistance du béton et de l'acier en fonction de la température (Pham, 2014), ce qui entraîne un rétrécissement du domaine de résistance délimité par un tel diagramme, comme montré par Bleyer *et al.*, 2015(a) (voir figure 1.15(b)). Le fait que les déformations d'origine thermique n'interviennent pas dans la détermination du domaine de résistance peut être expliqué par la propriété que les chargements limites demeurent indépendants de l'état initial (de Buhan, 2007).

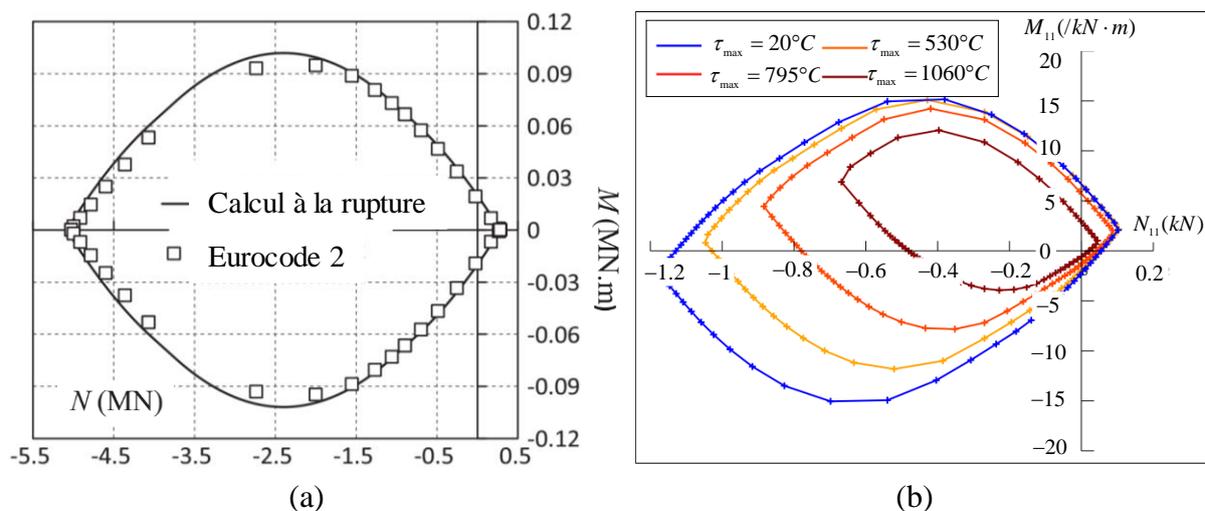


Figure 1.15. (a) Comparaison du diagramme d'interaction d'une poutre en béton armé issu du calcul à la rupture avec celui obtenu par application de l'Eurocode (Pham, 2014) et (b) évolution du domaine de résistance dans le plan  $(N_{11}-M_{11})$  d'une plaque en béton armé en fonction de la température (Bleyer, 2015(c))

## 1.6. Organisation du manuscrit

Le présent travail a pour but d'analyser la stabilité au feu des murs en béton armé par le biais de l'application de la théorie du calcul à la rupture, qui permet de dimensionner ces murs vis-à-vis à l'action thermique due à l'incendie, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la résolution d'un problème d'évolution élastoplastique susceptible d'être beaucoup trop coûteux en terme du temps de calcul, en particulier dans le cas où les changements de géométrie doivent être pris en compte.

La **partie I** sera consacrée au *calcul de la déformée* d'origine thermique des murs, qui fournira les données relatives au *changement de géométrie* induit par l'action thermique (voir la branche *gauche* du schéma général de la Figure 1.16). Cette partie est elle-même subdivisée en deux chapitres.

✓ Le **chapitre 2** traite d'abord d'une modélisation des murs comme des plaques de *Kirchhoff-Love*. Nous verrons que cette modélisation, qui s'applique dans le cas où les déplacements transversaux demeurent suffisamment « petits », revient à négliger l'influence

du poids sur la flexion de la plaque et permet ainsi d'évaluer la déformée *purement thermique* des murs sans que ce poids intervienne. Nous présenterons d'abord les équations générales du modèle de plaque de *Kirchhoff-Love* sur la configuration courante des murs séparatifs. Nous développerons ensuite des solutions analytiques relatives à des plaques rectangulaires avec plusieurs types de conditions aux bords. Est ainsi explicitée, pour la première fois à notre connaissance, la solution analytique du déplacement transversal d'origine thermique d'une plaque libre sur ses deux bords latéraux et simplement appuyée sur les deux autres bords, ainsi que la solution en déplacement d'une plaque constituée des panneaux individuels et soumise à un gradient thermique. Enfin, une étude paramétrique est effectuée afin d'analyser l'influence de différents paramètres (dimensions des murs, durée de l'incendie, etc.) sur la déformée *purement thermique* d'un mur coupe-feu.

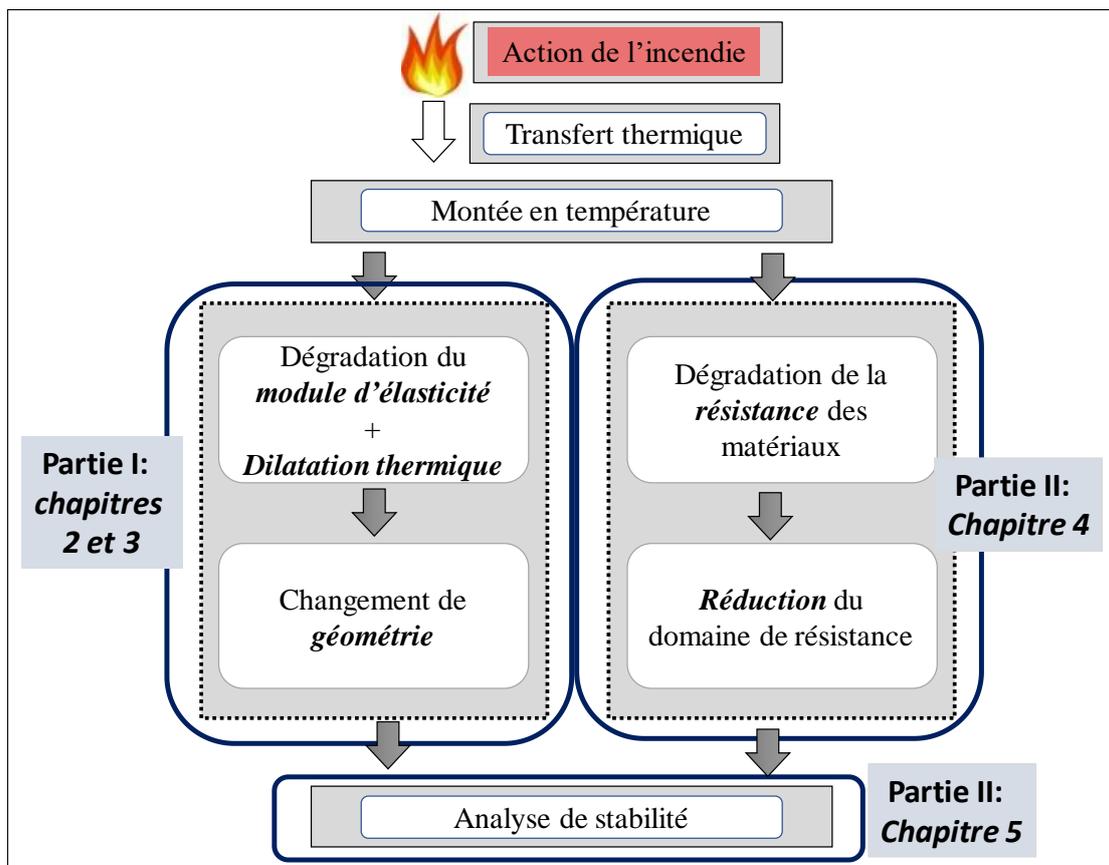


Figure 1.16. Organisation du manuscrit

✓ Le **chapitre 3** adopte quant à lui une modélisation des murs comme des plaques de *von Karman*, qui introduit un couplage entre le problème membranaire et celui de flexion et permet ainsi d'analyser l'« effet  $P-\delta$  » dû au poids propre qui s'exerce dans le plan de la plaque. Des solutions semi-analytiques relatives aux *déformées totales* seront développées pour deux configurations de mur. Ensuite, l'influence de paramètres géométriques (hauteur, élancement, etc.) sur l'ampleur de l'« effet  $P-\delta$  » sera analysée à travers une étude paramétrique. Enfin, une comparaison sera effectuée entre la déformée mesurée dans un essai au feu expérimental d'un mur en béton armé à échelle quasi-réelle (essai *Vulcain* réalisé au CSTB) et les résultats issus des solutions précédentes.

S'appuyant très largement sur les résultats de travaux antérieurs (Pham, 2014 ; Bleyer, 2015(a)), la **partie II** sera consacrée au l'approche *Calcul à la rupture*, qui est d'abord appliquée à la résolution d'un problème auxiliaire permettant la détermination du *domaine de résistance macroscopique* d'une plaque en béton armé soumise à un gradient de température (**chapitre 4** et branche *droite* du schéma général de la *Figure 1.16*), puis mise en œuvre pour l'analyse de stabilité au feu des murs séparatifs (**chapitre 5** et bloc inférieur du schéma général de la *Figure 1.16*).

✓ Se référant à la théorie de l'*homogénéisation en calcul à la rupture* appliquée aux plaques hétérogènes périodiques (de Buhan *et al*, 2017), le **chapitre 4** vise à déterminer le *domaine de résistance macroscopique* d'une plaque en béton armé soumise à un gradient de température. Après avoir rappelé la définition générale du domaine de résistance d'une plaque hétérogène périodique, nous mettrons l'accent sur l'influence de la température sur la dégradation des propriétés de résistance du béton et de l'acier, qui nous permet d'appliquer la définition générale précédente à une plaque en béton armée sous l'effet d'un gradient thermique que l'on peut percevoir comme une plaque *hétérogène dans son épaisseur*. Le problème auxiliaire du calcul à la rupture ainsi défini sur un élément de plaque, est alors résolu par la mise en œuvre de l'approche *statique par l'intérieur* et de l'approche *cinématique par l'extérieur* qui permettent d'obtenir respectivement une *borne inférieure* et une *borne supérieure* du critère de résistance macroscopique formulé en termes d'*efforts membranaires* et de *moments de flexion*. Nous montrerons quelques exemples de domaines ainsi obtenus, qui mettent clairement en évidence la diminution des capacités de résistance en tout point du mur consécutif à l'action du feu.

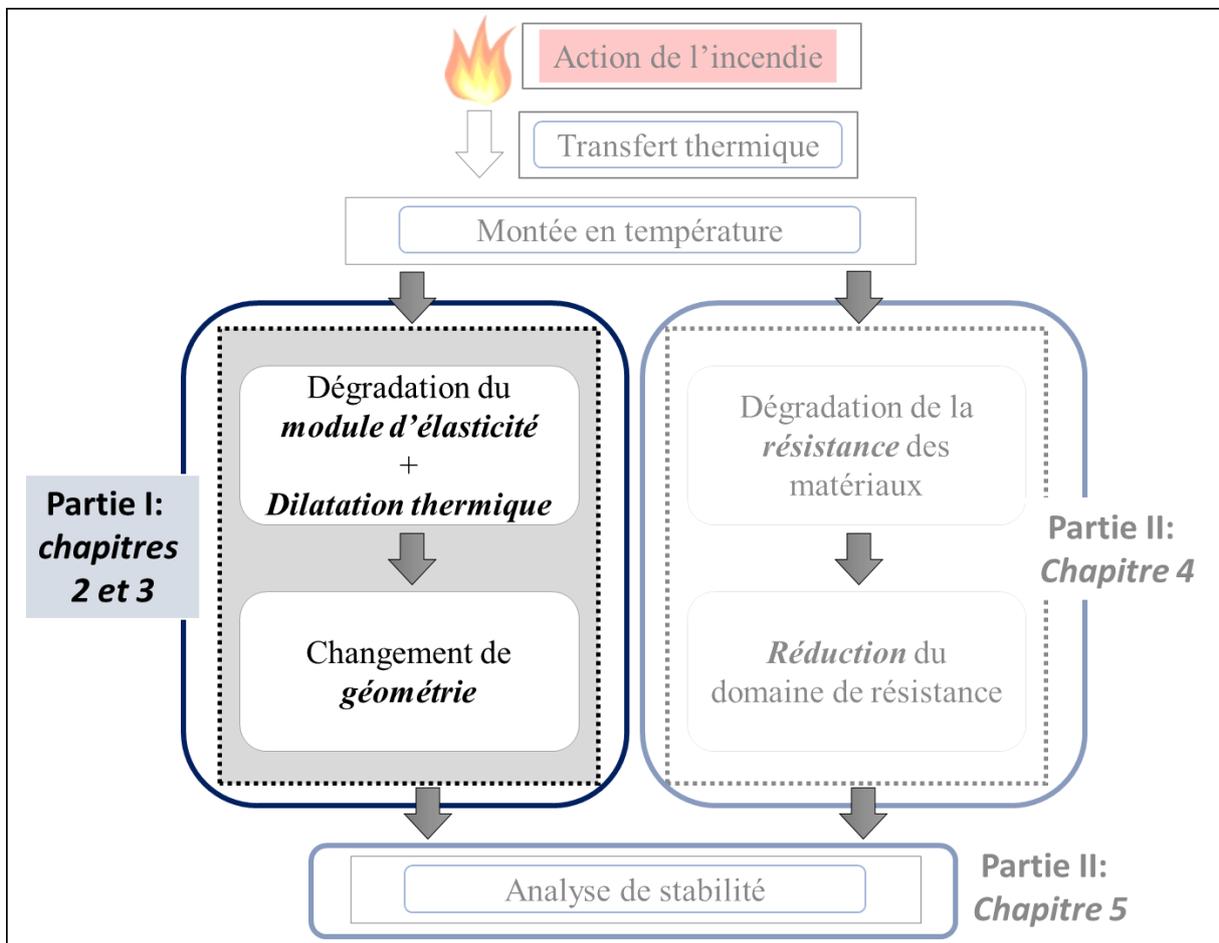
✓ Le **chapitre 5** procède enfin à l'analyse de stabilité au feu des murs séparatifs sur la base de la connaissance de la *géométrie déformée* du mur qui résulte de la **partie I** d'une part, du *critère de résistance macroscopique* calculé au **chapitre 4** d'autre part. Nous présentons tout d'abord la discrétisation en *facettes planes triangulaires* des murs dans leur configuration déformée, qui peuvent être assimilés à des coques à faible courbure. La notion de *facteur de stabilité* est ensuite introduite. Ce facteur est alors encadré à l'aide des approches du calcul à la rupture mises en œuvre par le biais de la *méthode des éléments finis* que sont les facettes triangulaires planes. Cette mise en œuvre numérique débouche sur la formulation de problèmes d'*optimisation convexe non-linéaire* résolus par un code de calcul adapté. Le chapitre s'achève par la présentation des résultats d'une étude paramétrique mettant clairement en évidence l'influence de divers paramètres (hauteur et élancement du mur, rôle des conditions aux limites sur les bords latéraux, durée de l'incendie, etc...) sur le facteur de stabilité du mur.

En guise de conclusion, nous récapitulerons l'ensemble des résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce travail et évoquerons quelques discussions par rapport au champ d'application possible de ces analyses de stabilité dans le domaine de l'ingénierie incendie des structures.

Le manuscrit comporte en outre une annexe relative à la détermination de la loi de comportement thermoélastique d'une plaque en variables généralisées.

# Partie I

## Calcul de la déformée d'origine thermique des murs en béton armé



Positionnement de la Partie I par rapport au plan général

## Chapitre 2

### Déformée d'origine purement thermique

Ce chapitre est consacré au calcul de la déformée d'origine thermique des murs coupe-feu et du changement de géométrie qui en résulte, dans le cas où les murs sont modélisés comme des plaques de *Kirchhoff-Love*, ce qui néglige l'action du poids propre sur cette déformée. Après avoir établi les équations générales du problème, on développe un certain nombre de solutions analytiques pour les déplacements transversaux (hors plan) des plaques rectangulaires soumises à un gradient thermique. Le chapitre s'achève par une étude permettant d'analyser l'influence d'un certain nombre de paramètres (coefficient de Poisson, élancement de la plaque, conditions aux limites, présence ou non de joints) sur la déformée d'origine purement thermique des murs.

## 2.1. Position du problème

### 2.1.1. Configurations des murs retenues

Les murs séparatifs coupe-feu employés notamment dans la construction de bâtiments industriels sont constitués de panneaux pleins en béton armé, insérés latéralement dans des poteaux préfabriqués en béton de section en « H » ou en « I ». Afin de faciliter leur transport puis leur mise en place sur site, les panneaux préfabriqués sont limités à une hauteur standard (2,5m pour les panneaux en béton armé). Ils sont empilés les uns sur les autres pour atteindre une hauteur bien plus importante. La liaison entre deux panneaux superposés s'effectue par un système d'encoches mâle-femelle, appelé *tenon-mortaise*, lié par une couche de mortier. Les panneaux ont une épaisseur de l'ordre de 15 cm avec une largeur maximale de 12,5m. L'ensemble repose sur des fûts de longrines en béton (voir figure 2.1), tandis que la tête du mur (panneau supérieur) est placée entre deux poutres horizontales qui la maintiennent dans le plan vertical. Dans ce système d'appui, le jeu ( $e$ ) laissé libre entre les panneaux et les poteaux latéraux ainsi que la liaison entre les poutres en tête et le panneau supérieur autorisent une liberté de mouvement dans le plan des panneaux, tandis que la longrine en pied empêche le mouvement vertical le long de ce bord.

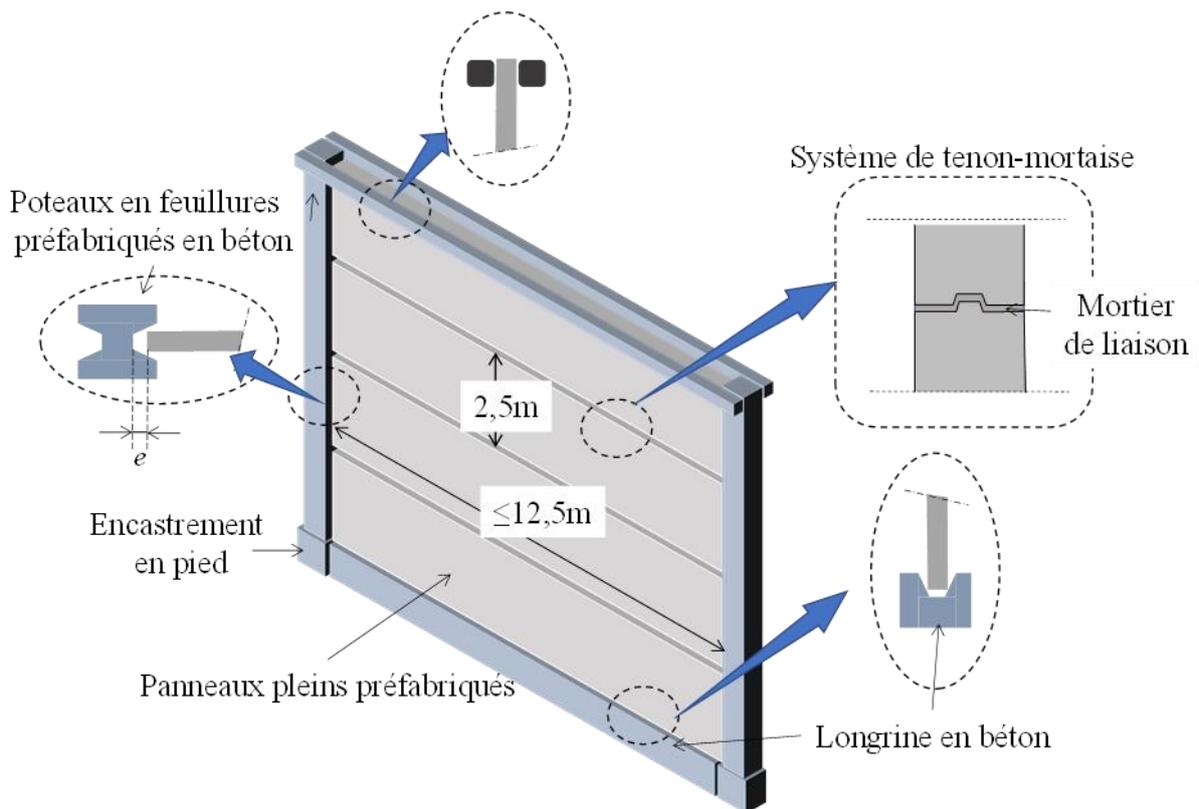


Figure 2.1. Configuration-type de murs séparatifs coupe-feu en béton armé

Même s'il est vraisemblable que la déformée de ces murs sous l'action du feu dépend de la déformabilité thermique propre des poteaux et des poutres qui constituent l'encadrement du panneau, nous ferons dans ce travail l'hypothèse simplificatrice que ces éléments de structure ne sont pas affectés par le chargement thermique et donc demeurent fixes. Il est vraisemblable

que la prise en compte d'une telle déformabilité conduirait à accentuer la déformée de ces panneaux.

La configuration décrite ci-dessus étant celle qui la plus fréquemment rencontrée en pratique, nous examinerons dans ce travail trois configurations voisines :

- ✓ celle où le mur coupe-feu est formé d'un seul panneau continu ;
- ✓ celle où le mur est construit par superposition de panneaux horizontaux séparés par des joints ;
- ✓ la configuration dans laquelle les bords latéraux du mur restent libres d'efforts, ce qui nous permettra de comparer les résultats de notre modélisation avec les mesures expérimentales provenant de l'essai *Vulcain* (voir le chapitre suivant).

### 2.1.2. Modélisation adoptée

Le calcul de la déformée d'un mur séparatif coupe-feu tel que décrit précédemment repose sur le choix préalable d'une modélisation mécanique de ce dernier. Une première modélisation simplifiée, adaptée au cas du mur continu sans joints, a consisté à traiter ce dernier comme une *poutre isostatique* (Pham, 2014 ; Pham, 2015(a) ; Pham, 2015(b)), sollicitée en *contraintes planes* dans le cas d'un panneau étroit dont les bords latéraux sont libres ou bien en *déformations planes* pour un mur continu dont la largeur est beaucoup plus grande que la hauteur. L'avantage d'adopter un tel modèle simplifié est de permettre aux ingénieurs d'avoir accès à une évaluation très rapide (car quasi analytique) de la déformée de murs soumis à l'action du feu conduisant à un dimensionnement de ce dernier en se plaçant du côté de la sécurité.

Néanmoins, une telle modélisation ne permet pas de prendre en compte les conditions d'appui sur les bords latéraux, ni l'influence des joints sur la déformée des murs et donc sur leurs conditions de stabilité. Dans ces conditions, il semble donc beaucoup plus réaliste de modéliser le mur comme une *plaque*, c'est-à-dire comme une structure *bidimensionnelle* et non plus *unidimensionnelle*. Comme indiqué sur le tableau 2.1 ci-dessous, les plaques peuvent généralement être classifiées en trois catégories, selon la valeur du rapport d'élancement  $L/h$ , où  $L$  désigne une dimension caractéristique de la plaque (sa hauteur par exemple dans le cas présent), tandis que  $h$  désigne son épaisseur (Steele et Balch, 2009) :

<i>Catégorie</i>	<i>Membrane</i>	<i>Plaque mince</i>	<i>Plaque épaisse</i>
Rapport d'élancement	$L/h \geq 100$	$20 \leq L/h < 100$	$3 \leq L/h < 20$

Tableau 2.1. Classification des solides en fonction du ratio d'élancement

Dans le cas du modèle *membranaire*, où le rapport d'élancement est très grand, le chargement de la plaque est repris essentiellement par des *efforts membranaires*, tandis que dans le cas du modèle de plaque *mince* ou modèle de *Kirchhoff-Love*, les moments de flexion doivent être également pris en compte. Enfin, le modèle de plaque *épaisse* ou modèle de

*Reissner-Mindlin* (Reissner, 1945 ; Mindlin, 1951) correspond à la configuration où les déformations de cisaillement dus aux efforts tranchants jouent un rôle significatif dans la déformée de la plaque. Pour ce qui concerne les murs séparatifs coupe-feu, la gamme de hauteur et de largeur sont associées à un rapport d'élanement qui se situe dans l'intervalle [20-100] (Cimbéton, 2007), ce qui justifie le choix du modèle de plaque *mince* pour décrire leur comportement mécanique.

On s'attachera donc dans un premier temps à analyser la déformée des murs sous chargement thermique à l'aide du modèle de plaque de *Kirchhoff-Love* dans le cadre de *l'hypothèse des petites perturbations*. Ce choix est justifié par la simplicité du modèle, ainsi que par sa pertinence pour des configurations industrielles courantes de murs de moins de 10m où l'effet «  $P-\delta$  » dû au poids propre peut être négligé.

## 2.2. Le modèle de plaque de Kirchhoff-Love : quelques rappels

Dans l'espace repéré par un trièdre orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ , la plaque est modélisée comme une surface bidimensionnelle  $\omega$  située dans le plan  $Ox_1x_2$  et en chaque point  $M(x_1, x_2)$  de laquelle est attachée une *microstructure* représentant l'épaisseur de la plaque.

### 2.2.1. Cinématique et déformations généralisées

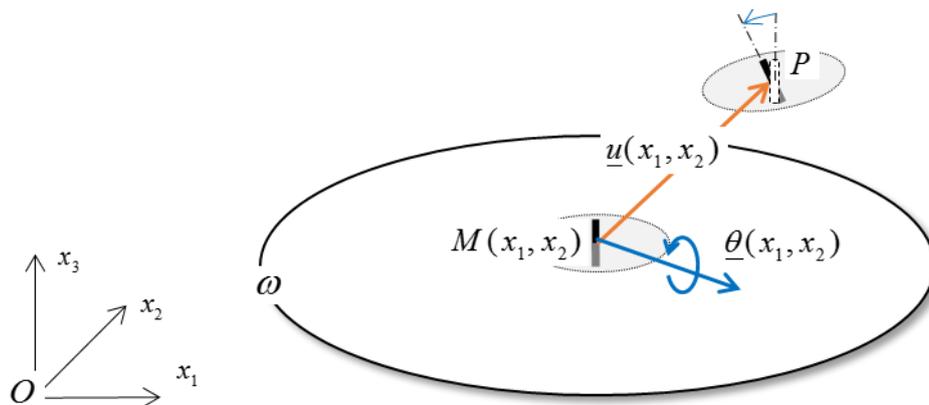


Figure 2.2. Cinématique d'une plaque

Dans le cadre d'une telle modélisation, la cinématique de la plaque est caractérisée par (figure 2.2) :

- ✓ un champ de déplacement de *translation* qui associe la position initiale du point matériel  $M(x_1, x_2)$  à sa position après déformation  $P(x_1, x_2)$  :

$$\underline{u} = \underline{MP} = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2 + u_3(x_1, x_2)\underline{e}_3 \quad (2.1)$$

où  $u_\alpha(x_1, x_2)\underline{e}_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) et  $u_3(x_1, x_2)\underline{e}_3$  sont respectivement la partie plane et la partie hors-plan (*flèche*) du déplacement ;

- ✓ un champ de *rotation* :

$$\underline{\theta}(x_1, x_2) = \theta_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + \theta_2(x_1, x_2)\underline{e}_2 \quad (2.2)$$

Une telle plaque est dite de *Kirchhoff-Love* (Kirchhoff, 1850 ; Love 1892) si les hypothèses cinématiques suivantes sont satisfaites :

- (H1) hypothèse de *petites perturbations*. Le gradient du champ de déplacement en tout point de la plaque par rapport aux coordonnées de ce point, ainsi que les rotations, restent *petits* :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right| \ll 1, |\theta_\alpha| \ll 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.3)$$

- (H2) hypothèse de *Kirchhoff-Love* : les normales matérielles perpendiculaires au plan de la plaque dans sa configuration initiale, restent normales à la surface moyenne obtenue après déformation. Compte tenu de l'hypothèse (H1), cette seconde hypothèse se traduit immédiatement par la relation suivante entre la rotation  $\underline{\theta}$  et le gradient  $\underline{\nabla}(u_3)$  (figure 2.3) :

$$\underline{\theta} = \underline{\nabla}(u_3) \wedge \underline{e}_3 \quad (2.4)$$

ce qui signifie que la rotation du plan tangent à la plaque reste petite et égale à celle de la normale.

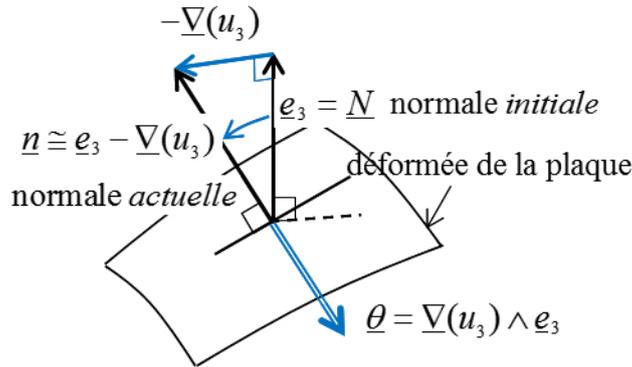


Figure 2.3. Condition de Kirchhoff-Love

Dans ces conditions, les *déformations généralisées* sont caractérisées en tout point par :

- ✓ le tenseur des déformations membranaires linéarisées, défini par :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \text{avec} \quad \epsilon_{\alpha\beta} = 1/2 \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right] \quad \text{pour } \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.5)$$

- ✓ le tenseur des déformations de courbure, défini par :

$$\underline{\underline{\chi}} = \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\nabla}(u_3)) = \chi_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \text{avec} \quad \chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.6)$$

Par ailleurs, la *condition de compatibilité géométrique* qui assure qu'un champ de déformations membranaires est intégrable, c'est-à-dire dérive bien d'un champ de déplacement au sens des relations (2.5), s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Efforts généralisés, équations d'équilibre et conditions aux limites

Les *efforts intérieurs généralisés*, représentés sur la figure 2.4, sont de trois types :

- ✓ les *efforts membranaires*  $\underline{\underline{N}}$  définis en tout point de la plaque par un tenseur du second ordre symétrique plan :

$$\underline{\underline{N}} = N_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad (2.8)$$

- ✓ les *moments de flexion*  $\underline{\underline{M}}$  définis par un tenseur du second ordre symétrique plan :

$$\underline{\underline{M}} = M_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad (2.9)$$

- ✓ ainsi que les *efforts tranchants*  $\underline{V}$  définis par un vecteur :

$$\underline{V} = V_\alpha(x_1, x_2) \underline{e}_\alpha \quad (2.10)$$

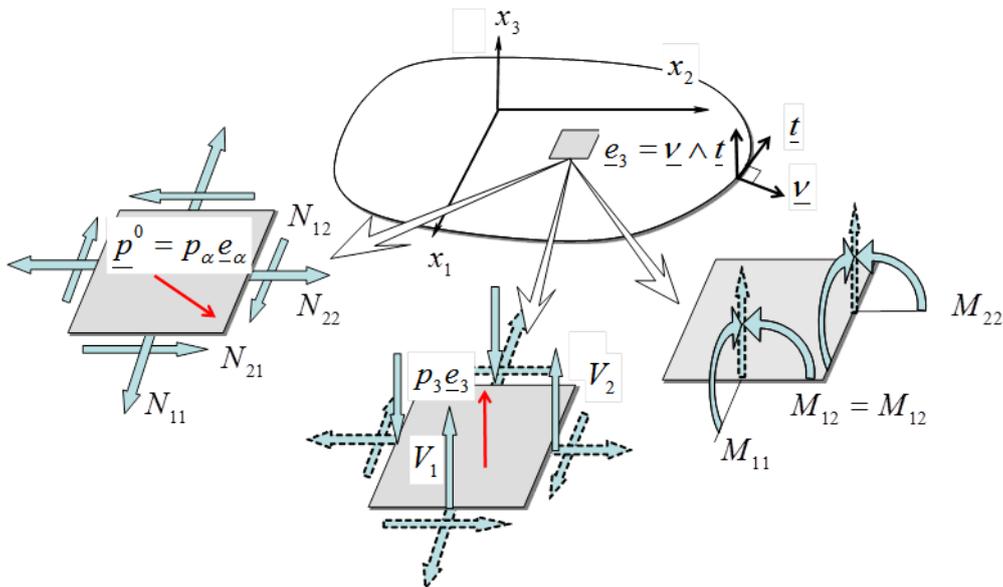


Figure 2.4. Efforts intérieurs à une plaque

Les *équations d'équilibre* portant sur ces efforts intérieurs peuvent être établies en écrivant l'équilibre en résultantes et en moments d'un petit élément de plaque, comme suggéré sur la figure 2.4. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{N}} + \underline{p}^0 = 0 & (a) \\ \operatorname{div} \underline{V} + p_3 = 0 & (b) \\ \operatorname{div} \underline{\underline{M}} + \underline{V} = 0 & (c) \end{cases} \quad (2.11)$$

la plaque étant soumise en tout point à une *densité surfacique d'efforts* définie par :

$$\underline{p}(x_1, x_2) = \underline{p}^0 + p_3 \underline{e}_3 \quad (2.12)$$

où  $\underline{p}^0 = p_\alpha \underline{e}_\alpha$  représente la projection de cette densité d'efforts sur le plan de la plaque (cas de la pesanteur pour un panneau vertical). On obtient alors par élimination des efforts tranchants qui sont supposés ne jouer aucun rôle dans les déformations de la plaque<sup>1</sup>, les deux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{N}} + \underline{p}^0 = 0 & (a) \\ \operatorname{div}(\operatorname{div} \underline{\underline{M}}) - p_3 = 0 & (b) \end{cases} \quad (2.13)$$

auxquelles il faut ajouter les *conditions aux limites en efforts* en tout point du contour de la plaque de normale  $\underline{n}$  et tangente  $\underline{t}$  unitaires :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{N}} \cdot \underline{n} &= \underline{N}^d & (a) \\ Q_n = Q^d, M_{mn} &= M^d & (b) \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $Q_n$  est souvent appelé l'*effort tranchant effectif* (voir par exemple Ventsel et Krauthammer, 2001) du modèle de Kirchhoff-Love, défini par :

$$Q_n = V_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = - \left( \frac{\partial M_{mn}}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \quad (2.15)$$

### 2.2.3. Loi de comportement thermoélastique de la plaque en variables généralisées

Il paraît *a priori* plus réaliste de prendre en compte les renforts en acier dans la loi de comportement thermoélastique de la plaque en béton armé. Cependant, le travail de Pham (2014) a permis de montrer que la prise en compte des renforts en acier n'a que peu d'influence sur le comportement *élastique* global de la plaque, du fait que la fraction volumique de l'acier est très faible. Dans ces conditions, nous ne tiendrons compte que du béton dans la modélisation. Puisque l'on s'intéresse seulement à la déformée élastique d'origine thermique du mur, le béton sera donc par la suite considéré comme un matériau *élastique linéaire isotrope* dont les propriétés élastiques dépendent de la température.

La plaque étant alors exposée à un feu homogène sur l'une de ses faces, le champ d'*élévation de température*  $\tau$  qui s'établit à travers son épaisseur ( $h$ ) ne dépend que de la coordonnée  $x_3$  :

$$\tau(\underline{x}) = \tau(x_3) \quad \text{avec} \quad -h/2 \leq x_3 \leq h/2 \quad (2.16)$$

<sup>1</sup> L'hypothèse (H2) de Kirchhoff-Love signifie en effet que les déformations de *cisaillement* de la plaque sont nulles.

Cette élévation de température a deux conséquences.

a) l'apparition de déformations thermiques *isotropes* de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}(x_3) = \alpha(x_3)\tau(x_3)\underline{\underline{1}} \quad (2.17)$$

où  $\alpha(x_3)$  désigne le coefficient de dilatation thermique qui dépend également de l'élévation de température.

b) ainsi que la *réduction du module d'élasticité* du béton :

$$E(x_3) = E(\tau(x_3)) = k_E(\tau(x_3))E_0 \quad (2.18)$$

où  $k_E$  est un coefficient de réduction sans dimension, égal à 1 à température *ambiante* ( $\tau = 20^\circ$ ) et fonction décroissante de  $\tau$  (voir les courbes données par l'Eurocode au chapitre 1) tandis que  $E_0$  désigne le module d'Young du béton à température ambiante.

Par ailleurs, nous admettrons ici pour simplifier la démarche que le coefficient de Poisson  $\nu$  n'est pas affecté par l'élévation de température, même si des recherches expérimentales récentes (Bahr *et al.*, 2013) mettent en évidence une diminution de ce coefficient en fonction de la température. La conséquence de cette simplification sera abordée dans l'étude paramétrique.

Dans ces conditions, la formulation d'une *loi de comportement thermoélastique* de la plaque en béton soumise à un gradient de température (évalué par un calcul de transfert thermique préalable), peut être effectuée à partir de la *résolution d'un problème de thermoélasticité 3D* défini sur un volume parallélépipédique, représentatif de la plaque, comme expliqué en détails à l'Annexe A. Cette loi de comportement peut être exprimée en variables généralisées comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \left( A \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} - B \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} \right) + N^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \left( -B \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + D \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{Bmatrix} \right) + M^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $N^T$  et  $M^T$  sont respectivement le moment et l'effort membranaire « thermiques » engendrés par le gradient thermique lorsque la plaque est complètement bloquée, c'est-à-dire lorsque les déformations généralisées  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})$  de la plaque sont fixées à zéro :

$$N^T = \frac{N_0^T}{1-\nu}, \quad M^T = \frac{M_0^T}{1-\nu}, \quad (2.20)$$

où  $N_0^T$  et  $M_0^T$  sont respectivement l'effort membranaire thermique et moment de flexion thermique d'une *poutre* de même épaisseur sous chargement thermique, définis par :

$$N_0^T = \int_{-h/2}^{+h/2} -\alpha(x_3)\tau(x_3)E(x_3) dx_3, M_0^T = \int_{-h/2}^{+h/2} x_3\alpha(x_3)\tau(x_3)E(x_3) dx_3. \quad (2.21)$$

tandis que  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont respectivement la rigidité membranaire, le coefficient de couplage et la rigidité flexionnelle de la **plaque**, respectivement égaux à :

$$A = \frac{A_0}{1-\nu^2}, B = \frac{B_0}{1-\nu^2}, D = \frac{D_0}{1-\nu^2} \quad (2.22)$$

où les coefficients  $A_0$ ,  $B_0$  et  $D_0$  sont respectivement la rigidité membranaire, le coefficient de couplage et la rigidité flexionnelle d'une **poutre** de même épaisseur sous chargement thermo-mécanique, introduit dans le travail de Pham (2014) :

$$A_0 = \int_{-h/2}^{+h/2} E(x_3) dx_3, B_0 = \int_{-h/2}^{+h/2} E(x_3)x_3 dx_3, D_0 = \int_{-h/2}^{+h/2} E(x_3)x_3^2 dx_3. \quad (2.23)$$

Les relations (2.22) montrent qu'à *température ambiante*, ces différents coefficients se réduisent à :

$$A = \frac{E_0 h}{1-\nu^2}, B = 0, D = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.24)$$

de sorte que le *coefficient de couplage*  $B$  s'annule puisque le module d'Young est constant dans l'épaisseur de la plaque. Un tel couplage doit en revanche être pris en compte dans les calculs dès l'apparition d'un gradient d'élévation de température qui induit une variation du module d'élasticité à travers l'épaisseur de la plaque.

Dans le cas où la plaque est *complètement libre* ( $\underline{N} = \underline{M} = 0$ ), le gradient thermique engendre des déformations membranaires et de courbure égales à :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{cases} = \epsilon^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \epsilon^T = -\frac{1}{1+\nu} \frac{DN^T + BM^T}{AD - B^2} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{cases} = \chi^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \chi^T = -\frac{1}{1+\nu} \frac{BN^T + AM^T}{AD - B^2}$$

soit en tenant compte des relations (2.20) et (2.22) :

$$\epsilon^T = -\frac{D_0 N_0^T + B_0 M_0^T}{A_0 D_0 - B_0^2} = \epsilon_0^T, \quad \chi^T = -\frac{B_0 N_0^T + A_0 M_0^T}{A_0 D_0 - B_0^2} = \chi_0^T. \quad (2.26)$$

c'est-à-dire que les déformations d'origine thermique ( $\epsilon^T, \chi^T$ ) d'une plaque complètement libre sont identiques à celles d'une poutre sous chargement thermique et ne dépendent pas de coefficient de Poisson  $\nu$ . Cette courbure d'origine thermique  $\chi^T$  d'une plaque complètement libre est désormais appelée *courbure thermique* associée à un feu d'incendie.

## 2.2.4. Mise en équations du problème

### 2.2.4.1 Le problème membranaire

Il convient d'introduire d'abord la solution en efforts membranaires donnée par les dérivées de la fonction d'Airy<sup>2</sup>  $\phi$  (Salençon, 2016) :

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - p_1 x_1, N_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - p_2 x_2, N_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.27)$$

Un tel champ des efforts membranaire vérifiant automatiquement l'équation d'équilibre (2.13a), les déformations membranaires associées par la loi de comportement thermoélastique (2.19) inversée s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = B/A \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{pmatrix} + \frac{1}{A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} - N^T \\ N_{22} - N^T \\ N_{12} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

qui doivent, pour être *solution du problème*, vérifier la condition de compatibilité géométrique (2.7) :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2.29)$$

L'introduction des relations de comportement (2.24) dans cette dernière équation donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 (N_{11} - \nu N_{22})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 (N_{22} - \nu N_{11})}{\partial x_1^2} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ + \frac{B}{A} \left( \frac{\partial^2 \chi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \chi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

où il a été tenu compte du fait que les champs d'efforts thermiques sont *homogènes* et donc n'apparaissent pas dans cette dernière équation. En outre l'équation cinématique (2.6) montre que :

$$\frac{\partial^2 \chi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \chi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2.31)$$

de sorte que :

$$\frac{1}{A(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 (N_{11} - \nu N_{22})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 (N_{22} - \nu N_{11})}{\partial x_1^2} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \quad (2.32)$$

<sup>2</sup> G.B. Airy (1801-1892)

Par ailleurs l'équation d'équilibre membranaire implique, si l'on suppose que le champ d'efforts surfaciques  $\underline{p}^0$  est *constant* :

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}\underline{N}) = -\operatorname{div}\underline{p}^0 = 0 \Leftrightarrow -2\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 N_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N_{22}}{\partial x_2^2} \quad (2.33)$$

soit en reportant cette relation dans (2.32) :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (N_{11} + N_{22}) = \Delta(\operatorname{tr}\underline{N}) = 0 \quad (2.34)$$

et donc finalement en utilisant les relations (2.27) :

$$\left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (2.35)$$

c'est-à-dire en notations intrinsèques :

$$\Delta(\Delta\phi) = 0 \quad (2.36)$$

#### 2.2.4.2 Le problème en flexion

La mise en équation du problème en flexion a recours à l'approche en déplacement qui consiste à rechercher le champ de déplacement transversal  $u_3$  cinématiquement admissible qui soit associé, à travers la loi de comportement thermoélastique donnée par (2.19), à un champ de moments de flexion statiquement admissible pour le problème. En vertu de la loi de comportement (2.19), il vient immédiatement :

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = -\frac{B}{A} \begin{pmatrix} N_{11} - N^T \\ N_{22} - N^T \\ N_{12} \end{pmatrix} + D_e \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{pmatrix} + M^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

où :

$$D_e = D - B^2 / A \quad (2.38)$$

est la *rigidité effective en flexion* de la plaque en conditions d'incendie. D'où en reportant dans l'équation d'équilibre en moments (2.13(b)) :

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}\underline{M}) - p_3 = 0 \quad (2.39)$$

avec, tenant compte du fait que  $N^T$  et  $M^T$  sont *constants* :

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}\underline{M}) = -\frac{B}{A} \operatorname{div}(\operatorname{div}\underline{N}) + D_e \Delta(\Delta u_3) \quad (2.40)$$

soit encore, en utilisant l'équation d'équilibre membranaire (2.13(a)) où  $\underline{p}^0$  est supposé constant :

$$\operatorname{div}(\operatorname{div} \underline{\underline{M}}) = D_e \Delta(\Delta u_3) \quad (2.41)$$

L'équation d'équilibre thermoélastique en flexion de la plaque s'écrit donc finalement :

$$D_e \Delta(\Delta u_3) - p_3 = 0 \quad (2.42)$$

### 2.2.5. Récapitulatif

La solution du problème d'équilibre thermoélastique d'une plaque de *Kirchhoff-Love* soumise à un *chargement thermique uniforme* caractérisé par le couple d'efforts thermiques  $(N^T, M^T)$  et une *densité surfacique d'efforts uniforme*  $\underline{p} = p_\alpha \underline{e}_\alpha + p_3 \underline{e}_3$  est le couple  $(\phi, u_3)$  solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta \phi) &= 0 & (a) \\ D_e \Delta(\Delta u_3) - p_3 &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (2.43)$$

auquel il faut ajouter les *conditions aux limites* en efforts ou en déplacements prescrites sur le bord de la plaque. Ces dernières conditions feront intervenir le chargement thermique de la plaque, qui n'apparaît pas dans les équations précédentes.

## 2.3. Développement des solutions analytiques pour les plaques rectangulaires

Nous considérons dans ce qui suit trois configurations de plaques *rectangulaires* de dimensions  $a \times b$ , chacune correspondant respectivement à une configuration proche de celle des murs coupe-feu séparatifs :

- ✓ plaque continue simplement appuyée sur quatre bords ;
- ✓ plaque avec bords latéraux libres d'efforts et simplement appuyée en tête et en pied ;
- ✓ plaque avec des joints horizontaux simplement appuyée sur quatre bords.

Dans tous les cas, la plaque est soumise à l'action d'un incendie appliqué de façon uniforme sur une face de la plaque. La résolution du problème de transfert thermique permettant de déterminer le profil d'élévation de température dans l'épaisseur de la plaque, le chargement thermique est alors caractérisé par la diminution des propriétés élastiques de la section, à travers la détermination des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $D$  (équations (2.22)), ainsi que par la donnée d'un effort normal thermique  $N^T$  et un moment thermique  $M^T$  (équations (2.20)).

En l'absence de chargement transversal ( $p_3=0$ ), l'équation (2.42) se simplifie en :

$$\Delta(\Delta u_3) = 0 \quad (2.44)$$

équation à laquelle il faut ajouter les *conditions aux limites* qui seront précisées dans les sections suivantes.

## 2.3.1. Plaque continue libre sur deux bords latéraux et appuyée sur les autres côtés

### 2.3.1.1. Ecriture des conditions aux limites

Nous considérons une plaque libre sur deux côtés latéraux et simplement appuyée sur les deux autres côtés opposés, soumise à l'action du feu d'incendie sur l'une des faces (voir figure 2.5).

Sur les bords horizontaux parallèles à l'axe  $x_2$ , les conditions aux limites s'écrivent :

$$u_3 = 0 \text{ et } M_{11} = 0 \text{ sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a \quad (2.45)$$

tandis que sur les bords latéraux parallèles à l'axe  $x_1$ , l'effort tranchant effectif  $Q_2$  (voir (2.15)) ainsi que le moment de flexion  $M_{22}$  sont nuls :

$$x_2 = \pm b/2: \quad Q_2 = -\left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + 2\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}\right) = 0, \quad M_{22} = 0 \quad (2.46)$$

Par ailleurs, la plaque étant libre de dilater dans son plan, les efforts membranaires sont nuls le long des bords latéraux et en tête :

$$\begin{aligned} N_{11} = 0, \quad N_{21} = 0 \text{ sur } x_1 = a \\ N_{12} = 0, \quad N_{22} = 0 \text{ sur } x_2 = \pm b/2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

tandis que sur le bord inférieur :

$$u_1 = 0, \quad N_{21} = 0 \text{ sur } x_1 = 0 \quad (2.48)$$

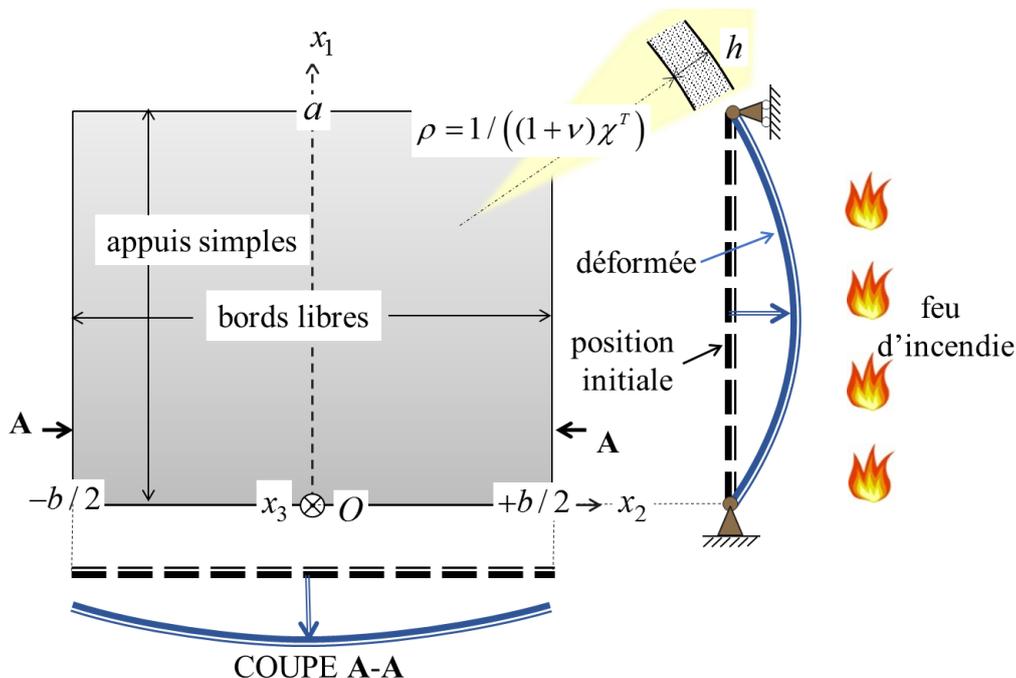


Figure 2.5. Plaque rectangulaire continue simplement appuyée sur ses bords horizontaux, libre sur ses bords latéraux et soumise à un chargement thermique

Les conditions aux limites en efforts ne peuvent pas être utilisées directement avec l'équation (2.44) portant exclusivement sur le déplacement transversal. Il convient donc d'introduire la loi de comportement thermoélastique pour transformer ces conditions en conditions portant sur le déplacement transversal.

Considérons d'abord les conditions aux limites sur les bords parallèles à l'axe  $x_2$  (2.45). La seconde condition de moment nul peut se traduire comme suit à travers la loi de comportement thermoélastique (2.37) :

$$M_{11} = -\frac{B}{A}(N_{11} - N^T) + D_e(\chi_{11} + \nu\chi_{22}) + M^T = 0 \quad (2.49)$$

soit, puisque la courbure le long des bords d'appui parallèles à l'axe  $x_2$  est nulle  $\chi_{22} = \partial^2 u_3 / \partial x_2^2 = 0$  :

$$\chi_{11} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{AD - B^2}(B(N^T - N_{11}) + AM^T) \quad (2.50)$$

qui fait intervenir l'effort membranaire  $N_{11}$ , d'où *a priori* une dépendance du problème de flexion par rapport à la solution du problème membranaire.

Cependant, l'effort membranaire  $N_{11}$  est inconnu au pied de la plaque. En raison du fait que la plaque est libre de se dilater dans le plan, on peut admettre que l'effort normal  $N_{11}$  en pied est du même ordre de grandeur que le poids de la plaque par unité de longueur selon  $x_2$  :

$$N_{11}(x_1 = 0) \cong -wa \quad (2.51)$$

où  $w$  est le poids par unité de surface de la plaque. Cet effort membranaire dû au poids propre peut être négligé par rapport à l'effort membranaire thermique  $N^T$ . Ainsi, pour un mur en béton armé ( $E=22.1$  GPa à température ambiante) de 15cm d'épaisseur et de 10m de hauteur exposé au feu ISO après 1,5h, cet effort n'est égal qu'à 1,5% de l'effort normal thermique :

$$\left. \begin{array}{l} N^T = -2,46 \times 10^6 \text{ N/m} \\ N_{11} \cong -wa = -3,75 \times 10^4 \text{ N/m} \end{array} \right\} \Rightarrow |N_{11} / N^T| \cong 1,5\% \quad (2.52)$$

de sorte que la courbure  $\chi_{11}$  au pied de la plaque se simplifie en :

$$x_1 = 0: N_{11} \ll N^T \Rightarrow \chi_{11} = -\frac{BN^T + AM^T}{AD - B^2} = (1 + \nu)\chi^T \quad (2.53)$$

On en déduit alors que les conditions aux limites sur les bords parallèles à l'axe  $x_2$  se traduisent comme suit sur le déplacement transversal :

$$\text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a: u_3 = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = (1 + \nu)\chi^T \quad (2.54)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites en efforts (2.46) sur les bords latéraux, ces conditions se traduisent comme suit à travers la loi de comportement thermoélastique :

$$x_2 = \pm b/2: (2-\nu)\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} = 0 \quad \text{et} \quad \nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = (1+\nu)\chi^T \quad (2.55)$$

On en déduit alors que le problème de flexion d'une plaque libre sur deux côtés latéraux et simplement appuyée sur les côtés opposés est gouverné par l'équation (2.44) associée aux conditions aux limites (2.54) et (2.55).

**Remarque.** Bien que le chargement thermique  $(N^T, M^T)$  associé à l'incendie n'apparaisse pas dans l'équation (2.44) en raison de son caractère homogène sur toute la surface de plaque, il intervient bien à travers la courbure thermique  $\chi^T$  dans les conditions aux limites (2.54) et (2.55).

### 2.3.1.2. Solution analytique

La solution en déplacement du problème est recherchée sous la forme :

$$u_3(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) + \tilde{u}(x_1, x_2) \quad (2.56)$$

avec :

$$u^*(x_1) = \frac{(1+\nu)\chi^T}{2}(x_1^2 - ax_1) \quad (2.57)$$

et :

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \sum_{m=1,2,3\dots}^M Y_m(x_2) \sin(\alpha_m x_1) \frac{4a^2(1+\nu)\chi^T}{(m\pi)^3} \quad \text{avec} \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (2.58)$$

Compte tenu du fait que la partie  $u^*(x_1)$  vérifie :

$$\Delta(\Delta u^*(x_1)) = 0 \quad (2.59)$$

le report de la solution (2.56) dans l'équation d'équilibre thermoélastique (2.44) donne :

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta u_3(x_1, x_2)) &= \Delta(\Delta \tilde{u}(x_1, x_2)) \\ &= \sum_{m=1,2,3\dots}^M \left( Y_m^{(4)}(x_2) - 2\alpha_m^2 Y_m''(x_2) + \alpha_m^4 Y_m(x_2) \right) \sin(\alpha_m x_1) \frac{4a^2(1+\nu)\chi^T}{(m\pi)^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

de sorte que :

$$Y_m(x_2) = A_m \text{ch}(\alpha_m x_2) + B_m \text{sh}(\alpha_m x_2) + C_m x_2 \text{ch}(\alpha_m x_2) + D_m x_2 \text{sh}(\alpha_m x_2) \quad (2.61)$$

soit en tirant avantage de la symétrie de la fonction  $Y_m(x_2)$  :

$$Y_m(x_2) = A_m \text{ch}(\alpha_m x_2) + D_m x_2 \text{sh}(\alpha_m x_2) \quad (2.62)$$

où les coefficients  $A_m$  et  $D_m$  sont des constantes. Ces constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites (2.55). En effet celles-ci impliquent :

$$x_2 = \pm b/2 : \begin{cases} Y_m^{(3)}(x_2) - (2-\nu)\alpha_m^2 Y_m'(x_2) = 0, & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ Y_m''(x_2) - \nu\alpha_m^2 Y_m(x_2) = \begin{cases} (1-\nu)\alpha_m^2 & (m = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \end{cases} \quad (2.63)$$

où l'on a tenu compte du développement en série de *Fourier* de la courbure thermique :

$$(1+\nu)\chi^T = \sum_{m=1}^{3,5,\dots} \frac{4(1+\nu)\chi^T}{m\pi} \sin(\alpha_m x_1) \quad (2.64)$$

Reportant l'expression (2.62) des fonctions  $Y_m(x_2)$  dans les conditions (2.63) sur les bords latéraux, on en déduit pour chaque  $m$  *impair* les deux équations suivantes portant sur les constantes  $A_m$  et  $D_m$  :

$$m = 1, 3, 5, \dots, \quad \alpha = \alpha_m \frac{b}{2} \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} (\nu-1)\alpha_m^3 \text{sh}\alpha & (\nu+1)\alpha_m^2 \text{sh}\alpha + (\nu-1)\alpha_m^2 \alpha \text{ch}\alpha \\ (1-\nu)\alpha_m^2 \text{ch}\alpha & 2\alpha_m \text{ch}\alpha + (1-\nu)\alpha_m \alpha \text{sh}\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ D_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\nu)\alpha_m^2 \end{pmatrix}$$

soit tous calculs faits :

$$A_m = \frac{(1+\nu)\text{sh}\alpha + (\nu-1)\alpha \text{ch}\alpha}{(\nu+3)\text{sh}\alpha \text{ch}\alpha + (\nu-1)\alpha}, \quad B_m = \frac{(1-\nu)\text{sh}\alpha}{(\nu+3)\text{sh}\alpha \text{ch}\alpha + (\nu-1)\alpha} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.66)$$

Les deux fonctions (2.57) et (2.58) vérifiant l'équation (2.44) séparément, le champ de déplacement proposé (2.56), somme de ces deux fonctions, la vérifie également.

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes propriétés vérifiées par les fonctions (2.56), (2.57) et (2.58). Il montre que la fonction  $u_3$  ainsi déterminée sous forme de série est bien la solution du problème.

Position	Fonction $f(x_1, x_2)$	$u^*(x_1, x_2)$	$\tilde{u}(x_1, x_2)$	$u_3(x_1, x_2)$
$x_1 = 0, a$	$f =$	0	0	0
	$\partial^2 f / \partial x_1^2 =$	$(1+\nu)\chi^T$	0	$(1+\nu)\chi^T$
$x_2 = \pm b/2$	$(2-\nu)\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} =$	0	0	0
	$\nu\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} =$	$\nu(1+\nu)\chi^T$	$(1-\nu^2)\chi^T$	$(1+\nu)\chi^T$
A l'intérieur	$\Delta(\Delta f) =$	0	0	0

Tableau 2.2. Vérification des conditions aux limites et de l'équation d'équilibre thermoélastique par les différentes fonctions

### 2.3.2. Plaque continue appuyée sur quatre bords

Dans cette configuration la solution du problème doit vérifier les mêmes équations que précédemment, *hormis la condition aux limites (2.55) sur les bords latéraux qui s'écrit maintenant :*

$$x_2 = \pm b/2: u_3 = 0, \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = (1 + \nu) \chi^T \quad (2.67)$$

La résolution de ce problème fait intervenir la *méthode de Galerkin*. Une solution approchée ainsi obtenue du déplacement transversal s'écrit (Boley, 1960) :

$$u_3(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_1, x_2) \quad (2.68)$$

où  $\tilde{u}(x_1, x_2)$  est une série double sinusoïdale, égale à :

$$u(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2'\right), \quad x_2' = x_2 + b/2 \quad (2.69)$$

avec  $u_{mn} = -\frac{16(1+\nu)}{mn\pi^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)} \chi^T \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)$

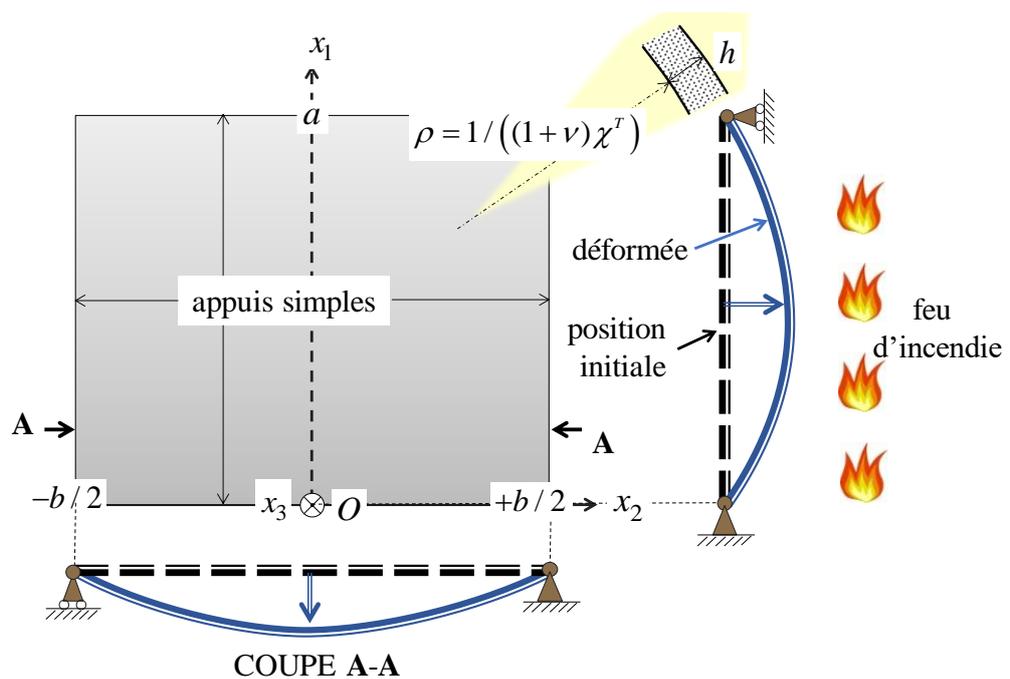


Figure 2.6. Plaque continue simplement appuyée sur ses quatre bords et soumise à un chargement thermique

### 2.3.3. Plaque avec joints horizontaux appuyée sur ses quatre bords

Considérons maintenant le cas où la plaque, toujours simplement appuyée sur ses quatre bords, est constituée par l'assemblage de bandeaux horizontaux reliés entre eux par des joints de type *tenon-mortaise* (voir figure 2.7). Nous proposons de modéliser ces joints par des

charnières de moment nul autour de leur axe, assurant la continuité du déplacement transversal ainsi que de l'effort tranchant effectif (voir figure 2.8).

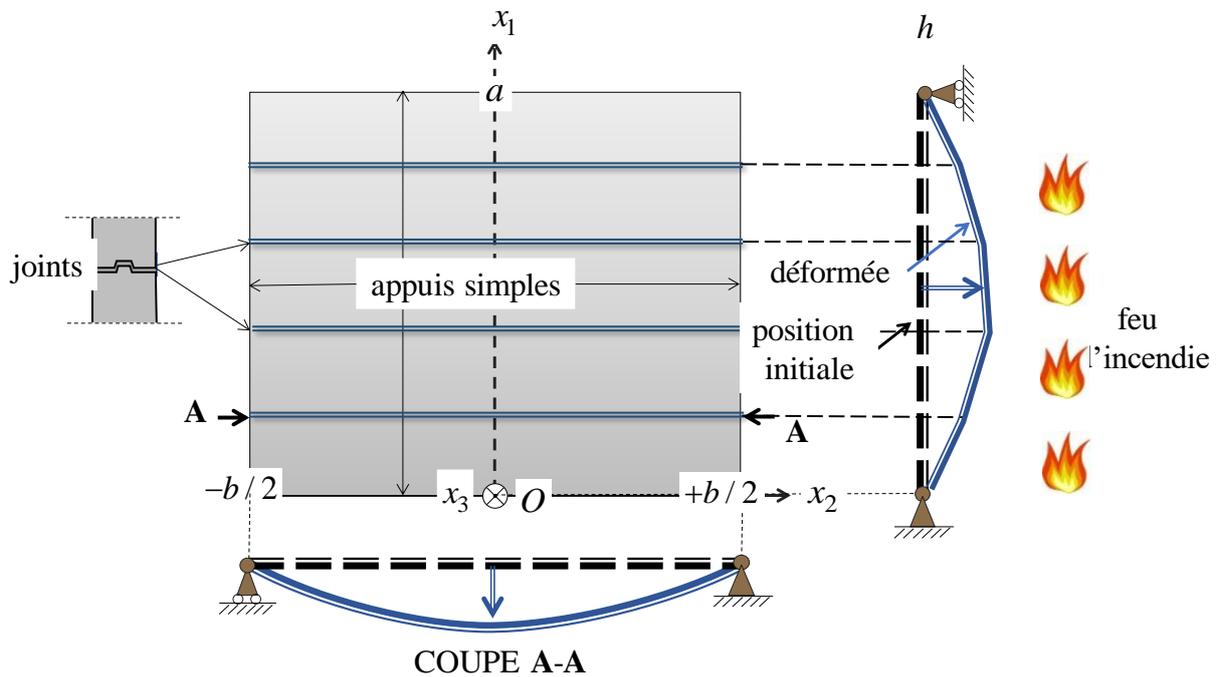


Figure 2.7. Plaque simplement appuyée sur quatre côtés avec joints horizontaux

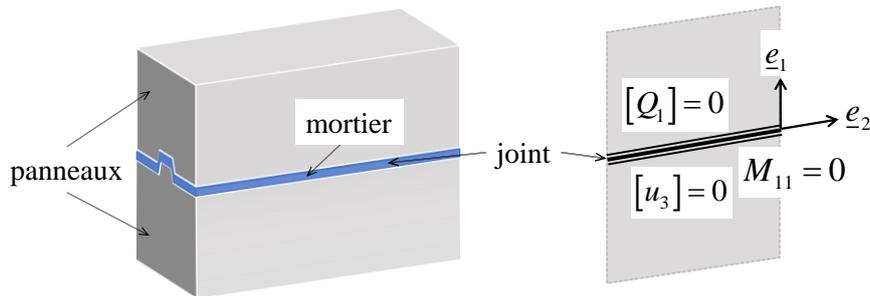


Figure 2.8. Système de tenon mortaise (à gauche) et modélisation du joint par une charnière (à droite)

### 2.3.3.1. Ecriture des conditions portant sur le déplacement transversal

Les conditions aux bords de la plaque sont identiques à celle de la configuration précédente (section 2.3.2), c'est-à-dire que le chargement thermique impose une courbure d'origine thermique sur les différents bords, de normale unitaire  $\underline{n}$  :

$$u_3 = 0 \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} = (1 + \nu) \chi^T \quad (2.70)$$

Les joints étant modélisés comme des *charnières*, le moment de flexion  $M_{11}$  y est nul tandis que le déplacement transversal et l'effort tranchant effectif sont continus :

$$M_{11} = 0, \quad [u_3] = 0, \quad [Q_1] = -[\partial M_{11} / \partial x_1 + 2\partial M_{12} / \partial x_2] = 0 \quad (2.71)$$

où le symbole  $[\bullet] = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$  représente le saut de la quantité  $(\bullet)$  à la traversée d'un joint dans le sens de sa normale  $\underline{e}_1$ .

Etant libre de se dilater dans le plan  $(x_1, x_2)$ , on peut admettre que l'effort normal  $N_{11}$  au niveau d'un joint donné est de l'ordre de grandeur de celui engendré par le poids de tous les panneaux situés au-dessus de ce joint, qui est négligeable par rapport à l'effort thermique membranaire (voir (2.52)). Les conditions (2.70) s'expriment alors comme suit sur  $u_3$  et ses dérivées, à travers la loi de comportement (2.19) :

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = (1 + \nu) \chi^T, \quad [u_3] = 0, \quad \left[ \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right] = 0 \quad (2.72)$$

### 2.3.3.2. Solution semi-analytique

Dans ces conditions, nous proposons de rechercher la solution du problème sous la forme d'un champ de déplacement continu, mais dont les dérivées sont continues *par morceaux*. Le déplacement transversal de chaque panneau  $i$  prend la forme suivante :

$$i = 1, \dots, n + 1$$

$$u_3^i(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M X_m^i(x_1) \sin(\beta_m x_2') \frac{4(1 + \nu) \chi^T b^2}{(m\pi)^3} \quad (2.73)$$

avec  $x_2' = x_2 + b/2$ ,  $\beta_m = m\pi/b$

où  $n$  est le nombre de joints séparant les  $n+1$  bandeaux horizontaux. L'ajout de la déformée particulière  $u^*(x_1, x_2) = [(1 + \nu)/2] \chi^T (x_2^2 - b^2/4)$  permet de rendre la solution (2.73) admissible avec les conditions aux limites (2.68) le long des bords latéraux.

La vérification de l'équation d'équilibre thermoélastique (2.44) implique que les fonctions  $X_m^i(x_1)$  sont de la forme suivante :

$$X_m^i(x_1) = A_m^i \operatorname{ch}(\beta_m x_1) + B_m^i \operatorname{sh}(\beta_m x_1) + C_m^i x_1 \operatorname{ch}(\beta_m x_1) + D_m^i x_1 \operatorname{sh}(\beta_m x_1) \quad (2.74)$$

Enfin, la vérification des conditions (2.70) sur les bords parallèles par rapport à l'axe  $x_1$  ainsi que les conditions (2.72) le long des joints permet d'établir un système d'équations linéaires portant sur les coefficients  $A_m^i$ ,  $B_m^i$ ,  $C_m^i$  et  $D_m^i$ . Etant donné le nombre de joints et leurs positions verticales, nous pouvons trouver les valeurs numériques de ces coefficients, qui sont alors introduit dans les fonctions (2.74), permettant ainsi d'aboutir à une solution semi-analytique du déplacement transversal de la plaque de la forme (2.73).

### 2.3.4. Récapitulatif

Comme nous l'avons vu à travers les solutions (2.56), (2.68) et (2.73), la solution du déplacement transversal d'une plaque de Kirchhoff-Love sous chargement thermique, caractérisé par une courbure thermique  $\chi^T$ , peut toujours s'écrire sous la forme suivante :

$$u_3(x_1, x_2) = (1 + \nu) \chi^T f(x_1, x_2) \quad (2.75)$$

où la fonction  $f(x_1, x_2)$  dépend seulement des conditions aux bords de la plaque. On peut alors dès à présent en conclure que le déplacement transversal, proportionnel à la courbure thermique  $\chi^T$ , est d'autant plus important que le coefficient de Poisson  $\nu$  est plus grand.

## 2.4. Etude paramétrique de la déformée purement thermique

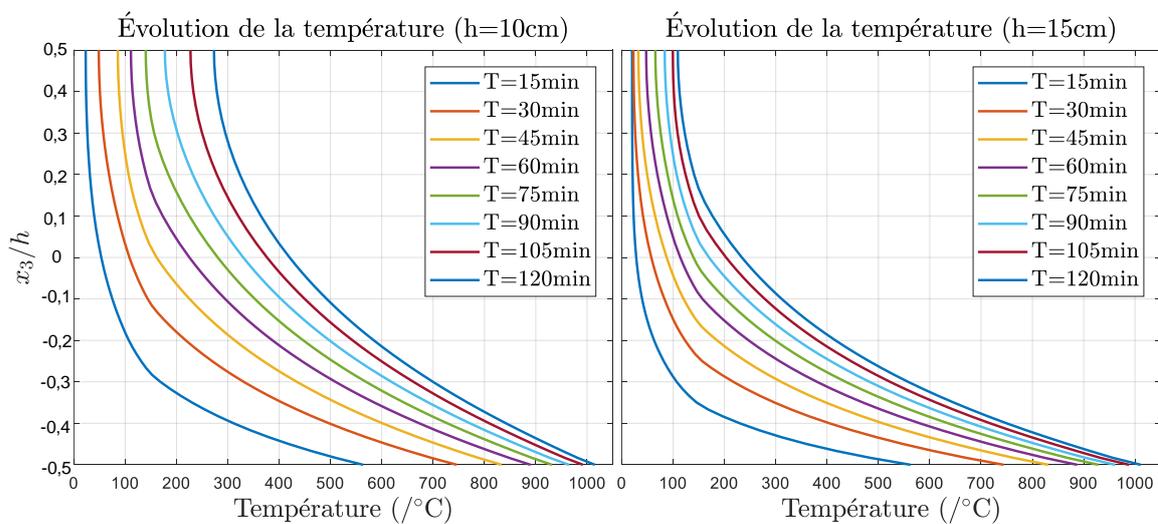
### 2.4.1. Chargement thermique engendré par un feu

Avant d'étudier la déformée d'origine thermique des plaques rectangulaires, on examine tout d'abord la montée en température à travers la section, qui conduit à une dégradation de la rigidité de flexion des plaques ainsi qu'à l'apparition d'une courbure thermique. Cette dernière est évidemment essentielle dans le calcul de la déformée purement thermique : voir (2.75).

#### 2.4.1.1. Montée en température

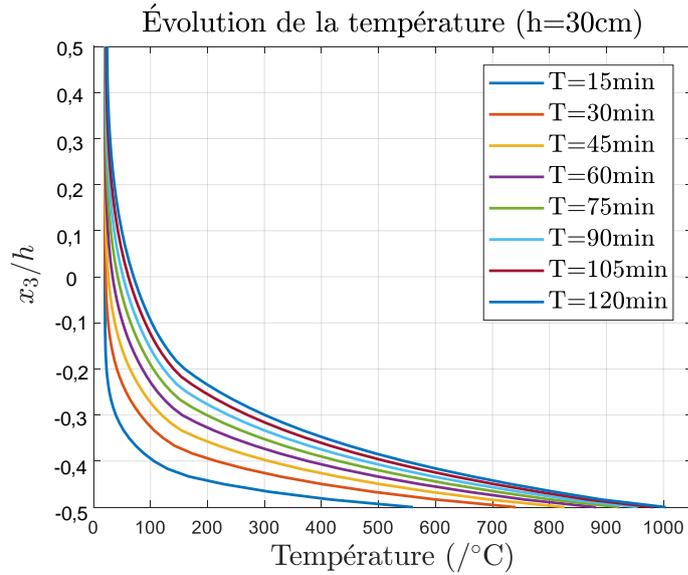
Considérons un feu d'incendie du type ISO 834 appliqué de manière homogène sur toute la face  $x_3 = -h/2$  du mur. Un calcul préliminaire du transfert de chaleur par le logiciel *Safir* (Franssen, 2017) permet d'avoir un profil de température à chaque instant après le départ du feu.

Les figures de 2.10 (a), (b) et (c) montrent respectivement l'évolution du profil de température en fonction de la durée d'exposition au feu d'un mur de 10cm, 15cm et 30cm d'épaisseur. Dans tous les cas, la température de la face ( $x_3 = -h/2$ ) exposée au feu ISO 834 s'élève très rapidement à plus de 1000°C après 2h. Cependant, la diffusion de la chaleur en direction de la face non exposée dépend fortement de l'épaisseur de la plaque. Cette montée en température est relativement rapide sur toute la section (270°C sur la surface non exposée au feu au bout de 2h) pour un mur de 10cm d'épaisseur, tandis que le profil de température d'un mur de 15cm d'épaisseur est relativement abrupt (110°C sur la surface non exposée au feu au bout de 2h). Pour une épaisseur de 30cm, la surface non exposée au feu reste à une température de 20°C pendant 2h. On peut ainsi constater que l'augmentation en épaisseur de murs en béton est un moyen très efficace pour ralentir la montée en température.



(a)  $h=10\text{cm}$

(b)  $h=15\text{cm}$



(c)  $h=30\text{cm}$

Figure 2.9. Montée en température dans l'épaisseur d'un panneau en béton

### 2.4.1.2. Courbure thermique et rigidité en flexion

Les profils de température calculés dans la section précédente nous permettent d'évaluer l'évolution de la courbure thermique ainsi que celle de la rigidité en flexion en fonction du temps d'exposition au feu. Cette évolution est représentée sur les figures 2.10(a) et (b), où nous avons considéré 5 valeurs de l'épaisseur du mur allant de 10cm à 30cm.

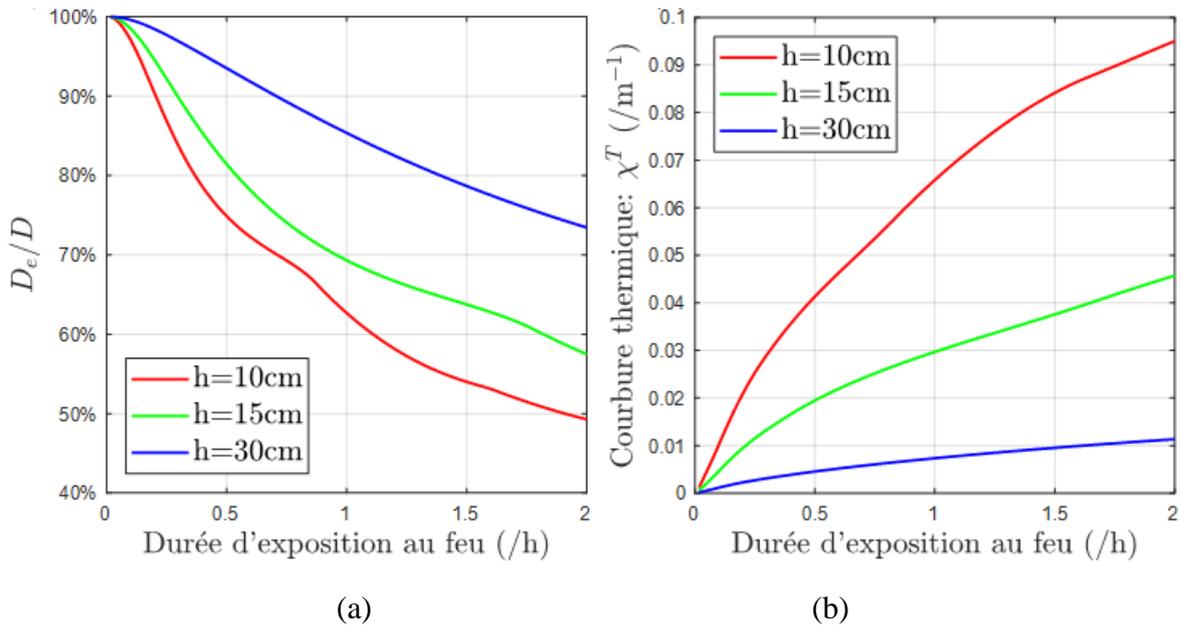


Figure 2.10. Évolutions de la rigidité flexionnelle effective (a) et de la courbure thermique (b) en fonction du temps d'exposition au feu

On constate une perte de rigidité en flexion initiale de 50% à 25% pour une épaisseur de 10cm à 30cm au bout de 2h d'exposition au feu. Cependant, comme nous n'avons pas considéré

de chargement transversal ( $p_3 = 0$ ) dans l'étude de la déformée d'origine thermique, le déplacement transversal dépend seulement la courbure thermique  $\chi^T$ .

A l'instant donnée, la courbure thermique  $\chi^T$  est d'autant plus faible que l'épaisseur de la plaque est plus grande. Pour un mur de 10cm d'épaisseur, cette courbure thermique augmente très rapidement et atteint un maximum de  $0,096m^{-1}$  au bout de 2h. En revanche, l'évolution de la courbure thermique d'un mur de 15cm (resp. 30cm) d'épaisseur est relativement lente et s'élève à  $0,043m^{-1}$  (resp.  $0,01m^{-1}$ ) après 2h.

Comme nous avons vu précédemment, la déformée d'origine thermique d'un mur est proportionnelle à la courbure thermique (voir 2.74). On pourrait ainsi prédire que le déplacement transversal est réduit de plus de 50% quand l'épaisseur des murs est augmentée de 10 cm à 15cm tandis que celui d'un mur de 30cm d'épaisseur est réduit de plus 90% par rapport au déplacement d'un mur de 10cm d'épaisseur, c'est-à-dire que l'augmentation de l'épaisseur de la plaque est une manière très efficace de réduire le déplacement transversal d'origine *purement* thermique.

Cependant, cette réduction des déplacements transversaux repose sur l'hypothèse que le problème en flexion est découplé par rapport au problème membranaire. Dans le cas où les deux problèmes sont couplés, l'augmentation de l'épaisseur de panneaux peut induire un déplacement transversal plus grand à cause de l'effet de  $P-\delta$  dû au poids propre (cf. chapitre 3).

## 2.4.2. Influence du coefficient de Poisson et de l'élancement

Cette section a pour but d'étudier l'influence du coefficient de Poisson sur la déformée des plaques ainsi que l'élancement sur la déformée purement thermique des plaques rectangulaires. Pour cela, on fait varier le coefficient de Poisson en comparant le déplacement maximal  $u_{3\max}^{\text{plaque}}$  d'une plaque libre sur ses bords latéraux (voir solution (2.56)) avec celui  $u_{3\max}^{\text{poutre}}$  d'une poutre en *contrainte plane*.

On peut constater sur la figure 2.11 qui représente la valeur du déplacement transversal maximal en fonction de l'élancement  $a/b$  de la plaque et du coefficient de Poisson, que ce déplacement est d'autant plus important que le coefficient de Poisson est élevé, ce qui est cohérent avec la solution générale (2.75). Sachant qu'une déformée plus importante est en général plus défavorable du point de vue de la stabilité, il semble que l'on soit du côté de la sécurité en adoptant comme valeur du coefficient de Poisson celle de la température ambiante qui est supérieure à celle d'une température plus élevée comme démontré par Bahr *et al.* (2013). On adoptera donc par la suite dans tous les calculs de déformée un coefficient de Poisson égal à 0.2.

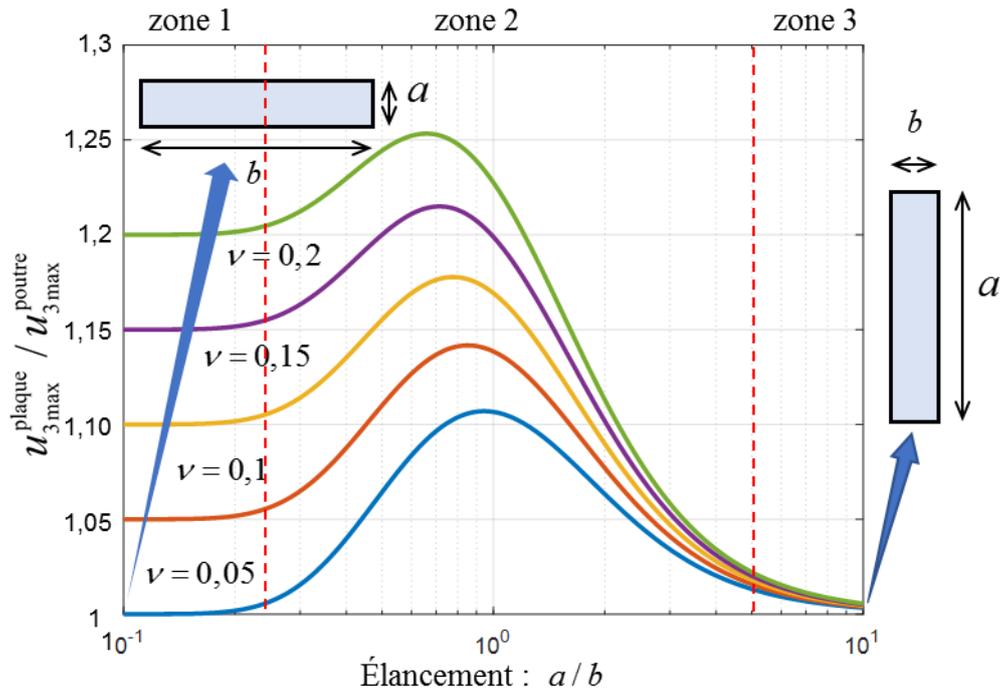


Figure 2.11. Comparaison du déplacement maximal d'une plaque libre sur ses bords latéraux et d'une poutre en contrainte plane sous chargement thermique

Le coefficient de Poisson étant fixé, on peut alors remarquer que le rapport  $u_{3\max}^{\text{plaque}} / u_{3\max}^{\text{poutre}}$  entre le déplacement maximal d'une plaque libre sur les bords latéraux et celui d'une poutre en contrainte plane ( $a/b \rightarrow \infty$ ) va d'abord augmenter et puis diminuer en fonction de l'élanement  $a/b$ . Cela pourrait être expliqué par la flexion dans deux directions d'une plaque avec un élanement proche de 1, qui conduit à un déplacement transversal plus grand que celui d'une poutre en flexion unidimensionnelle.

En effet, dans la modélisation d'une poutre en *contrainte plane* ( $a/b \rightarrow \infty$ ), le chargement thermique induit une courbure telle que le profil du déplacement transversal est une parabole ( $u_3 = \chi^T / 2(x_1^2 - ax_1)$ ) avec un maximum à mi-hauteur. En revanche, dans le cas d'une plaque, ce chargement thermique conduit à deux courbures dès que l'on s'éloigne des appuis simples (voir figure 2.12). La courbure verticale  $\chi_{11}$  représente une flexion dans le sens  $x_1$  qui conduit à un déplacement transversal  $u_3^1$  tandis que la courbure horizontale  $\chi_{22}$  représente une flexion dans le sens  $x_2$  qui est associé à un déplacement transversal  $u_3^2$ .  $u_3^1$  et  $u_3^2$  dépendent respectivement de la hauteur  $a$  et la largeur  $b$  de la plaque (voir figure 2.13). Le déplacement transversal d'une plaque est ainsi égal à la somme des deux contributions, relatives respectivement à la courbure verticale  $\chi_{11}$  et à la courbure horizontale  $\chi_{22}$ .

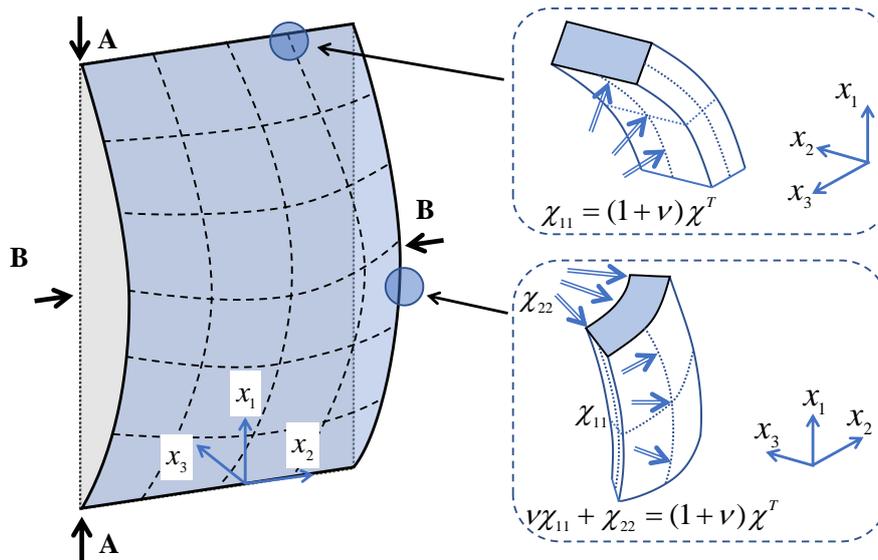


Figure 2.12. Déformée d'une plaque simplement appuyée sur deux côtés opposés et libre sur les côtés latéraux

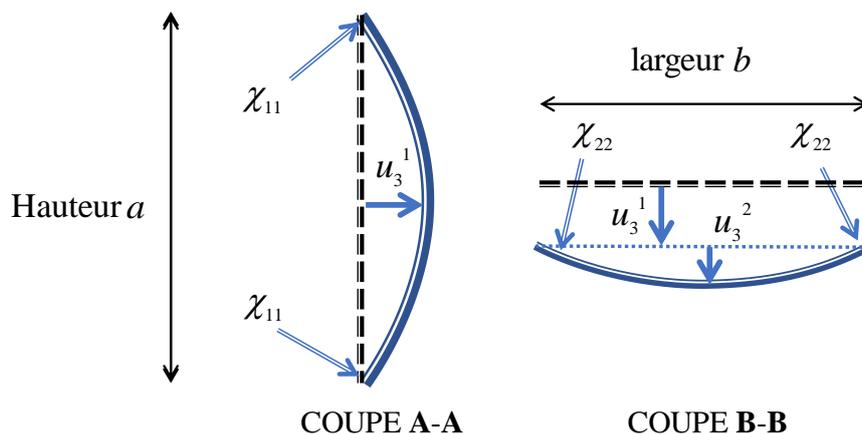


Figure 2.13. Coupe de la déformée d'une plaque simplement appuyée sur deux côtés opposés et libre sur les côtés latéraux (à gauche : coupe au bord latéral A-A ; à droite : coupe à mi-hauteur B-B)

Revenant à la figure 2.11, nous pouvons distinguer trois zones :

- ✓ Zone des très faibles élancements (*Zone 1*) qui correspondent à une plaque de largeur beaucoup plus grande que la hauteur. La courbure verticale étant constante ( $\chi_{11} = (1 + \nu)\chi^T$ ) dans la partie courante, la coupe du déplacement transversal au niveau du plan de symétrie devient ainsi une parabole ( $u_3^{\text{poutre}} = (1 + \nu)\chi^T / 2(x_1^2 - ax_1)$ ) tel que le ratio  $u_{3\text{max}}^{\text{plaque}} / u_{3\text{max}}^{\text{poutre}}$  tend vers  $1 + \nu$ .
- ✓ Zone des grands élancements (*Zone 2*) qui correspond à une plaque de très faible largeur, de sorte que le déplacement  $u_3^2$  induit par la flexion selon l'axe de  $x_2$  est négligeable. Dans ce cas, la modélisation plaque donne une déformée identique à celle d'une poutre en *contrainte plane*. C'est pourquoi le ratio  $u_{3\text{max}}^{\text{plaque}} / u_{3\text{max}}^{\text{poutre}}$  tend asymptotiquement vers 1 lorsque l'élancement devient très grand.

- ✓ La zone intermédiaire correspond à une plaque pour laquelle le déplacement transversal  $u_3^2$  induit par la flexion selon l'axe  $x_2$  est comparable à celui  $u_3^1$  induit par la flexion selon l'axe  $x_1$ . Dans ce cas, le déplacement transversal qui est la somme de deux contributions  $u_3^1$  et  $u_3^2$ , est plus grand que celui d'une poutre en contrainte plane, même dans le cas où le coefficient de Poisson est nul.

### 2.4.3. Influence des conditions aux limites

Afin d'évaluer l'influence des conditions aux bords sur la déformée purement thermique, on compare maintenant le cas d'une plaque libre sur ses bords latéraux et d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords, toutes choses étant égales par ailleurs.

Nous considérons tout d'abord une plaque carrée de 10m de hauteur et de 15cm d'épaisseur avec une face exposée au feu pendant 1,5h. La figure 2.14 montre les déformées d'origine thermique des deux configurations de plaques. La couleur bleue correspond à un déplacement transversal grand (négatif) tandis que la couleur rouge foncé correspond à un déplacement nul. Comme on pouvait s'y attendre, on peut alors constater que la déformée d'une plaque libre sur ses bords latéraux ( $u_{3\max} = 55\text{cm}$ ) est significativement plus grande que celle d'une plaque appuyée aux quatre bords ( $u_{3\max} = 32\text{cm}$ ).

Comme les solutions (2.56) et (2.68) sont données sous forme de séries, on montre sur la figure 2.15 l'évolution de l'erreur relative du déplacement transversal en fonction du nombre de termes de ces séries. La solution de référence ( $u_3^*$ ) est définie comme la valeur calculée avec 50 termes. L'erreur relative sur le déplacement est définie par :

$$\varepsilon_{\text{relative}} = \frac{\|u_3 - u_3^*\|_p}{\|u_3^*\|_p} \quad (2.76)$$

où  $\|\cdot\|_p$  est la norme euclidienne (norme  $L^2$ ) ou la norme infinie selon que  $p = 2$  ou  $p = \infty$ .

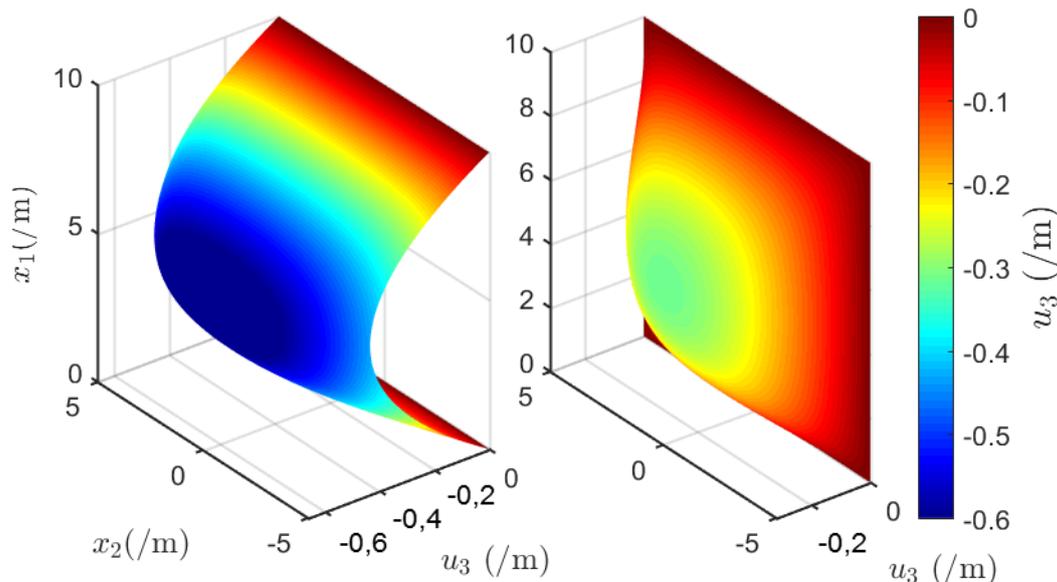


Figure 2.14. Déformée d'origine thermique d'une plaque de 10m×10m (à gauche : plaque libre sur ses bords latéraux ; à droite : plaque simplement appuyée sur ses quatre bords.)

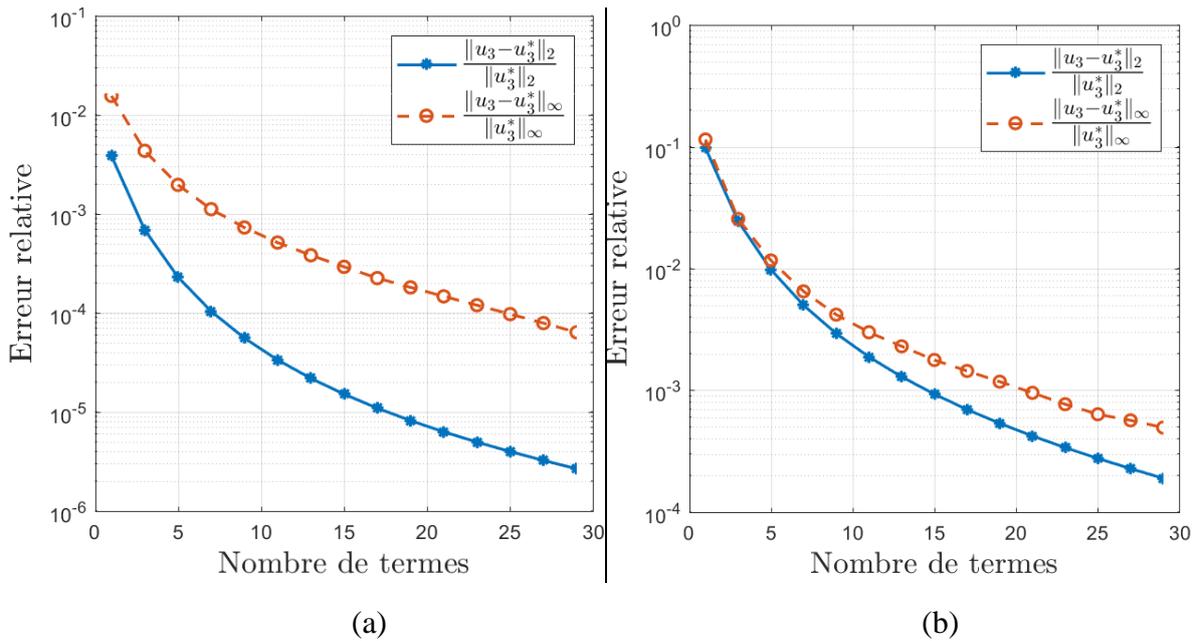


Figure 2.15. Evolution de l'erreur relative en fonction du nombre de termes de la solution (à gauche : solution de plaque libre sur ses côtés latéraux ; à droite : solution de plaque simplement appuyée sur ses quatre bords)

Les figures 2.15(a) et (b) correspondent respectivement à une plaque libre sur ses bords et à une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords. Dans les deux cas, on peut constater que les erreurs relatives des deux normes descendent à moins de  $10^{-3}$  au bout de 20 termes, ce qui est suffisamment précis pour le calcul de la déformée. On se limitera donc par la suite à 20 termes.

Pour une plaque rectangulaire, la déformée d'origine thermique dépend fortement du ratio hauteur/largeur ( $a/b$ ) de la plaque. La figure 2.16 montre l'évolution du déplacement transversal maximal  $u_3$  de la plaque libre sur ses bords latéraux (lignes étoilées) ainsi que celle de la plaque simplement appuyée sur ses quatre bords (lignes pointillées) en fonction de  $a/b$ . L'extrémité à gauche correspond à une plaque de largeur très grande tandis que l'extrémité à droite correspond à une plaque de largeur très petite. On peut observer trois zones :

- ✓ Zone à gauche, où les déplacements sont presque identiques pour les deux configurations en raison du fait que l'influence des conditions aux limites aux bords latéraux sur le déplacement maximal est négligeable.
- ✓ Zone intermédiaire, où le déplacement maximal d'une plaque libre sur ses bords augmente légèrement avec  $a/b$  en raison de la contribution  $u_3^2$  associée à la courbure horizontale  $\chi_{22}$  (voir figure 2.12), tandis que celui d'une plaque simplement appuyée décroît très rapidement avec ratio  $a/b$  en raison de la condition aux limites sur ses bords latéraux qui a une influence croissante.
- ✓ Zone à droite, où la plaque libre sur ses bords latéraux se comporte comme une poutre en contrainte plane tandis que le déplacement maximal d'une plaque appuyée sur ses bords latéraux tend asymptotiquement vers zéro.

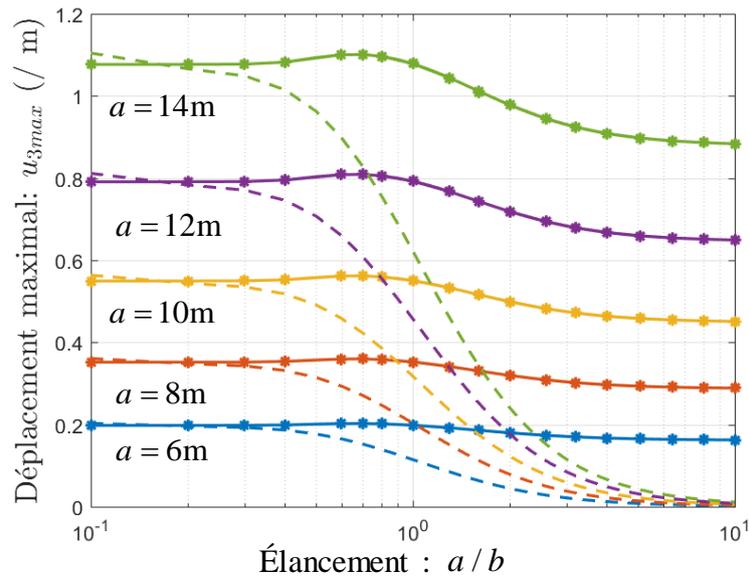


Figure 2.16. Evolution du déplacement maximal en fonction du ratio hauteur/largeur ( $a/b$ ) (ligne étoilée : plaque libre sur ses côtés latéraux ; ligne pointillé : plaque simplement appuyée sur ses quatre bords.)

#### 2.4.4. Influence des joints horizontaux

Cette dernière section a pour but d'étudier l'influence des joints horizontaux sur la déformée d'une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords.

Considérons une plaque rectangulaire de 15cm d'épaisseur constituée de panneaux horizontaux reliés par des joints régulièrement répartis sur toute la hauteur de la plaque (cf. figure 2.7). Cette plaque est soumise à un chargement thermique associé à un feu ISO avec une durée d'exposition de 1,5h, auquel est associée une courbure d'origine thermique sur ses bords simplement appuyés égale à  $(1 + \nu)\chi^T = 0.043 / m^{-1}$ .

Etudions d'abord la déformée des plaques carrées de 10m×10m avec un nombre croissant de joints horizontaux. La figure 2.17(a) correspond à une plaque sans joint tandis que les trois autres représentent respectivement les murs avec 2 joints, 5 joints et 10 joints. Les zones en rouge foncé sont associées à un déplacement transversal nul, tandis que les zones en bleu correspondent à un déplacement transversal maximal en valeur absolue. En comparaison avec une plaque sans joints (2.17 (a)), celles avec les joints horizontaux ont un déplacement transversal plus faible (couleur plus claire), notamment dans la partie centrale du mur.

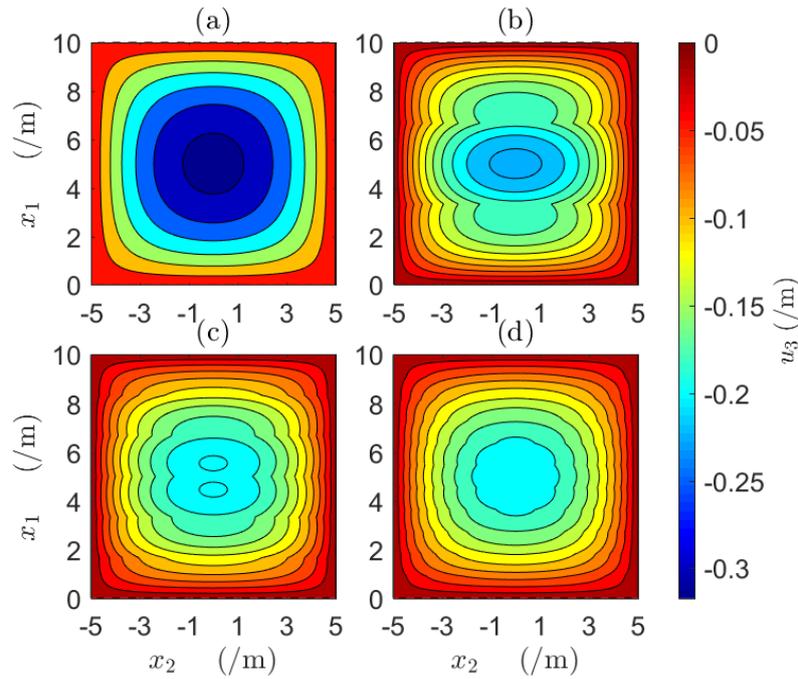


Figure 2.17. Isovaleurs de la déformée d'une plaque de  $10\text{m} \times 10\text{m} \times 15\text{cm}$  sous chargement thermique associée à un feu ISO avec une durée d'exposition de 1,5h (de (a) à (d) : panneau sans joint, panneau avec 2 joints, 5 joints et 10 joints)

Cette influence du nombre des joints sur la déformée apparaît plus clairement sur une coupe verticale de la déformée au plan de symétrie  $x_2 = 0$  (voir figure 2.18). La ligne bleue correspond à une plaque sans joints tandis que les lignes orange, jaune et violette correspondent respectivement aux plaques avec 2 joints, 5 joints et 10 joints. Le déplacement maximal d'une plaque sans joint est de 35cm tandis que celui d'une plaque avec 2 joints se réduit à 23cm (28% de réduction par rapport à une plaque sans joint). Pour une plaque avec de 5 joints et celle avec 10 joints, les déformées d'origine thermique sont quasiment identiques avec un déplacement maximal de 20cm (38% de réduction par rapport à une plaque sans joint).

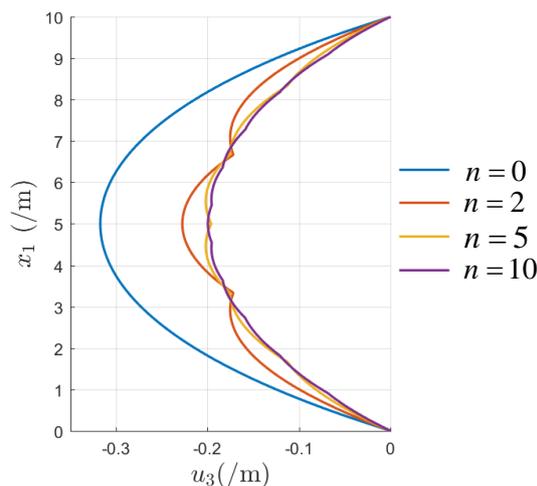


Figure 2.18. Profil de déplacement le long de l'axe  $x_2 = 0$  ( $n$  : nombre des joints horizontaux)

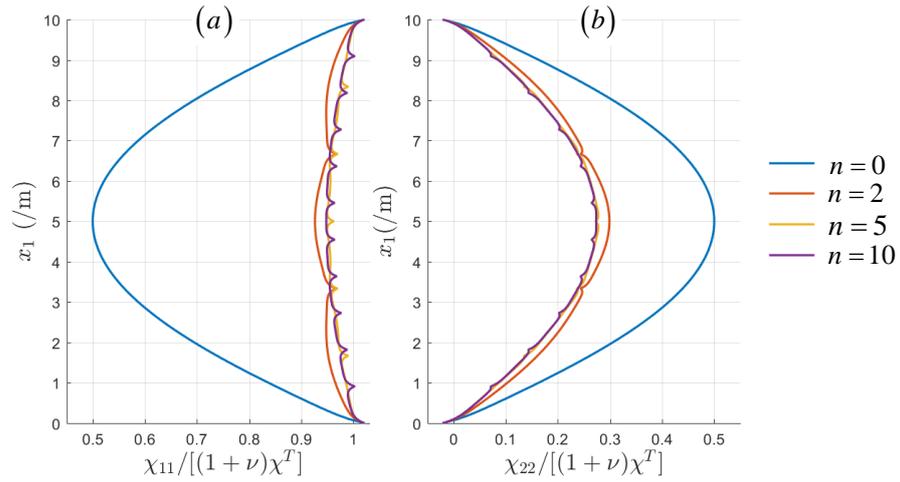


Figure 2.19. Profils des courbures verticale (a) et horizontale (b) en  $x_2 = 0$

Cette réduction du déplacement transversal pourrait être expliquée de la façon suivante. Comme le chargement thermique est une *déformation imposée* en courbure, la plaque a une tendance de se courber plus dans la direction où la rigidité en flexion est la plus faible, en l'occurrence le long de l'axe  $x_1$ . La courbure  $\chi_{11}$  est ainsi d'autant plus importante que le nombre des joints est plus grand (voir figure 2.19 (a)). De plus, l'augmentation de la courbure verticale en raison des joints horizontaux s'accompagne d'une diminution de la courbure horizontale  $\chi_{22}$  (voir figure 2.19(b)).

La diminution de la courbure horizontale  $\chi_{22}$  induit une réduction du déplacement transversal proportionnel à la largeur des panneaux constitutifs, tandis que l'augmentation de la courbure verticale  $\chi_{11}$  conduit à une amplification du déplacement dépendant de la hauteur des panneaux. En raison du fait que les panneaux constitutifs de la plaque sont de petite hauteur et de largeur importante, la somme des deux contributions donne finalement lieu à un déplacement transversal plus faible.

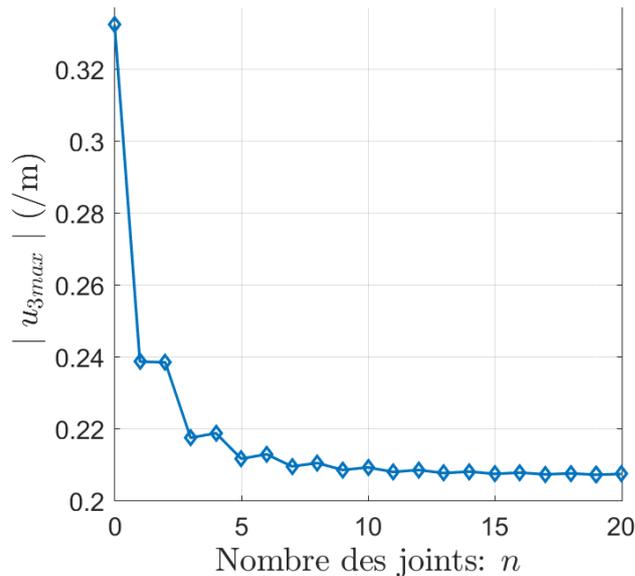


Figure 2.20. Evolution du déplacement transversal maximal en fonction du nombre de joints

Cette réduction du déplacement transversal en fonction du nombre de joints est confirmée par la figure 2.20. Le déplacement transversal maximal d'une plaque carrée de 10m de hauteur et de 15cm d'épaisseur diminue et puis se stabilise lorsque le nombre de joints devient très grand.

Enfin, la figure 2.21 compare le déplacement maximal des plaques avec 5 joints horizontaux (ligne étoilée) avec celui des plaques sans joints (ligne avec les cercles) pour un ratio d'élancement variant entre 0,1 et 10. Les lignes bleues, rouges, jaunes et violettes correspondent respectivement à une plaque de 8m, 10m, 12m et 14m de hauteur.

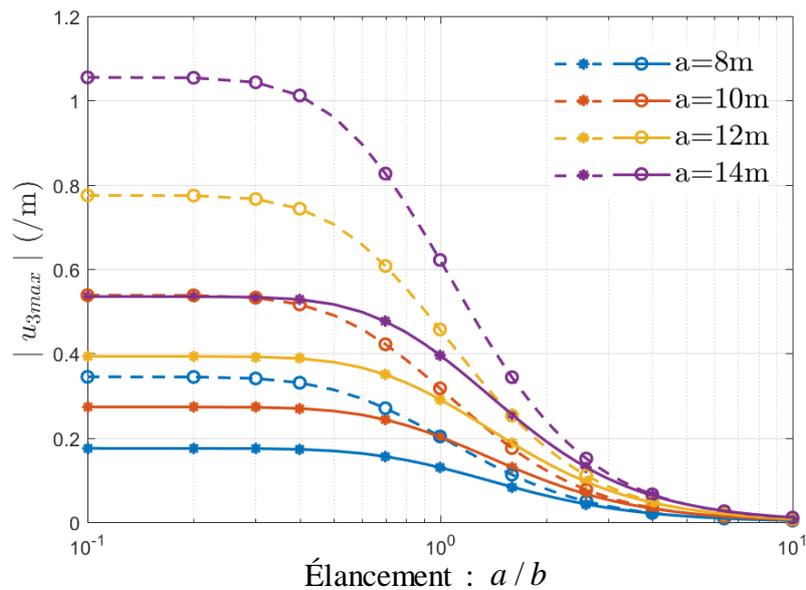


Figure 2.21. Evolution du déplacement transversal maximal en fonction de l'élancement ( $a/b$ ) de la plaque (ligne pointillée étoilée : panneau sans joints ; ligne continue avec un cercle : panneau avec 5 joints horizontaux)

Ainsi pour une hauteur de 14m et un faible élancement ( $a/b=0.1$ ), le déplacement maximal d'une plaque sans joints (lignes pointillées étoilées) peut atteindre 1,05m tandis que celui d'une plaque avec 5 joints (lignes continues avec un cercle) est réduit à 0,54m (49% réduction). Lorsque le ratio  $a/b$  devient plus grand, le déplacement maximal d'une plaque sans joint va diminuer tandis que celui d'une plaque avec 5 joints reste toujours plus petit. Cette influence des joints est toujours valable pour les plaques des autres hauteurs de 8m à 12m.

## 2.5. Conclusions et perspectives

Ce chapitre avait pour but d'étudier la déformée de murs en béton soumis à un chargement thermique, en tirant avantage de la simplicité du modèle de plaque de *Kirchhoff-Love*. Adoptant une loi de comportement thermoélastique, nous avons vu que le problème de la plaque en flexion est en général couplé avec le problème membranaire à travers les conditions aux limites. Nous avons vu cependant que les deux problèmes peuvent être traités séparément si les efforts membranaires engendrés par le poids sont négligeables par rapport à l'effort membranaire

thermique. Dans ce cas, le chargement thermique intervient dans les conditions aux limites sous la forme d'une courbure d'origine thermique imposée.

Nous avons ainsi proposé plusieurs solutions analytiques, ainsi qu'une solution approchée par la méthode de *Galerkin* pour le problème de flexion sous chargement thermique. Trois configurations de murs ont été considérées, incluant celle où les murs comportent des joints horizontaux modélisés par des charnières. Les solutions analytiques et semi-analytiques ainsi obtenues nous permettent d'avoir rapidement une déformée de la plaque sous chargement thermique, qui sera une donnée d'entrée pour l'analyse de stabilité des murs par le calcul à la rupture.

Cependant, cette modélisation de plaque de *Kirchhoff-Love* repose sur l'hypothèse de petits déplacements transversaux qui ne prend pas en compte le couplage au niveau d'équilibre entre les efforts membranaires et les moments de flexion. Proportionnelle à la hauteur au carré ( $a^2$ ), la déformée d'origine thermique peut facilement atteindre une amplitude égale à deux fois l'épaisseur du mur. Il est donc nécessaire de prendre en compte le moment supplémentaire créé par l'excentricité du poids propre du mur. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, une modélisation des murs comme des plaques de *von Karman* nous permettra d'étudier un tel effet secondaire sur la déformée dû au poids propre.

De plus, au lieu de prendre en compte la dégradation du coefficient de *Poisson* en fonction de l'élévation de la température dans la modélisation de plaques, nous avons choisi un coefficient de *Poisson* de la température ambiante pour toutes les températures. Ce choix donne une déformée plus grande, qui est plus défavorable pour l'analyse de stabilité des murs.

Enfin, la modélisation des joints par les charnières pourrait être améliorée si une loi de comportement en « moment-courbure » des joints était obtenue pour être intégrée dans le calcul de la déformée.

## Chapitre 3

### Déformée d'origine thermique avec prise en compte du poids propre

Ce chapitre a pour but de déterminer la déformée totale d'origine thermique de murs coupe-feu avec prise en compte du poids propre. L'analyse repose sur une modélisation des murs comme des plaques de *von Karman* qui tient par exemple compte du changement de géométrie de la plaque dans l'écriture des équations d'équilibre (équivalent de l'« effet  $P-\delta$  »). Une telle modélisation conduit à un système d'équations différentielles couplées, appelées « équations de *Föppl-von Karman* ». S'appuyant sur la méthode de *Galerkin*, des solutions semi-analytiques de ces équations couplées sont développées permettant de calculer la déformée totale de murs rectangulaires. L'amplification de la déformée des murs due à cet « effet  $P-\delta$  » est évaluée en fonction de différents paramètres et une première validation de ce type de calcul de la déformée est réalisée sur la base d'un essai expérimental à grande échelle.

### 3.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'influence du poids propre des murs sur leur déformée d'origine thermique en conditions d'incendie.

En situation d'incendie, les murs ayant une face exposée au feu subissent un fort gradient thermique dans l'épaisseur. La dilatation thermique différentielle qui en résulte conduit à un déplacement hors-plan qui induit un excentrement du poids propre et donc l'apparition d'efforts de flexion. Les déformations de courbure engendrées par ces derniers viennent alors accentuer le déplacement transversal (figure 3.1). Il en résulte que la prise en compte du poids propre conduit alors à une **déformée totale** plus grande que celle due aux déformations **purement** thermiques. Ce phénomène est souvent appelé « effet  $P-\delta$  » ou effet du second ordre (Bažant et Cedolin, 2010).

Or le modèle de plaques de *Kirchhoff-Love* adopté au chapitre précédent traite séparément le problème de flexion et le problème membranaire, ce qui ne permet pas de prendre en compte l'influence du poids propre sur la déformée. D'où l'intérêt de modéliser les murs par des plaques de *von Karman* permettant ainsi de prendre explicitement en compte le couplage entre l'équilibre des efforts membranaires et celui des moments de flexion.

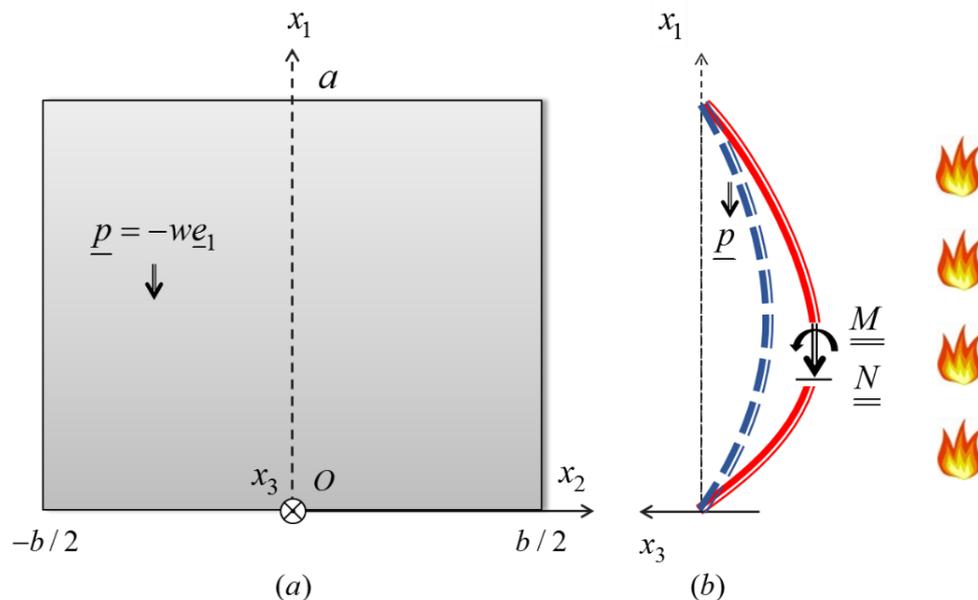


Figure 3.1. (a) Configuration de murs et coordonnées du système. (b) Coupe verticale au plan de symétrie de la déformée de murs en condition d'incendie (ligne bleue : déformée purement thermique ; ligne rouge : déformée totale)

Afin d'étudier cet effet « $P-\delta$ », nous allons d'abord prendre en compte le poids propre qui est classiquement négligé dans le modèle de plaques de *von Karman*. Ensuite, la déformée d'origine thermique sera recherchée en résolvant les équations de *von Karman*, ce qui permettra d'évaluer l'influence du poids sur la déformée d'origine thermique. Enfin, la validation de la déformée calculée sera examinée par confrontation avec un essai expérimental conduit au CSTB sur la plate-forme Vulcain.

## 3.2. Prise en compte du poids propre dans le modèle de plaques de von Karman

Avant d'étudier l'effet «  $P-\delta$  » sur la déformée d'origine thermique, il est nécessaire d'intégrer le poids propre dans le modèle de plaques de *von Karman* comme une densité de forces surfacique ( $\underline{p} = -w\underline{e}_1$ ). Pour cela, on va rappeler d'abord de la cinématique de la plaque en grand déplacement. Ensuite, le poids propre classiquement négligé dans le modèle de *von Karman* sera intégré dans les équations d'équilibre. Enfin, les équations de *von Karman* seront établies en utilisant la loi de comportement thermoélastique déjà obtenue au chapitre précédent.

### 3.2.1. Rappel de la cinématique de plaques de *von Karman*

Cette partie a pour objet de mettre en évidence la différence entre le modèle de *von Karman* et celui de *Kirchhoff-Love* dans la cinématique des plaques. Pour ce faire, il est nécessaire de distinguer la position *actuelle* de la plaque par rapport à sa position *initiale*.

Dans sa position *initiale*, la plaque est modélisée comme une surface plane occupant un domaine  $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$  du plan  $Ox_1x_2$  dans l'espace repéré par un trièdre orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ . Après déformation, sa position *actuelle* est caractérisée par un champ de déplacement de *translation*  $\underline{u}(x_1, x_2)$  ainsi qu'un champ de *rotation*  $\underline{\theta}(x_1, x_2)$  (voir la figure 3.2) :

$$\begin{aligned}\underline{u} &= u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2 + u_3(x_1, x_2)\underline{e}_3 \\ \underline{\theta}(x_1, x_2) &= \theta_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + \theta_2(x_1, x_2)\underline{e}_2\end{aligned}\quad (3.1)$$

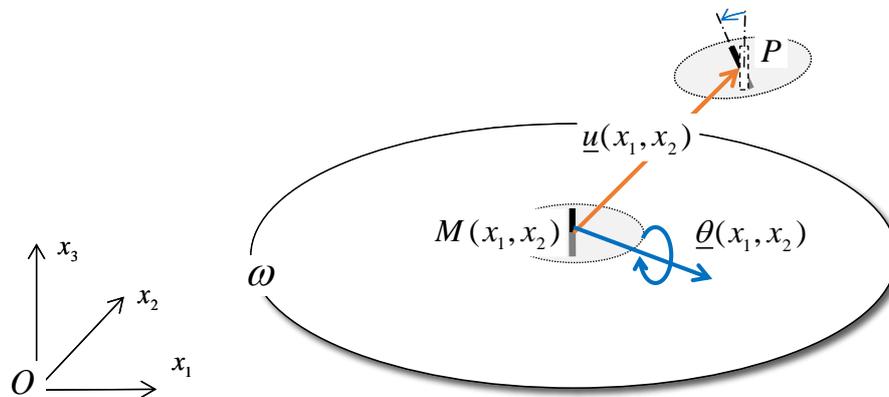


Figure 3.2. Cinématique d'une plaque

En plus des hypothèses du modèle de *Kirchhoff-Love* ( $H1$  et  $H2$  du Chapitre 2), *von Karman* (1910) a introduit une hypothèse portant sur les gradients des déplacements :

- ✓ ( $H3$ ) les dérivées des déplacements *dans le plan de la plaque* sont faibles en comparaison de celles du déplacement transversal et plus précisément :

$$\left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right| \sim \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_\gamma} \right|^2, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \quad (3.2)$$

Dans ces conditions, on introduit alors, tout comme dans le cas des plaques de *Kirchhoff-Love*, le *tenseur de courbure* de la plaque défini par :

$$\underline{\chi} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}(u_3)) = \chi_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \text{avec} \quad \chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.3)$$

tandis que, à la différence des plaques de *Kirchhoff-Love*, le *tenseur des déformations membranaires* s'écrit dans le cas général d'une transformation finie<sup>1</sup> :

pour  $\alpha, \beta = 1, 2, k = 1, 2, 3$ :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \text{avec} \quad \epsilon_{\alpha\beta} = 1/2 \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\beta} \right] \quad (3.4)$$

Il vient alors, si l'on tient compte des hypothèses (H1) et (H3) précédemment retenues :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1/2 \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \cong \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1/2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 1/2 \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \cong \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 1/2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \\ \epsilon_{12} &= 1/2 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] \cong 1/2 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

où l'on n'a conservé que les termes *d'ordre un* en  $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$  ou *deux* en  $\partial u_\gamma / \partial x_\gamma$  ( $\gamma = 1, 2$ ), qui sont du même ordre en vertu de (H3).

Les relations (3.5) peuvent alors être réécrites comme suit sous forme *intrinsèque* :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 1/2 \left[ \underline{\nabla}(\underline{u}^0) + {}^T \underline{\nabla}(\underline{u}^0) + \underline{\nabla}(u_3) \otimes \underline{\nabla}(u_3) \right] \quad (3.6)$$

où  $\underline{u}^0 = u_\alpha \underline{e}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) est le vecteur déplacement dans le plan de la plaque.

L'expression (3.6) ci-dessus diffère de l'expression usuelle (2.5) des déformations *linéarisées* dans le plan  $Ox_1x_2$ , dans la mesure où elle fait intervenir non seulement le gradient des déplacements dans ce même plan, mais également le gradient du déplacement transversal (*flèche*) par son carré qui, en vertu de l'hypothèse (H3), est du même ordre que le premier gradient.

Dans ces conditions, l'*équation de compatibilité des déformations membranaires*, dont nous aurons besoin par la suite, peut être établie comme suit. Posant :

<sup>1</sup> Ce tenseur est la restriction au plan  $Ox_1x_2$  du tenseur des déformations de *Green-Lagrange* introduit pour un milieu continu tridimensionnel en transformation finie quelconque (voir par exemple Salençon, 2016)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11}^* &= \epsilon_{11} - 1/2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
\epsilon_{22}^* &= \epsilon_{22} - 1/2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
\epsilon_{12}^* &= \epsilon_{12} - 1/2 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 1/2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

la condition d'intégrabilité du champ  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  (c'est-à-dire le fait qu'il soit égal à la partie symétrique du gradient du champ  $\underline{u}^0$ ) s'écrit classiquement :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}^*}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}^*}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}^*}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{3.8}$$

soit en tenant compte de (3.7) et après calculs :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = -\det \underline{\underline{\chi}} \tag{3.9}$$

**Remarques.** Le déterminant du tenseur de courbure est souvent appelé « la courbure de Gauss ». (Bisch, 2013). Cette courbure est nulle pour une surface développable et non nulle pour une surface non développable (par ex. une sphère). L'équation (3.9) signifie que la flexion d'une surface initialement plane en une surface non développable engendre des déformations membranaires de la surface.

### 3.2.2. Ecriture des équations d'équilibre

Nous allons maintenant écrire les *équations d'équilibre* d'une plaque de *von Karman*, analogues aux équations (2.11) obtenues au chapitre précédent pour une plaque de *Kirchhoff-Love*. Celles-ci peuvent être établies en écrivant l'équilibre en résultantes et en moments d'un petit élément de plaque pour lequel on tient compte des changements de géométrie induits par les déformations transversales de la plaque (voir par ex. Bažant et Cedolin, 2010). Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \underline{\underline{N}} + \underline{p}^0 &= 0 & (a) \\
\operatorname{div} \underline{\underline{V}} + \operatorname{div} (\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\nabla} (u_3)) + p_3 &= 0 & (b) \\
\operatorname{div} \underline{\underline{M}} + \underline{V} &= 0 & (c)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A noter que l'équation (3.10(b)) fait apparaître un *couplage* entre les efforts membranaires et les efforts tranchants à travers la rotation  $\underline{\nabla}(u_3)$  de la plaque associée à sa déflexion hors de son plan<sup>2</sup>. Le report de l'équation (3.10(b)) dans (3.10(c)) permet d'éliminer les efforts tranchants, ce qui donne :

<sup>2</sup> Un tel couplage signifie implicitement que les efforts membranaires sont d'un ordre de grandeur supérieur aux efforts tranchants, ce qui est souvent le cas des plaques chargées dans leur plan.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{p}}^0 &= 0 & (a) \\ \operatorname{div}(\operatorname{div} \underline{\underline{M}}) - \operatorname{div}(\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}(u_3)) - p_3 &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (3.11)$$

On remarque que les équations (3.11) diffèrent de celles initialement proposées par von Karman (1910) et classiquement utilisées dans le modèle de *von Karman* (Ventsel et Krauthammer, 2004) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{N}} &= 0 & (a) \\ \operatorname{div}(\operatorname{div} \underline{\underline{M}}) - \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{\nabla}}(u_3)) - p_3 &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (3.12)$$

puisque ces derniers négligent le poids propre des plaques et considèrent une densité surfacique nulle dans le plan de plaque ( $\underline{\underline{p}}^0 = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \underline{\underline{N}} = 0$ ). Afin de prendre en compte du poids dans la modélisation, l'équation (3.11) sera donc retenue par la suite.

Les équations d'équilibre (3.11) devront être complétées par les *conditions aux limites en efforts* du modèle de plaques de *von Karman* en tout point du contour de la plaque de normale  $\underline{\underline{n}}$  et tangente  $\underline{\underline{t}}$  unitaires :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{N}}^d & (a) \\ Q_n + (\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\nabla}}(u_3) &= Q^d, M_{mn} = M^d & (b) \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $Q_n$  est souvent appelé l'*effort tranchant effectif* défini au chapitre précédent par (2.15). En comparaison avec les conditions aux limites de plaques de *Kirchhoff-Love*, seule la condition en effort tranchant est modifiée par l'ajout d'un terme relatif à la projection hors du plan des efforts membranaires  $(\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\nabla}}(u_3)$ .

### 3.2.3. Mise en équations du modèle de plaques de von Karman

L'objectif de cette partie est de mettre en équations du modèle de *von Karman* en tenant en compte du poids dans la modélisation. Pour cela, la loi de comportement thermoélastique (2.19) établie au chapitre précédent est d'abord rappelée :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \epsilon_{11} - B \chi_{11} \\ A \epsilon_{22} - B \chi_{22} \\ A \epsilon_{12} - B \chi_{12} \end{pmatrix} + N^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B \epsilon_{11} + D \chi_{11} \\ -B \epsilon_{22} + D \chi_{22} \\ -B \epsilon_{12} + D \chi_{12} \end{pmatrix} + M^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Par ailleurs, la plaque étant soumise à une densité surfacique du a son poids propre  $\underline{\underline{p}} = -w \underline{\underline{e}}_1$ , les efforts membranaires sont donnés par la fonction d'Airy  $\phi$  comme suit :

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + w(x_1 - a), N_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, N_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.15)$$

où il a été déjà tenu en compte d'une distribution linéique de l'effort normal  $N_{11}$  équilibrant le poids. De plus, les déformations membranaires associées aux efforts membranaires (3.15) par

la loi de comportement thermoélastique écrite sous la forme (2.28), doivent vérifier la condition de compatibilité (3.9), ce qui conduit à l'équation suivante portant sur la fonction d'Airy :

$$\Delta(\Delta\phi) + A(1-\nu^2)\det(\underline{\underline{\chi}}) = 0 \quad \text{avec : } \det(\underline{\underline{\chi}}) = \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) \quad (3.16)$$

où  $A$  est la rigidité membranaire de la plaque, définie par (2.22). C'est à dire que seul le terme relatif au déterminant du tenseur de courbure est introduit par rapport à l'équation (2.43(a)) du modèle de plaques de *Kirchhoff-Love*.

Enfin, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 2, on adopte l'approche en déplacement pour le problème de flexion en reportant des moments de flexion exprimés à travers la loi de comportement (2.37) dans l'équation d'équilibre (3.10(b)). Il vient ainsi :

$$D_e \Delta(\Delta u_3) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( w(x_1 - a) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (3.17)$$

où  $D_e$  est la rigidité en flexion *effective* de la plaque, définie par (2.38). Cette équation diffère de l'équation (2.43(b)) du modèle de plaques de *Kirchhoff-Love* dans la mesure où y apparaissent deux termes relatifs respectivement au poids propre et à la fonction d'Airy, qui traduisent l'intervention des efforts membranaires dans l'équilibre transversal.

Introduisons l'opérateur de *Monge-Ampère*  $[\cdot, \cdot]$  (Ciarlet, 1997) défini par :

$$[\phi, u_3] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.18)$$

La solution du problème d'équilibre thermoélastique d'une plaque de *von-Karman*<sup>3</sup> soumise à un *chargement thermique uniforme* caractérisé par le couple d'efforts thermiques  $(N^T, M^T)$  et une *densité surfacique due au poids propre*, est le couple  $(\phi, u_3)$  solution du système d'équations suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta(\Delta\phi) + \frac{A(1-\nu^2)}{2} [u_3, u_3] &= 0 & (a) \\ D_e \Delta(\Delta u_3) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( w(x_1 - a) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) &= [\phi, u_3] & (b) \end{aligned}} \quad (3.19)$$

qui seront complétées par les *conditions aux limites* en efforts ou en déplacement prescrites sur le bord de la plaque. Du fait que les deux équations font intervenir à la fois la fonction d'Airy et le déplacement transversal, le problème membranaire et celui de flexion de la plaque sont couplés et doivent donc être résolus de façon simultanée.

<sup>3</sup> Dans le modèle de plaques de *von Karman* classiquement utilisé, le chargement dans le plan de la plaque est supposé négligeable, de sorte que l'équation 3.19(b) se réduit à :  $D_e \Delta(\Delta u_3) = [\phi, u_3]$ .

### 3.3. Déformée totale d'origine thermique

L'objectif de cette section est de calculer la déformée *totale* d'origine thermique par la résolution des équations de *von Karman* (3.19). Sachant qu'une résolution analytique exacte de ces équations couplées n'est pas possible, nous nous proposons de développer des solutions approchées exprimées sous forme semi-analytique, permettant d'évaluer rapidement la déformée des murs en vue de leur dimensionnement ultérieur par le calcul à la rupture.

Le couple solution de l'équation *von Karman* (3.19) étant recherché par la méthode de *Galerkin*, nous allons considérer deux configurations de murs rectangulaires :

- ✓ celle où le mur est libre sur ses bords latéraux et simplement appuyé sur les autres bords ;
- ✓ celle où le mur est simplement appuyé sur ses quatre bords.

#### 3.3.1. Plaque libre sur deux bords latéraux et appuyée sur les autres côtés

##### 3.3.1.1. Ecriture des conditions aux limites

Considérons tout d'abord une plaque libre sur deux bords latéraux et simplement appuyée sur les autres côtés, soumise à son poids propre  $\underline{p} = -w\mathbf{e}_1$  et à l'action d'un feu d'incendie homogène sur l'une des faces ( $x_3 = -h/2$ ). Le chargement thermique associé à ce feu homogène est représenté par une courbure thermique  $\chi^T$ , comme nous avons vu au chapitre 2, section 2.3.1.1.

En vertu des équations (3.13), les conditions aux limites des plaques de *von Karman* diffèrent de celles (2.14) des plaques de Kirchhoff-Love dans la mesure où les efforts membranaires interviennent dans l'équilibre transversal. Mais en raison du fait que les bords latéraux sont *libres d'effort*, les conditions aux limites correspondantes deviennent exactement les mêmes que celles correspondant au modèle de *Kirchhoff-Love* que nous avons établies au chapitre 2, section 2.3.1.1. Elles sont récapitulées sur la figure 3.3.

Reprenant les résultats de la section 2.3.1.1 (équations (2.54) et (2.55)) on rappelle ces conditions aux limites du **problème de flexion** exprimées à travers la loi de comportement thermo-élastique de la plaque :

$$\begin{array}{l} \text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a : \quad u_3 = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = (1 + \nu)\chi^T ; \\ \text{sur } x_2 = \pm b/2 : \quad (2 - \nu)\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} = 0 \text{ et } \nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = (1 + \nu)\chi^T . \end{array} \quad (3.24)$$

Par ailleurs, la plaque étant libre dans son plan, on supposera que l'effort membranaire  $N_{11}$  en pied est égal à 0 :

$$\text{sur } x_1 = 0 : \quad N_{11} \cong -wa \quad (3.25)$$

Compte tenu de ces conditions sur les efforts membranaires, et de la forme (3.15) de la solution en efforts membranaires donnée par la fonction d'Airy, on en déduit immédiatement les conditions aux limites du **problème membranaire** :

$$\begin{array}{l}
 \text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a : \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0; \\
 \text{sur } x_2 = \pm b/2 : \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0;
 \end{array} \quad (3.26)$$

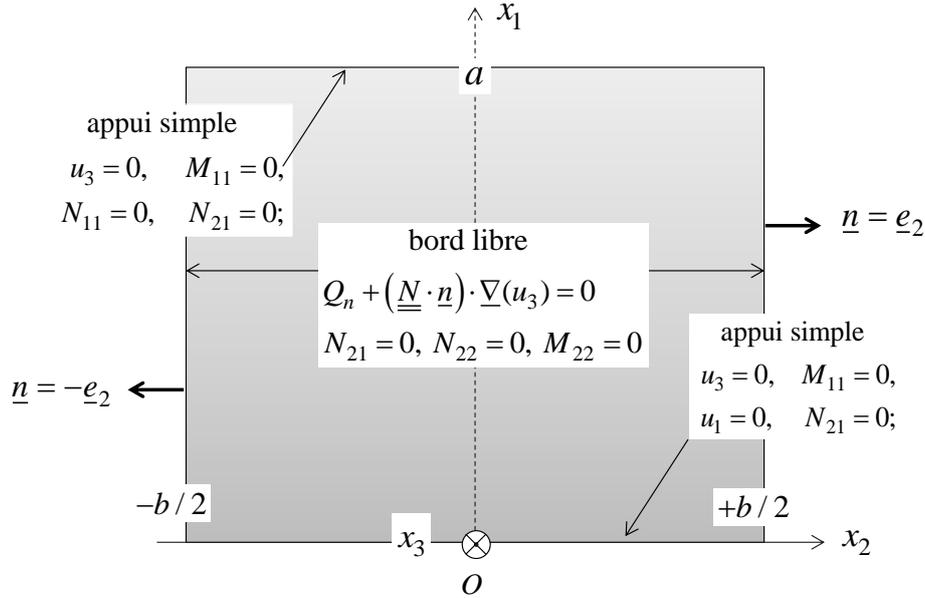


Figure 3.3. Conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée sur ses bords horizontaux et libre sur ses bords latéraux

### 3.3.1.2. Construction de solutions approchées par la méthode de Galerkin

La méthode de *Galerkin* (Galerkin, 1915 ; Bonnet, 2005) consiste à choisir une représentation des champs inconnus par une combinaison linéaire de fonctions de base. Cette représentation des champs inconnus vérifiant les conditions aux limites, la recherche des champs inconnu revient à calculer les coefficients de chaque fonction de base.

Adoptons ainsi une décomposition de la fonction d'Airy sous la forme d'une série trigonométrique :

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \phi^{(ij)} \left( 1 - \cos\left(\frac{2i\pi}{a} x_1\right) \right) \left( 1 - \cos\left(\frac{2j\pi}{b} x_2'\right) \right) \quad (3.27)$$

avec  $x_2' = x_2 + b/2$

qui vérifie automatiquement les conditions (3.26) du **problème membranaire**, ainsi qu'une solution du déplacement transversal  $u_3$  écrite sous la forme suivante :

$$u_3(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) + \tilde{u}(x_1, x_2) \quad (3.28)$$

où  $u^*$  est un champ **particulier** satisfaisant aux conditions du problème de flexion (3.24), tandis que  $\tilde{u}$  est la partie qui doit respecter les **conditions homogènes** suivantes:

$$\begin{aligned} \text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a : \quad & \tilde{u} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} = 0; \quad (a) \\ \text{sur } x_2 = \pm b/2 : \quad & (2-\nu) \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x_2^3} = 0 \text{ et } \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Les deux fonctions  $u^*$  et  $\tilde{u}$  vérifiant respectivement la condition (3.24) et la condition homogène (3.29), le champ de déplacement proposé (3.28), somme de ces deux fonctions, vérifie également la condition (3.24).

Etant donné que la solution (2.62) de plaques de *Kirchhoff-Love* développée au chapitre 2 satisfait naturellement aux conditions (3.24), on peut la considérer ici comme la partie **particulière** du modèle de plaques de *von Karman* :

$$u^*(x_1, x_2) = (1+\nu) \chi^T \left( (x_1^2 - ax_1) / 2 + \sum_{m=1,3,5,\dots}^M Y_m(x_2) \sin(\alpha_m x_1) \frac{4a^2}{(m\pi)^3} \right) \quad (3.30)$$

où les fonctions  $Y_m(x_2)$  sont égales à :

$$Y_m(x_2) = A_m \text{ch}(\alpha_m x_2) + D_m \alpha_m x_2 \text{sh}(\alpha_m x_2) \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.31)$$

avec les coefficients  $A_m$  et  $D_m$  définis par (2.65).

Par ailleurs, on considère le développement suivant de  $u$  par séparation des variables :

$$u = \sum_{n=1,2,3,\dots}^N u^{(n)} \sin(\alpha_n x_1) g_n(x_2) \quad \text{avec } \alpha_n = n\pi / a \quad (3.32)$$

où  $u^{(n)}$  est le coefficient de la fonction de base  $\sin(\alpha_n x_1) g_n(x_2)$ . Sachant que  $u$  doit satisfaire les conditions (3.29), le report de (3.32) dans les conditions (3.29 (b)) impose que :

$$x_2 = \pm b/2 : \quad \begin{cases} g_n''(x_2) - \nu \alpha_n^2 g_n(x_2) = 0 \\ g_n^{(3)}(x_2) - (2-\nu) \alpha_n^2 g_n'(x_2) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

tandis que la condition (3.29(a)) est naturellement vérifiée par  $u$ .

S'inspirant des fonctions  $Y_m(x_2)$  qui satisfont aux conditions (2.63), nous arrivons à construire un type de fonctions de base respectant les conditions (3.33) :

$$g_n(x_2) = 1 + \left( A_n \text{ch}(\alpha_n x_2) + D_n \alpha_n x_2 \text{sh}(\alpha_n x_2) \right) \frac{\nu}{1-\nu} \quad (3.34)$$

où les coefficients  $A_n$  et  $D_n$  sont définis par :

$$\begin{aligned} A_n = \frac{(1+\nu) \text{sh} \alpha + (\nu-1) \alpha \text{ch} \alpha}{(\nu+3) \text{sh} \alpha \text{ch} \alpha + (\nu-1) \alpha}, D_n = \frac{(1-\nu) \text{sh} \alpha}{(\nu+3) \text{sh} \alpha \text{ch} \alpha + (\nu-1) \alpha} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{avec } \alpha = \frac{n\pi b}{2a} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Le déplacement transversal solution s'écrit au final :

$$u_3(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) + \sum_{n=1,2,3,\dots}^N u^{(n)} \sin(\alpha_n x_1) g_n(x_2) \quad (3.36)$$

Reportant le développement (3.27) de la fonction d'Airy et celui (3.36) du déplacement transversal dans la formulation faible des équations (3.19) de plaques de *von Karman*, nous aboutissons à un système d'équations algébriques portant sur les coefficients  $\phi^{(ij)}$  et  $u^{(n)}$  qui peut être alors résolu par la méthode de *Newton-Raphson*. Une fois que ces coefficients sont calculés, les expressions (3.27) et (3.36) permettent alors de trouver une solution approchée du couple  $(\phi, u_3)$ .

### 3.3.2. Plaque appuyée sur ses quatre bords

#### 3.3.2.1. Ecriture des conditions aux limites

Considérons ensuite une plaque rectangulaire simplement appuyée sur quatre bords, soumise à une densité surfacique due au poids propre  $\underline{p} = -w\underline{e}_1$  ainsi qu'à l'action d'un feu d'incendie homogène sur l'une des faces.

Du fait que la plaque est libre de se dilater dans le plan, aucun effort membranaire est engendré sur les bords latéraux. Les conditions aux limites sont récapitulées sur la figure 3.4 ci-dessous.

Cette configuration diffère du cas précédent (section 3.3.1) dans la mesure où les bords latéraux sont aussi simplement appuyés. Il vient ainsi que les conditions du **problème de flexion** s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a : \quad & u_3 = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = (1 + \nu) \chi^T \\ \text{sur } x_2 = \pm b / 2 : \quad & u_3 = 0, \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = (1 + \nu) \chi^T \end{aligned} \quad (3.37)$$

tandis que celles du **problème membranaire** sont identiques que (3.26) :

$$\begin{aligned} \text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a : \quad & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0; \\ \text{sur } x_2 = \pm b / 2 : \quad & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0; \end{aligned} \quad (3.38)$$

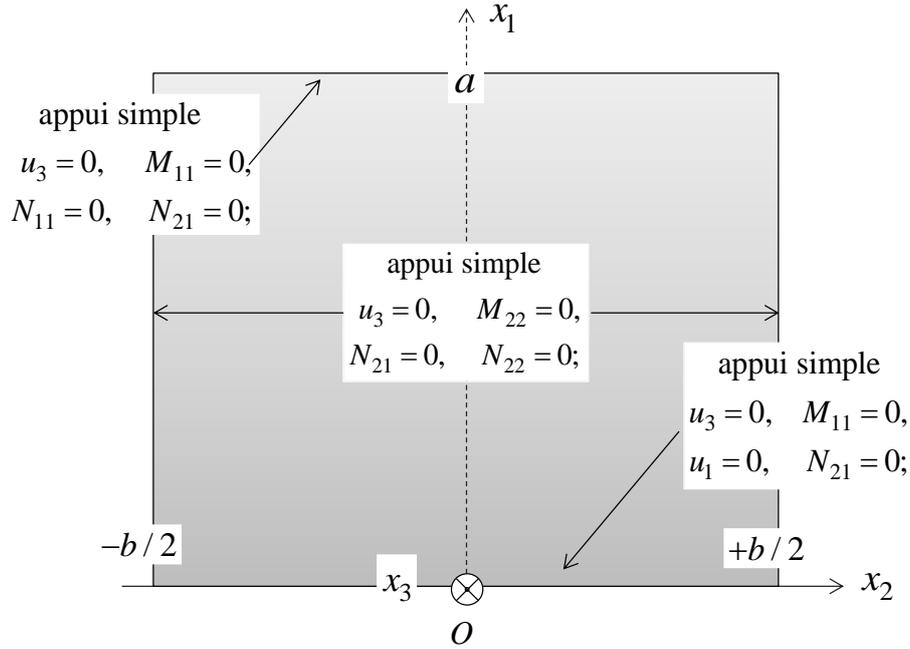


Figure 3.4. Conditions sur quatre bords d'une plaque simplement appuyée

### 3.3.2.2 Obtention d'une solution approchée par la méthode de Galerkin

Dans le cadre de la recherche d'une solution approchée par la méthode de *Galerkin*, il est commode d'introduire une décomposition de la fonction d'Airy  $\phi$  sous la même forme que (3.27) :

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \phi^{(ij)} \left( 1 - \cos\left(\frac{2i\pi}{a} x_1\right) \right) \left( 1 - \cos\left(\frac{2j\pi}{b} x_2'\right) \right) \quad (3.39)$$

avec  $x_2' = x_2 + b/2$

qui satisfait naturellement aux conditions du problème membranaire (3.38).

En ce qui concerne la solution du déplacement transversal, on introduit la décomposition suivante :

$$u_3(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) + u(x_1, x_2) \quad (3.40)$$

où la partie *particulière*  $u^*$ , définie par (B.4) (voir annexe B), satisfait aux conditions (3.37) tandis que la fonction  $u$  prend la forme de la série sinusoïdale suivante :

$$u(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u^{(mn)} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2'\right) \quad (3.41)$$

avec  $x_2' = x_2 + b/2$

qui, après vérification, satisfait aux conditions *homogènes* sur les quatre bords :

$$\begin{aligned} \text{sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = a : \quad u_3 = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0 \\ \text{sur } x_2 = \pm b / 2 : \quad u_3 = 0, \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Les deux fonctions  $u^*$  et  $u$  vérifiant respectivement la condition (3.37) et la condition **homogène** (3.42), le champ de déplacement transversal (3.40), somme de ces deux fonctions, vérifie également la condition (3.37). La solution du déplacement transversal s'écrit au final :

$$u_3(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u^{(mn)} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) \quad (3.43)$$

Reportant les solutions (3.39) et (3.43) dans la formulation faible des équations (3.19) de plaques de *von Karman*, on peut obtenir, tout comme dans le cas précédent, un système d'équations algébriques portant sur les coefficients  $\phi^{(ij)}$  et  $u^{(mn)}$ . Une fois que ces coefficients sont trouvés par la résolution de ces équations, les champs de fonction d'Airy et de déplacement transversal sont respectivement calculés par les équations (3.39) et (3.43).

### 3.4. « Effet $P - \delta$ » dû au poids propre

Cette section a pour but de mettre en évidence l'influence du poids propre sur la déformée d'origine thermique par une étude numérique. Pour cela, on justifie d'abord le choix du nombre de termes considérés dans les solutions sous forme de séries par une étude d'erreur relative. Ensuite, le couplage entre le problème de flexion et le problème membranaire sera mise en évidence de façon numérique. Enfin, une étude paramétrique sera effectuée afin d'étudier l'influence de l'élanement sur l'effet « $P - \delta$ ».

#### 3.4.1. Choix du nombre de termes dans les solutions approchées

La précision des solutions approchées (3.36) et (3.43) du déplacement transversal dépend du nombre de termes retenus dans les séries. Prenant la déformée calculée avec 30 termes comme solution de référence ( $u_3^R$ ), l'erreur relative sur le déplacement est définie tout comme dans le chapitre 2, équation (2.76), par :

$$\mathcal{E}_{\text{relative}} = \frac{\|u_3 - u_3^*\|_p}{\|u_3^*\|_p} \quad (3.44)$$

où l'on rappelle que  $\| \cdot \|_p$  est la norme euclidienne (norme  $L^2$ ) ou la norme infinie selon que  $p = 2$  ou  $p = \infty$ .

La figure 3.5 montre l'évolution de l'erreur relative du déplacement transversal d'une plaque carrée de 10m de hauteur en fonction du nombre de termes considérés dans les solutions. La figure 3.5(a) correspond à une plaque libre sur ses côtés latéraux (solution 3.36) tandis que celle de droite correspond à une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords (solution 3.43). On

peut constater que l'erreur relative de la solution (3.36) diminue très rapidement (moins de  $10^{-3}$  avec 4 termes). En revanche, la convergence de la solution (3.43) sous forme de série sinusoïdale est relativement lente, nécessitant d'aller jusqu'à 20 termes pour obtenir une erreur relative de  $10^{-3}$ . Dans la suite, nous ne considérerons que 5 termes dans le calcul de la déformée des plaques libres sur les bords latéraux et 20 termes pour les plaques simplement appuyées sur quatre bords.

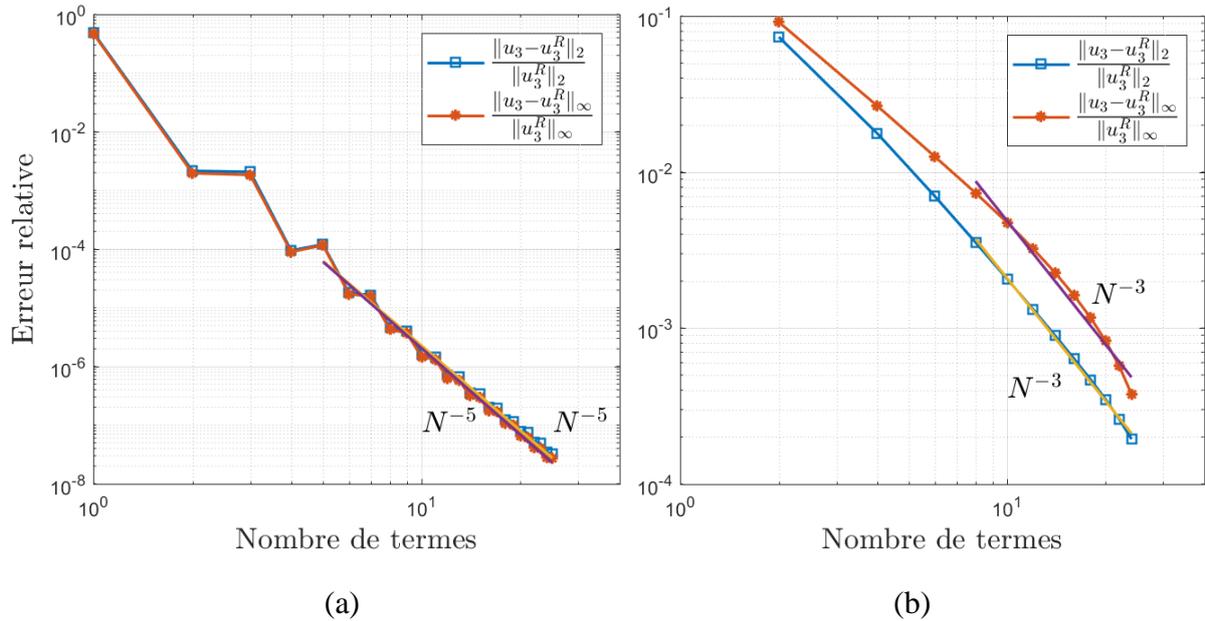


Figure 3.5. Evolution de l'erreur relative en fonction du nombre de termes de la solution de plaques de von Karman (à gauche : plaque libre sur ses côtés latéraux ; à droite : plaque simplement appuyée sur ses quatre bords)

### 3.4.2. Couplage entre le problème de flexion et le problème membranaire

Cette section a pour but de mettre en évidence numériquement le couplage entre le problème de flexion et le problème membranaire, sachant qu'un champ des efforts membranaires est engendré lorsque la surface initialement plane devient une surface non développable (condition de compatibilité (3.9)). Ce couplage permet ensuite de prendre en compte l'influence du poids sur la déformée d'origine thermique.

Considérons le cas d'un mur carré de 15cm d'épaisseur, libre sur ses bords latéraux avec une face exposée au feu pendant 1,5h.

Bien que l'effort normal engendré par le poids soit négligeable par rapport à l'effort membranaire thermique  $N^T$ , la flexion de la surface induit un effort membranaire d'autant plus important que la hauteur de la plaque est plus grande. La figure 3.6 montre les champs d'effort membranaire normalisé  $N_{11} / N^T$  des murs d'une hauteur allant de 8m à 14m. Pour un mur de 8m et de 10m de hauteur (figure 3.6 (a) et (b)), le champ d'effort membranaire est quasiment négligeable dans la partie centrale du mur. Il devient en revanche non négligeable ( $N_{11} / N^T \approx 0,15$ ) lorsque la hauteur du mur augmente (figure 3.6(c)). Pour un mur de 14m de

hauteur (figure 3.6(d)), on peut observer une zone en *traction* dans la partie centrale du mur, ainsi que deux zones en *compression* près des bords latéraux.

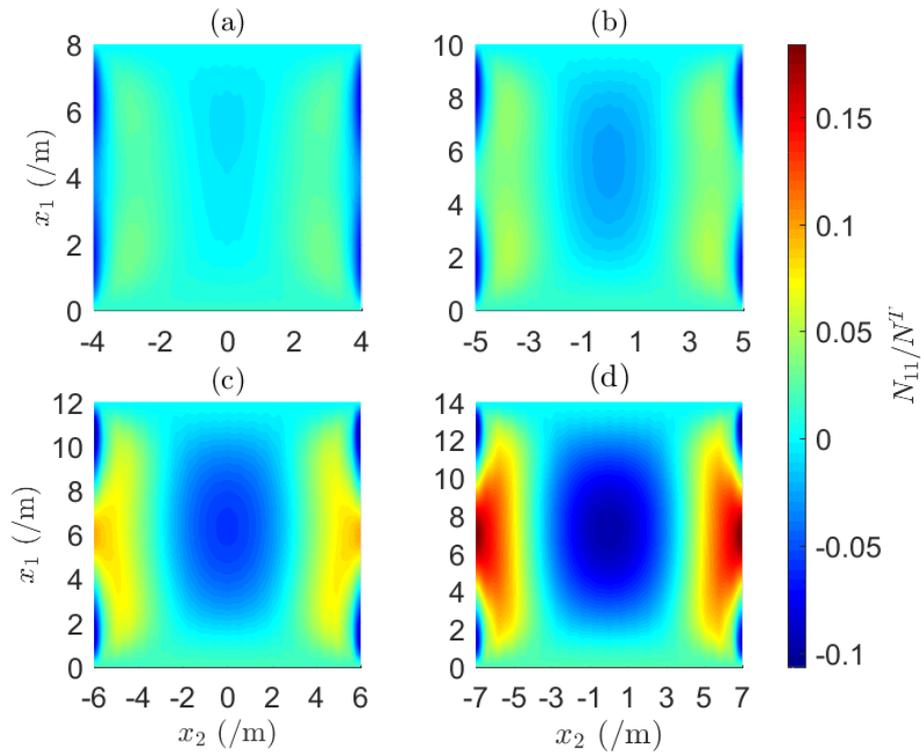


Figure 3.6. Effort normal normalisé  $N_{11} / N^T$  de plaques carrées de différentes hauteurs

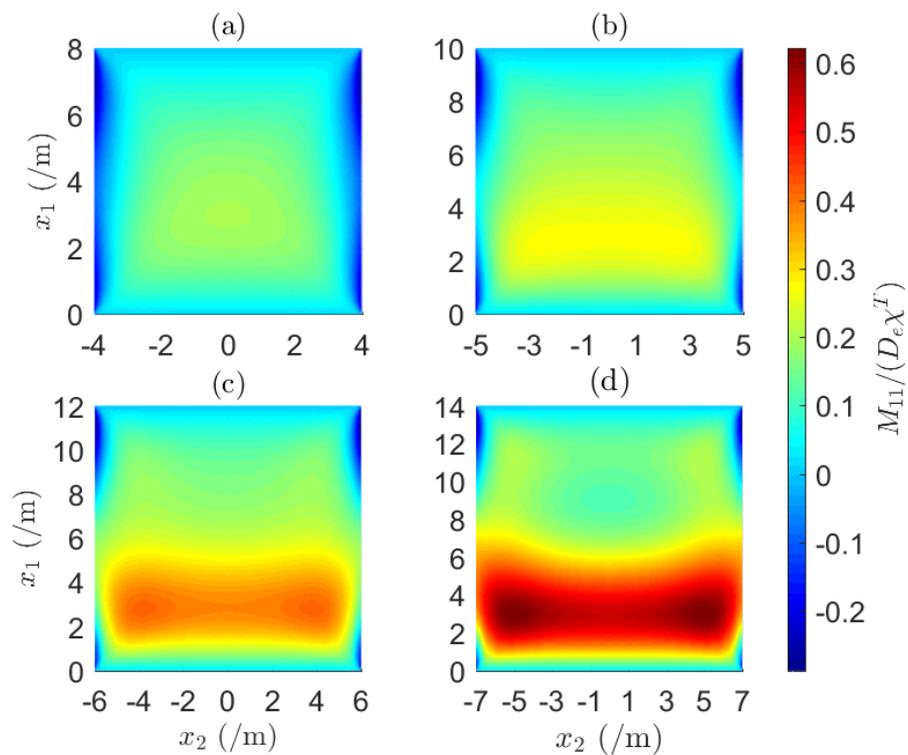


Figure 3.7. Moment de flexion normalisé  $M_{11} / (D_e \chi^T)$  de plaques carrées de différentes hauteurs, libres sur les bords latéraux

Par ailleurs, le moment de flexion est d'autant plus important que le mur est plus haut. La figure 3.7 montre les champs de moment de flexion normalisé  $N_{11} / N^T$  de murs d'une hauteur variant entre 8m à 14m. Comme nous l'avons déjà expliqué, l'excentricité des efforts membranaires due à la déformée d'origine *purement* thermique crée un moment de flexion supplémentaire dans la section du mur. Le moment de flexion maximal  $M_{11}$  d'une plaque de 8m de hauteur ne représente que 20% de  $D_e \chi^T$  (figure 3.7(a)) tandis que celui d'une plaque de 10m s'élève à 27%(figure 3.7(b)). On peut observer une bande en partie inférieure d'une plaque de 12m (resp. 14m), où ce moment de flexion devient important : 42% (resp. 62%) de  $D_e \chi^T$  (figure 3.7(c) et (d)).

Enfin, ce moment de flexion induit à son tour une déformée *totale* d'autant plus importante que la hauteur du mur est plus grande. On peut comparer la modélisation des murs en plaques de *Kirchhoff-Love* (Chapitre 2), où les problèmes de flexion et membranaire sont découplés, avec la modélisation en plaque de *von Karman*. Les figures 3.8 et 3.9 montrent respectivement la déformée de-murs carrés de différentes hauteurs obtenue par le modèle de *Kirchhoff-Love* et par le modèle de *von Karman*. On peut constater que les déformées dans la figure 3.8 ont une couleur bleue plus foncée que celles dans la figure 3.9, ce qui correspond à un champ de déplacement transversal plus important. Les déplacements maximaux des murs de différentes géométries sont présentés dans le tableau 3.1. Le rapport entre le déplacement maximal obtenu par le modèle de *von Karman* et celui du modèle de *Kirchhoff-Love* est d'autant plus important que les dimensions des murs sont plus importantes. L'effet  $P-\delta$ , défini comme ce rapport moins un, varie entre 8% à 23% lorsque la hauteur des murs carrés passe de 8m à 14m.

	<b>Géométrie</b>			
<b>Déplacement maximal</b>	8m×8m	10m×10m	12m×12m	14m×14m
<b><i>Kirchhoff-Love</i> (/cm)</b>	35	55	79	108
<b><i>von Karman</i> (/cm)</b>	38	62	94	132
<b>Rapport</b>	108%	113%	119%	123%
<b>Effet <math>P-\delta</math></b>	8%	13%	19%	23%

Tableau 3.1. Déplacements maximaux des murs de différentes dimensions, obtenus respectivement par le modèle de *Kirchhoff-Love* et le modèle de *von Karman*

Cet effet  $P-\delta$  dépend non seulement de la hauteur des murs mais aussi de l'élanement, défini comme le rapport entre la hauteur et la largeur, ainsi que les conditions aux bords latéraux des murs. Comme nous le verrons plus tard, l'effet  $P-\delta$  des murs simplement appuyés sur quatre bords est plus faible que celui des murs libres aux bords latéraux.

<sup>4</sup>  $D_e \chi^T$  représente le moment de flexion « thermique »  $M_{11}$  engendré sur un bord parallèle à la direction  $x_1$  encasté et libre d'effort membranaire

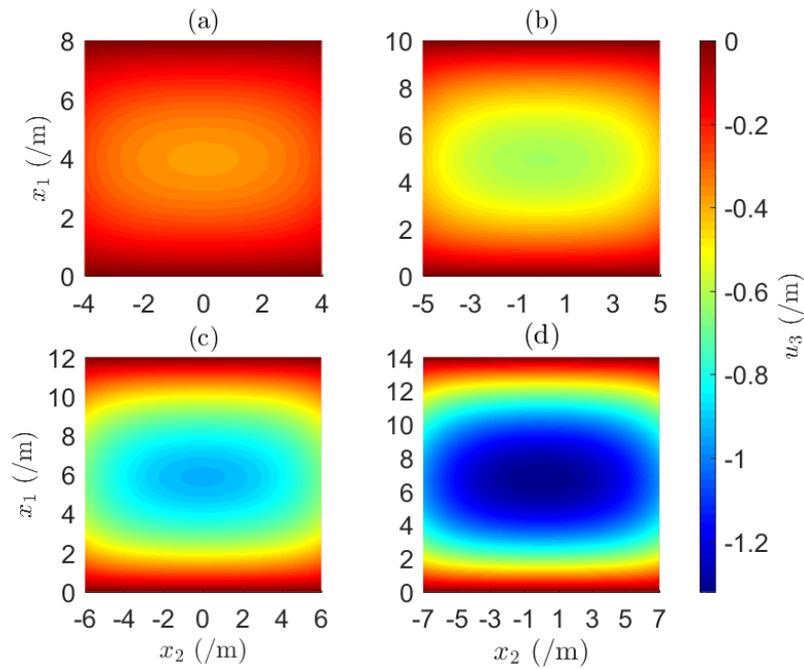


Figure 3.8. Déformée d'origine thermique de murs carrés de différentes hauteurs modélisés comme les plaques de *von Karman* libres sur les bords latéraux au bout de 90 min

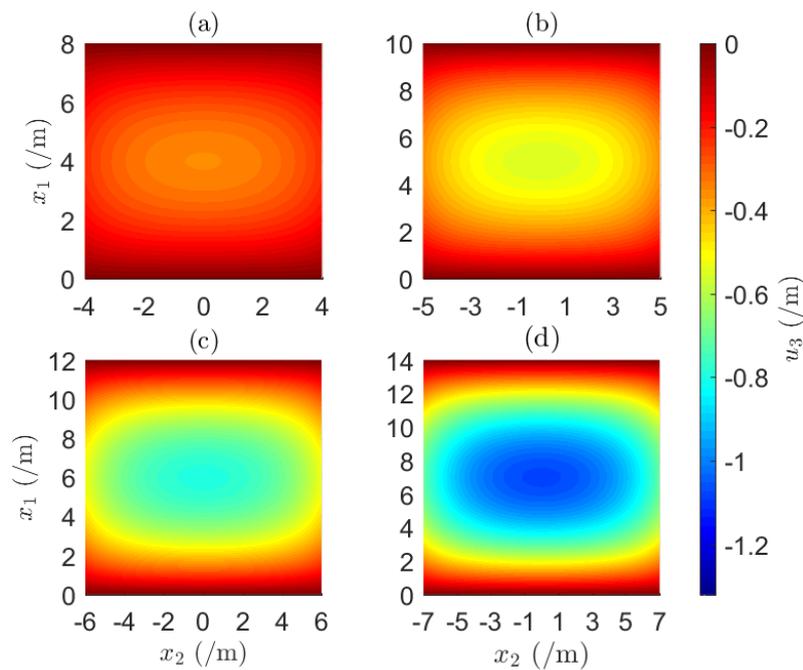


Figure 3.9. Déformée d'origine thermique de murs carrés de différentes hauteurs modélisés comme les plaques de *Kirchhoff-Love* libres sur les bords latéraux au bout de 90 min

### 3.4.3. Influence de l'élancement et de la hauteur sur l'amplitude de l'« effet $P-\delta$ »

Dans cette section, on met en évidence l'effet « $P-\delta$ » dû au poids propre sur la déformée d'origine thermique par une comparaison entre le déplacement maximal d'une plaque de *von*

*Karman* et celui des plaques de *Kirchhoff-Love*. Dans tous les cas, la plaque est de 15cm d'épaisseur et soumise à un feu ISO sur la face  $x_3 = -h/2$  avec une durée d'exposition de 1,5h.

### 3.4.3.1. Evolution du déplacement maximal en fonction de l'élancement

Considérons d'abord le cas où les plaques sont libres sur les bords latéraux (figure 3.10). Les courbes continues correspondent au déplacement *maximal* calculé par le modèle de *von Karman*, tandis que les lignes pointillées avec des cercles correspondent au déplacement maximal prédit par le modèle de *Kirchhoff-Love*.

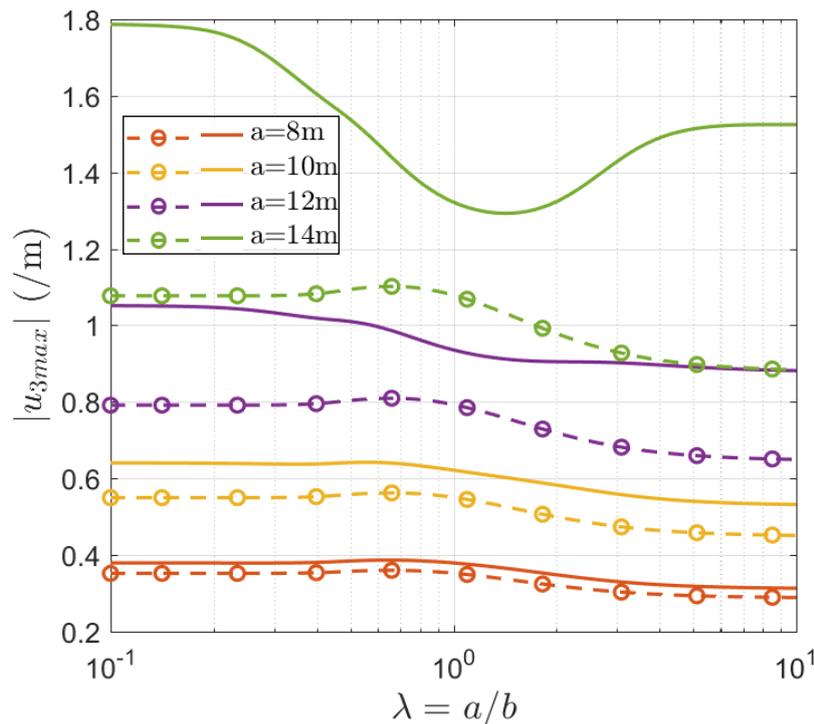


Figure 3.10. Evolution du déplacement maximal des plaques libres sur les bords latéraux en fonction de l'élancement  $\lambda = a/b$  et de la hauteur  $a$  de la plaque (ligne continue : plaque de *von Karman* ; ligne pointillée avec des cercles : plaque de *Kirchhoff-Love*)

Il apparaît clairement que la modélisation par plaque de *von karman* fournit une prédiction du déplacement maximal plus importante que celle donnée par la modélisation par plaque de *Kirchhoff-Love*, puisque les lignes continues se situent au-dessus lignes pointillées de même couleur.

Pour un élancement de plaque donné, on peut constater que la différence entre les deux modèles de plaques est d'autant plus importante que la hauteur de la plaque est plus grande. Pour une plaque carrée, cette différence passe de 3cm à 7cm lorsque la hauteur de la plaque est augmentée de 8m à 10m. Cette différence s'élève à 14cm (resp. 24cm) pour une plaque carrée de 12m (resp. 14m) de hauteur.

Considérons ensuite le cas des plaques simplement appuyées sur les quatre bords (figure 3.11). Dans ce cas, le déplacement maximal diminue en fonction de  $\lambda$  pour les deux modélisations. Cela s'explique par le fait que les bords latéraux sont simplement appuyés et

limitent le déplacement transversal. On peut distinguer trois zones sur la figure 3.10 : celle de gauche où la différence du déplacement maximal entre les deux modélisations est d'autant plus importante que la hauteur de la plaque est grande, celle de droite où le déplacement maximal est presque identique dans les deux modélisations, et tend vers zéro, ainsi que la zone intermédiaire où cette différence diminue en fonction de l'élançement de la plaque.

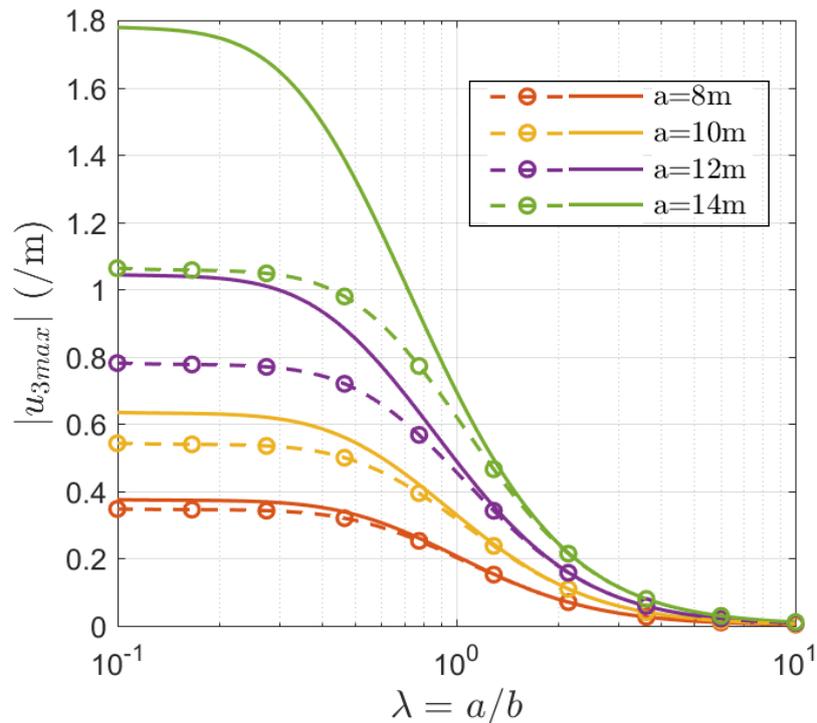


Figure 3.11. Evolution du déplacement maximal de plaques simplement appuyées sur quatre bords en fonction de l'élançement  $\lambda = a/b$  (ligne continue : plaque de *von Karman* ; ligne pointillée avec les cercles : plaque de *Kirchhoff-Love*)

### 3.4.3.2. Importance de l'« effet $P-\delta$ » en fonction de l'élançement

Nous prenons l'amplification relative du déplacement maximal du modèle de *von Karman*, désigné par  $u_{3max}^{VK}$ , par rapport à celui du modèle de *Kirchhoff-Love*, désigné par  $u_{3max}^{KL}$ , comme une mesure de l'« effet  $P-\delta$  » :

$$\delta = \frac{u_{3max}^{VK} - u_{3max}^{KL}}{u_{3max}^{KL}} \quad (3.45)$$

dont l'évolution en fonction de l'élançement de la plaque est montrée sur la figure 3.13. Les lignes continues en étoile correspondent aux plaques libres sur les bords latéraux tandis que les lignes pointillées correspondent aux plaques simplement appuyées sur quatre bords.

Considérons d'abord le cas des plaques **libres sur les bords latéraux** (lignes continues étoilées). On peut constater que l'« effet  $P-\delta$  » se situe autour de 8% (resp. 17%) pour les plaques de 8m (resp. 10m) de hauteur avec une variation relativement faible suivant l'axe des abscisses. En revanche, cet « effet  $P-\delta$  » pour des plaques d'une hauteur de 12m (resp. 14m) diminue de 33% à 18% (resp. de 66% à 22%), avant d'augmenter à nouveau jusqu'à atteindre

un maximum de 36% (resp. 72%), lorsque l'éclatement de plaque varie entre 0,1 et 10. On en déduit alors que l'« effet  $P-\delta$  » dû au poids propre est d'autant plus important que la hauteur de la plaque est plus grande.

Pour les plaques *simplement appuyées sur quatre bords* (lignes pointillées), on peut constater que l'« effet  $P-\delta$  » devient plus important lorsque la hauteur de la plaque augmente. Dans la zone située sur la gauche de la figure 3.12, les valeurs de  $\delta$  diffèrent peu de celles obtenues pour une plaque libre sur ses bords latéraux. Cela s'explique par le fait que l'influence des conditions imposées sur les bords latéraux se manifeste d'autant moins que la plaque est plus large. En revanche, on observe que  $\delta$  diminue très fortement en fonction de  $\lambda$  lorsque la plaque devient plus étroite.

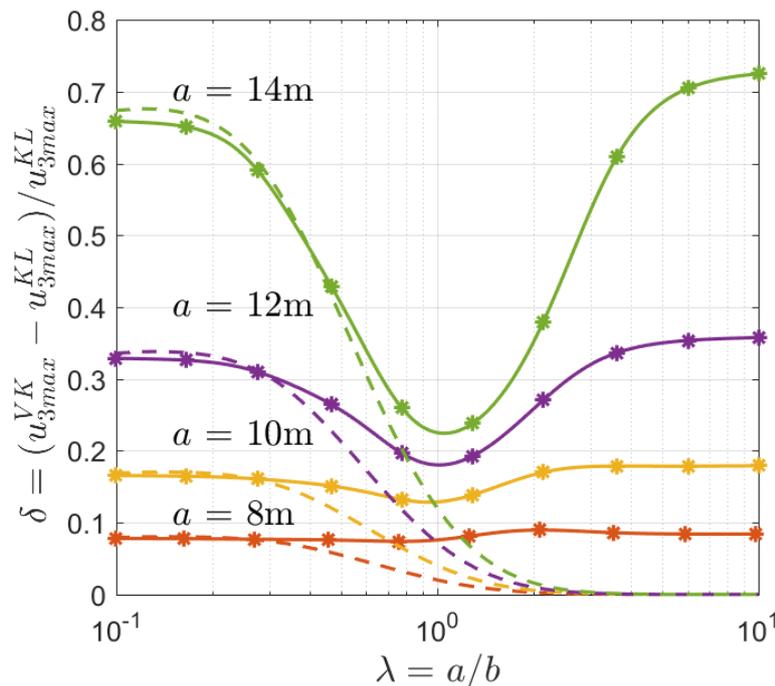


Figure 3.12. Evolution de l'« effet  $P-\delta$  » en fonction de l'éclatement  $\lambda = a/b$

### 3.5. Une première validation expérimentale à grande échelle

L'objectif de cette section est de valider le calcul de la déformée d'origine thermique utilisant les solutions semi-analytiques précédentes par la comparaison avec des résultats expérimentaux. Sachant que cette déformée sera utilisée ultérieurement dans le dimensionnement des murs par le calcul à la rupture, la confrontation entre la déformée calculée et celle observée expérimentalement sur un essai à grande échelle permet d'évaluer la qualité et la précision des solutions approchées. Cet essai expérimental a fait l'objet d'une présentation lors de la 2<sup>ème</sup> conférence IFireSS (Pham *et al.*, 2017). On présente d'abord la configuration générale de l'essai, puis le profil de température mesurée dans l'épaisseur du mur. On termine enfin par la confrontation de la déformée mesurée avec les champs de déplacement transversal calculés respectivement par le modèle de plaque de *Kirchhoff-Love* et celui de *von Karman*.

### 3.5.1. Description de l'essai

#### 3.5.1.1. Equipement de l'essai

Le four *Vulcain* du CSTB, constitué d'une base et deux modules mobiles reposant sur la charpente métallique (voir figure 3.13), dispose une zone de test maximale de 9m×3m. 24 brûleurs à gaz sont répartis symétriquement sur toute la hauteur du four, qui pouvant engendrer une flamme parallèle à la surface des murs testés. La puissance maximale du four s'élève à 13,5 MW, permettant d'atteindre une température de 1300°C en 30 minutes.

La température à l'intérieur du four est contrôlée par ajustement de la vitesse d'émission du flux de gaz et de l'air de chaque brûleur en fonction de la température mesurée instantanément par les thermocouples à disques de cuivre préinstallés. Il est ainsi possible de réaliser une courbe de température en fonction du temps comme celle de l'ISO 834.

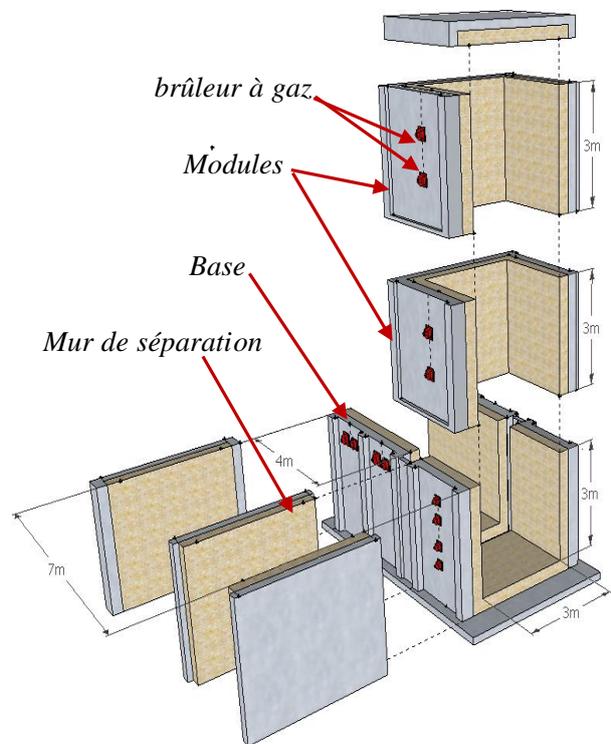


Figure 3.13. Photo du four *Vulcain* et des modules élémentaires du four

#### 3.5.1.2. Matériaux constitutifs

Le béton subit d'une instabilité thermique liée au phénomène de l'éclatement de surface, couramment dénommé « écaillage » (Mindeguia, 2009). Il s'agit d'un détachement progressif et continu de petites écailles de béton qui sont expulsées avec force du parement exposé au feu. Afin d'éliminer ce risque de diminution de l'épaisseur du béton en cours d'essai, des fibres polypropylènes ont été ajoutées dans la formulation du béton BPS NF EN 206/CN -XC3 -C25/30 -S4 -CL0,65 (NF EN 206-1). Lors du bétonnage du mur, trois éprouvettes cylindriques de 16cm de diamètre et de 32cm de hauteur ont été fabriquées afin de caractériser les résistances

en compression et en traction du béton (voir tableau 3.2). Le temps de séchage du béton est de 105 jours. La masse volumique du béton est égale à 2080kg/m<sup>3</sup>.

Résistance en compression (MPa) $f_c$	36,1
Résistance en traction (MPa) $f_t$	2,75

Tableau 3.2. Caractéristiques du béton (essais sur éprouvettes)

Selon la loi de comportement du béton proposée par l’Eurocode (EN 1992-1-2, 2005), le module d’élasticité à température ambiante (20°C) est calculé par :

$$E = \frac{3f_c}{2\varepsilon_c} \quad (3.45)$$

où  $\varepsilon_c$  est la déformation correspondant à la résistance maximale à la compression, égal à 0,25% selon l’Eurocode (EN 1992-1-2, 2005). Le module d’élasticité donné par (3.45) est donc égal à 21,66 GPa.

Le mur est renforcé par deux lits d’armatures en acier à haute adhérence de 9mm de diamètre, régulièrement espacées de 10 cm avec une épaisseur d’enrobage de 2,5cm. Il en résulte bien que la fraction volumique de l’acier est faible (1,5%). Mais conformément à ce qui a été établi auparavant, seul le béton est pris en compte dans le calcul de la déformée d’origine thermique.

### 3.5.1.3. Caractéristiques géométriques du mur

Le mur est de dimension 8,4m×2,6m dans le plan avec une épaisseur de 15cm (voir figure 3.14). La hauteur et la largeur du mur sont choisies afin de profiter au maximum de la zone de test du four, tandis que l’épaisseur choisie est proche de la valeur couramment retenue pour les murs de compartimentage.

Un système « antichute » est mis en place pour assurer la sécurité du four et de ses utilisateurs. Ce système est constitué d’un cadre en béton armé, des barreaux d’échelle, ainsi que des câbles qui relient les points d’ancrage du mur aux barreaux. Afin d’assurer la répartition des efforts en tête et en pied, les deux parties d’extrémité du mur (renflement de dimension 30cm×30cm) sont préfabriquées et comportent des aciers en attente et un engravement pour la reprise de bétonnage.

Une barre cylindrique en acier, incorporée dans la pièce située en pied du mur, repose sur une longrine en acier (voir figure 3.14). Elle permet une rotation libre du mur tout en limitant ses déplacements verticaux et transversaux, tandis que des pièces en acier en forme de U autorisent une rotation et un déplacement vertical libres de la barre incorporée dans la pièce située en tête du mur. Par ailleurs, les bords latéraux du mur sont calfeutrés avec de la laine de roche pour l’isolation du feu de four. Aucun effort n’est exercé sur ces bords latéraux. On peut ainsi considérer que ce mur est modélisé comme une plaque *libre sur les bords latéraux* et *simplement appuyée sur les autres côtés*.

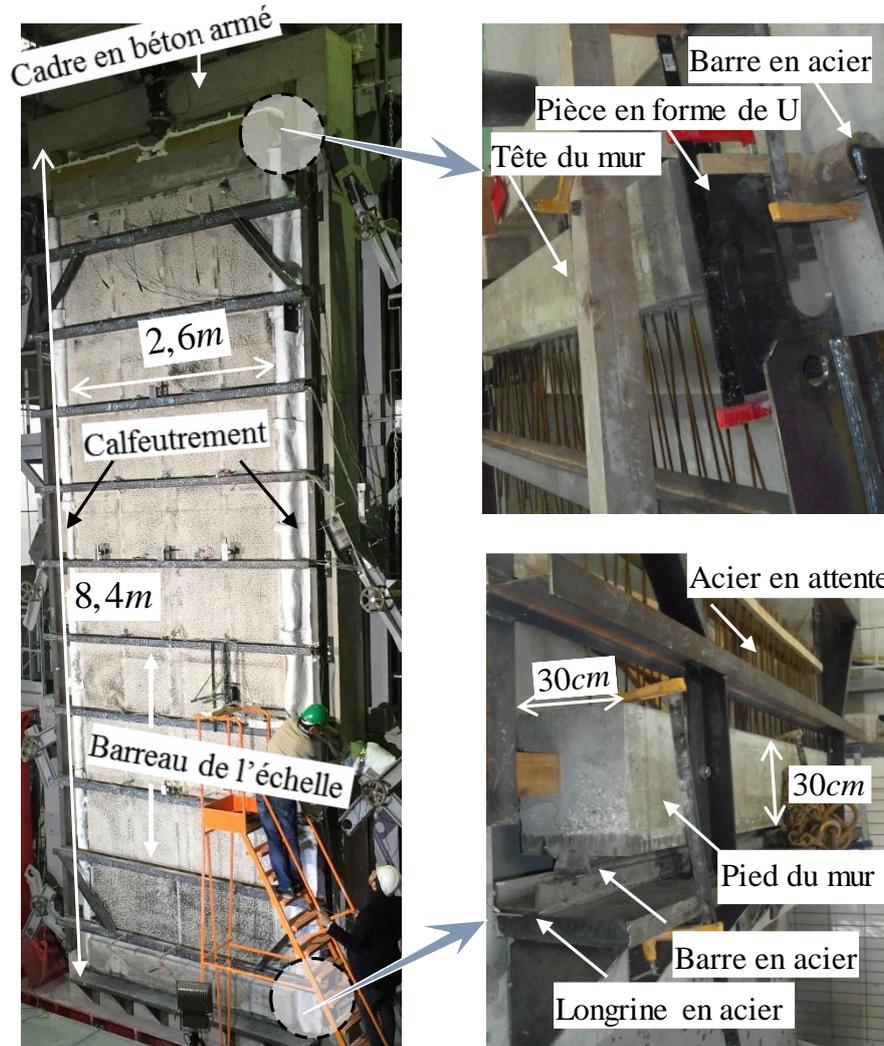


Figure 3.14. La configuration du mur (à gauche) et les pièces préfabriquées d'extrémité du mur avant bétonnage (à droite)

### 3.5.1.4 Capteurs de déplacement et capteurs de température

Des capteurs du type LVDT sont installés afin de mesurer les déplacements transversaux (D1 à D11), ainsi que les déplacements verticaux (D12 et D13) (voir figure 3.15). Deux caméras sont également installées devant le mur afin d'enregistrer sa transformation au cours de l'essai. La température des murs est mesurée en huit points différents (T1 à T8) sur le mur (voir figure 3.15). En chaque point, le gradient thermique est obtenu par une mesure des températures à différentes profondeurs par huit thermocouples à boules et un thermocouple à disques de cuivre (voir figure 3.16). La température de la face exposée au feu est supposée identique à celle du four et donc donnée par les thermocouples du four.

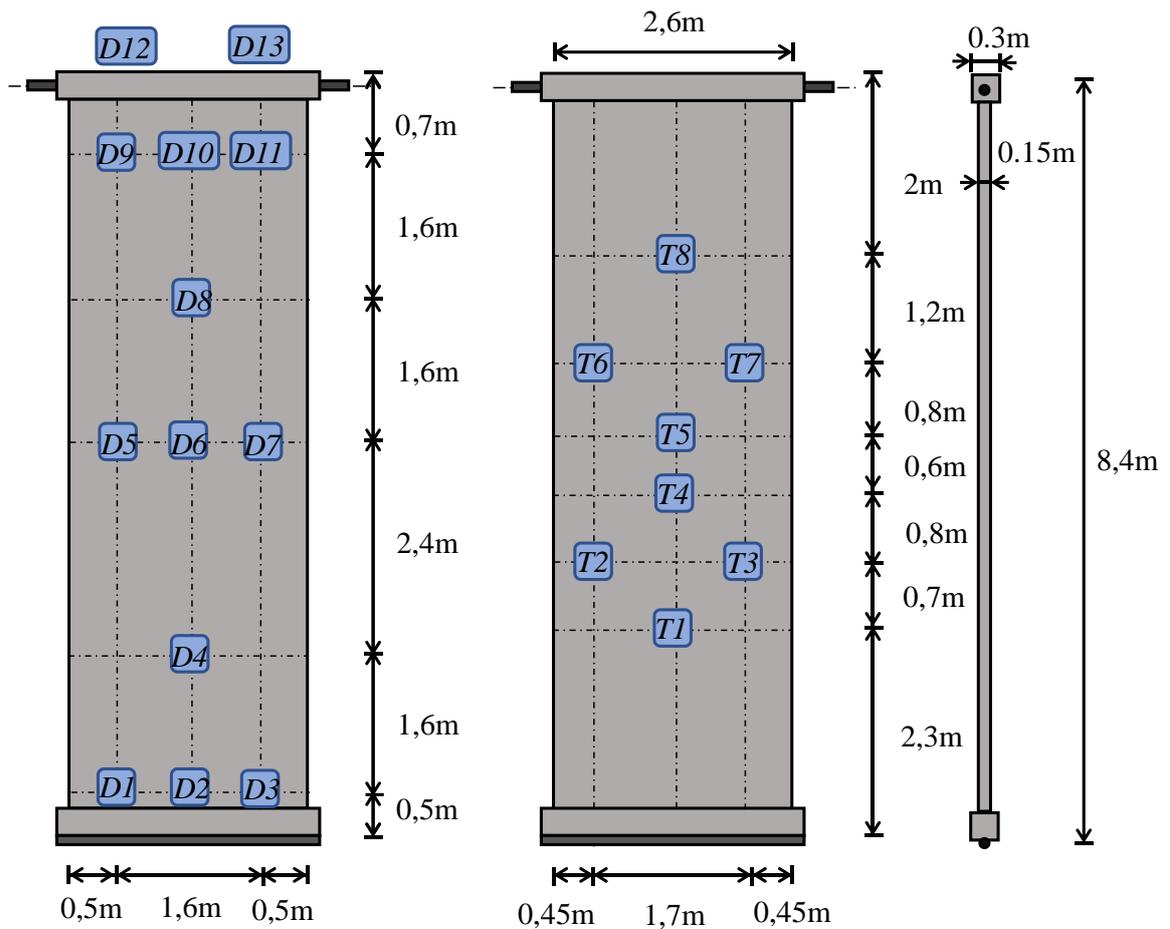


Figure 3.15. Position des capteurs (à gauche : capteurs de déplacement transversal ; à droite : capteurs de température)

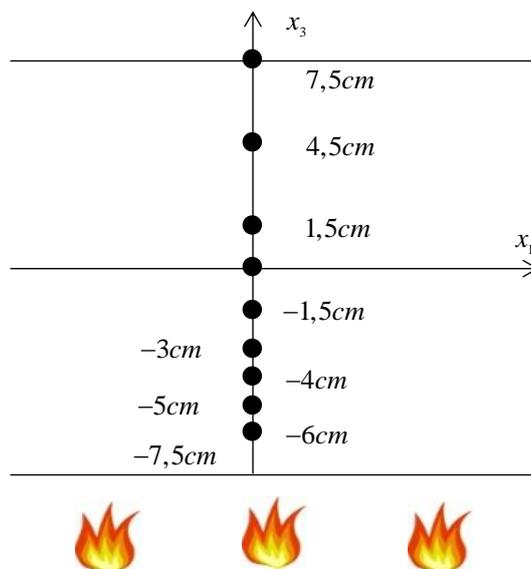


Figure 3.16. Position des thermocouples dans l'épaisseur du mur

### 3.5.2. Mesure de la température

Grâce au système de contrôle des brûleurs, on peut constater sur la figure 3.17, que la montée en température du four (ligne bleue) a globalement bien reproduit la courbe ISO 934(EN1992-1-1,2003) (ligne rouge) pendant 90 min.

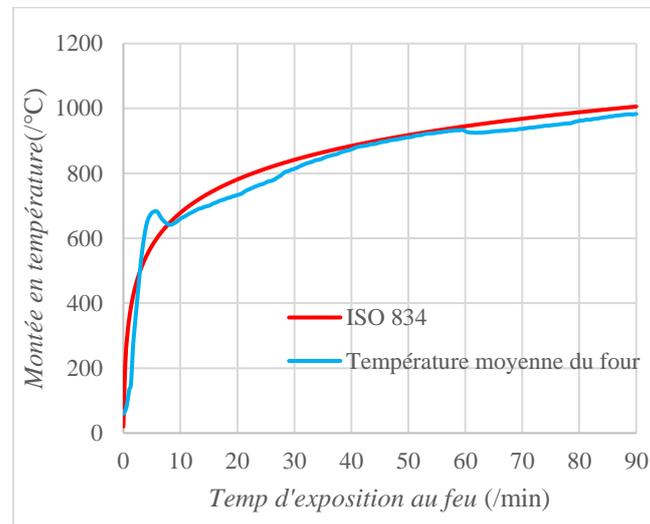


Figure 3.17. Montée en température du four « Vulcain » (ligne bleue) et courbe ISO 834 (ligne rouge)

Cette montée en température du four conduit à une élévation de la température à travers la section du mur. Cependant, la température en différents points n'est pas identique pour la même profondeur à un instant donné. En effet, on peut constater que les thermocouples situés aux points T1 à T8 donnent des profils de température assez différents au bout de 90 min (voir le tableau 3.3). Cela peut être expliqué, d'une part par la non-homogénéité des propriétés thermiques du béton, d'autre part par l'incertitude sur la position précise des thermocouples, susceptibles d'avoir été déplacés pendant le coulage du béton.

Position	Température (°C)									
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	Moyenne	Maximum
$x_3$ (/cm)										
-7,5	1001	1001	1001	1001	1001	1001	1001	1001	1001	1001
-6	569	556	X*	X*	437	381	495	X*	491	569
-5	515	X*	344	504	391	350	447	492	408	515
-4	401	375	250	396	327	312	379	415	335	415
-3	339	302	211	278	235	212	241	305	254	339
-1,5	298	130	162	199	162	175	183	217	196	298
0	192	113	123	135	121	124	126	194	137	194
1,5	138	73	117	118	111	113	113	146	117	146
4,5	74	43	81	79	72	73	82	87	78	87
7,5	39	X*	55	47	45	45	34	54	45	55

Tableau 3.3. Température mesurée à travers la section du mur à différentes profondeurs au bout de 90 mins (X\* : les données ne sont pas disponibles)

Nous avons choisi de prendre la *moyenne* et le *maximum* des températures mesurées à chaque profondeur comme chargement thermique pour calculer la déformée d'origine thermique. La figure 3.18 montre le profil de la température moyenne (ligne avec marqueurs triangulaires) et celui de la température maximale (ligne avec marqueurs carrés) à 90 min. La ligne rouge représente la température calculée avec le logiciel *Safir* (Franssen et Gernay, 2017). Dans ce calcul, le gradient thermique est obtenu par la résolution d'un problème de transfert de chaleur unidimensionnel dans un block du béton, dont les caractéristiques (conductivité, chaleur spécifique, masse volumique) sont issues de l'Eurocode (EN 1992-1-2, 2005). On peut constater que la moyenne du profil de température mesurée par les thermocouples est moins élevée que celui donnée par *Safir* tandis que le maximum du profil de température ne dépasse celui donné par *Safir* que pour les couches proches de la surface moyenne du mur ( $x_3 = 0$ ).

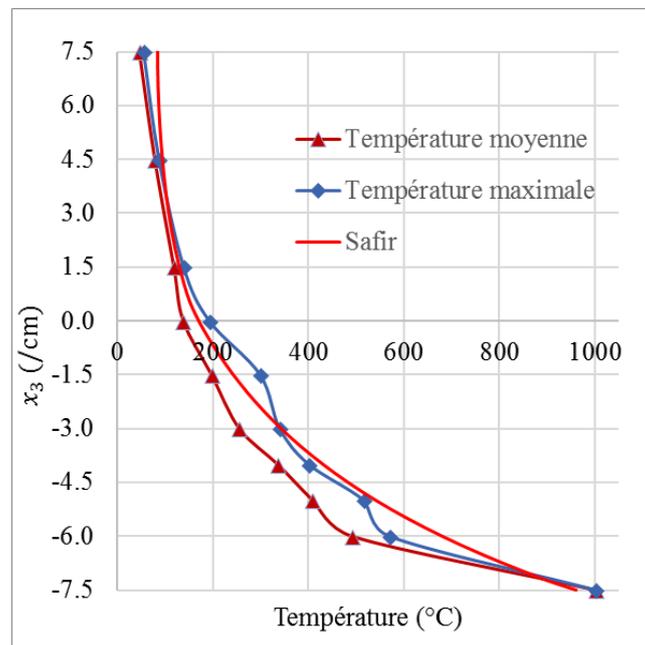


Figure 3.18. Moyenne du profil de la température (à gauche) et le maximum du profil de température (à droite) en 90 mins

### 3.5.3. Confrontation de la déformée calculée avec la déformée mesurée

La figure 3.19 montre une comparaison entre la déformée d'origine thermique du mur au plan de symétrie vertical prédite par le modèle de plaques de *von Karman* (ligne rouge), celle prédite par le modèle de plaques de *Kirchhoff-Love* (ligne verte) ainsi que celle mesurée pendant l'essai expérimental au bout d'un temps d'exposition de 90 min. La déformée mesurée a été obtenue à la fois par les capteurs (triangles) de déplacement transversal et par le traitement d'image (étoiles) à partir des enregistrements faits par les caméras. Pour les deux modèles, les déplacements transversaux calculés avec un profil de température moyen (resp. maximal) sont tous inférieurs (resp. supérieurs) à ceux mesurés pendant l'essai expérimental, ce qui montre la forte influence du gradient thermique sur la déformée des murs.

Le tableau 3.4 récapitule les déplacements maximaux calculés par les deux modèles de plaques utilisant différents profils de la température ( $T^{\text{moyenne}}$  : gradient thermique moyen;  $T^{\text{max}}$  :

gradient thermique maximal). La déformée mesurée par le traitement d'image (ligne bleue étoilée) donne un déplacement maximal de 35cm tandis que le déplacement transversal à mi-hauteur mesurés par les capteurs (marqueur triangulaire) est de 33cm.

Nous avons supposé, dans la modélisation par plaque de *von Karman*, que le profil de température était uniforme sur toute la surface du mur. Dans la pratique, un tel chargement thermique est difficile à reproduire expérimentalement, comme cela est montré par le tableau 3.3 où le profil de température varie d'un point à l'autre. Cette simplification du profil de température non homogène sur toute la surface du mur à un chargement thermique homogène pourrait conduire à la différence entre la déformée calculée et celle mesurée. Sachant qu'une déformée plus importante est plus défavorable du point de vue de l'analyse de stabilité du mur au sens du calcul à la rupture, on se place alors du côté de la sécurité en utilisant le profil de température maximal pour calculer la déformée d'origine thermique.

Gradient thermique	$T^{moyenne}$		$T^{max}$	
	<i>Kirchhoff-Love</i>	<i>von Karman</i>	<i>Kirchhoff-Love</i>	<i>von Karman</i>
Déplacement maximal	29cm	31cm	39cm	42cm
Écart / traitement d'image	-17%	-11%	11%	20%

Tableau 3.4. Déplacement maximal calculé respectivement par le modèle de plaque de *Kirchhoff-Love* et par le modèle de plaque de *von Karman*

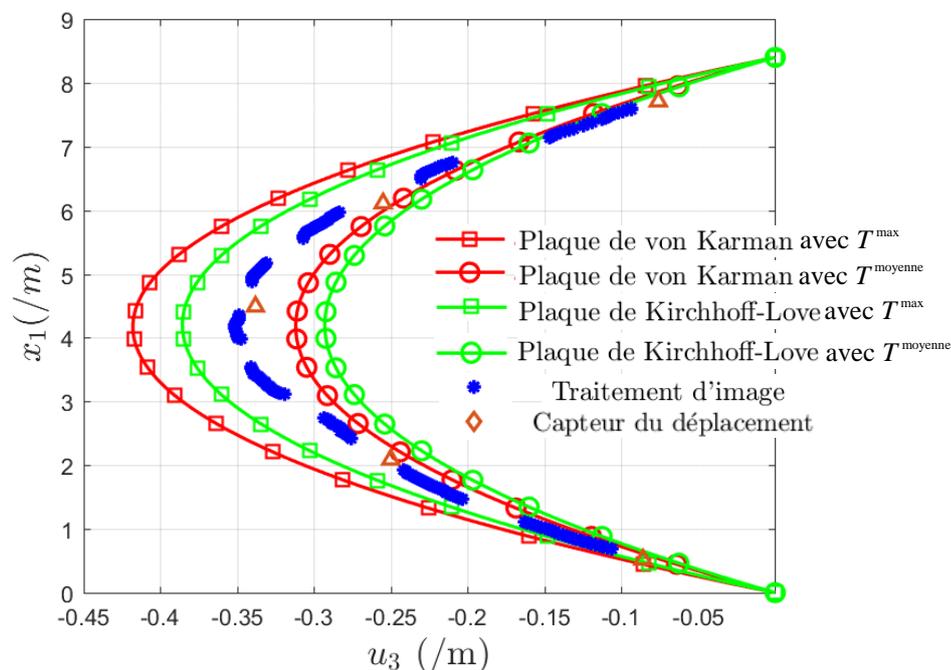


Figure 3.19. Vue en coupe de la déformée au plan de symétrie vertical du mur (ligne bleue étoilée : déformée obtenue par le traitement d'image ; ligne avec marqueurs carrés : déformée calculée avec le profil de température moyenne ; ligne avec cercles : déformée calculée avec le profil de température maximale )

### 3.6. Conclusions

Ce chapitre s'est intéressé à l'étude de l'influence de la prise en compte du poids propre sur la déformée d'origine thermique d'un mur coupe-feu, en recourant à une modélisation de ce mur par une plaque de *von Karman*.

Pour cela, nous avons d'abord rappelé la cinématique et les équations d'équilibre en intégrant le poids propre classiquement négligé dans le modèle de plaques de *von Karman*, ce qui permet d'établir les « équations de *von Karman* » avec un terme relatif au poids propre. Ensuite, le couple solution des deux équations couplées est recherché sous forme semi-analytique en utilisant la méthode de *Galerkin* pour deux types de configurations de plaques : celle où la plaque est libre sur ses bords latéraux et simplement appuyée en tête et en pied, ainsi que celle où la plaque est simplement appuyée sur ses quatre bords. La solution en déplacement transversal ainsi obtenue permet de mettre en évidence de l'effet «*P* - $\delta$  » du au poids propre. Enfin, nous avons essayé de valider la déformée prédite par les deux modèles de plaque par sa confrontation avec la déformée mesurée sur une expérimentation à échelle réelle.

Ces solutions semi-analytiques ont permis de calculer très rapidement (moins d'une seconde) la déformée d'origine thermique avec prise en compte du poids propre dans la modélisation. Pourtant, ce type de solution nécessite une fonction de forme valable sur toute la géométrie de la structure, ce qui est plus difficile à obtenir pour une géométrie complexe (par ex. murs avec les joints). Dans ce cas, la méthode des éléments finis est plus adaptée. La confrontation de la déformée prédite par les solutions semi-analytiques avec celle mesurée dans l'essai expérimental montre un écart significatif entre les deux. Cela pourrait être expliqué par le fait que le chargement thermique est non homogène sur toute la surface du mur, ce qui n'est pas prise en compte dans la modélisation.

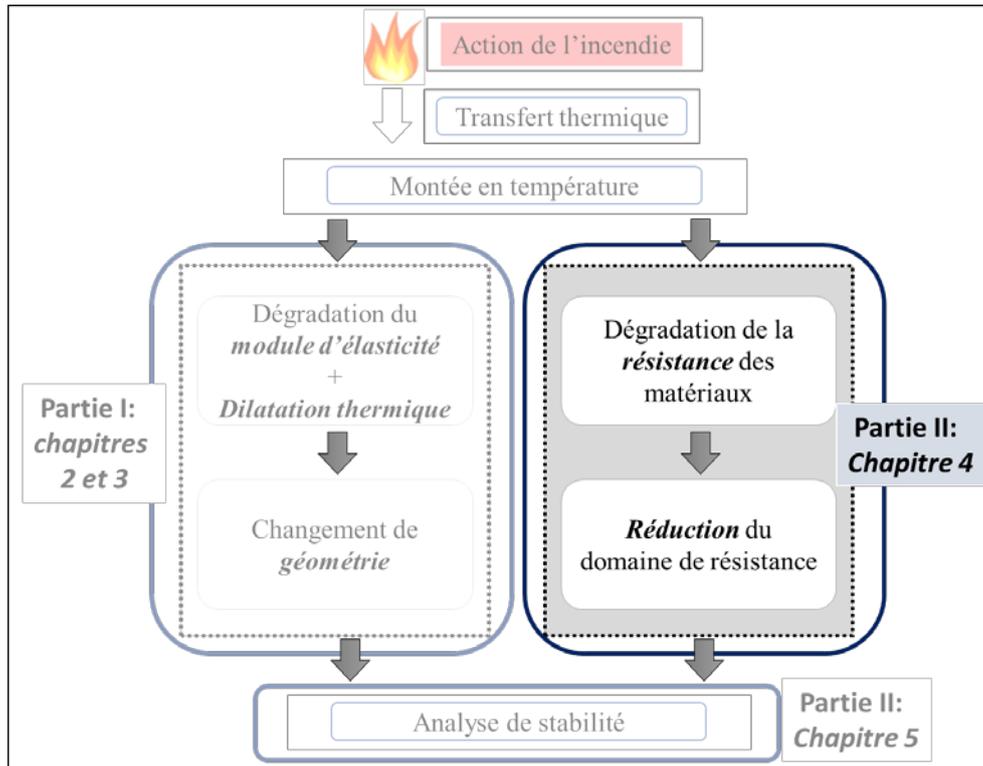
Enfin, afin de pouvoir dimensionner à la rupture des murs soumis à l'action combinée d'un chargement thermique et du poids propre, il convient maintenant de compléter le calcul de la déformée des murs obtenus dans ce chapitre, par la mise en œuvre de l'outil calcul à la rupture, qui sera l'objet des chapitres suivants.

## **Partie II**

**Calcul à la rupture des murs en béton armé modélisés  
comme une plaque mince**

# Chapitre 4

## Domaine de résistance des plaques à haute température



Positionnement du chapitre 4 par rapport au plan général

L'objectif de ce chapitre est de déterminer par une technique de changement d'échelle le critère de résistance de plaques minces portant sur les efforts généralisés et d'en déduire la réduction de résistance de ces plaques qui découle de leur exposition au feu. Un tel critère *macroscopique* doit être préalablement défini avant d'être mis en œuvre par les approches du calcul à la rupture. On rappelle en introduction les travaux antérieurs portant sur l'homogénéisation de plaques hétérogènes périodiques en calcul à la rupture (Pham, 2014; Bleyer et de Buhan, 2016). On introduit ensuite le problème auxiliaire défini sur une cellule de base caractérisant la périodicité d'une plaque en béton armé, et dont la résolution permet la détermination d'un tel critère de résistance macroscopique, qui n'est que la généralisation au cas d'une plaque bidimensionnelle de la notion de diagramme d'interaction pour une poutre. En s'appuyant sur des données de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) concernant l'effet de l'élévation de température sur la réduction des capacités de résistance locale du béton et l'acier, le critère macroscopique est alors évalué par un encadrement obtenu par le calcul de bornes supérieure et inférieure. Une étude est enfin conduite sur l'évolution du domaine de résistance macroscopique ainsi obtenu, en fonction d'un certain nombre de paramètres.

## 4.1. Introduction

Le calcul de la déformée présenté aux chapitres précédents repose sur des modèles de plaques *thermoélastiques*. Il convient de rappeler que ces déformées thermoélastiques ne doivent pas être confondues avec les cinématiques de rupture des murs. Elles fournissent en revanche les données relatives à la géométrie des murs en conditions d'incendie, qui seront nécessaires à la mise en œuvre des approches du calcul à la rupture permettant d'analyser la stabilité des murs vis-à-vis de leur poids propre en condition d'incendie.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer le domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  des murs en béton armé, qui est indispensable pour le calcul à la rupture. Dans le cas où les plaques ont une microstructure périodique, ce domaine de résistance macroscopique peut être obtenu par la résolution d'un problème auxiliaire d'homogénéisation défini sur une cellule de base notée  $\mathbf{A}$ . Selon Caillerie (1984), deux situations peuvent être distinguées, dans l'homogénéisation des plaques ayant une microstructure périodique, en fonction du rapport  $h/a$  de l'épaisseur de la plaque à la taille de la cellule de base (voir figure 4.1) :

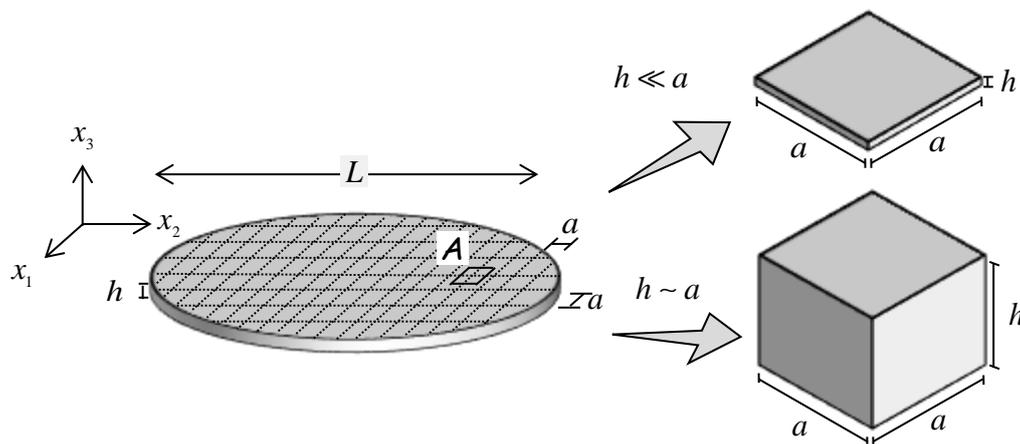


Figure 4.1. Plaques avec une microstructure périodique (à gauche) et deux types de cellule de base

- ✓  $h/a \ll 1$ , la cellule de base peut être modélisée comme un élément de plaque bidimensionnelle. On rencontre cette situation dans les travaux de Bleyer (2014 (a) et (b)), où le domaine de résistance macroscopique en flexion  $\mathcal{G}(\underline{M})$  des plaques minces a été déterminé à partir de la connaissance d'un critère de résistance en flexion local de la plaque hétérogène.
- ✓  $h/a \sim 1$ , la cellule de base ne peut plus être modélisée comme un élément de plaque bidimensionnel, mais doit être modélisée comme un milieu *tridimensionnel*. C'est ce dernier cas qui sera considéré par la suite puisqu'il correspond parfaitement à la situation de murs en béton armé où l'espacement des armatures est proche de l'épaisseur de la plaque.

Pour une telle cellule de base tridimensionnelle (représentée plus loin à la figure 4.2), le domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  défini dans l'espace  $(\underline{N}, \underline{M})$  peut être déterminé soit par la résolution de problèmes d'évolution élastoplastique (Bourgeois *et al*, 1998), soit

directement par la résolution d'un problème d'analyse limite (Dallot et Sab, 2008) pour les matériaux élastiques parfaitement plastiques ou de calcul à la rupture (Sab, 2003 ; Bleyer *et al.*, 2015(a)) pour des matériaux possédant une ductilité suffisante. Cette dernière approche, qui repose sur un raisonnement de compatibilité entre la vérification de *l'équilibre* et celle de *la résistance locale* des matériaux constitutifs, permet d'encadrer le domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  par une borne *inférieure*  $\mathcal{G}^{stat}$  donnée par l'approche *statique* par l'intérieur, ainsi que par une borne *supérieure*  $\mathcal{G}^{cin}$  donnée par l'approche *cinématique* par l'extérieur. Nous avons choisi ici l'approche du calcul à la rupture pour déterminer  $\mathcal{G}$ , en raison du fait que cette approche est bien plus rapide en termes de temps de calcul, notamment grâce à la formulation des critères de résistance locaux dans le cadre de la programmation conique du second ordre (Bisbos, 2007 ; Le *et al.*, 2010 ; Makrodimopoulos, 2010), ainsi que le développement récent des solveurs d'optimisation non-linéaire performants (MOSEK, 2014).

La détermination du domaine  $\mathcal{G}$  repose sur donc la transformation du problème du calcul à la rupture défini sur la cellule de base en un problème de programmation conique du second ordre (SOCP<sup>1</sup>). L'approche statique a ainsi été déjà mise en œuvre dans le travail de Bleyer *et al.* (2015(c)), où la cellule de base a été discrétisée en éléments finis tétraédriques avec un état de contrainte tridimensionnel en tout point de ces éléments. L'influence de l'élévation de la température associée à l'incendie sur la réduction du domaine de résistance macroscopique, tracé dans le plan  $N_{11} - M_{11}$  a pu alors être étudiée. Une autre méthode de mise en œuvre de l'approche statique consiste à adopter une discrétisation par couches avec un état de contrainte plan dans chacune d'elles (Bleyer et de Buhan, 2016), ce qui se révèle plus intéressant du point de vue du temps de calcul et de la complexité de la discrétisation. L'approche cinématique a été également appliquée dans ce même travail, où le domaine de résistance macroscopique d'une plaque mince est déterminé dans le cas particulier d'une plaque homogène.

L'approche que nous avons choisie pour déterminer le domaine de résistance macroscopique est donc fondée sur la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture appliquée à une cellule de base tridimensionnelle soumise à un mode de chargement correspondant à l'application d'efforts membranaires et de flexion. Pour que les évaluations obtenues par l'approche cinématique et statique conservent bien leur statut rigoureux de *bornes*, une modification sera faite par rapport au travail de Bleyer et de Buhan (2016), permettant de prendre en compte l'influence de la température sur les propriétés de résistance du béton et de l'acier.

Ce chapitre est organisé comme suit. On rappelle tout d'abord le problème auxiliaire de calcul à la rupture relatif à la cellule de base (Pham, 2014 ; Bleyer, 2015(a)) ainsi que la définition générale du domaine de résistance macroscopique d'une plaque hétérogène périodique, définition qui est ensuite appliquée au béton armé ayant des propriétés de résistance dépendant de la température. Le domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  ainsi défini sera encadré par les bornes *inférieure*  $\mathcal{G}^{stat}$  et *supérieure*  $\mathcal{G}^{cin}$ , qui sont obtenues comme solutions de problèmes de programmation conique du second ordre à travers la discrétisation de la cellule en éléments finis. Enfin, quelques études numériques seront réalisées permettant de bien

---

<sup>1</sup> Second Order Cone Programming

appréhender l'influence quantitative de l'action d'un feu sur le domaine de résistance macroscopique d'une plaque en béton armé.

## 4.2. Domaine de résistance d'une plaque hétérogène périodique

S'appuyant sur la notion de cellule de base, on présente dans cette section la définition générale du domaine de résistance d'une plaque hétérogène périodique à partir de la résolution d'un problème auxiliaire du calcul à la rupture posé sur cette cellule de base.

### 4.2.1. Notion de cellule de base

Considérons une plaque en béton armée par un ferrailage se reproduisant périodiquement dans le plan  $x_1-x_2$  (voir figure 4.2(a)) selon un maillage carré de côté  $a$ . Du fait que le béton et l'acier ont chacun un critère de résistance différent à température ambiante et à haute température, il est nécessaire de déterminer le critère de résistance macroscopique à partir de leurs critères de résistance locaux. Dans le cas où la longueur de périodicité (espacement) du ferrailage est faible devant la dimension de la plaque  $a \ll L$ , on peut assimiler ce milieu hétérogène à une plaque *homogène équivalente* avec un critère de résistance *macroscopique* exprimé en termes d'efforts généralisés (voir figure 4.2(b)).

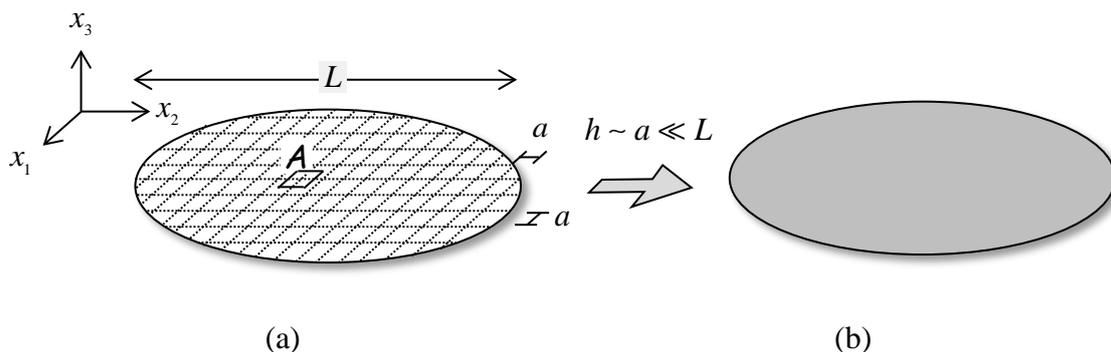


Figure 4.2. Homogénéisation d'une plaque en béton armé : plaque avec renforts périodiques (à gauche) et plaque homogène équivalente (à droite)

La détermination d'un tel critère de résistance macroscopique repose sur la méthode d'homogénéisation appliquée à une *cellule de base*  $A$  (voir figure 4.3), qui peut être vu comme un volume élémentaire contenant toute les informations relatives à la plaque.

Cette *cellule de base*  $A$  occupe le domaine  $A = Y \times [-h/2, +h/2]$ , où  $Y = [0, a] \times [0, a]$  est un carré, dans l'espace repéré par le trièdre orthonormé  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Les surfaces  $S^\pm = Y \times [\pm h/2]$  et  $S_l = \partial Y \times [-h/2, +h/2]$  sont respectivement les faces supérieure et inférieure et la surface latérale de la cellule de base. Les aciers sont orientés selon deux directions orthogonales ( $e_1$  et  $e_2$ ) et situés en  $\xi_3 = \zeta_\alpha^+$  pour la nappe supérieure et en  $\xi_3 = \zeta_\alpha^-$  pour la nappe inférieure ( $\alpha=1,2$ ).

La plaque peut être ainsi considérée comme un milieu *périodique* tridimensionnel formé par l'assemblage des cellules de base  $A$ . Le critère de résistance en tout point de la cellule de base vérifie la condition de *périodicité* bidimensionnelle suivante :

$$\forall \underline{\xi}, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z} : G(\underline{\xi} + m_1 a \underline{e}_1 + m_2 a \underline{e}_2) = G(\underline{\xi}) \quad (4.1)$$

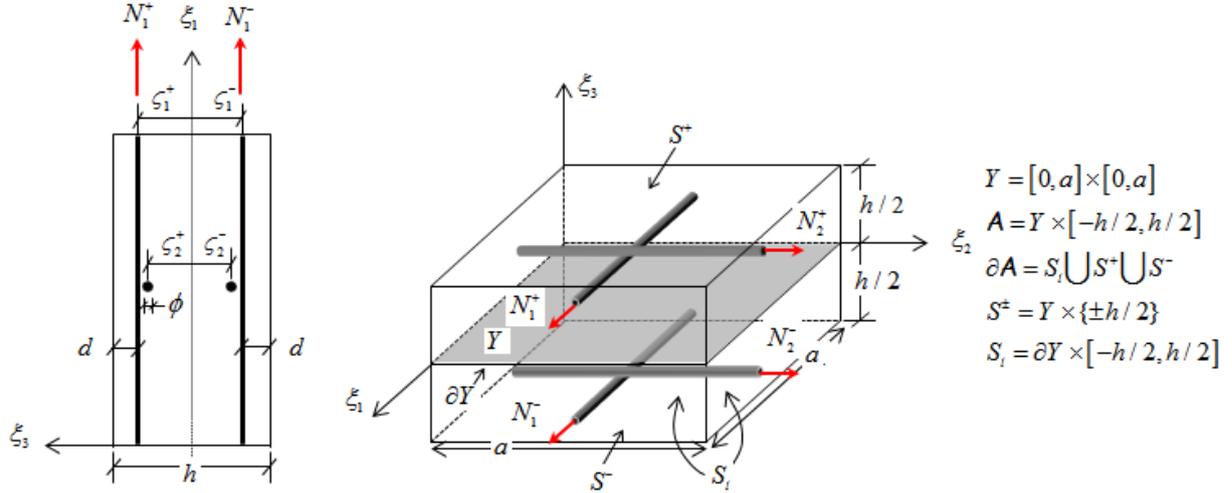


Figure 4.3. Cellule de base d'une plaque en béton armé

de sorte que le domaine de résistance de la plaque en un point donné  $G(\underline{x})$  est relié à celui en tout point de la cellule de base  $G(\underline{\xi})$  par la relation suivante :

$$G(\underline{x}) = G(\underline{\xi}) \text{ avec } \underline{x} = \underline{\xi} + m_1 a \underline{e}_1 + m_2 a \underline{e}_2 \quad (4.2)$$

#### 4.2.2. Définition générale du critère macroscopique de plaques

Le domaine de résistance macroscopique est défini à l'aide d'un problème auxiliaire du calcul à la rupture sur cette cellule de base. Pour cela, on définit tout d'abord l'ensemble des champs de vitesses *virtuelles*  $\hat{U}$  *cinématiquement admissibles* (C.A.) avec le couple des taux de déformations *membranaires* et de *courbures*  $(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  sur la cellule de base par<sup>2</sup> :

$$\hat{U}(\underline{\xi}) \text{ C.A. avec } (\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}}) \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{U}(\underline{\xi}) = \hat{\underline{\underline{F}}}_\alpha \underline{\xi}_\alpha - \underline{\xi}_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}_3 \underline{\xi}_3 + 1/2 (\hat{\underline{\underline{\chi}}}_\alpha \hat{\underline{\underline{\chi}}}_\alpha) \underline{e}_3 + \hat{v}(\underline{\xi}) \\ \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} = (\hat{\underline{\underline{F}}} + {}^T \hat{\underline{\underline{F}}}) / 2, \hat{\underline{\underline{F}}} = \hat{F}_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \\ \hat{\underline{\underline{\chi}}} = \hat{\chi}_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \text{ avec } \hat{\chi}_{\alpha\beta} = \hat{\chi}_{\beta\alpha} \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\hat{v}(\underline{\xi})$  est la *fluctuation périodique* du champ de vitesse sur  $S_1$  :

$$\forall \underline{\xi}^+ = \underline{\xi}^- + a \underline{e}_\alpha : \hat{v}(\underline{\xi}^+) = \hat{v}(\underline{\xi}^-) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.4)$$

<sup>2</sup> Les définitions qui suivent relatives aux champs de vitesses et de contraintes admissibles sont analogues à celles déjà introduites à l'Annexe A pour déterminer la loi de comportement thermoélastique de la plaque

Un tel champ de vitesse peut comporter des surfaces de discontinuités, notées  $\Sigma_{\hat{U}}$ , avec un saut de la vitesse désigné par  $\left[ \hat{U}(\underline{\xi}) \right]$  égal à celui de la fluctuation périodique  $\left[ \hat{v}(\underline{\xi}) \right]$  :

$$\text{sur } \Sigma_{\hat{U}} = \Sigma_{\hat{v}} : \left[ \hat{U}(\underline{\xi}) \right] = \left[ \hat{v}(\underline{\xi}) \right] \quad (4.5)$$

Par ailleurs, on introduit l'ensemble des champs de contrainte *statiquement admissibles* avec le couple des tenseurs d'efforts membranaires et de moments de flexion, défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A.} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \underline{\xi} \in \mathbf{A} : \text{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) = 0, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n} \text{ continu,} \\ \underline{T}(\underline{\xi}^+) = -\underline{T}(\underline{\xi}^-) \text{ sur } S_l \quad (\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}), \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e}_3) = 0 \text{ sur } S^\pm. \end{cases} \quad (4.6)$$

Enfin, en vertu du *Principe des Puissances virtuelles*, la puissance des efforts extérieurs est égale à la puissance de déformation pour tous les champs de vitesse cinématiquement admissibles et tous les champs de contrainte statiquement admissibles :

$$\begin{aligned} & \forall \hat{U}(\underline{\xi}) \text{ C.A. avec } (\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}}), \forall \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A.} \\ P_e(\hat{U}) &= \int_{\mathbf{A}} \underline{\underline{\sigma}} : d(\hat{U}) d\mathbf{A} + \int_{\Sigma_{\hat{U}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \left[ \hat{U} \right] d\Sigma_{\hat{U}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Compte tenu de l'expression du taux de déformation  $d(\hat{U})$ , donné par :

$$d(\hat{U}) = \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}} + d(\hat{v}(\underline{\xi})) \text{ avec } \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} = \left( \hat{\underline{F}} + {}^T \hat{\underline{F}} \right) / 2 \quad (4.8)$$

il vient alors :

$$P_e(\hat{U}) = \int_{\mathbf{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \left( \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}} \right) d\mathbf{A} + \int_{\mathbf{A}} \underline{\underline{\sigma}} : d(\hat{v}(\underline{\xi})) d\mathbf{A} + \int_{\Sigma_{\hat{v}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \left[ \hat{v} \right] d\Sigma_{\hat{v}} \quad (4.9)$$

En vertu du théorème de la divergence, la somme des deux derniers termes de (4.9) est nulle du fait que le vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}$  et la fluctuation  $\hat{v}(\underline{\xi})$  sont respectivement *antipériodique* et *périodique* sur  $S_l$  et que le vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \cdot \underline{e}_3 = 0$  est nul sur  $S^\pm$  :

$$\int_{\mathbf{A}} \underline{\underline{\sigma}} : d(\hat{v}(\underline{\xi})) d\mathbf{A} + \int_{\Sigma_{\hat{v}}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \left[ \hat{v} \right] d\Sigma_{\hat{v}} = \int_{\partial \mathbf{A} = S_l \cup S^\pm} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \hat{v}(\underline{\xi}) d\mathbf{A} - \int_{\mathbf{A}} \overbrace{\text{div} \underline{\underline{\sigma}}} = 0 \cdot \hat{v}(\underline{\xi}) d\mathbf{A} = 0 \quad (4.10)$$

La puissance des efforts extérieurs se met finalement sous la forme<sup>3</sup> :

<sup>3</sup> Cette forme vérifie la condition de macro-homogénéité de *Hill-Mandel* :  $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{d} \rangle = \underline{N} : \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{M} : \hat{\underline{\underline{\chi}}}$  où  $\langle \bullet \rangle = 1/a^2 \int_{\mathbf{A}} (\bullet) d\mathbf{A}$  est la moyenne dans la cellule de base  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{aligned} \forall \widehat{\underline{U}}(\underline{\xi}) \text{ C.A. avec } (\widehat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \widehat{\underline{\underline{\chi}}}), \forall \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A.} \\ P_e(\widehat{\underline{U}}) = a^2 (\underline{\underline{N}} : \widehat{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{\underline{M}} : \widehat{\underline{\underline{\chi}}}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

faisant ainsi apparaître les *efforts généralisés* définis par :

$$\underline{\underline{N}} = \frac{1}{a^2} \int_{\mathcal{A}} \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\mathcal{A}, \quad \underline{\underline{M}} = \frac{1}{a^2} \int_{\mathcal{A}} -\xi_3 \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\mathcal{A} \quad (4.12)$$

Il s'agit des 6 *paramètres de chargement* de la cellule de base. Le domaine de résistance macroscopique de la plaque en béton armé est donc constitué de tous les couples d'efforts membranaires et de moments  $(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}})$  tels qu'il soit possible de mettre en évidence sur la cellule de base un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  S.A équilibrant  $(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}})$  (*conditions d'équilibre*) et vérifiant le critère de résistance en tout point de la cellule (*conditions de résistance*). Soit :

$$(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \text{ S.A. avec } (\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) \in G(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (4.13)$$

Dans le cas où les propriétés de résistance des matériaux constituants sont homogènes dans le plan  $\xi_1$ - $\xi_2$  de la plaque  $G(\underline{\xi}) = G(\xi_3)$ , on peut montrer que ce domaine de résistance  $\mathcal{G}$  peut être obtenu à partir de champs de *contrainte plane*  $\underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3)$  vérifiant automatiquement l'équation (4.6) et dépendant seulement l'ordonnée  $\xi_3$  (Save *et al.*, 1997 ; Dallot et Sab, 2008, Bleyer, 2016)<sup>o</sup>:

$$(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) = \sigma_{\alpha\beta}(\xi_3) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \in G(\xi_3), (\alpha, \beta = 1, 2) \\ \underline{\underline{N}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) \, d\xi_3 \\ \underline{\underline{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} (-\xi_3) \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) \, d\xi_3 \end{cases} \quad (4.14)$$

### 4.3. Domaine de résistance d'une plaque en béton armé soumise à un gradient de température

On présente ensuite l'application de la définition générale (4.13) de  $\mathcal{G}$  au cas d'une plaque en béton armé soumise à un gradient thermique pour laquelle le critère local  $G(\underline{\xi})$  représente la résistance du béton et de l'acier à température élevée.

#### 4.3.1. Influence de la haute température sur la résistance du béton et de l'acier

En condition d'incendie, le feu induit une élévation de température à travers l'épaisseur de murs qui conduit, d'une part à la détérioration des propriétés mécaniques (module d'élasticité

et résistance) des matériaux et d'autre part aux dilatations thermiques qu'il engendre. En raison de l'incompatibilité géométrique des déformations thermiques, un champ de contraintes auto-équilibrées est ainsi engendré. Cependant, cet état initial due à l'action thermique du feu n'a aucune influence sur les *charges limites* de la structure conformément aux résultats relatifs aux problèmes d'évolution élastoplastique, comme cela est démontré dans de Buhan (2007) ou Salençon (2013)

Il en résulte que seule la connaissance de la dégradation des propriétés de résistance est nécessaire à la détermination du domaine de résistance macroscopique par le calcul à la rupture. Cet effet de température peut être pris en compte par l'introduction de facteurs de réduction  $k_c(T)$ ,  $k_t(T)$  et  $k_s(T)$  dépendant de la température  $T(\xi)$ . Considérant une action thermique du feu supposée homogène sur la face exposée au feu  $\xi_3 = -h/2$ , la température  $T(\xi)$  dans la plaque qui en résulte n'est fonction que de l'ordonnée  $\xi_3$  (figure 4.4(a)), de sorte que la dégradation des propriétés de résistance du béton ne dépend également que de  $\xi_3$  et les caractéristiques de résistance de l'acier et du béton sont données par :

$$f_c(\xi_3) = k_c(T(\xi_3))f_c, \quad f_t(\xi_3) = k_t(T(\xi_3))f_t, \quad f_s(\xi_3) = k_s(T(\xi_3))f_s \quad (4.15)$$

où  $f_c$  et  $f_t$  sont respectivement la résistance maximale du béton en compression et en traction *uniaxiales*, tandis que  $f_s$  est la résistance maximale de l'acier en traction-compression *uniaxiales* à température *ambiante*. Ces facteurs de réduction  $k_c$ ,  $k_t$  et  $k_s$  sont égaux à 1 à température ambiante et diminuent en fonction de l'élévation de la température selon des courbes données par l'Eurocode 2 (EN 1992-1-2, 2004) et représentées sur la figure 4.4(b).

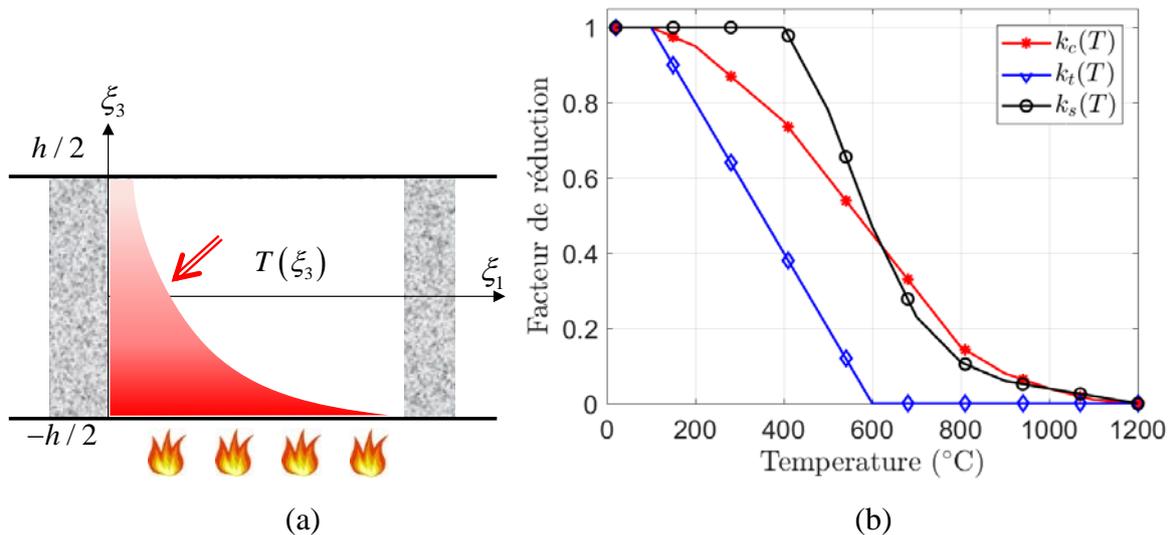


Figure 4.4. Évolution des facteurs de réduction en fonction de la température

Ces courbes, provenant de la synthèse de données expérimentales, montrent que la résistance en traction simple du béton s'annule à partir de 600°C, tandis que sa résistance en compression simple décroît plus progressivement à partir de 100°C. La résistance de l'acier constituant les armatures, à peu près constante jusqu'à 400°C, diminue très rapidement au-delà pour pratiquement s'annuler à partir de 1000°C.

### 4.3.2. Expression des critères de résistance des constituants du béton armé

Le critère de résistance local que nous allons considérer pour le béton est le critère de *Mohr-Coulomb tronqué en traction* (Nielsen et Hoang, 2011), défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\xi_3) \in G^b(\xi_3) \Leftrightarrow F(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup \{ K_p \sigma_M - \sigma_m - f_c(\xi_3); \sigma_M - f_t(\xi_3) \} \leq 0 \quad (4.16)$$

où  $\sigma_M$  et  $\sigma_m$  représentent respectivement la contrainte principale majeure et la contrainte principale mineure de la contrainte.  $K_p = \tan^2(\varphi + 45^\circ)$  est une quantité sans dimension fonction de l'angle de frottement interne  $\varphi$  (figure 4.5(a), où la courbe intrinsèque du critère est représentée) du béton qui, en l'absence d'évaluation plus précise, est conventionnellement pris égal à  $37^\circ$  (d'où  $K_p \approx 4,0$ ). A température élevée, l'angle de frottement interne est supposé constant, tandis que les résistances du béton  $f_c(T)$  et  $f_t(T)$  diminuent en vertu de la relation (4.15) (figure 4.5(b)).

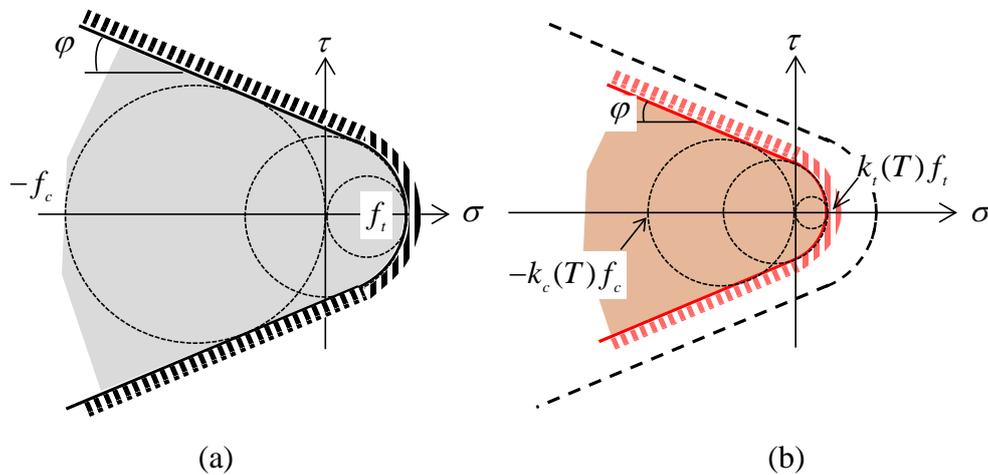


Figure 4.5. Représentation géométrique du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction dans le plan de Mohr (à gauche, critère à température ambiante ; à droite : critère à haute température)

Dans le cas particulier où l'état de contrainte est *plan* et où on l'on considère que la résistance en traction du béton est *nulle* ( $f_t=0$ ), le domaine de résistance du béton est représenté par un carré dans l'espace des contraintes principales. On remarque que l'élévation de la température conduit à un domaine plus petit (figure 4.6(b)) que celui à température ambiante (4.6(a)).

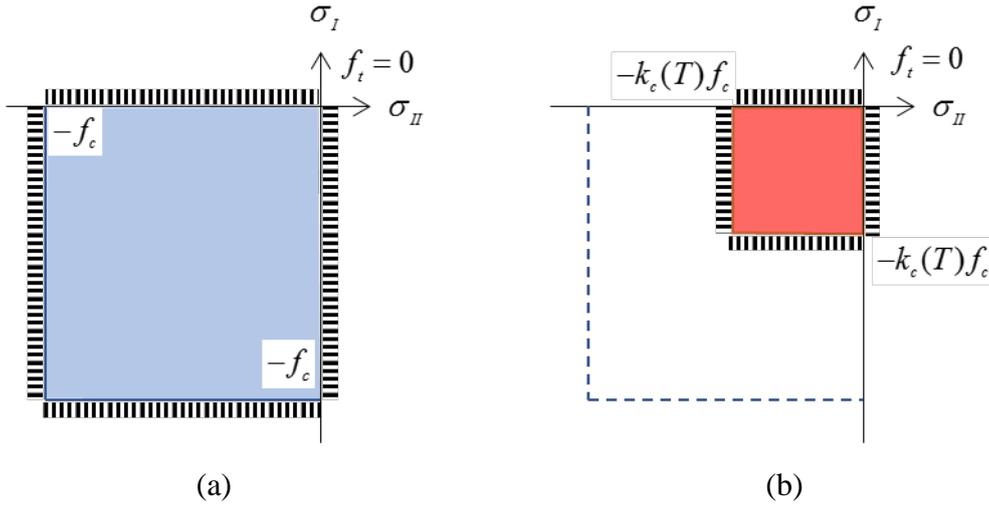


Figure 4.6. Représentation géométrique du domaine de résistance du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction (nulle) dans le plan des contraintes principales, la troisième étant nulle (à gauche : à température ambiante ; à droite : à température élevée)

Dans ces conditions, le critère de résistance local du béton  $G^b(\xi_3)$  est donc défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\xi_3) \in G^b(\xi_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{11}\sigma_{22} \geq \sigma_{12}^2 \\ (\sigma_{11} + k_c(T)f_c)(\sigma_{22} + k_c(T)f_c) \geq \sigma_{12}^2 \text{ avec } T = T(\xi_3) \\ -k_c(T)f_c \leq \sigma_{11}, \sigma_{22} \leq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Il convient de remarquer que, dans le cas particulier où la résistance en traction du béton est nulle, le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction donné par (4.17), est identique au critère de Rankine qui stipule que les contraintes principales doivent rester comprises entre  $-f_c$  et 0.

En ce qui concerne l'acier, pour un ferrailage par des renforts en acier de section  $A_s$  et dont le matériau possède une résistance maximale  $f_s$  à la traction et en compression avec un espacement  $a$ , l'effort dans chaque armature  $N_\alpha^\pm$  doit vérifier la relation suivante :

$$|N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm(\zeta_\alpha^\pm) = \frac{k_s(T(\zeta_\alpha^\pm))A_s f_s}{a} \quad (4.18)$$

où  $N_{0\alpha}^\pm(\zeta_\alpha^\pm)$  est l'effort axial maximal (par unité de longueur) de l'armature portée à la température  $T(\zeta_\alpha^\pm)$  et située à la position  $\xi_3 = \zeta_\alpha^\pm$ .

### 4.3.3. Critère de résistance macroscopique à haute température

#### 4.3.2.1. Béton sans renfort

Le béton étant modélisé comme une matrice tridimensionnelle, les champs de contraintes explorés dans l'approche calcul à la rupture sont constitués de champs de contrainte de Cauchy dans le béton. Le critère de résistance du béton  $G^b(\xi_3)$  ne dépendant que de  $\xi_3$ , on peut alors montrer que le domaine de résistance macroscopique peut être obtenu en se restreignant, à des champs de contraintes planes parallèlement à la plaque et ne dépendant que de la coordonnée

transversale  $\xi_3$ , ce qui en assure automatiquement le caractère *statiquement admissible* au sens de (4.6).

Introduisant le critère de résistance du béton  $G^b(\xi_3)$  dans la définition générale (4.14), il en résulte que la définition du domaine de résistance macroscopique de la plaque en béton sans renfort  $\mathcal{G}_b$  se simplifie en :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) = \sigma_{\alpha\beta}(\xi_3) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \in G^b(\xi_3), (\alpha, \beta = 1, 2) \\ \underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) d\xi_3 \\ \underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} (-\xi_3) \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) d\xi_3 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^{cp}$  désigne un champ de contraintes planes parallèlement au plan de la plaque. L'action du feu intervient dans la définition de  $\mathcal{G}_b$  en raison du fait que le critère de résistance du béton  $G^b(\xi_3)$ , défini par (4.17), dépend fortement de la température  $T(\xi_3)$  à la position  $\xi_3$ .

#### 4.3.2.2. Plaque en béton armé

Tandis que le béton est modélisé comme une matrice *tridimensionnelle*, les armatures en acier sont modélisées comme des renforts *unidimensionnels*. Les champs de contraintes explorés dans l'approche calcul à la rupture sont alors constitués d'une part de champs de contrainte de Cauchy dans le béton et d'efforts axiaux dans les armatures de renforcement. Le critère de résistance du béton ne dépendant que de  $\xi_3$ , on peut alors montrer que le domaine de résistance macroscopique peut être obtenu en se restreignant :

- ✓ dans le béton, à de champs de *contraintes planes* comme ceux apparaissant dans la définition (4.19) ;
- ✓ à un effort axial *constant* dans chacun des quatre renforts de la cellule de base,

ces différents efforts intérieurs vérifiant les critères respectifs du béton (4.17) et des renforts (4.18).

Il en résulte que la définition du domaine de résistance macroscopique se simplifie en :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \{ \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3); N_{\alpha=1,2}^\pm \} \text{ tels que} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) \in G^b(\xi_3) \text{ et } |N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm \\ \underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) d\xi_3 + \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \\ \underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} (-\xi_3) \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) d\xi_3 - \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \xi_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \end{array} \right. \quad (4.20)$$

où  $N_{0\alpha}^\pm$  sont les efforts axiaux *maximaux* des armatures, définis par (4.18).

Désignant par  $\mathcal{G}_a$  la contribution des armatures au domaine de résistance macroscopique définie par:

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_a \Leftrightarrow \begin{cases} \exists N_{\alpha=1,2}^\pm \text{ tels que: } |N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm \\ \underline{N} = \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha, \underline{M} = -\sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \zeta_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \end{cases} \quad (4.21)$$

on peut montrer que  $\mathcal{G}$  peut être exprimé comme la somme de Minkowski<sup>4</sup> de cette contribution et du domaine de résistance de la plaque en béton seul :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_b \oplus \mathcal{G}_a \quad (4.22)$$

## 4.4. Evaluation numérique du critère macroscopique

S'appuyant sur les définitions (4.19) et (4.20), cette section est consacrée à la construction du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  à l'aide de l'approche statique par l'intérieur qui permet l'obtention d'une borne inférieure  $\mathcal{G}^{stat} \subseteq \mathcal{G}$  d'une part, de l'approche cinématique par l'extérieur permettant d'obtenir une borne supérieure  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{cin}$ . Cette partie tire son origine des travaux de Bléyer (2016), où il a déterminé le critère macroscopique d'une plaque en matériau non renforcé ayant un critère local *homogène* dans l'épaisseur. La méthode qu'il a développée sera ici modifiée afin de prendre en compte à la fois les renforcements en acier et la dégradation des propriétés de résistance due à l'élévation de température qui conduit à un domaine de résistance local hétérogène dans l'épaisseur.

On présente d'abord le traitement numérique pour obtenir le domaine de résistance macroscopique du béton sans renforcement  $\mathcal{G}_b$ . Le domaine macroscopique du béton armé  $\mathcal{G}$  s'obtiendra ensuite à l'aide de la somme de Minkowski (4.22).

### 4.4.1. Approche statique par l'intérieur

#### 4.4.1.1. Plaque en béton seul

Une approximation *par l'intérieur* du domaine macroscopique de la plaque en béton seul s'obtient par l'application directe de la définition (4.19), en considérant des champs de contraintes *planes*  $\underline{\underline{\sigma}}^k$  constants *par morceaux*, comme montré sur la figure 4.7(a), où on a discrétisé l'épaisseur de la plaque en  $n$  couches  $[t_{k-1}, t_k]$  avec  $t_0 = -h/2$  et  $t_n = h/2$ .

$$\forall \xi_3 \in [t_{k-1}, t_k]: \underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3) = \underline{\underline{\sigma}}^k = \sigma_{\alpha\beta}^k \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad (k=1, \dots, n) \quad (4.23)$$

<sup>4</sup> La somme de Minkowski de deux ensembles  $A$  et  $B$  est définie par  $A \oplus B = \{a+b ; a \in A, b \in B\}$

Ces champs de contrainte sont donc statiquement admissibles au sens de (4.6) (*conditions d'équilibre*). Par ailleurs, ces champs de contraintes constants par couche doivent vérifier le critère de résistance du béton (*conditions de résistance*) :

$$\forall \xi_3 \in [t_{k-1}, t_k] : \underline{\underline{\sigma}}^k \in G^b(\xi_3). \quad (4.24)$$

Pour une discrétisation suffisamment fine, on suppose que le critère de résistance du béton est *homogène* pour chaque couche :

$$\forall \xi_3 \in [t_{k-1}, t_k] : G^b(\xi_3) = G_k^b \quad (4.25)$$

Dans la pratique, deux choix sont possibles pour le critère du béton  $G_k^b$  de chaque couche  $[t_{k-1}, t_k]$  :

- ✓ soit celui de la face supérieure au point  $\xi_3 = t_k : G_k^b = G^b(t_k)$
- ✓ soit celui de la face inférieure au point  $\xi_3 = t_{k-1} : G_k^b = G^b(t_{k-1})$

Sachant que la température est d'autant élevée que le point est plus proche de la surface inférieure  $\xi_3 = -h/2$  exposée au feu, le domaine de résistance locale  $G^b(t_{k-1})$  au point  $\xi_3 = t_{k-1}$  est *inclus* dans celui attaché au point  $\xi_3 = t_k$  (figure 4.7(b)) :

$$\forall \xi_3 \in [t_{k-1}, t_k] : G^b(t_{k-1}) \subseteq G^b(\xi_3) \subseteq G^b(t_k) \quad (4.26)$$

On en déduit qu'il suffit de vérifier la condition suivante pour que les champs de contrainte de chaque couche vérifient en tout point le critère de résistance du béton (4.24) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^k \in G(t_{k-1}) \quad (4.27)$$

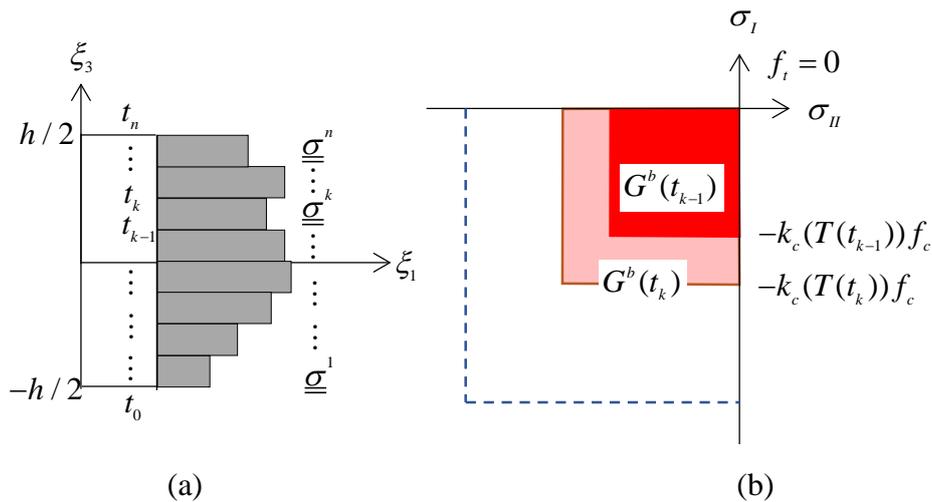


Figure 4.7. Discretisation de l'épaisseur de la plaque (à gauche) et domaines de résistance en contraintes planes du béton

Dans ces conditions, les intégrales dans la définition (4.19) peuvent être approximées par défaut par la somme des champs de contraintes planes à travers l'épaisseur. Une approche par

l'intérieur du domaine de résistance macroscopique du béton sans renforcement  $\mathcal{G}_b^{stat}$  est donc donnée par :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_b^{stat} \subseteq \mathcal{G}_b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}^k \in G^b(t_{k-1}), k=1, \dots, n \\ \underline{N} = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \underline{\sigma}^k \\ \underline{M} = \sum_{k=1}^n \frac{t_{k-1}^2 - t_k^2}{2} \underline{\sigma}^k \end{cases} \quad (4.28)$$

#### 4.4.1.2. Plaque en béton armé

Etant donné l'approximation par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique du béton non renforcé  $\mathcal{G}_b^{stat}$  donnée par (4.28), ainsi que la contribution  $\mathcal{G}_a$  des armatures (4.21), le domaine de résistance macroscopique du béton armé  $\mathcal{G}$  est approximé par défaut par une borne inférieure  $\mathcal{G}^{stat}$  égale à la somme de Minkowski de  $\mathcal{G}_b^{stat}$  et  $\mathcal{G}_a$  :

$$\mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}^{stat} = \mathcal{G}_b^{stat} \oplus \mathcal{G}_a \quad (4.29)$$

soit sous forme analogue à (4.28) :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}^{stat} \subseteq \mathcal{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}^k \in G^b(t_{k-1}), k=1, \dots, n \\ \exists |N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm(\zeta_\alpha^\pm) \\ \underline{N} = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \underline{\sigma}^k + \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \\ \underline{M} = \sum_{k=1}^n \frac{t_{k-1}^2 - t_k^2}{2} \underline{\sigma}^k - \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \zeta_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \end{cases} \quad (4.30)$$

### 4.4.2. Approche cinématique par l'extérieur

#### 4.4.2.1. Plaque en béton seul

Considérons ensuite la borne supérieure obtenue par l'approche cinématique du domaine de résistance macroscopique béton sans renfort. S'appuyant sur la notion de fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique  $\pi_b$ , une formulation *équivalente* peut être obtenue pour le domaine de résistance macroscopique du béton sans renfort  $\mathcal{G}_b$  :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_b \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (\underline{\hat{\epsilon}}, \underline{\hat{\chi}}) \\ \underline{N} : \underline{\hat{\epsilon}} + \underline{M} : \underline{\hat{\chi}} \leq \pi_b(\underline{\hat{\epsilon}}, \underline{\hat{\chi}}) \end{cases} \quad (4.31)$$

où  $\pi_b(\underline{\hat{\epsilon}}, \underline{\hat{\chi}})$  est définie par :

$$\pi_b(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}) = \sup_{(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}^b} \left\{ \underline{N} : \underline{\hat{\underline{\epsilon}}} + \underline{M} : \underline{\hat{\underline{\chi}}} \right\} \quad (4.32)$$

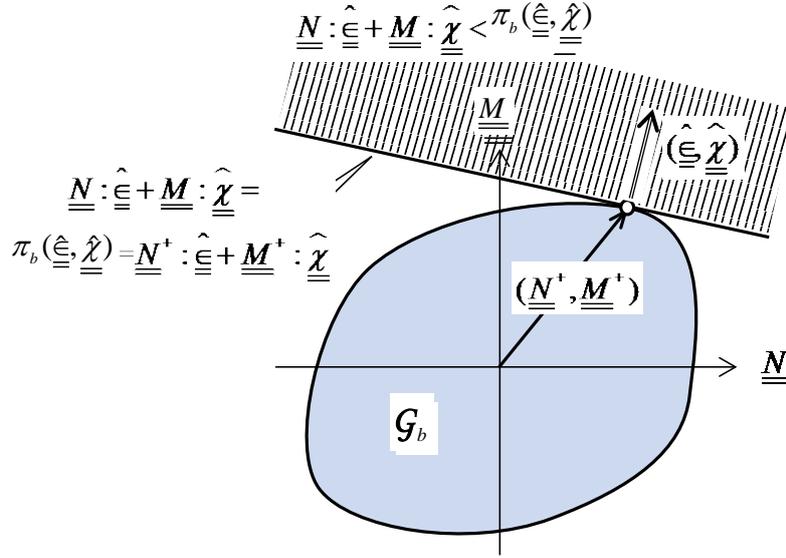


Figure 4.8. Interprétation géométrique de la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$

L'interprétation géométrique de la fonction d'appui  $\pi_b$  est donnée sur la figure 4.8. Etant donné dans l'espace des efforts généralisés un couple  $(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}})$  de tenseurs de taux de déformations membranaires et de courbures, le domaine de résistance macroscopique se situe dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par l'hyperplan d'équation  $\pi_b(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}) = \underline{N} : \underline{\hat{\underline{\epsilon}}} + \underline{M} : \underline{\hat{\underline{\chi}}}$  ayant  $(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}})$  comme normale. Une borne supérieure  $\mathcal{G}_b^{cin}$  peut être obtenue pour le domaine de résistance macroscopique du béton sans renforcement  $\mathcal{G}_b$  si on peut trouver un *majorant* pour la fonction d'appui  $\pi_b(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}})$ .

Compte tenu des expressions des efforts membranaires et les moments de flexion apparaissant dans (4.19), on peut montrer que la fonction d'appui de  $\mathcal{G}_b$  peut être exprimée comme suit:

$$\pi_b(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}) = \sup_{\underline{\sigma}^{cp}(\underline{\xi}_3) \in G^b(\underline{\xi}_3)} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}^{cp}(\underline{\xi}_3) : (\underline{\hat{\underline{\epsilon}}} - \underline{\xi}_3 \underline{\hat{\underline{\chi}}}) d\underline{\xi}_3 \right\} \quad (4.33)$$

soit encore :

$$\pi_b(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sup_{\underline{\sigma}^{cp}(\underline{\xi}_3) \in G^b(\underline{\xi}_3)} \left\{ \underline{\sigma}^{cp}(\underline{\xi}_3) : (\underline{\hat{\underline{\epsilon}}} - \underline{\xi}_3 \underline{\hat{\underline{\chi}}}) \right\} d\underline{\xi}_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \pi_{loc}^{cp}(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}} - \underline{\xi}_3 \underline{\hat{\underline{\chi}}}) d\underline{\xi}_3 \quad (4.34)$$

où  $\pi_{loc}^{cp}(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}} - \underline{\xi}_3 \underline{\hat{\underline{\chi}}})$  est la fonction d'appui du critère de résistance local en *contraintes planes* du béton  $G^b(\underline{\xi}_3)$ :

$$\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\delta}}) = \sup_{\underline{\sigma}^{cp} \in G^b(\xi_3)} \{ \underline{\sigma}^{cp} : \hat{\underline{\delta}} \} \quad (4.35)$$

#### 4.4.2.1.1. $\mathcal{G}_b^{cin}$ à température ambiante (Bleyer, 2016)

Dans ce cas, le domaine de résistance local du béton est *homogène* dans l'épaisseur  $G^b(\xi_3) = G^b$ . En raison de la *convexité* de la fonction  $\pi_{loc}^{cp}(\underline{\underline{\sigma}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}})$ , l'intégrale (4.34) peut être approchée par excès par une quadrature trapézoïdale (Bleyer, 2016) :

$$\pi_b(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\chi}}) \leq \pi_b^{cin}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\chi}}) = \sum_{k=1}^n \omega_k \pi_{loc}^{cp}(\underline{\underline{\sigma}} - t_k \underline{\underline{\chi}}) \quad (4.36)$$

où  $t_k$  sont les points de quadrature avec  $t_1 = -h/2$  et  $t_n = h/2$  tandis que  $\omega_k = (t_{k+1} - t_{k-1})/2$  ( $k=2, \dots, n-1$ ) sont les poids de la quadrature avec  $\omega_1 = (t_2 - t_1)/2$  et  $\omega_n = (t_n - t_{n-1})/2$ .

Compte tenu de (4.31) ainsi que l'inégalité (4.36), on peut montrer que le domaine  $\mathcal{G}_b^{cin}$  défini par :

$$\mathcal{G}_b^{cin} = \left\{ (\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \mid \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \leq \pi_b^{cin}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\chi}}), \forall (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\chi}}) \right\} \quad (4.37)$$

constitue une *borne supérieure* du domaine de résistance macroscopique de la plaque en béton sans renfort  $\mathcal{G}_b$  :

$$\mathcal{G}_b^{cin} \supseteq \mathcal{G}_b \quad (4.38)$$

Par ailleurs,  $\mathcal{G}_b^{cin}$  peut être exprimé de façon analogue à (4.28) par :

$$\boxed{(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{G}_b^{cin} \supseteq \mathcal{G}_b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}^k \in G^b, k = 1, \dots, n \\ \underline{\underline{N}} = \sum_{k=1}^n \omega_k \underline{\underline{\sigma}}^k, \underline{\underline{M}} = \sum_{k=1}^n (-\omega_k t_k) \underline{\underline{\sigma}}^k \end{cases}} \quad (4.39)$$

#### 4.4.2.1.2. $\mathcal{G}_b^{cin}$ à température élevée

En condition d'incendie, le domaine de résistance local du béton  $G^b(\xi_3)$  ne dépend de l'ordonnée du point considéré. Dans ce cas, la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique  $\pi_b(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\chi}})$  peut être obtenue en intégrant  $\pi_{loc}^{cp}(\underline{\underline{\sigma}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}})$  en vertu de (4.34) à travers l'épaisseur. En effet,  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\delta}})$  défini par (4.35) peut être calculé analytiquement (Pham, 2014) dans le cas d'un état de contrainte plane  $\underline{\underline{\sigma}}^{cp}(\xi_3)$  respectant le critère de Mohr-Coulomb sans traction  $G_b(\xi_3)$  défini par (4.17) :

$$\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\delta}}(\xi_3)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{tr} \hat{\underline{\delta}} \geq 0 \text{ et } \det \hat{\underline{\delta}} \geq 0 \quad (a) \\ -\frac{f_c(\xi_3)}{2} \left( \text{tr} \hat{\underline{\delta}} - \sqrt{(\text{tr} \hat{\underline{\delta}})^2 - 4 \det \hat{\underline{\delta}}} \right) & \text{si } \det \hat{\underline{\delta}} \leq 0 \quad (b) \\ -f_c(\xi_3) \text{tr} \hat{\underline{\delta}} & \text{si } \text{tr} \hat{\underline{\delta}} \leq 0 \text{ et } \det \hat{\underline{\delta}} \geq 0 \quad (c) \end{cases} \quad (4.40)$$

où  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}} = \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}$  est le tenseur du taux de déformations au point  $\xi_3$ . L'épaisseur de la plaque pouvant être divisée en trois zones correspondant respectivement aux conditions (4.40) de (a) à (c), la fonction d'appui  $\pi_b(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  peut être ainsi obtenue d'une manière exacte par l'intégrale de  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\sigma}}}(\xi_3))$  dans l'intervalle  $\xi_3 \in [-h/2, h/2]$ .

Une autre méthode consiste à majorer de la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique  $\pi_b(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  en tirant avantage de la convexité de  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  comme cela est fait dans (4.36). Pour cela, on va choisir  $n$  points de quadrature  $t_k$  dans l'intervalle  $[-h/2, h/2]$  ( $t_1 = -h/2, t_n = h/2, k = 1, \dots, n$ ).

Puisque le domaine de résistance local  $G^c(t_{k+1})$  est le plus grand de tous ceux relatifs à l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  (voir figure 4.7(b)), la fonction d'appui  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  peut être *majorée* par la fonction d'appui  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1}))$  du domaine de résistance local  $G^b(\xi_{k+1})$  :

$$\begin{aligned} \forall \xi_3 \in [t_k, t_{k+1}], G^b(\xi_3) \subseteq G^b(t_{k+1}) \Rightarrow \\ \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}) &= \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\xi_3) \in G^b(\xi_3)} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}(\xi_3) : (\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}) \right\} \\ &\leq \sup_{\underline{\underline{\sigma}}(\xi_3) \in G^b(t_{k+1})} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}(\xi_3) : (\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}) \right\} = \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1})) \end{aligned} \quad (4.41)$$

où l'ajout de  $G^b(t_{k+1})$  dans l'expression de la fonction d'appui a pour but de préciser le domaine de résistance local  $G^b(t_{k+1})$  qui remplace  $G^b(\xi_3)$ .

Etant donné un couple  $(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$ , la fonction d'appui  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1}))$  est convexe en  $\xi_3$  en raison de la *convexité* du domaine de résistance locale  $G^b(t_{k+1})$ . Compte tenu de la relation (4.41) et de la convexité de  $\pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(\xi_{k+1}))$ , on en déduit que la fonction d'appui  $\pi_b(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  du domaine de résistance macroscopique du béton sans renforcement  $\mathcal{G}_b$  donnée par l'intégrale (4.34) peut être évaluée *par excès* par la quadrature trapézoïdale suivante :

$$\begin{aligned} \pi_b(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}) d\xi_3 = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \xi_3 \hat{\underline{\underline{\chi}}}) d\xi_3 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \left( \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - t_k \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1})) + \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - t_{k+1} \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1})) \right) \\ &\quad \text{avec } \omega_k = (t_{k+1} - t_k) / 2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

c'est-à-dire que  $\pi_b(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$  est *majorée* par  $\pi_b^{cin}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}})$ , calculée comme suit:

$$\pi_b(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}}) \leq \pi_b^{cin}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}, \hat{\underline{\underline{\chi}}}) = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \left( \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - t_k \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1})) + \pi_{loc}^{cp}(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - t_{k+1} \hat{\underline{\underline{\chi}}}; G^b(t_{k+1})) \right) \quad (4.43)$$

d'où l'évaluation *par excès* suivante  $\mathcal{G}^{cin}$  du domaine de résistance macroscopique, définie par :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_b^{cin} \supset \mathcal{G}_b \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (\underline{\hat{\epsilon}}, \underline{\hat{\chi}}) \\ \underline{N} : \underline{\hat{\epsilon}} + \underline{M} : \underline{\hat{\chi}} \leq \pi_b^{cin}(\underline{\hat{\epsilon}}, \underline{\hat{\chi}}) \end{cases} \quad (4.44)$$

On remarque également que le majorant de la fonction d'appui  $\pi_b^{cin}(\underline{\hat{\epsilon}}, \underline{\hat{\chi}})$ , défini par (4.43), conduit à la même expression que (4.36) lorsque le domaine de résistance local du béton est *homogène* à travers l'épaisseur :  $\forall k = 1, \dots, n-1 : G^b(t_{k+1}) = G^b$ .

Par dualité, cette borne supérieure du domaine de résistance macroscopique du béton sans renforcement  $\mathcal{G}_b^{cin}$  peut être exprimée de façon analogue à (4.39) par :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}_b^{cin} \supset \mathcal{G}_b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}^{k+1}, \underline{\sigma}^{k+1'} \in G^b(t_{k+1}), k = 1, \dots, n-1 \\ \underline{N} = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k (\underline{\sigma}^{k+1} + \underline{\sigma}^{k+1'}), \quad \underline{M} = \sum_{k=1}^{n-1} -\omega_k (t_k \underline{\sigma}^{k+1} + t_{k+1} \underline{\sigma}^{k+1'}) \\ \text{avec } \omega_k = (t_{k+1} - t_k) / 2 \end{cases} \quad (4.45)$$

#### 4.4.2.2. Plaque en béton armé

Comme pour l'approche statique par l'intérieur, une borne supérieure  $\mathcal{G}^{cin}$  du domaine de résistance macroscopique du béton armé s'obtient par la somme de *Minkowski* des contributions respectives du béton  $\mathcal{G}_b^{cin}$  et des armatures  $\mathcal{G}_a$  (cf. 4.21) :  $\mathcal{G}^{cin} = \mathcal{G}_b^{cin} \oplus \mathcal{G}_a$ , exprimée de façon analogue à (4.45) par :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}^{cin} \supset \mathcal{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}^{k+1}, \underline{\sigma}^{k+1'} \in G^b(t_{k+1}), k = 1, \dots, n-1 \\ \exists |N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm(\zeta_\alpha^\pm) \\ \underline{N} = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k (\underline{\sigma}^{k+1} + \underline{\sigma}^{k+1'}) + N_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \\ \underline{M} = \sum_{k=1}^{n-1} -\omega_k (t_k \underline{\sigma}^{k+1} + t_{k+1} \underline{\sigma}^{k+1'}) - N_\alpha^\pm \zeta_\alpha^\pm \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha \\ \text{avec } \omega_k = (t_{k+1} - t_k) / 2 \end{cases} \quad (4.46)$$

#### 4.4.3. Formulation du problème d'optimisation

La définition des bornes inférieure (4.30) et supérieure (4.46) du domaine de résistance macroscopique d'une plaque en béton armé soumise à un gradient de température permet d'approcher  $\mathcal{G}$  par l'encadrement  $\mathcal{G}^{stat} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{cin}$ . Dans la pratique, cet encadrement est obtenu par la méthode des trajets de chargements radiaux, comme montré sur la figure 4.9. Etant donné un couple chargement  $(\underline{N}_0, \underline{M}_0)$  dans l'espace (à six dimensions) des efforts généralisés  $(\underline{N}, \underline{M})$ , cette méthode consiste à chercher le facteur multiplicatif maximal  $\lambda^+$  tel que le couple chargement  $(\lambda^+ \underline{N}_0, \lambda^+ \underline{M}_0)$  soit situé sur la frontière du domaine de résistance  $\mathcal{G}$ .

Appliquant l'approche statique par l'intérieur, ce facteur  $\lambda^+$  est minoré par une *borne inférieure*  $\lambda^{stat}$  obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda^+ &\geq \lambda^{stat} = \max \lambda \\
\text{s.t. } \lambda \underline{\underline{N}}_0 &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \underline{\underline{\sigma}}^k + \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\alpha, \\
\lambda \underline{\underline{M}}_0 &= \sum_{k=1}^n \frac{t_{k-1}^2 - t_k^2}{2} \underline{\underline{\sigma}}^k - \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^\pm \zeta_\alpha^\pm \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\alpha, \\
\underline{\underline{\sigma}}^k &\in G^b(t_{k-1}), |N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm(\zeta_\alpha^\pm), k=1, \dots, n
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Appliquant de même l'approche cinématique par l'extérieur, ce facteur  $\lambda^+$  est majoré par une *borne supérieure*  $\lambda^{cin}$  obtenue par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda^{cin} &= \max \lambda \\
\text{s.t. } \lambda \underline{\underline{N}}_0 &= \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k (\underline{\underline{\sigma}}^{k+1} + \underline{\underline{\sigma}}^{k+1}) + N_\alpha^\pm \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\alpha, \\
\lambda \underline{\underline{M}}_0 &= \sum_{k=1}^{n-1} -\omega_k (t_k \underline{\underline{\sigma}}^{k+1} + t_{k+1} \underline{\underline{\sigma}}^{k+1}) - N_\alpha^\pm \zeta_\alpha^\pm \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\alpha, \\
\underline{\underline{\sigma}}^{k+1}, \underline{\underline{\sigma}}^{k+1} &\in G^b(t_{k+1}), |N_\alpha^\pm| \leq N_{0\alpha}^\pm(\zeta_\alpha^\pm), k=1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Les deux problèmes d'optimisation (4.47) et (4.48) étant de type *programmation conique du second ordre*, on tire avantage du solveur d'optimisation MOSEK pour obtenir rapidement une évaluation précise des facteurs multiplicatifs  $\lambda^{stat}$  et  $\lambda^{cin}$  qui constituent respectivement un *minorant* et un *majorant* du facteur  $\lambda^+$  associé au domaine  $\mathcal{G}$  :

$$\lambda^{stat} \leq \lambda^+ \leq \lambda^{cin} \tag{4.49}$$

Faisant varier la direction  $(\underline{\underline{N}}_0, \underline{\underline{M}}_0)$ , on peut ainsi construire point par point les domaines occupés respectivement par la borne inférieure  $\mathcal{G}^s$  et la borne supérieure  $\mathcal{G}^f$ . En raison du fait que le domaine de résistance local du béton  $G^b(\xi_3)$  est un domaine *convexe*, les bornes inférieures  $\mathcal{G}^{stat}$  et supérieures  $\mathcal{G}^{cin}$  ainsi obtenues sont également convexes. Elles peuvent être exprimées à l'aide de fonctions portant sur les efforts généralisés :

$$\begin{aligned}
(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{G}^{stat} \subseteq \mathcal{G} &\Leftrightarrow \mathcal{F}^{stat}(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \leq 0 \\
(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \in \mathcal{G}^{cin} \supseteq \mathcal{G} &\Leftrightarrow \mathcal{F}^{cin}(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}}) \leq 0
\end{aligned} \tag{4.50}$$

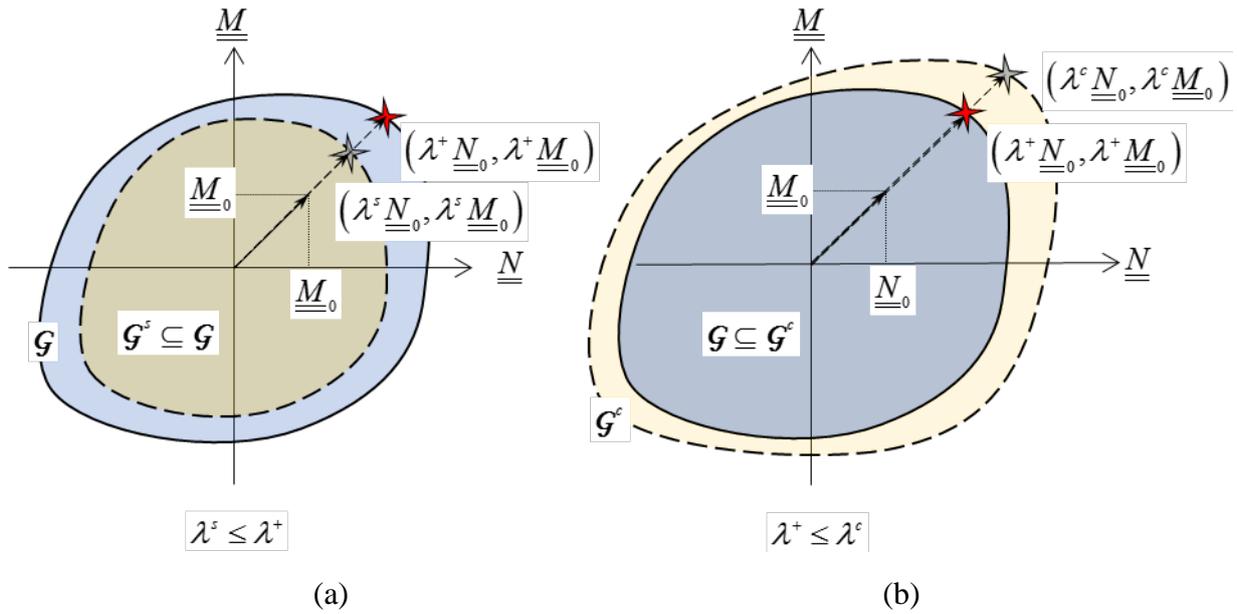


Figure 4.9. Construction du domaine de résistance  $\mathcal{G}$  par trajets radiaux (à gauche : borne inférieure  $\mathcal{G}^{stat}$  ; à droite borne supérieure  $\mathcal{G}^{cin}$ )

## 4.5. Résultats numériques et étude paramétrique

### 4.5.1. Intersection du domaine de résistance par le plan $(N_{11}-M_{11})$

Nous nous intéressons tout d'abord à l'évaluation du domaine de résistance macroscopique dans le plan  $(N_{11}-M_{11})$ , les autres sollicitations membranaires et de flexion étant *maintenues égales à zéro*. Un tel domaine s'apparente alors au *diagramme d'interaction* d'une poutre sollicitée simultanément par un effort axial et un moment de flexion dans le plan (1-3). La convention des signes des moments de flexion et des efforts membranaires compatibles avec la définition (4.12) est montrée sur la figure 4.10.

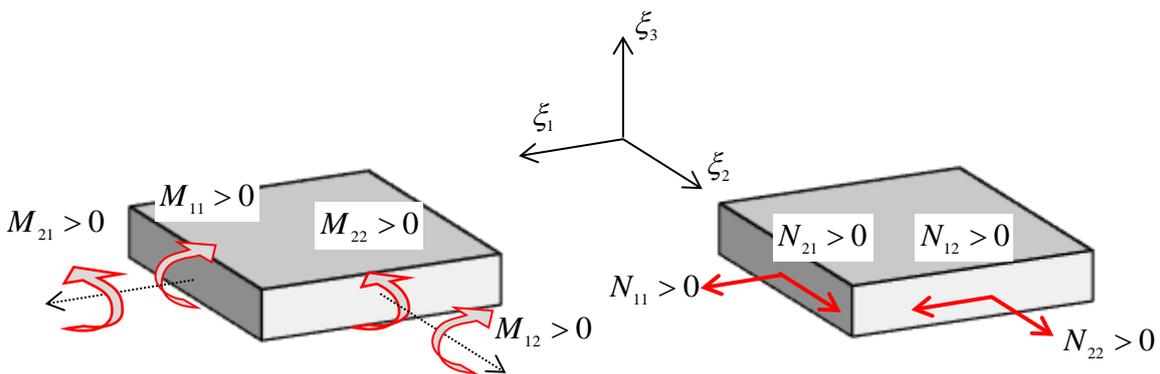


Figure 4.10. Convention de signes des efforts généralisés d'une plaque

Considérons pour cela un mur en béton ayant une épaisseur typique de 15cm. Son renforcement est constitué de deux lits d'armatures en acier de diamètre  $\phi = 6\text{mm}$ , orthogonales et orientées selon les axes  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Ces armatures sont espacées de  $a=10\text{cm}$  avec un enrobage de béton de  $d=3\text{cm}$  (voir figure 4.3). A température ambiante ( $T=20^\circ$ ), la résistance

à la compression du béton est prise égale à  $f_c=32\text{MPa}$ , tandis que la résistance à la traction de l'acier est égale à  $f_s=500\text{MPa}$ . La résistance à la traction du béton est négligée :  $f_t=0$ .

On présente d'abord l'intersection de  $\mathcal{G}$  par le plan  $N_{11}-M_{11}$ , que l'on encadrera par une borne inférieure  $\mathcal{G}^{stat}$  et une borne supérieure  $\mathcal{G}^{cin}$  dans ce même plan. Une discrétisation uniforme en couches de même épaisseur de la plaque est adoptée pour les deux bornes. Seul le nombre de  $n = 2m$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) pair (resp.  $n = 2m + 1$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) impair) est considéré pour la borne inférieure (resp. supérieure) pour que toutes les couches aient un état de contrainte non nulle dans les procédures d'optimisation (4.47 et 4.48).

Dans ces conditions, les bornes supérieure  $\mathcal{G}^{cin}$  et inférieure  $\mathcal{G}^{stat}$  du domaine de résistance à température *ambiante* sont représentées respectivement sur les figures 4.11(a) et (b). On remarque que les deux bornes sont symétriques en flexion positive et négative, en raison du fait que le renfort est symétrique par rapport au plan  $\xi_3 = 0$  et que les propriétés de résistance du béton et de l'acier à température ambiante ( $T = 20^\circ\text{C}$ ), sont *homogènes* dans l'épaisseur. A noter que ce domaine de résistance macroscopique, ainsi représenté dans le plan  $(N_{11}-M_{11})$ , est identique au diagramme d'interaction  $(N,M)$  d'une poutre (Pham, 2014), puisque les autres composantes des tenseurs des efforts membranaires et des moments de flexion sont nulles.

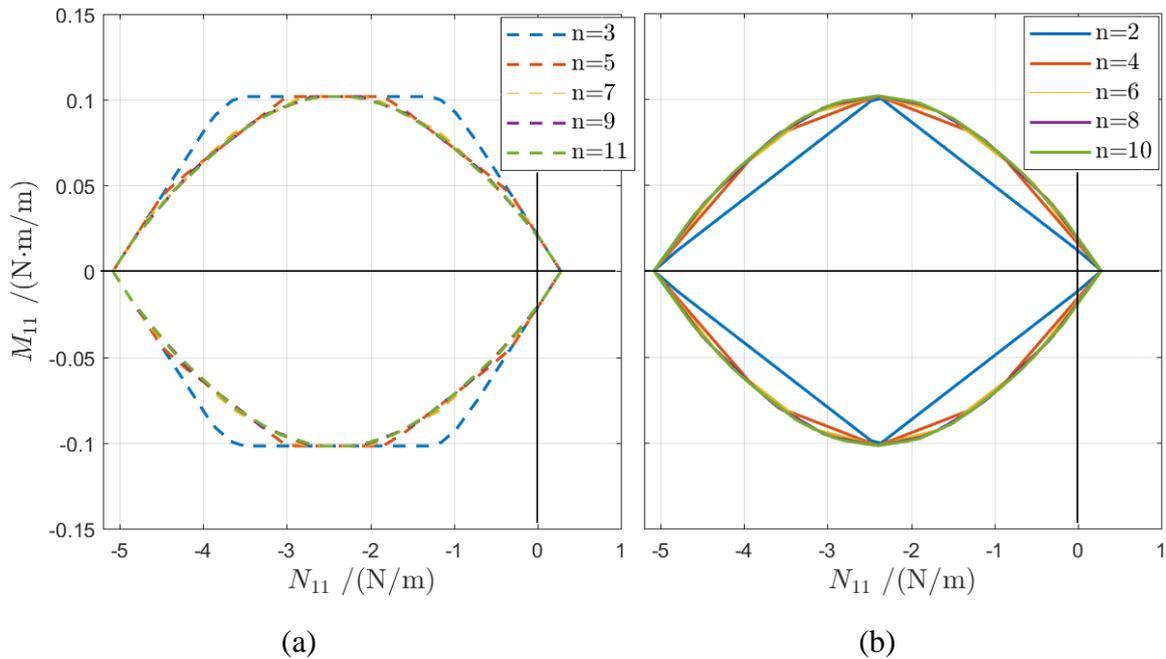


Figure 4.11. Représentation des bornes supérieures (à gauche) et des bornes inférieures (à droite) du domaine de résistance macroscopique à température ambiante ( $T = 20^\circ\text{C}$ ) dans le plan  $(N_{11} - M_{11})$  (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ )

Afin d'étudier la vitesse de convergence des deux bornes, on introduit l'erreur relative qui mesure la différence maximale entre un critère de résistance approché, et le critère de résistance de référence, considéré comme le domaine exact car calculé avec  $n = 100$  (resp.  $n = 101$ ) pour la borne inférieure (resp. supérieure) :

$$\varepsilon^{stat} = \frac{\max(\lambda_n^{stat} - \lambda_{ref}^{stat})}{\lambda_{ref}^{stat}}, \varepsilon^{cin} = \frac{\max(\lambda_n^{cin} - \lambda_{ref}^{cin})}{\lambda_{ref}^{cin}} \quad (4.51)$$

où  $\lambda_n^{stat}$  et  $\lambda_n^{cin}$  sont respectivement les facteurs multiplicatifs de la borne inférieure et de la borne supérieure calculés avec une discrétisation en  $n$  couches.

L'évolution de l'erreur maximale en fonction de  $n$  est montrée sur la figure 4.12(a). On peut vérifier que la borne supérieure  $\mathcal{G}^{cin}$  (resp. la borne inférieure  $\mathcal{G}^{stat}$ ) donne une approximation par excès (resp. par défaut) du domaine de résistance  $\mathcal{G}$  du fait que l'erreur maximale est toujours positive (resp. négative) pour la borne supérieure (resp. inférieure). Par ailleurs, on peut constater que l'erreur maximale de la borne supérieure (resp. inférieure) descend à moins de 5% avec  $n = 5$  (resp.  $n = 4$ ), ce qui démontre que la convergence des deux bornes est très rapide.

La qualité de l'encadrement du domaine de résistance macroscopique est caractérisée par la distance relative entre la borne supérieure et la borne inférieure :

$$d = \frac{\max(\lambda_m^{cin} - \lambda_m^{stat})}{\lambda_m^{stat}} \quad (4.52)$$

L'évolution de cette distance relative maximale en fonction du paramètre de discrétisation  $m$  est représentée sur la figure 4.12(b). Elle descend très rapidement à moins de 10% pour  $m = 6$ , ce qui correspond à  $n = 2m + 1 = 13$  (resp.  $n = 2m = 12$ ) pour la borne supérieure (resp. inférieure). La qualité de l'encadrement s'améliore donc très rapidement avec le paramètre de discrétisation. Dans la pratique, une discrétisation de  $n = 12$  ( $n = 13$ ) suffit pour approcher le domaine de résistance par l'intérieur (resp. par l'extérieur).

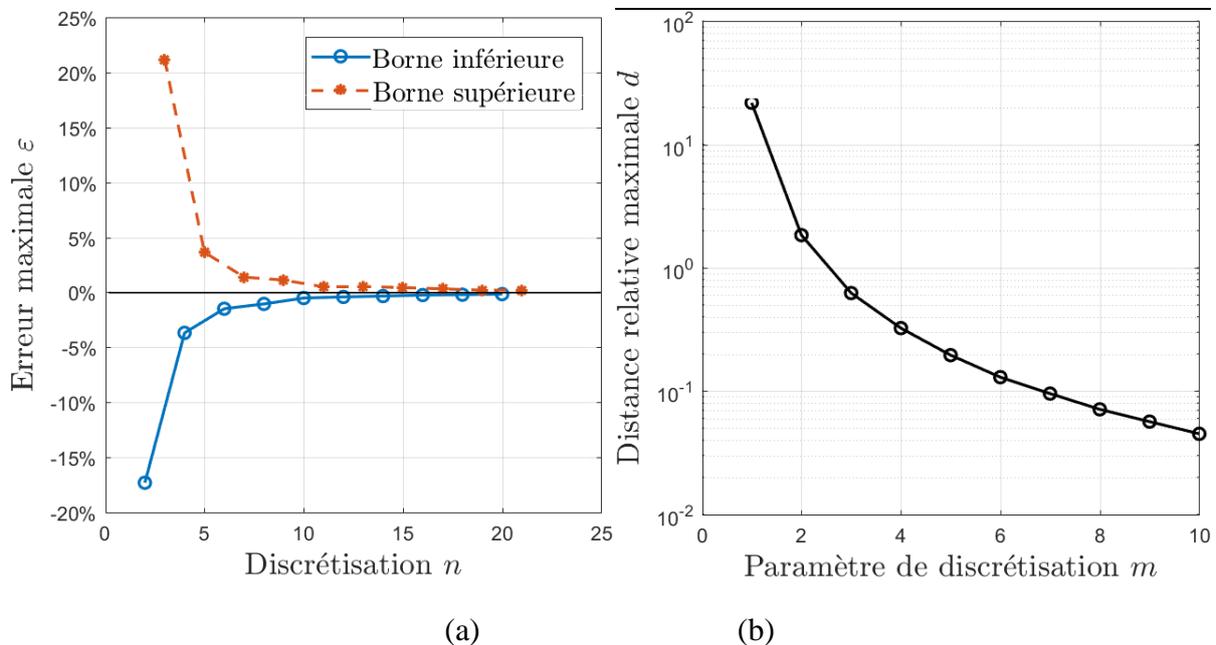


Figure 4.12. Vitesse de convergence des bornes supérieures et inférieures (à gauche) et vitesse de l'encadrement par la borne supérieure et la borne inférieure (à droite)

## 4.5.2. Effet du renforcement sur le domaine de résistance

On peut montrer (de Buhan *et al*, 2017) que le domaine de résistance macroscopique du béton armé  $\mathcal{G}$  peut être défini comme une somme de Minkowski<sup>5</sup> de plusieurs domaines :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^b \oplus \mathcal{G}_1^+ \oplus \mathcal{G}_2^+ \oplus \mathcal{G}_1^- \oplus \mathcal{G}_2^- \quad (4.53)$$

où  $\mathcal{G}^b$  désigne le domaine de résistance macroscopique du béton seul, tandis que les quatre domaines  $\mathcal{G}_\alpha^\pm$  ( $\alpha = 1, 2$ ) correspondent à la contribution des armatures supérieures et inférieures orientées selon les axes  $\xi_\alpha$ , représentée chacune par un segment dans l'espace des efforts généralisés  $(N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha})$ , défini comme suit :

$$\mathcal{G}_\alpha^\pm = N_{0\alpha}^\pm \left[ -(1, -\zeta_\alpha^\pm), +(1, -\zeta_\alpha^\pm) \right] \quad (4.54)$$

où  $N_{0\alpha}^-$  et  $N_{0\alpha}^+$  sont respectivement les résistances à la traction-compression des armatures orientées selon l'axe  $\xi_\alpha$  et appartenant aux lits inférieur et supérieur, définies par (4.18).

La trace du domaine de résistance du béton sans renfort  $\mathcal{G}^b$  et celle du béton armé  $\mathcal{G}$  à température ambiante dans le plan  $(N_{11}-M_{11})$  sont représentées sur la figure 4.13. Les lignes bleue, rouge et en tirets correspondent respectivement au béton sans renfort, au béton armé avec armatures de 6mm de diamètre et au béton renforcé par des armatures de 20mm de diamètre.

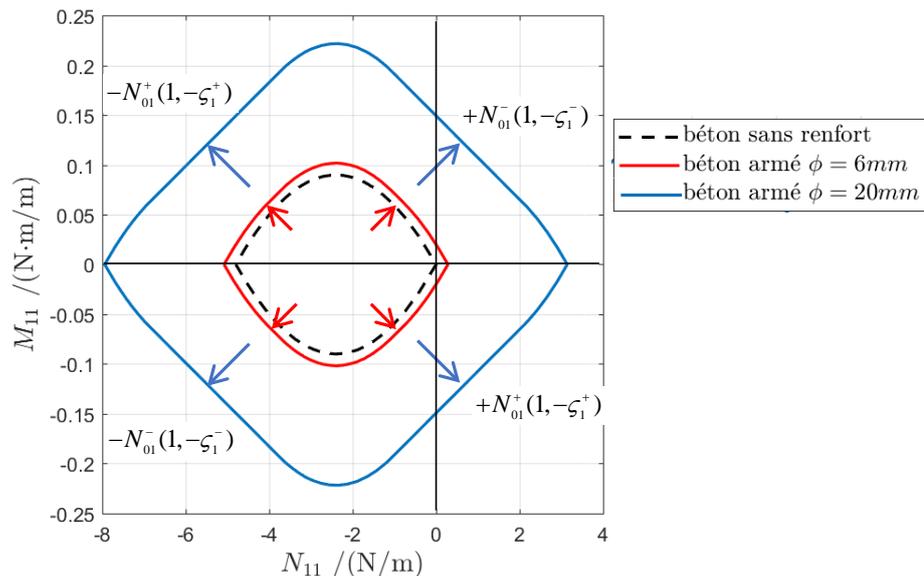


Figure 4.13. Représentation du domaine de résistance du béton sans renfort et du béton armé à température ambiante ( $T = 20^\circ\text{C}$ ) dans le plan  $(N_{11} - M_{11})$  (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ )

On remarque que la trace du domaine de résistance du béton sans renfort dans le plan  $(N_{11}-M_{11})$  est délimité par deux arcs de paraboles symétriques par rapport à l'axe  $N_{11}$  tandis que celle relative au béton armé peut être construite comme l'enveloppe de  $\mathcal{G}^b$  et des domaines obtenus par translation de  $\mathcal{G}^b$  dans les deux sens et selon quatre directions: les deux directions  $\pm(1, -\zeta_1^-)$

<sup>5</sup> La somme de Minkowski de deux ensembles  $A$  et  $B$  est défini par  $A \oplus B = \{a+b ; a \in A, b \in B\}$

relatives à l'armature du lit inférieur et celles  $\pm(1, -\zeta_1^+)$  relatives à l'armature du lit supérieur. La contribution des armatures placées selon l'axe  $\xi_2$  n'apparaît pas dans la construction du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  dans le plan  $(N_{11} - M_{11})$ .

On peut constater également que ce domaine s'agrandit de façon très significative lorsque le diamètre des renforcements passe de 6mm à 20mm. Plus précisément, l'effet du renforcement étant directement proportionnel aux résistances des armatures  $N_{0\alpha}^\pm$ , définies par (4.17), la valeur de ces dernières et donc des translations définies ci-dessus, est multipliée par un facteur supérieur à 10 :  $(20/6)^2 \cong 11$ .

### 4.5.3. Comparaison avec le critère de Nielsen

Cette section a pour but de valider partiellement le critère de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  obtenu dans ce chapitre par sa confrontation avec le *critère de Nielsen* (Nielsen et Hoang, 2011), un critère couramment utilisé pour le dimensionnement des plaques en béton armé en flexion pure ( $\underline{N}=0$ ). Ce critère suppose que les composantes du tenseur de moment de flexion satisfassent aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1^- \leq M_{11} \leq M_1^+ \\ M_2^- \leq M_{22} \leq M_2^+ \\ M_{12}^2 \leq (M_1^+ - M_{11})(M_2^+ - M_{11}) \\ M_{12}^2 \leq (M_1^- - M_{11})(M_2^- - M_{11}) \end{array} \right. \quad (4.55)$$

où  $M_1^\pm$  (resp.  $M_2^\pm$ ) sont respectivement la résistance en flexion positive et négative selon l'axe  $\xi_1$  (resp.  $\xi_2$ ) à température ambiante.

Considérons une plaque en béton armée par un ferrailage ayant deux nappes d'armatures orthogonales comme montré sur la figure 4.3. Prenant des caractéristiques de l'acier et du béton identiques à celles de la section 4.5.1, on compare ici le critère de résistance de *Nielsen* avec le domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$ .

La figure 4.14 montre respectivement la trace du critère macroscopique  $\mathcal{G}$  (ligne bleue) et celle du critère de *Nielsen* (ligne rouge en tirets) dans le plan  $(M_{11}-M_{22})$  sans efforts membranaires ( $\underline{N}=0$ ) et moment de torsion  $M_{12} = 0$ . On remarque que les deux critères sont tous deux délimités par un carré du plan  $(M_{11}-M_{22})$ . La différence maximale entre les deux critères est très faible (au tour de 1,5‰). La résistance en flexion  $M_{11}$  est indépendante du chargement en flexion  $M_{22}$  : la première est toujours comprise entre -0,02 MN.m et +0,02 MN.m. Il en est de même pour la résistance en flexion  $M_{22}$ . On remarque également que cette résistance maximale en flexion (0,02 MN.m, figure 4.14) est très petite par rapport à celle dans le plan  $N_{11} - M_{11}$  (0,1 MN.m, figure 4.10) où une compression  $N_{11}$  moyennement élevée peut augmenter la résistance en flexion.

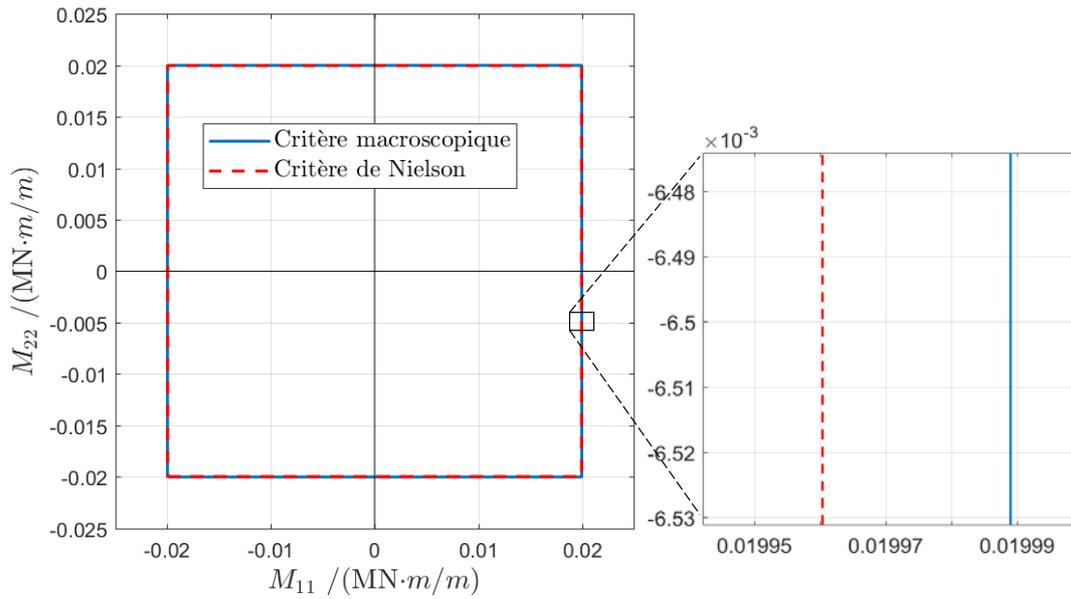


Figure 4.14. Comparation de la trace du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  dans le plan  $M_{11} - M_{22}$  et de celle du critère de *Nielsen* dans ce même plan (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ )

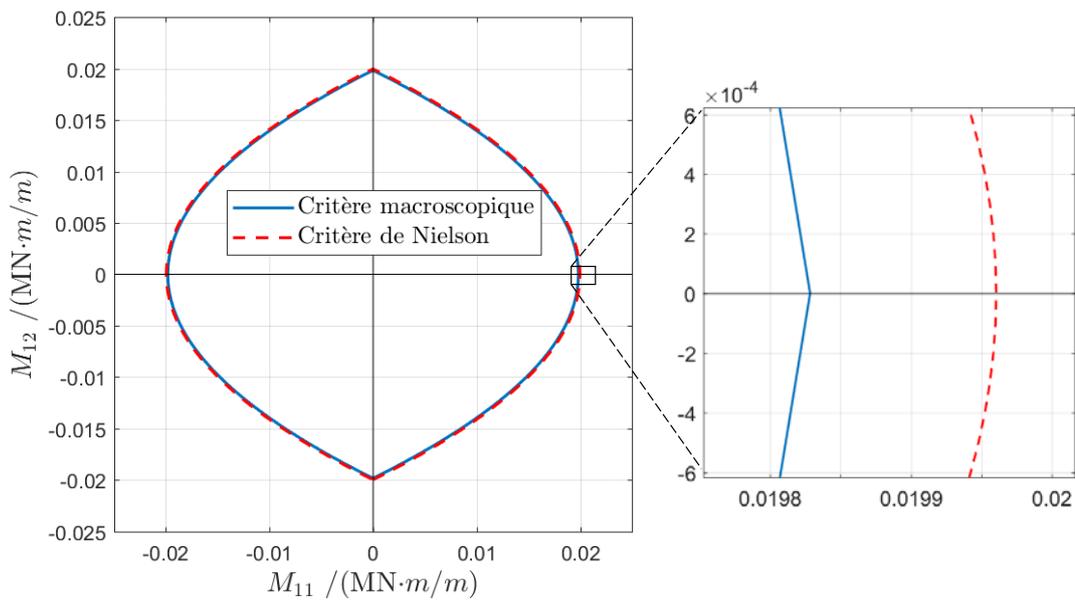


Figure 4.15. Comparation de la trace du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  dans le plan  $M_{11} - M_{12}$  et de celle du critère de *Nielsen* dans ce même plan (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ )

La figure 4.15 montre la trace du critère macroscopique  $\mathcal{G}$  (ligne bleue) et celle du critère de *Nielsen* (ligne rouge en tirets) dans le plan  $M_{11} - M_{12}$ . Comme pour la figure 4.14, la différence entre les deux critères est négligeable (au tour de 5%). Dans ce plan  $M_{11} - M_{12}$ , le domaine de résistance est délimité par deux arcs de paraboles avec un axe de symétrie parallèle à l'axe  $M_{12} = 0$  : la résistance en flexion  $M_{12}$  (resp.  $M_{11}$ ) dépend fortement du chargement en flexion  $M_{11}$  (resp.  $M_{12}$ ) avec un maximum  $+0,02$  MN.m et minimum  $-0,02$  MN.m atteint pour  $M_{11} = 0$  (resp.  $M_{12} = 0$ ).

On peut ainsi conclure que le critère de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  obtenu par la méthode de changement d'échelle ainsi que le critère de *Nielsen* conduisent à des domaines presque identiques dans le plan  $M_{11} - M_{22}$  et  $M_{11} - M_{12}$ . Par contre, le critère de *Nielsen* n'est valable que pour les plaques en flexion pure, tandis que le critère macroscopique  $\mathcal{G}$  s'applique à toutes les sollicitations correspondant aux tenseurs d'efforts membranaires et de moments de flexion.

#### 4.5.4. Influence de l'exposition au feu sur le domaine de résistance macroscopique

Tous les paramètres géométriques et de résistance étant identiques à ceux retenus dans la section 4.5.1, on examine maintenant l'influence du feu sur le domaine de résistance macroscopique. La plaque est exposée à un feu ISO 834 (EN 1991-1-2,2003) sur sa face inférieure ( $\xi_3 = -h/2$ ) avec une montée en température qui en résulte à travers l'épaisseur (voir figure 4.16). Ce profil de température est calculé tous les 30min par le logiciel *Safir* en résolvant le problème du transfert de chaleur dans un bloc du béton sans acier. La température des armatures est supposée identique à celle du béton situé à la même position. La dégradation des propriétés de résistance du béton et de l'acier est prise en compte par l'introduction des facteurs de réduction de la résistance donnés par la figure 4.4(b).

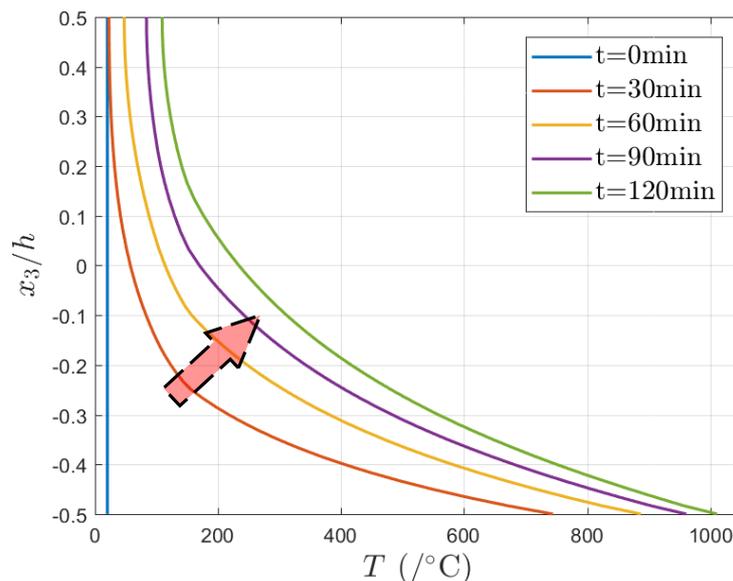


Figure 4.16. Evolution du profil de température en fonction de la durée de l'incendie

Dans ces conditions, l'évolution du domaine de résistance macroscopique dans le plan ( $N_{11} - M_{11}$ ) en fonction du temps d'exposition au feu est représentée sur la figure 4.17, où les lignes de couleur bleue, orange, jaune, violette et verte correspondent respectivement à une durée d'incendie de 0, 30, 60, 90 et 120min d'exposition. Comme pour le diagramme d'interaction d'une poutre (Pham, 2015), l'élévation de la température et la dégradation des propriétés de résistance qui en résulte, conduisent à une diminution du domaine de résistance macroscopique dans le plan  $N_{11} - M_{11}$ . On observe que cette diminution est plus marquée dans le quart de plan  $N_{11} < 0, M_{11} < 0$ . Ceci peut s'expliquer par le fait que, dans ce type de sollicitation, les couches inférieures, proches du feu, sont soumises à une compression, dont la

valeur de résistance du béton est la plus fortement dégradée. En revanche, la diminution de la résistance en flexion est plus faible dans la zone  $M_{11} > 0$ . Cela provient du fait que l'enrobage (3cm) des armatures, proches de la face exposée au feu, ralentit l'élévation de la température de l'acier et la résistance de l'acier ne commence à diminuer que pour une température supérieure à 400°C.

Les figures 4.18 et 4.19 montrent également l'évolution de la trace du domaine de résistance macroscopique dans le plan  $M_{11} - M_{22}$  (figure 4.18) ainsi que dans le plan  $M_{11} - M_{12}$  (figure 4.19), les couleurs des différentes courbes, correspondant à une durée croissante du temps d'exposition au feu, étant identiques à celles de la figure 4.16.

Pour une plaque soumise à une flexion dans les deux directions (figure 4.18), on remarque que les carrés représentant la trace du domaine de résistance dans le plan  $M_{11} - M_{22}$  devient autant plus petit que la durée du feu est plus longue. La diminution du domaine de résistance est plus rapide en flexion négative ( $M_{11} < 0, M_{22} < 0$ ) qu'en flexion positive ( $M_{11} > 0, M_{22} > 0$ ). En flexion négative, on peut observer une réduction de la résistance en flexion dès le début du chargement thermique. En revanche, la résistance en flexion positive n'est réduite que pour une durée supérieure à 60min (ligne violette et ligne verte).

Pour une plaque soumise à une flexion et une torsion (figure 4.19), le domaine de résistance délimité par les arcs est également rétréci en fonction de la durée du feu. On peut remarquer que la réduction du domaine dans le plan ( $M_{11} - M_{12}$ ) est plus rapide en flexion négative ( $M_{11} < 0$ ) qu'en flexion positive ( $M_{11} > 0$ ).

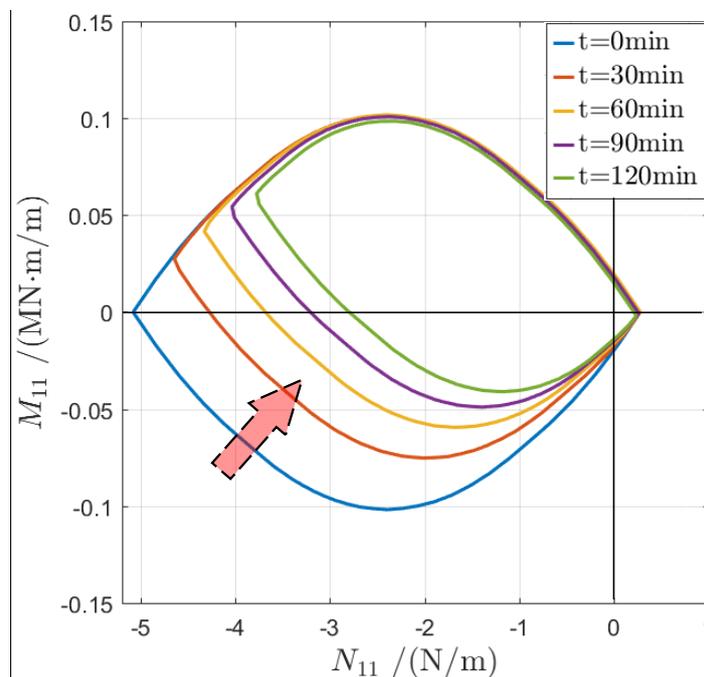


Figure 4.17. Evolution du domaine de résistance dans le plan ( $N_{11} - M_{11}$ ) (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ ) en fonction de la durée du feu

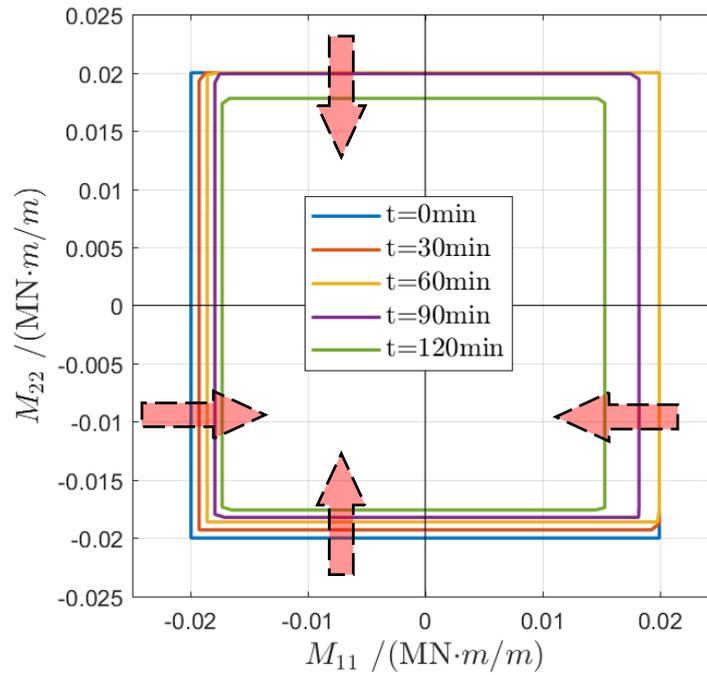


Figure 4.18. Evolution du domaine de résistance dans le plan  $(M_{11} - M_{22})$  (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ ) en fonction de la durée du feu

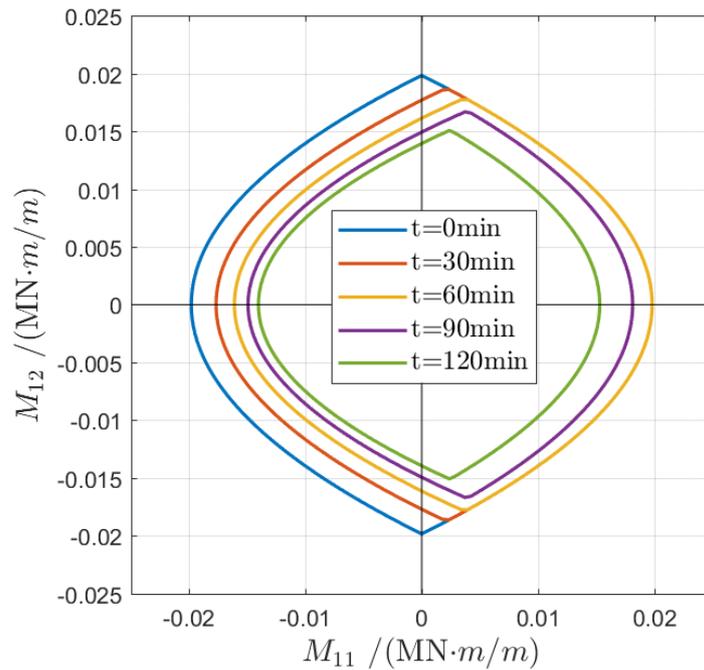


Figure 4.19. Evolution du domaine de résistance dans le plan  $(M_{11} - M_{12})$  (autres  $N_{\alpha\beta} = 0, M_{\alpha\beta} = 0$ ) en fonction de la durée du feu

## 4.6. Conclusions

Ce chapitre s'est intéressé à la détermination du critère de résistance macroscopique d'une plaque en béton armé à partir de la connaissance d'un critère de résistance local du béton et de l'acier constitutif des armatures de renforcement. Le béton armé étant vu comme un milieu hétérogène périodique, un tel critère de résistance macroscopique s'obtient par une méthode de

changement d'échelle, à travers la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture défini sur une cellule de base contenant toute l'information relative à la plaque en béton armé.

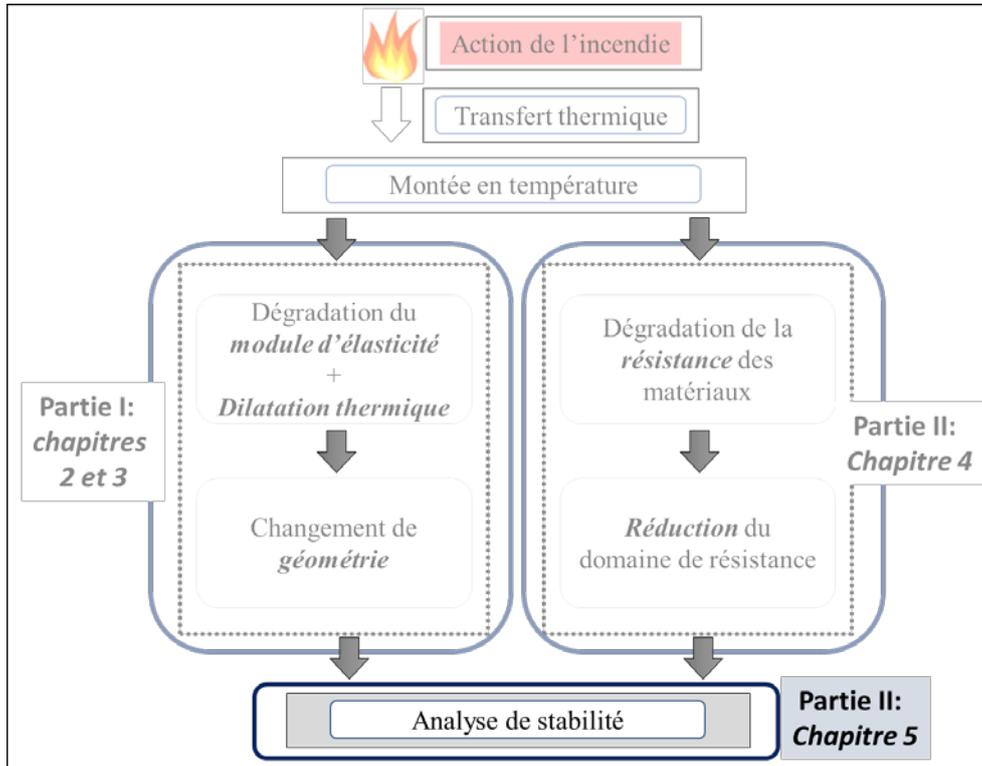
S'appuyant très largement sur des travaux antérieurs (Bleyer, 2015(b) ; Bleyer et de Buhan (2016)), les approches statiques par l'intérieur et cinématique par l'extérieur sont conjointement mises en œuvre pour rechercher respectivement une borne strictement inférieure et une borne strictement supérieure du domaine de résistance macroscopique avec une prise en compte de la dégradation de la résistance du béton et de l'acier à haute température. Pour ce qui concerne l'approche statique, la plaque est tout d'abord discrétisée en plusieurs couches, les champs de contrainte explorés dans cette approche étant pris constants dans chaque couche et devant vérifier le critère local au point inférieur de la couche. Pour ce qui concerne l'approche cinématique, une borne supérieure du domaine de résistance macroscopique a été obtenue en tirant avantage de la convexité de cette fonction d'appui locale.

Dans les études numériques, nous avons montré le caractère de borne strictement inférieure (resp. supérieure) de l'approche statique (resp. cinématique), qui sera utile pour garder le statut de bornes dans le calcul à la rupture relatif à la stabilité d'ensemble du mur. L'influence du renforcement par armatures d'acier sur le domaine de résistance a été également mise en évidence par une comparaison entre les domaines de résistance macroscopiques de la plaque en béton seul et en béton armé. La trace du domaine  $\mathcal{G}$  au plan  $(M_{11}-M_{22})$  et  $(M_{11}-M_{12})$  a été également comparée avec celle du critère de *Nielsen*, montrant une très bonne concordance entre les deux. Enfin, l'influence de l'incendie sur le domaine de résistance macroscopique de la plaque a été analysée. Comme l'on pouvait s'y attendre, on a constaté une réduction du domaine de résistance dans plusieurs plans :  $(N_{11} - M_{11})$ ,  $(M_{11} - M_{12})$  et  $(M_{11} - M_{22})$ , signifiant que la dégradation des propriétés locales de résistance due à l'élévation de la température conduit bien à un « rétrécissement » du domaine de résistance macroscopique.

Le changement de géométrie du mur en condition d'incendie présenté aux chapitres précédents, combiné à cette dégradation du domaine de résistance macroscopique, est susceptible de conduire à la ruine de murs de grande hauteur. Il est ainsi nécessaire de prendre en compte ces deux effets dans le dimensionnement des murs en béton armé sous poids propre et en conditions d'incendie. Nous présenterons dans le chapitre suivant une méthode d'analyse de stabilité de ces murs reposant encore une fois sur la mise en œuvre de l'approche calcul à la rupture, cette fois-ci à l'échelle de la structure toute entière.

# Chapitre 5

## Analyse de la stabilité au feu des murs



Positionnement du chapitre 5 par rapport au plan général

Ce chapitre est consacré à l'analyse de stabilité des murs en béton armé en condition d'incendie par l'approche du calcul à la rupture, utilisant la déformée d'origine thermique comme une donnée relative à la géométrie. On introduit d'abord la discrétisation des murs dans sa configuration déformée en éléments de plaque, ainsi que la notion du facteur de stabilité, qui sera suivie par le rappel du problème du calcul à la rupture relatif à des plaques minces (Salençon, 2013 ; Bleyer, 2015(a)). Le problème de calcul à la rupture ainsi posé est ensuite transformé en un problème d'optimisation tant pour l'approche statique par l'intérieur, que pour l'approche cinématique par l'extérieur, permettant d'encadrer le facteur de stabilité par des bornes inférieure et supérieure. Enfin, une étude paramétrique sera effectuée sur deux types de configurations de murs (murs continus et murs avec joints) afin d'évaluer leur stabilité en conditions d'incendie.

## 5.1. Introduction

Dans le cas d'un mur exposé au feu sur l'une des faces en condition d'incendie, un gradient thermique se développe à travers de l'épaisseur de mur. Il induit, d'une part les dilatations thermiques différentielles à travers l'épaisseur du mur, et d'autre part une dégradation des propriétés de résistance des matériaux constitutifs. Le premier effet conduit à un changement de géométrie d'origine thermique, qui a été déjà modélisé dans les chapitres 2 et 3, tandis que le second conduit à un rétrécissement du domaine de résistance macroscopique, qui a été traité au chapitre 4.

Ce chapitre a pour but d'étudier la stabilité des murs en condition d'incendie par l'approche du calcul à la rupture en tirant avantage, d'une part des données concernant la *géométrie* fournie par la déformée d'origine thermique des murs obtenue par une modélisation en plaque mince de *Kirchhoff-Love* (chapitre 2) ou de *von Karman* (Chapitre 3), d'autre part du domaine de *résistance* macroscopique obtenu par la méthode de changement d'échelle (chapitre 4).

### 5.1.1. Discrétisation de la géométrie du mur déformé

Un mur dans sa configuration déformée, que l'on peut modéliser comme une coque mince, est d'abord discrétisé en facettes planes triangulaires, comme montré sur la figure 5.1. Une telle approximation de la géométrie exacte, d'autant plus précise que la discrétisation est plus fine, permet de modéliser le mur déformé par un assemblage d'éléments de plaques minces, pour lequel l'outil du calcul à la rupture a été déjà développé dans les travaux de Bleyer (2015(a)). Dans ce cas, l'analyse de stabilité des murs ne nécessite que l'information sur la géométrie discrétisée et le domaine de résistance macroscopique des plaques minces, sans qu'il soit besoin de recourir à la première et deuxième forme fondamentale de la surface, qui sont indispensables en théorie des coques. Cette approximation de la géométrie permettra ainsi de simplifier les méthodes de dimensionnement en les rendant accessibles aux ingénieurs.

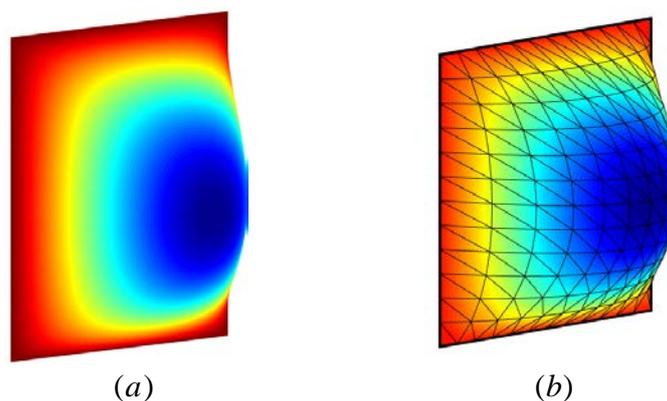


Figure 5.1. Mur déformé modélisé comme une coque mince (a) et géométrie approchée par une discrétisation en facettes planes triangulaires (b) (isovaleurs : déplacement transversal)

### 5.1.2. Notion du facteur de stabilité

L'analyse de stabilité des murs recourra à la notion du *facteur de stabilité*, défini comme le rapport entre le chargement maximal  $w^+$  auquel peut résister les murs en conditions d'incendie et le poids propre réel  $w$  des murs :

$$\lambda^+ = \frac{w^+}{w} \quad (5.1)$$

Un tel facteur supérieur à l'unité correspond à un état potentiellement stable du mur, tandis qu'un facteur inférieur à un signifie que le mur est *certainement* instable.

L'analyse de stabilité des murs en condition d'incendie par le calcul à la rupture a été initialisée par Pham (2015), qui a adopté successivement une modélisation poutre puis une modélisation de type plaque.

- ✓ Dans le premier cas, la poutre simplement appuyée à ses extrémités étant *isostatique*, le chargement extrême  $w^+$  coïncide avec la *limite d'élasticité* obtenue lorsque la résistance de la poutre exprimée à travers le diagramme d'interaction est atteinte en une section de cette poutre. On obtient alors la valeur exacte du *facteur de stabilité*  $\lambda^+$ .
- ✓ Dans le deuxième cas, une première *majoration* de ce facteur de stabilité a été obtenue par la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture utilisant un mode de ruine du type « *mécanisme avec charnières* ».

Plus récemment, Bleyer (2015 (b)) a proposé une approche numérique du calcul à la rupture des plaques ou coques permettant d'optimiser l'encadrement du facteur de stabilité. Dans ces travaux, les murs dans leurs configurations déformées en conditions d'incendie sont d'abord discrétisés en facettes triangulaires, chaque élément fini triangulaire modélisant un élément de plaque (voir 5.1.1). S'appuyant sur une telle géométrie approchée, le facteur de stabilité des murs a été encadré par une borne supérieure et une borne inférieure obtenues respectivement par l'approche cinématique et l'approche statique du calcul à la rupture mises en œuvre numériquement. Cette approche a été utilisée pour analyser les murs continus simplement appuyés sur quatre bords (Bleyer, 2015(b)) ainsi que les murs constitués des panneaux individuels en bandes horizontales simplement appuyés sur quatre bords (Bleyer, 2015(a)). Dans ce dernier cas, les joints, qui ne sont pas pris en compte dans le calcul de la déformée, sont considérés comme des charnières sans résistance à la flexion et au glissement le long l'axe des joints.

### 5.1.3. Organisation du chapitre

Le présent chapitre vise à compléter et approfondir les travaux antérieurs en introduisant les déformées obtenues par les solutions analytiques (chapitre 2) et semi-analytiques (chapitre 3) dans le calcul à la rupture, de façon à pouvoir analyser la stabilité des murs dans différentes configurations. La partie relative au calcul à la rupture s'appuie sur l'outil numérique développé dans la thèse de Bleyer (2015 (a)).

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous allons d'abord définir le problème général du calcul à la rupture de plaques minces. Ensuite, ce problème du calcul à la rupture sera formulé comme un *problème d'optimisation conique de second ordre*, qui peut être traité par le solveur *Mosek*<sup>1</sup>, à travers une discrétisation de la géométrie déformée des murs en éléments triangulaires de plaques. Enfin, quelques exemples seront traités par un tel outil numérique afin d'analyser l'influence d'un certain nombre de paramètres sur la stabilité du mur et le mode de ruine : durée d'incendie, hauteur et élancement du mur, conditions aux limites, présence ou non de joints, etc.

## 5.2. Position du problème de calcul à la rupture de plaques

Cette section a pour but de rappeler la théorie du calcul à la rupture<sup>2</sup> appliquée au modèle des *plaques minces*<sup>3</sup>. On présentera d'abord la définition générale du *domaine des chargements potentiellement supportables* pour de telles structures, avant de rappeler la formulation des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur.

### 5.2.1. Domaine de chargements potentiellement supportables

Considérons la configuration d'une plaque occupant dans l'espace un domaine  $\omega$  situé dans le plan  $Ox_1x_2$  (figure 5.2). Un *mouvement virtuel* quelconque de cette plaque est caractérisé par :

- ✓ une vitesse virtuelle  $\hat{\underline{u}} = \hat{u}_1 \underline{e}_1 + \hat{u}_2 \underline{e}_2$  dans le plan de la plaque, ainsi qu'une vitesse virtuelle *transversale*<sup>4</sup>  $\hat{u}_3 \underline{e}_3$  ;
- ✓ une vitesse virtuelle de rotation dans le plan de la plaque, notée  $\hat{\underline{\theta}}$ .

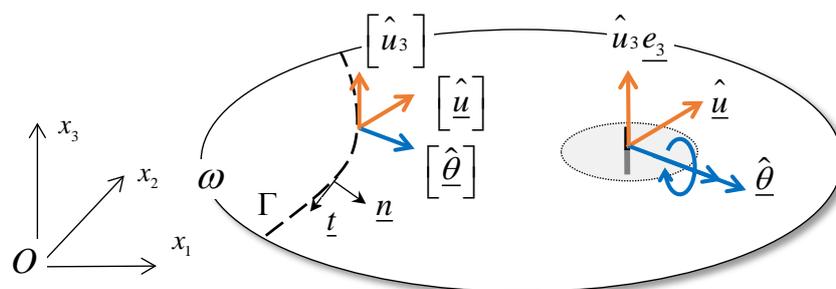


Figure 5.2. Champ de vitesse virtuelle d'une plaque et discontinuités de vitesse à travers une ligne

Un tel champ de vitesses virtuelles est continu par morceaux. Il peut comporter des *discontinuités* de vitesse à travers une ligne  $\Gamma$ , le symbole  $[*] = (*)^+ - (*)^-$  représentant le saut

<sup>1</sup> <https://www.mosek.com/>

<sup>2</sup> Le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage de J. Salençon (2013) ainsi qu'aux travaux de Bleyer (2015) pour plus de détails.

<sup>3</sup> Le qualificatif de plaque *mince* signifie que le critère de résistance porte sur les efforts membranaires et moments de flexion, à l'exclusion des *efforts tranchants*, dont on admet implicitement qu'ils ne sont pas limités par un tel critère (voir chapitre 4).

<sup>4</sup> Ou vitesse de *flèche*.

de la quantité (\*) à travers la ligne  $\Gamma$  en suivant la normale unitaire  $\underline{n}$  orientée de la zone (-) vers la zone (+).

Dans ces conditions, on peut montrer par application de la *Méthode des Puissances Virtuelles* (Salençon, 2013) que la *puissance virtuelle des efforts intérieurs* dans un tel champ de vitesse supposé continu, est donnée par :

$$P_{(i)}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}}) = - \int_{\omega} (\underline{N} : \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{M} : \hat{\underline{\underline{\chi}}} + \underline{V} \cdot \hat{\underline{\underline{\gamma}}}) dS \quad (5.2)$$

où le tenseur des taux de *déformations membranaires*, le tenseur du taux de *courbures* ainsi que le vecteur du taux de *déformations de cisaillement* sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} &= 1/2(\underline{\nabla}(\hat{\underline{u}}) + {}^T \underline{\nabla}(\hat{\underline{u}})) & (a) \\ \hat{\underline{\underline{\chi}}} &= \underline{\nabla}(\hat{\underline{\theta}}) & (b) \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}} &= \underline{\nabla} \hat{u}_3 - \hat{\underline{\theta}} & (c) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dans le cas où le champ de vitesse virtuelle est discontinu, cette puissance doit être complétée par la contribution des discontinuités  $P_{(i)}^{\Gamma}$  :

$$P_{(i)}^{\Gamma}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}}) = - \int_{\Gamma} \left( (\underline{N} \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\underline{u}}] + (\underline{V} \cdot \underline{n}) [\hat{u}_3] + (\underline{M} \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\underline{\theta}}] \right) ds \quad (5.4)$$

En raison de l'hypothèse de *résistance infinie* d'une plaque mince vis-à-vis des efforts tranchants, on peut montrer que les seuls que les seuls mouvements *pertinents*<sup>5</sup> sont ceux qui obéissent aux *conditions de Kirchhoff-Love* :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{\gamma}}} = \underline{\nabla} \hat{u}_3 - \hat{\underline{\theta}} &= 0 & (a) \\ [\hat{u}_3] &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (5.5)$$

de sorte que les contributions des efforts tranchants  $\underline{V} \cdot \hat{\underline{\underline{\gamma}}}$  et  $(\underline{V} \cdot \underline{n}) [\hat{u}_3]$  à la puissance virtuelle des efforts intérieurs disparaissent, les expressions (5.2) et (5.4) s'écrivant alors :

$$\begin{aligned} P_{(i)}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) &= - \int_{\omega} (\underline{N} : \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{M} : \hat{\underline{\underline{\chi}}}) dS \quad \text{avec} \quad \hat{\underline{\underline{\chi}}} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} u_3) \\ P_{(i)}^{\Gamma}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) &= - \int_{\Gamma} \left( (\underline{N} \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\underline{u}}] + (\underline{M} \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\underline{\theta}}] \right) ds \end{aligned} \quad (5.6)$$

La plaque étant alors soumise à une densité de force surfacique  $\underline{p}^0$  dans son plan, ainsi qu'à une densité de force surfacique *transversale*  $p_3$ , la puissance des efforts extérieurs est donnée par :

$$P_{(e)}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) = \int_{\omega} (\underline{p}^0 \cdot \hat{\underline{u}} + p_3 \hat{u}_3) dS + \int_{\partial\omega} (\underline{N}^d \cdot \hat{\underline{u}} + Q^d \hat{u}_3 + M^d \hat{\underline{\theta}} \cdot \underline{n}) ds \quad (5.7)$$

<sup>5</sup> Au sens de l'approche cinématique du calcul à la rupture, un champ de vitesse est *pertinent* si la *puissance résistante maximale* qui lui est associée reste bornée.

où  $\underline{N}^d$ ,  $\underline{Q}^d$  et  $\underline{M}^d$  sont respectivement les densités d'efforts extérieurs membranaire et tranchant et de moment de flexion sur le bord de la plaque. On supposera que la puissance virtuelle des efforts extérieurs peut se mettre sous la forme suivante:

$$P_{(e)}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) = \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} \quad (5.8)$$

où  $\underline{Q}$  désigne le vecteur des *paramètres de chargement* tandis que  $\hat{\underline{q}}$  est le vecteur des paramètres cinématiques associés à  $\underline{Q}$  par dualité.

En vertu du *Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.)*, la plaque est en *équilibre*<sup>6</sup> si et seulement si la somme de la puissance des efforts extérieurs et de celle des efforts intérieurs est nulle pour un mouvement virtuel quelconque, *cinématiquement admissible (C.A.)* avec le vecteur  $\hat{\underline{q}}$  :

$$\forall (\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) \text{ C.A. avec } \hat{\underline{q}} : P_{(e)} + P_{(i)} + P_{(i)}^\Gamma = 0 \quad (5.9)$$

et tout champ d'efforts intérieurs  $(\underline{N}, \underline{V}, \underline{M})$  sera *statiquement admissible (S.A.)* avec le chargement  $\underline{Q}$  s'il satisfait à la condition (5.9) pour tout champ de vitesse C.A. Compte tenu du théorème de la divergence, l'expression (5.9) est équivalente aux équations d'équilibre (5.10(a)), ainsi qu'aux équations de saut (5.10(b)) et aux conditions aux limites en efforts (5.10(c)) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{div} \underline{N} + \underline{p}^0 = 0 \\ \text{sur } \omega : \text{div} \underline{V} + \underline{p}_3 = 0 \\ \text{div} \underline{M} + \underline{V} = 0 \end{array} \right\} (a) \quad \text{sur } \Gamma : \left. \begin{array}{l} [\underline{N}] \cdot \underline{n} = 0 \\ [\underline{V}] \cdot \underline{n} = 0 \\ [\underline{M}] \cdot \underline{n} = 0 \end{array} \right\} (b) \quad \text{sur } \partial\omega : \left. \begin{array}{l} \underline{N} \cdot \underline{n} = \underline{N}^d \\ \underline{Q}_n = \underline{Q}^d \\ \underline{M}_m = \underline{M}^d \end{array} \right\} (c) \quad (5.10)$$

La résistance de la plaque étant caractérisée en tout point par son *domaine de résistance macroscopique*  $\mathcal{G}$ , déterminé au chapitre précédent par une méthode d'homogénéisation, le *domaine des chargements potentiellement supportables* par la plaque repose sur la compatibilité entre les équations d'*équilibre* et le respect en tout point du critère de *résistance* macroscopique :

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists (\underline{N}, \underline{M}) \text{ S.A. avec } \underline{Q} \\ \forall (x_1, x_2) \in \omega, (\underline{N}, \underline{M})(x_1, x_2) \in \mathcal{G} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Dans le cas où les matériaux constitutifs des plaques sont *ductiles*, c'est-à-dire lorsque le critère de résistance est un critère de plasticité parfaite avec règle d'écoulement plastique associée, le calcul à la rupture (appelé dans ce cas *analyse limite*) permet de déterminer le domaine des chargements *effectivement* supportés. Le calcul à la rupture représente donc une extension de l'analyse limite au cas où les matériaux peuvent présenter des caractéristiques de *fragilité* et l'adverbe « *potentiellement* » signifie qu'il se peut que les chargements extrêmes (situés sur la frontière du domaine  $\mathcal{K}$ ) ne puissent pas être atteints au terme d'un trajet dans l'espace des paramètres de chargement. De façon générale, la fiabilité qu'il convient d'accorder

<sup>6</sup> Equilibre *statique* car on néglige les forces d'inertie.

aux résultats du calcul à la rupture est d'autant meilleure que le comportement du matériau constitutif se rapproche de la situation idéale de l'élastoplasticité parfaite (de Buhan, 2007).

Si un chargement obtenu par le calcul à la rupture n'est que *potentiellement* supportable, il est sûr en revanche que tous les chargements situés en dehors du domaine  $\mathcal{K}$  ne peuvent pas être atteints en raison du fait que, par définition, la compatibilité entre l'équilibre et la résistance n'est pas satisfaite. Il s'avère donc que l'appartenance au domaine  $\mathcal{K}$  constitue une condition *nécessaire* de stabilité de la structure.

## 5.2.2. Approche statique par l'intérieur

L'approche statique du calcul à la rupture revient à appliquer directement la définition (5.11), c'est-à-dire qu'un chargement  $\underline{Q}$  appartient au domaine  $\mathcal{K}$  si et seulement s'il est possible de mettre en évidence au moins un champ des efforts intérieurs  $(\underline{N}, \underline{M})$  dans toute la plaque statiquement admissible avec  $\underline{Q}$  et vérifiant en tout point le critère de résistance  $\mathcal{G}$  de la plaque.

Dans l'espace des paramètres de chargement, la définition (5.11) permet de construire point à point le domaine des chargements potentiellement supportables  $\mathcal{K}$ . Dans la pratique, afin d'accélérer ce processus, on peut profiter de la propriété de *convexité* du domaine  $\mathcal{K}$  vérifiée si le critère de résistance  $\mathcal{G}$  de la plaque est lui-même convexe<sup>7</sup> (Salençon 2013). Comme montré sur la figure 5.3(a), l'*enveloppe convexe*, désignée par  $\mathcal{K}^s$ , de tous les chargements caractérisés comme potentiellement supportables (nuage de points noirs) constitue ainsi une *approche par l'intérieur* du domaine des chargements potentiellement supportables :  $\mathcal{K}^s \subseteq \mathcal{K}$ .

Une autre méthode consiste à procéder par les chargements radiaux. Etant donné un champ d'efforts intérieurs  $(\underline{N}^*, \underline{M}^*)$  quelconque équilibrant un chargement  $\underline{Q}^*$ , on cherche à maximiser comme suit le facteur multiplicatif  $\lambda$  (figure 5.3(b)) :

$$\begin{aligned} \lambda^s(\underline{N}^*, \underline{M}^*) &= \sup \left\{ \lambda \mid (\lambda \underline{N}^*, \lambda \underline{M}^*)(x_1, x_2) \in \mathcal{G}, \forall (x_1, x_2) \in \omega \right\} \\ &\leq \lambda^+(\underline{Q}^*) = \sup \left\{ \lambda \mid \lambda \underline{Q}^* \in \mathcal{K} \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

de sorte que la valeur maximale  $\lambda^s$  obtenue est une *borne inférieure* du facteur multiplicatif  $\lambda^+$  telle que  $\lambda^+ \underline{Q}^*$  soit sur la frontière de  $\mathcal{K}$  :

$$\lambda^s(\underline{N}^*, \underline{M}^*) \leq \lambda^+(\underline{Q}^*) \quad (5.13)$$

<sup>7</sup> Le chapitre précédent nous a permis de montrer que le domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$

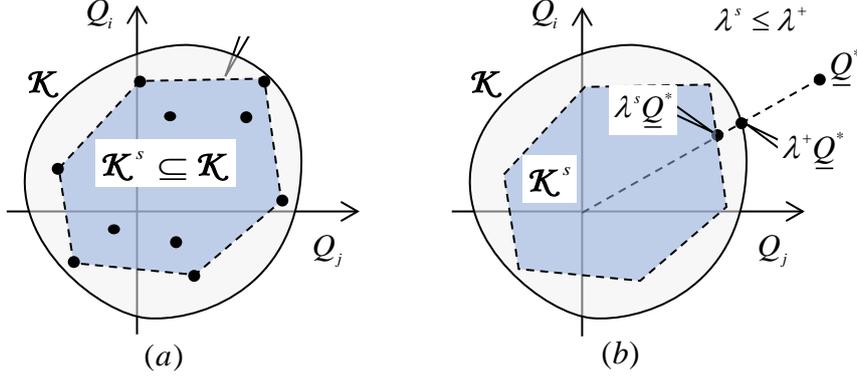


Figure 5.3. Construction du domaine des chargements potentiellement supportables par l'enveloppe convexe d'un nuage de points (a) et par trajets de chargement radiaux (b)

### 5.2.3. Approche cinématique par l'extérieur

L'approche cinématique par l'extérieur repose sur, d'une part sur la dualisation des équations d'équilibre à l'aide du *Principe des Puissances Virtuelles* et, d'autre part sur la notion de *puissance de résistance maximale* définie à partir du domaine de résistance macroscopique.

En vertu de (5.8) et (5.9), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{\hat{u}}, \hat{u}_3) C.A. \text{ avec } \hat{q}, \forall (\underline{N}, \underline{M}) S.A. \text{ avec } \underline{Q} : \\ P_{(e)} = \underline{Q} \cdot \hat{q} = -(P_{(i)} + P_{(i)}^r) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Etant donné un champ de vitesse  $(\underline{\hat{u}}, \hat{u}_3)$  C.A. avec  $\hat{q}$ , l'opposé de la puissance des efforts intérieurs (appelé aussi *puissance de déformation*) peut être majoré comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \forall (\underline{N}, \underline{M}) S.A. \text{ avec } \underline{Q} \\ \forall (x_1, x_2) \in \omega, (\underline{N}, \underline{M})(x_1, x_2) \in \mathcal{G} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{(e)} = \underline{Q} \cdot \hat{q} = -(P_{(i)} + P_{(i)}^r) \leq P_m(\underline{\hat{u}}, \hat{u}_3) \quad (5.15)$$

où  $P_m(\underline{\hat{u}}, \hat{u}_3)$  désigne la *puissance résistante maximale*, c'est-à-dire la valeur maximale possible de la puissance de déformation développée dans le champ de vitesse considéré, compte tenu du fait que les efforts intérieurs doivent vérifier en tout point le critère de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  :

$$P_m(\underline{\hat{u}}, \hat{u}_3) = \int_{\omega} \pi(\underline{\hat{\epsilon}}, \hat{\chi}) \, ds + \int_{\Gamma} \Pi(\underline{n}; [\underline{\hat{u}}], [\hat{\theta}]) \, dl \quad (5.16)$$

Dans l'expression (5.16) ci-dessus, les fonctions  $\pi$  et  $\Pi$  désignent les *fonctions d'appui* du domaine de résistance macroscopique, respectivement définies par :

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\hat{\epsilon}}, \hat{\chi}) &= \sup_{(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}} \left\{ \underline{N} : \hat{\underline{\epsilon}} + \underline{M} : \hat{\chi} \right\}, \\ \Pi(\underline{n}; [\underline{\hat{u}}], [\hat{\theta}]) &= \sup_{(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}} \left\{ (\underline{N} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{\hat{u}}] + (\underline{M} \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\theta}] \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

On remarque que la fonction d'appui  $\Pi$  relative aux discontinuités peut être calculée à partir de la fonction  $\pi$  relative au taux de déformation :

$$\Pi(\underline{n}; [\hat{\underline{u}}], [\hat{\underline{\theta}}]) = \pi([\hat{\underline{u}}] \otimes \underline{n}, [\hat{\underline{\theta}}] \otimes \underline{n}) \quad (5.18)$$

où l'opérateur  $\underline{A} \otimes \underline{B}$  désigne la partie symétrique du produit tensoriel des vecteurs  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ .

Il résulte alors immédiatement de (5.15), que tout chargement  $\underline{Q}$  potentiellement supportable est tel que la puissance qu'il développe dans tout champ de vitesse virtuelle  $(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)$  cinématiquement admissible avec le vecteur des paramètres cinématiques  $\hat{\underline{q}}$ , est inférieure ou égale à la puissance résistante maximale calculée dans le même champ :

$$\underline{Q} \in \mathcal{K} \Rightarrow \begin{cases} \forall (\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) \text{ C.A. avec } \hat{\underline{q}} : \\ \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} \leq P_m(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) \end{cases} \quad (5.19)$$

D'un point de vue géométrique, la condition (5.19) signifie que pour un champ de vitesses virtuelles  $(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)$  donné, le domaine des chargements potentiellement supportables se situe dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par l'hyperplan d'équation  $\underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} = P_m(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)$  ayant  $\hat{\underline{q}}(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)$  comme normale. Tirant avantage de la convexité du domaine  $\mathcal{K}$ , il est ainsi possible de construire une approche par l'extérieur  $\mathcal{K}^c$  de ce domaine comme l'intersection de tels demi-espaces, comme cela est montré sur la figure 5.4(a).

Se plaçant le long d'un trajet de chargement radial  $\lambda \underline{Q}^*$ , ( $\lambda \geq 0$ ) (figure 5.4(b)), l'approche cinématique conduit alors à une *majoration* du chargement extrême  $\lambda^+ \underline{Q}^*$  :

$$\lambda^+(\underline{Q}^*) \leq \lambda^c(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) = \frac{P_m(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)}{\underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{q}}}, \quad \underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{q}} > 0 \quad (5.20)$$

la valeur exacte du multiplicateur extrême pouvant même être obtenue en recherchant le minimum de ce majorant sur l'ensemble de tous les champs de vitesse :

$$\lambda^+(\underline{Q}^*) = \min_{(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)} \left\{ \frac{P_m(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3)}{\underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{q}}}, \forall (\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3) \text{ C.A. avec } \hat{\underline{q}} ; \underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{q}} > 0 \right\} \quad (5.21)$$

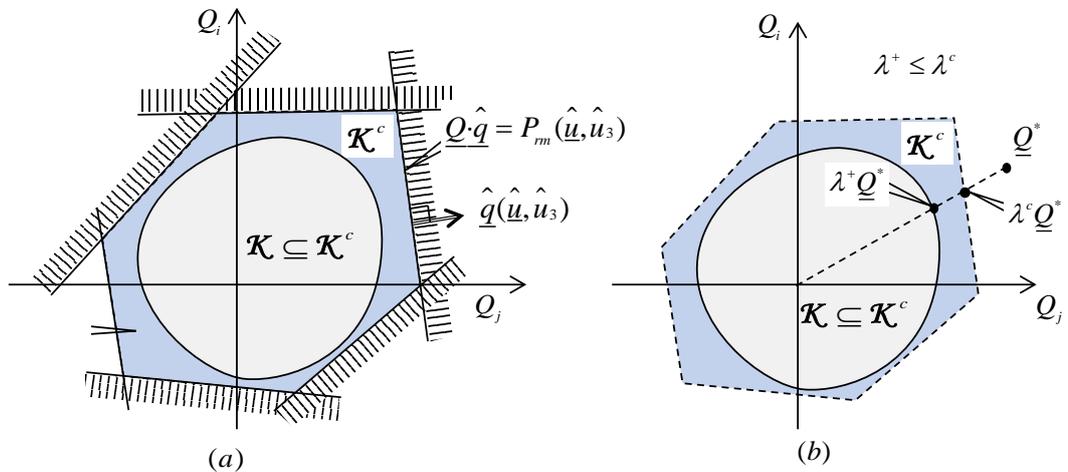


Figure 5.4. Approche cinématique par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables

La combinaison des deux approches permet d'*encadrer* le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$\mathcal{K}^s \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^c \quad (5.22)$$

ainsi que, le long d'un trajet de chargement radial, la *valeur extrême* du facteur multiplicatif  $\lambda^+$  par deux bornes inférieures et supérieures :

$$\lambda^s \leq \lambda^+ \leq \lambda^c \quad (5.23)$$

### 5.2.4. Application à la stabilité des murs coupe-feu

Les murs coupe-feu dont nous nous proposons d'analyser la stabilité en condition d'incendie, sont généralement des murs *non-porteurs*. Il s'ensuit que le seul chargement mécanique auquel ils sont soumis est le *poids propre* représenté par une densité surfacique d'efforts  $-w\underline{e}_1$  où  $\underline{e}_1$  est le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut. Dans le cadre du formalisme que nous avons adopté des paramètres de chargement, nous avons donc affaire à un seul paramètre de chargement  $Q=w$ , dont la valeur extrême peut être encadrée par les approches statique et cinématique du calcul à la rupture :

$$w^s \leq w^+ \leq w^c \quad (5.24)$$

et donc en tenant compte de la définition (5.1) du facteur de stabilité, nous obtenons un encadrement de ce dernier :

$$\lambda^s = \frac{w^s}{w} \leq \lambda^+ = \frac{w^+}{w} \leq \lambda^c = \frac{w^c}{w} \quad (5.25)$$

## 5.3. Mise en œuvre par la méthode des éléments finis

La mise en œuvre numérique par le biais de la méthode des éléments finis des deux approches statique et cinématique du calcul à la rupture, développée pour les plaques par Bleyer (2016), sera présentée dans cette section.

### 5.3.1. Traitement numérique de l'approche statique par l'intérieur

La mise en œuvre par éléments finis de l'approche statique repose sur la discrétisation des champs d'efforts intérieurs. La géométrie d'une coque mince à faible courbure (représentant le mur coupe-feu déformé sous sollicitation thermique) est d'abord discrétisée en facettes triangulaires planes. La géométrie approchée résultant de cette discrétisation est caractérisée par l'interpolation *linéaire* suivante :

$$\forall \underline{x} \in \Omega^{(e)} : \underline{x} = \sum_{k=1}^3 N_k^1(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (5.26)$$

c'est-à-dire que la position de tout point  $\underline{x}$  appartenant à un élément fini triangulaire dépend linéairement de la position des trois nœuds  $\underline{x}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) placés aux trois sommets du triangle. Dans l'expression (5.26), les fonctions de forme  $N_k^1(\underline{a})$ , qui permettent de faire un changement

de variables entre le système de coordonnées globales  $\underline{x}$  et celui des coordonnées  $\underline{a}$  de l'élément de référence représenté sur la figure 5.5, sont définies par :

$$N_1^1(\underline{a}) = a_1, N_2^1(\underline{a}) = a_2, N_3^1(\underline{a}) = 1 - a_1 - a_2 \quad (5.27)$$

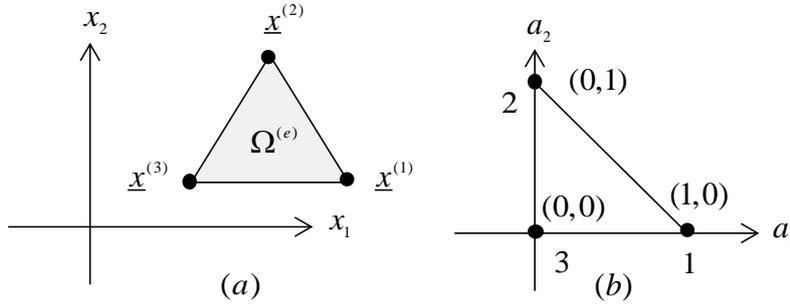


Figure 5.5. Discretisation de la géométrie par éléments triangulaires (à gauche : l'élément dans un repère global ; à droite : l'élément de référence)

Pour chaque élément, on considère une interpolation *linéaire* à 3 nœuds pour les efforts membranaires et pour les efforts tranchants, tandis que les moments de flexion sont interpolés par des fonctions de forme *quadratiques* sur des triangles à 6 nœuds (voir figure 5.6).

$$\forall \underline{x} \in \Omega^{(e)} : \begin{cases} \underline{\underline{N}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 N_k^1(\underline{a}) \underline{\underline{N}}^{(k)} \\ \underline{\underline{V}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 N_k^1(\underline{a}) \underline{\underline{V}}^{(k)} \\ \underline{\underline{M}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^6 N_k^2(\underline{a}) \underline{\underline{M}}^{(k)} \end{cases} \quad (5.28)$$

où les fonctions de forme  $N_k^1(\underline{a})$  relatives à l'interpolation linéaire sont données par (5.27), tandis que les fonctions quadratiques sont définies par :

$$\begin{aligned} N_1^2(\underline{a}) &= a_1(2a_1 - 1), & N_2^2(\underline{a}) &= a_2(2a_2 - 1), \\ N_3^2(\underline{a}) &= (1 - a_1 - a_2)(1 - 2a_1 - 2a_2), & N_4^2(\underline{a}) &= 4a_1a_2, \\ N_5^2(\underline{a}) &= 4a_2(1 - a_1 - a_2), & N_6^2(\underline{a}) &= 4a_1(1 - a_1 - a_2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Il convient de noter que, afin de prendre en compte le saut des efforts intérieurs à travers une ligne, les variables  $(\underline{\underline{N}}^{(i)}, \underline{\underline{M}}^{(j)}, \underline{\underline{V}}^{(i)})$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 6$ ) sont attachées à chaque élément  $\Omega^{(e)}$  mais pas à chaque nœud géométrique, c'est-à-dire que ces variables varient lorsque l'on passe d'un élément à l'autre.

Etant donné une numérotation de toutes les variables de la coque discrétisée, la formulation discrète des équations d'équilibre (5.9(a)), des équations de sauts (5.9(b)) et des conditions aux limites (5.9(c)), peut être mise sous la forme matricielle suivante (Bleyer, 2016) :

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{F} = 0 \quad (5.30)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma} = \{\dots, N_{\alpha\beta}^{(e)}, M_{\alpha\beta}^{(e)}, V_{\alpha}^{(e)}, \dots\}$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) est un vecteur regroupant *toutes* les variables attachées à l'ensemble des éléments  $\cup \Omega^{(e)}$ , tandis que  $\mathbf{F}$  est le vecteur associé au chargement

extérieur. Le champ des efforts intérieurs représenté le vecteur  $\Sigma$  à travers les interpolations (5.28), est donc *statiquement admissible* s'il satisfait l'équation *linéaire* (5.30).

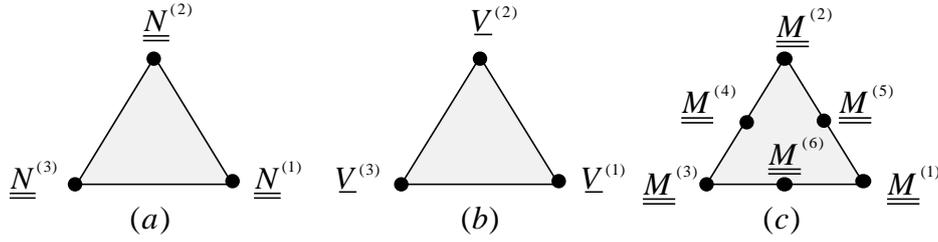


Figure 5.6. Discretisation du champ des efforts membranaires(a), des efforts tranchants(b) et des moments de flexion(c)

Par ailleurs, ce champ des efforts intérieurs doit satisfaire au critère de *résistance* macroscopique  $\mathcal{F}(N_{\alpha\beta}^{(e)}, M_{\alpha\beta}^{(e)}) \leq 0$ , obtenu par la procédure du changement d'échelle décrite au chapitre précédent, en considérant une discrétisation de l'épaisseur en  $n$  couches et un champ de contrainte  $\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}$  ( $i=1, \dots, n$ ) constant par couche (cf. chapitre 4) :

$$\forall e : (N_{\alpha\beta}^{(e)}, M_{\alpha\beta}^{(e)}) \in \mathcal{G}^s \subseteq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}(N_{\alpha\beta}^{(e)}, M_{\alpha\beta}^{(e)}) \leq 0 \quad (5.31)$$

Une telle discrétisation permet d'intégrer implicitement dans l'approche calcul à la rupture l'évolution de la résistance du béton et de l'acier en fonction de la température.

Finalement, étant donné un vecteur du chargement extérieur  $\underline{Q}^*$  auquel est associé le vecteur  $\mathbf{F}^*$ , et appliquant directement l'approche par trajet de chargement radial définie par (5.12), il est alors possible de calculer un *minorant*  $\lambda^s \underline{Q}^*$  du chargement extrême  $\lambda^+ \underline{Q}^*$  auquel peut résister la coque. Le facteur multiplicatif  $\lambda^s$  associé à ce minorant est obtenu par la résolution du *problème d'optimisation* suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \geq \lambda^s = \max \lambda \\ \text{t.q. } \mathbf{H}\Sigma + \lambda\mathbf{F}^* = 0 \\ \mathcal{F}(N_{\alpha\beta}^{(e)}, M_{\alpha\beta}^{(e)}) \leq 0 \quad (\forall e) \end{aligned} \quad (5.32)$$

En raison du fait que le critère de résistance macroscopique  $\mathcal{F}(N_{\alpha\beta}^{(e)}, M_{\alpha\beta}^{(e)}) \leq 0$  peut être exprimé à travers un système d'équations *linéaires* et des contraintes *coniques du second ordre*, le problème (5.32) peut être formulé comme un *problème d'optimisation conique du second ordre*, dont la résolution est obtenue par le solveur MOSEK (MOSEK, 2014).

### 5.3.2. Traitement numérique de l'approche cinématique par l'extérieur

Tout comme pour l'approche statique, la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture commence par la discrétisation des champs de vitesse virtuels faite à partir du maillage éléments finis. Une interpolation *linéaire* est choisie pour la vitesse de rotation  $\hat{\theta}$  tandis que la variation des vitesses virtuelles transversales  $\hat{u}_3$  et dans le plan  $\hat{u}$  dans un élément  $\Omega^{(e)}$  est *quadratique* :

$$\forall \underline{x} \in \Omega^{(e)} : \begin{cases} \hat{\underline{u}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^6 N_k^2(\underline{a}) \underline{u}^{(k)} \\ \hat{u}_3(\underline{x}) = \sum_{k=1}^6 N_k^2(\underline{a}) u_3^{(k)} \\ \hat{\underline{\theta}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 N_k^1(\underline{a}) \underline{\theta}^{(k)} \end{cases} \quad (5.33)$$

Tout comme pour les efforts intérieurs, ces vitesses virtuelles sont attachées à chaque élément, ce qui permet de prendre en compte les *discontinuités de vitesse* dans le calcul de la puissance maximale résistante. Les champs de taux de déformations membranaires  $\underline{\varepsilon} = \{\dots, \hat{\underline{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^{(e)}, \dots\}$  et de courbures  $\underline{\chi} = \{\dots, \hat{\chi}_{\alpha\beta}^{(e)}, \dots\}$  *cinématiquement admissibles* avec un champ de vitesse virtuelle  $(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}})$  sont définis les relations cinématiques (5.3), qui s'écrivent sous forme matricielle :

$$\underline{\varepsilon} = \mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{U}, \underline{\chi} = \mathbf{B}_\chi \mathbf{U}, \mathbf{B}_\gamma \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.34)$$

où  $\mathbf{U}$  est un vecteur regroupant tous les vitesses virtuelles:

$$\mathbf{U} = \{\dots, \hat{u}_\alpha^{(e)}, \hat{u}_3^{(e)}, \hat{\theta}_\alpha^{(e)}, \dots\} \quad (5.35)$$

Les discontinuités de vitesse à travers toutes les arêtes séparant les éléments de plaques triangulaires, sont regroupées dans les vecteurs  $[\mathbf{u}]$ ,  $[\mathbf{u}_3]$  et  $[\boldsymbol{\theta}]$  :

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{U}, [\mathbf{u}_3] = \mathbf{D}_{u_3} \mathbf{U} = \mathbf{0}, [\boldsymbol{\theta}] = \mathbf{D}_\chi \mathbf{U} \quad (5.36)$$

On recherche alors un *majorant* du chargement extrême le long d'un trajet de chargement radial (voir (5.20)). Etant donné un chargement  $\underline{Q}^*$ , une borne supérieure  $\lambda^c$  du facteur multiplicatif extrême  $\lambda^+$  est obtenue par minimisation de la puissance résistante maximale sous condition d'un champ de vitesse virtuelle normalisée  $\underline{Q}^* \hat{q}$  :

$$\lambda^+ \leq \lambda^c = \min_{\text{t.q. } \underline{Q}^* \hat{q}=1} \left\{ \sum_{e=1}^{N_E} \int_{\Omega^{(e)}} \pi(\underline{\hat{\underline{\varepsilon}}}, \underline{\hat{\chi}}) dS + \sum_{j=1}^{N_D} \int_{\Gamma^{(j)}} \pi([\hat{\underline{u}}]^s \otimes \underline{n}, [\hat{\underline{\theta}}]^s \otimes \underline{n}) ds \right\} \quad (5.37)$$

où  $\pi$  est la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$  tandis que  $N_E$  et  $N_D$  sont respectivement le nombre d'éléments et le nombre de lignes de discontinuités. Compte tenu de la convexité du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}$ ,  $\pi$  peut être approximée *par excès* par la fonction d'appui  $\pi^c$  du domaine  $\mathcal{G}^c$ , ce dernier étant obtenu par une quadrature trapézoïdale, comme cela a été montré au chapitre 4 :

$$\forall (\underline{\hat{\underline{\varepsilon}}}, \underline{\hat{\chi}}) : \pi(\underline{\hat{\underline{\varepsilon}}}, \underline{\hat{\chi}}) \leq \pi^c(\underline{\hat{\underline{\varepsilon}}}, \underline{\hat{\chi}}) \quad (5.38)$$

Par ailleurs, les intégrales dans la minimisation (5.37) peuvent être approximées par une quadrature numérique dans chaque élément  $\Omega^{(e)}$  et sur chaque arête de discontinuité  $\Gamma^{(j)}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{(e)}} \pi(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}) \, ds &\leq \sum_g \omega_{e,g} \pi^c(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}_{e,g}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}_{e,g}) \\
\int_{\Gamma^{(j)}} \pi(\left[ \hat{\underline{u}} \right] \otimes \underline{n}, \left[ \hat{\underline{\theta}} \right] \otimes \underline{n}) \, dl &\leq \sum_{g'} \omega_{j,g'} \pi^c(\left[ \hat{\underline{u}} \right]_{j,g'} \otimes \underline{n}, \left[ \hat{\underline{\theta}} \right]_{j,g'} \otimes \underline{n})
\end{aligned} \tag{5.39}$$

où  $g$  et  $g'$  correspondent respectivement aux points de *Gauss* des éléments triangulaires  $\Omega^{(e)}$  et des segments de discontinuités  $\Gamma^{(j)}$  tandis que les coefficients  $\omega_{e,g}$  et  $\omega_{j,g'}$  sont les *poinds d'intégration*.

Finalement, le facteur multiplicatif  $\lambda^+$  associé au chargement  $\underline{Q}^*$  est *majoré* par la borne supérieure  $\lambda^c$ , obtenue par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda^+ \leq \lambda^c &= \min \left\{ \sum_{e=1}^{N_E} \sum_g \omega_{e,g} \pi^c(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}_{e,g}, \underline{\hat{\underline{\chi}}}_{e,g}) + \sum_{j=1}^{N_D} \sum_{g'} \omega_{j,g'} \pi^c(\left[ \hat{\underline{u}} \right]_{j,g'} \otimes \underline{n}, \left[ \hat{\underline{\theta}} \right]_{j,g'} \otimes \underline{n}) \right\} \\
\text{t.q. } \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{1}, \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{U}, \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_\chi \mathbf{U}, \mathbf{B}_\gamma \mathbf{U} = \mathbf{0}, \\
[\mathbf{u}] &= \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{U}, [\mathbf{u}_3] = \mathbf{D}_{u_3} \mathbf{U} = \mathbf{0}, [\boldsymbol{\theta}] = \mathbf{D}_\chi \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Compte tenu du fait que la fonction d'appui  $\pi^c(\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}, \underline{\hat{\underline{\chi}}})$  du domaine de résistance macroscopique  $\mathcal{G}^c$  peut être exprimée à partir de *contraintes coniques du second ordre*, le problème de minimisation (5.40) peut ainsi être formulé comme un problème d'optimisation conique, qui sera résolu par le solveur Mosek.

## 5.4. Application à l'analyse de stabilité des murs coupe-feu

L'objectif de cette section est d'évaluer la tenue au feu des murs en condition d'incendie à travers le facteur de stabilité obtenu par le calcul à la rupture utilisant les déformées des murs précédemment calculés comme une *donnée géométrique*. Le calcul proprement dit du facteur de stabilité est effectué numériquement comme expliqué ci-dessus, à partir d'une discrétisation par éléments finis suivie d'un calcul d'optimisation convexe sous contraintes non-linéaires.

### 5.4.1. Prise en compte de la déformée

L'analyse de stabilité des murs en béton armé par l'approche du calcul à la rupture présentée dans les sections 5.2 et 5.3 nécessite préalablement de calculer la déformée sous chargement thermique, qui est ensuite introduite comme une donnée géométrique dans le calcul à la rupture. Dans la pratique, cette déformée d'origine thermique peut être obtenue soit par la mise en œuvre d'un logiciel de calcul utilisant la méthode des éléments finis tel que le logiciel *Marc*<sup>8</sup> (Pham, 2014 ; Bleyer *et al*, 2015(b)), soit par les solutions analytiques présentées au Chapitre 2 ou les solutions semi-analytiques développées au Chapitre 3 pour prendre en compte de l'effet «  $P-\delta$  ». Il est donc intéressant de comparer les déformées d'origine thermique des murs obtenues par ces solutions analytiques avec celles obtenues par *Marc* qui étaient utilisées comme une donnée de géométrie dans les travaux précédents (Pham, 2014 ; Bleyer *et al*, 2015(b)).

<sup>8</sup> <http://www.mssoftware.com/>

Dans le tableau 5.1, on compare les déplacements transversaux *maximaux* des murs de différentes largeurs ( $b= 12, 60, 120\text{m}$ ) au bout de 2h obtenus par les différentes modélisations. Ceux issus de la modélisation par plaques de *Kirchhoff-Love* correspondent à la déformée d'origine *purement thermique*, tandis que ceux calculés à travers le modèle de plaque de *von Karman* correspondent à la déformée totale avec prise en compte de l'effet «  $P-\delta$  ». Les déformées des murs modélisés par les éléments de plaque utilisant le logiciel *Marc* sont issues de la thèse de Pham (2014). Enfin, la modélisation 1D des murs comme des poutres en déformations planes correspond au cas limite d'un mur de largeur infinie ( $a = 12\text{m}, b \rightarrow \infty$ ) (Yang *et al.*, 2016).

N°	Dimensions des murs		Modélisation 2D			Modélisation 1D
	Hauteur: $a$ (/m)	Largeur: $b$ (/m)	<i>Kirchhoff-Love</i> (/cm)	<i>von Karman</i> (/cm)	Marc (/cm)	Poteau en déformations planes ( $a=12\text{m}$ )
1	12	12	54,6	59,7	30	138,4
2	12	60	92,7	135,8	90	
3	12	120	92,9	137,5		

Tableau 5.1. Déplacement transversal maximal au bout d'une durée d'incendie de 2h de murs appuyés sur leurs quatre bords modélisés comme une plaque ou une poutre en déformations planes

Pour les trois configurations, on peut constater que le déplacement maximal obtenu par la modélisation en plaques de *von Karman* est toujours supérieur à celui obtenu par le modèle de plaque de *Kirchhoff-Love*, la différence entre les deux étant due à l'effet «  $P-\delta$  ». Dans le cas d'un mur de 120m de largeur et de 12m de hauteur, le déplacement maximal (137,5 cm) obtenu par la modélisation par plaques de *von Karman* tend vers celui d'un poteau en déformations planes<sup>9</sup> (138,4 cm), ce qui démontre une bonne cohérence entre ces deux modélisations.

Dans les deux premiers cas (N°1 et 2 du tableau 5.1), il apparaît que les évaluations du déplacement maximal données par le logiciel Marc sont inférieures à celles données par le modèle de plaque de *Kirchhoff-Love* et *a fortiori* à celles issues du modèle de plaque de *von Karman*. En effet, pour un mur carré de 12m de hauteur, le déplacement maximal (30cm) obtenu par Marc est beaucoup plus faible (-45%) que celui (54,6 cm) obtenu par le modèle de plaques de *Kirchhoff-Love*. Pour un mur de 60m de largeur, le logiciel Marc prédit un déplacement maximal (90cm) légèrement inférieur à celui (92,7cm) des plaques de *Kirchhoff-Love*, mais significativement plus faible à celui prédit par le modèle de *von Karman* (137,5cm).

Par la suite, nous ne considérerons que les solutions analytiques et semi-analytiques développées dans le présent travail pour calculer les déformées des murs en conditions d'incendie, déformées qui seront ensuite introduites comme une donnée géométrique dans le calcul à la rupture pour l'analyse de stabilité. Ce choix est notamment justifié par le temps de

<sup>9</sup> Qui prend bien en compte cet effet «  $P-\delta$  ».

calcul très faible pour obtenir ces solutions (autour d'un millième de seconde), permettant ainsi aux ingénieurs de dimensionner très rapidement de tels murs.

## 5.4.2. Cas des murs continus

### 5.4.2.1. Influence de la largeur des murs à hauteur constante

Considérons trois configurations (figure 5.7) de murs de 15cm d'épaisseur avec un poids par unité de surface égal à  $3,75\text{kN/m}^2$ . Le deuxième cas (5.7(b)) correspond à une configuration courante des murs carrés de 12m de hauteur, prise comme configuration de référence, tandis que les autres deux cas correspondent respectivement à un mur de largeur plus faible (5.7(a)) et plus grande (5.7(c)). Ces murs sont *simplement appuyés* sur leurs quatre bords et exposés à un feu ISO sur une des faces pendant 4h.

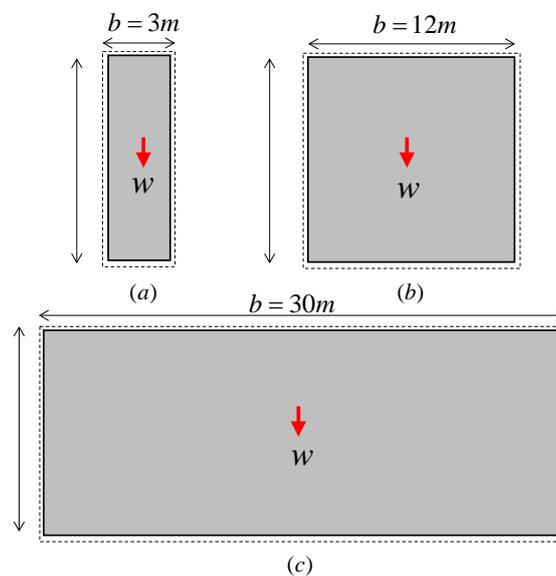


Figure 5.7. Trois configurations de murs de même hauteur (12m) et de largeurs différentes (3m, 12m et 30m)

L'épaisseur des murs, constitués d'un béton, étant de 15cm, le chargement (poids propre) et les propriétés mécaniques sont données par :

$$w = 3,75\text{kN/m}^2, E_c = 19,2\text{GPa}, f_c = 32\text{MPa}. \quad (5.41)$$

où  $w$  est la densité *surfactive* de poids du mur, tandis que  $E_c$  et  $f_c$  désignent respectivement le module d'élasticité et la résistance maximale en compression *uniaxiale* du béton à *température ambiante*. Le béton est renforcé par deux nappes d'armatures orthogonales placées selon les directions verticale et horizontale avec les caractéristiques suivantes :

$$e = 10\text{cm}, d = 3\text{cm}, \phi = 6\text{mm}, f_s = 500\text{MPa}. \quad (5.42)$$

où  $e$  et  $d$  sont respectivement l'espacement et l'enrobage des armatures (cf. figure 5.8). Ces armatures de diamètre égal à 6mm, sont constituées d'un acier dont la résistance en traction-compression uniaxiale est égale à 500MPa à *température ambiante*. Ces propriétés élastiques et de résistance du béton et de l'acier diminuent en fonction de l'élévation de température due

à l'incendie, selon des relations données par l'Eurocode (EN 1992-1-2, 2005) et qui sont incorporées aussi bien au calcul de la déformée thermo-élastique qu'au calcul à la rupture.

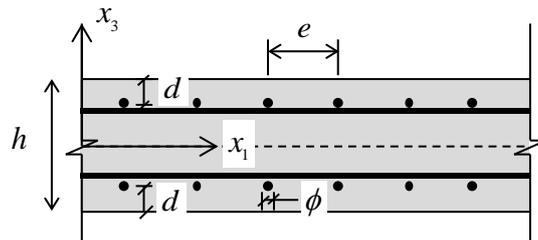


Figure 5.8. Renforcement d'une plaque en béton par deux nappes des armatures orthogonales

Dans ces conditions, le gradient thermique à travers l'épaisseur du mur peut être obtenu par la résolution d'un problème unidimensionnel de transfert thermique défini dans un bloc de béton utilisant le logiciel *Safir* (Franssen et Gernay, 2017). L'influence des armatures sur le profil thermique dans l'épaisseur du mur est négligée, en raison du fait que sa fraction volumique est très faible. Le gradient thermique ainsi obtenu est montré sur la figure 5.9. On peut constater une élévation de température beaucoup plus rapide dans la partie du mur proche de la face exposée à l'incendie que dans la partie plus éloignée. Au bout de 4h, la température de la surface exposée au feu atteint 1100°C tandis que celle de la surface non exposée atteint 260°C.

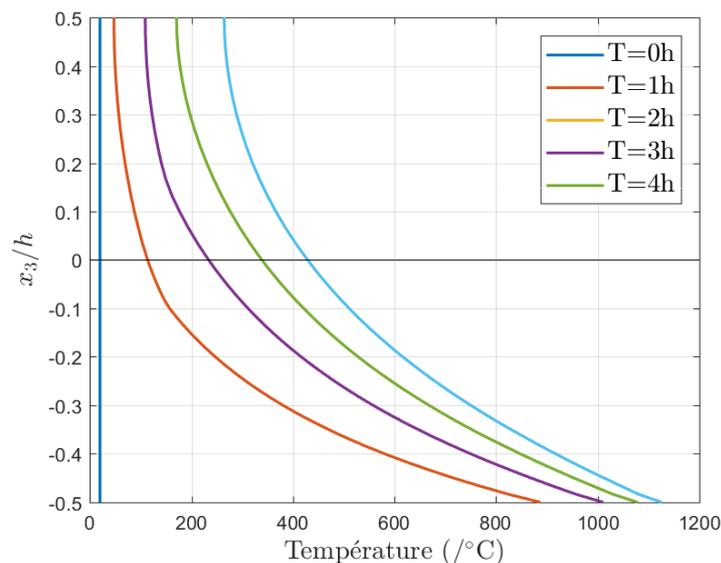


Figure 5.9 . Evolution de la température en fonction de la durée d'exposition au feu ( $h=15\text{cm}$ )

Dans la figure 5.10, nous avons présenté l'évolution du déplacement maximal des trois configurations de murs en fonction de la durée d'incendie. Les lignes continues et les lignes en tiret correspondent respectivement au déplacement maximal obtenu par le modèle de plaque des *von Karman* et par le modèle de plaques de *Kirchhoff-Love*. La différence du déplacement maximal entre les deux modèles provient de l'effet «  $P-\delta$  » dû au poids propre. On peut constater que cette différence est négligeable pour un mur de 3m de largeur et relativement faible pour un mur carré de 12m de largeur. En revanche, cette différence est non négligeable pour un mur de 30m de largeur. En effet, le déplacement maximal obtenu par le modèle de

*Kirchhoff-Love* évolue linéairement en fonction du temps ( $T > 1h$ ) après une montée rapide pendant la phase initiale du feu tandis que celui prédit par le modèle de *von Karman* évolue d’une manière non linéaire avec une croissance très rapide après 2h, ce qui montre un effet «  $P-\delta$  » d’autant plus important que la durée d’incendie est plus longue.

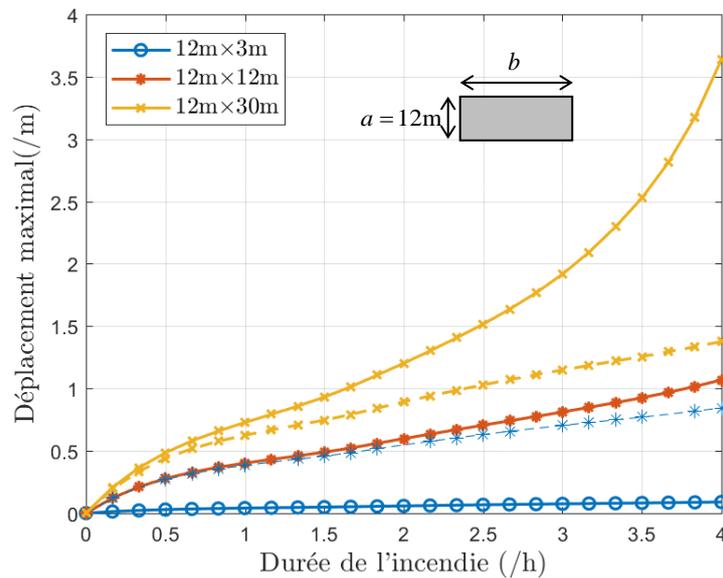


Figure 5.10. Evolution du déplacement maximal des trois configurations de murs ( $b=3, 12, 30m$ ) en fonction de la durée d’incendie (lignes continues : modélisation par plaque de *von Karman* ; lignes en tirets : modélisation par plaque de *Kirchhoff-Love*)

Adoptant ces déformées d’origine thermique issues du modèle de plaque de *von Karman*, le facteur de stabilité peut être obtenu par la résolution du problème de calcul à la rupture défini sur la géométrie déformée discrétisée. Cette discrétisation portant, en raison de la symétrie du problème par rapport à l’axe vertical  $x_1$ , sur la moitié des murs, utilise un maillage carré dont la taille des mailles est fixée à 0,3m, ce qui correspond à 40 éléments suivant la hauteur des murs et un nombre total d’éléments  $N_E$  égal à 400, 1600 ou 4000 selon les configurations. Le tableau 5.2 présente les valeurs numériques des bornes supérieures et inférieures du facteurs de stabilité obtenues pour les trois configurations pour une durée d’exposition au feu égale à 1h, 2h et 4h. En général, cet encadrement par les bornes supérieures et inférieures est d’autant meilleur que le nombre d’élément est plus important. Pour une durée d’incendie de 1h, l’écart entre les deux bornes passe de 12,3% à 8,4% (resp. 6,8%) lorsque  $N_E$  passe de 400 à 1600 (4000). On remarque également que ces facteurs de stabilité dépendent fortement de la largeur du mur. Ils diminuent d’un facteur 4 lorsque la largeur passe de 12m à 30m.

Le tableau 5.3 donne les résultats obtenus par Bleyer (2015(a)) sur les trois mêmes configurations de murs. Les facteurs de stabilité, calculés en utilisant les déformées issues de *Marc* avec un nombre d’éléments situé entre 500 à 1000 selon les dimensions des murs, sont légèrement plus élevés que ceux que nous avons calculés (tableau 5.2), hormis dans le cas d’un mur de 3m de largeur avec une discrétisation grossière. Cela peut être expliqué par le fait que la déformée calculée par *Marc* est plus faible que celle obtenue par la solution de plaque de *von Karman*.

Largeur(/m)	$N_E$	Temps	Statique	Cinématique	Ecart
$b=3$	400	1h	89,1	101,6	12,3%
		2h	67,8	85,0	20,2%
$b=12$	1600	1h	38,0	41,5	8,4%
		2h	27,5	31,0	11,2%
$b=30$	4000	1h	8,2	8,8	6,8%
		2h	6,0	6,6	9,1%

Tableau 5.2. Encadrement par le calcul à la rupture du facteur de stabilité des murs d'une hauteur de 12m

Largeur (/m)	Temps	Statique	Cinématique	Ecart
$b=3$	2h	67,5	78,5	15%
$b=12$	2h	32,4	35,3	8,7%
$b=30$	2h	7,9	8,5	7,6%

Tableau 5.3. Encadrement du facteur de stabilité d'un mur d'une hauteur de 12m après 2h d'exposition au feu (Bleyer, 2015(a))

L'évolution du facteur de stabilité des trois configurations de murs en fonction de la durée d'incendie est décrite par la figure 5.11. A température ambiante ( $T=0$ ), le facteur de stabilité est identique (115,1) pour les trois configurations. Pour un mur de 3m de largeur, la diminution des deux bornes du facteur de stabilité est relativement lente en fonction de la durée d'incendie. En revanche, les murs de 12m et de 30m de largeur subissent une diminution brutale des deux bornes entre 0 et 20mn, puis plus lente jusqu'à 4h. Pour les trois configurations considérées, les deux bornes du facteur de stabilité, toujours largement supérieures à 1, indiquent que ces murs restent encore très stables pour une durée d'incendie de 4h.

Outre la borne supérieure du facteur de stabilité, l'approche cinématique nous permet de visualiser le mécanisme de ruine des trois configurations de murs, comme cela est montré sur la figure 5.12, où les isovaleurs correspondent à l'amplitude (relative) de la vitesse virtuelle transversale pour une durée de l'incendie de 2h. On remarque que le mécanisme de ruine des trois configurations est associé à une zone (en bleue) de grande vitesse transversale située dans la partie inférieure du mur ( $x_1 \approx 2m$ ). La taille (largeur et la hauteur) de cette zone dépend fortement de la largeur du mur. On remarque également que ce mode de rupture évolue en fonction de la durée de l'incendie, comme cela est montré sur la figure 5.13 où sont représentés les mécanismes de rupture d'un mur de 12m×12m pour une durée de l'incendie de 1h, 3h, et 4h. On observe que la vitesse virtuelle transversale se développe tout d'abord dans la partie centrale du mur à 1h et a tendance à se propager ensuite en deux bandes verticales proches des bords latéraux.

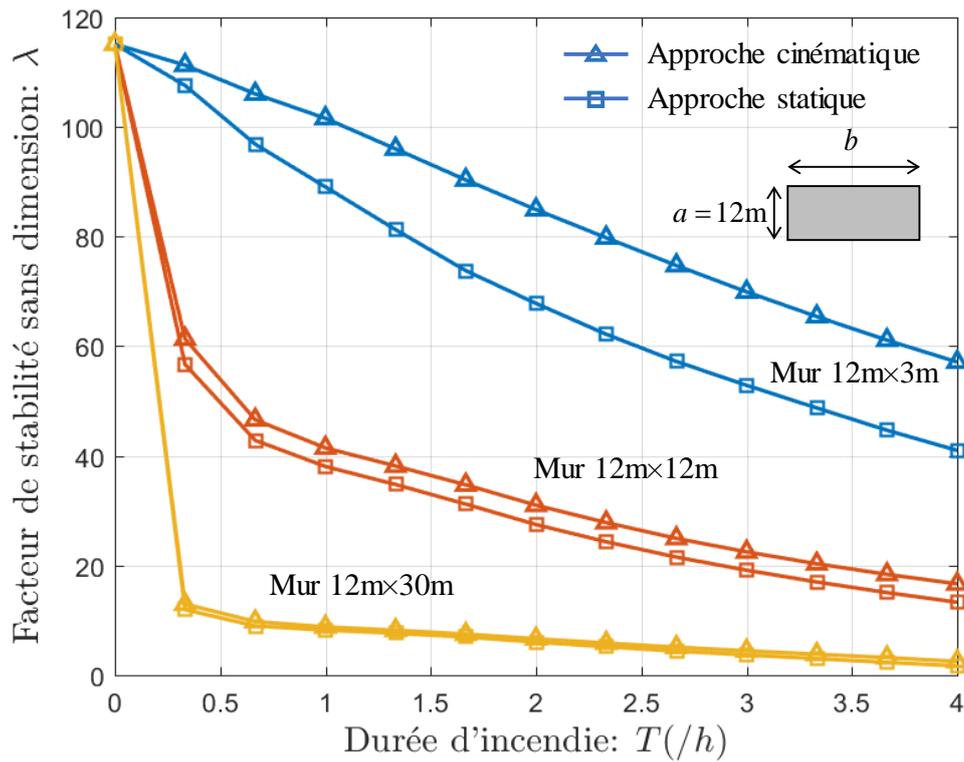


Figure 5.11. Evolution du facteur de stabilité des trois configurations de murs en fonction de la durée d'incendie (ligne avec marques en triangle : borne supérieure du facteur de stabilité ; ligne avec marques en carré : borne inférieure du facteur de stabilité)

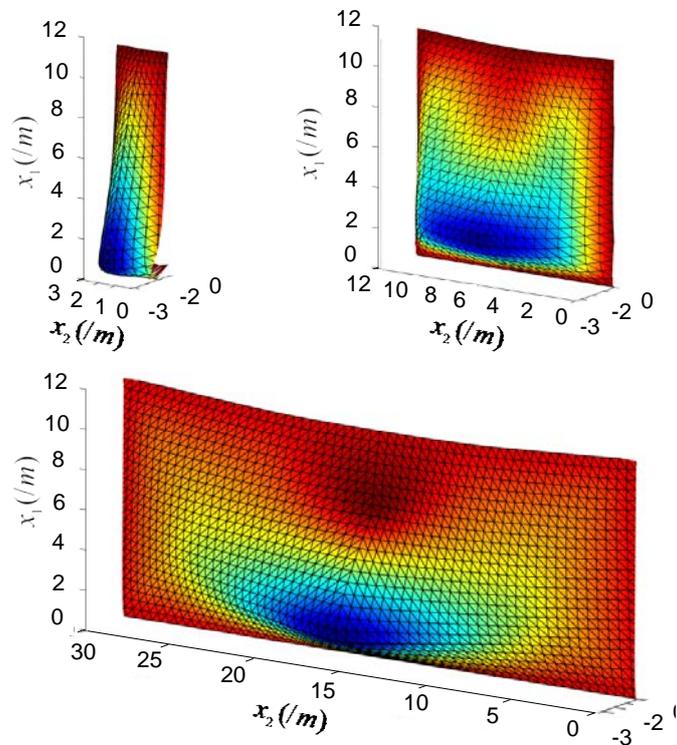


Figure 5.12. Mode de ruine des trois configurations de murs après 2h (isovaleurs : amplitude relative de la vitesse virtuelle transversale)

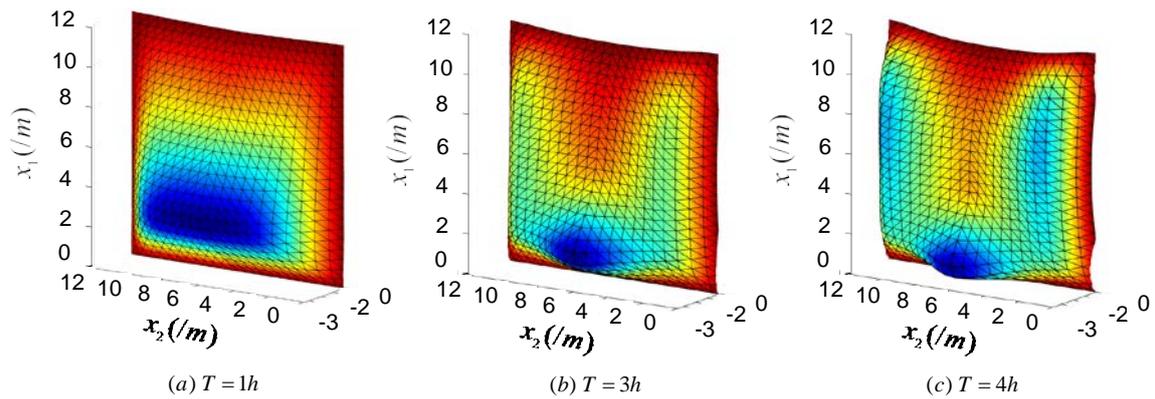


Figure 5.13. Evolution du mode de ruine d'un mur de 12m×12m en fonction de la durée de l'incendie (isovaleurs : amplitude relative de la vitesse virtuelle transversale)

#### 5.4.2.2. Influence de la hauteur de murs à largeur constante

Considérons maintenant quatre configurations de murs simplement appuyés sur quatre bords ayant la même largeur ( $b = 12\text{m}$ ) et dont la hauteur varie entre 12m à 16m. L'épaisseur des murs et les propriétés des matériaux sont identiques à celles de la section 5.4.2.1. Dans ces conditions, nous allons étudier l'influence de la hauteur de murs sur le facteur de stabilité.

Comme dans la section précédente, la déformée du mur est d'abord obtenue par une modélisation en plaque de *von Karman*. On présente sur la figure 5.14 la coupe de la déformée au plan de symétrie  $x_2 = b/2$  des quatre configurations dans pour une durée de l'incendie de 4h. L'ordonnée étant normalisée par la hauteur du mur, on peut constater que cette coupe n'est pas symétrique par rapport à la mi-hauteur, puisque le pic de déplacement maximal se situe à une hauteur relative comprise entre 0,4 à 0,45. Ce décalage vers le bas du pic du déplacement est dû à l'effet «  $P-\delta$  » qui tend à accentuer le déplacement transversal dans la partie inférieure du mur.

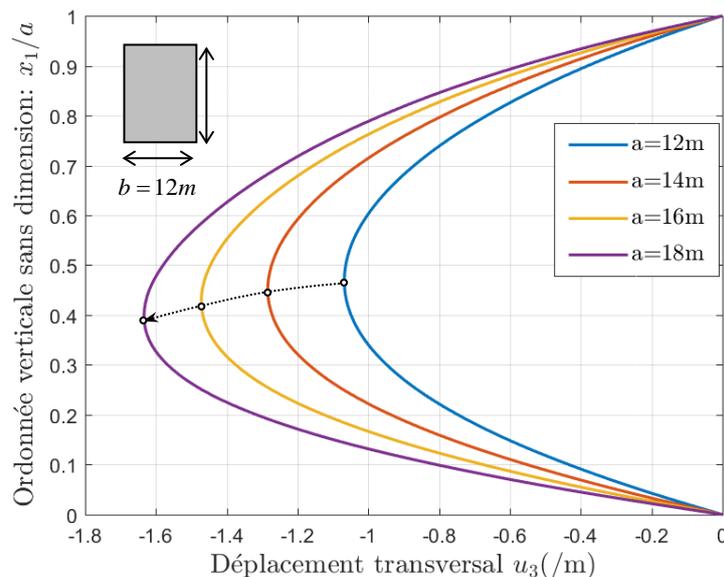


Figure 5.14. Coupe de la déformée des murs de différentes hauteurs après 4h d'exposition au feu.

Les déformées des murs étant ainsi calculées, les bornes inférieures  $\lambda^s$  et supérieures  $\lambda^c$  du facteur de stabilité  $\lambda^+$  sont alors obtenues respectivement par l'approche statique et cinématique. Comme montré sur la figure 5.15, ces bornes supérieures  $\lambda^c$ , qui diminuent en fonction de la durée de l'incendie, sont d'autant plus faibles que la hauteur de murs est plus grande. Prenant le mur carré de 12m de hauteur comme configuration de référence, on compare dans le tableau 5.4 l'influence de la hauteur sur l'évolution du facteur de stabilité. On remarque que, étant donné la durée d'exposition au feu, la borne supérieure du facteur de stabilité diminue d'environ 10% pour toute augmentation de la hauteur égale à 2m.

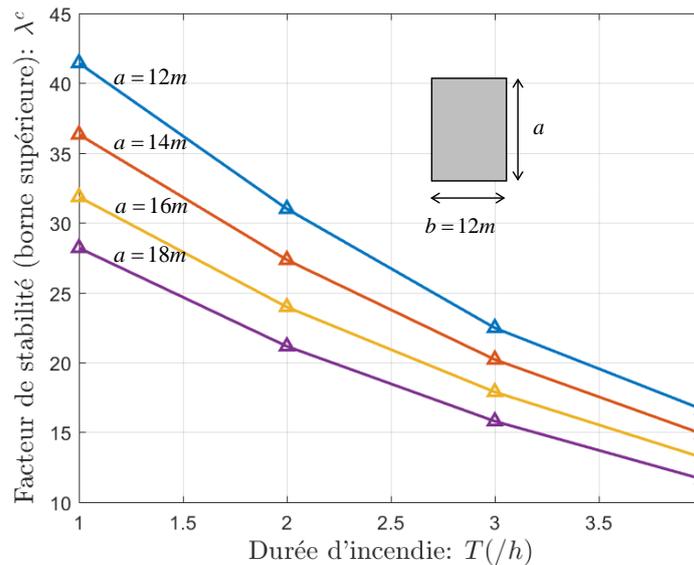


Figure 5.15. Réduction du facteur de stabilité (majorant cinématique) en fonction de la durée d'incendie et de la hauteur du mur

	a=12m	a=14m		a=16m		a=18m	
T	λ <sup>c</sup>	λ <sup>c</sup>	Réduction	λ <sup>c</sup>	Réduction	λ <sup>c</sup>	Réduction
1h	41,4	36,3	12,3%	31,9	23,1%	28,2	32,0%
2h	31,0	27,3	11,8%	24,0	22,7%	21,2	31,8%
3h	22,5	20,2	10,1%	17,9	20,4%	15,8	29,7%
4h	16,6	14,8	10,6%	13,2	20,8%	11,6	30,1%

Tableau 5.4. Comparaison du facteur de stabilité des murs ayant une hauteur de 14m, 16m et 18m par rapport à un mur de 12m de hauteur

### 5.4.2.3. Cas des murs à bords latéraux libres

Les résultats précédents concernent la configuration de murs *simplement appuyés* sur leurs quatre bords. Nous allons maintenant brièvement analyser l'influence du changement des conditions aux bords sur la stabilité des murs et plus spécifiquement le cas où les panneaux sont libres d'efforts sur les bords latéraux.

Considérons les trois configurations de murs ayant la même dimension et propriétés mécaniques de matériaux que la section 5.4.1, mais *libre sur les bords latéraux* et simplement appuyé sur les bords en tête et en pied. Dans ces conditions, l'évolution de  $\lambda^s$ , borne inférieure

du facteur de stabilité, calculée par l'approche statique par l'intérieur sur la configuration déformée évaluée par le modèle de plaque de *von Karman*, est représentée sur la figure 5.16 en fonction de la durée d'incendie. Les courbes avec triangles, cercles et marqueurs carrés correspondent respectivement à un mur d'une largeur de 3m, 12m et 30m. Contrairement aux murs simplement appuyés sur les quatre bords ayant toujours une borne inférieure du facteur de stabilité plus grande que l'unité pour une durée de l'incendie de 4h, les murs avec bords latéraux libres ont une borne inférieure du facteur de stabilité beaucoup plus faible, qui peut descendre au-dessous de l'unité à partir de 1,5h ou 2h suivant la largeur des murs comme cela est clairement montré sur la figure 5.16.

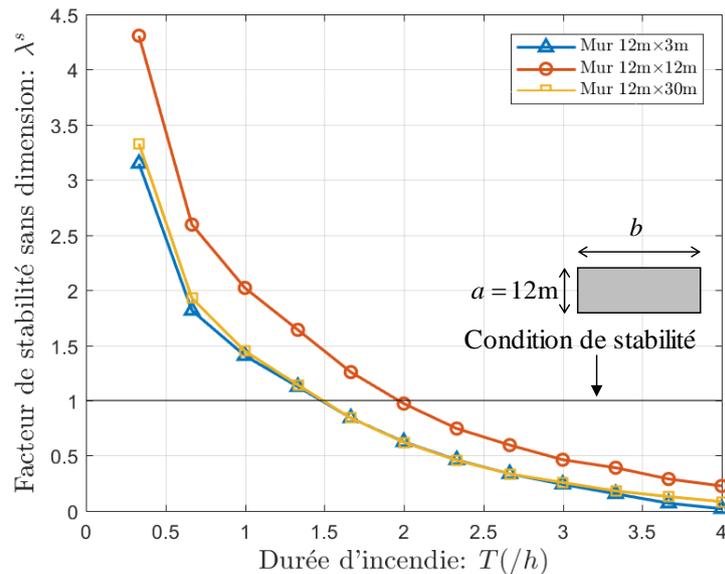


Figure 5.16. Evolution du facteur de stabilité (minorant) de murs libres sur les bords latéraux

On remarque également que l'évolution de  $\lambda^s$  pour un mur de 3m de largeur est presque identique à celle d'un mur de 30m de largeur. Cela peut être expliqué par le fait que le premier peut être assimilé à une poutre en *contrainte plane*, tandis que la partie centrale d'un mur de 30m de largeur peut être vue comme une poutre en *déformation plane*. Les deux configurations étant proches d'un cas unidimensionnel, les deux évolutions de  $\lambda^s$  en fonction de la durée de l'incendie restent elles-mêmes très proches.

### 5.4.3. Cas des murs avec joints

Nous considérons dans cette section des murs simplement appuyés sur les quatre bords et constitués par l'assemblage de panneaux individuels, disposés soit en bandes horizontales soit en bandes verticales et étudions l'influence de telles dispositions constructives sur le facteur de stabilité des murs. En raison des problèmes de transport depuis le site de fabrication jusqu'au site d'assemblage, la longueur des panneaux individuels préfabriqués est limitée à 12m. Les dimensions des panneaux individuels que nous avons considérés dans cette section, correspondant à des configurations industrielles courantes, sont donc de 12m x 2m. Ces panneaux peuvent être disposés horizontalement ou verticalement pour atteindre des dimensions plus importantes.

### 5.4.3.1. Prise en compte des joints

Dans la pratique, les bords latéraux des panneaux individuels sont reliés aux panneaux adjacents par un système d'encoches mâle-femelle, connues sous le nom de « *tenons et mortaise* », comme montré sur la figure 5.17(a). Ce type de connexion, permettant une *rotation* autour de l'axe des joints et un *glissement* relatif le long de ces joints, peut être considéré comme une *charnière* qui n'a ni *rigidité* ni *résistance* en flexion et au glissement. Il en résulte que la présence des joints doit être prise en compte non seulement dans le *calcul de la déformée* des murs en conditions d'incendie, mais également dans le *calcul à rupture* pour l'analyse de stabilité des murs constitués des panneaux individuels.

Il convient de noter que, dans les travaux précédents pour l'analyse de stabilité de ce type de murs (Bleyer 2015(a)), seule la *résistance* spécifique des joints est prise en compte dans le calcul à la rupture, tandis que les données relatives à la géométrie sont issues de la déformée d'un mur supposé *continu*, la *rigidité* spécifique des joints n'étant donc pas prise en compte. Dans cette section, nous allons tenir en compte de l'imperfection des joints en termes de rigidité et de résistance dans le calcul de la déformée et dans le calcul à la rupture, afin d'évaluer l'influence complète des joints sur la stabilité des murs constitués des panneaux individuels reliés par des connexions de type « *tenons et mortaise* ».

Pour ce qui concerne la déformée d'un mur avec joints, nous avons déjà montré, dans le cadre d'une modélisation des panneaux comme des plaques de *Kirchhoff-Love*, que les murs constitués des panneaux individuels ont une déformée d'origine *purement thermique* beaucoup plus faible que les murs continus. Comme nous l'avons déjà montré dans la section 2.4.4, le déplacement maximal d'un mur constitué des panneaux individuels est réduit de 30% par rapport à celui d'un mur continu pour les dimensions courantes (rapport d'élancement  $a/b$  proche de 1).

Ceci étant dit, on rappelle que l'effet «  $P-\delta$  » est d'autant plus faible que cette déformée purement thermique est moins grande. Sachant que l'effet «  $P-\delta$  » des configurations couramment utilisées ( $a/b$  proche de 1) est inférieur à 15% pour les murs continus simplement appuyés sur les quatre bords (cf. section 3.4.3.2, figure 3.12), on suppose que cet effet «  $P-\delta$  » est plus faible et négligeable pour les murs constitués des panneaux individuels car leurs déplacements d'origine purement thermique est moins important que les murs continus. Cette simplification nous permettra d'appliquer directement la solution analytique développée dans le cadre du modèle de plaques de *Kirchhoff-Love* (voir section 2.7) pour calculer la déformée des murs avec joints en conditions d'incendie.

Quant à la modélisation de la connexion entre les panneaux, on adopte le critère de résistance du type de charnière sans frottement (voir figure 5.17(b)), c'est -à-dire qu'il ne peut ni résister à la flexion normale  $M_m$ , ni à un effort membranaire tangent  $N_m$  tout au long d'un joint. Le critère de résistance d'un tel joint est donc défini par :

$$(N, M) \in \mathcal{G}^{\text{joint}} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G} \text{ t.q.} \\ M_m = 0, N_m = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

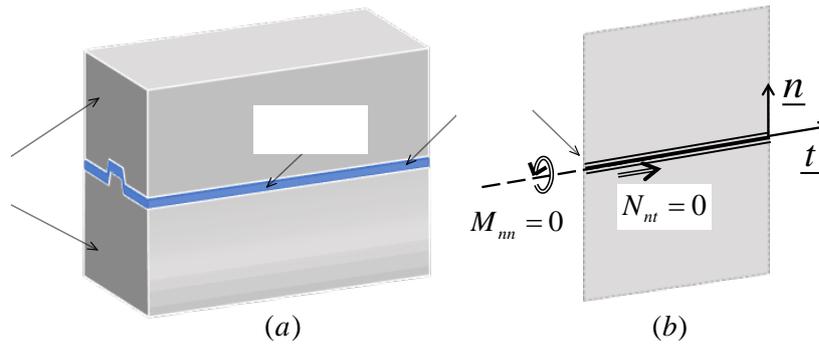


Figure 5.17. Connexion entre les panneaux (a) et critère de résistance des joints

Un tel critère de résistance des joints peut être facilement intégré dans l'approche statique par l'ajout des contraintes supplémentaires (5.43) relatives aux joints dans le problème d'optimisation (5.32).

Dans ces conditions, la déformée d'origine thermique des murs avec joints peut être obtenue par une modélisation des murs en plaques de *Kirchhoff-Love* (voir chapitre 2, section 2.3.3), qui traite le problème de flexion indépendamment du problème membranaire. Etant donné cette déformée, la stabilité des panneaux en conditions d'incendie consiste à encadrer le facteur de stabilité  $\lambda^+$  par les bornes inférieures  $\lambda^s$  et supérieures  $\lambda^c$ . On ne présente ici que l'encadrement de  $\lambda^+$  par la borne inférieure  $\lambda^s$ .

#### 5.4.3.2. Influence de la direction des joints sur $\lambda^s$

On effectue tout d'abord une comparaison entre un mur constitué de 6 panneaux individuels en bandes horizontales (figure 5.18(b)), un mur constitué de 6 panneaux individuels en bandes verticales (figure 5.18(c)) et un mur continu (figure 5.18(a)). Les murs sont tous simplement appuyés sur les quatre bords avec une épaisseur 15cm ainsi que des propriétés mécaniques des matériaux identiques à celles présentées dans la section 5.4.2.1.

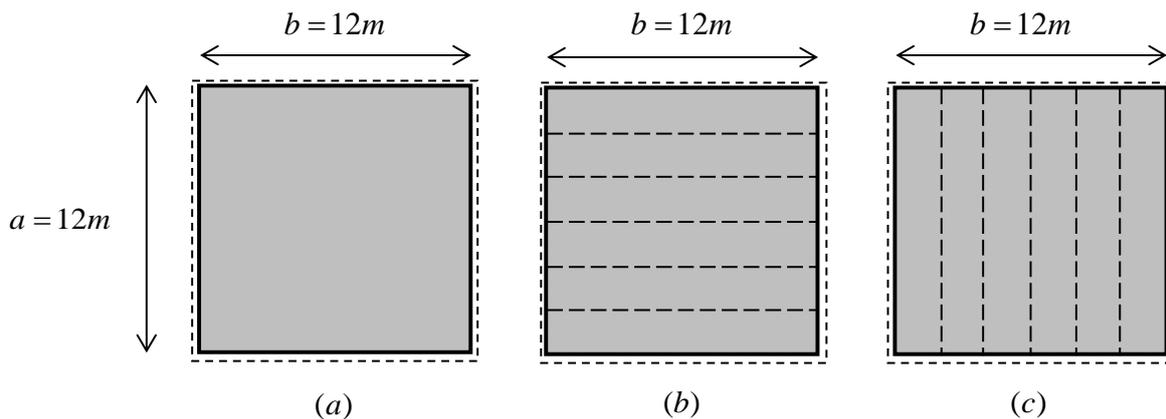


Figure 5.18. Trois configurations de murs carrés : mur continu (a), mur en bandes horizontales (b) et mur en bandes verticales (c)

Comme le poids n'intervient pas dans le modèle de plaque de *Kirchhoff-Love*, la déformée d'un mur constitué des panneaux en bandes verticales est identique que la transposition de la déformée d'un mur constitué des panneaux en bandes horizontales. La coupe verticale des

déformées des trois configurations est présentée sur la figure 5.19. On peut constater que les murs avec joints ont un déplacement transversal plus faible que celui d'un mur continu. En comparaison avec un mur continu, le pic (-35cm) du déplacement transversal des murs avec les joints est 36% plus faible que celui (-55cm) d'un mur continu.

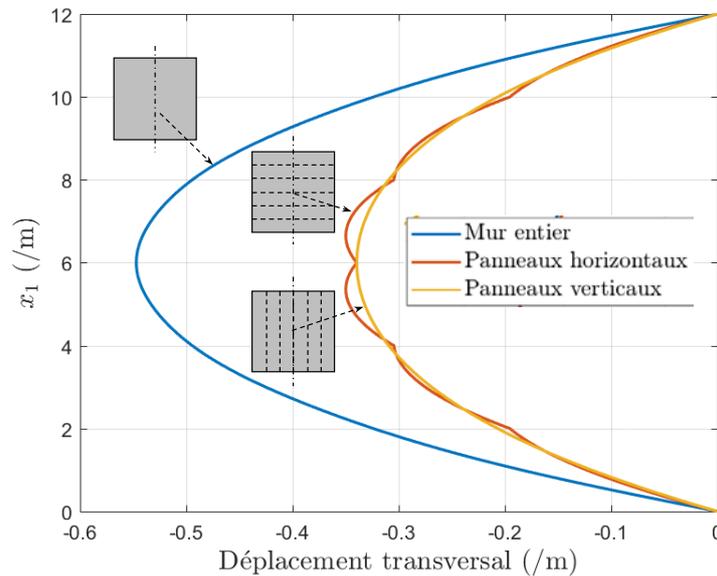


Figure 5.19. Coupe verticale des déformées de trois configurations au bout de 2h d'exposition au feu

Compte tenu de cette déformée, l'évolution de la borne inférieure  $\lambda^s$  du facteur de stabilité obtenue par l'approche statique en fonction de la durée d'incendie est montrée sur la figure 5.20. Pour les trois configurations considérées, les bornes inférieures  $\lambda^s$  subissent toutes d'abord une chute importante puis suivent une décroissance plus lente. Bien que les murs avec joints aient un déplacement transversal moins important, leur facteur de stabilité  $\lambda^s$  est plus faible que celui d'un mur continu, en raison de la diminution de résistance en flexion induite par les joints.

Remarquons également que, pour une durée d'incendie de moins de 2h, la borne inférieure  $\lambda^s$  des murs à panneaux verticaux est toujours plus grande que celle des murs à panneaux horizontaux. Cela signifie que, pour les murs de dimensions 12m×12m où l'effet «  $P-\delta$  » est négligeable, ceux constitués de panneaux en bandes verticales sont probablement plus stables que ceux constitués de panneaux en bandes horizontales. Dans les trois cas considérés, les bornes inférieures  $\lambda^s$  du facteur de stabilité  $\lambda^+$  sont toutes bien supérieures à l'unité, cela signifiant que ces murs sont tous probablement stables pour une durée d'incendie de moins de 2h.

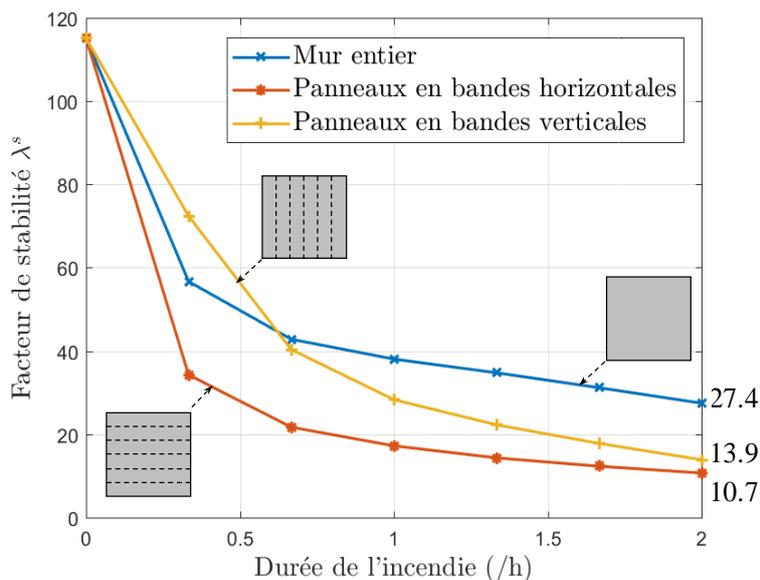


Figure 5.20. Evolution de  $\lambda^s$  en fonction de la durée de l'incendie d'un mur continu (courbe avec marques « x ») et les murs constitués des panneaux en bandes horizontales (courbe avec marques « \* ») et verticales (courbe avec marques « + »)

#### 5.4.3.3. Panneaux en position horizontale

Considérons ensuite trois configurations de murs simplement appuyés sur les quatre bords de différentes hauteurs ( $a = 14, 16, 18\text{m}$ ) constitués des panneaux en bandes horizontales, comme montré par la figure 5.21. L'épaisseur des murs est de 15cm, tandis que les propriétés mécaniques du béton et de l'acier sont identiques à celles de la section 5.4.2.1.

Dans ces conditions, on présente sur la figure 5.22 la coupe de la déformée au plan de symétrie (a) des murs de différentes hauteurs ainsi que l'évolution des bornes inférieures  $\lambda^s$  du facteur de stabilité en fonction de la durée de l'incendie (b). Les courbes avec les marques en triangle, étoile, cercle et carré correspondent respectivement à des murs dont la hauteur varie de 12m à 18m. Ces déformées sont continues en déplacement transversal et discontinues en rotation au niveau des joints horizontaux. Le déplacement maximal d'un mur à panneaux individuels d'une hauteur de 12m, 14m, 16m et 18m est respectivement de -35cm, -43cm, -48cm et -54cm.

On remarque également que, en raison de la résistance nulle des joints en flexion, le facteur  $\lambda^s$ , qui diminue en fonction de la durée de l'incendie, est plus petit pour les murs à panneaux individuels ayant une hauteur plus importante, comme montré par la figure 5.22(b). En comparaison avec les murs continus ayant les mêmes dimensions, les murs à panneaux en bandes horizontales ont un facteur  $\lambda^s$  plus faible (une réduction entre 58% et 76%), comme montré par le tableau 5.5.

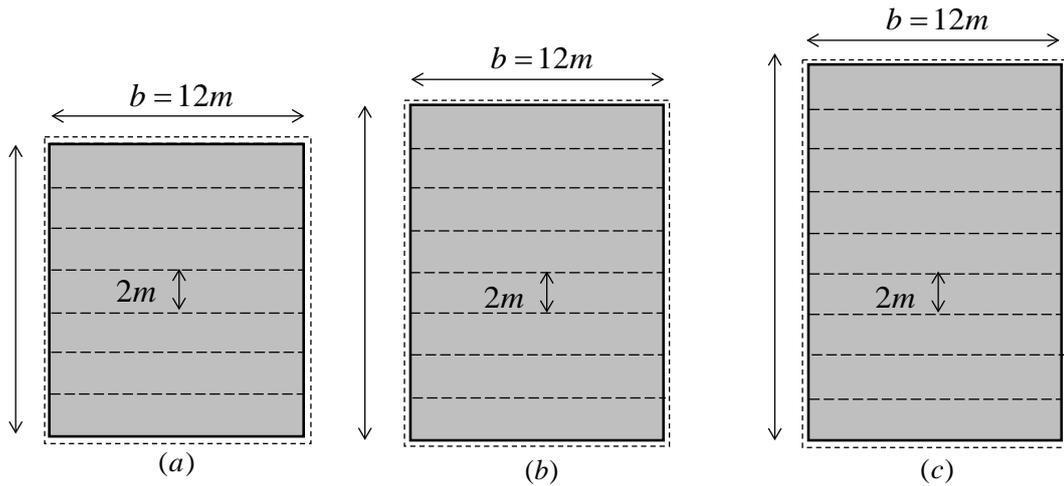


Figure 5.21. Trois configurations des murs ayant la même largeur ( $b = 12m$ ) constitués de panneaux en bandes horizontales superposés verticalement ( $a = 14, 16, 18m$ )

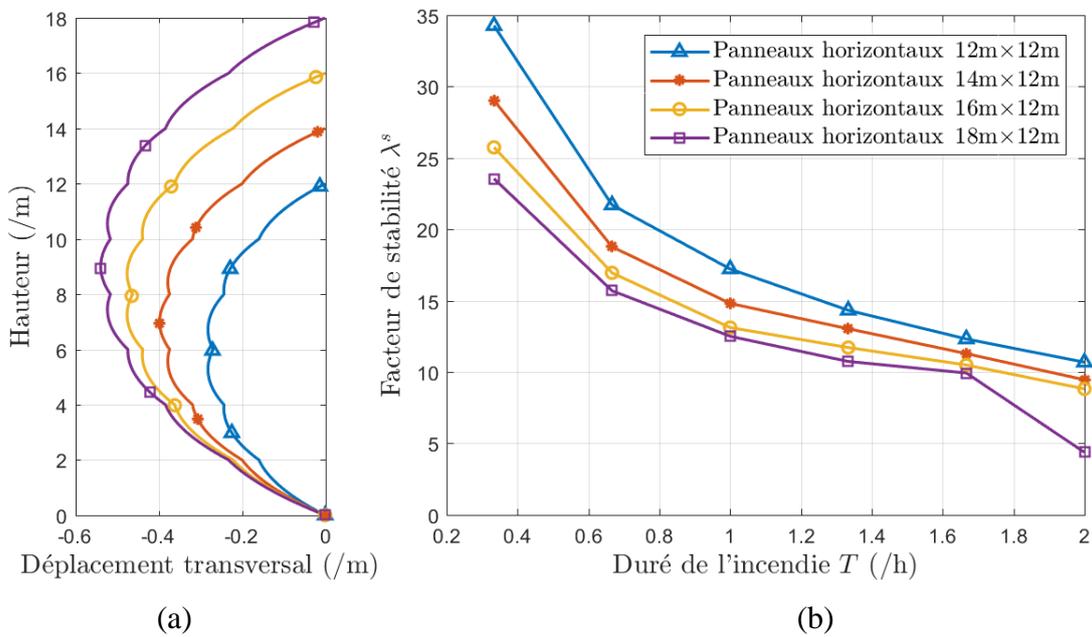


Figure 5.22. Coupe de la déformée au plan de symétrie  $x_2 = b / 2$  au bout de 2h (a) et l'évolution de  $\lambda^s$  en fonction de la durée de l'incendie des murs constitués de panneaux en bandes horizontales (b)

Dimensions des murs	12m×12m	14m×12m	16m×12m	18m×12m
Murs continus	27,4	23,6	21,2	18,7
Murs avec joints	10,7	9,5	8,8	4,4
Réduction	61%	60%	58%	76%

Tableau 5.5. Facteur de stabilité (bornes inférieures) de murs de différentes dimensions au bout de 2h d'exposition au feu

#### 5.4.3.4. Panneaux en position verticale

Les panneaux individuels peuvent aussi être assemblés en position verticale permettant d'atteindre des largeurs plus importantes. Dans ce cas, on considère trois configurations de murs dont la hauteur de mur est fixée à 12m tandis que la largeur varie entre 14m et 18m (voir figure 5.23). Simplement appuyés aux quatre bords, ces murs ont une épaisseur de 15cm tandis que les matériaux ont les mêmes caractéristiques que dans la section 5.4.2.1.

Dans ces conditions, la coupe de la déformée de ces murs au bout de 2h d'exposition au feu est montrée sur la figure 5.24(a). Dans le plan de symétrie  $x_2 = b/2$ , ces déformées sont d'autant plus importantes que le nombre des panneaux est plus élevé. Comme montré sur la figure 5.24(b), le facteur  $\lambda^s$  de ces murs à panneaux verticaux, qui diminue en fonction de la durée de l'incendie, est d'autant plus réduit que la largeur de ces murs est plus grande en raison de la présence des joints verticaux qui n'ont pas de résistance en flexion.

Enfin, le tableau 5.6 compare ces murs à panneaux verticaux avec les murs continus sans joints ayant les mêmes dimensions. Pour les quatre configurations considérées, le facteur  $\lambda^s$  des murs à panneaux verticaux est réduit de 49% à 58% par rapport aux murs sans joints.

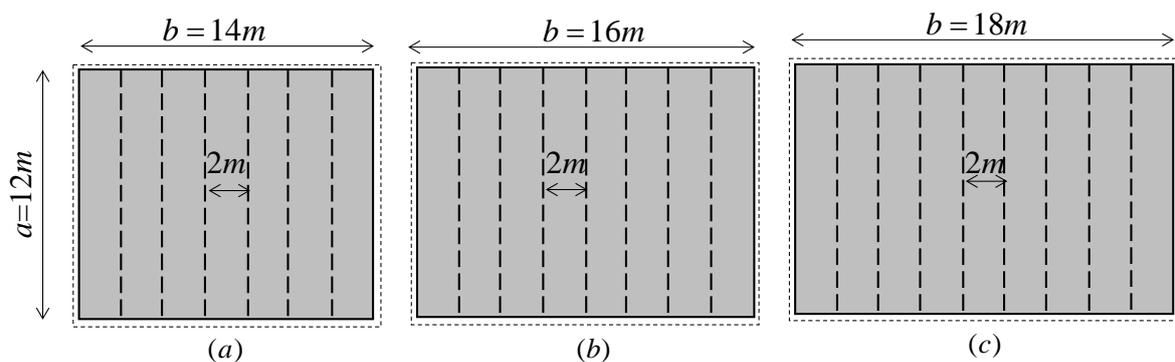


Figure 5.23. Trois configurations géométriques de murs ayant la même hauteur ( $a = 12m$ ) constitués des panneaux en bandes verticales assemblés horizontalement ( $b = 14, 16, 18m$ )

Dimensions des murs	12m×12m	12m×14m	12m×16m	12m×18m
Murs sans joints	27,4	22,0	17,5	14,2
Murs avec joints	13,9	9,7	7,4	5,9
Réduction	49%	56%	58%	58%

Tableau 5.6. Facteur de stabilité des murs de différentes dimensions au bout de 2h

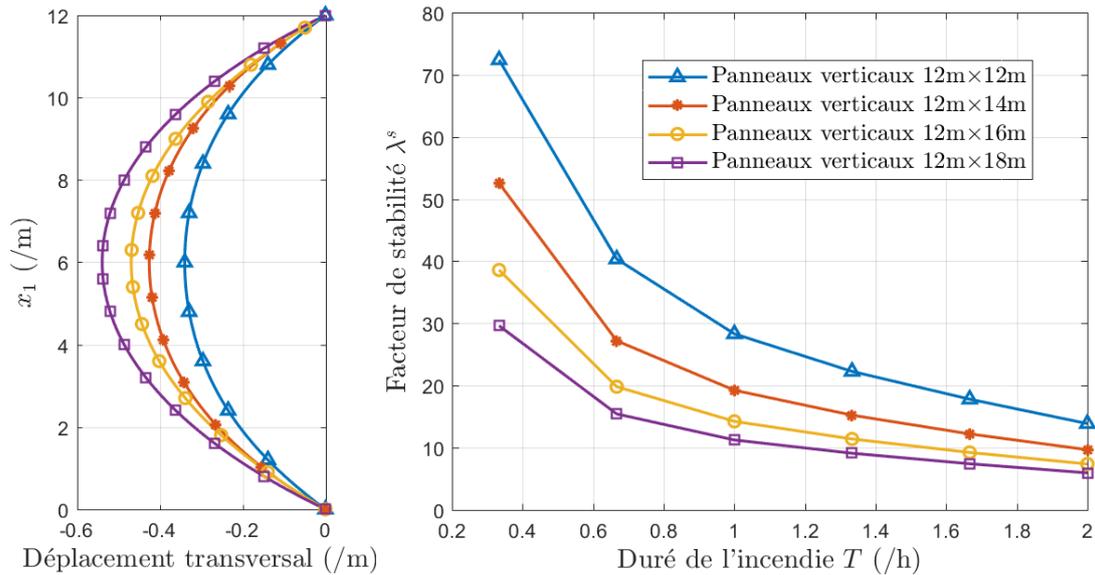


Figure 5.24. Coupe de la déformée au plan de symétrie  $x_2 = b / 2$  au bout de  $2h$  (a) et évolution de  $\lambda^s$  en fonction de la durée de l'incendie des murs constitués de panneaux verticaux

## 5.4. Conclusions

Ce chapitre s'est intéressé à l'analyse de stabilité en conditions d'incendie des murs en béton armé continus ou constitués des panneaux individuels en bandes horizontales ou verticales. Etant donné la déformée ainsi que le domaine de résistance macroscopique des murs en conditions d'incendie, cette analyse a consisté à encadrer le facteur de stabilité par des bornes inférieures et supérieures obtenues respectivement par l'approche statique et cinématique du calcul à la rupture.

Adoptant une discrétisation en facettes planes triangulaires de la déformée d'origine thermique des murs issue d'une modélisation en plaque de *Kirchhoff-Love* ou de *von Karman*, nous avons appliqué directement l'outil du calcul à la rupture de plaques minces développé dans la thèse de Bleyer (2015(a)), qui permet de transformer les problèmes du calcul à la rupture en problèmes d'optimisation conique de second ordre, ce dernier pouvant être facilement résolu par le solveur *Mosek*. Appliquant cette méthode d'analyse de stabilité par le calcul à la rupture, nous avons étudié deux configurations principales de murs en béton armé : celle des murs continus et celle des murs avec-joints constitués panneaux individuels.

L'analyse de stabilité des murs continus repose sur la déformée issue d'une modélisation en plaque de *von Karman* ou l'effet «  $P-\delta$  » a été pris en compte. Nous avons montré que la qualité d'encadrement par les bornes supérieures et inférieures du facteur de stabilité est d'autant meilleure que la discrétisation est plus fine. Ces bornes supérieures et inférieures, qui diminuent en fonction de la durée de l'incendie, sont d'autant plus réduites que la hauteur et la largeur des murs sont plus grandes. On remarque également que les murs continus ayant les deux bords latéraux libres ont une borne inférieure du facteur de stabilité qui peut être inférieure à l'unité, cela signifiant que cette configuration est plus défavorable que les murs simplement appuyés sur les quatre bords.

L'analyse de stabilité des murs avec joints repose sur la déformée issue d'une modélisation en plaque de *Kirchhoff-Love*, où les joints sont modélisés comme des charnières sans rigidité en flexion. Les joints sont également pris en compte dans le calcul à la rupture comme des charnières sans résistance en flexion et au glissement. Dans ces conditions, nous avons montré que les bornes inférieures du facteur de stabilité sont d'autant plus réduites que le nombre de panneaux est plus important, peu importe la direction d'assemblage (pose verticale ou horizontale). On remarque également que, pour les configurations considérées, le facteur de stabilité de ces murs (borne inférieure) à panneaux individuels au bout de 2h d'exposition au feu est bien supérieur à l'unité, cela signifiant que ces murs sont *potentiellement* très stables vis-à-vis au poids propre. Il est ainsi possible d'optimiser le dimensionnement (par ex. épaisseur moins importante et taux de renforcement plus faible) de ces murs coupe-feu tout en restant stable vis-à-vis de l'incendie.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions et bilan des résultats acquis

Dans le but de proposer, mettre en œuvre et développer une approche rationnelle du dimensionnement des murs en béton armé vis-à-vis de la stabilité au feu, le cadre théorique du *Calcul à la Rupture* a été choisi comme fil directeur tout au long de ce travail. L'application de cette théorie à ce type de problème exige, comme d'habitude, la connaissance de deux types de données : celle du *domaine de résistance macroscopique* d'une plaque en béton armé soumise à un gradient thermique, d'une part, celle du *changement de géométrie* du mur provoqué par ce même gradient thermique, d'autre part.

Dans le *premier chapitre*, nous avons d'abord introduit la problématique générale de la stabilité au feu des murs en béton armé. Après avoir brièvement passé en revue les méthodes existantes pour le dimensionnement au feu des structures en béton armé, nous avons souligné les avantages de l'approche calcul à la rupture qui fournit un cadre mécaniquement rigoureux et cohérent permettant de déterminer directement les chargements extrêmes auxquels les murs en béton armé peuvent résister en condition d'incendie, sans qu'il soit besoin de recourir par exemple à une loi de comportement élastoplastique.

La **Partie I**, elle-même subdivisée en deux chapitres, a été consacrée au *calcul de la déformée d'origine thermique* des murs en béton armé, modélisés comme des plaques minces et au changement de géométrie qui en résulte.

Le *second chapitre* porte sur l'étude de la *déformée purement thermique* des murs exposés sur une de leurs faces à un feu, à l'aide d'une modélisation des murs comme des plaques de *Kirchhoff-Love*. S'appuyant sur un certain nombre de solutions analytiques, ainsi que sur les études paramétriques réalisées sur la base de ces solutions, nous avons mis en évidence l'influence importante d'un certain nombre de facteurs sur la *déformée purement thermique* de ces murs, dans laquelle le poids propre du mur ne joue aucun rôle.

Le *chapitre 3* a traité de la *déformée totale* des murs soumis à l'action combinée de leur poids propre et d'un gradient thermique, nécessitant le recours à une modélisation des murs comme des plaques de *von Karman*. La différence observée entre la *déformée totale* ainsi obtenue et la *déformée purement thermique* évaluée au chapitre 2, a ainsi permis de déterminer quantitativement l'influence de l'« effet  $P-\delta$  » sur la déformée des murs en condition d'incendie. Nous avons enfin présenté une première confrontation de la déformée ainsi calculée avec celle mesurée lors d'un essai expérimental d'un mur à l'échelle réelle conduit au CSTB sur la plateforme Vulcain.

L'apport essentiel de cette première partie du travail réside dans les développements de solutions analytiques (chapitre 2) et semi-analytiques (chapitre 3) pour le calcul de la déformée

d'origine thermique de murs en conditions d'incendie, qui ont permis d'étendre au modèle de plaque 2D les résultats obtenus précédemment dans le cas d'une modélisation de type poutre 1D (Pham, 2014).

Dans la **Partie II** de ce travail (également composée de deux chapitres), nous nous sommes concentrés sur le *calcul à la rupture* des murs en béton armé modélisés comme des plaques minces, en nous appuyant pour ce faire largement sur les outils numériques du calcul à la rupture de plaques et coques mis au point dans les travaux antérieurs (Bleyer, 2015) et que nous avons appliqués au niveau *local* (chapitre 4) puis *global* (chapitre 5).

Nous avons déterminé au *chapitre 4* le *domaine de résistance macroscopique* d'une plaque en béton armé soumise à un gradient thermique et prenant en compte la dégradation des propriétés de résistance du béton et de l'acier à haute température. Un tel domaine est défini à partir de la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture relatif à un élément de plaque. Nous avons montré que ce domaine, que l'on peut représenter dans l'espace des contraintes généralisées (efforts membranaires et moments de flexion), subit un fort rétrécissement en condition d'incendie tout comme le diagramme d'interaction d'une poutre (Pham *et al.*, 2015).

Nous nous sommes enfin intéressés, au *chapitre 5*, à l'analyse de stabilité des murs en conditions d'incendie en introduisant la notion de *facteur de stabilité*. Etant donné la déformée d'origine thermique calculée dans la première partie, ainsi que le domaine de résistance d'une plaque en béton armée soumise à un gradient thermique, ce facteur peut être encadré par des bornes inférieure et supérieure obtenues respectivement par les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture. Deux configurations de murs couramment utilisées (murs continus et murs constitués par l'assemblage de panneaux avec joints) ont été considérées pour les études paramétriques.

En ce qui concerne les murs continus, nous avons montré que le facteur de stabilité est d'autant plus faible (mais toujours assez largement supérieur à l'unité) que les dimensions (largeur et surtout hauteur) des murs sont plus grandes. Nous avons également confirmé que les murs avec quatre bords appuyés, qui est la configuration utilisée en pratique, sont plus stables que les murs ayant ses bords verticaux libres. Pour les murs constitués de panneaux individuels assemblés entre eux par des joints, les simulations montrent que ces derniers sont moins stables en conditions d'incendie que les murs continus, en raison de la résistance nulle en flexion des joints. Par ailleurs, nous avons montré qu'une disposition des panneaux en position verticale serait plus favorable pour la stabilité au feu des murs qu'une pose en position horizontale.

## **Pistes d'améliorations et perspectives**

Plusieurs pistes d'amélioration et de prolongement du présent travail, tant sur le plan du calcul de la déformée d'origine thermique que sur celui du calcul à la rupture peuvent être envisagées.

✓ Tout d'abord, en raison de la complexité des calculs relatifs aux murs constitués de panneaux individuels séparés par des joints, nous n'avons pu obtenir par le biais de calculs analytiques ou semi-analytiques la déformée totale de ce type de murs modélisés comme des plaques de *von Karman*. Afin d'évaluer l'« effet  $P-\delta$  » des murs avec joints, il convient donc de recourir à une résolution numérique des équations de *von Karman*, ce qui peut par exemple être effectué à l'aide des plateformes ouvertes en plein essor comme *FEniCS*<sup>1</sup> et *FreeFem++*<sup>2</sup> qui permettent de traiter les équations différentielles correspondantes. De plus, de tels outils numériques peuvent s'adapter à tous types de conditions aux limites, même s'ils sont plus lourds à mettre œuvre que les solutions analytiques et semi-analytiques exploitées dans le présent travail.

✓ En second lieu, seules les *bornes inférieures* du facteur de stabilité ont été ici présentées pour les murs constitués par l'assemblage de panneaux individuels avec joints, en raison du fait que les *bornes supérieures* obtenues par l'approche cinématique se sont révélées beaucoup plus grandes, conduisant alors à un encadrement de très mauvaise qualité. ont donné un encadrement très large. Il faudrait donc sans doute réexaminer l'outil numérique utilisé dans la mise en œuvre de l'approche cinématique pour les murs avec joints en vue d'en améliorer ainsi la qualité en resserrant l'encadrement du facteur de stabilité.

✓ Enfin, et c'est sans doute le point le plus important, il convient d'être conscient que le *changement de géométrie* est une fonction (croissante) du niveau de chargement *mécanique* appliqué, c'est-à-dire dans notre cas le *poids propre*. Or, dans les calculs que nous avons effectués, la déformée d'origine thermique qui induit le chargement de géométrie sur la base de laquelle est ensuite effectué le calcul à la rupture, est évaluée en utilisant une loi de comportement *thermoélastique* (négligeant donc les déformations plastiques) et pour un niveau de chargement associé au poids propre effectif  $w$  et non à sa valeur extrême  $w^+$ . En d'autres termes, l'évaluation exacte du facteur de stabilité exigerait en toute rigueur de connaître le changement de géométrie associé à l'application du chargement  $w^+$ . Il en résulte que, dans la mesure où les facteurs de stabilité trouvés sont *supérieurs à l'unité*, les majorants et minorants du facteur de stabilité ainsi obtenus sont *surestimés* par rapport à ceux que l'on calculerait sur la base d'un changement de géométrie des murs associé au chargement à la rupture<sup>3</sup>. En conséquence, un calcul d'évolution pas-à-pas de la structure (qui prendrait en compte les changements de géométrie, la dégradation thermique des propriétés élastiques et de résistance des matériaux, mais également la plasticité de ces derniers) étant aujourd'hui hors de portée<sup>4</sup>, il s'agira de mettre au point une procédure, sans doute de nature itérative, permettant d'aboutir à une évaluation plus fiable du facteur de stabilité effectif du mur.

---

<sup>1</sup> <https://fenicsproject.org/>

<sup>2</sup> <http://www.freefem.org/>

<sup>3</sup> Le résultat serait bien évidemment inverse si ce facteur de stabilité était inférieur à l'unité.

<sup>4</sup> Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une modélisation de type poutre où le chargement extrême correspond à une *limite d'élasticité* (Pham, 2014).

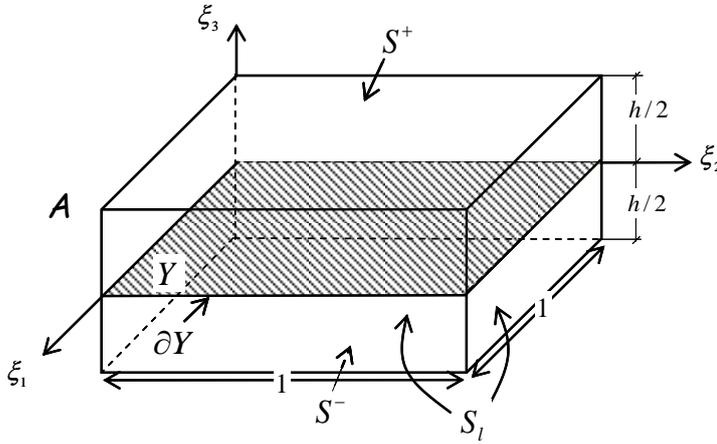
# Annexe

## Loi de comportement thermoélastique d'une plaque en variables généralisées

Cette loi est établie à partir d'une méthode de changement d'échelle consistant à résoudre un *problème auxiliaire de thermoélasticité* défini sur un élément tridimensionnel de plaque.

### A.1 Élément de plaque : notations

On considère un élément de plaque d'épaisseur  $h$  occupant dans l'espace repéré par le trièdre orthonormé  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  le domaine  $\mathbf{A} = Y \times [-h/2, +h/2]$ , où  $Y = [0,1] \times [0,1]$  est le carré unitaire. Les surfaces  $S^\pm = Y \times [\pm h/2]$  et  $S_l = \partial Y \times [-h/2, +h/2]$  sont respectivement les faces supérieure et inférieure et la surface latérale de l'élément de plaque (figure A1).



$$\begin{aligned}
 Y &= [0,1] \times [0,1] \\
 \mathbf{A} &= Y \times [-h/2, +h/2] \\
 \partial \mathbf{A} &= S_l \cup S^+ \cup S^- \\
 S^\pm &= Y \times \{\pm h/2\} \\
 S_l &= \partial Y \times [-h/2, +h/2]
 \end{aligned}$$

Figure A.1. Élément de plaque de côté unité

### A.2 Champs de déplacements et de contraintes admissibles

Cet élément de plaque pouvant être considéré comme une cellule base périodique dans le plan de la plaque, les champs de déplacements et de contraintes, respectivement cinématiquement et statiquement admissibles sont définis comme suit :

- ✓ Un champ de déplacement  $\underline{u}$  est *cinématiquement admissible* s'il peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{\xi}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\xi} + 1/2 (\underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\xi}) \underline{e}_3 + \underline{v}(\underline{\xi}) \quad (\text{A.1})$$

où  $\underline{v}(\underline{\xi})$  est un déplacement périodique sur  $S_l$  tandis que  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{\chi}}$  sont deux tenseurs plans d'ordre deux :

$$\underline{\underline{F}} = F_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta, \quad \underline{\underline{\chi}} = \chi_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \text{avec } \chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (\text{A.2})$$

- ✓ Un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  est *statiquement admissible* s'il vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathbf{A}: \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}) = 0, \quad \forall \underline{\underline{\xi}} \in \Sigma: [\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}})] \cdot \underline{\underline{n}} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \text{ antipériodique sur } S_l, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_3 = 0 \text{ sur } S^\pm \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### A.3 Mode de chargement

Le champ de déformation associé à un champ de déplacement de la forme (A.1) s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\operatorname{grad}}} u(\underline{\underline{\xi}}) + {}^T \underline{\underline{\operatorname{grad}}} u(\underline{\underline{\xi}}) \right) \quad (\text{A.4})$$

Sachant que le gradient du déplacement vaut :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\xi}}) &= (\underline{\underline{F}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}}) \cdot d\underline{\underline{\xi}} - d\xi_3 \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{\xi}} + (\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot d\underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{e}}_3 + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} v \cdot d\underline{\underline{\xi}} \\ &= \underbrace{\left( \underline{\underline{F}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} - (\underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{\xi}}) \otimes \underline{\underline{e}}_3 + \underline{\underline{e}}_3 \otimes (\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\chi}}) + \underline{\underline{\operatorname{grad}}} v \right)}_{\underline{\underline{\operatorname{grad}}} u} \cdot d\underline{\underline{\xi}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

il vient alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\xi}})) = \underline{\underline{\varepsilon}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{\xi}})) \quad (\text{A.6})$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{F}} + {}^T \underline{\underline{F}}) / 2$  et  $\underline{\underline{\chi}}$  sont respectivement les tenseurs de *déformation membranaire* et de *courbure* de la plaque.

Dans ces conditions, l'application du T.T.V (Théorème des Travaux Virtuels) donne :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ s.a. }, \quad \forall \underline{\underline{u}} \text{ c.a. } (\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\chi}}) \\ W_e(\underline{\underline{u}}) = \int_A \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\mathbf{A} = \int_A \underline{\underline{\sigma}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}) \right] \, d\mathbf{A} \\ = \left( \int_A \sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\mathbf{A} + \left( - \int_A \xi_3 \sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta \right) : \underline{\underline{\chi}} \, d\mathbf{A} + \int_A \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}) \, d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$\int_A \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{v}}) \, d\mathbf{A} = \int_{S^\pm} \overbrace{(\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{\underline{e}}_3)) \cdot \underline{\underline{v}}}^{=0} \, dS + \int_{S_l} \overbrace{(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{v}}}^{=0} \, dS = 0 \quad (\text{A.8})$$

On en déduit que les efforts généralisés associés au couple de déplacements généralisés  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})$  sont définis par :

$$\alpha, \beta = 1, 2: \quad \underline{\underline{N}} = \int_A \sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta \, d\mathbf{A}, \quad \underline{\underline{M}} = \int_A -\xi_3 \sigma_{\alpha\beta} \underline{\underline{e}}_\alpha \otimes \underline{\underline{e}}_\beta \, d\mathbf{A} \quad (\text{A.9})$$

de sorte que :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ s.a. }, \forall \underline{\underline{u}} \text{ c.a. } (\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\chi}}): \quad W_e(\underline{\underline{u}}) = \int_A \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dA = \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \quad (\text{A.10})$$

$\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$  sont respectivement les tenseurs des *efforts membranaires* et des *moments de flexion* considérés comme des *paramètres de chargement* pour le problème auxiliaire défini sur  $A$ . Compte tenu de la symétrie des tenseurs, il s'agit donc d'un *mode de chargement à six paramètres*.

#### A.4. Comportement thermoélastique

La plaque étant supposée être constituée d'un matériau isotrope dont le module d'élasticité dépend de la température, on cherche alors la loi de comportement généralisée reliant le couple des déplacements généralisés  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})$  au couple des efforts généralisés  $(\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{M}})$ .

On recherche la solution en déplacement du problème en supposant que le déplacement périodique  $\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{\xi}})$  est vertical et ne dépend que de  $\xi_3$ , c'est-à-dire sous la forme :

$$\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\xi}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{\xi}} + 1/2(\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{e}}_3 + \overbrace{\varphi(\xi_3)}^{\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{\xi}})} \underline{\underline{e}}_3 \quad (\text{A.11})$$

à laquelle est associé le *champ de déformations* :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{\varepsilon}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} + \varphi'(\xi_3) \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3 \quad (\text{A.12})$$

La loi de comportement thermoélastique s'écrivant localement:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad \tau = \tau(\xi_3) \quad (\text{A.13})$$

où  $\tau(\xi_3)$  est l'élévation de température dépendant de l'ordonnée du point considéré, il vient alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left[ \lambda(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} - \xi_3 \text{tr} \underline{\underline{\chi}} + \varphi') - k\tau \right] \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{\varepsilon}} - \xi_3 \underline{\underline{\chi}} + \varphi' \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3) \quad (\text{A.14})$$

où les coefficients  $\lambda, \mu$  et  $k$  sont reliés au module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$  et coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  par les relations classiques :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, k = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \quad (\text{A.15})$$

L'équation d'équilibre  $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$  qui se réduit alors à  $d\sigma_{33} / d\xi_3 = 0$ , combinée aux conditions aux limites  $\underline{\underline{\sigma}}(\pm h/2) \cdot \underline{\underline{e}}_3 = 0$ , conduit alors à :

$$\sigma_{33} = 0 \Rightarrow \varphi' = \frac{\nu}{1-\nu} (\xi_3 \text{tr} \underline{\underline{\chi}} - \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \tau \quad (\text{A.16})$$

et en annulant le déplacement  $\varphi$  en  $\xi_3 = 0$  :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{\xi}) = & \left( \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\xi}_3 \underline{\underline{\chi}} \right) \cdot \underline{\xi} + 1/2 (\underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot \underline{\xi}) \underline{e}_3 \\ & + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\underline{\xi}_3^2}{2} \text{tr} \underline{\underline{\chi}} - \underline{\xi}_3 \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} \right) \underline{e}_3 + \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \int_0^{\underline{\xi}_3} \tau(\eta) d\eta \right) \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Reportant cette dernière expression dans la loi de comportement (A.14), la *solution en contrainte* s'écrit alors tous calculs faits :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\xi}_3 \underline{\underline{\chi}}) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\xi}_3 \underline{\underline{\chi}}) \underline{\underline{\delta}} - \frac{E\alpha\tau}{1-\nu} \underline{\underline{\delta}} \quad \text{avec } \underline{\underline{\delta}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad (\text{A.18})$$

soit encore en notation matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} - \xi_3 \chi_{11} \\ \epsilon_{22} - \xi_3 \chi_{22} \\ \epsilon_{12} - \xi_3 \chi_{12} \end{Bmatrix} + \sigma^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Il s'agit donc d'un champ de *contraintes planes* statiquement admissible avec les *efforts généralisés* définis par :

$$\alpha, \beta = 1, 2: \quad \underline{\underline{N}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\xi_3, \quad \underline{\underline{M}} = \int_{-h/2}^{+h/2} -\xi_3 \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\xi_3 \quad (\text{A.20})$$

Compte tenu de la dépendance du module d'Young avec la température  $E = E(\tau) = E(\xi_3)$ , il vient finalement :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \epsilon_{11} - B \chi_{11} \\ A \epsilon_{22} - B \chi_{22} \\ A \epsilon_{12} - B \chi_{12} \end{pmatrix} + N^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B \epsilon_{11} + D \chi_{11} \\ -B \epsilon_{22} + D \chi_{22} \\ -B \epsilon_{12} + D \chi_{12} \end{pmatrix} + M^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

avec :

$$\begin{aligned} N^T &= \int_{-h/2}^{+h/2} -\frac{\alpha(\xi_3) E(\xi_3) \tau(\xi_3)}{1-\nu} d\xi_3, \quad M^T = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\xi_3 \alpha(\xi_3) E(\xi_3) \tau(\xi_3)}{1-\nu} d\xi_3, \\ A &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E(\xi_3)}{1-\nu^2} d\xi_3, \quad B = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E(\xi_3) \xi_3}{1-\nu^2} d\xi_3, \quad D = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E(\xi_3) \xi_3^2}{1-\nu^2} d\xi_3. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Dans le cas où le coefficient  $B$  n'est pas nul, les efforts membranaires et de flexion sont ainsi *couplés* au niveau de la loi de comportement.

# Bibliographie

Anderberg, Y. and Thelandersson, S. (1976). Stress and deformation characteristics of concrete at high temperatures. 2. Experimental investigation and material behaviour model. Bulletin of Division of Structural Mechanics and Concrete Construction, Bulletin 54. Lund Institute of Technology.

Bahr, O. et al. (2013). Young's modulus and Poisson's ratio of concrete at high temperatures: Experimental investigations. *Materials and Design*, 45, pp. 421–429.

Banerjee, B. and Datta, S. (1981). A new approach to an analysis of large deflections of thin elastic plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 16(1), pp. 47–52.

Bary, B. et al. (2008). A coupled thermo-hydro-mechanical-damage model for concrete subjected to moderate temperatures. *International journal of heat and mass transfer*. Elsevier, 51(11–12), pp. 2847–2862.

Bazant, Z. and Cedolin, L. (2010). *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. Singapore: World Scientific.

Bazant, Z. P. and Thonguthai, W. (1978). Pore pressure and drying of concrete at high temperature. *ASCE J Eng Mech Div. American Society of Civil Engineers (ASCE)*, 104(5), pp. 1059–1079.

Bazant, Z. P. and Thonguthai, W. (1979). Pore pressure in heated concrete walls: theoretical prediction. *Magazine of Concrete Research*, 31(107), pp. 67–76.

Berger, H. (1954). A new approach to the analysis of large deflections of plates. California Institute of Technology.

Berger, M. S. and Fife, P. C. (1968). Von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate, II plate with general edge conditions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXI(883), pp. 227–241.

Bertero, V. V and Polivka, M. (1972). Influence of thermal exposures on mechanical characteristics of concrete. *Special Publication*, 34, pp. 505–531.

Bisbos, C. D. and Pardalos, P. M. (2007). Second-order cone and semidefinite representations of material failure criteria. *Journal of Optimization Theory and Applications*. Springer, 134(2), pp. 275–301.

Bisch, P. (2013). *Mécanique des coques: théorie et applications*. Presses des Ponts.

Bleyer, J. (2015a). *Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des structures de génie civil*. Université Paris Est.

Bleyer, J., Pham, D. T. and de Buhan, P. (2015b). Failure design of high-rise concrete panels under fire loading. in *Engineering and Computational Mechanics Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, pp. 1–8.

Bleyer, J. et al. (2015c). Yield design of periodically heterogeneous plates. in *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*. Springer, pp. 143–158.

Bleyer, J. and De Buhan, P. (2016). A numerical approach to the yield strength of shell structures. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. Elsevier, 59, pp. 178–194.

Boley, B. A. and Weiner, J. H. (1960). *Theory of Thermal Stresses*.

Bonet, J. L. et al. (2004). A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending. *Computers & structures*. Elsevier, 82(2–3), pp. 213–225.

Bonnet, M. and Frangi, A. (2006). *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*. Ecole Polytechnique.

de Borst, R. and Peeters, P. P. J. M. (1989). Analysis of concrete structures under thermal loading. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. Elsevier, 77(3), pp. 293–310.

Bourgeois, S., Débordes, O. and Patou, P. (1998). Homogénéisation et plasticité de plaques minces.. *Revue Européenne des Eléments Finis*. Hermès, 7(1-2-3), pp. 39–54.

Brite Euram III BRPR-CT95–0065 Hiteco (1999). *High Temperature Concrete: Understanding and industrial applications of high performance concretes in high temperatures environment*.

de Buhan, P. (2007). *Plasticité et calcul à la rupture*. Presses des Ponts.

De Buhan, P., Bleyer, J. and Hassen, G. (2017). *Elastic, Plastic and Yield Design of Reinforced Structures*. Elsevier.

Caillerie, D. and Nedelec, J. C. (1984). Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. Wiley Online Library, 6(1), pp. 159–191.

Caldas, R. B., Sousa, J. B. M. and Fakury, R. H. (2010). Interaction diagrams for reinforced concrete sections subjected to fire. *Engineering Structures*. Elsevier Ltd, 32(9), pp. 2832–2838.

Charalampakis, A. E. and Koumoussis, V. K. (2008). Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load. *Advances in Engineering Software*. Elsevier, 39(11), pp. 923–936.

Ciarlet, P. G. (1979). A justification of a nonlinear model in plate theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 18, pp. 227–258.

Ciarlet, P. G. (1980). A justification of the von Kármán equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Springer, 73(4), pp. 349–389.

Cicekli, U., Voyiadjis, G. Z. and Al-Rub, R. K. A. (2007). A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *International Journal of plasticity*. Elsevier, 23(10–11), pp. 1874–1900.

Cimbéton (2007). Conception des bâtiments d'activités en béton: Murs séparatifs coupe-feu et façades à fonction d'écran thermique en béton. Paris.

Cimbéton (2008). Le béton et la sécurité incendie. Paris.

Cimbéton (2010). Sécurité incendie dans les bâtiments: Les apports du béton pour améliorer la sécurité. Paris.

Dai, K. Y. et al. (2005). Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method. *Computers & Structures*. Pergamon, 83(17–18), pp. 1487–1502.

Dal Pont, S., Durand, S. and Schrefler, B. A. (2007). A multiphase thermo-hydro-mechanical model for concrete at high temperatures—Finite element implementation and validation under LOCA load. *Nuclear Engineering and Design*. Elsevier, 237(22), pp. 2137–2150.

Dalot, J. and Sab, K. (2008). Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love–Kirchhoff model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Pergamon, 56(2), pp. 561–580.

Darwin, D., Dolan, C. W. and Nilson, A. H. (2016). *Design Concrete Structures*. McGraw-Hill Education.

Das, Y. C. and Navaratna, D. R. (1962). Thermal bending of rectangular plates. *Journal of the Aerospace Sciences*, 29(11), pp. 1400–1402. doi: 10.1016/0029-5493(79)90078-5.

Diederichs, U. (1987). Modelle zur beschreibung der betonverformung bei instantionaren temperaturen. *Abschlusskolloquium Bauwerke unter Brandeinwirkung*, Technische Universitat, Braunschweig, 25, p. 34.

EN 1992-1-1 (2005). Eurocode 2: Calcul des structures en béton - Partie 1-1: Règles générales et règles pour les bâtiments. p. 241.

EN 1992-1-2 (2005). Eurocode 2: Calcul des structures en béton- Partie 1-2: Règles générales - Calcul du comportement au feu. p. 101.

Flynn, D. R. (1999). Response of high performance concrete to fire conditions: review of thermal property data and measurement techniques. Millwood, Va, USA: National Institute of Standards and Technology.

Föppl, A. (1897). *Vorlesungen über technische mechanik*. Teubner Verlag, Leipzig.

Forray, M. and Newman, M. (1960). Axisymmetric Bending Stresses in Solid Circular Plates with Thermal Gradients. *Journal of the Aerospace Sciences*, 27(9), pp. 717–718.

Forray, M. and Newman, M. (1961). Bending of Circular Plates Due to Asymmetric Temperature Distribution. *Journal of the Aerospace Sciences*, 28(10), pp. 773–778.

Forray, M. and Newman, M. (1962). The Postbuckling Analysis of Heated Rectangular Plates. *Journal of the Aerospace Sciences*, 29(10), pp. 1262–1262.

Franssen, J.-M. (1987). Etude du comportement au feu des structures mixtes acier-béton. Université de Liège, Liège, Belgium.

Franssen, J.-M. and Gernay, T. (2017). Modeling structures in fire with SAFIR ® : theoretical background and capabilities. *Journal of Structural Fire Engineering*, 8(3), pp. 300–323.

Franssen, J. M. (2005). SAFIR: A thermal/structural program for modeling structures under fire. *Engineering Journal*, pp. 143–150.

Galerkin, B. G. (1915). Rods and Plates: Series in some problems of elastic equilibrium of rods and plates. *Vestnik Ingenerov Tech. (USSR)*, 1, pp. 897–908.

Gernay, T. and Franssen, J.-M. (2012). A formulation of the Eurocode 2 concrete model at elevated temperature that includes an explicit term for transient creep. *Fire Safety Journal*. Elsevier, 51, pp. 1–9.

Gernay, T., Millard, A. and Franssen, J.-M. (2013). A multiaxial constitutive model for concrete in the fire situation: Theoretical formulation. *International Journal of Solids and Structures*. Elsevier, 50(22–23), pp. 3659–3673.

Grassl, P. and Jirásek, M. (2006). Damage-plastic model for concrete failure. *International journal of solids and structures*. Elsevier, 43(22–23), pp. 7166–7196.

Hager, I. and Pimienta, P. (2005). Déformation thermique transitoire des bétons à haute performance: Etude expérimentale. *Revue européenne de génie civil*. Taylor & Francis, 9(3), pp. 373–383.

Holicky, M. et al. (2005). Implementation of eurocodes, handbook 5, design of buildings for the fire situation, Leonardo da Vinci Pilot Project: Luxembourg.

Hrabok, M. M. and Hrudey, T. M. (1984). A review and catalogue of plate bending finite elements. *Computers & Structures*. Elsevier, 19(3), pp. 479–495.

Khoury, G. A. (2000). Effect of fire on concrete and concrete structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*. Wiley Online Library, 2(4), pp. 429–447.

Khoury, G. A., Grainger, B. N. and Sullivan, P. J. E. (1985). Transient thermal strain of concrete: literature review, conditions within specimen and behaviour of individual constituents. *Magazine of concrete research*. Thomas Telford Ltd, 37(132), pp. 131–144.

Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40, pp. 51–88.

Kodur, V. (2014). Properties of concrete at elevated temperatures. *ISRN Civil Engineering*, 2014.

Koehlin, P. et al. (2008). Failure criterion for reinforced concrete beams and plates subjected to membrane force, bending and shear. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. Elsevier, 27(6), pp. 1161–1183.

Krysl, P. and Belytschko, T. (1995). Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*. Springer, 17(1–2), pp. 26–35.

Law, A. and Gillie, M. (2010). Interaction diagrams for ambient and heated concrete sections. *Engineering Structures*. Elsevier, 32(6), pp. 1641–1649.

Le, C. V, Nguyen-Xuan, H. and Nguyen-Dang, H. (2010). Upper and lower bound limit analysis of plates using FEM and second-order cone programming. *Computers & Structures*. Elsevier, 88(1–2), pp. 65–73.

Lévy, M. (1899). Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire. in *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*.

Levy, S. (1942). Bending of rectangular plates with large deflections. *NACA Technical Note 846*, pp. 1–46.

Love, A. E. H. (1892). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press.

Makrodimopoulos, A. (2010). Remarks on some properties of conic yield restrictions in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. Wiley Online Library, 26(11), pp. 1449–1461.

Marechal, J. C. (1972). Variations in the modulus of elasticity and Poisson's ratio with temperature. *Special Publication*, 34, pp. 495–504.

Mindeguia, J. (2009). Contribution expérimentale à la compréhension des risques d'instabilité thermique des bétons. *Université de Pau et des Pays de l'Adour*.

Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1), pp. 31–38.

Mosek (2014). The Mosek optimization software'. Available at: <https://www.mosek.com/>.

Mukhopadhyay, M. (1979). A general solution for rectangular plate bending. *Forschung im Ingenieurwesen*, 45(4), pp. 111–118.

Navier, C.-L. (1823). Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques. in *Bulletin des sciences par la société philomatique de Paris*, pp. 95–102.

Nowinski, J. L. and Ohnabe, H. (1972). On certain inconsistencies in Berger equations for large deflections of plastic plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. Elsevier, 14(3), pp. 165–170.

Parkus, H. (1976). *Thermoelasticity*. Vienna: Springer Vienna.

Pearce, C. J., Nielsen, C. V and Bićanić, N. (2004). Gradient enhanced thermo-mechanical damage model for concrete at high temperatures including transient thermal creep. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. Wiley Online Library, 28(7–8), pp. 715–735.

Pham, D. T. (2014). Analyse par le calcul à la rupture de la stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions. Université Paris-Est.

Pham, D. T. et al. (2015a). Interaction diagrams of reinforced concrete sections in fire: A yield design approach. *Engineering Structures*. Elsevier Ltd, 90, pp. 38–47.

Pham, D. T. et al. (2015b). Yield design-based analysis of high rise concrete walls subjected to fire loading conditions. *Engineering Structures*. Elsevier Ltd, 87, pp. 153–161.

Pham, D. T. et al. (2017). Test of high-rise concrete wall in fire conditions. in *International Fire Safety Symposium*. Naples, pp. 1–8.

Phan, L. T. and Carino, N. J. (2000). Fire performance of high strength concrete: research needs. *Advanced Technology in Structural Engineering*, pp. 1–8.

Prathap, G. (1979). On the berger approximation: A critical re-examination. *Journal of Sound and Vibration*. Academic Press, 66(2), pp. 149–154.

Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.

Rodrigues, R. V. (2015). A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending. *Engineering Structures*. Elsevier, 104, pp. 1–17.

Rodriguez, J. A. and Aristizabal-Ochoa, J. D. (1999). Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section. *Journal of Structural Engineering*. American Society of Civil Engineers, 125(6), pp. 672–683.

Salençon, J. (2013) *Yield Design, ISTE*.

Salençon, J. (2016). *Mécanique des Milieux Continus Tome I. Concepts Généraux*.

Save, M. A. et al. (1997). *Plastic limit analysis of plates, shells, and disks*. Elsevier.

Schneider, U. (1986). Modelling of concrete behaviour at high temperatures. *Design of structures against fire*. Elsevier, pp. 53–69.

Schneider, U. (1988). Concrete at high temperatures - A general review. *Fire Safety Journal*, 13(1), pp. 55–68.

Schrefler, B. A. et al. (2002). Thermo-hydro-mechanical modelling of high performance concrete at high temperatures. *Engineering Computations*. MCB UP Ltd, 19(7), pp. 787–819.

Steele, C. R. and Balch, C. D. (2009). *Introduction to the Theory of Plates*. Stanford University, pp. 1–41.

Taqieddin, Z. N., Voyiadjis, G. Z. and Almasri, A. H. (2011). Formulation and verification of a concrete model with strong coupling between isotropic damage and elastoplasticity and comparison to a weak coupling model. *Journal of Engineering Mechanics*. American Society of Civil Engineers, 138(5), pp. 530–541.

Terro, M. J. (1998). Numerical modeling of the behavior of concrete structures in fire. *ACI Structural Journal*. American Concrete Institute, 95, pp. 183–193.

Thelandersson, S. (1987). Modeling of combined thermal and mechanical action in concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. American Society of Civil Engineers, 113(6), pp. 893–906.

Theodore von Kármán (1910). Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, 4(3–4), p. 75.

Thomas, O. and Bilbao, S. (2008). Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates: In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3), pp. 569–590.

Torelli, G. et al. (2016). Concrete strains under transient thermal conditions: a state-of-the-art review. *Engineering Structures*. Elsevier, 127, pp. 172–188.

Ventsel, E. and Krauthammer, T. (2001). *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications*. CRC press.

Whitney, C. S. (1937). Design of reinforced concrete members under flexure or combined flexure and direct compression. in *Journal Proceedings*, pp. 483–498.

Willam, K. J. (1975). Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. *Proc. Intl. Assoc. Bridge Structl. Engrs*, 19, pp. 1–30.

Yang, M. et al. (2016). An analytical approach for predicting the deformed configuration of high-rise concrete walls subjected to fire loading conditions. in *Structures in Fire*. Princeton, pp. 119–126.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (Robert L. and Zhu, J. Z. (2013). *Finite element method : its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann.