



# Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes : application à la table d'harmonie du piano

Pierre Margerit

## ► To cite this version:

Pierre Margerit. Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes : application à la table d'harmonie du piano. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2018. Français. NNT : 2018PESC1151 . tel-02304886

**HAL Id: tel-02304886**

**<https://pastel.hal.science/tel-02304886>**

Submitted on 3 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

UNIVERSITÉ —  
— PARIS-EST

École doctorale n° 531 : Sciences, ingénierie et environnement

Spécialité “Structures et Matériaux”

*présentée par*

**Pierre Margerit**

---

**Caractérisation large bande du comportement  
dynamique linéaire des structures hétérogènes  
viscoélastiques anisotropes. Application à la table  
d’harmonie du piano.**

---

Directeur de thèse : **Jean-François Caron**

Co-encadrant de thèse : **Arthur Lebée**

**Jury:**

<b>M. Charles Pezerat,</b>	Professeur, Université du Maine	Rapporteur
<b>M. Etienne Balmes,</b>	Professeur, Arts et Métiers Paristech	Rapporteur
<b>Mme. Nathalie Godin,</b>	Maitre de conférences, INSA de Lyon	Examinatrice
<b>M. Roland Badeau,</b>	Professeur associé, Institut Mines-Télécom	Examineur
<b>M. Xavier Boutillon,</b>	Directeur de recherche CNRS, École Polytechnique	Examineur

École des Ponts ParisTech  
6 et 8 avenue Blaise Pascal  
Cité Descartes  
Champs sur Marne  
F-77455 Marne la Vallée, France





■ Un scientifique dans son laboratoire n'est pas  
un simple technicien : il est aussi un enfant  
confronté à des phénomènes naturels qui  
l'impressionnent comme des contes de fées. ■

**Marie Curie.**



# Remerciements

La réalisation d'une thèse ne se réduit pas à un travail solitaire. C'est avant tout une aventure humaine, et la présence d'un nom en page de garde ne doit en aucun cas faire oublier l'importance de tout ceux ayant pris part à cette aventure, qu'il convient donc de nommer ici.

Mes remerciements vont tout d'abord à Jean-François et Arthur, qui ont toujours su trouver les solutions aux problèmes, apportant le savoir scientifique, la méthode ; mais aussi les encouragements quand il le fallait ; parfois aussi le petit grain de folie ; tous ces ingrédients qui auront permis de faire de la thèse une expérience inoubliable. Le travail accompli leur est totalement dû.

C'est également avec grand plaisir et beaucoup d'honneur que j'ai confié la relecture du présent manuscrit à Etienne Balmes et Charlez Pezerat ; je les remercie pour leur patience dans cette lourde tâche. Leurs remarques et les discussions qui s'en sont suivies auront grandement participé à la qualité du travail, qui leur doit beaucoup. Mes remerciements vont aussi à Roland Badeau, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance, et Nathalie Godin ; leurs interrogations et commentaires me seront très précieux pour la suite.

Cette aventure n'aurait pu voir le jour sans Kerem Ege, dont la sympathie et la réactivité légendaire ont été, et sont toujours, un fort vecteur de motivation ; merci à lui de m'avoir introduit dans ce fabuleux monde de l'acoustique musicale, et de la recherche scientifique en général. Un grand merci aussi à Xavier Boutillon qui me permet de poursuivre l'aventure un peu plus loin ; sa présence dans le jury et les communications scientifiques communes ne sont qu'un aperçu de sa contribution au travail accompli. Je tiens également à remercier tous les membres du projet MAESSTRO ; en particulier Stephen et Claire, qui par l'art de l'expérimentation nous distillent toutes ces questions qui nous passionnent.

Cette thèse aurait sûrement été très différente sans les nombreux échanges avec les collègues, désormais amis ; échanges scientifiques mais aussi humains. Ces trois années passées en leur compagnie m'auront laissé des souvenirs impérissables. Merci au capitaine de ce navire, Karam, et à Marie-Françoise, sans qui rien de tout cela ne serait possible. Merci au compagnon Hocine pour son aide constante et sa bonté intarissable.

Merci à mes parents et ma soeur Elsa pour leur soutien sans faille ; pour m'avoir transmis cette envie de découvrir, d'approfondir et de transmettre. Une pensée toute particulière pour les deux grands-pères, partis trop tôt pour voir la conclusion de l'histoire mais toujours présents dans les actes et les pensées ; je sais la fierté qu'ils auraient ressenti, eux pour qui la transmission du savoir était plus qu'une passion.

Et enfin, merci à celle qui m'a suivi, accompagné puis soutenu dans cette aventure ; dont la patience a été mise à rude épreuve mais qui a toujours été là pour supporter mes angoisses et doutes ; et su les balayer d'un juste mot. Claire, ce travail te doit énormément.



## Résumé

Le présent travail, réalisé dans le cadre du projet ANR MAESSTRO, concerne le remplacement des tables d'harmonie de piano traditionnellement constituées d'épicéa par des structures composites stratifiées. Cette démarche suppose une connaissance fine des matériaux à remplacer et des matériaux de remplacement. La contribution de la thèse consiste donc en le développement d'outils de caractérisation du comportement dynamique de structures viscoélastiques anisotropes hétérogènes sur une large bande de fréquence. Dans une première partie, une étude théorique de la propagation des ondes planes dans ces structures est réalisée. Contrairement à une approche modale classique, les conditions aux limites et chargements sont écartés du problème. Les surfaces de dispersion obtenues contiennent la signature de l'anisotropie, de l'hétérogénéité des propriétés mécaniques ou encore du comportement dissipatif de la structure. La deuxième partie est dédiée au développement d'un moyen de mesure plein-champ robotisé. Celui-ci permet la mesure du champ de vitesse tridimensionnel instantané d'une structure soumise à un chargement dynamique répétable. La définition de l'expérience est intégrée dans un environnement CAO, permettant la prise en compte des problématiques liées à l'utilisation d'un bras robot, ainsi que l'automatisation complète de la mesure. La troisième partie est consacrée à la formulation de procédures d'identification basées sur les mesures obtenues. Les paramètres d'un modèle réduit de la mesure sont identifiés par le biais d'une méthode ESPRIT originale, intégrant des développements spécifiques aux mesures plein-champ. Ces paramètres sont ensuite utilisés pour exprimer un problème aux valeurs propres inverse permettant l'identification des propriétés de la structure mesurée. La démarche est mise en œuvre dans le cadre de l'analyse modale (régime transitoire) et l'analyse en vecteurs d'onde proposée (régime permanent). Des validations expérimentales sur des poutres homogènes et plaques anisotropes sont présentées. Le manuscrit conclut par l'application des méthodes proposées à l'identification des propriétés matériau d'une table d'harmonie de piano à queue Stephen Paulello Technologies SP190//.

## Abstract

The present work, as part of the MAESSTRO ANR project, is motivated by the replacement of wood by composite material in the design of the piano soundboard. The main focus is on the characterization of the mechanical properties of both replaced and replacement materials in a wide frequency range, taking into account anisotropy, heterogeneous and viscoelastic behavior. First, the wave propagation in such structures is investigated; boundary conditions and loads are discarded to focus on the mechanisms responsible for the energy transmission in the media. The footprint of the complex behavior of the studied structures is represented and interpreted via the dispersion surfaces. Second, a robotized setup is proposed, allowing for the measurement of the full-field instantaneous 3D velocity along the surface of structures submitted to a repeated dynamic load. Third, identification methods using this experimental data are proposed. Based on the parameters of a reduced signal model of the measurement identified with an original ESPRIT method, inverse eigenvalue problems are formulated. Both transient and steady regime are investigated, respectively through modal analysis and the proposed wavevector analysis. The proposed methods are validated through applications on homogeneous beams and anisotropic plates. Finally, the overall proposed procedure is applied for the identification of the material properties of the soundboard of the Stephen Paulello technologies SP190// grand piano.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
La table d'harmonie du piano . . . . .	14
Rôle dans l'instrument . . . . .	14
Conception classique . . . . .	15
Table du <i>Paulello SP190//</i> . . . . .	16
Introduction des structures composites . . . . .	17
L'identification des structures : un problème complet . . . . .	18
Première partie : Étude et modélisation . . . . .	20
Deuxième partie : Conception d'un moyen de mesure . . . . .	21
Troisième partie : Formulation de méthodes inverses . . . . .	21
Quatrième partie : Application à la table d'harmonie du SP190// . . . . .	22
Contenu des annexes . . . . .	23
 <b>A Comportement dynamique linéaire des structures viscoélastiques anisotropes élancées</b>	 <b>27</b>
<b>I Propagation des ondes planes dans les structures viscoélastiques élancées</b>	<b>29</b>
I.1 L'onde plane . . . . .	32
I.1.1 Hypothèses de travail . . . . .	32
I.1.1.1 Éloignement des sources . . . . .	32
I.1.1.2 Régime harmonique stationnaire . . . . .	32
I.1.1.3 Séparation des variables . . . . .	32
I.1.1.4 Homogénéité des propriétés mécaniques . . . . .	33
I.1.1.5 Forme spatiale des champs . . . . .	33
I.1.2 Grandeurs caractéristiques . . . . .	34
I.1.2.1 Fonction de polarisation . . . . .	34
I.1.2.2 Vecteur d'onde . . . . .	35
I.1.2.3 Longueur d'onde . . . . .	36
I.1.2.4 Vitesse de phase . . . . .	37
I.1.2.5 Vitesse de groupe . . . . .	37
I.1.2.6 Vitesse d'énergie . . . . .	38
I.1.2.7 Surfaces de dispersion . . . . .	38
I.1.2.8 Lois de dispersion . . . . .	39
I.2 Solides infinis, ondes de Rayleigh et de Lamb . . . . .	40
I.2.1 Propagation en milieu infini . . . . .	40



	I.2.1.1	Le tenseur acoustique	40
	I.2.1.2	Solutions élémentaires	40
I.2.2		Rôle des interfaces	42
	I.2.2.1	Loi de Snell-Descartes	42
	I.2.2.2	Interfaces planes	43
	I.2.2.3	Milieu semi-infini : ondes de Rayleigh	43
	I.2.2.4	Milieu borné : ondes de Lamb	45
I.3		Guides d'onde	50
	I.3.1	Formulation forte	50
	I.3.1.1	Guides d'onde plans	50
	I.3.1.2	Guides d'onde uniaxiaux	52
	I.3.2	Formulation faible	52
	I.3.2.1	Guides d'onde plans	54
	I.3.2.2	Guides d'onde uniaxiaux	54
	I.3.3	Prise en compte du couplage acoustique	55
	I.3.3.1	Régime forcé	55
	I.3.3.2	Couplage acoustique	55
	I.3.3.3	Cas du guide d'onde plan	57
I.4		Fréquence de coupure des modes d'ordre supérieur	60
	I.4.1	Formulation	60
	I.4.2	Résolution dans le cas orthotrope	61
	I.4.3	Plaque homogène	62
	I.4.4	Plaque sandwich symétrique	62
	I.4.4.1	Modes symétriques	63
	I.4.4.2	Modes antisymétriques	65
I.5		Résolution par éléments finis spectraux	67
	I.5.1	Revue bibliographique	67
	I.5.1.1	Formulation forte	67
	I.5.1.2	Formulation faible	69
	I.5.2	Implémentations proposées	71
	I.5.2.1	Cas des stratifiés anisotropes viscoélastiques	71
	I.5.2.2	Cas des poutres de section quelconque	72
	I.5.3	Calcul des vecteurs d'onde	73
	I.5.4	Calcul des vitesses	74
	I.5.5	Résolution du problème couplé	75
I.6		Études de cas	78
	I.6.1	Poutre à section rectangulaire	79
	I.6.2	Plaques homogènes	81
	I.6.2.1	Matériau isotrope	81
	I.6.2.2	Matériau orthotrope	86
	I.6.3	Plaques multicouches	92
	I.6.3.1	Sandwich isotrope	92
	I.6.3.2	Stratifié <i>angle-ply</i>	95
	I.6.4	Mécanismes d'amortissement	100
	I.6.4.1	Plaque isotrope homogène	101
	I.6.4.2	Sandwich isotrope	102
	I.6.4.3	Plaque orthotrope homogène	103

I.6.5	Couplage acoustique . . . . .	105
I.6.5.1	Plaque homogène isotrope . . . . .	106
I.7	Conclusion . . . . .	108
<b>II</b>	<b>Surfaces de dispersion et correction des modèles réduits de structures élan-</b>	<b>111</b>
	<b>cées</b>	
II.1	Introduction . . . . .	112
II.2	Cinématique de Hencky-Mindlin . . . . .	115
II.2.1	Formulation du modèle . . . . .	116
II.2.1.1	Cinématique . . . . .	116
II.2.1.2	Déformations . . . . .	116
II.2.1.3	Comportement . . . . .	117
II.2.1.4	Équations d'équilibre . . . . .	118
II.2.2	Surfaces de dispersion . . . . .	118
II.2.2.1	Formulation . . . . .	118
II.2.2.2	Plaque symétrique orthotrope . . . . .	119
II.2.3	Correction du comportement en cisaillement hors-plan . . . . .	122
II.2.3.1	Plaques homogènes orthotropes . . . . .	123
II.2.3.2	Plaques sandwichs orthotropes . . . . .	124
II.3	Cinématique de Kirchhoff . . . . .	127
II.3.1	Définition du modèle . . . . .	127
II.3.1.1	Hypothèses supplémentaires . . . . .	128
II.3.1.2	Comportement . . . . .	129
II.3.1.3	Équations d'équilibre . . . . .	129
II.3.2	Surfaces de dispersion . . . . .	129
II.3.3	Formulation polaire . . . . .	130
II.3.3.1	Décomposition polaire . . . . .	131
II.3.3.2	Problème complet . . . . .	131
II.3.3.3	Plaques stratifiées découpées . . . . .	132
II.4	Cinématique de Timoshenko . . . . .	134
II.4.1	Définition du modèle . . . . .	134
II.4.1.1	Cinématique . . . . .	134
II.4.1.2	Loi constitutive généralisée . . . . .	134
II.4.1.3	Inerties généralisées . . . . .	135
II.4.1.4	Equations du mouvement . . . . .	136
II.4.2	Branches de dispersion . . . . .	136
II.4.2.1	Formulation . . . . .	136
II.4.2.2	Poutres orthotropes symétriques . . . . .	137
II.5	Cinématique d'Euler-Bernoulli . . . . .	141
II.6	Conclusion . . . . .	143
<b>B</b>	<b>Un nouveau moyen de mesure plein-champ</b>	<b>145</b>
<b>III</b>	<b>The Robotized Laser Doppler Vibrometer : on the use of an industrial robot</b>	<b>147</b>
	<b>arm to achieve 3D full-field velocity measurements</b>	
III.1	Introduction . . . . .	148
III.2	The Robotized Laser Doppler Vibrometer . . . . .	149

III.3 The controlling software . . . . .	152
III.3.1 The virtual experiment model . . . . .	152
III.3.2 Signal acquisition and processing . . . . .	155
III.4 Experimental validation case . . . . .	156
III.4.1 The model . . . . .	156
III.4.2 The measurement . . . . .	156
III.4.3 Modal analysis . . . . .	159
III.4.4 Result comparison . . . . .	159
III.5 Conclusion and Perspectives . . . . .	162

## **C Méthodes inverses pour l'identification des structures élan- cées** **163**

### **Introduction** **165**

### **IV Proposition d'une méthode ESPRIT unifiée** **169**

IV.1 Introduction . . . . .	171
IV.1.1 Travaux de Fourier et de Prony . . . . .	171
IV.1.2 Développement des méthodes de Prony . . . . .	172
IV.1.3 Méthode ESPRIT originale . . . . .	173
IV.1.4 Contribution proposée . . . . .	175
IV.1.5 Organisation du chapitre . . . . .	178
IV.1.6 Notations . . . . .	178
IV.2 Méthode ESPRIT unifiée . . . . .	184
IV.2.1 Modèle de signal . . . . .	184
IV.2.1.1 Prise en compte du bruit . . . . .	184
IV.2.1.2 Modèle continu . . . . .	184
IV.2.1.3 Observations . . . . .	185
IV.2.1.4 Discrétisation . . . . .	185
IV.2.2 Formulation du problème d'identification . . . . .	187
IV.2.2.1 Données d'entrée . . . . .	187
IV.2.2.2 Problème complet . . . . .	187
IV.2.2.3 Modification du modèle de signal . . . . .	188
IV.2.3 Écriture matricielle . . . . .	189
IV.2.3.1 Vecteur des données . . . . .	189
IV.2.3.2 Matrice des données . . . . .	190
IV.2.3.3 Prise en compte du modèle modifié . . . . .	191
IV.2.4 Invariance Rotationnelle . . . . .	192
IV.2.4.1 Matrices de sélection . . . . .	193
IV.2.4.2 Matrices pilotes tronquées . . . . .	194
IV.2.4.3 Invariance rotationnelle généralisée . . . . .	194
IV.2.5 Estimation des vecteurs d'onde . . . . .	196
IV.2.6 Covariance des données . . . . .	198
IV.2.6.1 Sous-espace signal . . . . .	198
IV.2.6.2 Matrices spectrales élémentaires . . . . .	199
IV.2.6.3 Matrice spectrale combinée . . . . .	200
IV.2.7 Estimateurs de la covariance . . . . .	201

IV.2.7.1	Estimation directe sur les réalisations . . . . .	201
IV.2.7.2	Lissage spatial . . . . .	202
IV.2.7.3	Décimation . . . . .	206
IV.2.8	Implémentation . . . . .	211
IV.2.8.1	Préparation . . . . .	211
IV.2.8.2	Application de la méthode . . . . .	212
IV.2.8.3	Estimation des amplitudes et phases . . . . .	212
IV.3	Performances de l'estimation . . . . .	213
IV.3.1	Borne de Cramer-Rao . . . . .	214
IV.3.2	Propagation des Incertitudes . . . . .	215
IV.3.2.1	Perturbation de l'espace signal . . . . .	216
IV.3.2.2	Perturbation des matrices spectrales . . . . .	216
IV.3.2.3	Perturbation des matrices polaires . . . . .	217
IV.3.2.4	Perturbation des vecteurs d'onde . . . . .	218
IV.3.2.5	Linéarisation des perturbations . . . . .	218
IV.3.2.6	Formulation analytique . . . . .	220
IV.3.2.7	Perturbation des amplitudes . . . . .	221
IV.3.3	Variance des estimations . . . . .	222
IV.3.4	Application à un signal composé d'un seul pôle . . . . .	223
IV.4	Estimation de l'ordre du signal . . . . .	228
IV.4.1	Influence d'une mauvaise estimation de l'ordre . . . . .	228
IV.4.2	Critère MDL : <i>Minimum Description Length</i> . . . . .	229
IV.4.3	Critère ESTER : <i>ESTimation of ERror</i> . . . . .	230
IV.4.4	Critère SAMOS : <i>Subspace-based Automatic Model Order Selection</i> . . . . .	231
IV.4.5	Critères de <i>stabilisation</i> . . . . .	233
IV.4.6	Conclusion . . . . .	234
IV.5	Conclusions . . . . .	236
<b>V</b>	<b>Identification inverse par analyse modale</b>	<b>239</b>
V.1	Introduction . . . . .	240
V.2	Analyse modale haute résolution . . . . .	242
V.2.1	Spécialisation de la méthode ESPRIT . . . . .	242
V.2.1.1	Modèle de signal . . . . .	242
V.2.1.2	Paramètres identifiés . . . . .	243
V.2.2	Choix de l'ordre du signal . . . . .	244
V.2.2.1	Division du domaine fréquentiel . . . . .	244
V.2.2.2	Critères de stabilisation . . . . .	245
V.2.3	Quantification des incertitudes . . . . .	248
V.2.3.1	Sensibilité . . . . .	248
V.2.3.2	Variance . . . . .	249
V.2.3.3	Utilisation du diagramme de stabilisation . . . . .	250
V.3	Problème aux valeurs propres inverse . . . . .	252
V.3.1	Formulation . . . . .	252
V.3.1.1	Problème aux valeurs propres <i>direct</i> . . . . .	252
V.3.1.2	Problème aux valeurs propres <i>inverse</i> . . . . .	253
V.3.2	Résolution . . . . .	254
V.3.2.1	Descente de gradient . . . . .	254

V.3.2.2	Sensibilité des valeurs et vecteurs propres . . . . .	255
V.3.2.3	Cas des plaques stratifiées uniformes . . . . .	257
V.3.3	Régularisation . . . . .	258
V.3.3.1	Taux de corrélation des vecteurs propres . . . . .	258
V.3.3.2	Moindres carrés pondérés . . . . .	259
V.3.3.3	Amortissement de l'algorithme . . . . .	261
V.3.4	Quantification des incertitudes . . . . .	261
V.3.4.1	Sensibilité des paramètres identifiés . . . . .	261
V.3.4.2	Sources d'incertitude . . . . .	262
V.3.4.3	Un indicateur simplifié . . . . .	263
V.4	Caractérisation d'une planche d'épicéa . . . . .	265
V.4.1	Mesure . . . . .	266
V.4.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	266
V.4.1.2	Signal d'excitation . . . . .	267
V.4.1.3	Données mesurées . . . . .	269
V.4.2	Analyse Modale . . . . .	271
V.4.2.1	Pré-traitements . . . . .	271
V.4.2.2	Choix de l'ordre du signal . . . . .	272
V.4.3	Modèle . . . . .	278
V.4.3.1	Formulation . . . . .	278
V.4.3.2	Isotropie radiale-transverse . . . . .	278
V.4.3.3	Comportement hystérétique . . . . .	279
V.4.4	Identification . . . . .	280
V.4.4.1	Cas 1 : Propriétés planes . . . . .	280
V.4.4.2	Cas 2 : Cisaillement roulant . . . . .	282
V.4.4.3	Comparaison des données modales . . . . .	282
V.4.4.4	Sensibilité des vecteurs propres . . . . .	284
V.5	Conclusion et perspectives . . . . .	286
<b>VI</b>	<b>High Resolution Wavenumber Analysis</b>	<b>289</b>
VI.1	Introduction . . . . .	291
VI.2	Natural wavenumbers in a beam . . . . .	292
VI.2.1	The Euler model . . . . .	292
VI.2.2	The Timoshenko model . . . . .	294
VI.3	Signal model . . . . .	294
VI.4	Two existing wavenumber identification methods . . . . .	295
VI.4.1	One pole : Inverse Wave Correlation . . . . .	295
VI.4.2	Bending waves's four poles : the Mc Daniel method . . . . .	295
VI.5	High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) method : implementation for the characterisation of beams . . . . .	296
VI.5.1	The ESPRIT algorithm . . . . .	296
VI.5.1.1	Signal and noise subspaces . . . . .	296
VI.5.1.2	Rotational Invariance . . . . .	297
VI.5.1.3	Estimation of the number of poles . . . . .	298
VI.5.2	HRWA Implementation . . . . .	298
VI.6	Comparison of methods for a simulated cantilever bending-only beam . . . . .	299
VI.6.1	Noise Sensitivity . . . . .	299

VI.6.2 Comparison of Computation Times . . . . .	303
VI.7 Experimental Results . . . . .	303
VI.8 Conclusion and Perspectives . . . . .	306
<b>VII High Resolution Wavevector Analysis</b>	<b>309</b>
VII.1 Introduction . . . . .	310
VII.2 High Resolution Wavevector Analysis . . . . .	312
VII.2.1 Signal model . . . . .	312
VII.2.2 Regular grid mesh of measurements . . . . .	314
VII.2.3 Signal preprocessing . . . . .	314
VII.2.4 Wavevector extraction . . . . .	314
VII.2.5 Wavevector selection . . . . .	316
VII.3 Applications . . . . .	317
VII.3.1 Sandwich Plate with foam core . . . . .	318
VII.3.1.1 Plate Configuration . . . . .	318
VII.3.1.2 Measurement setup . . . . .	318
VII.3.1.3 SFEM scheme . . . . .	318
VII.3.1.4 Results . . . . .	319
VII.3.2 Sandwich plate with honeycomb core . . . . .	323
VII.3.3 Inhomogeneous composite plate . . . . .	325
VII.4 Conclusions and Perspectives . . . . .	328
VII.5 Appendices . . . . .	329
VII.5.1 Wavevector extraction procedure . . . . .	329
VII.5.1.1 The 2D-ESPRIT method . . . . .	329
VII.5.1.2 The 2D-ESTER criterion . . . . .	332
VII.5.1.3 Implementation of the wavevector extraction procedure . . . . .	332
VII.5.2 Bending wave dispersion laws given by the Classical Lamination Plate theory. . . . .	332
<b>D Application à la table d'Harmonie du piano</b>	<b>335</b>
<b>VIII Application à la caractérisation de la table d'harmonie du SP190//</b>	<b>337</b>
VIII.1 Introduction . . . . .	338
VIII.2 Mesure de la réponse transitoire libre . . . . .	340
VIII.2.1 Dispositif expérimental . . . . .	340
VIII.2.2 Modélisation des géométries . . . . .	342
VIII.2.3 Définition du maillage . . . . .	343
VIII.2.4 Correction de la mesure . . . . .	344
VIII.2.5 Résultat . . . . .	344
VIII.3 Analyse modale . . . . .	346
VIII.3.1 Données utilisées . . . . .	346
VIII.3.2 Diagramme de stabilisation . . . . .	347
VIII.3.3 Résultat . . . . .	347
VIII.3.4 Incertitudes . . . . .	351
VIII.4 Identification sur les modes . . . . .	352
VIII.4.1 Modèle associé . . . . .	352
VIII.4.2 Choix des inconnues . . . . .	353

VIII.4.3	Identification . . . . .	353
VIII.5	Analyse en vecteurs d'onde . . . . .	360
VIII.5.1	Extraction locale . . . . .	360
VIII.5.2	Identification du comportement de plaque mince . . . . .	362
VIII.6	Conclusion . . . . .	367
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>369</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>376</b>
<b>Annexes</b>		<b>397</b>
<b>A</b>	<b>Généralités</b>	<b>397</b>
A.1	Dynamique du solide déformable . . . . .	398
A.1.1	Cadre de travail . . . . .	398
A.1.2	Champs tensoriels caractéristiques . . . . .	398
A.1.2.1	Déplacements . . . . .	398
A.1.2.2	Déformations . . . . .	399
A.1.2.3	Contraintes . . . . .	399
A.1.3	Équations locales du mouvement . . . . .	399
A.1.3.1	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	399
A.1.3.2	Conditions aux limites . . . . .	399
A.1.3.3	Comportement . . . . .	400
A.1.3.4	Conditions initiales . . . . .	400
A.1.3.5	Formulation locale du problème de dynamique . . . . .	400
A.1.3.6	Conditions de continuité . . . . .	400
A.1.4	Le principe des travaux virtuels . . . . .	401
A.1.4.1	Travail de la quantité d'accélération . . . . .	401
A.1.4.2	Travail des efforts extérieurs . . . . .	402
A.1.4.3	Travail des efforts intérieurs . . . . .	402
A.1.4.4	Équation de bilan . . . . .	403
A.1.4.5	Formulation faible du problème de dynamique . . . . .	403
A.1.4.6	Equivalence des approches globales et locales . . . . .	403
A.2	Quelques méthodes de résolution . . . . .	404
A.2.1	Réduction de l'espace des solutions . . . . .	404
A.2.1.1	Séparation des variables . . . . .	404
A.2.1.2	Paramétrage généralisé . . . . .	405
A.2.2	Formulation forte . . . . .	406
A.2.2.1	Méthode des différences finies . . . . .	406
A.2.3	Formulation faible . . . . .	406
A.2.3.1	Utilisation du principe des travaux virtuels . . . . .	407
A.2.3.2	Méthode de Ritz . . . . .	408
A.2.3.3	Méthode des éléments finis . . . . .	408
A.2.4	Décomposition modale . . . . .	410
A.2.4.1	Base modale . . . . .	411
A.2.4.2	Modal Assurance Criterion . . . . .	412

A.2.4.3	Réponse forcée . . . . .	412
A.2.4.4	Oscillations libres . . . . .	413
A.2.4.5	Régime harmonique permanent . . . . .	414
<b>B</b>	<b>Comportement viscoélastique anisotrope</b>	<b>415</b>
B.1	Élasticité Anisotrope . . . . .	416
B.1.1	Symétries de la relation de comportement . . . . .	416
B.1.2	Notation de Voigt . . . . .	416
B.1.3	Contraintes planes . . . . .	417
B.1.4	Changement de base . . . . .	418
B.1.5	Symétries matérielles . . . . .	420
B.1.5.1	Symétrie monoclinique . . . . .	420
B.1.5.2	Orthotropie . . . . .	420
B.1.5.3	Symétrie quadratique . . . . .	421
B.1.5.4	Isotropie transverse . . . . .	421
B.1.5.5	Symétrie cubique . . . . .	421
B.1.5.6	Isotropie . . . . .	422
B.1.6	Bornes sur les composantes des matrices de comportement . . . . .	422
B.1.7	Constantes de l'ingénieur . . . . .	423
B.2	Viscoélasticité linéaire . . . . .	426
B.2.1	Principe de superposition de Boltzmann . . . . .	428
B.2.2	Principe de correspondance . . . . .	428
B.2.2.1	Le tenseur opérationnel . . . . .	428
B.2.2.2	Formulation forte . . . . .	429
B.2.2.3	Formulation faible . . . . .	429
B.2.2.4	Méthodologie . . . . .	430
B.2.3	Propriétés du tenseur opérationnel . . . . .	430
B.2.3.1	Inversion . . . . .	430
B.2.3.2	Écriture complexe . . . . .	431
B.2.3.3	Interprétation . . . . .	431
B.2.3.4	Symétries . . . . .	432
B.2.3.5	Dépendance des parties réelles et imaginaires . . . . .	433
B.2.3.6	Constantes de l'ingénieur complexes . . . . .	435
B.2.4	Discrétisation . . . . .	436
B.2.4.1	Formulation discrète . . . . .	436
B.2.4.2	Valeurs propres généralisées . . . . .	437
B.2.4.3	Condition de Caughey . . . . .	438
B.2.4.4	Hypothèse de Basile . . . . .	438
B.2.5	Modèles rhéologiques . . . . .	439
B.2.5.1	Modèle de Kelvin-Voigt . . . . .	440
B.2.5.2	Modèle de Maxwell . . . . .	440
B.2.5.3	Modèle de Maxwell généralisé . . . . .	441
B.2.6	Modèles empiriques . . . . .	441
B.2.6.1	Amortissement modal . . . . .	441
B.2.6.2	Amortissement proportionnel ou de Rayleigh . . . . .	443
B.2.6.3	Amortissement hystérétique . . . . .	444
B.2.6.4	Amortissement Structurel . . . . .	445



B.2.6.5	Énergie de déformation modale . . . . .	445
<b>C</b>	<b>Dérivation des modèles réduits classiques de structures élancées</b>	<b>447</b>
C.1	Démarche de formulation d'un modèle de structure . . . . .	448
C.1.1	Cadre de travail . . . . .	448
C.1.2	Champs mécaniques généralisées . . . . .	449
C.1.2.1	Déplacements . . . . .	449
C.1.2.2	Déformations . . . . .	450
C.1.2.3	Contraintes . . . . .	450
C.1.2.4	Efforts extérieurs . . . . .	450
C.1.3	Comportement généralisé . . . . .	451
C.1.3.1	Raideurs . . . . .	451
C.1.3.2	Inerties . . . . .	452
C.1.4	Équilibre généralisé . . . . .	452
C.1.4.1	Forme faible . . . . .	453
C.1.4.2	Forme forte . . . . .	454
C.1.5	Correction du comportement . . . . .	454
C.1.5.1	État de contraintes particulier . . . . .	455
C.1.5.2	Coefficients de correction . . . . .	455
C.1.5.3	Choix d'une loi de mélange . . . . .	455
C.2	Cinématique de Hencky-Mindlin . . . . .	457
C.2.1	Champs mécaniques généralisés . . . . .	457
C.2.1.1	Cinématique . . . . .	457
C.2.1.2	Déformations . . . . .	458
C.2.1.3	Contraintes . . . . .	458
C.2.1.4	Efforts extérieurs . . . . .	459
C.2.2	Comportement généralisé . . . . .	459
C.2.2.1	Raideurs . . . . .	459
C.2.2.2	Inerties . . . . .	461
C.2.3	Equilibre généralisé . . . . .	461
C.2.3.1	Formulation faible . . . . .	461
C.2.3.2	Formulation forte . . . . .	462
C.3	Cinématique de Kirchhoff . . . . .	464
C.4	Cinématique de Timoshenko . . . . .	467
C.4.1	Champs mécaniques généralisés . . . . .	467
C.4.1.1	Cinématique . . . . .	467
C.4.1.2	Déformations . . . . .	467
C.4.1.3	Contraintes . . . . .	468
C.4.1.4	Efforts extérieurs . . . . .	468
C.4.2	Comportement généralisé . . . . .	469
C.4.2.1	Raideurs . . . . .	469
C.4.2.2	Inerties . . . . .	470
C.4.3	Equilibre généralisé . . . . .	471
C.4.3.1	Formulation faible . . . . .	471
C.4.3.2	Formulation forte . . . . .	471

<b>D</b>	<b>Perturbation des opérateurs matriciels</b>	<b>473</b>
D.1	Inverse . . . . .	473
D.2	Pseudo-inverse . . . . .	473
D.3	Moindres carrés . . . . .	474
D.4	Valeurs propres . . . . .	474
D.5	Valeurs propres généralisées . . . . .	475
D.6	Vecteurs propres généralisés . . . . .	476
D.7	Décomposition en sous-espaces . . . . .	476
<b>E</b>	<b>Viscoélasticité</b>	<b>481</b>
E.1	Hypothèse de Basile . . . . .	481
<b>F</b>	<b>Éléments finis spectraux</b>	<b>483</b>
F.1	Guides d'onde plans . . . . .	483
F.1.1	Matrices élémentaires . . . . .	484
F.2	Guides d'onde Uniaxiaux . . . . .	486
F.2.1	Matrices élémentaires . . . . .	486
<b>G</b>	<b>ESPRIT</b>	<b>491</b>
G.1	Propriétés, démonstrations . . . . .	492
G.1.1	Invariance rotationnelle généralisée . . . . .	492
G.1.2	Lissage spatial . . . . .	493
G.2	Résultats sur les performances . . . . .	494
G.2.1	Composante unique . . . . .	494



# Introduction générale

Dans le domaine de la facture des instruments de musique, l'approche de conception est soumise à un compromis entre deux aspects fondamentaux. Le premier correspond au souhait de proposer des solutions *innovantes*, dans le but d'alimenter la *créativité* des musiciens ou encore d'améliorer la *performance* des instruments. Le second aspect vient d'un ancrage fort de la *tradition* dans la facture : il correspond à la nécessité de proposer des instruments correspondant aux standards *perceptifs* des instrumentistes et du public. Ces deux aspects peuvent devenir particulièrement contradictoires, le second entravant de façon notoire le processus d'innovation. Cette contradiction est encore accentuée par l'adoption globale d'une démarche *empirique*, basée sur le principe d'essais-erreurs.

La *rationalisation* de la démarche de conception des instruments de musique intéresse tout particulièrement la communauté scientifique, de par ses aspects multi-*physiques* et multi-*critères*, et le fait qu'elle nécessite une attention particulière apportée aux détails. En effet, l'approche de rationalisation passe nécessairement par la reformulation des critères *perceptifs* utilisés par les musiciens (i.e. *richesse* du son, *timbre* de l'instrument, *tenue* de la note) en indicateurs basés sur des arguments *physiques* (i.e. contenu spectral, impédance caractéristique). Il devient alors clair qu'au vu de l'*exigence* des critères perceptifs, une grande partie des aspects liés à la physique des instruments de musique doit être *rigoureusement* prise en compte, afin de pouvoir être à même de proposer des solutions innovantes appuyées par une démarche rationalisée.

Initié dans le cadre du projet ANR MAESSTRO<sup>1</sup>, le travail présenté ici s'inscrit dans cette démarche de rationalisation. Le projet unit les compétences diverses de différents laboratoires de recherche<sup>2</sup> autour du thème de la table d'harmonie du piano, et notamment des travaux du facteur de pianos Stephen Paulello<sup>3</sup>, partie prenante du projet. Ce dernier s'inscrit dans une forte dynamique d'innovation, en particulier par l'intégration des outils numériques dans les étapes de conception, dimensionnement, simulation et fabrication des pianos. Parmi les objectifs du projet MAESSTRO figure notamment le développement d'outils spécialisés pour la conception de tables d'harmonie de piano. Plus précisément, une des motivations consiste à fournir les outils permettant la proposition de solutions innovantes sur la base de structures composites ; c'est ce point précis qui motive le présent travail.

Dans ce qui suit, la table d'harmonie du piano est présentée : son rôle dans l'instrument, les conceptions classiques, quelques conceptions innovantes qui ont pu être proposés et finalement

- 
1. *Modélisations Acoustiques, Expérimentations et Synthèse Sonore pour Tables d'haRmonie de pianO*  
Ref. ANR-14-CE07-0014 ([page web](#))
  2. Laboratoire de Mécanique des Solides - UMR7649 - École Polytechnique  
Unité de Mécanique - ENSTA ParisTech  
Laboratoire Vibrations Acoustique - INSA Lyon  
Laboratoire Navier - Ecole des Ponts ParisTech
  3. Pianos Stephen Paulello : [stephenpaulello.com](http://stephenpaulello.com)

la table d'harmonie du piano à queue SP190// dont la finalité de ce travail est la caractérisation mécanique. Cette présentation rapide permet d'introduire la problématique centrale du document, concernant la caractérisation du comportement dynamique linéaire des structures viscoélastiques anisotropes hétérogènes. La démarche proposée et les différentes contributions sont explicitées, permettant dans le même temps d'annoncer le plan du manuscrit.

## La table d'harmonie du piano

Le piano fait partie de la catégorie des instruments à percussion : par opposition aux instruments à vents ou à cordes frottées qui peuvent être soumis à une excitation mécanique permanente, celle-ci entretenant le mouvement, les instruments à percussion produisent le son à partir d'une excitation de nature *impulsive*. En conséquence, une quantité d'énergie *finie* est injectée dans le système et doit être convertie en son (mouvement des particules d'air).

Dans le cas du piano, la transmission de l'énergie mécanique à l'air ambiant passe par les étapes suivantes (voir figure 1) : (i) activation du marteau par le mécanisme de la touche ; (ii) impact du *marteau* sur la corde ; (iii) transmission de la vibration de la corde à la table d'harmonie par le biais du *chevalet* ; (iv) rayonnement de la table d'harmonie par *couplage acoustique*. De nombreux travaux s'intéressent aux aspects ci-avant [7], qu'ils concernent l'étude du mécanisme de la mécanique [220], du marteau [37, 213], de la corde [50] ou encore de la table d'harmonie [69, 221].

## Rôle dans l'instrument

Après l'impact et à partir du moment où le marteau n'est plus en contact avec la corde, il est possible de considérer le complexe corde-table d'harmonie comme un système contenant une quantité finie d'énergie. Cette énergie est partagée entre ces deux sous-systèmes, couplés au niveau du chevalet. De par sa section très réduite, la corde ne rayonne pas de son ; elle joue cependant le rôle de *résonateur* : l'harmonicité de ses fréquences propres (en première approximation) en fait la responsable de la *hauteur* de la note jouée.

Par opposition, la table d'harmonie est caractérisée par une grande surface ; de ce fait, sa mise en mouvement entraîne le rayonnement d'un son. Elle joue donc idéalement le rôle de *haut-parleur* dans le piano.

L'énergie injectée dans le système corde-table d'harmonie est donc utilisée en partie pour la production du son. Celui-ci est couramment caractérisé par deux indicateurs élémentaires : sa *puissance* et sa *durée*. Le produit de l'un par l'autre étant homogène à une énergie, il est aisé d'imaginer que l'augmentation de l'un entraîne une diminution de l'autre, et inversement. On touche alors du doigt une des problématiques au cœur de la conception des tables d'harmonie : la recherche du meilleur compromis puissance-durée du son.

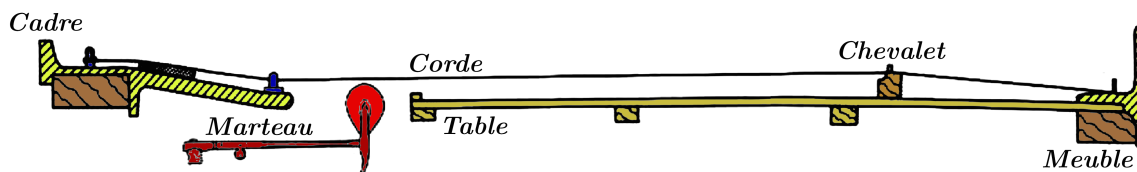


FIGURE 1 – Schéma de principe du piano

Un nombre conséquent de travaux tentent de faire la lumière sur les différents phénomènes permettant cette optimisation. Notamment, la définition d'indicateurs *mécaniques* permettant de caractériser le système corde-chevalet reçoit une attention toute particulière. Un critère communément retenu consiste par exemple à mesurer l'*impédance* au chevalet [80]. Celle-ci caractérise la résistance *dynamique* que voit la corde au niveau de son point de couplage avec la table d'harmonie ; dans le cas où elle est faible, l'énergie vibratoire de la corde est transmise *efficacement* à la table. Cette dernière, dans sa mise en mouvement, rayonne alors un son puissant ; cependant, ce rayonnement efficace est responsable, par les pertes qu'il induit, d'une décroissance rapide du son. Au contraire, une forte impédance au chevalet caractérise une table d'harmonie de raideur importante ; celle-ci sera plus difficile à mettre en mouvement, l'énergie vibratoire restant en conséquence confinée dans la corde. Dans ce cas, la puissance acoustique rayonnée est faible, mais l'énergie est conservée sur un temps plus long, favorisant donc la durée du son.

L'impédance au chevalet n'est de façon évidente qu'un indicateur parmi d'autres permettant de caractériser le comportement de la table d'harmonie et de juger de sa *qualité*. De nombreux phénomènes physiques entrent en réalité en compte dans la production du son et donc de la perception de la qualité de l'instrument. On peut par exemple évoquer le rôle du meuble ou du cadre, sur lesquels la table et les cordes viennent reposer. Ceux-ci sont en effet caractérisés par leur propre comportement dynamique, dont l'influence sur la production du son ne peut pas, dans le cas général, être négligée.

Le travail présenté ici s'intéresse à la table d'harmonie *isolée* : les couplages mis en jeu entre les différents composants du piano dans la transmission de l'énergie vibratoire ne sont donc pas pris en compte. En effet, la table d'harmonie est une structure qui, à elle seule, présente déjà une certaine complexité : sa conception répond à un certain nombre de contraintes, que celles-ci concernent la production du son ou la tenue mécanique (statique) du piano.

## Conception classique

Les tables d'harmonie de conception classique correspondent en fait à un standard bien stabilisé depuis 1900 [69]. Cette *standardisation* rejoint l'aspect lié à la tradition de la facture instrumentale évoqué en début d'introduction et fait que finalement peu d'initiatives innovantes ont vu le jour depuis une centaine d'années.

Les tables d'harmonie de piano à queue et droit sont très semblables ; elles ne diffèrent en fait que par la géométrie de leur contour. On donne l'illustration de ce qui suit en figure 2, sur laquelle les prises de vue des deux faces d'une table d'harmonie de piano droit Pleyel P131 ont été assemblées. De cette façon, il est possible d'observer par transparence les différents éléments qui constituent la table. Cette table de conception classique est donc composée d'une plaque uniforme d'épicéa d'une épaisseur de l'ordre de la dizaine de millimètres ; celle-ci couvre la surface complète de la table et constitue la *membrane* assurant le rayonnement acoustique de la structure. Les fibres de l'épicéa sont orientées d'un angle approximatif de  $40^\circ$  par rapport aux directions principales de la table.

En plus de cette planche d'épicéa, des superstructures sont ajoutées sur la table d'harmonie. Tout d'abord, le chevalet, sur lequel viennent se coupler les cordes, est divisé en deux parties, correspondant respectivement aux cordes des *basses* et des *médium-aiguës*. Ensuite, des *barres de mouchoirs* sont ajoutées, dont le rôle est *a priori* de limiter la surface vibrante de la table. Enfin, des raidisseurs sont apposés de façon quasi-périodique, dans la direction perpendiculaire aux fibres du bois. De par leur direction, ces raidisseurs viennent compenser la forte anisotropie



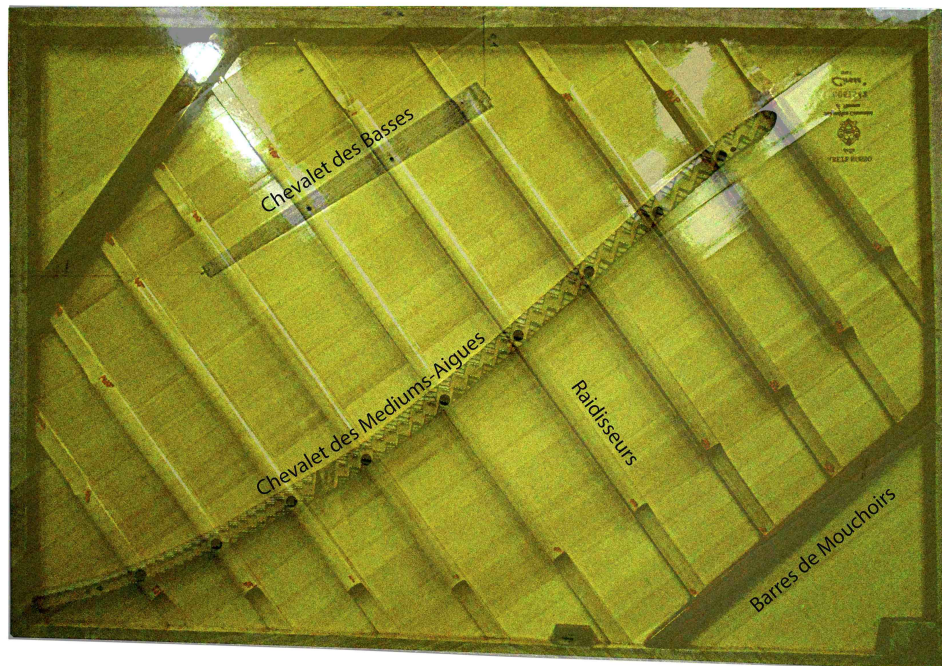


FIGURE 2 – Table d’harmonie du piano droit Pleyel P131. Vue par transparence des différentes superstructures.

du bois. Traditionnellement, ils sont justifiés par la reprise de la *charge statique* due à la tension des cordes : celles-ci, dans les pianos standardisés, forment un angle au niveau du chevalet, entraînant l’apparition d’un chargement normal à la plaque.

Les tables d’harmonie de conception classique sont donc des structures complexes : elles sont caractérisées par une forte anisotropie du matériau de base. De plus, leur comportement dynamique est fortement influencé par l’ajout de superstructures, celles-ci entraînant par exemple le couplage des mécanismes de mouvement (flexion-membrane) et représentant une raideur locale ayant une influence considérable sur la réponse en fréquence de la structure [71]. Cette complexité motive un effort scientifique conséquent pour des aspects allant de leur modélisation [221] au suivi de leur caractéristiques au cours des différentes étapes de fabrication [59].

### Table du *Paulello SP190//*

Partie intégrante du projet MAESTRO, le facteur de pianos Stephen Paulello est à l’origine d’innovations importantes sur l’instrument. En particulier, il propose un système d’agrafes de chevalet particulier, permettant de supprimer la charge normale des cordes sur la table d’harmonie [160]. Cela l’autorise en conséquence à se passer des raidisseurs classiquement implantés sur la structure. La disparition de ces derniers permet d’aborder la conception, le dimensionnement et la fabrication des tables d’harmonie avec un regard nouveau : les contraintes liées à la tenue *statique* de la table sont écartées ; il est donc possible de se concentrer sur l’optimisation du comportement *dynamique* de la structure, et donc des mécanismes de production du son.

En particulier, son nouveau modèle de piano demie-queue de 190 cm *SP190//* est équipé d’une table d’harmonie présentant certaines particularités intéressantes. Une vue de la face inférieure de cette table est donnée en figure 3. La disparition des raidisseurs est compensée par une seconde couche de bois sur la face supérieure (non visible sur la vue proposée), qui vient s’ajouter à celle déjà présente traditionnellement. De ce fait, la table d’harmonie du *SP190//*



FIGURE 3 – Vue de la face inférieure de la table d’harmonie du SP190//.

devient une structure *multicouche*. De plus, le facteur propose d’ajuster *localement* la raideur de la table, de façon à adapter celle-ci à la présence de cordes des basses ou des aiguës. Cela est réalisé par le découpage et l’assemblage d’un *patchwork* d’épicéa pour former la face inférieure de la table d’harmonie. Ainsi, l’orientation des fibres de l’épicéa peut varier, de façon à contrôler la raideur locale de la plaque (voir figure 3). On reviendra plus en détail sur ces aspects dans le dernier chapitre de ce manuscrit consacré à la caractérisation de cette structure.

En conséquence, la table d’harmonie du SP190// est une plaque *stratifiée* dont le comportement anisotrope *local* varie dans l’espace. S’ajoute à cette complexité nouvelle le comportement *viscoélastique* (anisotrope lui aussi) des matériaux employés, dont l’effet sur le son de l’instrument ne peut être négligé.

## Introduction des structures composites

La suppression de la charge normale et la disparition des raidisseurs motive la recherche de solutions radicalement différentes de la table d’harmonie de piano classique. Les structures composites se présentent alors comme un candidat de choix.

En effet, plusieurs arguments motivent l’introduction des matériaux composites en facture instrumentale [61] : (i) les caractéristiques de l’épicéa utilisé en lutherie présentent une certaine dispersion, malgré l’attention toute particulière apportée lors de la sélection de celui-ci : cela entraîne une importante hétérogénéité de la qualité des instruments produits ; (ii) le bois est un matériau particulièrement sensible aux conditions thermo-hygrométriques, ce qui le rend par exemple vulnérable au transport : dans le cas du piano, cela se traduit par une instabilité de l’accord ; (iii) la facture des instruments de musique nécessite un sciage spécifique des planches en *quartiers*, ce qui rend l’approvisionnement difficile ; (iv) certaines espèces de bois menacées de disparition sont utilisées pour la fabrication des instruments, accentuant encore les pressions pour un remplacement du bois par des matériaux de synthèse.

Par leur grande stabilité, la maturité des technologies de production et la liberté de mise en



œuvre qu'ils offrent, les matériaux composites sont un candidat de choix pour le remplacement. Toutefois, l'introduction de ceux-ci en facture instrumentale nécessite de définir des critères sur lesquels baser le remplacement. Ceux-ci consistent par exemple en la *copie* des raideurs et des inerties apparentes de la structure [41] ; il a cependant été montré que ce critère est insuffisant : le comportement viscoélastique du matériau possède une place particulièrement importante dans le son de l'instrument ; il est donc nécessaire de l'inclure dans la démarche de remplacement [72]. En conséquence, un effort important est fourni par la communauté scientifique dans le but d'apporter des méthodes permettant de caractériser précisément le comportement viscoélastique de ces matériaux anisotropes, que cela serve la connaissance du bois [40] ou celle des composites de remplacement [234].

Le travail de thèse présenté dans ce document s'inscrit dans cette démarche. Notamment, une attention particulière est portée au développement de méthodes permettant de caractériser l'*anisotropie* des matériaux composant une structure, cette anisotropie s'exprimant à la fois sur le *comportement en raideur* et sur les *mécanismes de pertes*. De plus, le domaine d'application exige la caractérisation *large bande* de ces comportements, idéalement sur le spectre entier des fréquences audibles. Enfin, le travail est motivé par la nécessité de caractériser un comportement *local* sur des structures non-uniformes comme la table d'harmonie du SP190// ; les méthodes développées tendent en conséquent à répondre à ce besoin particulièrement exigeant.

Même s'il a été initié dans le cadre de la caractérisation du comportement vibro-acoustique des instruments de musique, ce travail n'est pas limité à ce type d'applications. Les technologies de mise en œuvre des matériaux composites évoluent rapidement ; en particulier, les techniques de dépose type ATL<sup>4</sup> ou AFP<sup>5</sup> [129] permettent la conception de pièces dont l'anisotropie locale peut être complètement réglée. Ces techniques prometteuses posent toutefois des problématiques particulières quant à leur caractérisation ; ce à quoi les méthodes développées dans ce travail peuvent tenter de répondre.

## L'identification des structures : un problème complet

Il convient, pour ce qui suit, de distinguer dès à présent deux termes : (1) la *caractérisation* des structures, qui consiste à étudier (théoriquement et/ou expérimentalement) les phénomènes responsables de leur mise en mouvement et l'influence des choix de conception sur ceux-ci ; (2) l'*identification* des structures, qui concerne l'*estimation* des paramètres d'un modèle de la structure sur la base de données expérimentales. Cette dernière sous-entend la connaissance particulièrement précise du comportement de la structure, de la *validité du modèle* ou encore de la *pertinence des données expérimentales* utilisées : elle ne peut donc se passer de la caractérisation rigoureuse des structures que l'on souhaite identifier.

En particulier, le travail présenté ici s'intéresse à l'identification de structures complexes : (i) elles sont composées d'une multitude de matériaux dont l'agencement varie dans l'espace ; (ii) ceux-ci présentent une forte anisotropie ; (iii) les mécanismes de dissipation revêtent une importance capitale pour l'application visée. De plus, l'aspect *large bande* de la problématique oblige à acquérir une connaissance du comportement de la structure dans les différents *régimes fréquentiels*.

Avec le souhait d'identifier ces structures et les matériaux qui les constituent apparaît naturellement la nécessité de travailler sur : (i) la *compréhension* de l'effet de la stratification et

---

4. Automated Tape Laying

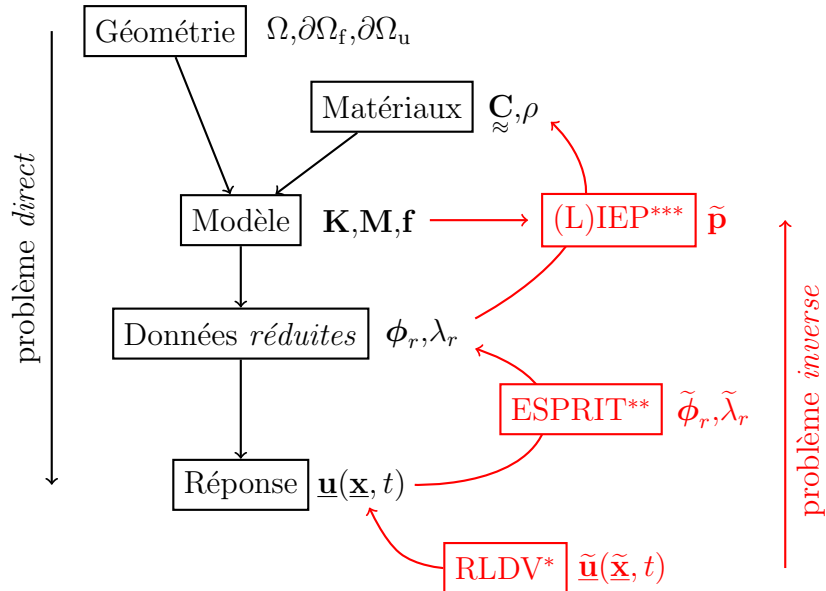
5. Automated Fibre Placement

de l'anisotropie des raideurs et de l'amortissement sur le comportement dynamique global de la structure ; (ii) la formulation et la validation de modèles *réduits* de ces structures, permettant à la fois de diminuer le nombre de paramètres à identifier et de se concentrer sur les mécanismes *dominants* du mouvement ; (iii) le développement de moyens de mesure permettant d'acquérir les informations *pertinentes* pour l'identification ; (iv) la proposition de *méthodes inverses* permettant d'*estimer les paramètres* de la structure, ainsi que les *incertitudes* qui leur sont associées, par une prise en compte de la totalité des informations expérimentales.

Chacun des ces aspects est donc naturellement abordé dans ce travail, découpé en quatre parties : (1) étude et modélisation de la propagation des ondes planes dans les structures ; (2) présentation d'un dispositif de vibrométrie robotisé permettant la mesure *plein-champ* de la vitesse instantanée *tridimensionnelle* de structures ; (3) présentation de méthodes inverses basées sur (3.a) la proposition d'une *méthode ESPRIT unifiée*, permettant la *réduction des données* expérimentales, et (3.b) la formulation ainsi que la résolution de *problèmes aux valeurs propres inverses* dont la finalité est l'estimation des paramètres de la structure ; la présentation de chaque procédure s'accompagnant d'une discussion sur la quantification des incertitudes liées aux estimations ; (4) application des méthodes proposées à la caractérisation et l'identification de la table d'harmonie du SP190//.

La figure 4 donne une représentation schématisée de la problématique, qui permet de situer les différentes contributions du travail présenté.

Sur la gauche du schéma est représenté en noir le problème *direct*, menant au calcul de la réponse dynamique d'une structure. Sur la base d'une géométrie (décrite par un domaine  $\Omega$  et des conditions aux limites appliquées sur la frontière  $\partial\Omega$  de celui-ci) ainsi que de propriétés matériaux (raideurs  $\mathbf{C}$  et densité  $\rho$ ), un modèle de la structure peut être construit (formalisé par les opérateurs de raideur et de masse généralisés  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  ainsi que le vecteur des efforts



\*Robotized Laser Doppler Vibrometer

\*\*Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques

\*\*\* (Linear) Inverse Eigenvalues Problem

FIGURE 4 – Problème direct, inverse et contributions proposées.

extérieurs  $\mathbf{f}$ ). Il est alors possible de *réduire* ce modèle par le calcul de ses *modes propres*  $\phi_r$ , associés aux valeurs propres  $\lambda_r$ . A partir de ce modèle réduit peut enfin être calculée la réponse de la structure  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  en tout point  $\mathbf{x}$ , et à chaque instant  $t$ . La première partie du document est consacrée à l'étude du problème direct.

Sur la droite de la figure 4 est représenté en rouge le problème *inverse*. Celui-ci consiste à estimer, à partir de la réponse *mesurée* d'une structure  $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$  aux points  $\tilde{\mathbf{x}}$ , un jeu de paramètres  $\tilde{\mathbf{p}}$  qui entrent dans la formulation du modèle de cette structure. A ce sujet, trois contributions sont proposées ; elles sont présentées dans les deuxième et troisième parties du document.

## Première partie : Étude et modélisation

L'identification expérimentale des propriétés mécaniques des structures implique une connaissance *approfondie* des mécanismes responsables de leur mouvement, surtout lorsque la complexité de ces structures est importante. La première partie de ce travail concerne donc la modélisation et la caractérisation des effets des différentes complexités (anisotropie, stratification, mécanismes de perte) sur le comportement dynamique de la structure.

En particulier, le point de vue adopté consiste à étudier les mécanismes qui régissent la propagation des ondes planes dans les structures *élancées*. Celles-ci sont alors décrites par une section *caractéristique*, supposée invariante par translation selon les dimensions de propagation des ondes. Selon ces dimensions, les structures sont supposées *infinies*, ce qui permet de mettre de côté les aspects associés à la *géométrie* du problème direct (conditions aux limites et de chargement, variation spatiale des propriétés mécaniques) pour se concentrer sur les effets liés à la *description* de la section caractéristique : comportement viscoélastique anisotrope des matériaux constitutifs et stratification. Ces différents éléments interviennent alors dans les *mécanismes de transmission de l'information mécanique*, caractérisés dans cette première partie par la dispersion des ondes planes dans ces structures. Finalement, il est proposé de caractériser le comportement dynamique des structures par l'observation des *surfaces de dispersion* associées à chaque type d'onde, qui contiennent la signature des différents éléments intervenant dans la description de la section caractéristique. Cette première partie est divisée en deux chapitres.

Le chapitre I consiste en une *synthèse* concernant la formulation, la résolution et l'application du problème tridimensionnel complet associé à la propagation des ondes dans les structures élancées. Des résultats de référence élémentaires sont donnés pour des cas simples. Deux schémas éléments finis spectraux sont implémentés, permettant de d'obtenir les *surfaces de dispersion de référence*, caractéristiques de plaques multicouches composées de plis viscoélastiques anisotropes et de poutres de section quelconque constituées de matériaux orthotropes. Enfin, à travers des études de cas, la complexité des structures d'intérêt est introduite progressivement, de manière à séparer les contributions de l'anisotropie des matériaux, de la stratification ou encore des effets dissipatifs sur les mécanismes de transmission de l'information mécanique.

Le chapitre II est consacré à la *comparaison des modèles réduits* de structures élancées classiques (plaques et poutres épaisses et minces) avec les solutions de référence obtenues au premier chapitre. Les équations caractéristiques des surfaces de dispersion associées à chaque modèle sont dérivées. Sur la base de la comparaison des surfaces obtenues avec les résultats de référence, la thématique de la *correction du comportement* généralisé des modèles réduits de structures élancées est abordée.

## Deuxième partie : Conception d'un moyen de mesure

La deuxième partie du manuscrit présente, dans le chapitre III, un moyen de mesure vibrométrique robotisé original développé dans le cadre du travail de thèse. Le dispositif en question consiste en l'assemblage d'un vibromètre laser doppler monopoint sur un bras robot industriel 6 axes ; il est en conséquence nommé *Robotized Laser Doppler Vibrometer* (RLDV, voir figure 4). Le dispositif obtenu permet la mesure du champ de vitesse tridimensionnel instantané  $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$  à la surface de structures de géométries variées. À l'origine uniquement développé pour un besoin ponctuel, ce dispositif a en réalité été utilisé pour générer la quasi totalité des données expérimentales présentées dans ce travail. Le chapitre qui lui est consacré est une description rapide du dispositif en anglais qui devrait faire l'objet d'une publication. Notamment, une discussion est menée au sujet de la prise en compte des problématiques liées à la conception d'une expérience mettant en œuvre un bras robot. La solution logicielle implémentée pour répondre à ces nouvelles contraintes est décrite succinctement ; enfin, un cas de validation expérimental est présenté.

## Troisième partie : Formulation de méthodes inverses

La troisième partie du manuscrit, qui contient quatre chapitres, consiste en la présentation de procédures d'identification originales ; elle contient les contributions majeures du travail proposé. Les méthodes présentées reposent sur trois aspects : (i) réduction des données expérimentales ; (ii) formulation de méthodes d'identification sur les données réduites obtenues ; (iii) quantification des incertitudes.

En particulier, la réduction des données proposée se concentre sur l'extraction et la séparation des paramètres  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r)$  de *fonctions exponentielles amorties* dans la réponse des structures mesurées. Dans la réponse transitoire libre, ces fonctions représentent la contribution de chaque *mode* de la structure ; dans la réponse harmonique de la structure, elles représentent les *ondes planes* qui se propagent dans celle-ci. Dans tous les cas, le problème direct correspondant au calcul des données réduites  $(\phi_r, \lambda_r)$  est un problème aux valeurs propres (linéaire ou non). Les méthodes d'identification proposées consistent donc en général en la résolution de *problèmes aux valeurs propres inverses*, qui permettent au final d'identifier certains paramètres  $\tilde{\mathbf{p}}$  entrant en compte dans la formulation des modèles de structure. Afin de donner des indications sur le degré de confiance associé à l'estimation de chaque paramètre, la quantification des incertitudes est discutée avec la présentation des méthodes. Différents indicateurs permettant d'estimer les incertitudes sont proposés.

Le chapitre IV est tout d'abord consacré à la méthode de traitement de signal permettant l'extraction des fonctions exponentielles amorties. Les développements concernent donc la proposition d'une méthode ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques*), permettant d'estimer les paramètres  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r)$  de ces fonctions (voir figure 4). La méthode ESPRIT proposée tente une unification de certaines extensions de la méthode originale tirées de la littérature et qui peuvent présenter un intérêt pour les applications visées ; comme la prise en compte de la totalité des données ou l'identification de fonctions exponentielles multidimensionnelles. Après la présentation de la méthode, une analyse de sensibilité est menée ; celle-ci permet de donner des indications sur les performances de la méthode et de fournir un moyen de quantifier les incertitudes associées à l'estimation des paramètres. Enfin, une revue des critères permettant l'estimation de l'ordre du signal (nombre de fonctions exponentielles amorties contenues dans celui-ci) est réalisée.

Dans le chapitre V, la démarche d'identification est appliquée à l'analyse modale. Dans un

premier temps, la méthode ESPRIT proposée est spécialisée dans cette optique ; elle permet alors d'identifier les modes naturels d'une structure à partir de la mesure de sa réponse transitoire libre, ainsi que les fréquences et amortissements associés. Des critères permettant l'aide au choix des modes à conserver sont explicités. Enfin, des stratégies permettant l'estimation des incertitudes sont présentées. Dans un second temps, un problème linéaire aux valeurs propres inverse associé aux données réduites obtenu est formulé (*Linear Inverse Eigenvalue Problem*, voir figure 4), et une méthode de résolution proposée. De nouveau, la quantification des incertitudes est discutée. Le chapitre se conclut par un troisième temps consacré à l'application de la procédure proposée (mesure robotisée, analyse modale, résolution du problème aux valeurs propres inverse) pour l'identification des propriétés viscoélastiques d'une planche d'épicéa.

Le chapitre VI concerne l'application de la méthode ESPRIT pour l'analyse en nombres d'onde de la réponse harmonique des poutres ; la méthode présentée est dénommée *High Resolution Wavenumber Analysis* (HRWA). Ce chapitre reproduit un article paru au *Journal of Sound and Vibration* et est en conséquence en anglais. Après une présentation de la méthode ainsi que des méthodes existantes permettant l'analyse en nombres d'onde, une étude numérique de sensibilité au bruit est menée afin de comparer la méthode proposée aux méthodes existantes. Enfin, une application expérimentale est proposée, permettant de montrer la possibilité d'identifier, avec la méthode proposée, les modules d'Young et de cisaillement apparents associés au comportement isotrope viscoélastique d'une poutre épaisse.

Enfin, le chapitre VII présente la généralisation de la HRWA à l'analyse en *vecteurs* d'onde de la réponse harmonique des plaques ; celle-ci est renommée pour l'occasion *High Resolution Wavevector Analysis*. Le chapitre reproduit également un article soumis au *Journal of Sound and Vibration* ; il est donc lui aussi en anglais. Après une présentation de la méthode, trois cas d'application sur des plaques composites sont présentés. La possibilité de séparer les différents types d'ondes se propageant dans la plaque est notamment montrée, validée par une comparaison avec des résultats numériques permettant de juger de la pertinence des résultats. Il est également montré la possibilité de réaliser une extraction *locale* des vecteurs d'onde ; cette procédure est alors appliquée à l'identification des propriétés de raideur en flexion d'une plaque stratifiées anisotrope hétérogène.

## Quatrième partie : Application à la table d'harmonie du SP190//

Dans la quatrième et dernière partie du manuscrit, les différentes contributions proposées sont appliquées à la caractérisation et l'identification de la table d'harmonie du piano à queue Stephen Paulello SP190//. Tout d'abord, le dispositif de vibrométrie robotisé présenté au chapitre III est mis en œuvre dans le but d'obtenir la réponse transitoire libre de la structure. Ensuite, l'analyse modale de la réponse obtenue est réalisée à partir de la méthode proposée au chapitre V. S'ensuit alors une première identification basée sur les données modales obtenues, utilisant la méthode de résolution du problème aux valeurs propres inverse associé, également proposée au chapitre V. Enfin, l'analyse en vecteurs d'onde proposée au chapitre VII est appliquée localement. Celle-ci permet d'obtenir une collection de vecteurs d'onde représentant la dispersion locale des ondes de flexion dans la table d'harmonie. Il est alors proposé d'identifier, sur la base des collections de vecteurs d'onde obtenues, le modèle de plaque mince découplée local. Finalement, la cartographie identifiée des raideurs anisotropes équivalentes en flexion de la table est représentée et comparée à des valeurs théoriques.

## Contenu des annexes

La présentation des différents résultats du corpus de ce manuscrit s'accompagne d'annexes dont il est préférable de dresser ici un résumé.

Tout d'abord, l'annexe [A](#) contient une définition de base du problème associé au calcul de la réponse dynamique des structures en régime linéaire. La définition des divers champs mécaniques ainsi que des équations qui régissent leur évolution au cours du temps est donnée. Ensuite, le principe des travaux virtuels est rappelé ; celui-ci est utilisé de façon récurrente tout au long du manuscrit. Enfin, cette première annexe conclut par la présentation rapide de méthodes de résolution (Ritz, éléments finis) adaptées aux problèmes abordés dans ce travail.

L'annexe [B](#) est consacrée à la modélisation du comportement viscoélastique anisotrope des matériaux. La première section [B.1](#) liste les différentes formes de lois constitutives associées aux différentes symétries matérielles remarquables ; ces symétries peuvent être mises à profit dans le cadre des problèmes d'identification proposés pour réduire le nombre de paramètres à estimer. Ensuite, un travail de synthèse effectué sur la prise en compte du comportement viscoélastique est proposé dans la deuxième section [B.2](#). Les grands principes (principe de superposition de Boltzmann, principe de correspondance) menant à la définition du tenseur opérationnel (loi constitutive complexe exprimée dans l'espace des fréquences) sont exposés. Ils sont accompagnés de considérations sur les propriétés de ce tenseur ; il est notamment rappelé que les parties réelle et imaginaire de celui-ci ne peuvent en théorie pas être indépendantes de la fréquence, et qu'elles sont inter-dépendantes (relations des Kramer-Kronig). Cet aspect est nuancé pour les structures faiblement amorties ; dans ce cas, la variation des propriétés de raideur et d'amortissement peut être négligée si le domaine de fréquence considéré est relativement restreint ; une borne indicative est donnée, permettant de juger de la pertinence du choix d'un tenseur opérationnel constant (modèle hystérétique). Après le rappel des différentes hypothèses permettant leur formulation (hypothèse de Basile, condition de Caughey), différents modèles de comportement viscoélastique sont présentés ; c'est le modèle hystérétique qui est retenu pour ce travail.

La troisième annexe [C](#) concerne la dérivation des modèles réduits de structure élancées étudiés au chapitre [II](#). L'approche cinématique utilisée est tout d'abord présentée sous un formalisme général. Ensuite, cette démarche générale est appliquée aux cinématiques de Hencky-Mindlin, Kirchhoff et Timoshenko dans le but de dériver les modèles de plaque épaisse, plaque mince et poutre épaisse.

La quatrième annexe [D](#) importante consiste en la présentation de résultats sur la perturbation des opérateurs matriciels. Ces résultats sont utilisés dans les chapitres [IV](#) et [V](#) pour analyser la sensibilité des méthodes inverses proposées face à une perturbation des données d'entrée ; les expressions obtenues sont à la base des stratégies présentées permettant la quantification des incertitudes.

Enfin, les annexes [E.1](#), [F](#) et [VII.5.1.1](#) contiennent les développements spécifiques à certains résultats présentés dans le corpus : présentation des schémas éléments finis spectraux, démonstration de certaines propositions formulées avec la méthode ESPRIT proposée.



## Liste des symboles

Symbole	Description	Ensemble	Élément ( $m, n, p, \dots$ )
$i$	imaginaire unité	$\mathbb{C}$	
$\delta_{mn}$	symbole de Kronecker	$\mathbb{N}$	
<i>Objets tensoriels</i>			
$\mathbf{a}$	vecteur	$\mathbb{C}^M$	$a_m$
$\underline{\mathbf{A}}$	tenseur d'ordre 2	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$A_{mn}$
$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$	tenseur d'ordre 4	$\mathbb{C}^{M \times N \times P \times Q}$	$A_{mnpq}$
$(\mathbf{e}_m)$	repère		$\mathbf{e}_m$
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	produit vectoriel	$\mathbb{C}^M$	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	produit scalaire	$\mathbb{C}$	$a_i b_i$
$\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{B}}$	produit doublement contracté	$\mathbb{C}$	$A_{ij} B_{ij}$
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	produit extérieur	$\mathbb{C}^{M_a \times M_b}$	$a_m b_n$
<i>Matrices, vecteurs</i>			
$\mathbf{a}$	vecteur de données	$\mathbb{C}^M$	$a_i$
$\mathbf{A}$	matrice de données	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$A_{mn}$
$\mathbf{0}^M$	vecteur rempli de zéros	$\mathbb{R}^M$	0
$\mathbf{1}^M$	vecteur rempli de uns	$\mathbb{R}^M$	1
$\mathbf{0}^{M \times N}$	matrice remplie de zéros	$\mathbb{R}^{M \times N}$	0
$\mathbf{1}^{M \times N}$	matrice remplie de uns	$\mathbb{R}^{M \times N}$	1
$\mathbf{I}^M$	matrice identité	$\mathbb{R}^{M \times M}$	$\delta_{mn}$
$\mathbf{Y}^M$	matrice anti-identité	$\mathbb{R}^{M \times M}$	$\delta_{m(n-M+1)}$
$\mathbf{H}_h^{M \times N}$	matrice de Hankel	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$h_{m+n}$
$\mathbf{T}_t^{M \times N}$	matrice de Toeplitz	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$t_{m-n+M}$
$\mathbf{J}_j^{M \times N}$	matrice de sélection	$\mathbb{N}^{M \times N}$	$[n = j_m]$
$^* \mathbf{A}$	conjuguée	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$^* A_{mn}$
$^\top \mathbf{A}$	transposée	$\mathbb{C}^{N \times M}$	$A_{nm}$
$^H \mathbf{A}$	transposée hermitienne	$\mathbb{C}^{N \times M}$	$^* A_{nm}$
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse	$\mathbb{C}^{M \times M}$	
$\mathbf{A}^\dagger$	pseudo-inverse	$\mathbb{C}^{N \times M}$	
$\det[\mathbf{A}]$	déterminant	$\mathbb{C}$	
$\text{Tr}(\mathbf{A})$	trace	$\mathbb{C}$	
$\text{rg}(\mathbf{A})$	rang	$\mathbb{N}$	
$\text{diag}(\mathbf{a})$	matrice diagonale	$\mathbb{C}^{M \times M}$	$\delta_{mn} a_m$
$\text{diag}(\mathbf{A})$	valeurs sur la diagonale	$\mathbb{C}^M$	$A_{mm}$

Symbole	Description	Ensemble	Élément $(m, n, p, \dots)$
$\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}$	produit de Kronecker	$\mathbb{C}^{M_A M_B \times N_A N_B}$	
$\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$	produit de Hadamard	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$A_{mn} B_{mn}$
$\mathbf{a} * \mathbf{b}$	produit de convolution	$\mathbb{C}^{M_A + M_B - 1}$	$a_{m-i} b_i$
<i>Tableaux de données</i>			
$\mathcal{A}$	tableau de données	$\mathbb{C}^{\mathbf{M}} = \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_D}$	$\mathcal{A}_{\mathbf{m}} = \mathcal{A}_{m,n,p,\dots}$
$\mathbf{m}$	indices d'un élément	$\mathbb{N}^D$	$\mathbf{m}_m$
$\mathbf{M}$	dimensions du tableau	$\mathbb{N}^D$	$\mathbf{M}_m$
$[\mathbf{M}]$	nombre d'éléments du tableau	$\mathbb{N}$	$\prod_d M_d$
$\mathbf{a} = \text{vec}\{\mathcal{A}\}$	vectorisation	$\mathbb{C}^{[\mathbf{M}]} = \mathbb{C}^{M_1 \dots M_D}$	$a_{m+n M_1 + p M_1 M_2 + \dots}$
$\mathcal{A} = \text{tens}\{\mathbf{a}\}^{\mathbf{M}}$	tensorisation	$\mathbb{C}^{\mathbf{M}} = \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_D}$	$= \mathcal{A}_{m,n,p,\dots}$





## Première partie

# Comportement dynamique linéaire des structures viscoélastiques anisotropes élancées



# Chapitre I

## Propagation des ondes planes dans les structures viscoélastiques élancées

### Résumé

Dans ce chapitre sont étudiés les phénomènes liés à la **propagation des ondes planes** dans les structures élancées viscoélastiques anisotropes hétérogènes. Celles-ci sont pour cela considérées comme des **guides d'onde** ; elles présentent une invariance par translation le long des dimensions d'espace selon lesquelles les ondes planes sont autorisées à se propager. Les conditions aux limites du problème de dynamique sont ainsi écartées ; il est alors possible de se concentrer sur les mécanismes de **transport de l'information mécanique** caractéristiques de ces structures complexes.

L'apport du présent chapitre réside dans la **synthèse** des solutions de référence, méthodes de résolution et résultats remarquables associés à l'étude des ondes planes. La présentation des différents aspects associés à la complexité du comportement dynamique des structures étudiées permet ainsi d'aborder, dans la suite du travail, les problèmes (i) de leur **modélisation** et (ii) de l'**identification expérimentale** des paramètres de ces modèles.

Après la définition d'un cadre de travail et des différents indicateurs associés à l'étude de la propagation des ondes planes dans les structures, la notion de guide d'onde est progressivement introduite. Sont d'abord étudiées les ondes se propageant dans les **solides infinis**, puis l'influence de la présence d'**interfaces** dans le milieu. Les solutions des ondes de **Rayleigh** et de **Lamb** en milieu isotrope sont rappelées. Le problème à résoudre est ensuite formulé ; est alors abordée la prise en compte du **couplage acoustique** dans le calcul. Le calcul des fréquences de coupure des modes d'ordre supérieur est également développé, et les solutions concernant les plaques homogènes anisotropes et les structures sandwichs sont données.

La présentation poursuit, après une revue de la littérature concernant les méthodes consacrées à la résolution de ce type de problème, avec le développement de deux schémas de résolution de type **éléments finis spectraux**. Ceux-ci permettent la reconstruction des **surfaces de dispersion** caractéristiques de poutres orthotrope de section quelconque et de plaques multicouches à plis monocliniques. La méthode de résolution du **problème couplé** est également explicitée.

Finalement, la dernière section est consacrée à des **études de cas** basés sur les résultats des deux schémas éléments finis spectraux proposés. Ces études sont dédiées à la **com-**

**préhension** des différents phénomènes régissant la propagation des ondes planes dans les structures auxquelles ce travail s'intéresse. Une nouvelle fois, la complexité du comportement (anisotropie, hétérogénéité, dissipations) est introduite progressivement.

## Introduction

On étudie dans ce chapitre les phénomènes liés à la propagation des ondes dans des plaques et des poutres en régime harmonique permanent ; ces structures sont alors considérées comme des *guides d'onde*. En effet, leur caractère élancé permet de considérer que leur section caractéristique est *au pire* de l'ordre de la longueur d'onde, sinon petite par rapport à celle-ci.

Suffisamment loin des *singularités* (conditions aux limites et chargements), on peut considérer que le front d'onde est plan ; on parle alors d'*onde plane*. A une fréquence donnée, de multiples ondes planes peuvent se propager, chacune étant associée à un profil particulier des champs mécaniques dans la section (le *mode*).

L'étude des solutions en ondes planes permet de tirer des conclusions sur le comportement d'une structure soumise à des efforts dynamiques. En effet, les solutions d'onde dites *propagatives* correspondent aux mécanismes dominants de *transport* de l'information mécanique dans ces structures. En particulier, l'attention peut être concentrée sur l'influence de la configuration de la section du guide d'onde (i.e forme, agencement des matériaux) puisque tous les aspects liés aux singularités sont mis de côté.

L'objectif de ce chapitre est de développer une connaissance sur l'effet de l'anisotropie, de l'hétérogénéité des propriétés mécaniques, des effets visqueux ou encore du couplage acoustique sur le comportement des structures élancées en dynamique. Cette démarche permet d'aborder plusieurs aspects du présent travail de façon plus rigoureuse : (i) elle permet l'identification des mécanismes *dominants* dans le comportement des structures dans le but de construire des modèles *réduits* de celles-ci. Les hypothèses cinématiques sur lesquelles ceux-ci se basent peuvent alors être jugées de façon à donner clairement leur domaine de validité. (ii) cette démarche permet également l'interprétation de résultats expérimentaux ainsi que la formulation de problèmes inverses.

Le chapitre est organisé comme suit : premièrement, le cadre de travail associé à l'étude des ondes planes est développé : les hypothèses justifiant le choix de l'onde plane et les différents indicateurs (i.e. vecteur d'onde, vitesses) qui permettent de quantifier l'effet de la composition du guide d'onde sur la propagation des ondes. Deuxièmement, la propagation des ondes planes dans les milieux infinis et semi-infinis est étudié. L'effet de la présence d'interfaces dans le milieu est illustré par l'étude des ondes de surface (ou de Rayleigh) et des modes de Lamb dans une plaque homogène isotrope. La troisième section est consacrée à la formulation du problème de recherche des solutions d'ondes planes se propageant dans les guides d'onde. Les formulations faible et forte sont données. Le couplage fluide-structure associé à l'acoustique est alors introduit. Dans un quatrième temps, une revue des méthodes adaptées à la résolution de ces problèmes est faite. Deux implémentations sont proposées, utilisant la méthode des éléments finis spectraux (*SFEM*). Elles permettent, à fréquence fixée, le calcul des modes de guides d'onde anisotropes viscoélastiques : l'un est consacré aux poutres de section quelconques, et l'autre aux plaques multicouches. Enfin, la cinquième section est consacrée à des applications numériques utilisant les schémas SFEM proposés, dont la finalité est d'illustrer les phénomènes liés à la propagation des ondes planes dans les plaques et poutres multicouches, anisotropes et viscoélastiques, avec ou sans couplage acoustique. La complexité est introduite progressivement, en commençant par une poutre de section rectangulaire constituée d'un matériau isotrope. Ensuite, le cas des plaques homogènes est abordé (isotropes puis orthotropes), puis le cas des plaques multicouches. Enfin, l'effet du couplage acoustique est illustré sur un cas simple.

## I.1 L'onde plane

Dans cette section, on décrit le cheminement qui mène à l'étude des ondes planes pour caractériser le comportement d'une structure élastique en dynamique. On introduit alors différentes grandeurs caractéristiques liées aux phénomènes de propagation des ondes planes dans les milieux.

### I.1.1 Hypothèses de travail

L'étude de la propagation des ondes planes implique plusieurs hypothèses, qui permettent à la fin de considérer le champ de déplacement sous forme harmonique.

#### I.1.1.1 Éloignement des sources

Tout d'abord, on se place suffisamment loin des singularités que représentent les conditions aux limites et les chargements. Celles-ci sont les *sources* de l'information mécanique, dont le transport *uniquement* nous intéresse ici. Cette hypothèse revient à considérer le domaine  $\Omega$  infini dans la direction de propagation des ondes.

Sous cette première hypothèse, le problème de la dynamique se simplifie ; si l'on réécrit les équations de la dynamique (voir annexe A.1, expression (A.1.14)) en annulant les chargements  $\underline{\mathbf{f}}$ ,  $\underline{\mathbf{T}}$  sur la frontière complète  $\partial\Omega$  du domaine, les équations du mouvement deviennent, sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \text{cinématique :} \quad & \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \\ \text{comportement :} \quad & \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \text{équilibre :} \quad & \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{\mathbf{u}}_i \end{aligned} \tag{I.1.1}$$

#### I.1.1.2 Régime harmonique stationnaire

Pour étudier la propagation des ondes dans les structures viscoélastiques, on utilise le principe de correspondance (voir annexe B.2, expression (B.2.5)). Les équations (I.1.1) sont alors exprimées dans l'espace de Fourier ; on remplace la dépendance des champs en temps  $t$  par une dépendance en fréquence  $\omega$ .

#### I.1.1.3 Séparation des variables

Il est possible de chercher des solutions du problème homogène obtenu après passage des équations (I.1.1) dans le domaine des fréquences sous forme séparables. La séparation des variables d'espace se fait en deux groupes : (i) les dimensions  $\underline{\mathbf{y}}$  correspondent aux dimensions selon lesquelles les ondes peuvent se propager ; (ii) les dimensions  $\underline{\mathbf{z}}$  restantes décrivent la section caractéristique *traversée* par l'onde.

On écrit le déplacement sous forme séparée :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega) = \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega) \circ \underline{\mathbf{Y}}(\underline{\mathbf{y}}, \omega) \tag{I.1.2}$$

à partir de laquelle les dérivées successives peuvent être exprimées.

#### I.1.1.4 Homogénéité des propriétés mécaniques

On peut exprimer les équation du mouvement (I.1.1) en fonction du champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  uniquement ; soit après passage dans l'espace des fréquences :

$$C_{ijkl} u_{k,l,j} + C_{ijkl,j} u_{k,l} + \omega^2 \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (\text{I.1.3})$$

où on a utilisé les propriétés de symétrie du tenseur  $\underline{\mathbf{C}}$  (annexe B.1, expression (B.1.1)). On voit en conséquence que la divergence du tenseur des raideurs  $\underline{\mathbf{C}}$  entre en compte ; celle-ci peut s'écrire en utilisant la séparation des variables  $\underline{\mathbf{y}}$  et  $\underline{\mathbf{z}}$  :

$$C_{ijkl,j} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_j} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial z_j} + \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial y_j} \quad (\text{I.1.4})$$

Une hypothèse qui permet d'étudier les ondes planes concerne le dernier terme de l'équation (I.1.4) : on considère que la variation des propriétés mécaniques le long des directions  $\underline{\mathbf{y}}$  de propagation des ondes présente des variations lentes comparées à la longueur d'onde. On peut alors négliger le second terme de l'équation (I.1.3).

Dans cette partie, on considère même les propriétés mécaniques *invariantes* selon les directions  $\underline{\mathbf{y}}$ . Ajouté à l'hypothèse d'éloignement des sources, le problème complet devient invariant par translation selon ces directions.

*Remarque I.1.1 (Échelle des hétérogénéités).* En fait, on peut considérer une distribution des propriétés mécaniques  $\underline{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{x}})$  périodique, de période arbitraire  $\lambda_C$ . Si on compare cette période à

la longueur d'onde caractéristique  $\tilde{\lambda}$  du mouvement du milieu, on peut distinguer trois régimes :

- $\lambda_C \gg \tilde{\lambda}$  : les propriétés mécaniques peuvent être considérées constantes dans les équations ; leur variation n'influe pas sur le problème.
- $\lambda_C \ll \tilde{\lambda}$  : les propriétés mécaniques varient très rapidement par rapport à la longueur d'onde ; l'échelle des hétérogénéités est donc différente de celle du mouvement ; on peut alors prendre la version *homogénéisée* des propriétés mécaniques pour résoudre le problème.
- $\lambda_C = \mathcal{O}(\tilde{\lambda})$  : dans ce cas, la variation des propriétés mécaniques doit être prise en compte ; on sort alors du cadre de ce travail.

On peut faire le parallèle avec le phénomène de diffraction : une variation de l'indice du milieu influe sur la propagation de l'information seulement si la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des hétérogénéités.

Dans ce travail, seules les deux premières configurations sont rencontrées. Le premier cas ( $\lambda_C \gg \tilde{\lambda}$ ) correspond aux structures homogènes selon la direction de propagation de l'onde. Le second cas est rencontré dans les situations où le matériau constitutif présente des hétérogénéités petites devant la longueur d'onde ; par exemple dans le cas du complexe fibres/matrice dans les plaques composites, ou de la micro-structure du bois. Dans ces cas précis, on prendra la version homogénéisée des propriétés constitutives du matériau.

#### I.1.1.5 Forme spatiale des champs

L'homogénéité des propriétés mécaniques que l'on a supposé donne des équations (I.1.3) différentielles à coefficients invariants selon  $\underline{\mathbf{y}}$ . Alors la partie  $\underline{\mathbf{Y}}$  peut être également cherchée sous une forme séparée dont les fonctions élémentaires sont exponentielles, soit :

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}} e^{-i \mathbf{k}(\omega) \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.1.5})$$



Finalement, on peut écrire une solution élémentaire du problème de dynamique homogène associé sous la forme :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega) e^{-i \underline{\mathbf{k}}(\omega) \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.1.6})$$

où  $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}} \circ \underline{\mathbf{Z}}$  est le déplacement généralisé associé au vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$ .

Cette forme permet d'obtenir les dérivées partielles du déplacement en fonction des variables  $\underline{\mathbf{y}}$  facilement. Puisque les champs de contraintes et de déformation sont des combinaisons linéaires des différentes dérivées partielles du déplacement, on peut généraliser la forme donnée ci-dessus à toutes les composantes des champs tensoriels impliqués dans le problème de dynamique.

**Definition I.1.1** (Forme des champs). *Soit  $\psi$  une fonction des variables d'espace et de la fréquence impliquée dans le problème de propagation des ondes planes; elle prend la forme suivante :*

$$\psi(\underline{\mathbf{x}}, \omega) = \Psi(\underline{\mathbf{z}}, \omega) e^{-i \underline{\mathbf{k}}(\omega) \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.1.7})$$

où  $\Psi$  est la fonction d'amplitude généralisée, dont aucune hypothèse sur la dépendance en  $\underline{\mathbf{z}}$  ou  $\omega$  n'est faite a priori. On prend notamment la convention suivante :

- solide 3D :  $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}$  et  $\underline{\mathbf{z}} = \emptyset$
- plaques :  $\underline{\mathbf{y}} = [x_1 \ x_2]$  et  $\underline{\mathbf{z}} = x_3$  pour une plaque contenue dans le plan  $(x_1, x_2)$
- poutres :  $\underline{\mathbf{y}} = x_3$  et  $\underline{\mathbf{z}} = [x_1 \ x_2]$  pour une poutre orientée selon  $x_3$

Dans cette construction, la pulsation  $\omega$  devient en fait un *paramètre*. La recherche des solutions en onde plane revient alors à trouver, pour  $\omega$  fixé, les solutions  $\underline{\mathbf{k}}$  qui annulent (I.1.1). A chacune de ces solutions est liée un déplacement généralisé  $\underline{\mathbf{U}}$  particulier.

Si la dimension du vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  (et donc de  $\underline{\mathbf{y}}$ ) est supérieure à un (comme dans les solides 3D et les plaques), alors il existe, à  $\omega$  fixé, une infinité de solutions au problème de propagation. En effet, la direction de l'onde devient également un paramètre, qui est continu. Lorsque la direction est fixée, on verra qu'il existe également un infinité de solutions. Toutefois, seulement un nombre fini d'entre elles sont caractérisées par des vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  réels et peuvent en conséquence donner lieu à un *transport* d'information mécanique.

## I.1.2 Grandeurs caractéristiques

De nombreux auteurs se sont intéressés au problème de la propagation des ondes dans les solides et les structures; on peut citer la référence très complète [9]. Pour décrire les différents phénomènes mis en jeu, un certain nombre de grandeurs et de notions ont été définies. On en donne ici quelques-uns qui reviendront tout au long de ce travail.

### I.1.2.1 Fonction de polarisation

La fonction  $\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}})$  décrit la polarisation des points matériels se situant sur une surface de phase  $\phi$  constante :

$$\phi = \omega t - \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \text{cte} \quad (\text{I.1.8})$$

appelée en conséquence *surface isophasé*. Dans le cas des guides d'onde, on appelle la fonction de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}$  *mode de section*; elle est associée à une solution  $\underline{\mathbf{k}}$  particulière de (I.1.3). Chaque mode représente un des mécanismes de mouvement pouvant assurer la transmission de l'information mécanique à travers la structure.

### I.1.2.2 Vecteur d'onde

**Definition I.1.2** (Vecteur d'onde). *Le vecteur  $\underline{\mathbf{k}}$  est appelé vecteur d'onde. C'est un vecteur complexe, qui peut s'écrire sous les formes suivantes :*

$$\underline{\mathbf{k}} = \underline{\kappa} - i \underline{\tau} \quad (\text{I.1.9})$$

$$= |\underline{\kappa}| \underline{\mathbf{n}}^p - i |\underline{\tau}| \underline{\mathbf{n}}^d \quad (\text{I.1.10})$$

où  $\underline{\kappa}$  et  $\underline{\tau}$  sont deux vecteurs réels qui ne sont pas forcément colinéaires, et dénotent respectivement les aspects propagatif (oscillation spatiale de l'onde) et évanescent (décroissance spatiale de l'onde). Les vecteurs unitaires réels  $\underline{\mathbf{n}}^p$  et  $\underline{\mathbf{n}}^d$  dénotent les directions de propagation et de décroissance de l'onde (qui ne sont donc pas forcément confondues).

Il existe en fait très peu de travaux qui considèrent un vecteur d'onde dont les parties imaginaire et réelle ne sont pas colinéaires. En effet, considérer  $\underline{\mathbf{n}}^p \neq \underline{\mathbf{n}}^d$  revient à augmenter le nombre de paramètres dans le problème à résoudre. Concernant la résolution numérique du problème de propagation des ondes planes dans les structures, la littérature se limite donc à chercher les solutions pour lesquelles  $\underline{\kappa}$  et  $\underline{\tau}$  sont alignés.

Toutefois, le présent travail propose une méthode expérimentale (voir le chapitre IV consacré à la méthode ESPRIT) qui permet l'identification, sur des champs mécaniques mesurés, de vecteurs d'onde dont les parties réelle et imaginaire ne sont pas colinéaires. On a donc présenté cette forme générale pour garder une cohérence au long du document.

Cependant, puisque les méthodes de résolution du problème de propagation des ondes que l'on peut trouver dans la littérature, ou celles qui sont développées dans ce travail, font l'hypothèse que  $\underline{\mathbf{n}}^p = \underline{\mathbf{n}}^d$ , on suppose pour la suite de cette partie que  $\underline{\kappa}$  et  $\underline{\tau}$  sont colinéaires ; il est alors possible de définir le nombre d'onde comme suit.

**Definition I.1.3** (Nombre d'onde). *On définit le nombre d'onde scalaire et complexe  $k$  de la façon suivante :*

$$k = \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^p = \kappa - i \tau = \kappa (1 - i \gamma) \quad (\text{I.1.11})$$

où  $\gamma$  est le taux de décroissance spatiale de l'onde.

On note que dans le cas où  $\underline{\mathbf{k}}$  est un scalaire (dans le cas des poutres), le vecteur d'onde et le nombre d'onde définis coïncident.

Le choix du signe négatif pris devant la partie imaginaire est justifié par la physique du phénomène. En effet, posons :

$$r = e^{-i k} = e^{-\tau} e^{-i \kappa} \quad (\text{I.1.12})$$

On peut alors écrire le déplacement dû à la propagation d'une onde selon une dimension  $x$  du problème sous la forme :

$$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, x) = r^x \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{z}) \quad (\text{I.1.13})$$

En l'occurrence, si  $\kappa$  et  $\tau$  sont de même signe, alors l'onde s'amortit au cours de sa propagation ( $\kappa > 0$  caractérisant une onde qui se propage vers les  $x$  positifs et vice-versa). La figure I.1 illustre ce principe : les solutions physiques correspondent à des composantes  $\kappa$  et  $\tau$  du même signe (domaines bleu et rouge. En conséquence,  $r$  doit être compris dans le cercle unité si  $\kappa > 0$ , et exclus du cercle unité si  $\kappa < 0$ .

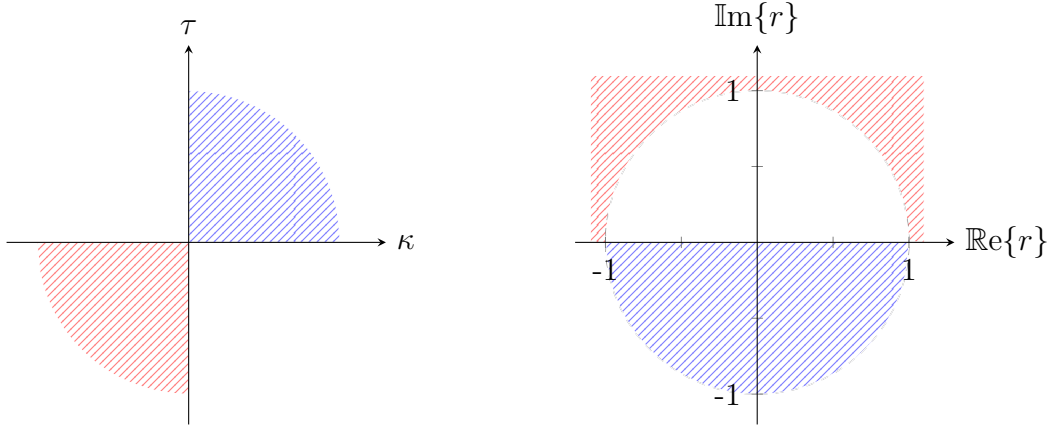


FIGURE I.1 – Domaine des solutions *physiques* du nombre d'onde ( $r = e^{-\tau} e^{-i\kappa}$ )

*Remarque I.1.2.* Il faut noter dès maintenant que la nature complexe du vecteur d'onde, décrivant une onde *amortie* au cours de sa propagation, n'est pas seulement due aux effets visqueux. En effet, même dans un milieu conservatif, une infinité de types d'ondes planes peuvent exister à une fréquence donnée (caractérisées par des fonctions de polarisation différentes). Toutefois, seulement quelques-unes de ces ondes peuvent *transporter* de l'information mécanique (leur nombre d'onde est réel) ; les autres s'amortissent très vite (leur nombre d'onde est principalement voire purement imaginaire). L'énergie contenue dans ces dernières est donc confinée au niveau des singularités.

### I.1.2.3 Longueur d'onde

**Définition I.1.4** (Longueur d'onde). *On peut définir le vecteur  $\underline{\lambda}$  comme suit :*

$$\underline{\lambda} = \frac{2\pi}{|\underline{\kappa}|} \underline{n}^p \quad (\text{I.1.14})$$

*On parle alors de la longueur d'onde  $\lambda = |\underline{\lambda}|$  en mètres pour caractériser la période spatiale de l'onde plane.*

La longueur d'onde est un indicateur important car elle est reliée à l'échelle des mécanismes mis en jeu au cours du mouvement. L'étude de la propagation des ondes planes dans un milieu peut en effet permettre de travailler à des longueurs d'onde variables, stimulant ainsi divers mécanismes de déformation. Dans un milieu hétérogène, l'échelle des hétérogénéités doit être comparée à la longueur d'onde de sollicitation. En effet, on peut comprendre que des hétérogénéités dont la taille caractéristique est très inférieure à la longueur d'onde ont une influence réduite sur le comportement de la structure.

Les grandeurs présentées ci-dessus décrivent : (i) le profil  $\underline{U}$  du champ de déplacement associé à un mode ; (ii) la fréquence  $k$  des oscillations spatiales ainsi que son inverse  $\lambda$  associée à  $\underline{U}$ . Quand il s'agit de caractériser la vitesse d'une onde, des définitions variées existent ; un certain nombre de grandeurs homogènes à des vitesses peuvent en effet être définies pour étudier le comportement d'une structure traversée par une onde plane.

### I.1.2.4 Vitesse de phase

Tout d'abord, on cherche à caractériser la *célérité* d'une onde seule. La vitesse de phase est obtenue en différenciant la phase (I.1.8).

**Definition I.1.5** (Vitesse de phase). *On définit la vitesse de phase d'une onde de la façon suivante :*

$$\underline{c}_\phi = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\omega}{k} \underline{\mathbf{n}}_p = c \underline{\mathbf{n}}^p \quad (\text{I.1.15})$$

qui est un vecteur complexe, avec  $c$  la vitesse scalaire associée.

La dépendance de la vitesse de phase en fonction de la fréquence et de la direction de propagation est souvent étudiée pour caractériser la *dispersion* des ondes planes : une onde dite *non dispersive* est caractérisée par une vitesse de phase constante.

### I.1.2.5 Vitesse de groupe

La vitesse de phase est un indicateur lié à une onde plane *pure*, qui se propage dans un milieu. Lorsque l'on s'intéresse à la propagation d'un *paquet* d'ondes, on peut chercher à étudier les interférences entre les différentes ondes constituant le paquet.

Soient deux ondes planes d'amplitude égale, de même fonction de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}$ , se propageant aux pulsations respectives  $\omega_i = \omega \pm \Delta\omega$  et de nombres d'onde respectifs  $\underline{\mathbf{k}}_i = \underline{\mathbf{k}} \pm \Delta\underline{\mathbf{k}}$ . Le champ de déplacement correspondant à ces deux ondes s'écrit :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2 \quad (\text{I.1.16})$$

$$= \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}) \left( e^{i(\omega_1 t - \underline{\mathbf{k}}_1 \cdot \underline{\mathbf{y}})} + e^{i(\omega_2 t - \underline{\mathbf{k}}_2 \cdot \underline{\mathbf{y}})} \right) \quad (\text{I.1.17})$$

$$= 2 \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}) \cos(\Delta\omega t - \Delta\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}) e^{i(\omega t - \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}})} \quad (\text{I.1.18})$$

et prend donc la forme d'une onde plane modulée par un terme sinusoïdal. Le passage à la limite du terme de perturbation  $\Delta\phi = \Delta\omega t - \Delta\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}$  permet de définir le concept de vitesse de groupe.

**Definition I.1.6** (Vitesse de groupe). *On définit la vitesse de groupe comme suit :*

$$\underline{c}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\underline{\mathbf{k}}} = \frac{\partial\omega}{\partial k_i} \underline{\mathbf{e}}_i \quad (\text{I.1.19})$$

qui est définie pour tout vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  réel.

*Remarque I.1.3.* La définition de la vitesse de groupe est définie seulement pour les vecteurs d'onde strictement réels car la dérivation par rapport à un nombre complexe n'est pas définie.

De façon générale, la vitesse de groupe n'est pas colinéaire à la vitesse de phase. On peut écrire :

$$\underline{c}_g = \underline{c}_\phi + \underline{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \underline{c}_\phi}{\partial \underline{\mathbf{k}}} \quad (\text{I.1.20})$$

ce qui montre que les vitesses de phase et de groupe sont égales lorsque le milieu est non dispersif ( $\underline{c}_\phi = \underline{c}_g$ ). Quand le milieu est dispersif, ces vitesses ne coïncident pas ; elles peuvent même être de direction opposé.

La vitesse de groupe peut s'annuler dans le cas précis où la variation de la pulsation en fonction du vecteur d'onde est nulle. On parle alors d'ondes à vitesse de groupe nulle (ou *zero-group velocity*). De par leur caractère très local (l'énergie ne se propage pas), ce type d'ondes reçoit un intérêt particulier de la part de la communauté du contrôle non destructif [91, 57].

### I.1.2.6 Vitesse d'énergie

La vitesse de groupe définie ci-avant n'existe que si le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est réel. Dans le cas général, une autre vitesse peut être définie : la vitesse d'énergie. Celle-ci est dérivée du théorème de Poynting, originellement formulé sur la théorie de l'électromagnétisme et adapté plus tard au cas du solide élastique [9, 42]. Elle s'exprime comme suit :

**Definition I.1.7** (Vitesse d'énergie). *La vitesse d'énergie est définie à partir du vecteur de Poynting  $\underline{\mathbf{P}}$  et de la densité volumique d'énergie mécanique  $e$  de la façon suivante :*

$$\boxed{\mathbf{c}_e = \frac{\underline{\mathbf{P}}}{e}} \quad (\text{I.1.21})$$

$$\underline{\mathbf{P}} = \frac{i}{2} \omega \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \ast \underline{\mathbf{u}} \quad (\text{I.1.22})$$

$$e = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \rho \omega^2 \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 \quad (\text{I.1.23})$$

La vitesse d'énergie est donc une grandeur vectorielle complexe qui généralise la notion de vitesse de groupe. Dans le cas où  $\mathbf{k}$  est réel, l'égalité des deux vitesses a été rigoureusement démontrée [33, 25].

### I.1.2.7 Surfaces de dispersion

La différence entre la vitesse de phase  $\mathbf{c}_\phi$  et les vitesses de groupe  $c_g$  et d'énergie permet de qualifier la *dispersion* des ondes planes se propageant dans un milieu. Par opposition à la vitesse de phase, la vitesse de groupe est liée à la *dépendance* du vecteur d'onde en fonction de la pulsation  $\omega$  et de la direction de propagation  $\mathbf{n}^p$ . La recherche des solutions en ondes planes consiste en fait à trouver, pour une pulsation et une direction de propagation fixées, les solutions  $k$  (ou  $c$ ) associées aux modes  $\underline{\mathbf{U}}$  ; le problème est donc paramétré par  $\omega$  et  $\mathbf{n}^p$ .

La visualisation des résultats peut donc passer par la construction de *surfaces* paramétrées par ces deux grandeurs. Par exemple, dans le cas des plaques, ces surfaces sont définies dans un espace à trois dimensions : les deux composantes de  $\mathbf{n}^p$  et  $\omega$ . On utilisera dans ce manuscrit trois types de surface caractéristique, dont les noms sont tirés de [9] :

- *surface de lenteur* : elle permet de visualiser les résultats en vecteur d'onde. Elle est dénommée de cette façon à cause de la relation  $k = \omega/c$ . La position d'un point sur cette surface est donnée par :

$$\underline{\mathbf{x}}(\omega, \mathbf{n}^p) = \underline{\kappa}(\omega, \mathbf{n}^p) + \omega \mathbf{e}_3 \quad (\text{I.1.24})$$

où la direction de propagation est incluse dans  $\underline{\kappa} = \kappa \mathbf{n}_p$ . Un exemple est donné sur la figure I.12.

- *surface normale* : elle correspond aux résultats en vitesse de phase  $c$  ; dénommée de cette façon pour le caractère colinéaire de  $\mathbf{c}_\phi$  et  $\mathbf{k}$ . Un point sur cette surface est défini de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{x}}(\omega, \mathbf{n}^p) = \mathbf{c}_\phi(\omega, \mathbf{n}^p) + \omega \mathbf{e}_3 \quad (\text{I.1.25})$$

où  $\mathbf{c}_\phi = c \mathbf{n}^p$ . Un exemple est également donné sur la figure I.12.

- *surface d'atténuation* : permet de visualiser le taux de décroissance spatiale  $\gamma$  (équation (I.1.11)). La surface est construite de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{x}}(\omega, \underline{\mathbf{n}}^p) = -\gamma(\omega, \underline{\mathbf{n}}^p) \underline{\mathbf{n}}^p + \omega \underline{\mathbf{e}}_3 \quad (\text{I.1.26})$$

Un exemple de ce type de surface est donné sur la figure I.19.

Ces surfaces revêtent un intérêt tout particulier dans ce travail : leur observation permet de tirer des conclusions sur le comportement d'une structure en dynamique dans un régime fréquentiel donné. Il est possible de voir ces surfaces comme la *carte d'identité* de ce comportement ; celles-ci contiennent la *signature* des matériaux constituant la section de la structure ainsi que leur agencement.

En particulier, on pourra utiliser ces surfaces pour : (i) identifier l'effet de l'introduction de l'anisotropie, d'une stratification ou encore du comportement viscoélastique sur les résultats ; (ii) formuler un modèle *réduit* cherchant à décrire au mieux ces surfaces à l'aide d'un nombre limité de paramètres ; (iii) identifier le type d'onde extraite d'un signal expérimental par une connaissance *a priori* de la géométrie approximative de la surface associée ; (iv) formuler un problème inverse, cherchant à minimiser la distance entre des surfaces expérimentales et théoriques ; (v) formuler le problème de remplacement de la structure bois par un stratifié composite par la minimisation des surfaces les caractérisant.

### I.1.2.8 Lois de dispersion

En fixant la direction de propagation des ondes  $\underline{\mathbf{n}}^p$ , on peut représenter un *coupe* des surfaces caractéristiques, représentant une des grandeurs associées ( $\kappa$ ,  $c$ ,  $\gamma$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$  ou d'une grandeur proportionnelle à celle-ci. La représentation, en deux dimensions, permet de visualiser un certain nombre de courbes associées à chaque mode ; on parle alors de *branches de dispersion*. L'équation associée aux courbes données par les résultats en nombre d'onde est de la forme :

$$k = f(\omega) \quad (\text{I.1.27})$$

et est couramment appelée *loi de dispersion*.

## I.2 Solides infinis, ondes de Rayleigh et de Lamb

Dans cette section, on étudie la propagation des ondes planes dans des milieux infinis, semi-infinis puis bornés. Le tenseur acoustique est introduit, lié à la propagation des ondes planes dans un solide infini. On étudie ensuite l'impact de la présence d'interfaces dans le milieu. Les solutions des ondes de Rayleigh (ondes de surface) et de Lamb (ondes de plaques) sont données.

### I.2.1 Propagation en milieu infini

On se place ici dans le cas du solide infini ; on a  $\underline{z} = \emptyset$  et  $\underline{y} = \underline{x}$  (I.1.7). En conséquence, le champ de déplacement s'écrit sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{x}, \omega) = \underline{p} e^{-i \underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (\text{I.2.1})$$

où  $\underline{p}$  est appelé *vecteur polarisation*.

#### I.2.1.1 Le tenseur acoustique

En injectant la forme du déplacement ci-dessus dans l'équation d'équilibre exprimée sur les déplacements (I.1.3) où on a négligé la variation des propriétés mécaniques en espace, on obtient :

$$0 = k_l k_j C_{ijkl} p_k - \rho \omega^2 p_i \quad (\text{I.2.2})$$

$$= \left( k_j C_{jikl} k_l - \rho \omega^2 \delta_{ik} \right) p_k \quad (\text{I.2.3})$$

$$= \left( \underline{k} \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{k} - \rho \omega^2 \mathbb{I} \right) \cdot \underline{p} \quad (\text{I.2.4})$$

où  $\delta_{ij}$  dénote le symbole de Kronecker et  $\underline{p}$  est le vecteur polarisation. Les trois équations obtenues sont communément appelées *équations de Christoffel*.

**Definition I.2.1** (Tenseur acoustique). *Dans le cas où les parties réelle  $\underline{\mathbf{k}}$  et imaginaire  $\underline{\mathbf{\tau}}$  du vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  sont colinéaires (I.1.10) (soit  $\underline{\mathbf{k}} = k \cdot \underline{\mathbf{n}}^p$  (I.1.11)), on peut écrire les équations de Christoffel de la façon suivante :*

$$\left( \underline{\underline{\Gamma}} - c^2 \mathbb{I} \right) \cdot \underline{p} = \underline{0} \quad (\text{I.2.5})$$

où  $\underline{c}_\phi = c \cdot \underline{\mathbf{n}}^p$  est la vitesse de phase (I.1.15) et  $\underline{\underline{\Gamma}} = \rho^{-1} \underline{\mathbf{n}}^p \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^p$  est le tenseur acoustique d'ordre 2.

#### I.2.1.2 Solutions élémentaires

Dans un milieu infini, les solutions d'onde planes pouvant se propager dans la direction  $\underline{\mathbf{n}}^p$  sont directement représentées par les valeurs propres du tenseur acoustique  $\underline{\underline{\Gamma}}$ . Pour une direction donnée, trois couples d'ondes peuvent se propager ; elles sont la solution des trois équations quadratiques formées par les équations de Christoffel.

On choisit ici la direction de propagation telle que  $\underline{\mathbf{n}}^p = \underline{\mathbf{e}}_p$ . Dans ce cas, le tenseur acoustique s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} C_{p11p} & C_{p12p} & C_{p13p} \\ & C_{p22p} & C_{p23p} \\ sym. & & C_{p33p} \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.6})$$

Si le matériau est orthotrope par rapport aux directions  $(\mathbf{e}_i)$  (annexe B.1, expression (B.1.17)), alors toute composante  $C_{ijkl}$  dont un indice est répété un nombre impair de fois s'annule. En conséquence, le tenseur acoustique est diagonal ; les équations de Christoffel deviennent :

$$(C_{ipip} - \rho c^2)p_i = 0 \quad (\text{I.2.7})$$

**Definition I.2.2** (Vitesses élémentaires). *Les six solutions non triviales du système précédent ( $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ) donnent les deux types d'onde élémentaires qui peuvent se propager dans la direction  $\mathbf{e}_p$  :*

$$p = i \quad c_p^2 = C_{pppp}/\rho \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \mathbf{e}_p \quad (\text{Onde longitudinale}) \quad (\text{I.2.8})$$

$$p \neq i \quad c_{ip}^2 = C_{ipip}/\rho \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \mathbf{e}_i \quad (\text{Ondes de cisaillement}) \quad (\text{I.2.9})$$

*Remarque I.2.1.* Si la direction de propagation  $\mathbf{n}^p$  diffère des axes d'orthotropie du matériau, alors les vecteurs polarisation  $\mathbf{p}$  solutions sont couplés, et ne représentent donc plus des mécanismes de traction-compression ou de cisaillement purs.

*Remarque I.2.2.* On a vu dans le chapitre sur la viscoélasticité que le tenseur opérationnel ne peut en théorie pas être indépendant de la fréquence si des effets visqueux sont présents (voir annexe B.2, équation (B.2.20)) ; en conséquence, les ondes élémentaires sont dispersives dans un solide qui dissipe.

Dans un solide isotrope conservatif, la célérité des ondes longitudinales et de cisaillement sont indépendantes de la direction de propagation de l'onde et de la fréquence ; elles sont alors traditionnellement notées  $c_\ell$  et  $c_t$  et prennent les valeurs :

$$c_\ell^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\rho} \quad (\text{I.2.10})$$

$$c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \frac{E}{\rho} \quad (\text{I.2.11})$$

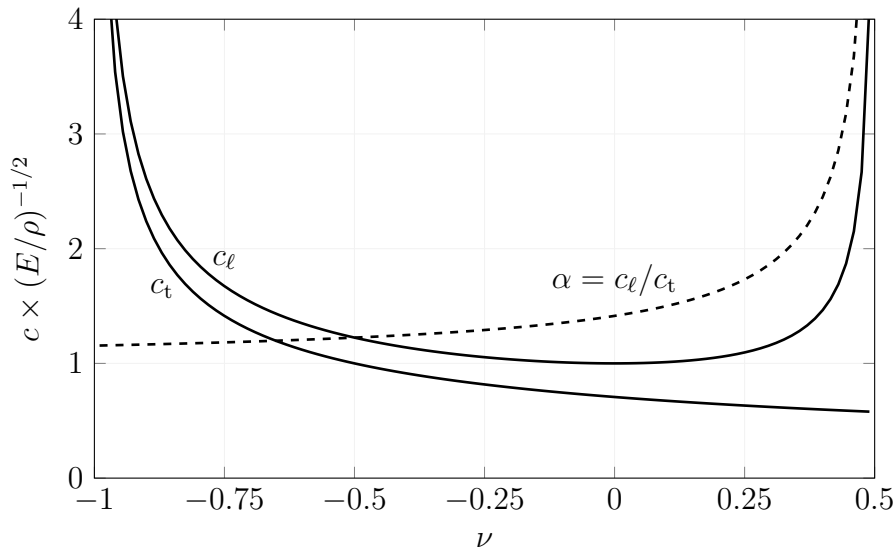


FIGURE I.2 – Vitesse normalisée des ondes dans un solide infini isotrope conservatif en fonction du coefficient de Poisson



d'où :

$$\alpha^2 = \frac{c_\ell^2}{c_t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} > 1 \quad (\text{I.2.12})$$

montre que dans ce type de solides, la vitesse des ondes longitudinales est toujours supérieure à la vitesse des ondes de cisaillement.

Les vitesses normalisées ainsi que leur rapport sont tracés sur la figure I.2 en fonction du coefficient de Poisson. On remarque que les ondes de cisaillement sont globalement plus rapides dans les solides auxétiques isotropes ( $\nu < 1$ ).

## I.2.2 Rôle des interfaces

Dans les paragraphes qui suivent, on s'intéresse à la conséquence de la présence d'interfaces parallèles à la direction de propagation de l'onde sur les équations du problème. On étudie ensuite deux types d'onde caractérisés par la présence d'interfaces planes.

### I.2.2.1 Loi de Snell-Descartes

La loi de Snell-Descartes est surtout connue dans sa version adaptée à la théorie de l'optique linéaire. Dans le cadre qui nous intéresse, elle régit la transformation d'une onde plane qui traverse une interface entre deux milieux de caractéristiques différentes.

Soient deux milieux infinis  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  séparés par une interface plane de normale  $\underline{\mathbf{n}}$ . Dans chacun des milieux, une onde plane se propage ; on écrit les déplacements comme suit :

$$\underline{\mathbf{u}}^+(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\mathbf{U}}^+ e^{i(\omega^+ t - \underline{\mathbf{k}}^+ \cdot \underline{\mathbf{x}})} \quad (\text{I.2.13})$$

$$\underline{\mathbf{u}}^-(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\mathbf{U}}^- e^{i(\omega^- t - \underline{\mathbf{k}}^- \cdot \underline{\mathbf{x}})} \quad (\text{I.2.14})$$

Les conditions de continuité permettent alors de donner la relation entre les vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}^\pm$ , les pulsations  $\omega^\pm$  et les amplitudes  $\underline{\mathbf{U}}^\pm$ . La continuité des déplacements impose, pour tout point  $\underline{\mathbf{x}}^P$  sur l'interface (annexe A.1, expression (A.1.16)) :

$$\forall(\underline{\mathbf{x}}^P, t) \quad \underline{\mathbf{U}}^+ e^{i(\omega^+ t - \underline{\mathbf{k}}^+ \cdot \underline{\mathbf{x}}^P)} = \underline{\mathbf{U}}^- e^{i(\omega^- t - \underline{\mathbf{k}}^- \cdot \underline{\mathbf{x}}^P)} \quad (\text{I.2.15})$$

soit :

$$\omega^+ = \omega^- = \omega \quad (\text{I.2.16})$$

$$\underline{\mathbf{k}}^+ - (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{k}}^+) \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{k}}^- - (\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{k}}^-) \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{k}}^P \quad (\text{I.2.17})$$

En conséquence, le passage d'une onde à travers une interface ne modifie pas sa pulsation et laisse constante la projection du vecteur d'onde sur l'interface.

Cette loi se généralise à toutes les géométries d'interfaces *lisses* (dont le plan tangent est défini presque partout). Notamment, le cas qui nous intéresse ici concerne les structures faites d'interfaces dont le plan tangent est invariant face à une translation selon les directions  $\underline{\mathbf{y}}$  de l'espace. Dans ce cas, la projection du vecteur d'onde selon ces dimensions est invariante ; l'hypothèse de séparation des variables posée ci-dessus (I.1.1) est donc justifiée.

L'invariance du vecteur d'onde permet d'introduire la notion de *guide d'onde* : dans une structure possédant des interfaces à plan tangent invariant selon une ou plusieurs directions, les ondes planes auront tendance à se propager de façon *préférentielle* dans ces directions.

### I.2.2.2 Interfaces planes

Pour faciliter les notations, on considère que le plan des interfaces est parallèle au plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . On introduit alors la notation classique sur les indices : les indices grecs peuvent prendre les valeurs 1 ou 2 ; les indices alphanumériques peuvent prendre les valeurs de 1 à 3.

On réécrit les équations de Christoffel dans cette nouvelle notation :

$$(k_3^2 C_{3ij3} + 2k_3 k_\alpha C_{\alpha ij3} + k_\alpha^2 C_{\alpha i j \alpha} - \rho \omega^2 \delta_{ij}) p_j = 0 \quad (\text{I.2.18})$$

On peut fixer la partie plane du vecteur d'onde  $\hat{\mathbf{k}} = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  et la pulsation  $\omega$  ; les équations précédentes peuvent alors être résolues pour déterminer les six solutions  $k_{3,n}$  et les fonctions de polarisation  $\underline{\mathbf{p}}_n$ . Celles-ci sont alors utilisées comme une base pour exprimer la fonction de polarisation :

$$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{U}}(x_3) e^{-i k_\alpha x_\alpha} \quad \text{avec} \quad U_i(x_3) = a_n p_{i,n} e^{-i k_{3,n} x_3} \quad (\text{I.2.19})$$

où les six amplitudes  $\mathbf{a}$  sont les inconnues à déterminer. On déduit l'expression des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= C_{ijkl} u_{k,l} = C_{ijk\alpha} u_{k,\alpha} + C_{ijk3} u_{k,3} = \Sigma_{ij}(x_3) e^{-i k_\alpha x_\alpha} \\ \Sigma_{ij}(x_3) &= (C_{ijk3} U_{k,3} - i k_\alpha C_{ijk\alpha} U_k) = a_n Q_{ijn} e^{-i k_{3,n} x_3} \\ Q_{ijn} &= -i k_l C_{ijkl} p_{k,n} \end{aligned} \quad (\text{I.2.20})$$

Pour un vecteur plan  $\hat{\mathbf{k}}$  et une pulsation  $\omega$  donnée, il ne reste donc plus que les six amplitudes  $\mathbf{a}$  à déterminer pour connaître la fonction de polarisation de l'onde. De plus, on remarque que les six composantes  $k_{3,n}$  qui leur sont liées sont solutions d'un système quadratique (équations (I.2.18)) ; en l'occurrence, elles sont opposées deux à deux. On peut donc écrire :

$$\underline{\mathbf{U}}(x_3) = \sum_n^3 (a_n^+ \underline{\mathbf{p}}_n^+ e^{-i k_{3,n} x_3} + a_n^- \underline{\mathbf{p}}_n^- e^{i k_{3,n} x_3}) \quad (\text{I.2.21})$$

La détermination des amplitudes  $\mathbf{a}$  passe par l'expression des conditions de continuité au niveau des interfaces (annexe A.1, expressions (A.1.15) et (A.1.16)). Deux conditions de continuité permettent de déterminer les six amplitudes.

Une condition aux limites supplémentaire peut s'ajouter, pour l'étude de milieux semi-infinis. Elle stipule qu'aucune onde ne peut *venir* depuis l'infini vers une interface. Elle permet alors d'annuler la contribution des solutions propres dont le nombre d'onde caractérise une onde qui se propage *vers* l'interface. En acoustique, cette condition est communément appelée condition de *Sommerfeld* ou de *non-réflexion*.

### I.2.2.3 Milieu semi-infini : ondes de Rayleigh

Lord Rayleigh est sûrement l'un des premiers à avoir travaillé, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle [173], sur le problème de la propagation des ondes dans les solides, avec des applications en sismologie. Les ondes de Rayleigh se propagent à l'interface entre deux milieux semi-infinis, typiquement entre un solide profond et l'air (modèle simplifié de la croûte terrestre). En négligeant le couplage avec l'air, on considère l'interface totalement libre, et donc la nullité du vecteur contrainte au niveau de celle-ci.

Dans le cas isotrope, les équations de Christoffel (I.2.4) prennent la forme suivante, pour une onde propagée dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  :

$$\left( k_3^2 \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} + 2k_3 k \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \rho \omega^2 \mathbf{I} \right) \underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{0}}$$

On remarque que la deuxième ligne de ce système est découplée des autres.

Si l'interface est représentée par le plan  $x_3 = 0$  et que le milieu solide se situe dans le domaine  $x_3 \leq 0$ , la condition de *non-réflexion* permet d'annuler les trois amplitudes  $a_n^+$ . On obtient donc la forme suivante pour le déplacement :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \begin{pmatrix} a_1 \begin{bmatrix} p_{11} \\ 0 \\ p_{31} \end{bmatrix} e^{i k_3^\ell x_3} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ p_{22} \\ 0 \end{bmatrix} e^{i k_3^t x_3} + a_3 \begin{bmatrix} p_{13} \\ 0 \\ p_{33} \end{bmatrix} e^{i k_3^t x_3} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k x_1)}$$

où les composantes  $p_{ij}$  sont connues par la résolution des équations de Christoffel et les nombres d'onde selon  $\underline{\mathbf{e}}_3$  sont donnés par  $k_3^\ell = \sqrt{(\omega/c_\ell)^2 - k^2}$  et  $k_3^t = \sqrt{(\omega/c_t)^2 - k^2}$ .

La condition d'interface libre impose  $\forall (x_1, t)$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}(x_3 = 0) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 = \underline{\mathbf{0}}$ , soit :

$$\lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underline{\mathbf{e}}_3 + 2\mu (\varepsilon_{i3} \underline{\mathbf{e}}_i) = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{I.2.22})$$

$$\begin{bmatrix} k_3^\ell p_{11} - k p_{31} & 0 & k_3^t p_{13} - k p_{33} \\ 0 & i k_3^t p_{22} & 0 \\ c_\ell^2 k_3^\ell p_{31} - (c_\ell^2 - 2c_t^2) k p_{11} & 0 & c_\ell^2 k_3^t p_{33} - (c_\ell^2 - 2c_t^2) k p_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2.23})$$

où on a utilisé  $\lambda + 2\mu = \rho c_\ell^2$  et  $\mu = \rho(c_\ell^2 - 2c_t^2)$  et divisé la troisième ligne par  $\rho$ . La composante du déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  selon  $\underline{\mathbf{e}}_2$  est donc découplée du problème.

La recherche des solutions du système précédent consiste à annuler le déterminant d'une matrice  $2 \times 2$ . Elle mène à l'équation régissant la vitesse des ondes de Rayleigh.

**Definition I.2.3** (Vitesse de Rayleigh). *La vitesse  $c_R$  des ondes de Rayleigh est telle qu'elle annule l'équation suivante :*

$$\boxed{\left(1 - \frac{c^2}{2c_t^2}\right)^4 = \left(1 - \frac{c^2}{c_\ell^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_t^2}\right)} \quad (\text{I.2.24})$$

et soit différente de la solution triviale  $c = 0$ .

Les ondes de Rayleigh sont caractérisées par une fonction de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}$  qui décroît rapidement lorsque l'on s'éloigne de la surface libre du solide. Leur influence est donc concentrée en surface.

Si on pose  $c_R^2 = \beta c_t^2$ , on réécrit l'équation précédente sous la forme d'un polynôme de degré 3 en  $\beta$  :

$$\beta^3 - 8\beta^2 + 8(3 - 2\gamma^2)\beta - 16(1 - \gamma^2) = 0 \quad , \quad \gamma^2 = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{c_t^2}{c_\ell^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (\text{I.2.25})$$

dont les solutions ne dépendent que du coefficient de Poisson. On donne sur la figure I.3 les résultats d'une résolution numérique. Le rapport de vitesse des ondes de Rayleigh par rapport à la vitesse des ondes de cisaillement est tracé en fonction du coefficient de Poisson. On donne le résultat d'une régression linéaire sur les résultats :

$$\frac{c_R}{c_t} \approx 0.8738 + 0.1922\nu - 0.03499\nu^2 - 0.04344\nu^3 \pm 0.05\% \quad (\text{I.2.26})$$

Les ondes de Rayleigh ont une importance particulière en sismologie. En effet, le fait que l'énergie qu'elles transportent soit concentrée près de la surface, leur décroissance est de l'ordre

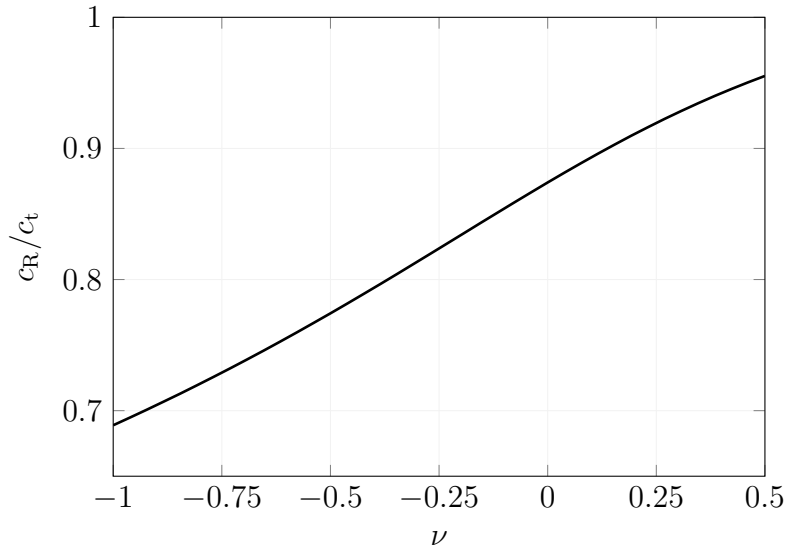


FIGURE I.3 – Vitesse normalisée des ondes de Rayleigh à la surface d’un solide isotrope en fonction du coefficient de Poisson.

de  $1/\sqrt{r}$ , où  $r$  est la distance à la source ; les ondes solidiennes, au contraire, ont une décroissance en  $1/r$ . Les ondes de Rayleigh peuvent donc parcourir beaucoup de chemin (plusieurs fois le tour de la terre) avant d’être tout à fait amorties.

Dans le cas qui nous intéresse ici, ces ondes ne sont pas présentes au niveaux d’énergie et aux longueurs d’onde auquel le présent travail s’intéresse. Toutefois, on montre par la suite que la vitesse de phase associée à de nombreuses ondes caractéristiques des plaques tendent de façon asymptotique vers la vitesse des ondes de Rayleigh en haute fréquence. Il est donc intéressant de connaître les phénomènes physiques associés à ce type d’onde.

Pour finir, on rappelle que l’on a écarté, pour la résolution des équations (I.2.23), la composante du déplacement selon  $\underline{e}_2$ . Les ondes de cisaillement horizontal ne donnent en fait pas lieu à des modes de surface, sauf quand un gradient des propriétés est présent près de l’interface. On parle alors d’onde de Love ; ces ondes sont dispersives, comme on le verra dans le cas de la plaque sandwich isotrope.

#### I.2.2.4 Milieu borné : ondes de Lamb

H. Lamb, contemporain de Rayleigh, est le premier à étudier le problème de la propagation d’ondes planes dans les plaques [113] [112]. Il donne alors la solution du problème de propagation des ondes planes dans les plaques homogènes isotropes. Ces solutions sont donc logiquement appelées *modes de Lamb*.

On considère une plaque isotrope homogène d’épaisseur  $h$  plongée dans le vide, dont le plan neutre coïncide avec le plan  $x_3 = 0$ . Les deux faces supérieure et inférieures sont libres, soit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3 = \pm \frac{h}{2}) \cdot \underline{e}_3 = \underline{0} \quad (\text{I.2.27})$$

Ces deux conditions aux limites sont suffisantes pour déterminer les six amplitudes  $\mathbf{a}$  (I.2.21).

De nouveau, si on considère une onde qui se propage dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ , le mouvement selon  $\underline{e}_2$  est découplé du problème ; dans son travail, Lamb ne s’intéresse d’ailleurs pas à cette composante du mouvement.

Comme dans le cas précédent, la démarche calculatoire qui mène à l'expression des équations caractéristiques est fastidieuse ; on se contente donc ici d'en donner le résultat. Le champ de déplacement est postulé sous la forme :

$$\underline{\mathbf{u}}^S(\underline{\mathbf{x}}, t) = \begin{bmatrix} i k \cos(k_3^\ell x_3) & k_3^t \cos(k_3^t x_3) \\ 0 & 0 \\ k_3^\ell \sin(k_3^\ell x_3) & i k \sin(k_3^t x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - k x_1)} \quad (\text{I.2.28})$$

$$\underline{\mathbf{u}}^A(\underline{\mathbf{x}}, t) = \begin{bmatrix} i k \sin(k_3^\ell x_3) & -k_3^t \sin(k_3^t x_3) \\ 0 & 0 \\ -k_3^\ell \cos(k_3^\ell x_3) & i k \cos(k_3^t x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - k x_1)} \quad (\text{I.2.29})$$

où les exposants  $\bullet^S$  et  $\bullet^A$  dénotent respectivement les modes *symétriques* et *antisymétriques*. Les amplitudes  $\mathbf{a}$  sont déterminées à partir des conditions d'interface libre sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

**Definition I.2.4** (Ondes de Lamb). *Les ondes de Lamb qui se propagent dans une plaque d'épaisseur  $h$  sont caractérisées par un nombre d'onde  $k$  qui respecte l'une des équations suivantes :*

$$\boxed{\frac{\tan(k_3^t h/2)}{\tan(k_3^\ell h/2)} = - \left( \frac{4 k_3^\ell k_3^t k^2}{(k^2 - (k_3^t)^2)^2} \right)^P} \quad (\text{I.2.30})$$

où  $(k_3^\ell)^2 = (\omega/c_\ell)^2 - k^2$  et  $(k_3^t)^2 = (\omega/c_t)^2 - k^2$ . les deux équations sont données par  $P = 1$  (modes symétriques) et  $P = -1$  (modes antisymétriques).

**Versión adimensionnée** On pose la vitesse de phase adimensionnée  $C = c/c_t$  et le produit fréquence-épaisseur adimensionné  $F = f \times h/c_t$ , qui permettent de réécrire les équations ci-dessus :

$$\tan\left(\pi F \sqrt{\frac{C^2 - 1}{C^2}}\right) = - \left( \frac{4 \sqrt{C^2 - \alpha^2} \sqrt{C^2 - 1}}{\alpha (C^2 - 2)^2} \right)^P \tan\left(\pi F \sqrt{\frac{C^2 - \alpha^2}{C^2 \alpha^2}}\right) \quad (\text{I.2.31})$$

où  $\alpha = c_\ell/c_t > 1$  ne dépend que du coefficient de Poisson  $\nu$  (I.2.12) et est strictement supérieur à 1 (voir figure I.2). On note d'ailleurs au passage la pulsation adimensionnée  $\Omega = 2\pi F$  et le nombre d'onde adimensionné  $K = \Omega/C = kh$ , que l'on réutilisera par la suite.

On remarque l'équation obtenue ne dépend plus que de  $\alpha$ , fonction du coefficient de Poisson uniquement. On a représenté sur la figure I.4 la carte des résidus des deux équations ( $P = \pm 1$ ) en fonction de  $C$  et  $F$ , pour une plaque isotrope dont le coefficient de Poisson est 0.3. En les écrivant sous la forme  $a/b = -d$  et  $a/b = -d^{-1}$ , on choisit une échelle d'intensité des blancs  $I = \min(|c + a/b|, |c + b/a|)$ . De cette façon, une solution de l'une ou l'autre des équations correspond à un zéro d'intensité (noir). La représentation permet ainsi de visualiser les différentes *branches de dispersion* (lignes noires) sans avoir à résoudre les équations.

De façon cohérente avec la notation communément adoptée, les différentes branches sont nommées par les modes antisymétriques  $A_i$  et symétriques  $S_i$ . L'agencement des différentes branches est très fortement dépendant du coefficient de Poisson. On remarque que dans le cas choisi, la branche liée au deuxième mode symétrique  $S_1$  est caractérisée par une vitesse de groupe *négative* sur un certain domaine fréquentiel ; son sens est opposé à la vitesse de phase.

Les deux lignes noires horizontales à  $c = c_\ell$  et  $c = c_t$  correspondent aux vitesses élémentaires (I.2.8) et (I.2.9). Pour  $c \in ]c_t, c_\ell[$ , on a  $\alpha < C^2 < 1$ . En conséquence, les deux membres de l'équation sont imaginaires ; notamment, l'argument de la tangente au numérateur est imaginaire (racine d'un nombre négatif). Elle prend donc rapidement des valeurs très élevées (ce qui explique les fortes intensités de blanc). Pour  $c \in [0, c_t[ \cup ]c_\ell, +\infty[$ , les deux membres de l'équation sont réels.

La visualisation proposée permet donc de montrer la complexité que représente la recherche opérationnelle des solutions d'onde de Lamb. En effet, de nombreux minima et maxima locaux sont présents ; de plus, les branches de dispersion peuvent se croiser et rendre encore plus difficile la séparation des différentes solutions. On imagine donc très bien la complexité supplémentaire apportée par l'anisotropie et la stratification pour l'étude du problème de propagation dans les plaques composites (ondes de Lamb généralisées). Cela motive donc le développement de schémas de résolution basés sur des approches variationnelles, sur lesquelles l'implémentation proposée en section I.5 est basée.

**Modes d'ordre zéro** On peut voir sur la figure I.4 que seules deux solutions *réelles* existent à fréquence nulle : le mode symétrique  $S_0$  et le mode antisymétrique  $A_0$ . Ils sont communément appelés *modes d'ordre zéro*.

Le passage à la limite de (I.2.31) pour  $F \rightarrow 0$  supprime l'influence de la fréquence au premier ordre ; on trouve alors la solution triviale  $C = 0$  pour le mode antisymétrique. Pour le mode

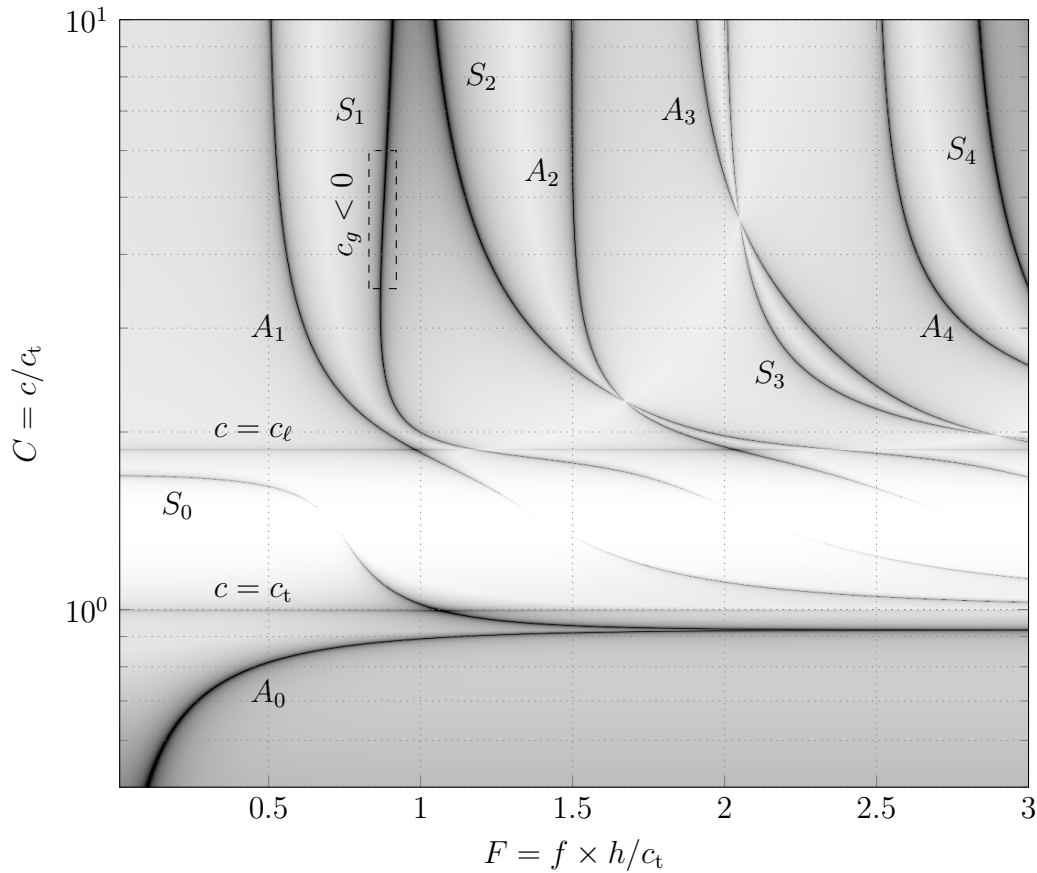


FIGURE I.4 – Dispersion des ondes de Lamb ( $\nu = 0.3$ ).

symétrique, on obtient la solution qui correspond au mode  $S_0$  en basse fréquence :

$$C_{S_0}^2 \stackrel{F \rightarrow 0}{=} 4 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} = 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{2}{1 - \nu} \quad (\text{I.2.32})$$

De façon à décrire le comportement asymptotique du mode  $A_0$ , on doit développer au troisième ordre les termes en tangente :  $\tan(x) \simeq x(1 - x^2/3)$ . Après quelques étapes de calcul, on obtient la vitesse de phase du mode  $A_0$  en basse fréquence :

$$C_{A_0}^4 \stackrel{F \rightarrow 0}{=} \frac{4}{3} \pi^2 F^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{4}{3} \pi^2 F^2 \frac{1}{2(1 - \nu)} \quad (\text{I.2.33})$$

Qui, comme on le verra, coïncide avec la vitesse des ondes de flexion prédite par le modèle de plaque mince de Kirchhoff. On note tout de suite que cette vitesse est le résultat d'une racine quatrième ; en conséquence, deux des racines sont réelles et deux imaginaires. Ces dernières sont des ondes évanescentes.

Il est intéressant de remarquer le lien qu'il existe entre ces deux vitesses asymptotiques en basse fréquence ; soit, sur la vitesse de phase  $c$  en m/s :

$$c_{A_0}^4 = \omega^2 \frac{h^2}{12} c_{S_0}^2 \quad \text{avec} \quad c_{S_0}^2 = \frac{Q_{1111}}{\rho} \quad (\text{I.2.34})$$

où  $Q_{1111}$  est la première composante du tenseur des raideurs en contraintes planes (voir annexe B.1, expression (B.1.6)), égale dans le cas isotrope à  $4\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$  (expression (B.1.24)). On peut donc raisonnablement conclure que ces deux ondes sont, en basse fréquence, associées à un état de contraintes planes dans l'épaisseur ( $\sigma_{i3} = 0$ ).

**Modes d'ordre supérieur** Mis à part les deux solutions réelles d'ordre zéro évoquées ci-dessus, les ondes de Lamb sont associées en basse fréquence à des nombres d'onde imaginaires : elles sont donc évanescentes. Des modes supplémentaires correspondant à des solutions de vitesse réelles apparaissent à partir d'une fréquence de *coupure*. Ils sont nommés *modes d'ordre supérieur*.

Les fréquences de coupure de ces modes peuvent être prédites. En effet, le mode apparaît avec une vitesse de phase infinie (voir figure I.4). On calcule donc la limite des équations (I.2.31) pour  $C \rightarrow \infty$ , qui entraîne :

— modes symétriques,  $P = 1$  : alors  $\tan(\pi F) = 0$  ou  $\tan(\pi F/\alpha) \rightarrow \infty$ , soit :

$$F_{S_n}^\infty = n \quad \text{ou} \quad F_{S_n}^\infty = \frac{2n - 1}{2} \alpha \quad (\text{I.2.35})$$

— modes antisymétriques,  $P = -1$  : alors  $\tan(\pi F) \rightarrow \infty$  ou  $\tan(\pi F/\alpha) = 0$ , soit :

$$F_{A_n}^\infty = n \times \alpha \quad \text{ou} \quad F_{A_n}^\infty = \frac{2n - 1}{2} \quad (\text{I.2.36})$$

où le coefficient  $n$  prend les valeurs entières strictement positives.

Ces différentes solutions sont visibles sur la figure I.4 : le mode  $A_1$  apparaît pour  $F = 1/2$ , le mode  $A_2$  pour  $F = 3/2$ , etc. Dans le cas choisi,  $\nu = 0.3$  soit  $\alpha \simeq 1.87$  (I.2.12). Le mode  $S_1$  apparaît donc pour  $F \simeq 0.94$ , puis le mode  $S_2$  pour  $F = 1$ , etc.

**Vitesse asymptotique en haute fréquence** On remarque sur la figure I.4 que la vitesse des ondes tend vers une asymptote horizontale quand  $F \rightarrow \infty$ . De plus, cette vitesse asymptotique semble plus faible que la vitesse de cisaillement  $c_t$  (ce qui correspondrait à  $C_\infty < 1$ ).

Si on prend pour les équations (I.2.31) la limite  $F \rightarrow \infty$ , on remarque que les tangentes disparaissent. On obtient donc :

$$4\sqrt{C^2 - \alpha^2}\sqrt{C^2 - 1} = \alpha(C^2 - 2)^2 \quad (\text{I.2.37})$$

dans laquelle l'exposant  $P$  a disparu. On remarque alors directement qu'élevée au carré, cette expression est identique à l'équation caractéristique des ondes de Rayleigh (I.2.24).

En conséquence, *la vitesse de toutes les ondes de Lamb tend vers la vitesse des ondes Rayleigh lorsque le produit (fréquence  $\times$  épaisseur) devient grand*. Ce phénomène s'interprète très bien : la longueur d'onde  $\lambda$  diminuant avec la fréquence, les deux interfaces définissant la plaque semblent de plus en plus éloignées par rapport à l'échelle des mécanismes mis en jeu. En conséquence, le mouvement est confiné en surface de la plaque ; l'information se déplace à la vitesse des ondes de Rayleigh.

On rappelle que l'on ne s'est intéressé qu'au mouvement contenu dans un plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  perpendiculaire aux faces de la plaque. En effet, on a montré que la composante  $u_2$  du déplacement est découplée du problème ; toutefois, elle donne également lieu à la formation de *modes* ; on ne les étudie pas ici, mais ils auront une importance notable lors de l'étude des plaques anisotropes, dans lequel toutes les composantes du mouvement peuvent être couplées.



### I.3 Guides d'onde

Cette section est consacrée à la formulation du problème de propagation des ondes planes dans les guides d'onde plans et uniaxiaux. On se limite ici au cas des guides d'onde homogènes, c'est à dire qu'ils sont invariants suivant les directions suivant lesquelles les ondes peuvent se propager.

En effet, de nombreux travaux [68, 162] portent sur la modélisation de la propagation des ondes planes dans les guides d'onde *périodiques*, c'est à dire composés d'une cellule unitaire répétée à l'infini. Ces guides d'onde particuliers possèdent un comportement particulier du à leur aspect périodique ; notamment, la taille de la cellule impose une borne inférieure sur la longueur d'onde d'étude. Le domaine en vecteur d'onde ainsi formé et borné ; on parle de *domaine de Brillouin* [38].

Dans les cas étudiés ici, supposer le guide d'onde homogène revient à considérer un guide d'onde périodique de période quelconque. En conséquence, il n'y a pas de limitation théorique quant au nombre d'onde caractéristique des ondes que l'on cherche à étudier.

On donne donc ici les deux formulations respectivement basées sur les équations locales et globales de la dynamique, pour le cas des guides d'onde plans (invariance selon *deux* directions) et les guides d'onde uniaxiaux (invariance selon *une* direction). Ces formulations sont adaptées à la classe de problèmes que l'on cherche à résoudre dans ce travail : la propagation des ondes planes dans les plaques composites et dans les poutres de section complexe.

#### I.3.1 Formulation forte

La formulation forte du problème de propagation des ondes planes dans les guides d'onde consiste à injecter la forme des champs donnée en (I.1.1) dans les équations de la dynamique (voir annexe A.1, expression (A.1.14)) ou leur équivalent utilisant le principe de correspondance (annexe B.2, expression (B.2.5)).

##### I.3.1.1 Guides d'onde plans

Les guides d'onde plans que l'on considère ont une configuration matérielle invariante par toute translation selon les directions du plan ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ). La fonction de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}$  est donc fonction de  $x_3$  uniquement ; on rappelle la séparation des variables utilisée dans ce cas (I.1.1) :  $\underline{\mathbf{z}} = x_3$  et  $\underline{\mathbf{y}} = [x_1 \ x_2]$ .

Ces hypothèses permettent d'étudier la propagation des ondes dans les plaques multicouches. On considère alors une plaque composée de  $N$  couches ; la  $n^{\text{ième}}$  couche est délimitée par ses faces inférieure et supérieure, situées respectivement en  $x_3^{n-1}$  et  $x_3^n$ . Dans chaque couche, les propriétés matériau sont supposées constantes :  $\forall x_3 \in [x_3^{n-1}, x_3^n], \underline{\mathbf{C}}(x_3) = \underline{\mathbf{C}}^n$ . De la même façon, on définit pour la  $n^{\text{ième}}$  couche les champs de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}^n$  et de contrainte  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^n$ , dont les versions généralisées (associées à l'écriture des champs (I.1.7)) sont notées  $\underline{\mathbf{U}}^n$  et  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}^n$ .

On donne la relation entre les déplacements et les contraintes généralisées :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{ij}^n = \left( C_{ijk3}^n \frac{\partial}{\partial x_3} - i k_\gamma C_{ijk\gamma}^n \right) U_k^n \quad (\text{I.3.1})$$

On formule alors le problème de la propagation des ondes dans les plaques multicouches, en utilisant le principe de correspondance (annexe B.2, expression (B.2.5)).

**Définition I.3.1** (Formulation forte). *La formulation forte du problème de la propagation d'ondes planes dans une plaque composée de  $N$  couches homogènes met en jeu  $3N$  équations d'équilibre,  $6(N-1)$  équations de continuité et 6 équations aux limites :*

$$\begin{aligned} &\text{Équilibre dynamique : } i = 1, \dots, 3 \text{ et } n = 1, \dots, N \\ &\left( C_{i3k3}^n \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - i k_\beta (C_{i\beta k3}^n + C_{i3k\beta}^n) \frac{\partial}{\partial x_3} - k_\alpha k_\beta C_{i\alpha k\beta}^n + \rho \omega^2 \delta_{ik} \right) U_k^n = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.3.2})$$

$$\begin{aligned} &\text{Continuité : } i = 1, \dots, 3 \text{ et } n = 1, \dots, N-1 \\ &\Sigma_{i3}^n(x_3^n) = \Sigma_{i3}^{n+1}(x_3^n) \\ &U_i^n(x_3^n) = U_i^{n+1}(x_3^n) \end{aligned} \quad (\text{I.3.3})$$

$$\begin{aligned} &\text{Conditions aux limites : } i = 1, \dots, 3 \\ &\Sigma_{i3}^n(x_3^0) = T_i^- \\ &\Sigma_{i3}^n(x_3^N) = T_i^+ \end{aligned} \quad (\text{I.3.4})$$

où les vecteurs contrainte  $\underline{T}^-$  et  $\underline{T}^+$  permettent de prendre en compte un éventuel effort appliqué sur les faces inférieures et supérieures par une onde plane incidente, transmise et/ou réfléchie.

Les équations d'équilibre (I.3.2) sont en fait équivalentes aux équations de Christoffel (I.2.4) ; elles permettent de trouver une base sur laquelle développer les fonctions de polarisation  $\underline{U}$ . Dans chaque couche, elles forment trois équations différentielles d'ordre 2. Cela donne donc lieu à six solutions propres de la forme (I.2.21) ; celles-ci sont paramétrées par les amplitudes  $\mathbf{a}^n$ , où  $n$  désigne la couche. Finalement, les  $6N$  amplitudes  $\mathbf{a}$  sont déterminées à l'aide des  $6(N-1)$  conditions de continuité (I.3.3) et des 6 conditions aux limites (I.3.4).

**Régime forcé** Lorsque le guide d'onde est soumis à des efforts extérieurs  $\underline{T}^\pm$  engendrés par l'arrivée d'une onde incidente, la solution du problème ci-dessus correspond à la réponse de la plaque à cette onde. Ce problème peut se résoudre de la façon suivante :

1. choix de la pulsation  $\omega$  et des composantes planes  $(k_1, k_2)$  du vecteur d'onde  $\underline{k}$ .
2. calcul des  $6N$  valeurs et vecteurs propres  $(k_{3,i}^n, \underline{p}_i^n)$  à partir des équations d'équilibre dynamique
3. construction d'un système linéaire basé sur les  $6N$  amplitudes  $\mathbf{a}$  et inversion
4. reconstruction de la fonction de polarisation  $\underline{U}$

**Modes guidés** Lorsque les efforts extérieurs  $\underline{T}^\pm$  sont nuls, les interfaces sont libres. Le problème ci-dessus devient donc un problème homogène ; on cherche alors les solutions non-triviales de celui-ci (c'est à dire associées à des fonctions de polarisations  $\underline{U}$  non nulles). La résolution de ce problème est bien plus complexe : en effet, la non-linéarité en  $\underline{k}$  et  $\omega$  du système formé à partir des équations aux limites homogènes impose l'utilisation de méthodes de recherche de solutions dont les résultats dépendent de l'initialisation et du conditionnement du problème.

La formulation forte n'est donc pas utilisée dans ce travail pour la recherche opérationnelle des modes d'onde guidées. Toutefois, quelques méthodes de résolution proposées dans la littérature et basées sur cette formulation sont données à titre indicatif à la section I.5.

### I.3.1.2 Guides d'onde uniaxiaux

On aborde maintenant le cas des guides d'onde uniaxiaux. On considère le cas où la section représentative est invariante selon une translation d'un vecteur colinéaire à  $\mathbf{e}_3$  ; on rappelle le choix pris pour la séparation des variables d'espace (I.1.1) :  $\mathbf{z} = [x_1 \ x_2]$  et  $\mathbf{y} = x_3$ . Le champ de déplacement est donc postulé sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_1, x_2) e^{i(\omega t - k x_3)} \quad (\text{I.3.5})$$

ce qui permet de donner la forme des contraintes :

$$\Sigma_{ij} = \left( C_{ijk\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i k C_{ijk3} \right) U_k \quad (\text{I.3.6})$$

**Definition I.3.2** (Formulation forte). *Soit un guide d'onde uniaxial dont la section surfacique caractéristique  $\Omega$  a pour normale  $\mathbf{e}_3$  et contour  $\partial\Omega$ . La propagation d'une onde plane de nombre d'onde  $k$  à travers ce guide est régie par les équations suivantes :*

*Équilibre dynamique :*  $i = 1, \dots, 3 \quad \forall \mathbf{x} = [x_1, x_2] \in \Omega$

$$\left( C_{i\alpha k\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - i k (C_{i3k\beta}(\mathbf{x}) + C_{i\beta k3}(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial x_\beta} - k^2 C_{i3k3}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \omega^2 \delta_{ik} \right) U_k(\mathbf{x}) = 0$$

*Conditions aux limites :*  $i = 1, \dots, 3 \quad \forall \mathbf{x} = [x_1, x_2] \in \partial\Omega$

$$\Sigma_{ij}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

De nouveau, la résolution du problème se fait pour un nombre d'onde  $k$  et une pulsation  $\omega$  fixés. Toutefois, cette formulation, par son aspect bidimensionnel, est plus complexe à résoudre que le problème des guides d'onde plans (I.3.2). Les équations à résoudre comportent en effet des dérivées partielles dans deux directions ; l'équation d'équilibre possède une infinité de solutions élémentaires (contre 6 dans le cas des guides d'onde plans), qu'il faut utiliser pour résoudre le problème aux limites.

En conséquence, on développe pas ici les méthodes de résolutions basées sur la formulation forte du problème de propagation dans les guides d'onde uniaxiaux. On résoudra ce problème grâce à sa formulation faible dans la section suivante.

Pour le cas des sections  $\Omega$  rectangulaires, on peut tout de même noter que des solutions ont été proposées [109]. Il est notamment montré que 4 modes seulement sont propagatifs en basse fréquence ; par vitesse croissante : deux modes de flexion, un mode de torsion et un mode de compression. En haute fréquence, les ondes se confinent au niveau des surfaces, puis des arrêtes du guide d'onde.

## I.3.2 Formulation faible

Les développements qui suivent explicitent la forme globale des équations régissant la propagation des ondes planes dans les guides d'onde.

On rappelle le postulat de base (I.1.6) sur la forme des champs, ici en notation de Voigt (voir annexe B.1, expression (B.1.1)), exprimés dans l'espace de Fourier et auxquels on ajoute

explicitement la dépendance en  $\mathbf{k}$  :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.3.7})$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.3.8})$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.3.9})$$

Les contraintes et déformations généralisées  $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$  et  $\underline{\mathbf{E}}$  sont liées par la relation de comportement :

$$\underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega) \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) \quad (\text{I.3.10})$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est le tenseur opérationnel complexe décrivant le comportement viscoélastique des matériaux (voir annexe B.2, expression (B.2.9)). Les équations cinématiques relient les déplacements généralisés  $\underline{\mathbf{U}}$  aux déformations généralisées :

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{G}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{k}}) \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) \quad (\text{I.3.11})$$

où la matrice  $\mathbf{G}$  exprime les différentes dérivées partielles du déplacement qui composent les composantes du vecteur des déformations. La forme de cette matrice étant dépendante du choix des coordonnées  $\underline{\mathbf{y}}$  et  $\underline{\mathbf{z}}$ , elle sera explicitée plus tard.

Le principe des travaux virtuels utilisant le principe de correspondance (annexe B.2, expression (A.1.22)) permet d'écrire :

$$\int^H \underline{\mathbf{U}}^* \mathbf{G} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \mathbf{G} \underline{\mathbf{U}} \, d\Omega - \omega^2 \int^H \rho \underline{\mathbf{U}}^* \underline{\mathbf{U}} \, d\Omega = 0 \quad (\text{I.3.12})$$

où  $\Omega$  décrit le domaine parcouru par les variables  $\underline{\mathbf{z}}$  (on a d'ailleurs omis la dépendance des différentes intégrandes en  $\underline{\mathbf{z}}$  dans l'expression ci-dessus). L'utilisation d'un paramétrage généralisé permet finalement de discrétiser l'équation obtenue, qui devient alors un problème aux valeurs propres de dimension finie.

**Definition I.3.3** (Formulation faible). *Soit un guide d'onde homogène dans les directions  $\underline{\mathbf{y}}$  et dont la section caractéristique est décrite par le domaine  $\underline{\mathbf{z}} \in \Omega$ . Alors la recherche des fonctions de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}$  et des pulsations  $\omega$  et vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  associés consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :*

$$\boxed{(\mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{0}} \quad (\text{I.3.13})$$

où on a utilisé la projection  $\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{N}(\underline{\mathbf{z}}) \mathbf{q}(\omega, \underline{\mathbf{k}})$  pour discrétiser le problème (voir annexe A.2 sur les méthodes de discrétisation, expression (A.2.3)). Les opérateurs de masse et de raideur généralisées sont de la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho(\underline{\mathbf{z}})^H \mathbf{N}(\underline{\mathbf{z}}) \mathbf{N}(\underline{\mathbf{z}}) \, d\Omega \quad (\text{I.3.14})$$

$$\mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \int_{\Omega}^H \mathbf{B}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{k}}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{k}}) \, d\Omega \quad (\text{I.3.15})$$

avec  $\mathbf{B}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{G}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{k}}) \mathbf{N}(\underline{\mathbf{z}})$  (I.3.11).

La résolution du problème de propagation des ondes planes dans les guides d'onde viscoélastiques consiste donc à chercher les valeurs propres du système ci-dessus. Formulé tel quel, il est nécessaire de fixer  $\underline{\mathbf{k}}$ . Les valeurs propres  $\omega_i$  ainsi obtenues correspondent aux pulsations propres des ondes planes solutions, dont la fonction de polarisation est telle que :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega_i, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{N}}(\underline{\mathbf{z}}) \mathbf{q}^i(\underline{\mathbf{k}}) \quad (\text{I.3.16})$$

Dans les paragraphes qui suivent, on spécifie la formulation qui vient d'être faite dans le cas des guides d'onde plans, puis des guides d'onde uniaxiaux.

### I.3.2.1 Guides d'onde plans

On s'intéresse aux guides d'onde plans invariants par toute translation selon les directions du plan ( $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ ). On rappelle le choix des variables d'espaces choisies dans ce cas pour paramétrer la fonction de polarisation et le vecteur d'onde :

$$\underline{\mathbf{z}} = x_3 \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{y}} = [x_1, x_2] \quad (\text{I.3.17})$$

En conséquence, la section caractéristique du guide d'onde est le domaine  $\Omega$  représenté par un segment  $x_3 \in [x_3^-, x_3^+]$ .

La matrice  $\mathbf{G}$  dont on s'est servi pour exprimer les déformations généralisées (I.3.11) prend la forme qui suit :

$$\mathbf{G}(x_3, \underline{\mathbf{k}}) = \begin{bmatrix} -i k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -i k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & -i k_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -i k_1 \\ -i k_2 & -i k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.18})$$

Cette formulation est utilisée pour formuler un schéma de résolution par éléments finis en section I.5. Ce schéma est adapté à la recherche des modes guidés dans des plaques multicouches dont les matériaux constitutifs sont monocliniques et viscoélastiques.

### I.3.2.2 Guides d'onde uniaxiaux

Le problème de la propagation des ondes planes dans les guides d'onde uniaxiaux implique un vecteur d'onde scalaire (sous la forme d'un nombre d'onde  $k$ ). On rappelle le choix des variables d'espace dans le cas du guide d'onde uniaxial :

$$\underline{\mathbf{z}} = [x_1, x_2] \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{y}} = x_3 \quad (\text{I.3.19})$$

La section caractéristique du guide d'onde est donc une surface  $\Omega$  de contour  $\partial\Omega$  et de normale  $\underline{\mathbf{e}}_3$ .

La matrice  $\mathbf{G}$  qui permet d'exprimer les déformations généralisées (I.3.11) est de la forme :

$$\mathbf{G}(\underline{\mathbf{z}}, k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & -i k \\ 0 & -i k & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -i k & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.20})$$

Cette formulation est également utilisée pour dériver un schéma de résolution par éléments finis en section I.5. Ce schéma est adapté à la recherche des modes guidés dans des poutres de section quelconque, composées de matériaux orthotropes et viscoélastiques.

### I.3.3 Prise en compte du couplage acoustique

On donne ici la manière de modéliser le couplage acoustique qui se caractérise au niveau du contour du guide d'onde, lorsque celui-ci est plongé dans l'air (ou dans un gaz en général). Sur la base de l'équation d'Euler linéarisée, on introduit le couplage fluide-structure, exprimé comme un terme de forçage dans le principe des travaux virtuels. On définit alors l'impédance de rayonnement, qui modélise les effets de masse et dissipation ajoutées par le couplage du guide d'onde avec l'air.

#### I.3.3.1 Régime forcé

De manière générale, on peut introduire un couplage au niveau du contour  $\partial\Omega$  de la section du guide d'onde, représenté par une densité d'efforts  $\underline{\mathbf{t}}$ . On peut alors écrire le principe des travaux virtuels dans sa version généralisée (I.3.12) avec un second membre :

$$\int_{\Omega} {}^H\mathbf{U}^* {}^H\mathbf{G} \underline{\mathbf{C}} \mathbf{G} \mathbf{U} \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho {}^H\mathbf{U}^* \mathbf{U} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} {}^H\mathbf{U}^* \underline{\mathbf{T}} \, dS \quad (\text{I.3.21})$$

où on a posé la forme des efforts  $\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}}$ .

**Definition I.3.4** (Régime forcé). *La discrétisation de l'équation (I.3.21) mène à la formulation du système d'équations suivant :*

$$\boxed{(\mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{f}(\omega, \underline{\mathbf{k}})} \quad (\text{I.3.22})$$

avec le vecteur des efforts généralisés :

$$\mathbf{f}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \int_{\partial\Omega} {}^H\mathbf{N}(\underline{\mathbf{z}}) \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) \, dS \quad (\text{I.3.23})$$

et les opérateurs de masse et raideur généralisées  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  définis en (I.3.14) et (I.3.15).

La résolution du système (I.3.22) permet d'aborder, comme dans le cas de la formulation forte, la problématique de la propagation des ondes en régime forcé. Les méthodes de caractérisation des matériaux basées sur la mesure de coefficients de transmission et de réflexion d'une onde incidente se servent de cette formulation [48].

#### I.3.3.2 Couplage acoustique

On considère un guide d'onde de section  $\Omega$  plongé dans un volume d'air infini. L'équation d'onde, portant sur les dérivées partielles du champ de pression acoustique  $p$ , s'exprime comme suit :

$$\nabla^2 p(\underline{\mathbf{x}}, \omega) + k_a^2 \ddot{p}(\underline{\mathbf{x}}, t) = 0 \quad (\text{I.3.24})$$

où  $k_a = \omega/c_a$  est le nombre d'onde dans l'air.

On donne ensuite l'équation d'Euler linéarisée, qui régit la dépendance du champ de pression  $p$  et du champ de déplacement des particules d'air  $\underline{\mathbf{u}}^a$  :

$$\rho_a \ddot{\underline{\mathbf{u}}}^a(\underline{\mathbf{x}}, \omega) + \frac{\partial p(\underline{\mathbf{x}}, \omega)}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 0 \quad (\text{I.3.25})$$

Les conditions de couplage au niveau de la frontière du guide d'onde  $\partial\Omega$  concernent (1) la continuité des efforts ; (2) la continuité des déplacements normaux ; soit  $\forall \underline{\mathbf{z}} \in \partial\Omega$  :

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega) = p(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega) \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{z}}) \quad (\text{I.3.26})$$

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{z}}) = \underline{\mathbf{u}}^a(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{z}}) \quad (\text{I.3.27})$$

où  $\underline{\mathbf{n}}$  est la normale *entrante* au contour. Puisque le volume d'air entourant le guide d'onde s'étend à l'infini, le champ de pression doit respecter la condition de Sommerfeld (ou de *non-réflexion*) ; celle-ci sera explicitée plus tard.

En injectant la forme en onde plane :

$$\underline{\mathbf{u}}^a(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{U}}^a(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.3.28})$$

$$p(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) = P(\underline{\mathbf{z}}, \omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{I.3.29})$$

on obtient les équations à résoudre dans le domaine entourant le guide d'onde.

**Definition I.3.5** (Problème d'acoustique associé). *Les équations qui régissent les champs acoustiques autour du guide d'onde sont :*

*Équilibre :*  $\forall \underline{\mathbf{z}} \notin \Omega$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \underline{\mathbf{z}}^2} - k_\alpha k_\alpha + k_a^2 \right) P = 0 \quad (\text{I.3.30})$$

*Continuité :*  $\forall \underline{\mathbf{z}} \in \partial\Omega$

$$\underline{\mathbf{T}} = P \underline{\mathbf{n}} \quad (\text{I.3.31})$$

$$\rho_a \omega^2 \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial P}{\partial \underline{\mathbf{z}}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (\text{I.3.32})$$

où on a omis la dépendance des différents champs en  $\underline{\mathbf{z}}$ ,  $\omega$  et  $\underline{\mathbf{k}}$ .

On a utilisé dans ce qui précède la vitesse du son  $c_a$  ainsi que la masse volumique de l'air  $\rho_a$ . Ces grandeurs sont, dans ce travail, considérées indépendantes de la fréquence. Toutefois, elles sont dépendantes de la température et de la pression ambiantes. On donne ici à titre indicatif les formules approchées donnant, à pression atmosphérique, leur dépendance à la température  $T$  :

$$\rho_a = 1.292 \frac{273.15}{T} \quad (\text{I.3.33})$$

$$c_a = 20.05 \sqrt{T} \quad (\text{I.3.34})$$

où  $T$  est exprimée en Kelvins. Pour une température de 20°C, on a  $\rho_a = 1.204 \text{ kg/m}^3$  et  $c_a = 343.3 \text{ m/s}$ .

Il est donc nécessaire de résoudre les équations précédentes dans le domaine infini entourant le guide d'onde. Les conditions de continuité couplent alors le mouvement des particules d'air au mouvement du guide d'onde.

Dans le cas général, la résolution de ce type de problème par éléments finis est complexe. Des solutions utilisant des éléments finis de frontière (*BEM*) ont été proposées [138], mais leur implémentation sort du cadre de ce travail.

### I.3.3.3 Cas du guide d'onde plan

On se restreint donc ici au cas du guide d'onde plan ( $\underline{z} = x_3$  et  $\underline{y} = [x_1, x_2]$ ). Les champs acoustiques s'écrivent en conséquence :

$$p(\underline{x}, \omega, \underline{k}) = P(x_3, \underline{k}) e^{-i \underline{k} \cdot \underline{y}} \quad (\text{I.3.35})$$

$$\underline{u}^a(\underline{x}, \omega, \underline{k}) = \underline{U}^a(x_3, \omega, \underline{k}) e^{-i \underline{k} \cdot \underline{y}} \quad (\text{I.3.36})$$

L'injection des équations ci-dessus dans l'équation d'onde (I.3.24) permet d'obtenir la forme générale du champ de pression :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} + (k_a^2 - k_\alpha k_\alpha) P = 0 \quad \Rightarrow \quad P = P_1 e^{i k_3^a x_3} + P_2 e^{-i k_3^a x_3} \quad (\text{I.3.37})$$

avec  $k_3^a = \sqrt{k_a^2 - k_\alpha k_\alpha}$  ; les amplitudes  $P_i$  sont pour l'instant inconnues.

Sur la face supérieure, la condition de Sommerfeld interdit l'arrivée d'une onde depuis  $+\infty$  ; en conséquence, le terme  $P_1$  est nul sur le domaine  $x_3 \geq x_3^+$ . La même remarque sur la face inférieure (pas d'onde venant de  $-\infty$ ) annule le terme  $P_2$  sur le domaine  $x_3 \leq x_3^-$ . On obtient finalement les deux champs de pression acoustique de part et d'autre du guide d'onde :

$$\forall x_3 \leq x_3^- \quad , \quad P(x_3) = P^- e^{i k_3^a (x_3 - x_3^-)} \quad (\text{I.3.38})$$

$$\forall x_3 \geq x_3^+ \quad , \quad P(x_3) = P^+ e^{-i k_3^a (x_3 - x_3^+)} \quad (\text{I.3.39})$$

où on a posé  $P^- = P_1 e^{i k_3^a x_3^-}$  et  $P^+ = P_2 e^{-i k_3^a x_3^+}$ .

*Remarque I.3.1.* On a choisit ici  $k_3^a$  comme la racine réelle *positive* de  $k_a^2 - k_\alpha k_\alpha$ . Toutefois, on remarque que lorsque  $\|\underline{k}\| > k_a$ , la racine devient imaginaire. Dans ce cas, pour satisfaire à la condition de Sommerfeld, on choisit  $k_3^a$  comme la racine imaginaire *négative* ; cela nous assure que les champs acoustiques soient nuls à l'infini. Pour résumer :

$$k_3^a(\omega, \underline{k}) = \begin{cases} \sqrt{\omega^2/c_a^2 - k_\alpha k_\alpha} & \|\underline{k}\| \leq \omega/c_a \\ -i \sqrt{k_\alpha k_\alpha - \omega^2/c_a^2} & \|\underline{k}\| \geq \omega/c_a \end{cases} \quad (\text{I.3.40})$$

A l'aide des deux conditions de continuité, on peut donner la relation entre le déplacement et l'effort normaux au niveau des faces :

$$T_3(x_3^-) = P^- = -i \frac{\rho_a \omega^2}{k_3^a} U_3(x_3^-) \quad (\text{I.3.41})$$

$$T_3(x_3^+) = -P^+ = -i \frac{\rho_a \omega^2}{k_3^a} U_3(x_3^+) \quad (\text{I.3.42})$$



**Definition I.3.6** (Impédance de rayonnement). *On définit l'impédance de rayonnement  $Z$  comme la fonction qui relie la vitesse normale  $\mathbf{i} \omega U_3$  et les efforts de pression  $\underline{\mathbf{T}}$  au niveau des interfaces sur lesquelles le couplage acoustique a lieu :*

$$Z(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = -\frac{T_3(\omega, \underline{\mathbf{k}})}{\mathbf{i} \omega U_3(\omega, \underline{\mathbf{k}})} = \rho_a \frac{\omega}{k_3^a(\omega, \underline{\mathbf{k}})} = Z_R(\omega, \underline{\mathbf{k}}) + \mathbf{i} Z_I(\omega, \underline{\mathbf{k}}) \quad (\text{I.3.43})$$

où les termes  $Z_R$  et  $Z_I$  sont strictement positifs (conséquence de la définition de  $k_3^a$  (I.3.40)).

Si on réécrit le second membre du PTV (I.3.21) :

$$\int_{\partial\Omega} {}^H \underline{\mathbf{U}}^*(\omega, \underline{\mathbf{k}}) \underline{\mathbf{T}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \omega (Z_I(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - \mathbf{i} Z_R(\omega, \underline{\mathbf{k}})) \left( {}^* U_3^*(x_3^-, \omega, \underline{\mathbf{k}}) U_3(x_3^-, \omega, \underline{\mathbf{k}}) + {}^* U_3^*(x_3^+, \omega, \underline{\mathbf{k}}) U_3(x_3^+, \omega, \underline{\mathbf{k}}) \right) \quad (\text{I.3.44})$$

on obtient le vecteur des forces généralisées (I.3.44) :

$$\mathbf{f}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \omega (Z_I(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - \mathbf{i} Z_R(\omega, \underline{\mathbf{k}})) {}^H \mathbf{J} \mathbf{q} \quad (\text{I.3.45})$$

où  $\mathbf{J}$  est une matrice qui contient les fonctions de base  $\mathbf{N}_3(\underline{\mathbf{z}})$  correspondantes aux degrés de liberté  $\mathbf{q}$  liés à la composante  $U_3$  du déplacement, évaluées sur les surfaces inférieure et supérieure :

$$\mathbf{J} = \mathbf{N}_3(x_3^+) + \mathbf{N}_3(x_3^-) \quad (\text{I.3.46})$$

Par construction, cette matrice est singulière (la plupart de ses colonnes sont remplies de zéros).

En injectant la forme de  $\mathbf{f}$  ci-dessus dans les équations régissant le mouvement du guide d'onde en régime forcé (I.3.21), on obtient le problème à résoudre comme suit.

**Definition I.3.7** (Problème couplé). *La problème de la recherche des modes d'onde guidées dans les guides d'onde plans couplés acoustiquement se met sous la forme :*

$$\left( \mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) + \omega (\mathbf{i} Z_R(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - Z_I(\omega, \underline{\mathbf{k}})) {}^H \mathbf{J} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{0} \quad (\text{I.3.47})$$

qui, au vu de l'expression de l'impédance de rayonnement  $Z$  (I.3.43), est un problème aux valeurs propres non-linéaire en  $\underline{\mathbf{k}}$  et  $\omega$ .

**Effets du couplage sur la dispersion des ondes** On remarque sur l'équation (I.3.47) que la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement représente un effet de masse ajoutée, tandis que la partie réelle représente un potentiel dissipatif.

Il possible d'exprimer l'impédance de rayonnement  $Z$  (I.3.43) en fonction de la vitesse du son dans l'air  $c_a$  et la vitesse de phase  $c = \omega / \|\underline{\mathbf{k}}\|$  (I.1.15) d'une onde se propageant dans le guide d'onde ; à partir de l'expression de  $k_3^a$  (I.3.40), on a :

$$Z(\omega, \frac{\omega}{c} \underline{\mathbf{n}}^p) = \begin{cases} \mathbf{i} \rho_a \frac{c_a c}{\sqrt{c_a^2 - c^2}} & c < c_a \\ \rho_a \frac{c_a c}{\sqrt{c^2 - c_a^2}} & c > c_a \end{cases} \quad (\text{I.3.48})$$

où  $\underline{\mathbf{n}}^p$  dénote la direction de propagation des ondes (I.1.10).

On distingue alors trois régimes différents, à partir de l'expression de  $Z$  ci-dessus, de l'expression du nombre d'onde normal dans l'air  $k_3^a$  et de l'équation (I.3.47) donnant le problème aux valeurs propres à résoudre :

- $c < c_a$  soit  $\|\underline{\mathbf{k}}\| > \omega/c_a$  :  $k_3^a$  est imaginaire pur. En conséquence, le champ de pression est évanescent et reste confiné près du guide d'onde. L'impédance est alors imaginaire, représentant un effet de masse ajoutée par la mise en mouvement de la couche d'air proche du guide d'onde.
- $c > c_a$  soit  $\|\underline{\mathbf{k}}\| < \omega/c_a$  ; alors le champ de pression rayonné par le guide d'onde est une onde plane qui se propage à l'infini. L'impédance  $Z$  est réelle, le rayonnement acoustique entraîne donc un effet dissipatif : la puissance acoustique rayonnée est perdue par le système.
- $c = c_a$  : l'impédance est infinie ; le couplage est maximum et toute l'énergie du guide d'onde est perdue dans le rayonnement acoustique. On parle de *régime critique*.

Lorsque la vitesse des ondes ne dépend pas de leur direction de propagation, la fréquence à laquelle la vitesse de phase  $c$  des ondes de flexion (mode de Lamb  $A_0$ , majoritairement responsable du rayonnement acoustique en basse fréquence) et la vitesse du son dans  $c_a$  coïncident ne dépend également pas de la direction de propagation. Cette fréquence est donc naturellement appelée *fréquence de coïncidence* ou *fréquence critique*.

**Solution particulière du système couplé** On a vu que lorsque  $c \rightarrow c_a$ , l'impédance de rayonnement  $Z$  tend vers une valeur infinie. Le terme lié au couplage acoustique dans l'équation (I.3.47) est dans ce cas prépondérant ; on peut alors réécrire cette équation en négligeant les autres termes :

$$\left[ \omega \left( i Z_R(\omega, \frac{\omega}{c} \underline{\mathbf{n}}^p) - Z_I(\omega, \frac{\omega}{c} \underline{\mathbf{n}}^p) \right)^H \mathbf{J} \right] \mathbf{q}(\omega, \frac{\omega}{c} \underline{\mathbf{n}}^p) \stackrel{c \rightarrow c_a}{\equiv} \mathbf{0} \quad (\text{I.3.49})$$

Or, comme mentionné plus haut, la matrice  $\mathbf{J}$  est singulière, soit  $\det[\mathbf{J}] = 0$ . La limite précédente est donc vérifiée  $\forall \omega$  ; en conséquence,  $\underline{\mathbf{k}} = (\omega/c_a) \underline{\mathbf{n}}^p$  est solution du problème, quelque soit la fréquence.

## I.4 Fréquence de coupure des modes d'ordre supérieur

On formule ici le calcul analytique de la fréquence de coupure des modes d'ordre supérieur caractéristiques d'une plaque, observés par Lamb. Le problème est posé pour les plaques stratifiées dont les matériaux constitutifs sont monocliniques. La solution analytique associée aux plaques homogènes orthotropes et plaques sandwichs orthotropes est donnée.

La fréquence de coupure d'un mode d'ordre supérieur correspond au moment auquel celui-ci passe d'un régime évanescent (vecteur d'onde purement imaginaire) à un régime propagatif (vecteur d'onde réel pur) ; cette fréquence est donc caractérisée par un vecteur d'onde nul  $\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{0}}$ . A cette fréquence particulière, la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/\|\underline{\mathbf{k}}\|$  est infinie : la plaque est animée d'un mouvement uniforme dans son plan.

Cette fréquence particulière est caractérisée par une vitesse de groupe nulle  $\underline{\mathbf{c}}_g = \partial\omega/\partial\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{0}}$  ; en effet, la loi de dispersion  $k = f(\omega)$  est caractérisée à cette fréquence par une asymptote verticale (voir figure I.4). En conséquence, l'information mécanique liée à ces ondes est complètement stationnaire.

Comme la longueur d'onde, la vitesse de phase  $\underline{\mathbf{c}}_\phi = \omega/\underline{\mathbf{k}}$  associée au mode à sa fréquence de coupure est également infinie. En conséquence, ces ondes ne peuvent en réalité pas exister ; elles apparaissent toutefois comme des solutions du problème de propagation des ondes planes à cause du caractère infini de la structure supposé pour la formulation de celui-ci.

Cependant, la longueur d'onde comme la vitesse de phase prennent des valeurs finies aux fréquences autour de cette fréquence de coupure, et les modes associés peuvent tout à fait être observés dans un cadre expérimental. De plus, on verra que ces fréquences particulières peuvent être utilisées pour caler les paramètres d'un modèle de plaque (voir chapitre II).

### I.4.1 Formulation

L'hypothèse d'un vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  nul entraîne la nullité des dérivées partielles dans le plan :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} = 0 \quad (\text{I.4.1})$$

En conséquence, le champ de déformation est de la forme :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{I.4.2})$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = u_{\alpha,3} \quad (\text{I.4.3})$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} \quad (\text{I.4.4})$$

Les matériaux composant la plaque sont considérés monocliniques (voir annexe B.1, expression (B.1.16)) ; le champ de contraintes devient donc :

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta 33} \varepsilon_{33} = C_{\alpha\beta 33} u_{3,3} \quad (\text{I.4.5})$$

$$\sigma_{\alpha 3} = 2C_{\alpha 3 33} \varepsilon_{\alpha 3} = C_{\alpha 3 33} u_{\alpha,3} \quad (\text{I.4.6})$$

$$\sigma_{33} = C_{33 33} \varepsilon_{33} = C_{33 33} u_{3,3} \quad (\text{I.4.7})$$

Les dérivées spatiales dans le plan étant nulles, les équations d'équilibre se réduisent, en régime harmonique permanent, à l'expression suivante :

$$\sigma_{i3,3} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (\text{I.4.8})$$

La mise en relation des équations ci-dessus permet d'aboutir à la formulation du problème suivant.

**Definition I.4.1** (Équations du problème). *Les fréquences de coupure  $f = 2\pi\omega$  associées aux modes d'ordre supérieur dans une plaque composée de  $N$  couches monocliniques homogènes sont les solutions du problème suivant :*

$$3N \text{ équations du mouvement, } x_3 \in [z_{n-1}, z_n] : \quad (I.4.9)$$

$$C_{\alpha 3 \beta 3}^n u_{\beta, 33}^n - \rho_n \omega^2 u_{\alpha}^n = 0 \quad (I.4.9)$$

$$C_{3333}^n u_{3, 33}^n - \rho_n \omega^2 u_3^n = 0 \quad (I.4.10)$$

$$6(N-1) \text{ équations de continuité, } x_3 = z_n : \quad (I.4.11)$$

$$C_{\alpha 3 \beta 3}^n u_{\beta, 3}^n = C_{\alpha 3 \beta 3}^{n+1} u_{\beta, 3}^{n+1} \quad (I.4.11)$$

$$C_{3333}^n u_{3, 3}^n = C_{3333}^{n+1} u_{3, 3}^{n+1} \quad (I.4.12)$$

$$u_{i, 3}^n = u_{i, 3}^{n+1} \quad (I.4.13)$$

$$6 \text{ conditions aux limites :} \quad (I.4.14)$$

$$C_{\alpha 3 \beta 3}^1 u_{\beta, 3}^1(z_0) = C_{3333}^1 u_{3, 3}^1(z_0) = 0 \quad (I.4.14)$$

$$C_{\alpha 3 \beta 3}^N u_{\beta, 3}^N(z_N) = C_{3333}^N u_{3, 3}^N(z_N) = 0 \quad (I.4.15)$$

où les positions des  $N+1$  interfaces sont notées  $z_n$ .

On remarque que seules les propriétés hors-plan (compression  $C_{3333}$  et cisaillement  $C_{\alpha 3 \beta 3}$ ) des matériaux entrent en compte dans le problème. Les équations portant sur la troisième composante du déplacement  $u_3$  sont également découplées des autres équations.

## I.4.2 Résolution dans le cas orthotrope

On s'intéresse dans ce qui suit à donner les équations caractéristiques permettant de déterminer les fréquences de coupure de façon analytique. Pour cela, on se limite à partir de maintenant au cas de matériaux orthotropes ; en conséquence, les composantes de couplage en cisaillement transverse sont nulles (pour  $\alpha \neq \beta$ ,  $C_{\alpha 3 \beta 3} = 0$ ).

Le problème ci-dessus devient alors un système différentiel *diagonal* : toutes les équations du mouvement sont découplées, et les conditions aux interfaces n'introduisent pas de couplage. De plus, on remarque que le problème est identique pour toutes les composantes du déplacement  $u_i$ .

Dans chaque couche, la résolution des équations du mouvement homogènes donnent la forme du déplacement  $\underline{u}^n$  suivante :

$$u_i^n = a_{1,n}^i e^{i k_{i3}^n x_3} + a_{2,n}^i e^{-i k_{i3}^n x_3} \quad (I.4.16)$$

où  $k_{i3}^n = \omega/c_{i3}^n$ , avec  $c_{i3}^n = \sqrt{C_{i3i3}^n/\rho_n}$  la vitesse de cisaillement élémentaire dans la couche  $n$  (voir (I.2.9)).

Les  $2N$  amplitudes  $\mathbf{a}_n^i = {}^T[a_{1,n}^i \ a_{2,n}^i]$  sont déterminées par les  $2N$  conditions aux limites associées à la  $i^{\text{ème}}$  composante du déplacement. On pose alors  $\mathbf{q}_{n,p}^i$  et  $\mathbf{w}_{n,p}^i$  les vecteurs respectivement associés aux contraintes et en déplacements dans la couche  $n$  au niveau de la  $p^{\text{ème}}$  interface, tels que :  ${}^T\mathbf{q}_{n,p}^i \mathbf{a}_n^i = \sigma_{i3}^n(z_p)$  et  ${}^T\mathbf{w}_{n,p}^i \mathbf{a}_n^i = u_i^n(z_p)$ . Ces vecteurs sont de la forme :

$${}^T\mathbf{q}_{n,p}^i = \begin{bmatrix} i k_{i3}^n C_{i3i3}^n e^{i k_{i3}^n z_p} & -i k_{i3}^n C_{i3i3}^n e^{-i k_{i3}^n z_p} \end{bmatrix} \quad (I.4.17)$$

$${}^T\mathbf{w}_{n,p}^i = \begin{bmatrix} e^{i k_{i3}^n z_p} & e^{-i k_{i3}^n z_p} \end{bmatrix} \quad (I.4.18)$$

Les  $2N$  conditions aux limites sont alors utilisées pour former le système suivant :

$$\begin{aligned} {}^T \mathbf{X}^i \mathbf{a}^i &= \mathbf{0} \\ {}^T \mathbf{a}^i &= [{}^T a_1^i \dots {}^T a_N^i] \\ \mathbf{X}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,0}^i & \mathbf{w}_{1,1}^i & \mathbf{q}_{1,1}^i & & & & & & & \\ & \mathbf{w}_{2,1}^i & \mathbf{q}_{2,1}^i & \mathbf{w}_{2,2}^i & \mathbf{q}_{2,2}^i & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \mathbf{w}_{N-1,N-2}^i & \mathbf{q}_{N-1,N-2}^i & & \\ & & & & & & & \mathbf{w}_{N-1,N-1}^i & \mathbf{q}_{N-1,N-1}^i & \\ & & & & & & & \mathbf{w}_{N,N-1}^i & \mathbf{q}_{N,N-1}^i & \mathbf{q}_{N,N}^i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.4.19})$$

Les fréquences de coupure  $f = 2\pi\omega$  sont finalement recherchées comme les fréquences qui annulent le déterminant de  $\mathbf{X}^i$ . La recherche opérationnelle de ces racines, pour des plaques stratifiées quelconques, est toutefois complexe ; la matrice  $\mathbf{X}^i$  dépend en effet non linéairement de la pulsation  $\omega$  (termes exponentiels).

On donne dans ce qui suit le résultat analytique correspondant aux cas élémentaires d'une plaque homogène et d'un sandwich symétrique.

### I.4.3 Plaque homogène

Dans le cas de la plaque homogène  $N = 1$  d'épaisseur  $h$ , seules 2 conditions aux limites doivent être respectées (faces supérieure et inférieure libre). Le système du type (I.4.19) formé par celles ci devient :

$$\begin{bmatrix} e^{i k_{i3} h/2} & -e^{-i k_{i3} h/2} \\ -e^{-i k_{i3} h/2} & e^{i k_{i3} h/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.20})$$

L'annulation du déterminant de la matrice caractéristique impose :

$$\sin(k_{i3} h) = 0 \quad (\text{I.4.21})$$

Ce qui, sachant  $k_{i3} = \omega/c_{i3}$ , permet de déduire les fréquences de coupure.

**Proposition I.4.1** (Plaques homogènes). *Dans une plaque homogène d'épaisseur  $h$  composée d'un matériau orthotrope, la fréquence  $f_n^i$  de coupure du  $n^{\text{ième}}$  mode d'ordre supérieur associé à la  $i^{\text{ième}}$  composante du déplacement  $u_i$  s'exprime comme suit :*

$$f_n^i = \frac{n}{2h} c_{i3} \quad (\text{I.4.22})$$

où  $c_{i3}$  est la vitesse de phase associée aux ondes élémentaires dans le matériau considéré infini (voir définition I.2.2).

*Remarque I.4.1.* Dans le cas du matériau isotrope, on retrouve bien le résultat  $F_n = f_n \times h/c = n/2$  (équations I.2.35 et I.2.36) donné par les équations de Lamb (I.2.31).

### I.4.4 Plaque sandwich symétrique

On considère maintenant le cas d'une plaque sandwich symétrique, composée de matériaux orthotropes. Un schéma de ce type de plaque est représenté sur la figure I.5. Typiquement, un sandwich est composé de deux peaux raides et minces d'épaisseur  $h_p$  (aluminium, renfort

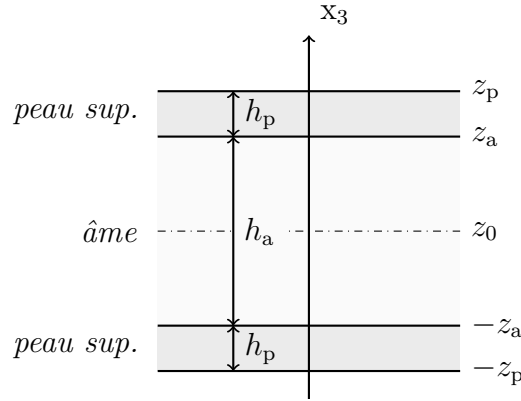


FIGURE I.5 – Vue schématique d'une structure sandwich symétrique.

fibreuse, etc.), et d'un cœur (ou *âme*) d'épaisseur  $h_a$  ; celle-ci est constituée d'un matériau souple (mousse, nid d'abeille). Les interfaces peaux/âme et peaux/vide sont respectivement notées  $z_a = h_a/2$  et  $z_p = h/2 = h_a/2 + h_p$ . Le matériau d'âme est en règle générale choisi beaucoup plus léger et souple que le matériau des peaux.

Les structures sandwichs sont des plaques composites très appréciées pour leur raideur spécifique en flexion très élevée (elle est pilotée par la raideur des peaux). Toutefois, ces structures sont très sujettes au cisaillement transverse dans l'âme, dont les effets sont influents, lorsque la longueur d'onde diminue, plus vite que dans le cas des plaques homogènes. Ces effets entraînent une perte de raideur apparente ainsi qu'une augmentation de l'amortissement équivalent.

La prise en compte des effets du cisaillement transverse dans les modèles réduits de plaque n'est pas toujours aisée. Il est peut donc être intéressant de disposer d'un indicateur, permettant de quantifier l'impact de l'inhomogénéité des propriétés mécaniques dans l'épaisseur sur la raideur équivalente en cisaillement transverse de la plaque. On propose donc ici comme indicateur la fréquence de coupure des modes d'ordre supérieur associés à ces effets.

La structure étant symétrique, on peut diviser les modes guidés en deux catégories : les modes *symétriques* et les modes *antisymétriques*. Cette catégorisation présente l'avantage de réduire la taille du système d'équations à résoudre (I.4.19) en diminuant le nombre de conditions aux interfaces à respecter. En effet, seule la moitié de la structure peut être prise en compte, en ajoutant une condition supplémentaire sur la fibre neutre (en  $x_3 = z_0 = 0$ ). De plus, deux équations caractéristiques indépendantes sont obtenues, permettant de donner les fréquences de coupure liées à chaque type de mode indépendamment.

#### I.4.4.1 Modes symétriques

Les modes symétriques sont caractérisés par une dérivée du champ de déplacement nulle au niveau de la fibre neutre ; en conséquence, les équations aux interfaces à respecter sont :

$$\text{face supérieure libre :} \quad C_{i3i3}^a u_{i,3}^p(z_p) = 0 \quad (\text{I.4.23})$$

$$\text{continuité peau/âme :} \quad C_{i3i3}^p u_{i,3}^p(z_a) = C_{i3i3}^a u_{i,3}^a(z_a) \quad (\text{I.4.24})$$

$$u_i^p(z_a) = u_i^a(z_a) \quad (\text{I.4.25})$$

$$\text{symétrie :} \quad u_{i,3}^a(z_0) = 0 \quad (\text{I.4.26})$$

où  $\underline{u}^p$  et  $\underline{u}^a$  sont les champs de déplacement dans la peau supérieure et l'âme.

En utilisant le formalisme introduit aux équations (I.4.19), les solutions des équations ci-dessus, exprimées sur la composante  $u_i$  du déplacement, annulent le déterminant de la matrice  $\mathbf{X}_{\text{sym}}^i$  de taille  $4 \times 4$  suivante :

$$\mathbf{X}_{\text{sym}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{p,p}^i & \mathbf{w}_{p,a}^i & \mathbf{q}_{p,a}^i & \\ & \mathbf{w}_{a,a}^i & \mathbf{q}_{a,a}^i & \mathbf{q}_{a,0}^i \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.27})$$

L'annulation du déterminant de cette matrice permet de dériver l'équation caractéristique à résoudre pour trouver les fréquences de coupure des modes d'ordre supérieur symétriques.

**Proposition I.4.2** (Plaques sandwiches, modes symétriques). *Les fréquences de coupure  $f = 2\pi\omega$  des modes d'ordre supérieurs symétriques caractéristiques d'une plaque sandwich orthotrope et associés à la composante  $u_i$  du déplacement sont données par l'équation caractéristique suivante :*

$$\tan\left(\omega \frac{h_a}{2c_{i3}^a}\right) = - \left(\frac{c_{i3}^p \rho_p}{c_{i3}^a \rho_a}\right) \tan\left(\omega \frac{h_p}{c_{i3}^p}\right) \quad (\text{I.4.28})$$

où les  $c_{i3}^a$  et  $c_{i3}^p$  sont les vitesses de phase associées aux ondes élémentaires dans l'âme et les peaux (voir définition I.2.2).

Les peaux d'une plaque sandwich sont en général choisies plus minces, raides et denses que l'âme. En conséquence, on a  $h_a/c_{i3}^a \gg h_p/c_{i3}^p$ . On peut alors considérer, pour les premiers modes symétriques, que  $\omega h_p/c_{i3}^p \ll \pi/2$ . La tangente associée au terme de droite prend donc des valeurs très faibles. En conséquence, on peut considérer à l'ordre dominant que le membre de droite est proche de zéro, ce qui implique  $\omega_n h_a/(2c_{i3}^a) = n\pi + \epsilon$ . On linéarise alors la tangente associée au terme de droite autour de 0 et celle associée au terme de gauche autour de  $n\pi$  :

$$\tan\left(\omega_n \frac{h_p}{c_{i3}^p}\right) \approx \omega_n \frac{h_p}{c_{i3}^p} \quad (\text{I.4.29})$$

$$\tan\left(\omega_n \frac{h_a}{2c_{i3}^a} - n\pi\right) \approx \omega_n \frac{h_a}{2c_{i3}^a} - n\pi \quad (\text{I.4.30})$$

Ce qui permet de déduire le résultat approximatif suivant.

**Proposition I.4.3.** *La fréquence de coupure  $f_n^i$  associée au  $n^{\text{ième}}$  mode symétrique caractéristique d'une plaque sandwich peut être approximée par l'expression suivante, lorsque l'épaisseur des peaux  $h_p$  est faible :*

$$f_n^i \approx \frac{nc_{i3}^a}{h_a} \left( \frac{2h_p \rho_p}{h_a \rho_a} + 1 \right)^{-1} \quad (\text{I.4.31})$$

On remarque qu'au premier ordre, la fréquence de coupure des modes symétriques d'une plaque sandwich correspond à celle de l'âme seule corrigée par un terme d'inertie, liée à la densité des peaux. Celui-ci tend d'ailleurs vers 1 quand l'épaisseur des peaux  $h_p$  tend vers 0 (à masses volumiques fixées) ; on retrouve alors le cas de la plaque homogène.

### I.4.4.2 Modes antisymétriques

Le deuxième type de mode caractérisant une plaque sandwich symétrique sont les modes antisymétriques. Ceux-ci sont caractérisés par un champ de déplacement nul au niveau de la fibre neutre. Les équations aux limites sont donc :

$$\text{face supérieure libre :} \quad C_{i3i3}^a u_{i,3}^p(z_p) = 0 \quad (\text{I.4.32})$$

$$\text{continuité peau/âme :} \quad C_{i3i3}^p u_{i,3}^p(z_a) = C_{i3i3}^a u_{i,3}^a(z_a) \quad (\text{I.4.33})$$

$$u_i^p(z_a) = u_i^a(z_a) \quad (\text{I.4.34})$$

$$\text{déplacement nul sur la fibre neutre :} \quad u_i^a(z_0) = 0 \quad (\text{I.4.35})$$

On utilise de nouveau le formalisme introduit aux équations (I.4.19). Les pulsations de coupure des modes d'ordre supérieurs d'une plaque sandwich orthotrope associées à la  $i^{\text{ème}}$  composante du déplacement annulent le déterminant de la matrice  $\mathbf{X}_{\text{antisym}}^i$  de taille  $4 \times 4$  suivante :

$$\mathbf{X}_{\text{sym}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{p,p}^i & \mathbf{w}_{p,a}^i & \mathbf{q}_{p,a}^i & \\ & \mathbf{w}_{a,a}^i & \mathbf{q}_{a,a}^i & \mathbf{w}_{a,0}^i \end{bmatrix} \quad (\text{I.4.36})$$

On obtient alors l'équation caractéristique suivante.

**Proposition I.4.4** (Plaques sandwichs, modes antisymétriques). *Les fréquences de coupure  $f = 2\pi\omega$  des modes d'ordre supérieurs antisymétriques caractéristiques d'une plaque sandwich orthotrope et associés à la composante  $u_i$  du déplacement sont données par l'équation caractéristique suivante :*

$$\tan\left(\omega \frac{h_a}{2c_{i3}^a}\right) \tan\left(\omega \frac{h_p}{c_{i3}^p}\right) = \left(\frac{c_{i3}^a \rho_a}{c_{i3}^p \rho_p}\right) \quad (\text{I.4.37})$$

où les  $c_{i3}^a$  et  $c_{i3}^p$  sont les vitesses de phase associées aux ondes élémentaires dans l'âme et les peaux (voir définition I.2.2).

Lorsque le contraste des propriétés mécaniques entre l'âme et les peaux est fort, le terme  $(c_{i3}^a \rho_a)/(c_{i3}^p \rho_p)$  devient petit. En faisant l'hypothèse que les termes dans les tangentes restent petits également, on peut linéariser celles-ci, de façon analogue au cas des modes symétriques. On obtient alors l'équation du second degré en  $\omega_n$  suivant :

$$\frac{h_a}{2c_a} \frac{h_p}{c_p} \omega_n^2 - n\pi \frac{h_p}{c_p} \omega_n = \frac{c_a \rho_a}{c_p \rho_p} \quad (\text{I.4.38})$$

Cette équation a donc deux solutions : une seule est réelle.

**Proposition I.4.5.** *La fréquence de coupure  $f_n^i$  associée au  $n^{\text{ème}}$  mode antisymétrique caractéristique d'une plaque sandwich peut être approximée par l'expression suivante, lorsque le contraste des propriétés mécaniques est fort :*

$$\begin{aligned} n = 0 \quad & f_0^i = \frac{c_{i3}^a}{2h_a} \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \frac{h_a \rho_a}{h_p \rho_p}} \\ n > 0 \quad & f_n^i = \frac{n}{2h_a} c_{i3}^a \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2 \pi^2} \frac{h_a \rho_a}{h_p \rho_p}} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.4.39})$$



*Remarque I.4.2 (Validité).* Pour dériver l'approximation ci-dessus, on a supposé que les *deux* tangentes de l'équation (I.4.37) prenaient des valeurs proches de zéro. On remarque que si  $h_p$  tend vers 0, alors les approximations ci-dessus sont indéfinies; en effet, dans ce cas la tangente associée à  $\omega h_a/(2c_a)$  dans l'équation caractéristique doit prendre des valeurs élevées. La linéarisation de celle-ci ne suffit donc plus; il faudrait en l'occurrence augmenter l'ordre du développement limité pour obtenir une meilleure approximation.

Dans cette section a été formulé le problème qui correspond à la recherche des fréquences de coupure des modes d'ordre supérieur dans une plaque multicouche composée de plis monocliniques. A ces fréquences particulières ces modes passent d'un régime évanescent à un régime propagatif; ils entrent donc en compte dans les mécanismes de transport de l'information mécanique.

Pour le cas des plaques homogènes orthotropes et des structures sandwichs symétriques orthotropes, les équations caractéristiques associées à la détermination de ces fréquences de coupure ont été dérivées analytiquement. dans le cas du sandwich, on a donné des solutions approximatives, en faisant des hypothèses sur le contraste des propriétés mécaniques entre les peaux et l'âme.

La connaissance de ces fréquences particulières permet de donner des indications sur le comportement de la structure; en particulier, elles permettent de prédire la présence de modes d'ordre supérieur dans une réponse de plaque mesurée sur un domaine fréquentiel donné, sachant les propriétés mécaniques de la structure. On verra également qu'elles permettent de proposer une correction du comportement de modèles réduits de plaque (voir chapitre II), en donnant des informations sur les mécanismes mis en jeu.

## I.5 Résolution par elements finis spectraux

Cette partie concerne l'implémentation de schémas de résolution adaptés à l'étude de la propagation des ondes planes dans les structures élancées. Tout d'abord, on donne une revue des différentes méthodes qu'il est possible de trouver dans la littérature. Ensuite, deux schémas utilisant les élément finis spectraux sont proposés ; l'un est adapté à la recherche des modes guidés dans les plaques multicouches composées de matériaux monocliniques viscoélastiques ; l'autre permet de calculer les modes guidés de poutres de section quelconque, dont les matériaux constitutifs sont orthotropes viscoélastiques. La méthode utilisée pour calculer les vecteurs d'onde solutions à une fréquence donnée est explicitée. Le calcul des différentes vitesses caractéristiques est développé. Enfin, on propose une méthode permettant la résolution du problème prenant en compte le couplage acoustique dans le cas des guides d'onde plans.

### I.5.1 Revue bibliographique

#### I.5.1.1 Formulation forte

De nombreuses méthodes de résolution basées sur la formulation forte ont été proposées pour la résolution du problème de propagation des ondes dans les plaques multicouches (I.3.2). Dans le cas des guides d'onde uniaxiaux, l'aspect bidimensionnel du problème à résoudre rend l'utilisation de la formulation forte compliquée. Même si certains résultats ont été proposés [110], c'est globalement la formulation faible qui est retenue pour ce type de guides d'onde. On ne s'intéresse donc dans ce paragraphe qu'au cas des guides d'ondes plans.

Trois méthodes de résolution peuvent être trouvées dans la littérature. Elles partent toutes de l'expression des équations de Christoffel (I.2.4) dans chaque couche composant le guide d'onde. La résolution de ces équation permet de former une base de solutions (I.2.21). Le problème aux limites ensuite associé aux conditions de continuité aux interfaces (I.3.3) est alors résolu par la construction d'un système linéaire portant sur les amplitudes liées à chaque solution de base. Finalement, les trois méthodes présentées ici se distinguent uniquement par la forme du système linéaire à résoudre. Précisons que le système donné par les conditions aux interfaces est linéaire *pour les amplitudes*. Pour ce qui concerne sa dépendance en fonction du vecteur d'onde, elle est fortement non-linéaire (présence de termes exponentiels imaginaires et réels).

**Transfer matrix** La méthode *transfer matrix* est introduite la première fois par Thomson en 1950 [219]. L'idée est d'exprimer les différentes conditions aux limites sous la forme d'une fonction de transfert.

Les conditions de continuité sur les faces supérieure et inférieure de la couche  $n$  sont exprimées de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^n) \\ \underline{\Sigma}(\mathbf{x}_3^n) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^{n-1}) \\ \underline{\Sigma}(\mathbf{x}_3^{n-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.1})$$

où  $\underline{\Sigma} = {}^T[\Sigma_{13} \ \Sigma_{23} \ \Sigma_{33}]$  et  $\mathbf{A}^n$  est la matrice de transfert de la couche donnée par les équations de Christoffel. Il est alors possible de donner la relation de transfert qui lie les faces inférieure et supérieure du stratifié :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^N) \\ \underline{\mathbf{T}}^+ \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^0) \\ \underline{\mathbf{T}}^- \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \prod_{n=1}^N \mathbf{A}^n \quad (\text{I.5.2})$$

Par le choix des vecteurs contraintes  $\underline{\mathbf{T}}$ , une variété de problèmes peuvent être étudiés, comme le couplage fluide-structure (nullité des contraintes de cisaillement à l'interface), le couplage avec un solide semi-infini ou encore l'étude de délaminations.

Les premières implémentations de la méthode *transfer matrix* effectuées par Haskell en 1953 [85] ont toutefois montré une forte instabilité numérique de la méthode. En effet, le conditionnement de la matrice de transfert  $\mathbf{A}$  se dégrade grandement avec l'augmentation du produit fréquence-épaisseur  $\omega(\mathbf{x}_3^N - \mathbf{x}_3^0)$ , rendant la méthode inutilisable. Les termes exponentiels contenus dans la diagonale de cette matrice sont responsables de ce mauvais conditionnement. Quelques propositions ultérieures [196],[197], introduisant des coordonnées locales, ont tout de même pu améliorer le conditionnement de la méthode.

**Stiffness Matrix** Face aux difficultés de conditionnement rencontrées par la méthode *transfer matrix*, Wang et Rokhlin [237], [183] proposent dans les années 2000 une formulation modifiée, qui permet de s'affranchir des termes exponentiels des diagonales dans les matrices de transfert  $\mathbf{A}^n$ .

Cette re-formulation consiste à ré-écrire les relations déplacement-contraintes dans la couche  $n$  sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{\Sigma}(\mathbf{x}_3^n) \\ \underline{\Sigma}(\mathbf{x}_3^{n-1}) \end{bmatrix} = \mathbf{B}^n \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^n) \\ \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^{n-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.3})$$

Une matrice de *raideur*  $\mathbf{K}$  liant les contraintes aux déplacements est construite par récursion sur la base des équations de continuité :

$$\mathbf{K}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{n-1} + \mathbf{B}_{12}^{n-1} (\mathbf{B}_{11}^n - \mathbf{B}_{22}^{n-1}) \mathbf{B}_{21}^{n-1} & -\mathbf{B}_{12}^{n-1} \mathbf{B}_{12}^n (\mathbf{B}_{11}^n - \mathbf{B}_{22}^{n-1}) \\ \mathbf{B}_{21}^{n-1} \mathbf{B}_{21}^n (\mathbf{B}_{11}^n - \mathbf{B}_{22}^{n-1}) & \mathbf{B}_{22}^{n-1} + \mathbf{B}_{21}^{n-1} (\mathbf{B}_{11}^n - \mathbf{B}_{22}^{n-1}) \mathbf{B}_{12}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.4})$$

où  $\mathbf{K}^n$  représente la matrice de raideur liée aux  $n$  premières couches. Il est alors possible d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}^+ \\ \underline{\mathbf{T}}^- \end{bmatrix} = \mathbf{K}^N \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^N) \\ \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^0) \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.5})$$

Par rapport à la matrice de transfert  $\mathbf{A}$ , la nouvelle formulation utilisant  $\mathbf{K}^N$  est mieux conditionnée. Comme dans la méthode précédente, de nombreux cas d'étude sont possibles.

**Global transfer matrix** La méthode de *matrice de transfert globale* est une approche différente qui a été proposée par Nayfeh en 1991 [147].

Ici, les équations de continuité aux interfaces sont concaténées pour former un grand système d'équations, qui possède un bon conditionnement :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(\mathbf{x}_3^n) &= \mathbf{Q}_n^+ \mathbf{a}^n = \mathbf{Q}_{(n+1)}^- \mathbf{a}^{(n+1)} \\ \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3^n) &= \mathbf{P}_n^+ \mathbf{a}^n = \mathbf{P}_{(n+1)}^- \mathbf{a}^{(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^- \\ \mathbf{Q}_1^+ & -\mathbf{Q}_2^- \\ \mathbf{P}_1^+ & -\mathbf{P}_2^- \\ & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ & & & \mathbf{Q}_{N-1}^+ & -\mathbf{Q}_N^- \\ & & & \mathbf{P}_{N-1}^+ & -\mathbf{P}_N^- \\ & & & & \mathbf{Q}_N^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \dots \\ \mathbf{a}^{N-1} \\ \mathbf{a}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}^- \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{\mathbf{T}}^+ \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.6})$$

où  $\mathbf{Q}_n^\pm$  et  $\mathbf{P}_n^\pm$  et les amplitudes  $\mathbf{a}^n$  peuvent être identifiés terme à terme à partir de l'expression des champs de contrainte (I.2.20) et de déplacement (I.2.21). L'inversion du système ainsi construit permet de retrouver les amplitudes  $\mathbf{a}$  pour reconstruire la fonction de polarisation  $\mathbf{U}$ .

Cette formulation, stable, possède cependant l'inconvénient d'exprimer un système dont la taille dépend du nombre de couches [93]. Cela peut rendre la recherche des solutions fastidieuse. Pour cette raison, la méthode *stiffness matrix* est souvent préférée.

Les trois méthodes présentées forment donc un système linéaire portant sur les amplitudes  $\mathbf{a}^n$  des six solutions de base présentes dans chaque couche : on retrouve ces amplitudes dans les vecteurs contraintes et déplacement. Elles sont donc bien adaptées à l'étude du régime forcé : une onde incidente de vecteur d'onde et pulsation connus est supposée. La partie plane du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , donnée constante par la loi de Snell-Descartes, est donc fixée. L'onde incidente est responsable de vecteurs contraintes  $\mathbf{T}$  et déplacements  $\mathbf{U}$  non nuls sur une ou plusieurs interfaces ; la réponse de la plaque à cette sollicitation peut donc être déterminée. L'inversion du système linéaire portant sur les amplitudes permet finalement de reconstruire le champ de déplacement. En conséquence, ce type de méthode est utilisé dans le cadre de méthodes de caractérisation ultrasonores qui impliquent la mesure de coefficients de réflexion et de transmission de plaques multicouches anisotropes viscoélastiques [95, 96]. Ces méthodes sont également utilisées dans le cadre de la technologie *UPS* (pour *Ultrasonic Polar Scan*) [105].

Toutefois, la recherche des modes d'ondes guidées à l'aide de ces méthodes est compliquée. En effet, dans ce cas le vecteur d'onde et/ou la pulsation sont inconnus au départ. De plus, ces ondes sont caractérisées par des vecteurs contrainte  $\mathbf{T}$  nuls sur les faces inférieures et supérieures. En conséquence, les modes d'ondes guidées sont les solutions qui rendent *singulier* le système portant sur les amplitudes. Ce système, linéaire sur les amplitudes, est très non-linéaire en ce qui concerne sa dépendance au vecteur d'onde et à la pulsation (présence de termes exponentiels imaginaires et réels). En conséquence, la recherche des solutions implique des méthodes de recherche de racines [58], [47]. L'espace de recherche étant conséquent (le vecteur d'onde possède jusqu'à deux composantes réelles et deux composantes imaginaires), le coût en calculs peut devenir important. De plus, l'observation du diagramme des ondes de Lamb représenté sur la figure I.4 permet d'imaginer la difficulté qu'implique la recherche des racines (i.e. nombreux minima locaux, croisement des branches) ; le cas à résoudre ici étant bien plus complexe (stratification, anisotropie, pertes...).

### I.5.1.2 Formulation faible

En 1972, Dong et Nelson [67] développent une nouvelle formulation adaptée à la résolution du problème de propagation d'ondes planes dans les plaques, nommée *extended Ritz method* ; elle peut aujourd'hui être plus particulièrement identifiée à une méthode type éléments finis. L'idée est en effet de diviser chaque couche d'une plaque stratifiée en sous-couches virtuelles dans lesquelles la forme du champ de déplacement est postulée sur la base de fonctions de  $x_3$  *cinématiquement admissibles* (respectant les conditions de continuité du déplacement). En écrivant les équations de Lagrange sur la base des amplitudes de ces fonctions, le problème de recherche des modes de Lamb devient un problème aux valeurs propres polynomial en  $\mathbf{k}$  et  $\omega$ .

Dong et Nelson utilisent tout d'abord des fonctions de forme quadratiques par sous-couches. Sous l'hypothèse des contraintes planes, les auteurs se limitent à l'étude des ondes polarisées selon le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , celui-ci correspondant également à un plan de symétrie du matériau. Le problème aux valeurs propres ainsi formulé est linéaire en le carré de la fréquence : pour un vecteur d'onde donné, les solutions du problème sont les fréquences (valeurs propres) auxquelles

des ondes planes correspondant à certaines fonctions de polarisation (vecteurs propres) peuvent se propager. Dans la proposition originale, une démarche itérative est proposée, consistant à affiner la discrétisation (nombre de sous-couches) jusqu'à la convergence des résultats. En 1973, une formulation modifiée est proposée [148], comprenant une réduction de modèle ; quelques résultats sur la distribution des contraintes sont illustrés. Le calcul de la vitesse de groupe (I.1.19) est proposé par l'estimation locale par différences finies de la dérivée de  $\omega$  par rapport à  $\mathbf{k}$ . En 1988, Datta et al. [62] utilisent des fonctions de forme cubiques. Ils s'intéressent également les ondes impliquant des déformations hors-plan, mais toujours découplées des ondes dans le plan. En 2000, Xi et al. [241] généralisent la méthode aux déplacements, contraintes et déformations 3D, pour les plaques et les cylindres.

En 2004, Shorter [202] développe une approche éléments finis sur la base de fonctions de forme linéaires, nommée *SFEM* (pour *Spectral Finite Element Method*). Il se limite aux stratifiés formés de couches isotropes. Par une transformation matricielle, il obtient un problème aux valeurs propres linéaire en le nombre d'onde  $k$  (pour une direction de propagation de l'onde donnée). Les aspects liés au comportement viscoélastique sont traités dans son travail par la méthode MSE (*Modal Strain Energy*, voir annexe B.2, expression (B.2.57)) : le calcul du nombre d'onde est effectué à partir de la loi de comportement élastique réelle. Ensuite, l'estimation d'un facteur de pertes lié à l'onde est donnée par projection de la partie imaginaire du tenseur opérationnel sur les vecteurs propres du résultat conservatif.

En 2006, Bartoli et al. [21] étendent la méthode à l'orthotropie en incluant le comportement visqueux directement dans le problème, et se focalisent sur l'influence de ce dernier. En 2009, Barbieri et al. [20] étudient l'influence de la direction de propagation, dans l'idée d'améliorer la prédiction des paramètres de la SEA (*Statistical Energy Analysis*, l'équivalent de la théorie de Sabine pour les structures), mais n'étudient pas l'amortissement.

En 2012, Leleux [4] implémente l'équation d'onde dans *COMSOL Multiphysics*. Le calcul est directement réalisé dans le domaine complexe à partir du tenseur opérationnel. La partie imaginaire de ce dernier est alors supposée isotrope et constante dans l'épaisseur. Il renomme cette méthode *SAFE* (*Semi Analytical Finite Elements*).

On peut trouver une comparaison entre les méthodes reposant sur la formulation forte explicitées plus haut (transfer matrix, stiffness matrix et global transfer matrix) et la formulation faible dans [49].

Il est également important de noter que l'étude de la propagation des ondes planes n'est pas limitée aux structures invariantes selon la direction de propagation de l'onde, mais que certains travaux portent sur la résolution de ce problème dans les milieux périodiques. Mace, Duhamel et Brennan [68] [131] généralisent la *SFEM* aux structures périodiques. La méthode étendue, *WFEM* pour *Wave Finite Element Method*, est basée sur le post-traitement des résultats d'un calcul éléments finis classique, effectués sur une cellule élémentaire. Des guides d'onde très complexes peuvent alors être étudiés avec l'aide de solveurs efficaces.

Les paragraphes suivants présentent les schémas de résolution utilisant les éléments finis spectraux implémentés dans le cadre de ce travail. La méthode *SFEM* est généralisée aux plaques anisotropiques viscoélastiques composées de plis viscoélastiques monocliniques. Le tenseur opérationnel complexe est utilisé pour le calcul des nombre d'ondes solutions ; les modes ainsi obtenus prennent donc en compte les effets de couplage dus à d'éventuels mécanismes de pertes. Une version différente de la transformation introduite par Shorter [202] pour transformer le problème linéaire en  $\omega^2$  en un problème quadratique en  $k$  est proposée ; celle-ci exprime le problème sur la base de matrices purement réelles lorsque les matériaux constitutifs sont conservatifs.

### I.5.2 Implémentations proposées

Dans ce qui suit, on décrit rapidement l'implémentation d'éléments finis spectraux réalisée. Le choix de fonctions de forme permet de calculer les opérateurs de masse et de raideur généralisées  $\mathbf{M}$  (I.3.14) et  $\mathbf{K}$  (I.3.15) intervenant dans la formulation forte du problème de propagation dans les guides d'onde (I.3.13). A chaque fois, une décomposition de la matrice de raideur en matrices élémentaires est donnée, qui met en lumière les différents couplages et le rôle des différentes composantes du tenseur opérationnel local  $\underline{\mathbf{C}}$ . Les implémentations proposées sont détaillées en annexe F.

#### I.5.2.1 Cas des stratifiés anisotropes viscoélastiques

Le modèle développé pour calculer les solutions d'ondes planes dans les plaques multicouches utilise des éléments linéaires par morceaux. Dans chaque élément  $e$ , les propriétés matériau  $\rho^e$  et  $\underline{\mathbf{C}}^e$  sont considérées constantes. Le matériau est supposé monoclinique (annexe B.2, expression (B.1.16)), ce qui reste tout à fait général pour l'application visée. Ainsi, il est possible de modéliser des plaques multicouches composées de matériaux orthotropes viscoélastiques, orientés dans des directions quelconques.

L'implémentation du modèle ainsi que la forme des différents opérateurs est détaillée en annexe F.1. On note en particulier la décomposition suivante de l'opérateur de raideur généralisée lié à un élément.

**Definition I.5.1** (Décomposition de l'opérateur de raideur élémentaire). *On peut exprimer l'opérateur de raideur généralisée liée à l'élément  $e$  sous la forme décomposée suivante :*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e(\mathbf{k}) = & \frac{1}{h_e} \left( C_{33}^e \mathbf{K}_{33}^{e,00} + C_{44}^e \mathbf{K}_{44}^{e,00} + C_{55}^e \mathbf{K}_{55}^{e,00} + C_{45}^e \mathbf{K}_{45}^{e,00} \right) \\ & + i k_1 \left( C_{13}^e \mathbf{K}_{13}^{e,10} + C_{36}^e \mathbf{K}_{36}^{e,10} + C_{55}^e \mathbf{K}_{55}^{e,10} + C_{45}^e \mathbf{K}_{45}^{e,10} \right) \\ & + i k_2 \left( C_{23}^e \mathbf{K}_{23}^{e,01} + C_{36}^e \mathbf{K}_{36}^{e,01} + C_{44}^e \mathbf{K}_{44}^{e,01} + C_{45}^e \mathbf{K}_{45}^{e,01} \right) \\ & + h_e k_1 k_2 \left( C_{12}^e \mathbf{K}_{12}^{e,11} + C_{16}^e \mathbf{K}_{16}^{e,11} + C_{26}^e \mathbf{K}_{26}^{e,11} + C_{66}^e \mathbf{K}_{66}^{e,11} + C_{45}^e \mathbf{K}_{45}^{e,11} \right) \\ & + h_e k_1^2 \left( C_{11}^e \mathbf{K}_{11}^{e,20} + C_{16}^e \mathbf{K}_{16}^{e,20} + C_{66}^e \mathbf{K}_{66}^{e,20} + C_{55}^e \mathbf{K}_{55}^{e,20} \right) \\ & + h_e k_2^2 \left( C_{22}^e \mathbf{K}_{22}^{e,02} + C_{26}^e \mathbf{K}_{26}^{e,02} + C_{66}^e \mathbf{K}_{66}^{e,02} + C_{44}^e \mathbf{K}_{44}^{e,02} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.5.7})$$

où les matrices  $\mathbf{K}_{ij}^{e,kl}$  sont réelles ; celles liées à l'imaginaire unité ( $\mathbf{K}_{ij}^{e,10}$  et  $\mathbf{K}_{ij}^{e,01}$ ) sont antisymétriques et les autres symétriques. Leur forme est donnée en annexe F.1.1.

Les matrices élémentaires  $\mathbf{K}_{ij}^{e,kl}$  sont indépendantes de la taille ou la position de l'élément, et du matériau qui constitue le stratifié au niveau de l'élément  $e$ . En conséquence, cette décomposition permet de mettre en lumière les différentes contributions des différentes composantes de  $\underline{\mathbf{C}}$ . De plus, après assemblage de la matrice complète, cette décomposition peut être conservée pour en déduire la contribution des propriétés mécaniques des couches individuelles d'un stratifié dans l'énergie de déformation, de manière à caractériser les effets de l'anisotropie ou de la stratification sur le comportement en dynamique de la plaque.

La dépendance linéaire de l'opérateur  $\mathbf{K}$  en fonction des composantes de  $\underline{\mathbf{C}}$  est intéressante ; elle permet en effet d'exprimer le gradient de  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  en fonction de celles-ci de façon simple. Sur

la base de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  et pulsations  $\omega$  extraits de mesures expérimentales, il est pourrait être possible de formuler un problème inverse utilisant la méthode type descente de gradient analytique, formulée au chapitre V, section V.3, pour l'analyse modale.

*Remarque I.5.1.* Même si la forme ci-dessus peut faire croire, en observant la forme des matrices élémentaires  $\mathbf{K}_{ij}^{e,kl}$  données en annexe F, que la matrice de raideur complète  $\mathbf{K}$  est Hermitienne, elle ne l'est pas dans le cas général ; cela est vrai dans le cas conservatif ( $\mathbf{C}$  est réel) mais n'est plus vérifié si la loi de comportement est viscoélastique, à cause des symétries individuelles des parties réelle et imaginaire du tenseur opérationnel.

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est dans ce travail exprimé dans le repère intrinsèque de la plaque. Certaines couches du stratifié peuvent être composées d'un matériau dont les axes d'orthotropie ne coïncident pas avec le repère global. Dans ce cas, on utilise la formule de rotation de la loi de comportement (voir annexe B.1, expression (B.1.13)) pour exprimer le tenseur opérationnel du matériau dans le repère de la plaque.

Pour étudier l'influence de l'angle de propagation de l'onde, deux solutions sont possibles ; la première consiste à poser  $\mathbf{k} = k[\cos(\theta), \sin(\theta)]$ . On peut alors faire varier  $\theta$ . La deuxième solution consiste à poser  $\mathbf{k} = [k, 0]$ , ce qui simplifie l'expression de la matrice de raideur généralisée (tous les termes en  $k_2$  s'annulent). Il faut alors faire *tourner* tout le stratifié d'un angle  $\theta$  (par l'opération de changement de base sur la loi de comportement) pour étudier l'influence de la direction de propagation des ondes. Dans ce travail, on utilise la première solution, car elle permet de travailler dans un cadre unifié par rapport à la formulation des problèmes inverses proposés avec la méthode d'analyse en vecteurs d'onde (voir VII).

### I.5.2.2 Cas des poutres de section quelconque

L'implémentation proposée dans ce travail est adaptée à la modélisation des guides d'onde uniaxiaux dont la section caractéristique est quelconque. Les matériaux constitutifs sont considérés orthotropes, leurs axes de symétrie coïncidant avec le repère du guide d'onde.

La section  $\Omega$  du guide d'onde est discrétisée à l'aide d'éléments *P1* triangulaires : les fonctions de forme sont linéaires, ce qui rend analytique l'intégration dans l'élément. On donne les détails de l'implémentation en annexe F.

Une nouvelle fois, il est possible de décomposer l'opérateur de raideur généralisée élémentaire en une combinaison linéaire d'opérateurs liés aux différents mécanismes de déformation.

**Definition I.5.2** (Décomposition de l'opérateur de raideur élémentaire). *On peut exprimer l'opérateur de raideur généralisée liée à l'élément  $e$  sous la forme décomposée suivante :*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e(k) = & \frac{1}{2} (C_{11}^e \mathbf{K}_{11}^e + C_{22}^e \mathbf{K}_{22}^e + C_{12}^e \mathbf{K}_{12}^e + C_{66}^e \mathbf{K}_{66}^e + C_{44}^e \mathbf{K}_{44}^e + C_{55}^e \mathbf{K}_{55}^e) \\ & + \frac{i k}{6} (C_{13}^e \mathbf{K}_{13}^e + C_{23}^e \mathbf{K}_{23}^e + C_{44}^e \mathbf{K}_{441}^e + C_{55}^e \mathbf{K}_{551}^e) \\ & + \frac{k^2}{24} (C_{33}^e \mathbf{K}_{33}^e + C_{55}^e \mathbf{K}_{552}^e + C_{44}^e \mathbf{K}_{442}^e) \end{aligned} \quad (\text{I.5.8})$$

où les matrices  $\mathbf{K}_{ij}^e$  sont réelles. Leur forme est donnée en annexe F.2.1.



### I.5.3 Calcul des vecteurs d'onde

On a vu que la recherche des solutions d'onde planes se propageant dans les guides d'onde découplés consiste en la résolution d'un système aux valeurs propres, de la forme (I.3.13) :

$$\left( \mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{0} \quad (\text{I.5.9})$$

Si l'on néglige les effets dispersifs sur la raideur ( $\partial \mathbf{K} / \partial \omega = 0$ ), ce système est linéaire en  $\omega^2$ . La résolution consiste donc à fixer le vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  et chercher les solutions d'ondes  $\mathbf{q}^i$  liées aux pulsations  $\omega_i$ .

Toutefois, plusieurs raisons poussent transformer cette formulation pour obtenir un problème où  $\underline{\mathbf{k}}$  est l'inconnue, pour  $\omega$  donné :

- on cherche à connaître le comportement d'une structure dans un certain *régime fréquentiel* ; il serait plus commode pour cela de pouvoir fixer  $\omega$  *a priori*.
- en réalité, la matrice de raideur généralisée  $\mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}})$  est donnée par le tenseur opérationnel  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega)$  des matériaux composant la section du guide d'onde. Comme on l'a vu dans le chapitre sur le comportement des matériaux viscoélastiques, ce tenseur complexe ne peut théoriquement pas être indépendant de la fréquence (voir annexe B.2, expression (B.2.20)). En conséquence, le problème aux valeurs propres ci-dessus devient non-linéaire si l'on cherche à prendre en compte cet aspect ( $\partial \mathbf{K} / \partial \omega \neq 0$ ).

On remarque en fait à partir des expressions (I.5.7) et (I.5.8) que l'opérateur de raideur généralisée peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{K}_0(\omega, \theta) + i k \mathbf{K}_1(\omega, \theta) + k^2 \mathbf{K}_2(\omega, \theta) \quad (\text{I.5.10})$$

où on a posé  $\underline{\mathbf{k}} = {}^T[k_1 \ k_2] = k {}^T[\cos(\theta) \ \sin(\theta)]$  pour le cas des plaques (le cas des poutres s'écrit avec  $\theta = 0$ ). les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_2$  sont symétriques réelles ;  $\mathbf{K}_1$  est quant à elle anti-symétrique réelle.

**Proposition de Shorter** Shorter [202] utilise l'écriture donnée ci-dessus pour formuler un problème aux valeurs propres quadratique en  $k$ , qu'il faut résoudre pour  $\omega$  et  $\theta$  donnés.

**Proposition I.5.1** (Problème aux valeurs propres quadratique en  $k$ ). *On peut réécrire le problème (I.3.13) sous la forme suivante :*

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_2^{-1}(\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}) & -i \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ k \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{I.5.11})$$

où on a omit la dépendance des différentes grandeurs en  $\omega$  et  $\theta$ .

*Démonstration.* On pose  $\mathbf{q}_1 = k \mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}_2 = k \mathbf{q}_1$ . En ajoutant ces équations au système (I.3.13), on écrit :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M} & i \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.12})$$

La dernière ligne est triviale et permet d'écrire :

$$\mathbf{q}_2 = -\mathbf{K}_2^{-1} \left( (\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} + i \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_1 \right) \quad (\text{I.5.13})$$

ce qui mène directement à (I.5.11).  $\square$



**Solution alternative** L'inconvénient de la proposition de Shorter [202] réside dans la formulation d'un problème aux valeurs propres sur la base de matrices non symétriques et complexes, même dans le cas conservatif. Le conditionnement du problème peut donc se dégrader. On propose donc ici une alternative qui permet d'améliorer la robustesse du schéma.

**Proposition I.5.2.** *On pose  $\mu = ik$ . Le problème (I.3.13) peut se réécrire de la façon suivante :*

$$\left( \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_0 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mu \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{I.5.14})$$

où on a omit la dépendance des différentes grandeurs en  $\omega$  et  $\theta$ .

Cette écriture peut se mettre sous la forme  $(\mathbf{A} - \mu \mathbf{B})\mathbf{q}' = \mathbf{0}$ . Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont réelles, contrairement à la proposition de Shorter ;  $\mathbf{A}$  est symétrique et  $\mathbf{B}$  est anti-symétrique.

La conséquence directe des deux réécritures du problème proposées ci-dessus est la conversion d'un problème aux valeurs propres généralisées en  $\omega^2$  de taille  $N$  (pour  $N$  degrés de liberté  $\mathbf{q}$ ) en un problème aux valeurs propres en le nombre d'onde  $k$  de taille  $2N$ . Puisque ce problème est dérivé d'un problème aux valeurs propres quadratique, ses solutions sont couplées deux à deux et opposées. Cela représente la possibilité qu'une onde a de se propager dans un sens ou l'autre à la même vitesse.

L'atout majeur de ces formulations est la possibilité de prendre en compte un opérateur de raideur généralisée dépendant de la fréquence ; le problème est en effet posé pour une pulsation  $\omega$  donnée.

## I.5.4 Calcul des vitesses

On donne ici les transformations nécessaires pour remonter, à partir des solutions de vecteur d'onde obtenues, aux vitesses caractéristiques des ondes.

**Vitesse de phase** La vitesse de phase s'obtient de façon triviale à partir de la relation (I.1.15) :

$$\underline{\mathbf{c}}_\phi = \frac{\omega}{k_i} \underline{\mathbf{e}}_i \quad (\text{I.5.15})$$

**Vitesse de groupe** La vitesse de groupe est un indicateur plus complexe influencé par la dispersion des ondes dans le milieu. Cette vitesse, autant en norme qu'en direction, peut différer de la vitesse de phase. On rappelle ici son expression (I.1.19) :

$$\underline{\mathbf{c}}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \underline{\mathbf{e}}_i \quad (\text{I.5.16})$$

Pour évaluer le gradient de la pulsation par rapport aux composantes du vecteur d'onde, une solution peut consister en l'utilisation de différences finies formulées sur des points voisins  $(\underline{\mathbf{k}} + \Delta \underline{\mathbf{k}}, \omega + \Delta \omega, \theta + \Delta \theta)$ . Toutefois, cette technique nécessite de nombreuses résolutions du problème. De plus, certaines solutions  $k$  correspondant à deux modes différents sont parfois très proches (les surfaces de lenteur s'intersectent) et peuvent entraîner une confusion sur la détermination du gradient.

La méthode proposée dans [21] est généralisée ici pour un vecteur d'onde quelconque ; c'est une formulation *locale* (au sens de la position sur la surface de lenteur). Elle consiste à évaluer de façon analytique le gradient du problème aux valeurs propres (I.3.13).

La définition de la vitesse de groupe n'est valable que pour des vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  purement réels purement ou imaginaires, correspondant donc au cas conservatif. Dans ce cas précis, les matrices généralisées  $\mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}})$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques hermitiennes.

**Proposition I.5.3** (Calcul de la vitesse de groupe). *Le résultat sur la perturbation des valeurs propres généralisées d'un couple de matrices hermitiennes (équation (D.5.6) en annexe) appliqué au problème (I.3.13) permet de donner la forme locale de la vitesse de groupe :*

$$\underline{\mathbf{c}}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2\omega} \frac{1}{\mathbf{H}_{\mathbf{q}} \mathbf{M} \mathbf{q}} \mathbf{H}_{\mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}})}{\partial \underline{\mathbf{k}}} \mathbf{q} \quad (\text{I.5.17})$$

où le gradient de l'opérateur  $\mathbf{K}$  par rapport au vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  est déterminé analytiquement à partir des décompositions proposées ((I.5.7) et (I.5.8)).

Cette formulation permet donc d'évaluer la vitesse de groupe une fois que le vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$ , la pulsation  $\omega$  ainsi que le vecteur polarisation  $\mathbf{q}$  sont connus.

**Vitesse d'énergie** Bernard et al. [23] proposent une version généralisée de la vitesse d'énergie, définie originellement de manière locale dans le théorème de Poynting.

Le vecteur de Poynting  $\underline{\mathbf{P}}$  s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{z}}) = i \omega \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\mathbf{z}}) \cdot {}^* \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}) \quad (\text{I.5.18})$$

où le tenseur des contraintes généralisées  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est construit à partir du vecteur des contraintes généralisées  $\underline{\Sigma}$  en notation de Voigt, ce dernier étant donné par la loi de comportement et l'expression des déformations généralisées (I.3.11).

La version généralisée de la vitesse d'énergie est alors définie comme le rapport entre les moyennes du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie mécanique dans la section. En particulier, si les vecteurs propres  $\mathbf{q}$  sont normés de façon à ce que  $\mathbf{H}_{\mathbf{q}} \mathbf{K} \mathbf{q} = 1$ , alors la vitesse d'énergie s'écrit simplement :

$$\underline{\mathbf{c}}_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (\text{I.5.19})$$

L'étude des vitesses d'énergie est intéressante car elle permet notamment de mettre en valeurs certaines directions de propagation privilégiées par le comportement anisotrope du guide d'onde. Un travail intéressant est réalisé à ce sujet dans [185], dans le cas de structures périodiques.

### I.5.5 Résolution du problème couplé

On a vu dans les sections précédentes la façon d'introduire le couplage acoustique dans les équations du problème (I.3.44). On se limite ici au cas des guides d'onde plans ; l'idée ici est de pouvoir évaluer l'influence du couplage acoustique sur le comportement des plaques composites.

On rappelle l'équation discrétisée établie dans la section précédente, régissant le mouvement du guide d'onde couplé à l'air sur ses faces inférieure et supérieure (I.3.47) :

$$\left( \mathbf{K}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) + \omega \left( \mathbf{i} Z_R(\omega, \underline{\mathbf{k}}) - Z_I(\omega, \underline{\mathbf{k}}) \right)^H \mathbf{J} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{0} \quad (\text{I.5.20})$$

Dans le cadre de l'implémentation proposée ici,  $\mathbf{J} \in \mathbb{N}^{3N \times 3N}$  est la matrice permettant de sélectionner les degrés de liberté  $\mathbf{q}_3^0$  et  $\mathbf{q}_3^N$ , paramétrant le déplacement normal au niveau des faces inférieure et supérieure. Elle est de la forme :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.5.21})$$

et est donc singulière (de rang 2). Cela entraîne, comme on l'a vu précédemment, que le vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}} = (\omega/c_a) \underline{\mathbf{n}}^p$  est solution du problème couplé, quelque soit la fréquence.

La recherche des solutions du problème impose, comme dans le cas découplé, de choisir la direction de propagation  $\theta$  (avec  $\underline{\mathbf{k}} = k^\top [\cos(\theta) \ \sin(\theta)]$ ) et la pulsation  $\omega$ . L'équation à résoudre prend alors la forme suivante, en injectant les définitions (I.5.10) et (I.3.43) dans le système d'équations ci-dessus :

$$\left( \mathbf{K}_0 + k \mathbf{K}_1 + k^2 \mathbf{K}_2 + \mathbf{i} \rho_a \frac{\omega^2}{p \sqrt{(-1)^r (\frac{\omega^2}{c_a^2} - k^2)}}^H \mathbf{J} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{I.5.22})$$

où on a omit la dépendance de  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  et  $\mathbf{q}$  en fonction de  $\omega$  et  $\theta$ . Les nombres  $p$  et  $r$  prennent les valeurs suivantes :

$$(p, r) = \begin{cases} (1, 0) & k < \omega/c_a \\ (-\mathbf{i}, 1) & k > \omega/c_a \end{cases} \quad (\text{I.5.23})$$

Le problème à résoudre est donc fortement non linéaire.

On peut exprimer ce problème comme la minimisation de  $\|\mathbf{A}(\mu) \mathbf{q}\|$ , où  $\mathbf{A}$  est une fonction non linéaire de  $\mu$  telle que  $\mathbf{A}(k) \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Une variété de méthodes permet de résoudre ce type de problèmes [87].

Ici, la différentielle  $\partial \mathbf{A} / \partial \mu$  est analytique ; en conséquence, il est possible d'utiliser des méthodes de type descente de gradient.

La méthode implémentée pour ce travail est dite *Inverse Iteration* [6] : à chaque itération, la dérivée de  $\mathbf{A}(\mu)$  est évaluée et les paramètres  $(p, r)$  mis à jour. Lorsque la dépendance de  $\mathbf{A}$  en  $\mu$  est suffisamment lisse,  $\mu$  converge rapidement vers la solution  $k$  la plus proche de la valeur initiale  $\mu_0$ .

Cette méthode nécessite donc une initialisation  $(\mu_0, \mathbf{q}_0)$ , si possible la plus proche de la solution du problème  $(k, \mathbf{q})$ . Dans ce travail, on utilise naturellement une solution du problème non couplé pour l'initialisation. Le terme de couplage étant, dans la majeure partie du domaine fréquentiel, un terme du second ordre, le schéma itératif converge en quelques itérations. Le coût de calcul supplémentaire n'est donc pas critique ; de plus, seules les solutions du problème

découplé qui présentent un déplacement transverse  $U_3$  significatif sont prises en compte. En effet, pour les autres, le terme de couplage est faible voire nul.

Un exemple d'application du schéma implémenté est donné dans la section suivante, permettant de montrer l'effet du couplage acoustique sur les propriétés dispersives des ondes de flexion (voir figure [I.20](#)).

## I.6 Études de cas

La section qui suit tente d'illustrer une partie des nombreux phénomènes responsables de la dispersion des ondes dans les structures élancées, anisotropes, multicouches et viscoélastiques. Les résultats présentés sont obtenus à partir des schémas de résolution par éléments finis spectraux implémentés spécifiquement pour ce travail dans la section précédente.

La complexité du comportement de la structure est introduite progressivement. L'exposé s'appuie sur différentes représentations des résultats, illustrant la dépendance du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  ou de la vitesse de phase  $\underline{c}_\phi$  en fonction des paramètres du problème (pulsation  $\omega$ , angle de propagation) et du mode considéré. L'interprétation des différents phénomènes est également rendue possible par la visualisation des champs mécaniques associés à chaque mode (déplacement  $\underline{U}$ , déformations  $\underline{E}$ , contraintes  $\underline{\Sigma}$  et énergie de déformation).

Les résultats sont souvent donnés pour un domaine fréquentiel bien plus large que le domaine fréquentiel qui nous intéresse dans ce travail. En effet, ce choix permet d'observer les différents comportements asymptotiques des grandeurs observées en basse et haute fréquence. L'illustration des phénomènes mis en jeu dans la dispersion des ondes est en conséquence facilitée.

Premièrement, on s'intéresse à la propagation des ondes dans une barre à section rectangulaire et dont le matériau est homogène isotrope conservatif. La représentation utilisée permet de montrer la présence de solutions évanescentes, propagatives et mixtes, que l'on retrouve également dans le cas des plaques.

Deuxièmement, on s'intéresse au cas des plaques homogènes conservatives. Dans le cas d'une plaque isotrope, on retrouve les modes de Lamb. Des modes supplémentaires s'ajoutent, correspondant à une polarisation du déplacement selon la composante normale au plan de propagation de l'onde. La convergence du schéma numérique est évoquée. Les trois premiers modes d'ordre zéro (flexion, cisaillement plan, compression) et les deux premiers modes d'ordre supérieur (cisaillement transverse) sont étudiés plus précisément, car ils représentent la majeure partie des mécanismes de transport de l'information mécanique dans les structures auquel ce travail s'intéresse. Dans le cas des plaques anisotropes, on montre que les modes de cisaillement plan et de compression sont couplés ; on distingue alors, en basse fréquence, le comportement de la plaque en flexion de son comportement en membrane. On reconstruit alors les surfaces de lenteur et de vitesse correspondant aux trois premiers modes propagatifs.

Troisièmement, on s'intéresse au cas des plaques multicouches conservatives. Le premier exemple considère une plaque sandwich constituée de matériaux isotropes. L'effet du contraste des propriétés mécaniques entre les peaux et l'âme du sandwich sur la dispersion des premiers modes propagatifs est étudié. Le deuxième exemple considère une plaque stratifiée mince de type *angle-ply*, composée de plis anisotropes identiques. L'effet de la stratification sur le comportement de la plaque est illustré ; on montre alors que l'anisotropie du comportement en flexion de l'empilement est en général différente de celle qui caractérise son comportement en membrane.

Dans un quatrième temps, on introduit la viscoélasticité, modélisée par un comportement hystérétique. Les exemples de la plaque isotrope homogène, du sandwich isotrope et de la plaque orthotrope homogène sont repris, en introduisant des constantes de raideur complexes. La visualisation des champs mécaniques proposée dans les cas conservatifs sert alors l'interprétation des résultats obtenus, caractérisés par le taux de décroissance spatiale des ondes ; il devient notamment possible d'expliquer les différentes variations observées de ce taux de décroissance en fonction de la fréquence. Dans le cas de la plaque orthotrope, on reconstruit la surface pa-

ramétrée par la fréquence et l'angle de propagation qui correspond au taux de décroissance lié aux trois premiers modes propagatifs.

Enfin, on étudie l'effet du couplage acoustique sur la dispersion des ondes de flexion dans une plaque. Les effets de masse ajoutée puis les effets dissipatifs liés au couplage sont illustrés ; on donne également les résultats pour deux plaques équivalentes (vitesses élémentaires de cisaillement et longitudinale égales) mais de densité différente, pour illustrer la dépendance des effets en fonction de celle-ci.

### I.6.1 Poutre à section rectangulaire

Dans ce premier exemple, on étudie la propagation des ondes planes dans une poutre de section rectangulaire, composée d'un seul matériau isotrope et conservatif.

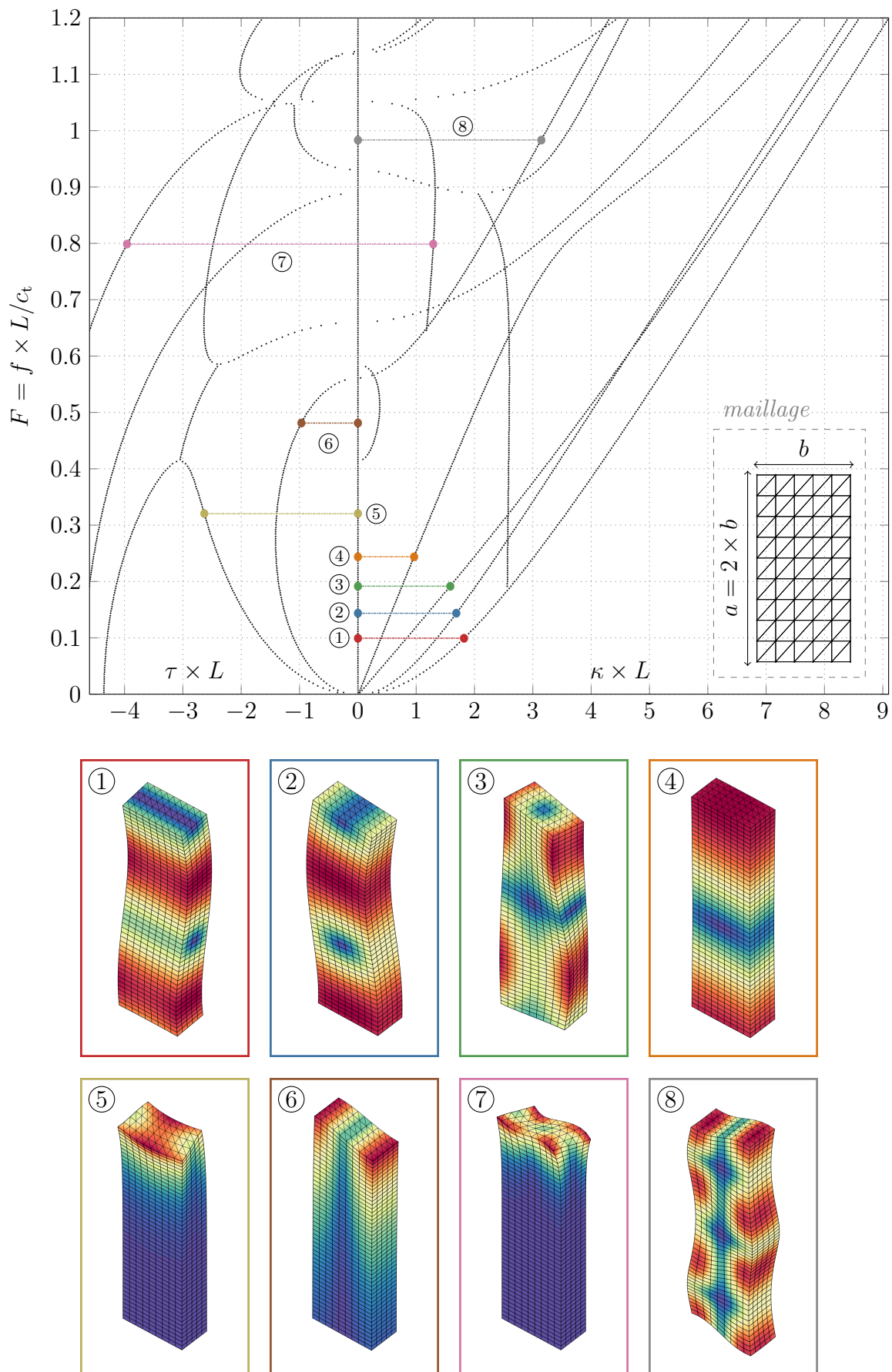
La section de la poutre est choisie de largeur  $b$  et de hauteur  $a$ , telle que  $a = 2 \times b$ . La longueur caractéristique  $L$ , telle que  $L^2 = a^2 + b^2$ , est utilisée pour représenter les résultats en fonction de la fréquence adimensionnée  $F = f \times L/c_t$  et du nombre d'onde adimensionné  $K = k \times L$ . La représentation ainsi construite ne dépend que du coefficient de Poisson (ici choisit égal à 0.3) et du rapport  $a/b$ .

Les résultats sont obtenus à partir de l'implémentation proposée dans la section 1.5 précédente ; le maillage est construit à partir d'une grille régulière de  $5 \times 9$  quadrilatères, à partir desquels sont formés les éléments finis triangulaires (voir figure 1.6). Ce maillage n'est pas assez fin pour garantir la convergence des résultats sur le domaine fréquentiel entier considéré ; toutefois, l'idée est ici d'illustrer les différentes modes caractéristiques d'un guide d'onde uniaxial simple ; pour cela, la discrétisation proposée est suffisante car elle permet d'approximer de façon satisfaisante les différentes fonctions de polarisation.

La figure 1.6 illustre les résultats obtenus. Sur la partie du haut sont représentés les nombres d'onde complexes solutions. Pour le besoin de la représentation, seules les solutions physiques (voir figure 1.1) et se propageant vers les  $x_3$  négatifs sont conservées. L'axe des ordonnées représente la fréquence adimensionnée. L'axe des abscisses est divisé en deux parties ; à gauche est donnée la partie imaginaire  $\tau \times L$  du nombre d'onde adimensionné, et à droite est donnée la partie réelle  $\kappa \times L$  de celui-ci. Cette représentation permet d'observer simultanément, sur un graphique en deux dimensions, la dépendance de  $\kappa$  et  $\tau$  en fonction de la fréquence. Sur ce graphique sont dénotés des modes particuliers (de ① à ⑧), caractérisés par leurs parties réelle et imaginaire. La déformée de la poutre correspondant à chacun de ces modes particuliers est représentée au bas de la figure 1.6, où la couleur correspond à la norme du déplacement.

Les points particuliers dénotés sur la figure 1.6 correspondent à différents types d'ondes planes pouvant se propager dans une poutre de section rectangulaire. Dans le cas conservatif étudié ici, ces ondes peuvent être :

- purement propagatives : par exemple ① (flexion selon  $b$ ), ② (flexion selon  $a$ ), ③ (torsion) et ④ (compression). Leur nombre d'onde est réel quelque soit la fréquence.
- purement évanescentes : par exemple ⑤ (flexion selon  $a$ ) ou ⑥ (flexion selon  $b$ ). Elles sont caractérisées par un nombre d'onde purement imaginaire. L'énergie mécanique liée à ces solutions ne se propage pas et est donc confinée près des singularités (sources et condition aux limites). La représentation choisie montre d'ailleurs qu'en basse fréquence, les solutions ⑤ et ⑥ sont respectivement symétriques des solutions ② et ① par rapport à l'axe des ordonnées.
- fortement évanescentes : par exemple ⑦. Elles sont caractérisées par un nombre d'onde complexe dont la partie imaginaire  $\tau$  dénote une forte décroissance spatiale. Cela est

FIGURE I.6 – Dispersion des ondes dans une poutre de section rectangulaire ( $\nu = 0.3$ )



d'ailleurs visible sur les déformées associées, qui montrent que le mouvement est encore une fois confiné autour de la singularité.

La représentation choisie sur la figure I.6 permet également de remarquer que les solutions évanescentes peuvent devenir propagatives à partir d'une certaine fréquence. C'est par exemple le cas du mode de flexion évanescent ⑥, qui devient le mode de cisaillement propagatif ⑧ pour  $F \approx 5.6$ . Cette transition intervient lorsque la longueur d'onde devient de l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique  $L$ . ce phénomène est analogue à l'apparition des modes d'ordre supérieur dans le cas des guides d'onde plans (voir section I.4).

Pour conclure, seuls 4 modes sont propagatifs en basse fréquence : flexion selon  $a$  ① et  $b$  ②, torsion ③ et compression ④. En conséquence, lorsque la longueur d'onde est suffisamment large devant la longueur caractéristique de la poutre, seuls ces 4 ondes sont responsables du *transport* de l'information mécanique.

## I.6.2 Plaques homogènes

Le cas des plaques composées d'un seul matériau est étudié dans ce qui suit, pour le cas des ondes propagatives seulement (vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  réel). Dans le cas isotrope s'ajoutent aux modes de Lamb des ondes polarisées perpendiculairement à celles-ci. Un résultat sur la convergence des résultats est donné. On ne s'intéresse ensuite qu'aux trois premiers modes, présents quelque soit la fréquence. Dans le cas d'une plaque orthotrope, les surfaces de dispersion associées à ces trois premiers modes sont illustrées.

### I.6.2.1 Matériau isotrope

**Branches de dispersion** La seconde application présentée ici s'intéresse au calcul de la dispersion des ondes dans une plaque isotrope homogène conservative. De façon à pouvoir comparer les résultats du schéma éléments finis spectraux utilisé ici avec les solutions données par les équations des ondes de Lamb (I.2.31), le coefficient de Poisson du matériau est également choisi tel que  $\nu = 0.3$ . De nouveau, les grandeurs adimensionnées  $F = f \times h/c_t$  et  $C = c/c_t$  sont utilisées pour représenter les résultats ; la représentation ne dépend donc plus que du coefficient de Poisson.

L'implémentation SFEM proposée dans la section précédente est utilisée pour obtenir les résultats. La plaque étant isotrope, la direction de propagation des ondes est arbitraire. La section de la plaque est divisée en 50 éléments linéaires ; cela permettra de tracer dans ce qui suit les profils des déplacements, contraintes et déformation avec une résolution suffisante. De plus, un maillage fin est nécessaire pour décrire les modes d'ordre supérieur ; une étude sur la convergence des résultats est d'ailleurs donnée plus bas.

Les différentes branches de dispersion sont représentées sur la figure I.7 ; la vitesse de phase  $C$  est donnée en fonction de la fréquence  $F$ . Seule la partie réelle de la vitesse est représentée ; en conséquence, seuls les modes propagatifs sont visibles. Particulièrement, les déformées de la plaque correspondant aux cinq premiers modes propagatifs sont représentées sur la droite de la figure. Les différentes branches correspondant à ces modes sont numérotées en conséquence.

Les résultats du calcul qui correspondent aux ondes de Lamb [112] sont tracées en noir (voir figure I.4 en section I.2) ; les modes associés (①, ③ et ⑤) sont polarisés dans le plan ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ ). En rouge sont tracées les solutions supplémentaires, dont le vecteur polarisation est colinéaire à  $\mathbf{e}_2$  ; c'est le cas des modes ② et ④.

Une nouvelle fois, trois modes d'ordre zéro sont présents en basse fréquence ; deux étaient prédits par les équations de Lamb, le troisième mode (②) s'ajoute avec la prise en compte de la



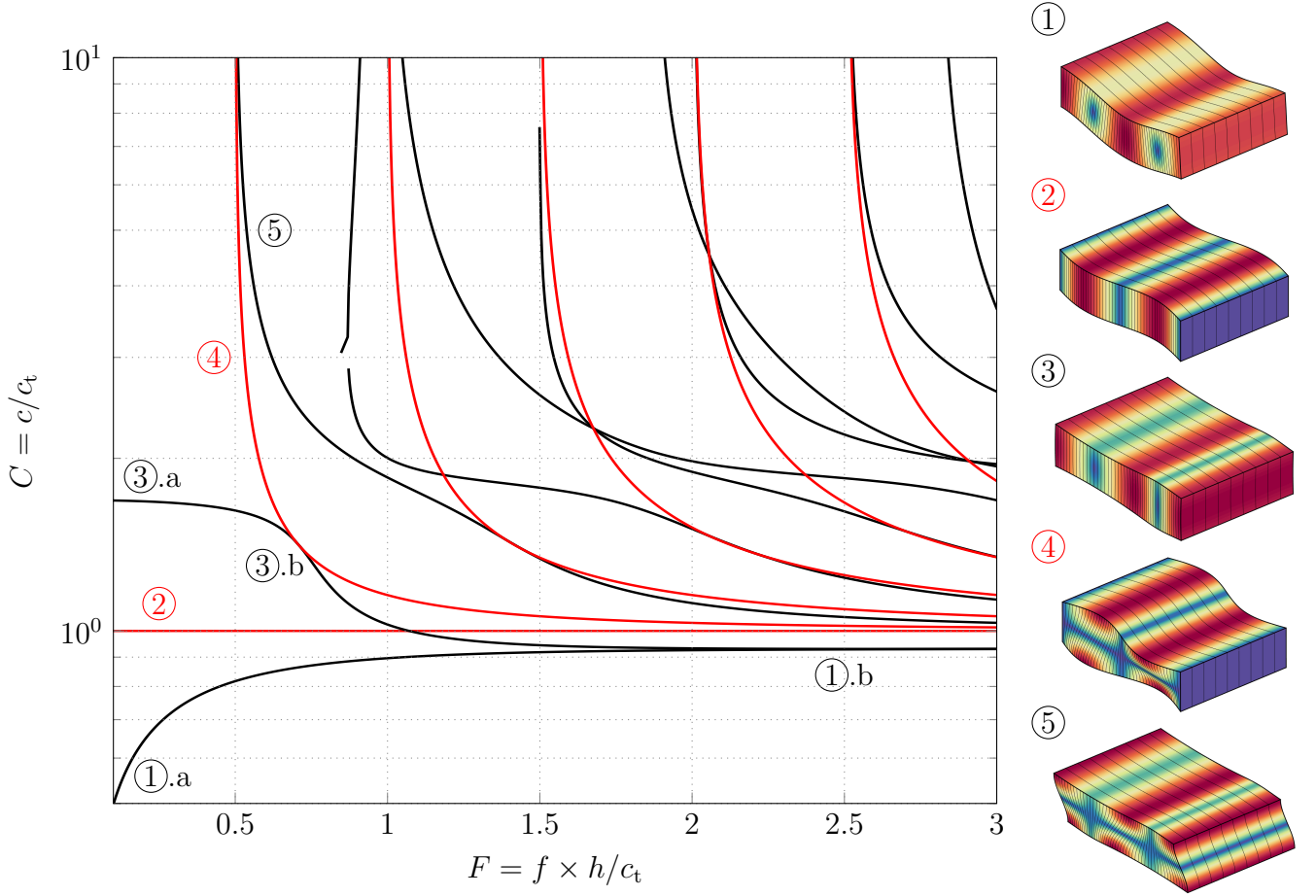


FIGURE I.7 – Dispersion des ondes dans une plaque homogène isotrope ( $\nu = 0.3$ ). Les courbes noires correspondent aux solutions de Lamb, identiques au diagramme I.4. Les solutions supplémentaires sont représentées en rouge.

deuxième composante du déplacement. Ces trois modes sont seuls responsables de la transmission de l'information mécanique en basse fréquence. Avec l'augmentation de la fréquence, des modes d'ordre supérieurs apparaissent. On remarque que les modes d'ordre supérieur polarisés selon  $\mathbf{e}_2$  apparaissent à des fréquences  $F_n = n/2$ . À ces fréquences, l'épaisseur de la plaque est égale à un multiple de la longueur d'onde des ondes de cisaillement.

Pour finir, on remarque que la vitesse des ondes correspondant aux équations de Lamb (en noir) tend bien vers la vitesse des ondes de Rayleigh (pour  $\nu = 0.3$ ,  $c_R \simeq 0.93c_t$ ). Les ondes polarisées selon  $\mathbf{e}_2$  (en rouge) tendent quant à elles vers la vitesse de cisaillement  $c_t$ .

**Étude des 5 premiers modes propagatifs** Dans la suite, l'intérêt porte uniquement sur les 5 premiers modes propagatifs (figure I.7, ① à ⑤) ; en effet, les modes suivants apparaissent à des fréquences  $F$  bien trop élevées pour être considérés dans ce travail. Ils sont toutefois très utilisés dans les techniques de contrôle non destructif ; en effet, ils forment une description fine du déplacement du guide d'onde à haute fréquence. Les hétérogénéités de la structure étudiée (défauts, inclusions, etc) interagissent donc fortement avec ces modes (réflexion, diffraction, atténuation, etc.).

La figure I.8 représente la forme des différents champs mécaniques à travers l'épaisseur de la plaque, pour les cinq premiers modes et dans les configurations correspondant aux labels

sur la figure I.7. Les différentes couleurs dénotent les composantes de ces champs, en notation de Voigt. La représentation est uniquement qualitative ; on ne cherche pas ici à *quantifier* les différents champs, mais seulement à comparer les différentes composantes entre elles. Celles-ci sont d'ailleurs définies à un facteur commun près, puisque obtenues à partir d'un problème aux valeurs propres I.3.13.

Sont également représentées sur la dernière ligne de la figure I.8 les densités d'énergie élémentaires ; en écrivant la densité d'énergie potentielle  $\mathcal{U} = {}^*E_i \Sigma_i = \sum_{i=1..6} \mathcal{U}_i$ , il est possible de tracer ses six contributions élémentaires  $\mathcal{U}_i$ . L'observation de celles-ci permet de donner des indications sur le comportement de la plaque, par exemple sur les mécanismes régissant la propagation d'un mode en particulier. Plus tard, on verra que ces profils fournissent des informations utiles à la compréhension des mécanismes d'atténuation des ondes. Ils permettent également de donner des pistes pour la construction d'un modèle de structure et sur les limites de celui-ci (mauvaise description des mécanismes dominants, etc.).

Les profils de la figure I.8 permettent de caractériser les différents modes :

- ① la flexion : en basse fréquence (①.a), l'énergie de déformation est presque uniquement

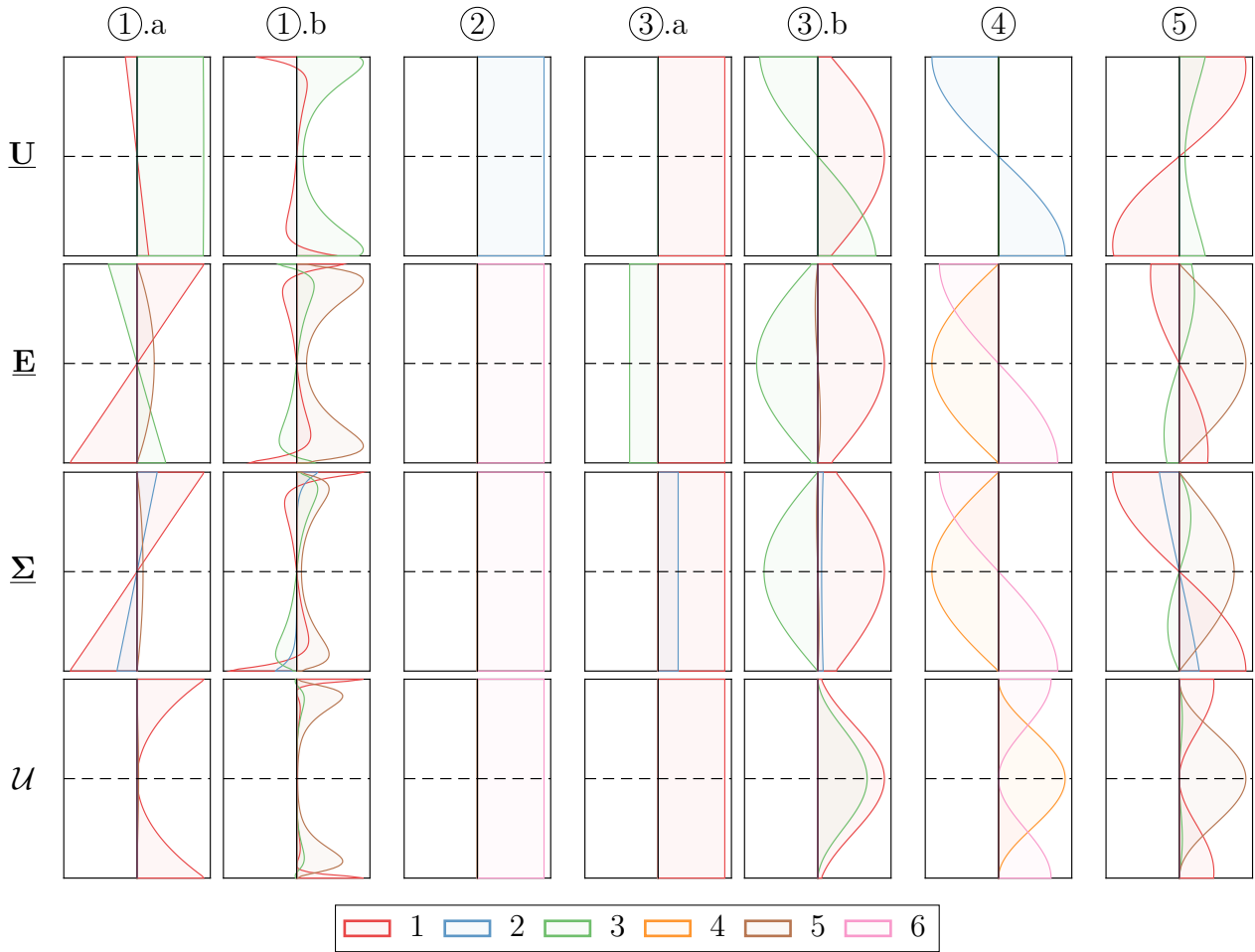


FIGURE I.8 – Plaque isotrope homogène, 5 premiers modes. Profil des fonctions de polarisation  $\underline{U}$ , des déformations  $\underline{E}$ , contraintes  $\underline{\Sigma}$  et densités d'énergie de déformation  $\mathcal{U}$  associées. Les couleurs dénotent les différents composants (en notation de Voigt). Les différentes configurations (① à ⑤) correspondent aux points sur la figure I.7.

contenue dans la première composante (contraintes et déformations planes). De plus, cette énergie est beaucoup plus forte sur les bords de la plaque qu'autour de la fibre neutre. Avec l'augmentation de la fréquence ((1).b), cet effet est encore accentué. De plus, l'influence du cisaillement hors-plan ( $\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}$  et  $\sigma_5 = \sigma_{13}$ ) devient grande, voire dominante. La transition entre ces deux mécanismes (déformations planes vers le cisaillement) explique la forte dispersion en fréquence des ondes de flexion ; le confinement de l'énergie au niveau des faces inférieure et supérieure explique la vitesse de phase asymptotique, qui tend vers la vitesse des ondes de surface.

- ② le cisaillement plan : la figure I.7 montre que sa vitesse de phase est constante sur le domaine fréquentiel entier. Ce mode particulier est en effet caractérisé par un profil de déplacement dont seule la composante  $U_2$  est non nulle (voir figure I.8, ②) ; elle est de surcroît uniforme. L'énergie associée à ce mode est donc purement de l'énergie de cisaillement plan ( $\varepsilon_{12}, \sigma_{12}$ ).
- ③ la compression : en basse fréquence ((3).a), il a été montré plus haut que sa vitesse de phase tend vers une constante (I.2.32), qui se retrouve sur la figure I.7. Sur la figure I.8, on peut voir que l'énergie potentielle associée est dominée par la première composante (déformations et contraintes planes). Avec l'augmentation de la fréquence ((3).b), l'effet Poisson devient non négligeable (troisième composante, en vert). Cela explique la forte dispersion observée sur ce mode sur le domaine  $0.5 < F < 1$  (voir figure I.7). Pour des fréquences encore supérieures, l'énergie tend à se confiner sur les bords ; la vitesse de ces ondes tend alors vers la vitesse de Rayleigh.
- ④ le cisaillement hors-plan selon  $\underline{e}_2$  : ce mode apparaît pour  $F = 1/2$ , c'est à dire lorsque l'épaisseur de la plaque correspond à une demie longueur d'onde des ondes de cisaillement. Cela est d'ailleurs bien visible sur la figure I.8 : les différents champs semblent formés de la moitié d'une période d'un sinus ou cosinus. la section de la plaque est sollicitée en cisaillement pur (seuls les contraintes et déformations associées au cisaillement plan  $\varepsilon_{12}$  et hors-plan  $\varepsilon_{23}$  sont non nulles).
- ⑤ le cisaillement hors-plan selon  $\underline{e}_1$  : il devient également propagatif pour  $F = 1/2$  (voir figure I.7). Il est influencé à la fois par les mécanismes plans ( $\varepsilon_{11}$  et  $\sigma_{11}$ ), normaux ( $\varepsilon_{33}$  et  $\sigma_{33}$ ) et de cisaillement hors-plan ( $\varepsilon_{13}$  et  $\sigma_{13}$ ), ce qui le rend assez complexe à interpréter.

**Convergence des résultats** On s'intéresse maintenant à la convergence du schéma SFEM proposé, utilisant des éléments finis linéaires. Pour cela, on se focalise sur le calcul des 5 premiers modes cités ci-dessus. La figure I.9 montre le résultat du calcul de ces modes, dans le cas de la plaque décrite ci-dessus, et pour des tailles de maillage différentes (50, 6, 3 et 1 élément(s) dans l'épaisseur). Le calcul avec 50 éléments dans l'épaisseur est considéré convergé et donc pris comme référence. Les points caractéristiques (① à ⑦) ont été reportés de façon à comparer les résultats avec les représentations données en figure I.7 et I.8.

Tout d'abord, la vitesse du mode de cisaillement plan ② est correctement estimée, quelque soit la finesse du maillage utilisé et la fréquence. Cela est dû au profil de déplacement simple qui caractérise ce mode (voir figure I.8, ②) ; celui-ci, uniforme dans l'épaisseur, est convenablement décrit, même par un seul élément linéaire. Pour les mêmes raisons, le comportement asymptotique du mode de compression en basse fréquence ((3).a) est correctement estimé.

Toutefois, un maillage grossier (moins de 6 éléments) n'est pas suffisant pour décrire le comportement du mode de flexion, même en basse fréquence ((1).a). En effet, la déformation  $\varepsilon_{33}$  linéaire qui caractérise ce mode en basse fréquence (voir figure I.8, ①.a) impose que la

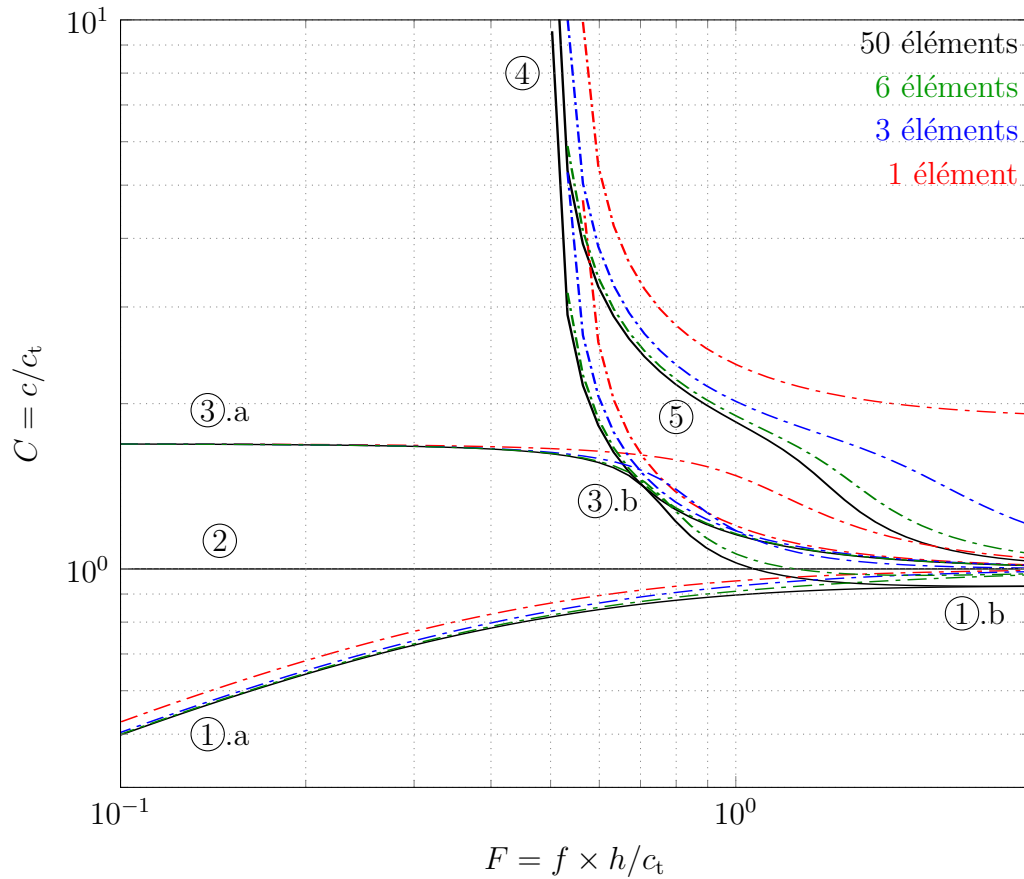


FIGURE I.9 – Cinq premières branches de dispersion. Convergence des résultats SFEM.

$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{23}$	$G_{13}$	$G_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$	$\nu_{12}$	$\rho$
14 000	600	1 000	100	1 800	800	0.3	0.3	0.3	400

TABLE I.1 – Modules de l'ingénieur et coefficients de Poisson utilisés pour décrire le matériau orthotrope (modules en MPa).

composante normale du déplacement  $U_3$  est quadratique, ce qui ne peut être décrit par un nombre trop réduit d'éléments linéaires.

De la même façon, les fréquences d'apparition des modes de cisaillement hors-plan (④ et ⑤) sont surestimées si le maillage utilisé est trop grossier. Le champ de déplacement associé à ces modes (voir figure I.8, ④ et ⑤), qui présente de fortes variations dans l'épaisseur, ne peut être décrit par un tel maillage. Plus haut en fréquence, la tendance qu'ont les modes de flexion et de compression à se transformer en onde de surface (I.9, ①.b et ③.b) exige un maillage très fin pour pouvoir être de façon satisfaisante ; un maillage trop grossier tend à surestimer la vitesse de phase asymptotique.

De façon générale, on supposera dans ce qui suit que les cinq premiers modes d'une plaque homogène (isotrope ou non) sont décrits de façon satisfaisante avec un maillage de 10 éléments dans l'épaisseur, pour les domaines de fréquence auxquels on s'intéresse dans ce travail ( $F < 1$ ).

### I.6.2.2 Matériau orthotrope

La troisième application présentée ici porte sur la propagation des ondes de flexion ①, de cisaillement plan ② et de compression ③ dans une plaque homogène conservative, cette fois composée d'un matériau orthotrope.

Pour les besoins de la présentation, on choisit un matériau dont les propriétés mécaniques s'approchent de celles d'un épicea, avec les fibres orientées selon  $\underline{e}_1$ . Les axes d'orthotropie coïncident donc avec le repère cartésien. Les constantes de l'ingénieur utilisées pour construire la matrice de comportement (voir annexe B.1, équation (B.1.29)) sont données en table I.1. L'épaisseur  $h$  de la plaque est choisie égale à 10mm. Un maillage de 10 éléments est utilisé, en accord avec l'étude sur la convergence des résultats menée précédemment.

Avec l'introduction de l'anisotropie, le nombre de paramètres nécessaires pour décrire le matériau augmente. En conséquence, il n'est plus possible de représenter les résultats sous une forme adimensionnée, dépendant d'un nombre réduit de paramètres, comme dans le cas du matériau isotrope.

**Premiers modes propagatifs** En premier lieu, la vitesse de phase correspondant aux premiers modes propagatifs est représentée sur la figure I.10. Les calculs sont menés pour deux directions de propagation fixées, selon  $\underline{e}_1$  (en bleu) et  $\underline{e}_2$  (en rouge). On a représenté les résultats pour des fréquences allant de 2500 Hz à 250 kHz. Les différents labels ajoutés (de ① à ⑤) correspondent au numéro du mode correspondant dans le cas isotrope (voir figures I.7 et I.8).

L'observation de la figure I.10 permet de remarquer que malgré la complexité amenée par l'anisotropie du matériau, des similitudes existent avec le cas isotrope :

- en basse fréquence, la vitesse de phase de la branche de flexion ① est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence (pente 1/2 en log/log), de façon analogue au cas isotrope (équation (I.2.33)). Avec l'augmentation de la fréquence, la vitesse des ondes de flexion tend vers une valeur asymptotique, proche de la vitesse de cisaillement associée ( $c_{13} = 2120\text{m/s}$  et  $c_{23} = 500\text{m/s}$ , voir équation (I.2.9)); on peut supposer que cette vitesse asymptotique correspond à la vitesse des ondes de Rayleigh en milieu anisotrope.
- le mode de cisaillement plan ② est caractérisé par une vitesse de phase constante sur tout le domaine fréquentiel, comme dans le cas isotrope. De plus, elle est égale dans les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ ; ce mode étant dans ces directions la source de contraintes et déformations de cisaillement planes uniquement ( $\varepsilon_{12}$  et  $\sigma_{12}$ ), ce phénomène illustre la symétrie mineure du tenseur de comportement  $C_{1212} = C_{2121}$ .
- le mode de compression ③, tout d'abord caractérisé par une vitesse asymptotique constante en basse fréquence, possède un domaine de transition (dans le cas étudié ici, entre 50 kHz et 150 kHz) qui voit sa vitesse diminuer pour tendre vers la vitesse des ondes de Rayleigh.
- les modes d'ordre supérieur ④ et ⑤ deviennent propagatifs à partir d'une fréquence donnée. Cette fréquence, en adéquation avec les résultats analytiques (équation (I.4.22)), correspond à la situation pour laquelle l'épaisseur de la plaque est égale à la demie-longueur d'onde des ondes de cisaillement (i.e pour  $f = c_{23}/(2h) = 25\text{ kHz}$  et  $f = c_{13}/(2h) = 106\text{ kHz}$ ).

Malgré les similitudes avec le cas isotrope, l'anisotropie du matériau amène une complexité supplémentaire, principalement contenue dans la dépendance de la vitesse des ondes en fonction de la direction de propagation de celles-ci.

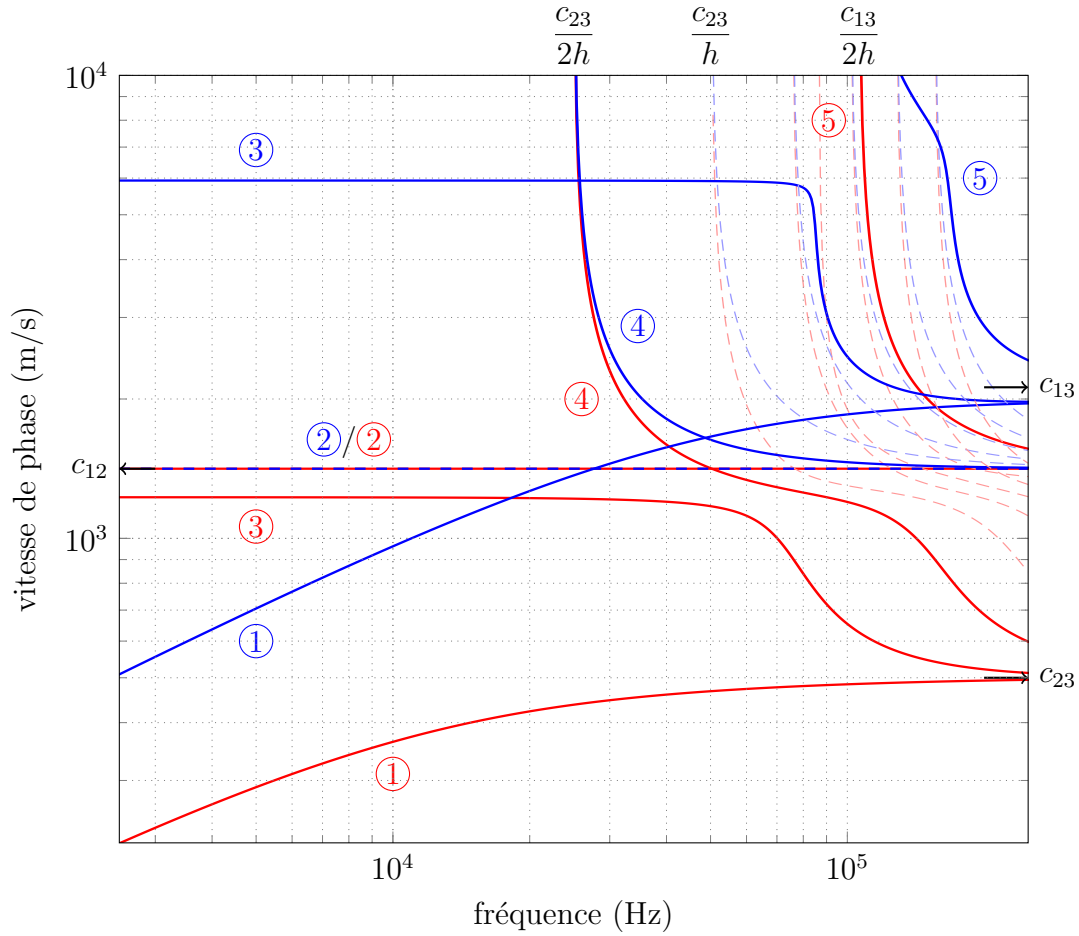
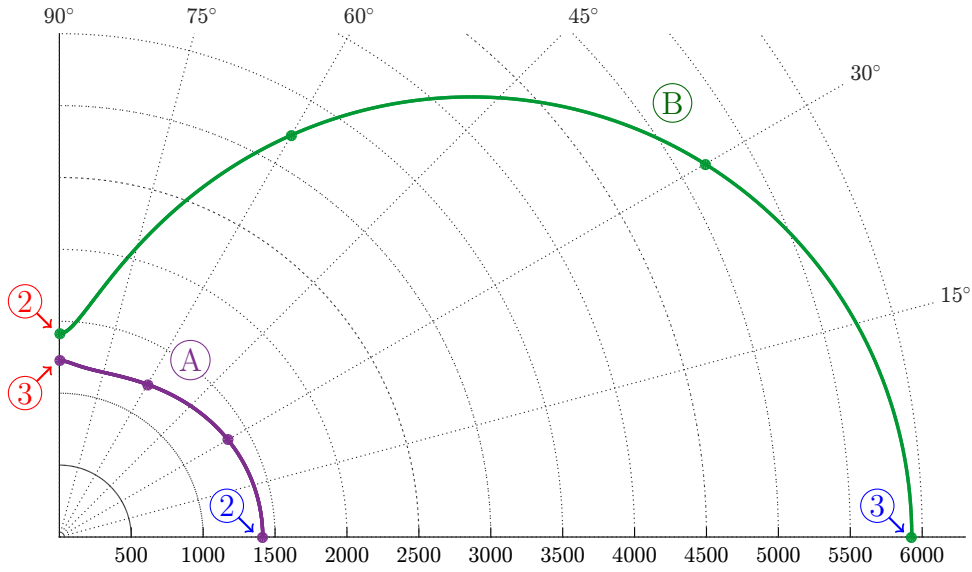


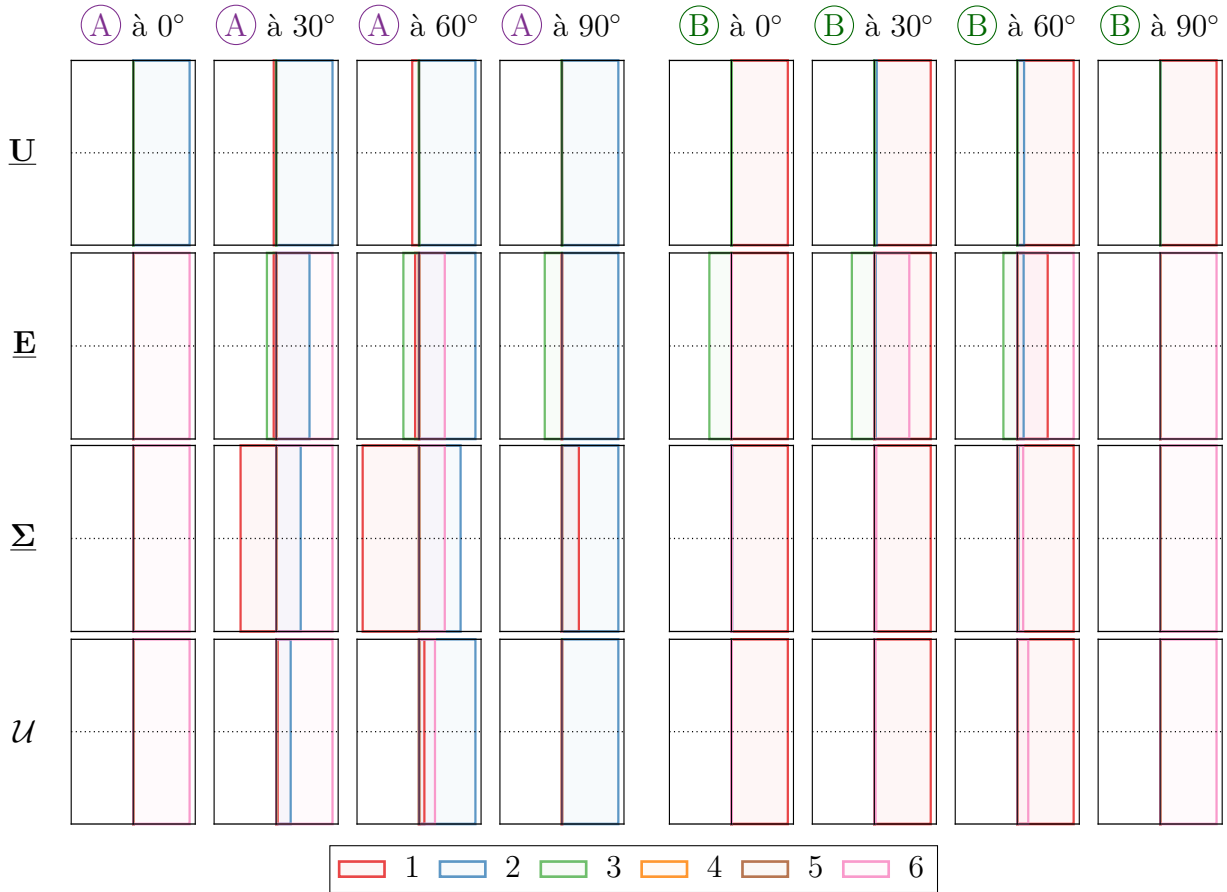
FIGURE I.10 – Plaque homogène conservative, matériau orthotrope. Tracé de la vitesse de phase des premiers modes propagatifs en fonction de la fréquence, pour une direction de propagation fixée selon  $\mathbf{e}_1$  (bleu) et  $\mathbf{e}_2$  (rouge). Les numéros de ① à ⑤ dénotent les modes qui correspondent aux 5 premières solutions propagatives dans le cas isotrope (voir figure I.7).

En particulier, les modes ④ et ⑤ ne deviennent pas propagatifs à la même fréquence, contrairement au cas isotrope (voir figure I.7) ; cela est dû à la différence des vitesses de cisaillement hors-plan élémentaires  $c_{i3}$ , qui entrent dans la détermination des fréquences de coupure de ces modes (équation (I.4.22)). Dans le cas étudié ici, le fort contraste entre les modules  $G_{13}$  et  $G_{23}$  est bien visible sur la figure I.10 : contrairement au cas isotrope, le mode ⑤ n'est pas le second mode d'ordre supérieur à devenir propagatif. En effet, dans cette direction la fréquence correspondant à l'apparition du second mode de cisaillement hors-plan polarisé selon  $\mathbf{e}_2$  (pour  $f = c_{23}/h$ , ligne bleue pointillée) est inférieure à la fréquence d'apparition du mode ⑤ ( $f = c_{13}/(2h)$ ).

**Couplage des mouvements plans** Dans le cas isotrope homogène, on a vu (voir figure I.8, ② et ③.b) que les deuxième et troisième modes propagatifs correspondent en basse fréquence respectivement à une sollicitation de la plaque en cisaillement pur (composante "12") et en contrainte plane (composante "11" dans le repère lié à la direction de propagation des ondes). Avec l'introduction d'un comportement anisotrope monoclinique, les mécanismes régissant les contraintes et déformations planes peuvent présenter certains couplages en fonction de



(a) Vitesse de phase (m/s) à 1000 Hz en fonction de la direction de propagation. Les labels ②, ②, ③ et ③ correspondent respectivement aux mêmes labels sur la figure I.10.



(b) Profils des déplacements  $\underline{U}$ , déformations  $\underline{E}$ , contraintes  $\underline{\Sigma}$  et densités d'énergie  $\mathcal{U}$  correspondant aux solutions (A) et (B) de la figure I.11a et pour différentes directions de propagation. Les couleurs dénotent les différentes composantes (en notation de Voigt).

FIGURE I.11 – Plaque homogène orthotrope. Modes correspondant aux mouvements plans.



la direction de propagation des ondes.

La figure I.11 illustre ce phénomène. A la fréquence de 1000 Hz, les trois premiers modes propagatifs de la plaque orthotrope étudiée sont calculés pour une collection d'angles de propagation des ondes. Le premier mode, correspondant aux ondes de flexion, est écarté. Sur la figure I.11a on a tracé la vitesse de phase des deux autres solutions (dénotées (A) et (B)), qui correspondent à une polarisation du déplacement contenue dans le plan de la plaque. La plaque étant orthotrope, on se contente de représenter la vitesse des ondes pour des angles de propagation allant de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . On a également reporté les labels (2), (3), (2) et (3) sur le diagramme, qui correspondent aux branches labellisées sur la figure I.10. La figure I.11b donne le profil des champs mécaniques associés aux solutions (A) et (B) pour différentes directions de propagation des ondes.

Ces figures permettent d'illustrer l'influence de l'anisotropie du matériau sur les modes de propagation. En particulier, on remarque que le mode (A) est caractérisé par une forte polarisation du déplacement selon  $\mathbf{e}_2$ , quelque soit la direction de propagation  $\phi$  des ondes. Lorsque celle-ci est orientée selon  $\mathbf{e}_1$  ( $\phi = 0^\circ$ ), cette polarisation sollicite la plaque en cisaillement pur ( $\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$ ). Dans le cas où  $\phi = 90^\circ$ , la polarisation de l'onde et la direction de propagation de l'onde sont alignées ; le mode est alors responsable d'une sollicitation du matériau en traction-compression ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ ). Concernant le mode (B), le même type d'observation est possible : ce mode est caractérisé par un déplacement fortement polarisé selon  $\mathbf{e}_1$ . pour  $\phi = 0^\circ$ , cette direction de polarisation et la direction de propagation de l'onde sont alignées ; la plaque est alors sollicitée en traction-compression. Lorsque  $\phi = 90^\circ$ , ces deux directions sont orthogonales ; la plaque est alors sollicitée en cisaillement.

Lorsque la direction de polarisation du mode et la direction de propagation de l'onde ne sont ni alignées ni orthogonales ( $\phi \neq 0^\circ$  et  $\phi \neq 90^\circ$ ), différents couplages apparaissent sur les profils de déformation, de contrainte et de densité d'énergie liés aux modes (A) et (B). Ces modes ne sollicitent alors pas la plaque purement en cisaillement ou en traction-compression ; les sollicitations sont mixtes. De plus, on a vu que le mode (A) passe d'un régime de cisaillement (pour  $\phi = 0^\circ$ ) à un régime de traction-compression (pour  $\phi = 90^\circ$ ) ; le mode (B) opère la transition inverse. En conséquence, l'introduction du comportement anisotrope entraîne une dépendance non seulement de la vitesse des ondes mais aussi de la *nature* des ondes en fonction de leur direction de propagation.

Dans le présent travail, on se limite aux cas des plaques composées de matériaux monocliniques (voir annexe B.1, expression (B.1.16)). Dans ce cas, une plaque homogène de présente pas de couplage, en basse fréquence, entre les ondes de flexion et les ondes polarisées dans le plan de la plaque. En conséquence, on distingue deux comportements : le comportement *en flexion* et le comportement *en membrane*, ce dernier correspondant aux mouvements plans. Dans le cas isotrope, on a vu qu'on peut décomposer le comportement en membrane selon deux sollicitations élémentaires : le cisaillement plan (mode (2)) et la compression (mode (3)). Lorsque le comportement est anisotrope, ces deux sollicitations élémentaires sont dans le cas général présentes simultanément ; en conséquence, il devient difficile de déterminer la nature d'un mode.

Les deux modes caractérisant le comportement en membrane de la plaque sont donc, dans la suite du travail, dénotés par les lettres (A) et (B) pour les différencier du mode de flexion (1) ; ils prennent également l'appellation de *modes de membrane*. Par convention, on dénote par la lettre (A) le mode associé de membrane dont la vitesse de phase asymptotique en basse fréquence est la plus faible.



**Surfaces de dispersion** Afin d'étudier l'effet de l'anisotropie sur les propriétés de dispersion des ondes dans une plaque, il est nécessaire d'effectuer le calcul des modes pour une collection représentative d'angles de propagation et de fréquences. Une fois le calcul effectué, il est alors possible de reconstruire des surfaces en trois dimensions ; en coordonnées cylindriques, elles sont paramétrées par la fréquence (axe  $x_3$ ) et la direction de propagation des ondes (angle polaire). La distance entre l'axe vertical et la surface est donnée par le nombre d'onde (surfaces de lenteur) ou la vitesse de phase (surface de vitesse).

Un exemple de ce type de représentation est donné en figure 1.12. Le calcul des modes propagatifs est effectué pour 20 fréquences entre 500 Hz et 20 kHz et pour 100 directions de propagations uniformément réparties sur le domaine  $[0, 2\pi]$ . A partir de ces calculs sont reconstruites les surfaces de lenteur et de vitesse correspondant aux trois premiers modes propagatifs : le mode de flexion ① en bleu et les deux modes de membrane ② et ③, respectivement en rouge et vert. Aux fréquences considérées, les modes d'ordre supérieur (④, ⑤, etc.) ne sont pas encore propagatifs (voir figure 1.10).

Les deux types de représentation (surfaces de lenteur et de vitesse) ont leur intérêt ; on a pour cette raison choisi de les donner toutes deux ici. Les surfaces de lenteur sont données par le nombre d'onde  $k = |\mathbf{k}|$ , résultat direct du calcul par la méthode SFEM. On verra que la méthode d'analyse en vecteurs d'onde proposée dans ce travail (voir chapitre VII) permet d'identifier une collection de vecteurs d'onde sur la réponse harmonique d'une structure. Sans post-traitement supplémentaire, il est alors possible de représenter un nuage de points expérimentaux  $(\mathbf{k}, \omega)$  dans lequel on cherche à reconnaître les surfaces de lenteur de la structure mesurée.

Les surfaces de vitesse (données par la vitesse de phase  $c = |\mathbf{c}_\phi|$ ) permettent quant à elles de distinguer facilement les modes par leur dispersion en fréquence. Dans l'exemple donné ici, les surfaces de vitesse correspondant aux modes de membrane ② (en rouge) et ③ (en vert) semblent invariantes par rapport à la fréquence (axe vertical) sur la figure 1.12. En effet, on peut voir sur la figure 1.10 que sur le domaine de fréquence étudié ici (500 Hz à 20 kHz), la vitesse de ces ondes ne dépend que très peu de la fréquence. La seule dispersion de ces ondes est donc contenue dans la dépendance de la vitesse en fonction de l'angle de propagation. Cette observation peut être utilisée dans un cadre expérimental pour déterminer la *nature* des ondes correspondant à une collection de vecteurs d'onde identifiés, lorsque la fonction de polarisation associée est inconnue.

La surface de vitesse correspondant au mode de flexion ① (en bleu sur la figure 1.12) est donc la seule à présenter, dans le domaine de fréquence étudié, une dispersion en fréquence. En basse fréquence, cette surface s'apparente à un *cône* (en sens général), puisque la vitesse de phase de ces ondes y est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. Plus la fréquence augmente et plus les effets dispersifs diminuent ; la vitesse des ondes de flexion tend alors, comme on l'a vu, vers la vitesse de Rayleigh. En conséquence, la surface de vitesse associée s'apparente, pour les fréquences les plus élevées du domaine étudié, à un *cylindre*. Une nouvelle fois, ces observations qualitatives permettent, dans un cadre expérimental, d'identifier des vecteurs d'onde liés aux ondes de flexion sans connaître la forme du mode associé.

Les surfaces représentées sur la figure 1.12 peuvent être considérées comme la *carte d'identité* du comportement dynamique linéaire conservatif de la plaque, loin des singularités, et pour des fréquences inférieures à l'apparition des premiers modes d'ordre supérieur. Elles caractérisent la façon dont l'information mécanique est transportée à travers la plaque.

Ces surfaces revêtent un intérêt tout particulier pour les problématiques qui motivent le présent travail : (i) pour la construction d'un modèle réduit de plaque, on peut chercher à décrire de façon optimale ces surfaces avec un nombre réduit de paramètres ; (ii) pour l'identification

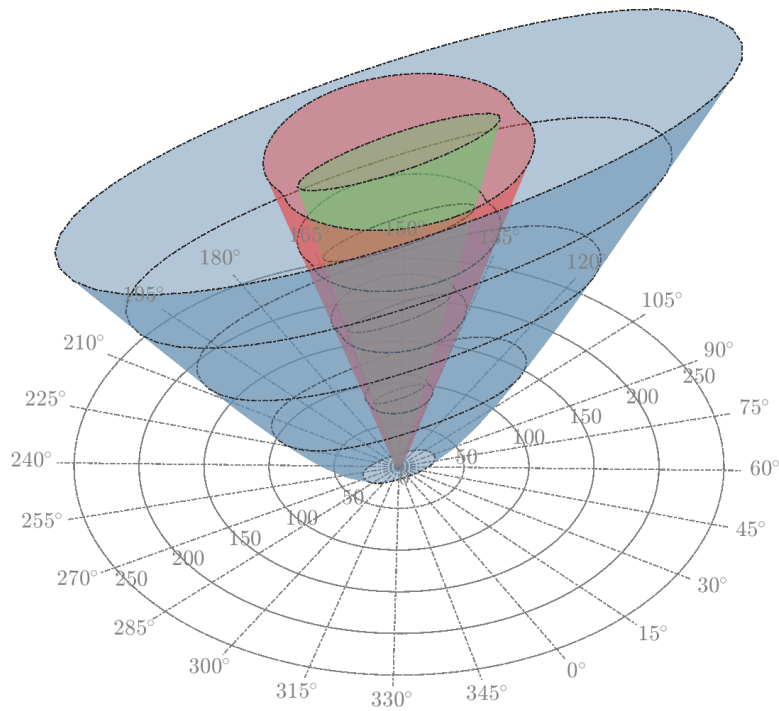
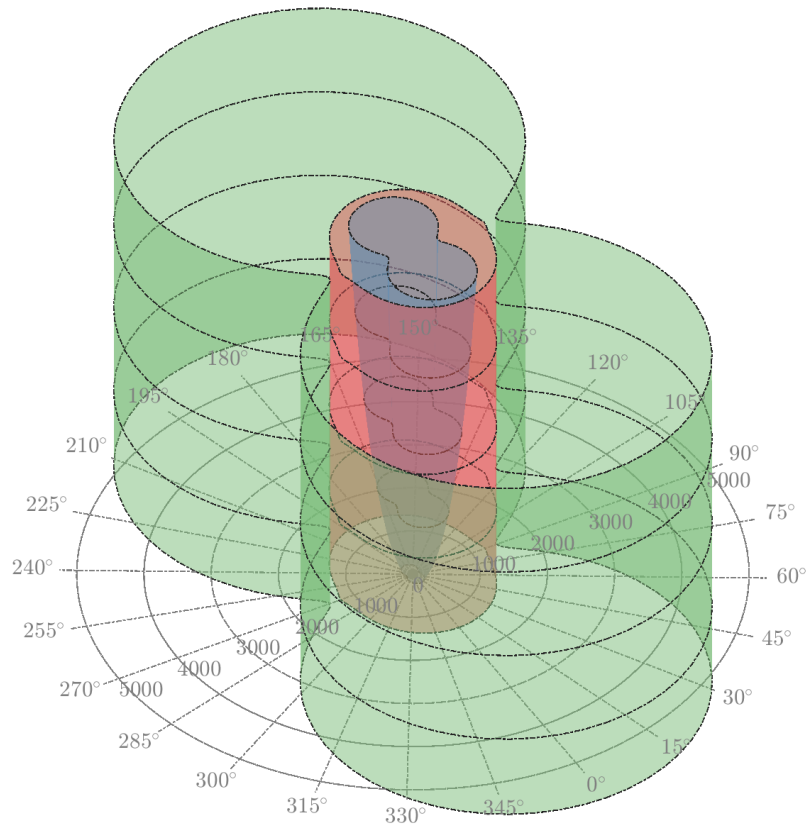
(a) Surfaces de lenteur ( $\underline{k}$ )(b) Surfaces de vitesse ( $\underline{c}_\phi$ )

FIGURE I.12 – Surfaces caractérisant la dispersion des ondes dans une plaque orthotrope, paramétrées par l'angle de propagation et la fréquence (axe  $x_3$ ). Mode de flexion ① (surfaces bleues) et modes de membrane (Ⓐ en rouge et Ⓑ en vert). Lignes iso-fréquence en pointillés (de bas en haut : 500 Hz, 5 kHz, 10 kHz, 15 kHz et 20 kHz).

expérimentale des propriétés du matériau constitutif d'une plaque, on cherche à minimiser la distance entre les surfaces de lenteur théoriques et expérimentales; (iii) dans le cadre du remplacement du matériau de la table d'harmonie par des composites, on cherche à trouver une stratification dont les surfaces de lenteur sont identiques aux surfaces de lenteur de la table en bois.

### I.6.3 Plaques multicouches

Dans ce qui précède, on a donné différentes représentations des résultats de la résolution du problème de propagation des ondes planes dans les structures élancées. On s'est alors intéressé aux plaques homogènes. Dans des cas élémentaires, on a pu interpréter les résultats et discriminer les différents modes responsables du transport de l'information au travers de la structure. L'introduction de l'anisotropie, comme on l'a vu, apporte une complexité supplémentaire de part la dépendance des résultats en fonction de l'angle de propagation des ondes.

Les paragraphes qui suivent abordent le cas des plaques multicouches, qui possèdent une distribution non uniforme des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur. L'aspect multicouche a bien sûr un impact sur la propagation des ondes, même en basse fréquence. En particulier, les profils des champs de déformation et de contrainte se complexifient.

Comme l'éventail des configurations matérielles imaginable est bien trop large, l'étude menée ici se concentre sur deux structures particulières : (i) la plaque sandwich ; (ii) le stratifié monolithique. Ces deux agencements de sont de nos jours très employés dans la conception des structures composites industrielles.

#### I.6.3.1 Sandwich isotrope

Pour l'exemple qui suit, la plaque sandwich choisie est composée de matériaux isotropes ; en conséquence, la direction de propagation des ondes n'influe pas sur les résultats. La plaque est composée de deux matériaux ; une *âme* souple et épaisse, entourée de deux *peaux* raides et minces. La configuration matérielle est symétrique par rapport à la fibre neutre de la plaque.

Les propriétés mécaniques des deux matériaux sont résumées dans le tableau I.2. Le rapport des raideurs des peaux et de l'âme est de 100, tandis que le rapport des épaisseurs respectives est de 1/25. De plus, le matériau composant les peaux est 5 fois plus dense que le matériau composant l'âme.

On étudie la propagation des ondes planes dans cette plaque pour des fréquences allant de 100 Hz à 1 GHz, ce qui représente un domaine de fréquences très étendu ; toutefois, cela permet d'observer le comportement asymptotique en basse et haute fréquence. La direction de propagation des ondes est fixée selon  $\underline{e}_1$ . Le problème est résolu à l'aide du schéma SFEM implémenté ; un maillage de 10 éléments dans chaque peau et 50 éléments dans l'âme est utilisé, largement suffisant pour assurer la convergence des résultats, mais nécessaire pour tracer les profils des champs mécaniques avec une résolution satisfaisante.

	$E$	$\nu$	$\rho$	$c_\ell$	$c_t$	h
peaux	10 GPa	0.3	1000	3669 m/s	1961 m/s	0.2 mm
âme	100 MPa	0.3	200	820 m/s	438 m/s	5 mm

TABLE I.2 – Propriétés de la plaque sandwich isotrope étudiée et vitesses élémentaires associées.

La figure I.13 représente la vitesse de phase correspondant aux 5 premiers modes propagatifs de la plaque. Les différentes branches sont labellisées de ① à ⑤, le numéro dénotant le mode équivalent au cas isotrope homogène (voir figure I.7).

Sur la figure I.14 sont reportés les profils des champs à travers l'épaisseur de la plaque, pour les différentes configurations labellisées sur la figure I.13 et correspondant aux trois premiers modes. De façon à distinguer les peaux de l'âme, on a tracé les interfaces séparant celles-ci à l'aide de lignes pointillées (---).

Les deux figures données dans cet exemple peuvent être comparées aux figures I.7 et I.8 correspondant au cas de la plaque homogène isotrope. On note alors les points communs entre les deux plaques :

- la vitesse de phase des modes de cisaillement plan ② et de compression ③ tend en basse fréquence vers une constante. Dans l'exemple de plaque sandwich donné ici, ces ondes peuvent être considérées non dispersives jusqu'à 10 kHz (voir figure I.13, ②.a et ③.a).
- la vitesse des ondes de flexion ① est, en basse fréquence, proportionnelle à la racine carrée de la fréquence (pente 1/2 sur la représentation log-log de la figure I.13) ; ceci est équivalent au cas isotrope (équation (I.2.33)).
- ces trois premiers modes propagatifs sont caractérisés, en basse fréquence, par des profils de déformation E affine (voir figure I.14, ①.a, ②.a et ③.a).
- avec l'augmentation de la fréquence, les vitesses de phase associées aux modes de flexion et de compression tendent à devenir proches (figure I.13, ①.b et ③.b).

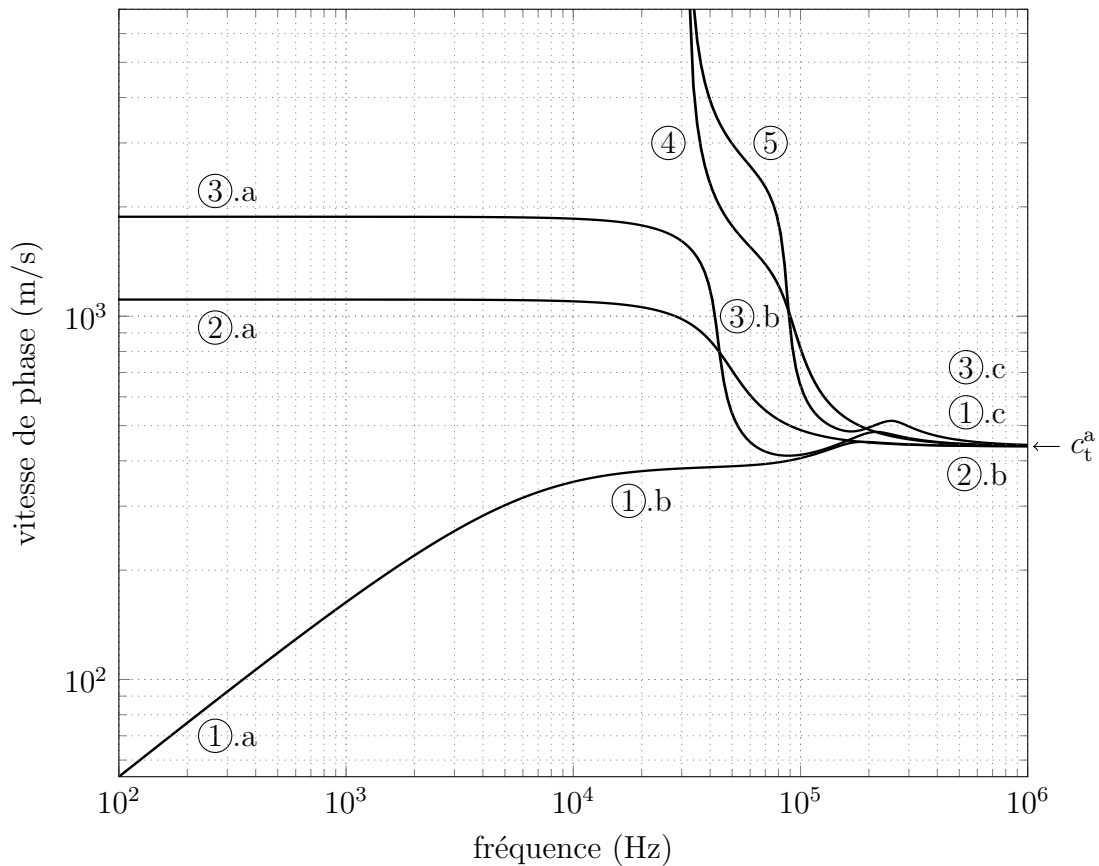


FIGURE I.13 – Plaque sandwich isotrope. Vitesse de phase associée aux cinq premiers modes propagatifs.

- les deux premiers modes d'ordre supérieur ④ et ⑤ deviennent propagatifs pour une fréquence identique. Celle-ci peut être calculée par la recherche des racines de l'équation caractéristique associée (I.4.37) et est égale à  $f = 31.9$  kHz. Sa valeur approximée par le développement proposé en (I.4.39) est  $f = 44.1$  kHz, soit une erreur d'environ 40%.

Toutefois, il est possible d'observer certaines différences entre le cas de la plaque homogène et celui de la plaque sandwich :

- l'inhomogénéité des propriétés mécaniques entraîne des sauts de la partie plane des contraintes  $\underline{\Sigma}$  au niveau des interfaces entre l'âme et les peaux, observables sur la figure I.14. En conséquence, l'énergie de déformation  $\mathcal{U}$  présente également des sauts. Notamment, en basse fréquence, l'énergie de déformation est très majoritairement contenue dans les peaux (voir figure I.14, ①.a, ②.a et ③.a). Au contraire, en haute fréquence, le déplacement est quasiment nul dans les peaux (①.c, ②.b et ③.c) ; l'énergie de déformation est alors complètement confinée dans l'âme du sandwich.
- le mode de cisaillement plan ② devient dispersif à partir de 10 kHz (voir figure I.13). En basse fréquence, ce mode sollicite du cisaillement plan dans les peaux uniquement

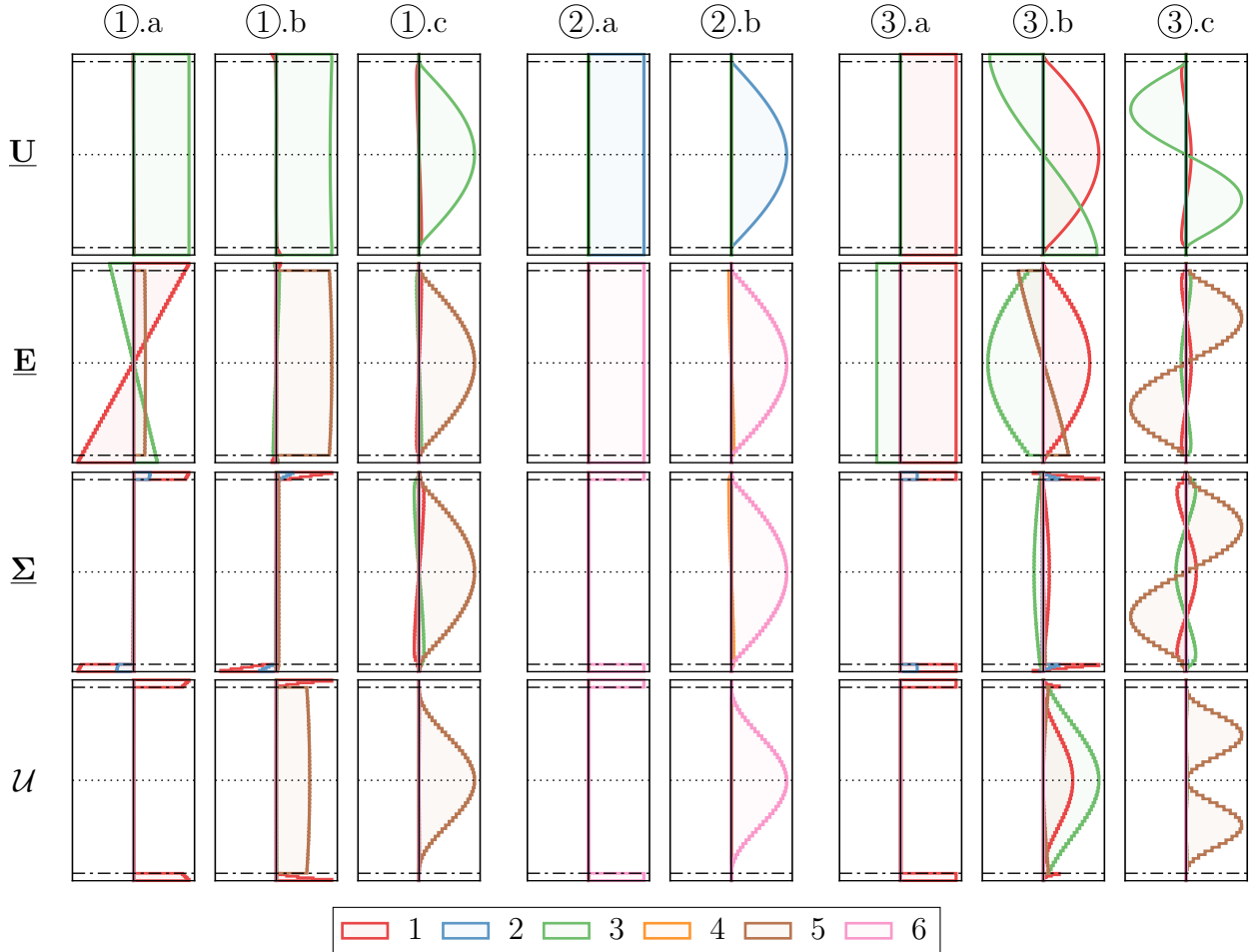


FIGURE I.14 – Plaque sandwich isotrope. Profil des fonctions de polarisation  $\underline{U}$ , des déformations  $\underline{E}$ , contraintes  $\underline{\Sigma}$  et densités d'énergie de déformation  $\mathcal{U}$  associées. Les couleurs dénotent les différents composantes (en notation de Voigt). Les interfaces entre les peaux et l'âme sont dénotées par des lignes pointillées (---), et la fibre neutre par des points (.....). Les différentes configurations (① à ③) correspondent aux points sur la figure I.13.

(figure I.14, ②.a) ; la raideur de celles-ci donne alors une vitesse de phase élevée. Avec l'augmentation de la fréquence, on observe un transfert de la sollicitation des peaux à l'âme ; en en haute fréquence, le cisaillement est contenu uniquement dans cette dernière (figure I.14, ②.b). Le mode redevient alors non-dispersif, et sa vitesse de phase tend vers la vitesse de cisaillement dans l'âme  $c_t^a = 438m/s$ .

- la vitesse de phase liée aux modes ① et ③ présente une dépendance fréquentielle plus complexe que dans le cas homogène. On distingue alors trois régimes, dénotés sur la figure I.13 par les labels ①.a, ①.b et ①.c (respectivement ③.a, ③.b et ③.c). Concernant la flexion ①, la vitesse de phase est marquée par un premier plateau en ①.b ; celui-ci est dû à l'activation du cisaillement transverse dans l'âme (composante  $\varepsilon_{13}$ , voir figure I.14). Lorsque la fréquence augmente encore, les peaux ne sont plus sollicitées ; l'âme est alors sollicitée en cisaillement pur. En conséquence, la vitesse des ondes de flexion tend vers la vitesse de cisaillement du matériau d'âme  $c_t^a$ . Concernant le mode de compression ③, le régime ③.b est marqué par l'augmentation de l'énergie de déformation dans l'âme. En haute fréquence, seule l'âme est sollicitée. La vitesse des ondes de compression tend alors également vers  $c_t^a$ .

De façon générale, on retiendra que les propriétés planes des peaux régissent le comportement asymptotique en basse fréquence. Avec l'augmentation de la fréquence, les propriétés de l'âme en cisaillement entrent en compte. Finalement, en haute fréquence, le comportement asymptotique des trois premiers modes est régit principalement par les propriétés du matériau constituant l'âme.

### I.6.3.2 Stratifié *angle-ply*

Les différences observées entre le cas de la plaque homogène isotrope et celui du sandwich isotrope sont dues au contraste de raideur et de densité entre les matériaux composant les peaux et l'âme de la plaque.

Dans le cas des structures composites en général, les matériaux utilisés dans l'empilement sont anisotropes (i.e renforts fibrés, âmes en nid d'abeille, etc.). Avec l'introduction de matériaux d'âme et de peaux anisotropes, le contraste de raideur entre les différentes couches devient dépendant de la direction de sollicitation de la plaque (ici, la direction de propagation des ondes). Tous les nouveaux phénomènes observés ci-dessus (répartition de l'énergie de déformation, dispersion fréquentielle, etc.) dépendent alors de cette direction, complexifiant encore l'interprétation des résultats.

En conséquence, le choix est pris ici d'étudier le cas d'une plaque multicouche anisotrope *élancée*, c'est à dire dont l'épaisseur est d'un ordre *au moins* plus faible que la longueur d'onde des ondes se propageant dans la plaque. Dans ce cas, seuls trois modes sont propagatifs ; cela correspond aux configurations ①.a, ②.a et ③.a (voir figure I.13). Le comportement anisotrope du matériau utilisé entraîne le couplage des sollicitations en cisaillement plan et en compression, comme on l'a vu dans le cas de la plaque homogène orthotrope. Les deux modes de membrane, numérotés ② pour le cisaillement et ③ pour la traction dans le cas isotrope, sont donc dans

$E_L$	$E_T$	$E_N$	$G_{TN}$	$G_{LN}$	$G_{LT}$	$\nu_{TN}$	$\nu_{LN}$	$\nu_{LT}$	$\rho$	$h$
110 GPa	8 GPa	8 GPa	3 GPa	4 GPa	4 GPa	0.3	0.3	0.3	1450	150 $\mu m$

TABLE I.3 – Propriétés de la couche élémentaire composant le stratifié.



le cas présent couplés. Par analogie avec le cas homogène, les deux modes de membrane sont donc dénotés par les lettres (A) et (B). Ces deux modes sont, en basse fréquence, caractérisés par une vitesse de phase constante ; la vitesse de phase des ondes de flexion est quant à elle proportionnelle à la racine carrée de la fréquence.

La plaque choisie pour cet exemple est composée de quatre couches et symétrique. Les propriétés du matériau isotrope transverse composant la couche élémentaire sont résumées dans le tableau I.3 ; elles correspondent approximativement aux propriétés d'un tissu de pré-imprégné carbone couramment utilisé pour la fabrication de pièces composites. Ces propriétés mécaniques sont données en utilisant la convention *composite* (exprimées dans les directions Longitudinale, Tangentielle et Normale). Les couches composant le stratifié sont en réalité tournées d'un angle  $\theta$  par rapport au repère principal de la plaque, celui-ci coïncidant avec le repère cartésien ( $\mathbf{e}_i$ ).

La stratification choisie est de type *angle-ply* ; la séquence d'empilement des couches est donnée par l'angle  $\theta$  que forme la direction longitudinale de chaque couche avec la direction  $\mathbf{e}_1$ . Celle-ci est de la forme  $[-\theta, \theta, \theta, -\theta]$ . Le calcul des modes est réalisé avec le schéma SFEM proposé, qui utilise un maillage de 60 éléments (15 éléments par couche). Ce maillage, largement suffisant pour assurer la convergence des résultats, permet de tracer les profils des champs mécaniques avec une résolution suffisante.

**Diagrammes polaires de vitesse de phase** La figure I.15 donne la vitesse de phase correspondant à chacun des trois modes propagatifs pour la fréquence de 1000 Hz et en fonction de la direction de propagation des ondes. Le calcul est réalisé pour plusieurs valeurs de  $\theta$  ( $0^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67.5^\circ$  et  $90^\circ$ ), afin de montrer la dépendance du comportement de la plaque en fonction des angles formés par les couches. Dans le cas de la flexion, la vitesse de phase est divisée par la racine carrée de la fréquence ; de cette façon, la représentation donnée est valable pour tout le domaine fréquentiel pour lequel la vitesse des ondes de flexion est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence.

Les empilements correspondant à  $\theta = 0^\circ$  (en bleu) et  $\theta = 90^\circ$  (en vert) sont en fait équivalents ; dans ces deux cas, toutes les couches sont alignées. L'empilement complet se comporte alors comme une plaque orthotrope homogène ; les deux plans de symétrie alignés avec  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont alors bien visibles sur les diagrammes polaires associés.

Le cas  $\theta = 45^\circ$  (en jaune) est également un cas particulier ; dans cette configuration, les deux couches centrales sont tournées de  $90^\circ$  par rapport aux couches supérieure et inférieure. En conséquence, le comportement de la plaque est également orthotrope ; les plans de symétrie sont alors orientés selon  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  (soit à  $45^\circ$  et  $135^\circ$ ).

Les diagrammes des vitesses de phase des modes de membrane (A) et (B) présentent une symétrie orthotrope par rapport au repère de la plaque, quel que soit l'angle  $\theta$ . Ceci est dû à la symétrie de l'empilement par rapport au plan moyen (les propriétés mécaniques présentent une symétrie miroir) et l'équilibrage des angles des couches (la somme des angles est nulle).

Au contraire, le comportement en flexion n'est orthotrope que dans les cas particuliers cités plus haut ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ ). Dans les autres cas (ici  $\theta = 22.5^\circ$  en rouge et  $\theta = 67.5^\circ$  en violet), seule la symétrie centrale du diagramme des vitesses de phase associées est conservée (elle est due au fait que deux ondes se propageant selon  $\mathbf{n}$  et  $-\mathbf{n}$  ont la même vitesse).

En conséquence, on distinguera bien un comportement *orthotrope en membrane* (cisaillement plan et compression) et un comportement *orthotrope en flexion*. Les configurations pour lesquelles l'orthotropie est présente sur le comportement en flexion et sur le comportement en membrane sont des cas assez particuliers. La recherche de séquences d'empilement présentant les mêmes symétries de comportement en membrane et en flexion n'est d'ailleurs pas triviale ;

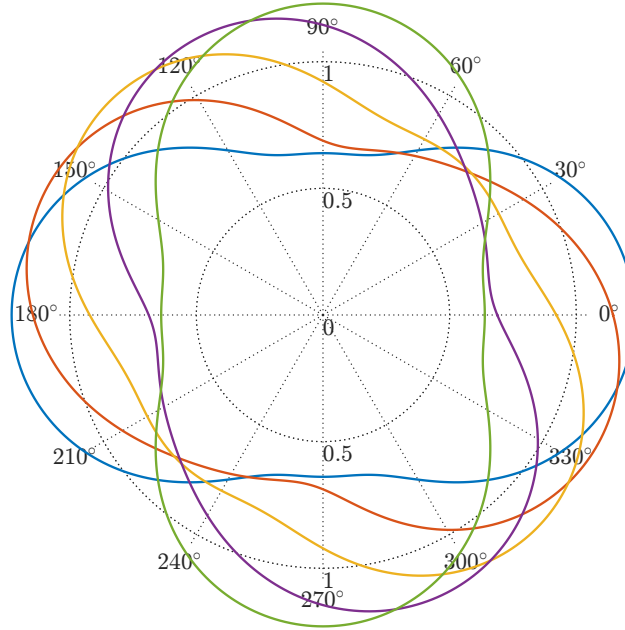
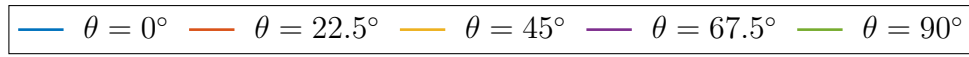
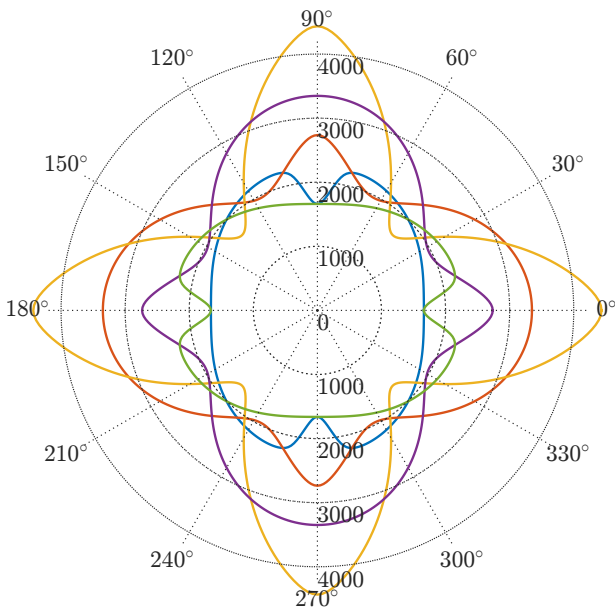
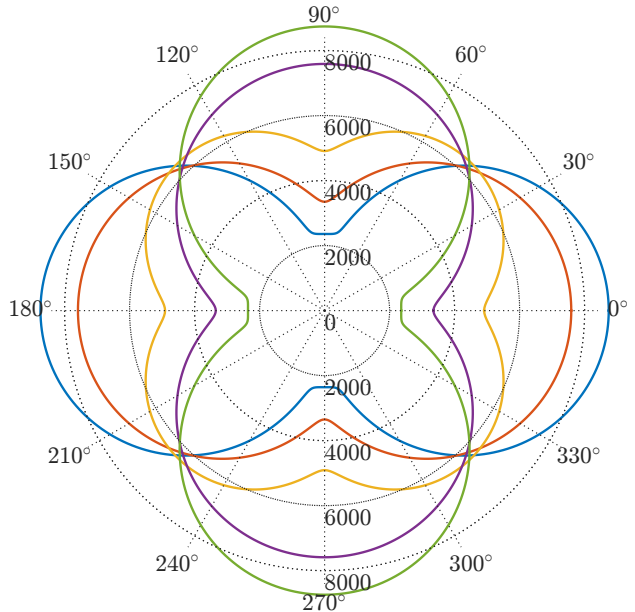
(a) Flexion ① ( $c_\phi \times \omega^{-1/2}$ ).(b) Membrane ① ( $c_\phi$ ).(c) Membrane ② ( $c_\phi$ ).

FIGURE I.15 – Stratifié mince anisotrope, séquence d'empilement  $[-\theta, \theta, \theta, -\theta]$ . Vitesse de phase en fonction de la direction de propagation des ondes et pour différentes valeurs de  $\theta$ . Mode de flexion ① et modes de membrane ① et ②.



elle implique souvent l'utilisation de méthodes d'optimisation. On peut citer les empilements quasi-isotropes étudiés par Vannucci [228].

Les diagrammes de la figure I.15 donnent un aperçu des possibilités offertes par l'utilisation des stratifiés pour la conception des structures. En effet, on peut voir qu'à partir d'un seul matériau de base orthotrope, il est possible d'obtenir une variété de comportements. Le champ des possibles augmente encore avec l'ajout de matériaux différents et l'augmentation du nombre de couches. Il est alors envisageable d'obtenir un comportement *sur mesure*, qui réponde de façon optimale à un cahier des charges.

**Profil des champs mécaniques** Le tracé des profils des champs de déplacement, déformation, contrainte et densité d'énergie permet d'illustrer les phénomènes de couplage à l'origine des comportements différents d'un empilement en flexion et en membrane. La figure I.16 donne la forme de ces champs pour deux empilements équivalents et dans le cas des trois modes considérés ici.

Le premier empilement est de type *cross-ply* ; sa séquence d'empilement est notée  $[0^\circ 90^\circ 90^\circ 0^\circ]$ . Dans cette configuration particulière, le comportement de chaque couche, orthotrope dans le repère "LTN", est également orthotrope dans le repère de la plaque ; en conséquence, l'empilement de type *cross-ply* est orthotrope en flexion *et* en membrane. Le diagramme polaire de vitesse de phase associé correspondrait d'ailleurs, sur la figure I.15, au cas *angle-ply*  $\theta = 45^\circ$  que l'on aurait tourné d'un angle de  $+45^\circ$ .

La figure I.16 montre les profils des champs mécaniques associés aux trois premiers modes pouvant se propager dans la direction  $\mathbf{e}_1$ , qui coïncide donc avec une direction d'orthotropie de l'empilement *cross-ply*. La comparaison du profil des déformations  $\underline{\mathbf{E}}$  dans ce cas et dans le cas isotrope homogène (figure I.8, ①.a, ②.a et ③.a) permet de noter leur similarité : le mode de flexion ① est caractérisé par des déformations de traction-compression ( $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{33}$ ) linéaires et un terme de déformations en cisaillement transverse ( $\varepsilon_{13}$ ) *quasi*-quadratique ; les modes de membrane sont quant à eux caractérisés par une distribution uniforme des déformations. Le comportement du matériau étant orthotrope dans la direction étudiée, celui-ci n'introduit pas de couplage entre les composantes de contrainte et déformation en cisaillement et en traction-compression. Comme dans le cas du sandwich isotrope (figure I.14, ①.a et ③.b), les contraintes planes présentent des sauts au niveau des interfaces ; elles sont, dans le cas de la flexion ① et du second mode de membrane ②, majoritairement contenues dans les peaux. Cela est dû au fort contraste de raideur longitudinale ( $C_{1111}$ ) entre les couches orientées à  $0^\circ$  et celles orientées à  $90^\circ$ . Le premier mode de membrane, quant à lui, est caractérisé par une distribution de la contrainte de cisaillement plan ( $\sigma_{12}$ ) uniforme dans l'épaisseur. Cela est dû à l'invariance du comportement en cisaillement par rotation du matériau de  $90^\circ$ .

L'étude des profils liés à l'empilement *angle-ply*  $[-45^\circ 45^\circ 45^\circ -45^\circ]$  sur la figure I.16 montre l'apparition d'un certain nombre de couplages responsables de la perte du comportement orthotrope en flexion.

Les deux exemples de plaque multicouche donnés ci-dessus ont permis d'illustrer l'impact d'une distribution des propriétés mécaniques non uniforme dans la section d'une plaque sur la dispersion des premières ondes planes pouvant s'y propager.

On a tout d'abord pu observer certains points communs avec le cas homogène. Tout d'abord, seuls trois modes sont propagatifs en basse fréquence, représentés par les mécanismes de flexion ① et de membrane ② et ③. Comme dans le cas homogène, les modes de membrane peuvent être considérés non-dispersifs en basse fréquence, quand la longueur d'onde est grande par

rapport à l'épaisseur de la plaque. Avec la diminution de la longueur d'onde, des modes d'ordre supérieur deviennent propagatifs, de façon analogue au cas homogène.

L'aspect multicouche des structures ici étudiées introduit toutefois une complexité supplémentaire, caractérisée par des différences avec le cas homogène.

Dans le cas de la plaque sandwich isotrope, on montre que la présence de peaux raides influe sur la dispersion fréquentielle des ondes. En particulier, on peut voir que le mode de cisaillement plan ② devient dispersif, alors qu'il ne l'était pas dans le cas homogène. On voit également que la fréquence d'apparition des deux premiers modes d'ordre supérieur ④ et ⑤ est plus difficile à prédire. De la même façon, la vitesse de phase asymptotique en haute fréquence des différents modes, qu'il est possible de donner dans le cas homogène (vitesse des ondes de surface), devient difficile à estimer dans le cas des multicouches.

Dans le cas des plaques composites minces stratifiées de type *angle-ply*, on insiste sur la nécessité de distinguer le comportement *en flexion* du comportement *en membrane*; ceux-ci peuvent présenter des symétries différentes, qu'il faut bien prendre en compte lors de la

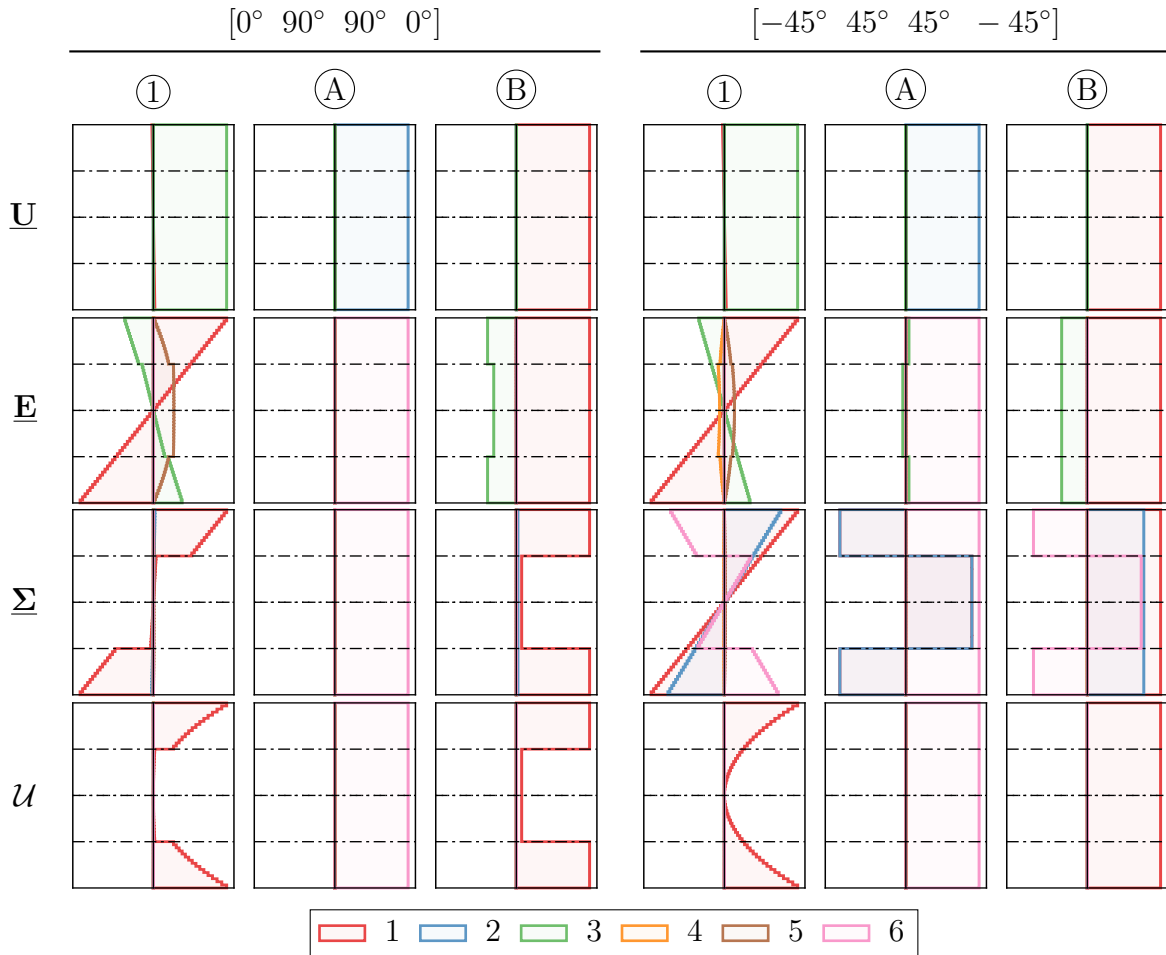


FIGURE I.16 – Plaques mince stratifiées équivalentes, type *cross-ply*  $[0^\circ \ 90^\circ \ 90^\circ \ 0^\circ]$  et *angle-ply*  $[-45^\circ \ 45^\circ \ 45^\circ \ -45^\circ]$ . Trois premiers modes propagatifs correspondant à une onde se propageant dans la direction  $\underline{e}_1$ . Profil des fonctions de polarisation  $\underline{U}$ , des déformations  $\underline{E}$ , contraintes  $\underline{\Sigma}$  et densités d'énergie de déformation  $\mathcal{U}$  associées. Les couleurs dénotent les différents composants (en notation de Voigt). Les interfaces entre les peaux et l'âme sont dénotées par des lignes pointillées (---).

conception d'une structure composite.

#### I.6.4 Mécanismes d'amortissement

Les paragraphes qui suivent cherchent à illustrer les effets de l'introduction de matériaux viscoélastiques sur la dispersion des ondes planes dans les structures élancées.

Le comportement viscoélastique est décrit dans l'espace des fréquences par le tenseur opérationnel  $\underline{\mathbb{C}}$ , qui lie les contraintes  $\underline{\sigma}$  aux déformations  $\underline{\varepsilon}$  (voir annexe B.2 sur la modélisation du comportement viscoélastique des matériaux). Dans tous les exemples qui suivent, le modèle de comportement viscoélastique hystérétique est utilisé (voir annexe B.2, équation (B.2.52)); celui-ci suppose un tenseur opérationnel indépendant de la fréquence. Ce modèle ne respecte donc pas les relations de Kramer-Kronig (annexe B.2, expression (B.2.20)). Cependant, les structures étudiées ici sont supposées peu amorties; dans ce cas, on a pu voir que la dépendance des composantes du tenseur opérationnel en fonction de la fréquence peut être négligée sur un domaine de fréquences assez étendu (voir annexe B.2, équation (B.2.21)). L'emploi du modèle hystérétique peut être justifiée dans ce cas. Il faut toutefois préciser que la dépendance du tenseur opérationnel en fonction de la fréquence peut tout à fait être prise en compte dans le calcul des solutions d'onde; celui-ci est en effet réalisé pour une pulsation  $\omega$  donnée (équation (I.5.11)).

Avec l'introduction du comportement viscoélastique, le problème de la recherche des solutions d'onde (I.3.13) doit être résolu dans le domaine des complexes. Les solutions obtenues (vecteur d'onde  $\underline{k}$ , vitesses  $\underline{c}_\phi$  et  $\underline{c}_e$ , fonctions de polarisation  $\underline{U}$  et champs mécaniques associés) sont alors complexes dans tous les cas; les modes propagatifs, caractérisés par un nombre d'onde purement réel dans le cas conservatif, deviennent également complexes. La partie imaginaire du nombre d'onde décrit alors la décroissance de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation. De façon analogue, les modes évanescents, caractérisés dans le cas conservatif par un nombre d'onde imaginaire pur, possèdent une partie réelle.

Dans l'esprit du modèle hystérétique, on définit l'opérateur  $x \rightarrow \chi(x)$  :

$$x = \operatorname{Re}\{x\} (1 + i \chi(x)) \quad \text{ou} \quad \chi(x) = \frac{\operatorname{Im}\{x\}}{\operatorname{Re}\{x\}} \quad (\text{I.6.1})$$

Celui-ci est utilisé pour décrire les mécanismes d'amortissement en général; utilisé sur les composantes du tenseur opérationnel,  $\chi(C_{ij})$  est égal au facteur de pertes  $\eta_{ij}$  (voir annexe B.2, expression (B.2.57)); utilisé sur le nombre d'onde,  $\chi(k)$  est égal à l'opposé du taux de décroissance spatial  $\gamma$  (équation (I.1.11)).

Les faibles facteurs de pertes utilisés entraînent de faibles taux de décroissance spatiale des ondes. Dans ce cas, la partie imaginaire des grandeurs, liée à  $\chi$ , peut être considérée comme une *perturbation* du cas conservatif. En conséquence, il est possible de raisonner, à l'ordre dominant, sur les résultats des cas conservatifs illustrés ci-dessus; notamment, les profils des champs mécaniques donnés sur les figure I.8, I.11b, I.14 et I.16 peuvent être considérés inchangés. De façon analogue, il est possible d'obtenir une bonne approximation des grandeurs complexes par leur développement au premier ordre en  $\chi$ . Notamment, on note que  $(1 + i \chi(x))^n \approx 1 + i n \chi(x)$ . Cette relation permet par exemple de considérer que  $\chi(c) \approx -\chi(k)$  : le taux de décroissance spatiale lié à  $c$  est opposé au taux de décroissance lié à  $k$ .

Pour finir, on ne s'intéresse dans les exemples qui suivent qu'aux trois premiers modes (*quasi*) propagatifs : la flexion ① et les deux modes de membrane ① et ② (respectivement de cisaillement plan ② et de compression ③ dans le cas isotrope).

## I.6.4.1 Plaque isotrope homogène

$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\rho$	$c_\ell$ (m/s)	$c_t$ (m/s)	$c_R$ (m/s)
$4(1 + i 2\%)$	$2.7(1 + i 5\%)$	2400	$6267(1 + i 1.85\%)$	$3350(1 + i 2.50\%)$	$3107(1 + i 2.44\%)$

TABLE I.4 – Propriétés complexes du matériau composant la plaque homogène isotrope viscoélastique. Vitesses élémentaires et de Rayleigh associées.

Le cas de la plaque homogène étudiée plus haut est repris ici. Dans le cas isotrope, le comportement viscoélastique est introduit par des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  complexes. Les propriétés de la plaque sont résumées dans le tableau I.4, ainsi que les vitesses élémentaires des ondes longitudinales  $c_\ell$  (eq. (I.2.8)), de cisaillement  $c_t$  (eq. (I.2.9)), et la vitesse des ondes de Rayleigh  $c_R$ , obtenue par résolution numérique de l'équation (I.2.24).

Sur la figure I.17 est représenté le facteur de décroissance spatiale  $\chi(c)$  lié aux trois premiers modes propagatifs en fonction de la fréquence adimensionnée. On rappelle que ces trois modes sont la flexion ①, le cisaillement plan ② et la compression ③. Les cinq points labellisés correspondent aux mêmes points sur la figure de vitesse de phase I.7.

La première observation concerne le mode de cisaillement plan ②, dont le facteur de dé-

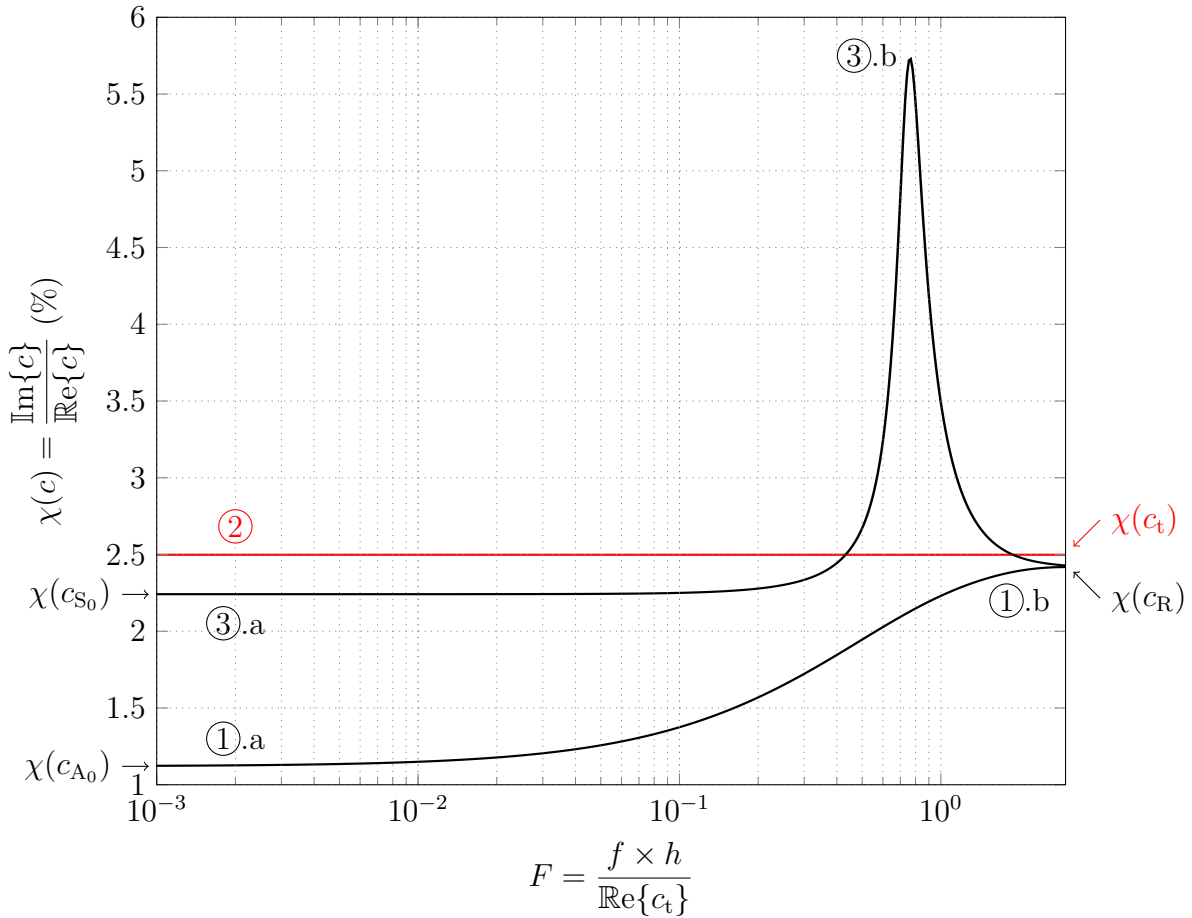


FIGURE I.17 – Plaque homogène isotrope viscoélastique. Facteur de décroissance spatiale en fonction de la fréquence adimensionnée, pour les trois premiers modes propagatifs.

croissance spatiale est constant sur tout le domaine fréquentiel représenté et égal au facteur de décroissance spatiale lié à  $c_t$  (2.5% dans le cas présent). Ce mode, dont on a vu que la vitesse de phase est, dans le cas homogène, également constante sur le domaine fréquentiel entier, sollicite la plaque en cisaillement pur ( $\varepsilon_{12}$ , voir figure I.8). Son taux de décroissance est donc égal à la moitié du facteur de pertes lié au coefficient de cisaillement  $\mu$ . Cela est dû à l'égalité  $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$ ; au premier ordre, on a  $2\chi(c_t) \approx \chi(\mu)$ .

On s'intéresse ensuite aux deux modes de Lamb que sont la flexion ① (ou  $A_0$ ) et la compression ③ (ou  $S_0$ ). On connaît les vitesses de phase asymptotiques en basse fréquence associées à ces deux modes; elles sont respectivement données par les équations (I.2.33) et (I.2.32). On remarque d'ailleurs que ces deux vitesses de phases sont liées par la relation (I.2.34). En conséquence, on a  $\chi(c_{S_0}) = 2\chi(c_{A_0})$ ; le facteur d'amortissement spatial lié aux ondes de flexion est, en basse fréquence et dans le cas isotrope homogène, deux fois plus faible que celui lié aux ondes de compression. Ce phénomène est visible sur la figure I.17 (points ①.a et ③.a); dans le cas présent,  $\chi(c_{S_0}) = 2.24\%$  et  $\chi(c_{A_0}) = 1.12\%$ .

Avec l'augmentation de la fréquence, on observe une augmentation du facteur de décroissance spatiale lié aux ondes de flexion, qui atteint finalement 2.44% en haute fréquence, ce facteur étant égal à celui donné par la vitesse de phase des ondes de surfaces  $c_R$  (voir tableau I.4). Cette augmentation du facteur d'amortissement est due à l'activation des effets de cisaillement transverse avec la diminution de la longueur d'onde (composante  $\varepsilon_{13}$ , voir figure I.8, ①.b). Les pertes dues au cisaillement (associées à  $\mu$ ) étant plus fortes que celles associées aux déformations planes (associées à  $\lambda + 2\mu$ ), le facteur de perte augmente avec l'augmentation des effets de cisaillement.

On peut finalement remarquer que le mode de compression est lui aussi associé à un facteur de décroissance spatiale qui tend vers celui des ondes de Rayleigh en haute fréquence. On observe également un maximum local de  $\chi$  au niveau du point ③.b.

#### I.6.4.2 Sandwich isotrope

	$\lambda$ (MPa)	$\mu$ (MPa)	$\rho$	$c_\ell$ (m/s)	$c_t$ (m/s)
peaux	$5770(1 + i 0.1\%)$	$3850(1 + i 0.5\%)$	1000	$3669(1 + i 1.6\%)$	$1961(1 + i 0.25\%)$
âme	$57.7(1 + i 2\%)$	$38.5(1 + i 5\%)$	200	$821(1 + i 1.85\%)$	$438(1 + i 2.50\%)$

TABLE I.5 – Propriétés complexes des matériaux composant le sandwich isotrope viscoélastique. Vitesses élémentaires associées.

Cet exemple reprend la plaque sandwich isotrope étudiée plus haut; de nouveau, le comportement viscoélastique isotrope est introduit par des coefficients de Lamé complexes. Les propriétés constitutives des matériaux et les vitesses des ondes élémentaires de cisaillement et longitudinales sont reportées dans le tableau I.5. Les coefficients de pertes associés au matériau d'âme sont choisis d'un ordre plus élevé que ceux associés au matériau des peaux. Ce cas de figure est en effet couramment rencontré dans les structures sandwichs, constituées de matériaux d'âmes bien plus dissipatifs (balsa, mousse haute densité, nid d'abeille, etc.) que le matériau qui compose les peaux (renfort fibreux, acier, etc.).

La figure I.18 montre l'évolution du taux de décroissance spatiale  $\chi$  lié à la vitesse de phase, dans le cas des trois premiers modes propagatifs. Les points labellisés de ①.a à ③.c sont identiques à ceux labellisés sur la figure de vitesse de phase dans le cas conservatif (figure I.13).

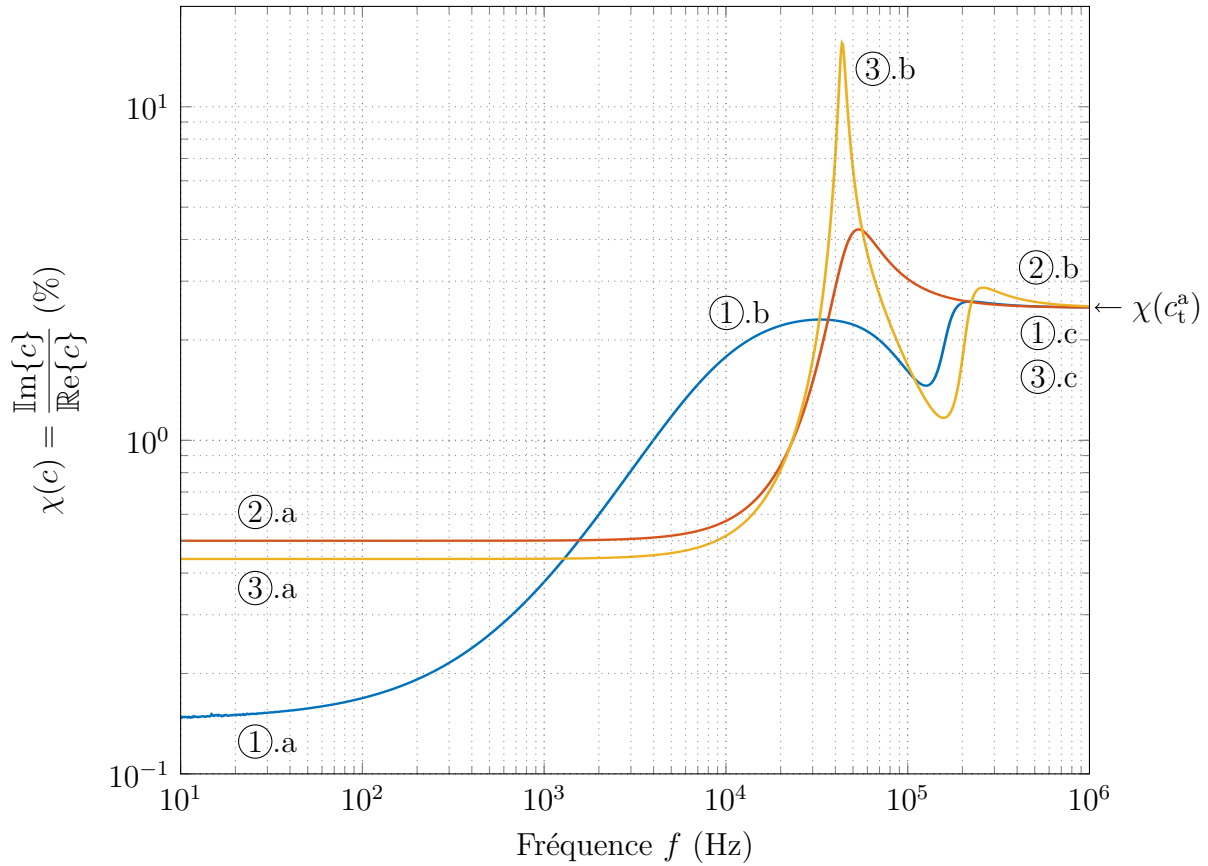


FIGURE I.18 – Sandwich isotrope viscoélastique. Facteur de décroissance spatiale en fonction de la fréquence adimensionnée, pour les trois premiers modes propagatifs.

On remarque tout d'abord que le taux de décroissance spatiale est en basse fréquence plus faible que sur le reste du domaine fréquentiel. On a vu dans le cas conservatif que les peaux régissent le comportement du sandwich en basse fréquence ; or celles-ci sont caractérisées par un des coefficients de perte faibles. En conséquence, l'amortissement des trois modes considérés ici est plutôt faible en basse fréquence.

Avec l'augmentation de la fréquence, on a pu remarquer dans le cas conservatif que l'âme est de plus en plus sollicitée. Or celle-ci présente des mécanismes de perte plus forts ; le taux de décroissance spatiale lié aux trois modes augmente donc en conséquence avec la fréquence, pour finalement atteindre le taux de décroissance  $\chi(c_t^a)$  lié à la vitesse de cisaillement élémentaire dans le matériau d'âme.

#### I.6.4.3 Plaque orthotrope homogène

Le dernier exemple sur l'amortissement des ondes planes dus au comportement viscoélastique des matériaux s'intéresse à l'anisotropie des mécanismes de perte. Pour cela, l'exemple de la plaque orthotrope étudiée plus haut dans le cas conservatif est repris.

Il est préférable, pour définir le comportement viscoélastique, de passer par les *composantes du tenseur opérationnel* plutôt que par des constantes de l'ingénieur complexes (voir annexe B.2 sur la viscoélasticité). Cette démarche est adoptée ici ; les composantes utilisées sont reportées dans le tableau I.6. La partie réelle de ces composantes est égale aux composantes du tenseur des raideurs dans le cas conservatif (construit à partir des constantes de l'ingénieur du tableau

$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{13}$
$14237(1 + i 0.1\%)$	$713(1 + i 2\%)$	$1192(1 + i 0.5\%)$	$323(1 + i 0\%)$	$467(1 + i 0\%)$
$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$	$\rho$
$364(1 + i 0\%)$	$100(1 + i 3\%)$	$1800(1 + i 0.2\%)$	$800(1 + i 1\%)$	400

TABLE I.6 – Composantes complexes (en MPa) du tenseur opérationnel définissant le comportement viscoélastique de la plaque orthotrope.

I.1). Pour les besoins de cet exemple, les composantes  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  et  $C_{23}$  sont choisies réelles ; ce choix n'est en aucun cas du à une restriction de la modélisation, mais plutôt pour simplifier l'interprétation des résultats.

Le taux de décroissance spatiale lié aux trois premiers modes propagatifs est étudié. De façon analogue au cas conservatif, il est possible de calculer, avec le schéma SFEM proposé, le nombre d'onde complexe correspondant aux trois premiers modes propagatifs, pour une collection d'angles de propagation et de fréquences. A partir des résultats obtenus, il est alors possible de construire des surfaces à partir du taux de décroissance spatiale  $\chi$  lié à chaque onde ; celles-ci sont paramétrées par l'angle de propagation et la fréquence. Cette représentation est donnée sur la figure I.19 ; le même code couleur que celui utilisé pour les surfaces de lenteur et de

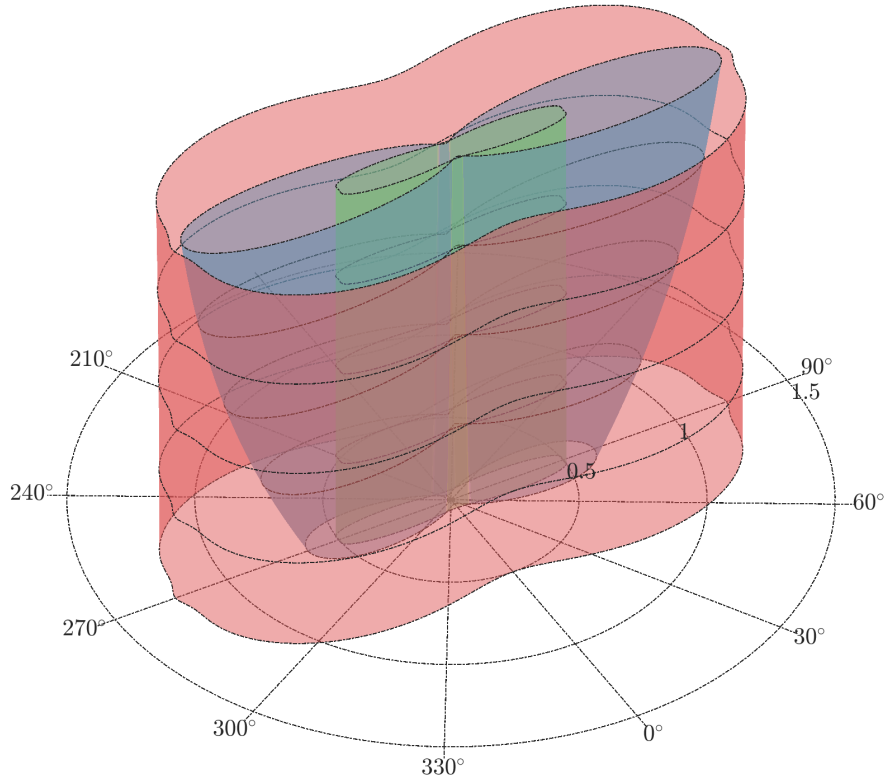


FIGURE I.19 – Surfaces caractérisant la décroissance spatiale des ondes dans une plaque orthotrope, paramétrées par l'angle de propagation et la fréquence (axe  $x_3$ ). La distance à l'axe vertical est déterminée par le taux de décroissance spatiale  $\chi(c)$  (en %). Mode de flexion

① en bleu et modes de membrane ① en rouge et ② en vert. Lignes iso-fréquence en pointillés (de bas en haut : 500 Hz, 5 kHz, 10 kHz, 15 kHz et 20 kHz).



vitesse est employé : la surface bleue correspond au mode de flexion ①, tandis que les modes de membrane ② et ③ sont respectivement représentés en rouge et vert.

L'observation de la figure I.19, conjointement avec les profils des champs mécaniques dans le cas conservatif sur la figure I.11b, permet d'interpréter certaines observations sur les modes de membrane, valables pour le cas étudié ici. Notamment, le mode ② (en rouge) est globalement plus amorti que le mode ③ (en vert). En effet, celui-ci sollicite des mécanismes pour lesquels les effets visqueux sont forts ; à  $0^\circ$ , il est caractérisé par une énergie de déformation en cisaillement plan pur (composante  $\varepsilon_6$ , voir figure I.11b ② à  $0^\circ$ ). Logiquement, son taux de décroissance spatiale est donc égal à la moitié du facteur de pertes lié à  $C_{66}$ . Dans la direction à  $90^\circ$ , on a vu que le mode ② sollicite la plaque en traction-compression dans la direction 2 (figure I.11b, composante 2) ; en conséquence,  $\chi(c)$  est égal, pour ce mode et à  $90^\circ$ , à la moitié du facteur de pertes lié à  $C_{22}$ . Le même type de raisonnement sur le mode ③ permet de justifier son taux de décroissance spatiale relativement plus faible.

Concernant le mode de flexion ①, on remarque une augmentation du taux de décroissance spatiale avec la fréquence. Cette transition est due, comme dans le cas isotrope (voir figure I.17), à l'augmentation des effets de cisaillement transverse. Ces effets, liés à facteurs de pertes plus élevés que ceux liés aux mécanismes plans ( $\chi(C_{13}) > \chi(C_{11})$  et  $\chi(C_{23}) > \chi(C_2)$ ), font donc augmenter le taux de décroissance spatiale des ondes de flexion.

La surface liée au taux de décroissance spatiale représentée sur la figure I.19 s'ajoute aux surfaces de lenteur et de vitesse de la figure I.12 ; ces surfaces caractérisent complètement la façon dont l'information mécanique est transportée (et perdue) dans une plaque viscoélastique. De nouveau, ces surfaces peuvent être vues comme la signature du comportement dynamique de la plaque ; l'identification expérimentale de ces surfaces permettrait de caractériser finement les propriétés des matériaux constitutifs.

### I.6.5 Couplage acoustique

La dernière application de cette partie concernant la prise en compte du couplage acoustique dans le calcul des solutions du problème de propagation des ondes planes dans les plaques (voir section I.3.3).

L'effet du couplage acoustique intervient principalement sur les ondes de flexion ①. Les modes de membrane ② et ③ présentent en effet une composante transverse du déplacement  $U_3$  faible ; celle-ci étant à l'origine du couplage, l'effet de celui-ci sur les propriétés dispersives de ces modes peut être négligée. Certains modes d'ordre supérieur peuvent présenter une composante transverse du déplacement non négligeable ; toutefois, ceux-ci sortent du cadre de ce travail car la fréquence à laquelle ils deviennent propagatifs est hors du domaine d'étude.

Le problème complet est résolu à l'aide du schéma SFEM incluant le terme de couplage (voir section I.5.5). Pour cela, la solution découplée est utilisée comme initialisation du problème de recherche aux valeurs propres non-linéaire (système d'équations (I.5.22)). Ensuite, un calcul itératif type *Inverse Iteration* (voir section précédente) est mené jusqu'à convergence du nombre d'onde  $k$  (ici, le critère d'arrêt est tel quel  $|k_{i+1} - k_i| < 10^{-9} \times k_i$ ). Dans la plupart des cas, un nombre très réduit d'itérations (2 ou 3) permet d'atteindre la convergence.

La masse volumique de l'air  $\rho_a$  et la vitesse du son  $c_a$  choisies correspondent à des conditions normales de pression et de température (pression atmosphérique et température de  $20^\circ$  Celsius). On rappelle alors les valeurs de ces grandeurs (eq. (I.3.34)) :  $\rho_a = 1.204 \text{ kg/m}^3$  et  $c_a = 343.3 \text{ m/s}$ .



### I.6.5.1 Plaque homogène isotrope

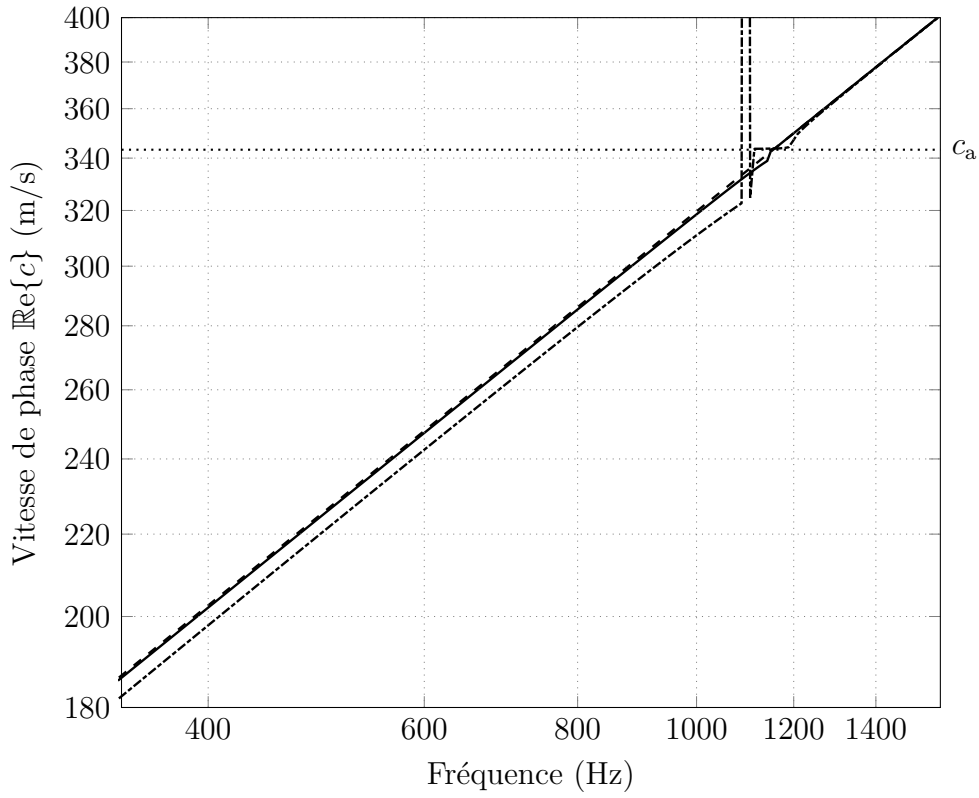
On reprend le cas de la plaque homogène isotrope viscoélastique étudiée plus haut. Le couplage acoustique est ajouté. Deux plaques équivalentes sont données à titre d'exemple : la première (dite *lourde*) correspond aux propriétés données dans le tableau I.4 ; la seconde (dite *légère*) correspond à une version de raideur spécifique équivalente mais de densité 10 fois plus faible ; les propriétés  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\rho$  sont divisées par 10. Ainsi, ces deux plaques sont caractérisées par des vitesses élémentaires  $c_\ell$  et  $c_t$  égales.

La figure I.20 représente les résultats obtenus, montrant l'effet du couplage fluide-structure sur la vitesse de phase complexe des ondes de flexion. Trois cas de figure sont donnés : (i) la plaque sans couplage (---) ; (ii) la plaque *lourde* couplée (—) ; (iii) la plaque *légère* couplée (---).

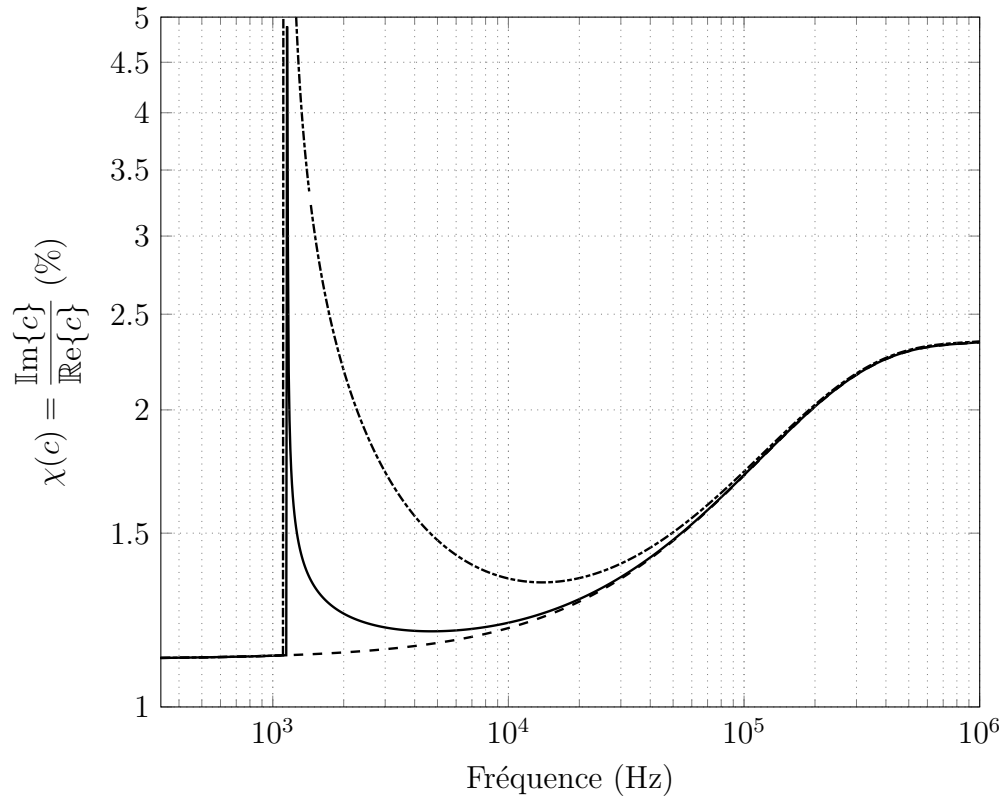
On distingue deux régimes fréquentiels : celui pour lequel la vitesse de phase des ondes de flexion est inférieure à la vitesse du son  $c_a$  (régime *subsonique*) et celui pour lequel elle est supérieure (régime *supersonique*). Dans le cas d'une plaque isotrope, la vitesse des ondes ne dépend pas de leur direction de propagation ; en conséquence, toutes les ondes de flexion passent simultanément du régime subsonique au régime supersonique à la même fréquence. Cette *fréquence de coïncidence* ou *fréquence critique* est dans le cas présent égale à 1150 Hz.

En régime subsonique, l'effet du couplage est visible sur la partie réelle de la vitesse de phase (figure I.20a). Dans ce cas de figure, le nombre d'onde normal dans l'air  $k_3^a$  est imaginaire négatif (équation (I.3.40)) ; le mouvement des particules d'air est donc confiné autour de la plaque. En conséquence, l'impédance de rayonnement  $Z$  est imaginaire positive (eq. (I.3.43)). Son effet représente alors un effet de masse ajoutée (eq. (I.3.22) avec  $Z_R = 0$  et  $Z_I > 0$ ) ; la vitesse de phase diminue donc en conséquence. Cet effet est d'autant plus fort que le rapport  $\rho/\rho_a$  est faible ; dans le cas de la plaque *lourde*, la vitesse est peu modifiée, contrairement au cas de la plaque *légère* (dans ce cas la vitesse de phase diminue de 2.2% dans le régime subsonique par rapport au cas découplé).

En régime supersonique, le nombre d'onde normal  $k_3^a$  devient réel ; les ondes de flexion dans la plaque sont alors responsables de l'émission d'une onde propagative dans l'air. Cette onde émise entraîne des pertes d'énergie ; l'impédance  $Z$  devient réelle, ce qui se concrétise sous la forme d'un effet dissipatif (eq. (I.3.22) avec  $Z_I = 0$  et  $Z_R > 0$ ). Cet effet est bien visible sur la figure (I.20b) : à la fréquence de coïncidence (1150 Hz), le taux de décroissance spatiale  $\chi$  devient très grand dans le cas des plaques couplées. Une nouvelle fois, cet effet est d'autant plus grand que le rapport des densités  $\rho/\rho_a$  est faible. Avec l'augmentation de la fréquence, les ondes de flexion se transforment en ondes de surface (voir figure I.8, ①.b) ; la composante transverse du déplacement  $U_3$  n'est plus dominante dans le mouvement ; en conséquence, le taux de décroissance spatiale additionnel du au couplage diminue.



(a) Vitesse de phase en basse fréquence



(b) Taux de décroissance spatiale

FIGURE I.20 – Plaque homogène isotrope viscoélastique. Effet du couplage acoustique. Plaque sans couplage (—), *lourde* avec couplage (--) et *légère* avec couplage (-.-)

## I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la caractérisation du comportement dynamique des structures viscoélastiques anisotropes multicouches élancées a été abordée par le biais de l'étude de la propagation des ondes planes dans celles-ci. Ce choix a permis de se focaliser sur l'influence des différentes complexités sur les mécanismes de transport de l'information mécanique dans ces structures, en écartant les aspects liés aux conditions aux limites et de chargement.

Après la définition du cadre de travail ainsi que de différentes grandeurs associées à l'étude de la propagation des ondes planes dans les structures, le problème à résoudre a progressivement été introduit. Ainsi, les vitesses élémentaires des ondes en milieu infini ont été définies. Le rôle des interfaces a été illustré, sur l'exemple des solutions remarquables que sont les ondes de Rayleigh, se propageant à la surface des structures, et les ondes de Lamb, se propageant dans les plaques homogènes isotropes. La notion de guide d'onde a ainsi pu être introduite. Après l'expression des formulations fortes et faibles des problèmes associés aux guides d'onde plans et uniaxiaux, la prise en compte du couplage acoustique a été explicitée. Ensuite, une étude des fréquences de coupure des modes d'ordre supérieurs dans les plaques multicouches anisotropes a été présentée. Celles-ci permettent notamment de donner une idée des domaines fréquentiels associés, pour une plaque multicouche, au régimes *basse fréquence* (présence des trois premiers modes propagatifs uniquement) et *haute fréquence* (apparition de modes propagatifs d'ordre supérieur). Après une revue des méthodes de résolution, deux schémas éléments finis spectraux (SFEM) ont été proposés; ceux-ci permettent d'étudier la propagation des ondes planes dans les plaques multicouches composées de plis monocliniques et dans les poutres de section quelconques constituées de matériaux orthotropes. Le post-traitement des résultats a été présenté, permettant d'obtenir les différentes vitesses caractéristiques ainsi que de résoudre le problème incluant le couplage acoustique. Enfin, la dernière section a été consacrée à l'illustration, par le biais d'études de cas, et en utilisant les schémas de résolution implémentés, des différents aspects associés à la propagation des ondes planes dans des structures élémentaires. La complexité de celles-ci, introduite progressivement, a permis de distinguer les effets de la stratification, de l'anisotropie ou encore des mécanismes de perte sur la propagation des ondes. L'observation des profils de déplacement, déformation et contraintes associés à chaque mode a permis de justifier de ces effets.

En particulier, on distingue, dans le régime basse fréquence, le mode de flexion des deux modes de membrane. Dans le cas des plaques isotropes, ces deux derniers sont séparés, et représentent respectivement des sollicitations en cisaillement plan et en traction-compression pures. Dans le cas où le comportement du matériau est anisotrope, ces modes sont couplés et contiennent les contributions des deux mécanismes de déformation. En basse fréquence, les deux modes de membrane sont caractérisés par une vitesse de phase indépendante de la fréquence. Lorsque la fréquence augmente, l'effet Poisson transverse entraîne une forte dispersion des ondes de traction-compression, qui se manifeste d'ailleurs au moment de l'apparition des modes d'ordre supérieur. Concernant le mode de flexion, deux régimes peuvent être discriminés : en basse fréquence, le comportement en flexion est donné par les raideurs planes des matériaux; la vitesse des ondes est alors proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. Avec l'augmentation de la fréquence, la contribution des effets de cisaillement hors-plan ne peut plus être négligée et devient même dominante; la vitesse de ces ondes tend alors à devenir indépendante de la fréquence. Dans le cas des plaques homogènes, la vitesse asymptotique est égale à la vitesse des ondes de surface. L'introduction de la stratification entraîne des effets nouveaux, comme une dispersion du mode de cisaillement plan, non dispersif dans le cas homogène. De plus, il est

nécessaire, lorsque les plis composant la plaque sont anisotropes, de distinguer le comportement en membrane du comportement en flexion. Ces deux comportements ne sont pas, dans le cas général, équivalents : un stratifié orthotrope en membrane n'est pas forcément orthotrope en flexion, et inversement.

La connaissance capitalisée dans le cadre de cette étude permet d'aborder les différents aspects de l'identification des structures développés dans ce travail avec un regard averti :

- identification des mécanismes du mouvement *dominants*, dans le but de formuler des modèles *réduits* et de juger de la validité de ceux-ci. Cet aspect fait l'objet du chapitre II en annexe.
- conception des expérimentations : choix du régime fréquentiel pertinent (sur la base de la prédiction des fréquences de coupure des modes d'ordre supérieur), dimensionnement des maillages de mesure de façon à respecter le critère d'échantillonnage de Nyquist (sur la base de la prédiction des longueurs d'onde).
- formulation de méthodes inverses d'identification basés sur l'extraction d'ondes planes dans la réponse harmonique mesurée d'une structure. Cet aspect motive la proposition d'une méthode d'analyse en vecteurs d'onde, proposée et appliquée dans le cas des poutres viscoélastiques (chapitre VI) et des plaques composites (chapitre VII) ; cette méthode étant permise par la proposition d'une méthode ESPRIT unifiée (chapitre IV).

En particulier, la connaissance de la forme des différentes surfaces de dispersion associées aux différents modes propagatifs permet de donner une idée, dans le cadre de l'analyse en vecteurs d'onde, et lorsque la forme du mode n'est pas disponible, de : (i) la nature du mode (flexion, membrane, torsion d'une poutre) ; (ii) les phénomènes mis en jeu (i.e. comportement de plaque mince, apparition des effets cisaillement hors-plan, influence de l'effet Poisson transverse).



## Chapitre II

# Surfaces de dispersion et correction des modèles réduits de structures élancées

### Résumé

Dans le chapitre qui vient sont dérivés les **surfaces de dispersion** données par les modèles réduits de structure classiques : plaques épaisses, plaques minces, poutres épaisses et poutres minces. L'étude de ces surfaces et la **comparaison avec les résultats de référence** obtenus au chapitre précédent permet de conclure sur le domaine de validité de ces modèles.

Le modèle de plaque épaisse est tout d'abord étudié ; il est formulé à partir de la **cinématique de Hencky-Mindlin**. Il est montré que ce modèle peut décrire de façon très satisfaisante le comportement des plaques dans le régime de fréquence auquel ce travail s'intéresse. L'hétérogénéité des propriétés mécaniques dans l'épaisseur de la plaque oblige toutefois à **corriger le comportement en cisaillement hors-plan** ; les différentes stratégies de correction possibles sont abordées.

Dans un second temps, le modèle de plaque mince, formulé à partir de la **cinématique de Kirchhoff**, est étudié. Les surfaces de dispersions sont dérivées sur la base de la **formulation polaire de l'élasticité plane** ; celle-ci permet de rendre explicite la dépendance des grandeurs associées aux ondes planes en fonction de leur direction de propagation.

Dans un troisième temps, les lois de dispersion des modèles de poutre épaisse et mince, respectivement dérivées des **cinématiques de Timoshenko et de Euler-Bernouilli**, sont données. En plus du comportement en cisaillement hors-plan, il est montré que le **comportement en torsion** donné par les modèles de poutre doit être corrigé.

## II.1 Introduction

L'identification d'une structure ou des matériaux qui la constituent à partir de données expérimentales nécessite la formulation d'un *modèle* de celle-ci, dont on cherche à identifier certains paramètres. Deux choix peuvent alors se présenter : (i) utiliser un modèle *complet* de la structure, qui décrit le comportement tridimensionnel de celle-ci sur la base d'un très grand nombre de degrés de liberté et de paramètres; (ii) utiliser un modèle *réduit* de cette structure, faisant des hypothèses sur son comportement tridimensionnel pour se concentrer sur les mécanismes *dominants* dans la réponse de celle-ci et permettant en conséquence de réduire la taille du problème inverse à résoudre ainsi que le nombre de paramètres à identifier. Dans le présent travail, c'est la deuxième approche qui est mise en œuvre.

Ce chapitre présente donc un travail en cours qui concerne la dérivation, la validation et la correction de modèles réduits de structures élancées permettant de formuler des méthodes d'identification de celles-ci.

**Formulation d'un modèle réduit** Pour la formulation d'un modèle réduit de structure en dynamique, l'approche *cinématique* est généralement retenue; c'est le champ de déplacement dans la section qui est postulé : celui-ci est alors composé de fonctions élémentaires, paramétrées par des degrés de liberté, dits *déplacements généralisés*. Par l'application des équations de la cinématique, les expressions des *déformations généralisées* sont obtenues. Celles-ci sont alors injectées dans le Principe des Travaux Virtuels (PTV) afin d'identifier les *contraintes généralisées*. L'expression de ces dernières permet alors de donner la relation de *comportement en raideur généralisé* associé au modèle. Enfin, les *équations du mouvement généralisées* sont obtenues à partir de la formulation du PTV (formulation faible) et de l'application du théorème de la divergence sur celui-ci (formulation forte). Une formalisation de cette démarche est proposée en annexe C.1.

Certains modèles partent au contraire d'un postulat sur la forme des *contraintes*; on parle alors d'approche *statique* [115, 117]. Le champ de déplacement doit alors être calculé par intégration du champ de déformations, celui-ci étant obtenu à partir des relations de comportement et du champ de contraintes postulé. Cette étape d'intégration, qui nécessite également l'application des équations de compatibilité, complexifie toutefois l'application de ces modèles en dynamique. Des approches encore différentes consistent à utiliser des principes variationnels *mixtes*, qui permettent de postuler la forme du champ de déplacement *et* de contraintes pour formuler un modèle. Ces approches sont particulièrement intéressantes pour la modélisation des plaques multicouches [157, 44].

Dans ce travail, c'est uniquement l'approche cinématique qui est utilisée.

**Pour l'identification des matériaux** Si l'utilisation d'un modèle réduit présente l'avantage de diminuer la taille du problème d'identification, elle implique toutefois d'être précautionneux quant à la formulation de ce modèle. En effet, contrairement à un modèle complet qui permet de décrire une variété de structures de façon *exacte*, un modèle réduit se contente d'*approximer* le comportement de la structure d'intérêt, sur la base d'un faible nombre de degrés de liberté. Il est en conséquence nécessaire d'identifier clairement la validité de ce modèle (i) en fonction du domaine de fréquence considéré; (ii) quant à la prise en compte des complexités de la structure (i.e stratification, anisotropie).

Plus particulièrement, l'identification des propriétés de matériaux passe par l'identification d'une structure *élémentaire* (éprouvette). Le comportement *généralisé* de celle-ci, donné par le

modèle réduit, contient alors la contribution du comportement *tridimensionnel* du ou des matériaux que l'on souhaite identifier. Il est donc nécessaire de connaître finement le lien qui permet de passer du comportement tridimensionnel de la structure à son comportement généralisé : sans cette connaissance, les propriétés matériau identifiées restent intrinsèques à l'éprouvette (i.e géométrie, sollicitations) ; leur injection dans le modèle d'une structure différente pour la simulation de la réponse dynamique de celle-ci peut donc mener à de forts biais.

**Correction des modèles** Notamment, la formulation d'un modèle réduit telle que décrite ci-dessus passe par l'identification des *mécanismes dominants* dans la mise en mouvement de la structure considérée. Le champ cinématique postulé décrit alors généralement de façon correcte le mouvement global de la structure. Toutefois, la relation de comportement en raideur généralisée obtenue peut n'être qu'une approximation très mauvaise du comportement tridimensionnel de la structure. La stratégie communément adoptée consiste alors à *corriger* ce comportement.

Cette correction peut par exemple être réalisée par l'introduction de *coefficients correcteurs*, par le postulat d'un *état de contraintes particulier* ou encore par l'utilisation d'une *loi de mélange* spécifique. La correction du comportement en raideur doit permettre que celui-ci soit le reflet de la solution tridimensionnelle de référence ; que cela concerne la réponse de la structure ou la bonne description des niveaux d'influence de chaque matériau dans cette réponse.

**Objectif** Les développements de ce chapitre concernent en particulier l'étude et la correction des modèles de structures élancées *classiques*, utilisés dans ce travail pour modéliser des plaques et poutres dont la section caractéristique est composée d'un ou plusieurs matériaux viscoélastiques anisotropes. En conséquence, les résultats donnés dans ce chapitre ne représentent pas une réelle nouveauté par rapport aux connaissances de la communauté scientifique sur ces modèles ; il a cependant été jugé utile de conserver le chapitre dans le corpus du document, car les modèles étudiés sont largement utilisés dans ce travail, ainsi que dans la communauté de l'identification des structures en général.

En particulier, les modèles de (i) plaque épaisse (Hencky-Mindlin), (ii) plaque mince (Kirchhoff), (iii) poutre épaisse (Timoshenko) et (iv) poutre mince (Euler-Bernoulli) sont utilisés dans les chapitres qui suivent pour la formulation de méthodes inverses d'identification : le modèle de Hencky-Mindlin est utilisé au chapitre V pour formuler un modèle éléments finis sur lequel se base un problème aux valeurs propres inverse. Le modèle de Kirchhoff est quant à lui utilisé dans le cadre de l'analyse en vecteur d'onde pour l'identification de la raideur en flexion équivalente de plaques hétérogènes (voir chapitre VII). Enfin, les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont utilisés pour l'identification des propriétés viscoélastiques du matériau constitutif d'une poutre par analyse en nombre d'onde (voir chapitre VI).

**Démarche** La démarche adoptée ici est dans la continuité du chapitre précédent : le propos se concentre sur les mécanismes de transport de l'information mécanique, passant par l'étude de la propagation des ondes planes dans les modèles. Ainsi, l'étude réalisée s'affranchit des problématiques concernant la modélisation des chargements et des conditions aux limites (et initiales) en général. Elle s'affranchit également d'une éventuelle variation *spatiale* des propriétés mécaniques : la section caractéristique de chaque structure est supposée invariante par translation le long des dimensions selon lesquelles les ondes se propagent. Les équations de dispersion sont dérivées à partir des équations de la dynamique généralisées correspondant à chaque modèle réduit. Sont alors données les différentes solutions correspondant aux différentes ondes caractéristiques. Ces solutions sont comparées au résultat tridimensionnel de référence, obtenu à partir



du schéma éléments finis spectraux développé au chapitre précédent. Puisqu'elles contiennent le comportement généralisé de la structure, ces solutions permettent, sur la base de la comparaison avec les résultats de référence, d'aborder différentes stratégies permettant la correction du comportement généralisé.

Le chapitre est organisé comme suit : tout d'abord, les surfaces de dispersion du modèle de Hencky-Mindlin (ou plaque épaisse) sont étudiées. Sur la base de la comparaison avec les résultats de référence, différentes stratégies pour la correction du comportement en cisaillement transverse sont abordées. Le modèle de Kirchhoff (plaque mince) est ensuite étudié. Les équations de dispersion obtenues sont réécrites dans le cadre de la formulation polaire de l'élasticité plane, celle-ci pouvant présenter un intérêt particulier pour l'identification des plaques stratifiées. La dernière partie du chapitre est consacrée à l'exposé des branches de dispersion obtenues à partir des modèles de poutre, à commencer par le modèle de Timoshenko (poutre épaisse). De nouveau, la comparaison des solutions obtenues permet de donner la valeur des coefficients de correction, dans le cas d'une poutre homogène orthotrope. Enfin sont données les lois de dispersion correspondant au modèle d'Euler-Bernoulli (poutre mince).

## Modèles de plaques

La formulation d'un modèle de plaque en dynamique passe par le choix d'une cinématique décrivant, par le biais de fonction élémentaires, la variation du champ de déplacement dans l'épaisseur de la plaque. Après intégration des champs mécaniques dans l'épaisseur, le problème de mécanique tridimensionnel à trois degrés de liberté (les trois composantes du déplacement) est transformé en un problème bidimensionnel portant sur un nombre souvent plus élevé de degrés de liberté (3 pour le modèle de plaque mince, 5 pour le modèle de plaque épaisse).

La littérature consacrée à la formulation de modèles réduits de plaques est très importante et les approches fortement diversifiées ; en particulier, un effort conséquent est réalisé sur la modélisation des plaques composites. La richesse de la littérature sur le sujet entraîne d'ailleurs le besoin de formuler une *nomenclature* permettant de situer les différentes approches par rapport au reste des travaux ; on peut par exemple citer les travaux de Carrera à ce sujet [45].

En particulier, deux approches principales sont employées concernant le choix de la cinématique dans le but de formuler un modèle de plaque multicouche : (i) la définition de fonctions dont le support porte sur l'épaisseur complète de la plaque. On parle alors de modèle de *plaque homogène équivalente*. (ii) le choix de fonctions définies *par morceaux*, généralement par couches : ces modèles sont couramment appelés modèles *multiparticulaires* (ou *layer-wise* dans la communauté anglophone) [43, 217]. Les deux approches possèdent leurs avantages et inconvénients, que l'on ne développera pas ici.

Dans les deux sections suivantes sont dérivés les surfaces de dispersion correspondant aux modèles de Hencky-Mindlin (plaque épaisse) et Kirchhoff (plaque mince), largement utilisés par la communauté scientifique pour l'identification des propriétés dynamiques des matériaux. La comparaison ici réalisée des surfaces de dispersion obtenues avec les résultats de référence du chapitre I permet de juger de la validité de ces modèles en fonction de l'application visée (i.e. domaine fréquentiel, structure à identifier). La formulation des modèles de plaque épaisse et plaque mince est rapidement discutée dans le corpus du chapitre ; pour plus de détails, on se référera à l'annexe C, sections C.2 et C.3.

## II.2 Cinématique de Hencky-Mindlin

Le modèle de plaque épaisse à cinq degrés de liberté, ou modèle FOST pour *First-Order Shear Theory*, est sûrement un des modèles les plus utilisés pour résoudre les problèmes de mécanique pour lesquels la structure étudiée, ou une partie de celle-ci, peut être considérée comme une plaque. Ce modèle utilise une cinématique proposée par Hencky [86] et a été formalisé par Mindlin en 1951 [140] pour le cas des plaques homogènes isotropes, d'où son autre nom de modèle de *Hencky-Mindlin*. On note que la première proposition d'un modèle de plaque épaisse remonte aux travaux de Reissner [175, 176], formulés en statique.

L'originalité du modèle de Hencky-Mindlin résidait alors dans la formulation d'un modèle de plaque à même de décrire le mode de flexion d'une façon plus riche que le modèle de Kirchhoff (ou CPT pour *Classical Plate Theory*), déjà établi à l'époque. Se basant sur les solutions des ondes de Lamb, Mindlin propose un modèle de plaque qui prend en compte l'inertie de rotation de la section ; en conséquence, les effets dispersifs observés sur la flexion avec l'apparition du cisaillement hors-plan sont pris en compte. Toutefois, celui-ci est approximé grossièrement ; il est en conséquence nécessaire, même dans le cas élémentaire de la plaque homogène isotrope, d'introduire des corrections sur le comportement afin de décrire correctement les vitesses

asymptotiques des ondes de Lamb en basse et haute fréquence (voir chapitre I, section I.2).

La section qui suit est consacrée à l'étude du modèle de plaque épaisse pour la modélisation des structures qui nous intéressent : des plaques multicouches, constituées de matériaux anisotropes viscoélastiques. la formulation du modèle est rapidement décrite. A partir des équations locales du mouvement obtenues sont dérivées les lois de dispersion des ondes. Sur la base de la comparaison des surfaces de dispersion dérivées du modèle de plaque épaisse avec les résultats du schéma éléments finis spectraux présenté dans le chapitre précédent, la problématique de la correction du comportement en cisaillement hors-plan est abordée. La stratégie à adopter dans le cas des plaques homogènes et dans le cas des plaques sandwichs est validée par comparaison entre les branches de dispersion obtenues avec celles de références.

## II.2.1 Formulation du modèle

Les paragraphes qui suivent résument les différentes étapes qui mènent à la formulation du modèle de plaque épaisse. Cette formulation est décrite plus en détails en annexe C, section II.2. Les arguments donnés ici pour la justification du choix de la cinématique et des corrections du comportement se basent sur l'observation des profils des champs mécaniques illustrés dans les applications du chapitre I (section I.6).

### II.2.1.1 Cinématique

Le modèle de Hencky-Mindlin fait l'hypothèse d'un champ de déplacement affine dans l'épaisseur de la plaque. Le choix de cette cinématique peut être justifié par l'observation des trois premiers modes d'onde plane propagatifs en basse fréquence, étudiés dans le chapitre précédent. Rappelons ici que ces modes sont la flexion ① et les deux modes de membrane ① et ②, ces deux derniers correspondant respectivement au mode de cisaillement plan ② et de compression ③ dans le cas isotrope (voir figure I.7). L'observation des profils de déplacement généralisé  $\underline{\mathbf{U}}$  associés à ces modes en basse fréquence dans le cas de la plaque homogène isotrope (voir figure I.7, ①.a, ② et ③.a) ou dans le cas de la plaque orthotrope (voir figure I.11b) montre que le choix d'une fonction affine pour les composantes planes du déplacement  $u_\alpha$  et uniforme pour la composante hors-plan  $u_3$  de celui-ci semble être une bonne approximation. Pour les plaques multicouches, on remarque dans le cas de la plaque sandwich isotrope (voir figure I.14, ①.a, ②.a et ③.a) comme dans le cas du stratifié (figure I.16) qu'une cinématique affine semble aussi approximer de façon correcte le profil du déplacement en basse fréquence.

Le champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  est donc postulé de la forme :

$$u_\alpha(z) = \Psi_\alpha + z\Phi_\alpha \quad (\text{II.2.1})$$

$$u_3(z) = U_3 \quad (\text{II.2.2})$$

où les déplacements généralisés sont les translations planes  $\underline{\Psi}$ , la flèche  $U_3$  et les rotations de section  $\underline{\Phi}$  de la plaque.

### II.2.1.2 Déformations

L'observation des profils du champ de déformation  $\underline{\mathbf{E}}$  représentés au chapitre I, section I.6 et associés aux trois premiers modes propagatifs (①, ① ou ② et ② ou ③) en basse fréquence permet de critiquer le champ de déformation  $\underline{\mathbf{e}}$  obtenu à partir de la cinématique postulée (voir annexe C, expressions (C.2.7), (C.2.8) et (C.2.9)). En particulier [39] :

- la composante hors-plan  $\varepsilon_{33}$  nulle est une très mauvaise approximation ; on peut voir sur les profils sus-cités que celle-ci est plutôt affine. Pour pallier à ce phénomène, on considère plutôt le *travail* élémentaire  $\mathcal{U}_{33} = \varepsilon_{33}\sigma_{33}$  négligeable ; cela se vérifie bien sur les profils liés à  $\mathcal{U}$  dans le chapitre précédent. En conséquence, l'hypothèse des contraintes planes  $\sigma_{33} = 0$  est formulée ; celle-ci est également bien vérifiée sur les profils associés à  $\underline{\Sigma}$ . Au lieu de la loi de comportement classique, la loi de comportement en contraintes planes (annexe B.1, expression (B.1.6)) est donc utilisée pour formuler le comportement du modèle.
- la composante de cisaillement hors-plan uniforme  $\varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha$  semble également être une mauvaise approximation. Cela peut être observé sur les profils de déformation du chapitre précédent (composante  $E_5$ , mode de flexion ① en basse fréquence) dans le cas de la plaque homogène (figure I.7, ①.a) ou du stratifié (figure I.16, mode ①), pour lesquels cette composante semble être quadratique. En conséquence, un coefficient correcteur  $\xi$  est introduit dans le comportement généralisé associé au cisaillement hors-plan  $\underline{\mathbf{F}}$  (voir annexe C, expression C.2.28). En observant le profil associé au mode de flexion en basse fréquence dans la plaque sandwich (figure I.14, ①.a), on remarque que le profil de  $E_5$  est quasi-uniforme dans l'âme et nul dans les peaux. Ce profil étant encore différent des cas cités précédemment, il vient que le coefficient  $\xi$  introduit dépend de la distribution des propriétés mécaniques dans l'épaisseur de la plaque.

Le champ de déformation finalement considéré dans le modèle de plaque épaisse est de la forme :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(z) = \omega_{\alpha\beta} + z\kappa_{\alpha\beta} \quad , \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}(z) = \gamma_\alpha \quad , \quad \varepsilon_{33}(z) = -\frac{C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}}(\omega_{\alpha\beta} + z\kappa_{\alpha\beta}) \quad (\text{II.2.3})$$

où  $\underline{\omega}$  dénote le tenseur de déformation en membrane,  $\underline{\kappa}$  le tenseur de variation de courbure, et  $\underline{\gamma}$  contient les déformations généralisées de cisaillement hors-plan.

### II.2.1.3 Comportement

Le champ de déformation obtenu permet d'identifier, par son injection dans le Principe des Travaux Virtuels, les contraintes généralisées : efforts membranaires  $\underline{\mathbf{N}}$ , moments de flexion  $\underline{\mathbf{M}}$  et efforts de cisaillement hors-plan  $\underline{\mathbf{V}}$  (voir annexe C, expressions (C.2.14), (C.2.15) et (C.2.16)). Une fois les contraintes généralisées identifiées peut être construite la relation de comportement généralisée. Celle-ci est caractérisée dans le modèle de plaque épaisse par les trois tenseurs d'ordre 4  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  (raideurs membranaires),  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  (raideurs de flexion) et  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  (couplages membrane-flexion) et le tenseur d'ordre 2  $\underline{\mathbf{F}}$  (raideurs en cisaillement hors-plan). On trouvera les expressions respectives de ces tenseurs en annexe C (expressions (C.2.25), (C.2.26), (C.2.27) et (C.2.28)). La relation de comportement généralisée se met sous la forme suivante (annexe C, expression (C.2.29)) :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{N}} \\ \underline{\mathbf{M}} \\ \underline{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \\ \underline{\mathbf{F}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\kappa} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.4})$$

Lorsque la distribution des propriétés mécaniques dans l'épaisseur de la plaque est symétrique par rapport au plan neutre  $z = z_0$  (soit  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(z_0 - z) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(z_0 + z)$ ), le tenseur de couplage  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  est nul.

### II.2.1.4 Équations d'équilibre

L'application du théorème de la divergence sur la version généralisée du PTV obtenu permet notamment d'identifier les équations d'équilibre locales du modèle (formulation forte, voir annexe C, expressions (C.2.52))

$$N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha = M\ddot{\Psi}_\alpha + J\ddot{\Phi}_\alpha \quad (\text{II.2.5})$$

$$V_{\beta,\beta} + F_3 = M\ddot{U}_3 \quad (\text{II.2.6})$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - V_\alpha + m_\alpha = J\ddot{\Psi}_\alpha + I\ddot{\Phi}_\alpha \quad (\text{II.2.7})$$

Ces équations sont utilisées dans ce qui suit pour dériver les équations de dispersion du modèle de plaque épaisse.

## II.2.2 Surfaces de dispersion

### II.2.2.1 Formulation

Les hypothèses prises lors de formulation du problème de propagation des ondes dans les structures au chapitre I, section I.1 sont reproduites ici dans le cadre du modèle de plaque épaisse : (i) éloignement des sources ( $\mathbf{F} = \mathbf{\Theta} = \mathbf{0}$ ); (ii) régime harmonique stationnaire, permettant d'utiliser le principe de correspondance; (iii) séparation des variables d'espace; (iv) *homogénéité* des propriétés mécaniques.

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs et en injectant la loi de comportement et la forme des déformations généralisées dans les équations locales du mouvement exprimées dans l'espace de Fourier, on obtient le système d'équations différentielles homogènes suivant :

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}\Psi_{\gamma,\delta\beta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta}\Phi_{\gamma,\delta\beta} + \omega^2 M\Psi_\alpha + \omega^2 J\Phi_\alpha = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

$$F_{\beta\gamma}(\Phi_{\beta,\gamma} + U_{3,\beta\gamma}) + \omega^2 M U_3 = 0 \quad (\text{II.2.9})$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta}\Psi_{\gamma,\delta\beta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}\Phi_{\gamma,\delta\beta} - F_{\alpha\beta}(\Phi_\beta + U_{3,\beta}) + \omega^2 J\Psi_\alpha + \omega^2 I\Phi_\alpha = 0 \quad (\text{II.2.10})$$

Le champ de déplacement généralisé de la plaque est alors postulé de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{U}}(\omega, \underline{\mathbf{y}}) = \widetilde{\underline{\mathbf{U}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i\underline{\mathbf{k}}\cdot\underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{II.2.11})$$

où  $\widetilde{\underline{\mathbf{U}}}$  est le vecteur des amplitudes complexes liées à chaque composante du déplacement ; on le nomme ici *vecteur polarisation*. De façon générale, les champs mécaniques généralisés (déplacement, déformation, contraintes, efforts) sont de la forme ci-dessus. Pour la suite, on omet les dépendances de ces amplitudes en  $\omega$  et  $\underline{\mathbf{k}}$ , considérées comme implicites.

L'injection de cette forme dans les équations du mouvement homogènes permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$k_\delta k_\beta A_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\Psi}_\gamma + k_\delta k_\beta B_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\Phi}_\gamma = \omega^2 M\tilde{\Psi}_\alpha + \omega^2 J\tilde{\Phi}_\alpha \quad (\text{II.2.12})$$

$$i k_\gamma F_{\beta\gamma}\tilde{\Phi}_\beta + k_\beta k_\gamma F_{\beta\gamma}\tilde{U}_3 = \omega^2 M\tilde{U}_3 \quad (\text{II.2.13})$$

$$k_\delta k_\beta B_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\Psi}_\gamma + k_\delta k_\beta D_{\alpha\beta\gamma\delta}\tilde{\Phi}_\gamma + F_{\alpha\beta}\tilde{\Phi}_\beta - i k_\beta F_{\alpha\beta}\tilde{U}_3 = \omega^2 J\tilde{\Psi}_\alpha + \omega^2 I\tilde{\Phi}_\alpha \quad (\text{II.2.14})$$

Ces équations sont les équivalents des équations de Christoffel établies dans le cas du solide 3D infini (voir chapitre précédent, équation (I.2.4)).

On peut réécrire le système ci-dessus sous la forme :

$$\left( \mathbf{K}_{00} + \mathbf{i} k_1 \mathbf{K}_{10} + \mathbf{i} k_2 \mathbf{K}_{01} + k_1 k_2 \mathbf{K}_{11} + k_1^2 \mathbf{K}_{20} + k_2^2 \mathbf{K}_{02} - \omega^2 \underline{\underline{\Gamma}} \right) \widetilde{\underline{\mathbf{U}}} = \mathbf{0} \quad (\text{II.2.15})$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{00} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & -F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{01} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{12} & F_{22} \\ 0 & 0 & -F_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} 2A_{16} & A_{12} + A_{66} & 0 & 2B_{16} & B_{12} + B_{66} \\ A_{12} + A_{66} & 2A_{26} & 0 & B_{12} + B_{66} & 2B_{26} \\ 0 & 0 & 2F_{12} & 0 & 0 \\ 2B_{16} & B_{12} + B_{66} & 0 & 2D_{16} & D_{12} + D_{66} \\ B_{12} + B_{66} & 2B_{26} & 0 & D_{12} + D_{66} & 2D_{26} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{20} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & 0 & B_{11} & B_{16} \\ A_{16} & A_{66} & 0 & B_{16} & B_{66} \\ 0 & 0 & F_{11} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{16} & 0 & D_{11} & D_{16} \\ B_{16} & B_{66} & 0 & D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{02} &= \begin{bmatrix} A_{66} & A_{26} & 0 & B_{66} & B_{26} \\ A_{26} & A_{22} & 0 & B_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & F_{22} & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & 0 & D_{66} & D_{26} \\ B_{26} & B_{22} & 0 & D_{26} & D_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équations, qui représente un problème aux valeurs propres quadratique, peut être réalisée de façon identique au cas des formulations éléments finis spectraux données au chapitre I, section I.5 (voir expressions (I.5.11) ou (I.5.14)).

### II.2.2.2 Plaque symétrique orthotrope

Dans le cas où la plaque est symétrique, les termes de couplage plan/hors-plan  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  et  $J$  sont nuls. De plus, si le comportement des matériaux constitutifs est orthotrope dans le repère cartésien, les couplages  $A_{\alpha 6} = D_{\alpha 6} = F_{12} = 0$  sont également nuls. Il est donc possible, en posant  $\underline{\mathbf{k}} = k \underline{\mathbf{e}}_1$ , de réduire le système précédent aux 4 équations suivantes :

$$(k^2 A_{66} - \omega^2 M) \tilde{\Psi}_2 = 0 \quad (\text{II.2.16})$$

$$(k^2 A_{11} - \omega^2 M) \tilde{\Psi}_1 = 0 \quad (\text{II.2.17})$$

$$(F_{22} + k^2 D_{66} - \omega^2 I) \tilde{\Phi}_2 = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

$$\left( \begin{bmatrix} k^2 F_{11} - \omega^2 M & \mathbf{i} k F_{11} \\ -\mathbf{i} k F_{11} & F_{11} + k^2 D_{11} - \omega^2 I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_3 \\ \tilde{\Phi}_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.2.19})$$

Les trois premières équations sont scalaires ; elles peuvent donc être résolues sans effort supplémentaire. La dernière est en fait un petit problème aux valeurs propres, qui nécessite donc des développements supplémentaires.

On note que si l'on posait  $\underline{\mathbf{k}} = k \underline{\mathbf{e}}_2$ , on obtiendrait les mêmes équations, avec les indices 1 et 2 intervertis ; on pourra donc transposer les résultats qui suivent à la direction 2 en faisant ce changement d'indices. Ces résultats ne se généralisent toutefois pas à des directions de

propagation des ondes quelconques : le choix d'une direction différente de  $\underline{e}_\alpha$  introduit les couplages  $A_{\alpha 6}$ ,  $D_{\alpha 6}$  et  $F_{12}$ , qui deviennent non nuls.

Les résultats qui suivent sont donnés en fonction des raideurs généralisées  $\underline{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$  et  $\underline{\mathbf{F}}$  et des inerties généralisées  $M$ ,  $J$  et  $I$  ; ils sont donc valables pour les plaques multicouches symétriques orthotropes en général. A chaque fois, le résultat correspondant est donné dans le cas de la plaque homogène, en fonction du tenseur des raideurs  $\underline{\mathbf{C}}$ , du tenseur des raideurs en contraintes planes  $\underline{\mathbf{Q}}$  et de la masse volumique  $\rho$ . Cela permet de comparer le comportement de plaque obtenu avec les valeurs de référence pour les plaques homogènes données au chapitre précédent.

Les résultats qui suivent sont illustrés sur la figure II.1. Les branches de dispersion associées à la propagation des ondes planes dans la plaque orthotrope étudiée au chapitre suivant (voir tableau I.1) y sont représentées, calculées avec le schéma SFEM pris comme référence (lignes noires) et avec le modèle de plaque épaisse (lignes rouges pointillées). On a repris la représentation utilisée dans le cas de la poutre de section rectangulaire (figure I.6) ; l'axe horizontal correspond pour les valeurs positives à la partie réelle  $\kappa$  du nombre d'onde  $k = \kappa - i\tau$  et à la partie imaginaire  $\tau$  pour les valeurs négatives. Il est ainsi possible d'observer le changement de régime des modes aux fréquences de coupure (de évanescent à propagatif). les différentes valeurs remarquables données dans ce qui suit sont également reportées sur la figure.

**Modes de membrane** Les deux premières équations (II.2.16) et (II.2.17) donnent les solutions qui correspondent aux modes de membrane (A) et (B) (ou ② et ③ dans le cas isotrope, voir figure I.10). Dans la direction  $\underline{e}_1$  :

$$\text{mode (A) ou cisaillement plan ② : } c_A^2 = \frac{A_{66}}{M} = \frac{C_{1212}}{\rho} \quad (\text{II.2.20})$$

$$\text{mode (B) ou compression ③ : } c_B^2 = \frac{A_{11}}{M} = \frac{Q_{1111}}{\rho} \quad (\text{II.2.21})$$

Dans le cas homogène, ces vitesses coïncident exactement avec la vitesse asymptotique en basse fréquence des ondes de Lamb correspondantes (I.2.32).

Toutefois, on voit que la vitesse des ondes de compression ③ est indépendante de la fréquence. Cela est dû à la cinématique choisie ; on peut en effet voir sur le profil ③.b de la figure I.7 que la dispersion observée sur le mode de compression est liée à un profil du déplacement non affine dans l'épaisseur. La cinématique du modèle de plaque épaisse est donc trop pauvre pour décrire cet effet.

**Premier mode de cisaillement hors-plan** La troisième équation scalaire (II.2.18) obtenue dans le cas des plaques orthotropes correspond au premier mode de cisaillement hors-plan (voir figure I.10, ④) ; dans la direction  $\underline{e}_1$ , sa vitesse de phase est de la forme :

$$c_4^2 = \frac{\omega^2 D_{66}}{\omega^2 I - F_{22}} \quad (\text{II.2.22})$$

La valeur asymptotique en haute fréquence de cette vitesse est égale à :

$$c_4^2 \underset{\omega \rightarrow \infty}{=} \frac{D_{66}}{I} = \frac{C_{1212}}{\rho} \quad (\text{II.2.23})$$

ce qui est en accord avec la valeur de référence. En basse fréquence, la vitesse de phase de ce mode est imaginaire (car  $\omega^2 I - F_{22} < 0$ ). On remarque d'ailleurs que le nombre d'onde

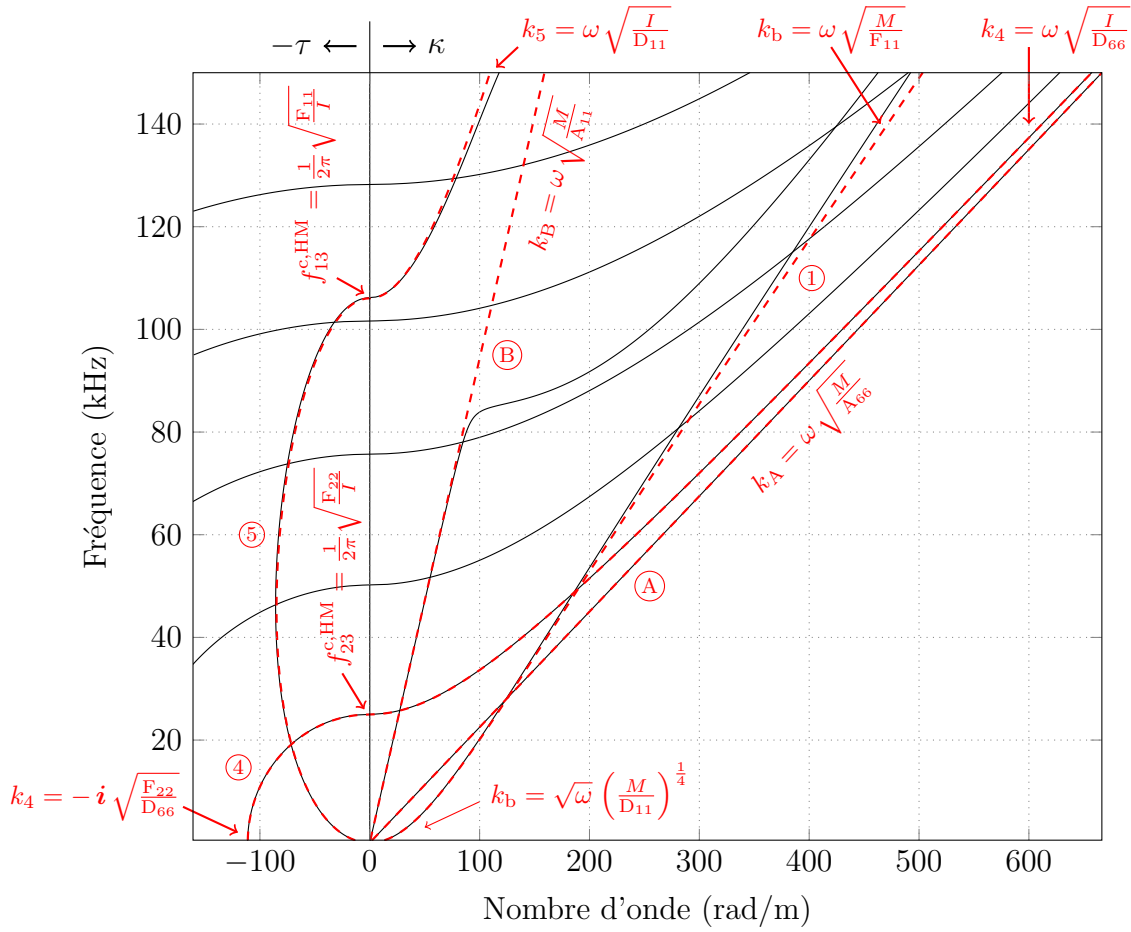


FIGURE II.1 – Dispersion des ondes dans une plaque homogène orthotrope (propriétés mécaniques en table I.1). Parties réelle et imaginaire du nombre d'onde  $k = \kappa - i\tau$  (I.1.11). Comparaison des solutions données par le modèle de plaque épaisse avec  $\xi^2 = \pi^2/12$  (lignes rouges pointillées) avec les résultats SFEM (lignes noires).

imaginaire associé tend vers une valeur finie :

$$k_4 \underset{\omega \rightarrow 0}{=} \pm i \sqrt{\frac{F_{22}}{D_{66}}} = \pm i \frac{\xi}{h} \sqrt{\frac{12C_{2323}}{C_{1212}}} \quad (\text{II.2.24})$$

La fréquence de coupure de ce premier mode de cisaillement hors-plan est donnée par le modèle de plaque épaisse égale à :

$$f_{23}^{c, \text{HM}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F_{22}}{I}} = \frac{\xi}{2\pi h} \sqrt{\frac{12C_{2323}}{\rho}} \quad (\text{II.2.25})$$

On verra dans la suite qu'elle permet d'orienter le choix du coefficient de correction en cisaillement hors-plan  $\xi$ .

**Flexion et second mode de cisaillement hors-plan** La dernière équation (II.2.19) donnée par le modèle de plaque épaisse dans le cas des plaques orthotropes et pour une onde se propageant dans la direction  $\underline{e}_\alpha$  prend la forme d'un problème aux valeurs propres. Pour  $\alpha = 1$ ,



l'équation caractéristique est de la forme :

$$F_{11} D_{11} k^4 - \omega^2 (I F_{11} + M D_{11}) k^2 - \omega^2 M F_{11} + \omega^4 M I = 0 \quad (\text{II.2.26})$$

et ses solutions sont :

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{2} \left[ \left( \frac{I}{D_{11}} + \frac{M}{F_{11}} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{I}{D_{11}} - \frac{M}{F_{11}} \right)^2 + \frac{4}{\omega^2} \frac{M}{D_{11}}} \right] \quad (\text{II.2.27})$$

soit 4 solutions complexes à chaque fréquence.

En particulier, si on prend la limite pour  $\omega \rightarrow 0$ , on obtient :

$$k_b^4 = \omega^2 \frac{M}{D_{11}} = \omega^2 \frac{12}{h^2} \frac{\rho}{Q_{1111}} \quad (\text{II.2.28})$$

Dans le cas conservatif, deux de ces solutions sont évanescentes ( $k$  imaginaire pur) et deux propagatives ( $k$  purement réel) ; ces dernières ont une vitesse de phase  $c = \omega/k$  proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. Cette vitesse asymptotique, dans le cas homogène, correspond bien à la valeur asymptotique de la vitesse du mode de Lamb associé à la flexion ① en basse fréquence (I.2.33).

La fréquence de coupure du second mode de cisaillement hors-plan (mode d'ordre supérieur ⑤) est déterminée en posant  $k = 0$  ; elle est égale à :

$$f_{13}^{c, \text{HM}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F_{11}}{I}} = \frac{\xi}{2\pi h} \sqrt{\frac{12 C_{1313}}{\rho}} \quad (\text{II.2.29})$$

Une nouvelle fois, cette fréquence de coupure dépend de  $\xi$ .

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les solutions sont caractérisées par une vitesse de phase réelle et constante, qui peut prendre deux valeurs remarquables :

$$c_5^2 \underset{\omega \rightarrow \infty}{=} \frac{D_{11}}{I} = \frac{Q_{1111}}{\rho} \quad \text{et} \quad c_b^2 \underset{\omega \rightarrow \infty}{=} \frac{F_{11}}{M} = \xi^2 \frac{C_{1313}}{\rho} = \xi^2 c_{13} \quad (\text{II.2.30})$$

ces vitesses étant respectivement associées au second mode de cisaillement transverse ⑤ et à la flexion ① ; dans le cas homogène, celle-ci est donnée par le modèle égale à la vitesse des ondes élémentaires de cisaillement  $c_{13}$  (équation (I.2.9)).

### II.2.3 Correction du comportement en cisaillement hors-plan

Le choix de la cinématique de Hencky-Mindlin oblige à considérer les composantes de déformation en cisaillement hors-plan  $\varepsilon_{\alpha 3}$  uniformes dans l'épaisseur de la plaque. Sur la base de l'observation des profils de déformation associés au mode de flexion ① et des deux modes d'ordre supérieur ④ et ⑤ dans les différents cas d'étude présentés au chapitre I, section I.6, on a introduit le coefficient de correction  $\xi$ . Celui-ci permet de prendre en compte la mauvaise description des composantes de déformation en cisaillement hors-plan par le modèle de plaque épaisse, celles-ci présentant dans les résultats tridimensionnels de référence un profil non uniforme dans l'épaisseur.

Le choix du coefficient  $\xi$  est en réalité crucial pour décrire de façon correcte les mécanismes de cisaillement hors-plan en jeu dans une plaque multicouche. On a pu noter que ceux-ci sont en

effet responsables d'une forte dispersion sur la branche de flexion dans les plaques sandwichs (voir figure I.13) ; l'augmentation des effets de cisaillement hors-plan dans l'âme est également responsable d'une dispersion des mécanismes d'amortissement (taux de décroissance spatiale des ondes, figure I.18). Une mauvaise prise en compte de ces effets peut en conséquence mener à un biais important sur les résultats d'un problème de structure en dynamique ou sur des paramètres identifiés expérimentalement.

Dans les paragraphes qui suivent sont donc développées différentes approches qui peuvent être utilisées pour choisir le coefficient  $\xi$ , ou même re-penser complètement le comportement généralisé du modèle en cisaillement hors-plan, caractérisé par le tenseur d'ordre deux  $\underline{\mathbf{F}}$ .

### II.2.3.1 Plaques homogènes orthotropes

La fréquence de coupure des deux premiers modes de cisaillement hors plan ④ et ⑤ est en fait connue analytiquement dans le cas des plaques homogènes orthotropes et de la théorie tridimensionnelle ; elle est en effet donnée par la fréquence associée au premier mode antisymétrique (équation (I.4.22),  $n = 1, i = \{1, 2\}$ ) :

$$f_{\alpha 3}^{c,3D} = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{C_{\alpha 3 \alpha 3}}{\rho}} \quad (\text{II.2.31})$$

Le choix du coefficient  $\xi$  peut donc correspondre au souhait d'égaliser les fréquences de coupure  $f_{\alpha 3}^{c,HM}$  données par le modèle de Hencky-mindlin et leur valeur de référence  $f_{\alpha 3}^{c,3D}$  :

$$f_{\alpha 3}^{c,HM} = f_{\alpha 3}^{c,3D} \quad \Leftrightarrow \quad \xi^2 = \frac{\pi^2}{12} \approx 0.822 \quad (\text{II.2.32})$$

Cette valeur du coefficient correcteur en cisaillement hors-plan, très largement utilisée dans la communauté des vibrations, a été proposée par Mindlin dans son article de 1951 [140]. Elle n'est d'ailleurs pas dépendante de la direction : le raisonnement équivalent fait sur les ondes planes se propageant selon  $\underline{\mathbf{e}}_2$  donne le même résultat. Il faut toutefois rappeler que ce résultat n'est valable que dans le cas des plaques homogènes.

Toutefois, on a vu que la vitesse asymptotique  $c_b$  des ondes de flexion en haute fréquence est dans le cas de la plaque homogène sensée être égale à la vitesse des ondes de Rayleigh  $c_R$  (équation (I.2.24)). Le modèle de Hencky-Mindlin la donne en fonction de la vitesse élémentaire des ondes de cisaillement  $c_{13}$  (II.2.30). Cela remet alors en question le choix du coefficient de correction en cisaillement hors-plan  $\xi$ . Une deuxième possibilité peut en effet consister à égaliser les vitesses du mode de flexion asymptotiques données par le modèle et la théorie 3D ; dans ce cas, on a :

$$c_b \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} c_{13} = c_R \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{c_R}{c_{13}} \quad (\text{II.2.33})$$

Le coefficient de correction  $\xi$  est alors dépendant des propriétés mécaniques ; dans le cas isotrope, il dépend du coefficient de Poisson  $\nu$ . la dépendance de  $\xi$  en fonction de  $\nu$  correspond donc alors au résultat représenté sur la figure I.3. Une bonne approximation de  $\xi$  dans le cas homogène isotrope est en conséquence donnée par l'équation (I.2.26).

On note donc deux choix possibles ((II.2.32) et (II.2.33)) pour le coefficient de  $\xi$ . Cette ambiguïté est déjà pointée du doigt dans l'article de Mindlin [140]. Cependant, l'utilisation de la vitesse de Rayleigh pour calculer  $\xi$  représente une complexité supplémentaire par rapport au choix  $\xi^2 = \pi^2/12$ , qui s'accroît encore dans le cas orthotrope. De plus, on note que pour des valeurs usuelles du coefficient de Poisson, les deux valeurs de  $\xi$  sont proches (e.g.  $\nu = 0.3$ ,  $\xi^2 \approx 0.860$  et  $\pi^2/12 \approx 0.822$ ).

La première proposition ( $\xi^2 = \pi^2/12$ ), indépendante des propriétés mécaniques de la plaque, est donc très majoritairement adoptée par la communauté des vibrations ; elle est également utilisée ici dans le cas des plaques homogènes.

### II.2.3.2 Plaques sandwichs orthotropes

L'introduction de l'hétérogénéité des propriétés mécaniques dans l'épaisseur des plaques rend difficile la correction du comportement en cisaillement hors-plan par le choix d'un coefficient  $\xi$ . Notamment, le cas des sandwichs est particulier. On a en effet remarqué que ce type de structure est caractérisé par une densité d'énergie de cisaillement hors-plan  $\mathcal{U}_{\alpha 3}$  très majoritairement contenue dans l'âme (voir la figure I.14 du chapitre I). Le comportement de la plaque en cisaillement hors-plan est en conséquence piloté par les propriétés de celle-ci. Or le comportement généralisé  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  obtenu avec le modèle de plaque épaisse fait intervenir les propriétés de raideur des peaux et de l'âme. En conséquence, la contribution des peaux, généralement beaucoup plus raides que l'âme, est forte ; cela ne correspond pas au résultat de référence.

Pour traiter le problème de la correction, il est alors possible d'utiliser une formulation du comportement complètement différente de celle obtenue lors de la construction du modèle [149, 116]. En particulier, deux lois de mélange simples sont données en annexe C, section C.1.5. Celles-ci proposent de formuler le comportement généralisé  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  soit : (i) comme la somme  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^V$  des raideurs dans l'épaisseur (expression C.1.30) ou (ii) comme l'inverse  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R$  de la somme des souplesses. Dans le cas où les couches composant une plaque multicouche sont orthotropes (soit  $F_{12} = 0$ ), ces deux comportements s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{\alpha\alpha}^V = \int_h C_{\alpha 3 \alpha 3}(z) dz \quad (\text{II.2.34})$$

$$\mathbf{F}_{\alpha\alpha}^R = h^2 \left[ \int_h \frac{1}{C_{\alpha 3 \alpha 3}(z)} dz \right]^{-1} \quad (\text{II.2.35})$$

La première proposition  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^V$  équivaut en fait à choisir  $\xi = 1$  dans le comportement  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  obtenu lors de la dérivation du modèle.

En reprenant le schéma d'une plaque sandwich symétrique donné au chapitre I (voir figure I.5), les deux comportements associés au cisaillement hors-plan s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{F}_{\alpha\alpha}^R = C_{\alpha 3 \alpha 3}^a \frac{(h_a + 2h_p)^2}{h_a} \left( 1 + \frac{2h_p}{C_{\alpha 3 \alpha 3}^p} \frac{C_{\alpha 3 \alpha 3}^a}{h_a} \right)^{-1} \quad (\text{II.2.36})$$

$$\mathbf{F}_{\alpha\alpha}^V = 2h_p C_{\alpha 3 \alpha 3}^p + h_a C_{\alpha 3 \alpha 3}^a \quad (\text{II.2.37})$$

Si le rapport des épaisseurs  $h_p/h_a$  est petit et le contraste des raideurs  $C_{\alpha 3 \alpha 3}^p/C_{\alpha 3 \alpha 3}^a$  est grand, alors  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R$  est donné par la raideur en cisaillement transverse de l'âme uniquement ; au contraire, les deux termes constituant  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^V$  restent du même ordre de grandeur. En conséquence, la forme du comportement généralisé  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R$  est plus représentative du comportement d'un sandwich.

**Branches de dispersion** Sur la figure II.2 sont représentées les branches de dispersion obtenues avec le modèle de plaque épaisse, pour le cas de la plaque sandwich isotrope déjà étudiée au chapitre précédent (voir tableau I.2). En lignes pointillées rouges sont tracées les branches obtenues en utilisant  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^V$  et en lignes bleues pointillées celles obtenues avec  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R$ . Les résultats de

référence, donnés par le schéma SFEM développé au chapitre précédent, sont superposés (lignes noires) et les branches correspondantes labellisées de ① à ⑤.

En reprenant les formules (II.2.37) et (II.2.36) ci-dessus, on obtient à partir des propriétés du tableau I.2 :  $F^V = 1.73 \text{ MPa.m}$  et  $F^R = 0.224 \text{ MPa.m}$ , soit un rapport de 7.72 entre les deux comportements. Ce rapport peut être observé sur la figure II.2 : la pente asymptotique du mode de flexion ① en haute fréquence donné par le modèle de plaque épaisse ( $k_b \rightarrow \omega(F/M)^{1/2}$ , équation (II.2.30)) diffère grandement entre les deux versions du comportement.

Le comportement  $\underline{\underline{F}}^V$  surestime donc largement la raideur en cisaillement hors-plan du sandwich. Le comportement  $\underline{\underline{F}}^R$  décrit en l'occurrence bien mieux les premiers modes caractéristiques de la plaque : (i) la branche de flexion ① est plus proche de la solution de référence qu'en utilisant la borne de Voigt ; (ii) la fréquence de coupure des modes d'ordre supérieur ④ et ⑤ ainsi que le nombre d'onde imaginaire asymptotique en basse fréquence de la branche ④ sont bien mieux approximés.

Pour finir, on note de façon logique que les branches ② et ③ correspondant aux mouvements plans sont décrites de façon similaire avec les deux comportements : les modes correspondant n'activent pas le cisaillement hors-plan dans la plaque.

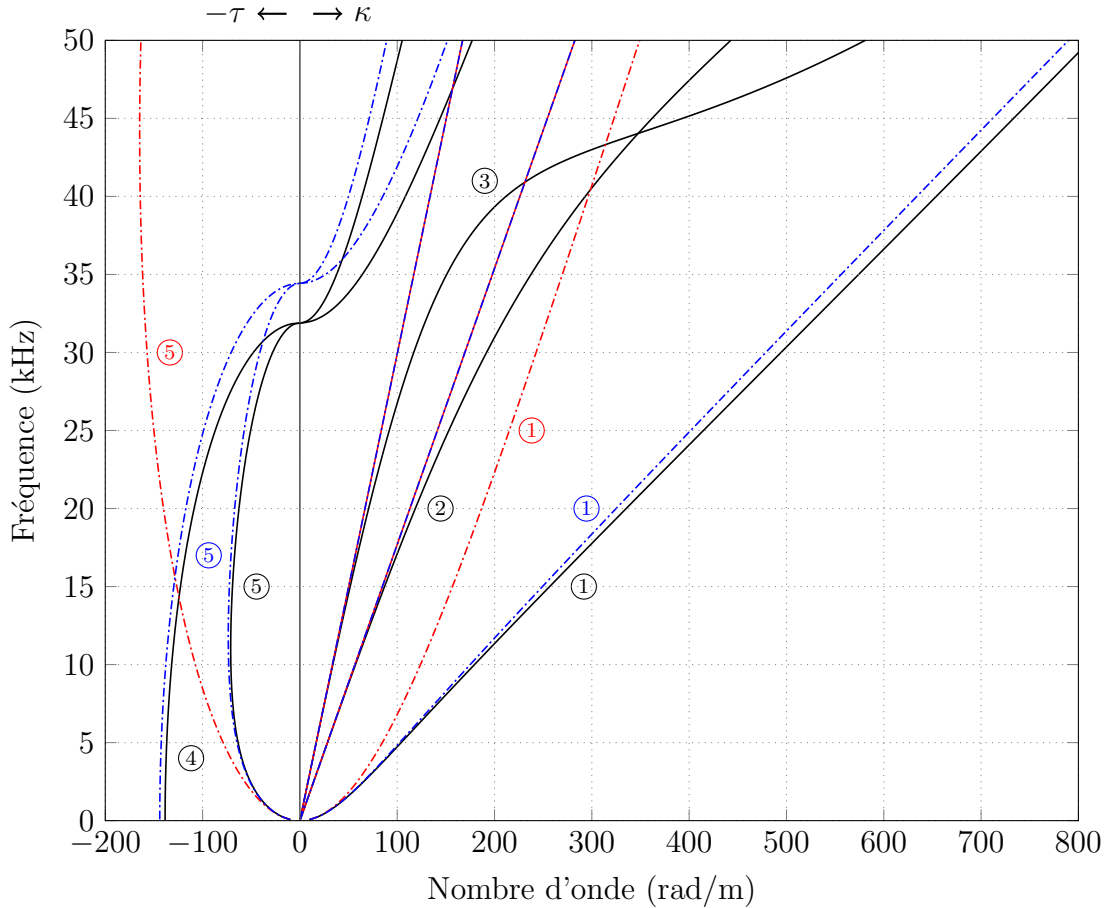


FIGURE II.2 – Dispersion des ondes dans une plaque sandwich isotrope (propriétés mécaniques en table I.2). Parties réelle et imaginaire du nombre d'onde  $k = \kappa - i\tau$  (I.1.11). Influence de la correction du comportement en cisaillement hors-plan : résultats du modèle de plaque épaisse utilisant  $\underline{\underline{F}}^V$  (équation (II.2.34), lignes rouges pointillées) ou  $\underline{\underline{F}}^R$  (équation (II.2.35), lignes bleues pointillées) et résultats de référence SFEM (lignes noires).

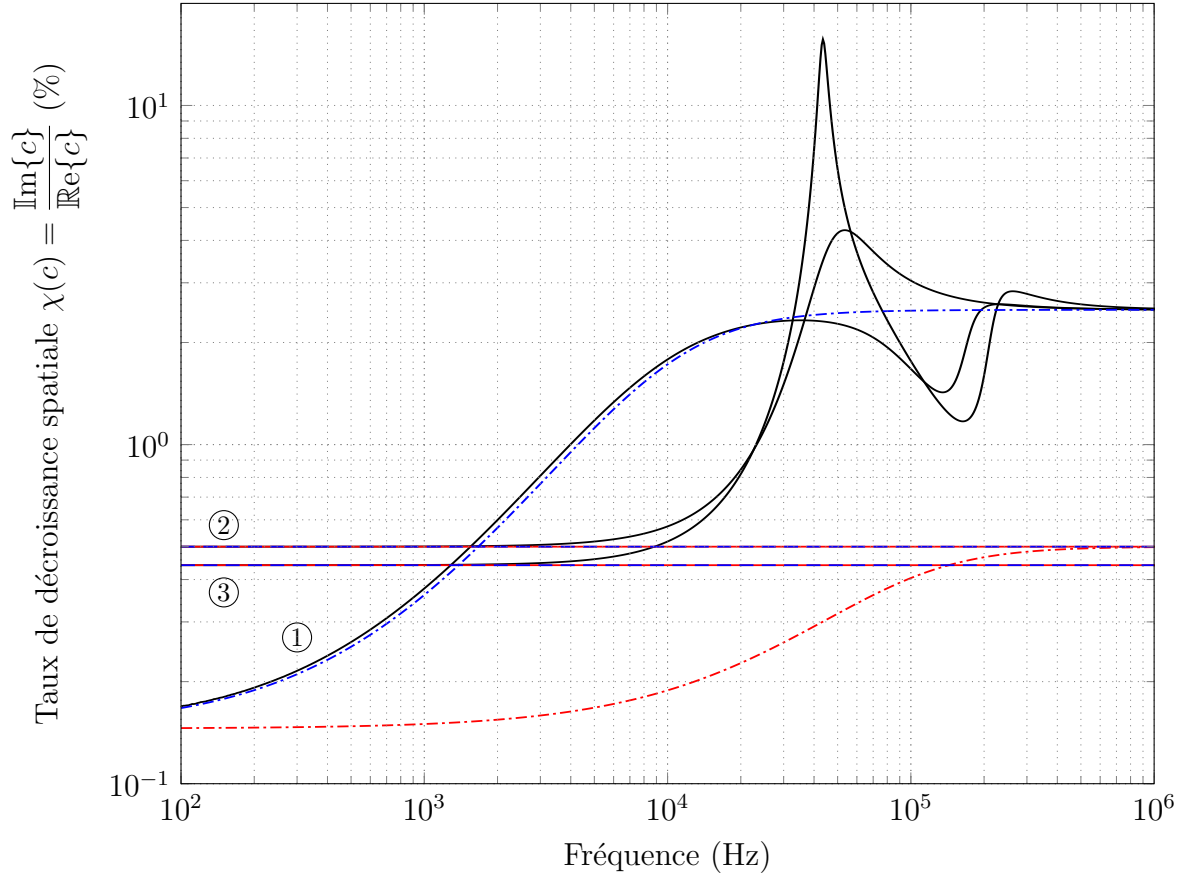


FIGURE II.3 – Taux de décroissance spatiale des ondes de flexion ①, de cisaillement plan ② et de compression ③ dans une plaque sandwich isotrope (propriétés mécaniques complexes en table I.5). Résultats obtenus à partir du modèle de plaque épaisse utilisant  $\underline{\mathbf{F}}^V$  (équation (II.2.34), lignes rouges pointillées) ou  $\underline{\mathbf{F}}^R$  (équation (II.2.35), lignes bleues pointillées) et résultats de référence SFEM (lignes noires).

**Taux de décroissance spatiale** Le taux de décroissance spatiale des ondes de flexion, qui contient la signature du comportement hors-plan viscoélastique de la plaque, est également très influencé par les effets de cisaillement hors-plan dans l'âme. Dans une grande partie des cas, le matériau d'âme, plus souple, est également associé à des mécanismes de dissipations plus forts que le matériau des peaux. En conséquence, la mauvaise prise en compte des effets de cisaillement transverse dans le modèle de plaque épaisse peut amener à une estimation des pertes fortement biaisée.

La plaque sandwich étudiée ci-dessus est reprise en introduisant des modules  $\lambda$  et  $\mu$  complexes, égaux au cas étudié au chapitre précédent (voir tableau I.5). Sur la figure II.3, on a tracé le taux de décroissance des ondes de flexion ①, cisaillement plan ② et compression ③ en fonction de la fréquence ; celui-ci est estimé à partir du modèle de Hencky-Mindlin utilisant  $\underline{\mathbf{F}}^V$  (lignes pointillées rouges) ou  $\underline{\mathbf{F}}^R$  (lignes pointillées bleues). Les résultats de références obtenus à partir du schéma SFEM sont également superposés (lignes noires).

On remarque de nouveau que de façon logique, le taux de décroissance spatiale  $\chi$  associé aux ondes de membrane ② et ③ ne dépendent pas du choix de  $\underline{\mathbf{F}}$ . On note que l'augmentation de ce taux de décroissance à partir de 3 kHz, visible sur les résultats de référence, n'est pas vue par le modèle de plaque épaisse : cette augmentation est en effet due à l'apparition d'effets

d'ordre supérieur que la cinématique de Hencky-Mindlin est incapable de décrire (voir figure 1.14, ②.b, ③.b/c).

Concernant les ondes de flexion ①, le comportement  $\underline{\mathbf{F}}^V$  décrit très mal les mécanismes d'amortissement ; en effet, en reprenant l'expression (II.2.37), on remarque que  $2h_p\mu_p = 1.54(1 + i0.5\%) \times 10^6$  et  $h_a\mu_a = 1.92(1 + i5\%) \times 10^5$ . Le comportement opérationnel en cisaillement hors-plan est donc dans le cas de la borne de Voigt piloté majoritairement par les peaux, ce qui ne correspond pas à la réalité. On remarque d'ailleurs que le taux de décroissance spatiale des ondes de flexion tend, avec le choix de  $\underline{\mathbf{F}}^V$ , vers le taux de décroissance des ondes de cisaillement plan ②. En effet, dans les deux cas ce taux de décroissance est associé à des mécanismes de cisaillement, et les lois de mélange associées sont équivalentes (dans le cas isotrope,  $\mathbf{F}^V = \mathbf{A}_{66}$ ).

Finalement, on remarque que la formulation  $\underline{\mathbf{F}}^R$  décrit de façon très satisfaisante les mécanismes de perte liés à la flexion, sur le domaine de fréquence qui nous intéresse dans ce travail, c'est à dire avant l'apparition des premiers modes d'ordre supérieur (ici jusqu'à 31.2 kHz). De 20 Hz à 30 kHz, l'erreur relative maximale en taux de décroissance spatiale est d'environ 5%.

Les résultats ci-dessus montrent qu'il est préférable, pour la modélisation des plaques sandwichs en dynamique, de choisir la définition  $\underline{\mathbf{F}}^R$  (II.2.35) comme loi de mélange sur le comportement en cisaillement hors-plan. Toutefois, ceci est dû au fait que les structures sandwichs présentent un fort contraste de raideur en cisaillement entre les peaux et l'âme. Le choix de cette définition pour décrire le comportement en cisaillement hors-plan des plaques n'est donc pas généralisable à des stratifications quelconques.

## II.3 Cinématique de Kirchhoff

Dans la section qui suit sont données les équations de dispersion correspondant au modèle de plaque mince ou CPT pour *Classical Plate Theory*, ou encore modèle de Kirchhoff. La formulation de ce modèle est très similaire à celle permettant la construction du modèle de plaque épaisse. Seule une liaison cinématique est ajoutée, permettant de réduire le nombre de degrés de liberté du modèle.

La formulation du problème de propagation des ondes dans les plaques minces amène, pour le cas des ondes de flexion, à l'expression d'un indicateur de *raideur en flexion spécifique équivalente*. Cet indicateur est utilisé dans un cadre expérimental au chapitre VII pour l'identification des composantes du tenseur des raideurs de flexion locales d'une plaque stratifiée. Quelques résultats concernant la reformulation des équations de dispersion par le biais de la décomposition polaire sont données. Ceux-ci représentent une perspective intéressante pour l'identification des plaques stratifiées.

Le modèle de plaque mince est bien adapté à la modélisation des plaques en basse fréquence, c'est à dire lorsque la longueur d'onde est d'un ordre au moins supérieure à l'épaisseur de la plaque. Dans ce cas, si les propriétés des couches en cisaillement hors-plan varient raisonnablement dans l'épaisseur, il est possible de négliger la contribution énergétique de ce mécanisme dans le mouvement de flexion.

### II.3.1 Définition du modèle

Comme la formulation du modèle de plaque mince est classique et similaire à celle du modèle de plaque épaisse, les paragraphes qui suivent décrivent très succinctement les différentes hypothèses supplémentaires qui permettent cette formulation ainsi que les équations d'équilibre

finaleme nt obtenues. La démarche de formulation du modèle de plaque mince est décrite plus en détail en annexe C, section II.3.

### II.3.1.1 Hypothèses supplémentaires

Le modèle de Kirchhoff peut être déduit du modèle de plaque épaisse par la formulation de deux hypothèses supplémentaires.

**Ajout d'une liaison cinématique** Lorsque la longueur d'onde est très grande devant l'épaisseur de la plaque on a pu montrer dans différents cas tout au long de cette première partie (solutions de Lamb (I.2.33), plaques épaisses orthotropes (II.2.30)) que le nombre d'onde des ondes de flexion est proportionnel à la racine carrée de la fréquence. Si on injecte en l'occurrence une pulsation de la forme  $\omega^2 = k^4$  dans l'équation caractéristique (II.2.14) régissant la propagation des ondes planes dans le modèle de Hencky-Mindlin et que l'on ne conserve que les termes du premier ordre en  $k$ , on obtient :

$$F_{\alpha\beta}\tilde{\Phi}_\beta - \mathbf{i}F_{\alpha\beta}k_\beta\tilde{U}_3 = 0 \quad (\text{II.3.1})$$

Cette relation étant vérifiée pour tout tenseur symétrique définit positif  $\underline{\mathbf{F}}$ , on peut écrire :

$$\tilde{\underline{\Phi}} - \mathbf{i}\tilde{U}_3\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{II.3.2})$$

De nouveau, cette expression est valable quelque soit le vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$ ; on peut donc, en rappelant la forme de la fonction  $\underline{\mathbf{U}}(\omega, \underline{\mathbf{y}})$  (II.2.11), écrire :

$$\underline{\Phi}(\omega, \underline{\mathbf{y}}) = -\underline{\text{grad}}(U_3(\omega, \underline{\mathbf{y}})) \quad (\text{II.3.3})$$

Cette équation, portant sur les déplacements généralisés du modèle de plaque épaisse, est en fait l'hypothèse de base du modèle de Kirchhoff; elle constitue l'ajout d'une *liaison cinématique* dans le modèle de plaque épaisse.

La proposition du modèle de plaque mince [128], antérieure à la proposition de Hencky-Mindlin, part de l'hypothèse qu'une section de plaque reste droite et perpendiculaire à la fibre neutre lors du mouvement; cette hypothèse mène également à la liaison cinématique entre la rotation de section  $\underline{\Phi}$  et la flèche  $U_3$ .

La relation (II.3.3) peut également correspondre, dans le modèle de plaque épaisse, au souhait de négliger le travail  $\mathcal{U}_{\alpha 3}$  des composantes de la déformation associées au cisaillement hors-plan, ce qui revient à poser  $\underline{\gamma} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$  ou  $F_{\alpha\beta} \rightarrow \infty$ .

la liaison cinématique ainsi définie permet d'exprimer le champ cinématique correspondant au modèle de Kirchhoff :

$$u_\alpha = \Psi_\alpha - zU_{3,\alpha} \quad (\text{II.3.4})$$

$$u_3 = U_3 \quad (\text{II.3.5})$$

**Inerties de rotation négligées** Une hypothèse supplémentaire du modèle de plaque mince, très largement utilisée, consiste à négliger les termes d'inertie associés à la rotation de la section. En conséquence, les inerties généralisées  $J$  et  $I$  n'entrent plus en compte dans le travail des efforts d'accélération (voir annexe C, matrice des inerties généralisées  $\underline{\mathbf{I}}$ , expression (C.2.39)). On écrit alors. Seules les translations de section sont donc prises en compte par l'inertie généralisée  $M$  (voir expression C.2.38).



### II.3.1.2 Comportement

De façon équivalente au modèle de plaque épaisse, la cinématique postulée (II.3.5) ne permet pas de décrire convenablement l'effet Poisson ; en conséquence, le comportement en contraintes planes est utilisé. Finalement, la loi constitutive généralisée du modèle de plaque mince prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{N}} \\ \underline{\mathbf{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ \underline{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.6})$$

où  $\underline{\mathbf{N}}$  et  $\underline{\mathbf{M}}$  dénotent respectivement les tenseurs des efforts membranaires et des moments de flexion en notation de Voigt et  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$  et  $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$  sont les déformations généralisées associés. Les trois tenseurs d'ordre 4  $\underline{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$  et  $\underline{\mathbf{B}}$  (ici en notation de Voigt) décrivent respectivement les raideurs généralisées en membrane, flexion et de couplage, de façon identique au modèle de plaque épaisse (voir leurs expressions en annexe C, expressions (C.2.25), (C.2.26) et (C.2.27)).

### II.3.1.3 Équations d'équilibre

Le modèle de Kirchhoff est caractérisé par trois équations locales du mouvement (voir (C.3.17)) :

$$N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha = M \ddot{\Psi}_\alpha \quad (\text{II.3.7})$$

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = M \ddot{U}_3 \quad (\text{II.3.8})$$

Ces équations d'équilibre, associées à la formulation forte des équations du mouvement des plaques minces, sont utilisées dans ce qui suit pour dériver les surfaces de dispersion du modèle.

## II.3.2 Surfaces de dispersion

On reprend les hypothèses permettant d'étudier la propagation des ondes planes dans les structures : (i) sources éloignées ; (ii) régime harmonique permanent ; (iii) séparation des variables d'espace ; (iv) homogénéité des propriétés mécaniques. Dans ce cas, les équations du mouvement peuvent être réécrites en fonction des degrés de liberté  $\underline{\mathbf{U}}$  du modèle seulement :

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma,\delta\beta} - B_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{3,\gamma\delta\beta} + \omega^2 M U_\alpha = 0 \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\gamma,\delta\alpha\beta} - D_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{3,\gamma\delta\alpha\beta} + \omega^2 M U_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.9})$$

Il faut donc résoudre ce système de trois équations aux dérivées partielles du quatrième ordre homogènes. Pour cela, on injecte la forme du déplacement en onde plane :

$$\underline{\mathbf{U}}(\omega, \underline{\mathbf{y}}) = \widetilde{\underline{\mathbf{U}}}(\omega, \underline{\mathbf{k}}) e^{-i\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{y}}} \quad (\text{II.3.10})$$

celle-ci permet de réécrire le système d'équations ci-dessus sous la forme :

$$\begin{cases} k_\delta k_\beta A_{\alpha\beta\gamma\delta} \widetilde{U}_\gamma + i k_\gamma k_\delta k_\beta B_{\alpha\beta\gamma\delta} \widetilde{U}_3 - \omega^2 M \widetilde{U}_\alpha = 0 \\ k_\gamma k_\delta k_\alpha k_\beta D_{\alpha\beta\gamma\delta} \widetilde{U}_3 - i k_\delta k_\alpha k_\beta B_{\alpha\beta\gamma\delta} \widetilde{U}_\gamma - \omega^2 M \widetilde{U}_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.11})$$

soit un problème aux valeurs propres de taille 3, d'ordre 4 en  $\underline{\mathbf{k}}$  et linéaire en  $\omega^2$ .



**Raideur spécifique équivalente en flexion** Lorsque la distribution des propriétés mécaniques dans la section de la plaque est symétrique, le tenseur  $\underline{\mathbf{B}}_{\approx}$  s'annule (voir son expression en C.2.26). Dans ce cas, les trois équations obtenues ci-dessus peuvent être divisées en deux groupes : les deux premières font intervenir le tenseur des raideurs de membrane  $\underline{\mathbf{A}}_{\approx}$  et les degrés de liberté  $U_\alpha$  associés au déplacement dans le plan de la plaque ; elles correspondent donc aux ondes de membrane. La troisième fait intervenir le tenseur des raideurs en flexion  $\underline{\mathbf{D}}_{\approx}$  et la flèche de la plaque  $U_3$  ; elle est donc *scalaire* et associée aux ondes de flexion.

La caractère scalaire de cette troisième équation est intéressant. En particulier, on peut poser le vecteur d'onde sous la forme  $\underline{\mathbf{k}} = k(\theta)[\cos(\theta) \sin(\theta)]$ . On peut alors exprimer la *raideur spécifique en flexion équivalente* d'une plaque  $\tilde{B}(\theta)$  en fonction de la direction de propagation de l'onde  $\theta$  :

$$\tilde{B}(\theta) = \frac{\omega^2}{k(\theta)^4} = \frac{c^4 D_{11} + s^4 D_{22} + 2c^2 s^2 (D_{12} + 2D_{66}) + 4c^3 s D_{16} + 4cs^3 D_{26}}{M} \quad (\text{II.3.12})$$

avec  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$  et  $\underline{\mathbf{D}}$  est exprimé en notation de Voigt. Cette expression simple permet, sur la base de vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}$  identifiées expérimentalement et de la connaissance de la densité de la plaque, d'identifier les 5 termes  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12} + 2D_{66}$ ,  $D_{16}$  et  $D_{26}$ . Cette démarche est mise en œuvre au chapitre VII pour l'identification de la raideur spécifique locale en flexion d'une plaque stratifiée mince à partir des résultats de l'analyse en vecteur d'onde proposée.

Dans ce qui suit, on se propose de reformuler la résolution du problème de propagation des ondes dans les plaques minces en utilisant la formulation polaire de l'élasticité plane.

### II.3.3 Formulation polaire

Le comportement généralisé du modèle de plaque mince (équation (II.3.6)) utilise les tenseurs d'ordre quatre  $\underline{\mathbf{A}}_{\approx}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}_{\approx}$  et  $\underline{\mathbf{D}}_{\approx}$  pour exprimer la relation entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées. Or l'expression de ces tenseurs décrivant le comportement de plaque mince fait entrer en compte uniquement le tenseur des raideurs en contraintes planes  $\underline{\mathbf{Q}}_{\approx}$  (équation (B.1.6)) (voir (C.2.25), (C.2.26) et (C.2.27)). On rappelle leur expression :

$$\left( \underline{\mathbf{A}}_{\approx}, \underline{\mathbf{B}}_{\approx}, \underline{\mathbf{D}}_{\approx} \right) = \int_h (1, z, z^2) \underline{\mathbf{Q}}(z) dz \quad (\text{II.3.13})$$

Or le tenseur  $\underline{\mathbf{Q}}_{\approx}$  est un tenseur *plan* (il est exprimé dans une base de dimension 2). Ce type de tenseurs peut être décomposée en une somme de tenseurs élémentaires (associés à ses *invariants*), sur la base desquels le changement de repère par rotation devient explicite ; cette décomposition est appelée *décomposition polaire*. Elle permet de reformuler les problèmes qui font intervenir un comportement matériau anisotrope sur la base de ces invariants : on parle alors de *formulation polaire* de l'élasticité.

La formulation polaire de l'élasticité plane s'inspire des travaux de Verchery [232] sur les tenseurs du quatrième ordre possédant les propriétés typiques des tenseurs de l'élasticité (raideurs ou souplesses), c'est à dire les symétries mineures et majeures. L'adaptation de ces travaux pour la formulation des problèmes d'élasticité impliquant des stratifiés à couches anisotropes est ensuite due aux travaux de Vong [233], Kandil [101] et enfin Vannucci [227]. Ce dernier a notamment travaillé sur la recherche, à partir de cette formation originale, de stratifiés possédant

des comportements particuliers [226, 229]. On peut également noter la récente application par Montemurro [143] de la formulation polaire à l'étude des tenseurs de comportement généralisés associés au modèle de plaque épaisse.

Étant partie prenante du projet ANR MAESSTRO à l'origine du travail présenté ici, Paolo Vannucci s'est naturellement intéressé à la reformulation du problème de propagation des ondes planes dans les stratifiés sur la base de la décomposition polaire. Les quelques résultats donnés dans ce qui suit sont donc issus d'un travail en commun sur le sujet. En particulier, la procédure d'identification du comportement en flexion des plaques stratifiées minces hétérogènes proposées au chapitre VII peuvent être reformulée sur la base de la décomposition polaire ; les différents invariants apparaissent alors de façon explicite, ce qui peut présenter un certain avantage par rapport à la formulation cartésienne proposée.

### II.3.3.1 Décomposition polaire

La formulation polaire de l'élasticité plane part de l'étude des grandeurs des tenseurs plans par changement de base (rotation du repère). Il est possible d'exprimer le tenseur  $\mathbf{Q}_{\approx}^{\theta}$  associé à un matériau monoclinique dans n'importe quel repère ( $\mathbf{e}_i^{\theta}$ ) tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_3$  en fonction des cinq *invariants*  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  et de l'angle  $\theta$ . Les composantes de  $\mathbf{Q}_{\approx}^{\theta}$  s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} Q_{1111}^{\theta} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos(4(\Phi_0 - \theta)) + 4R_1 \cos(2(\Phi_1 - \theta)) \\ Q_{1112}^{\theta} = R_0 \sin(4(\Phi_0 - \theta)) + 2R_1 \sin(2(\Phi_1 - \theta)) \\ Q_{1122}^{\theta} = -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos(4(\Phi_0 - \theta)) \\ Q_{1212}^{\theta} = T_0 - R_0 \cos(4(\Phi_0 - \theta)) \\ Q_{1222}^{\theta} = -R_0 \sin(4(\Phi_0 - \theta)) + 2R_1 \sin(2(\Phi_1 - \theta)) \\ Q_{2222}^{\theta} = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos(4(\Phi_0 - \theta)) - 4R_1 \cos(2(\Phi_1 - \theta)) \end{cases} \quad (\text{II.3.14})$$

La dépendance en  $\theta$  de  $\mathbf{Q}_{\approx}^{\theta}$  peut donc être décomposée en trois parties : (i) une partie isotrope, associée aux composantes  $T_0$  et  $T_1$  ; (ii) une partie elliptique, de symétrie d'ordre 2, associée à  $R_1$  et  $\Phi_1$  ; (iii) une partie à symétrie d'ordre 4, associée à  $R_0$  et  $\Phi_0$ . Quelque soit le repère choisi, le comportement en contraintes planes d'un matériau monoclinique peut donc être décrit à l'aide des cinq invariants  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $R_0$ ,  $R_1$  et  $\Phi_0 - \Phi_1$ .

Notamment, il est possible de dégager les différents comportements matériau à partir de certaines configurations remarquables de ces invariants. Par exemple, l'orthotropie des raideurs planes d'un matériau peut s'exprimer par  $R_0 = 0$  ou  $\Phi_0 - \Phi_1 = n\pi/4$ .

Dans la suite, on s'intéresse à la reformulation des équations de dispersion du modèle de plaque mince grâce à la décomposition polaire. Celle-ci permet d'écrire de façon explicite la dépendance des grandeurs associées aux ondes en fonction de la direction de propagation de celles-ci.

### II.3.3.2 Problème complet

Si on considère un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dont les parties réelle  $\mathbf{\kappa}$  et imaginaire  $\mathbf{\tau}$  sont colinéaires, alors on peut écrire  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_1^{\theta}$ , où  $\theta$  est la direction de propagation de l'onde plane. Dans le repère

$(\mathbf{e}_i^\theta)$ , on a en conséquence :

$$\begin{cases} k_1(\theta) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1^\theta = k(\theta) \\ k_2(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.15})$$

Cette écriture permet d'exprimer le problème (II.3.11) simplement, en utilisant les expressions polaires  $\mathbf{A}_{\approx}^\theta$ ,  $\mathbf{B}_{\approx}^\theta$  et  $\mathbf{D}_{\approx}^\theta$  des tenseurs du comportement généralisé de plaque mince :

$$\begin{cases} k^2 A_{\alpha 1 \beta 1}^\theta \tilde{U}_\beta^\theta + i k^3 B_{\alpha 111}^\theta \tilde{U}_3^\theta - \omega^2 M \tilde{U}_\alpha^\theta = 0 \\ k^4 D_{1111}^\theta \tilde{U}_3^\theta - i k^3 B_{\beta 111}^\theta \tilde{U}_\beta^\theta - \omega^2 M \tilde{U}_3^\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.16})$$

où on a omit la dépendance de  $k$  et  $\tilde{\mathbf{U}}^\theta$  en fonction de  $\theta$  et  $\omega$ . Sous forme matricielle, le système ci-dessus s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k^2 A_{1111}^\theta - \omega^2 M & k^2 A_{1112}^\theta & i k^3 B_{1111}^\theta \\ k^2 A_{1112}^\theta & k^2 A_{1212}^\theta - \omega^2 M & i k^3 B_{1112}^\theta \\ -i k^3 B_{1111}^\theta & -i k^3 B_{1112}^\theta & k^4 D_{1111}^\theta - \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^\theta \\ U_2^\theta \\ U_3^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.17})$$

L'annulation du déterminant de la matrice caractéristique représente donc la recherche des racines d'un polynôme d'ordre 6 en  $k$  ; trois couples de solutions opposées deux à deux sont alors obtenus. Comme on peut le voir, le tenseur  $\mathbf{B}_{\approx}$  couple les mouvements plans  $U_\alpha$  et la flèche  $U_3$ .

La résolution du problème couplé ci-dessus sort du cadre de ce travail ; aussi le cas qui est présenté dans la suite apporte des simplifications.

### II.3.3.3 Plaques stratifiées découplées

On étudie maintenant le cas des plaques minces multicouches, composées de plis identiques (épaisseur  $e$  et propriétés mécaniques  $\mathbf{Q}_{\approx}$  identiques) ; seule la séquence  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_N]$  décrivant les angles  $\theta_n$  d'empilement des  $N$  couches peut varier.

De plus, on suppose que la plaque est *découplée* (au sens des comportements en membrane et en flexion). Cela se traduit par un tenseur de couplage  $B_{111\alpha}^\theta$  nul quelque soit  $\theta$ . Dans ce cas, le système (II.3.16) se sépare en deux équations :

modes de membrane (A) et (B) :

$$\begin{bmatrix} k^2 A_{1111}^\theta - \omega^2 M & k^2 A_{1112}^\theta \\ k^2 A_{1112}^\theta & k^2 A_{1212}^\theta - \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^\theta \\ U_2^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.18})$$

mode de flexion (1) :

$$(k^4 D_{1111}^\theta - \omega^2 M) U_3^\theta = 0 \quad (\text{II.3.19})$$

**Flexion** L'équation régissant la flexion des plaques minces découplées est scalaire ; les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$k_b^4(\omega, \theta) = \omega^2 \frac{M}{D_{1111}^\theta} = \omega^2 \frac{M}{T_0 + 2T_1 + R_0 \cos(4\Phi_0 - 4\theta) + 4R_1 \cos(2\Phi_1 - 2\theta)} \quad (\text{II.3.20})$$

Cette équation pourrait être utilisée de la même manière que l'équation (II.3.12) pour formuler un problème inverse permettant de déterminer certains des invariants à partir de nombres d'onde de flexion extraits d'un signal expérimental (voir chapitre VII).

La formulation polaire simplifie également le calcul de la vitesse de groupe (I.1.19) :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_g &= \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial \mathbf{k}} = \frac{1}{2\omega} \left[ \frac{\partial \omega^2}{\partial k} \mathbf{e}_1 + \frac{\omega}{k} \frac{\partial \omega^2}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 \right] \\ &= 2 \frac{\omega}{k} \left[ \mathbf{e}_1 + \frac{D_{1112}^\theta}{D_{1111}^\theta} \mathbf{e}_2 \right]\end{aligned}\quad (\text{II.3.21})$$

Dans le cas isotrope ( $R_0 = R_1 = 0$  d'où  $D_{1112}^\theta = 0$ ), on retrouve le résultat classique  $\mathbf{c}_g = 2\mathbf{c}_\phi$  [130]. On peut d'ailleurs montrer que la vitesse de groupe et la vitesse d'énergie (I.1.21) coïncident :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_e &= \frac{\int_h \mathbf{P}(z) dz}{\int_h e(z) dz} = \frac{i}{2\omega} \frac{\int_h \sigma_{\alpha\beta}(z) * u_\beta(z) dz}{\int_h \rho(z) u_i(z) * u_i(z) dz} \mathbf{e}_\alpha = \frac{i}{2\omega} \frac{D_{\alpha\beta\gamma\delta}^\theta U_{3,\gamma\delta}^\theta * U_{3,\beta}^\theta}{M |U_3^\theta|^2} \mathbf{e}_\alpha \\ &= \frac{k^3}{2\omega} \frac{D_{111\alpha}^\theta}{M} \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{c}_g\end{aligned}\quad (\text{II.3.22})$$

**Modes de membrane** Les modes de membrane sont, dans le cadre du modèle de plaque mince, régis par l'équation (II.3.18) ; les solutions annulent le déterminant de la matrice caractéristique. Celui-ci prend la forme :

$$k^4 (A_{1111}^\theta A_{1212}^\theta - (A_{1112}^\theta)^2) - \omega^2 k^2 M (A_{1111}^\theta + A_{1212}^\theta) + \omega^4 M^2 = 0 \quad (\text{II.3.23})$$

où on a omis l'exposant  $\bullet^\theta$  pour la lisibilité. Les racines du déterminant s'écrivent ainsi :

$$k^2 = \frac{\omega^2 M}{2} \frac{(A_{1111}^\theta + A_{1212}^\theta) \pm \sqrt{(A_{1111}^\theta - A_{1212}^\theta)^2 + 4(A_{1112}^\theta)^2}}{A_{1111}^\theta A_{1212}^\theta - (A_{1112}^\theta)^2} \quad (\text{II.3.24})$$

on remarque tout de suite que si le comportement est isotrope ( $A_{1112}^\theta = 0$ ), alors les solutions sont  $c^2 = A_{1111}/M$  et  $c^2 = A_{1212}/M$ , en accord avec les résultats (II.2.21) et (II.2.20) de la section précédente sur le modèle de plaque épaisse.

## Modèles de poutre

Dans la section qui suit sont dérivés les branches de dispersion données par le modèle de poutre épaisse de Timoshenko. La comparaison de celles-ci avec les résultats de référence obtenus à partir des schémas éléments finis spectraux permet de juger de la pertinence de ce modèle. Notamment, la nécessité de corriger le comportement obtenu en torsion et en cisaillement hors-plan est illustrée. Enfin, les lois de dispersion associées au modèle d'Euler-bernoulli sont rappelées.

Ces deux modèles sont utilisés au chapitre VI pour formuler une méthode d'identification du matériau constitutif d'une poutre utilisant les résultats de l'analyse en nombre d'onde proposée. La comparaison ici donnée entre les différentes branches de dispersion obtenues permettrait de donner une idée du possible biais de l'identification effectuée qui serait due à une mauvaise description du comportement de la structure par le modèle réduit.

## II.4 Cinématique de Timoshenko

La section qui vient mène à la comparaison des branches de dispersion obtenues par le biais du modèle de Timoshenko avec les branches de dispersion de référence (résultats éléments finis spectraux). La formulation du modèle, classique, est tout d'abord discutée succinctement ; plus de détails sont donnés en annexe C.4. Ensuite, les équations de dispersion sont dérivées puis leur résolution discutée, avec les différentes valeurs remarquables exprimées dans le cas des poutres orthotrope symétriques. Enfin, la comparaison entre les résultats de référence et ceux obtenus avec le modèle est menée dans le cas d'une poutre homogène.

### II.4.1 Définition du modèle

Pour la définition du modèle le formalisme de séparation des variables est repris : les variables  $\underline{z}$  décrivent la position d'un point sur la section de la poutre, tandis que la coordonnée  $y$  décrit la position de ce point sur l'axe neutre de celle-ci.

#### II.4.1.1 Cinématique

Le champ de déplacement correspondant au modèle de Timoshenko est postulé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1(\underline{z}) \\ u_2(\underline{z}) \\ u_3(\underline{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.1})$$

où la dépendance de toutes les variables en fonction de l'abscisse  $y$  est implicite.

A partir de ce champ cinématique sont identifiées les déformations généralisées  $\epsilon$ ,  $\underline{\kappa}$ ,  $\underline{\gamma}$  et  $v$  correspondant respectivement aux mécanismes de traction, flexion, cisaillement transverse et torsion (voir annexe C.4, expression (C.4.5)).

#### II.4.1.2 Loi constitutive généralisée

Le champ cinématique postulé interdit l'effet Poisson : les déformations  $\epsilon_{\alpha\alpha}$  sont nulles. Pour pallier à ce problème, on suppose un état de contrainte uniaxial dans la section, c'est à

dire  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ . Cela permet d'exprimer une nouvelle relation constitutive tridimensionnelle sous la forme (voir détails en annexe C.4) :

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= E_3 \varepsilon_{33} \\ \sigma_{\alpha 3} &= G_{\alpha 3} \varepsilon_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} &= -\nu_{3\alpha} \varepsilon_{33}\end{aligned}\tag{II.4.2}$$

Dans le cas des poutres, les modules de l'ingénieur  $E_3$  et  $G_{\alpha 3}$  représentent donc le lien *direct* entre les déformations et les contraintes ; dans ce cas précis, l'utilisation des *modules* de l'ingénieur complexes pour décrire le comportement viscoélastique ne pose pas de problème par rapport aux relations de Kramer-Kronig (voir annexe B.2, section B.2.3.6).

Comme dans le modèle de plaque épaisse, la forme affine des déformations de cisaillement hors-plan  $\varepsilon_{\alpha 3}$  n'est pas assez riche pour décrire le comportement de l'objet tridimensionnel modélisé comme une poutre. En conséquence, des coefficients  $\xi_s$  et  $\xi_t$  sont introduits dans le comportement généralisé en raideur, dont le but est de corriger le comportement de la poutre respectivement en cisaillement hors-plan et en torsion (voir annexe C.4, expression C.4.17).

A partir de ces hypothèses sont identifiées les contraintes généralisées : effort de traction  $N$ , moments de flexion  $\underline{\mathbf{M}}$ , efforts de cisaillement transverse  $\underline{\mathbf{V}}$  et moment de torsion  $M_3$  (voir annexe C.4, expression (C.4.9)).

La loi de comportement généralisée peut finalement se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \\ V_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{11} & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 & S_2 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ v \end{bmatrix}$$

où le détail des différentes expressions des raideurs généralisées  $A$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $\underline{\mathbf{F}}$ ,  $\underline{\mathbf{S}}$  et  $K$  sont données en annexe C.4. On note en particulier que le comportement orthotrope des matériaux permet de découpler le comportement en cisaillement ( $\underline{\mathbf{F}}$ ,  $\underline{\mathbf{S}}$  et  $K$ ) du comportement axial ( $A$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$  et  $\underline{\mathbf{D}}$ ). De plus, lorsque la distribution des propriétés de raideur  $\underline{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{z}})$  possède deux plans de symétrie centrés sur l'axe neutre  $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{0}}$ , tous les termes de couplage ( $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $D_{12}$  et  $\underline{\mathbf{S}}$ ) s'annulent ; la matrice  $\underline{\mathbf{\Pi}}$  devient alors diagonale.

### II.4.1.3 Inerties généralisées

La matrice  $\underline{\mathbf{\Gamma}}$  décrivant le comportement inertiel généralisé du modèle de poutre épaisse prend la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & M & -J_1 & -J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & I_{11} & I_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -J_2 & I_{12} & I_{22} & 0 \\ J_1 & J_2 & 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\tag{II.4.3}$$

ou les différentes expressions des inerties généralisées  $M$ ,  $J_\alpha$ ,  $I_{\alpha\beta}$  et  $I_3$  sont données en annexe C.4. Il est intéressant de remarquer que les termes de couplage  $\underline{\mathbf{J}}$  et  $I_{12}$  s'annulent si la distribution des densités  $\rho(\underline{\mathbf{z}})$  n'est pas symétrique par rapport à l'axe neutre  $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{0}}$ .

#### II.4.1.4 Equations du mouvement

Comme dans le cas des plaques épaisses, la dérivation des équations locales du mouvement passe par l'intégration par parties du principe de puissances virtuel obtenu. Six équations du mouvement sont obtenues :

$$\begin{aligned} V_{\alpha,3} + p_\alpha &= M \ddot{\Psi}_\alpha + J_\alpha \ddot{\Phi}_3 \\ N_{,3} + F_3 &= M \ddot{U}_3 - J_\beta \ddot{\Phi}_\beta \\ M_{\alpha,3} + (-1)^\alpha V_{3-\alpha} + m_\alpha &= I_{\alpha\beta} \ddot{\Phi}_\beta - J_\alpha \ddot{U}_3 \\ M_{3,3} + m_3 &= I_3 \ddot{\Phi}_3 + J_\beta \ddot{\Psi}_\beta \end{aligned} \quad (\text{II.4.4})$$

où les termes  $\underline{p}$ ,  $F_3$ , et  $\underline{m}$  dénotent les différents efforts extérieurs généralisés (voir annexe C.4).

### II.4.2 Branches de dispersion

Dans ce qui suit sont dérivées les lois de dispersion associées au modèle de Timoshenko. Les équations obtenues sont utilisées dans les méthodes inverses formulées au chapitre VI. Elles y sont adaptées à l'identification du comportement viscoélastique des poutres épaisses, par analyse en nombre d'onde de la réponse harmonique de celles-ci.

#### II.4.2.1 Formulation

De nouveau, les hypothèses permettent l'étude de la propagation des ondes planes dans les structures sont formulées ; (i) les efforts extérieurs sont négligés ; (ii) l'évolution temporelle du système est supposée stationnaire harmonique ; (iv) les propriétés des matériaux sont supposées homogènes. Les équations du mouvement, après injection du comportement, deviennent :

$$\begin{cases} F_{\alpha\beta} \left( \Psi_{\beta,33} + (-1)^\beta \Phi_{3-\beta,3} \right) + S_\alpha \Phi_{3,33} + \omega^2 M \Psi_\alpha + \omega^2 J_\alpha \Phi_3 = 0 \\ A U_{3,33} + B_\beta \Phi_{\beta,33} + \omega^2 M U_3 - \omega^2 J_\beta \Phi_\beta = 0 \\ B_\alpha U_{3,33} + D_{\alpha\beta} \Phi_{\beta,33} + (-1)^\alpha \left( F_{(3-\alpha)\beta} (\Psi_{\beta,3} + (-1)^\beta \Phi_{3-\beta}) + S_{3-\alpha} \Phi_{3,3} \right) + \omega^2 I_{\alpha\beta} \Phi_\beta - \omega^2 J_\alpha U_3 = 0 \\ K \Phi_{3,33} + S_\beta \left( \Psi_{\beta,33} + (-1)^\beta \Phi_{3-\beta,3} \right) + \omega^2 I_3 \Phi_3 + \omega^2 J_\beta \Psi_\beta = 0 \end{cases}$$

soit un système de six équations différentielles homogènes du second ordre. Le vecteur des degrés de liberté est donc postulé sous la forme :

$$\underline{U}(\omega, y) = \widetilde{\underline{U}}(\omega, k) e^{-i k y} \quad (\text{II.4.5})$$

Cela permet d'exprimer l'équivalent des équations de Christoffel à l'origine établies dans le cas tridimensionnel (I.2.4) mais correspondant ici au modèle de poutre épaisse :

$$\begin{cases} F_{\alpha\beta} \left( k^2 \Psi_\beta + i k (-1)^\beta \Phi_{3-\beta} \right) + k^2 S_\alpha \Phi_3 - \omega^2 M \Psi_\alpha - \omega^2 J_\alpha \Phi_3 = 0 \\ k^2 A U_3 + k^2 B_\beta \Phi_\beta - \omega^2 M U_3 + \omega^2 J_\beta \Phi_\beta = 0 \\ k^2 B_\alpha U_3 + k^2 D_{\alpha\beta} \Phi_\beta + (-1)^\alpha \left( F_{(3-\alpha)\beta} (i k \Psi_\beta - (-1)^\beta \Phi_{3-\beta}) + i k S_{3-\alpha} \Phi_3 \right) - \omega^2 I_{\alpha\beta} \Phi_\beta + \omega^2 J_\alpha U_3 = 0 \\ k^2 K \Phi_3 + S_\beta \left( k^2 \Psi_\beta + i k (-1)^\beta \Phi_{3-\beta} \right) - \omega^2 I_3 \Phi_3 - \omega^2 J_\beta \Psi_\beta = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations peut finalement se mettre sous la forme :

$$\left( \mathbf{K}_0 + i k \mathbf{K}_1 + k^2 \mathbf{K}_2 - \omega^2 \underline{\underline{\Gamma}} \right) \widetilde{\underline{U}} = \mathbf{0} \quad (\text{II.4.6})$$

où les matrices  $\mathbf{K}_i$  sont de la forme :

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & F_{22} & 0 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & A & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.7})$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_{22} & 0 & 0 & 0 & -S_2 \\ F_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 & -S_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.8})$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.9})$$

On remarque de nouveau que les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_2$  sont symétriques ; la matrice  $\mathbf{K}_1$  est quant à elle antisymétrique. Le système (II.4.6) est donc à symétrie hermitienne.

Une nouvelle fois, le système d'équations obtenu représente un problème aux valeurs propres quadratique ; il peut donc être résolu de façon identique au cas des formulations éléments finis spectraux données au chapitre I, section I.5 (voir expressions (I.5.11) ou (I.5.14)).

### II.4.2.2 Poutres orthotropes symétriques

Dans le cas où la distribution des propriétés mécaniques de la poutre est symétrique par rapport à la fibre neutre ( $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ), les termes extra-diagonaux  $\mathbf{J}$  et  $I_{12}$  des inerties généralisées  $\underline{\underline{\Gamma}}$  (C.4.22) s'annulent, de même que les termes de couplage  $D_{12}$ ,  $\underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{S}}$  dans la matrice de comportement  $\underline{\underline{\Pi}}$  (C.4.18). De plus, si les matériaux constitutifs sont orthotropes dans le repère local de la poutre, alors la raideur généralisée  $F_{12}$  est nulle. Les matrices  $\underline{\underline{\Gamma}}$  et  $\underline{\underline{\Pi}}$  deviennent en conséquence diagonales.

Dans cette configuration particulière, le système d'équations caractéristique de la propaga-



tion des ondes dans la poutre (II.4.6) se sépare en 4 équations découplées :

*traction-compression* ④ :

$$(k^2 A - \omega^2 M) \tilde{U}_3 = 0 \quad (\text{II.4.10})$$

*torsion* ③ :

$$(k^2 K - \omega^2 I_3) \tilde{\Phi}_3 = 0 \quad (\text{II.4.11})$$

*flexion et cisaillement hors-plan* ① et ⑥ selon  $\mathbf{e}_1$  :

$$\begin{bmatrix} k^2 F_{11} - \omega^2 M & -i k F_{11} \\ i k F_{11} & F_{11} + k^2 D_{22} - \omega^2 I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.12})$$

*flexion et cisaillement hors-plan* ② et ⑤ selon  $\mathbf{e}_2$  :

$$\begin{bmatrix} k^2 F_{22} - \omega^2 M & i k F_{22} \\ -i k F_{22} & F_{22} + k^2 D_{11} - \omega^2 I_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_2 \\ \tilde{\Phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.13})$$

Ces équations donnent respectivement les solutions des ondes de traction-compression, de torsion et de flexion/cisaillement hors-plan dans la poutre.

Dans ce qui suit, on donne les différents résultats remarquables sont ces différentes ondes. A chaque fois, on donne le résultat correspondant au cas d'une poutre orthotrope homogène de section rectangulaire (de dimensions  $h_1$  et  $h_2$ ).

La figure II.4 illustre ces résultats, pour le cas d'une poutre homogène isotrope, de dimensions  $h_1 = 6$  mm et  $h_2 = 8$  mm, et dont le coefficient de Poisson du matériau est  $\nu = 0.3$ . De façon à s'affranchir de l'influence des propriétés de raideur et de densité, on a représenté les résultats en fonction de la fréquence adimensionnée  $F = f \times L/c_t$  et du nombre d'onde adimensionné  $K = k \times L$ , où  $c_t$  est la vitesse élémentaire de cisaillement dans le matériau (I.2.9) et  $L^2 = h_1^2 + h_2^2$  est la taille caractéristique de la section de la poutre. Ainsi, la représentation ne dépend que du rapport  $h_1/h_2$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

Sur la figure sont représentés les résultats donnés par le modèle de Timoshenko, avec le choix des coefficients correcteurs  $\xi_t = 1$  et  $\xi_s^2 = \pi^2/12$ . les différentes branches de dispersion obtenues avec le modèle sont labellisées de ① à ⑥, de façon identique à la figure I.6 du chapitre I. Sont également superposés sur la figure II.4 les résultats de référence correspondant aux différentes branches, obtenus à partir du schéma SFEM proposé ce même chapitre.

**Traction-compression** Les ondes de traction-compression ④ (ou ondes *longitudinales*) sont non-dispersives dans le modèle de Timoshenko : elles sont caractérisées par une vitesse de phase  $c$  constante :

$$c_4^2 = \frac{A}{M} = \frac{E_3}{\rho} \quad (\text{II.4.14})$$

Comme dans le cas des plaques, cette vitesse est correcte tant que les effets de cisaillement hors-plan sont négligeables ; à partir d'une certaine fréquence, la cinématique de Timoshenko ne suffit plus pour décrire correctement le mode de traction-compression. ce phénomène est visible sur la figure II.4, où la branche ④ s'écarte de plus en plus du résultat de référence avec l'augmentation de la fréquence.

**Torsion** De même que les ondes longitudinales, les ondes de torsion ③ obtenues avec le modèle de Timoshenko sont non-dispersives : leur vitesse de phase est prédite par le modèle de

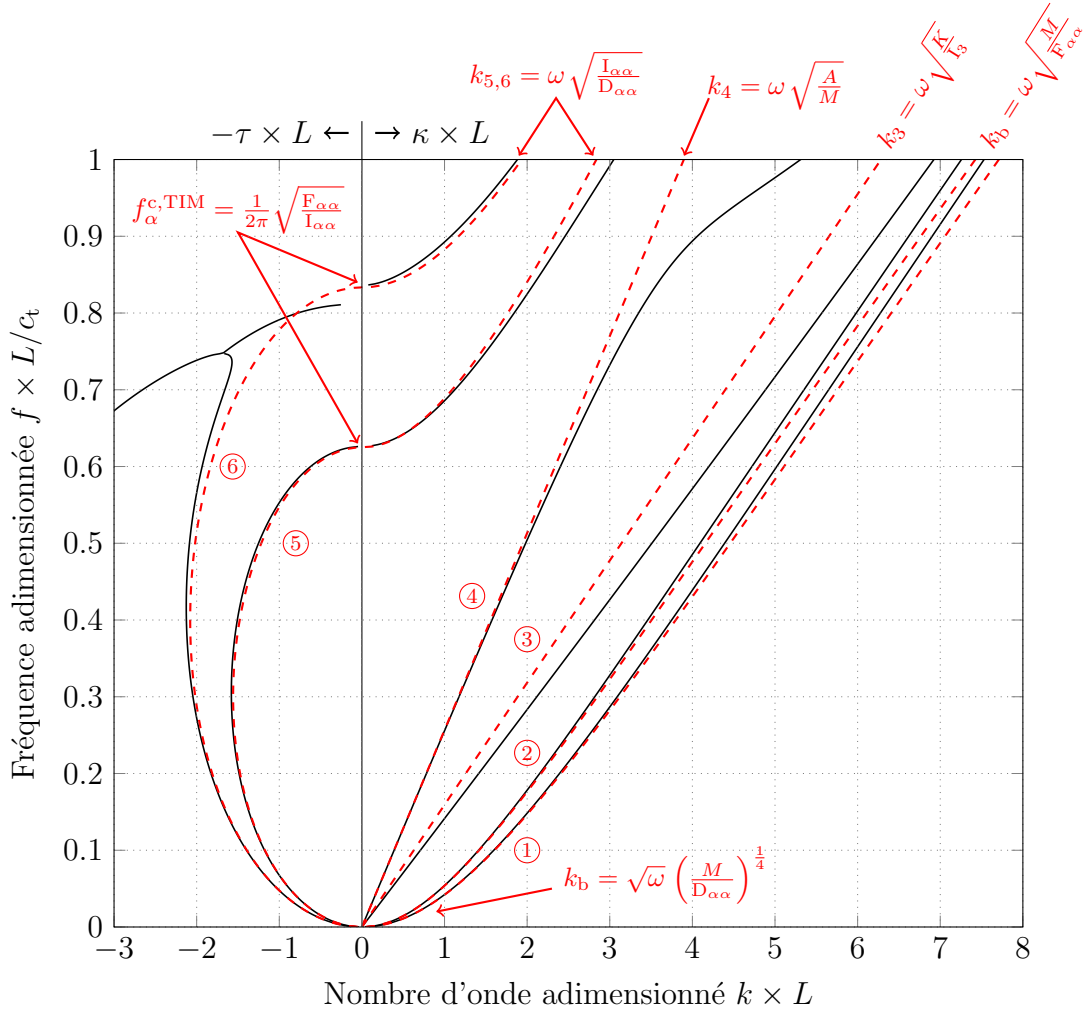


FIGURE II.4 – Dispersion des ondes dans une poutre homogène isotrope de section rectangulaire ( $h_1 = 6$  mm,  $h_2 = 8$  mm,  $L^2 = h_1^2 + h_2^2$  et  $\nu = 0.3$ ). Parties réelle et imaginaire du nombre d'onde  $k = \kappa - i\tau$  (I.1.11). Comparaison des solutions données par le modèle de Timoshenko avec  $\xi_s^2 = \pi^2/12$  et  $\xi_t = 1$  (lignes rouges pointillées) avec les résultats SFEM (lignes noires).

Timoshenko comme suit :

$$c_3^2 = \frac{K}{I_3} = \xi_t^2 \frac{h_1^2 G_{13} + h_2^2 G_{23}}{\rho(h_1^2 + h_2^2)} \quad (\text{II.4.15})$$

Le choix du coefficient correcteur  $\xi_t$  est donc primordial pour décrire correctement le comportement de la poutre en flexion. On remarque sur la figure II.4 que le mode de référence associé à la torsion semble lui aussi non-dispersif sur le domaine de fréquences étudié. Toutefois, on voit que le nombre d'onde de torsion obtenu avec le modèle de Timoshenko est trop faible (la branche ③ en rouge est au-dessus de la branche noire correspondante). Cela est dû à un mauvais choix du coefficient  $\xi_t$ . Une discussion plus approfondie sur ce choix est menée plus bas.

**Flexion et cisaillement hors-plan** Les équations (II.4.12) et (II.4.13) concernent les ondes pour lesquelles la section de la poutre ne reste pas dans le même plan qu'à l'état naturel au cours du mouvement : ce sont les ondes de flexion (①/②) et de cisaillement hors-plan (⑤/⑥).

Les deux déterminants des matrices caractéristiques de ces équations sont en fait équivalents, au changement d'indice  $1 \rightarrow 2$  près. Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse donc qu'à la première équation (II.4.12), qui concerne les mouvements de translation selon  $\underline{e}_1$  ( $\Psi_1$ ) et de rotation selon  $\underline{e}_2$  ( $\Phi_2$ ) (flexion ① et cisaillement hors-plan ⑥). cette équation est très similaire à l'équation donnant les solutions des ondes de flexion et de cisaillement hors-plan dans une plaque épaisse orthotrope (II.2.13). Les résultats sont donc équivalents. L'annulation du déterminant de la matrice caractéristique donne :

$$k^4 F_{11} D_{22} - \omega^2 k^2 (I_{22} F_{11} + M D_{22})^2 + \omega^2 (\omega^2 M I_{22} - M F_{11}) = 0 \quad (\text{II.4.16})$$

et ses solutions sont :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{2} \left[ \left( \frac{I_{22}}{D_{22}} + \frac{M}{F_{11}} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{I_{22}}{D_{22}} - \frac{M}{F_{11}} \right)^2 + \frac{4}{\omega^2} \frac{M}{D_{22}}} \right] \quad (\text{II.4.17})$$

soit 4 solutions complexes paramétrées par la pulsation  $\omega$ . En prenant la limite pour  $\omega \rightarrow 0$ , les solutions deviennent :

$$k_b^4 = \omega^2 \frac{M}{D_{22}} = \omega^2 \frac{12}{h_1^2} \frac{\rho}{E_3} \quad (\text{II.4.18})$$

Le nombre d'onde  $k_b$  ou la vitesse de phase  $c_b = \omega/k_b$  associés aux ondes de flexion sont donc, en basse fréquence, proportionnels à la racine carrée de la fréquence. Puisqu'elles sont solutions d'une racine quatrième, les solutions  $k_b$  sont au nombre de 4 ; dans le cas conservatif, deux sont purement réelles (onde propagative) et deux imaginaires pures (ondes évanescentes). Quand le comportement des matériaux est visqueux, les modules de flexion  $D_{\alpha\beta}$  deviennent complexes ; les solutions de l'équation ci-dessus sont alors, comme les racines quatrièmes de l'unité, de la forme, pour  $n = \{0, \dots, 3\}$  :

$$k_{b,n} = \sqrt{\omega} \left( \frac{M}{D_{22}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i \frac{n\pi}{2}} \quad (\text{II.4.19})$$

Les deux solutions correspondant aux ondes évanescentes en basse fréquence deviennent propagatives pour une fréquence de coupure donnée ; elles sont alors responsables de déformations de cisaillement hors-plan pûr dans la section. Cette fréquence de coupure  $f_c = \omega_c/(2\pi)$  peut être prédite par le modèle de Timoshenko, comme dans le cas des plaques épaisses (II.2.29), en prenant la limite de l'équation (II.4.17) pour  $k \rightarrow 0$ . on obtient alors :

$$f_1^{c,\text{TIM}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F_{11}}{I_{22}}} = \frac{\xi_s}{2\pi h_1} \sqrt{\frac{12 G_{13}}{\rho}} \quad (\text{II.4.20})$$

Le troisième résultat remarquable que l'on peut obtenir des solutions (II.4.17) consiste à prendre la limite de celles-ci pour  $\omega \rightarrow \infty$  ; dans ce cas, la vitesse asymptotique des ondes de flexion ① et de cisaillement hors-plan ⑥ peut être obtenue :

$$c_s^2 \underset{\omega \rightarrow \infty}{=} \frac{D_{22}}{I_{22}} = \frac{E_3}{\rho} \quad \text{et} \quad c_b^2 \underset{\omega \rightarrow \infty}{=} \frac{F_{11}}{M} = \xi_s^2 \frac{G_{13}}{\rho} = \xi_s^2 c_{13} \quad (\text{II.4.21})$$

où  $c_{13}$  est la vitesse des ondes de cisaillement élémentaires dans le matériau d'une poutre homogène (I.2.9).

**Correction en cisaillement hors-plan** De nouveau, le résultat sur la fréquence de coupure  $f^{c,TIM}$  des ondes de cisaillement hors-plan ⑤ et ⑥ (II.4.20) et les vitesses asymptotiques  $c_1$  ou  $c_2$  des ondes de flexion ① et ② en haute fréquence (II.4.21) posent la question du choix du coefficient correcteur  $\xi^s$ , celui entrant en compte dans leur expression. Dans le cas des guides d'ondes uniaxiaux de section quelconque, la discussion sur le choix de  $\xi_s$  est toujours un problème d'actualité [66].

Dans le cas des plaques homogènes, on a pu remarquer que la vitesse des ondes de flexion tend vers la vitesse des ondes de surface en haute fréquence. Dans le cas des poutres rectangulaires homogènes, il a été montré que la vitesse des ondes de flexion tend, lorsque la longueur d'onde est faible, vers la vitesse d'ondes se propageant le long des arêtes [81, 110]. Comme dans le cas des ondes de Rayleigh, l'estimation de la vitesse de ces ondes d'arête n'est pas simple, ce qui rend le calcul  $\xi_s$  par cette approche difficile.

Dans le cas des poutres de section rectangulaire homogène, on choisit dans ce travail  $\xi_s^2 = \pi^2/12$ , en accord avec les préconisations de Mindlin concernant la théorie des poutres de Timoshenko [141]. Comme dans le cas des plaques, ce choix correspond à l'égalisation des fréquences de coupure  $f^c$  données par la théorie tridimensionnelle et le modèle de poutre épaisse. On peut remarquer sur la figure II.4 que ce choix permet de décrire les branches ①, ②, ⑤ et ⑥ de façon très correcte et sur un domaine de fréquences étendu. Comme on pouvait s'y attendre, la tendance asymptotique des nombres d'ondes associés aux deux ondes de flexion ① et ② sont dans ce cas surestimés par le modèle de Timoshenko par rapport aux résultats de référence. Cette différence est toutefois assez minime et pourra être négligée lors de la formulation des méthodes inverses d'identification (voir chapitre VI).

## II.5 Cinématique d'Euler-Bernouilli

Le modèle de poutre mince, formulé à partir de la cinématique d'Euler-Bernouilli, peut être obtenu de façon équivalente à ce qui a été fait dans le cas des plaques (voir section II.3).

Le modèle de poutre de Timoshenko est repris, en considérant uniquement les poutres dont la distribution de propriétés mécaniques dans la section est symétrique par rapport à la fibre neutre. Il est alors supposé que les sections de la poutre, en plus de rester planes au cours du mouvement, demeurent perpendiculaires à la fibre neutre. Cela permet d'ajouter une liaison cinématique entre chaque degré de liberté  $\Phi_\alpha$  et la flèche associée  $\Psi_{3-\alpha}$  :

$$\Phi_1 = \Psi_{2,3} \quad (II.5.1)$$

$$\Phi_2 = -\Psi_{1,3} \quad (II.5.2)$$

On obtient alors un modèle très simple, caractérisé par 4 équations du mouvement, portant sur les deux mouvements de flexion (selon  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ ), le mouvement de torsion et la traction-compression. Ces équations permettent finalement de déduire les lois de dispersion associées au

modèle de poutre mince :

$$k_{b,1}^4 = \omega^2 \frac{M}{D_{22}} = \omega^2 \frac{12}{h_1^2} \frac{\rho}{E_3} \quad (\text{II.5.3})$$

$$k_{b,2}^4 = \omega^2 \frac{M}{D_{11}} = \omega^2 \frac{12}{h_2^2} \frac{\rho}{E_3} \quad (\text{II.5.4})$$

$$k_t^2 = \omega^2 \frac{I_3}{K} = \omega^2 \xi_t^2 \frac{h_1^2 G_{13} + h_2^2 G_{23}}{\rho(h_1^2 + h_2^2)} \quad (\text{II.5.5})$$

$$k_a^2 = \omega^2 \frac{M}{A} = \omega^2 \frac{\rho}{E_3} \quad (\text{II.5.6})$$

$$(\text{II.5.7})$$

où  $k_{b,\alpha}$ ,  $k_t$  et  $k_a$  dénotent respectivement les nombres d'onde associés aux ondes de flexion, torsion et traction-compression. Comme dans le cas du modèle de Timoshenko, le comportement en torsion doit être corrigé. Le modèle d'Euler-Bernoulli est également utilisé dans le cadre de la proposition de la méthode d'analyse en nombre d'onde, pour l'identification des modules d'Young et de cisaillement complexes  $E$  et  $G$  d'une poutre isotrope (voir chapitre VI). A cette occasion, les modèles de poutre épaisse et minces sont comparés.

## II.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la dérivation des équations de dispersion associée aux modèles réduits classiques de structures élancées : modèle de plaque épaisse (cinématique de Hencky-Mindlin) et de plaque mince (Kirchhoff), poutre épaisse (Timoshenko) et mince (Euler-Bernoulli). A chaque fois, les solutions particulières des équations obtenues ont été explicitées. Sur la base de la comparaison des surfaces de dispersion obtenues avec leur équivalent donné par les solutions de référence développées au chapitre précédent, le comportement de chaque modèle a pu être critiqué. La nécessaire correction du comportement obtenu par la dérivation du modèle a ainsi pu être montrée, et certains choix possibles explicités.

Dans le cas du modèle de Hencky-Mindlin, on a pu montrer que la correction du comportement en cisaillement hors-plan par un coefficient correcteur ( $\xi_t^2 = \pi^2/12$ ) permet de d'obtenir un modèle de plaque très satisfaisant, en ce qui concerne la description du comportement en flexion et en membrane, et pour des fréquences *au pire* de l'ordre de grandeur des premières fréquences de coupure des modes d'ordre supérieur. Dans le cas des plaques sandwichs caractérisées par un fort contraste de raideur entre les peaux et l'âme, on a montré la nécessité d'utiliser une loi de mélange particulière pour le comportement en cisaillement transverse : celle-ci est formulée comme l'inverse de la somme des souplesses, et permet de corriger le comportement du modèle à la fois en raideur et en amortissement.

On s'est ensuite intéressé au cas des plaques minces stratifiées, dont le modèle correspondant peut être dérivé du modèle de Hencky-Mindlin par ajout d'une liaison cinématique. Une fois les équations de dispersion obtenues, la formulation polaire a été présentée et appliquée. Celle-ci permet de rendre explicite la dépendance en angle du tenseur des raideurs en contraintes planes, qui entre dans l'expression de toutes les matrices du comportement généralisé de plaque mince. Quelques résultats sur les différentes solutions d'onde ont pu être dérivés, faisant l'état d'un travail encore en cours.

Dans un troisième temps, le modèle de poutre épaisse a été dérivé. De nouveau, les lois de dispersion qui lui sont associées ont été données. Les résultats obtenus ont été comparés aux solutions de référence correspondantes, permettant de montrer la nécessité de corriger le comportement du modèle en cisaillement hors-plan *et* en torsion. dans le cas des poutres homogènes de section rectangulaire, le choix de  $\xi_t^2 = \pi^2/12$  en tant que coefficient correcteur en cisaillement hors plan a été justifié. La correction du comportement en torsion n'a toutefois pas été discutée ; celle-ci constitue une perspective de travail intéressante, quoique déjà traitée par de nombreux travaux académiques. Enfin, les équations de dispersion données par le modèle de poutre mince ont été données.

Tous les modèles dérivés dans ce chapitre sont utilisés pour la formulation des procédures d'identification inverses proposées dans les chapitres qui suivent ; que ce soit pour la caractérisation par analyse modale proposée au chapitre [V](#), l'analyse en nombre d'onde proposée au chapitre [VI](#) ou l'analyse en vecteur d'onde proposée au chapitre [VII](#).



## Deuxième partie

### Un nouveau moyen de mesure plein-champ





## Chapitre III

# The Robotized Laser Doppler Vibrometer : on the use of an industrial robot arm to achieve 3D full-field velocity measurements

### Résumé

Le présent chapitre décrit rapidement un dispositif expérimental original qui a été développé au cours de ce travail de thèse. Le travail présenté étant destiné à être publié, le chapitre est en anglais.

On présente donc un **dispositif de vibrométrie robotisé**, appelé en conséquence *Robotized Laser Doppler Vibrometer* (RLDV). Un vibromètre laser fixe est assemblé sur un bras robot 6 axes, permettant le positionnement précis du capteur. Ainsi, le **champ de vitesse tridimensionnel instantané** de structures de géométries diverses et soumises à une excitation répétable peut être mesuré.

Toutefois, l'utilisation d'un bras robot amène un certain degré de complexité, qu'il est nécessaire de prendre en compte. Une discussion est menée à ce sujet. De manière à faciliter la conception d'expérimentations utilisant le dispositif, une **solution logicielle** a été implémentée. Celle-ci est divisée en deux parties : la première, implémentée dans le logiciel de CAO Rhinoceros3D, est dédiée à la définition d'un **modèle virtuel du dispositif expérimental**. Ce modèle permet la définition du maillage de mesure, la pré-visualisation des mouvements du robot ainsi que l'écriture du code de commande permettant la mise en mouvement automatisée de celui-ci, rendue possible par le plug-in HAL. La seconde partie du logiciel, implémentée dans Matlab, est dédiée à l'acquisition, le traitement et la prévisualisation des mesures.

La présentation se conclut par un cas d'application. La réponse transitoire libre d'une poutre courbe est mesurée. Les **modes tridimensionnels** de celle-ci sont extraits de la mesure grâce à la technique d'analyse modale proposée au chapitre V. Ces modes sont comparés à des prédictions numériques. Un bon accord est obtenu entre les modes numériques et expérimentaux, permettant de juger de la pertinence des mesures obtenues.

### III.1 Introduction

During the last few decades, full-field measurement techniques were developed. They allow the contactless measurement of the kinematic field of a structure submitted to a dynamic excitation. In comparison to single point measurement, a great number of measurement data can be acquired. An increasing number of identification methods use the data redundancy offered by these measurement techniques [10]. In dynamics, one can mention the Modal Analysis [70], the Force Analysis Technique [118], the Virtual Field Method [164] or the High-Resolution Wavevector Analysis [134, 135].

A very popular tool to achieve dynamical measurements is the Laser Doppler Vibrometers (LDV). It allows a direct measurement of the velocity. Compared to high-speed cameras, it is an asset in high frequency, as the displacement amplitudes decreases with the frequency. As a consequence, measurements with a good signal-to-noise ratio can be achieved in a wide range of frequencies. By moving the laser beam thanks to galvo scanners, the Scanning Laser Doppler Vibrometer (SLDV) is now considered as a versatile tool to perform full-field measurement over a wide frequency range [186].

However, some identification methods need the measurement of the 3D kinematic field of the structure. As the LDV measures the instantaneous velocity in the direction of its laser beam, one has to perform the velocity measurement for a number of laser incidence angles in order to retrieve the three components of the displacement. As a consequence, either the scanning head has to be moved [133, 107] or three LDVs have to be used simultaneously [142], thus leading to a high price of the overall setup. Moreover, these solutions requires a number of manual handling steps that limits the number of points that can be measured. In addition, uncertainties can arise from incorrect positioning of the laser head.

Recently, automated solutions were developed in order to overcome these limitations. Perhaps the most complete solution can be found in [153], where three SLDVs are assembled on the head of an industrial robot arm. However, this commercially available solution is offered at a very high price.

The aim of the present letter is to propose a setup which is able to perform 3D full-field velocity measurements at a reduced price. The idea is to assemble a single point LDV on an industrial robot arm. The weight to be held being reduced, the robot arm can be smaller hence the price kept affordable. The setup is consequently called the Robotized Laser Doppler Vibrometer (RLDV). A software solution is described. The first part, integrated in the Rhinoceros CAD software<sup>1</sup> by means of the Grasshopper plug-in, is used to build the *virtual experimental setup*. This virtual environment is then the basis to define the mesh of measurement points. The preview and control of the robot motion is implemented by the use of the HAL plug-in<sup>2</sup>. The second part of the proposed software solution is devoted to signal acquisition, processing and preview. It is implemented in Matlab.

The letter is organized as follows : first, a discussion is given about the advantages of performing LDV measurements with an industrial robot arm and difficulties that arise when using such a manipulator. Second, the proposed software solution is briefly described in order to give an overview of its operation. Third, an experimental application is presented to validate the setup. The 3D mode shapes and frequencies of a curved beam are measured and compared to predicted mode shapes.

---

1. [www.rhino3d.com/en](http://www.rhino3d.com/en)

2. [www.hal-robotics.com](http://www.hal-robotics.com)

## III.2 The Robotized Laser Doppler Vibrometer

A fixed point Laser Doppler Vibrometer (LDV) measures the instantaneous velocity  $\mathbf{v}_k(t)$  in the direction  $\mathbf{n}_k$  of its laser beam (see the figure III.1). By moving the LDV, the measurement of the velocity can be performed, at the same point, for  $K \geq 3$  distinct laser incidence vectors  $\mathbf{n}_k$ . As a consequence, the 3D instantaneous velocity  $\mathbf{u}(t) = {}^T[u_1(t), u_2(t), u_3(t)]$  of the point, expressed in the cartesian coordinates, can be retrieved :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{v}(t) \quad (\text{III.2.1})$$

where  $\mathbf{P} = [\mathbf{n}_1 \dots \mathbf{n}_K]$  is the transfer matrix,  $\bullet^\dagger$  denotes the matrix pseudo inverse and  $\mathbf{v}(t) = {}^T[v_1(t) \dots v_K(t)]$  contains the instantaneous velocity measured for each laser orientation  $\mathbf{n}_k$ .

Multiple axis robot arms, originally developed for industrial applications, can manipulate a wide range of tools of different weights and shapes, with speeds, position accuracy and holding loads which make them interesting for a wide number of applications. In particular, a number of reasons motivates the assembly of a LDV on a robot arm.

**Accuracy.** Even with a rough calibration, modern industrial robot arms can position the tool with a sub-millimeter accuracy. Consequently, the uncertainty in the position  $\mathbf{p}$  of the measured point and the laser beam vectors  $\mathbf{n}_k$  can be reduced, thus lowering the uncertainty in the computed 3D velocity. In addition, some processing methods based on full-field data make assumptions on the regularity of the measurement mesh [164, 1, 134] that can lead to large bias in the results if not fulfilled.

**Flexibility.** In the procedure of retrieving the 3D components of the velocity (III.2.1), the choice of the positions of the LDV is critical. Indeed, when  $K > 3$ , the velocity in the cartesian coordinates is estimated in the least-squares sense. Hence the chosen incidence angles  $\phi$  (see figure III.1) have an influence on the conditioning of  $\mathbf{P}$ , which is critical in the estimation of  $\mathbf{u}(t)$  (equation (III.2.1)). In the case  $K = 3$ , the best strategy [106] seems to measure

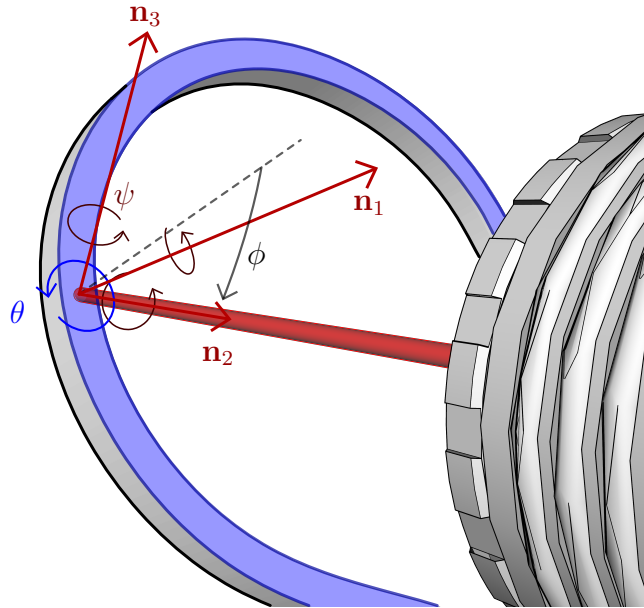


FIGURE III.1 – Measurement of the 3D velocity of a point. Laser beam vector basis ( $\mathbf{n}_i$ ), orientation of the basis ( $\theta$ ), incidence angle ( $\phi$ ) and rotation of the LDV around the laser axis ( $\psi$ ).

the velocity along directions making an angle of  $45^\circ$  with the object surface's normal at the considered point. Consequently, the laser incidence angles  $\phi$  has to be optimized in order to ensure the good conditioning of the 3D velocity retrieval. In comparison to Scanning Laser Doppler Vibrometers (SLDV), 6-axis robot arms offer a lot of flexibility in the positioning of the tool. Objects with a wide variety of shapes can be measured.

**Automation.** Being by definition a programmable manipulator, a robot arm can perform automatized measurements. As a consequence, full-field LDV measurements can be achieved on a great number of points with reduced supervision.

However, additional complexity arises with the use of a robot arm to perform such measurements. In particular, as the actuated robot arm joints are rotations, the motion of the robot is by far less intuitive than classical cartesian manipulators. Consequently, a number of elements have to be taken into account in the design of an experiment including the use of a robot arm.

**Accessibility.** When using a cartesian manipulator, one can infer the accessibility of one point, as every point on the volume given by the translation axes bounds is theoretically reachable. However, when using a robot arm with only pivot joints, the accessibility of a point cannot be guaranteed, even if it is in the sphere centered in the robot base position and which radius is the total arm length.

**Motion interpolation.** When moving between two robot configurations (the different LDV positions), one has to choose how to interpolate the positions. Based on cartesian manipulator experience, an intuitive way would be to linearly interpolate between two positions in the cartesian space. However, this type of motion can lead to very large joint rotations near the so-called robot arm *singularities*, thus leading to unwanted motion or the arm. In addition, even if both the start and the end positions are accessible, nothing can guarantee that every linearly interpolated positions between can be reached. An alternative choice could be to interpolate linearly between the two joint configurations, in the joint space (rotations). Hence the singularities would be avoided and the accessibility guaranteed. However, this type of motion

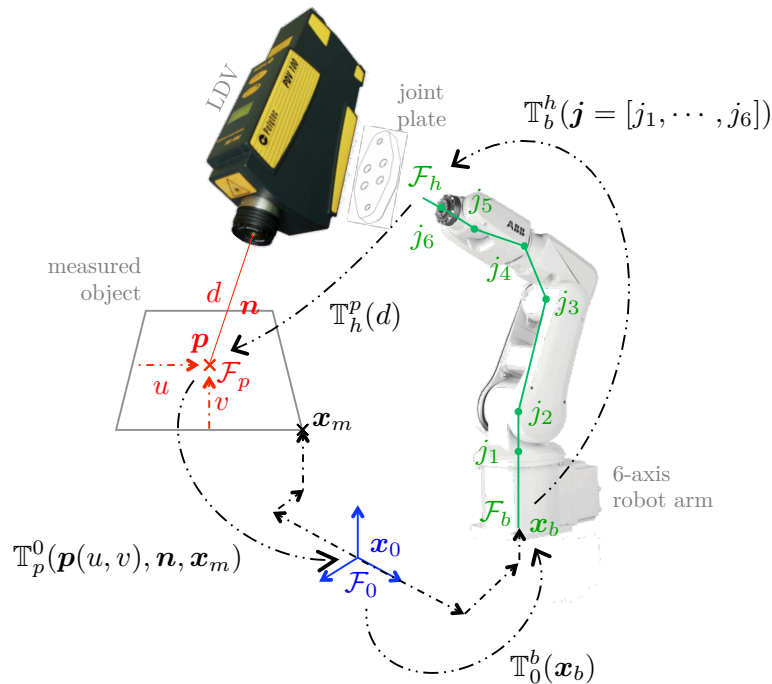


FIGURE III.2 – Scheme of the he Robotized Laser Doppler Vibrometer setup.

often leads to large non-intuitive motion in the cartesian space. These so-called *re-orientations* has to be avoided as much as possible, as they can lead to collisions.

**Collisions.** During the robot motion, a number of collisions can occur : (i) the robot with itself; (ii) between the robot and the tool or (iii) with the experiment environment. As the consequences of such collisions can be dramatic for the experiment, any collision has to be avoided.

As a consequence of the added complexity, it is necessary to build a *virtual* model of the experiment, that allows to preview the robot motion, set and optimize the target parameters and perform collision tests. The main problem to be solved when designing a robot setup simulation is the inverse kinematic problem.

**Inverse Kinematics.** A robot setup can be described by a series of frames that define different coordinate systems. In our application, the laser target is a frame  $\mathcal{F}_p$  (see Fig. III.2), given by the laser beam vector  $\mathbf{n}$ , the targeted point  $\mathbf{p}$  and an additional angle  $\psi$  which describes the rotation of the frame around  $\mathbf{n}$  (see Fig. III.1). The target position  $\mathbf{p}$  is parametrized by the measured object position  $\mathbf{x}_m$  expressed in the reference frame  $\mathcal{F}_0$  and the normalized coordinates  $(u, v)$  on the surface of the object. The robot is defined by its base frame  $\mathcal{F}_b$ , given by its position  $\mathbf{x}_b$  and orientation in the reference frame. Finally, the robot head frame  $\mathcal{F}_h$ , which coincides with the LDV base frame, is given by the 6 robot arm joint rotation angles  $\mathbf{j} = [j_1, \dots, j_6]$ . From two subsequent frames can be defined geometrical transformations :

$$\mathcal{F}_j = \mathbb{T}_i^j \mathcal{F}_i \quad (\text{III.2.2})$$

The kinematic chain can finally be defined with the identity transformation  $\mathbb{I}$  :

$$\mathbb{I} = \mathbb{T}_0^0 = \mathbb{T}_0^b \mathbb{T}_b^h \mathbb{T}_h^p \mathbb{T}_p^0 \quad (\text{III.2.3})$$

Let us assume for now that each frame  $\mathcal{F}_i$  is given : the positions of the measured object and robot base are known and the transformation  $\mathbb{T}_h^p$  is computed from the tool geometry and for a given laser beam length  $d$ . While the forward kinematic problem of computing the transformation  $\mathbb{T}_b^h$  from the robot joint values  $\mathbf{j}$  is straightforward, the inverse kinematic problem is more complex :

$$\mathbf{j} = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{a}_i \in [j_i^-, j_i^+], \mathbb{T}_b^h(\mathbf{a}) = \left( \mathbb{T}_h^p \mathbb{T}_p^0 \mathbb{T}_0^b \right)^{-1} \right\} \quad (\text{III.2.4})$$

where the  $j_i^-$  and  $j_i^+$  are respectively the minimum and maximum allowed robot arm joint values. In particular, as the parameters  $\mathbf{j}$  describe rotations, the solution is not unique. In order to simulate the robot motion, an inverse kinematic solver has to be implemented.

### III.3 The controlling software

In order to be able to achieve measurements with the RLDV, a software solution has been developed. It is divided in two parts : the first part is devoted to the modelling of the geometries of the experiment and the control of the robot. The aim of the second part is to handle the setting of the signal acquisition parameters, the signal processing steps, the measurement preview and finally the export of the measurement. A block diagram of the software solution is schematized in the figure III.3. Each part is described in more details in the two following subsections.

#### III.3.1 The virtual experiment model

The aim of the first part of the implemented software is to help the user of a RLDV setup to design the experiment and ensure the good proceeding of the measurement. It is based on the CAD software Rhinoceros3D<sup>1</sup>, with the Grasshopper plug-in which allows to process geometries via a graphical programming environment. This software configuration allows to model the different geometries of the experiment and process them with routines in order to create the LDV targets, simulate the robot motion and write the code that is finally sent to the robot controller.

All the steps involving robotic specific tasks are achieved thanks to the HAL plug-in<sup>2</sup>. This tool is dedicated to the design of general robotic setups. It includes an inverse kinematic solver (problem (III.2.4)), a library of robot arm presets from robot manufacturers, a range of tools dedicated to robot target handling and motion simulation and finally a tool that allows to communicate with the robot controller.

**Geometries of the experiment.** The first step of the design of a RLDV experiment is to create a model of the geometries that will be involved in the measurement. Three types of geometries can be distinguished :

1. Measured objects, used to create the measurement mesh and the laser beam targets.
2. Reference objects, used to calibrate the measurement setup, for example to accurately determine the relative positions  $\mathbf{x}_r$  and  $\mathbf{x}_m$  of the robot and the measured object in the reference frame  $\mathcal{F}_0$  (see Figure III.2).

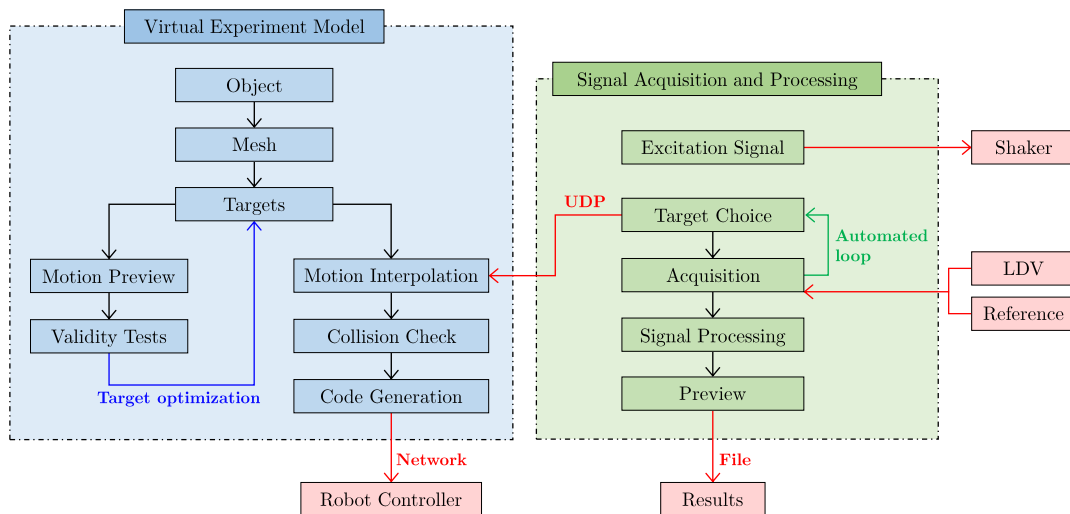


FIGURE III.3 – Block Diagram of the proposed RLDV software solution.

3. Environment objects, included in the robot motion simulation in order to avoid collisions. The refinement of the geometries has to be chosen carefully, as collision tests are computationally intense, with a burden increasing with the complexity of the involved geometries.

**Measurement mesh.** From the measured object geometry can be created the mesh of measurement points  $\mathbf{p}$ . Basically, as the LDV measurement is performed on the surface of the object, the positions of the points are given by discrete values of the  $(u, v)$  parameters that describes the surface. A classical way of building the mesh is to choose points that lies on a regular grid of  $(u, v)$  values. However, a number of meshing strategies (i.e. Delaunay mesh) can be chosen since they are implemented in the Grasshopper plug-in.

**Laser targets.** The next step is concerned by the definition of the laser beam basis  $\mathbf{P} = [\mathbf{n}_1 \dots \mathbf{n}_K]$  (see expression (III.2.1) and Figure III.1). By default, the targets are derived from the measured object surface. First, the normal of the surface of the measured object is evaluated at each measurement point  $\mathbf{p}$ . Second, the  $K$  incident beam vectors are built with the angle shift to normal  $\phi$  as parameter. These vectors are, by default, evenly distributed around the normal. Additionally, the overall target configuration can be rotated of an angle  $\theta$  around the normal (see Figure III.1). As not only a vector but a complete frame has to be given to fix the robot configuration, an angle  $\psi$  has to be set in order to define the rotation of the LDV around the laser beam axis. This target definition strategy is indicative and can be shortcut by the user. As a consequence, a wide variety of object can be measured, by adapting the target generation steps.

**Robot motion preview.** Once the targets have been built, the HAL plugin is used to preview the robot motion. At this step, a number of validity tests have to be performed in order to ensure the overall target accessibility. The software computes the inverse kinematics and returns information about the joint configuration of the arm, for each target. Invalid targets (joints out of bounds or unreachable positions) are made visible on the geometric model. No collision test is performed at this step, as it would involve a high computational burden. The user then has to check for collisions visually.

**Target optimization.** In order to make all the targets accessible, the user has to adapt the parameters  $\phi$ ,  $\theta$  and  $\psi$  represented on Figure III.1. As setting these parameters for each individual target would be inefficient, a simple procedure is proposed. Inspired from finite element shape functions, each parameter is set as a function  $f$  of the  $(u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p}))$  parameters of the surface at each point  $\mathbf{p}$  :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= f(u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p})) \\ &= f_1 \times (1 - u(\mathbf{p}))(1 - v(\mathbf{p})) \\ &\quad + f_2 \times (1 + u(\mathbf{p}))(1 - v(\mathbf{p})) \\ &\quad + f_3 \times (1 - u(\mathbf{p}))(1 + v(\mathbf{p})) \\ &\quad + f_4 \times (1 + u(\mathbf{p}))(1 + v(\mathbf{p})) \end{aligned} \tag{III.3.1}$$

with  $(u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p})) \in [-1; 1]$ . The user then has to choose the  $3 \times 4$  parameters  $\{\phi_i, \theta_i, \psi_i\}$  with  $i = 1, \dots, 4$ . Consequently, the number of optimization parameters is reduced, while keeping sufficient freedom to make all the targets accessible in an intuitive way. In addition, the laser beam length  $d$  (distance from the LDV to the object surface, see Figure III.1) can be tuned. As the LDV used for all the experiments has manual optics,  $d$  is set to be constant. Moreover, some LDV have remote-controlled optics, that could be used to even increase the freedom given to the user to optimize the target configuration.

Once all set so that they are accessible, the targets can be sent to the second part of the software dedicated to signal acquisition, processing and preview. This second part (presented



later) then becomes the master program, and the first part the slave program. When a robot motion is needed, the target to be reached is sent by the master software to the slave via the *User Data Protocol* (UDP). Before performing the robot motion, additional steps are needed.

**Motion interpolation.** Every motion is basically defined by the starting target and the end target. The right motion interpolation strategy (i.e. in the cartesian or the robot arm joints space) has to be chosen between them in order to ensure the feasibility of the motion task. A mixed approach is proposed. First, additional targets are added between the start and end targets. They are computed by a linear interpolation in the cartesian space. Then, between these targets the robot motion is interpolated in the joint space. As a consequence, both large motions of the arm due to linear interpolation in the joint space between two distant targets and singularities due to linear interpolation in the cartesian space are avoided.

**Collision check.** As the present steps are performed in the automated working mode, collisions *have* to be checked. As only a few arm positions has to be validated, the computational cost of such test is reduced. If a potential collision is detected for the scheduled motion, this motion is cancelled and the program returns an error.

**Code generation.** Once the trajectory of the robot has been generated and validated, the code necessary to communicate with the robot controller is written by the HAL plugin. Finally, the code is downloaded and the motion task performed directly.

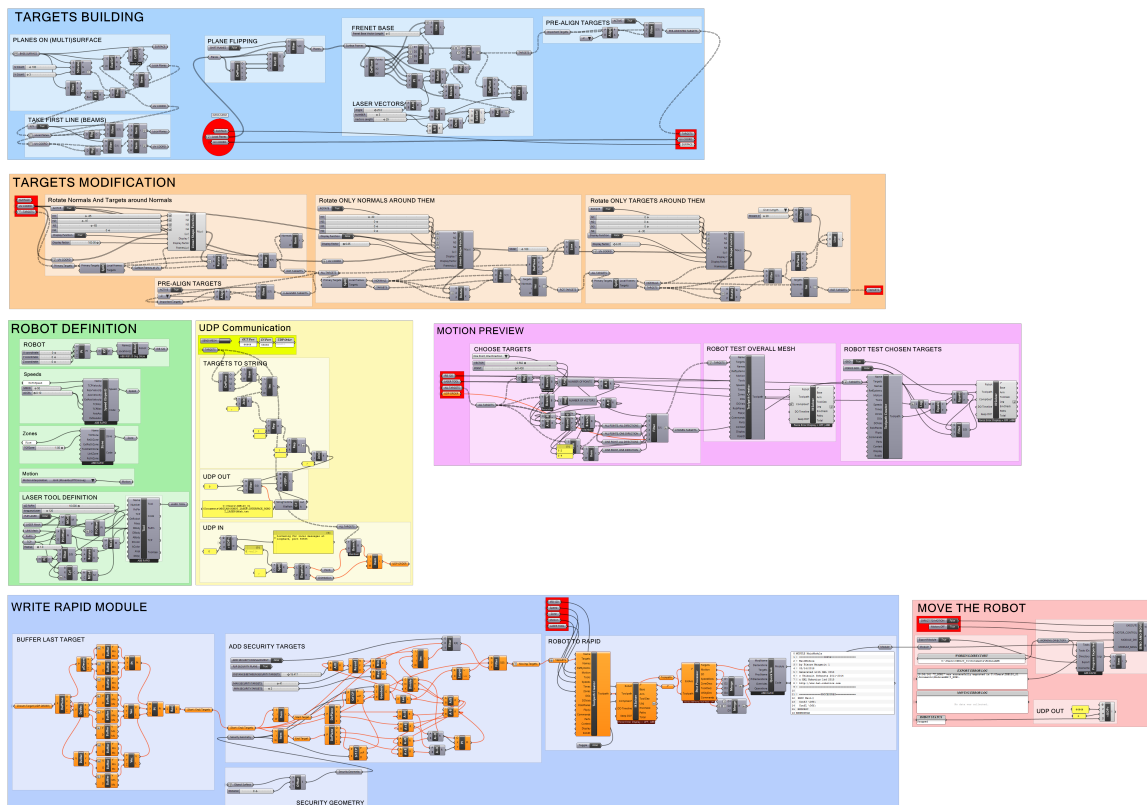


FIGURE III.4 – The Grasshopper canvas of the RLDV controlling software part related to the geometrical model, laser positions definition and robot control and preview.

### III.3.2 Signal acquisition and processing

The second part of the software, developed in the Matlab software, is devoted to signal acquisition, processing and preview. As it represents classical signal handling routines, not much details are given on these aspects here.

To summarize, a number of excitation signal types are available, both transient (i.e. burst) and stationary (i.e. white noise, blue noise, sweep). The signal processing routines allow to compute various indicators, as the transfer function between the velocity and the reference signals, coherence, etc.

It has to be noticed that every signal processing step is performed before the 3D velocity determination procedure described in (III.2.1). Indeed, as this last operation can be badly conditioned, it is preferred to reduce the noise ratio as much as possible before performing it. In addition, this last step induces correlation between the noise associated to each experiment realization, which effects on the measurement uncertainty can be hard to interpret.

Once the targets have been received from the virtual geometrical model, this second part of the software becomes the master program. It then allows to choose a specific target to perform some elementary checks (i.e. signal-to-noise ratio quantification) before starting the measurement. As the overall measurement procedure is automated, long measurements can be performed with a reduced supervision, allowing to achieve measurements on fine meshes of points.

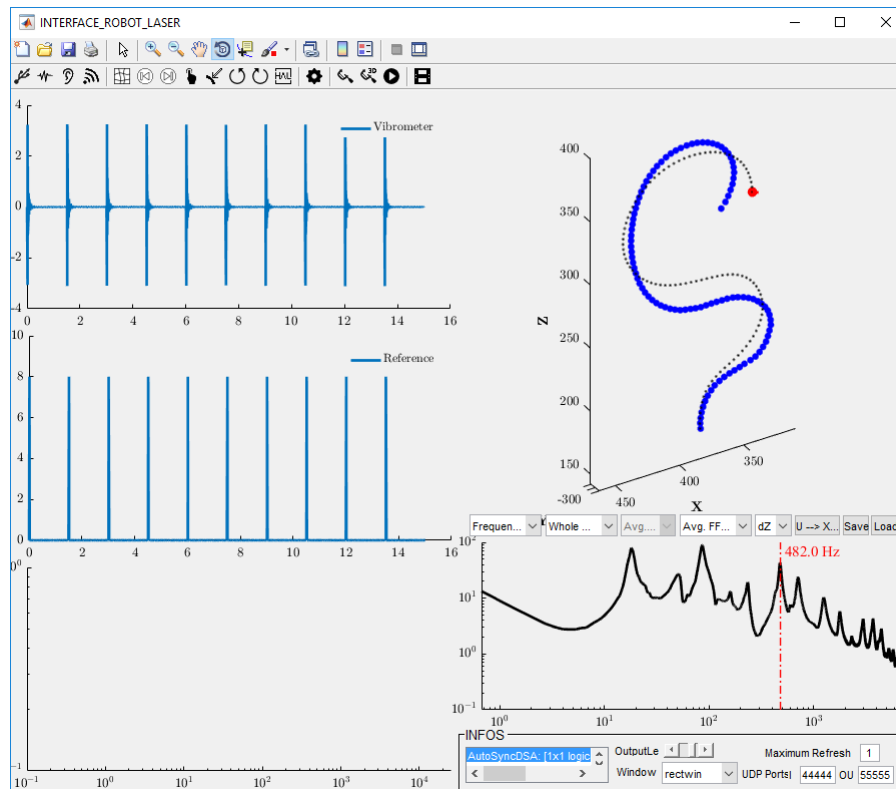


FIGURE III.5 – A capture of the MATLAB interface, the part of the RLDV software related to signal acquisition, processing and measurement preview.

### III.4 Experimental validation case

In order to test the validity of the proposed setup, a simple application case study is presented. The modes of a curved beam are measured with the RLDV and the comparison with synthesized modes is performed. As the beam is curved, the mode shapes are expected to contain multiple velocity components. In order to be build with a laser cutting machine, the beam has been chosen so that its neutral axis lays in a plane. As a consequence, this plane is a plane of symmetry of the beam : the modes of the structure are either *contained* in this plane *or* with a dominant out-of-plane component.

The beam of  $b = 5$  mm width is cut on a PMMA plate of  $h = 6$  mm thickness (see Fig. III.6). The Young and the shear modulus are respectively  $E = 4.5$  GPa and  $G = 1.5$  GPa.

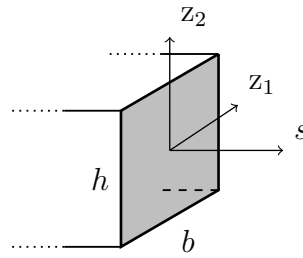


FIGURE III.6 – Beam geometry and coordinate axis.  $h = 6$  mm,  $b = 5$  mm.

#### III.4.1 The model

To validate the measured mode shapes, a curved beam model is implemented. Following the Timoshenko beam model, the kinematic field is postulated as :

$$\mathbf{u}(s, \mathbf{z}) = \mathbf{w}(s) + \boldsymbol{\alpha}(s) \otimes \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.1})$$

where  $s$  is the curvilinear coordinate and  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]$  the position in the beam section (see Fig. III.6). By using finite elements, 2064 nodes with 6 degrees of freedom (3 translations  $w_i$ , 3 angles  $\theta_i$ ) are defined. Assuming cantilever boundary conditions (see Figure III.7), the first  $N$  numerical modal shapes  $\mathbf{q}$  and frequencies  $\omega$  are obtained so that :

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_n = 0 \quad , \quad n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{III.4.2})$$

#### III.4.2 The measurement

**Setup.** The RLDV setup used for this experimental case is composed of a Polytec PDV-100 vibrometer assembled on an ABB IRB 120 industrial robot arm. An assembly plate is inserted between the LDV and the robot head in order to adapt the different screw holes. Both LDV and robot geometries are given by the respective manufacturers and used in the virtual experiment model. The *real* setup and its *virtual* model are represented in Figure III.7. For the signal acquisition, a National Instruments NiDAQ USB-6215 is interfaced with Matlab.

In order to be able to extract the modes of the beam, its free response have to be measured. As the experiment has to be fully automatized, the excitation of the beam has to be sufficiently

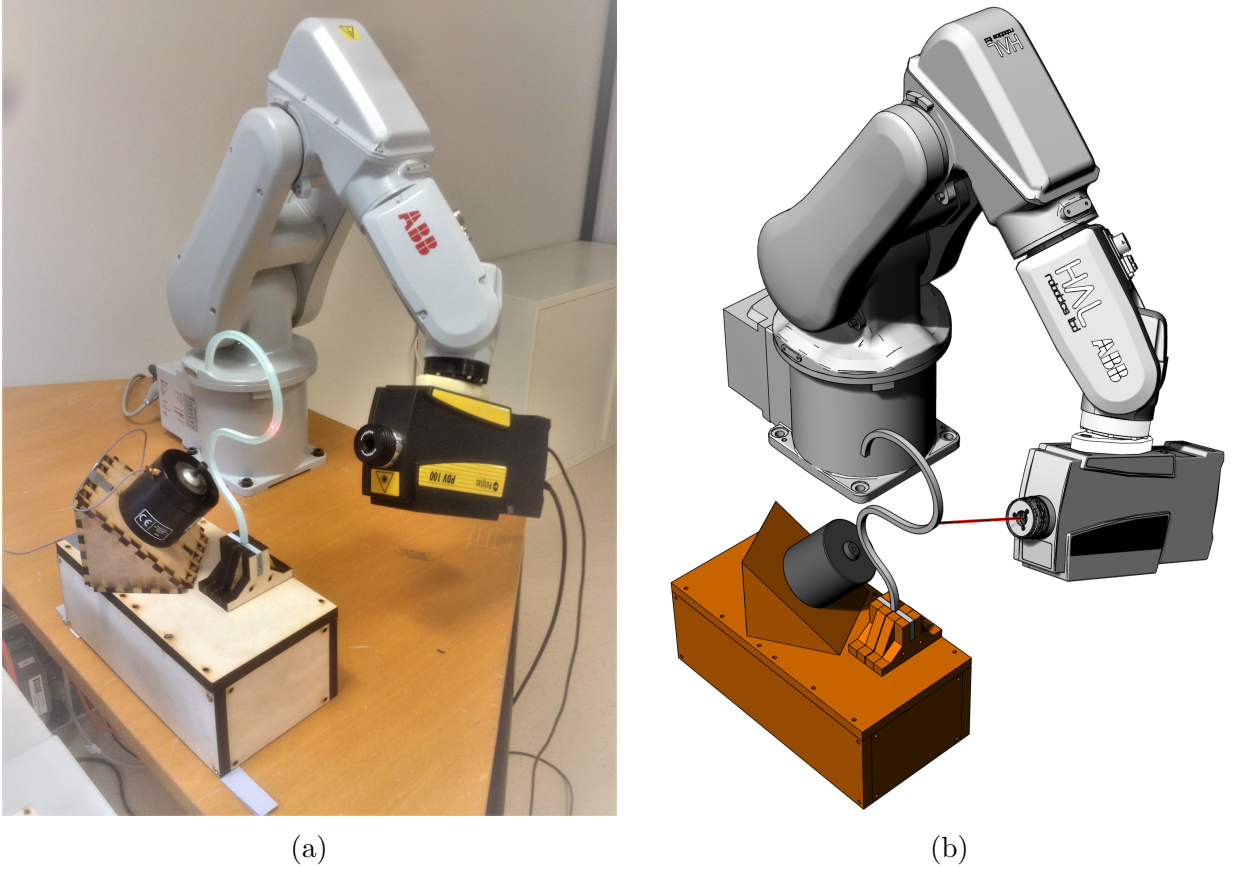


FIGURE III.7 – The experimental setup for the validation case study. (a) Picture of the real setup. (b) Screen shot of the virtual setup.

repeatable. The solution chosen here is to use an electrodynamic shaker as an automatic hammer. At the beginning of each measurement realization, an impulsive electrical signal is sent to the shaker, which consequently hits the beam. This procedure has been found to make reproducible impact loads with adjustable magnitude and length. In order to excite both in-plane and out-of-plane modes, the shaker is oriented at an approximate angle of  $45^\circ$  with regard to the beam plane.

**Target positioning.** The velocity measurement is performed over the top surface of the beam, along the middle curve (see Fig. III.6) :

$$\mathbf{z} = {}^T[0 \ h/2] \quad (\text{III.4.3})$$

From this curve are extracted  $P = 301$  equally-spaced points that constitute the 1D measurement mesh. Then  $K = 3$  laser targets are defined at each point with a constant incidence angle  $\phi = 25^\circ$ . A 1D version of the shape function III.3.1 is used :  $f_{1D}(s) = f(s, 0)$ . Finally, only five parameters ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  and  $d$  as defined in Fig. III.1) need to be set in order to define all the targets.

**Signal acquisition settings.** The maximum observed beam response duration is approximately 0.5 seconds, as the PMMA composing the beam as a high loss factor. Consequently, the experiment duration is set to 0.8 seconds, with a sampling frequency of 51.2 kHz. The excitation signal is sent 10 ms after the beginning of each experiment realization. In order to enhance the signal to noise ratio and to check the experiment repeatability,  $M = 45$  realizations of the experiment are performed for each laser position. Finally, a total of  $M \times K \times P = 45 \times 3 \times 301 = 40635$

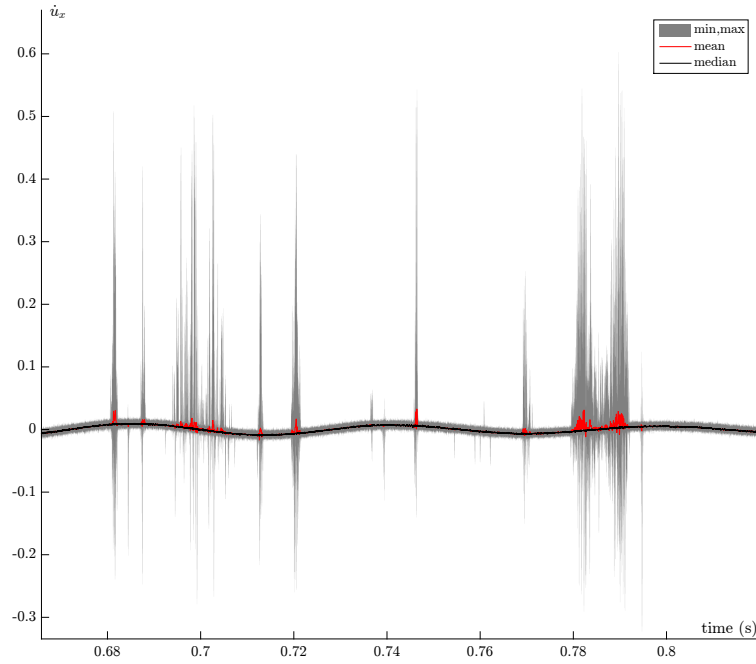


FIGURE III.8 – Influence of the averaging steps on 45 realizations of the same measurement : range of the acquired velocities at each time sample (gray patch), mean over the realizations (red line) and median of the realizations (black line).

experiment realizations are performed, for an overall measurement duration of approximately 20 hours, when including the time to move the robot between each target.

**Averaging strategy** When motions perpendicular to the laser beam vector occurs, the LDV is source of impulsive noise of high amplitude. This phenomenon is due to the surface roughness which modifies the instantaneous laser diffraction pattern, thus the quality of the signal received by the LDV. Because of this impulsive *optical* noise, taking the mean over the  $M$  signal realizations is not always relevant. As a consequence, the median is used here. At each time sample, the median over the  $M$  realization is taken. Hence realizations that contains high impulsive noise are discarded. Figure III.8 illustrates the different strategies. It can be observed that the minimum and maximum measured values at each samples (gray envelope) have a very high magnitude compared to the signal amplitude. In addition, even with 45 realizations, the mean value (red line) remains sensitive to these variations. However, the median value (black line) reduces greatly the impulsive noise.

This impulsive noise reduction strategy is performed before the 3D velocity estimation procedure (III.2.1), as impulsive noise would have a catastrophic effects on this estimation.

As a result of the measurement, the mean absolute velocity over the points is represented in Figure III.9. The three cartesian components of the velocity are plotted. From this results can be discarded the two mode types : out-of plane modes have a dominant  $u_y$  component (orange spectrum), while in-plane modes are composed of both  $u_x$  and  $u_z$  components (resp. blue and yellow spectrums).

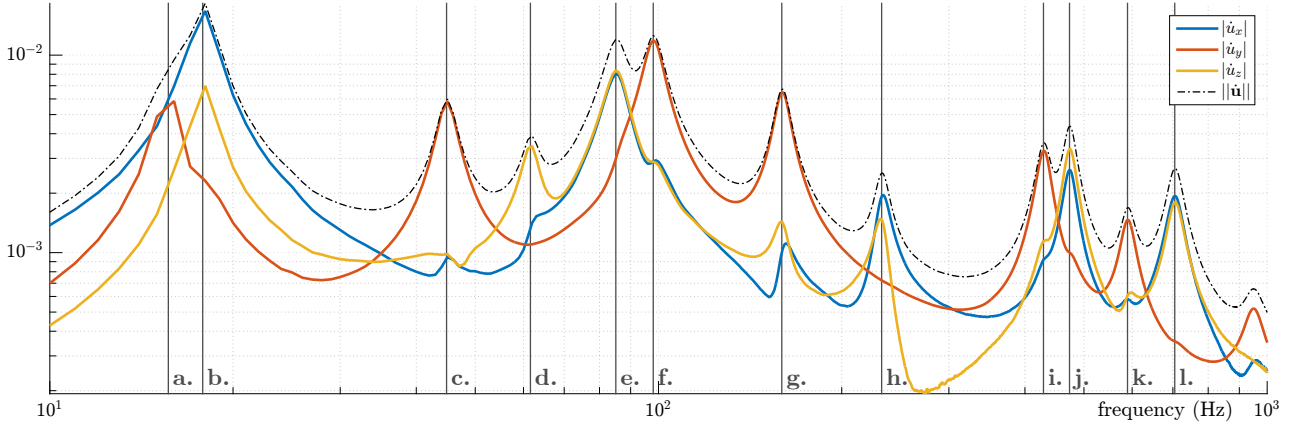


FIGURE III.9 – Measurement Results. Root Mean Squared Velocity : magnitude (dashed black line). and cartesian components (colored lines). Identified modal frequencies : vertical gray lines

### III.4.3 Modal analysis

In order to identify the natural frequencies and mode shapes of the beam, an High-Resolution Modal Analysis [70, 174] is performed on the measured velocity 3D field. Only the 12 first modes of the beam are kept for the comparison, ranging from 10 Hz to 1 kHz. Identified modal frequencies, denoted as vertical gray lines, are labelled in the figure III.9. It can be seen that the two first modes are close in frequency ( $f_a = 15.5$  Hz and  $f_b = 17.5$  Hz). The separation of these two modes is made easier by their different displacement components : the first is an out-of-plane mode while the second is dominated by in-plane components of the motion. The corresponding mode shapes are represented in Figure III.11.

### III.4.4 Result comparison

To make the comparison between mode shapes obtained from the RLDV measurement and the theoretical mode shapes, one has to define the *observation matrix*  $\mathbf{C}$  that projects the nodal displacements  $\mathbf{q}_n$  computed with the model (III.4.2) on the measurement mesh, so that :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{C} \mathbf{q}_n \quad (\text{III.4.4})$$

where  $\mathbf{u}_n$  is the  $n^{\text{th}}$  numerical modal vector evaluated on the measurement points. This observation matrix takes into account the contribution of the angles  $\boldsymbol{\alpha}$  in the velocity  $\mathbf{u}$  measured on the top surface of the beam ; from (III.4.1) and (III.4.3) :

$$\mathbf{u}(s) = \dot{\mathbf{w}}(s) + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2(s) \\ -\dot{\alpha}_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.5})$$

Defining a measured modal shape  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  and the numerical mode  $\mathbf{u}_j$ , one can express the *Modal Assurance Criterion* matrix (MAC) as the normalized correlation coefficient between the two shapes :

$$\text{MAC}_{ij} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_i^* \cdot \mathbf{u}_j}{\|\tilde{\mathbf{u}}_i\| \|\mathbf{u}_j\|} \quad (\text{III.4.6})$$



The magnitude of the MAC matrix, computed from the 12 experimental modes (a to l) extracted from the measurement and the 16 first modes computed with the beam model (1 to 16), is shown in the figure III.10. The measured and the predicted modal shapes are very

		Numerical Modes															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Experimental Modes	a	99.4	3.0	6.5	2.0	1.0	2.1	1.2	2.7	2.0	1.0	1.5	1.2	4.5	1.3	2.3	0.1
	b	4.6	99.7	9.4	1.6	1.4	1.5	1.7	1.2	4.1	4.4	0.3	4.1	3.2	1.1	3.6	0.4
	c	5.8	6.5	98.8	5.1	7.2	5.3	4.7	1.1	2.2	0.4	2.7	1.5	2.3	1.5	1.2	1.2
	d	2.2	0.8	1.8	99.5	5.7	6.1	16.1	3.4	12.4	4.3	6.5	2.4	11.2	1.6	13.1	1.7
	e	2.2	5.3	3.2	1.7	99.6	1.0	2.9	0.7	1.6	0.6	8.2	2.2	7.1	3.6	5.4	1.9
	f	4.9	0.3	2.2	6.6	8.4	99.4	7.0	1.6	10.1	2.3	1.2	1.4	4.2	3.3	1.2	2.6
	g	3.5	5.5	1.7	17.8	6.0	1.4	99.1	4.2	4.3	3.3	5.9	0.4	2.9	3.2	2.6	1.1
	h	1.3	1.2	0.5	3.1	1.6	0.9	8.9	99.8	7.1	2.6	17.0	2.5	10.1	4.1	7.0	8.3
	i	1.4	3.8	7.5	15.2	1.4	6.1	6.8	8.4	98.6	3.8	12.0	13.5	10.1	0.8	4.0	1.8
	j	0.2	5.2	0.9	4.1	2.1	3.4	1.2	5.3	4.3	99.4	13.4	5.9	9.1	1.8	18.3	0.8
	k	3.5	0.5	6.5	11.1	5.0	4.9	2.4	23.2	8.2	13.6	97.1	2.2	12.0	2.1	10.5	9.8
	l	0.4	5.4	1.9	2.5	3.1	1.4	0.2	5.7	13.0	7.0	1.7	98.2	3.9	13.5	2.2	2.4

FIGURE III.10 – Magnitude of the Modal Assurance Criterion matrix (%) between experimental and numerical modes.

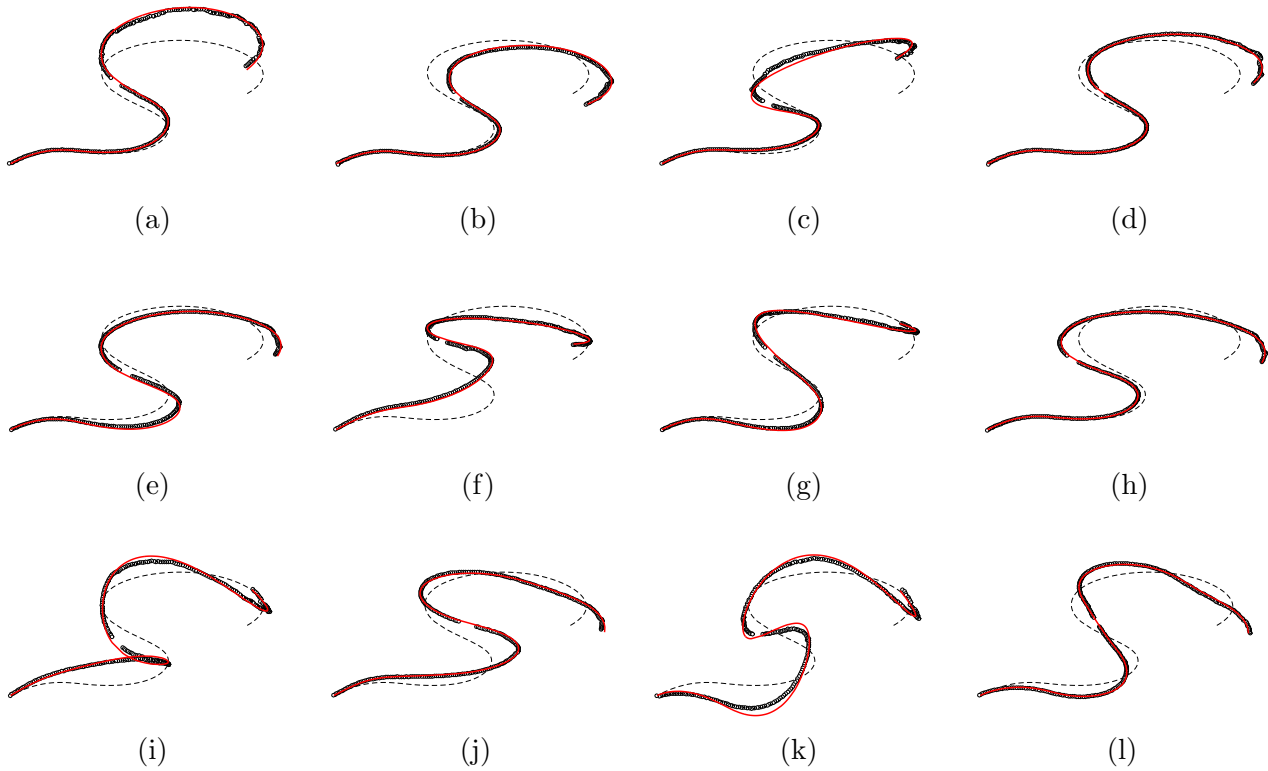


FIGURE III.11 – Comparison of experimental (black dots) and numerical mode shapes (red line).

close, with an average correlation coefficient of 99%. In the figure [III.11](#), the measured (round markers) and the predicted shapes (red lines) are superimposed, for each individual mode. The reference configuration is shown as a black dashed line. It can be seen that the shapes match closely, for both in-plane and out-of-plane modes.



### III.5 Conclusion and Perspectives

An original experimental setup called the Robotized Laser Doppler Vibrometer (RLDV) has been presented. By assembling a single point Laser Doppler Vibrometer (LDV) on an industrial 6-axis robot arm, one is able to perform 3D velocity measurements in an automated way. In comparison to commercially available solutions, the setup is more affordable. By the use of a robot, the accuracy and flexibility of the LDV positioning is improved. Thus, objects with a wide variety of shapes and sizes can be measured. However, the use of a 6-axis robot introduces complexity, which was discussed in the second section of the work. In order to simplify the design of the experiment, a software solution was presented. First, it allows to build a virtual model of the experiment in order to simulate the robot motion, which helps the user to ensure the good proceeding of the experiment. Second, it provides all signal acquisition and processing routines needed to preview and export the acquired data. In order to illustrate an application of the setup, an experimental case was presented. The 3D mode shapes of a curved beam have been measured and compared to numerical predictions. It has been shown that measured and computed shapes are very close, with a correlation coefficient close to 1.

As for now, no investigation has been led on the uncertainties related to the use of a robot. As a perspective, two main uncertainty sources can be given :

**Calibration.** The robotized manipulator insures a *relative* positioning accuracy. However, a good *absolute* positioning accuracy can be hard to obtain, as the position of the robot and the measured object are given with some uncertainty. Until now, a visual check of the laser target position on several points over the measured object has proven to be sufficient to adjust and validate the positions of the different objects in the virtual setup. Nonetheless, a more accurate calibration procedure may be necessary for more demanding object geometries or experimental environments.

**Vibration of the arm.** The 6-axis robot arm cannot be considered infinitely stiff. A procedure could be designed in order to evaluate the contribution of the robot arm vibration in the measured velocity. In the present work, this contribution has been neglected. In addition, some robot arms have brakes that can be activated during the signal acquisition step, thus reducing the vibration due to the actuators at the joints.

In the present work, the focus was on LDV measurements. However, the assembly of any sensor on a robot arm could potentially benefit to a wide variety of measurements. For that purpose, the provided software solution could be used with a reduced amount of modifications.

### Acknowledgments

This work is part of the ANR founded (french National Research Agency) project MAESS-TRO (*ModélisAtion Et Synthèse Sonore pour Tables d’haRmonie de pianO*, ANR-14-CE07-0014).

## Troisième partie

# Méthodes inverses pour l'identification des structures élancées



# Introduction

La présente partie concerne la formulation de méthodes inverses pour l'identification des structures élancées. Ces méthodes, comme cela a été évoqué dans l'introduction générale du manuscrit, sont destinées à l'identification de structures complexes sur un domaine de fréquences étendu. La complexité des structures considérées est notamment contenue dans (i) la forte anisotropie des matériaux employés, que cela concerne le comportement en raideur ou les mécanismes de dissipation ; (ii) l'hétérogénéité des propriétés mécaniques, qui se manifeste à la fois par l'aspect stratifié de ces structures et la variation spatiale de l'agencement des matériaux.

La thématique de l'identification des propriétés dynamiques des matériaux et des structures est un champ de recherche très actif ; les approches sont fortement diversifiées, chacune ayant son domaine d'application privilégié. Les introductions des chapitres VI et VII donnent un aperçu de ces différentes approches ; le travail de synthèse bibliographique n'est donc pas reproduit ici.

Dans les paragraphes qui suivent, la démarche proposée est introduite, permettant de clarifier le contenu des différents chapitres de cette troisième partie.

## Une formulation commune

Les méthodes proposées dans cette partie partent d'un constat commun : la réponse des systèmes que l'on cherche à caractériser est typique des systèmes linéaires ; elle peut être décomposée sur une base de fonctions exponentielles amorties (les *pôles* du système). Du point de vue du problème direct, ces pôles correspondent aux solutions des équations homogènes du mouvement ; leur détermination prend donc la forme d'un problème aux valeurs propres.

**Réponse transitoire libre** La *réponse transitoire libre*  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  d'une structure dissipative quelconque peut être approximée par la somme suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{p}}, t) \simeq \sum_r^R \underline{\phi}_r(\underline{\mathbf{p}}) e^{-\text{Im}\{\omega_r\}t} \cos(\text{Re}\{\omega_r\}t)$$

où les  $R$  fonctions  $\underline{\phi}_r(\underline{\mathbf{p}})$  sont les *déformées modales* de la structure, et les  $R$  complexes  $\omega_r$  les pulsations modales associées ; on a omis un éventuel déphasage du cosinus. Le problème direct associé à la définition des  $R$  duplets modaux  $(\underline{\phi}_r, \omega_r)$  s'exprime comme suit :

$$(\mathbf{K}(\omega_r) - \omega_r^2 \mathbf{M}) \underline{\phi}_r = \mathbf{0} \quad (\text{III.5.1})$$

soit un problème aux valeurs propres dans lequel les matrices de raideur et de masse  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont données par un modèle prenant en compte la géométrie de la structure, les propriétés des matériaux constitutifs ainsi que les conditions aux limites appliquées.

**Réponse harmonique d'une poutre** De façon analogue, la réponse harmonique  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{p}}, x, \omega)$  d'une poutre peut être approximée, sur un domaine libre de tout effort extérieur, par la décomposition suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{p}}, x, \omega) \simeq \sum_r^R \underline{\mathbf{a}}_r(\underline{\mathbf{p}}) e^{-i k_r x}$$

où les  $R$  nombres d'onde complexes  $k_r$  sont associés aux  $R$  modes de section  $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{p}})$ . On a vu au chapitre I que ces paramètres peuvent être calculés numériquement par la résolution du problème aux valeurs propres quadratique suivant, paramétré par la pulsation  $\omega$  :

$$\left( \mathbf{K}_0(\omega) + i k_r \mathbf{K}_1(\omega) + k_r^2 \mathbf{K}_2(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{a}_r = \mathbf{0}$$

où les matrices  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  et  $\mathbf{M}$  sont construites à partir d'un modèle prenant en compte la configuration de la section de la poutre (propriétés des matériaux, géométrie). On note qu'avec l'utilisation d'un modèle réduit de poutre, le problème ci-dessus peut devenir scalaire (i.e ondes de flexion caractéristiques d'une poutre mince).

**Réponse harmonique d'une plaque** De nouveau, sur un domaine où aucun chargement n'est appliqué, la réponse harmonique d'une plaque  $\underline{\mathbf{u}}(p, \underline{\mathbf{x}}, \omega)$  peut également être approximée par une somme d'ondes planes :

$$\underline{\mathbf{u}}(p, \underline{\mathbf{x}}, \omega) \simeq \sum_r^R \underline{\mathbf{b}}_r(p) e^{-i \underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{x}}}$$

avec les  $R$  vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r = {}^T[k_{1,r} \ k_{2,r}]$  associés aux modes de section  $\underline{\mathbf{b}}_r(p)$ . Ces vecteurs d'onde peuvent être déterminés numériquement par la résolution du problème suivant (voir chapitre I) :

$$\left( \mathbf{K}_{00} + i k_{1,r} \mathbf{K}_{10} + i k_{2,r} \mathbf{K}_{01} + k_{1,r} k_{2,r} \mathbf{K}_{11} + k_{1,r}^2 \mathbf{K}_{20} + k_{2,r}^2 \mathbf{K}_{02} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{b}_r = \mathbf{0}$$

où les matrices  $\mathbf{K}_{ij}$ , dont la dépendance en la pulsation  $\omega$  a été omise, sont également construites à partir d'un modèle décrivant la configuration de la section de la plaque. Une nouvelle fois, l'utilisation d'un modèle réduit de plaque peut permettre de rendre ce problème scalaire (i.e flexion dans une plaque mince).

**Cas général** Dans chacun des cas sus-cités, la réponse du système peut être approximée par une somme tronquée d'exponentielles amorties. On propose donc de modéliser la réponse  $\underline{\tilde{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}})$  mesurée d'une structure sous la forme générale suivante :

$$\underline{\tilde{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}) = \sum_r^R \underline{\alpha}_r(\underline{\mathbf{p}}) e^{i \underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{x}}} + \Delta \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}})$$

où  $\underline{\mathbf{x}}$  désigne les dimensions spatio-temporelles qui paramètrent les exponentielles amorties et  $\underline{\mathbf{p}}$  désigne les dimensions restantes. Le champ  $\Delta \underline{\mathbf{u}}$  permet de rendre compte de la nature *inexacte* de ce *modèle de signal* : il peut par exemple décrire le bruit de mesure ou la partie de la réponse non prise en compte par le modèle. Les paramètres de ce modèle de signal sont les  $R$  *vecteurs d'onde*  $\underline{\mathbf{k}}_r$  et les  $R$  *modes* associés  $\underline{\alpha}_r(\underline{\mathbf{p}})$ . Ceux-ci sont alors supposés être les solutions d'un problème aux valeurs propres général, tels que :

$$\mathbf{A}(\underline{\mathbf{k}}_r) \underline{\alpha}_r = \mathbf{0} \quad (\text{III.5.2})$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice caractéristique d'un modèle de la structure, et dont la construction fait intervenir un certain nombre de paramètres que l'on cherche à identifier (i.e. caractéristiques matériaux).

## Proposition

Les chapitres qui suivent présentent des procédures d'identification basées sur l'écriture générale ci-dessus.

Tout d'abord, une méthode ESPRIT unifiée est proposée dans le chapitre IV ; celle-ci est dédiée à l'extraction des vecteurs d'onde complexes  $\mathbf{k}_r$  et des modes associés  $\underline{\alpha}_r(\mathbf{p})$  sur une réponse de structure mesurée. En plus de l'estimation des paramètres du modèle de signal, il est proposé une méthode permettant de quantifier les incertitudes associées à cette estimation.

Les trois chapitres qui suivent sont consacrés à l'application de la méthode ESPRIT proposée aux trois modèles de signal spécifiques donnés ci-dessus. A chaque fois, la présentation s'accompagne de la formulation d'un problème aux valeurs propres inverse (qui peut être scalaire). La résolution de ce problème est alors explicitée, permettant l'identification d'un jeu de paramètres entrant dans la construction de la matrice caractéristique  $\mathbf{A}$ .

Dans le chapitre V, la procédure est appliquée à la réponse transitoire libre des structures. Cela consiste tout d'abord à effectuer une analyse modale sur la réponse obtenue ; celle-ci permet d'obtenir les modes propres  $\underline{\phi}_r(\mathbf{p})$  et les pulsations complexes  $\omega_r$  associées. Ensuite, le problème aux valeurs propres inverse est formulé et résolu à l'aide d'un algorithme de descente de gradient. Un cas d'application est présenté, consistant en l'identification des propriétés viscoélastiques d'un échantillon d'épicéa.

Le chapitre VI présente une application originale de la méthode ESPRIT : l'analyse en nombres d'onde de la réponse harmonique des poutres. Dans ce cas, les modèles de Euler-Bernoulli et Timoshenko sont utilisés pour formuler un problème inverse scalaire ; celui-ci est dédié à l'identification des propriétés mécaniques du matériau composant la poutre. La méthode proposée est appliquée à l'identification des modules de Young et de cisaillement complexes d'une poutre isotrope.

Enfin, le chapitre VII présente la généralisation de la méthode à l'analyse en vecteurs d'onde de la réponse harmonique des plaques anisotropes multicouches. Différentes études de cas expérimentales sont proposées. Dans le cas d'une plaque mince stratifiée, la procédure d'identification proposée prend la forme d'un problème inverse scalaire ; il est montré la possibilité d'identifier les composantes du tenseur des raideurs en flexion décrivant l'anisotropie *locale* de la plaque.



# Chapitre IV

## Proposition d'une méthode ESPRIT unifiée

### Résumé

Ce chapitre concerne le développement d'une méthode *haute résolution* de type ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques*), adaptée à l'identification des paramètres de signaux dont la dépendance selon une ou plusieurs variables spatio-temporelles est supposée harmonique. La méthode présentée est le résultat d'une revue de la littérature consacrée à ce type d'approches dans la communauté du traitement de signal et celle des vibrations. Certains développements pouvant présenter un intérêt pour les applications en dynamique sont intégrés.

En effet, les applications visées dans ce mémoire diffèrent de celles pour lesquelles les méthodes haute résolution ont été originellement développées (télécommunications, radar, etc.). En particulier :

- Les mesures plein champs en mécanique peuvent générer un *très grand nombre* de données, contrairement aux systèmes de télécommunication plutôt économes en capteurs. La prise en compte simultanée de ces nombreuses mesures permet d'améliorer la qualité des estimations. Pour cela, l'approche **multi-points** est intégrée à la méthode ESPRIT proposée ; dans le même but est également implémentée l'utilisation d'**invariances multiples** de la grille de mesure.
- L'augmentation du nombre de données disponibles fait considérablement augmenter la *puissance de calcul* nécessaire. Une stratégie de **décimation** des données est donc ajoutée, permettant l'estimation des paramètres du signal sur la totalité des mesures tout en gardant un coût de calcul raisonnable.
- Certaines hypothèses supplémentaires sur la *forme du signal* peuvent être faites lors du traitement de la réponse dynamique d'une structure. La parité des vecteurs d'onde (les vecteurs d'onde de l'onde aller et l'onde retour sont opposés) est prise en compte par un modèle de signal en **somme de cosinus**.
- L'aspect **multidimensionnel** des signaux disponibles doit être pris en compte. Dans la méthode ESPRIT proposée, les composantes des vecteurs d'onde paramétrant le signal sont estimées et appariées simultanément.



- Le nombre de paramètres à estimer (ou *ordre du signal*), souvent faible dans les applications d'origine, peut ici devenir très grand. Celui-ci est de plus inconnu dans la majorité des applications et doit donc être *estimé* correctement. Plusieurs critères pour le **choix de l'ordre du signal** sont décrits.
- Dans l'optique de formuler un problème inverse à partir des paramètres identifiés, une information sur la *variance des estimations* est essentielle. Dans ce but, la variance des données d'entrée est propagée dans la méthode ESPRIT proposée. Les résultats obtenus permettent de guider le **choix des paramètres** intrinsèques de la méthode ainsi que de donner une approximation de l'**incertitude sur les paramètres estimés**.

## IV.1 Introduction

Les développements de ce chapitre concernent la présentation d'une méthode permettant l'identification des paramètres d'un modèle de signal sur des mesures expérimentales. Le modèle de signal considéré prend la forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles oscillantes amorties, ou *ondes planes*. Le concept d'onde plane est ici défini au sens général : les dimensions de temps et d'espace sont considérées équivalentes. Les paramètres à identifier sont donc les amplitudes et les vecteurs d'onde (ou de façon équivalente les pulsations) associées à chaque onde.

### IV.1.1 Travaux de Fourier et de Prony

La dépendance des signaux considérés est donc supposée harmonique selon une ou plusieurs dimensions de l'espace et éventuellement du temps. Le type d'identification abordé ici est donc très relié à la représentation fréquentielle des signaux. Les vecteurs d'onde paramétrant le signal sont en effet associés à des maxima locaux sur la transformée Fourier de celui-ci. Puisque l'on pourrait étudier les propriétés des signaux considérés dans l'espace de Fourier, il est utile de rappeler le *principe d'incertitude*, portant sur des signaux quelconques et lié à l'*étalement* spatio-temporel de ceux-ci.

**Principe d'incertitude** Le principe d'incertitude établit le lien entre la largeur  $\sigma(x)$  d'un paquet d'onde de nombre d'onde  $k$  et la largeur  $\sigma(k)$  du pic d'amplitude observé sur la transformée de Fourier associée, sous la forme d'une borne inférieure :

$$\sigma(x)\sigma(k) \geq 1 \quad (\text{IV.1.1})$$

cette borne étant atteinte pour un paquet d'onde de forme Gaussienne [56, p. 80]. Autrement dit, la détermination précise du nombre d'onde  $k$  par analyse de Fourier implique le traitement de signaux dont l'extension  $\sigma(x)$  est très grande.

En pratique, les signaux sont mesurés sur des périodes de temps ou d'espace  $\sigma(x)$  relativement courtes ; l'incertitude sur le nombre d'onde ou les pulsations déterminés par analyse de Fourier est donc élevée. Il est en conséquence nécessaire, pour nombre d'applications utilisant l'identification de paramètres de fonctions harmoniques, de recourir à des méthodes qui puissent s'affranchir du principe d'incertitude.

**Proposition originale de Prony** Les méthodes de type ESPRIT font partie d'une famille de méthodes plus large, héritée des travaux de Gaspard de Prony [168] à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. Ceux-ci portent sur les propriétés d'un signal pouvant s'exprimer comme une combinaison linéaire de composantes sinusoïdales. Prony montre l'existence d'une *relation de récurrence* entre les différentes mesures de ce signal, prises à des pas de temps réguliers : la mesure  $s(t)$  à l'instant  $t$  est une combinaison linéaire des mesures aux instants précédents  $s(t + \Delta t), \dots, s(t + R\Delta t)$ . L'*ordre du signal*  $R \in \mathbb{N}$  dénote le nombre de sinusoïdes (ou *composantes*) contenues dans le signal. Les *pôles du signal*, caractérisant la fréquence des sinusoïdes, sont alors donnés par les racines du polynôme caractéristique formé par la relation de récurrence.

Dès sa publication originale de 1795, Prony propose une méthode pour estimer les pôles d'un signal expérimental. Celle-ci comporte deux étapes : (i) estimation des coefficients de la

relation de récurrence à partir de  $2R$  mesures du signal ; (ii) recherche des racines du polynôme caractéristique afin de déterminer les pôles du signal.

**Différence des approches** Les travaux de Gaspard de Prony sont souvent comparés à ceux de Joseph Fourier. Ils sont d'ailleurs contemporains : Prony écrit son *Essai Expérimental et Analytique* [168] en 1795 ; Fourier rend public un premier mémoire sur l'analyse des fonctions harmoniques en 1807, puis publie finalement son ouvrage *Théorie Analytique de la Chaleur* [76] en 1822. Les deux approches sont cependant assez différentes.

Fourier étudie en effet la décomposition de fonctions intégrables *quelconques* sur une base *infinie* d'exponentielles caractérisées par un *nombre d'onde réel*. Le principe d'incertitude, cité plus haut, découle donc de la méconnaissance de la forme du signal, sur lequel aucune hypothèse n'est formulée.

Au contraire, les travaux de Prony partent de certaines *hypothèses* sur la forme du signal. Celui-ci est en effet *modélisé* comme une somme *finie* d'exponentielles complexe, dont le nombre d'onde peut être complexe également. L'information du modèle de signal ainsi que le nombre fini de paramètres à identifier limite donc l'incertitude sur ceux-ci. La méthode s'affranchit en conséquence du principe d'incertitude ; les nombres d'onde peuvent être estimés avec précision sur des signaux courts. Les méthodes héritées des travaux de Prony sont pour cela dites *haute résolution*, par opposition aux méthodes basées sur l'analyse de Fourier, soumises au principe d'incertitude [211].

L'incertitude sur la détermination des fréquences par les méthode de type Prony est, de façon évidente, non négligeable ; le bruit ajouté sur les mesures perturbe en effet l'estimation des paramètres du signal. De plus, le choix du *modèle de signal*, véritable pilier de ce type d'approches, peut consister en une approximation trop simpliste du signal mesuré. Dans ce cas, le non-respect des hypothèses introduit forcément un biais sur l'estimation des paramètres.

### IV.1.2 Développement des méthodes de Prony

La méthode originale proposée par Prony présente les inconvénients suivants : (a) l'estimation des pôles est très sensible au bruit de mesure ; (b) seules  $2R$  mesures sont prises en compte ; (c) la recherche des racines du polynôme caractéristique peut être fastidieuse ; (d) l'ordre du signal doit être connu *a priori*.

**Prise en compte de la totalité des données** Deux développements sont proposés dans les années 80 pour tenter d'améliorer la résistance de la méthode au bruit (perturbation de l'estimation des pôles face à des mesures bruitées). Premièrement, Hildebrand [88] propose d'estimer les coefficients du polynôme caractéristique au sens des moindres carrés, ce qui permet de prendre en compte la totalité des points de mesure et d'améliorer la sensibilité au bruit. Deuxièmement, Kumaresan et Tufts [111] proposent d'estimer un polynôme caractéristique étendu, c'est à dire avec un ordre de signal virtuel  $R' \geq R$ . L'ajout des  $R' - R$  pôles supplémentaires permet de réduire la projection d'un éventuel bruit corrélé sur l'estimation des  $R$  pôles *vrais*. Malgré ces deux développements, la sensibilité de la méthode au bruit reste assez forte.

**Décomposition en sous-espaces** Les méthodes de la famille de Prony voient leur résistance au bruit s'améliorer grandement avec l'arrivée de l'analyse en composantes principales (PCA pour *Principal Component Analysis*, aussi appelée Proper Orthogonal Decomposition (POD)

ou encore Singular Value Decomposition (SVD) selon le domaine d'application). Cette transformation, appliquée aux mesures, permet de séparer les sources décorréllées dans le signal en donnant une décomposition de celui-ci en sous-espaces principal (aussi appelé *sous-espace signal*) et singulier (ou *sous-espace bruit*). La décomposition ainsi faite apporte deux avantages : (i) le sous-espace signal obtenu est très peu sensible à un bruit blanc gaussien ; (ii) l'ordre de ce sous-espace donne des indications sur l'ordre  $R$  du signal.

La méthode MUSIC (pour *MUltiple Signal Classification*) [198] est dérivée de l'introduction de la PCA dans les méthodes de Prony : les composantes du signal sont identifiées par la minimisation de leur projection sur l'espace bruit. Cependant, le problème de recherche des pôles du signal reste un problème de minimisation non-linéaire, qu'il faut résoudre de façon itérative.

La méthode MUSIC n'est toutefois pas limitée à l'identification de sinusoides dans un signal : les paramètres d'une grande variété de fonctions peuvent être recherchés en minimisant la projection de celles-ci sur l'espace bruit. Cela en fait une méthode encore très populaire.

**Invariance rotationnelle** Le problème de la recherche des pôles est finalement résolu avec l'apparition de la méthode Matrix Pencil [98]. Dans cette méthode, la relation de récurrence démontrée par Prony est reformulée sur la base de matrices de Vandermonde. La propriété d'*invariance rotationnelle* de ces matrices est alors utilisée pour estimer les pôles du signal par un problème linéaire direct. En conséquence, aucun problème de recherche n'est mis en oeuvre dans l'estimation des pôles.

**ESPRIT** Finalement, la méthode ESPRIT (pour *Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques*) est proposée par Roy & al. en 1989 [189]. Celle-ci utilise la similarité du sous-espace signal et du sous-espace image de la matrice de Vandermonde pour formuler la relation d'invariance rotationnelle sur le sous-espace signal. Cette méthode tire donc les avantages combinés de la PCA et de la formulation type Matrix Pencil : (1) forte résistance au bruit ; (2) estimation de l'ordre du signal ; (3) estimation directe des pôles par un problème linéaire. La méthode ESPRIT reçoit pour cela un fort intérêt de la part de la communauté du traitement de signal.

Les paragraphes qui suivent donnent un aperçu rapide du déroulement de la méthode ESPRIT originale ; cela permet de présenter les différentes généralisations de la méthode, proposées au cours des trente dernières années et que le travail présenté ici tente d'unifier.

### IV.1.3 Méthode ESPRIT originale

La méthode ESPRIT repose sur trois piliers : (i) formulation d'un modèle de signal linéaire paramétré par une matrice de type Vandermonde ; (ii) à partir de la covariance des mesures, détermination de l'espace signal engendré par la matrice de Vandermonde ; (iii) utilisation des propriétés géométriques invariantes de la grille de mesure, pour estimer les pôles du système à partir d'une relation s'exprimant sur la matrice de Vandermonde. Ces trois éléments confèrent respectivement à la méthode son aspect haute résolution, sa faible sensibilité au bruit et sa simplicité d'implémentation. De plus, les problèmes concernant l'estimation des amplitudes et des vecteurs d'onde paramétrant le signal sont découplés.

Dans les lignes qui suivent est décrite succinctement la méthode ESPRIT originale, telle que proposée en 1989 par Roy et al. [189].

**Modèle de signal** La méthode ESPRIT originale est adaptée à l'identification des paramètres d'un signal modélisé comme suit :

$$s(x) = u(x) + b(x) = \sum_r^R a_r e^{i k_r x} + b(x) \quad (\text{IV.1.2})$$

où  $s(x)$  est le signal mesuré,  $u(x)$  le signal pur et  $b(x)$  un bruit blanc gaussien additionnel. Les paramètres à identifier sont donc les  $R$  amplitudes complexes  $a_r$  et les  $R$  nombres d'onde complexes  $k_r$ . Dans le cas où il est inconnu, l'ordre du signal  $R$  peut également devenir un paramètre à déterminer.

Pour pouvoir être appliquée, la méthode ESPRIT nécessite que la mesure du signal soit réalisée sur un maillage uniforme de  $L$  points espacés d'un pas  $h$ . Dans ce cas, la  $n^{\text{ième}}$  mesure du signal non bruité s'écrit :

$$u_n = u[x_n] = \sum_r^R a_r e^{i k_r x_n} = \mathbf{V}_{nr}^L a_r \quad (\text{IV.1.3})$$

avec  $\mathbf{V}^L$  la matrice de Vandermonde telle que  $\mathbf{V}_{nr}^L = e^{i h n k_r}$ . Cette matrice est inconnue puisqu'elle contient les nombres d'onde  $k_r$  à identifier.

**Sous-espace signal** On suppose maintenant que différentes réalisations de la mesure  $\mathbf{s}(n)$  sont disponibles, où  $n$  dénote une réalisation. À partir du modèle de signal et en considérant le bruit  $\mathbf{b}(n)$  blanc gaussien uniforme de variance  $\sigma^2$ , la matrice de covariance des mesures s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ss} &= \mathbb{E} \{ \mathbf{s}(n) \mathbf{s}(n)^H \} \\ &= \mathbf{V}^L \mathbb{E} \{ \mathbf{a}(n) \mathbf{a}(n)^H \} \mathbf{V}^{LH} + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{W} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{W}^H + \mathbf{W}_\perp \boldsymbol{\Lambda}_\perp \mathbf{W}_\perp^H \end{aligned} \quad (\text{IV.1.4})$$

où  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{L \times R}$  est le sous-espace signal, composé des  $R$  vecteurs propres associés aux  $R$  plus grandes valeurs propres  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\Lambda})$  de  $\mathbf{C}_{ss}$ . Il est possible de montrer que le sous-espace signal et l'espace image de la matrice de Vandermonde sont équivalents ; par conséquent, on peut poser  $\mathbf{W} \mathbf{T} = \mathbf{V}^L$ , où  $\mathbf{T}$  est une matrice de passage à déterminer.

**Invariance rotationnelle** La méthode ESPRIT fait appel à la formation de deux sous-matrices de Vandermonde  $\mathbf{V}_\uparrow^L$  et  $\mathbf{V}_\downarrow^L$  de taille  $(L-1) \times R$  exprimées comme suit :

$$\mathbf{V}_{\uparrow/\downarrow}^L = \mathbf{J}_{\uparrow/\downarrow}^L \mathbf{V}^L \quad (\text{IV.1.5})$$

avec  $\mathbf{J}_\uparrow^L = [\mathbf{I}^{L-1} \mathbf{0}^{L-1}]$  et  $\mathbf{J}_\downarrow^L = [\mathbf{0}^{L-1} \mathbf{I}^{L-1}]$  les *matrices de sélection*. Il est possible de montrer que ces deux matrices sont reliées par la relation :

$$\mathbf{V}_\downarrow^L = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{V}_\uparrow^L \quad (\text{IV.1.6})$$

où  $\boldsymbol{\Pi}$  est une matrice diagonale telle que  $\Pi_{rr} = e^{i h k_r}$ , qui contient les pôles  $e^{i h k_r}$  et donc les nombres d'onde  $k_r$  à identifier. La relation ci-avant est appelée *invariance rotationnelle* ; elle peut être écrite grâce à la régularité du maillage utilisé pour les mesures, et traduit l'invariance géométrique de celui-ci par translation d'un pas  $h$ .

**Estimation des nombres d'onde** La relation d'invariance rotationnelle est, dans la méthode ESPRIT, transposée au sous-espace signal  $\mathbf{W}$  ; il est en effet possible d'écrire :

$$\mathbf{W}_{\downarrow} = \mathbf{F} \mathbf{W}_{\uparrow} \quad (\text{IV.1.7})$$

où  $\mathbf{W}_{\uparrow/\downarrow} = \mathbf{J}_{\uparrow/\downarrow} \mathbf{W}$  et  $\mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{T}^{-1}$  est appelée *matrice spectrale*. Elle peut être estimée au sens des moindres carrés en écrivant  $\mathbf{F} = \mathbf{W}_{\uparrow}^{\dagger} \mathbf{W}_{\downarrow}$  ; sa diagonalisation permet finalement d'obtenir la matrice  $\mathbf{\Pi}$  et donc les nombres d'onde  $k_r$ .

**Estimation des amplitudes** Une fois les nombres d'onde identifiés, la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^L$  peut être reconstruite pour estimer les amplitudes au sens des moindres carrés  $\mathbf{a} \simeq (\mathbf{V}^L)^{\dagger} \mathbf{s}$ .

#### IV.1.4 Contribution proposée

La méthode ESPRIT unifiée présentée dans ce travail est le résultat d'une revue personnelle de la bibliographie consacrée à ce type d'approches. L'apport réside dans la mise en commun de différents développements qui ont été proposés au cours des trois décennies précédentes (la proposition originale de la méthode ESPRIT remontant à l'article de Roy & al de 1989 [189]) et qui présentent un intérêt substantiel pour les applications sur des mesures plein-champs. Les lignes qui suivent décrivent succinctement ces différents développements. Les trois premiers sont dédiés à une généralisation du modèle de signal ; les trois suivants s'intéressent à l'estimation de la covariance des mesures ; les deux suivants sont respectivement dédiés à l'estimation de l'ordre du signal et à la quantification des incertitudes.

**Signaux multidimensionnels** Les aspects liés aux signaux multidimensionnels sont traités par la version de la méthode dite ND-ESPRIT [191] ; le modèle de signal est généralisé à une combinaison d'ondes planes dont la dépendance harmonique selon plusieurs dimensions spatio-temporelles  $\mathbf{x}$  est paramétrée par  $R$  vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  complexes. Le modèle du signal pur associé s'écrit :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_r^R a_r e^{i \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{IV.1.8})$$

Cette généralisation permet notamment l'utilisation des méthodes ESPRIT pour l'extraction de vecteurs d'onde à partir de la réponse harmonique de plaques ; ceci est l'objet de la contribution des chapitres VI et VII.

**Vecteurs d'onde appariés** La version de la méthode dite Real-Valued ESPRIT [132] propose l'identification d'une somme de sinusoides ; le modèle de signal pur correspondant s'exprime sous la forme :

$$u(x) = \sum_r^R a_r \cos(k_r x + \phi_r) \quad (\text{IV.1.9})$$

où le cosinus est défini au sens général ( $k_r$  peut donc être complexe,  $2\cos(kx) = \exp(i k x) + \exp(-i k x)$ ). L'écriture du signal sous la forme  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{V}}^L \mathbf{a}$  ainsi que la propriété d'invariance rotationnelle modifiée utilisent l'identité remarquable suivante :

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a) \cos(b) \quad (\text{IV.1.10})$$

Cette implémentation en somme de sinusoides permet de prendre en compte, dans les applications sur des signaux issus de la réponse de structure, l'égalité des vitesses d'ondes de directions opposées.

**Invariances rotationnelles multiples** La méthode ESPRIT originale exprime la propriété d'invariance rotationnelle sur deux versions du maillage de mesure décalées d'un pas  $h$ . Lorsque la longueur d'onde  $2\pi/k_r$  des ondes à identifier est très grande devant  $h$ , les pôles du signal  $e^{ihk_r}$  sont très proches de 1 ; en conséquence, l'incertitude *relative* sur  $k_r$  devient grande. Dans ce cas, l'utilisation de la propriété d'invariance rotationnelle formulée sur deux grilles décalées d'un multiple de  $h$  peut améliorer l'estimation des nombres d'onde [212, 120, 83]. Fort de ce constat, la méthode ESPRIT est généralisée dans les implémentations MR-ESPRIT [216] et MI-ESPRIT [239], qui proposent d'utiliser simultanément plusieurs propriétés d'invariance rotationnelle d'une même grille. En pratique, plusieurs matrices spectrales  $\mathbf{F}^q$  sont estimées à partir de différents couples  $\mathbf{W}_{\uparrow q/\downarrow q} = \mathbf{J}_{\uparrow q/\downarrow q}^L \mathbf{W}$  (IV.1.7) correspondant à deux sous-grilles de mesures translatées de  $q \times h$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\uparrow q}^L &= [\mathbb{I}^{L-q} \mathbf{O}^{(L-q) \times q}] \\ \mathbf{J}_{\downarrow q}^L &= [\mathbf{O}^{(L-q) \times q} \mathbb{I}^{L-q}] \end{aligned} \quad (\text{IV.1.11})$$

avec  $\mathbf{F}^q = \mathbf{W}_{\uparrow q}^\dagger \mathbf{W}_{\downarrow q} = \mathbf{T} \mathbf{\Pi}^q \mathbf{T}^{-1}$  permettant d'identifier les nombres d'onde paramétrant le signal.

Les trois développements qui suivent concernent l'estimation de la matrice de covariance des mesures. En effet, le cas où très peu de réalisations (voir une seule réalisation) d'une même mesure sont disponibles est fréquemment rencontré. Dans ce cas, la matrice de covariance (IV.1.4) est formée d'un nombre trop faible de vecteurs  $\mathbf{s}(t)$  différents ; son rang dégénère. Il est alors nécessaire, par des techniques adaptées, de rétablir ce rang afin d'estimer correctement les paramètres du signal.

**Utilisation simultanée des données** Si la disponibilité de différentes réalisations d'une mesure identique n'est pas forcément garantie, il peut être possible d'utiliser la mesure d'une même réponse, mais observée à un point différent. On donne ici l'exemple de la réponse libre d'une structure, qui peut être approximée sous la forme suivante :

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_r^R a_r(\mathbf{x}) e^{i\omega_r t} \quad (\text{IV.1.12})$$

où les  $\omega_r$  et les  $a_r(\mathbf{x})$  sont respectivement les  $R$  fréquences et déformées modales de la structure que l'on cherche à extraire avec la méthode ESPRIT. En supposant que l'on dispose de  $N$  vecteurs  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  contenant les mesures non bruitées de la réponse  $u(\mathbf{x}, t)$  en  $N$  points distincts  $\mathbf{x}_n$  et pour  $L$  instants  $t$  régulièrement espacés, on peut écrire :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{u}(\mathbf{x}_N)] = \mathbf{V}^L [\mathbf{a}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{a}(\mathbf{x}_N)] \quad (\text{IV.1.13})$$

où  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times N}$  est appelée *matrice de signal*. Il est alors possible de définir un estimateur de la covariance des mesures  $\mathbf{S} = \mathbf{U} + \mathbf{B}$  de la forme :

$$\mathbf{C}_{ss} = \mathbf{S}^H \mathbf{S} = \mathbf{U}^H \mathbf{U} + \sigma^2 \mathbb{I}^L = \mathbf{V}^L \left[ \sum_n^N \mathbf{a}(\mathbf{x}_n)^H \mathbf{a}(\mathbf{x}_n) \right] \mathbf{V}^L + \sigma^2 \mathbb{I}^L \quad (\text{IV.1.14})$$

où on a supposé que le bruit additionnel est blanc gaussien uniforme, d'où  ${}^H\mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Cet estimateur de la covariance suppose que les mesures de la réponse de la structure en différents points sont des réalisations indépendantes ; il permet finalement, de par sa génération par la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^L$ , d'appliquer la méthode ESPRIT. Ceci représente une contribution importante pour les techniques d'analyse modale utilisant la méthode ESPRIT ; jusque là, les auteurs identifient les fréquences et amplitudes modales de façon indépendante en chaque point [70, 174], ce qui pose ensuite le problème de l'appariement de ces fréquence pour reconstruire les modes de la structure complète. L'application de la méthode ESPRIT unifiée pour l'analyse modale est développée au chapitre V.

**Lissage spatial** Il existe des situations expérimentales pour lesquelles *une seule* réalisation de la mesure sur un maillage est disponible. Il est aussi possible que les différentes mesures de la réponse d'une structure en différents points soient *fortement corrélées*. Dans ce cas, le rang de l'estimateur de la covariance des mesures proposé ci-dessus est faible ; le sous-espace signal  $\mathbf{W}$  (IV.1.4) est alors mal estimé. Pour pallier à ce phénomène est implémentée la technique dite de lissage spatial (ou *spatial smoothing*) [201]. Celle-ci propose de diviser le vecteur des mesures  $\mathbf{s} = [s_1 \dots s_L]$  obtenu en  $K$  sous-vecteurs  $\mathbf{s}'_m = {}^T[s_m \dots s_{m+K-1}]$  de taille  $K = K - K + K$ . Ceux-ci sont alors considérés comme des réalisations différentes de la mesure. A partir de ceux-ci est défini l'estimateur de la covariance des données suivant :

$$\mathbf{C}_{ss}^{SS} = \sum_m^M \mathbf{s}'_m {}^H \mathbf{s}'_m = \mathbf{V}^K \widehat{\mathbf{A}}^H \mathbf{V}^K + \sigma^2 \mathbf{I}^K \quad (\text{IV.1.15})$$

ou  $\widehat{\mathbf{A}}$  est une matrice hermitienne de rang plein. En conséquence, si  $K \geq R$  et  $K \geq R$ , l'estimateur  $\mathbf{C}_{ss}^{SS}$  est *au pire* de rang  $R$ . La méthode ESPRIT peut donc être appliquée normalement avec l'utilisation du lissage spatial, même si une unique réalisation de la mesure est disponible.

**Décimation** Les dispositifs de mesure actuels permettent l'acquisition de signaux sur des grilles de mesure de grande taille ; en conséquence, la taille des estimateurs de la covariance  $\mathbf{C}_{ss}$  peut rapidement devenir grande. L'opération de décomposition de cet opérateur en sous-espaces peut alors représenter un coût de calcul trop important. Il est donc parfois souhaitable de réduire la taille du signal disponible. De plus, on a déjà abordé, pour justifier l'utilisation d'invariances rotationnelles multiples, la question de l'identification d'ondes dont la longueur d'onde est grande devant le pas du maillage. Dans ce cas, il semble préférable d'appliquer la méthode ESPRIT sur des maillages plus grossiers. Les stratégies de décimation des données classiques (filtrage passe-bas puis décimation du maillage de mesure) présentent deux principaux désavantages : (i) le filtrage introduit des artefacts aux bords du signal ; (ii) une partie des données n'est pas utilisée. Pour répondre à cette problématique, on ajoute à la méthode ESPRIT proposée une stratégie de décimation qui permet de réduire la taille des opérateurs mis en jeu, tout en conservant la totalité des données. Ce développement est adapté de la proposition de Halder [83]. De plus, on montre dans un cas simple que cette stratégie de décimation ne dégrade pas les performances de la méthode proposée.

Avec la mise en œuvre de la méthode ESPRIT se posent deux problèmes fondamentaux : (i) le choix de l'ordre du signal  $R$  ; (ii) la quantification des l'incertitude sur les paramètres obtenus. La présente contribution tente également de répondre à ces deux questions.



**Estimation de l'ordre du signal** Dans les applications abordées dans ce travail, l'ordre exact  $R$  du signal est inconnu, même si des bornes sur ses valeurs maximales et minimales peuvent souvent être données (densité de modes, nombre d'ondes propagatives dans une poutre, etc.). Il est donc nécessaire d'estimer celui-ci *a priori*. Pour cela, une revue des différents critères proposés dans la littérature est donnée.

**Propagation des incertitudes** La méthode de quantification des incertitudes proposée s'inspire fortement de résultats récents sur la propagation de la variance des mesures dans l'estimateur ND-ESPRIT proposés par Sahnoun et al. [191] ainsi que par Steinwandt et al. [208]. Ces résultats sont ici adaptés à la méthode ESPRIT unifiée proposée. Ils peuvent alors être utilisés : (i) pour choisir les paramètres intrinsèques de l'algorithme (lissage spatial, facteur de décimation, etc.) ; (ii) pour estimer l'écart-type des paramètres du modèle identifié.

### IV.1.5 Organisation du chapitre

Le présent chapitre est organisé en trois sections. La première concerne les développements théoriques permettant la mise en œuvre de la méthode ESPRIT proposée. Dans la seconde section sont étudiées les performances de la méthode proposée. Le calcul de la propagation des perturbation dans la méthode est mené, permettant d'estimer l'incertitude sur les paramètres identifiés. Sur la base de ces résultats est discuté le choix des différents paramètres intrinsèques de la méthode proposée. Dans la troisième section, quelques critères permettant le choix de l'ordre du signal sont présentés.

### IV.1.6 Notations

Ce qui suit est le résultat de l'unification de contributions provenant de différentes communautés scientifiques (télécommunications, détection de sources, traitement de la parole, acoustique, vibrations, etc.). Le choix de la notation adopté tente donc de faire le compromis entre les notations des différentes communautés, et peut donc parfois rendre difficile la lecture. Des explications et remarques essaient donc de clarifier autant que possible les développements. Pour simplifier la lecture, on donne dans les pages suivantes une table listant les différents objets définis tout au long du chapitre.

**Vecteurs, matrices, tableaux** La casse indique la dimensionalité d'un objet : les vecteurs sont notés  $\mathbf{v}$ , les matrices  $\mathbf{M}$  et les tableaux  $\mathcal{T}$ , et leurs éléments sont respectivement notés  $v_i$ ,  $M_{ij}$  et  $\mathcal{T}_{i_1 \dots i_N}$ .

Un vecteur d'entiers en lettre *minuscule gras italique*  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^D$  est utilisé pour noter des *indices multiples* de l'élément d'un tableau la façon suivante  $\mathcal{T}_{\mathbf{m}} = \mathcal{T}_{m_1 \dots m_N}$ . De façon analogue, le vecteur d'entiers en lettre *majuscule gras droit*  $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^D$  utilisé en *exposant* est relié à la taille de l'objet :  $\mathbb{C}^{\mathbf{L}} \equiv \mathbb{C}^{L_1 \times \dots \times L_D}$  est le groupe des *tableaux* de dimension  $D$ , et  $\mathbb{C}^{[\mathbf{L}]} \equiv \mathbb{C}^{L_1 \dots L_D \times 1}$  est le groupe des *vecteurs* (donc de dimension 1). Une notation particulière est également utilisée sur ces vecteurs pour alléger les développements : le vecteur  $\mathbf{L} \in \mathbb{N}^D$  souligné dénote le produit de ses composantes :

$$[\mathbf{L}] = \prod_d^D L_d \quad (\text{IV.1.16})$$

**Vectorisation, tensorisation** L'opération de vectorisation qui transforme le tenseur  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{\mathbf{L}}$  en un vecteur  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{L}|}$  par l'empilement des colonnes de celui-ci est notée  $\text{vec}\{\mathcal{T}\}$  :

$$\mathbf{t} = \text{vec}\{\mathcal{T}\} = {}^{\top} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{1,\dots,1} & \dots & \mathcal{T}_{L_1,1,\dots,1} & \mathcal{T}_{1,2,\dots,1} & \dots & \mathcal{T}_{L_1,\dots,L_N} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1.17})$$

L'opération inverse de la vectorisation est la tensorisation, qui transforme le vecteur  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{L}|}$  en tenseur  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{\mathbf{L}}$  :

$$\mathcal{T} = \text{tens}\{\mathbf{t}\}^{\mathbf{L}}, \quad \mathcal{T}_{\mathbf{m}} = t_{m_1+m_2L_1+m_3L_1L_2+\dots} \quad (\text{IV.1.18})$$

**Identités remarquables** Le produit de Hadamard (produit composantes à composantes) est noté  $\circ$  et le produit extérieur  $\otimes$ .

La propriété suivante au sujet du produit de Kronecker d'un produit de matrices est utilisée, qui tient si les dimensions des matrices impliquées sont compatibles :

$$(\mathbf{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{A}_n) (\mathbf{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{B}_n) = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n \quad (\text{IV.1.19})$$

La vectorisation possède la propriété suivante, qui permet de linéariser une forme bilinéaire :

$$\text{vec}\{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}\} = ({}^{\top}\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}\{\mathbf{B}\} \quad (\text{IV.1.20})$$

La vectorisation d'un tenseur de rang 1  $\mathcal{A}$  pouvant être défini comme le produit extérieur de vecteurs  $\mathbf{a}_i$  respecte l'égalité suivante :

$$\text{vec}\{\mathcal{A}\} = \text{vec}\{\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_D\} = \mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_D \quad (\text{IV.1.21})$$

La convolution de deux tenseurs  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  de rang 1 est séparable ; elle peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathcal{X} * \mathcal{Y} = (\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_D) * (\mathbf{y}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{y}_D) = (\mathbf{x}_1 * \mathbf{y}_1) \otimes \dots \otimes (\mathbf{x}_D * \mathbf{y}_D) \quad (\text{IV.1.22})$$

**Matrices particulières** Les matrices rectangulaires de taille  $(\mathbf{K} \times \mathbf{M})$  remplies de zéros et de uns sont respectivement notées  $\mathbf{O}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}}$  et  $\mathbf{1}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}}$ . De façon analogue, on note les vecteurs  $\mathbf{0}^{\mathbf{N}} = \mathbf{O}^{\mathbf{N} \times 1}$  et  $\mathbf{1}^{\mathbf{N}} = \mathbf{1}^{\mathbf{N} \times 1}$ .

Trois structures particulières de matrices rectangulaires sont mentionnées dans les développements :

- Matrices de *Toeplitz*  $\mathbf{T}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}}$  à diagonales constantes générées par le vecteur  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathbf{K}+\mathbf{M}-1}$  :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{t}_{1,\dots,\mathbf{t}_{\mathbf{K}+\mathbf{M}-1}}}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}} = \begin{bmatrix} t_1 & t_{K+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & t_{M+K-1} \\ t_2 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ t_K & \dots & t_2 & t_1 & t_{K+1} & \dots & t_{M-K+1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1.23})$$

- Matrices de *Hankel*  $\mathbf{H}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}} \in \mathbb{C}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}}$  à antidiagonales constantes générées par le vecteur  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{\mathbf{K}+\mathbf{M}-1}$  :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{h}_{1,\dots,\mathbf{h}_{\mathbf{K}+\mathbf{M}-1}}}^{\mathbf{K} \times \mathbf{M}} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_K & \dots & h_M \\ h_2 & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ h_K & \dots & h_M & \dots & \dots & h_{K+M-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1.24})$$

— Matrices de *sélection*  $\mathbf{J}_{\mathbf{j}}^{K \times M} \in \mathbb{N}^{K \times M}$  générées par le vecteur  $\mathbf{j} \in \mathbb{C}^K$  :

$$\left( \mathbf{J}_{\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_K}^{K \times M} \right)_{nm} = [m = \mathbf{j}_n] \quad (\text{IV.1.25})$$

Par exemple, on peut exprimer respectivement les matrices identité  $\mathbb{I}^N$  et anti-identité  $\mathbb{Y}^N$  telles que :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^N &= \mathbf{T}_{1, \mathbf{0}^{N-1}}^{N \times N} = \mathbf{J}_{\mathbf{1}^K}^{N \times N} \\ \mathbb{Y}^N &= \mathbf{H}_{\mathbf{0}^{N-1}, 1}^{N \times N} = \mathbf{J}_{K, K-1, \dots, 1}^{N \times N} \end{aligned} \quad (\text{IV.1.26})$$

Symbole	Ensemble	Expression	Description
$\tilde{\bullet}$			objet perturbé
$\bullet$			objet non perturbé
$\Delta\bullet$			perturbation/bruit
$\bullet^e$			partie concernant les exponentielles
$\bullet^c$			partie concernant les sinusoides
$\bar{\bullet}$			objet <i>modifié</i>
$D$	$\mathbb{N}$	(IV.2.2)	dimension du modèle de signal $\underline{\mathbf{x}}$
$\underline{\mathbf{x}}$	$\mathbb{R}^D$	(IV.2.2)	dimensions des fonctions harmoniques
$\underline{\mathbf{p}}$	$\mathbb{R}^{D_p}$	(IV.2.2)	dimensions de la surface <i>isophase</i>
$n$	$\mathbb{R}$	(IV.2.3)	désigne une observation
$\mathcal{X}$		(IV.2.4)	grille de mesure complète
$\mathbf{m}$	$\mathbb{N}^D$	(IV.2.4)	indices d'un point sur la grille
$\mathcal{X}_{\mathbf{m}}$	$\mathbb{R}^D$	(IV.2.4)	point sur la grille
$\mathbf{L}$	$\mathbb{N}^D$	(IV.2.4)	taille de la grille selon chaque dimension
$[\mathbf{L}]$	$\mathbb{N}$	(IV.2.4)	nombre de points sur la grille
$\mathbf{h}$	$\mathbb{R}^D$	(IV.2.4)	pas de la grille selon chaque dimension
$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}})$	$\mathbb{C}^C$	(IV.2.2)	modèle de signal complet
$u(\underline{\mathbf{x}}, n)$	$\mathbb{C}$	(IV.2.3)	modèle d'une observation du signal
$\mathcal{U}(n)$	$\mathbb{C}^{\mathbf{L}}$	(IV.2.6)	modèle du signal observé sur la grille
$R$	$\mathbb{N}$	(IV.2.2)	ordre du signal
$\underline{\mathbf{k}}_r$	$\mathbb{C}^D$	(IV.2.2)	vecteur d'onde
$\mathbf{K}$	$\mathbb{C}^{D \times R}$	(IV.2.6)	matrice contenant les vecteurs d'onde
$\underline{\beta}(n)$	$\mathbb{C}^R$	(IV.2.6)	amplitudes
$\mathbf{B}$	$\mathbb{C}^{R \times N}$	(IV.2.8)	matrice contenant les amplitudes
$\underline{\phi}(n)$	$\mathbb{C}^R$	(IV.2.6)	phases
$\Phi$	$\mathbb{C}^{R \times N}$	(IV.2.8)	matrice contenant les phases
$\ell$	$\mathbb{N}^D$		tailles d'une grille quelconque
$\bullet^{(\ell)}$			objet paramétré par $\ell$
$\mathbf{m}_d^{(\ell)}$	$\mathbb{N}^{[\ell]}$	(IV.2.16)	indices associés à la dimension $d$
$\mathbf{M}^{(\ell)}$	$\mathbb{N}^{[\ell] \times D}$	(IV.2.15)	matrice de tous les indices
$\mathbf{u}(n)$	$\mathbb{C}^{[\mathbf{L}]}$	(IV.2.13)	vecteur des données
$\mathbf{U}$	$\mathbb{C}^{[\mathbf{L}] \times N}$	(IV.2.19)	matrice des données
$\mathbf{V}_{\pm}^{\mathbf{L}}$	$\mathbb{C}^{[\mathbf{L}] \times 2R}$	(IV.2.17)	matrice de Vandermonde étendue
$\theta(n)$	$\mathbb{C}^{2R}$	(IV.2.17)	vecteur des amplitudes généralisées
$\Theta$	$\mathbb{C}^{2R \times N}$	(IV.2.19)	matrice des amplitudes généralisées

Symbole	Ensemble	Expression	Description
$\bar{\ell}^e$	$\mathbb{N}^{D_e}$	$\bar{\ell}^e$	tailles modifiées
$\bar{\ell}^c$	$\mathbb{N}^{D_c}$	$\bar{\ell}^c/2$	
$\bar{\mathbf{J}}^{(\ell)}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\ell}] \times [\ell]}$	(IV.2.22)	matrice de modification
$\mathbf{V}^{(\ell)}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\ell}] \times R}$	(IV.2.25)	matrice pilote
$\mathbf{a}(n)$	$\mathbb{C}^R$	(IV.2.26)	vecteur des amplitudes modifié
$\mathbf{A}$	$\mathbb{C}^{R \times N}$	(IV.2.26)	matrice des amplitudes modifiée
$\bar{\mathbf{u}}(n)$	$\mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}]}$	(IV.2.23)	vecteur des données modifié
$\bar{\mathbf{U}}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}] \times N}$	(IV.2.24)	matrice des données modifiée
$\mathbf{q}$	$\mathbb{Z}^D$	(IV.2.29)	vecteur translation
$\mathbf{Q}$	$\mathbb{Z}^D$	(IV.2.34)	matrice des vecteurs translation
$\mathbf{J}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^{(\ell)}$	$\mathbb{N}^{[\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}] \times [\bar{\ell}]}$	(IV.2.29)	matrices de sélection
$\Pi^{\mathbf{q}}$	$\mathbb{C}^{R \times R}$	(IV.2.6)	matrices polaires
$\pi^{\mathbf{q}}$	$\mathbb{C}^R$	(IV.2.6)	vecteurs polaires
$\mathbf{C}_{yy}$	$\mathbb{C}^{[\ell] \times [\ell]}$	(IV.2.36)	matrice de covariance des données
$R'$	$\mathbb{N}$	(IV.2.37)	rang effectif de la matrice de covariance
$\mathbf{W}$	$\mathbb{C}^{[\ell] \times R'}$	(IV.2.37)	SE principal ou <i>sous-espace signal</i>
$\lambda$	$\mathbb{C}^{R' \times R'}$	(IV.2.37)	valeurs propres principales
$\mathbf{W}_{\perp}$	$\mathbb{C}^{[\ell] \times ([\ell] - R')}$	(IV.2.37)	SE singulier, <i>signal</i> ou <i>orthogonal</i>
$\lambda_{\perp}$	$\mathbb{C}^{([\ell] - R') \times ([\ell] - R')}$	(IV.2.37)	valeurs propres singulières
$\mathbf{T}$	$\mathbb{C}^{R \times R}$	(IV.2.37)	matrice de passage
$\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$	$\mathbb{C}^{R \times R}$	(IV.2.42)	matrices spectrales
$\xi$	$\mathbb{R}^Q$	(IV.2.43)	coefficients pour la matrice spectrale combinée
$\Gamma$	$\mathbb{C}^{R \times R}$	(IV.2.42)	matrice spectrale combinée
$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}] \times [\bar{\mathbf{L}}]}$	(IV.2.45)	estimateur de la covariance direct
$\mathbf{M}$	$\mathbb{N}^D$	(IV.2.58)	nombre de sous-grilles dans chaque dimension
$[\mathbf{M}]$	$\mathbb{N}$	(IV.2.58)	nombre total de sous-grilles
$\mathbf{K}$	$\mathbb{N}^D$	(IV.2.58)	tailles d'une sous-grille
$[\mathbf{K}]$	$\mathbb{N}$	(IV.2.58)	nombre de points sur une sous-grille
$\mathbf{J}_{\mathbf{m}}^{SS,(\ell)}$	$\mathbb{N}^{[\ell] \times [\mathbf{L}]}$	(IV.2.49)	matrices de lissage
$\mathbf{U}^{(\ell)}(n)$	$\mathbb{C}^{[\ell] \times [\mathbf{M}]}$	(IV.2.50)	matrice partielle des données lissée
$\bar{\mathbf{U}}_{SS}^{(\ell)}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\ell}] \times [\mathbf{M}]^N}$	(IV.2.51)	matrice complète des données lissée
$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] \times [\bar{\mathbf{K}}]}$	(IV.2.53)	estimateur de la covariance lissé
$\mathbf{A}^{SS}(n)$	$\mathbb{C}^{R \times [\mathbf{M}]}$	(IV.2.52)	matrice des amplitudes lissée
$\bar{\mathbf{A}}^{SS}$	$\mathbb{C}^{R \times [\mathbf{M}]^N}$	(IV.2.52)	matrice complète des amplitudes lissée
$\bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}$	$\mathbb{C}^{[\mathbf{M}] \times R}$	(IV.2.52)	matrice pilote modifiée

Symbole	Ensemble	Expression	Description
$\mathcal{X}_m^\delta$		(IV.2.60)	sous-grille réduite et décimée
$\delta$	$\mathbb{N}^D$	(IV.2.58)	vecteur décimation
$\mathbf{J}^\delta$	$\mathbb{N}^{[\mathbf{K}] \times [\mathbf{K}] [\delta]}$	(IV.2.59)	matrice de décimation
$\bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$	$\mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] \times [\mathbf{M}]^N}$	(IV.2.62)	matrice des données lissée, décimée et modifiée
$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS,\delta}$	$\mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] \times [\bar{\mathbf{K}}]}$	(IV.2.65)	estimateur de la covariance lissé
$\mathbf{V}_\delta^\mathbf{K}$	$\mathbb{C}^{[\mathbf{K}] \times R}$	(IV.2.66)	matrice pilote modifiée
$\Pi^{\mathbf{q},\delta}$	$\mathbb{C}^{R \times R}$	(IV.2.18)	matrices polaires décimées
$\pi^{\mathbf{q},\delta}$	$\mathbb{C}^R$	(IV.2.18)	vecteurs polaires décimés

## IV.2 Méthode ESPRIT unifiée

Cette première section a pour but de présenter la méthode ESPRIT unifiée. Elle est organisée de la façon suivante : tout d'abord, on définit le modèle de signal dont on cherche à estimer les paramètres. On donne l'expression discrétisée de ce modèle qui correspond à la réalisation d'une mesure de celui-ci sur une grille multidimensionnelle de points uniformément espacés. Ensuite, on formule le problème d'estimation des paramètres. Une nouvelle écriture du modèle de signal discret est proposée, permettant d'exprimer les problèmes d'estimation des amplitudes, phases et vecteurs d'onde de façon découplée. La présentation poursuit avec l'écriture matricielle du nouveau modèle de signal discret. Cette écriture permet ensuite d'exprimer les propriétés d'invariance rotationnelle du modèle de signal. Celles-ci sont enfin utilisées dans la méthode ESPRIT pour estimer les vecteurs d'onde.

Les deux dernières sous-sections sont consacrées à l'étude de la covariance des données, utilisée dans ESPRIT pour séparer les différentes composantes du signal. Premièrement, on montre que cette covariance contient toute l'information nécessaire à l'estimation des vecteurs d'onde. Deuxièmement, on expose les différents estimateurs de la covariance dont les propriétés permettent d'assurer une estimation correcte des paramètres du modèle.

### IV.2.1 Modèle de signal

Le développement d'une méthode d'identification consiste tout d'abord à définir un *modèle* de signal ; celui-ci explicite les hypothèses sur la dépendance du signal en fonction des paramètres à identifier. Dans le cadre des méthodes type ESPRIT, la formulation du modèle permet de s'affranchir du principe d'incertitude (IV.1.1) ; cela confère à ce type de méthodes leur aspect dit *haute-résolution*.

#### IV.2.1.1 Prise en compte du bruit

La première hypothèse consiste à considérer le signal mesurable  $\tilde{u}(x)$  comme la somme d'un signal pur  $u(x)$  et d'un bruit *additionnel*  $\Delta u(x)$  :

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \Delta u(x) \quad (\text{IV.2.1})$$

où  $x$  représente les variables d'espace et de temps en général. L'hypothèse d'un bruit additionnel permet de modéliser le comportement d'un bon nombre de capteurs. On note cependant que certains dispositifs de mesure peuvent présenter un bruit qui est fonction de l'amplitude du signal ; dans ce cas, l'hypothèse du bruit additionnel doit être rediscutée.

Dans ce qui suit, les développements s'intéressent à la modélisation du signal pur  $u(x)$ . L'influence du bruit  $\Delta u(x)$  est donc mise de côté et sera réintroduite lors des discussions sur la formulation du problème d'estimation des paramètres.

#### IV.2.1.2 Modèle continu

L'étape suivante consiste à poser un modèle de signal qui dépend continûment des variables spatio-temporelles. Le modèle de signal formulé ici intègre : (i) l'aspect multidimensionnel des signaux, composés d'ondes planes (IV.1.8) ; (ii) la prise en compte de vecteurs d'onde opposés deux à deux par des fonctions sinusoïdales (IV.1.9) ; (iii) la prise en compte simultanée de différentes composantes du signal  $u_i$  mesurées en différents points  $\underline{\mathbf{p}}_j$  (IV.1.12).

**Definition IV.2.1** (Modèle continu). *On s'intéresse au signal vectoriel  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^C$ , dépendant des variables  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^D$  et  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{D_p}$ , et paramétré par les  $R$  triplets (vecteur amplitude  $\underline{\alpha}_r \in \mathbb{C}^C$ ; vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r \in \mathbb{C}^D$ ; phase  $\phi_r \in \mathbb{C}$ ) :*

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}) = \sum_{r=1}^R \underline{\alpha}_r(\underline{\mathbf{p}}) \exp(\mathbf{i} \underline{\mathbf{k}}_r^e \cdot \underline{\mathbf{x}}^e) \cos(\underline{\mathbf{k}}_r^c \cdot \underline{\mathbf{x}}^c + \phi_r(\underline{\mathbf{p}})) \quad (\text{IV.2.2})$$

où on pose  ${}^T \underline{\mathbf{v}} = [{}^T \underline{\mathbf{v}}^e \ {}^T \underline{\mathbf{v}}^c]$  pour un vecteur  $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^D$  quelconque. Le cosinus est défini au sens complexe :  $\forall x \in \mathbb{C}, 2\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})$ . L'entier  $R$  dénote l'ordre du signal.

Le signal est donc postulé harmonique selon les  $D = D_e + D_c$  dimensions  ${}^T \underline{\mathbf{d}} = [{}^T \underline{\mathbf{d}}_e \ {}^T \underline{\mathbf{d}}_c] \in \mathbb{N}^D$  : exponentiel le long des dimensions  $\underline{\mathbf{d}}_e \in \mathbb{N}^{D_e}$  et sinusoïdal le long des dimensions  $\underline{\mathbf{d}}_c \in \mathbb{N}^{D_c}$ . Selon les  $D_p$  dimensions restantes,  $\underline{\mathbf{u}}$  est paramétré par les  $R$  champs vectoriels complexes  $\underline{\alpha}_r(\underline{\mathbf{p}})$  et fonctions de phase  $\phi_r(\underline{\mathbf{p}})$ , dont aucune connaissance sur la dépendance en  $\underline{\mathbf{p}}$  est nécessaire *a priori*. L'arrangement des dimensions est en fait sans effet sur le déroulement de la méthode; la convention d'ordre choisie ci-avant est donc prise par souci de clarté des développements.

*Remarque IV.2.1.* Le choix de certains paramètres permet de retrouver les différentes extensions de la méthode ESPRIT proposées au cours des trente dernières années. La méthode ESPRIT originale [189] est retrouvée en posant  $D_e = 1$  et  $D_c = 0$ ; la version Real-Valued ESPRIT [132] correspond au contraire au choix  $D_e = 0$  et  $D_c = 1$ ; la version ND-ESPRIT [188, 191] correspond quant à elle à  $D_e \geq 1$  et  $D_c = 0$ .

### IV.2.1.3 Observations

L'aspect vectoriel du signal  $\underline{\mathbf{u}}$  est explicité dans le modèle de signal (IV.2.2) ci-dessus de façon à montrer la possibilité de traiter, avec la présente méthode, les mesures d'un champ vectoriel (ou plus généralement tensoriel). Par exemple, si les trois composantes du champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  correspondant à la réponse d'une structure sont disponibles, elles peuvent être prises en compte simultanément.

De façon à mettre en œuvre la méthode ESPRIT, on considère dans ce qui suit la mesure de la composante  $u_i$  d'un champ vectoriel  $\underline{\mathbf{u}}$  au point  $\underline{\mathbf{p}}_j$  comme une *observation* d'un champ scalaire  $u(\underline{\mathbf{x}})$ .

**Definition IV.2.2** (Observations). *On définit la fonction scalaire  $u(\underline{\mathbf{x}}, t) \in \mathbb{C}$  qui correspond à la  $n^{\text{ième}}$  observation du champ vectoriel  $\underline{\mathbf{u}}$  (IV.2.2),  $n \in \mathbb{N}$  :*

$$u(\underline{\mathbf{x}}, n) = \sum_{r=1}^R \beta_r(n) \exp(\mathbf{i} \underline{\mathbf{k}}_r^e \cdot \underline{\mathbf{x}}^e) \cos(\underline{\mathbf{k}}_r^c \cdot \underline{\mathbf{x}}^c + \phi_r(n)) \quad (\text{IV.2.3})$$

Le champ  $u$  dépend alors des  $D + 1$  variables  $(\underline{\mathbf{x}}, n)$ .

### IV.2.1.4 Discrétisation

Une fois le modèle du signal *continu* explicité, il est nécessaire de définir un modèle correspondant à la *mesure* de celui-ci en passant par sa *discrétisation*. L'application de la méthode ESPRIT nécessite pour cela l'utilisation d'un *maillage de mesures régulier*; la géométrie de



celui-ci doit en effet pouvoir être divisée en au moins deux sous-parties, images les unes des autres par translation selon un ou plusieurs vecteurs  $\underline{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^D$ . On se limite dans le présent travail à des maillages de mesure *uniformes*.

**Definition IV.2.3** (Grille de mesures). *Soit la grille uniforme  $\mathcal{X}$  de dimension  $D$ , d'espace-ment  $\mathbf{h} = {}^T[h_1, \dots, h_D]$ , de taille  $\mathbf{L} = {}^T[L_1, \dots, L_D]$  et de vecteurs directeurs  $(\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_D)$  :*

$$\mathcal{X}_{\mathbf{m}} = \underline{\mathbf{x}}_0 + \sum_{d=1}^D m_d h_d \underline{\mathbf{v}}_d \quad (\text{IV.2.4})$$

$$m_d \in 0 \dots L_d - 1 \quad , \quad d \in 1 \dots D$$

Si  $\lfloor \mathbf{L} \rfloor > 1$ , il est possible de trouver au moins deux sous-grilles images l'une de l'autre par translation selon un vecteur  $\underline{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^D$  défini comme suit :

$$\underline{\mathbf{t}} = \sum_{d=1}^D h_d q_d \underline{\mathbf{e}}_d \quad (\text{IV.2.5})$$

où  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^D$  et  $|q_d| < L_d$ .

La grille ainsi définie permet d'introduire la manière dont de multiples invariances de celle-ci sont prises en compte pour estimer les vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  ; le vecteur translation  $\underline{\mathbf{t}}$  généralise en effet l'invariance multiple (équation (IV.1.11)) aux signaux multidimensionnels.

Une fois la géométrie du maillage de mesures définie, il est possible de formuler le modèle de signal discret qui prend la forme d'un tableau  $\mathcal{U}$ , dont l'élément  $\mathcal{U}_{\mathbf{m}}$  contient la mesure du signal au point  $\mathcal{X}_{\mathbf{m}}$ .

**Proposition IV.2.1** (Modèle discret). *Soit  $\mathcal{U}(t) \in \mathbb{C}^{\mathbf{L}}$  la discrétisation de  $u(\mathbf{x}, n)$  (IV.2.3) le long de la grille  $\mathcal{X}$ . Alors  $\mathcal{U}(n) = u(\mathcal{X}, n)$  suit le modèle de signal suivant paramétré par les  $R$  amplitudes  $\beta(n)$ , les  $R$  phases  $\phi(n)$  et les  $R$  vecteurs d'onde  $\mathbf{K} = [\underline{\mathbf{k}}_1 \dots \underline{\mathbf{k}}_R]$  :*

$$\mathcal{U}_{\mathbf{m}}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) = \sum_{r=1}^R \beta_r(n) \exp\left(i {}^T \mathbf{m}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e) \underline{\mathbf{k}}_r^e\right) \cos\left({}^T \mathbf{m}^c \text{diag}(\mathbf{h}^c) \underline{\mathbf{k}}_r^c + \phi_r(n)\right) \quad (\text{IV.2.6})$$

où  ${}^T \mathbf{m} = [{}^T \mathbf{m}_e \ {}^T \mathbf{m}_c]$  contient les indices du point  $\mathcal{X}_{\mathbf{m}}$  (IV.2.4) tel que  $\mathcal{U}_{\mathbf{m}}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) = u(\mathcal{X}_{\mathbf{m}}, n) \in \mathbb{C}$ .

*Remarque IV.2.2* (Critère de Nyquist). L'expression ci dessus montre que les vecteurs d'onde peuvent être déterminés à  $2\pi$  près : on a en effet, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{U}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) = \mathcal{U}^{(\beta, \phi, \mathbf{K} + 2n\pi \mathbf{h}_d)}(n)$ . Cette observation correspond au critère de Nyquist ; les vecteurs d'onde ne pourront être identifiés sont ambiguïté si et seulement si pour  $d = \{1, \dots, D\}$ ,  $|k_{d,r}| < \pi/h_d$ .

Le modèle obtenu permet ainsi de poser le problème concernant l'identification de ses paramètres. Il sera ensuite retravaillé pour en donner une formulation matricielle, permettant enfin de montrer les propriétés d'invariance rotationnelle qui lui sont propres. Enfin, on utilisera ce modèle pour étudier les propriétés des estimateurs de la covariance des mesures, utilisée dans la méthode ESPRIT pour estimer le sous-espace signal.

## IV.2.2 Formulation du problème d'identification

Le problème de l'identification des paramètres du modèle de signal est ici abordé. Exprimé sur le modèle de signal discret (IV.2.6) défini ci-avant, l'estimation des amplitudes  $\beta$ , des phases  $\phi$  et des vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$  doit être réalisée de façon simultanée. Fort de ce constat, on propose un nouveau modèle de signal discret qui permet de découpler l'estimation des phases  $\phi$  de l'estimation des autres paramètres.

### IV.2.2.1 Données d'entrée

On définit tout d'abord les données disponibles pour l'identification du modèle de signal. Celles-ci correspondent en fait à des observations du signal discret  $\mathbf{u}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}$  auxquelles s'ajoute l'effet du bruit de mesure additionnel (IV.2.1).

**Definition IV.2.4** (Observations perturbées). *Si  $T$  réalisations de la mesure de  $C$  composantes de  $\mathbf{u}$  en  $P$  points (IV.2.2) sont réalisées, alors  $N = T \times P \times C$  observations  $\tilde{\mathbf{u}}(n)$  perturbées de  $\mathbf{u}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n)$  sont disponibles pour  $n = 1, \dots, N$  telles que :*

$$\tilde{\mathbf{u}}(n) = \mathbf{u}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) + \Delta \mathbf{u}(n) \quad (\text{IV.2.7})$$

où  $\Delta \mathbf{u}(n)$  modélise l'effet du bruit de mesure additionnel.

### IV.2.2.2 Problème complet

La perturbation des mesures par le bruit additionnel entraîne irrémédiablement une *incertitude* sur les paramètres identifiables; ceux-ci ne peuvent donc pas être identifiés *exactement*. En conséquence, le problème d'identification devient un problème d'optimisation; il peut par exemple consister à minimiser une distance ou maximiser un coefficient de corrélation, définis à partir des données d'entrée  $\tilde{\mathbf{u}}$  et du modèle de signal  $\mathbf{u}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}$ . On définit ici le problème d'estimation comme la minimisation de la norme 2 des perturbations  $\Delta \mathbf{u}$ . L'ordre du signal  $R$  est ici supposé connu.

**Definition IV.2.5** (Problème complet). *Sachant les  $N$  observations  $\tilde{\mathbf{u}}(n)$  obtenues et l'ordre du signal  $R$ , estimer les  $N \times R$  amplitudes  $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\beta}(1) \dots \tilde{\beta}(N)]$  et phases  $\tilde{\Phi} = [\tilde{\phi}(1) \dots \tilde{\phi}(N)]$  et les  $D \times R$  composantes des vecteurs d'onde  $\tilde{\mathbf{K}}$  telles que :*

$$(\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\Phi}, \tilde{\mathbf{K}}) = \arg \min_{\substack{\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{R \times N} \\ \Phi \in \mathbb{C}^{R \times N} \\ \mathbf{K} \in \mathbb{C}^{D \times R}}} \sum_n^N \left( \tilde{\mathbf{u}}(n) - \mathbf{u}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) \right)^2 \quad (\text{IV.2.8})$$

Le problème d'estimation des paramètres aux moindres carrés ainsi formulé est en fait difficile à résoudre. L'apport des méthodes de Prony en général réside donc dans la reformulation de ce problème, dans le but de rendre sa résolution moins complexe.

En particulier, on cherche dans la présente méthode à séparer le problème complet en trois problèmes distincts et découplés : l'estimation (i) des vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$ ; (ii) des amplitudes  $\mathbf{B}$ ; (iii) des phases  $\Phi$ .

### IV.2.2.3 Modification du modèle de signal

Il est possible de modifier légèrement le modèle de signal afin de formuler un problème d'identification qui s'affranchit des phases  $\Phi$ . En effet, en notant  $u(\underline{\mathbf{x}}, n) = u(\underline{\mathbf{x}}^e, \underline{\mathbf{x}}^c, n)$ , on remarque que :

$$\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}^e, \underline{\mathbf{x}}^c, n) = u(\underline{\mathbf{x}}^e, \underline{\mathbf{x}}_0^c + \underline{\mathbf{x}}^c, n) + u(\underline{\mathbf{x}}^e, \underline{\mathbf{x}}_0^c - \underline{\mathbf{x}}^c, n) = \sum_{r=1}^R a_r(n) \exp(i \underline{\mathbf{k}}_r^e \cdot \underline{\mathbf{x}}^e) \cos(\underline{\mathbf{k}}_r^c \cdot \underline{\mathbf{x}}^c) \quad (\text{IV.2.9})$$

où  $a_r(n) = 2\beta_r(n) \cos(\underline{\mathbf{k}}_r^c \cdot \underline{\mathbf{x}}_0^c + \phi_r(n))$ . En conséquence, les variations de  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n)$  en fonction de  $\underline{\mathbf{x}}$  et  $n$  sont découplées.

La propriété ci-avant est utilisée dans l'implémentation Real-Valued ESPRIT [132] pour rendre le modèle de signal indépendant des phases. La méthode alors proposée est toutefois limitée aux signaux unidimensionnels, composés de sinusoides exclusivement. Cette proposition est ici généralisée afin de l'adapter au modèle de signal choisi pour ce travail (IV.2.6).

Un nouveau modèle de signal discret est formulé sur la base de l'équation ci-dessus. En particulier, le point  $\underline{\mathbf{x}}_0^c$  est choisi tel qu'il coïncide avec le centre de la grille  $\mathcal{X}$ , soit  $\underline{\mathbf{x}}_0^c = \mathcal{X}_{\mathbf{L}/2}$ . On obtient alors un modèle de signal modifié dans lequel les phases  $\phi$  ont disparu ; de façon générale, les grandeurs associées à ce modèle modifié sont notées  $(\bullet)$ .

**Definition IV.2.6** (Modèle de signal *modifié*). Soit  $\bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{a}, \mathbf{K})}(n) \in \mathbb{C}^{\bar{\mathbf{L}}}$  le modèle de signal modifié défini comme suit, quelque soient les indices  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^D$  tels que  $\mathbf{m}_d \in \llbracket 0, \dots, \bar{\mathbf{L}}_d - 1 \rrbracket$ , avec  $\bar{\mathbf{L}}^e = \mathbf{L}^e$  et  $\bar{\mathbf{L}}^c = \mathbf{L}^c/2$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{[\mathbf{m}^e, \mathbf{m}^c]}^{(\mathbf{a}, \mathbf{K})}(n) &= \mathbf{u}_{[\mathbf{m}^e, \bar{\mathbf{L}}^c - \mathbf{m}^c - 1]}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) + \mathbf{u}_{[\mathbf{m}^e, \bar{\mathbf{L}}^c + \mathbf{m}^c]}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n) \\ &= \sum_{r=1}^R a_r(n) \exp(i {}^\top \mathbf{m}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e) \underline{\mathbf{k}}_r^e) \cos({}^\top \mathbf{m}^c \text{diag}(\mathbf{h}^c) \underline{\mathbf{k}}_r^c) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.10})$$

avec  $\mathbf{a}(n) = 2\beta(n) \circ \cos({}^\top (\mathbf{L} - \bar{\mathbf{L}} - \mathbf{1}/2) \text{diag}(\mathbf{h}) \mathbf{K} + \phi(n))$  et  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(1) \dots \mathbf{a}(N)]$ .

Le nouveau modèle de signal obtenu est de taille inférieure au modèle de signal original (équation (IV.2.6)) ; son utilisation possède en conséquence le double avantage de la réduction du nombre de données à traiter et de paramètres à identifier (ce modèle étant indépendant des phases). Le problème d'identification des paramètres du signal (IV.2.8) devient en effet :

$$(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{K}}) = \arg \min_{\substack{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{RN} \\ \mathbf{K} \in \mathbb{C}^{D \times R}}} \sum_t^N \left( \bar{\mathbf{u}}(n) - \bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{a}, \mathbf{K})}(n) \right)^2 \quad (\text{IV.2.11})$$

où  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  est la  $n^{\text{ième}}$  observation du signal mesurée (IV.2.7) et modifiée (IV.2.10) :

$$\bar{\mathbf{u}}_{[\mathbf{m}^e, \mathbf{m}^c]} = \tilde{\mathbf{u}}_{[\mathbf{m}^e, \bar{\mathbf{L}}^c - \mathbf{m}^c - 1]} + \tilde{\mathbf{u}}_{[\mathbf{m}^e, \bar{\mathbf{L}}^c + \mathbf{m}^c]} \quad (\text{IV.2.12})$$

On note que la modification du modèle laisse inchangées les grandeurs  $(\bullet^e)$  associées aux dimensions des exponentielles. De façon évidente, cette opération n'est donc pas nécessaire si  $D_c = 0$ , car dans ce cas  $\bar{\mathbf{u}}^{(\mathbf{a}, \mathbf{K})}(n) = 2\mathbf{u}^{(\mathbf{a}, 0, \mathbf{K})}(n)$ .

### IV.2.3 Écriture matricielle

Dans ce qui suit, la formulation matricielle du modèle de signal est développée. Cette écriture généralise celle donnée dans le cas de la méthode ESPRIT originale (IV.1.3). Un certain nombre de matrices et vecteurs sont définis, dans le but de formuler par la suite les relations d'invariance rotationnelle ainsi que les estimateurs de la covariance des données.

L'écriture matricielle est tout d'abord donnée pour le modèle de signal non modifié. Celle-ci sera utilisée, une fois les vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$  identifiés, pour estimer les amplitudes  $\mathbf{B}$  et phases  $\Phi$ . Dans le même temps sont définis le vecteur des données et la matrice des données ainsi que leur modèle. Dans un second temps est développée l'écriture matricielle du modèle de signal modifié; celle-ci sera utilisée pour l'identification des vecteurs d'onde par invariance rotationnelle.

Pour la suite, on pose le vecteur d'entiers  $\ell = [\ell_1 \dots \ell_D] \in \mathbb{N}^D$  désignant des longueurs quelconques. Il est utilisé pour formuler les développements dans un cadre général et est utilisé comme un *paramètre*; un objet noté  $\bullet^{(\ell)}$  est défini pour tout choix de  $\ell$ . En effet, on aura besoin dans ce qui suit de définir des grilles partielles de mesure, dont la taille peut être quelconque.

#### IV.2.3.1 Vecteur des données

Afin de formuler le modèle de signal sous forme matricielle, il est nécessaire de réduire la dimension de celui-ci. En effet, les données non bruitées disponibles sont pour l'instant définies sous la forme de  $N$  tableaux  $\mathcal{U}(n)$  à  $D$  dimensions pour  $t = \{1, \dots, N\}$  (IV.2.7). On définit alors le *vecteur des données* comme suit.

**Definition IV.2.7** (Vecteur des données). Soit  $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{C}^{[\mathbf{L}]}$  le vecteur des données associées à la  $n^{\text{ième}}$  observation tel que :

$$\mathbf{u}(n) = \text{vec}\left\{\mathcal{U}^{(\beta, \phi, \mathbf{K})}(n)\right\} \quad (\text{IV.2.13})$$

Un vecteur de données est donc défini pour chacune des  $N$  observations du signal. L'expression du vecteur des données non bruitées  $\mathbf{u}(n)$  est connue, et s'exprime comme suit.

**Proposition IV.2.2** (Modèle de vecteur des données). A partir du modèle de signal (IV.2.6), on peut écrire chaque vecteur  $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{C}^{[\mathbf{L}]}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(n) = \left[ \exp\left(\mathbf{i} \mathbf{M}_e^{\mathbf{L}} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\mathbf{M}_c^{\mathbf{L}} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c + \mathbf{1}^{[\mathbf{L}]} \boxtimes^{\top} \phi(n)\right) \right] \beta(n) \quad (\text{IV.2.14})$$

où  $\mathbf{K}^e = [\mathbf{k}_1^e \dots \mathbf{k}_R^e] \in \mathbb{C}^{D_e \times R}$  et  $\mathbf{K}^c = [\mathbf{k}_1^c \dots \mathbf{k}_R^c] \in \mathbb{C}^{D_c \times R}$  contiennent les vecteurs d'onde. On a posé les matrices d'indices  $\mathbf{M}_e^{\mathbf{L}} \in \mathbb{N}^{[\mathbf{L}] \times D_e}$  et  $\mathbf{M}_c^{\mathbf{L}} \in \mathbb{N}^{[\mathbf{L}] \times D_c}$  relatant les positions dans la grille  $\mathcal{X}$ ; soit pour des longueurs  $\ell \in \mathbb{N}^D$  quelconques :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e^{(\ell)} &= [\mathbf{m}_1^{(\ell)} \dots \mathbf{m}_{D_e}^{(\ell)}] \\ \mathbf{M}_c^{(\ell)} &= [\mathbf{m}_{D_e+1}^{(\ell)} \dots \mathbf{m}_{D_e+D_c}^{(\ell)}] \end{aligned} \quad (\text{IV.2.15})$$

avec  $\mathbf{m}_d^{(\ell)} \in \mathbb{N}^{[\ell]}$  le vecteur des indices selon la dimension  $d$  :

$$\mathbf{m}_d^{(\ell)} = \mathbf{1}^{\ell_1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{1}^{\ell_{d-1}} \boxtimes^{\top} [0 \dots \ell_d - 1] \boxtimes \mathbf{1}^{\ell_{d+1}} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{1}^{\ell_D} \quad (\text{IV.2.16})$$

*Remarque IV.2.3.* L'expression de  $\mathbf{m}_d^{(\ell)}$  est héritée de la propriété (IV.1.21) de la vectorisation, cette opération étant utilisée pour former  $\mathbf{u}(n)$  (IV.2.13).

L'expression du vecteur des données (IV.2.14) obtenue prend la forme d'un produit matrice-vecteur du type  $\mathbf{u}(n) = \tilde{\mathbf{V}}(n)\boldsymbol{\beta}(n)$ , où la matrice  $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{[\mathcal{L}] \times R}$  contient les fonctions exponentielles et sinusoidales et est dépendante de l'observation  $n$ , à cause des phases  $\boldsymbol{\phi}(n)$  contenues dans les sinusoides. Les développements qui suivent donnent une factorisation de  $\mathbf{u}(n)$  sous une forme séparée, c'est à dire sous la forme d'un produit entre une matrice indépendante de  $n$  et un vecteur des amplitudes généralisées qui contient la dépendance en  $n$ . Ces développements ne sont nécessaires que dans le cas où  $D_c \neq 0$ . Dans le cas contraire, le signal n'est composé que de fonctions exponentielles ; la matrice  $\tilde{\mathbf{V}}$  est alors toujours indépendante de  $n$ . L'écriture du modèle des données se simplifie ; on utilisera donc directement le modèle des données modifiées explicité plus bas.

**Proposition IV.2.3** (Factorisation du vecteur des données). *Le vecteur  $\mathbf{u}(n)$  peut se factoriser en utilisant l'identité  $2\cos(x) = \exp(\mathbf{i}x) + \exp(-\mathbf{i}x)$  sous la forme suivante :*

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{V}_{\pm}^{\mathcal{L}} \boldsymbol{\theta}(n) \quad (\text{IV.2.17})$$

où, quelque soit  $\ell \in \mathbb{N}^D$ , la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}_{\pm}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{[\ell] \times 2R}$  s'écrit, si  $D_c \neq 0$  :

$$\mathbf{V}_{\pm}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e^{(\ell)} \circ \mathbf{V}_+^{(\ell)} & \mathbf{V}_e^{(\ell)} \circ \mathbf{V}_-^{(\ell)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2.18})$$

avec les trois matrices de Vandermonde  $\mathbf{V}_e^{(\ell)}$ ,  $\mathbf{V}_+^{(\ell)}$  et  $\mathbf{V}_-^{(\ell)}$  de taille  $[\ell] \times R$  telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_e^{(\ell)} &= \exp(\mathbf{i} \mathbf{M}_e^{(\ell)} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e) \\ \mathbf{V}_{(+/-)}^{(\ell)} &= \exp((+/-) \mathbf{i} \mathbf{M}_c^{(\ell)} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c) \end{aligned}$$

et les  $2R$  amplitudes généralisées  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{C}^{2R}$  telles que :

$$\begin{aligned} {}^{\top} \boldsymbol{\theta}(n) &= [{}^{\top} \boldsymbol{\theta}_+(n) \quad {}^{\top} \boldsymbol{\theta}_-(n)] \\ 2\boldsymbol{\theta}_{(+/-)}(n) &= \exp((+/-) \mathbf{i} \boldsymbol{\phi}(n)) \circ \boldsymbol{\beta}(n) \end{aligned}$$

La factorisation ci-dessus permet notamment, une fois que les vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  ont été identifiés, de déterminer le vecteur des amplitudes généralisées  $\boldsymbol{\theta}(n)$  associées à la  $n^{\text{ième}}$  observation du signal.

### IV.2.3.2 Matrice des données

Les développements se sont jusque-là concentrés sur l'expression d'un vecteur contenant les données associés à une seule observation du signal. En réalité,  $N$  vecteurs de données sont disponibles pour l'identification des paramètres du signal ; on définit alors la *matrice de signal*, qui contient la totalité des données disponibles. Comme dans le cas du vecteur des données non bruitées, l'expression de cette matrice est connue ; elle permet d'explicitier la méthode d'estimation des amplitudes et des phases caractérisant le signal.

**Définition IV.2.8** (Matrice des données). *Soit  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{[\ell] \times N}$  la matrice contenant la totalité des données non perturbées, dont les expressions sont :*

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}(1) \quad \dots \quad \mathbf{u}(N)] = \mathbf{V}_{\pm}^{\mathcal{L}} \boldsymbol{\Theta} \quad (\text{IV.2.19})$$

où  $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}(1) \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}(N)] \in \mathbb{C}^{2R \times N}$  contient les amplitudes généralisées.

Une fois que les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  ont été identifiés, la matrice  $\mathbf{V}_\pm^L$  peut être construite (équations (IV.2.18)); la matrice des données est alors utilisée pour estimer les amplitudes  $\mathbf{B}$  et les phases  $\Phi$  au sens des moindres carrés.

**Proposition IV.2.4** (Estimation des amplitudes et phases). *Les amplitudes généralisées  $\tilde{\Theta} \in \mathbb{C}^{2R \times N}$  peuvent être estimées à partir de la matrice des données bruitées  $\tilde{\mathbf{U}}$  :*

$$\boxed{\tilde{\Theta} = (\mathbf{V}_\pm^L)^\dagger \tilde{\mathbf{U}}} \quad (\text{IV.2.20})$$

d'où on peut estimer les amplitudes  $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\beta}(1) \dots \tilde{\beta}(N)] \in \mathbb{C}^{R \times N}$  et les phases  $\tilde{\Phi} = [\tilde{\phi}(1) \dots \tilde{\phi}(N)] \in \mathbb{C}^{R \times N}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} &= 2\sqrt{\tilde{\Theta}_+ \circ \tilde{\Theta}_-} \\ \tilde{\Phi} &= \frac{i}{2} \ln(\tilde{\Theta}_- / \tilde{\Theta}_+) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.21})$$

*Remarque IV.2.4.* Le modèle matriciel formulé ci-dessus double *virtuellement* le nombre de composantes contenues dans le signal en transformant les composantes sinusoïdales en deux composantes exponentielles appariées (ce qui correspond à  $R' = 2R$  et  $D'_e = D_e + D_c$ ), dont les vecteurs d'onde sont opposés (soit  $\mathbf{k}'_r = -\mathbf{k}'_{R+r}$ ). On pourrait en l'occurrence croire que cette simplification aurait pu être faite dès le départ; les deux approches sont en réalité différentes : la prise en compte *explicite* des composantes sinusoïdales dans le modèle de signal *contraint* l'appariement des vecteurs d'onde opposés dans le problème d'identification, ce qui n'est pas le cas du modèle à  $2R$  composantes ci-dessus.

### IV.2.3.3 Prise en compte du modèle modifié

Pour l'identification des vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$  par la méthode ESPRIT, le modèle de signal modifié (IV.2.10) est exprimé sous forme matricielle. La construction du modèle matriciel modifié est réalisée à l'aide d'une matrice de sélection (du type (IV.1.25)), appelée ici *matrice de modification des données*.

De nouveau, certains objets sont paramétrés par le vecteur d'entiers  $\ell$  associé à la taille de sous-grilles de mesures; on note  $\ell = [\ell^e \ \ell^c]$ . On utilise également le vecteur des tailles modifiées  $\bar{\ell}$  tel que  $\bar{\ell}^e = \ell^e$  et  $\bar{\ell}^c = \ell^c/2$ .

**Définition IV.2.9** (Matrice de modification des données). *Soit la matrice de sélection  $\bar{\mathbf{J}}^{(\ell)} \in \mathbb{N}^{[\bar{\ell}] \times [\ell]}$  définie pour  $\ell \in \mathbb{N}^D$  quelconque :*

$$\boxed{\bar{\mathbf{J}}^{(\ell)} = \mathbb{I}^{\ell_1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{I}^{\ell_{D_e}} \boxtimes \left( \bar{\mathbf{J}}_+^{(\ell)} + \bar{\mathbf{J}}_-^{(\ell)} \right)} \quad (\text{IV.2.22})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_+^{(\ell)} &= \bar{\mathbf{J}}_+^{(\ell_{D_e+1})} \boxtimes \dots \boxtimes \bar{\mathbf{J}}_+^{(\ell_D)} \quad , \quad \bar{\mathbf{J}}_+^{(\ell_d)} = [\mathbf{O}^{\bar{\ell}_d \times \bar{\ell}_d} \ \mathbb{I}^{\bar{\ell}_d}] \\ \bar{\mathbf{J}}_-^{(\ell)} &= \bar{\mathbf{J}}_-^{(\ell_{D_e+1})} \boxtimes \dots \boxtimes \bar{\mathbf{J}}_-^{(\ell_D)} \quad , \quad \bar{\mathbf{J}}_-^{(\ell_d)} = [\mathbf{Y}^{\bar{\ell}_d} \ \mathbf{O}^{\bar{\ell}_d \times \bar{\ell}_d}] \end{aligned}$$

où  $\mathbf{Y}$  est la matrice anti-identité; si  $D_c = 0$ , alors  $\bar{\mathbf{J}}^{(\ell)} = \mathbb{I}^{[\ell]}$ .

La matrice de modification des données ainsi obtenue permet d'exprimer simplement le vecteur des données modifiées  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  en fonction du vecteur des données non modifiées  $\mathbf{u}(n)$ .

**Definition IV.2.10** (Vecteur et matrice des données modifiés). *On définit le vecteur des données modifié  $\bar{\mathbf{u}}(n) \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}]}$  tel que :*

$$\bar{\mathbf{u}}(n) = \text{vec} \left\{ \bar{\mathbf{U}}^{(\mathbf{a}, \mathbf{K})}(n) \right\} = \bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{L}} \mathbf{u}(n) \quad (\text{IV.2.23})$$

ainsi que la matrice des données modifiée  $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}] \times N}$  :

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(1) & \dots & \bar{\mathbf{u}}(N) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{L}} \mathbf{U} \quad (\text{IV.2.24})$$

Comme dans le cas du vecteur des données non modifiées, l'expression du vecteur et de la matrice des données modifiées et non bruitées est connue. Cette expression nécessite la définition de la matrice *pilote*, qui joue le même rôle que la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^L$  dans la méthode ESPRIT originale (voir équation (IV.1.3)).

**Definition IV.2.11** (Matrice pilote). *Quelque soit  $\ell \in \mathbb{N}^D$ , on définit la matrice pilote  $\mathbf{V}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}] \times R}$  de la façon suivante :*

$$\mathbf{V}^{(\ell)} = \left[ \exp \left( \mathbf{i} \mathbf{M}_e^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e \right) \circ \cos \left( \mathbf{M}_c^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c \right) \right] \quad (\text{IV.2.25})$$

où les matrices d'indices  $\mathbf{M}_e^{(\ell)}$  et  $\mathbf{M}_c^{(\ell)}$  ont été définies en (IV.2.15).

*Remarque IV.2.5.* Le nom de matrice *pilote* est choisi en accord avec l'appellation communément adoptée dans la communauté du traitement de signal de *steering matrix*. Si  $D_c \neq 0$ , la matrice  $\mathbf{V}^{(\ell)}$  n'est pas de type Vandermonde (progression strictement géométrique entre les lignes), contrairement à son homologue  $\mathbf{V}_{\pm}^{(\ell)}$  définie en (IV.2.17). Toutefois, la lettre  $\mathbf{V}$  est conservée pour garder une certaine cohérence dans les développements.

**Proposition IV.2.5** (Modèle de matrice des données modifiée). *On peut réécrire le vecteur des données modifié  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  ainsi que la matrice associée  $\bar{\mathbf{U}}$  en utilisant la matrice pilote précédemment définie :*

$$\bar{\mathbf{u}}(n) = \mathbf{V}^{\mathbf{L}} \mathbf{a}(n) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{V}^{\mathbf{L}} \mathbf{A} \quad (\text{IV.2.26})$$

où les expressions de  $\mathbf{a}(n) \in \mathbb{C}^R$  et  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{R \times N}$  ont été données en (IV.2.10).

En plus d'intégrer la contrainte de parité des composantes (voir remarque IV.2.4), le modèle matriciel modifié utilise le vecteur des données modifié  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  de taille plus petite que  $\mathbf{u}(n)$  ( $[\bar{\mathbf{L}}] \leq [\mathbf{L}]$ ) ; cette formulation, comme on l'a fait remarquer lors de l'élaboration du modèle de signal modifié, possède le double avantage de diminuer à la fois le nombre de données à traiter dans le problème inverse *et* le nombre de paramètres à identifier.

## IV.2.4 Invariance Rotationnelle

On développe dans cette sous-section les propriétés d'invariance rotationnelle de la matrice pilote  $\mathbf{V}^{(\ell)}$  (IV.2.25), utilisées dans la méthode ESPRIT proposée pour estimer les vecteurs



d'onde  $\mathbf{K}$  de façon indépendante des amplitudes  $\mathbf{B}$  et phases  $\Phi$  (voir modèle de signal, équation (IV.2.6)).

L'idée est de formuler des relations entre des couples de *matrices pilotes tronquées* correspondant à l'observation du signal sur des *grilles de mesure partielles*, sous-parties de la grille complète  $\mathcal{X}$ . Ces relations, à la manière de la méthode ESPRIT originale, doivent permettre d'identifier les vecteurs d'onde (voir équation (IV.1.6)). Les deux identités scalaires suivantes sont utilisées :

$$\cos(\mathbf{k}_r^c \cdot (\mathbf{x}^c + \mathbf{t}^c)) + \cos(\mathbf{k}_r^c \cdot (\mathbf{x}^c - \mathbf{t}^c)) = 2\cos(\mathbf{k}_r^c \cdot \mathbf{x}^c) \cos(\mathbf{k}_r^c \cdot \mathbf{t}^c) \quad (\text{IV.2.27})$$

$$\exp(i\mathbf{k}_r^e \cdot (\mathbf{x}^e + \mathbf{t}^e)) = \exp(i\mathbf{k}_r^e \cdot \mathbf{x}^e) \exp(i\mathbf{k}_r^e \cdot \mathbf{t}^e) \quad (\text{IV.2.28})$$

Ces identités donnent le lien qui peut exister entre différentes observations du signal réalisées sur des sous-grilles images les une des autres par translation selon des vecteurs  $\mathbf{t}$  (voir définition IV.2.3) ; elles sont caractérisées par les termes indépendants de la position  $\mathbf{x}$ , soit  $\pi_r^{\mathbf{t}^e} = \cos(\mathbf{k}_r^c \cdot \mathbf{t}^c)$  et  $\pi_r^{\mathbf{t}^e} = \exp(i\mathbf{k}_r^e \cdot \mathbf{t}^e)$ . Sous certaines hypothèses sur le choix des *vecteurs translation*  $\mathbf{t}$ , ces identités peuvent s'exprimer sur la base des matrices pilotes tronquées ; elles permettent alors de formuler les relations correspondant aux propriétés d'*invariance rotationnelle généralisée* du signal. Ces relations passent par la définition de la *matrice polaire* associée à un vecteur translation  $\mathbf{t}$  et qui contient les termes  $\pi_r^{\mathbf{t}}$  sur sa diagonale.

Les paragraphes qui suivent détaillent cette démarche : tout d'abord sont définies des matrices permettant d'extraire de la matrice des données  $\bar{\mathbf{U}}$  les lignes correspondant aux informations mesurées sur des sous-parties de la grille  $\mathcal{X}$ . A partir de ces *matrices de sélection* sont ensuite exprimées les matrices pilotes tronquées, sur la base desquelles les relations d'invariance rotationnelle généralisée sont enfin formulées.

#### IV.2.4.1 Matrices de sélection

On définit tout d'abord un couple de matrices de sélection sur la base du vecteur translation à valeurs entières  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^D$ , qui rentre dans l'expression de  $\mathbf{t}$  à l'équation (IV.2.5). Ces matrices sont donc paramétrées par  $\mathbf{q}$  et un vecteur de longueurs quelconques  $\ell \in \mathbb{N}^D$ .

**Definition IV.2.12** (Matrices de sélection). Soient  $\mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \in \mathbb{N}^{[\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}] \times [\bar{\ell}]}$  et  $\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \in \mathbb{N}^{[\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}] \times [\bar{\ell}]}$ , où  $\bar{q}_d = |q_d^e|$  et  $\bar{q}_d^c = 2|q_d^c|$ , telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} &= \mathbf{J}_{\downarrow 1}^{e,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow D_e}^{e,(\ell)} \boxtimes \left( \mathbf{J}_{\downarrow D_e+1}^{c,+,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow D}^{c,+,(\ell)} + \mathbf{J}_{\downarrow D_e+1}^{c,-,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow D}^{c,-,(\ell)} \right) \\ \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} &= \mathbf{J}_{\uparrow 1}^{e,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\uparrow D_e}^{e,(\ell)} \boxtimes 2 \left( \mathbf{J}_{\uparrow D_e+1}^{c,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\uparrow D}^{c,(\ell)} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.29})$$

$$\mathbf{J}_{\downarrow d}^{e,(\ell)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{q}_d} & \mathbb{I}^{\bar{\ell}_d - \bar{q}_d} \end{bmatrix} & q_d > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbb{I}^{\bar{\ell}_d - \bar{q}_d} & \mathbf{O}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{q}_d} \end{bmatrix} & q_d \leq 0 \end{cases} \quad \mathbf{J}_{\uparrow d}^{e,(\ell)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbb{I}^{\bar{\ell}_d - \bar{q}_d} & \mathbf{O}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{q}_d} \end{bmatrix} & q_d > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{q}_d} & \mathbb{I}^{\bar{\ell}_d - \bar{q}_d} \end{bmatrix} & q_d \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_{\downarrow d}^{c,+,(\ell)} = \mathbf{J}_{1,0,\dots}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{\ell}_d} \quad \mathbf{J}_{\downarrow d}^{c,-,(\ell)} = \mathbf{J}_{0^{2|q_d|},1,0,\dots}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{\ell}_d} \quad \mathbf{J}_{\uparrow d}^{c,(\ell)} = \mathbf{J}_{0^{|q_d|},1,0,\dots}^{(\bar{\ell}_d - \bar{q}_d) \times \bar{\ell}_d}$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{j}}^{K \times M}$  est une matrice de sélection telle que définie en (IV.1.25). Dans le cas où  $q_d = 0$ , les matrices  $\mathbf{J}_{\uparrow d}^{e,(\ell)}$ ,  $\mathbf{J}_{\downarrow d}^{e,(\ell)}$ ,  $\mathbf{J}_{\downarrow d}^{c,+,(\ell)}$ ,  $\mathbf{J}_{\downarrow d}^{c,-,(\ell)}$  et  $\mathbf{J}_{\uparrow d}^{c,(\ell)}$  sont égales à  $\mathbb{I}^{\bar{\ell}_d}$ .



#### IV.2.4.2 Matrices pilotes tronquées

A partir des matrices de sélection définies ci-dessus, on peut définir deux matrices des données *partielles*  $\bar{\mathbf{U}}_{\uparrow \mathbf{q}}$  et  $\bar{\mathbf{U}}_{\downarrow \mathbf{q}}$ , qui correspondraient aux données (IV.2.26) prises sur des sous-parties de la grille de mesure complète  $\mathcal{X}$  :

$$\bar{\mathbf{U}}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{V}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^{\mathbf{L}} \mathbf{A} \quad (\text{IV.2.30})$$

où les matrices  $\mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{\mathbf{L}}$  et  $\mathbf{V}_{\downarrow \mathbf{q}}^{\mathbf{L}}$  sont des matrices pilotes tronquées, définies dans ce qui suit pour  $\ell \in \mathbb{N}^D$  quelconque.

**Definition IV.2.13** (Matrices pilotes tronquées). *Soient  $\mathbf{V}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{[\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}] \times R}$  et  $\mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{[\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}] \times R}$  les matrices pilotes tronquées telles que :*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{V}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} &= \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \mathbf{V}^{(\ell)} \\ \mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} &= \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \mathbf{V}^{(\ell)} \end{aligned}} \quad (\text{IV.2.31})$$

C'est à partir de ces matrices pilotes tronquées que sont formulées les propriétés d'invariance rotationnelle généralisées, de façon équivalente à la méthode ESPRIT originale (voir équation (IV.1.6)).

#### IV.2.4.3 Invariance rotationnelle généralisée

Les propriétés d'invariance rotationnelle ont été à l'origine formulées sur un modèle de signal composé d'exponentielles uniquement ; ici étendues au modèle de signal mixte exponentielles-sinusoïdes, elles sont en conséquence dites *généralisées*.

**Proposition IV.2.6** (Invariance Rotationnelle). *Les deux matrices pilotes tronquées sont liées par une relation de récurrence mettant en jeu la matrice polaire  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}} = \text{diag}(\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}}) \in \mathbb{C}^{R \times R}$  :*

$$\boxed{\mathbf{V}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} = \mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}} \quad (\text{IV.2.32})$$

$${}^{\top} \boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}} = \exp\left(\mathbf{i}^{\top} \mathbf{q}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \cos\left({}^{\top} \mathbf{q}^c \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \in \mathbb{C}^R$$

*Démonstration.* Voir annexe G.1.1. □

Les seules inconnues dans le vecteur polaire  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}}$  sont donc les composantes des vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$ . Si la matrice pilote  $\mathbf{V}^{(\ell)}$  est connue, la formulation de la relation d'invariance rotationnelle pour différents vecteurs translation  $\mathbf{q}$  peut donc permettre de remonter à  $\mathbf{K}$ . On note au passage que la matrice polaire est indépendante des longueurs de grille  $\ell$  ; cette propriété est utilisée plus loin pour formuler un estimateur de la covariance utilisant la technique du *lissage spatial* (voir (IV.1.15)).

*Remarque IV.2.6.* La méthode ND-ESPRIT standard [188, 208, 191] utilise seulement les relations d'invariance rotationnelle exprimées à partir de vecteurs translation appartenant à la base canonique, c'est à dire  $\mathbf{q} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D\}$ . Par la présente formulation, de multiples invariances en translation de la grille  $\mathcal{X}$  peuvent être utilisées par le biais de vecteurs  $\mathbf{q}$  différents. La prise en compte d'invariances supplémentaires semble améliorer substantiellement les performances de la méthode [216]. La relation (IV.2.32) donnée ci-dessus généralise en fait les propositions des méthodes ESPRIT dites à *invariances multiples* (MI-ESPRIT) [239] ou *résolutions multiples* (MR-ESPRIT) [122] au modèle de signal mixte exponentielles-sinusoïdes.

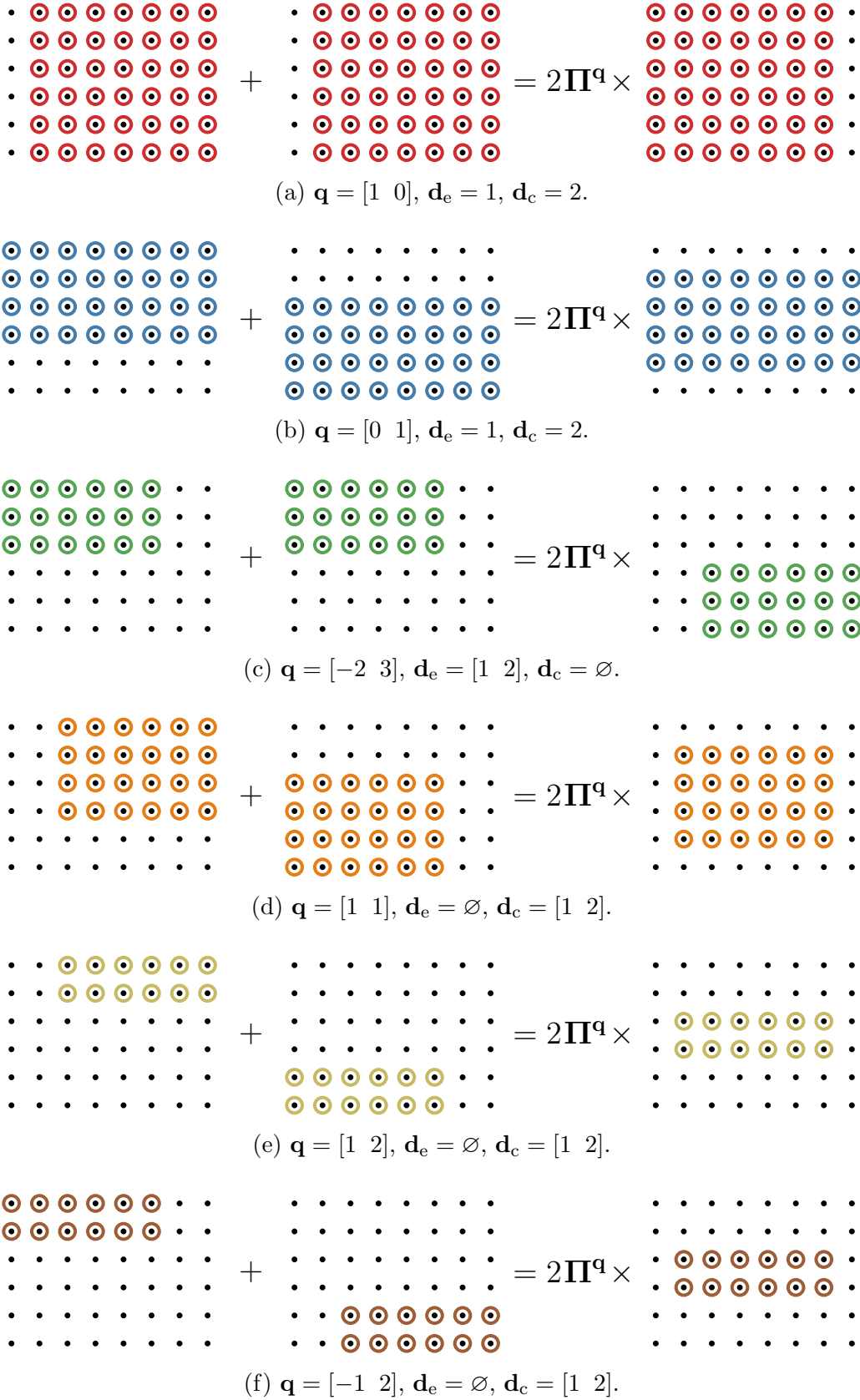


FIGURE IV.1 – Invariance rotationnelle : illustration sur une grille 2D avec  $\ell = [8 \ 6]$ , pour différents vecteurs  $\mathbf{q}$  et modèles de signal (donnés par les dimensions  $\mathbf{d}_e$  et  $\mathbf{d}_c$ ).

La figure IV.1 donne une représentation graphique de la relation d'invariance rotationnelle. Une grille en deux dimensions  $\mathcal{X}$  de taille  $\ell = [8 \ 6]$  est considérée, pour différents modèles de signal  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n)$  et vecteurs translation  $\mathbf{q}$ .

- (a)  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n) = \sum_r a_r(n) \exp(k_{1,r} x_1) \cos(k_{2,r} x_2)$  avec  $\mathbf{q} = [1 \ 0]$ . L'invariance rotationnelle s'exprime sur deux sous-grilles translatées de  $\mathbf{q}$ , celui-ci portant sur la dimension des exponentielles uniquement.
- (b)  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n) = \sum_r a_r(n) \exp(k_{1,r} x_1) \cos(k_{2,r} x_2)$  avec  $\mathbf{q} = [0 \ 1]$ . Cette fois-ci  $\mathbf{q}$  porte sur la dimension des sinusoides uniquement. On voit que dans ce cas ( $\mathbf{q}$  portant sur  $\mathbf{d}_c$  seulement), la relation d'invariance rotationnelle est symétrique, c'est à dire que  $\mathbf{\Pi}^{-\mathbf{q}} = \mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}$ .
- (c)  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n) = \sum_r a_r(n) \exp(\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{x}})$  avec  $\mathbf{q} = [-2 \ 3]$ . Cet exemple montre la possibilité d'utiliser un vecteur  $\mathbf{q}$  quelconque. On verra dans la suite que l'estimation des vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  par un problème linéaire impose toutefois certaines contraintes sur le choix  $\mathbf{q}$ .
- (d)  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n) = \sum_r a_r(n) \cos(\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{x}})$  avec  $\mathbf{q} = [1 \ 1]$ . Même remarque que précédemment, mais dans le cas d'un signal sinusoidal.
- (e,f)  $\bar{u}(\underline{\mathbf{x}}, n) = \sum_r a_r(n) \cos(\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{x}})$  avec  $\mathbf{q} = [1 \ 2]$  et  $\mathbf{q} = [-1 \ 2]$ . Cet exemple montre que la symétrie de  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}$  montrée à l'exemple (b) est valable sur le vecteur  $\mathbf{q}$  complet, et pas ses composantes.

La représentation graphique donnée sur la figure IV.1 permet également de montrer que certains points de mesure peuvent, avec un mauvais choix des vecteurs  $\mathbf{q}$ , ne pas entrer en compte dans la relation d'invariance rotationnelle. Les données associées sont dans ce cas *perdues*, dans le sens qu'elles n'entrent pas de le problème inverse d'estimation des vecteurs d'onde.

A ce stade, deux problèmes restent à résoudre : (i) la dépendance des composantes de  $\mathbf{\pi}^{\mathbf{q}}$  (équation (IV.2.32)) est en général non-linéaire par rapport aux vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$ , ce qui peut rendre difficile leur estimation ; (ii) la matrice pilote est supposée connue, ce qui est en réalité impossible puisqu'elle est construite à partir des vecteurs d'onde (équation (IV.2.25)). Ces deux problèmes sont abordés dans les sections qui suivent.

## IV.2.5 Estimation des vecteurs d'onde

Comme dans le cas de la méthode ESPRIT originale (IV.1.6), la relation d'invariance rotationnelle (IV.2.32) est utilisée dans la méthode ESPRIT unifiée proposée ici pour estimer la matrice  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}$  à partir de matrices pilotes tronquées.

**Definition IV.2.14** (Estimation de la matrice polaire). *L'estimation de la matrice polaire  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}$  au sens des moindres carrés s'obtient de la façon suivante :*

$$\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}} = \left( \mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \right)^\dagger \mathbf{V}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \quad (\text{IV.2.33})$$

*Remarque IV.2.7.* L'estimation de  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}$  est ici faite au sens des moindres carrés classiques, ce qui correspond à la proposition originale, dite LS-ESPRIT [189] (pour *Least-Squares*). D'autres méthodes d'estimation ont pu être proposées, améliorant substantiellement les performances de la méthode ; on peut par exemple citer l'utilisation des moindres carrés totaux (TLS-ESPRIT) [156] ou des moindres carrés généralisés (GLS-ESPRIT) [206].

Il est donc possible, à partir de (IV.2.33), d'estimer les  $R$  composantes de  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}}$  directement reliées aux vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  recherchés (IV.2.32). En conséquence, pour extraire les  $R \times D$  nombres d'onde  $k_{d,r}$  de façon unique, il est nécessaire d'obtenir  $Q \geq D$  matrices  $\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{q}_n}$ . Celles-ci sont estimées grâce à  $Q$  relations d'invariance construites à partir de  $Q$  vecteurs  $\mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^D$  distincts  $n \in 1 \dots Q$ .

La non-linéarité des composantes  $\pi_r^{\mathbf{q}_n}$  par rapport aux nombres d'onde  $k_{d,r}$  (IV.2.32) pose toutefois problème. Il est donc ici proposé de découpler les relations d'invariance rotationnelle portant sur les dimensions des exponentielles  $\mathbf{d}_e$  de celles portant sur les dimensions des sinusoides  $\mathbf{d}_c$ .

**Definition IV.2.15** (Matrice des vecteurs translation). *Soit la matrice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{D \times Q}$  qui contient les  $Q = Q_e + Q_c$  vecteurs translations  $\mathbf{q}_n$  :*

$$\mathbf{Q} = {}^T \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_{Q_e} & \mathbf{q}_{Q_e+1} & \dots & \mathbf{q}_{Q_e+Q_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^e & \mathbf{0}_{Q_e \times D_c} \\ \mathbf{0}_{Q_c \times D_e} & \mathbf{Q}^c \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2.34})$$

*C'est à dire que les vecteurs  $\mathbf{q}_n$  appartiennent soit aux dimensions des exponentielles ( $\mathbf{Q}^e \in \mathbb{R}^{Q_e \times D_e}$ ), soit aux dimensions des sinusoides ( $\mathbf{Q}^c \in \mathbb{R}^{Q_c \times D_c}$ ).*

Au prix d'une contrainte peu limitante sur le choix des vecteurs  $\mathbf{q}_n$ , le problème d'estimation des vecteurs d'onde se simplifie et devient un simple problème de régression linéaire.

**Proposition IV.2.7** (Estimation des vecteurs d'onde). *Soient  $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^e = [\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_1} \dots \boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_{Q_e}}] \in \mathbb{C}^{R \times Q_e}$  et  $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^c = [\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_{Q_e+1}} \dots \boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_Q}] \in \mathbb{C}^{R \times Q_c}$ . L'estimation des  $R$  vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  est formulée ainsi :*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= -i \operatorname{diag}(\mathbf{h}^e)^{-1} \mathbf{Q}^{e\dagger} \ln \left( {}^T \widehat{\boldsymbol{\Pi}}^e \right) \\ \mathbf{K}^c &= \operatorname{diag}(\mathbf{h}^c)^{-1} \mathbf{Q}^{c\dagger} \arccos \left( {}^T \widehat{\boldsymbol{\Pi}}^c \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.35})$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{K}^e = [\underline{\mathbf{k}}_1^e \dots \underline{\mathbf{k}}_R^e]$  et  $\mathbf{K}^c = [\underline{\mathbf{k}}_1^c \dots \underline{\mathbf{k}}_R^c]$ .

L'estimation de  $\mathbf{K}$  n'est unique que si le choix des vecteurs  $\mathbf{q}_n$  est tel que  $\operatorname{rg}(\mathbf{Q}) \geq D$ . Le cas  $\mathbf{Q} = \mathbb{I}^D$  et  $D_c = 0$  correspond d'ailleurs à la méthode ND-ESPRIT standard [191].

*Remarque IV.2.8* (Critère de Nyquist). Les fonctions  $\ln(x)$  et  $\arccos(x)$  étant définies à  $2\pi$  près, l'identification des composantes des vecteurs d'onde peut être ambiguë. On limite en l'occurrence ici le choix des vecteurs translation tels que,  $\forall d \in \llbracket 1, D \rrbracket$ ,  $|q_d h_d k_{d,r}| < \pi$ . Ce problème a déjà été évoqué lors de la proposition de l'algorithme MR-ESPRIT [122], où la contrainte précédente est relâchée au prix d'un problème d'estimation un peu plus complexe ; cette réécriture du problème n'est pas reproduite ici.

*Remarque IV.2.9* (Ambiguïté sur les composantes des  $\underline{\mathbf{k}}_r^c$ ). Puisque  $\arccos(\cos(x)) = \pm x$ , le signe des composantes des vecteurs d'onde selon les dimensions des sinusoides  $\mathbf{K}^c$  ne peut être déterminé avec la méthode d'estimation proposée. Le modèle de signal avec  $D_c > 1$  est donc, dans l'état, applicable seulement si la distribution des vecteurs d'onde est symétrique par rapport au repère de la grille (par exemple, si on cherche à identifier les paramètres d'ondes planes se propageant dans une plaque orthotrope). Ce problème n'est toutefois pas limitant pour les applications proposées dans les chapitres qui suivent.

Comme on l'a évoqué plus haut, la matrice pilote  $\mathbf{V}^{(\ell)}$  a été jusqu'ici supposée connue, ce qui ne correspond pas à un cas pratique. On a évoqué en introduction la possibilité d'utiliser la covariance des données pour estimer le sous-espace image de  $\mathbf{V}^{(\ell)}$  (équation (IV.1.4)). La section qui suit s'intéresse donc aux propriétés de cette matrice de covariance, dans le cadre du modèle de signal formulé ici.

## IV.2.6 Covariance des données

L'estimation des matrices  $\mathbf{\Pi}^q$  dans (IV.2.33) suppose la connaissance de la matrice pilote  $\mathbf{V}^{(\ell)}$  (IV.2.25). Cependant, celle-ci est inconnue puisque donnée par les vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$  que l'on cherche à déterminer. La méthode ESPRIT contourne le problème en se servant du second moment des données  $\tilde{\mathbf{u}}(n)$  pour estimer le sous-espace image de  $\mathbf{V}^L$ .

Le second moment des données est représenté sous la forme d'une matrice de covariance dont on se propose d'étudier les propriétés dans cette section.

**Definition IV.2.16** (Matrice de Covariance). Soit  $\mathbf{C}_{yy} \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$  la matrice de covariance des variables  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^\ell$  telle que :

$$\mathbf{C}_{yy} = \text{covar}(\mathbf{y}) = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{y}(n)^H \mathbf{y}(n) \right\} \quad (\text{IV.2.36})$$

où  $n$  dénote les différentes observations de  $\mathbf{y}$ .

Les paragraphes qui suivent sont divisés en deux parties. Tout d'abord, on étudie les propriétés du *sous-espace signal*, associé aux  $R$  vecteurs propres dominants de la matrice de covariance. Ensuite, on présente la méthode qui permet d'identifier les vecteurs d'onde paramétrant le signal, qui passe par l'estimation de *matrices spectrales* à partir de ce sous-espace.

### IV.2.6.1 Sous-espace signal

On définit tout d'abord la décomposition en sous-espace d'une matrice de covariance associée à des données quelconques  $\mathbf{y}$  non bruitées.

**Proposition IV.2.8** (Décomposition en sous-espaces). La matrice de covariance étant symétrique hermitienne, elle accepte la décomposition aux valeurs propres suivante :

$$\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}^H \mathbf{W} + \mathbf{W}_\perp \mathbf{\Lambda}_\perp^H \mathbf{W}_\perp \quad (\text{IV.2.37})$$

où  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{R'}] \in \mathbb{C}^{\ell \times R'}$  est le sous-espace principal lié aux valeurs principales strictement positives  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}) \in \mathbb{R}_+^{R'}$  et  $\mathbf{W}_\perp \in \mathbb{C}^{\ell \times (\ell - R')}$  est le sous-espace singulier lié aux valeurs singulières nulles  $\mathbf{\Lambda}_\perp = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_\perp) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{\ell - R'}$ .  $R' \leq \ell$  est le rang effectif de  $\mathbf{C}_{yy}$ .

Les valeurs propres  $\mathbf{\Lambda}_\perp$  sont ici nulles car les données  $\mathbf{y}$  sont supposées non bruitées ; cela entraîne également le fait que le choix des vecteurs propres singuliers associés  $\mathbf{W}_\perp$  est arbitraire.

*Remarque IV.2.10.* Ici, le rang effectif  $R'$  correspond au nombre de sources *décorrélées* qui contribuent aux variables  $\mathbf{y}$ . En effet, la décomposition en valeurs principales de la matrice de covariance sépare les sources *décorrélées* : les vecteurs propres  $\mathbf{W}$  sont orthogonaux. On note que certaines versions de l'algorithme ESPRIT (Higher-Order ESPRIT [54]) utilisent le moment statistique d'ordre 4 (type *kurtosis*), dont la décomposition en valeurs principales sépare les sources *indépendantes*.

Le succès des méthodes inverses basées sur la décomposition en sous-espaces est en grande partie due à la faible perturbation du sous-espace  $\mathbf{W}$  par un bruit additionnel gaussien.

**Propriété IV.2.1** (Résistance au bruit blanc). *Soit la matrice de covariance  $\tilde{\mathbf{C}}_{yy}$  construite à partir des variables bruitées  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$ . Si le processus  $\Delta\mathbf{y}(n)$  est gaussien centré uniforme de variance  $\sigma^2$ , alors  $\tilde{\mathbf{C}}_{yy} = \mathbf{C}_{yy} + \sigma^2 \mathbf{I}$  et on remarque que :*

$${}^H \mathbf{w}_r (\mathbf{C}_{yy} - \lambda_r \mathbf{I}) \mathbf{w}_r = {}^H \mathbf{w}_r (\tilde{\mathbf{C}}_{yy} - (\lambda_r + \sigma^2) \mathbf{I}) \mathbf{w}_r = 0 \quad (\text{IV.2.38})$$

d'où les  $R'$  vecteurs propres principaux de  $\mathbf{C}_{yy}$  et de  $\tilde{\mathbf{C}}_{yy}$  coïncident et  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} + \sigma^2$ .

Le sous-espace principal  $\mathbf{W}$  est donc peu sensible à un bruit gaussien additif ; associé aux  $R'$  plus grandes valeurs propres  $\boldsymbol{\lambda}$ , il est communément appelé *sous-espace signal*. Par opposition,  $\mathbf{W}_\perp$  est appelé *sous-espace bruit*, même si certains auteurs préfèrent conserver l'appellation de *sous-espace orthogonal*, car la propriété de résistance au bruit reste limitée au cas d'une perturbation  $\Delta\mathbf{y}(n)$  gaussienne centrée uniforme.

Jusqu'ici, les variables  $\mathbf{y}$  ont été supposées quelconques. On s'intéresse maintenant à la matrice de covariance des données  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  disponibles pour l'identification des paramètres du modèle de signal. Ces données sont en l'occurrence régies par le modèle de signal (IV.2.26) ; la forme de la matrice de covariance associée est donc connue.

**Proposition IV.2.9** (Modèle de covariance). *La matrice de covariance des données non bruitées  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}} = \mathbb{E} \{ \bar{\mathbf{u}}(n) {}^H \bar{\mathbf{u}}(n) \} \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{L}}] \times [\bar{\mathbf{L}}]}$  (IV.2.17) s'exprime sous la forme suivante :*

$$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}} = \mathbf{V}^{\mathbf{L}} \mathbb{E} \{ \mathbf{a}(n) {}^H \mathbf{a}(n) \} {}^H \mathbf{V}^{\mathbf{L}} \quad (\text{IV.2.39})$$

La matrice  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}$  est donc engendrée par la matrice pilote  $\mathbf{V}^{\mathbf{L}}$ , ce qui entraîne la propriété suivante.

**Propriété IV.2.2** (Matrice de transfert). *Si  $R' = R$ , la matrice  $\mathbf{W}$  des vecteurs principaux de  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}$  (IV.2.37) est une base orthonormée de l'espace image de la matrice pilote  $\mathbf{V}^{\mathbf{L}}$ , autrement dit  $\text{span}(\mathbf{W}) = \text{span}(\mathbf{V}^{\mathbf{L}})$ . Il existe donc une relation de transfert entre ces deux matrices, soit  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{R \times R}$  :*

$$\mathbf{W} \mathbf{T} = \mathbf{V}^{\mathbf{L}} \quad (\text{IV.2.40})$$

La propriété ci-dessus est fondamentale pour l'application de la méthode ESPRIT. Elle n'est bien sûr exacte seulement sur les données non bruitées ; dans le cas du sous-espace signal  $\tilde{\mathbf{W}}$  estimé à partir de la covariance des données bruitées  $\tilde{\bar{\mathbf{u}}}(n)$ , elle constitue seulement une approximation. Toutefois, la faible sensibilité du sous-espace signal au bruit permet de considérer que cette approximation est raisonnable.

#### IV.2.6.2 Matrices spectrales élémentaires

La propriété (IV.2.40) est utilisée dans ESPRIT pour estimer les vecteurs d'onde à partir de  $Q$  relations d'invariance rotationnelle (IV.2.33). En effet, on a l'expression :

$$\boldsymbol{\Pi}^q = \text{diag}(\boldsymbol{\pi}^q) = (\mathbf{V}_{\uparrow q}^{\mathbf{L}})^\dagger \mathbf{V}_{\downarrow q}^{\mathbf{L}} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\mathbf{L}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\mathbf{L}} \mathbf{W}) \mathbf{T} \quad (\text{IV.2.41})$$

dans laquelle on reconnaît une décomposition en valeurs propres. On définit alors les matrices spectrales comme suit.

**Proposition IV.2.10** (Matrices spectrales). *Soit  $Q$  matrices spectrales  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$  telles que :*

$$\mathbf{F}^{\mathbf{q}} = \left( \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{\mathbf{L}} \mathbf{W} \right)^{\dagger} \left( \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{\mathbf{L}} \mathbf{W} \right) = \mathbf{T} \mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}} \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{IV.2.42})$$

où les valeurs propres de  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{R \times R}$  données par  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}} = \text{diag}(\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}})$  contiennent une projection des vecteurs d'onde à identifier (IV.2.6).

Il est donc possible d'estimer les matrices polaires  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}}$  à partir du sous-espace signal  $\mathbf{W}$ . Toutefois, l'utilisation directe de la relation (IV.2.42) pose deux problèmes :

- L'ordre des valeurs propres  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}}$  de  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$  est arbitraire. Puisque l'estimation finale des vecteurs d'onde implique plusieurs vecteurs  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}}$  (IV.2.35), ceux-ci doivent être réordonnés. Des stratégies basées sur l'observation des vecteurs propres  $\mathbf{T}$  ont été proposées [97] mais peuvent mener à de faux résultats.
- Les vecteurs d'onde sont distincts, mais pas forcément leurs composantes ( $\forall i \neq j, \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j \neq 0$ ) n'équivaut pas à  $k_{d,i} - k_{d,j} \neq 0$ ). Par conséquent, les valeurs propres de  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$  peuvent être de multiplicité supérieure à un, ce qui pose le problème de l'unicité de  $\mathbf{T}$ .

Conséquence de la possible multiplicité des composantes des vecteurs d'onde, les techniques classiques de diagonalisation jointe ne peuvent s'appliquer dans le cas général pour déterminer les vecteurs propres communs  $\mathbf{T}$ . Il est donc nécessaire de recourir à des techniques différentes.

### IV.2.6.3 Matrice spectrale combinée

La solution appliquée ici pour pallier au problème de multiplicité des composantes des vecteurs d'onde suit celle proposée dans [188]. Elle passe par la décomposition en valeurs propres d'une combinaison des  $Q$  matrices spectrales  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$ .

**Proposition IV.2.11** (Matrice spectrale combinée). *Soit  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{C}^{R \times R}$  une combinaison linéaire des  $Q$  matrices spectrales  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$  et les coefficients distincts et non nuls  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^Q$ . Alors on a :*

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_n^Q \xi_n \mathbf{F}^{\mathbf{q}_n} = \mathbf{T} \left( \sum_n^Q \xi_n \mathbf{\Pi}^{\mathbf{q}_n} \right) \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{IV.2.43})$$

Ainsi, la matrice  $\mathbf{T}$  peut être estimée par le biais de la décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{\Gamma}$ , dont l'unicité est démontrée dans ce qui suit.

**Proposition IV.2.12** (Unicité de  $\mathbf{T}$ ). *La décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{\Gamma}$  est unique (modulo l'agencement des vecteurs propres) si  $\forall i \neq j$ , on a  $\gamma_i \neq \gamma_j$ , avec :*

$$\gamma_r = \sum_n^Q \xi_n \pi_r^{\mathbf{q}_n} \quad (\text{IV.2.44})$$

De plus, un choix aléatoire des  $\boldsymbol{\xi}$  satisfait cette condition presque sûrement.

*Démonstration.* On peut interpréter  $\gamma_r$  comme la projection de  $\boldsymbol{\xi}$  sur  $\boldsymbol{\chi}_r = {}^{\top}[\pi_r^{\mathbf{q}_1} \dots \pi_r^{\mathbf{q}_Q}]$ . D'où  $\gamma_i - \gamma_j = {}^{\top}\boldsymbol{\xi} (\boldsymbol{\chi}_i - \boldsymbol{\chi}_j) = 0$  implique soit  $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_j$ , ce qui est impossible, soit l'orthogonalité de  $\boldsymbol{\xi}$  par rapport à  $\boldsymbol{\chi}_i - \boldsymbol{\chi}_j$ , ce qui est très peu probable.  $\square$



En conséquence, la décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{\Gamma}$  est quasiment assurée et permet de déterminer la matrice de passage  $\mathbf{T}$  de façon unique. On peut alors finalement estimer les matrices polaires  $\mathbf{\Pi}^a = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}^a \mathbf{T}$  (par inversion de (IV.2.42)) puis procéder à l'extraction des vecteurs d'onde (IV.2.35).

Cette démarche permet de régler les deux problèmes soulevés précédemment : (1) La matrice  $\mathbf{T}$  n'est déterminée qu'une seule fois, ce qui fait disparaître le problème d'appariement des valeurs propres des différentes matrices spectrales ; (2) les valeurs propres  $\gamma$  de  $\mathbf{\Gamma}$  sont toutes distinctes, même si certains vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  ont des composantes en commun.

L'estimation des vecteurs d'onde est donc formulée dans l'algorithme ESPRIT sur le sous-espace signal  $\mathbf{W}$  calculé à partir de la covariance  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}$  des données  $\bar{\mathbf{u}}(t)$ . Cependant, la covariance des données n'est pas disponible en pratique ; il est donc nécessaire de l'estimer à partir des données disponibles.

## IV.2.7 Estimateurs de la covariance

Dans cette section sont définis trois estimateurs de la covariance des données, adaptés à l'estimation des vecteurs d'onde par la méthode ESPRIT proposée. Tout d'abord, l'estimation directe de la covariance à partir de la matrice des données (IV.2.24) est étudiée. Il est montré que cet estimateur dégénère sous certaines conditions. La technique dite de *lissage spatial* est alors introduite ; elle permet de rétablir le rang de la covariance estimée, voire d'estimer la covariance à partir d'une observation unique du signal ( $N = 1$ ). Enfin, un nouvel estimateur *décimé* est proposé, qui permet de réduire la taille de la matrice de covariance, afin de réduire la complexité de sa décomposition en valeurs principales (IV.2.37).

A chaque fois, les estimateurs proposés sont exprimés sur les données non bruitées  $\bar{\mathbf{U}}$  (IV.2.26). Les modèles associés ne sont donc exacts que lorsque le signal n'est pas perturbé ; dans le cas contraire, ils constituent une approximation, justifiée par la faible sensibilité de l'espace signal à un bruit gaussien uniforme additionnel.

### IV.2.7.1 Estimation directe sur les réalisations

La première proposition consiste à estimer la covariance directement sur les données brutes  $\bar{\mathbf{U}}$  (IV.2.26). L'espérance des variables  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  dans l'expression de la matrice de covariance (IV.2.36) est donc estimée au sens de la moyenne sur les  $N$  observations  $\{\bar{\mathbf{u}}(1), \dots, \bar{\mathbf{u}}(N)\}$  obtenues à partir de la mesure des différentes composantes du champ vectoriel  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  en différents points  $\mathbf{p}$  (IV.2.2).

**Definition IV.2.17** (Estimateur direct). *On définit l'estimateur  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}} \in \mathbb{C}^{[\bar{L}] \times [\bar{L}]}$  de la façon suivante :*

$$\boxed{\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}} = \frac{1}{N} \bar{\mathbf{U}}^H \bar{\mathbf{U}}} \quad (\text{IV.2.45})$$

qui, lorsque le nombre d'observations  $N \rightarrow \infty$ , est un estimateur non biaisé de (IV.2.39).

En injectant le modèle de signal (IV.2.26) dans (IV.2.45), il vient :

$$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}} = \frac{1}{N} \mathbf{V}^L \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{V}^L \quad (\text{IV.2.46})$$

Ce qui nous donne une indication sur le rang  $R'$  de  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}$  et donc de l'espace signal :

$$R' = \text{rg}(\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}) = \text{rg}(\mathbf{W}) \leq \min(\text{rg}(\mathbf{V}^L), \text{rg}(\mathbf{A})) \quad (\text{IV.2.47})$$



Si les  $R$  vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  sont distincts deux à deux ( $\forall j \neq i, \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j \neq \mathbf{0}$ ) et  $\lfloor \mathbf{L} \rfloor \geq R$ , alors la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^{\mathbf{L}}$  est de rang  $R$ . Deux cas de figure se présentent alors :

- $\text{rg}(\mathbf{A}) \geq R$  : alors il est possible d'obtenir un espace signal  $\mathbf{W}$  d'ordre  $R$  et d'estimer les  $R$  vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$ .
- $\text{rg}(\mathbf{A}) < R$  : alors il est impossible de séparer les  $R$  composantes du signal et d'en identifier les paramètres.

La deuxième situation est fréquemment rencontrée pour au moins deux raisons :

- Un nombre réduit d'observations  $N < R$  est disponible : peu de composantes du signal sont mesurables et/ou en peu de points  $\mathbf{p}$ . Or  $\text{rg}(\mathbf{A}) \leq \min(R, N)$  d'où  $\text{rg}(\mathbf{A}) < R$ .
- Les amplitudes  $\mathbf{a}(n)$  sont corrélées : les coefficients  $\|\mathbf{a}(n)\mathbf{a}(m)\|/\|\mathbf{a}(n)\|\|\mathbf{a}(m)\|$  tendent vers 1. Dans ce cas  $\mathbf{A}$  dégénère et son rang diminue en conséquence.

Si  $\text{rg}(\mathbf{A}) < R$ , alors l'estimateur direct (IV.2.45) ne permet pas d'identifier correctement les paramètres du signal. Pour pallier à ce problème, la technique de *lissage spatial* peut être utilisée.

#### IV.2.7.2 Lissage spatial

Le lissage spatial ou *spatial smoothing* [201] est une technique qui permet de rétablir le rang de la matrice de covariance des données en présence de peu d'observations  $N$  du signal ou de sources fortement corrélées.

Cette technique utilise le fait que les relations d'invariance rotationnelle (IV.2.32) sont indépendantes de la taille  $\ell$  de la grille de mesure utilisée. Le lissage spatial consiste donc à exprimer ces relations d'invariance rotationnelle sur des grilles de mesure *réduites*, de taille  $\mathbf{K} \leq \mathbf{L}$ . À partir de la grille complète  $\mathcal{X}$  de taille  $\mathbf{L}$ ,  $[\mathbf{M}]$  grilles partielles *chevauchantes* de taille  $\mathbf{K}$  peuvent être définies, avec :

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} + \mathbf{K} - 1 \quad (\text{IV.2.48})$$

Les données extraites de chaque grille sont alors prises considérées comme des observations indépendantes du signal, et utilisées pour estimer la matrice de covariance.

*Remarque IV.2.11.* On veillera à ne pas confondre le nombre  $M_d$  de sous grilles prises dans chaque dimension  $d$ ,  $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_D]$ , avec les matrices des indices  $\mathbf{M}_e^{(\ell)}$  et  $\mathbf{M}_c^{(\ell)}$  définies à l'équation (IV.2.15). De même, on veillera à ne pas confondre la taille  $K_d$  des sous grilles selon chaque dimension  $d$ ,  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \dots \mathbf{K}_D]$  avec la matrice  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}^e \ \mathbf{K}^c]$  contenant les vecteurs d'onde à identifier.

**Matrice des données lissée** On définit tout d'abord les matrices de sélection permettant d'extraire de la matrice des données  $\bar{\mathbf{U}}$  les lignes correspondant aux points appartenant aux différentes grilles réduites. Celles-ci sont paramétrées par les tailles quelconques  $\ell$ , qui permettront plus loin de les utiliser avec la technique de décimation.

**Définition IV.2.18** (Matrices de lissage). Soient les  $[\mathbf{M}] = \mathbf{M}_1 \times \dots \times \mathbf{M}_D$  matrices de sélection  $\mathbf{J}_m^{SS,(\ell)} \in \mathbb{N}^{[\ell] \times [\mathbf{L}]}$ ,  $m_d \in 0 \dots M_d - 1$  définies comme suit :

$$\mathbf{J}_m^{SS,(\ell)} = \mathbf{J}_{SS}^1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{SS}^D \quad (\text{IV.2.49})$$

$$\mathbf{J}_{SS}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{\ell_d \times m_d} & \mathbf{I}^{\ell_d} & \mathbf{0}^{\ell_d \times (L_d - \ell_d - m_d)} \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{\ell_d \times L_d}$$

Ces matrices de lissage permettent de définir l'opérateur de lissage, qui transforme le vecteur des données  $\mathbf{u}(n)$  (IV.2.13) en une matrice contenant les éléments les vecteurs de données pris sur toutes les grilles réduites.

**Definition IV.2.19** (Matrice des données lissée). Soit  $\mathbf{U}^{(\ell)}(n) \in \mathbb{C}^{[\ell] \times [\mathbf{M}]}$  la matrice partielle des données, contenant le vecteur des données non modifié  $\mathbf{u}(n)$  pris sur les  $[\mathbf{M}]$  grilles réduites, telle que :

$$\mathbf{U}^{(\ell)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{[0,0,\dots,0,0]}^{SS,(\ell)} \mathbf{u}(n) & \dots & \mathbf{J}_{[0,0,\dots,0,M_D-1]}^{SS,(\ell)} \mathbf{u}(n) & \mathbf{J}_{[0,0,\dots,1,0]}^{SS,(\ell)} \mathbf{u}(n) & \dots & \mathbf{J}_{[M_1-1,\dots,M_D-1]}^{SS,(\ell)} \mathbf{u}(n) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2.50})$$

d'où la matrice complète des données lissée  $\mathbf{U}_{SS}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{[\ell] \times ([\mathbf{M}])^N}$ , construite à partir de l'assemblage des  $N$  matrices partielles, est telle que :

$$\mathbf{U}_{SS}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(\ell)}(1) & \dots & \mathbf{U}^{(\ell)}(N) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2.51})$$

Pour exprimer le modèle correspondant, on se replace dans le cas où  $\ell = \mathbf{K}$ . On peut alors construire la matrice des données lissée et modifiée  $\bar{\mathbf{U}}_{SS} = \bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{K}} \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] \times [\mathbf{M}]^N}$  avec  $\bar{\mathbf{J}}^{(\ell)}$  telle que définie en (IV.2.24). L'expression de cette matrice peut alors être dérivée à partir du modèle du vecteur des données  $\mathbf{u}(n)$  (IV.2.14).

**Proposition IV.2.13** (Modèle de signal lissé). La matrice des données lissée  $\bar{\mathbf{U}}_{SS}$  peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_{SS} &= \mathbf{V}^{\mathbf{K}} \mathbf{A}^{SS} \\ \mathbf{A}^{SS} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{SS}(1) & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{SS}(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{R \times [\mathbf{M}]^N} \\ \bar{\mathbf{A}}^{SS}(n) &= \text{diag}(\beta(n))^\top \bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}(t) \in \mathbb{C}^{R \times [\mathbf{M}]} \end{aligned} \quad (\text{IV.2.52})$$

où la matrice pilote modifiée  $\bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}(t) \in \mathbb{C}^{[\mathbf{M}] \times R}$  est construite de la façon suivante :

$$\bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}(n) = 2 \left[ \exp(i \mathbf{M}_e^{\mathbf{M}} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e) \circ \cos \left( \left( \mathbf{1}^{[\mathbf{M}]} \boxtimes {}^\top \bar{\mathbf{K}}^c + \mathbf{M}_c^{\mathbf{M}} \right) \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c + \mathbf{1}^{[\mathbf{M}]} \boxtimes {}^\top \phi(n) \right) \right]$$

*Démonstration.* Voir annexe G.1.2.  $\square$

La matrice des données lissée et modifiée est donc générée par une matrice de Vandermonde composée de  $[\bar{\mathbf{K}}] \leq [\bar{\mathbf{L}}]$  lignes, qui possède en conséquence toutes les propriétés d'invariance (IV.2.32) utiles pour l'estimation des vecteurs d'onde (IV.2.35).

**Estimateur de covariance lissé** L'utilisation des  $[\mathbf{M}]$  grilles réduites permet d'augmenter virtuellement le nombre d'observations du signal disponibles ( $N' = N[\mathbf{M}]$ ). Il devient donc possible de formuler un estimateur de la covariance des données à partir de ces  $N'$  observations.

**Definition IV.2.20** (Estimateur lissé). On définit l'estimateur lissé de la covariance  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS} \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] \times [\bar{\mathbf{K}}]}$  comme suit :

$$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS} = \frac{1}{[\mathbf{M}]^N} \bar{\mathbf{U}}_{SS}^H \bar{\mathbf{U}}_{SS} \quad (\text{IV.2.53})$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \mathbf{L} - 1$ .

La formulation de l'estimateur *lissé* est générale ; elle englobe notamment l'estimateur direct (IV.2.45), qui est retrouvé en posant  $\mathbf{M} = \mathbf{1}$ , d'où  $\mathbf{K} = \mathbf{L}$ .

A partir du modèle de la matrice des données lissé (IV.2.52), il est possible de donner l'expression de l'estimateur lissé appliqué aux données non perturbées.

**Proposition IV.2.14** (Modèle de covariance lissée). *L'estimateur  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS}$  s'exprime comme suit :*

$$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS} = \frac{1}{[\mathbf{M}]_N} \mathbf{V}^{\mathbf{K}} \left( \sum_t^N \bar{\mathbf{A}}^{SS}(n)^H \bar{\mathbf{A}}^{SS}(t) \right)^H \mathbf{V}^{\mathbf{K}} \quad (\text{IV.2.54})$$

De nouveau, si  $R' = R$ , l'expression ci-dessus montre que les vecteurs propres principaux  $\mathbf{W}$  (IV.2.37) de la matrice de covariance lissée et la matrice pilote  $\mathbf{V}^{\mathbf{K}}$  décrivent le même sous-espace. De façon équivalente à (IV.2.40), la propriété  $\mathbf{W}\mathbf{T} = \mathbf{V}^{\mathbf{K}}$ , essentielle pour l'identification des vecteurs d'onde, est vérifiée.

*Remarque IV.2.12.* Puisque  $[\bar{\mathbf{K}}] \leq [\bar{\mathbf{L}}]$ , l'estimation des matrices spectrales  $\mathbf{F}^q$  (IV.2.42) est faite sur un nombre plus restreint d'équations, ce qui peut avoir des effets sur la performance de l'algorithme. L'effet du lissage sur la performance de ESPRIT est étudiée à la section IV.3.

**Proposition IV.2.15** (Rang de l'estimateur adouci). *Si les  $R$  vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  sont distincts deux à deux, alors le rang  $R'$  de  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS}$  est donné par l'inégalité suivante :*

$$R' \leq \min(R, [\bar{\mathbf{K}}], N[\mathbf{M}]) \quad (\text{IV.2.55})$$

*Démonstration.* L'estimateur adouci (IV.2.53) est le résultat du produit de la somme des matrices  $\bar{\mathbf{A}}^{SS}(t)$  et de la matrice pilote  $\mathbf{V}^{\mathbf{K}}$ , soit  $\text{rg}(\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS}) \leq \min\left(\text{rg}\left(\sum_t \bar{\mathbf{A}}^{SS}(n)^H \bar{\mathbf{A}}^{SS}(n)\right), \text{rg}(\mathbf{V}^{\mathbf{K}})\right)$ . Si les vecteurs d'onde sont tous distincts,  $\mathbf{V}^{\mathbf{K}}$  est de rang  $R_v \leq \min(R, [\mathbf{K}])$ . La matrice  $\bar{\mathbf{A}}^{SS}(n)$ , quant à elle, est définie par le produit de la matrice diagonale  $\text{diag}(\underline{\beta}(n))$  et de la matrice pilote modifiée  $\bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}$ . Une matrice diagonale à valeurs non nulles est toujours de rang plein, d'où  $\text{rg}(\bar{\mathbf{A}}^{SS}(n)) \leq \min(R, [\mathbf{M}])$ . Finalement, on retrouve (IV.2.55) en utilisant le fait que le rang d'une somme est inférieur ou égal à la somme des rangs.  $\square$

La conséquence du résultat ci-dessus est le rétablissement de l'ordre de l'estimateur de la covariance, dans des situations où l'estimateur direct (IV.2.45) est dégénéré (i.e  $N < R$  ou  $\text{rg}(\mathbf{A}) < R$ ). La technique de lissage spatial permet donc d'appliquer la méthode ESPRIT même lorsqu'une seule observation du signal  $\bar{\mathbf{u}}(n)$  est disponible. Cette caractéristique est primordiale pour certaines des applications visées dans ce travail, pour lesquelles une seule composante du champ vectoriel peut être mesurée, à un seul point  $\underline{\mathbf{p}}$  (c'est le cas de l'analyse en vecteurs d'onde proposée au chapitre VII).

**Structure de Hankel par blocs** Une particularité importante de la matrice des données non modifiées lissée  $\mathbf{U}_{SS}^{(\ell)}(n)$  (IV.2.50) réside dans sa structure de Hankel par blocs [191]. La prise en compte de cette structure particulière permet d'utiliser les propriétés qui y sont associées. Par exemple, le produit de deux matrices de Hankel construites à partir du même signal est équivalent au calcul du produit d'auto-corrélation de ce signal ; ou encore, un produit matrice de Hankel-vecteur n'est rien d'autre qu'un produit de convolution réalisé entre deux vecteurs. Ces propriétés permettent de simplifier certaines expressions ; elles sont appliquées à la section IV.3, dans laquelle les performances de la méthode ESPRIT sont étudiées. Elles sont également

intéressantes du point de vue de l'implémentation, car un produit de convolution représente un nombre réduit d'opérations par rapport à un produit matrice-vecteur, d'autant plus s'il est réalisé dans l'espace de Fourier.

Pour ces raisons, la structure de Hankel par blocs de la matrice des données lissée est explicitée ici.

**Definition IV.2.21** (Matrice de Hankel par blocs). *A partir du tableau  $\mathbf{U}(n)$  contenant les données de la  $n^{\text{ième}}$  observation du signal (IV.2.6), il est possible de définir une matrice de Hankel par blocs de façon récursive ; soient les  $(\ell_1 \times \dots \times \ell_{D-1} \times (\mathbf{L}_1 - \ell_1 + 1) \times \dots \times (\mathbf{L}_{D-1} - \ell_{D-1} + 1))$  matrices de Hankel  $\mathbf{H}_{(m_1, \dots, m_{D-1})}^{(\ell)}(n)$  associées à la  $D^{\text{ième}}$  dimension de  $\mathbf{U}(n)$  telles que :*

$$\mathbf{H}_{(m_1, \dots, m_{D-1})}^{(\ell)}(n) = \mathbf{H}_{\mathbf{v}^{(m_1, \dots, m_{D-1})}(n)}^{\ell_D \times (\mathbf{L}_D - \ell_D + 1)} \\ \mathbf{v}^{(m_1, \dots, m_{D-1})}(n) = [\mathcal{U}_{[m_1, \dots, m_{D-1}, 0]}(n) \quad \dots \quad \mathcal{U}_{[m_1, \dots, m_{D-1}, \mathbf{L}_D - 1]}(n)]$$

ou on a défini la matrice de Hankel  $\mathbf{H}_{\mathbf{h}}^{M \times N}$  en (IV.1.24). Alors, par récursion, on construit les  $(\ell_1 \times \dots \times \ell_{d-1} \times (\mathbf{L}_1 - \ell_1 + 1) \times \dots \times (\mathbf{L}_{d-1} - \ell_{d-1} + 1))$  matrices  $\mathbf{H}_{m_1, \dots, m_{d-1}}^{(\ell)}$  à partir des matrices de Hankel associées à la dimension  $d$  de  $\mathbf{U}(n)$  :

$$\mathbf{H}_{m_1, \dots, m_{d-1}}^{(\ell)}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{m_1, \dots, m_{d-1}, 0}^{(\ell)}(n) & \dots & \mathbf{H}_{m_1, \dots, m_{d-1}, \mathbf{L}_d - \ell_d}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{m_1, \dots, m_{d-1}, \ell_d - 1}^{(\ell)}(n) & \dots & \mathbf{H}_{m_1, \dots, m_{d-1}, \mathbf{L}_d - 1}^{(\ell)}(n) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2.56})$$

pour obtenir finalement la matrice de Hankel par blocs  $\mathbf{H}^{(\ell)}(n) \in \mathbb{C}^{[\ell] \times [\mathbf{L} - \ell + 1]}$

**Propriété IV.2.3** ([191]). *La matrice de hankel par blocs  $\mathbf{H}(n)$  définie en (IV.2.56) est égale à la matrice  $\mathbf{U}^{(\ell)}(n)$  (IV.2.50). De même, on a l'égalité suivante :*

$$\boxed{\mathbf{H}_T^{(\ell)} = [\mathbf{H}^{(\ell)}(1) \quad \dots \quad \mathbf{H}^{(\ell)}(N)] = \mathbf{U}_{SS}^{(\ell)}} \quad (\text{IV.2.57})$$

où la matrice complète des données lissée  $\mathbf{U}_{SS}$  a été définie en (IV.2.51).

La structure de Hankel par blocs de la matrice des données lissée est utilisée dans les sections suivantes, pour le calcul des variances des estimations (expression (IV.3.16)) ; elle peut également mise à profit afin de diminuer le coût de calcul associé à l'estimation de la matrice de covariance [11].

La technique de lissage spatial permet donc d'identifier les paramètres du signal même lorsque peu d'observations du signal sont disponibles ou lorsque les données issues de ces observations sont très corrélées les unes aux autres. Cependant, elle entraîne irrémédiablement une augmentation de la taille de la matrice des données, due au fait que les grilles réduites considérées comme des observations indépendantes se chevauchent ; les données associées aux points de chevauchement sont donc répliquées (d'où la structure de Hankel par blocs de la matrice des données lissée). Le coût de calcul nécessaire pour l'application de la méthode ESPRIT peut donc rapidement augmenter avec la quantité de données disponibles, un cas de figure souvent rencontré dans les mesures auxquelles ce travail s'intéresse (fréquence d'échantillonnage élevée, résolution spatiale fine, etc.). Pour pallier à cette augmentation du coût de calcul, une technique de décimation est proposée dans ce qui suit.

### IV.2.7.3 Décimation

La recherche de l'espace signal  $\mathbf{W}$  à partir de la matrice de covariance estimée (IV.2.37) est une opération qui peut devenir très coûteuse lorsque la taille celle-ci augmente. Tout d'abord, le calcul de  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS}$  (IV.2.53) implique  $\mathcal{O}([\mathbf{K}]^2[\mathbf{M}]N)$  multiplications. Ensuite, sa décomposition en valeurs propres implique  $\mathcal{O}([\mathbf{K}]^3)$  multiplications. Le choix de  $\mathbf{K}$  est donc critique en ce qui concerne le coût de calcul de l'algorithme. En outre, il est montré dans la section suivante que, dans un cas simple, le choix optimal de la taille des grilles réduites est tel que  $\mathbf{K} \in [\mathbf{L}/3; \mathbf{L}/2]$  (voir section IV.3, figure IV.3). Le coût de calcul tend alors à augmenter avec le cube du nombre de points de mesure  $[\mathbf{L}]$ . Puisque les applications envisagées peuvent impliquer des grilles de grande taille, il peut être nécessaire de mettre en œuvre une stratégie de *décimation* de l'estimateur de covariance lissé (IV.2.53), permettant de réduire le rapport  $[\mathbf{K}]/[\mathbf{L}]$  et ainsi d'accélérer l'identification des vecteurs d'onde par la méthode ESPRIT.

Différentes stratégies de décimation du signal ont pu être envisagées dans de précédentes applications de l'algorithme ESPRIT. Il est par exemple proposé dans [11, 70] de réaliser un pré-filtrage (passe-bas) du signal, suivi d'une sélection partielle des données. Cette technique, peu coûteuse, pose cependant quelques problèmes : (1) sur des signaux courts, les effets de bords dus au pré-filtrage peuvent entraîner un biais sur l'estimation des vecteurs d'onde ; (2) le choix du filtre (ordre, fréquence de coupure) est critique ; (3) seulement une partie des données est utilisée *in fine*.

La démarche de décimation proposée ici est une généralisation de la proposition faite dans [83] pour le cas d'un signal unidimensionnel. L'étape de pré-filtrage n'est pas *nécessaire* si le critère de Nyquist est respecté et la totalité du signal est utilisée.

**Décimation des grilles** L'idée principale consiste à décimer les grilles réduites utilisées dans la technique de lissage spatial afin de limiter le chevauchement de celles-ci et la duplication des données associées. De nouvelles grilles *décimées et réduites* sont définies à partir du vecteur décimation  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{N}^D$ . Au total,  $[\mathbf{M}]$  grilles de taille  $\mathbf{K}$  sont définies à partir de la grille complète  $\mathcal{X}$  de taille  $\mathbf{L}$  (voir équation (IV.2.4)). Ces différentes tailles sont reliées par la relation :

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} + (\mathbf{K} - \mathbf{1}) \circ \boldsymbol{\delta} \quad (\text{IV.2.58})$$

celle-ci étant équivalente à la relation (IV.2.48) pour  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1}$ . Les grilles réduites et décimées peuvent être construites à partir de matrices de sélection, dont le rôle est d'extraire de la matrice des données non modifiée  $\mathbf{U}$  les lignes correspondant à ces grilles particulières. Ces matrices sont le produit des matrices de sélection  $\mathbf{J}_{\mathbf{m}}^{SS,(\ell)}$  utilisées pour le lissage spatial (en posant  $\ell = \mathbf{K}$ ) avec une matrice dite *de décimation*.

**Définition IV.2.22** (Matrice de décimation). *Soit  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{N}^D$  le vecteur décimation tel que  $\delta_d \geq 1$ . On définit la matrice  $\mathbf{J}^{\boldsymbol{\delta}} \in \mathbb{N}^{[\mathbf{K}] \times [\boldsymbol{\delta}] [\mathbf{K}]}$  telle que :*

$$\boxed{\mathbf{J}^{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{J}^{\delta_1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}^{\delta_D}} \quad (\text{IV.2.59})$$

$$(\mathbf{J}^{\delta_d})_{ij} = [i \times \delta_d = j]$$

A partir de la matrice de décimation ainsi posée peuvent être définies les grilles décimées.

**Definition IV.2.23** (Grilles décimées). On définit  $[\mathbf{M}] = \mathbf{M}_1 \times \dots \times \mathbf{M}_D$  grilles chevauchantes et décimées  $\mathcal{X}_{\mathbf{m}}^\delta$ ,  $\mathbf{m}_d \in 0 \dots \mathbf{M}_d - 1$  telles que :

$$\text{vec}\{\mathcal{X}_{\mathbf{m}}^\delta\} = \mathbf{J}^\delta \mathbf{J}_{\mathbf{m}}^{SS, \mathbf{K}} \text{vec}\{\mathcal{X}\} \quad (\text{IV.2.60})$$

*Remarque IV.2.13* (Critère de Nyquist). Dans la présente formulation de la méthode, le signal est *virtuellement* mesuré sur une grille  $\mathcal{X}^\delta$  décimée de  $\delta$  par rapport à la grille originale  $\mathcal{X}$ . En conséquence, le pas de cette grille est égal à  $\mathbf{h} \circ \delta$ . Le critère de Nyquist impose donc une borne sur les composantes de vecteurs d'onde identifiables sans ambiguïté qui est inférieure au cas décimé ; dans le cas décimé, ce critère devient :

$$\forall d \in \llbracket 1, D \rrbracket \quad , \quad |\mathbf{h}_d \delta_d \mathbf{k}_{d,r}| < \pi \quad (\text{IV.2.61})$$

Des exemples de ces grilles sont donnés sur la figure IV.2, pour différentes positions à l'origine  $\mathbf{m}$  et vecteurs décimation  $\delta$ . Cette figure est commentée plus bas.

**Matrice des données décimée** A partir des grilles définies ci-dessus peut être construite une nouvelle matrice des données, dite *décimée*, qui prend en compte les données extraites de chacune des grilles comme des observations indépendantes.

**Definition IV.2.24** (Matrice des données décimée). On pose  $\overline{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}] \times [\mathbf{M}]}^N$  telle que :

$$\overline{\mathbf{U}}_{SS}^\delta = \mathbf{J}^\mathbf{K} \mathbf{J}^\delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta} \quad (\text{IV.2.62})$$

où  $\mathbf{U}_{SS}^{(\ell)}$  a été définie en (IV.2.51).

Encore une fois, l'expression de cette matrice, construite à partir des données non bruitées, peut être déterminée à partir du modèle de signal matriciel modifié (IV.2.26).

**Proposition IV.2.16** (Modèle signal décimé). La matrice  $\overline{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$  peut s'exprimer comme suit :

$$\overline{\mathbf{U}}_{SS}^\delta = \mathbf{V}_\delta^\mathbf{K} \mathbf{A}^{SS} \quad (\text{IV.2.63})$$

$$\mathbf{V}_\delta^\mathbf{K} = \mathbf{J}^\delta \mathbf{V}^{\mathbf{K} \circ \delta} = \left[ \exp\left(\mathbf{i} \mathbf{M}_e^\mathbf{K} \text{diag}(\mathbf{h}^e \circ \delta^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\mathbf{M}_c^\mathbf{K} \text{diag}(\mathbf{h}^c \circ \delta^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \quad (\text{IV.2.64})$$

où  $\mathbf{A}^{SS}$  est telle que définie en (IV.2.51).

**Estimateur de covariance décimé** De nouveau, un estimateur de la covariance des données peut être défini à partir de la matrice des données décimée. Celui-ci considère que les différentes observations du signal extraites le long des grilles décimées sont issues de réalisations indépendantes de la mesure.

**Definition IV.2.25** (Estimateur décimé). On définit l'estimateur décimé de la covariance  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS, \delta} \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}] \times [\mathbf{K}]}$  comme suit :

$$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS, \delta} = \frac{1}{[\mathbf{M}]N} \overline{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{H} \overline{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \quad (\text{IV.2.65})$$

A partir des expressions (IV.2.51) et (IV.2.65), on peut donner le modèle de l'estimateur construit à partir des données non bruitées.

**Proposition IV.2.17** (Modèle de covariance décimée). *L'estimateur  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS,\delta}$  s'exprime sous la forme suivante :*

$$\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS,\delta} = \frac{1}{[\mathbf{M}]N} \mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}} \left( \sum_n^N \bar{\mathbf{A}}^{SS}(n)^H \bar{\mathbf{A}}^{SS}(n) \right) \mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}} \quad (\text{IV.2.66})$$

Le rang  $R'$  de cet estimateur satisfait la même inégalité que celui de l'estimateur adouci (IV.2.55). Encore une fois, si  $R' = R$ , l'espace principal  $\mathbf{W}$  de cet estimateur décrit l'espace image de la matrice de Vandermonde décimée  $\mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}}$  et il existe une matrice  $\mathbf{T}$  telle que  $\mathbf{W}\mathbf{T} = \mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}}$ .

Toutefois, la matrice de Vandermonde décimée  $\mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}}$  ne respecte pas tout à fait les mêmes relations d'invariance rotationnelle utiles à l'estimation des vecteurs d'onde (IV.2.33). On développe donc dans ce qui suit les nouvelles propriétés d'invariance, qui généralisent celles établies pour le cas sans décimation (IV.2.32).

**Invariance rotationnelle** Comme dans le cas non décimé, les propriétés d'invariance rotationnelle sont exprimées sur la base de deux matrices pilote tronquées (IV.2.32). Celles-ci sont construites à partir des matrices de sélection  $\mathbf{J}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^{\mathbf{K}}$ . La convention choisie pour définir les grilles décimées (IV.2.58) permet de garder inchangée l'expression des matrices pilotes tronquées avec l'introduction de la décimation ; celles-ci s'expriment donc comme suit :

$$\mathbf{V}_{\delta,(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} = \mathbf{J}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}} \quad (\text{IV.2.67})$$

Il est donc possible d'obtenir leur expression en injectant dans les relations ci-dessus l'expression de  $\mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}}$  (IV.2.64). Les relations d'invariance rotationnelle peuvent finalement être obtenues ; la démonstration de celles-ci est en tout point identique au cas non décimé démontré en annexe G.1.1, en effectuant le remplacement  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h} \circ \delta$ .

**Proposition IV.2.18** (Invariance rotationnelle avec décimation). *Les deux matrices pilotes décimées et tronquées  $\mathbf{V}_{\delta,\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}-\bar{\mathbf{q}}] \times R}$  et  $\mathbf{V}_{\delta,\downarrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}-\bar{\mathbf{q}}] \times R}$  sont liées par une relation de récurrence mettant en jeu une nouvelle matrice polaire  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q},\delta} = \text{diag}(\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q},\delta}) \in \mathbb{C}^{R \times R}$  :*

$$\mathbf{V}_{\delta,\downarrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} = \mathbf{V}_{\delta,\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{\Pi}^{\mathbf{q},\delta} \quad (\text{IV.2.68})$$

$${}^{\top}\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q},\delta} = \exp\left(\mathbf{i} {}^{\top}\mathbf{q}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e \circ \delta^e) \mathbf{K}_r^e\right) \circ \cos\left({}^{\top}\mathbf{q}^c \text{diag}(\mathbf{h}^c \circ \delta^c) \mathbf{K}_r^c\right)$$

Cette matrice polaire décimée  $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{q},\delta}$  contenant les valeurs propres de la matrice spectrale associée  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}$  (IV.2.42) :

$$\mathbf{F}^{\mathbf{q}} = \left(\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{W}\right)^{\dagger} \left(\mathbf{J}_{\downarrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{W}\right) = \mathbf{T} \mathbf{\Pi}^{\mathbf{q},\delta} \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{IV.2.69})$$

Comme dans le cas décimé, la matrice de passage  $\mathbf{T}$  est estimée à partir de la décomposition en valeurs propres combinaison linéaire des matrices spectrales  $\mathbf{\Gamma} = \xi_n \mathbf{F}^{\mathbf{q}_n} = \mathbf{T} \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{T}^{-1}$  (IV.2.43).



**Estimation des vecteurs d'onde** Les  $R$  vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  sont estimés, comme dans le cas non décimé (équation (IV.2.35)), à partir d'une collection de vecteurs  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q},\boldsymbol{\delta}}$ . La régression linéaire utilisée prend alors en compte la décimation de la grille.

**Proposition IV.2.19** (Estimation des vecteurs d'ondes avec décimation). *L'estimation des vecteurs d'onde  $\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_R]$  est formulée à partir de  $Q$  relations d'invariance rotationnelle comme suit :*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= -i \mathbf{Q}_\delta^e \ln(\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^e) \\ \mathbf{K}^c &= \mathbf{Q}_\delta^c \arccos(\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^c) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.70})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\delta^e &= \mathbf{Q}_e \text{diag}(\mathbf{h}^e \circ \boldsymbol{\delta}^e) \\ \mathbf{Q}_\delta^c &= \mathbf{Q}_c \text{diag}(\mathbf{h}^c \circ \boldsymbol{\delta}^c) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{Q}_e, \mathbf{Q}_c$  sont définies en (IV.2.34),  $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^e = [\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\delta}} \dots \boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_{Q_e}, \boldsymbol{\delta}}]$  et  $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^c = [\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_{Q_e+1}, \boldsymbol{\delta}} \dots \boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}_Q, \boldsymbol{\delta}}]$ .

Une nouvelle fois, la formulation de la méthode ESPRIT basée sur l'estimateur de covariance décimé est générale ; on retrouve en effet le cas non-décimé en posant  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1}$  ; le cas de la méthode utilisant l'estimateur direct est quant à lui retrouvé en posant  $\mathbf{M} = \mathbf{1}$ .

Pour finir, la contrainte sur le choix des vecteurs translations  $\mathbf{q}$  permettant de respecter le critère de Nyquist est exprimée ; elle prend en compte les pas  $\mathbf{h}$  de la grille de base dans les différentes dimensions spatio-temporelles, le vecteur décimation  $\boldsymbol{\delta}$  choisi, et le vecteur d'onde maximum présent dans le signal (supposé connu).

**Définition IV.2.26** (Choix des paramètres). *Pour éviter l'ambiguïté sur la détermination des composantes des vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$ , les vecteurs translation  $\mathbf{q}$  et décimation  $\boldsymbol{\delta}$  doivent respecter les  $D$  contraintes suivantes :*

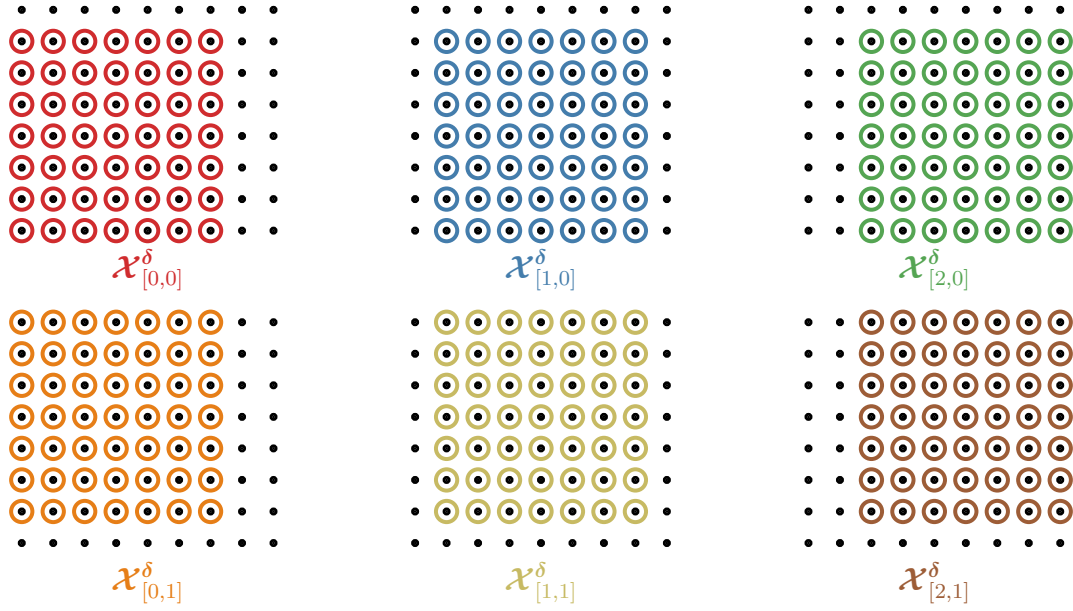
$$\forall d \in \llbracket 1, D \rrbracket \quad , \quad |q_d \times h_d \times \delta_d \times k_d^{\max}| < \pi \quad (\text{IV.2.71})$$

où  $\mathbf{k}^{\max}$  est le vecteur d'onde maximum que l'on souhaite identifier.

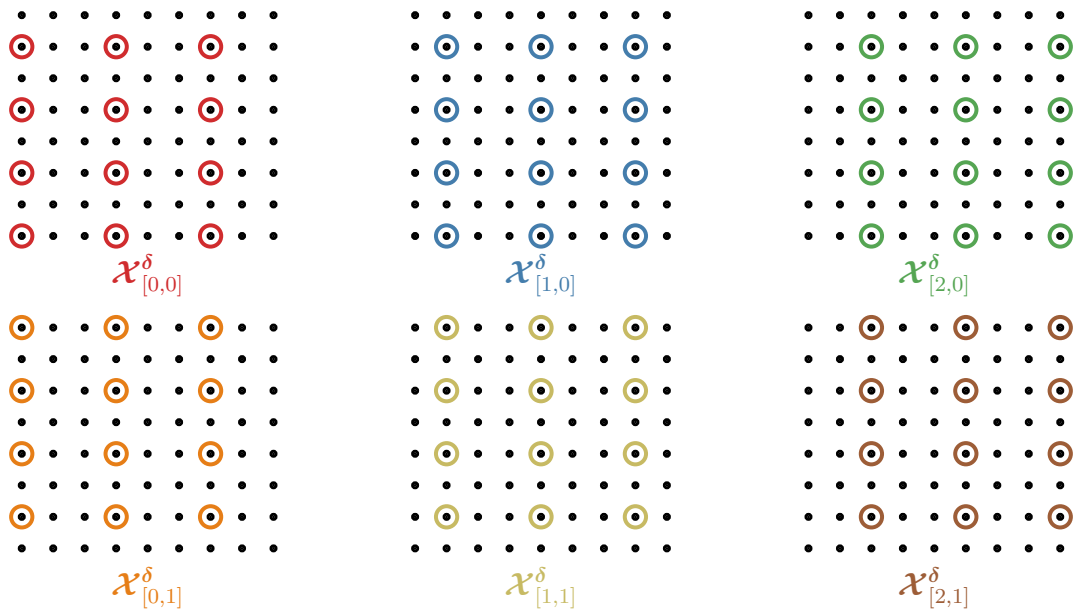
La figure IV.2 illustre les stratégies liées au calcul des estimateurs adouci (IV.2.53) et décimé (IV.2.65), pour une grille  $\mathcal{X}$  de taille  $\mathbf{L} = [9 \ 8]$ . Les légendes  $\mathcal{X}_{\mathbf{m}}^\delta$  correspondent à la définition des grilles réduites et décimées (IV.2.60).

- Lissage spatial uniquement ( $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1}$ ), avec  $\mathbf{K} = [7 \ 7]$  et  $\mathbf{M} = [32]$ . Les six grilles partielles représentées sont considérées comme des observations indépendantes du signal. En conséquence, de nombreux points sont pris en compte *plusieurs fois* pour l'estimation de la covariance. Le pas de la grille est conservé, les vecteurs d'onde peuvent être identifiés sans ambiguïté tant que  $|q_d h_d k_{d,r}| < \pi$ .
- Décimation, avec  $\boldsymbol{\delta} = [3 \ 2]$ ,  $\mathbf{K} = [3 \ 4]$  et  $\mathbf{M} = [32]$ . Ce cas particulier correspond aux six grilles précédentes décimées. La totalité des données est utilisée *une seule fois*, pour un coût de calcul bien moins important (réduction approximative de la complexité de la décomposition en valeurs principales :  $\left(\frac{7 \times 7}{3 \times 2}\right)^3 \approx 70$ ). Toutefois, le pas de la grille a artificiellement été augmenté ; le critère de Nyquist interdit donc l'identification de vecteurs d'onde tels que  $|q_d h_d k_{1,r}| \geq \pi/3$  ou  $|q_d h_d k_{2,r}| \geq \pi/2$ .





(a) Lissage spatial avec  $\mathbf{K} = [7 \ 7]$  et  $\mathbf{M} = [3 \ 2]$ .



(b) Décimation avec  $\delta = [3 \ 2]$ ,  $\mathbf{K} = [3 \ 4]$  et  $\mathbf{M} = [3 \ 2]$ .

FIGURE IV.2 – Estimation de la covariance des données. Illustration des différentes stratégies, pour une grille  $\mathcal{X}$  de taille  $\mathbf{L} = [9 \ 8]$ .

### IV.2.8 Implémentation

Dans cette dernière sous-section concernant la présentation de la méthode ESPRIT unifiée, le déroulement de la méthode proposée est résumé. Celui-ci est divisé en deux étapes : (i) la préparation consistant à choisir les paramètres de la méthode et à formater les données d'entrée ; (ii) l'application de la méthode.

Tous les développements de la présente section ont été donnés, sauf exception, en considérant les données non bruitées  $\mathbf{U}(n)$ . Expérimentalement, seulement les données bruitées  $\tilde{\mathbf{U}}(n)$  sont disponibles. En conséquence, tous les objets utilisés dans la méthode ESPRIT dont l'expression est fonction des données sont perturbés ; leur version perturbée est notée  $\tilde{\bullet}$ . Certains objets, comme les matrices de sélection, les tailles de grille ou encore les vecteurs translation sont des paramètres de la méthode ; ils ne sont donc pas perturbés.

#### IV.2.8.1 Préparation

**Choix du modèle de signal** La première étape consiste à choisir un modèle de signal (IV.2.2) qui puisse approximer la réponse de structure mesurée. Ce choix se matérialise par le jeu de paramètres  $D_e$  et  $D_c$  fixant respectivement les dimensions des exponentielles et des sinusoïdes. La dimension totale des variables spatio-temporelles paramétrant ces fonctions étant  $D = D_e + D_c$ .

**Choix de la grille de mesure** La grille de mesure  $\mathcal{X}$  doit ensuite être posée (IV.2.4), correspondant au choix de ses  $D$  tailles  $\mathbf{L}$  et  $D$  pas de grille  $\mathbf{h}$  associées à chaque variable spatio-temporelle concernée par les fonctions harmoniques.

**Formattage des données** Les mesures du signal sont réalisées en des points  $\mathbf{p}$  différents ou sur plusieurs de ses composantes si l'on s'intéresse à l'identification des paramètres d'un signal vectoriel. A la fin, une collection de  $N$  tableaux  $\tilde{\mathbf{U}}(n)$  sont formés (IV.2.7), correspondant à  $N$  observations du signal le long de la grille  $\mathcal{X}$  ; ils sont pris comme données d'entrée de la méthode ESPRIT.

**Choix des sous-grilles** Les paramètres fixant la forme de l'estimateur de la covariance (IV.2.65) des données sont ensuite fixés. Ils se matérialisent par les tailles  $\mathbf{K}$  et le vecteur décimation  $\boldsymbol{\delta}$  permettant de définir les  $[\mathbf{M}]$  grilles réduites et décimées  $\mathcal{X}_m^\delta$  (IV.2.60) qui permettent d'appliquer la technique de lissage spatial et la décimation. Le choix de ces paramètres est contraint par la relation (IV.2.58). Une fois ce choix fait, il est possible de construire la matrice de décimation  $\mathbf{J}^\delta$  (IV.2.59) ainsi que les  $[\mathbf{M}]$  matrices de sélection  $\mathbf{J}_m^{SS,(\mathbf{K} \circ \boldsymbol{\delta})}$  (IV.2.49) et la matrice de modification des données  $\tilde{\mathbf{J}}^\mathbf{K}$  (IV.2.22).

**Choix des vecteurs translation** Doivent également être choisis les  $Q$  vecteurs translation  $\mathbf{q}$  sur la base desquels sont formulées les relations d'invariance rotationnelle. Ceux-ci forment la matrice  $\mathbf{Q}$  (IV.2.34), qui doit être de rang  $D$ . Si le vecteur d'onde maximum à identifier  $\mathbf{k}^{\max}$  est connu, alors les contraintes liées au respect du critère de Nyquist (IV.2.71) doivent être vérifiées. une fois le choix des vecteurs translation effectué, les  $2Q$  matrices de sélection  $\mathbf{J}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^\mathbf{K}$  sont construites (IV.2.29).

**Choix des coefficients  $\xi$**  Finalement, les coefficients  $\xi$  permettant de former la combinaison linéaire des matrices spectrales  $\Gamma$  (IV.2.43) doivent être choisis. Ceux-ci doivent être choisis distincts pour éviter les problèmes dus à la multiplicité des composantes des vecteurs d'onde. Pour éviter de favoriser une matrice spectrale plus que les autres dans l'estimation de la matrice de passage  $\mathbf{T}$ , ces coefficients doivent toutefois être choisis du même ordre de grandeur.

#### IV.2.8.2 Application de la méthode

Les étapes de l'estimation des paramètres du signal sur la base des observations expérimentales  $\mathcal{U}(n)$  par la méthode ESPRIT proposée sont les suivantes :

##### Estimation des vecteurs d'onde

- ① construction des  $N$  matrices partielles lissées  $\widetilde{\mathbf{U}}_{SS}^{(\mathbf{K} \circ \delta)}(n)$  (IV.2.50) à partir des matrices de sélection  $\mathbf{J}_m^{SS,(\mathbf{K} \circ \delta)}$  construites précédemment, appliquées aux  $N$  vecteurs  $\widetilde{\mathbf{u}}(n)$  (IV.2.13) obtenus par vectorisation des  $N$  tableaux  $\widetilde{\mathbf{U}}(t)$  (IV.2.7)
- ② concaténation des matrices partielles  $\widetilde{\mathbf{U}}^{(\mathbf{K} \circ \delta)}(n)$  pour former la matrice complète  $\mathbf{U}_{SS}^{(\mathbf{K} \circ \delta)}$  (IV.2.51), puis décimation et modification à partir des matrices  $\mathbf{J}^\delta$  et  $\mathbf{J}^\mathbf{K}$  construites précédemment pour former la matrice des données finale  $\widetilde{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$  (IV.2.62)
- ③ calcul de l'estimateur de la covariance  $\widetilde{\mathbf{C}}_{uu}^{SS,\delta}$  (IV.2.65)
- ④ estimation de l'espace signal  $\widetilde{\mathbf{W}}$  par décomposition en valeurs propres de  $\widetilde{\mathbf{C}}_{uu}^{SS,\delta}$  (IV.2.37)
- ⑤ pour chaque vecteur translation  $\mathbf{q}$  choisi précédemment : estimation de la matrice spectrale  $\widetilde{\mathbf{F}}^\mathbf{q}$  (IV.2.69) au sens des moindres carrés à partir de  $\widetilde{\mathbf{W}}$  et des matrices de sélection  $\mathbf{J}_{(\uparrow/\downarrow)\mathbf{q}}^\mathbf{K}$
- ⑥ à partir des  $Q$  matrices spectrales obtenues, construction de la combinaison linéaire  $\widetilde{\Gamma}$  (IV.2.43) donnée par les coefficients  $\xi$  choisis précédemment et estimation de la matrice de passage  $\widetilde{\mathbf{T}}$
- ⑦ estimation des  $Q$  matrices  $\widetilde{\Pi}^{\mathbf{q},\delta}$  à partir de la matrice de passage commune  $\widetilde{\mathbf{T}}$  (IV.2.69) et extraction de leur diagonale  $\widetilde{\pi}^{\mathbf{q},\delta}$  (IV.2.68)
- ⑧ construction des matrices  $\widehat{\Pi}^e$  et  $\widehat{\Pi}^c$  puis estimation des vecteurs d'onde  $\widetilde{\mathbf{K}}$  (IV.2.70)

#### IV.2.8.3 Estimation des amplitudes et phases

Une fois que les vecteurs d'onde  $\mathbf{K}$  ont été identifiés, il est possible d'estimer les amplitudes. Cette estimation est réalisée sur les données directement. Les étapes sont les suivantes :

##### Estimation des vecteurs d'onde

- ① construction de la matrice de Vandermonde étendue  $\widetilde{\mathbf{V}}_\pm^\mathbf{L}$  à partir des vecteurs d'onde identifiés (IV.2.18)
- ② estimation des amplitudes généralisées  $\widetilde{\Theta}$  au sens des moindres carrés (IV.2.20)
- ③ détermination des amplitudes  $\widetilde{\mathbf{B}}$  et phases  $\widetilde{\Phi}$  par la relation (IV.2.21)

## IV.3 Performances de l'estimation

La présente section est dédiée à l'étude des performances de la méthode ESPRIT associées à l'estimation des paramètres du modèle de signal à partir de mesures bruitées : vecteurs d'onde, amplitudes, phases. En effet, la méthode ESPRIT est ici développée dans l'idée de formuler un problème inverse sur les paramètres identifiés, afin d'en extraire des informations sur la structure mesurée. Une connaissance des incertitudes sur ces paramètres semble en conséquence primordiale pour la justification des résultats obtenus. L'objectif de cette section est donc d'étudier les performances de la méthode ESPRIT proposée pour l'estimation des paramètres  $(\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\Phi})$  ((IV.2.70) et (IV.2.21)) à partir de données d'entrée perturbées  $\tilde{\mathbf{U}}(n)$  (IV.2.7).

Par rapport au modèle des données non perturbées  $\mathbf{U}(n)$ , les perturbations  $\Delta\mathbf{U}(n)$  peuvent être le résultat de différentes sources d'incertitude. La première qui vient à l'esprit est le *bruit* de capteur ; celui-ci peut généralement être considéré décorrélé du modèle de signal : il est souvent modélisé par un processus gaussien. La deuxième source d'incertitude concerne la *calibration* des capteurs (positionnement, directivité, etc.) ; en effet, la géométrie de la grille de mesure  $\mathbf{x}$  joue un rôle primordial dans la méthode ESPRIT, qui se base sur les invariances de celle-ci par translation. Un défaut de calibration peut entraîner la perte des propriétés d'invariance de la grille, avec comme conséquence l'apparition d'un biais sur les paramètres estimés. Cette source d'incertitude est l'objet d'un certain nombre de travaux [240, 215, 78, 124, 204]. Enfin, une troisième source d'incertitude peut venir du choix du modèle de signal. Par exemple, un choix de l'ordre du signal  $R$  erroné entraîne un biais sur l'estimation des paramètres du modèle ; l'étude de ce type de perturbation est à la base de la dérivation de critères pour le choix de  $R$  [14]. Le modèle de signal peut aussi représenter une vision trop approximative du signal mesuré, celui-ci ne pouvant être décrit de façon correcte par une somme d'ondes planes amorties (présence de transitoires, front d'onde non plan, etc.).

La connaissance de l'effet des perturbations peut être utilisée d'au moins deux façons différentes : (i) *à posteriori* : une fois les paramètres du signal identifiés, il est possible d'estimer le bruit additionnel à partir du modèle de signal *reconstruit* et du signal mesuré. En connaissant l'effet de ce bruit sur l'estimation des paramètres identifiés, il est donc possible d'évaluer directement l'incertitude qui leur est associée. (ii) *à priori* : l'écart-type des mesures peut dans certaines situations être connu ; il peut avoir été postulé ou estimé en fonction de la méthode de mesure et/ou différentes réalisations de celle-ci. Cet écart-type peut alors être utilisé comme un indicateur de *confiance*, permettant d'assigner un poids à chaque mesure (souvent inverse de la variance). Peuvent alors être formulés des estimateurs *optimaux* (ou BLUE pour *Best Linear Unbiased Estimator*) [206], utilisant par exemple la méthode des moindres carrés généralisés [5, chapitre 6] (GLS).

Pour toutes les raisons évoquées ci-avant, l'étude des performances d'une méthode d'identification est un développement qui accompagne classiquement sa présentation à la communauté du traitement de signal. Celle-ci peut tout d'abord passer par une étude numérique [189, 216, 239, 83, 188, 203] : un signal de paramètres connu est préalablement *bruité* avant d'être traité par la méthode proposée ; en résulte une perturbation des paramètres estimés. En répétant l'expérience pour de multiples *réalisations* du bruit, la variance de ces paramètres peut être estimée. Puisque le signal de base est connu, il est alors possible d'en faire varier les paramètres pour étudier la performance de la méthode proposée en fonction de ceux-ci, mais aussi des variables intrinsèques de la méthode. Cette méthode du type *méthode de Monte-Carlo* possède l'avantage de donner une indication sur la *distribution*, au sens probabiliste, des erreurs d'estimation des paramètres. Toutefois, elle nécessite : (i) la connaissance du signal d'entrée ;

(ii) un grand nombre de réalisations du bruit pour identifier de façon précise la distribution des erreurs.

Une autre méthode permettant d'étudier les performances d'une méthode consiste à dériver l'expression du premier gradient des paramètres estimés par rapport aux données d'entrée ; on peut aussi parler de *perturbation au premier ordre* : tous les termes d'ordre supérieur sont négligés. Cette méthode, qui repose l'hypothèse que le rapport signal à bruit (SNR pour *Signal-to-Noise Ratio*) est grand, est également très utilisée dans le cadre des approches type ESPRIT [156, 216, 65, 16, 182, 208, 206, 191] ; elle permet en effet de *prédire* l'incertitude sur les paramètres estimés à partir de la simple connaissance de la variance des données mesurées. Cette variance pouvant être estimée à partir des résidus calculés comme la différence des données avec le modèle de signal reconstruit, l'incertitude sur les paramètres estimés peut être faite sans la connaissance des paramètres exacts. De plus, contrairement à la méthode type Monte-Carlo, aucun tirage n'est nécessaire pour estimer ces incertitudes. Toutefois, l'hypothèse de fort SNR qui permet d'approximer l'erreur sur les paramètres en linéarisant la méthode d'estimation peut être limitante si l'objectif est d'estimer la *distribution* des paramètres estimés. En effet, la linéarité supposée de la méthode entraîne que la distribution des paramètres estimés est du même type que celle des données, ce qui n'est pas forcément le cas à cause de la non-linéarité de la méthode d'estimation. Pour cela, certains travaux proposent une dérivation des perturbations à l'ordre deux [207].

Pour prédire l'incertitude sur les paramètres estimés, il est également possible d'utiliser la borne de Cramer-Rao (CRB) [209, 205, 120, 121, 63] ; celle-ci donne une borne inférieure sur la variance *minimale* des paramètres d'un modèle, identifiés par un estimateur *quelconque*. En effet, cette borne, dérivée sous certaines hypothèses de régularité de la distribution des données, ne se base que sur le *modèle* du signal ; elle est donc *indépendante* de la méthode d'estimation utilisée. En conséquence, il est possible d'étudier la performance de différentes méthodes d'estimation *relativement* à la borne de Cramer-Rao.

La section est organisée de la façon suivante : premièrement, la borne de Cramer-Rao associée à un signal multidimensionnel composé d'exponentielles non amorties est rappelée. Ensuite, la propagation des incertitudes dans la méthode ESPRIT proposée par la perturbation au premier ordre des paramètres est développée. Dans un troisième temps, la variance des paramètres identifiés, estimée à partir des perturbations au premier ordre, est donnée. Finalement, les résultats obtenus sont appliqués dans le cas d'un signal composé d'une seule exponentielle. Une discussion est alors menée sur le choix optimal des paramètres intrinsèques à la méthode ESPRIT proposée.

### IV.3.1 Borne de Cramer-Rao

La borne de Cramer-Rao fournit un repère de qualité concernant l'estimation qu'il est possible de faire des paramètres d'un modèle. Sous certaines hypothèses de régularité du modèle en fonction des paramètres, cette borne donne la variance minimum d'un paramètre en fonction de la variance du bruit de mesure. La définition de la borne de Cramer-Rao passe par l'utilisation de la *matrice d'information de Fisher* ; celle-ci décrit, de manière statistique, l'information contenue dans un jeu de données (les mesures) qui est *relative* à un paramètre à identifier. Si cette matrice est définie positive, il est possible de montrer que tous les éléments de la matrice de covariance des paramètres identifiés par un estimateur *non biaisé quelconque* sont supérieurs ou égaux aux éléments de l'inverse de la matrice de Fisher [103]. Les éléments diagonaux de l'inverse de la matrice de Fisher représentent donc une borne inférieure de la variance des para-

mètres d'un modèle. Cette borne est en l'occurrence *uniquement* liée au modèle de signal ; elle est donc indépendante de l'estimateur employé (ici la méthode ESPRIT).

Dans le cas étudié ici, la borne de Cramer-Rao correspondant au modèle de signal (IV.2.6) est connue si seules des exponentielles non amorties sont présentes et que celles-ci ont des vecteurs d'onde bien distincts [98, 11]. Le résultat pour le cas unidimensionnel asymptotique (pour une taille de grille  $L$  tendant vers l'infini) est ici reproduit.

**Definition IV.3.1** (Borne de Cramer-Rao). *Soit le modèle de signal unidimensionnel (IV.2.6) avec  $D_c = 0$  et  $D_e = D = 1$  mesuré sur un maillage de  $L$  capteurs. Soient les mesures  $\tilde{\mathbf{u}}(n) \in \mathbb{C}^L$  un processus gaussien, d'espérance  $\mathbf{u}$  et de covariance  $\sigma^2 \mathbb{I}$ . Si tous les nombres d'onde sont réels ( $\text{Im}\{k_r\} = 0$ ) alors la variance minimale sur l'identification des paramètres du modèle s'exprime comme suit, pour  $L \rightarrow \infty$  :*

$$\text{var}(k_r) \geq \text{CRB}(k_r) = \frac{6}{h^2 L^3} \frac{\sigma^2}{|\beta_r|^2} \quad (\text{IV.3.1})$$

$$\text{var}(|\beta_r|) \geq \text{CRB}(\beta_r) = \frac{2\sigma^2}{L} \quad (\text{IV.3.2})$$

$$\text{var}(\phi_r) \geq \text{CRB}(\phi_r) = \frac{2}{L} \frac{\sigma^2}{|\beta_r|^2} \quad (\text{IV.3.3})$$

où  $\phi_r = \arg(\beta_r)$  est la phase de l'exponentielle telle que  $\beta_r = |\beta_r| \exp(i\phi_r)$ .

Ce premier résultat permet de noter certains aspects concernant l'estimation des paramètres de signaux harmoniques. En particulier : (1) La borne sur la phase  $\phi_r$  et les nombres d'onde  $k_r$  est indépendante des paramètres  $\beta_i$ ,  $\phi_i$  et  $k_i$  pour  $i \neq r$ . Cette borne est également inversement proportionnelle au rapport amplitude-sur-bruit  $|\beta_r|^2/\sigma^2$ . (2) La borne sur  $k_r$  converge de façon asymptotique en  $\mathcal{O}(L^{-3})$ , donc très rapidement. Toutefois, à longueur de signal  $L$  donnée, l'incertitude sur les vecteurs d'onde augmente avec la diminution du pas de grille. (3) La borne sur  $\beta_r$  est indépendante de toutes les amplitudes ; (4) toutes les bornes sont indépendantes de  $\phi_r$  et  $k_r$ . Ce résultat n'est cependant plus vrai en présence d'exponentielles amorties ( $\text{Im}\{k_r\} \neq 0$ ) car la symétrie du signal est perdue [98].

### IV.3.2 Propagation des Incertitudes

Une technique d'analyse de la performance d'un estimateur consiste à étudier le gradient de la méthode d'estimation autour d'un *point de fonctionnement*  $(\mathbf{K}, \mathbf{B}, \Phi)$ . Le calcul des perturbations au premier ordre fait l'hypothèse sous-jacente d'un fort rapport signal sur bruit ( $|\beta_r|^2/\sigma^2 \rightarrow \infty$ ). Dans le cas de l'algorithme ESPRIT, on cherche finalement à connaître la perturbation  $(\Delta \mathbf{k}_r, \Delta \beta(n), \Delta \phi(n))$  en fonction des perturbations sur les données  $\Delta \mathbf{u}(n)$ . Par rapport à la borne de Cramer-Rao, on obtient des indications plus précises sur la performance de la méthode : (i) les résultats prennent en compte la *structure* de l'estimateur. Ils dépendent donc de la perturbation des mesures mais aussi des variables internes de l'algorithme (choix de l'invariance rotationnelle, lissage spatial, décimation, etc.) ; (ii) aucune hypothèse n'est faite sur la distribution de  $\Delta \mathbf{u}(n)$ , ce qui permet d'étudier la performance de l'estimateur face à des perturbations diverses.

Les développements de cette section sont très inspirés de [208, 191] où les perturbations de l'algorithme ND-ESPRIT avec lissage spatial sont étudiées. L'apport ici réside en l'intégration des développements supplémentaires introduits dans la section précédente : présence de sinusoides, invariance multiple et décimation.



### IV.3.2.1 Perturbation de l'espace signal

Dans la méthode ESPRIT, l'espace signal est obtenu par la décomposition en valeurs propres (IV.2.37) de la matrice de covariance estimée  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS,\delta}$  (IV.2.65). On rappelle que cet estimateur inclut aussi la version non décimée  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS}$  (IV.2.53) lorsque  $\delta = 1$ , laquelle inclut la version non lissée  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}$  (IV.2.45), lorsque  $\mathbf{M} = \mathbf{1}$ .

L'estimation du sous-espace signal  $\mathbf{W}$  à partir de  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS,\delta}$  équivaut en fait à estimer l'espace des vecteurs principaux de gauche de la matrice des données  $\bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$  (IV.2.62) par le biais d'une décomposition en valeurs singulières (SVD); bien que  $\mathbf{W}$  soit réellement estimé à partir de  $\mathbf{C}_{\bar{u}\bar{u}}^{SS,\delta}$  dans la méthode ESPRIT (pour des raisons de coût de calcul), le formalisme de la SVD est généralement préféré pour la dérivation au premier ordre. La décomposition en valeurs singulières de  $\bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$  s'écrit comme suit :

$$\bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta = \mathbf{W} \boldsymbol{\Sigma}^H \mathbf{W}^R + \mathbf{W}_\perp \boldsymbol{\Sigma}_\perp^H \mathbf{W}_\perp^R \quad (\text{IV.3.4})$$

où  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] \times R}$  et  $\mathbf{W}^R \in \mathbb{C}^{[\mathbf{M}] \times R}$  sont respectivement les sous-espaces principaux de *gauche* et de *droite* et  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{R \times R}$  contient les  $R$  valeurs principales liées à ce sous-espace. L'espace orthogonal formé par  $\mathbf{W}_\perp$  et  $\mathbf{W}_\perp^R$  est arbitraire, puisque les valeurs singulières  $\boldsymbol{\sigma}_\perp = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_\perp)$  sont nulles en l'absence de bruit.

**Proposition IV.3.1** (Perturbation de l'espace signal). *La perturbation de l'espace signal  $\mathbf{W}$  (IV.2.37) s'écrit sous la forme :*

$$\Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}_\perp^H \mathbf{W}_\perp \Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W}^R \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbf{W}^H \mathbf{W}) \Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W}^R \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \quad (\text{IV.3.5})$$

*Démonstration.* Voir annexe (D.7.33). □

Cette perturbation est donc portée par l'espace orthogonal  $\mathbf{W}_\perp$ . Ce résultat peut s'interpréter comme une rotation de l'espace signal, dont la projection au premier ordre est portée par les vecteurs orthogonaux.

### IV.3.2.2 Perturbation des matrices spectrales

L'estimation des matrices spectrales  $\mathbf{F}^q$  (IV.2.42) passe par la résolution d'un système linéaire au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{F}^q = \left( \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W} \right)^\dagger \left( \mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W} \right) \quad (\text{IV.3.6})$$

Il est conséquence possible de propager les perturbations  $\Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$  dans cette opération.

**Proposition IV.3.2** (Perturbation des matrices spectrales). *On peut écrire la perturbation des matrices spectrales  $\mathbf{F}^q$  sous la forme suivante :*

$$\Delta \mathbf{F}^q = \left( \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W} \right)^\dagger \left( \mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{G} - \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{G} \mathbf{F}^q \right) - \mathbf{F}^q \mathbf{W} \mathbf{G} + \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{F}^q \quad (\text{IV.3.7})$$

où  $\mathbf{G} = \Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W}^R \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W}_\perp^H \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ .

*Démonstration.* En injectant dans (IV.3.6) le résultat (D.2.3) sur la perturbation d'une résolution de système linéaire aux moindres carrés démontré en annexe, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{F}^q &= (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \Delta \mathbf{W} - \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \Delta \mathbf{W} \mathbf{F}^q) \\ &= (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} (\mathbb{I} - \mathbf{W}^H \mathbf{W}) \Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W}^R \Sigma^{-1} - \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} (\mathbb{I} - \mathbf{W}^H \mathbf{W}) \Delta \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W}^R \Sigma^{-1} \mathbf{F}^q) \\ &= (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{G} - \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{G} \mathbf{F}^q) - \mathbf{F}^q H \mathbf{W} \mathbf{G} + {}^H \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{F}^q\end{aligned}$$

où on a utilisé  $(\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W}) = \mathbf{F}^q$  et  $(\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W}) = \mathbb{I}$ .  $\square$

### IV.3.2.3 Perturbation des matrices polaires

Les matrices polaires  $\Pi^{\mathbf{q},\delta}$  sont estimées à partir des matrices spectrales  $\mathbf{F}^q$  de la façon suivante (IV.2.42) :

$$\Pi^{\mathbf{q},\delta} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}^q \mathbf{T} \quad (\text{IV.3.8})$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice des vecteurs propres d'une combinaison linéaire  $\mathbf{\Gamma}$  des matrices spectrales (IV.2.43) :

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_n^Q \xi_n \mathbf{F}^{\mathbf{q}_n} \quad (\text{IV.3.9})$$

A partir de ces expressions peut être dérivée la perturbation des matrices polaires.

**Proposition IV.3.3** (Perturbation des matrices polaires). *La perturbation des  $Q$  matrices polaires  $\pi^{\mathbf{q},\delta} = \text{diag}(\Pi^{\mathbf{q},\delta})$  (IV.2.18) s'expriment sous la forme suivante :*

$$\Delta \pi_r^{\mathbf{q},\delta} = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} - \pi_r^{\mathbf{q},\delta} \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}}) \mathbf{G} \mathbf{t}_r \quad (\text{IV.3.10})$$

où on a posé  $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_R]$  et  $\mathbf{T}^{-1} = {}^\top [\boldsymbol{\tau}_1 \cdots \boldsymbol{\tau}_R]$ .

*Démonstration.* On utilise le résultat démontré en annexe (D.4.2) sur la perturbation des valeurs propres pour exprimer la relation suivante :

$$\Delta \gamma_r = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r \Delta \mathbf{\Gamma} \mathbf{t}_r \quad \Rightarrow \quad \forall \beta, \beta_n \Delta \pi_r^{\mathbf{q}_n} = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r \beta_n \Delta \mathbf{F}^{\mathbf{q}_n} \mathbf{t}_r \quad \Rightarrow \quad \Delta \pi_r^{\mathbf{q}} = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r \Delta \mathbf{F}^{\mathbf{q}} \mathbf{t}_r \quad (\text{IV.3.11})$$

En injectant (IV.3.7) dans (IV.3.11), on obtient la forme suivante :

$$\Delta \pi_r^{\mathbf{q}} = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r (\mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{G} - \mathbf{J}_{\uparrow q}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{G} \mathbf{F}^q) \mathbf{t}_r - {}^\top \boldsymbol{\tau}_r \mathbf{F}^q H \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{t}_r + {}^\top \boldsymbol{\tau}_r {}^H \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{F}^q \mathbf{t}_r$$

En remarquant que  $\mathbf{F}^q \mathbf{t}_r = \pi_r^{\mathbf{q}} \mathbf{t}_r$  et  ${}^\top \boldsymbol{\tau}_r \mathbf{F}^q = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r \pi_r^{\mathbf{q}}$ , les deux termes de droite s'annulent et  $\mathbf{G}$  peut être mis en facteur dans le premier terme, d'où (IV.3.10).  $\square$

*Remarque IV.3.1.* La perturbation des matrices polaires estimées est indépendante des coefficients  $\beta$  utilisés pour estimer  $\mathbf{T}$ . Les performances de l'algorithme sont donc indépendantes du choix de ces coefficients.



### IV.3.2.4 Perturbation des vecteurs d'onde

Les vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  sont estimés au sens des moindres carrés par le biais des relations (IV.2.70). La matrice des vecteurs translation  $\mathbf{Q}$  (IV.2.34) ainsi que le vecteur décimation  $\delta$  (IV.2.59) sont des données du problème; ils ne sont donc pas source d'incertitude. Dans ce travail, le pas de grille  $\mathbf{h}$  (IV.2.4) est considéré connu sans incertitude également; l'influence d'une mauvaise calibration de la grille de mesure n'est donc pas étudiée ici.

**Proposition IV.3.4** (Perturbation des vecteurs d'onde). *La perturbation des vecteurs d'onde au premier ordre peut s'exprimer comme suit :*

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{k}}_r^e &= -i \mathbf{Q}_\delta^{e\dagger} \text{diag}(\exp(\mathbf{Q}_\delta^e \mathbf{k}^e))^{-1} \Delta \psi_r^e \\ \Delta \underline{\mathbf{k}}_r^c &= -\mathbf{Q}_\delta^{c\dagger} \text{diag}(|\sin(\mathbf{Q}_\delta^c \mathbf{k}^c)|)^{-1} \Delta \psi_r^c \end{aligned} \quad (\text{IV.3.12})$$

où  $\Delta \psi_r^e = {}^\top [\Delta \pi_r^{\mathbf{q}_1, \delta} \dots \Delta \pi_r^{\mathbf{q}_{Q_e}, \delta}]$  et  $\Delta \psi_r^c = {}^\top [\Delta \pi_r^{\mathbf{q}_{Q_e+1}, \delta} \dots \Delta \pi_r^{\mathbf{q}_{Q_e+Q_c}, \delta}]$  sont calculés à partir de (IV.3.10).

*Démonstration.* On déduit (IV.3.12) à partir de (IV.2.70) en remarquant que  $\Delta \ln(x) = \Delta x/x$  et  $\Delta \arccos(x) = -\Delta x/\sqrt{1-x^2}$ .  $\square$

Avec le résultat ci-dessus peut être obtenue la perturbation des vecteurs d'onde en fonction de celle des données, qui rentre dans l'expression des termes  $\pi_r^{\mathbf{q}_n, \delta}$  (IV.3.10). les paragraphes qui suivent cherchent à simplifier les relations obtenues.

### IV.3.2.5 Linéarisation des perturbations

Dans ce paragraphe, deux formes des perturbations sont dérivées; elles expriment une relation linéaire entre la perturbation des vecteurs d'onde  $\Delta \underline{\mathbf{k}}_r$  et la perturbation des données. Tout d'abord, l'expression (IV.3.12) est réécrite sous une forme bilinéaire, déduite des expressions de  $\mathbf{G}$  (IV.3.7), de  $\Delta \pi$  (IV.3.10) et  $\Delta \underline{\mathbf{k}}_r$  (IV.3.12).

**Proposition IV.3.5** (Forme bilinéaire). *La perturbation des composantes des vecteurs propres (IV.3.12) peut se mettre sous la forme bilinéaire suivante :*

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{k}_{d,r}^e &= {}^H \mathbf{y}_{d,r}^e \Delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta} * \mathbf{x}_r \\ \Delta \mathbf{k}_{d,r}^c &= {}^H \mathbf{y}_{d,r}^c \Delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta} * \mathbf{x}_r \end{aligned} \quad (\text{IV.3.13})$$

$$\Delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta} = [\Delta \mathbf{U}^{\mathbf{K} \circ \delta}(1) \dots \Delta \mathbf{U}^{\mathbf{K} \circ \delta}(N)] \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}] [\delta] \times [\mathbf{M}] N}$$

$${}^H \mathbf{y}_{d,r}^e = \frac{-i}{h_d \delta_d} {}^\top \mathbf{e}_d \mathbf{Q}^{e\dagger} \text{diag}(\exp(\mathbf{Q}_\delta^e \mathbf{k}^e))^{-1} {}^\top [\mu_r^{\mathbf{q}_1^e} \dots \mu_r^{\mathbf{q}_{Q_e}^e}] \bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{K}} \mathbf{J}^\delta \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] [\delta]}$$

$${}^H \mathbf{y}_{d,r}^c = \frac{-1}{h_d \delta_d} {}^\top \mathbf{e}_d \mathbf{Q}^{c\dagger} \text{diag}(\sin(\mathbf{Q}_\delta^c \mathbf{k}^c))^{-1} {}^\top [\mu_r^{\mathbf{q}_1^c} \dots \mu_r^{\mathbf{q}_{Q_c}^c}] \bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{K}} \mathbf{J}^\delta \in \mathbb{C}^{[\bar{\mathbf{K}}] [\delta]}$$

$$* \mathbf{x}_r = \mathbf{W}^R \Sigma^{-1} \mathbf{t}_r = {}^H \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W} \Lambda^{-1} \mathbf{t}_r \in \mathbb{C}^{[N \mathbf{M}]}$$

$$\text{avec } {}^\top \mu_r^{\mathbf{q}} = {}^\top \tau_r (\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{\bar{\mathbf{K}}} - \pi_r^{\mathbf{q}} \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{\bar{\mathbf{K}}}).$$

On remarque que les écritures concernant les dimensions des exponentielles et des sinusoides sont identiques; en conséquence, les exposants  $\bullet^e$  et  $\bullet^c$  sont omis dans la suite.

**Utilisation de la propriété de la vectorisation** La première forme linéaire obtenue est inspirée de Steinwandt & al. [208] ; elle utilise la propriété de l'opération de vectorisation (IV.1.20) pour transformer la forme bilinéaire ci-dessus en forme linéaire.

**Proposition IV.3.6** (Forme linéaire - I). *En utilisant la propriété (IV.1.20), la perturbation des composantes des vecteurs d'onde peut se réécrire sous la forme :*

$$\Delta \mathbf{k}_{d,r} = {}^H \mathbf{r}_{d,r} \text{vec} \left\{ \Delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta} \right\} \quad (\text{IV.3.14})$$

$$\mathbf{r}_{d,r} = \mathbf{x}_r \boxtimes \mathbf{y}_{d,r} \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}] [\delta] [\mathbf{M}] N}$$

où  $\Delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta}$  a été définie en (IV.2.51).

Cette formulation, bien que simple à première vue, nécessite la construction de  $\Delta \mathbf{U}_{SS}^{\mathbf{K} \circ \delta}$ . De plus, sa complexité peut vite devenir problématique : le calcul des  $\mathbf{k}_{d,r}$  induit  $[\mathbf{K}] [\delta] [\mathbf{M}] N \approx \mathcal{O}([\mathbf{L}]^2 N)$  multiplications (pour le produit de Kronecker puis le produit scalaire).

**Utilisation de la structure de Hankel par blocs** Une deuxième formulation proposée par Sahnoun & al. [191] passe par l'utilisation de la structure de Hankel par blocs des matrices lissées  $\mathbf{U}^{\mathbf{K} \circ \delta}(n)$ , évoquée en (IV.2.56). En effet, le produit d'une matrice de Hankel (IV.1.24) avec un vecteur quelconque peut se réécrire sous la forme d'un produit de convolution. En particulier, pour trois vecteurs  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{M_A}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{M_B}$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{M_A+M_B-1}$  quelconques :

$$\mathbf{a} \mathbb{H}_{\mathbf{x}}^{M_A \times M_B} \mathbf{b} = \mathbf{a}_i \mathbf{x}_{i+j} \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{k-i} \mathbf{a}_i \mathbf{x}_k = (\mathbf{b} * \mathbf{a}) \mathbf{x} \quad (\text{IV.3.15})$$

Cette relation se généralise facilement au cas des matrices de Hankel par blocs [191]. Adaptée ici à la méthode ESPRIT proposée, elle permet d'exprimer la perturbation des vecteurs d'onde en fonction de la matrice des données *non lissée, non décimée et non modifiée*  $\mathbf{U}$  au moyen d'un produit de convolution entre deux tenseurs  $\mathcal{X}^r$  et  $\mathcal{Y}^{d,r}$ , de dimension respective  $D+1$  et  $D$ .

**Proposition IV.3.7** (Forme linéaire - II). *Soient les tensorisations de  $\mathbf{x}_r$  et  $\mathbf{y}_{d,r}$  respectivement notées  $\mathcal{X}^r = \text{tens}\{\mathbf{x}_r\}^{N \times \mathbf{M}}$  et  $\mathcal{Y}^{d,r} = \text{tens}\{\mathbf{y}_{d,r}\}^{1 \times (\mathbf{K} \circ \delta)}$  (IV.1.18). La perturbation des composantes des vecteurs d'onde peut se réécrire sous la forme :*

$$\Delta \mathbf{k}_{d,r} = {}^H \mathbf{z}_{d,r} \text{vec} \{ \Delta \mathbf{U} \} \quad (\text{IV.3.16})$$

$$\mathbf{z}_{d,r} = \text{vec} \left\{ \mathcal{X}^r * \mathcal{Y}^{d,r} \right\} \in \mathbb{C}^{[\mathbf{L}] N}$$

où  $\mathbf{U}$  est la matrice des données originale (IV.2.19).

Cette seconde forme linéaire est donc l'extension de la formulation proposée dans [191] pour les cas de réalisations multiples ( $N \geq 1$ ), avec présence de sinusoides, décimation et invariance multiple. Elle est avantageuse pour plusieurs raisons : (i) les perturbations des paramètres estimés sont directement fonction de la perturbation des données  $\Delta \mathbf{U}$  ; (ii) la convolution de  $\mathbf{X}_r$  avec  $\mathbf{y}_{d,r}$  est de complexité  $\mathcal{O}([\mathbf{L}]^2 N)$  dans son implémentation la plus basique mais peut être réduite à  $\mathcal{O}(N [\mathbf{L}] \log([\mathbf{L}]))$  en utilisant la transformée de Fourier rapide ; (iii) cette forme rend plus simple la dérivation des expressions analytiques de la variance des estimations données dans la suite. La formulation II (IV.3.16) est donc utilisée prioritairement.

### IV.3.2.6 Formulation analytique

Le calcul de  $\mathbf{z}_{d,r}$  dans (IV.3.16) nécessite le calcul de  $\mathbf{y}_{d,r}$  et  $\mathbf{x}_r$ , définis en (IV.3.13). Pour estimer numériquement la perturbation des paramètres, on utilisera l'expression  $\mathbf{x}_r = \mathbf{H} \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{t}_r$ . En effet, cette expression de  $\mathbf{x}_r$  et l'expression de  $\mathbf{y}_{d,r}$  sont fonctions d'objets complètement connus après le déroulement de l'estimation des paramètres par la méthode ESPRIT (voir section IV.2.8) : (i) la matrice des données lissée et décimée  $\mathbf{H} \bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta$  a été construite pour estimer la covariance des données ((IV.2.62) et (IV.2.65)) ; (ii) l'espace signal  $\mathbf{W}$  et la matrice des valeurs propres  $\mathbf{\Lambda}$  ont été évalués par la décomposition en sous-espaces de l'estimateur  $\mathbf{C}_{\text{uu}}^{SS,\delta}$  (IV.2.37) ; (iii) les vecteurs  $\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\mathbf{t}_r$  sont connus par l'évaluation de la matrice  $\mathbf{T}$  ((IV.2.43) et (IV.3.10)) ; (iv) les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  ont été estimés (IV.2.70), donnant les composantes  $\pi_r^{\mathbf{q},\delta}$  (IV.2.18) ; (v) les matrices de sélection  $\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}}, \mathbf{J}_{\downarrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}}$ , de modification  $\bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{K}}$  et de décimation  $\mathbf{J}^\delta$ , et les matrices des vecteurs translation  $\mathbf{Q}_\delta^e$  et  $\mathbf{Q}_\delta^c$  sont construites dès la préparation des données.

Toutefois, ces objets ne peuvent pas être déterminés de façon analytique. Dans l'idée d'étudier la performance de la méthode ESPRIT, une formulation analytique des vecteurs  $\mathbf{y}_{d,r}$  et  $\mathbf{x}_r$  est dérivée dans ce qui suit. Elle est également adaptée des travaux de Sahnoun & al. [191].

**Proposition IV.3.8** (Formulation analytique). *On peut réécrire les vecteurs  $\mathbf{x}_r$  et  $\boldsymbol{\mu}_r^{\mathbf{q}}$  dans l'expression (IV.3.13) sous la forme suivante :*

$$*\mathbf{x}_r = (\mathbf{A}^{SS})^\dagger \mathbf{b}_r \quad (\text{IV.3.17})$$

$${}^\top \boldsymbol{\mu}_r^{\mathbf{q}} = {}^\top \mathbf{b}_r (\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}})^\dagger (\mathbf{J}_{\downarrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} - \pi_r^{\mathbf{q}} \mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}}) \quad (\text{IV.3.18})$$

où on note le  $r^{\text{ième}}$  vecteur unité  ${}^\top \mathbf{b}_r = [\mathbf{0}^{r-1} \ 1 \ \mathbf{0}^{R-r}]$  et  $\mathbf{A}^{SS}$  a été définie en (IV.2.52).

*Démonstration.* La nouvelle expression de  ${}^\top \boldsymbol{\mu}_r^{\mathbf{q}}$  se déduit de (IV.3.13) en remarquant que :

$${}^\top \boldsymbol{\tau}_r (\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{W})^\dagger = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r (\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}} \mathbf{T}^{-1})^\dagger = {}^\top \boldsymbol{\tau}_r \mathbf{T} (\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}})^\dagger = {}^\top \mathbf{b}_r (\mathbf{J}_{\uparrow\mathbf{q}}^{\mathbf{K}} \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}})^\dagger$$

On considère ensuite l'expression  $\mathbf{x}_r = \mathbf{W}^R \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{t}_r = (\boldsymbol{\Sigma}^H \mathbf{W}^R)^\dagger$ . Or on a  $\bar{\mathbf{U}}_{SS}^\delta = \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}} \mathbf{A}^{SS} = \mathbf{W} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^R$  ((IV.2.63) et (IV.3.4)). On peut alors écrire :

$$\boldsymbol{\Sigma}^H \mathbf{W}^R = \mathbf{W}^\dagger \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}} \mathbf{A}^{SS} = (\mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}} \mathbf{T}^{-1})^\dagger \mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}} \mathbf{A}^{SS} = \mathbf{T} \mathbf{A}^{SS}$$

Finalement, on déduit l'expression de  $\mathbf{x}_r$  (IV.3.17) en remarquant que  $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{t}_r = \mathbf{b}_r$ .  $\square$

Cette dernière formulation n'utilise que des grandeurs dépendantes des paramètres à estimer : la connaissance des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_r$  permet de déterminer les composantes des vecteurs polaires  $\pi_r^{\mathbf{q}}$  et les matrices de Vandermonde  $\mathbf{V}_\delta^{\mathbf{K}}$  ; la connaissance des amplitudes  $\beta_r$  permet quant à elle de former la matrice  $\mathbf{A}^{SS}$ . Les autres objets sont intrinsèques à la méthode ESPRIT (matrices de sélection et matrices des vecteurs translation). En conséquence, il est possible, à partir de cette expression, d'étudier la performance de la méthode proposée sans avoir à dérouler l'algorithme. De nombreuses configurations peuvent être envisagées, pour étudier l'influence de la distribution des vecteurs d'onde et des amplitudes associées sur les performances, ou encore de la forme des perturbations  $\Delta \mathcal{U}(n)$ , etc.

*Remarque IV.3.2* (Indépendance des vecteurs d'onde identifiés). Dans le cas où les vecteurs translation  $\mathbf{q}$  coïncident avec les vecteurs directeurs de la grille, on a  $\mathbf{Q}^e = \mathbb{I}$  et  $\mathbf{Q}^c = \mathbb{I}$ . L'expression des perturbations des composantes des vecteurs d'onde (IV.3.13) s'expriment alors simplement avec les écritures de  $\mathbf{y}_{d,r}$  et  $\mathbf{x}_r$  données ci-dessus :

$$\begin{aligned}\Delta k_{d,r}^e &= \frac{-i}{h_d \delta_d} \tau_{\mathbf{b}_r} \left( \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{e}_d}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}} \right)^\dagger \left( \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{e}_d}^{\bar{\mathbf{K}}} / \exp(i k_{d,r}^e h_d \delta_d) - \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{e}_d}^{\bar{\mathbf{K}}} \right) \Delta \mathbf{H} \left( \mathbf{A}^{SS} \right)^\dagger \mathbf{b}_r \\ \Delta k_{d,r}^c &= \frac{-|\sin(k_{d,r}^e h_d \delta_d)|^{-1}}{h_d \delta_d} \tau_{\mathbf{b}_r} \left( \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{e}_d}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}} \right)^\dagger \left( \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{e}_d}^{\bar{\mathbf{K}}} - \cos(k_{d,r}^c h_d \delta_d) \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{e}_d}^{\bar{\mathbf{K}}} \right) \Delta \mathbf{H} \left( \mathbf{A}^{SS} \right)^\dagger \mathbf{b}_r\end{aligned}\tag{IV.3.19}$$

La première équation correspond à l'algorithme ND-ESPRIT standard et est conforme à [208]. Dans ce cas particulier, on peut voir que les différentes composantes  $k_{d,r}$  des vecteurs d'onde sont perturbées de façon indépendante : la perturbation d'une composante ne *dépend pas* des autres composantes identifiées.

*Remarque IV.3.3.* Dans le cas où une seule observation de  $\mathbf{U}(n)$  est disponible ( $N = 1$ ), alors la matrice des amplitudes s'écrit simplement  $\mathbf{A}^{SS} = \text{diag}(\boldsymbol{\beta})^\top \bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}$  (IV.2.52), d'où :

$$\left( \mathbf{A}^{SS} \right)^\dagger \mathbf{b}_r = \frac{1}{\beta_r} \tau_{\bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}}^\dagger \tag{IV.3.20}$$

Cette forme, injectée dans (IV.3.13) et (IV.3.17), montre que l'identification du  $r^{\text{ième}}$  vecteur d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  dépend de l'amplitude associée  $\beta_r$  *uniquement*, et non des amplitudes  $\beta_i$ ,  $i \neq r$  des autres composantes. Ce résultat rejoint l'observation similaire faite sur la borne de Cramer-Rao associée aux amplitudes  $\boldsymbol{\beta}$  (IV.3.2).

#### IV.3.2.7 Perturbation des amplitudes

Une fois les vecteurs d'onde  $\underline{\mathbf{k}}_r$  estimés, il est possible de reconstruire la matrice de Vandermonde étendue  $\mathbf{V}_{\pm}^{\mathbf{L}}$  (IV.2.17). Les amplitudes généralisées  $\boldsymbol{\Theta}$  peuvent alors être estimées au sens des moindres carrés (IV.2.21). Il est alors de nouveau possible de propager les perturbations  $\Delta \mathbf{U}(n)$  dans cette estimation à partir du résultat de la perturbation de l'estimateur aux moindres carrés démontré en annexe (D.3.3).

**Proposition IV.3.9** (Perturbation des amplitudes généralisées). *La perturbation  $\Delta \boldsymbol{\Theta}$  des amplitudes généralisées prend la forme suivante :*

$$\Delta \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{V}_{\pm}^{\mathbf{L}^\dagger} \left( \Delta \mathbf{U} - \left[ \left( i \mathbf{M}^{\mathbf{L}} \text{diag}(\mathbf{h}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{K}^e & \Delta \mathbf{K}^e \\ \Delta \mathbf{K}^c & -\Delta \mathbf{K}^c \end{bmatrix} \right) \circ \mathbf{V}_{\pm}^{\mathbf{L}} \right] \boldsymbol{\Theta} \right) \tag{IV.3.21}$$

où  $\mathbf{M}^{\mathbf{L}} = [\mathbf{M}_e^{\mathbf{L}} \ \mathbf{M}_c^{\mathbf{L}}]$  (IV.2.15).

Dans cette sous-section, on a propagé par le calcul les perturbations sur les données  $\Delta \mathbf{U}(n)$  dans l'estimateur ESPRIT pour en déduire la perturbation des composantes des vecteurs d'onde  $\Delta k_{d,r}$ . Jusqu'à présent, aucune hypothèse statistique n'a été faite sur la perturbation des données. Il est donc possible d'étudier le comportement de la méthode ESPRIT proposée face à une perturbation quelconque des données.

### IV.3.3 Variance des estimations

A partir des perturbations obtenues sur les paramètres estimés, il est possible de calculer certains moments statistiques liés à l'estimation, en faisant cette fois des hypothèses sur la distribution du bruit. La variance des composantes des vecteurs d'onde  $\text{var}(\mathbf{k}_{d,r})$  est dérivée ici ; elle permet de donner une idée de l'incertitude associée à ces paramètres, et donc des performances de la méthode ESPRIT proposée.

L'utilisation du calcul des perturbations précédemment développé permet de s'affranchir d'une éventuelle quantification de l'incertitude par une méthode type *Monte-Carlo* ; celle-ci nécessiterait d'exécuter l'algorithme associé à la méthode développée un grand nombre de fois avec des *tirages* du bruit différents, afin d'estimer une distribution des erreurs et en calculer les moments statistiques.

La première étape de la dérivation de la variance des paramètres estimés consiste à poser un modèle statistique pour les données. Ce modèle prend généralement la forme d'une loi normale *multivariée* ; celle-ci est complètement caractérisée par son espérance et sa matrice de covariance.

**Definition IV.3.2** (Modèle statistique des données). *Soit la matrice des données perturbée  $\widetilde{\mathbf{U}}$  (IV.2.19) correspondant à un processus complexe d'espérance  $\mathbf{U}$ . Alors la matrice de covariance des perturbations  $\mathbf{C}_{\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^{[\mathbf{L}]\times[\mathbf{L}]}$  est définie comme suit :*

$$\mathbf{C}_{\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}} = \mathbb{E} \left\{ \text{vec}\{\Delta\mathbf{U}\}^H \text{vec}\{\Delta\mathbf{U}\} \right\} \quad (\text{IV.3.22})$$

*Remarque IV.3.4* (Estimation pratique de la covariance du bruit). Deux hypothèses sur la forme du bruit permettent de donner une estimation de cette matrice de covariance à partir de mesures expérimentales :

- Bruit gaussien :  $\mathbf{C}_{\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}^2)$ . Les variances  $\boldsymbol{\sigma}^2$  en chaque point peuvent être estimées *a priori* par différentes réalisations de la mesure  $\widetilde{\mathbf{U}}$ .
- Bruit gaussien uniforme :  $\mathbf{C}_{\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}} = \sigma^2 \mathbf{I}$ . La variance globale  $\sigma^2$  peut être estimée *a posteriori*, à partir du modèle  $\mathbf{U}$  reconstruit et des mesures  $\widetilde{\mathbf{U}}$  :  $\sigma^2 = \text{var}(\text{vec}\{\widetilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}\})$ .

La covariance du bruit  $\mathbf{C}_{\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}}$  pourrait aussi être estimée par la mesure, sans *a priori* sur sa forme. Toutefois, une estimation correcte nécessiterait un grand nombre de réalisations de la mesure, et le stockage de cette matrice pourrait devenir problématique.

Il a été remarqué plus haut (remarque IV.3.2) que dans le cas de l'algorithme ND-ESPRIT (soit  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ), la perturbation d'une des composantes des vecteurs d'onde est indépendante des autres composantes identifiées. Il est donc raisonnable de supposer que ces composantes sont décorrélatées les unes des autres. En conséquence, seule la *variance* des composantes individuelles est donnée ici ; elle représente les éléments diagonaux de la covariance des paramètres estimés.

**Proposition IV.3.10** (Variance des vecteurs d'onde). *La variance des composantes  $\mathbf{k}_{d,r}$  des vecteurs d'onde estimés est telle que :*

$$\text{var}(\mathbf{k}_{d,r}) = \mathbb{E} \left\{ |\Delta\mathbf{k}_{d,r}|^2 \right\} = \mathbf{z}_{d,r}^H \mathbf{C}_{\Delta\mathbf{U}\Delta\mathbf{U}} \mathbf{z}_{d,r} \quad (\text{IV.3.23})$$

En particulier, si  $\Delta\mathbf{U}$  est un bruit gaussien uniforme de variance  $\sigma^2$ , on a :

$$\text{var}(\mathbf{k}_{d,r}) = \sigma^2 \|\mathbf{z}_{d,r}\|^2 \quad (\text{IV.3.24})$$

**Proposition IV.3.11** (Variance des parties imaginaires et réelles). *Si le bruit  $\Delta \mathbf{U}$  est circulaire (parties réelle et imaginaire décorréllées et de variance égale), alors on peut écrire :*

$$\boxed{\text{var}(\text{Re}\{\mathbf{k}_{d,r}\}) = \text{var}(\text{Im}\{\mathbf{k}_{d,r}\}) = \frac{\text{var}(\mathbf{k}_{d,r})}{2}} \quad (\text{IV.3.25})$$

Les variances des partie réelle et imaginaire de  $\mathbf{k}_r$  sont donc égales.

#### IV.3.4 Application à un signal composé d'un seul pôle

Dans ce qui suit, la performance de la méthode ESPRIT proposée est étudiée dans le cas de l'estimation des paramètres d'un signal multidimensionnel  $u(\mathbf{x})$  (IV.2.2), composé d'une seule exponentielle ( $R = 1$ ,  $D_e = D$ ,  $D_c = 0$ ) et dont on ne possède qu'une unique observation  $t$  ( $N = 1$ ). La perturbation des données est supposée gaussienne, centrée et uniforme, de variance  $\sigma^2$ . Ces simplifications permettent de déterminer *analytiquement* l'expression de la variance des composante de l'unique vecteur d'onde paramétrant le signal ; celle-ci est paramétrée par  $\|\mathbf{z}_d\|$  uniquement (IV.3.24). Cette variance s'exprime en fonction des paramètres intrinsèques de la méthode (pas de grille  $\mathbf{h}$ , lissage spatial  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  et décimation  $\delta$ ). L'influence de ceux-ci peut alors être étudiée de façon à guider leur choix en général.

Le choix des paramètres ci-dessus permet d'écrire le modèle de signal suivant :

$$u(\mathbf{x}) = \beta \exp(\mathbf{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (\text{IV.3.26})$$

Ce signal est observé sous sa version discrétisée  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{\mathbf{L}}$  sur une grille  $\mathcal{X}$  de taille  $\mathbf{L}$  (IV.2.6). On utilise les techniques de lissage spatial (IV.2.51) et de décimation (IV.2.62) pour estimer le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :  $\mathbf{M}$  sous-grilles réduites de taille  $(\mathbf{K} \circ \delta)$  sont formées *virtuellement*, puis décimées de  $\delta$  pour former les grilles réduites et décimées  $\mathcal{X}_{\mathbf{m}}^\delta$ .

**Proposition IV.3.12.** *Dans le cas d'un signal composé d'une seule exponentielle, la variance des composantes de l'unique vecteur d'onde s'expriment sous la forme suivante :*

$$\boxed{\text{var}(\mathbf{k}_d) = \frac{\sigma^2}{|\beta|^2} \frac{1}{|\nu_d^{\delta_d}|^2} \frac{1}{h_d^2 \delta_d^2} f(\mathbf{K}_d, \mathbf{M}_d, \delta_d) \prod_{i \neq d} g(\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i, \delta_i)} \quad (\text{IV.3.27})$$

$$f(\mathbf{K}_d, \mathbf{M}_d, \delta_d) = \frac{\|\mathbf{v}_1^{\mathbf{M}_d} * (\mathbf{J}^{\delta_d} (\mathbf{J}_{\downarrow d}^{\mathbf{K}} - *_{\nu_d^{\delta_d}} \mathbf{J}_{\uparrow d}^{\mathbf{K}_d}) \mathbf{v}_{\delta_d}^{\mathbf{K}_d-1})\|^2}{\|\mathbf{v}_{\delta_d}^{\mathbf{K}_d-1}\|^4 \|\mathbf{v}_1^{\mathbf{M}_d}\|^4} \quad (\text{IV.3.28})$$

$$g(\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i, \delta_i) = \frac{\|\mathbf{v}_1^{\mathbf{M}_i} * (\mathbf{J}^{\delta_i} \mathbf{v}_{\delta_i}^{\mathbf{K}_i})\|^2}{\|\mathbf{v}_{\delta_i}^{\mathbf{K}_i}\|^4 \|\mathbf{v}_1^{\mathbf{M}_i}\|^4} \quad (\text{IV.3.29})$$

avec  $\mathbf{v}_{\delta_d}^{\ell_d} = [1 \ \nu_d^{\delta_d} \ \dots \ \nu_d^{(\ell_d-1)\delta_d}]$ , où  $\nu_d = \exp(\mathbf{i} h_d \mathbf{k}_d)$ .

*Démonstration.* Voir annexe G.2.1. □

Cette expression généralise le résultat déjà obtenu en [191, 208] pour l'algorithme ND-ESPRIT standard, qui peut-être retrouvé en posant  $\delta = \mathbf{1}$ . L'expression de la variance de  $\mathbf{k}_d$  est caractérisée par deux termes : (i) le terme  $f(\mathbf{K}_d, \mathbf{M}_d, \delta_d)$  qui donne la dépendance en fonction

des paramètres selon la dimension  $d$  associée à la composante  $k_d$ ; (ii) les termes  $g(\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i, \delta_i)$ , pour  $i \neq d$ , qui sont donc associés aux paramètres selon les autres dimensions. Dans le cas multidimensionnel et pour un vecteur d'onde complexe en général, les fonction  $f$  et  $g$  correspondant à la méthode ND-ESPRIT standard ont été dérivées analytiquement [191]. Cette dérivation analytique est généralisée ici en prenant en compte la décimation, mais seulement dans le cas de vecteurs d'onde réels. Le cas complexe (exponentielle amortie) peut être traité en évaluant numériquement les termes  $f$  et  $g$ . On se propose dans ce qui suit d'étudier séparément ces deux termes.

**Étude de  $f(\mathbf{K}_d, \mathbf{M}_d, \delta_d)$**  Il est montré en annexe G.2.1 que dans le cas où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est réel (soit  $|\nu_d^{\delta_d}| = 1$ ),  $f$  se met sous la forme suivante :

$$f(\mathbf{K}_d, \mathbf{M}_d, \delta_d) = 2 \frac{\min(\mathbf{M}_d, (\mathbf{K}_d - 1)\delta)}{(\mathbf{K}_d - 1)^2 \mathbf{M}_d^2} \quad (\text{IV.3.30})$$

On rappelle alors la relation qui lie les tailles  $\mathbf{L}$  de la grille de mesure complète, les tailles  $\mathbf{K}$  des sous-grilles réduites et décimées et le nombre  $\mathbf{M}$  de ces sous-grilles (IV.2.58) :

$$\mathbf{L}_d = (\mathbf{K}_d - 1)\delta_d + \mathbf{M}_d \quad (\text{IV.3.31})$$

On définit également le *facteur de lissage spatial*  $s_d = \mathbf{M}_d / \mathbf{L}_d$ . Cela permet de réécrire le terme  $f$  sous la forme :

$$f(s_d, \mathbf{L}_d, \delta_d) = \frac{\delta_d^2}{\mathbf{L}_d^3} \frac{\min(s_d, 1 - s_d)}{s_d^2 (1 - s_d)^2} \quad (\text{IV.3.32})$$

De façon remarquable, cette expression montre que  $f$  est symétrique par rapport à  $s_d = 1/2$  ou encore  $(\mathbf{K}_d - 1)\delta_d = \mathbf{M}_d$ . En conséquence, il est possible de se limiter aux cas pour lesquels  $(\mathbf{K}_d - 1)\delta_d \leq \mathbf{M}_d$ ; ceci permet de limiter la taille de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{uu}^{SS, \delta}$  (équation (IV.2.65), de taille  $\lfloor \mathbf{K} \rfloor \times \lfloor \mathbf{K} \rfloor$ ) et ainsi de réduire la puissance de calcul nécessaire pour estimer le sous-espace principal  $\mathbf{W}$ .

Il est alors possible de trouver les paramètres de lissage qui minimisent la fonction  $f(s_d)$ , à longueur  $\mathbf{L}_d$  et décimation  $\delta_d$  fixées, par l'expression et l'annulation de la dérivée  $\partial f(s_d) / \partial s_d$  pour  $s_d \in [1/2, 1]$ .

**Proposition IV.3.13.** *Dans le cas où le vecteur d'onde est réel, le choix du facteur de lissage optimal correspond à*

$$\boxed{s_d^{\text{opt}} = 2/3 \quad \text{soit} \quad \mathbf{M}_d^{\text{opt}} = \frac{\mathbf{L}_d}{3} \quad \text{d'où} \quad f^{\text{opt}}(\mathbf{L}_d, \delta_d) = \frac{27}{4} \frac{\delta_d^2}{\mathbf{L}_d^3}} \quad (\text{IV.3.33})$$

Ce résultat est également bien connu dans le cas de la méthode ESPRIT standard; on montre donc ici que la technique de décimation n'influe pas sur celui-ci.

Dans le cas *unidimensionnel* ( $D = 1$ ), seul le terme  $f$  entre en compte dans l'expression de la variance du nombre d'onde  $k$  (IV.3.27); dans ce cas, celle-ci se met, dans le cas optimal (IV.3.33), sous la forme suivante :

$$\text{var}(\text{Re}\{k\})^{\text{opt}} = \frac{27}{4} \frac{\sigma^2}{|\beta|^2} \frac{1}{h^2 \mathbf{L}^3} = \frac{9}{8} \text{CRB}(k) \quad (\text{IV.3.34})$$



En conséquence, dans le cas d'un signal unidimensionnel composé d'une seule exponentielle non amortie, la *performance de la méthode ESPRIT proposée est indépendante du facteur de décimation*. Ce résultat important, démontré ici, a été observé par une approche type Monte-Carlo dans [145] ; il permet de justifier l'utilisation de la technique de décimation. En particulier, il permet d'envisager de mettre à profit une grille de mesure *très fine* : (i) un grand nombre de points  $L$  fait diminuer la variance des nombres d'onde estimés ; (ii) la technique de décimation permet de garder le coût de calcul raisonnable. L'expression (IV.3.34) donne aussi la performance de l'estimation du nombre d'onde par la méthode ESPRIT en fonction de la borne de Cramer-Rao associée (IV.3.1) ; l'efficacité théorique (inverse de la variance effective ramenée au CRB) est de 8/9. Elle ne dépend *ni du nombre d'onde, ni de l'amplitude* de l'exponentielle. Ce résultat est classique dans le cas de l'algorithme ND-ESPRIT standard [191, 208] et reste inchangé dans le cas décimé.

Sur la figure IV.3 est reporté le résultat analytique de la variance de la partie réelle du nombre d'onde  $k$  en fonction du facteur de lissage spatial  $s = M/L$ , sans décimation ( $\delta = 1$ ) et pour différentes valeurs de la partie imaginaire du nombre d'onde  $\tau$  (décroissance spatiale de l'onde). Cette variance est rapportée à la borne de Cramer-Rao correspondante (IV.3.1) ; de plus, les différentes courbes correspondant aux différentes décroissances spatiales sont dénotées par des valeurs  $\tau \times h \times L$  allant de 0 (cas non amorti) à 10. Cet adimensionnement correspond à la

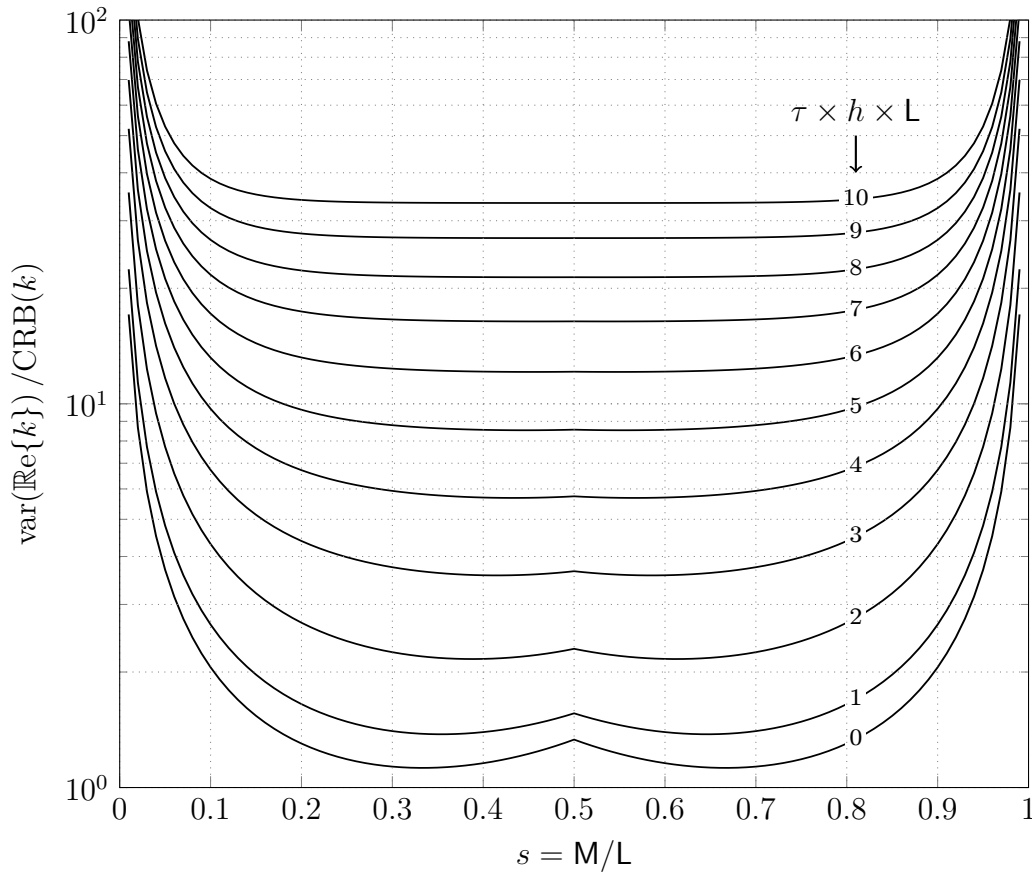


FIGURE IV.3 – Performances de l'estimation ESPRIT sans décimation ( $\delta = 1$ ) dans le cas d'un signal unidimensionnel composé d'une seule exponentielle. Variance du nombre d'onde relative à la borne de Cramer-Rao (IV.3.1), en fonction du facteur de lissage spatial  $s$ , et pour différentes valeurs de décroissance spatiale de l'onde  $\tau = \text{Im}\{k\}$ .



décroissance du signal entre les deux extrémités du maillage, donnée par ( $u_1/u_L = \exp(\tau hL)$ ). Il a été observé que cette représentation *ne dépend pas de la taille du maillage* choisi, pour  $L > 50$ ; il a également été observé que *la décimation laisse quasiment inchangée cette représentation* ( $\delta \neq 1$ ), tant que la taille des sous-grilles réduites et décimées reste *raisonnable* (cad.  $K > 5$ ). Elle pourra ainsi servir d'*abaque* dans le cas des signaux unidimensionnels. Dans le cas des signaux multidimensionnels, elle est également valable si on prend en compte l'influence des termes  $g(K_i, M_i, \delta_i)$ .

Les trois résultats donnés plus haut sont bien visibles sur la figure IV.3 : (i) la variance de  $\Re\{k\}$  est symétrique par rapport à  $s = 1/2$ ; (ii) dans le cas réel ( $\tau = 0$ ), le facteur d'adoucissement spatial optimal est  $s = 2/3$  (ou son symétrique, moins intéressant d'un point de vue computationnel); (iii) dans ce même cas, la variance du nombre d'onde est égale à  $9/8 = 1.125$  fois la borne de Cramer-Rao.

Par rapport à ces résultats, la représentation donnée en figure IV.3 permet également d'observer l'influence de l'amortissement de l'onde sur les performances de l'estimation par la méthode ESPRIT. En particulier, on remarque que l'amortissement de l'onde fait augmenter la variance du nombre d'onde : l'énergie contenue dans le signal est inhomogène. Avec l'augmentation de l'amortissement, le facteur de lissage spatial  $s$  optimal semble se rapprocher de  $1/2$ . Toutefois, le choix  $s = 2/3$  semble toujours très correct; on choisira donc systématiquement ce facteur de lissage spatial.

**Etude de  $g(K_i, M_i, \delta_i)$**  Dans le cas des signaux multidimensionnels composés d'une seule composante exponentielle ( $R = 1$ ,  $D_e = D$ ,  $D_c = 0$ ), l'expression de la variance de la  $d^{\text{ième}}$  composante du vecteur d'onde donnée en (IV.3.27) fait apparaître un second terme  $g$ . Celui-ci dépend (voir équation (IV.3.29)) des paramètres de la méthode (lissage spatial, décimation) dans les dimensions  $i \neq d$  ainsi que des composantes du vecteur d'onde dans ces mêmes dimensions; ceux-ci sont contenus dans les vecteurs *pilotes*  $\mathbf{v}_\delta^{(\ell)}$ .

L'expression analytique de  $g$  est dérivée en annexe G.2.1, dans le cas où le vecteur d'onde est réel et où les longueurs de grille sont des multiples de la décimation :  $M_i = \delta_i M'_i$ , soit  $L_i = (K_i + M'_i - 1)\delta_i$ . Elle prend la forme suivante :

$$g(K_i, M_i, \delta_i) = \frac{\delta_i N_\ominus^2}{K_i^2 M_i^2} \left( N_\oplus - \frac{N_\ominus^2 - 1}{3N_\ominus} \right) \quad (\text{IV.3.35})$$

avec  $N_\oplus = \max(K_i, M'_i)$  et  $N_\ominus = \min(K_i, M'_i)$ . On remarque alors directement que cette expression est symétrique par rapport à  $M'_i = K_i$ ; une nouvelle fois, l'intérêt étant de limiter  $K_i$  pour limiter la taille de la matrice de covariance, on se sert de cette propriété de symétrie pour n'étudier  $g$  que pour les  $K_i \leq M'_i$ . En posant  $s_i = M_i/L_i$  le facteur de lissage spatial dans la direction  $i$ , on étudie seulement  $g$  pour  $s_i \geq (1 + \delta_i/L_i)/2$ ; l'expression de  $g$  se met alors sous la forme :

$$g(s_i, L_i, \delta_i) = \frac{1}{s_i L_i} \left( 1 - \frac{(1 - s_i)}{3s_i} \left[ 1 + \frac{1}{(1 - s_i) + \frac{\delta_i}{L_i}} \right] \right) \quad (\text{IV.3.36})$$

Le terme entre crochets  $[\bullet]$  étant strictement supérieur à 1 et croissant avec  $\delta_i$ , la fonction  $g$  décroît avec  $\delta_i$ . En conséquence, *la décimation ne dégrade pas l'estimation des composantes du vecteur d'onde*.

On a pu remarquer lors de l'étude de  $f(s_d, L_d, \delta_d)$  que le choix optimal pour l'estimation de la  $d^{\text{ième}}$  composante du vecteur d'onde  $k_d$  correspond à  $s_d = 2/3$ . Ici,  $g$  est strictement décroissante en fonction de  $s_i$ ; l'optimal consisterait donc à choisir  $s_i = 1$  pour  $i \neq d$ . Toutefois, ce choix est

très mauvais pour l'estimation des autres composantes du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$ , puisque  $f(s_i, L_i, \delta_i)$  deviendrait grand. En conséquence, *on choisit le facteur de lissage spatial* tel que  $s_j = 2/3$  pour *toutes les dimensions*  $j \in \{1, \dots, D\}$ . Ce choix est d'autant plus raisonnable que la fonction  $g$  correspondant à un vecteur d'onde réel varie en fait très peu pour  $s_i \in [1/2, 1]$ ; le choix donc proposé permet alors de conserver des performances proches de l'optimal.

## IV.4 Estimation de l'ordre du signal

La section qui suit s'intéresse à l'estimation de l'ordre du signal  $R$  à partir des données mesurées. Celui-ci, correspondant au nombre de composantes nécessaires pour modéliser *correctement* les données mesurées, a jusqu'ici été supposé connu. Il est souvent possible, à partir d'arguments physiques et/ou d'observations, d'en donner un encadrement du type  $R \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket$ ; toutefois, la valeur *exacte* de l'ordre du signal est, dans la majeure partie des cas, inconnue. Il est donc nécessaire d'implémenter un *critère* permettant d'*estimer* l'ordre du signal.

La méthode ESPRIT n'est pas seule concernée par le critère du choix de l'ordre du signal; en réalité, toute méthode d'identification basée sur le principe du maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood*) et dont la finalité est l'identification des paramètres d'un modèle linéaire est soumise à cette problématique. Plus globalement, toutes les méthodes utilisant la décomposition en sous-espaces de la matrice de covariance des données (voir équation (IV.2.37)) sont concernées [225]. Le développement de critères pour le choix de l'ordre du signal reçoit en conséquence un fort intérêt de la part de la communauté scientifique; la littérature qui leur est consacrée est conséquente et les approches diversifiées [210, 108].

Dans ce qui suit, quatre critères de sélection de l'ordre du signal sont évoqués. Ceux-ci appartiennent à trois catégories, fonctions des approches qui justifient leur formulation : (i) l'ordre de la matrice de covariance des données (critère MDL [180]); (ii) la qualité de l'estimation des matrices spectrales (critères ESTER [14] et SAMOS [159]) et (iii) la stabilité des paramètres du modèle de signal identifiés (critères de stabilisation).

### IV.4.1 Influence d'une mauvaise estimation de l'ordre

Avant de développer différents critères de sélection d'ordre de signal adaptés à la méthode ESPRIT, il convient de rappeler deux résultats intéressants qui sont démontrés dans la thèse de Roland Badeau [11]. Ceux-ci concernent l'influence d'une *mauvaise* estimation de l'ordre du signal sur les performances de la méthode ESPRIT standard (explicitée en introduction, voir section IV.1.3) appliquée à des données *non perturbées*. Ces résultats se généralisent bien au cas de la méthode ND-ESPRIT standard [126] ( $D = D_e \geq 1$ ,  $D_c = 0$ ).

**Propriété IV.4.1.** *Soient  $P$  l'ordre choisi et  $R$  l'ordre vrai du signal. Alors l'estimation des paramètres à partir des données non perturbées est régie par les deux résultats suivants :*

- Si  $P \leq R$ , une borne supérieure s'applique sur la norme de l'erreur sur les composantes du vecteur polaire  $\boldsymbol{\pi}$  (équation (IV.2.6)). Cette borne est proportionnelle au résidu de l'estimation des matrices spectrales  $\mathbf{F}$  (IV.2.42) et au conditionnement de la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^L$  (équation (IV.2.25)).
- Si  $P > R$ , les  $P$  pôles identifiés  $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \mathbb{C}^P$  contiennent les  $R$  pôles vrais  $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{C}^R$ .

A priori, une *surestimation* de l'ordre du signal est donc préférable à une *sous-estimation* de celui-ci. Toutefois, il est en pratique difficile de distinguer les composantes *vraies*, qui contiennent les paramètres du signal à identifier, des composantes *mathématiques*, qui décrivent le bruit des mesures. Il est donc nécessaire de disposer de critères de sélection de l'ordre du signal adaptés.

### IV.4.2 Critère MDL : *Minimum Description Length*

Comme cela a pu être montré plus haut lors de la présentation de la méthode ESPRIT, l'ordre du signal  $R$  est égal au nombre de valeurs propres non nulles  $\boldsymbol{\lambda}$  de la matrice de covariance des données *non perturbées* (voir équation (IV.2.37)), celles-ci étant associées au sous-espace *signal* ; les valeurs propres restantes de cette même matrice, associées au sous-espace *bruit*, sont nulles  $\boldsymbol{\lambda}_\perp = \mathbf{0}$ .

Lorsqu'une perturbation de type bruit blanc uniforme de variance  $\sigma^2$  est introduite sur les données, il est montré en propriété IV.2.1 que les valeurs propres de la matrice de covariance perturbée deviennent  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} + \sigma^2$  et  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\perp = \boldsymbol{\lambda}_\perp + \sigma^2$  ; en conséquence, les valeurs propres associées au sous-espace bruit deviennent non-nulles. Toutefois, puisque toutes les valeurs propres sont translatées de  $\sigma^2$ , l'ordre de celles-ci reste inchangé : les valeurs propres associées au sous-espace signal restent dominantes, quelque soit la variance du bruit  $\sigma^2$ .

De nombreux critères de sélection de l'ordre du signal sont donc basées sur l'étude des valeurs propres  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  de la matrice de covariance des données mesurées. Ceux-ci partent de l'hypothèse de *parcimonie*, c'est à dire que les données observées peuvent être décrites par un nombre *réduit* de paramètres ; ici, un paramètre correspond à un vecteur propre de la matrice de covariance. En particulier, les critères d'information de Akaike [3] (AIC pour *Akaike Information Criterion*) ou de Bayes [108] (BIC pour *Bayesian Information Criterion*) peuvent être appliqués à la sélection de l'ordre sur la base des valeurs propres  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ .

Le critère MDL pour *Minimum Description Length*, proposé par Rissanen [180, 181] fait partie de cette catégorie de critères. Si le rapport signal à bruit est *raisonnable*, la suite des valeurs propres  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, \tilde{\lambda}_K\}$  est caractérisée par une *cassure* au passage de l'espace signal à l'espace bruit, c'est à dire entre  $\tilde{\lambda}_R$  et  $\tilde{\lambda}_{R+1}$ .

**Definition IV.4.1** (Critère MDL). *Sachant  $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{R}^+$  et  $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_K$ , le critère MDL s'écrit comme suit :*

$$\text{MDL}(r) = \frac{\tilde{\lambda}_r - \tilde{\lambda}_{r+1}}{\tilde{\lambda}_r} \quad (\text{IV.4.1})$$

*et est strictement positif et inférieur à 1. L'ordre du signal  $P$ , choisit tel qu'il maximise le critère ci-dessus, correspond donc au plus fort contraste observé entre deux valeurs propres successives de la matrice de covariance des données perturbées.*

Le critère MDL est avantageux par sa simplicité d'implémentation. En effet, les valeurs propres  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  de la matrice de covariance sont calculées dans la méthode ESPRIT au moment de l'estimation de l'espace signal  $\tilde{\mathbf{W}}$  (équation (IV.2.37)). Le coût de calcul ajouté pour l'estimation de l'ordre du signal par le critère MDL (IV.4.1) est en conséquence négligeable. De plus, ce critère ne dépend pas du modèle de signal choisit ; il peut donc être appliqué à une large variété de problèmes.

Lorsque le rapport signal-sur-bruit (SNR) diminue, le contraste entre les valeurs propres associées à l'espace signal et celles associées à l'espace bruit diminue également. Le critère MDL devient donc inopérant lorsque le bruit de mesure augmente : l'ordre du signal est alors surestimé par ce critère. De plus, celui-ci est basé sur le rang de la matrice de covariance des données seulement : ce rang n'a pas forcément de lien *direct* avec la forme des fonctions harmoniques dont on cherche à identifier les paramètres. En conséquence, l'estimation de  $R$  par le critère MDL est encore dégradée lorsque des contributions non-harmoniques sont présentes dans le signal (effets de bord, efforts ponctuels, etc.).

Fort de ce constat, on s'intéresse dans la suite à des critères plus *spécifiques* à la méthode ESPRIT ; ceux-ci sont basés sur la *qualité* des estimations faites par la méthode en fonction de l'ordre du signal choisit  $P$ .

### IV.4.3 Critère ESTER : *ESTimation of ERror*

Proposé par Roland Badeau [14], le critère ESTER (ESTimation of ERror) s'appuie sur la propriété IV.4.1 citée plus haut et qui correspond au cas où les données ne sont *pas perturbées*. Le critère est en effet justifié par la borne sur l'erreur des pôles dans le cas d'une sous-estimation de l'ordre du signal ( $P \leq R$ ). Dans le cas de la méthode ESPRIT standard explicitée en introduction (voir section IV.1.3), la borne s'écrit comme suit.

**Propriété IV.4.2.** [11, Corrolaire IV.2.3, page 56] : Soient, pour  $p \leq R$ , les  $p$  valeurs propres  $\tilde{\pi}_i$  de la matrice spectrale  $\mathbf{F}(p)$  estimée à partir des  $p$  vecteurs propres  $\mathbf{W}(p)$  de la matrice de covariance des données non perturbées. Alors il existe  $r \in \{1, \dots, R\}$  tel que :

$$|\tilde{\pi}_i - \pi_r| \leq \zeta \|\mathbf{W}_{\downarrow}(p) - \mathbf{W}_{\uparrow}(p)\mathbf{F}(p)\| \quad (\text{IV.4.2})$$

où  $\boldsymbol{\pi}$  est le vecteur polaire exact. Le scalaire  $\zeta$  est lié au conditionnement de la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^L$  associée au modèle de signal exact ; il est indépendant de  $p$ .

L'erreur sur l'estimation des composantes polaires  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  est donc directement proportionnelle au résidu de l'estimation de la matrice  $\mathbf{F}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p)^{\dagger} \mathbf{W}_{\downarrow}(p)$ . L'ordre  $p$  qui minimise celui-ci est donc, dans le cas de données non perturbées, égal à l'ordre du signal  $R$  ; ce constat est à l'origine de la proposition du critère ESTER.

Le résultat ci-dessus a plus tard été étendu au cas de la méthode ND-ESPRIT standard [126] pour des signaux de dimension  $D \geq 1$ . Dans ce cas,  $D$  bornes sont exprimées sur les composantes des vecteurs polaires  $\boldsymbol{\pi}_d$ ,  $d \in \llbracket 1, D \rrbracket$ . Ces bornes sont proportionnelles au résidu de l'estimation des  $D$  matrices spectrales  $\mathbf{F}_d(p)$ , celle-ci étant réalisée à partir des  $D$  relations d'invariance rotationnelle utilisées dans la méthode standard.

La généralisation de ces résultats à la méthode ESPRIT proposée dans ce travail est directe.

**Propriété IV.4.3.** Soient les  $p$  valeurs propres  $\tilde{\pi}_i^{\mathbf{q},\delta}$  (IV.2.18) de la matrice spectrale  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}(p)$  estimée à partir des  $p$  vecteurs propres  $\mathbf{W}(p)$  de la matrice de covariance des données non perturbées (IV.2.69). Alors, quel que soit le vecteur translation  $\mathbf{q}$ , il existe  $r \in \{1, \dots, R\}$  tel que :

$$|\tilde{\pi}_i^{\mathbf{q},\delta} - \pi_r^{\mathbf{q},\delta}| \leq \zeta^{\mathbf{q},\delta} \|\mathbf{W}_{\downarrow\mathbf{q}}(p) - \mathbf{W}_{\uparrow\mathbf{q}}(p)\mathbf{F}^{\mathbf{q}}(p)\| \quad (\text{IV.4.3})$$

où  $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q},\delta}$  est le vecteur polaire exact. Le scalaire  $\zeta^{\mathbf{q},\delta}$  est lié au conditionnement de la matrice pilote  $\mathbf{V}_{\delta}^{\mathbf{K}}$  associée au modèle de signal exact (voir équation (IV.2.25)) ; il est indépendant de  $p$ .

Dans le cadre de la méthode proposée,  $Q$  vecteurs translation  $\mathbf{q}$  sont utilisés pour formuler autant de relations d'invariance rotationnelle, permettant au final d'estimer les vecteurs polaires (IV.2.18). En conséquence,  $Q$  bornes de la forme donnée ci-dessus peuvent être formulées. Celles-ci sont proportionnelles aux résidus des estimations des matrices spectrales  $\mathbf{F}^{\mathbf{q}}(p)$ . Ceux-ci peuvent être calculés *a posteriori*.

Un nouvelle fois, ces bornes ne sont valables que dans le cas d'utilisation de données *non perturbées*. En présence de données perturbées, le résidu de l'estimation de  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{q}}(R)$ , correspondant à l'ordre du signal *exact*  $R$ , est non-nul. Le critère ESTER multidimensionnel consiste donc à *maximiser* une fonctionnelle basée sur l'inverse de ces résidus, et fonction de l'ordre  $p$ .

**Definition IV.4.2** (Critère ESTER). *Dans le cadre du critère ESTER, l'ordre du signal estimé  $P$  est choisit parmi une liste d'ordres candidats  $p \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket$  tel qu'il maximise une combinaison  $\Gamma$  de l'inverse résidus de l'estimation des  $Q$  matrices spectrales  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{q}_n}$ ,  $n \in \{1, \dots, Q\}$  :*

$$P = \arg \max_{p \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket} \Gamma(\epsilon_1^{-1}(p), \dots, \epsilon_Q^{-1}(p)) \quad (\text{IV.4.4})$$

$$\epsilon_n(p) = \|\tilde{\mathbf{W}}_{\uparrow \mathbf{q}_n}(p) - \tilde{\mathbf{W}}_{\downarrow \mathbf{q}_n}(p) \mathbf{F}^{\mathbf{q}_n}(p)\|$$

où  $\Gamma : \mathcal{R}^Q \rightarrow \mathcal{R}$  peut représenter la sommation (ESTER-I) ou le produit (ESTER-II) des inverses des  $Q$  résidus  $\epsilon_n(p)$  [126].

Il est possible de montrer que, quelque soit  $p$ ,  $\epsilon_n(p) \leq 1$ . En conséquence, la fonction  $\Gamma$  est strictement supérieure à 1.

Contrairement au critère MDL (IV.4.1) et la multitude de critères basés sur l'étude des valeurs propres de la matrice de covariance, le critère ESTER se sert des propriétés d'invariance rotationnelle du modèle de signal. Cela le rend moins sensible à une perturbation des données *colorée* (densité spectrale du bruit non uniforme) et/ou *corrélée* (matrice de covariance du bruit non diagonale).

Ce critère est donc performant lorsque les hypothèses sur le modèle de signal sont respectées. Dans le cas contraire, le résidu augmente et l'ordre du signal est souvent sous-estimé [14]. Une solution peut alors consister à choisir un ordre  $P_\alpha$  tel que la fonction  $\Gamma(P_\alpha)$  soit supérieure à sa valeur maximale  $\Gamma(P)$  (IV.4.4) multipliée par une valeur seuil  $\alpha \leq 1$  :

$$P_\alpha = \arg \max_{p' \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket} \left\{ p \mid \Gamma(p) \geq \alpha \Gamma(P) \right\} \quad (\text{IV.4.5})$$

Cette stratégie permet parfois d'améliorer les capacités de détection du critère ESPRIT [70]. Toutefois, le choix du coefficient  $\alpha$  pose souvent problème, car le contraste entre les différentes valeurs de  $\Gamma(p)$  dépend d'un nombre de facteurs inconnus *a priori* (i.e niveau de bruit, nombre de composantes présentes dans le signal).

#### IV.4.4 Critère SAMOS : *Subspace-based Automatic Model Order Selection*

Le critère ESTER est, comme on l'a vu, basé sur le résidu des estimations des matrices spectrales  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{q}}$ . Ces estimations sont réalisées au sens des moindres carrés, à partir des versions tronquées du sous espace signal  $\tilde{\mathbf{W}}_{\uparrow \mathbf{q}}(p)$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_{\downarrow \mathbf{q}}(p)$ . Or l'estimation aux moindres carrés suppose que seules les *mesures* soient bruitées (ici  $\tilde{\mathbf{W}}_{\downarrow \mathbf{q}}(p)$ ) ; la matrice des *variables*, ici  $\tilde{\mathbf{W}}_{\uparrow \mathbf{q}}(p)$ , est supposée connue *exactement*. Ce n'est évidemment pas le cas, puisque ces deux matrices sont formées à partir de données perturbées.

Lorsque le bruit  $\Delta \mathbf{U}(t)$  et le signal pur  $\mathbf{U}(t)$  sont décorrélés (cad.  $\mathbb{E} \{ \Delta \mathbf{U}(t)^H \mathbf{U}(t) \} = 0$ ), la décomposition en sous-espaces de la matrice de covariance des données sépare correctement les deux contributions (cela vient de l'orthogonalité des sous-espaces signal  $\tilde{\mathbf{W}}(p)$  et bruit  $\tilde{\mathbf{W}}_{\perp}(p)$ , voir équation (IV.2.37)). En conséquence, l'influence du bruit sur les matrices  $\tilde{\mathbf{W}}_{\uparrow \mathbf{q}}(p)$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_{\downarrow \mathbf{q}}(p)$  est faible ; le critère ESTER est alors performant. Dans le cas où la perturbation des données est corrélée aux données non perturbées, le sous-espace signal  $\tilde{\mathbf{W}}$  décrit pour partie



cette perturbation. En conséquence, l'estimation aux moindres carrés des matrices spectrales  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{q}}(p)$  est biaisée par la présence de ces perturbations.

La situation où le bruit est corrélé aux données pures est en réalité rencontrée fréquemment : elle peut par exemple venir d'un modèle de signal trop approximatif (la partie du signal non modélisée est alors considérée comme faisant partie des perturbations) ; elle peut également venir du dispositif de mesure (i.e. mauvais positionnement des capteurs, corrélation entre les capteurs). Un critère de choix de l'ordre du signal prenant en compte l'erreur sur la matrice des *variables*  $\tilde{\mathbf{W}}_{\uparrow \mathbf{q}}(p)$  est en conséquence nécessaire ; c'est la proposition du critère SAMOS, pour *Subspace-based Automatic Model Order Selection* [159].

Le critère SAMOS s'inspire de la méthode TLS-ESPRIT, dont l'idée est d'employer la technique des moindres carrés *totaux* (*Total Least Squares*) pour estimer les matrices spectrales  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{q}}$ . Cette technique particulière permet de prendre en compte le bruit sur les *variables* lors de l'estimation [224]. La résolution de cette méthode de régression linéaire passe par la décomposition en valeurs singulières d'une matrice  $\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p) \in \mathbb{C}^{|\mathbf{K}-\mathbf{q}| \times 2p}$  composée des mesures *et* des variables :

$$\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\uparrow \mathbf{q}}(p) & \mathbf{W}_{\downarrow \mathbf{q}}(p) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4.6})$$

Il est montré dans [159] que *dans le cas de données non perturbées*, le rang de  $\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p)$  est *supérieur* à l'ordre du signal exact  $R$  pour  $p \neq R$ , et *égal* à  $R$  pour  $p = R$ . En conséquence, la minimisation du rang de  $\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p)$  en fonction de  $p$  représente un critère pour l'estimation de  $R$ . Pour cela, la matrice  $\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p)$  peut s'écrire sous la forme suivante, qui correspond à sa décomposition en valeurs singulières (SVD) :

$$\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p) = \mathbf{\Upsilon}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{L}}(p) \text{diag}(\gamma^{\mathbf{q}}(p)) \mathbf{\Upsilon}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{R}}(p) \quad (\text{IV.4.7})$$

où  $\mathbf{\Upsilon}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{L}}(p)$  et  $\mathbf{\Upsilon}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{R}}(p)$  sont respectivement les sous-espaces de gauche et de droite de  $\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p)$ . Le vecteur  $\gamma^{\mathbf{q}}(p) \in \mathbb{R}^Z$ , avec  $Z = \min(|\mathbf{K} - \mathbf{q}|, 2p)$ , contient les valeurs singulières de cette matrice, classées dans l'ordre décroissant :  $\gamma_1^{\mathbf{q}} \geq \gamma_2^{\mathbf{q}} \geq \dots \geq \gamma_Z^{\mathbf{q}}$ . Le rang de  $\mathbf{S}^{\mathbf{q}}(p)$  correspond alors au nombre de ses valeurs propres *nulles*. Puisque ce rang est *supérieur* à  $R$  pour  $p < R$  et  $p > R$ , la somme des  $p$  dernières valeurs propres  $[\gamma_{Z-p+1}^{\mathbf{q}}, \dots, \gamma_Z^{\mathbf{q}}]$  est nulle si et seulement si  $p = R$ .

Lorsque les données sont perturbées, la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{q}}(p)$  est de rang plein, c'est à dire que quelque soit  $i \in \llbracket 1, Z \rrbracket$ ,  $\tilde{\gamma}_i^{\mathbf{q}} > 0$ . Le critère SAMOS consiste donc à trouver l'ordre  $p$  qui *minimise* la moyenne des  $p$  dernières valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{q}}(p)$ .

**Definition IV.4.3** (Critère SAMOS). *L'ordre du signal estimé  $P$  par le critère SAMOS est choisit parmi une liste d'ordres candidats  $p \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket$  tel qu'il maximise une combinaison  $\Gamma$  de l'inverse de la moyenne des  $p$  valeurs singulières les plus faibles des  $Q$  matrices  $\tilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{q}_n}$  (IV.4.6),  $n \in \{1, \dots, Q\}$  :*

$$P = \arg \max_{p \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket} \Gamma(\epsilon_1^{-1}(p), \dots, \epsilon_Q^{-1}(p)) \quad (\text{IV.4.8})$$

$$\epsilon_n(p) = \frac{1}{p} \sum_{z=Z-p+1}^Z \tilde{\gamma}_z^{\mathbf{q}_n}$$

où  $\Gamma : \mathcal{R}^Q \rightarrow \mathcal{R}$  peut représenter la sommation ou le produit des inverses des  $Q$  moyennes  $\epsilon_n(p)$ .

Le critère SAMOS présente, par une meilleure prise en compte de l'influence des données perturbées sur l'espace signal  $\widetilde{\mathbf{W}}$ , des performances meilleures que le critère ESTER [159]. Dans la communauté des télécommunications, qui s'intéresse fortement au développement des méthodes haute résolution comme ESPRIT, ce critère semble toutefois peu utilisé. Cela est notamment dû à la perte d'*ouverture* (reliée au nombre de composantes maximum *déTECTABLES*) qu'il impose. En effet, on a vu que le nombre de valeurs propres de  $\mathbf{S}^q(p)$  est égal à  $Z = \min(\lfloor \mathbf{K} - \mathbf{q} \rfloor, 2p)$  (IV.4.7). En conséquence, l'ordre maximum du signal détectable est  $p^{\max} = (\lfloor \mathbf{K} - \mathbf{q} \rfloor)/2$ . Dans le cas du critère ESTER, l'ordre maximum correspond à la taille complète de la grille de mesure tronquée, soit  $p^{\max} = \lfloor \mathbf{K} - \mathbf{q} \rfloor$ . Deux fois plus de composantes peuvent donc être détectées par le critère ESTER. Dans les applications visées par les télécommunications, le nombre de capteurs  $\lfloor \mathbf{K} \rfloor$  peut être assez réduit (i.e. antennes); dans ce cas, cette perte d'ouverture est critique. Toutefois, dans les applications visées ici, la taille des grilles de mesure est beaucoup plus conséquente (échantillonnage temporel, mesures *plein-champ*, etc.); la perte d'ouverture entraînée par le critère SAMOS est donc moins critique.

#### IV.4.5 Critères de *stabilisation*

Les deux critères précédents (ESTER et SAMOS) sont basés sur les propriétés d'invariance rotationnelle du modèle de signal supposé par la méthode ESPRIT. Par rapport au critère MDL, ils sont particulièrement performants lorsque le modèle de signal décrit bien les mesures. Leurs capacités de détection de l'ordre du signal chute toutefois fortement lorsque les mesures contiennent de l'information qui n'est ni du bruit, ni décrite par le modèle de signal. Cette configuration est souvent rencontrée dans un cadre expérimental : non-linéarité de la réponse de la structure, chargement inconnu, etc.

Dans ce cas, une possibilité consiste à observer le comportement des paramètres identifiés pour des ordres de signal candidats  $p$  successifs et croissants. En effet, on a jusque là justifié les critères de choix de  $P$  sur la base du premier élément de la propriété IV.4.1, qui concerne le cas pour lequel l'ordre du signal est sous-estimé ( $P < R$ ). Dans le cas contraire où cet ordre est sur-estimé ( $P > R$ ), le second élément s'applique, et nous informe que les paramètres identifiés *contiennent* les paramètres du signal (dans le cas de données non perturbées).

Cette propriété particulière peut se formaliser comme suit : toujours dans le cas où les données sont non perturbées, on identifie à partir d'un ordre de signal  $p = R + e$ , où  $e \geq 0$ , les  $p$  vecteurs d'onde  $\widehat{\mathbf{K}}(p) \in \mathbb{C}^{D \times p}$  tels que :

$$\widehat{\mathbf{K}}(p) = [\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_\perp] \quad (\text{IV.4.9})$$

où  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{D \times R}$  contient les vecteurs d'onde *vrais* (qui paramètrent le signal) et  $\mathbf{K}_\perp \in \mathbb{C}^{D \times e}$  contient des vecteurs d'onde *mathématiques*, qui décrivent en fait une partie de la perturbation des données. Tant que  $p \geq R$ , les vecteurs  $\mathbf{K}$  restent inchangés, tandis que ceux contenus dans  $\mathbf{K}_\perp$  dépendent de l'ordre du signal choisit. Ces derniers sont en effet calculés sur l'espace bruit  $\mathbf{W}_\perp$  composés de vecteurs *arbitraires*; donc très dépendants du choix de l'ordre de troncature  $p$ .

En conséquence, il est possible de déterminer l'ordre du signal  $R$  en observant la variation des vecteurs d'onde identifiés en fonction de  $p$  : les vecteurs d'onde *vrais* sont alors détectés comme les vecteurs *stables*, indépendants de  $p$ . Lorsque de la perturbation est présente sur les données, tous les vecteurs d'onde identifiés sont influencés par celle-ci; tous les paramètres identifiés dépendent alors de l'ordre  $p$ . Toutefois, la propriété peut toujours être utilisée pour



discriminer les vecteurs d'onde *vrais* des vecteurs d'onde *mathématiques* sur la base de *critères de stabilisation*.

Cette catégorie de critères se concentre donc sur l'*évolution*, en fonction de l'ordre  $p$ , des vecteurs d'onde  $\tilde{\mathbf{K}}(p)$  identifiés sur des données perturbées, ou plus généralement *tous* les paramètres identifiés (qui comprennent aussi les amplitudes  $\tilde{\mathbf{B}}(p)$  et les phases  $\tilde{\Phi}(p)$ ). De nombreuses *mesures* de la *stabilité* des paramètres identifiées peuvent être proposées, la difficulté majeure consistant à distinguer les jeux de paramètres *vrais* ( $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\Phi}$ ) des jeux de paramètres *mathématiques* ( $\tilde{\mathbf{K}}_{\perp}, \tilde{\mathbf{B}}_{\perp}, \tilde{\Phi}_{\perp}$ ).

La mise en pratique des critères de stabilisation impose toutefois de dérouler complètement la méthode ESPRIT pour une collection d'ordres candidats  $p \in \llbracket R_{\min}, R_{\max} \rrbracket$ . Le sur-coût de calcul entraîné est donc largement supérieur aux autres critères. De plus, l'automatisation du choix de l'ordre du signal sur la base de ce type de critère s'avère compliquée. Le choix de l'ordre du signal impose donc souvent une opération manuelle. Pour cette raison, les critères de stabilisation ne sont utilisés dans ce travail que dans le cadre de l'application de la méthode ESPRIT proposée pour l'analyse modale (voir chapitre V, section V.2, où sont détaillés différents critères de stabilité).

#### IV.4.6 Conclusion

Dans cette section consacrée à l'estimation de l'ordre du signal  $R$ , trois types de critères ont été exposés.

- 1) Le critère MDL se base sur les valeurs propres de la matrice de covariance des données uniquement. Il tente de mesurer la *cassure* entre l'espace signal et l'espace bruit, qui est caractéristique d'une perturbation des données de type bruit blanc centré uniforme. Ce critère est performant lorsque le modèle de signal (fonctions harmoniques et bruit additif blanc uniforme centré) est *exactement* respecté par les données. De plus, le sur-coût de calcul entraîné est négligeable. Cependant, lorsque le bruit est coloré (densité spectrale non uniforme) ou présente une certaine corrélation aux données, le choix de l'ordre du signal par le critère MDL peut être biaisé.
- 2) Les critères ESTER et SAMOS se basent sur le résidu de l'estimation des matrices spectrales, réalisée dans une phase amont de l'estimation des vecteurs d'onde. Par cela, l'information du modèle de signal est ajoutée pour l'estimation de l'ordre. Le critère ESTER cherche à minimiser le résidu de l'estimation des matrices spectrales au sens des moindres carrés, ce qui interdit la présence de perturbations importantes sur le sous-espace signal. Ce critère est donc performant face à du bruit coloré, mais perd vite ses capacités de détection lorsque les perturbations sont corrélées aux données pures, car elles perturbent le sous-espace signal. Le critère SAMOS tente de prendre en compte cette perturbation en minimisant le résidu d'une estimation aux moindres carrés *totaux* des matrices spectrales. Les performances accrues de ce critère se font au prix d'une diminution de moitié du nombre de composantes détectables, ce qui ne présente pas réellement une limitation pour les applications concernées par ce travail. Ces critères entraînent un coût de calcul qui est non négligeable, car les matrices spectrales doivent être estimées pour une collection d'ordres candidats. Toutefois, ce sur-coût n'est pas critique pour les applications envisagées. Puisqu'ils sont formulés sur les propriétés du modèle de signal, ces critères perdent en performance lorsque les données contiennent de l'information qui ne peut être décrite par celui-ci.

- 3) Les critères de stabilisation sont alors une alternative. Ils se basent sur la dépendance des paramètres identifiés en fonction de l'ordre du signal choisit. Les paramètres les plus stables sont alors identifiés comme les paramètres *vrais*, et les autres écartés. Plusieurs difficultés rendent cette famille de critères difficile à mettre en œuvre : (i) la définition d'une mesure de stabilité ; (ii) la nécessité de dérouler la méthode complètement pour chaque ordre candidat, entraînant un sur-coût de calcul conséquent ; (iii) la difficile automatisation du choix de l'ordre. Pour cela, ces critères ne sont utilisés que pour l'application de la méthode ESPRIT proposée pour l'analyse modale, où peu de réalisations de la méthode sont nécessaires.

Ces trois familles de critères sont utilisées dans les applications de la méthode ESPRIT unifiée développées dans les chapitres qui suivent.

## IV.5 Conclusions

Cette section a été consacrée au développement d'une méthode ESPRIT cherchant à unifier différentes propositions de la littérature sous une formulation commune. Les propositions retenues présentent un intérêt potentiel pour les applications de la méthode sur les mesures plein-champ en mécanique : (i) prise en compte de la totalité des données, (ii) utilisation de multiples invariances de la grille de mesure, (iii) application aux signaux multidimensionnels, (iv) prise en compte des modèles en sinusoides, (v) stratégie de lissage spatial et de décimation, (vi) critères d'estimation de l'ordre du signal et enfin (vii) quantification de l'effet des perturbations sur les paramètres identifiés.

Les différentes étapes de la construction de la méthode unifiée ont été développées dans la première section. Tout d'abord, le modèle de signal continu, correspondant à la définition *physique* du champ mesuré, a été défini ; une version simplifiée a ensuite été donnée, correspondant à une *observation* de celui-ci. Ce modèle a ensuite été discrétisé pour modéliser l'étape de *mesure* ; dans ce même but ont également été introduites les perturbations. Ensuite, sur la base du problème de l'estimation des paramètres du signal a été définie la version *modifiée* du modèle de signal, qui permet d'écarter les phases du problème et d'écrire ensuite le modèle *matriciel* sous forme séparée. Pour cela ont été introduite différentes matrices caractéristiques : la matrice de Vandermonde *étendue* qui permet de formuler le problème d'estimation des phases et des amplitudes ; la matrice *pilote*, qui prend en compte la modification du modèle de signal et possède toutes les propriétés d'invariance rotationnelle nécessaires à l'estimation des vecteurs d'onde. Deux sous-sections ont ensuite été consacrées à l'étude et l'estimation de la covariance des données. Il a tout d'abord été montré que l'estimation des vecteurs d'onde peut être faite à partir de cette covariance et que celle-ci confère à l'estimation réalisée une certaine résistance au bruit. Ensuite, différents estimateurs de la covariance des données mesurées ont été proposés. L'estimation *directe* sur les données étant souvent de rang dégénéré, la technique de *lissage spatial* a été explicitée : celle-ci conserve le rang de la matrice de covariance afin de permettre l'estimation des vecteurs d'onde sur un nombre d'observations du signal très réduit. Finalement, un estimateur *décimé* a été proposé. Celui-ci permet de réduire le coût de calcul tout en prenant en compte la totalité des données de mesure. Dans la dernière partie de cette première section, les étapes du déroulement de la méthode ESPRIT proposée pour l'estimation des paramètres d'un signal ont été données.

Dans la seconde section de ce chapitre, différentes méthodes permettant de quantifier les incertitudes sur les paramètres estimés ont été développées. Celles-ci se basent principalement sur la propagation des perturbations au premier ordre dans les différentes opérations effectuées pour arriver à l'estimation des paramètres. On a montré que la perturbation des composantes des vecteurs propres identifiés peut se mettre sous une forme linéaire appliquée aux perturbations des données. La perturbation des vecteurs propres obtenus peut ainsi être estimée pour une distribution des perturbations quelconques. A partir de cette forme linéaire a été exprimée la variance des estimations, dont l'estimation passe par certaines hypothèses sur la forme de la covariance des perturbations. Sous l'hypothèse d'un bruit blanc, la variance de l'estimation des vecteurs propres a été dérivée dans un cas très simple, consistant en un signal composé d'une seule composante exponentielle. Celui-ci a l'avantage (i) de permettre une dérivation analytique de la variance ; (ii) d'avoir été traité par de nombreux auteurs, ce qui permet de comparer les résultats ; (iii) d'avoir une borne de Cramer-Rao associée, ce qui permet de donner une idée de l'*efficacité* de l'estimateur ESPRIT par rapport à une valeur de référence. Cette étude a permis de montrer que (i) la décimation ne dégrade pas l'estimation des vecteurs d'onde ; (ii) le facteur

de lissage spatial *optimal* ne dépend que de la décroissance spatiale de l'onde ramenée à la taille de la grille et peut raisonnablement être fixé à  $s = 2/3$ ; (iii) avec ce choix et dans le cas où la décroissance spatiale des ondes est nulle, la variance des estimations est très proche ( $8/9$ ) de la borne de Cramer-Rao.

La troisième et dernière section de ce chapitre a été consacrée à l'estimation de l'ordre du signal. Trois familles de critères ont été présentés, de la plus simple d'implémentation à la plus complexe. Le critère MDL, simpliste, permet l'estimation de l'ordre du signal dans les cas où le bruit est blanc uniforme et les hypothèses sur le signal respectées. Les critères ESTER et SAMOS permettent de prendre en compte une certaine *coloration* du bruit en utilisant les propriétés d'invariance rotationnelle du signal pour estimer son ordre. Le critère SAMOS prend également en compte la perturbation de l'espace signal par le bruit, qui peut donc être corrélé aux données. Lorsque le modèle de signal est insuffisant pour décrire les données mesurées, les critères de *stabilisation* semblent les plus adéquats pour estimer l'ordre du signal; ces critères sont développés plus en détail au chapitre suivant pour leur mise en œuvre pour l'analyse modale.



# Chapitre V

## Identification inverse par analyse modale

### Résumé

Ce chapitre est dédié à la formulation d'une procédure d'identification de structures utilisant la mesure du **régime libre transitoire** de celles-ci.

Premièrement, la méthode ESPRIT proposée est spécialisée pour sa mise en oeuvre dans le cadre de l'**analyse modale**. Elle s'applique à la **totalité des données mesurées**. Après application de la méthode, une collection de **données réduites** est obtenue : fréquences, amortissement et déformées modales. Le choix du nombre de composantes modales est rendu difficile par leur grand nombre. Différents indicateurs basés sur des **critères de stabilité** sont présentés. Les expressions permettant de **quantifier les incertitudes** sur les données modales sont dérivées.

Ensuite, un **problème aux valeurs propres inverse** est formulé sur la base des données réduites obtenues et d'un **modèle de la structure** dont certains paramètres doivent être estimés. La résolution de ce problème passe par la minimisation d'une fonctionnelle, portant sur la différence des données modales expérimentales et numériques. A partir de l'**analyse de sensibilité** des valeurs et vecteurs propres du modèle, un algorithme de descente de **gradient analytique** est formulé. La **régularisation** du problème de minimisation est discutée. Différentes sources d'incertitude sont évoquées et un indicateur permettant l'estimation de l'**intervalle de confiance** associé aux paramètres identifiés est proposé.

Enfin, la procédure est appliquée à l'**identification des propriétés anisotropes viscoélastiques d'une planche d'épicéa**, considérée comme un matériau isotrope transverse. L'observation conjointe des déformées, fréquences et amortissements modaux extraits de la mesure permet de **séparer les différents mécanismes d'amortissement**. Les paramètres matériaux sont identifiés sur les premiers modes de l'échantillon. Un très bon accord entre les données expérimentales et numériques est obtenu.

## V.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à la proposition, à l'étude et à l'application d'une méthode d'identification des structures, basée sur des données issues d'une analyse modale de celles-ci.

**Analyse modale** L'utilisation de l'analyse modale pour l'identification des structures présente des avantages considérables. En particulier, les données modales identifiées (déformées, fréquences, amortissements) représentent une réduction très importante de la quantité de données disponibles, se focalisant sur les mécanismes *dominants* dans la réponse de la structure. En cela, ces données sont associées à un rapport signal-sur-bruit optimal.

Toutefois, les données modales obtenues sont liées au comportement *global* de la structure : celles-ci contiennent les signatures de l'anisotropie des matériaux constitutifs, de l'hétérogénéité de la structure ou encore des conditions aux limites appliquées, mélangées. De façon à pouvoir identifier chaque aspect à partir des données modales expérimentales, il est nécessaire de déterminer celles-ci avec une précision satisfaisante.

Les méthodes dédiées à l'analyse modale des structures sont nombreuses on en trouvera par exemple une revue dans [177]. Les approches basées sur la décomposition en sous-espace, comme la méthode ESPRIT, sont également diverses ; on peut par exemple évoquer la méthode ERA [100] (pour *Eigenvalue Realization Algorithm*), basée sur la formulation d'état. Des applications de la méthode ESPRIT standard pour l'analyse modale ont été proposées, basées sur le travail original de Ege [70, 174, 77]. L'application de ce type de méthode aux mesures plein-champ pose trois problèmes principaux : (i) la prise en compte simultanée des données mesurées ; (ii) le choix du nombre de modes à identifier ; (iii) la quantification des incertitudes.

Pour cela, la méthode ESPRIT proposée au chapitre précédent est spécialisée dans la première section de ce chapitre pour sa mise en œuvre dans le cadre de l'analyse modale. Celle-ci intègre les développements nécessaires à la prise en compte de la totalité des données mesurées pour l'identification des données modales. Les différents critères de choix de l'ordre du signal présentés avec la méthode ESPRIT (section IV.4) sont utilisés pour permettre d'estimer le nombre de composantes dans le signal. De plus, des critères de stabilisation sont intégrés au déroulement de la méthode, permettant de juger de la pertinence des données modales identifiées. Enfin, les incertitudes sur les données identifiées peuvent être estimées à partir des développements de la section IV.3. L'utilisation des critères de stabilité pour la quantification des incertitudes est également proposée.

**Problème inverse aux valeurs propres** Une fois les données modales obtenues, un problème inverse doit être formulé afin d'estimer le jeu de paramètres de la structure que l'on souhaite identifier. La méthode employée prend la forme d'un problème aux valeurs propres *inverse* ; les paramètres de la structure que l'on souhaite identifier sont estimés par la minimisation d'une fonctionnelle. Celle-ci est basée sur la *similarité* des données modales expérimentales avec celles calculées à partir d'un modèle numérique de la structure.

La résolution des problèmes inverses aux valeurs propres en général trouve des applications dans des domaines de recherche variés : une revue des différentes méthodes est présentée à ce sujet dans [55]. Dans le cas de l'identification des structures, ce type de problème est impliqué dans la formulation de méthodes type FEMU [79] (pour *Finite Element Model Updating*). Ces méthodes formulent la résolution du problème de minimisation de façon itérative, sur la base d'un algorithme de descente de gradient : les données modales correspondant à un jeu de paramètres *test* sont calculées et comparées aux données modales expérimentales. La mise

à jour des paramètres est alors donnée par la résolution d'un problème linéaire, basé sur la sensibilité des données modales face à une perturbation des paramètres à identifier. Le calcul de cette sensibilité est un point clé des méthodes FEMU. L'estimation locale du gradient des données modales par rapport aux paramètres peut être réalisée de façon discrète ; cela nécessite toutefois de calculer la base modale numérique un grand nombre de fois. La seconde possibilité, retenue ici, consiste à utiliser la perturbation des données modales au premier ordre ; on pourra à ce sujet consulter le tutorial proposé dans [146].

Dans la deuxième section de ce chapitre, la formulation du problème inverse aux valeurs propres associé à l'analyse modale d'une structure est décrite. Celui-ci est formulé dans un cadre général, permettant de prendre en compte différents comportements matériau (i.e. viscoélastique, dispersif). Ensuite la résolution de ce problème est discutée. La sensibilité des données modales est dérivée analytiquement dans le cas des plaques stratifiées uniformes composées de matériaux anisotropes viscoélastiques modélisés par un comportement hystérétique. Différentes stratégies permettant la régularisation de la méthode de résolution sont ensuite données. Enfin, une discussion sur la quantification des incertitudes est menée, résultant en la proposition d'un indicateur simplifié, celui permettant d'estimer grossièrement l'intervalle de confiance associé aux paramètres identifiés.

**Cas d'application** Dans la dernière section de ce chapitre, une application de la méthode présentée est illustrée. Celle-ci s'intéresse à l'identification des propriétés viscoélastiques d'une planche d'épicéa, dont le matériau constitutif est supposé isotrope transverse. La mesure de la réponse transitoire libre de l'échantillon, réalisée à l'aide du dispositif de vibrométrie présenté au chapitre III, est utilisée pour extraire les données modales de la structure avec la méthode ESPRIT spécifique. Ensuite, le modèle de structure utilisé pour l'inversion du problème aux valeurs propres est présenté. Enfin, l'identification des propriétés viscoélastiques de l'épicéa est réalisée. Sur la base de différents indicateurs, un bon accord entre les données modales expérimentales et numériques est observé dans la configuration des paramètres estimés, permettant de valider la pertinence de ceux-ci.



## V.2 Analyse modale haute résolution

Dans les paragraphes qui suivent, la méthode ESPRIT proposée au chapitre IV est spécialisée afin d'être mise en œuvre dans le cadre de l'analyse modale. Le modèle de signal est explicité. Les paramètres à identifier ainsi que les incertitudes qui sont associées à leur estimation sont donnés. Des possibilités de pré-traitement des données sont évoquées. L'intégration des diagrammes de stabilité à la méthode ESPRIT est discutée, s'accompagnant de la formulation de différents indicateurs d'aide au choix des paramètres identifiés à retenir.

### V.2.1 Spécialisation de la méthode ESPRIT

La spécialisation de la méthode ESPRIT unifiée proposée au chapitre précédent passe par le choix du modèle de signal adapté à l'analyse modale des structures. Ensuite, les expressions paramètres à identifier (déformées modales, fréquences modales et amortissement modaux) en fonction des données identifiées par la méthode ESPRIT sont explicitées.

#### V.2.1.1 Modèle de signal

On suppose que la mesure  $\tilde{\mathbf{u}}$  d'une ou plusieurs composantes d'un champ vectoriel instantané  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  (i.e. déplacement, vitesse) correspondant à la réponse libre d'une structure a été réalisée. Pour un cas idéal dans lequel le signal serait obtenu sans bruit, la mesure effectuée peut se modéliser sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{y}) = \sum_r^{2R} \underline{\phi}_r(\mathbf{y}) e^{i\omega_r t} \quad (\text{V.2.1})$$

où  $\underline{\phi}_r$  est le vecteur des amplitudes complexes, dont la dépendance en  $\mathbf{y}$  décrit la  $r^{\text{ième}}$  déformée modale associée à la pulsation modale complexe  $\omega_r$ . L'entier  $2R$  est l'ordre du signal, contraint à un multiple de 2. En effet, la réponse transitoire mesurée est un signal réel, entraînant les relations suivantes :

$$\underline{\phi}_{R+r}(\mathbf{y}) = \underline{\phi}_r^*(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \omega_{R+r} = -\omega_r^* \quad (\text{V.2.2})$$

qui sont héritées des propriétés de parité du spectre d'un signal réel (partie réelle paire, partie imaginaire impaire).

*Remarque V.2.1.* Les identités ci-dessus restent vraies quelque soit la forme et le niveau du bruit sur les mesures, celui-ci étant de toute façon réel. On ne s'intéresse donc dans ce qui suit qu'à la moitié des paramètres identifiés, correspondant à une fréquence  $f_r$  et un amortissement  $\xi_r$  positifs.

Il apparaît clairement que le modèle de signal pur ci-dessus correspond au modèle général de signal continu de la méthode ESPRIT proposée, avec  $\mathbf{x} = t$ ,  $\mathbf{k}_r = \omega_r$ ,  $D = D_e = 1$  et  $D_c = 0$  (voir chapitre IV, équation (IV.2.2)). Les aspects liés à l'implémentation de l'algorithme associé ne sont donc pas développés dans ce qui suit : en tant que cas particulier, ils constitueraient une redite par rapport au chapitre précédent.

En pratique, le signal est mesuré pour un nombre  $L$  de temps discrets  $t$ , qui doivent nécessairement être régulièrement espacés afin de permettre l'application de la méthode ESPRIT. La réponse temporelle peut également être mesurée en une collection de points  $\mathbf{y}$ , qui peuvent

quant à eux être placés de façon quelconque. Contrairement à l'application de la méthode ESPRIT standard pour l'analyse modale proposée par Ege & al. [70], la méthode ESPRIT développée au chapitre IV permet d'estimer les paramètres du signal ci-dessus par traitement simultané de toutes les composantes de la réponse  $\underline{\mathbf{u}}$  mesurées aux différentes positions  $\underline{\mathbf{y}}$ . En effet, dans les applications précédentes, une seule composante de la réponse en un seul point ne peut être traitée à la fois. En conséquence, les pulsations modales obtenues en chaque point peuvent différer ; une étape de regroupement est alors nécessaire pour reconstruire le mode complet. Ici, l'application de la méthode sur la totalité des données mesurées suppose de façon intrinsèque l'indépendance des pulsations en fonction du point  $\underline{\mathbf{y}}$ . Ceci consiste en une réduction des données supplémentaire.

Les composantes du champ  $\underline{\mathbf{u}}$  mesurées en différents points  $\underline{\mathbf{y}}$  sont supposées dans la méthode ESPRIT proposée comme une collection d'*observations* de la mesure d'un signal temporel  $u(t)$  (voir modèle d'une réalisation, équation (IV.2.3)) ; cette supposition est également faite ici, en désignant la  $n^{\text{ième}}$  observation  $u(t, n)$  modélisée de la façon suivante :

$$u(t, n) = \sum_r^{2R} \phi_r(n) e^{i\omega_r t} \quad (\text{V.2.3})$$

où  $n = 1 \dots N$ , avec  $N$  le nombre d'observations disponibles. Il convient de noter que la méthode ESPRIT appliquée au modèle de signal ci-dessus n'*impose* pas de mesurer plusieurs composantes de la réponse d'une structure en plusieurs points. Elle peut tout à fait s'appliquer sur une observation unique d'une mesure ( $N = 1$ ) et n'est donc pas réservée au traitement de mesures plein-champ.

### V.2.1.2 Paramètres identifiés

L'application de la méthode ESPRIT mène à l'estimation de  $2R$  vecteurs modaux  $\phi_r \in \mathbb{C}^N$  contenant la réponse du  $r^{\text{ième}}$  mode aux  $N$  points observés :

$$\phi_r = {}^T[\phi_r(1), \dots, \phi_r(N)] \quad (\text{V.2.4})$$

à partir desquels la base modale expérimentale  $\Phi$  est formée :

$$\Phi = {}^T[\phi_1 \dots \phi_R] \quad (\text{V.2.5})$$

Ces modes sont associés aux pulsations modales  $\omega_r = 2\pi f_r(1 + i\xi_r)$ , également estimées par la méthode ESPRIT. Les fréquences  $f_r$  et amortissement modaux  $\xi_r$  sont alors donnés par :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \text{Re}\{\omega_r\} \quad \text{et} \quad \xi_r = \frac{\text{Im}\{\omega_r\}}{\text{Re}\{\omega_r\}} \quad (\text{V.2.6})$$

Au total,  $2R$  triplets modaux  $(\phi_r, f_r, \xi_r)$  sont estimés par la méthode ESPRIT. La procédure d'identification développée dans la suite ne se sert que des  $R$  premiers, les autres étant donnés par les relations (V.2.2). Ces  $R$  premiers triplets modaux sont caractérisés par une fréquence  $f_r$  et un amortissement  $\xi_r$  positifs.

## V.2.2 Choix de l'ordre du signal

La mise en oeuvre de l'analyse modale par des techniques basées sur la décomposition en sous-espace pose forcément le problème du choix de l'ordre du signal  $R$ , déterminant la taille du sous-espace signal  $\mathbf{W}$  (voir chapitre précédent, décomposition de la matrice de covariance en sous-espaces, expression (IV.2.37)). La méthode ESPRIT proposée n'échappe bien sûr pas à ce problème.

Dans la section IV.4 ont été donnés différents critères permettant d'aiguiller le choix de l'ordre du signal  $R$  : (i) le critère MDL (IV.4.1), basé sur le contraste entre les valeurs propres de la matrice de covariance associées à l'espace signal et l'espace bruit ; (ii) le critère ESTER (IV.4.4), qui repose sur le résidu de l'estimation aux moindres carrés des matrices spectrales ; (iii) le critère SAMOS (IV.4.8) qui s'inspire du critère ESTER en proposant une meilleure prise en compte de la perturbation de l'espace signal ; (iv) les critères de stabilisation, qui se basent sur l'observation des paramètres identifiés en fonction de l'ordre du signal choisi.

Les trois premiers critères, dont l'implémentation implique un coût de calcul raisonnable, sont performants lorsque : (i) les hypothèses sur le modèle de signal sont respectées ; (ii) la perturbation des données est peu corrélée ; (iii) peu de composantes sont présentes dans le signal. Ils permettent dans ces conditions d'automatiser le choix de l'ordre du signal  $R$ . Le critère ESTER est pour cette raison mis en oeuvre dans le cadre de l'analyse en vecteur d'onde proposée dans les deux chapitres qui suivent (voir chap. VI et VII).

Dans le cas de l'analyse modale large bande, ces hypothèses sont difficiles à garantir : (i) le modèle de signal peut ne pas être assez riche ; (ii) la perturbation des données peut être d'une forme quelconque ; (iii) un grand nombre de composantes sont souvent présentes dans le signal mesuré.

Dans cette sous-section sont présentées deux techniques classiques permettant le choix du nombre de composantes à retenir dans le cadre de l'analyse modale.

### V.2.2.1 Division du domaine fréquentiel

Lorsque le signal est composé d'un nombre important de composantes, il est souvent proposé par les utilisateurs de la méthode ESPRIT de mettre en oeuvre des techniques de filtrage [11, 70, 174, 77]. Le domaine fréquentiel est tout d'abord divisé en bandes de fréquence, chacune d'entre elles contenant un nombre réduit de composantes. Chaque sous-domaine fréquentiel est alors isolé par filtrage passe-bande. La méthode ESPRIT est enfin appliquée sur chacune des bandes choisies.

Puisque le signal est divisé en sous-bandes fréquentielles, chacune de ces bandes peut être traitée d'une façon particulière, en appliquant par exemple de la décimation ou en ajustant la longueur du signal de façon à optimiser le rapport signal-à-bruit [70, 174]. De cette façon, la quantité de données à traiter est réduite. Cela permet également l'utilisation des critères MDL, ESTER et SAMOS qui retrouvent une certaine capacité de détection avec la diminution du nombre de composantes.

Toutefois, la technique de traitement par sous-domaines oblige à faire des choix supplémentaires. Ceux-ci concernent tout d'abord le choix des sous-bandes. Pour cela, la *densité modale* approximative de la structure mesurée peut être utilisée pour estimer le nombre de modes présents dans un domaine de fréquence. Les sous-bandes sont alors choisies de façon à ce qu'un nombre réduit de composantes soit présentes (usuellement de l'ordre de la dizaine).

Les choix supplémentaires concernent également l'ordre du filtre à appliquer. Celui-ci doit faire le compromis entre un isolement satisfaisant des sous-bandes (garanti par un ordre élevé),

le sur-coût de calcul entraîné et un étalement temporel réduit de façon à minimiser les effets de bord indésirables.

### V.2.2.2 Critères de stabilisation

Une alternative aux techniques de choix classiques de l'ordre du signal consiste en l'utilisation de critères de stabilisation, que l'on a déjà évoqué au chapitre précédent, section IV.4. Ces critères se basent sur la dépendance des paramètres modaux identifiés (fréquences, amortissements et déformées modales) en fonction de l'ordre du signal. Les critères de stabilité sont classiquement mis en œuvre dans le cadre de méthodes d'analyse modale : on en trouvera une revue assez complète dans [178].

Typiquement, la collection des duplets modaux  $\{(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r), r = 1 \dots P\}$  est estimée pour un nombre conséquent d'ordres  $P \in R_{\min} \dots R_{\max}$  ; l'ordre maximum  $R_{\max}$  étant choisi de façon à sur-estimer largement l'ordre réel du signal mesuré. On sait par la propriété IV.4.1 que les paramètres *physiques* du signal sont, lorsque l'ordre est surestimé ( $P \geq R$ ) et les données non perturbées, *contenus* dans l'ensemble des paramètres estimés : ces paramètres sont donc indépendants de l'ordre du signal choisi. Au contraire, les paramètres *mathématiques*, qui sont estimés sur un espace de vecteurs singuliers arbitraire, sont très dépendant de l'ordre choisi. Avec la perturbation des données, ces deux propriétés ne sont pas exactement respectées. Toutefois, les composantes *physiques* se distinguent des composantes *mathématiques* par leur meilleure *stabilité*.

L'utilisation des critères de stabilisation en lieu et place des critères MDL, ESTER et SAMOS permet de développer une stratégie particulièrement différente de choix des paramètres. En effet, ces trois derniers critères permettent de choisir l'ordre du signal  $R$  afin estimer le jeu *complet* de paramètres  $\{(\tilde{\phi}_r, \tilde{f}_r, \tilde{\xi}_r), r = 1 \dots R\}$ . Ils sont en ce sens *globaux* : ils ne permettent pas de juger de la validité d'un paramètre estimé *a priori*, puisqu'ils interviennent avant l'estimation des paramètres. Au contraire, les critères de stabilisation interviennent un fois que *tous* les paramètres sont estimés, et pour une collection importante d'ordres du signal candidats  $P \in R_{\min} \dots R_{\max}$ . En conséquence, il n'est pas seulement possible de sélectionner l'ordre du signal, mais bien les paramètres *individuellement*. Cela permet d'écarter de l'analyse modale, et donc du reste de la procédure d'identification proposée, les paramètres jugés trop instables. De plus, cela permet de choisir des paramètres correspondant à des estimations réalisées à des ordres  $P$  différents. On verra plus bas que ce changement de stratégie empêche toutefois de quantifier l'incertitude sur les paramètres estimés par l'approche perturbative développée au chapitre précédent.

Des problématiques apparaissent cependant lors de la mise en œuvre des critères de stabilité : (i) un sur-coût de calcul important, puisqu'il est nécessaire de dérouler entièrement la méthode d'estimation pour un grand nombre d'ordre de signal candidats ; (ii) la nécessité de définir des *mesures* pertinentes de la stabilité des composantes robustes face aux nombreuses configurations possibles ; (iii) une difficile automatisation du choix de l'ordre, qui nécessite un choix final manuel basé sur une certaine expertise. Ce dernier point est crucial ; les développements concernant les critères de stabilité se concentrent d'ailleurs principalement sur la formulation de mesures permettant l'aide au choix. Ces mesures sont alors généralement représentées sur un diagramme fréquence-ordre de signal, dit *diagramme de stabilisation*.

Dans ce qui suit, différents critères de stabilité sont explicités. Ils permettent d'aider le choix des composantes estimées à conserver, sur la base de différents indicateurs de confiance. Ces critères sont de deux types : *locaux*, qui se basent sur les paramètres estimés à un ordre donné ; *globaux*, formulés sur la différence entre des jeux de paramètres identifiés à des ordres différents,

nécessitant en conséquence le *suivi* des différents paramètres en fonction de l'ordre. Ces différents critères sont mis en œuvre lors de l'application de la procédure proposée à l'identification des propriétés d'une planche d'épicéa dans la dernière section de ce chapitre.

**Complexité des modes** Il est proposé dans [231] de mesurer la *complexité* des modes identifiés. Dans le cas d'une structure conservative, les modes sont réels. En conséquence, les  $N$  composantes complexes formant les vecteurs modaux  $\phi_r$  correspondant sont sur une droite du plan complexe :

$$a_R \operatorname{Re}\{\phi_r\} + a_I \operatorname{Im}\{\phi_r\} = \mathbf{0} \quad (\text{V.2.7})$$

les parties réelle et imaginaire de  $\phi_r$  sont donc linéairement dépendantes. La matrice  $\hat{\Phi}_r = [\operatorname{Re}\{\phi_r\} \operatorname{Im}\{\phi_r\}]$  est alors d'ordre 1 : une de ses valeurs singulières est nulle. Soit la décomposition suivante :

$$\mathbf{C}_{\phi\phi}^r = {}^T \hat{\Phi}_r \hat{\Phi}_r = {}^T \mathbf{A}_r \operatorname{diag}(\boldsymbol{\alpha}^r) \mathbf{A}_r \quad (\text{V.2.8})$$

avec  $\boldsymbol{\alpha}^r$  les deux valeurs propres de  $\mathbf{C}_{\phi\phi}^r$  et  $\mathbf{A}_r$  les deux vecteurs propres associés. Alors, dans le cas conservatif, une des valeurs propres est nulle.

La prise en compte des mécanismes de perte rend les modes complexes : un déphasage apparaît entre le mouvement des différents points décrivant le mode (soit entre les composantes des vecteurs modaux  $\phi_r$ ). Toutefois, certaines hypothèses permettent de supposer que les modes sont *faiblement* complexes, c'est à dire que les composantes d'un vecteur modal sont peu déphasées les unes par rapport aux autres. Ces suppositions rejoignent l'hypothèse de Basile (voir annexe B.2 sur le comportement viscoélastique, propriété (B.2.7)) : si les mécanismes de perte sont faibles et répartis uniformément sur la structure, alors les modes de celle-ci sont peu perturbés.

En conséquence, les deux valeurs propres  $\alpha_i^r$  sont non nulles. Il est donc possible définir une *mesure* de la complexité  $\zeta_r$  du mode  $\phi_r$  comme suit :

$$\boxed{\zeta_r = \frac{\min(\boldsymbol{\alpha}^r)}{\max(\boldsymbol{\alpha}^r)}} \quad (\text{V.2.9})$$

Lorsque le mode est réel,  $\min(\boldsymbol{\alpha}^r) = 0$  et  $\zeta_r = 0$ . Au contraire, si les parties réelle et imaginaire de  $\phi_r$  sont complètement décorréées (bruit circulaire), alors  $\alpha_1^r = \alpha_2^r$ , d'où  $\zeta_r = 1$ . Dans le cas général,  $0 \leq \zeta_r \leq 1$ . Les modes *mathématiques* étant caractérisés par une forte décorrélation des différents points  $\phi_r$ , ils peuvent être détectés par l'observation de l'indicateur  $\zeta_r$ .

Un exemple pratique de l'utilisation du critère de complexité est présenté dans le cadre du cas d'application développé dans la dernière section de ce chapitre (voir figure V.6).

**Stabilité des paramètres** Les deux premiers critères cités plus haut correspondent à une stratégie de mesure locale de la pertinence de paramètres modaux identifiés. Une seconde stratégie consiste à étudier la *stabilité* des paramètres identifiés pour des ordres du signal successifs. Il est pour cela nécessaire de *suivre* l'évolution de ces paramètres (pulsations, modes) en fonction de l'ordre choisi. Dans ce but, différentes possibilités ont été proposées, comme l'utilisation de techniques de partitionnement des données ( $k$ -moyennes,  $c$ -moyennes ou histogrammes, voir [178]).

Plus classiquement, les critères de MAC (pour *Modal Assurance Criterion*, voir annexe A.2, équation (A.2.38)) peuvent être utilisés pour le suivi des paramètres. Soient les deux bases

modales  $\Phi^{p-1} \in \mathbb{C}^{N \times (p-1)}$  et  $\Phi^p \in \mathbb{C}^{N \times p}$  qui contiennent les modes identifiés à l'ordre  $p$  et l'ordre  $p-1$ . Le suivi des modes, qui consiste à faire correspondre  $p-1$  vecteurs de  $\Phi^p$  à un vecteur de  $\Phi^{p-1}$ , se base sur la matrice  $\mathbf{MAC}^p \in \mathbb{R}^{p \times (p-1)}$  telle que :

$$\text{MAC}_{ij}^p(\Phi^p, \Phi^{p-1}) = \frac{|\Phi_i^p \Phi_j^{p-1}|}{\|\Phi_i^p\| \|\Phi_j^{p-1}\|} \quad (\text{V.2.10})$$

Le suivi des paramètres correspondant aux ordres successifs est donc réalisé en faisant correspondre les modes associés aux plus grandes valeurs de la matrice de MAC. Le résultat du suivi est représenté sur le diagramme de stabilisation par des *branches*, liant les paramètres équivalents estimés aux ordres successifs.

Le critère de MAC entre deux modes appartenant à la même branche et estimés à deux ordres successifs représente un indicateur intéressant pour évaluer la stabilité des paramètres. En effet, un critère de MAC faible entre deux estimations successives indique un mode dépendant fortement de l'ordre du signal ; ce mode peut alors être considéré comme *non-physique*. Au contraire, un critère de MAC proche de 1 dénote une bonne stabilité du mode face à l'ordre du signal choisi. Le mode concerné peut alors être considéré comme *physique*. On peut en conséquence formuler le critère de stabilité  $\hat{\sigma}_{\text{MAC}}(\phi_r^p)$  de la façon suivante :

$$\hat{\sigma}_{\text{MAC}}(\phi_r^p) = 1 - \text{MAC}(\phi_r^p, \phi_r^{p-1}) \quad (\text{V.2.11})$$

où  $\hat{\sigma}_{\text{MAC}} = 0$  correspond à un mode complètement stable et  $\hat{\sigma}_{\text{MAC}} \rightarrow 1$  lorsque le mode est très instable.

Il est toutefois nécessaire de noter que, quelque soit le vecteur  $\phi$  et l'angle  $\theta$ , on a  $\text{MAC}(\phi, \phi e^{i\theta}) = 1$ . En conséquence, la *rotation homogène* dans le plan complexe d'un vecteur modal estimé à deux ordres successifs n'est pas prise en compte par le critère ci-dessus, alors qu'elle peut être le signe d'une certaine instabilité. Pour pallier à cela, on peut utiliser le critère  $\hat{\sigma}_\phi(\phi_r^p)$  suivant :

$$\hat{\sigma}_\phi(\phi_r^p) = \frac{1}{2} \|\phi_r^p - \phi_r^{p-1}\| \quad (\text{V.2.12})$$

qui, si les vecteurs modaux ont préalablement été normés, prend potentiellement des valeurs entre 0 (vecteurs égaux, stabilité idéale) et 1 (vecteurs opposés).

Une fois les branches reconstruites, il est également possible de définir des critères de stabilité basés sur les fréquences  $f_r$  et amortissement modaux  $\xi_r$  identifiés à des ordres successifs. Ceux-ci peuvent prendre la forme suivante :

$$\hat{\sigma}_f(f_r^p) = \frac{|f_r^p - f_r^{p-1}|}{\max(|f_r^p|, |f_r^{p-1}|)} \quad (\text{V.2.13})$$

$$\hat{\sigma}_\xi(\xi_r^p) = \frac{|\xi_r^p - \xi_r^{p-1}|}{\max(|\xi_r^p|, |\xi_r^{p-1}|)} \quad (\text{V.2.14})$$

et prennent des valeurs entre 0 et 1.

Les différents critères de stabilité présentés ci-avant permettant la sélection des composantes du signal à conserver. Dans le cas d'application présenté en fin de chapitre, le critère de complexité des modes  $\zeta_r$  est mis en œuvre. Les critères associés à la stabilité des paramètres  $\hat{\sigma}(f_r^p)$  et  $\hat{\sigma}(\xi_r^p)$  sont quand à eux utilisés dans leur forme généralisée pour l'estimation des incertitudes sur ces paramètres comme présenté dans les paragraphes qui suivent (voir expression (V.3.38)).



### V.2.3 Quantification des incertitudes

Sur la base de la propagation des perturbations des données dans la méthode ESPRIT, la section IV.3 du chapitre précédent développe un moyen de quantifier les incertitudes sur les paramètres  $\omega_r$  et  $\phi_r$  du modèle de signal ci dessus (voir équations (IV.3.12) et (IV.3.21)). Afin de permettre la quantification des incertitudes sur les triplets modaux identifiés lors de l'analyse modale des structures par la méthode ESPRIT proposée, la même technique est appliquée ici. La sensibilité des paramètres estimés est dérivée, valable quelque soit la forme de la perturbation des données, tant que le rapport signal-à-bruit reste d'un ordre au moins supérieur à 1. La variance des paramètres est ensuite dérivée, celle-ci faisant certaines hypothèses sur la statistique des mesures. Les expressions dérivées étant associées à un coût de calcul conséquent, le dernier paragraphe propose l'utilisation du diagramme de stabilisation pour la quantification des incertitudes.

#### V.2.3.1 Sensibilité

La quantification des incertitudes débute de façon analogue au travail réalisé au chapitre précédent par la dérivation au premier ordre des paramètres modaux identifiés, associée à la *sensibilité* des estimations. On rappelle la convention  $\tilde{a} = a + \Delta a$ , où  $\Delta a$  est la perturbation de l'estimation  $\tilde{a}$  du paramètre dont la valeur exacte est  $a$ .

La perturbation au premier ordre des fréquences et amortissements modaux est directement dérivée de leurs expressions respectives (V.2.6) :

$$\Delta f_r = \frac{\Delta \operatorname{Re}\{\omega_r\}}{2\pi} \quad (\text{V.2.15})$$

$$\Delta \xi_r = \Delta \left( \frac{\operatorname{Im}\{\omega_r\}}{\operatorname{Re}\{\omega_r\}} \right) = \frac{\operatorname{Re}\{\omega_r\} \operatorname{Im}\{\Delta \omega_r\} - \operatorname{Im}\{\omega_r\} \operatorname{Re}\{\Delta \omega_r\}}{\operatorname{Re}\{\omega_r\}^2} \quad (\text{V.2.16})$$

où la perturbation  $\Delta \omega_r$  des pulsations modales est obtenue à partir de l'expression générale (IV.3.12) ou de sa version linéarisée (IV.3.16).

La sensibilité de la base modale estimée  $\tilde{\Phi}$  est également dérivée du chapitre précédent, en reprenant l'expression de la perturbation des amplitudes (IV.3.21). Avec  $\mathbf{V}_e^L$  la matrice de Vandermonde utilisée pour l'estimation des amplitudes (voir expression (IV.2.17)) et  $\mathbf{m}^L = {}^T[0 \dots L-1]$  le vecteur des indices, la perturbation de la base modale s'écrit :

$$\Delta \Phi = (\mathbf{V}_e^L)^\dagger \left( \Delta \mathbf{U} - i \operatorname{diag}(\mathbf{m}^L) \mathbf{V}_e^L \operatorname{diag}(\Delta \omega) \Phi \right) \quad (\text{V.2.17})$$

et dépend donc de la perturbation  $\Delta \omega$  des pulsations modales ainsi que de celle de la matrice des données non modifiée  $\Delta \mathbf{U}$  (voir expression (IV.2.19)).

*Remarque V.2.2.* La perturbation des pulsations étant linéairement dépendante de  $\Delta \mathbf{U}$ , l'expression ci dessus peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \Phi = \alpha (\mathbf{V}_e^L)^\dagger \Delta \mathbf{U} \quad (\text{V.2.18})$$

Au cours de nombreux essais numériques de validation, on a remarqué que  $\alpha \approx 2$ . La raison de cette observation n'est pas plus approfondie ici ; l'utilisation de l'expression (V.2.18) au lieu de (V.2.17) pour le calcul de  $\Delta \Phi$  permettrait toutefois de simplifier grandement le calcul.

### V.2.3.2 Variance

Les expressions des sensibilités (V.2.16) et (V.2.17) sont valables quelle que soit la forme des perturbations des données  $\Delta \mathbf{U}$ . Dans ce qui suit, la variance des paramètres estimés lors de l'analyse modale est dérivée. Celle-ci ne dépend plus de la perturbation des données mais de leur *covariance* : l'utilisation de ces expressions s'accompagne donc d'hypothèses sur la forme de la perturbation des données. Ces hypothèses correspondent au choix de la covariance des perturbations  $\mathbf{C}_{\Delta u \Delta u}$  (voir chapitre précédent, équation (IV.3.22)).

Dans ce qui suit, on suppose que les parties imaginaires et réelles de la perturbation de  $\omega_r$  sont décorréllées et de même variance, ce qui entraîne  $2\text{var}(\text{Re}\{\omega_r\}) = 2\text{var}(\text{Im}\{\omega_r\}) = \text{var}(\omega_r)$  (voir (IV.3.25)).

En utilisant ce principe, la variance des fréquences modales devient simplement :

$$\boxed{\text{var}(f_r) = \frac{\text{var}(\omega_r)}{8\pi^2}} \quad (\text{V.2.19})$$

et la variance des amortissements modaux est telle que :

$$\boxed{\text{var}(\xi_r) = \frac{\text{var}(f_r)}{f_r^2} (1 + \xi_r^2)} \quad (\text{V.2.20})$$

cette expression étant dérivée de :

$$\begin{aligned} \text{var}(\xi_r) &= \mathbb{E} \left\{ \Delta \xi_r^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\text{Re}\{\omega_r\}^2 \Delta \text{Im}\{\omega_r\}^2 - 2\text{Re}\{\omega_r\} \text{Im}\{\omega_r\} \Delta \text{Re}\{\omega_r\} \Delta \text{Im}\{\omega_r\} + \text{Im}\{\omega_r\}^2 \Delta \text{Re}\{\omega_r\}^2}{\text{Re}\{\omega_r\}^4} \right\} \\ &= \frac{\text{var}(\omega_r)}{2\text{Re}\{\omega_r\}^4} (\text{Re}\{\omega_r\}^2 + \text{Im}\{\omega_r\}^2) \end{aligned}$$

L'incertitude sur les amortissements modaux  $\xi_r$ , donnée par l'écart-type  $\sigma(\xi_r) = \sqrt{\text{var}(\xi_r)}$ , est donc inversement proportionnelle à la fréquence  $f_r$ . On note que le terme multiplicatif  $(1 + \xi_r^2)$  est en règle général très proche de 1 lorsque les structures étudiées sont *raisonnablement* amorties (cad.  $\xi_r \ll 1$ ).

La dérivation de la variance des amplitudes modales  $\Phi_{rn}$  à partir de l'expression des perturbations de la base modale (V.2.17) fait intervenir des termes de couplage entre la variance des données et la variance des pulsations. En conséquence, on se propose ici d'utiliser l'expression compacte (V.2.18) avec  $\alpha = 2$ , même si celle-ci n'a pu être qu'observée sur des résultats numériques et mériterait une étude plus approfondie. La variance des amplitudes prend alors la ofrme suivante :

$$\text{var}(\Phi_{rn}) = {}^H \mathbf{a} \mathbf{C}_{\Delta u \Delta u} \mathbf{a} \quad (\text{V.2.21})$$

où  ${}^H \mathbf{a} = 2\mathbf{b}_n^N \boxtimes \left[ {}^\top \mathbf{b}_r^{2R} (\mathbf{V}_e^L)^\dagger \right]$  avec  $\mathbf{b}_i^j = {}^\top [\mathbf{0}^{i-1} \ 1 \ \mathbf{0}^{j-i}]$ .

*Remarque V.2.3.* Si la perturbation des données est postulée sous la forme d'un bruit blanc uniforme de variance  $\sigma^2$ , la matrice de covariance associée est telle que  $\mathbf{C}_{\Delta u \Delta u} = \sigma^2 \mathbb{I}$ . L'expression ci-dessus devient donc :

$$\text{var}(\Phi_{rn}) = \sigma^2 \|\mathbf{a}\|^2 = 4 \left\| {}^\top \mathbf{b}_r^{2R} (\mathbf{V}_e^L)^\dagger \right\|^2 \quad (\text{V.2.22})$$



où on a utilisé  $\|\mathbf{x} \boxtimes \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \times \|\mathbf{y}\|$  et  $\|\mathbf{b}_n^N\| = 1$ . L'expression ci-dessus permet d'éviter le calcul du produit de Kronecker  $\boxtimes$  dans l'expression de  $\mathbf{a}$ , diminuant largement le nombre d'opérations nécessaires à l'estimation des incertitudes sur la base modale identifiée. On remarque également que l'hypothèse de bruit blanc uniforme entraîne logiquement une variance de l'amplitude modale indépendante du point d'observation  $n$ .

### V.2.3.3 Utilisation du diagramme de stabilisation

Les dispositifs de mesure plein-champs permettent actuellement l'acquisition d'un grand nombre de données. L'ordre de grandeur de la taille du maillage de mesure  $N$  est classiquement du millier de points, tandis que le nombre de points en temps  $L$  peut être de l'ordre de plusieurs dizaine de milliers. Pour pallier à cela, on a intégré au chapitre précédent une stratégie de *décimation* du signal en temps, qui permet de prendre en compte la totalité des mesures tout en conservant un coût de calcul raisonnable. On a également montré, dans un cas très simple, que cette décimation ne dégrade pas les performances de la méthode, tant que le critère de Nyquist est respecté. Pour l'identification des pulsations, il est également possible de décimer le maillage de mesures spatial, afin de limiter la complexité du calcul de la matrice de covariance des données. Une fois les pulsations estimées, la matrice de Vandermonde peut être construite pour estimer les amplitudes modales sur la totalité du maillage de mesure.

Toutefois, même en utilisant la décimation, la *totalité* des données entre en compte dans l'estimation des incertitudes. En effet, celles-ci sont toutes contenues dans la matrice de Hankel-Hankel par blocs  $\mathbf{H}$ , entrant en compte dans la quantification des perturbations (voir section IV.3, expression (IV.3.12)). En conséquence, l'estimation de  $(\Delta\phi_r, \Delta\omega_r)$  par les expressions dérivées ci-dessus peut demander une puissance de calcul importante. Lorsque la quantité de données disponible est trop conséquente, la quantification des incertitudes par l'approche perturbative devient non opérationnelle.

On évoque donc ici la possibilité de quantifier l'incertitude sur les paramètres estimés à partir de leur valeur identifiée pour des ordres successifs. Cela revient en fait à utiliser les critères de stabilité  $\hat{\sigma}_\phi$ ,  $\hat{\sigma}_f$  et  $\hat{\sigma}_\xi$  définis respectivement en (V.2.12), (V.2.13) et (V.2.14) pour quantifier l'incertitude.

Ces critères de stabilité peuvent être généralisés de façon à représenter une estimation de l'écart-type des paramètres. Cet estimation de l'écart-type d'un paramètre quelconque  $\chi_p = \{f_r^p, \xi_r^p, \phi_{n,r}^p\}$  identifié à l'ordre  $p$  peut prendre la forme suivante, réalisée sur les  $M - 1$  ordres précédents :

$$\tilde{\sigma}_M^2(\chi_p) = \mathbb{E} \left\{ \Delta\chi_p^2 \right\} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=p-M+1}^p \left( \chi_m - \mu_M(\chi_p) \right)^2 \quad (\text{V.2.23})$$

avec  $\tilde{\mu}_M(\chi_p)$  la moyenne de  $\chi_m$  pour  $m \in \llbracket p - M + 1, p \rrbracket$ . L'indicateur global  $\tilde{\sigma}_M$  peut être utilisé non seulement comme critère de sélection des triplets modaux  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{f}_r, \tilde{\xi}_r)$  les plus stables, mais également pour quantifier l'incertitude liée à l'estimation de ceux-ci.

L'écart-type  $\tilde{\sigma}_M(\chi_p)$  obtenu correspond en fait à une *incertitude sur l'ordre du signal*. En cela, il est assez différent des sensibilités  $\Delta\chi$  et variances  $\text{var}(\chi)$  dérivées ci-avant, qui quantifient plutôt les incertitudes dues à la *perturbation des données*. Par exemple, une estimation *biaisée* d'un paramètre  $\chi$  quelconque peut tout à fait être très stable en fonction de l'ordre du signal. Dans ce cas, l'écart-type estimé  $\tilde{\sigma}_M(\chi)$  est très faible, et peut même être inférieur au biais de l'estimation sur  $\chi$ . L'incertitude estimée à partir de  $\tilde{\sigma}_M(\chi)$  n'est donc pas représentative

de l'incertitude réelle. Par opposition, il est possible que la *sensibilité*  $\Delta\chi$  soit à même de mieux décrire le biais de l'estimation. Au contraire, si l'ordre de signal choisit est grand, des phénomènes de *surapprentissage* peuvent apparaître : les paramètres estimés décrivent alors les oscillations du bruit de mesure. Dans ce cas, les résidus de l'estimation sont très faibles. Ceux-ci permettant l'estimation des variances dues à la perturbation des données, l'incertitude sur les paramètres donnée par l'approche perturbative peut être largement sous-estimée. Par opposition, un paramètre  $\chi$  décrivant le bruit est instable ; il est caractérisé par une valeur de  $\tilde{\sigma}_M(\chi)$  assez importante, donc plus représentative de l'incertitude réelle.

La quantification des incertitudes par les expressions des variances des fréquences (V.2.19) et amortissement modaux (V.2.20) et par l'estimateur  $\tilde{\sigma}_M$  associé est illustrée dans le cas d'application présenté en fin de chapitre (voir figure V.9).

Dans cette première section, la méthode ESPRIT proposée au chapitre précédent a été spécialisée de façon à la mettre en œuvre pour l'analyse modale des structures. La méthode se base sur la mesure d'une ou plusieurs composantes d'un champ correspondant à la réponse libre de la structure, réalisée ou non en différents points. Par rapport aux applications de la méthode ESPRIT standard pour l'analyse modale précédemment proposées dans la littérature, la méthode ESPRIT unifiée développée au chapitre suivant permet : (i) la prise en compte de la totalité des données mesurées pour l'estimation d'un seul jeu de paramètres modaux ; (ii) la quantification des incertitudes. De plus, des techniques permettant le choix de l'ordre du signal, classiquement utilisées dans le cadre de méthodes d'analyse modale différentes, ont été présentées. Enfin, les expressions nécessaires à la quantification de l'incertitude sur les paramètres modaux obtenus ont été dérivées.

### V.3 Problème aux valeurs propres inverse

Cette seconde section est consacrée à la formulation et la résolution d'un problème inverse à partir des  $R$  premiers doublets modaux  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\omega}_r)$  estimés par analyse modale. Le problème inverse formulé permet l'estimation d'un jeu de paramètres  $\mathbf{p}$  entrant dans la construction des opérateurs généralisés  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$  d'un modèle de la structure mesurée.

La section est organisée en quatre parties. Tout d'abord, le problème inverse à résoudre est exprimé. Dans un second temps, une méthode de résolution est donnée, passant par la formulation d'un algorithme de descente de gradient. La troisième partie est dédiée à des propositions permettant d'aborder la régularisation de la méthode inverse. Enfin, la quantification des incertitudes liées à l'estimation des paramètres est discutée.

#### V.3.1 Formulation

Les paragraphes qui suivent mènent à la formulation d'un problème de minimisation, dont les arguments sont les paramètres  $\mathbf{p}$  à identifier et les données d'entrée les doublets modaux  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\omega}_r)$  obtenus après analyse modale de la structure mesurée.

Pour la suite, on suppose qu'un modèle de la structure mesurée est disponible. La construction de celui-ci peut passer par la méthode des éléments finis ou tout autre méthode de résolution permettant, sur la base du vecteur des degrés de liberté  $\mathbf{q}$ , la construction des opérateurs généralisés de raideur et de masse  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  (voir annexe A.2, expression (A.2.10)).

##### V.3.1.1 Problème aux valeurs propres *direct*

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, les modes d'une structure non conservative peuvent être obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres généralisées non linéaire *direct* associé (voir annexe B.2, expression (B.2.31)). Les doublets modaux solution de ce problème  $(\mathbf{q}_r, \omega_r)$  sont définis comme suit :

$$(\mathbf{K}(\omega_r) - \omega_r^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_r = \mathbf{0} \quad (\text{V.3.1})$$

où la dépendance de  $\mathbf{K}$  en fonction de  $\omega$  est héritée de celle du tenseur opérationnel des raideurs complexes  $\tilde{\mathbf{C}}(\omega) = \tilde{\mathbf{R}}(\omega) + i \tilde{\mathbf{R}}(\omega)$  (expression (B.2.9)). Les relations de Kramers-Kronig (expression (B.2.20)), dérivées de la causalité des systèmes, stipulent que cette dépendance en fréquence doit théoriquement être prise en compte lorsque des mécanismes dissipatifs sont mis en jeu.

En posant  $\lambda_r = \omega_r^2$  et  $\mathbf{A}(\lambda_r) = \mathbf{K} - \lambda_r \mathbf{M}$ , la définition ci-dessus prend la forme générale suivante :

$$[\mathbf{A}(\lambda_r)] \mathbf{q}_r = \mathbf{0} \quad (\text{V.3.2})$$

soit un problème aux valeurs propres non linéaire caractérisé par une matrice de fonctions  $\mathbf{A}(\lambda)$  dont le déterminant s'annule pour  $\lambda = \lambda_r$ .

La résolution de ce type de problème a déjà été abordée au chapitre I, section I.5, pour la résolution du problème de propagation des ondes dans les guides d'onde plans avec prise en compte du couplage acoustique. De nombreuses méthodes permettent la résolution de ce problème direct. Les détails concernant leur implémentation ne sont pas données ici ; on pourra par exemple se référer à la revue des différentes méthodes disponibles proposée dans [87].

Dans le présent travail, on cherche à identifier un jeu de  $P$  paramètres  $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^P$  sur la base des données modales extraites de la réponse d'une structure. Ces paramètres entrent en compte

dans l'opérateur généralisé du modèle associé à cette structure, de la forme  $\mathbf{A}(\lambda, \mathbf{p})$ . Les valeurs propres  $\lambda_r$  et vecteurs propres  $\mathbf{q}_r$  correspondantes dépendent également de ces paramètres, de sorte que la définition de ceux-ci devient :

$$\boxed{\mathbf{A}(\lambda_r(\mathbf{p}), \mathbf{p}) \mathbf{q}_r(\mathbf{p}) = \mathbf{0}} \quad (\text{V.3.3})$$

soit un problème aux valeurs propres non-linéaire paramétré par  $\mathbf{p}$ .

### V.3.1.2 Problème aux valeurs propres *inverse*

L'identification des paramètres  $\mathbf{p}$  que l'on souhaite estimer passe par l'*inversion* du problème aux valeurs propres direct défini ci-avant (V.3.3). Cette inversion prend la forme d'un problème de minimisation mettant en jeu une *fonction objectif*.

La résolution de problèmes inverses aux valeurs propres n'est pas cantonnée à l'analyse modale des structures ; on en trouve en effet des applications pour l'identification et le contrôle des systèmes, en spectroscopie moléculaire ou encore en géophysique. Une revue des différentes méthodes associée à la résolution de ce type de problèmes est donnée dans [55].

La fonction objectif ou *fonctionnelle*  $J$  à minimiser prend en compte les duplets modaux expérimentaux  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r)$  ainsi que le jeu *test* de paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$ . Elle est positive et s'annule lorsqu'elle est calculée sur les données non perturbées et le jeu de paramètres exact, soit  $J(\phi_r, \lambda_r, \mathbf{p}) = 0$ .

Sur la base d'une telle fonctionnelle, l'estimation  $\tilde{\mathbf{p}}$  des  $P$  paramètres réalisée sur des données perturbées peut se formaliser comme le problème de minimisation suivant :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^P} J(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r, \mathbf{p}) \quad (\text{V.3.4})$$

Les paragraphes qui suivent mènent à la formulation d'une fonctionnelle  $J$  basée sur la *distance* entre les duplets modaux expérimentaux et numériques.

**Matrice d'observation** Les vecteurs propres modaux expérimentaux  $\tilde{\phi}_r$  sont obtenus à partir de la mesure de certaines composantes de la réponse libre  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  de la structure à identifier sur un maillage de points  $\mathbf{y}$ . Les composantes  $\phi_{n,r}$  contiennent alors les  $N$  observations du mode disponibles pour la formulation du problème inverse.

De façon à mesurer une erreur entre vecteurs propres modaux expérimentaux  $\phi_r \in \mathbb{C}^N$  et numériques  $\mathbf{q}_r(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^Q$  (avec  $Q$  le nombre de degrés de liberté du modèle), il est nécessaire de définir une *matrice d'observation*  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times Q}$  telle que  $\phi_r(\mathbf{p}) = \mathbf{Y} \mathbf{q}_r(\mathbf{p})$ . Cette matrice contient les fonctions de forme  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  utilisées pour la formulation du modèle de structure (voir annexe A.2, équation (A.2.4)) et évaluées au niveau des points du maillage de mesure  $\mathbf{y}_n$ . Elle prend la forme suivante :

$$\boxed{{}^T\mathbf{Y} = [\mathbf{n}(\mathbf{y}_1) \quad \dots \quad \mathbf{n}(\mathbf{y}_N)]} \quad (\text{V.3.5})$$

et permet de projeter les vecteurs propres théoriques  $\mathbf{q}_r$  dans le même espace que les vecteurs expérimentaux  $\tilde{\phi}_r$  afin de pouvoir les comparer.

**Critère de MAC** Une fois les vecteurs propres numériques projetés sur le maillage de points de mesure, il est nécessaire de trouver les modes expérimentaux qui leur correspondent. Pour

cela, le critère de MAC est classiquement utilisé ; la matrice de MAC est calculée entre la base modale expérimentale  $\tilde{\Phi}$  et la base modale numérique  $\Phi(\mathbf{p})$  :

$$\text{MAC}_{ij}(\tilde{\Phi}, \Phi(\mathbf{p})) = \frac{\tilde{\phi}_i^H \cdot \phi_j(\mathbf{p})}{\|\tilde{\phi}_i\| \|\phi_j(\mathbf{p})\|} \quad (\text{V.3.6})$$

Ainsi définit, le critère de MAC est complexe ; sa valeur absolue, inférieure ou égale à 1, dénote la *corrélation* entre les deux bases modales ; son argument dénote la *rotation uniforme* dans le plan complexe d'une base par rapport à l'autre. Sur la base du critère de MAC peuvent donc être mis en correspondance certains vecteurs modaux numériques avec les vecteurs modaux expérimentaux.

**Fonctionnelle à minimiser** La fonctionnelle  $J$  impliquée dans le problème inverse (V.3.4) est choisie ici comme une *mesure* de la distance entre les duplets modaux expérimentaux  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r)$  et numériques  $(\mathbf{q}_r(\mathbf{p}), \lambda_r(\mathbf{p}))$ . La distance en question est exprimée au sens des moindres carrés ;  $J$  prend donc la forme suivante :

$$J(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r, \bar{\mathbf{p}}) = \left[ \sum_{r=1}^R (\tilde{\lambda}_r - \lambda_r(\bar{\mathbf{p}}))^2 + \beta \sum_{r=1}^R \|\tilde{\phi}_r - \mathbf{Y} \mathbf{q}_r(\bar{\mathbf{p}})\|^2 \right] \quad (\text{V.3.7})$$

où  $\beta \in \mathbb{R}$  est un paramètre intrinsèque permettant d'assigner un poids différent à l'erreur sur les valeurs propres et vecteurs propres.

La difficulté majeure de la procédure d'identification par analyse modale consiste à résoudre le problème d'estimation (V.3.4) incluant la fonctionnelle (V.3.7). Ce problème est résolu dans la sous-section suivante par la formulation d'une méthode de type descente de gradient analytique.

## V.3.2 Résolution

Les paragraphes qui suivent concernent la résolution du problème de minimisation formulé ci-avant. Pour cela, une méthode de descente de gradient analytique est formulée à partir de la sensibilité des valeurs et vecteurs propres.

### V.3.2.1 Descente de gradient

Soit le jeu de paramètres  $\tilde{\mathbf{p}}$  qui minimise idéalement la fonctionnelle  $J$  et un jeu de paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$  initial. Au premier ordre, on peut écrire le développement suivant :

$$J(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r, \tilde{\mathbf{p}}) = J(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r, \bar{\mathbf{p}}) + \delta \mathbf{p} \frac{\partial J(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r, \bar{\mathbf{p}})}{\partial \bar{\mathbf{p}}} = 0 \quad (\text{V.3.8})$$

avec  $\delta \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}$  la *direction de descente* que l'on cherche à déterminer. Cette équation est équivalente au système suivant :

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}}) \delta \mathbf{p} = \delta \boldsymbol{\mu}(\bar{\mathbf{p}}) \quad (\text{V.3.9})$$

avec  ${}^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}}) = [{}^T \mathbf{G}^\lambda(\bar{\mathbf{p}}) \quad {}^T \mathbf{G}^{\mathbf{q}_1}(\bar{\mathbf{p}}) \quad \dots \quad {}^T \mathbf{G}^{\mathbf{q}_R}(\bar{\mathbf{p}})]$  qui contient les dérivées partielles des valeurs propres et vecteurs propres du modèle évaluées en  $\bar{\mathbf{p}}$  :

$$\mathbf{G}_{ri}^\lambda(\bar{\mathbf{p}}) = \left. \frac{\partial \lambda_r(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\bar{\mathbf{p}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_{ji}^{\mathbf{q}_r}(\bar{\mathbf{p}}) = \beta \mathbf{Y}_{jk} \left. \frac{\partial \mathbf{q}_{k,r}(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right|_{\mathbf{p}=\bar{\mathbf{p}}} \quad (\text{V.3.10})$$

et  $\delta\boldsymbol{\mu}(\bar{\mathbf{p}})$  qui contient les erreurs sur ces mêmes grandeurs :

$${}^T\delta\boldsymbol{\mu}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\lambda}(\bar{\mathbf{p}}) & {}^T\delta\boldsymbol{\phi}_1(\bar{\mathbf{p}}) & \dots & {}^T\delta\boldsymbol{\phi}_R(\bar{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \quad (\text{V.3.11})$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}(\bar{\mathbf{p}}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}(\bar{\mathbf{p}}) \quad \text{et} \quad \delta\boldsymbol{\phi}_r(\bar{\mathbf{p}}) = \beta [\tilde{\boldsymbol{\phi}}_r - \boldsymbol{\phi}_r(\bar{\mathbf{p}})] \quad (\text{V.3.12})$$

Dans le cas où  $\beta = 0$ , les vecteurs propres n'entrent pas dans le problème de minimisation, et la recherche de la direction de descente devient :

$$\delta\mathbf{p} = \left( \mathbf{G}^\lambda(\bar{\mathbf{p}}) \right)^\dagger \delta\boldsymbol{\lambda}(\bar{\mathbf{p}}) \quad (\text{V.3.13})$$

La résolution du problème de minimisation qui mène à l'estimation des paramètres  $\tilde{\mathbf{p}}$  est donc réalisée de façon itérative. Les différentes étapes d'une itération sont les suivantes :

1. la base modale numérique  $\boldsymbol{\Phi}(\bar{\mathbf{p}})$  est calculée à partir des paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$
2. chaque mode numérique  $\boldsymbol{\phi}_r(\bar{\mathbf{p}})$  est associé à un mode expérimental  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_r$  par le biais du critère de MAC (équation (V.3.6))
3. le vecteur des erreurs  $\delta\boldsymbol{\mu}(\mathbf{p})$  est calculé
4. la matrice des sensibilités  $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}})$  est construite
5. la direction de descente  $\delta\mathbf{p}$  est déterminée au sens des moindres carrés
6. le jeu de paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$  est mis à jour en y ajoutant  $\delta\mathbf{p}$

Ces étapes sont répétées jusqu'à convergence. Le critère de convergence est classiquement basé sur la norme de la direction de descente  $\|\delta\mathbf{p}\|$ .

### V.3.2.2 Sensibilité des valeurs et vecteurs propres

Le calcul de la matrice des dérivées partielles  $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}})$  pour l'estimation de la direction de descente  $\delta\mathbf{p}$  est la difficulté majeure des méthodes de descente de gradient. La matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  peut être estimée de façon discrète par différences finies, en calculant les duplets modaux numériques pour différentes jeux de paramètres au voisinage de  $\bar{\mathbf{p}}$ . Toutefois, cette stratégie nécessite de calculer la base modale un grand nombre de fois, ce qui entraîne un cout de calcul conséquent. De façon à éviter cela, on utilise ici l'approche perturbative. Celle-ci permet de dériver analytiquement le premier gradient des duplets modaux  $(\boldsymbol{\phi}_r, \lambda_r)$  en se basant sur la sensibilité de ceux-ci à une perturbation des paramètres  $\mathbf{p}$ .

**Restriction du modèle** Pour dériver la sensibilité des valeurs et vecteurs propres numériques  $(\lambda_r(\mathbf{p}), \mathbf{q}_r(\mathbf{p}))$  en fonction de la perturbation des paramètres  $\mathbf{p}$ , il est nécessaire de connaître la dépendance de la matrice caractéristique  $\mathbf{A}(\lambda, \mathbf{p})$  en fonction de  $\lambda$ . Pour cela, on se limite ici au cadre de l'analyse modale d'une structure dont les dissipations sont prises en compte par un modèle hystérétique (voir annexe B.2, équation (B.2.52)). Ce modèle est caractérisé par une matrice opérationnelle des raideurs complexe indépendante de la fréquence, soit :

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}) = \mathbf{K}'(\mathbf{p}) + i\mathbf{K}''(\mathbf{p}) \quad (\text{V.3.14})$$

Supposant l'indépendance de  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  en fréquence, le modèle hystérétique viole les relations de Kramers-Kronig. Il est toutefois montré en annexe B.2 que les structures faiblement amorties

peuvent raisonnablement être modélisées de cette façon, sur un domaine de fréquence plus ou moins restreint (voir expression (B.2.21)).

On rappelle la définition des valeurs et vecteurs propres associés à un modèle de structure avec comportement hystérétique :

$$(\mathbf{K}(\mathbf{p}) - \lambda_r(\mathbf{p})\mathbf{M})\mathbf{q}_r(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (\text{V.3.15})$$

soit un problème linéaire en  $\lambda_r = \omega_r^2$  paramétré par  $\mathbf{p}$ . L'opérateur de masse généralisée est supposé connu *exactement* et n'est donc pas fonction des paramètres à identifier ; il serait toutefois aisé de prendre en compte une certaine dépendance de  $\mathbf{M}$  en fonction de  $\mathbf{p}$ . Cela pourrait par exemple être mis en oeuvre pour l'identification de l'effet de masse ajoutée de conditions aux limites.

Le modèle hystérétique est choisit ici pour sa simplicité d'implémentation. Il simplifie également l'expression des sensibilités des valeurs et vecteurs propres associés. Toutefois, les expressions qui suivent peuvent également être obtenues dans le cas des modèles visqueux, et même pour des modèles viscoélastiques non-visqueux en général. On se référera pour cela aux résultats correspondant dérivés dans [2].

**Perturbation des valeurs propres** Dans le cas d'un système conservatif (soit  $\mathbf{K}'' = \mathbf{0}$ ), les opérateurs généralisés  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont réels symétriques. La perturbation des valeurs propres associée est dérivée en annexe D (équation (D.4.8)). Elle prend la forme suivante, où  $p_i$  est un des paramètres à identifier :

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial p_i} = \frac{{}^H \mathbf{q}_r \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} \mathbf{q}_r}{{}^H \mathbf{q}_r \mathbf{M} \mathbf{q}_r} \quad (\text{V.3.16})$$

Lorsque des dissipations sont introduites, l'opérateur  $\mathbf{K}$  n'est plus hermitien car  $\mathbf{K}'' = \text{Im}\{\mathbf{K}\}$  est symétrique. Toutefois, le faible amortissement des structures considérées permet de supposer que  $\mathbf{K}''$  est d'un ordre *au moins* plus petit que  $\mathbf{K}' = \text{Re}\{\mathbf{K}\}$ . Elle peut alors être vue comme une *perturbation* du problème conservatif ; cela correspond l'hypothèse de Basile. Sous cette hypothèse, on peut montrer que l'expression de la perturbation des valeurs propres ci-dessus reste valable, et devient complexe (voir annexe E.1).

La dérivée partielle ci-dessus, injectée dans le problème de minimisation (V.3.9) permet d'estimer une direction de descente  $\delta \mathbf{p}$  complexe. Ainsi, sous le même formalisme, des paramètres  $\mathbf{p}$  réels ou complexes peuvent être identifiés.

Dans le cas d'un comportement viscoélastique général (dépendance en fréquence, fort amortissement), l'expression de la perturbation des valeurs propres  $\lambda_r(\mathbf{p})$  est dérivée dans [2, équation (1.76) page 25].

**Perturbation des vecteurs propres** De nouveau, l'expression de la perturbation des vecteurs propres  $\mathbf{q}_r$  correspondant à un système conservatif est dérivée en annexe D (équation (D.6.4)). Elle prend la forme suivante, valable si les valeurs propres  $\lambda_r$  sont distinctes deux à deux :

$$\frac{\partial \mathbf{q}_r}{\partial p_i} = \sum_{k \neq r} \frac{{}^H \mathbf{q}_k \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} \mathbf{q}_r}{(\lambda_r - \lambda_k) {}^H \mathbf{q}_r \mathbf{M} \mathbf{q}_r} \mathbf{q}_k \quad (\text{V.3.17})$$



De façon analogue à la perturbation des valeurs propres, l'hypothèse de Basile permet d'utiliser cette même expression pour les systèmes peu amortis. L'expression concernant les modèles viscoélastiques en général peut être trouvée dans [2, équation (1.102) page 30].

La perturbation du  $r^{\text{ième}}$  vecteur propre  $\mathbf{q}_r$  fait donc intervenir les autres vecteurs de la base modale  $\mathbf{q}_k$ ,  $k \neq r$ . Cependant, en pratique la base modale numérique complète n'est pas disponible, pour des raisons d'économie de temps de calcul. Toutefois, le terme  $(\lambda_r - \lambda_k)$  au dénominateur permet d'utiliser seulement les modes voisins pour calculer cette perturbation, ceux-ci représentant la contribution dominante de la perturbation du mode.

### V.3.2.3 Cas des plaques stratifiées uniformes

Jusque là, la dépendance de l'opérateur généralisé des raideurs  $\mathbf{K}$  en fonction de  $\mathbf{p}$  n'a pas été explicitée. Il est donc possible d'imaginer l'identification de paramètres variés.

Dans le paragraphe qui suit, on explicite la dépendance de  $\mathbf{K}$  dans le cas d'une plaque épaisse stratifiée uniforme. Les paramètres  $\mathbf{p}$  à identifier sont alors les composantes du tenseur opérationnel des raideurs en contrainte planes  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  et de cisaillement hors-plan  $C_{\alpha 3 \beta 3}$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$ .

On considère donc une plaque composée de  $C$  couches, décrite par un modèle de plaque épaisse construit à partir de la cinématique de Hencky-Mindlin (voir chapitre II, section II.2). La séquence d'empilement des couches ainsi que leur orientation est supposée invariante sur la totalité de la surface de la plaque. L'opérateur de raideur généralisé associé au modèle se met sous la forme (C.2.29) suivante, en supposant les matériaux monocliniques (voir annexe B.1 sur le comportement anisotrope, expression (B.1.16)) :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \\ & & \underline{\underline{\mathbf{F}}} \end{bmatrix} \quad (\text{V.3.18})$$

où les tenseurs des raideurs apparentes en membrane  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , en flexion  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ , de couplage  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  et en cisaillement hors-plan  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  s'expriment comme suit :

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}}|\underline{\underline{\mathbf{B}}}|\underline{\underline{\mathbf{D}}}) = \int_z (1|z|z^2) \underline{\underline{\mathbf{Q}}}(z) dz = \sum_c^C (g_c^1|g_c^2|g_c^3) \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^c \quad (\text{V.3.19})$$

$$F_{\alpha\beta} = \xi^2 \int_z C_{\alpha 3 \beta 3}(z) dz = \xi^2 \sum_c^C h_c C_{\alpha 3 \beta 3}^c \quad (\text{V.3.20})$$

avec  $g_c^n = (z_{c,+}^n - z_{c,-}^n)/n$  pour la  $c^{\text{ième}}$  couche, d'épaisseur  $h_c$  et comprise entre  $z_{c,-}$  et  $z_{c,+}$ . Le coefficient  $\xi$  permet de corriger le comportement en cisaillement hors-plan du stratifié (voir chapitre II, section II.2). L'homogénéité de l'empilement sur la surface de la plaque permet d'exprimer l'opérateur généralisé des raideurs du modèle de la façon suivante :

$$\mathbf{K} = \int_{\underline{\mathbf{y}}} {}^H \mathbf{B}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\underline{\Pi}} \mathbf{B}(\underline{\mathbf{y}}) d\underline{\mathbf{y}} = \sum_{i,j,c} Q_{ij}^c \mathbf{K}_Q^{ijc} + \sum_{\alpha,\beta,c} F_{\alpha\beta}^c \mathbf{K}_F^{\alpha\beta c} \quad (\text{V.3.21})$$

où les matrices élémentaires  $\mathbf{K}_Q^{ijc}$  et  $\mathbf{K}_F^{\alpha\beta c}$  sont données par la séquence d'empilement, le coefficient correcteur en cisaillement, la géométrie de la plaque et les conditions aux limites.



La matrice  $\mathbf{K}$  étant exprimée comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires, les perturbations associées s'expriment sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial Q_{ij}^c} = \mathbf{K}_Q^{ijc} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial F_{\alpha\beta}^c} = \mathbf{K}_F^{\alpha\beta c} \quad (\text{V.3.22})$$

La matrice des dérivées partielles  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  (V.3.9), avec  $\mathbf{p}$  le vecteur qui contient les composantes  $Q_{ij}^c$  et  $C_{\alpha\beta 33}^c$ , peut donc être déterminée analytiquement en injectant les dérivées partielles ci-dessus dans l'expression des sensibilités des valeurs propres (V.3.16) et vecteurs propres (V.3.17). Cela permet de diminuer grandement la puissance de calcul nécessaire par rapport à une estimation du gradient par différences finies.

*Remarque V.3.1.* Le modèle de plaque utilisé ici permet de donner une dépendance linéaire de  $\mathbf{K}$  en fonction des paramètres à identifier. La démarche proposée ne se limite toutefois pas à ce type de dépendance ; tant que la dérivée partielle revêt une forme connue. On peut par exemple évoquer l'utilisation du comportement en cisaillement hors-plan correspondant à la borne de Reuss  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R$  (voir chapitre II, expression (II.2.35)) :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R = h^2 \left[ \sum_c^C h_c \underline{\underline{\mathbf{Z}}}^c \right]^{-1} = h^2 \underline{\underline{\Psi}}^{-1} \quad (\text{V.3.23})$$

où  $Z_{\alpha\beta}^c = S_{\alpha\beta 33}^c$  contient les composantes des souplesses en cisaillement hors-plan et  $\underline{\underline{\Psi}}$  est la matrice des souplesses généralisées associées. La perturbation de  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}^R$  peut alors être déduite de celle de l'inverse d'une matrice, dérivée en annexe D (expression (D.1.2)) :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{F}}}^R}{\partial S_{\alpha\beta 33}^c} = -h^2 \underline{\underline{\Psi}}^{-1} \frac{\partial \underline{\underline{\Psi}}}{\partial Z_{\alpha\beta}^c} \underline{\underline{\Psi}}^{-1} = -h^2 h_c \underline{\underline{\Psi}}^{-1} \Lambda^{\alpha\beta} \underline{\underline{\Psi}}^{-1} \quad (\text{V.3.24})$$

avec  $\Lambda_{\gamma\eta}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\eta}$  une matrice de sélection. De nouveau, la dérivée partielle de  $\mathbf{K}$  par rapport aux souplesses  $S_{\alpha\beta 33}^c$  dans chaque couche est facile à calculer. Il est donc possible d'identifier ce type de comportement avec la méthode proposée, en ajoutant les souplesses  $S_{\alpha\beta 33}^c$  aux paramètres à identifier.

### V.3.3 Régularisation

L'estimation de la direction de descente  $\delta \mathbf{p}$  lors d'une itération de la méthode de descente de gradient proposée (équation (V.3.13)) passe par le produit de la pseudo-inverse de la matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  avec le vecteur des erreurs  $\delta \boldsymbol{\mu}(\mathbf{p})$ . Le conditionnement de cette opération est critique ; un mauvais conditionnement peut amener un fort biais sur l'estimation finale des paramètres  $\tilde{\mathbf{p}}$  obtenue, voire empêcher la convergence de l'algorithme de descente.

De façon à améliorer la robustesse des estimations, certaines pistes de *régularisation* du problème inverse sont proposées dans les lignes qui suivent.

#### V.3.3.1 Taux de corrélation des vecteurs propres

Au début d'une itération, la base modale numérique est calculée ; chaque vecteur propre numérique est alors associé à un vecteur propre expérimental de façon unique. De façon à ne pas laisser de côté un mode expérimental dans la procédure d'identification, on calcule

généralement les  $K > R$  premiers vecteurs propres numériques, avec  $R$  le nombre de vecteurs propres expérimentaux disponibles.

Sans régularisation, chaque vecteur expérimental est associé à un vecteur numérique. Cela peut alors entraîner un biais, du au fait qu'un mode numérique et un mode expérimental ont été associés, alors que ceux-ci représentent en fait deux mécanismes de déformation de la structure différents. La minimisation alors réalisée entre les valeurs propres associées mène à une estimation fausse de la direction de descente.

Souvent, certains vecteurs de la base modale expérimentale ne sont suffisamment corrélés avec aucun vecteur propre numérique. Cela peut avoir plusieurs raisons : (i) ce vecteur expérimental n'est en fait pas *physique* ; (ii) les paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$  sont trop éloignés de leur valeur exacte, les modes numériques ne sont donc pas corrects ; (iii) le modèle de structure est incapable de décrire le mode expérimental (mauvaise discrétisation, anisotropie non prise en compte, déplacement 3D, etc.).

Pour régulariser ce phénomène qui peut fortement compromettre la qualité de l'estimation des paramètres voire de sa convergence, on introduit le *taux de confiance*  $\tau$  tel que  $0 < \tau \leq 1$ . Ce taux correspond à la corrélation minimum acceptable entre les modes expérimentaux et numériques. Un mode expérimental dont la ligne de la matrice de MAC correspondante a des coefficients strictement inférieurs à  $\tau$  est écarté, pour l'itération en cours, de la fonctionnelle de minimisation.

Ce paramètre  $\tau$  doit être manié avec précaution : lorsqu'il est choisi trop faible, des modes expérimentaux peu corrélés sont inclus dans l'estimation de la direction de descente. Au contraire, choisir  $\tau$  trop grand peut trop limiter le nombre de modes expérimentaux disponibles et rendre l'estimation de la direction de descente sous-déterminée. En règle général, on choisit  $\tau$  compris entre 50% et 90%, en fonction de la qualité des déformées modales expérimentales obtenues par analyse modale.

### V.3.3.2 Moindres carrés pondérés

Dans la fonctionnelle des moindres carrés classiques, un *poids* uniforme est donné à toutes les mesures de distance  $\delta\mu_i(\mathbf{p})$  que l'on cherche à minimiser. La fonctionnelle  $J$  définie ci-avant (équation (V.3.7)) introduit le facteur  $\beta$  qui permet déjà de jouer sur le poids alloué aux vecteurs propres par rapport aux valeurs propres. Une généralisation de ceci consiste en la méthode des moindres carrés *pondérés*. Soit la matrice carrée des poids  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{(1+Q)R \times (1+Q)R}$  définie positive. Celle-ci est intégrée dans l'estimation de  $\delta\mathbf{p}$  pour exprimer le problème aux moindres carrés pondérés suivant :

$$\delta\mathbf{p} = \left( {}^H\mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}}) \mathbf{W} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}}) \right)^{-1} {}^H\mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}}) \mathbf{W} \delta\boldsymbol{\mu}(\bar{\mathbf{p}}) \quad (\text{V.3.25})$$

qui, pour  $\mathbf{W} = k\mathbf{I}$  avec  $k$  quelconque, correspond à une estimation au sens des moindres carrés classiques. Toute la problématique consiste alors à choisir les poids  $W_{ij} \in \mathbb{R}$  de façon à régulariser le problème d'estimation. Ces poids correspondent à un degré de *confiance* que l'on attribue à une mesure d'erreur  $\delta\mu_i(\bar{\mathbf{p}})$  (par le biais des composantes diagonales  $W_{ii}$ ) ainsi qu'aux mesures croisées (par le biais des composantes extra-diagonales  $W_{ij}$ ,  $i \neq j$ ). Les paragraphes qui suivent donnent des pistes pour aider ce choix.

**Moindres carrés généralisés** Les moindres carrés généralisés intègrent, par le biais de la matrice  $\mathbf{W}$ , la covariance du résidu  $\boldsymbol{\epsilon}$  de l'estimation aux moindres carrés :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}}) \delta \mathbf{p} - \delta \boldsymbol{\mu}(\bar{\mathbf{p}}) \quad (\text{V.3.26})$$

Dans cette méthode particulière, la matrice des poids est choisie telle que  $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\epsilon\epsilon}^{-1}$ , avec  $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon} = \mathbb{E} \{ \boldsymbol{\epsilon}^H \boldsymbol{\epsilon} \}$ .

La principale difficulté de ce type d'approche est l'estimation de  $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon}$ ; en effet, une seule réalisation de  $\boldsymbol{\epsilon}$  est disponible. On peut alors choisir de ne pas considérer les termes extra-diagonaux de la covariance. Dans ce cas, la matrice des poids est diagonale, telle que :

$$W_{ii}^{-1} = |\epsilon_i|^2 \quad (\text{V.3.27})$$

Cela en fait donc une méthode itérative, le résidu  $\boldsymbol{\epsilon}$  étant calculé à partir d'une estimation  $\delta \mathbf{p}$ , puis injecté dans la matrice  $\mathbf{W}$  pour ré-estimer un nouveau  $\delta \mathbf{p}$ , etc., jusqu'à convergence. Cet aspect itératif peut toutefois très bien être intégré aux itérations de l'algorithme de descente afin d'éviter des opérations supplémentaires.

**Utilisation de la variance des données d'entrée** Les moindres carrés pondérés permettent d'intégrer, par le biais de la matrice  $\mathbf{W}$ , l'incertitude sur les duplets modaux estimés  $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{\phi}_r)$  par la méthode d'analyse modale. En particulier, si l'on applique ce principe à la fonctionnelle  $J$  (V.3.7) avec  $\beta = 0$ , la matrice des poids est telle que  $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\lambda\lambda}^{-1}$ , avec  $\mathbf{C}_{\lambda\lambda}$  la matrice de covariance des valeurs propres  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ . La méthode ESPRIT proposée intégrant la possibilité d'estimer la variance des pulsations  $\tilde{\omega}$  estimées, les éléments diagonaux de cette matrice de covariance peuvent être disponibles; dans ce cas, la matrice des poids prend la forme diagonale suivante, si  $\beta = 0$  :

$$W_{rr}^{-1} = \text{var}(\tilde{\lambda}_r) = 2|\tilde{\omega}_r|^2 \text{var}(\tilde{\omega}_r) \quad (\text{V.3.28})$$

Cette écriture pouvant bien sûr se généraliser au cas  $\beta \neq 0$ , en intégrant la variance des vecteurs modaux  $\tilde{\phi}_r$  préalablement estimée.

**Pondération en fréquence** Dans le cas où la variance des pulsations expérimentales identifiées n'est pas disponible, il est possible d'utiliser la borne de Cramer-Rao sur l'estimation des pulsations  $\omega_r$  donnée au chapitre précédent (voir section IV.3, expression (B.2.35)). Ce résultat stipule en effet que dans le cas idéal où l'amortissement est nul, la variance  $\text{var}(\tilde{\omega}_r)$  est indépendante de  $\omega_r$  (ce résultat est d'ailleurs retrouvé dans un cas simple pour la méthode ESPRIT, voir expression (IV.3.34)). En reprenant l'expression (V.3.28), on peut donc se servir de ce résultat pour justifier l'utilisation de poids du type  $W_{rr} = 1/\tilde{\omega}_r^2$ . En rappelant que  $\lambda_r = \omega_r^2$ , la généralisation de ce choix devient :

$$W_{rr}^{-1} = |\tilde{\lambda}_r|^\alpha \quad (\text{V.3.29})$$

avec  $\alpha \in R_+$  un réel positif proche de 1, qui permet de favoriser les modes basse fréquence ( $\alpha \geq 1$ ) ou haute fréquence ( $\alpha \leq 1$ ) dans le calcul de la direction de descente  $\delta \mathbf{p}$  et donc de l'estimation des paramètres finaux  $\tilde{\mathbf{p}}$ .

Puisqu'elle s'appuie sur une propriété bien établie des méthodes d'estimations de composantes harmoniques dans un signal (variance de  $\omega_r$  indépendante de la valeur de  $\omega_r$ ), cette pondération est utilisée par défaut dans ce travail.

**Pondération des modes** Dans la fonctionnelle  $J$  définie en (V.3.7), le paramètre  $\beta$  intervient. Celui-ci permet de régler la pondération de l'erreur sur les vecteurs propres  $\delta\phi_r(\bar{\mathbf{p}})$  par rapport à l'erreur sur les valeurs propres  $\delta\lambda_r(\bar{\mathbf{p}})$ . En effet, les erreurs sur les vecteurs propres  $\phi_r$  représentent  $R \times N$  lignes de la matrice  $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{p}})$  (voir équation (V.3.9)), contre  $R$  lignes seulement pour les valeurs propres  $\lambda_r$ . La présence des modes dans la fonction objectif du problème de minimisation est intéressante pour différentes raisons : (i) ceux-ci présentent une sensibilité différente aux paramètres  $\mathbf{p}$  que les valeurs propres [137] (ce phénomène est d'ailleurs illustré en fin de chapitre dans un cas pratique, voir figure V.14). (ii) la minimisation de l'erreur des vecteurs propres, exprimée *en chaque point* du maillage de mesure, augmente grandement le nombre d'équations disponibles pour le problème inverse, soit sa sur-détermination. En conséquence, il est *théoriquement* possible d'identifier  $(N + 1)$  paramètres à partir d'*un seul* duplet modal expérimental  $(\tilde{\phi}_r, \lambda_r)$ .

### V.3.3.3 Amortissement de l'algorithme

L'utilisation de la direction de descente telle qu'estimée au sens des moindres carrés peut poser des problèmes de convergence de l'algorithme de minimisation. En effet, si la sensibilité des grandeurs à modéliser est forte au point  $\bar{\mathbf{p}}$ , la norme de  $\delta\mathbf{p}$  peut être importante. Dans ce cas, le minimum de la fonctionnelle peut être difficile, voire impossible à atteindre. Pour pallier à ce problème, on introduit un scalaire  $\gamma$  inférieur ou égal à 1, tel que la mise à jour des paramètres à la  $i^{\text{ième}}$  itération soit réalisée de la façon suivante :

$$\boxed{\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i + \gamma\delta\mathbf{p}} \quad (\text{V.3.30})$$

Ce paramètre d'amortissement peut, s'il est choisis très faible, fortement ralentir la convergence de l'algorithme; on ne l'utilise donc que lorsque l'estimation des paramètres ne semble pas pouvoir converger.

De nombreuses autres pistes peuvent être envisagées pour la régularisation de la méthode d'identification exposée, comme l'utilisation de schémas de Levenberg-Marquardt [123, 136]. De plus, il pourrait être intéressant d'intégrer des contraintes dans l'estimation des paramètres. Ces contraintes pourraient par exemple s'inspirer des bornes sur les composantes du tenseur des raideurs défini positif  $\mathbf{C}$  (voir annexe B.1, expressions B.1.26) : elles permettraient alors de garantir la validité des paramètres identifiés sur des critères ayant un fondement physique.

## V.3.4 Quantification des incertitudes

La dernière partie de cette section concerne la quantification des incertitudes liées à l'estimation des paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$  par la résolution du problème inverse aux valeurs propres. Elle représente un travail encore à l'état prospectif; ce qui suit est donc plus de l'ordre de la discussion. Sur la base de la forme générale de la sensibilité des paramètres identifiés, différentes sources d'incertitudes sont évoquées. Finalement, un indicateur simplifié est proposé, permettant une estimation grossière des incertitudes liées aux paramètres identifiés.

### V.3.4.1 Sensibilité des paramètres identifiés

Les paramètres  $\bar{\mathbf{p}}$  sont estimés au sens des moindres carrés (ou moindres carrés pondérés), si bien que leur sensibilité  $\Delta\mathbf{p}$  peut être dérivée des expressions correspondantes données en annexe

(voir annexe D sur la perturbation des opérateurs matriciels, résultat (D.3.3)). La sensibilité des paramètres identifiés face à une donnée du problème quelconque  $a$  se met sous la forme suivante, dans le cas des moindres carrés classiques ( $\mathbf{W} = \mathbb{I}$ ) et en négligeant les termes du second ordre :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial a} = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}})^\dagger \left[ \frac{\partial \delta \boldsymbol{\mu}(\tilde{\mathbf{p}})}{\partial a} - \frac{\partial \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}})}{\partial a} \tilde{\mathbf{p}} \right] \quad (\text{V.3.31})$$

$$\begin{aligned} &= \left( {}^H \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \right)^{-1} \left[ {}^H \mathbf{G}^\lambda(\tilde{\mathbf{p}}) \left( \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial a} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{p})}{\partial a} \Big|_{\tilde{\mathbf{p}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_r^R {}^H \mathbf{G}^{a_r}(\tilde{\mathbf{p}}) \left( \frac{\partial \tilde{\phi}_r}{\partial a} + \frac{\partial \phi_r(\mathbf{p})}{\partial a} \Big|_{\tilde{\mathbf{p}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - {}^H \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \left( \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{p})}{\partial a} \Big|_{\tilde{\mathbf{p}}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{p}} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.3.32})$$

Cette expression générale permet de prendre en compte différents types d'incertitude par le biais de données incertaines  $a$ , qui peuvent représenter : (i) les données de la réponse de la structure mesurée ; (ii) des paramètres du modèle de la structure, que l'on ne cherche pas à identifier mais qui entrent dans la construction du modèle. Malgré le fait qu'on ne les intègre pas dans l'identification, ces derniers peuvent être connus de façon approximative, et donc avoir une incertitude associée.

#### V.3.4.2 Sources d'incertitude

Dans l'expression (V.3.32) de la sensibilité des paramètres identifiés  $\tilde{\mathbf{p}}$ , différents types de termes sont présents, correspondant aux sensibilités associées aux données expérimentales  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r)$ , aux données numériques  $(\phi_r(\mathbf{p}), \lambda_r(\mathbf{p}))$  ou encore à la matrice des sensibilités  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ . ceux-ci permettent de séparer différentes sources d'incertitudes : en supposant que les données incertaines  $\mathbf{a}$  sont décorréelées, on peut approximer l'écart-type  $\sigma(\tilde{p}_i)$  sur les paramètres identifiés de la façon suivante :

$$\sigma(\tilde{p}_i) = \sqrt{\text{var}(\tilde{p}_i)} \simeq \sqrt{\text{var} \left( {}^H \Delta \mathbf{a} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \mathbf{a}} \right)} \simeq \sum_j \sigma(a_j) \left| \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial a_j} \right| \quad (\text{V.3.33})$$

où les écarts-types  $\sigma(a_j)$  représentent l'incertitude sur les variables  $\mathbf{a}$ , chacune étant associée à une sensibilité des paramètres  $\tilde{\mathbf{p}}$ . L'hypothèse de décorrélation des différentes sources d'incertitude, qui revient à supposer que  $\mathbf{C}_{aa} = \mathbb{E} \{ \mathbf{a}^H \mathbf{a} \}$  est diagonale, pourrait être discutée. Toutefois, elle permet de simplifier grandement la quantification de l'incertitude sur les paramètres identifiés.

Sur la base de l'expression (V.3.32), différentes sources d'incertitude sont évoquées dans les lignes qui suivent.

**Duplets modaux expérimentaux** La sensibilité des paramètres due à l'estimation inexacte des duplets modaux  $(\tilde{\phi}_r, \tilde{\lambda}_r)$  peut être dérivée de l'expression (V.3.32) et devient :

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\lambda}_r} = {}^T \mathbf{b}_i^P \left( {}^H \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \right)^{-1} {}^H \mathbf{G}^\lambda(\tilde{\mathbf{p}}) \mathbf{b}_r^R \quad (\text{V.3.34})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\phi}_{n,r}} = {}^T \mathbf{b}_i^P \left( {}^H \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}}) \right)^{-1} {}^H \mathbf{G}^{a_r}(\tilde{\mathbf{p}}) \mathbf{b}_n^N \quad (\text{V.3.35})$$

où on rappelle que les vecteurs unitaires de sélection sont tels que  $\mathbf{b}_i^j = [\mathbf{0}^{i-1} \ 1 \ \mathbf{0}^{j-i}]$ .

Ces expressions pourront être injectées dans (V.3.33) en les multipliant par l'écart-type des duplets modaux expérimentaux, qui auront éventuellement été estimées lors de la mise en œuvre de l'analyse modale.

**Paramètres intrinsèques au modèle** Dans l'expression (V.3.32) interviennent les sensibilités  $\partial\lambda_r(\mathbf{p})/\partial a$  et  $\partial\phi_r(\mathbf{p})/\partial a$ , évaluées en  $\tilde{\mathbf{p}}$ . Celles-ci dénotent une incertitude sur des paramètres  $a$  intrinsèques au modèle.

On peut par exemple prendre le cas d'une plaque homogène isotrope d'épaisseur  $h$  en flexion. Celle-ci est décrite par la raideur de flexion  $D_{\text{iso}} = Q_{\text{iso}} \times h^3/12$  et l'inertie  $M = \rho h$ . Les valeurs propres du problème de flexion associé sont de la forme  $\lambda \propto D_{\text{iso}}/M$ ; les incertitudes associées à  $h$  et  $\rho$  s'écrivent alors :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial h} \propto \frac{2h}{12} \frac{Q_{\text{iso}}}{\rho} = \frac{2\lambda}{h} \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial \rho} \propto \frac{\lambda}{\rho} \quad (\text{V.3.36})$$

L'identification des propriétés planes  $\mathbf{Q}$  d'une plaque mince ( $h \rightarrow 0$ ) est donc fortement conditionnée par l'incertitude sur son épaisseur. La masse volumique  $\rho$  injectée dans le problème d'identification peut également représenter une certaine source d'incertitude. De nombreuses autres données peuvent être sources d'incertitude, comme la géométrie de la structure ou les conditions aux limites.

**Maillage de mesure** L'expression de la sensibilité des paramètres identifiés (V.3.32) fait également apparaître le terme  $\partial\mathbf{G}(\mathbf{p})/\partial a$ , évalué en  $\tilde{\mathbf{p}}$ . Celui-ci contient notamment le terme  $\partial\mathbf{G}^{\text{qr}}(\mathbf{p})/\partial a$ , dont l'expression fait intervenir la matrice d'observation  $\mathbf{Y}$  (voir expression (V.3.10)). La matrice d'observation définie en (III.4.4) contient les fonctions de forme  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , utilisées pour la formulation du modèle, évaluées aux points de mesure. Les  $N$  positions  $\mathbf{y}_n$  de ceux-ci sont des sources supplémentaires d'incertitude; elles peuvent donc être prises en compte dans la quantification de l'incertitude finale sur les paramètres estimés par le biais du terme  $\partial\mathbf{G}(\mathbf{p})/\partial a$ .

### V.3.4.3 Un indicateur simplifié

La mise en œuvre de l'expression (V.3.32) pour la quantification des incertitudes nécessite la connaissance des incertitudes liées à toutes les données  $a$  du problème, qui sont en pratique rarement disponibles.

De façon à permettre une quantification rapide des incertitudes, une estimation *grossière* peut être faite sur les résidus de la dernière itération de l'algorithme de descente. En négligeant l'incertitude sur les variables intrinsèques au modèle discutée au paragraphe précédent, les expressions (V.3.33), (V.3.34) et (V.3.35) permettent d'écrire :

$$\tilde{\sigma}(\text{Re}\{\mathbf{p}_i\}) = \tilde{\sigma}(\text{Im}\{\mathbf{p}_i\}) = \frac{1}{2} \sigma_{\text{res}} \|\mathbf{b}_i^P \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}})^\dagger\| \quad (\text{V.3.37})$$

où l'écart-type des résidus est estimé par  $\sigma_{\text{res}} = \|\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{p}})\tilde{\mathbf{p}} - \delta\boldsymbol{\mu}(\tilde{\mathbf{p}})\|$ .

On peut critiquer l'indicateur ainsi obtenu pour plusieurs raisons : (i) il ne décrit pas l'*interdépendance* des paramètres identifiés (qui serait donné par les termes extra-diagonaux de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{pp} = \mathbb{E}\{\mathbf{p}^H \mathbf{p}\}$ ); (ii) il fait l'hypothèse que la distribution des résidus sont est circulaire gaussienne (leur covariance est telle que  $\mathbf{C}_{\text{res}} = \sigma_{\text{res}}^2 \mathbf{I}$ ). Toutefois, il

revêt un certain intérêt opérationnel, de par le fait qu'il ne nécessite aucune connaissance des incertitudes sur les données d'entrée *a priori*.

L'indicateur  $\tilde{\sigma}(p_i)$  ainsi défini est utilisé dans le cas d'application donné dans la section suivante de ce chapitre. En particulier, les paramètres sont donnés sous la forme suivante :

$$\boxed{\operatorname{Re}\{p_i\} = \operatorname{Re}\{\tilde{p}_i\} \pm \tilde{\sigma}(p_i) \quad , \quad \eta\{p_i\} = \eta\{\tilde{p}_i\} \pm \frac{\tilde{\sigma}(p_i)}{\operatorname{Re}\{\tilde{p}_i\}}} \quad (\text{V.3.38})$$

où  $\eta\{p_i\} = \operatorname{Im}\{p_i\} / \operatorname{Re}\{p_i\}$  est le facteur de perte associé au paramètre  $p_i$ . Le format donné ci-dessus correspond, en supposant que la distribution des estimations de  $p_i$  suit une loi normale, à l'intervalle de confiance à 67%.

Dans cette seconde section a été présenté une méthode permettant l'identification de paramètres d'un modèle de structure à partir de données issues de l'analyse modale de celle-ci. Le problème aux valeurs propres inverse formulé s'exprime comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle basée. Cette fonctionnelle porte sur la distance des données modales obtenues à partir du modèle par rapport aux données modales expérimentales.

Un algorithme de descente de gradient itératif permettant la résolution du problème inverse a été présenté. La direction de descente, permettant de mettre à jour l'estimation des paramètres à chaque itération, est déterminée à partir de la sensibilité des données modales numériques face à une perturbation des paramètres. Il a été montré que ces sensibilités peuvent être déterminées analytiquement ; celles-ci ont été explicitées dans le cas des plaques multicouche uniformes.

La régularisation de la méthode inverse a ensuite été discutée. Différentes pistes ont été évoquées, consistant notamment en le choix d'une matrice de pondération des erreurs à minimiser. La pondération des valeurs propres proposée sera utilisée par défaut dans le reste de ce travail. La possibilité d'amortir l'algorithme a également été évoquée.

Enfin, une discussion sur la quantification des incertitudes a été menée. Différentes sources d'incertitude ont été évoquées. Enfin, un indicateur simplifié a été proposé, permettant une estimation grossière des incertitudes sur les paramètres estimés.



## V.4 Caractérisation d'une planche d'épicéa

Dans cette section, la démarche d'identification proposée dans ce chapitre est appliquée à l'identification des propriétés mécaniques d'une planche d'épicéa.

La section est divisée en quatre parties. Tout d'abord, la mesure de la réponse libre de l'échantillon est décrite. Une discussion est menée autour de l'optimisation de cette mesure, en vue d'obtenir une réponse la plus proche possible des conditions de modélisation.

La seconde partie développe l'analyse modale effectuée à partir de la mesure obtenue. Après une discussion sur la méthode de choix de l'ordre du signal utilisée, les résultats de l'analyse modale sont représentés. Finalement, les incertitudes estimées à partir de la méthode perturbative et du diagramme de stabilisation sont également illustrées et discutées.

La troisième partie concerne la formulation du modèle numérique associé à l'échantillon choisi. Le comportement du matériau, choisi du type isotrope transverse, permet de donner la décomposition de la matrice caractéristique du modèle utilisée dans l'algorithme d'identification pour le calcul des sensibilités. La validité du comportement hystérétique utilisé pour décrire les mécanismes de dissipation est discutée.

la quatrième et dernière partie est consacrée à l'identification des propriétés mécaniques de l'échantillon à partir des données modales extraites de la mesure et du modèle formulé. Deux cas d'identification sont présentés, s'intéressant à l'identification des propriétés planes de l'échantillon puis à la quantification du cisaillement roulant. Les résultats de l'identification sont ensuite discutés sur la base de la comparaison entre les données modales expérimentales et numériques obtenues.

**Description de l'échantillon** L'échantillon retenu pour cette application est une planche d'épicéa de dimensions  $L \times \ell \times h = 675 \times 130 \times 7$  millimètres. Une photographie de l'échantillon est donnée en figure V.1. Les fibres du bois sont orientées dans la grande longueur  $L$  de la plaque. Fournie par le facteur de pianos Stephen Paulello, cette planche fait partie d'un lot qui pourrait être utilisé pour la fabrication de tables d'harmonie. Elle a notamment été choisie pour sa remarquable homogénéité (absence de noeuds, alignement des fibres).

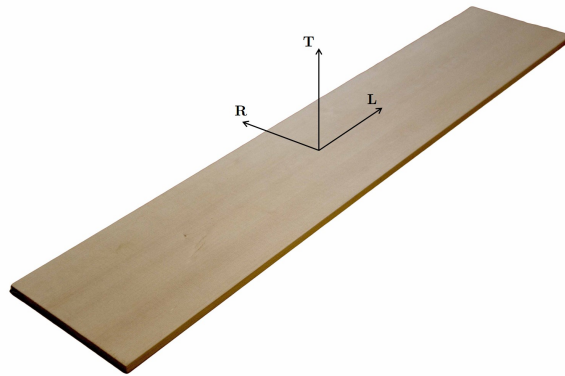


FIGURE V.1 – Prise de vue de l'échantillon. Dimensions :  $L \times \ell \times h = 675 \times 130 \times 7$



### V.4.1 Mesure

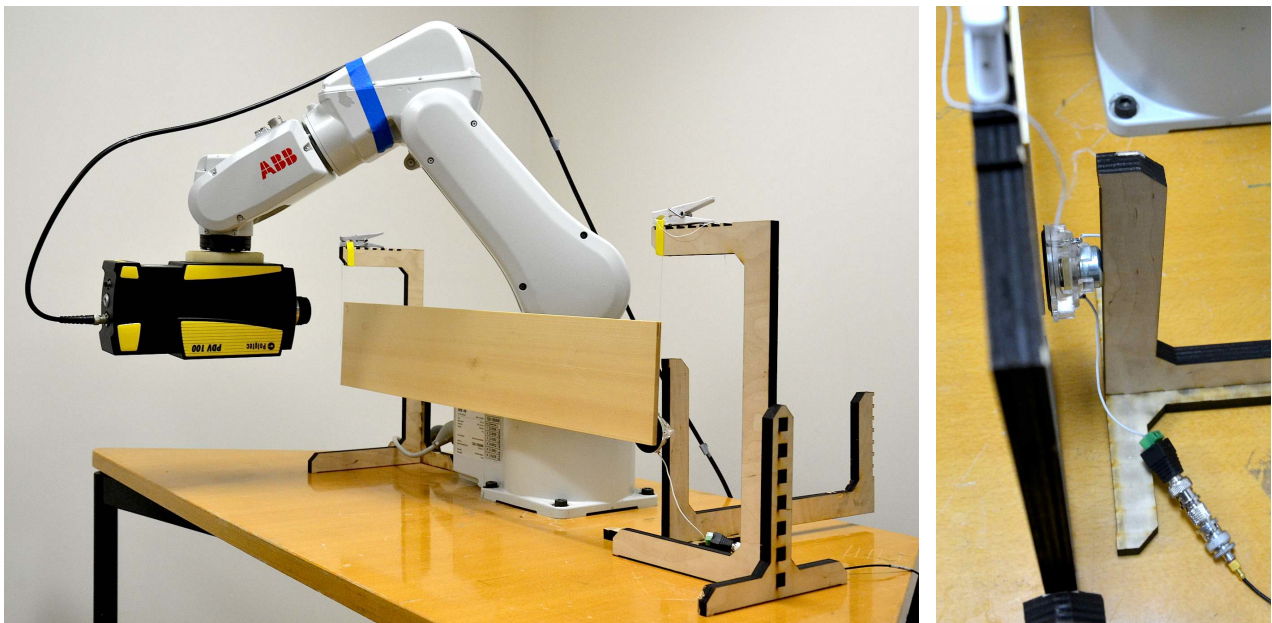
L'identification des propriétés mécaniques de l'épicéa composant l'échantillon par la procédure proposée dans ce chapitre nécessite de mesurer la réponse *libre* de celui-ci. De cette réponse, on espère pouvoir extraire les modes et pulsations naturelles de la structure et, à partir de celles-ci, identifier les propriétés mécaniques du matériau constitutif par résolution du problème aux valeurs propres inverse.

#### V.4.1.1 Dispositif expérimental

L'identification des propriétés mécaniques par analyse modale oblige à mesurer une réponse de l'échantillon la moins perturbée possible par les conditions expérimentales. Cela concerne deux aspects : (i) les conditions aux limites appliquées et (ii) le dispositif de mise en mouvement, qui permet d'imposer des *conditions initiales*. Pour illustrer les propos qui suivent, des vues du dispositif expérimental sont données en figure V.2.

**Conditions aux limites** Le choix classique consiste à suspendre la structure mesurée à l'aide de fils très souples et légers. Ainsi, l'inertie et la raideur apparente de ces conditions aux limites est très faible ; le travail des efforts dynamiques extérieurs peut donc être négligé. C'est ce choix qui est également fait ici : l'échantillon est suspendu à deux fils de nylon. Le mouvement hors-plan (ici horizontal, voir photo du dispositif) est donc laissé complètement libre. Cela permet de supposer que l'influence des conditions aux limites sur les modes de flexion est négligeable.

*Remarque V.4.1.* Il est intéressant de noter que la méthode proposée dans ce chapitre permettrait, par l'ajout de paramètres  $\mathbf{p}$  spécifiques aux conditions aux limites (masse, raideur, amortissement ajoutés), de formuler un problème d'identification incluant des conditions aux limites inconnues.



(a) Vue générale

(b) Placement du HP

FIGURE V.2 – Vues du dispositif expérimental

**Mise en mouvement** Le choix du dispositif permettant la *mise en mouvement* de la structure est également critique ; il n'est en effet pas souhaitable que celui-ci influe sur les modes et pulsations mesurées. De plus, la structure à caractériser est particulièrement légère, comme la plupart des structures auxquelles ce travail s'intéresse. En conséquence, l'ajout d'un dispositif d'excitation couplé à la structure (type pot vibrant) ne peut être envisagé seulement si son influence est correctement prise en compte dans le modèle. Dans ce travail, ce type de démarche n'est pas mis en œuvre. Une attention toute particulière est donc portée au dispositif de mise en mouvement.

La réalisation de la mesure à l'aide du dispositif de vibrométrie robotisé présenté au chapitre III oblige également la mise en place d'un moyen d'excitation permettant une très bonne *répétabilité* de l'expérience : la mesure doit en effet pouvoir être faite de façon complètement automatique, sans intervention extérieure. Il n'est donc pas possible d'envisager une excitation au marteau de choc manuelle.

La solution retenue consiste donc à exciter l'échantillon sans contact, par couplage acoustique. Un haut-parleur est placé face à l'échantillon (voir vues du dispositif, figure V.2) ; dans celui-ci est envoyé le signal électrique d'excitation (dont le choix est discuté ci-après). Le champ de pression acoustique ainsi généré impacte la structure, la mettant en mouvement. De cette façon, il est possible de mettre en mouvement la structure de façon non-intrusive et fortement répétable.

Ce type de dispositif de mise en mouvement a été utilisé durant ce travail de thèse pour bon nombre d'essais, et paraît une bonne solution pour la mesure de la réponse de structures *légères et raides*. En effet, celles-ci ont une fréquence de coïncidence assez faible (pour laquelle le couplage acoustique devient fort, voir la section I.3.3 dédiée). Plusieurs aspects permettant l'optimisation de l'excitation sont à noter : (i) la petite taille du haut-parleur (25 mm de diamètre environ), permettant d'exciter convenablement les modes haute fréquence (fréquence de coupure plus haute et étalement spatial de la force de couplage réduit) ; (ii) son placement près d'un coin de l'échantillon (ici le coin inférieur droit, voir figures V.2), position théorique d'un maximum local de déplacement pour tous les modes de la structure, permettant l'excitation de ceux-ci ; (iii) sa proximité avec la surface de l'échantillon (de l'ordre du millimètre), permettant d'assurer un couplage convenable.

Il faut noter que l'utilisation de ce dispositif d'excitation ne permet pas de quantifier directement l'excitation, comme cela est possible avec un pot vibrant par l'ajout d'un capteur de force. De façon à obtenir un signal de référence, il est possible de mesurer le champ acoustique proche à l'aide d'un microphone. Cette technique n'est pas utilisée ici ; aucun signal de référence n'est nécessaire pour mettre en œuvre la procédure d'identification par analyse modale, tant que l'excitation est suffisamment répétable.

#### V.4.1.2 Signal d'excitation

Un des avantages de l'utilisation d'un haut parleur pour exciter la structure que l'on souhaite mesurer réside dans la liberté offerte concernant le choix du signal d'excitation. Ici, la mesure concerne la réponse transitoire de la structure ; le signal d'excitation est donc lui aussi nécessairement transitoire.

De façon à mesurer la réponse libre de la structure, un signal impulsif bref est donc envoyé dans le haut-parleur placé face à l'échantillon. Une fois l'excitation arrêtée, on peut supposer que la structure est libre de tout chargement extérieur. Précisons que cela suppose un certain nombre d'hypothèses que l'on ne discutera pas ici, comme le fait de négliger l'influence des

conditions aux limites ou du champ acoustique résiduel (échos dans la pièce, comportement propre du haut-parleur, etc.).

Le choix du signal d'excitation est guidé par différentes considérations : (i) le domaine fréquentiel que l'on souhaite caractériser ; (ii) la durée de l'expérience ; (iii) le positionnement du haut parleur.

**Forme du signal** Classiquement, un signal impulsionnel de type *dirac* peut être utilisé : celui-ci possède une bande passante théoriquement uniforme. En réalité, cette bande-passante est limitée par la réponse en fréquence du haut parleur choisi. De plus, il n'est pas souhaitable d'exciter des fréquences trop hautes, au risque de dépasser le critère de Nyquist, entraînant des phénomènes de *repliement spectral*.

Pour cette raison, on utilise ici un signal d'excitation sous la forme d'une gaussienne ; ce type de fonction possède l'avantage de ne pas présenter de lobes secondaires sur son spectre :

$$s(t) \propto \exp(-b^2(t - t_0)^2) \quad \rightarrow \quad |s(f)| \propto \frac{1}{|b|} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{b^2}\right) \quad (\text{V.4.1})$$

avec  $t_0$  le délai de l'excitation. Le choix du paramètre  $b$  permet de maîtriser la bande passante du signal d'excitation.

**Durée d'une expérience** Il est également nécessaire de choisir la durée de l'acquisition, conditionnant l'espacement entre deux répétitions de la mesure. De façon à assurer la reproductibilité des observations de la réponse libre de la structure, le mouvement de celle-ci doit être nul lors du début de l'excitation. La durée de l'acquisition est donc conditionnée par l'amortissement de la structure : l'étalement spatial de la réponse libre d'une structure amortie est court, autorisant une répétition rapide de l'expérience.

**Annulation des mouvements de corps rigide** La proximité du haut-parleur avec la surface de l'échantillon permet d'exciter celui-ci de façon satisfaisante. Toutefois, le risque de contact entre ces deux objets est accru par cette proximité. Cela est d'autant plus critique lorsque, comme ici, de larges mouvements hors-plan de l'échantillon sont laissés libres par les conditions aux limites. Il est alors possible que l'excitation imprime un mouvement de balancier à l'échantillon. Celui-ci, généralement très basse fréquence, n'en est pas moins compromettant pour la qualité de la mesure : (i) ce mouvement peut entraîner le contact entre le haut-parleur et l'échantillon ; (ii) il est responsable du changement de la distance entre les deux objets, modifiant en conséquence l'amplitude de la stimulation, cela créant de forts écarts entre deux répétitions de l'expérience.

Pour diminuer ce mouvement de balancier, deux stratégies peuvent être envisagées. La première part du constat que le mouvement en question peut être amplifié par résonance lorsque l'espacement entre deux répétitions de la mesure est proche d'une période du balancier. La stratégie peut alors consister à mesurer approximativement cette période et choisir une durée d'expérience égale à un multiple impair de la moitié de cette période. Cela entraîne donc l'annulation, en moyenne, du mouvement de balancier. Toutefois, cette stratégie comporte le risque d'exciter un autre mode de corps solide basse fréquence (i.e. rotation).

La deuxième stratégie permettant de diminuer les mouvements de corps solide part du constat qu'un signal de type gaussien a une moyenne non nulle ayant donc une projection sur

les mouvements de corps solide. La solution consiste alors à choisir un signal d'excitation à moyenne nulle, comme par exemple, la première dérivée d'une gaussienne :

$$s'(t) \propto (t - t_0) \exp(-b^2(t - t_0)^2) \quad \rightarrow \quad |s'(f)| \propto \frac{f}{|b|} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{b^2}\right) \quad (\text{V.4.2})$$

ce choix permet d'annuler la force d'excitation moyenne ( $s(f = 0) = 0$ ) et ainsi de réduire le mouvement de balancier. Cette deuxième stratégie présente l'avantage de couper tous les mouvements de corps solide de l'échantillon ; toutefois, l'excitation des premiers modes de l'échantillon peut être difficile à assurer, à cause de la faible amplitude du spectre de ce type d'excitation en basse fréquence.

Pour le cas d'application donné ici, la première stratégie est utilisée pour diminuer le mouvement de balancier de l'échantillon. Une durée d'acquisition de 1 seconde est choisie, correspondant à l'extinction observée du mouvement de l'échantillon. L'étalement  $b$  du signal gaussien d'excitation est choisi de façon à exciter convenablement la structure jusqu'à 5 KHz.

#### V.4.1.3 Données mesurées

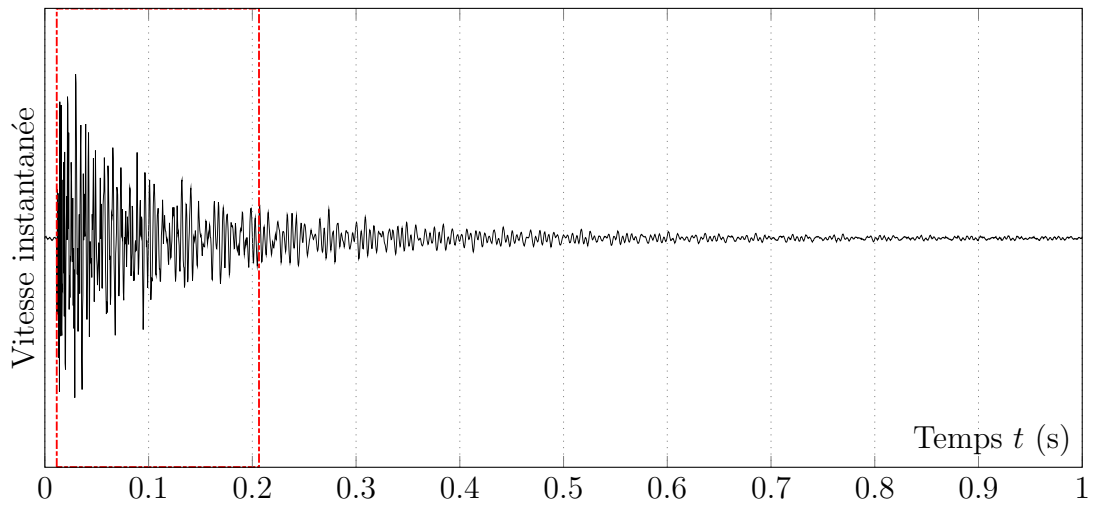
La mesure du champ de vitesse instantanée de la plaque est réalisée à l'aide du vibromètre robotisé décrit au chapitre III. Seule la composante hors-plan du champ de vitesse est mesurée : on ne s'intéresse en effet ici qu'aux modes de flexion de la plaque.

De façon à réduire au maximum la contribution du mouvement de balancier de l'échantillon sur la mesure, un filtre passe-haut analogique est appliqué. Celui-ci, intégré au vibromètre Polytec PDV-100 utilisé, possède une fréquence de coupure à 100Hz, supérieure à la fréquence du premier mode de l'échantillon ; ce choix n'est donc pas optimal mais son influence sur les résultats est, comme on le verra, finalement assez faible.

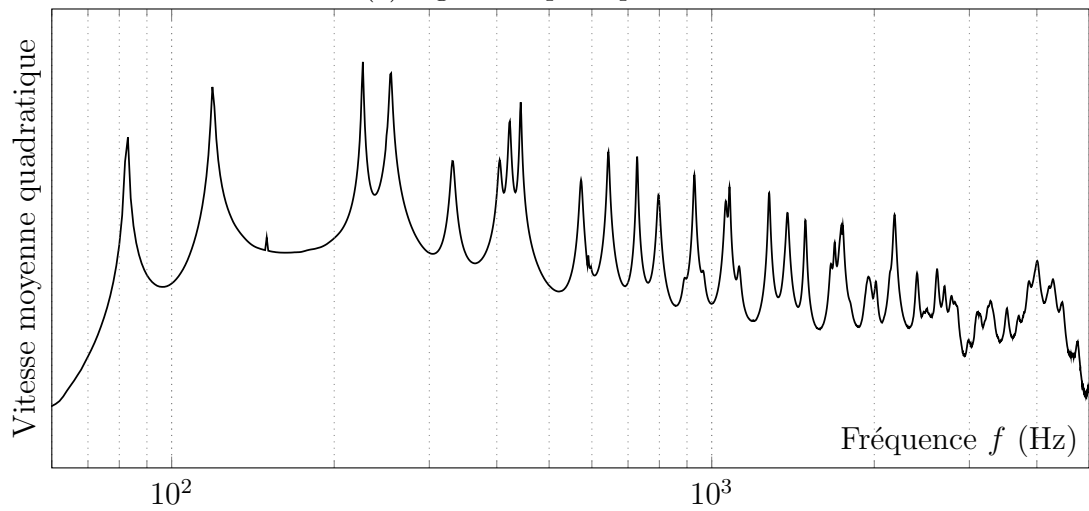
La mesure de la réponse de l'échantillon est réalisée sur un maillage régulier de  $41 \times 21 = 861$  points. La fréquence d'échantillonnage est choisie à 51.2 kHz, de façon à assurer largement le respect du critère de Nyquist. En chaque point, la mesure est répétée 5 fois ; est ensuite prise la médiane des 5 réalisations. Cette technique permet d'éviter les bruits impulsifs de grande amplitude caractéristiques d'une mesure vibrométrique sur une surface non traitée optiquement (voir le chapitre III au sujet de l'effet de ce type de perturbations sur la moyenne).

La réalisation de la mesure complète s'étale sur une heure et demie, en prenant en compte la durée nécessaire au robot pour changer de position. Une illustration de la mesure obtenue est donnée en figure V.3. La figure V.3a montre une réponse ponctuelle typique obtenue (sans unités), après prise de la médiane sur les 5 réalisations. Après une seconde d'acquisition, le niveau du signal obtenu est assez faible pour considérer que la structure ne bouge plus. Le spectre de vitesse moyenne quadratique (sans unités) est également donné en figure V.3b. Seulement la partie *utilisable* de celui-ci est représentée (entre 60 Hz et 5 kHz), c'est à dire pour laquelle le niveau de signal est suffisant pour mener à bien l'analyse modale.

Les figures V.3c et V.3d donnent deux déformées instantanées mesurées, pour des instants très proches de l'excitation (centrée sur  $t_0$ ). La première est prise juste après ( $t - t_0 = 0.2ms$ ) ; la source, située dans le coin inférieur droit, est bien visible. Le front des ondes contient déjà la signature de l'anisotropie : la progression est beaucoup plus rapide dans le sens des fibres (longueur de la planche) que dans le sens transverse (largeur). La seconde déformée instantanée représentée est prise une milliseconde après, alors qu'une partie des ondes générées a déjà pu faire quelques aller-retour sur l'échantillon. Encore une fois, l'anisotropie de l'épicéa est bien



(a) Signal temporel ponctuel



(b) Spectre moyen

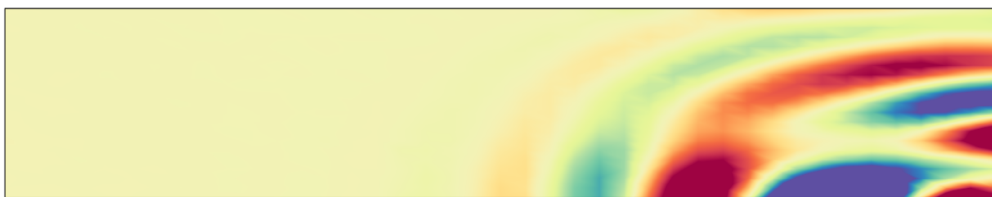
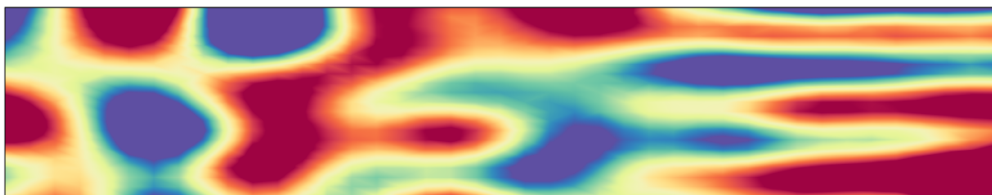
(c) Déformée instantanée à  $t - t_0 = 0.2$  ms(d) Déformée instantanée à  $t - t_0 = 1.2$  ms

FIGURE V.3 – Mesure de l'échantillon d'épicéa obtenue

visible : la longueur d'onde apparente dans la direction des fibres est bien plus grande que celle dans la direction transverse.

## V.4.2 Analyse Modale

La seconde partie de cette section a pour but de présenter l'application de la méthode d'analyse modale sur la mesure de la réponse libre de l'échantillon d'épicéa obtenue.

### V.4.2.1 Pré-traitements

Dans l'application présentée ici, le spectre fréquentiel est traité en une fois : la technique de division du spectre en sous-domaines fréquentiels, évoquée à la première section, n'est pas utilisée. De façon à limiter la quantité de données à traiter, seulement une partie du signal temporel est prise en compte ; l'intervalle de temps concerné est dénoté sur la figure V.3a par un domaine en ligne pointillée rouge. En tout, 10000 échantillons temporels sont utilisés (soit approximativement 0.2 secondes sur la seconde d'acquisition). Les données écartées sont en réalité peu intéressantes : elles ne contiennent que la réponse des tout premiers modes, les modes plus haute fréquence étant rapidement amortis. De plus, ces échantillons supplémentaires sont de faible amplitude ; en conséquence, le rapport signal à bruit y est moins bon. Il est donc préférable de ne pas les inclure pour l'analyse modale.

Au vu de la fréquence d'échantillonnage utilisée (51.2 kHz) et de la faible réponse en fréquence mesurée après 5 kHz, trois choix sont possibles : (i) traiter les données brutes avec la méthode ESPRIT sans décimation ; (ii) appliquer la méthode ESPRIT sur ces mêmes données, mais avec intégration de la technique de décimation propre à ESPRIT ; (iii) filtrer le signal sur la partie *utilisable* du domaine de fréquence (environ 60 Hz à 5 kHz), décimer le signal par choix d'un nombre réduit de points puis appliquer ESPRIT.

Le premier choix permet de prendre la totalité des données en compte, sans se soucier d'éventuels paramètres supplémentaires concernant la décimation et en assurant que le critère de Nyquist est respecté. La deuxième solution permet de réduire largement le temps de calcul nécessaire à l'estimation de l'espace signal (estimation de la matrice de covariance des données puis décomposition en valeurs propres de celle-ci). Toutefois, la totalité des données est utilisée pour l'estimation des incertitudes. Le troisième choix réduit encore le temps de calcul nécessaire et décimant les données avant leur traitement par ESPRIT.

De façon à donner un ordre d'idée du gain de temps entraîné par l'application de filtrage, les temps de calcul correspondant au premier choix (données brutes) et au troisième choix (filtrage puis décimation *avant* l'application d'ESPRIT) sont reportés dans le tableau V.1.

Étape	Données brutes	Données filtrées et décimées
Covariance $\mathbf{C}_{uu}$	9790 sec.	96 sec.
Sous-espace $\mathbf{W}$	66 sec.	1 sec.
MDL, ESTER, SAMOS	67 sec.	33 sec.
Stabilisation	498 sec.	30 sec.
Incertitudes	6890 sec.	520 sec.

TABLE V.1 – Temps de calcul nécessaires aux différentes étapes selon le choix des données



Pour ce troisième choix, le signal est filtré au dessus de 5 kHz puis décimé 5 fois. Le rapport entre les temps nécessaire à l'obtention des paramètres modaux est d'environ 25, ce qui est non négligeable. Dans le cadre d'une mise en oeuvre opérationnelle de la méthode proposée, il serait donc préférable de pré-filtrer puis décimer le signal avant l'application d'ESPRIT. Toutefois, l'objectif recherché ici n'étant pas en premier lieu la performance, la méthode ESPRIT est appliquée à la totalité des données brutes sans décimation ; ceci permet de s'affranchir d'éventuels biais dus au filtrage.

#### V.4.2.2 Choix de l'ordre du signal

Pour la sélection de l'ordre du signal, les critères de stabilisation peuvent être utilisés conjointement avec les critères MDL, ESTER ET SAMOS de façon à guider au mieux le choix. Du point de vue de la simple observation du spectre obtenu en figure V.3b, un quarantaine de pics peuvent être comptés. De façon à mettre en oeuvre les critères de stabilisation, on cherche à estimer les paramètres du signal pour des ordres  $P$  allant jusqu'à une large sur-estimation de l'ordre *exact*  $R$ . Le choix est donc fait de tester les ordres  $P = 1 \dots 150$  ; on rappelle que le signal étant réel, l'ordre du signal est toujours pair : on identifie donc à chaque fois  $2P$  composantes couplées deux à deux.

**Critères MDL, ESTER et SAMOS** Les critères MDL (bleu), ESTER (orange) et SAMOS (jaune) correspondant à l'application de la méthode ESPRIT sur les données brutes mesurées sont représentés sur la figure V.4, en fonction de l'ordre candidat  $P$ . Afin de comparer les différents critères, ceux-ci sont normalisés par leur valeur maximale.

On remarque que ces critères sont maximaux pour des ordres de signal faibles : le critère ESTER est maximal pour  $P = 2$  et les critères MDL et SAMOS sont maximaux pour  $P = 5$ . Ces valeurs étant bien en-dessous du nombre de composantes attendues, cela montre de façon pratique les difficultés liées à l'automatisation du choix de l'ordre *exact*  $R$ . Le critère ESTER normalisé décroît rapidement, pour devenir très proche de 0 à partir de  $P = 25$ . Au contraire, les critères MDL et SAMOS semblent pouvoir donner des indications sur la validité des ordres plus élevés (en particulier pour  $45 < P < 70$ ), mais le contraste entre les différents pics reste faible.

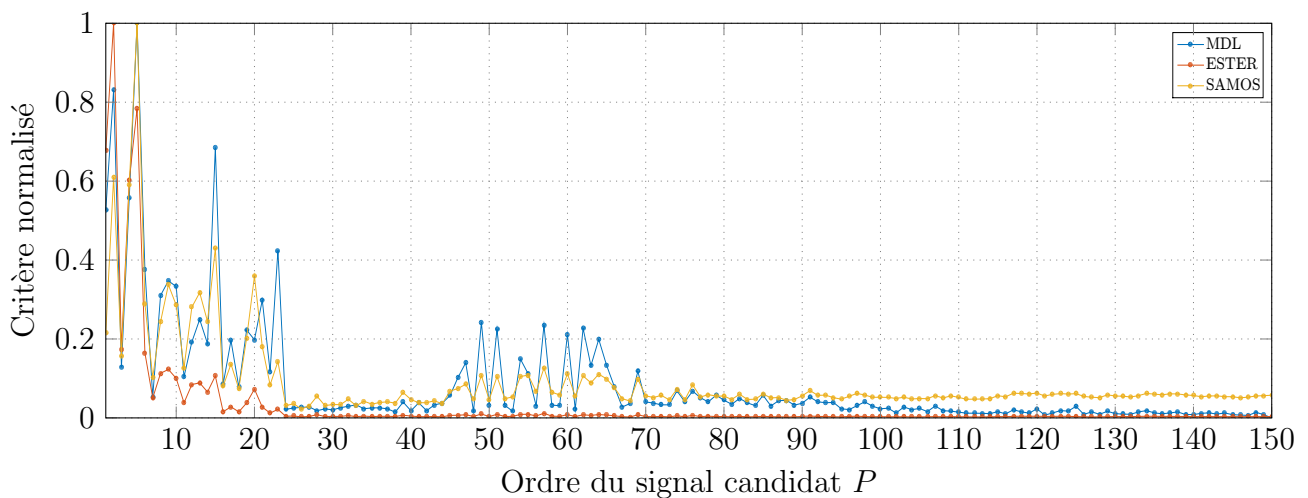


FIGURE V.4 – Critères MDL, ESTER et SAMOS pour le choix de l'ordre du signal  $R$

Ces critères ne donnent donc pas d'indication claire sur l'ordre de signal le mieux adapté à la description des mesures. Les critères de stabilité doivent alors être utilisés de façon à aider au choix de  $R$ .

**Diagramme de stabilisation** Comme cela a été évoqué plus haut, les critères de stabilité sont utilisés ici comme une aide au choix de l'ordre du signal, et non en vue d'automatiser cette étape. Pour cela, la démarche classiquement adoptée consiste à représenter les résultats sur un diagramme fréquence-ordre de signal, qui permet de superposer une partie des paramètres estimés sur le spectre du signal.

Le diagramme de stabilisation associé à l'analyse modale menée ici est donné en figure V.5. Les fréquences identifiées (en ordonnée) sont dénotées par des points, pour chaque ordre candidat  $P$  (en ordonnée). Il devient par cette représentation possible de distinguer les *branches* de stabilité : certaines composantes identifiées sont stables face à un changement d'ordre candidat et forment des lignes verticales sur le diagramme. Au contraire, d'autres composantes semblent très sensibles à un changement d'ordre : voir par exemple les résultats compris entre le deuxième et le troisième pic de résonance.

Cette représentation des paramètres identifiés, observée conjointement avec le spectre du signal en arrière-plan, permet déjà une distinction rapide entre les composantes du signal et les composantes qui semblent décrire le bruit. Toutefois, on peut voir que sur le haut du spectre (à partir de 1 kHz), la distinction des différentes branches devient moins claire. On choisit ici de se baser sur le critère de complexité des modes.

**Complexité des modes** Le critère de complexité des modes  $\zeta_r$ , défini en (V.2.9), se base sur le déphasage des différentes amplitudes modales estimées sur les points du maillage de mesure. Sur une structure faiblement amortie, les amplitudes modales sont sensées être quasiment en phase : le critère de complexité mesure l'alignement de ces différents points dans le plan complexe.

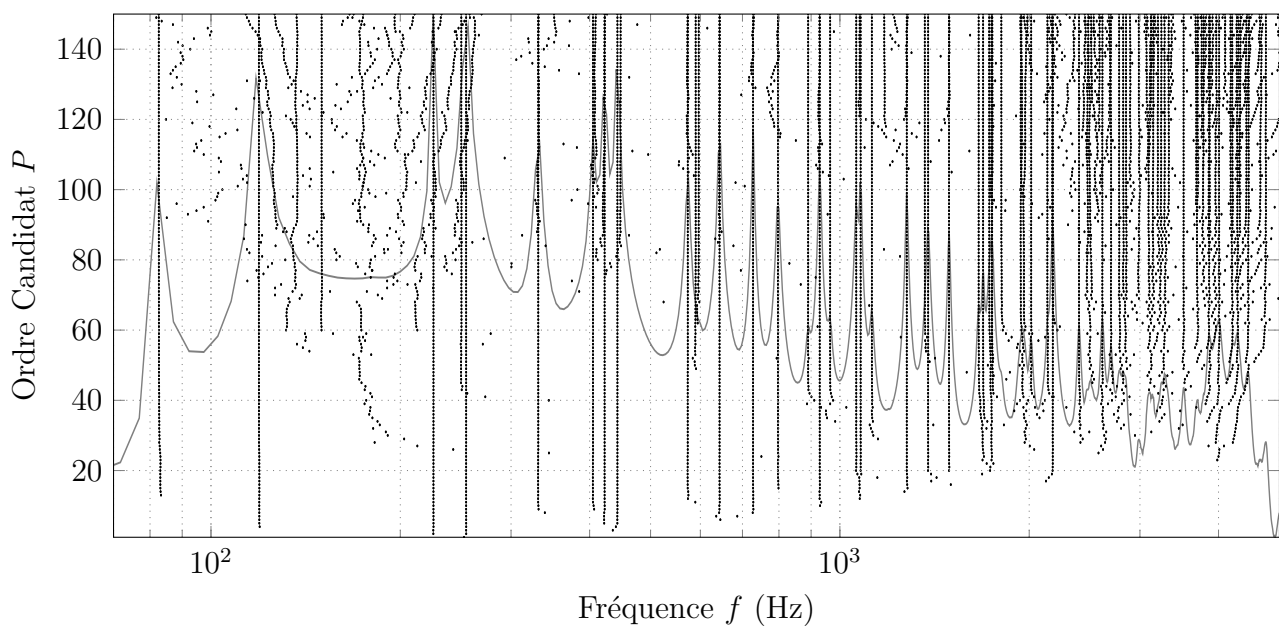


FIGURE V.5 – Diagramme de stabilisation



Sur la figure V.6 est représenté le diagramme de stabilisation auquel on a ajouté, par la coloration des différents points, le critère de complexité des modes. On observe clairement que les composantes identifiées entre deux pics de résonance sont caractérisées par un critère  $\zeta_r$  qui tend vers 1 (couleurs chaudes). Au contraire, les composantes situées près des pics sont associées à une faible valeur du critère  $\zeta_r$  (couleurs froides).

Deux cas particuliers sont également ajoutés, dénotés par les labels (A) et (B), tous deux correspondant à des modes identifiés vers 260 Hz. Les fréquences associées à ces deux modes identifiés sont très proches ; de plus, elles sont toutes deux assez stables en fonction de l'ordre du signal. Sans critère supplémentaire, il serait difficile de savoir si ces deux composantes sont à conserver. Dans ce cas précis, le critère  $\zeta_r$  est très clair : le mode (A) est très faiblement complexe : la distribution des amplitudes modales complexes est très proche d'une droite. Au contraire, le mode (B) est caractérisé par une phase quasiment aléatoire ; il peut donc être considéré instable.

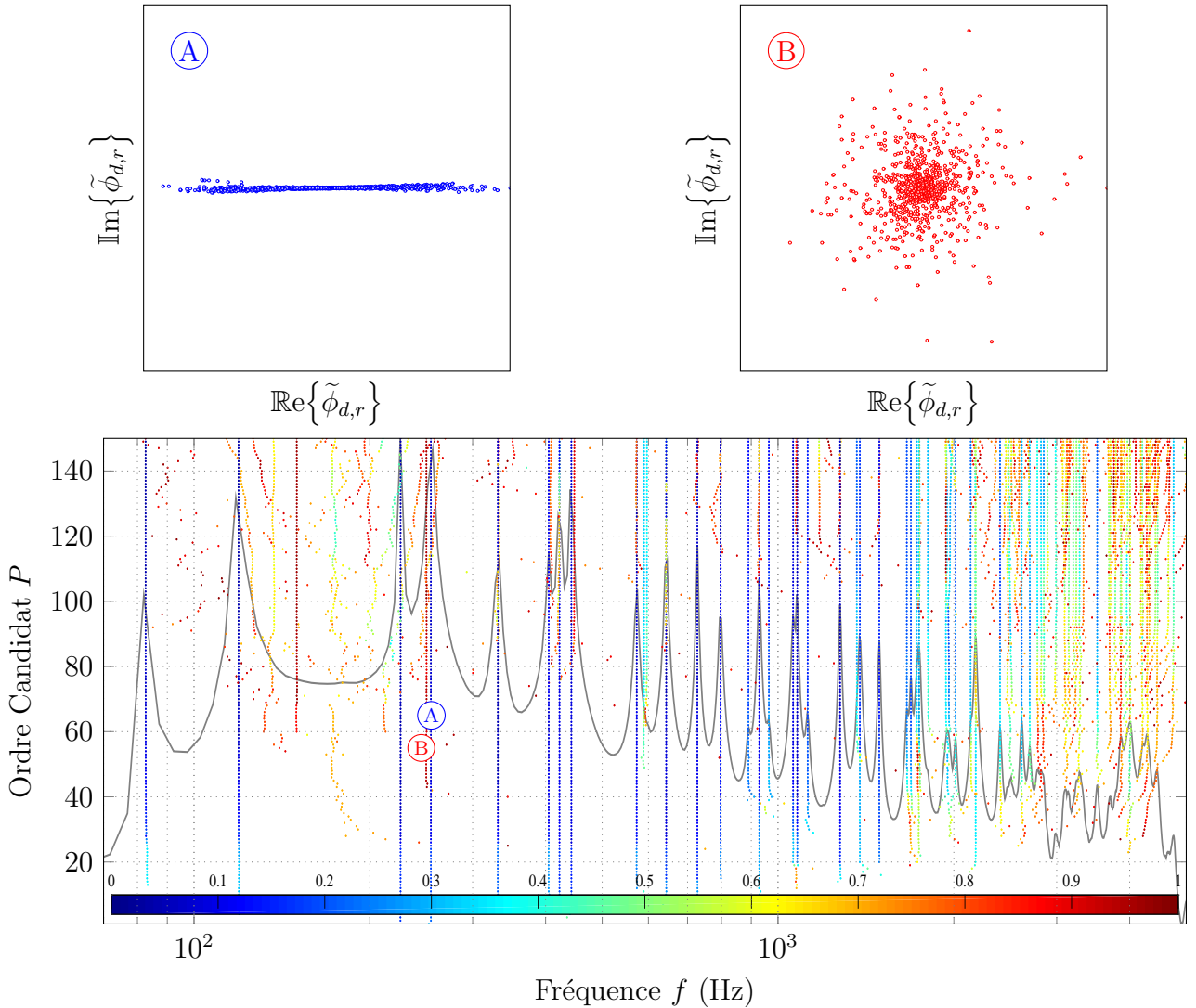


FIGURE V.6 – Critère de complexité des modes  $\zeta_r$  (expression (V.2.9)) en couleur, avec deux cas particuliers (A) et (B) qui correspondent à deux modes identifiés à 260 Hz.

**Résultats et interprétation** À partir du critère de complexité, 27 modes sont finalement choisis, pour des fréquences propres allant de 83 Hz à 2821 Hz. Le résultat de l'identification est illustré sur la figure V.7 : les fréquences et amortissement modaux estimés sont reportés respectivement en abscisse et ordonnée de façon à montrer la dépendance particulière de  $\xi_r$  en fonction de  $f_r$ .

À titre indicatif, le spectre de vitesse moyenne quadratique est représenté en arrière plan (ligne noire), ainsi que celui qui correspond au modèle reconstruit à partir des paramètres identifiés (ligne rouge pointillée). Lorsque tous les modes ont été conservés (entre 200 Hz et 1500 Hz), le modèle de signal est très proche du signal mesuré. Par opposition, lorsqu'une partie des modes est retirée de l'identification (au-dessus de 1500 Hz), on observe une différence importante entre les deux spectres. En basse fréquence, la différence observée au niveau des zones entre les modes 1, 2 et 3 est l'effet du filtrage passe-haut analogique utilisé pour diminuer l'influence du mouvement de balancier de l'échantillon sur les mesures.

Les déformées modales identifiées correspondant aux modes numérotés de 1 à 27 sur la figure V.7 sont représentées en figure V.8. Celles-ci permettent d'interpréter les amortissements modaux obtenus. Tout d'abord, il faut noter que la forme de l'échantillon, rectangulaire, et l'orientation des fibres parallèlement à ses dimensions (orthotropie dite *spéciale*), crée une séparation des différents mécanismes longitudinaux et transverses : les modes obtenus sont le plus souvent dominés par un mécanisme de déformation particulier.

Par exemple, les modes 1, 3, 8, 11, 17 et 22 sont caractérisés par une déformation longitudinale : la courbure de la plaque est pratiquement pure dans la direction des fibres. Les amortissements modaux  $\xi_r$  associés sur la figure V.7 sont systématiquement faibles (de 0.3% à 0.4%) ; l'amortissement dans la direction des fibres est donc réduit. Les modes 2, 4, 7, 10, 14 et 19 sont quant à eux caractérisés par un amortissement un peu plus fort ; on peut voir sur les déformées modales correspondantes que ces modes sont principalement responsables de cisaillement (que l'on peut comparer à de la *torsion*). Le mécanisme de pertes cisaillement

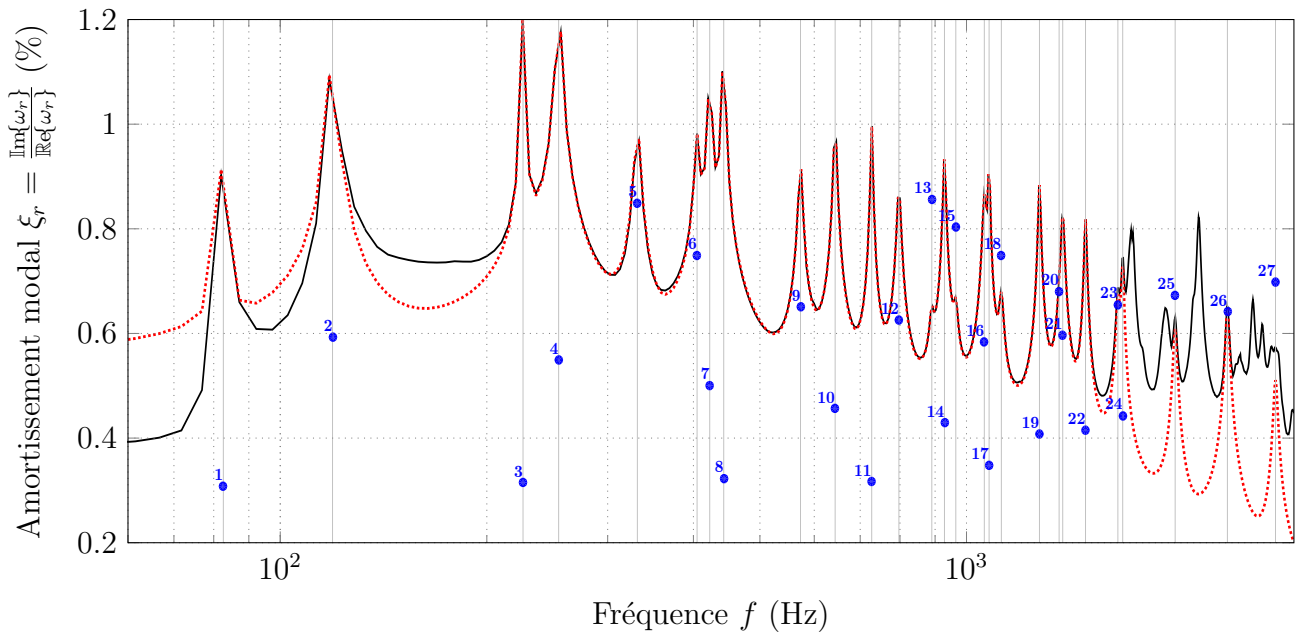


FIGURE V.7 – Résultat de l'analyse modale : modes conservés numérotés de 1 à 27 (point bleus) et signal reconstruit à partir de ceux-ci uniquement (pointillés rouges).

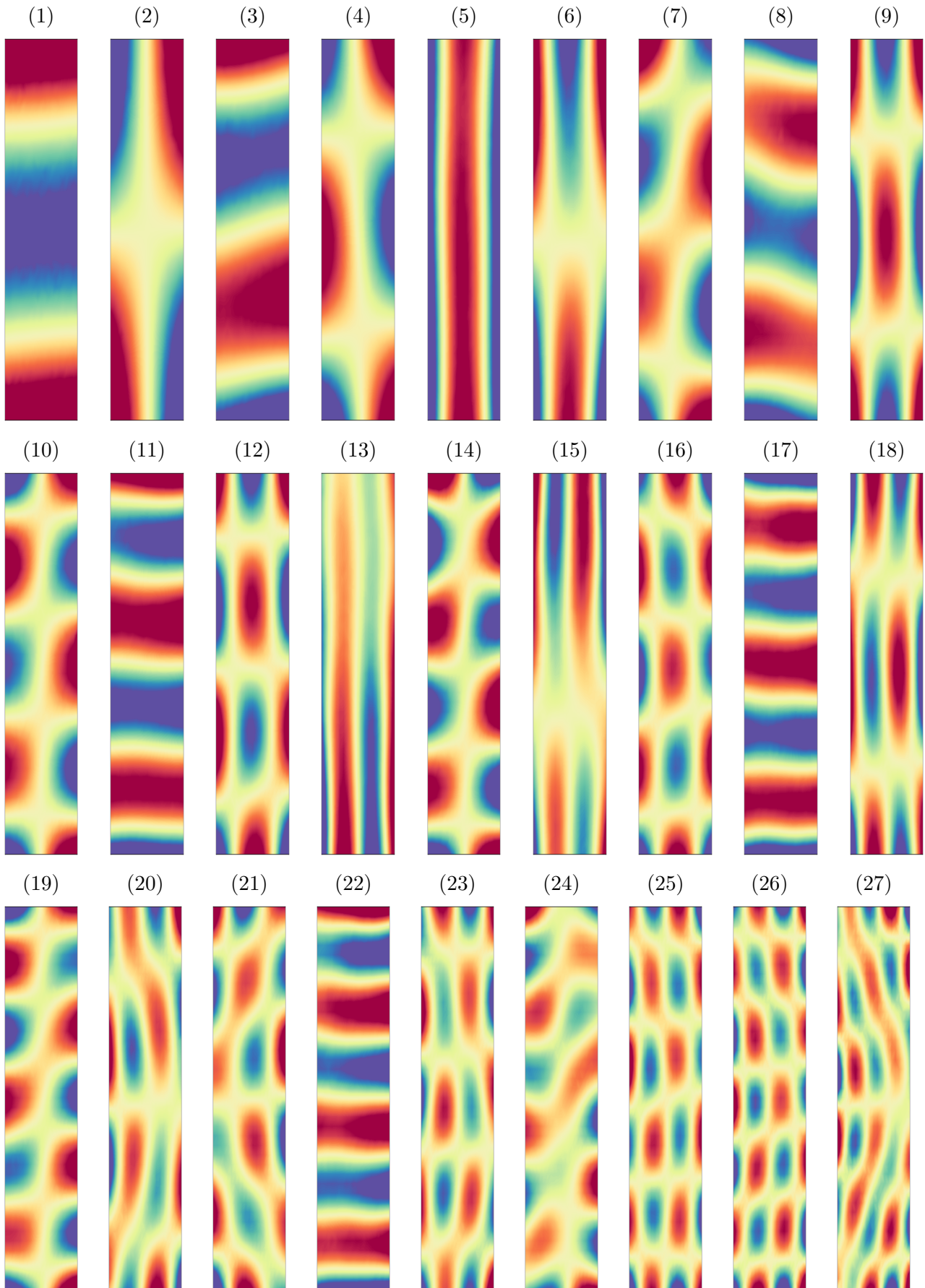


FIGURE V.8 – Déformées modales identifiées

peuvent être donc attendus un peu plus forts. Enfin, les modes 5, 6, 9, 12 et 16 présentent une oscillation marquée dans la direction transverse (largeur de la plaque). L'amortissement modal associé étant globalement plus fort, on peut en conclure que la déformation transverse de l'échantillon est responsable de pertes encore plus fortes. On peut finalement noter la similarité des modes 5 et 13, caractérisés par un mode dont la courbure est contenue dans direction transverse. Les amortissements associés sont quasiment égaux (resp. 0.85% et 0.86%); on peut s'attendre à ce que l'amortissement dû à la déformation transverse soit associé à ces valeurs.

**Incertitudes** Dans la première section de ce chapitre ont été données deux stratégies permettant l'estimation des incertitudes sur les paramètres modaux estimés : (i) le calcul de variance utilisant la théorie des perturbations (expressions (V.2.19) et (V.2.20)); (ii) l'utilisation du diagramme de stabilisation de par l'estimateur  $\tilde{\sigma}_M$  (expression (V.3.38)).

Sur la figure V.9 sont représentés les écarts-type estimés à l'aide des deux stratégies proposées, et correspondant aux fréquences (à gauche) et amortissements (à droite). L'estimateur  $\tilde{\sigma}_M$  (en rouge) est évalué sur les  $M = 15$  ordres du signal précédents. En noir sont donnés les écarts-types dérivées des expressions des variances des paramètres.

On rappelle que ces deux indicateurs donnent une idée de la sensibilité des estimations face à deux perturbations différentes : les variances dérivées par la théorie des perturbations quantifient la sensibilité face à une perturbation des *mesures*; l'estimateur  $\tilde{\sigma}_M$  quantifie quand à lui l'incertitude associée au choix de l'ordre de signal.

Les différentes valeurs prises par les deux indicateurs sont assez difficiles à interpréter. On peut déjà remarquer qu'elles sont très faibles : l'écart-type maximal obtenu en fréquence est pour le mode 27, et est estimé à moins de 1 Hz. la même remarque peut être faite sur les amortissements, dont l'écart-type maximal est de  $10^{-4}$ . On peut donc remettre en question la validité des incertitudes obtenues.

La quantification des incertitudes associées à l'estimation des paramètres modaux est donc un problème qui nécessiterait d'être approfondi.

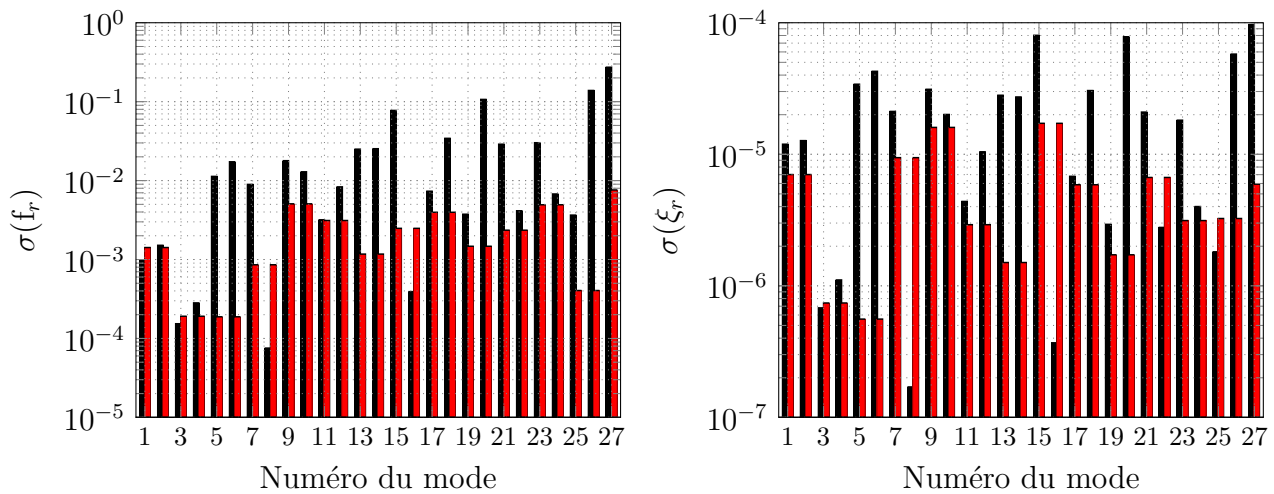


FIGURE V.9 – Estimation des incertitudes (écart-type) sur les fréquences (à gauche) et amortissement (à droite) modaux identifiés. En noir : expressions dérivées des perturbations ; en rouge : critère de stabilité  $\tilde{\sigma}_M$  calculé sur  $M = 15$  ordres voisins.

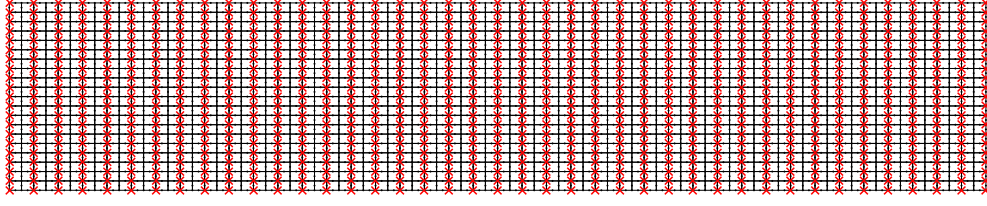


FIGURE V.10 – Maillage éléments finis utilisé pour la construction du modèle de l'échantillon.  
Croix rouges : points de mesure.

### V.4.3 Modèle

De façon à mener à bien l'identification des propriétés de l'échantillon de l'épicéa par la méthode proposée, un modèle éléments finis de la plaque est construit. La formulation de celui-ci ainsi que les différentes hypothèses permettant la réduction du nombre de paramètres à identifier sont évoquées dans les lignes qui suivent.

#### V.4.3.1 Formulation

La formulation du modèle permettant l'identification de certaines propriétés mécaniques de l'échantillon considéré est faite sur la base du modèle de plaque épaisse de Hencky-Mindlin (voir chapitre II, section II.2). La plaque étant supposée homogène dans l'épaisseur, le comportement généralisé en cisaillement hors-plan  $\underline{\mathbf{F}}$  est corrigé par le coefficient de correction en cisaillement  $\xi_F = \pi^2/12$  (la justification de cette correction est également donnée en section II.2).

Des éléments quadrangulaires à 8 noeuds sont utilisés, avec intégration réduite (4 points de Gauss). La convergence de ce type d'élément est classiquement admise pour  $\lambda \leq 6$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde apparente et  $e$  la longueur caractéristique des éléments. Le mode le plus haute fréquence identifié expérimentalement est le mode 27, sur lequel environ 3 longueurs d'onde peuvent être comptées dans la longueur et la largeur. Un maillage de  $N_L \times N_\ell = 80 \times 20$  éléments est donc choisi ; celui-ci est représenté en figure V.10. Le choix du nombre d'éléments est également guidé par le maillage de mesures (dénnoté par les croix rouges). La coïncidence des noeuds du maillage éléments finis avec les points de mesure facilite en effet la construction de la matrice d'observation  $\mathbf{Y}$ .

A partir de ce maillage, les matrices de raideur généralisées élémentaires  $\mathbf{K}_Q^{ij}$  et  $\mathbf{K}_F^{\alpha\beta}$  (voir expression (V.3.21)) et de masse  $\mathbf{M}$  sont construites par assemblage du modèle éléments finis (voir annexe A.2). Celles-ci permettent le calcul de la base modale numérique  $\Phi(\mathbf{p})$ , nécessaire à chaque itération de l'algorithme de descente, ainsi que de la matrice des sensibilités  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  (expressions (V.3.10)).

#### V.4.3.2 Isotropie radiale-transverse

L'épicéa peut en première approximation être considéré isotrope transverse (voir annexe B.1, expression (B.1.19)) : il est composé de fibres alignées, qui lui donnent une grande raideur dans la direction longitudinale L. Les directions radiale R et tangentielle T peuvent alors être considérées équivalentes.

L'hypothèse d'isotropie transverse de l'échantillon peut être assez forte dans le cas du bois. De nombreux biais peuvent en effet être induits par le sciage ayant amené à la production de l'échantillon (i.e. orientation de la planche dans le tronc). On peut également évoquer le



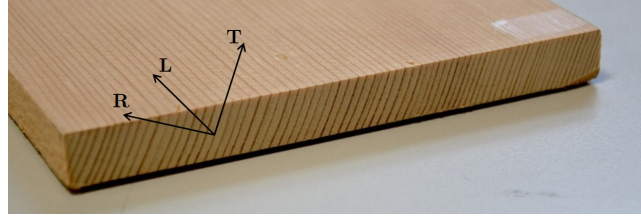


FIGURE V.11 – Tranche d'un échantillon d'épicéa dont l'orientation des cernes ne permettrait pas de faire l'hypothèse d'un comportement isotrope transverse homogène.

caractère circulaire des cernes, qui peut entraîner une certaine inhomogénéité des propriétés mécaniques. Une photographie de la tranche d'un échantillon différent d'épicéa est donnée en figure V.11. Celle-ci est caractérisée par une orientation des cernes (alternance de bois sombre d'hiver et clair d'été) inhomogène et non normale à la surface de l'échantillon. Dans ce cas, le comportement du matériau peut ne plus être monoclinique : des couplages entre les mouvements plans et hors-plan apparaissent.

Une attention toute particulière a donc été portée au choix de l'échantillon caractérisé, retenu pour sa remarquable homogénéité et l'orientation perpendiculaire des cernes : l'hypothèse d'isotropie transverse peut donc être considérée correcte.

En utilisant le comportement postulé, le cas des plaques stratifiées donné plus haut (voir sous-section V.3.2.3) est repris avec  $C = 1$  (plaque homogène). Sur les constantes de l'ingénieur, l'isotropie transverse selon L se traduit par :

$$E_R = E_T \quad , \quad \nu_{TR} = \nu_{RT} \quad \text{et} \quad G_{LR} = G_{LT} \quad (\text{V.4.3})$$

avec L, T et R dénotant les directions *Longitudinale*, *Transverse* et *Radiale* du bois. Les relations ci-dessus permettent de réécrire la décomposition de la matrice de raideur généralisée  $\mathbf{K}$  en matrices élémentaires (voir expression (V.3.21)) sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{Q_{LL}} Q_{LL} + \mathbf{K}^{Q_{RR}} Q_{RR} + \mathbf{K}^{Q_{LR}} Q_{LR} + (\mathbf{K}^{G_{LR}} + \mathbf{K}^{G_{LT}}) G_R + \mathbf{K}^{G_{TR}} G_{TR} \quad (\text{V.4.4})$$

Le vecteur des paramètres à identifier est donc le suivant :

$${}^T\mathbf{p} = [Q_{LL} \quad Q_{RR} \quad Q_{LR} \quad G_{LR} \quad G_{TR}] \quad (\text{V.4.5})$$

### V.4.3.3 Comportement hystérétique

De façon à simplifier la mise en œuvre du problème inverse, on utilise le modèle hystérétique pour décrire le comportement viscoélastique du matériau sur le domaine complet de fréquences étudié (voir annexe B.2). Ce modèle suppose que les parties réelle  $\mathbf{R}$  et imaginaire  $\mathbf{T}$  du tenseur opérationnel des raideurs  $\mathbf{C}$  sont indépendantes de la fréquence. On a vu que cela n'est en théorie pas correct, et que l'inter-dépendance de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$  en fréquence est donnée par les relations de Kramer-Kronig (expression (B.2.20) en annexe).

Il est donné dans cette même annexe une borne supérieure sur la variation des composantes de la partie réelle  $R_{ijkl}$  maximale possible sur un domaine fréquentiel  $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$  donné, fonction du facteur de pertes maximum  $\eta_{ijkl}^{\max}$  (voir expression (B.2.21)). Cette borne, fonction du rapport  $r = \omega_{\max}/\omega_{\min}$ , est tracée sur la figure B.3 en fonction de  $\eta_{ijkl}^{\max}$  et pour différentes valeurs de  $r$ . Ce résultat s'applique également au tenseur en contraintes planes  $\mathbf{Q}$  que l'on cherche à identifier ici.

Les modes conservés après mise en œuvre de l'analyse modale s'étalent sur un domaine de fréquences compris entre 80 Hz et 3000 Hz, soit  $r \approx 38$ . L'amortissement modal maximum estimé est celui du treizième mode, soit  $\xi_{13} = 0.86\% = 8.6 \times 10^{-3}$ . Ce mode, comme on l'a fait remarquer ci-avant, est majoritairement responsable de déformation transverse, donnée par la composante  $Q_{RR}$  du tenseur opérationnel des raideurs en contrainte plane. On peut donc supposer que  $\eta_{RR} = \mathbb{Im}\{Q_{RR}\} / \mathbb{Re}\{Q_{RR}\}$  est quasiment égal au facteur de perte associé à mode 13, soit  $\eta_{RR} \approx 2\xi_{13} = 1.72 \times 10^{-2}$ .

Sur la base de ces suppositions, on peut donner une idée de la variation maximale possible pour le coefficient  $Q_{RR}$  sur le domaine de fréquence étudié. La figure B.3 et l'expression (B.2.21) permettent de conclure que la variation maximale *relative* de cette constante sur le domaine fréquentiel considéré ici est de l'ordre de :

$$\frac{\Delta Q_{RR}}{Q_{RR}} \leq r^{\frac{2}{\pi} \eta_{RR}} - 1 \approx 4\% \quad (\text{V.4.6})$$

L'utilisation du modèle hystérétique peut donc représenter un biais d'environ 4% sur l'identification des propriétés en raideur transverse de l'épicéa. Ce biais de nature *épistémique* (erreur systématique due à une modélisation incorrecte) est à ajouter aux autres sources d'incertitude.

#### V.4.4 Identification

Cette dernière sous-section présente les résultats d'identification des propriétés mécaniques de l'échantillon d'épicéa obtenus. Deux cas d'identifications sont proposées, permettant l'identification des cinq paramètres caractérisant l'isotropie transverse du matériau. Le premier cas concerne l'identification des propriétés planes du matériau. Le second cas s'intéresse à la quantification du cisaillement roulant. Sur la base de ce dernier cas, la base modale expérimentale est comparée avec la base modale numérique obtenue après estimation des paramètres. Un bon accord est trouvé entre les valeurs propres expérimentales et numériques. La matrice de MAC associée montre une bonne corrélation entre ces deux bases. Enfin, la sensibilité différente des valeurs propres et vecteurs propres est discutée.

##### V.4.4.1 Cas 1 : Propriétés planes

On s'intéresse dans un premier temps à l'identification des propriétés planes de l'échantillon, données par les composantes tenseur des raideurs  $\underline{\underline{Q}}$ . Le module de cisaillement *roulant*  $G_{TR}$  est donc retiré des paramètres à identifier. De façon à conserver le comportement isotrope

		$Q_{LL}$	$Q_{RR}$	$Q_{LR}$	$G_{LR}$	$G_{TR}$
Initial.	$\mathbb{Re}\{\bullet\}$	10000	300	72	1000	115
Cas 1	$\mathbb{Re}\{\bullet\}$	$11250 \pm 20$	$250 \pm 1$	$110 \pm 30$	$910 \pm 4$	...
	$\eta(\bullet)$	$0.68 \pm 0.2$	$1.69 \pm 0.3$	$7 \pm 25$	$1.11 \pm 0.4$	...
Cas 2	$\mathbb{Re}\{\bullet\}$	$11245 \pm 20$	$247 \pm 1$	...	$903 \pm 3$	$120 \pm 10$
	$\eta(\bullet)$	$0.68 \pm 0.2$	$1.69 \pm 0.35$	...	$1.11 \pm 0.35$	$1.82 \pm 8$

TABLE V.2 – Résumé des résultats d'identification. Raideurs en MPa et facteurs de perte en %.

transverse, celui-ci est pris en compte à l'aide de la relation suivante, associée à cette forme de comportement :

$$G_{\text{TR}} = \frac{E_{\text{R}}}{2(1 + \nu_{\text{RT}})} = \frac{Q_{\text{RR}}(1 - \nu_{\text{RL}}\nu_{\text{LR}})}{2(1 + \nu_{\text{RT}})} \simeq \frac{Q_{\text{RR}}}{2(1 + \nu_{\text{RT}})} \quad (\text{V.4.7})$$

où on a considéré que  $(1 - \nu_{\text{RL}}\nu_{\text{LR}}) = (1 - \nu_{\text{LR}}^2 E_{\text{R}}/E_{\text{L}}) \approx 1$ , ce qui se justifie par la forte anisotropie du matériau attendue ( $E_{\text{R}}$  très inférieur à  $E_{\text{L}}$ ). La matrice de raideur généralisée  $\mathbf{K}$  peut alors se décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\text{Q}_{\text{LL}}} \text{Q}_{\text{LL}} + \left( \mathbf{K}^{\text{Q}_{\text{RR}}} + \frac{\mathbf{K}^{G_{\text{TR}}}}{2(1 + \nu_{\text{RT}})} \right) \text{Q}_{\text{RR}} + \mathbf{K}^{\text{Q}_{\text{LR}}} \text{Q}_{\text{LR}} + \left( \mathbf{K}^{G_{\text{LR}}} + \mathbf{K}^{G_{\text{LT}}} \right) G_{\text{LR}} \quad (\text{V.4.8})$$

Le coefficient de Poisson associé à l'effet radial-transverse est choisit tel que  $\nu_{\text{TR}} = 0.3$ . Les paramètres à identifier sont donc finalement les raideurs planes  $\text{Q}_{\text{LL}}$ ,  $\text{Q}_{\text{RR}}$ ,  $\text{Q}_{\text{LR}}$ , et  $G_{\text{LR}}$ .

Le résultat d'identification présenté se base sur la minimisation de l'écart sur les valeurs propres  $\delta\lambda$  uniquement ; ce cas correspond à  $\beta = 0$  dans la fonctionnelle  $J$  (équation (V.3.7)). L'algorithme de descente est utilisé sans amortissement (cad.  $\gamma = 1$  pour la mise à jour des paramètres, expression (V.3.30)). De façon à équilibrer l'influence de chaque mode, la pondération en fréquence est utilisée avec  $\alpha = 1$  (voir moindres carrés pondérés, expression (V.3.29)).

Les 27 modes expérimentaux identifiés par analyse modale sont injectés dans la procédure d'identification. De manière à assurer que chaque mode puisse avoir son équivalent numérique, deux fois plus de modes numériques sont calculés à chaque itération. Pour faire correspondre modes numériques et expérimentaux, le critère de MAC est utilisé : deux modes sont considérés équivalents si le critère de MAC associé est supérieur à 70%.

L'initialisation des paramètres est faite sur les propriétés approximatives d'un épicéa :  $\text{Q}_{\text{LL}} = 10$  GPa,  $\text{Q}_{\text{RR}} = 300$  MPa,  $\text{Q}_{\text{LR}} = 70$  MPa,  $G_{\text{LR}} = 1$  GPa (soit  $\nu_{\text{LR}} = 0.23$ ). Ces valeurs sont reportés en table V.2. Elles sont réelles : aucune connaissance des mécanismes d'amortissement n'est nécessaire *a priori*. En effet, l'amortissement étant faible, il peut être considéré comme une perturbation des constantes de raideur. La première itération de l'algorithme de descente est donc faite sur un modèle conservatif. La direction de descente  $\delta\mathbf{p}$  est alors complexe car les valeurs propres expérimentales  $\tilde{\lambda}$  le sont. Dès la seconde itération, les paramètres à identifier deviennent complexes.

Cinq itérations suffisent pour atteindre la convergence, dont le critère correspondant est basé sur la direction de descente, tel que  $\|\delta\mathbf{p}\| < 0.1$  MPa. Les paramètres finalement identifiés sont reportés en table V.2 (ligne "Cas 1") : la partie réelle de chaque paramètre identifié est donnée ainsi que le facteur de pertes  $\eta(p_i) = \text{Im}\{p_i\} / \text{Re}\{p_i\}$  qui leur est associé. Les intervalles de confiance correspondant sont estimés à l'aide des formules simplifiées données plus haut (expressions (V.3.38)).

On remarque immédiatement que l'incertitude sur la composante  $\text{Q}_{\text{LR}}$  est bien plus forte que celle liée aux autres composantes du tenseur des raideurs planes. Notamment, le facteur de perte  $\eta(\text{Q}_{\text{LR}})$  associé reste *indéterminé*, puisque l'incertitude qui lui est associée ( $\pm 25\%$ ) est bien supérieure à sa valeur nominale (7%). Ce phénomène est du à la faible sensibilité des *valeurs propres*  $\lambda_r$  à l'effet Poisson (voir plus bas, figure V.14). Le coefficient de Poisson Longitudinal-Transverse peut d'ailleurs être estimé à partir des paramètres identifiés :  $\nu_{\text{LR}} = \text{Q}_{\text{LR}}/\text{Q}_{\text{RR}} \approx 0.44$ . Cette valeur n'est pas aberrante mais mériterait d'être croisée avec une méthode de test différente pour validation.

Les valeurs choisies pour l'initialisation sont en fait assez proches des valeurs obtenues après minimisation des résidus sur les valeurs propres. On peut alors se poser la question de l'influence de ce choix d'initialisation sur le résultat de l'optimisation. En réalité, ce problème ne se pose



pas vraiment pour la forme d'échantillon choisie ici. En effet, la forme des modes ne change pas beaucoup avec la modification des propriétés mécaniques du matériau constitutif. Cela est dû à la forme rectangulaire de la structure et l'orthotropie spéciale du matériau. Pour illustrer cet aspect, le même problème d'identification a été posé mais avec une initialisation correspondant à un matériau type acier ( $Q_{LL} = Q_{RR} = 230$  GPa,  $Q_{LR} = 70$  GPa et  $G_{LR} = 80$  GPa); cela a mené, après une quinzaine d'itérations, au même résultat.

#### V.4.4.2 Cas 2 : Cisaillement roulant

Le deuxième cas d'identification présenté s'intéresse à l'identification de la raideur en cisaillement *roulant*  $G_{TR}$  de la planche d'épicéa. Au cours des différents essais réalisés, il s'est avéré que l'identification simultanée de la composante associée à l'effet Poisson  $Q_{LT}$  et de  $G_{TR}$  est difficile. En conséquence, le coefficient de Poisson  $\nu_{LR}$  identifié dans le premier cas présenté est utilisé ici, et devient un paramètre supposé *connu*. La matrice de raideur généralisée  $\mathbf{K}$  du modèle est alors décomposée sous la forme suivante, en remarquant que  $\nu_{LR} = Q_{LR}/Q_{RR}$  (voir expression de  $\underline{\mathbf{Q}}$  en annexe, section B.1, expression (B.1.31)) :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{Q_{LL}} Q_{LL} + \left( \mathbf{K}^{Q_{RR}} + \nu_{LR} \mathbf{K}^{Q_{LR}} \right) Q_{RR} + \mathbf{K}^{G_{LR}} G_{LR} + \mathbf{K}^{G_{LT}} G_{LT} + \mathbf{K}^{G_{TR}} G_{TR} \quad (\text{V.4.9})$$

les paramètres  $\mathbf{p}$  à identifier étant finalement  $Q_{LL}$ ,  $Q_{RR}$ ,  $G_{LR}$ ,  $G_{TR}$  et  $G_{LT}$ .

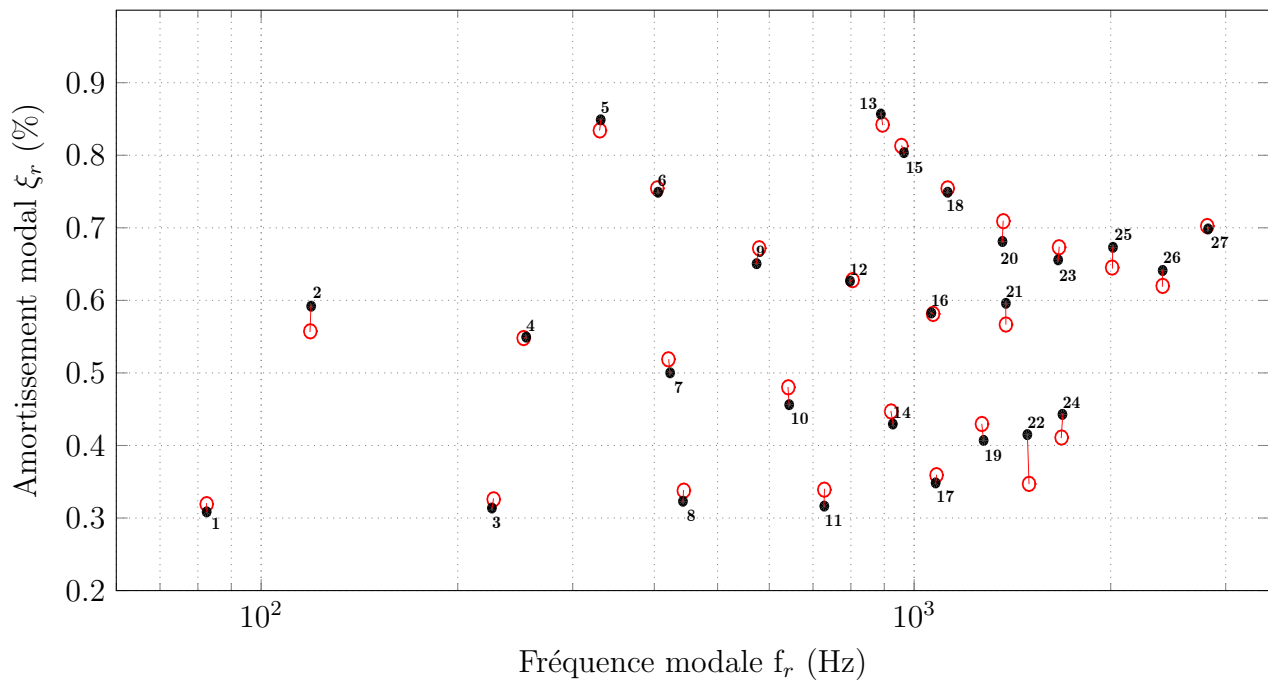
De nouveau, la minimisation est réalisée sur les valeurs propres  $\lambda$  uniquement. L'initialisation de l'algorithme de descente est faite sur les propriétés matériau identifiées dans le premier cas (voir table V.2, "Cas 1"). Encore une fois, peu d'itérations de l'algorithme sont nécessaires pour atteindre le critère de convergence. Les valeurs identifiées sont listées dans le tableau V.2, ligne "Cas 2".

On remarque que la raideur en cisaillement roulant  $G_{TR}$  identifiée est bien plus faible que celle associée au cisaillement plan  $G_{LR}$ , ce qui est justifié par la forte anisotropie due aux fibres du bois. Le facteur de perte  $\eta$  associé au cisaillement roulant est identifié supérieur aux autres mécanismes de déformation. Toutefois, la forte incertitude associée à son estimation ne permet pas de valider une telle identification.

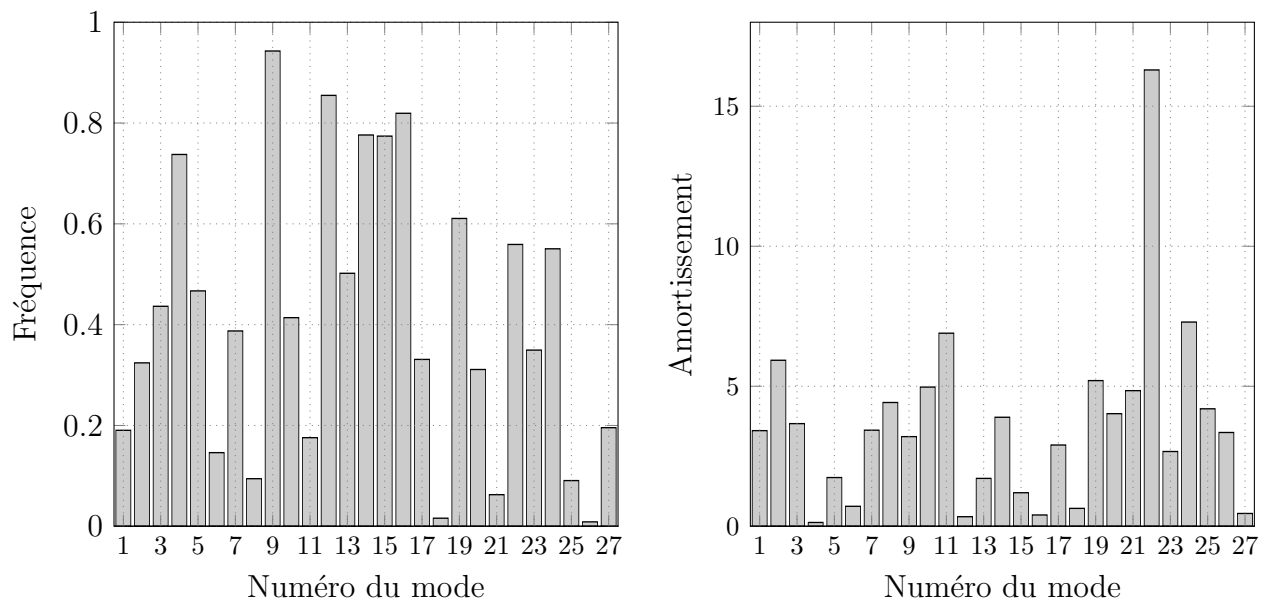
#### V.4.4.3 Comparaison des données modales

Une fois l'identification effectuée, il est possible de donner des indications sur la similarité des données modales expérimentales et numériques. Cela passe par deux indicateurs : (i) les erreurs sur les valeurs propres ; (ii) la matrice de MAC correspondant à la dernière itération. Les résultats qui suivent sont quasiment identiques pour les deux identifications proposées ci-dessus ; en conséquence, on ne présente que ceux qui sont associés à la deuxième identification (incluant le cisaillement roulant dans les paramètres à identifier). La similarité des résultats obtenus vient d'ailleurs confirmer la faible influence du coefficient de Poisson  $\nu_{LR}$  et du module de cisaillement  $G_{TR}$  sur les données modales utilisées pour l'identification.

**Comparaison des valeurs propres** La comparaison des valeurs propres  $\lambda_r$  expérimentales et numériques correspondant à la dernière itération de l'algorithme de descente est proposée en figure V.12. Sur la figure V.12a sont tracées les points expérimentaux numérotés (en noir) et numériques (en rouge) correspondant aux fréquences  $f_r$  et amortissements modaux  $\xi_r$  associées à  $\lambda_r$ . Les erreurs relatives correspondant à ces paramètres sont données en figure V.12b. On remarque que l'erreur relative en fréquence est inférieure à 1%. Concernant l'amortissement



(a) Comparaison : valeurs expérimentales (points noirs) et numériques (ronds rouges). Modes expérimentaux numérotés de 1 à 27.



(b) Erreurs relatives en (%)

FIGURE V.12 – Résultat de l'identification effectuée (Cas 2) : comparaison des fréquences et amortissement modaux.

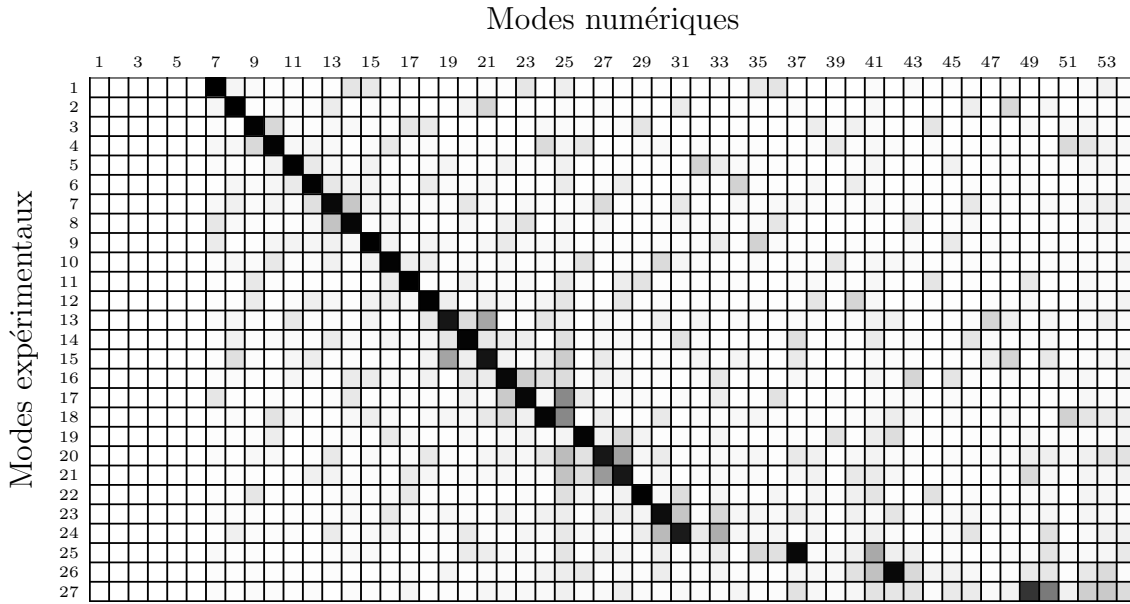


FIGURE V.13 – Matrice de MAC après minimisation des erreurs sur les valeurs propres (Cas 2)

modal, les erreurs relatives sont inférieures à 10%, mis à part pour le mode 22. Le bon accord observé entre les valeurs numériques et expérimentales permet donc de valider l'identification faite des propriétés matériau.

**Matrice de MAC** La matrice de MAC entre les bases modales expérimentale et numérique calculée à la dernière itération permet de donner une indication sur la coïncidence de celles-ci. Cette matrice est donnée en figure V.13. On peut voir que ces deux bases sont en adéquation : chaque mode expérimental est fortement corrélé à un seul mode numérique. On remarque également que cette matrice n'est pas forcément diagonale ; cela est dû à deux raisons : (i) les 6 premiers modes numériques, correspondant aux modes de corps solide, n'ont pas leur équivalent expérimental ; (ii) certains modes n'ont pas été conservé lors de l'étape de l'analyse modale : on observe donc un *saut* sur la diagonale de la matrice de MAC entre les modes 18 et 19, puis à partir du mode 25.

#### V.4.4.4 Sensibilité des vecteurs propres

L'identification proposée ici ne s'est basée que sur la minimisation de l'erreur sur les valeurs propres  $\lambda_r$ , ce qui correspond au choix  $\beta = 0$  dans la fonctionnelle à minimiser  $J$  (voir expression (V.3.7)). Il s'avère en fait que les sensibilités des valeurs propres sont différentes de celles des vecteurs propres. Pour illustrer ce phénomène, on a tracé sur la figure V.14 les sensibilités des valeurs propres (à gauche) et vecteurs propres (à droite) calculées sur la configuration identifiée. Ces sensibilités sont données pour le cas où les cinq paramètres  $Q_{LL}$ ,  $Q_{RR}$ ,  $Q_{LR}$ ,  $G_{LR}$  et  $G_{TR}$  seraient considérés inconnus. De façon à pouvoir les comparer, ces sensibilités sont normalisées (leur somme, pour chaque mode, fait 1).

Cette représentation permet de confirmer le sensibilité différente des vecteurs propres  $\phi_r$  et valeurs propres  $\lambda_r$  face aux paramètres à identifier. En particulier, les valeurs propres montrent une faible sensibilité face au module  $Q_{LR}$  (en vert) associé à l'effet Poisson dans le plan de la plaque. Cela explique la forte incertitude sur l'identification de ce paramètre par une la

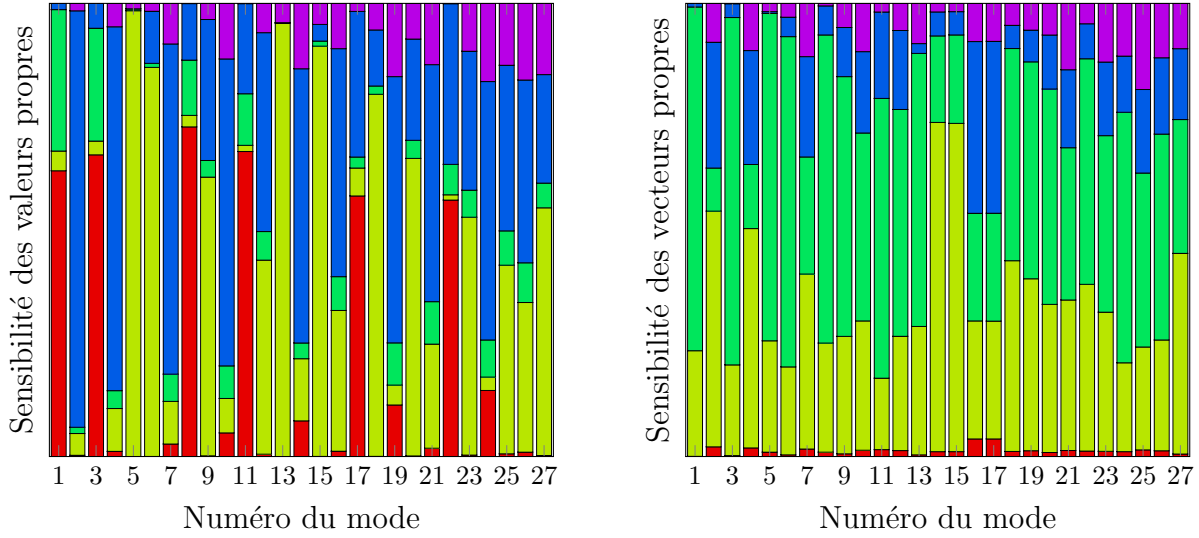


FIGURE V.14 – Sensibilités normalisées des données modales dans la configuration finale identifiée, et face aux paramètres  $Q_{LL}$  (rouge),  $Q_{RR}$  (jaune),  $Q_{LR}$  (vert),  $G_{LR}$  (bleu) et  $G_{TR}$  (violet).

minimisation des erreurs sur les valeurs propres seules (voir tableau V.2, Cas 1). Au contraire, la sensibilité des vecteurs propres est dominée par l'effet Poisson.

Cette représentation montre l'avantage qu'il y aurait à inclure l'erreur sur les modes dans la fonctionnelle à minimiser. Quoique formalisée dans la section précédente, cette possibilité n'a pas été utilisée ici. En effet, sa mise en pratique impose certaines précautions sur le choix du *poids* donné à l'erreur sur les vecteurs propres (soit le choix du coefficient  $\beta$  dans la fonctionnelle  $J$ ). L'introduction des vecteurs propres de façon correcte dans la fonctionnelle à minimiser représente une perspective de travail intéressante.

## V.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre a été présenté une méthode permettant l'identification d'un jeu de paramètres à partir de la mesure de la réponse transitoire libre d'une structure.

Tout d'abord, la méthode ESPRIT proposée au chapitre IV a été spécialisée pour sa mise en œuvre dans le cadre de l'analyse modale. Différents critères permettant le choix des données modales à conserver ont été présentés. En particulier, des critères de stabilité ont été donnés. L'observation conjointe de ceux-ci permet de juger de la pertinence des données expérimentales obtenues : stabilité, incertitude associée, complexité du mode. Enfin, deux stratégies permettant la quantification des incertitudes ont été développées.

Dans un second temps, la méthode d'identification basée sur les données modales identifiées a été explicitée. Après la formulation du problème aux valeurs propres inverses sous une forme générale, une méthode de résolution de celui-ci a été présentée. Celle-ci utilise un algorithme de descente de gradient analytique. Différentes pistes permettant la régularisation du problème ont ensuite été présentées. Enfin, une discussion a été menée sur la quantification des incertitudes associées aux paramètres identifiés. Un indicateur permettant une estimation grossière de l'intervalle de confiance des estimations obtenues a été proposé.

Finalement, un cas d'application a été proposé, concernant l'identification des propriétés constitutives d'un échantillon d'épicéa, le matériau étant supposé isotrope transverse et modélisé à l'aide d'un comportement hystérétique. Une discussion a été menée sur l'optimisation de l'étape de mesure, permettant l'obtention d'une réponse libre la moins possible influencée par des éléments inconnus (i.e. conditions aux limites). Le modèle de structure permettant l'identification des paramètres a ensuite été présentée, et les hypothèses concernant sa formulation discutées. Enfin, les résultats de l'identification ont été présentés, montrant un excellent accord entre les données modales expérimentales et numériques.

### Perspectives

**Incertitudes** La quantification des incertitudes reste assez complexe à réaliser : elles reposent en général sur des hypothèses fortes sur la nature des perturbations (i.e. bruit blanc uniforme). Dans le cadre de l'analyse modale, les incertitudes données par les expressions des variances et par le critère de stabilité donnent des valeurs très faibles, de façon évidente sous-estimées (voir figure V.9). Concernant les incertitudes liées à l'estimation des paramètres de la structure, une forme générale des sensibilités de ceux-ci par rapport à des données incertaines du modèle a été donnée (voir expression (V.3.32)). À partir de cette expression ont été évoqués différentes sources d'incertitudes. L'indicateur proposé (expression (V.3.38)) se base sur les résidus de l'estimation de la direction de descente uniquement. Un travail intéressant consisterait donc à identifier et quantifier les autres sources d'incertitudes : on a donné l'exemple élémentaire de la mesure de l'épaisseur d'une plaque que l'on cherche à caractériser, et de l'effet de l'incertitude associée à cette mesure sur l'incertitude associée aux paramètres identifiés. D'autres sources d'incertitudes seraient à investiguer, comme l'effet des conditions aux limites, de l'incertitude sur la position des points de mesure, ou encore sur la géométrie de la structure en général.

**Minimisation sur les vecteurs propres** Lors de la formulation de la méthode d'identification inverse, l'erreur sur les vecteurs propres a été incluse dans la fonctionnelle à minimiser. Toutefois, celle-ci n'a pas été mise en œuvre dans le cas d'application, alors qu'elle présente un intérêt notoire pour l'identification de l'effet Poisson (voir figure V.14). Cette intégration

n'a pas été appliquée pour deux raisons : (i) le choix de la pondération de ces erreurs par rapport aux erreurs sur les valeurs propres nécessite certaines précautions afin d'éviter d'introduire un biais dans les paramètres identifiés ; (ii) l'erreur sur les vecteurs propres définie comme la somme des différences au carré (norme de la différence des vecteurs), n'est en fait pas une mesure de distance robuste. En effet, une rotation du mode expérimentale dans le plan complexe (déphasage du mode) induit une forte norme des erreurs, même si le mode expérimental et son équivalent numérique sont fortement décorrelés. Une piste intéressante pourrait alors consister à maximiser le critère de MAC entre ces deux vecteurs, ce qui consisterait en une mesure plus robuste face au déphasage des modes.

**Formulation générale du problème aux valeurs propres** La formulation du problème (V.3.2) permet aussi de traiter les problèmes exprimés lors de l'étude de la propagation des ondes planes (voir par exemple chapitre I, section I.5), de la forme :

$$\left( \mathbf{k}_{i,r}^j \mathbf{K}^{ij}(\omega_r) - \omega_r^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}_r = \mathbf{0} \quad (\text{V.5.1})$$

où  $\mathbf{k}_r$  est le vecteur d'onde. Dans les deux chapitres qui suivent est présentée l'analyse en vecteurs d'onde, appliquée aux poutres puis aux plaques. Cette analyse permet d'obtenir des vecteurs d'onde  $\tilde{\mathbf{k}}_r$  ainsi que les pulsations  $\tilde{\omega}_r$  et modes  $\tilde{\phi}_r$  associés. La démarche présentée dans ce chapitre pour l'analyse modale pourrait donc être adaptée à l'identification des propriétés de matériaux par analyse en vecteurs d'onde.



# Chapitre VI

## High Resolution Wavenumber Analysis

### Résumé

Ce chapitre reproduit un article publié au **Journal of Sound and Vibration**, intitulé *High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) for the Mechanical Characterisation of Viscoelastic Beams*. Pour cette raison, il est en anglais. Il consiste en l'**application de la méthode ESPRIT** proposée au chapitre précédent pour l'analyse en nombre d'onde.

La méthode d'**analyse en nombre d'onde haute résolution** (HRWA) est présentée. Elle permet d'extraire les **nombres d'onde complexes** et amplitudes des ondes composant la réponse d'une poutre en régime harmonique. A partir de la dépendance de ces nombres d'onde en fonction de la fréquence, les **branches de dispersion expérimentales** associées à différents mécanismes de mouvement des poutres (i.e flexion, torsion) peuvent être reconstruites. La méthode HRWA est comparée aux méthode de *Mc. Daniel* et à l'IWC (pour *Inhomogeneous Wave Correlation*). En particulier, différents inconvénients de ces dernières sont résolus par la méthode proposée : (i) par rapport à l'IWC, la **résolution spectrale** est améliorée ; (ii) par opposition aux deux autres méthodes qui sont basées sur un problème de minimisation non linéaire, le problème de recherche des nombres d'onde complexes est exprimé dans la HRWA comme un problème de régression linéaire, rendant la méthode avantageuse en terme de **coût de calcul** ; (iii) l'ordre du signal, fixe dans les méthodes existantes, est ici **automatiquement détecté** à partir d'un critère statistique (le critère ESTER).

Dans un premier temps, la **sensibilité au bruit** de chaque méthode est étudiée, sur la base d'un signal synthétique dont on maîtrise le niveau de bruit. il est montré que les performances de la HRWA et de la méthode de Mc Daniel sont proches, et **largement supérieures** à la méthode IWC. Il est également montré que la méthode proposée est, en fonction de la taille du maillage de mesure, **5 à 20 fois plus efficace** en terme de temps de calcul que les méthodes existantes. Dans un second temps, une application expérimentale de la méthode est proposée sur une poutre à section carrée. Il est montré que l'identification des nombres d'onde complexes peut être réalisée sur des expériences faites en **régime transitoire** (excitation impulsive) **et/ou en régime permanent** (excitation par un bruit coloré). Les nombres d'onde correspondant aux ondes de flexion et de torsion sont **extraits et séparés simultanément** ; cela permet d'**identifier les modules de Young et de cisaillement complexes** apparents du matériau isotrope constituant la poutre, de façon **indépendante des conditions aux limites appliquées**.





## VI.1 Introduction

With the apparition of full-field contactless measurement devices (e.g. scanning doppler laser vibrometers or high-speed cameras), displacement or velocity measurements can be performed on fine meshes, with a large number of points. Thanks to this major improvement, non-destructive structural characterisation methods have been developed [10, 161, 119, 238]. Some of them focus on the identification of structural waves in the *medium frequency* domain [26, 27, 139, 158, 171]. These methods aim at filling the gap between low-frequency methods, (*Oberst* [151, 150], modal analysis [30, 28, 29, 70, 174] or Dynamical Mechanical Analysis (DMA) [99]) and ultrasonic testing [94, 8, 105].

The present work focuses on applications to beam, considered as waveguides. Waves travelling in these structures are representative of the beam section motions : for example bending, twist or longitudinal motion. In these unidimensionnal structures, the wavenumbers are characteristic of the local structural behaviour : far from singularities, boundary conditions and sources have an influence on the wave amplitudes only. These wavenumbers are given by reduced beam models (e.g. Euler or Timoshenko models) or more elaborated schemes like Wave Finite elements [68]. The experimentally extracted wavenumbers can be used to identify apparent viscoelastic parameters of reduced models via an inverse problem [171].

The existing Mc Daniel [139] and IWC [26, 27] (Inhomogeneous Wave Correlation) methods are two candidate for the extraction of waves in the harmonic response of beams. However, these methods have some drawbacks (i) in low frequency, the Fourier based IWC method suffers from resolution limitations; (ii) in practice, the beam response is composed of multiple wave types (e.g. twist, compression, shear) and both existing methods fail to separate the different wave contributions, as they postulate the number of waves present in the signal; (iii) the formulation of these methods leads to a computationally expensive non-linear problem that has to be solved, with a complex wavenumber as parameter.

The aim of the High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) presented in this paper is to overcome the limitations of the existing wavenumber extraction techniques. It makes use of the subspace-based identification algorithm ESPRIT [189] (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*). Subspace-based methods are widely-used in linear system identification, using for example the state-variable framework [90, 225]. Another example is the ERA [100] (*Eigenvalue Realisation Algorithm*), which is devoted to the identification of the modal parameters of a measured system. Thanks to the use of the ESPRIT algorithm, some limitations of the Mc Daniel and IWC methods are overcome : (i) the algorithm resolution is high, as it uses a recurrence property of the signal to identify the wave parameters; (ii) by using the subspace decomposition, the number of waves contained in the signal can be estimated automatically with the ESTER criterion [14]; (iii) the complex wavenumbers are the solution of an optimisation-free problem thus the computational cost is lightened.

With the HRWA, a discrete number of complex wavenumbers is identified in the harmonic response of a beam with a high resolution. Based on the dependence of the extracted wavenumbers on frequency, experimental dispersion branches are retrieved. From these branches are identified the beam viscoelastic properties. Thanks to the high resolution aspects of the HRWA, the low-frequency limit of wavenumber extraction is lowered. Also, with the automated identification of multiple wavenumbers, strain mechanisms can be well separated, extending the upper frequency limit.

The paper is organised as follows. Firstly, theoretical wavenumbers are derived from the Euler and the Timoshenko beam models. The ability to identify beam properties from the

wavenumbers is illustrated. Then, a common framework of wavenumber extraction methods is given, and the existing IWC method and McDaniel method reformulated in this framework. Secondly, the HRWA is developed in details. A summary of the algorithm is given, that allows to identify viscoelastic properties of the beam. Thirdly, a numerical study based on synthesised harmonic responses of an Euler beam in bending motion only is developed, where the Mc Daniel method is taken as reference. The Mc Daniel method, IWC method and the proposed HRWA are compared in terms of sensitivity to noise ratio and computation time. Finally, an experimental result is given on the simultaneous identification of frequency-dependent apparent viscoelastic Young and shear modulus, for both beam models.

## VI.2 Natural wavenumbers in a beam

All along the paper, the beam section is considered as homogeneous and made of a linear viscoelastic isotropic material with density  $\rho$ , Young modulus  $E$  and shear modulus  $G$ . However, the present method is applicable to higher-order beam models and more complex material configurations. The axis and the geometry of the beam are presented in Fig. VI.1 ( $x$  being the beam's direction). Not considering the bending motion along  $y$ , the beam neutral axis is assumed to remain in the  $(O, x, z)$  plane.

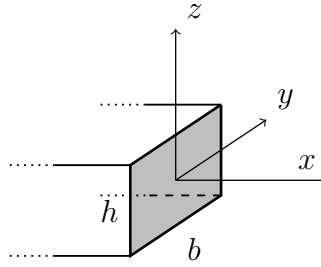


FIGURE VI.1 – Beam geometry and coordinate axis

### VI.2.1 The Euler model

For the sake of simplicity, the Euler beam model is used for the numerical case considered in this paper. The linearised displacement field  $u$  is given by :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = V(x, t) \mathbf{e}_x + W(x, t) \mathbf{e}_z - z W'(x, t) \mathbf{e}_x + \Theta(x, t) (y \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_y) \quad (\text{VI.2.1})$$

where  $V$  and  $W$  are respectively the longitudinal and transverse displacements,  $\Theta$  is the rotation angle of the beam section with respect to the  $x$  axis, and  $\bullet'$  denotes the partial derivative with respect to  $x$ .

Along the paper, the harmonic dependence on time of real physical quantities is accounted for by making them complex according to the  $e^{i\omega t}$  convention (where  $i$  denotes the imaginary unit). The local harmonic response of the beam at the angular frequency  $\omega$  (except on sources

or at boundaries locations) obeys the following uncoupled linear homogeneous equations :

$$E V'' = -\omega^2 \rho V \quad (\text{VI.2.2a})$$

$$I_b E W'''' = -\omega^2 M W \quad (\text{VI.2.2b})$$

$$I_t G \Theta'' = -\omega^2 J \Theta \quad (\text{VI.2.2c})$$

with  $A = b h$ ,  $I_b = b h^3/12$ ,  $J = \rho (b h^3 + h b^3)/12$ ,  $I_t = \kappa J/\rho$ ,  $M = \rho A$  and  $\kappa$  being a correction factor for twist inertia momentum, related to the shape of the beam's section.

By taking exponential solutions as function of  $x$ , the displacement components are expressed as a sum of the solutions of the previous equations :

$$V(x) = v_1 e^{ik_v x} + v_2 e^{-ik_v x} \quad (\text{VI.2.3a})$$

$$W(x) = w_1 e^{ik_b x} + w_2 e^{-ik_b x} + w_3 e^{k_b x} + w_4 e^{-k_b x} \quad (\text{VI.2.3b})$$

$$\Theta(x) = \theta_1 e^{ik_t x} + \theta_2 e^{-ik_t x} \quad (\text{VI.2.3c})$$

where the wave amplitudes  $v_r$ ,  $w_r$  and  $\theta_r$  are given by boundary conditions.

According to the  $e^{i\omega t}$  convention specified above, the  $e^{-ikx}$  waves are forward-propagating waves. The three following dispersion laws are obtained :

$$k_v^2 = \omega^2 \frac{\rho}{E} \quad , \quad k_b^4 = \omega^2 \frac{M}{EI_b} \quad \text{and} \quad k_t^2 = \omega^2 \frac{J}{GI_t} \quad (\text{VI.2.4})$$

It is of common practice to account for the viscoelastic behaviour of the material by taking complex moduli  $\mathbf{E} = E(1 + i\eta_E)$  and  $\mathbf{G} = G(1 + i\eta_G)$  with positive (and small) imaginary parts, according to the  $e^{i\omega t}$  convention. The wavenumbers become complex too :

$$\mathbf{k} = k(1 - i\gamma) \quad (\text{VI.2.5})$$

generically, with  $k = \Re\{(\mathbf{k})\}$ . Specifically, the three groups of wavenumbers given by Eq. (VI.2.4) become :

$$k_v = \pm k_v(1 - i\gamma_v) \quad (\text{VI.2.6a})$$

$$k_b = \pm k_b(1 - i\gamma_b) \quad \text{and} \quad k_b = \pm i k_b(1 - i\gamma_b) \quad (\text{VI.2.6b})$$

$$k_t = \pm k_t(1 - i\gamma_t) \quad (\text{VI.2.6c})$$

where these expressions are physical (waves attenuating along their direction of propagation) only if the generic coefficient  $\gamma$  defined above is positive. The second group of bending waves ( $k_b = \pm i k_b(1 - i\gamma_b)$ ) correspond to fast decaying and slowly oscillating waves.

Finally, Young and shear moduli can be identified from bending and twist wavenumbers composing the harmonic response of the beam. Considering the Euler model, the Young and shear moduli are given :

$$\mathbf{E}^{\text{eul}}(\omega) = \frac{M \omega^2}{I_b k_b^4} \quad \text{and} \quad \mathbf{G}(\omega) = \frac{J \omega^2}{I_t k_t^2} \quad (\text{VI.2.7})$$

The coefficients that are obtained are *apparent* Young and shear moduli, in the sense that they refer to an underlying theory of the Euler beam behaviour and not directly to elasticity. Consequently, they may vary in frequency.

### VI.2.2 The Timoshenko model

One can define one *equivalent slenderness ratio*  $\mu$  as the bending wavelength divided by the beam thickness :

$$\mu(\omega) = \frac{\lambda_b(\omega)}{h} = \frac{2\pi}{k_b(\omega)h} \quad (\text{VI.2.8})$$

When the frequency increases,  $\mu$  decreases. As a consequence, out-of-plane shear and rotary inertia effects are no longer negligible and the beam behaves as a thick beam. The Timoshenko model aims at taking into account these effects. The governing equation for bending motion in the harmonic regime (Eq. (VI.2.2b)) can be found in [31] :

$$I_b E W'''' - \omega^2 M W + \omega^2 \rho I_b \left(1 + \frac{E}{\xi G}\right) W'' + \omega^4 \rho^2 \frac{I_b}{\xi G} = 0 \quad (\text{VI.2.9})$$

with  $\xi = \pi^2/12$  the shear correction factor. As in Eq. (VI.2.4), the bending wave dispersion law is derived :

$$k_b^4 I_b E - \omega^2 M - \omega^2 k_b^2 \rho I_b \left(1 + \frac{E}{\xi G}\right) + \omega^4 \rho^2 \frac{I_b}{\xi G} = 0 \quad (\text{VI.2.10})$$

As in the preceding case, this fourth order equation in  $k$  gives four solutions, of which two are almost real and two are almost imaginary. Finally, an *apparent* Young modulus  $E^{\text{tim}}$  that takes both out-of-plane shear effects and rotary inertia into account can be identified from the bending wavenumber  $k_b$  and the shear moduli  $G(\omega)$  (Eq. (VI.2.7)) :

$$E^{\text{tim}}(\omega) = \frac{\omega^2 M + \omega^2 k_b^2 \rho I_b - \omega^4 \rho^2 \frac{I_b}{\xi G(\omega)}}{k_b^4 I_b - \omega^2 k_b^2 \rho \frac{I_b}{\xi G(\omega)}} = E^{\text{eul}}(\omega) \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 \rho}{k_b^2 \xi G(\omega)}} + k_b^2 \frac{I_b}{A} \right) \quad (\text{VI.2.11})$$

The next section presents the signal model of a measurement performed on the beam, which parameters are identified by means of the proposed HRWA and of two existing methods suited for wavenumber identification : the *Mc Daniel method* [139] and the *Inhomogeneous Wave Correlation* [26].

## VI.3 Signal model

The harmonic response of a beam is measured on a domain away from sources and boundaries, along a regularly  $\Delta$ -spaced mesh  $\mathbf{x}$  of  $N$  points, aligned with the beam neutral axis :

$$x_u = x_1 + (u - 1)\Delta, \quad u \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{VI.3.1})$$

A typical setup is schematised in Fig. VI.2.

For a beam structure vibrating in the linear regime, the measurement of a component of  $\mathbf{u}(x, y, z)$  along the mesh  $\mathbf{x}$  is expected to provide the spatially discrete signal  $\mathbf{s}$  formed by a sum  $\mathbf{p} = u_i(\mathbf{x}, y_0, z_0)$  of  $R$  damped exponentials and noise  $\mathbf{n}$  :

$$s_u = u_i(x_u, y_0, z_0) + n_u = p_u + n_u = \sum_{r=1}^R a_r z_r^u + n_u \quad (\text{VI.3.2})$$

where  $a_r$  are the amplitudes corresponding to the poles  $z_r = e^{ik_r \Delta}$ ,  $k_r = k_r(1 - i \cdot \gamma_r)$ .

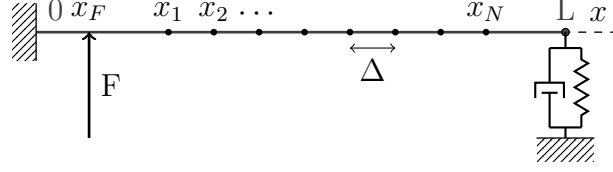


FIGURE VI.2 – Typical setup for wavenumber identification methods.

The  $\mathbf{p}$  part of the signal can be expressed as :

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}_N(\mathbf{z}_R) \cdot \mathbf{a}_R \quad (\text{VI.3.3})$$

where  $\mathbf{a}_R = [a_1, \dots, a_R]^\top$ ,  $\mathbf{z}_R = [z_1, \dots, z_R]$  and  $\mathbf{V}_N(\mathbf{z}_R)$  is the Vandermonde matrix :

$$\mathbf{V}_N(\mathbf{z}_R) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_R^{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.4})$$

The main problem is to find the poles  $\mathbf{z}_R$ . Once the poles are known, the complex amplitudes  $\mathbf{a}_R$  can be estimated in the measured noisy signal  $\mathbf{s}$  in the least-square sense :

$$\mathbf{a}_R = (\mathbf{V}_N^*(\mathbf{z}_R) \cdot \mathbf{V}_N(\mathbf{z}_R))^{-1} (\mathbf{V}_N^*(\mathbf{z}_R) \cdot \mathbf{s}) \quad (\text{VI.3.5})$$

where  $\bullet^*$  denotes complex conjugate or hermitian transpose.

## VI.4 Two existing wavenumber identification methods

As well as the HRWA method presented in this paper, the Mc Daniel and IWC methods make use of a Vandermonde matrix, but with different  $R$  and  $N$  values.

### VI.4.1 One pole : Inverse Wave Correlation

The Inverse Wave Correlation method [26, 27] aims at finding the wavenumber  $\mathbf{k}$  which maximises the normalised scalar product  $C_{IWC}(\mathbf{k})$  between the Vandermonde vector  $\mathbf{v}_N(\mathbf{k}) = \mathbf{V}_N(e^{i\mathbf{k}\Delta})$  and the noisy signal  $\mathbf{s}$  :

$$C_{IWC}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{k})}{\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{v}_N(\mathbf{k})\|} \quad (\text{VI.4.1})$$

One can notice that the IWC correlation coefficient  $C_{IWC}(\mathbf{k})$  can be seen as a normalised  $z$ -transform on the complex wavenumber  $\mathbf{k}$ . Therefore, it suffers the same resolution limitations as any method based on a Fourier transform.

### VI.4.2 Bending waves's four poles : the Mc Daniel method

Mc Daniel suggested [139, 158] to identify simultaneously the four waves derived from the bending operator (Eq. (VI.2.2b), Eq. (VI.2.3b) and Eq. (VI.2.4b)). The four poles are imposed

to be  $\mathbf{z}_4(\mathbf{k}) = [e^{ik\Delta}, e^{-ik\Delta}, e^{k\Delta}, e^{-k\Delta}]$ , where  $\mathbf{k}$  only has to be determined. A signal reconstruction  $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$  is made :

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) = \mathbf{V}_N(\mathbf{z}_4(\mathbf{k})) \cdot \mathbf{a}_4 \quad (\text{VI.4.2})$$

with the amplitudes  $\mathbf{a}_4$  estimated by Eq. (VI.3.5). If only bending waves are present in the measured signal  $\mathbf{s}$ , its normalised correlation  $C_{\text{McDan}}(\mathbf{k})$  with the reconstructed signal  $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$  :

$$C_{\text{McDan}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k})}{\|\mathbf{s}\| \|\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k})\|} \quad (\text{VI.4.3})$$

is maximum when  $\mathbf{k}$  matches the natural bending wavenumber.

Both methods are based on the maximisation of a correlation coefficient ( $C_{\text{IWC}}$  or  $C_{\text{McDan}}$ ). This is a non-linear problem on two unknowns : the real and imaginary parts of  $\mathbf{k}$ . For the comparisons given in the present paper, the procedure proposed by Rak [171] was adopted, using a Nelder-Simplex research algorithm.

## VI.5 High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) method : implementation for the characterisation of beams

The HRWA method makes use of the ESPRIT algorithm [189] (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) to extract wavenumbers from the harmonic response of a beam. It is inspired from the pioneer works of Prony [168], who stated that signals composed of complex poles follows a recurrence relation. This led, at the end of the twentieth century, to the development of a family of identification methods such as Matrix Pencil [98], Pisarenko method [165], MUSIC algorithm [199] and ESPRIT algorithm. The main goal of these methods consists in identifying, in a measured signal, complex poles with their associated amplitudes. These methods are widely used in array processing and radar applications [200, 188], musical applications [74, 70, 13] and high-resolution spectral analysis [15]. Some applications have been developed for the impact localisation on plates [169].

A Prony method has been already used in the past for the retrieval of dispersion relations in cylindrical shells [166][236]. However, it was limited by the sensibility to noise, the unknown number of travelling waves and the number of measurement points required to retrieve evanescent waves [82]. The ESPRIT algorithm, used here, applies subspace decomposition to improve the resistance to noise. In addition, the ESTER criterion [14] (*ESTimation or ERror*) is used to estimate the *signal order* (number of poles contained in the signal). Finally, the procedure is here applied to full-field measurements, which allows to make measurement over fine meshes and overcome the limitations due to a limited number of points.

### VI.5.1 The ESPRIT algorithm

#### VI.5.1.1 Signal and noise subspaces

The first step of the algorithm consists in the decomposition of the signal between signal and noise subspaces. First, a Hankel matrix  $\mathbf{H}$  is formed with the measured signal  $\mathbf{s}$  of length

$N$  :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{N-K} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{N-K+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_K & & \cdots & s_N \end{bmatrix} \quad (\text{VI.5.1})$$

where the integer parameter  $K$  corresponds to the sum of the dimensions of signal and noise subspaces. The HRWA method makes use of the autocovariance matrix  $\mathbf{R}_{ss}$  :

$$\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{H}\mathbf{H}^* = \mathbf{W}^* \mathbf{D} \mathbf{W} \quad (\text{VI.5.2})$$

which eigenvectors  $\mathbf{W}$  spans the same subspace as the Hankel matrix singular vectors, and has the advantage to be an asymptotically non-biased estimator of the signal autocovariance, in presence of white gaussian noise. The eigenvectors matrix  $\mathbf{W}$  spans the entire subspace of the noisy signal  $\mathbf{s}$ . This total subspace can be decomposed into signal subspace  $\mathbf{W}_p$  and noise subspace  $\mathbf{W}_n$ , with  $\mathbf{W}_p$  built with the eigenvectors corresponding to the  $R$  dominant eigenvalues (with the number of poles  $R$  supposed known here) :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_p]_{K \times R} & [\mathbf{W}_n]_{K \times (K-R)} \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (\text{VI.5.3})$$

It can be seen, with this last equation, that the parameter  $K$  has to be larger than  $R$ . Also, the dimension of the noise subspace is given by this parameter. In fact, the  $(K - R)$  additional poles contained in the noise subspace permits to sample an hypothetical correlated part of the noise [111], to separate it from the signal pole extraction. Numerous studies investigate this parameter influence on the errors of pole estimation [114, 12], and a common strategy consists in choosing this parameter so that  $K \approx N/2$ .

### VI.5.1.2 Rotational Invariance

Thanks to the regularity of the uniform measurement mesh  $\mathbf{x}$  of Eq. (VI.3.1), a *rotational invariance* property is expressed via two Vandermonde matrices, related to two subparts of the signal :

$$\mathbf{V}_{(N-1)}^\downarrow(\mathbf{z}_R) = \mathbf{V}_{(N-1)}^\uparrow(\mathbf{z}_R) \cdot \mathbf{Z} \quad (\text{VI.5.4})$$

with  $\mathbf{Z} = \text{diag}(\mathbf{z}_R)$  and the two matrices  $\mathbf{V}_{(N-1)}^\uparrow$  and  $\mathbf{V}_{(N-1)}^\downarrow$  respectively corresponding to the  $(N - 1)$  first and last samples of the signal. The ESPRIT algorithm strategy consists in estimating the signal poles  $\mathbf{z}_R$  via the signal subspace matrix  $\mathbf{W}_p$ . As this last matrix and the Vandermonde matrix spans close subspaces, they are related by a transfer matrix  $\mathbf{T}$  :  $\mathbf{V}_N(\mathbf{z}_R) = \mathbf{W}_p \mathbf{T}$ . The rotational invariance property is then expressed as a function of the signal subspace matrix :  $\mathbf{W}_p^\downarrow = \mathbf{W}_p^\uparrow \mathbf{F}$ , with  $\mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{Z} \mathbf{T}^{-1}$  and :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_p^\uparrow &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(K-1)} & \mathbf{0}_{(K-1) \times 1} \end{bmatrix} \mathbf{W}_p \\ \mathbf{W}_p^\downarrow &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(K-1)} \end{bmatrix} \mathbf{W}_p \end{aligned} \quad (\text{VI.5.5})$$

Consequently, the matrix  $\mathbf{F}$  is estimated in the Least-Square sense :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{W}_p^\uparrow)^{-1} \mathbf{W}_p^\downarrow \quad (\text{VI.5.6})$$

Finally, the poles  $\mathbf{z}_R$  are extracted from the diagonalisation of  $\mathbf{F}$ .



### VI.5.1.3 Estimation of the number of poles

In the previous steps, the number of poles  $R$ , or *signal order*, has been supposed known. However, the number of dominant waves in the signal is unknown in most of the practical applications. As a wrong estimated signal order would drastically decrease the poles extraction accuracy, a signal order estimation method is needed. A number of signal order selection criterion have been proposed [210], as it is a common issue encountered in subspace-based identification methods. The HRWA method makes use of the ESTER criterion [14] (*ESTimation or ERror*), which is particularly adapted to the ESPRIT algorithm.

The estimation of matrix  $\mathbf{F}$  (Eq. (VI.5.6)) is sensitive to the assumed signal order  $R$  used to extract the signal subspace (Eq. (VI.5.3)). The ESTER criterion consists in finding the signal order  $R$  that minimises the  $\mathbf{F}$  estimation residual, so that :

$$R = \arg \min_{r \in \llbracket r_{\min}, r_{\max} \rrbracket} \left\| \mathbf{W}_p^\uparrow(r) \mathbf{F}(r) - \mathbf{W}_p^\downarrow(r) \right\|_2 \quad (\text{VI.5.7})$$

With this criterion, the signal order  $R$  can be estimated automatically in a given range of signal orders  $r \in \llbracket r_{\min}, r_{\max} \rrbracket$ .

## VI.5.2 HRWA Implementation

For applying the HRWA to the characterisation of beams, any type of excitation may be used (impulse, random noise or sweep), with any type of actuator (e.g. shaker at  $x_F$ , exerting a point force  $F$  on the beam). The method has no requirement with regard to boundary conditions, provided that they are not applied too close to the measured zone. The displacement, velocity or acceleration  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  is measured along a regularly spaced mesh  $\mathbf{x}$  of Eq. (VI.3.1), as in Fig. VI.2. A collection of harmonic responses is obtained by computing the Fourier Transform  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \omega)$  of the measured signal over the time dimension for a given number of individual frequencies  $\omega_i$ . The HRWA procedure consists in applying the following steps to each obtained harmonic response  $\mathbf{s}(\omega_i) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \omega_i)$  :

1. A Hankel matrix  $\mathbf{H}$  is built, based on the array  $\mathbf{s}(\omega_i)$  (see Eq. (VI.5.1)).
2. The Covariance Matrix  $\mathbf{R}_{ss}$  is computed and diagonalised yielding the matrix of eigenvectors  $\mathbf{W}$  (see Eq. (VI.5.2)).
3. The ESTER method is applied to estimate the signal order, in other words the number of detectable waves in the (noisy) signal. Then, for each  $r \in \llbracket r_{\min}, r_{\max} \rrbracket$  :
  - (a) the  $r$  eigenvectors corresponding to the  $r$  dominant eigenvalues are extracted to form the approximated signal subspace matrix  $\mathbf{W}_p$  (Eq. (VI.5.3))
  - (b) the truncated signal subspace matrices  $\mathbf{W}_p^\uparrow$  and  $\mathbf{W}_p^\downarrow$  are built (Eq. (VI.5.5))
  - (c) the Least-Squares estimation of  $\mathbf{F}$  is computed (Eq. (VI.5.6))
  - (d) the ESTER criterion as function of  $r$  is evaluated (Eq. (VI.5.7))

Finally, the signal order  $R$  is chosen to minimise the ESTER criterion.

4. The eigenvalues of the matrix  $\mathbf{F}$  (see Eq. (VI.5.6)) are computed, yielding the wavenumbers  $\mathbf{k}_r$  of all the waves which can be detected with the HRWA at the angular frequency  $\omega_i$  :

$$\mathbf{k}_r(\omega_i) = \frac{\ln((\mathbf{i} \cdot \mathbf{z}_r(\omega_i)))}{\Delta} \quad (\text{VI.5.8})$$

5. If a signal reconstruction is needed, the Vandermonde matrix  $\mathbf{V}_N(\mathbf{z}_R)$  is computed (Eq. (VI.3.4)), and the complex amplitudes  $\mathbf{a}_R$  are estimated (Eq. (VI.3.5)).

## VI.6 Comparison of methods for a simulated cantilever bending-only beam

This section is devoted to a comparison between the Mc Daniel method, the IWC method and the HRWA, regarding the sensitivity to noise and the computation time. For this purpose, a simple case is investigated numerically. Using synthesised data for the comparison makes possible the exploration of various parameters (e.g. mesh size, material characteristics, etc.). A thin aluminium cantilever Euler beam of length  $L$  is harmonically excited at the pulsation  $\omega$  with a force  $F = 1N$  at  $(x_F, y_F, z_F) = (L, 0, h/2)$  (Fig. VI.3), in order to be submitted to bending only. In this situation, the signal model of the Mc Daniel method is exact : the harmonic response of the beam is composed of four bending waves, with wavenumbers  $k_b$  solutions of the fourth root of Eq. (VI.2.4b). It is thus the reference method for this case study.

The characteristics of the beam are summarised in Tab. VI.1. The beam is excited between 10 Hz and 5 kHz. Eleven resonance peaks appear in this bandwidth (see Fig. VI.4, top frame). The first modal frequency is around 14 Hz.

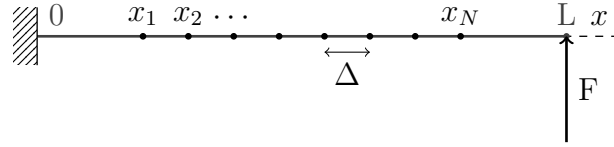


FIGURE VI.3 – The simulated cantilever beam.

The response of the beam is derived analytically since the four complex amplitudes  $w_j$  in Eq. (VI.2.3) are determined by the boundary conditions. The response yields the virtual measurements on the mesh  $\mathbf{x}$  of Eq. (VI.3.1) along a sub-part of the beam ( $x_u \in [0.1, 0.9] \times L$ ). The beam response is computed at 100 equally-spaced frequencies in the desired bandwidth, and for 100 regularly spaced points over the sub-part of the beam.

$L$	$h$	$b$	$E$	$\eta$	$\nu$	$\rho$
60 cm	6 mm	40 mm	70 GPa	0.5%	0.3	2500

TABLE VI.1 – Characteristics of the beam.

### VI.6.1 Noise Sensitivity

To study the sensitivity to noise of each wavenumber identification method, a white gaussian noise is added to the signal  $\mathbf{s}$ . The amplitude of this noise is determined by a given Signal to Noise Ratio (SNR). For each of the 100 SNR values ranging from  $10^0$  to  $10^4$  and each of the 100 computed beam harmonic responses, 100 realisations of the noisy signal are computed. Altogether, the estimation of the bending wavenumber is done one million times for each method. Based on these 100 realisations of the noise the mean and variance of the wavenumber estimation error are computed, as a function of frequency and SNR.

The Mc Daniel method and IWC method identify only one wavenumber  $k$ . By contrast, the HRWA identifies a varying number of wavenumbers. Consequently a *valid wavenumber*

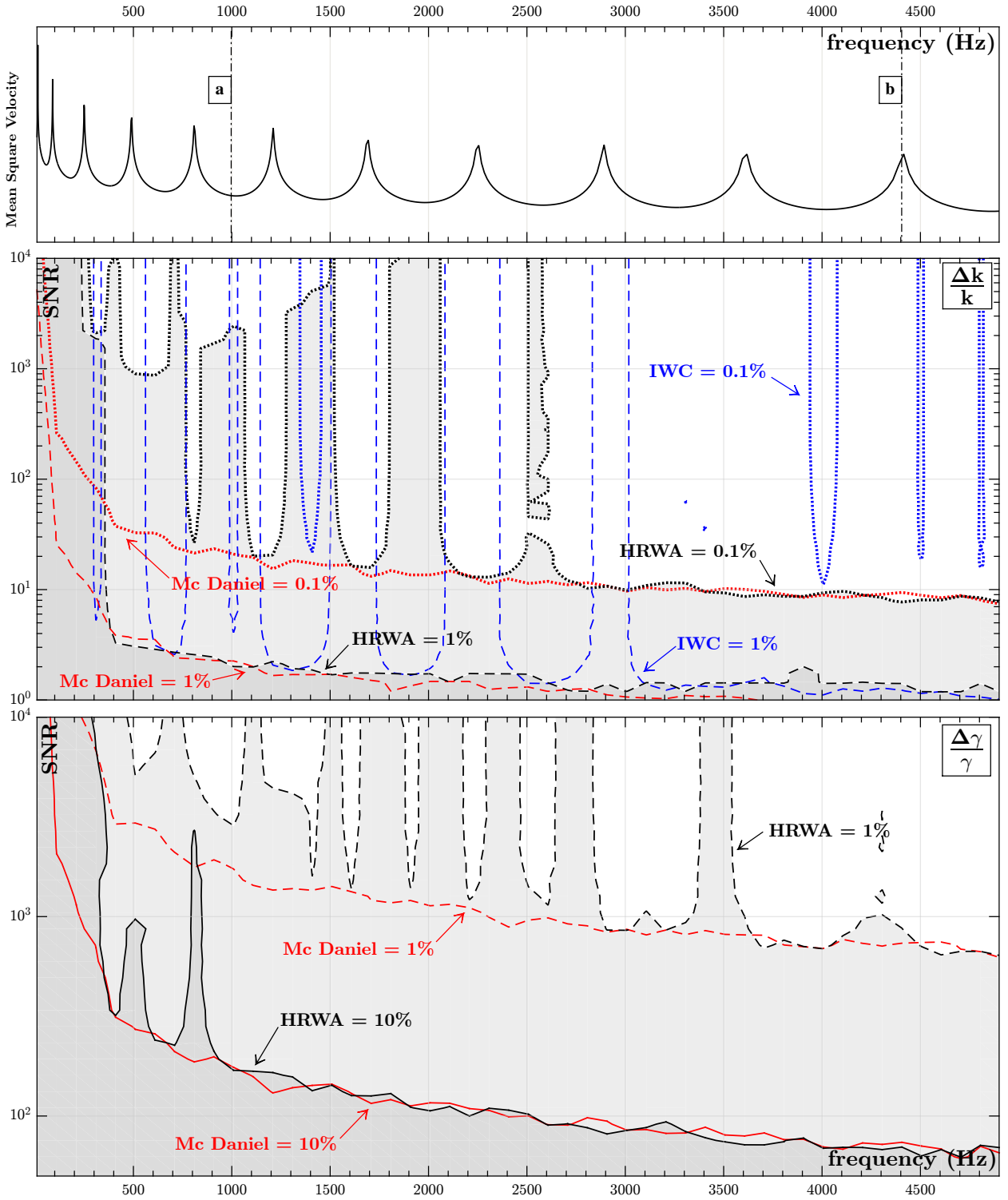
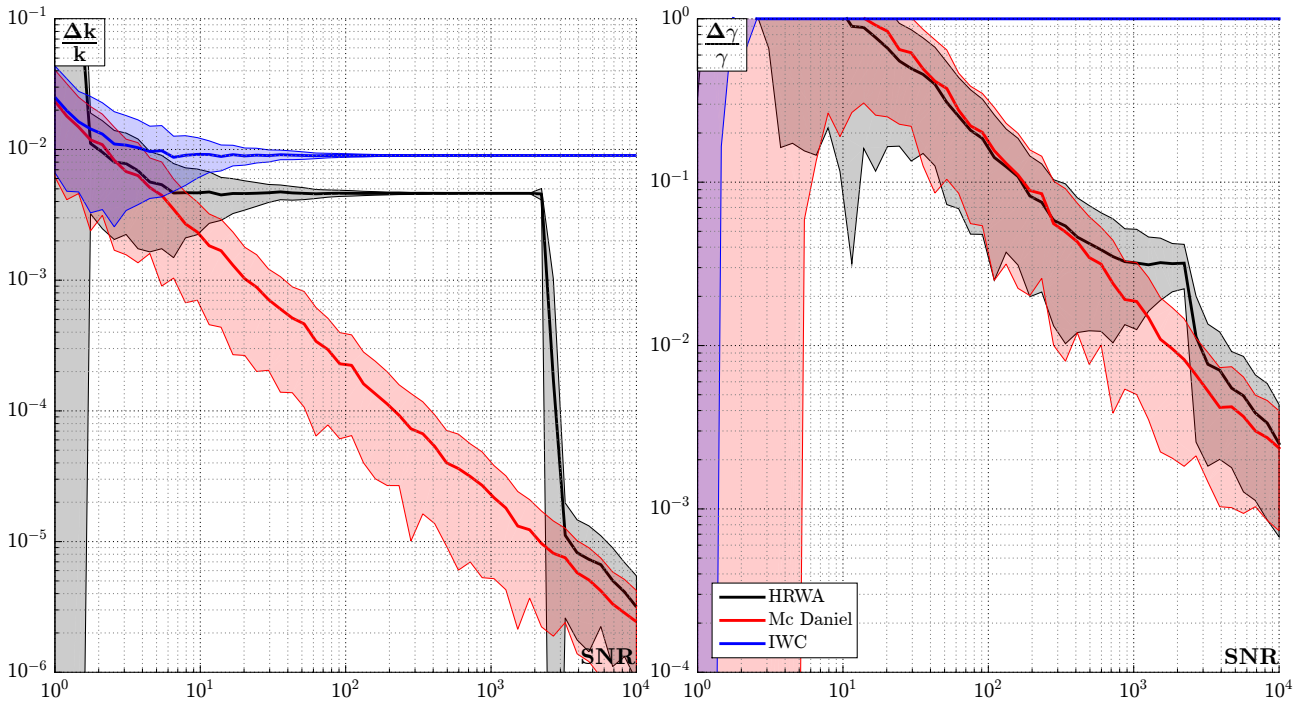
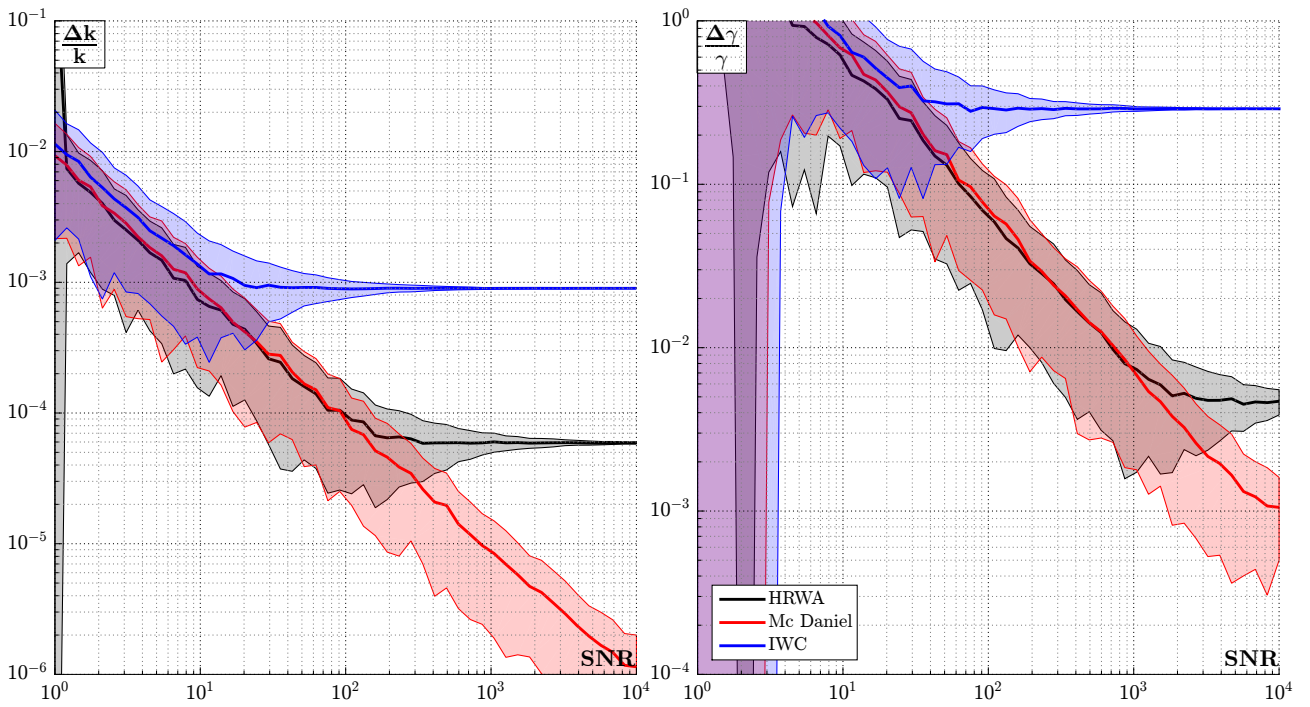


FIGURE VI.4 – Synthesised Mean Square Velocity without noise (top frame). Contour plots of the relative errors in the determination of the real part of the wavenumber  $k$  (middle frame) and the spatial decay  $\gamma$  (bottom frame) for different SNR levels (ordinates) as a function of the frequency. Comparison of the HRWA (black), Mc Daniel (red) and IWC (blue) methods. Contour lines display the 10% (continuous lines), 1% (dashed lines) and 0.1% (dotted lines) limits for the relative identification errors. The results are obtained as the mean of the estimation over 100 virtual tests.



(a) 1000 Hz, between two modal frequencies



(b) 4400 Hz, on a modal frequency

FIGURE VI.5 – Relative error in the identification of the complex wavenumber  $k = k(1 - i \cdot \gamma)$  as a function of the SNR for two fixed frequencies. Mean  $\pm$  Standard Deviation. Comparison between HRWA (black), Mc Daniel (red) and IWC (blue) methods. (a) at 1 kHz, between two modal frequencies. (b) at 4.5 kHz, on a modal frequency.

*selection strategy* has to be chosen to perform the comparison. All along this numerical investigation, the maximum signal order  $r_{\max}$  of the HRWA procedure is given by the equilibrium (Eq. (VI.2.3)). The algorithm is then free to identify from one to eight waves of different wavenumbers ( $R \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ ). The choice is automated with the ESTER criterion. The chosen strategy, which was observed to work the best among several options, consists in isolating the  $P$  *propagative* wavenumbers  $\mathbf{k}_p$  so that  $0 < \gamma_p < 1$ . The mean of these wavenumbers is then computed as follows :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{P} \left( \sqrt{\sum_{p=1}^P \text{Re}(\mathbf{k}_p)^2} - i \sqrt{\sum_{p=1}^P \text{Im}(\mathbf{k}_p)^2} \right) \quad (\text{VI.6.1})$$

the square power allowing to take into account both *forward* and *backward* propagating waves. This strategy eliminates the identified *evanescent* (fast decreasing) waves, the identification of which is sensitive to noise.

In Fig. VI.4 and Fig. VI.5, average relative errors on the identification of the real part  $k$  of the wavenumber and the spatial decay  $\gamma$  are represented for the IWC method, the Mc Daniel method and the HRWA. In Fig. VI.4, three contour lines are plotted, corresponding on three levels of performance (relative error of 10%, 1% and 0.1%). The wavenumber identification turns out to be sensitive to the number of spatial periods contained in the measurement mesh. As the wavelength depends on frequency, it has been chosen to represent the relative error on the complex bending wavenumber estimation as a function of frequency and of Signal to Noise Ratio.

Regarding the real part of the bending wavenumber, both HRWA and Mc Daniel method give an estimation with less than 1% of relative error, above 500 Hz and for small signal to noise ratios ( $\text{SNR} > 3$ ). The Mc Daniel method provides a relative error of 0.1% in the estimation, up to a  $10^2$  SNR, whereas the HRWA delivers such an estimation above 3kHz. The HRWA and the Mc Daniel methods display comparable abilities to provide an estimation of the spatial decay with less than 10% of relative error. For high signal to noise ratios ( $\text{SNR} > 10^3$ ), the Mc Daniel method can give an estimation of the spatial decay with less than 1% of relative error, above 2.5 kHz, whereas this frequency bound is higher for the HRWA (4kHz).

In contrast, the estimate of the IWC method depends on the frequency. This behaviour is related to its resolution limitations. Except for few high frequencies, no estimation of the real part of the wavenumber with IWC can be made with less than 0.1% or relative error. Moreover, the estimation of the spatial decay  $\gamma$  is not possible to the IWC method in this SNR and frequency ranges. These results agree with those of Rak [171].

The HRWA method exhibits a frequency-dependent behaviour for the fine estimation of real part of wavenumber (0.1% of relative error) and spatial decay (1% of relative error) : both real and imaginary parts of the wavenumber are better identified at modal frequencies. In order to explain this particular behaviour, results of the study for two given frequencies are plotted in Fig. VI.5. It shows the results of complex bending wavenumber identification as a function of SNR, for the three methods. First, Fig. VI.5a shows the results at 1000 Hz, between two modal frequencies (see Fig. VI.4, top frame, marker  $\boxed{a}$ ). For this particular frequency, the HRWA converges shortly to a first plateau at 0.5% of relative error in  $k$  identification, for SNR higher than  $10^1$ . Then, one can observe a jump at SNR of 2000, HRWA finally reaching a very fine estimation of the real part  $k$  of the wavenumber, comparable to the Mc Daniel method. The level and the extension of the plateau are due to the variable estimation of the number of waves in the signal by the ESTER criterion, an effect which appears to be stronger between modal frequencies. The spatial decay estimation is affected by this plateau effect too, the relative error converging to a value of 3%, below a SNR of 2000. By comparison, the error of the estimation of  $k$



with the IWC method reaches a plateau too, which is higher (0.9% of relative error) and related to its resolution limitation. Furthermore, the Mc Daniel method shows a uniform convergence rate, with a relative error fifty times smaller than the noise ratio on  $k$  ( $\Delta k/k \approx (50 \text{ SNR})^{-1}$ ) and twenty times larger on the spatial decay ( $\Delta \gamma/\gamma \approx 20 (\text{SNR})^{-1}$ ). In Fig. VI.5b, the same data has been plotted, but for a higher frequency of 4400Hz which coincides with a modal frequency (see Fig. VI.4, top frame, marker b), where the three methods provides a *good* estimation of the real part of the wavenumber. Here, the plateau reached by the HRWA error is much lower ( $\approx 6 \times 10^{-5}$  of relative error) than in the previous case. The HRWA, before this plateau, shows the same convergence rate as Mc Daniel method, both for  $k$  and  $\gamma$  estimation. It has to be noted that IWC method, in this case, estimates the spatial decay with approximately 15% of relative error.

The plateau effect of HRWA shown previously is due to the possibility given to the ESPRIT algorithm, to select the number of waves in the signal (thanks to the ESTER criterion), and by making no assumption on a relation between each wavenumber. This is the main difference with Mc Daniel method's signal model, which confers to this last method its stability against the noise level, when only bending waves are present. However, this plateau appears below 1% of relative error on the real part of the wavenumber and 10% of relative error on the spatial decay, which is are good estimations, altogether.

## VI.6.2 Comparison of Computation Times

In addition to noise sensitivity, the computation time of each method has been investigated. As these methods extract wavenumbers from one single frequency component, the computation time is independent from frequency. It is only dependent on the size  $N$  of the measurement mesh. From 10 to 1000 measurement points have been exported from the synthesised forced response's shape. The computation time has been averaged on 20 frequency points and 10 iterations. The results of the study are plotted in Fig. VI.6.

This figure illustrates the advantages of HRWA in terms of computational cost : it is, depending on the mesh size, five to twenty times faster than the two other methods. This makes wavenumber analysis suitable for real-time applications, such as structural health monitoring. The computational cost of Mc Daniel and IWC methods is mainly caused by the amount of iterations needed in the two dimensional non-convex minimisation problem in  $\mathbf{k}$ .

## VI.7 Experimental Results

An experimental application is performed on a simple rigid PVC (polyvinyl chloride) beam. The beam's section is square of side 15mm, and its length of 1m. The velocity is measured with a Doppler laser vibrometer along a regular mesh of 500 points over the top surface of the beam. Consequently, the mesh is shifted from the beam neutral axis ( $y \neq 0$  in Eq. (VI.2.1)). Hence both bending and twist motion contributes in the measured velocity. A shaker is fixed at one end of the beam ( $(x_F, y_F, z_F) = (0, -b/2, -h/2)$ , see Fig. VI.1), whereas the other end is supported by a silicon block.

A first measurement is performed with an impulse excitation, achieved by sending an electrical pulse to the shaker. A second measurement is made with a random noise excitation filtered between 5 kHz and 22 kHz. In both cases, the frequency response is estimated from the average of 20 realisations, respectively below 6 kHz and between 5 and 22 kHz. For both experiments, a sampling frequency of 50 kHz was used.

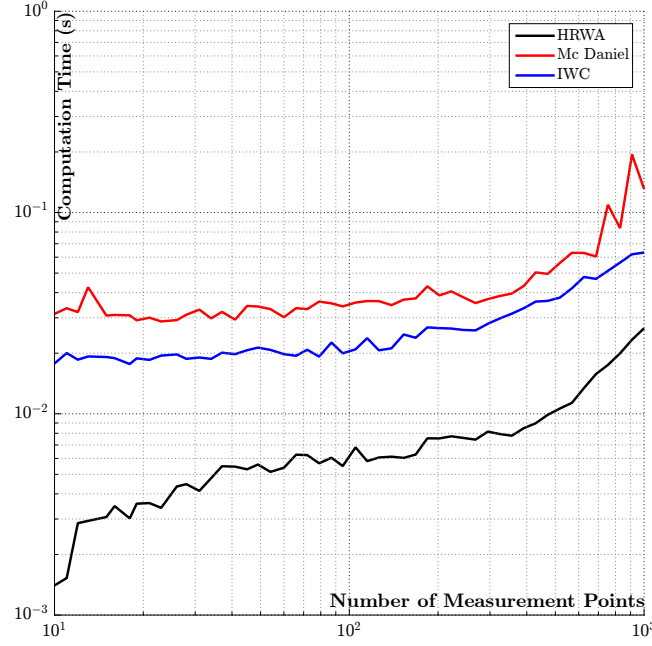


FIGURE VI.6 – Computation time of each wavenumber identification method as a function of the measurement mesh size, averaged on 200 wavenumbers extractions. Comparison between methods.

The HRWA is applied to the computed frequency transfer estimator  $H1$  between the measured velocity and the electrical excitation signal (no force measurement). As the measurement mesh is shifted from the neutral axis, it contains both the bending and twist motion's contributions. Fig. VI.7a shows the HRWA results, for both excitation type. It shows that the HRWA is able to identify both bending (blue) and twist (red) wavenumbers, at each frequency. It can be observed that both the real and imaginary parts of the identified wavenumbers are independent of the excitation type : the wavenumbers extracted in the overlapping frequency band (between 5Hz and 6kHz) are identical. By combining different excitations, a wavenumber extraction can be achieved in a very wide frequency domain. The minimum identified wavelength  $\lambda = 2\pi/k$  is approximately 3.7 cm, which means that at least 18 measurement points are contained in each wavelength. Following the Nyquist criterion, a coarser measurement mesh could have been taken ( $\approx 8$  times less points). However, taking a finer mesh improves the identification accuracy, as the parameter identification is made in the least-square sense (Eq. (VI.5.6)).

Observing the wavenumber dependence as a function of frequency, two dispersion branches can be built, related to the bending and to the twist motions. Within the frame of the Euler beam theory, one can connect wavenumbers to the Young and shear moduli according to Eq. (VI.2.7). The results of the identification of the *apparent* Young modulus  $E^{\text{eul}}$  (in blue, from bending branch) and shear modulus  $G$  (in red, from twist branch) are shown in Fig. VI.7b (with  $\kappa = 0.845$  for a square section and the PVC density  $\rho = 1380 \text{ kg/m}^3$ ). The low-frequency estimation is noisier because of the plateau effects of the HRWA related to the modal behaviour of the beam (see preceding section). As the frequency increases, the beam's response tends to be smoother and the number of spatial periods increases, leading to a better wavenumber estimation.

The dependency on frequency of the identified complex apparent Young modulus  $E^{\text{eul}}$  is mainly due to the transverse shear effects generated by the bending motion, that increases with

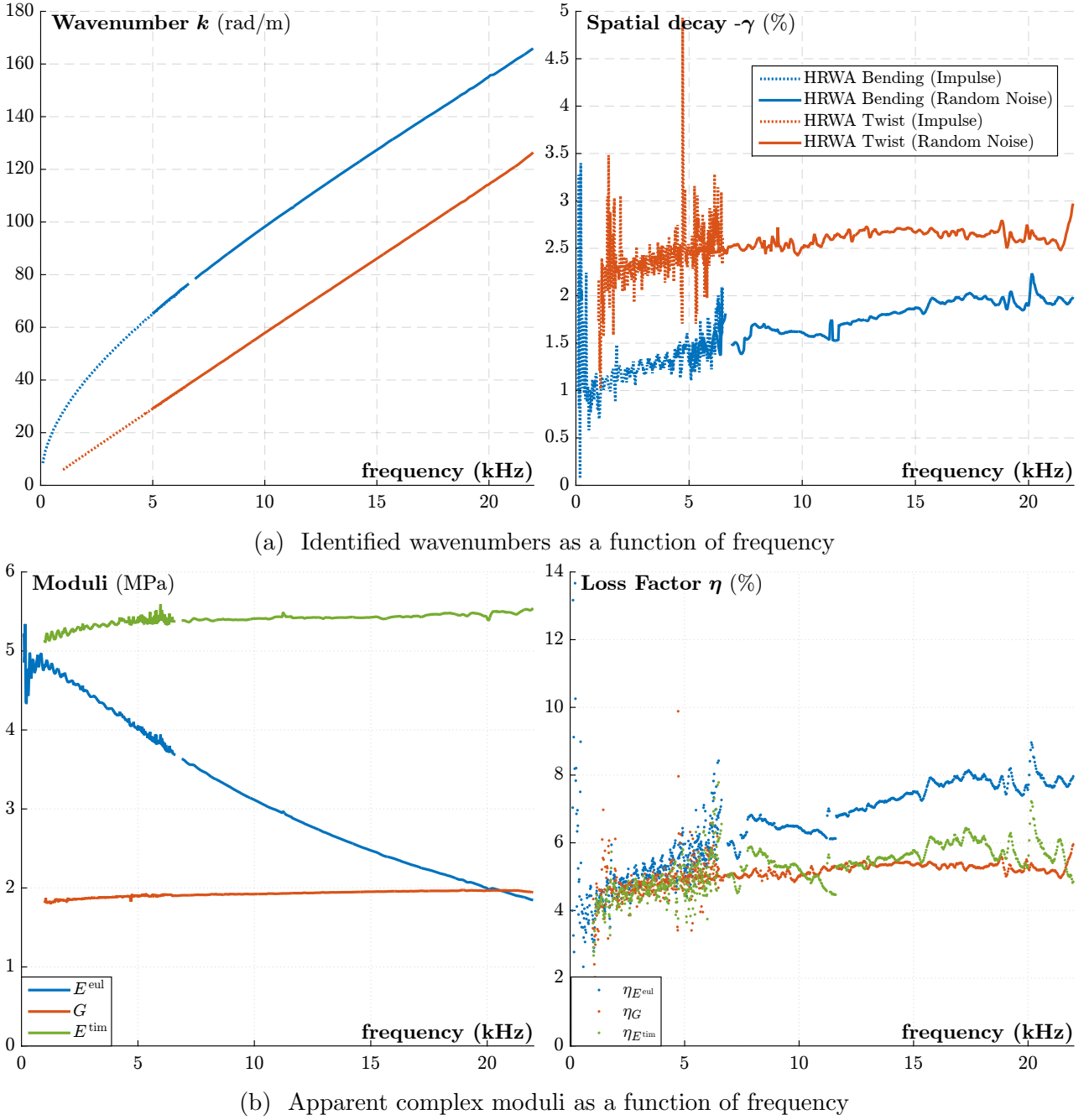


FIGURE VI.7 – Experimental application of the HRWA to a PVC beam of length  $L = 1$  m and square section of side  $h = b = 15$  mm, for frequencies between 0 and 22 kHz. (a) Identification of wavenumbers on the measured beam with the proposed HRWA, for two excitation types : impulse (dashed lines) and steady noise (solid line). Bending wavenumber  $k_b$  (blue) and twist wavenumber  $k_t$  (red). (b) Apparent complex moduli identification from the extracted wavenumbers : With the Euler model ( $E^{\text{eul}}$  (blue) and  $G$  (red) from Eqs. (VI.2.7)) and the Timoshenko model ( $E^{\text{tim}}$  (green) from Eq. (VI.2.11)).



the frequency. To explain these effects, one can use the equivalent slenderness ratio defined in Eq. (VI.2.8). At low frequencies, this ratio is large ( $\mu(100 \text{ Hz}) \simeq 42$ ) and the beam behaves as a thin beam. As the frequency increases,  $\mu$  decreases ( $\mu(5 \text{ kHz}) \simeq 6.5$ ,  $\mu(20 \text{ kHz}) \simeq 2.7$ ) and the beam behaves as a thick beam. In order to take these effects into account, the Timoshenko model is used to better estimate the Young modulus. By injecting the identified shear modulus  $G$  in the equation (VI.2.11) leads to the estimation of an other Young modulus,  $E^{\text{tim}}$  (in green). The result is shown on Fig. VI.7b in yellow. It can be observed that the identified modulus is almost constant ( $\simeq 5.5 \text{ GPa}$ ) in the considered frequency range. The resulting Poisson ratio is estimated as  $\nu = E/(2G) - 1 \simeq 0.4$ . In addition, the identified Young loss factor  $\eta_{E^{\text{tim}}}$  seems very close to the shear loss factor  $\eta_G$ .

## VI.8 Conclusion and Perspectives

A common framework for wavenumber extraction methods has been presented and the *High Resolution Wavenumber Analysis* has been proposed. This new method aims at overcoming three following drawbacks of the IWC and the Mc Daniel methods : (a) IWC suffers from resolution limitations (b) the nonlinear wavenumber search problem is computationally heavy and (c) the number of identified waves is fixed and small.

The HRWA procedure includes a linear search of wavenumbers. Thus, the computation cost is reduced and the wavenumber identification is free from any initialisation. Moreover, it allows an automated determination of wavenumbers in a noisy signal without *a priori* assumption on their number. The detected waves are not limited to bending waves but can be associated with twist, compression, shear, etc.

Firstly, numerical investigations and comparisons of HRWA with the two other methods has been led in simple cases, including that of a thin prismatic Euler beam. When only bending waves are present, the *Mc Daniel method* can be taken as a reference method. In this simple case, this method is the least sensitive to noise. The IWC method fails to identify a spatial decay, in the frequency band studied. The HRWA exhibits a convergence rate as function of the signal to noise ratio comparable to the Mc Daniel method ( $\Delta k/k \approx 0.02 \text{ SNR}^{-1}$ ), with certain fluctuations for a very precise determination of the real part of the wavenumber (0.1% of relative error). These fluctuations are mainly due to the fact that the method has no *a priori* assumptions with regard to the number of wavenumbers present in the signal, as opposed to the Mc Daniel method. The spatial decay has a reduced influence on the measured beam harmonic response, compared to the real part of the wavenumber. Therefore, its determination is more sensitive to noise. An estimation with a relative error of 10% can be achieved with both Mc Daniel and HRWA methods, for good signal to noise ratios ( $\text{SNR} > 100$ ). Moreover, the comparison of computational times shows that HRWA can be twenty times faster than the two other methods.

Secondly, the HRWA has been applied to experimental data. It emphasises the ability of the HRWA to simultaneously identify apparent complex Young and shear modulus, as a function of frequency, independently from boundary conditions or excitation type. Identified with the Euler model, the Young modulus vary in frequency. To account for the out-of-plane shear and rotary inertia effects, the Timoshenko model is finally used and leads to the identification of a Young modulus which is almost constant in the frequency range of interest.

It has been observed that most of the identification errors of the HRWA results are related to a wrong signal order estimation. Indeed, the ESTER criterion performs well only if the signal model is correct. In order to improve the robustness of the HRWA, other signal order selection

criterion could be investigated. For example, the use of a stabilisation diagram [18, 178] to estimate the order of the signal could improve the accuracy of the wavenumber estimation, at the price of a reasonable increase of the computational burden.

At this point, it appears clearly that no hypothesis has been made on the nature of the waves : the HRWA is not limited to the simple beam models presented here. For example, a different section or material configuration may induce coupled strain mechanisms and coupling the characteristic in equations (VI.2.2) and (VI.2.3). The detected wavenumbers would be different, but still be representative of the structural behaviour, reasonably far from the boundary conditions.

The present paper is focused on material characterisation but the HRWA can also be used for the identification of boundary conditions (not presented here). Moreover, multidimensional versions of ESPRIT [188] and ESTER [127] have been developed and can be applied to the experimental identification of wavevectors in the harmonic response of plates. This will be the object of a forthcoming paper.

## Acknowledgments

This work is part of the ANR founded (french National Research Agency) project MAESS-TRO (*ModélisAtion Et Synthèse Sonore pour Tables d’haRmonie de pianO*, ANR-14-CE07-0014). The authors thank Kerem Ege for his precious help on high-resolution signal processing methods.



## Chapitre VII

# High Resolution Wavevector Analysis

### Résumé

Ce chapitre reproduit un article soumis au **Journal of Sound and Vibration** et intitulé *The High-Resolution Wavevector Analysis for the characterization of the dynamic response of composite plates*. Il est donc en anglais. L'analyse en vecteur d'onde présentée consiste également en une **application de la méthode ESPRIT** présentée au chapitre [IV](#).

La méthode d'**analyse en vecteur d'onde haute résolution** (HRWA) est présentée et son application illustrée. Par l'extension de l'analyse en nombre d'onde aux **signaux bidimensionnels**, cette analyse permet la caractérisation **large bande** du comportement élastique des **plaques anisotropes multicouches**. Après une présentation de la méthode, trois applications expérimentales sont proposées, intéressées par la caractérisation de diverses plaques composites.

Tout d'abord, la mesure du champ de déplacement transverse d'une plaque sandwich constituée d'une âme en mousse et de peaux en carbone est traitée par la méthode proposée. **Différents types d'onde sont extraits et séparés** : modes de flexion et modes de membrane. Les données expérimentales obtenues sont **comparées avec les résultats d'un schéma éléments finis spectraux**, permettant de juger de leur pertinence et d'interpréter leur dépendance en fonction de l'angle de propagation des ondes et de la fréquence. Ensuite, le cas d'une plaque sandwich dont l'âme est une **structure type nid d'abeille** est illustré. Les **contributions des couches individuelles** sont séparées. Un phénomène d'augmentation rapide de l'amortissement est également observé, assimilé au **phénomène de band-gap**. Enfin, le cas d'une **plaque stratifiée hétérogène** est abordé. La possibilité de réaliser une **extraction locale des vecteurs d'onde** est montrée. Celle-ci permet finalement de formuler une méthode dédiée à l'**estimation des composantes du tenseur des raideurs en flexion spécifique local**. les résultats obtenus sont comparés à des valeurs théoriques.

## VII.1 Introduction

An advanced knowledge of the dynamical behavior of composite materials is needed for a number of applications, ranging from damage identification [214, 104, 102, 84] to material replacement [163, 61] or structural optimization [92, 144, 235]. More specifically, the non-destructive evaluation (NDE) of the linear viscoelastic dynamical behavior of composite structures is an active research field [218].

The whole spectrum of frequencies for which composite structures has to be characterized is usually divided in three regions : (i) the low frequency regime, where the response of the structure can be well described by a reduced number of modes ; (ii) the high frequency regime, where the wavelength is so small that the structure can be considered infinite ; (iii) the medium frequency regime in which the modal overlap is high and boundary conditions cannot be neglected.

Usually, NDE techniques involves modal analysis in low frequencies [70, 174, 28] while ultrasonic testing is performed in the high frequency regime [48, 105]. In the last decades, the development of full-field measurement techniques (i.e high-speed cameras [52, 22] or scanning Doppler laser vibrometers [187, 19]) allowed for the development of NDE methods that perform well in the medium frequency range. Among these methods, some are based on the knowledge of the properties of the field. One example is the Force Analysis Technique [1, 118, 73] where the partial derivatives of the field are estimated by means of finite difference schemes. Hence they are injected in the governing equations of a structure model to identify its parameters. The variationnal formulation of such approach is the Virtual Fields Method [24, 164], which uses test functions with the principle of virtual works to characterize the structure.

Some other medium frequency methods approximate the measured field with a set of functions. The parameters of these functions usually contains key data for the identification of the structure. For example, Hankel functions are used with the Image Source Method (ISM) to characterize isotropic plates in the steady harmonic regime [60, 184]. As the Green functions of anisotropic plates are not analytic anymore, plane waves are used to approximate the field measured on composite plates. A method based on this principle is the Inhomogeneous Wave Correlation (IWC) method [27, 53].

The latter type of methods is focusing on the identification of guided waves propagating in plates. Indeed, in the medium frequency range (i) the wavelength can be considered large compared to the plate thickness and (ii) the sources as well as the boundary conditions can be considered far enough from the observed location to have a reduced impact on the geometry of the wavefront. Hence the plate can be considered as a waveguide : the wave propagation direction is confined in the plane of the plate and the wavefront is be assumed to be contained in a plane orthogonal to the plate. Under these assumptions, it is possible to derive the dispersion equation relating wavevectors to the frequency directly from the constitutive materials and the lay-up of the composite plate (see for instance [202]). It turns out that the parameters of plane waves travelling in a plate (the complex wavevectors and the amplitudes of the corresponding waves) can be extracted from a full-field measurement of the plate steady harmonic response. Such extracted wavevectors reflect the dispersive properties of the plate. By means of an inverse problem, some of its mechanical properties may be identified from experimentally extracted wave parameters. Contrary to modal analysis, the smaller sensitivity of the procedure to boundary conditions and sources makes it a good candidate for in-situ evaluation of structures, when the geometry and the applied loads are not completely known.

The IWC method can be summarized as follows. At a given frequency, a distribution of

wave propagation angles is chosen *a priori*. For each given angle, a trial plane wave can be synthesized with a complex wavenumber as parameter. The wavevector is then searched as the complex wavenumber that maximizes the correlation coefficient between the measured plate harmonic response and the synthesized wave. Consequently the identification problem leads to a non-linear optimization scheme, that has to be solved for each wave propagation direction, with the real and imaginary part of the complex wavenumber as optimization parameters. As it is closely related to the Fourier transform, it suffers from the same limitation in terms of wavenumber resolution. This limits the accuracy of the wavevector extraction when only a few wavelengths are contained in the signal. Moreover, as the distribution of the wave propagation angles is fixed *a priori*, the method may return invalid results, when actually no wave propagates in the searched direction.

In the past few decades, some improved signal processing methods suited for the extraction of the complex poles (decaying exponentials) of a measured signal have been developed, such as MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) [199], Matrix Pencil [98] and ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [189]. Built on a signal model, these methods are named *high-resolution*, in the sense that they overcome the intrinsic resolution limitation of the Fourier transform. In particular, the ESPRIT algorithm takes advantage of an invariance property of the signal model to express the wavenumber extraction as the solution of a closed-form problem. In addition, it makes use of the subspace-decomposition technique [225] which allows to predict the *signal order* (number of waves contained in the signal). Subspace-based methods are widely-used in linear system identification, using for example the state-variable framework [90, 225]. Another example is the ERA [100] (*Eigenvalue Realisation Algorithm*), which is devoted to the identification of the modal parameters of a measured system. A wide range of applications of the ESPRIT algorithm can be found in array processing and radar applications [200, 188], audio processing [74, 13], characterization of structures through modal analysis [70, 174, 73], musical acoustics applications [51, 46, 71, 77] and high-resolution spectral analysis [15]. To be fully efficient, the ESPRIT algorithm must be combined with a criterion dedicated to the estimation of the signal order, such as the ESTER criterion [14] (ESTimation of ERror)

In a recent article [? ], the authors proposed the High Resolution Wavenumber Analysis method (HRWA). Using the ESPRIT algorithm with the ESTER criterion, it allows to extract wavenumbers in the harmonic response of a beam. From these wavenumbers, some equivalent mechanical properties of the beam can be identified. The enhanced performances of this experimental wavenumber-based characterization method are demonstrated : the frequency range of validity is wider, a number of beam motions can be separated (bending and twist), and the wavenumber extraction is faster than in existing methods. However, its application is limited to wavenumber extraction in 1D structures.

In the present work, the method is extended in order to be applied on 2D signals thus is renamed High-Resolution *Wavevector* Analysis. At a given frequency, it assumes that the harmonic response of a plate is a finite sum of decaying plane waves. Using the 2D version of the ESPRIT algorithm [188], the complex wavevectors are extracted from the measured harmonic response of a plate (e.g. velocity or displacement field), or a portion of its domain. The signal order is estimated thanks to the 2D version of the ESTER criterion [126]. In comparison to Fourier based wavevector estimation methods, the high-resolution properties of the ESPRIT algorithm allow the extraction of wavevectors in low frequencies, where the wavelengths are usually large. In addition, the size of the observation window (partial zone of the measured plate field used as input) can be reduced to extract local wavevectors that can be used to

characterize a local plate behavior. The automated estimation of the signal order allows the identification and the separation of multiple wave types : bending, shear or longitudinal waves. No assumption has to be made on the distribution of the wave propagation angles, as these angles are part of the estimated parameters. Finally, by formulating the wavevector extraction problem as a closed-form problem, no optimization scheme is involved and thus the wavevector extraction is computationally efficient and robust.

When the method is applied on beams [?] the signal model corresponds exactly to the harmonic response of the structure, as long as it can be considered as a waveguide in the frequency range of interest. In two dimensions, the wavefront is not necessarily a straight line. Therefore, the local 2D signal may not be represented exactly by a finite sum of decaying plane waves. The influence of this approximation on the extracted wavevectors is not clear at this time. It has been experimentally observed that the impact of a non-straight wavefront is mostly contained in the imaginary part of the extracted wavevectors. As a consequence, a criterion based on the spatial decay of the extracted waves is proposed to discard the wavevectors with a dominant imaginary part and thus diminish the influence of the signal model approximation error on the identification results.

The paper is organized as follows : in the first section the HRWA is presented. In the second section, several experimental applications of the method to different composite plates are presented to illustrate its possibilities. First, from an orthotropic sandwich plate, several kinds of waves are extracted (bending, in plane shear and compression), and the results are compared to numerical predictions. Second, on a honeycomb sandwich plate, the bending waves are studied and a particular frequency-dependent anisotropic behavior is observed, related to the mechanical properties of individual layers. Third, a local wavevector extraction is performed on a spatially inhomogeneous composite plate made of 36 patches with various fiber orientations. Using the Classical Lamination Theory, an inverse problem is formulated, leading to the identification of the equivalent specific bending stiffness of the plate at many different patch locations. The potential of the method to identify local structural behaviors, given by fiber direction, stacking sequence and material properties is illustrated.

## VII.2 High Resolution Wavevector Analysis

Both ESPRIT algorithm and ESTER criterion are well-established in the signal processing community [188, 190]. As a consequence, minimal details about them are given in this section. However, both algorithms are developed in VII.5.1 in order to give all the content needed for the implementation of the HRWA.

Along this paper, the HRWA is applied to the harmonic response of a plate. Basically, a collection of harmonic response fields can be obtained by computing the Fourier transform of the measurement of the time-dependent response field of a plate. The wavevector extraction procedure is then performed for each given frequency. For the sake of readability, the dependence on  $\omega$  is omitted in the following, unless required for clarity.

### VII.2.1 Signal model

The harmonic response field  $s(\mathbf{x})$  of a plate, or a sub-domain of a plate, is modeled as a sum  $u(\mathbf{x})$  of  $R$  plane waves and some uncorrelated noise  $b(\mathbf{x})$ . The signal model is expressed as



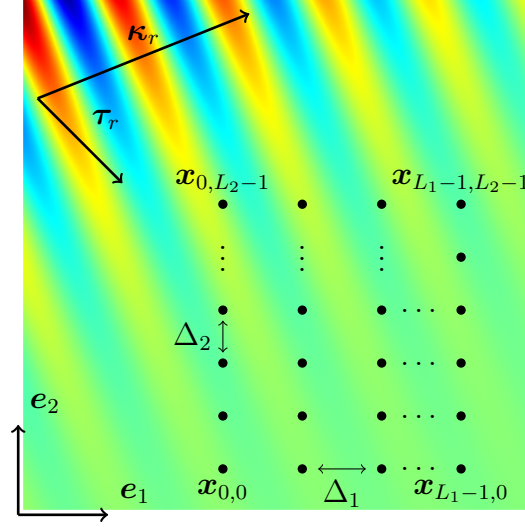


FIGURE VII.1 – Schematic representation of a measurement mesh grid  $\mathbf{x}_{nm}$  suited for the HRWA. A decaying plane wave is represented, with its complex wavevector  $\mathbf{k}_r = \boldsymbol{\kappa}_r + \mathbf{i} \boldsymbol{\tau}_r$ .

follows :

$$s(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^R a_r e^{i \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x}} + b(\mathbf{x}) \quad (\text{VII.2.1})$$

where  $R$  is the *signal order* and the  $a_r$  are the complex amplitudes related to the waves. The related complex wavevector  $\mathbf{k}_r$  is written as :

$$\mathbf{k}_r = k_{1,r} \mathbf{e}_1 + k_{2,r} \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}_r - \mathbf{i} \boldsymbol{\tau}_r \quad (\text{VII.2.2})$$

where the two complex numbers  $k_{1,r}$  and  $k_{2,r}$  are the wavenumbers in each dimension of the signal (see Fig. VII.1). The phase velocity vector  $\mathbf{c}$  can be retrieved from the wavevector and the frequency :

$$\mathbf{c}_r = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_r|^2} \mathbf{k}_r^* \quad (\text{VII.2.3})$$

as well as the wavelength vector :

$$\boldsymbol{\lambda}_r = \frac{2\pi}{|\boldsymbol{\kappa}_r|^2} \boldsymbol{\kappa}_r \quad (\text{VII.2.4})$$

where  $\bullet^*$  denotes the complex conjugate.

The decay of the plane waves along their propagation is related to the imaginary part  $\boldsymbol{\tau}_r$  of the wavevector. Since the decay is not necessarily maximum in the wave propagation direction [9], the real and imaginary parts  $\boldsymbol{\kappa}_r$  and  $\boldsymbol{\tau}_r$  of the complex wavevector are not necessarily colinear. However, it is of common use to define the spatial decay ratio  $\gamma$  :

$$\gamma_r = \frac{|\boldsymbol{\tau}_r|}{|\boldsymbol{\kappa}_r|} \quad (\text{VII.2.5})$$

The extracted spatial decay may have several causes. Indeed, three main contributions can be expected : the first contribution is the energy loss along the propagation of the wave, due to viscous materials or fluid-structure interaction. Second, some evanescent waves are present close to boundaries, accounting for the boundary conditions. Third,  $\boldsymbol{\tau}_r$  is influenced by the



geometry of the sources. For example, a point source located at  $\mathbf{x}_p$  in an isotropic conservative plate generates a circular wavefront with a spatially-dependent amplitude  $a_r(\mathbf{x}) \propto |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^{-1/2}$ , which has an influence on the identified wave decay. Evaluating how these effects contribute to  $\tau_r$  is beyond the scope of this article. Therefore, the imaginary part of the extracted wavevectors is not considered in the applications of the HRWA presented in this paper, except when the signal corresponds closely to a plane wave (see 3.2).

### VII.2.2 Regular grid mesh of measurements

In order to be able to apply the 2D ESPRIT algorithm [188] (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariances Techniques), the signal  $s(\mathbf{x})$  has to be measured along a 2D regular mesh grid  $\mathbf{x}_{nm}$  of step  $\{\Delta_1, \Delta_2\}$  (see Fig. VII.1) :

$$\mathbf{x}_{nm} = \mathbf{x}_{00} + n \Delta_1 \mathbf{e}_1 + m \Delta_2 \mathbf{e}_2 \quad (\text{VII.2.6})$$

with  $(n, m) \in \llbracket 0, L_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, L_2 - 1 \rrbracket$ . The signal matrix  $\mathbf{S}$  is formed with the acquired data :

$$S_{nm} = s(\mathbf{x}_{nm}) \quad (\text{VII.2.7})$$

and is processed by the ESPRIT algorithm (see VII.5.1.1).

Aliasing can lead to an ambiguity about the magnitude of the extracted wavevector. As a consequence, the Nyquist criterion has to be fulfilled to avoid ambiguities : each individual wave contained in the signal must have a wavelength larger than twice the grid spacing :

$$\begin{aligned} \kappa_r \cdot \mathbf{e}_1 &< \frac{\pi}{\Delta_1} \\ \kappa_r \cdot \mathbf{e}_2 &< \frac{\pi}{\Delta_2} \end{aligned} \quad (\text{VII.2.8})$$

### VII.2.3 Signal preprocessing

Before the application of the wavevector extraction procedure, additional preprocessing steps can be performed. Indeed, the subspace decomposition technique used by the ESPRIT makes the underlying assumption of the signal parsimony : it is assumed to be composed by a reduced number of eigenfunctions. As a consequence, only the dominant components in terms of energy (corresponding to the highest eigenvalues of the covariance matrix) are identified when noise is added to the signal. Hence only the waves with a high amplitude are extracted from the measurements.

However, waves with a lower amplitude may be separated in the spatial Fourier domain because of their distinct wavevector. In order to allow their identification, a spatial filtering can be applied to the signal  $\mathbf{S}$  by means of the convolution of a 2D Finite Impulse Response filter  $\mathbf{F}$  (FIR) with the signal :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} * \mathbf{F} \quad (\text{VII.2.9})$$

By tuning the filter parameters, it is possible to force the extraction of some wavevectors of interest. This preprocessing step, performed for the example of section VII.3.1, can be used to separate two wave types with distinct wavevectors.

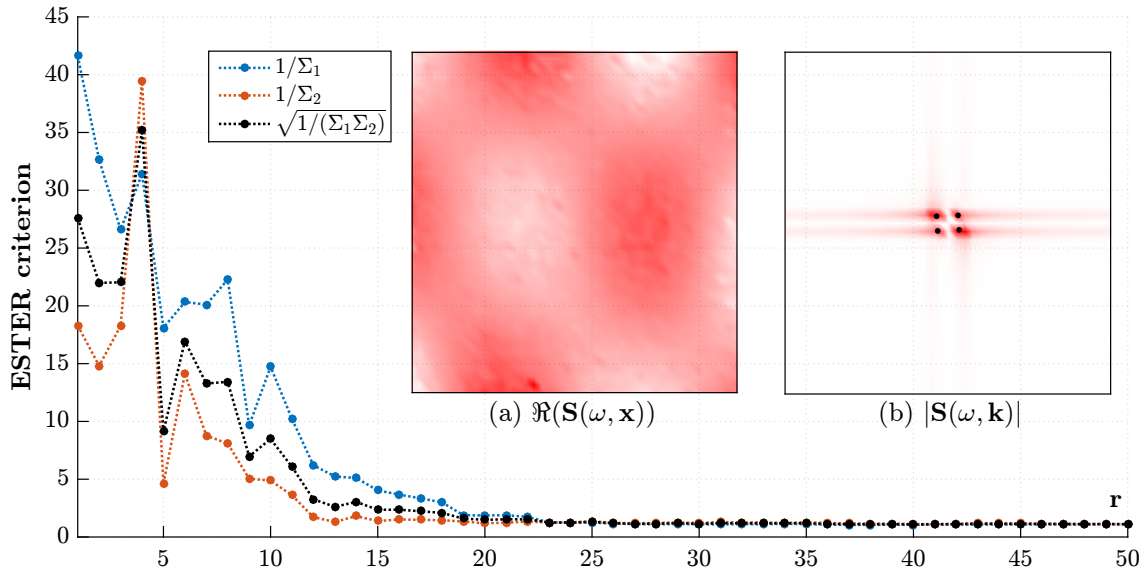


FIGURE VII.2 – Signal order estimation. The signal  $\mathcal{S}(\omega, \mathbf{x})$  (a) is measured on the orthotropic sandwich plate of section VII.3.1, at the frequency of 250 Hz. The ESTER criterion is computed (eqs. VII.5.15 and VII.5.16) for  $r \in \llbracket 1, 30 \rrbracket$ , and the signal order  $R$  chosen at the local maximum  $r = 4$ . Finally, four wavevectors are extracted with the HRWA (markers in (b))

#### VII.2.4 Wavevector extraction

In the ESPRIT algorithm (summarized in VII.5.1.1), the invariance properties of the signal are used to estimate the wavevectors thanks to matrix operations. As a consequence, the wavevector extraction is formulated as the solution of a closed-form problem. Knowing the signal order  $R$ , the application of the ESPRIT algorithm results in the identification of the parameters of  $R$  decaying plane waves. However, the signal order is unknown in practice. A wrong estimation of it would compromise the estimation of the wavevectors. For the estimation of the signal order  $R$  without *a priori* knowledge, Badeau [14] devised of the ESTER criterion (*ESTimation of Error*), for a 1D signal.

The ESTER criterion is based on the error made on the estimation of the invariance property of the signal by the ESPRIT algorithm, for a given signal order  $r$ . By estimating this error for  $r \in \llbracket 1, r_{\max} \rrbracket$ , the signal order  $R$  is chosen so that it minimizes the estimation error of the invariance property. Multidimensional extensions of this criterion have been proposed [126], computing the arithmetic or geometric mean of the errors in the different signal dimensions. Further details concerning the computation of the criterion are given in VII.5.1.2. In the signal order determination procedure, the higher hypothetical signal order  $r_{\max}$  has to be chosen. In practice, this parameter must remain low : a high  $r_{\max}$  would involve a high computational burden. All along the examples shown in this paper, the parameter  $r_{\max}$  has been chosen equal to 30.

Thanks to the ESTER criterion, which uses the same matrices as the ESPRIT algorithm, an automated estimation of the signal order  $R$  is obtained, if the truncation error is sufficiently contrasted.

The wavevector extraction procedure, implemented in order to achieve the High Resolution Wavevector Analysis, is summarized in VII.5.1.3. An example of application is illustrated in Figure VII.2. The procedure is applied to the harmonic response of the orthotropic composite

plate sample, studied in VII.3.1, at the frequency of 250 Hz (Figure VII.2.(a)). The ESTER criterion (inverse of the geometrical mean of the estimation errors) is computed for  $r \in \llbracket 1, 30 \rrbracket$  (Figure VII.2). A maximum of the criterion can be observed for  $R = 4$ . Finally, four wavevectors are extracted with the ESPRIT algorithm (dot markers in Figure VII.2.(b)).

### VII.2.5 Wavevector selection

Most of the energy related to *nearly* evanescent waves (such that  $|\boldsymbol{\tau}_r| > |\boldsymbol{\kappa}_r|$ ) is contained in the boundary layer close to sources and boundaries, which represents a small part of the overall processed signal. Also,  $\boldsymbol{\tau}_r$  is sensitive to noise. In addition, as discussed above,  $\boldsymbol{\tau}_r$  has several contributions that may be difficult to separate and may be related to signal model errors. As a consequence, a selection step can be performed to keep only the wavevectors with a dominant real part. Assuming an *equivalent decay factor*  $\gamma_r$  Eq. (VII.2.5), a selection criterion is given :

$$\gamma_r \leq \gamma_{\max} \quad (\text{VII.2.10})$$

This strategy can be used when the observed zone of the plate is small, or close to any source or boundary, where spurious evanescent waves may be present. It is applied in the local wavevector extraction performed in section VII.3.3, with  $\gamma_{\max} = 10 \%$ .

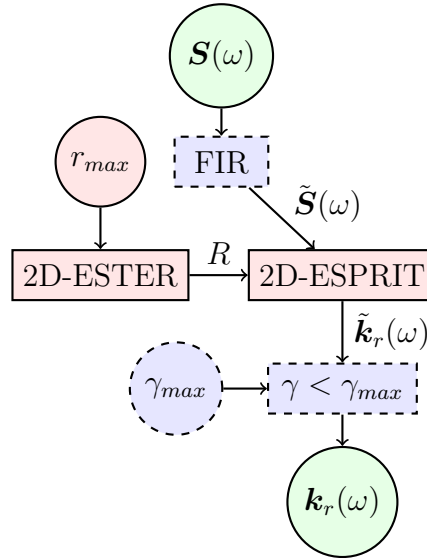


FIGURE VII.3 – Block diagram of the HRWA. Optional processing steps are in blue.

A block diagram representing the High-Resolution Wavevector Analysis steps is shown in Figure VII.3. The procedure can be summarized as follows : The harmonic response field  $s(\omega, \mathbf{x})$  of a plate, or a subpart of a plate, is measured on a regular grid of points  $\mathbf{x}_{nm}$  (Eq. (VII.2.6)), giving the signal matrix  $\mathbf{S}(\omega)$  (Eq. (VII.2.7)). Before the application of ESPRIT algorithm, some spatial filtering can be achieved (Eq. (VII.2.9)) to separate different kinds of waves which wavevectors are distinct. Next, the wavevector extraction procedure (see VII.5.1.3), performed at a given frequency  $\omega$ , leads to the extraction of a discrete spectrum of  $R$  complex wavevectors  $\mathbf{k}_r$  (Eq. (VII.2.2)), where  $R$  depends on the frequency. Finally, in order to characterize the properties of the plate with a good accuracy, the evanescent wavevectors can be discarded (Eq. (VII.2.10)).

Material	Thickness	$E_L$	$E_T$	$G_{LT}$	$\nu_{LT}$	$\rho$
HD PVC Foam	5.2 mm	80 MPa	80 MPa	32 MPa	0.25	86 kg/m <sup>3</sup>
Prepreg Carbon	150 $\mu$ m	120 GPa	6.5 GPa	3.5 GPa	0.35	1300 kg/m <sup>3</sup>

TABLE VII.1 – Indicative mechanical properties of the materials of plates.

Finally, from the collection of obtained wavevectors at all frequencies, discrete experimental dispersion laws are obtained, which contain the signature of the local plate behavior.

In comparison with Fourier-based wavevector extraction analysis, the HRWA presents some improvements :

1. *High-resolution* : the HRWA overcomes the resolution limitations of Fourier-based methods. This improvement allows for the extraction of plane waves of which wavelength is comparable or even larger than the observing window size. As a consequence :
  - (a) the low-frequency limit of wavevector-based observations is reduced, allowing for the characterization of plates in a wide frequency range, from the first modal frequencies and without *a priori* limitation on high frequencies (as long as it can be considered as a waveguide).
  - (b) the observation window can be reduced to characterize local plate behavior by means of locally extracted wavevectors. Plates with slowly spatially varying mechanical properties can be characterized.
2. *Automated signal order choice* : thanks to the ESTER criterion, the number  $R$  of waves necessary to approximate the signal is estimated, in the range  $\llbracket 1, r_{\max} \rrbracket$ . As a consequence :
  - (a) the wave propagation direction distribution is directly identified :  $2R$  poles are extracted simultaneously and paired to form wavevectors, with given propagation directions.
  - (b) multiple wave types (e.g. bending, in-plane motions) can be separated. This allows for the characterization of multiple plate strain mechanisms.
3. *Linear problem* : The wavevector extraction is formulated as a closed-form problem. As a consequence :
  - (a) the robustness of wavevector extraction is ensured.
  - (b) no assumption is needed on the wavevector nature (real, complex, real and imaginary part colinearity) or on their number.

## VII.3 Applications

Throughout three application cases, this part illustrates the interest of the HRWA as a characterization tool of the linear dynamic behavior of composite plates. The plates have been fabricated at the Navier laboratory : two homogeneous sandwich plates with Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) skins and different core materials (HD PVC foam for plate 1 and Honeycomb for plate 2), and one inhomogeneous 4-layer laminated CFRP plate consisting of 36 spatially distributed patches with varying fiber directions. Carbon prepreg was used. The in-plane mechanical engineering constants of the materials, identified with static tensile tests, are summarized in Table VII.1.

For all plate specimens, the out-of-plane velocity field was measured along regular grids with a Scanning Laser Doppler Vibrometer (SLDV model Polytec PSV-400). The instantaneous

velocity of the surface of the plate is measured by repeating the experience for each point of the grid. A stationary signal (band pass filtered noise) has been used as excitation signal, in order to stimulate a wide range of frequencies. To improve the signal to noise ratio, the transfer function between the measured velocity and the electrical signal is taken. Furthermore, multiple realizations of the measurement are performed at each point. The average over the realizations is taken as data to build the signal matrix.

### VII.3.1 Sandwich Plate with foam core

#### VII.3.1.1 Plate Configuration

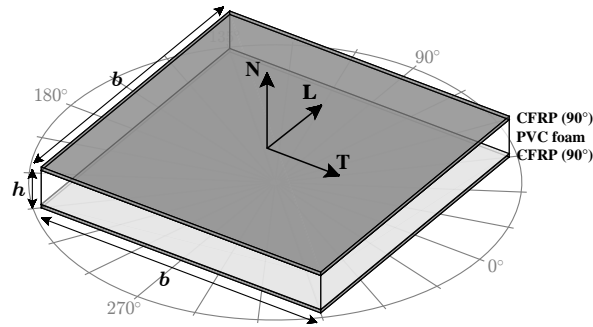


FIGURE VII.4 – Orthotropic sandwich plate with HD PVC foam core. Scheme of the plate stacking. The two CFRP skins are oriented at  $90^\circ$ .  $h = 5.5$  mm,  $b = 60$  cm.

The first experimental study focuses on the characterization of a sandwich square plate of 60 cm side, with a High Density PVC foam core and two thin carbon skins of one layer each. The fibers are oriented in the  $90^\circ$  direction. A scheme of the plate is shown in Figure VII.4. Indicative material properties of the HD PVC foam and carbon prepreg are summarized in Table VII.1. Only in-plane engineering constants are shown : out-of plane constants can be deduced for the HD PVC core, which is isotropic. The transversely isotropic carbon prepreg is used for the skins (assuming  $\nu_{TT} = 0.3$ ), in which in-plane strains and stresses are dominant. This particular sandwich plate architecture is chosen because of its high anisotropy and the high contrast between the stiffness of its core and skins. In addition, it is homogeneous in the plate directions, which allows the comparison of experimental results with numerical predictions of the propagation of plane waves in multilayered plates.

#### VII.3.1.2 Measurement setup

The plate is excited simultaneously by a shaker and a piezoelectric disk attached at opposite corners in order to excite a wide range of frequencies : from 100 Hz to 40 kHz. The measuring grid is  $175 \times 175$  points ( $\Delta = 3.4$  mm), fulfilling the Nyquist criterion (Eq. (VII.2.8)) at the higher observed wavenumber ( $k_{\max} \approx 600$  rad.m $^{-1}$ ,  $\lambda_{\min} \approx 10$  mm from Eq. (VII.2.4)). Repeating the measurement 10 times at each point, the total measuring time duration is approximately two hours. After the computation of the time Fourier transform of the signal, 1600 plate harmonic responses are available, for frequencies between 100 Hz and 40 kHz.

### VII.3.1.3 SFEM scheme

In this section, the experimental HRWA results are compared with the results of a Spectral Finite Element Method (SFEM) scheme. Introduced by Shorter [202] for isotropic laminated plates, the SFEM has been extended to laminated plates made of orthotropic layers with arbitrary orientation [20]. A more general scheme, for waveguides of arbitrary cross-section, can be found in [21]. At a given frequency  $\omega$ , and for a given wave propagation angle  $\phi$ , the plate displacement field  $\mathbf{u}$  is assumed of the form :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_3) e^{i(\omega t - k(\cos(\phi)x_1 + \sin(\phi)x_2))} \quad (\text{VII.3.1})$$

The SFEM uses finite elements to compute the guided modes  $\mathbf{U}(x_3)$ , as the result of a quadratic eigenvalue problem in the wavenumber  $k$ . The SFEM predictions shown in this section are computed with the material properties in Table VII.1 as input. These properties are assumed independent from the frequency. The SFEM convergence has been verified in the frequency range of interest, with a mesh composed of 3 elements in each skin and 100 elements in the core (element length  $\approx 50 \mu\text{m}$ ).

### VII.3.1.4 Results

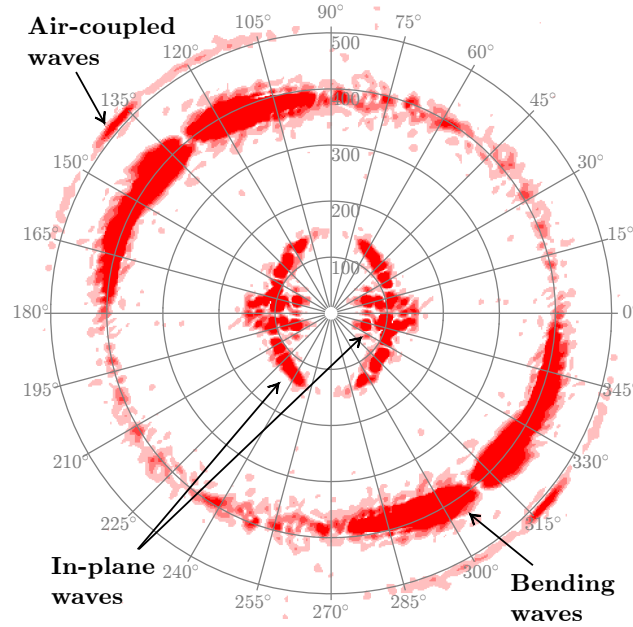


FIGURE VII.5 – Orthotropic sandwich plate with HD PVC foam core. 2D Fourier Transform  $S(\omega, \mathbf{k})$  of the measured harmonic velocity field, at 28 kHz, as a function of the wavevector.

Four wave types can be seen : in-plane (compression and shear), bending and air-coupled waves.

The result of a 2D spatial Fourier transform of the measured harmonic field, at the frequency of 28 kHz, is shown in Figure VII.5. Four high intensity regions can be distinguished and related to different wave types. From low to high wavenumber : two types of in-plane motion, bending motion, and air-coupled waves. More details are given in the discussion below.

This first study focuses on the conservative behavior of the sandwich plate. Since the damping is low in this plate, only the real part  $\kappa$  of each wavevector is taken into account in



Eq. (VII.2.3) to compute the vectorial phase velocity  $\mathbf{c}$  of each extracted wave. All the experimental results discussed below are extracted from the same collection of measured plate harmonic responses.

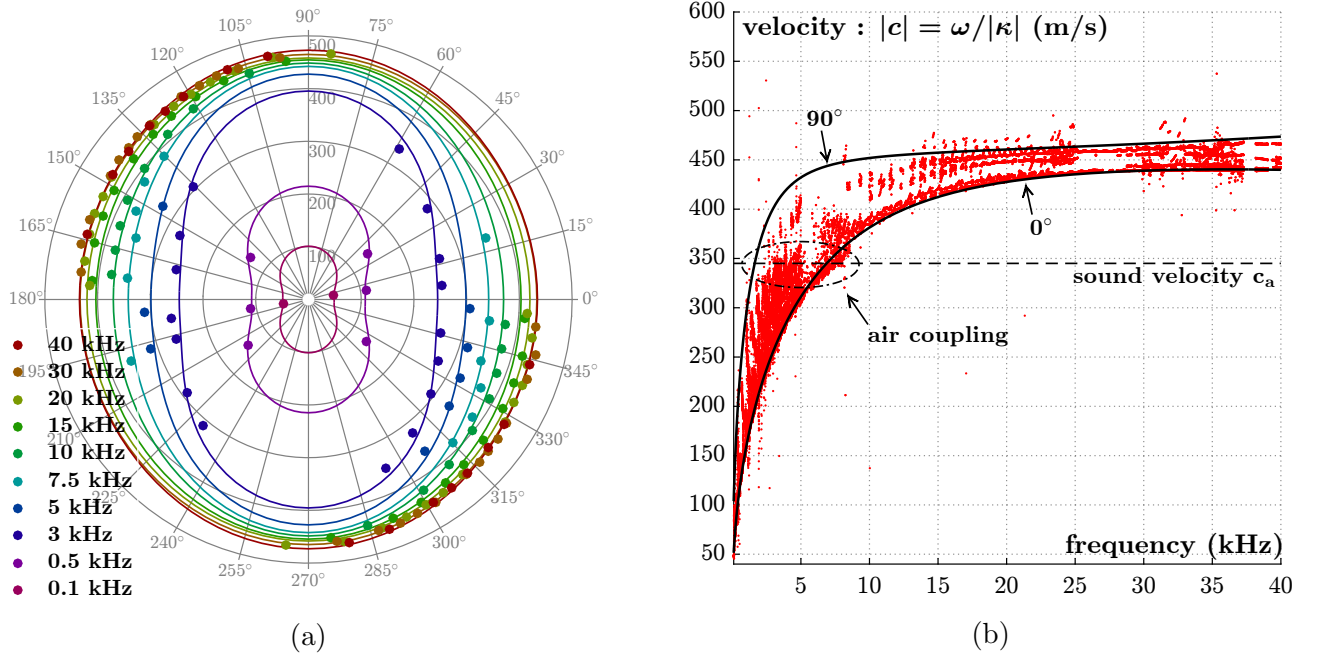


FIGURE VII.6 – Orthotropic sandwich plate with HD PVC foam core. Vectorial phase velocities  $\mathbf{c}$  of bending waves (m/s). Dot markers : HRWA results applied on measurements. Solid lines : numerical wavevector results computed with a SFEM scheme ([20]). (a) Phase velocities at 10 different frequencies between 100 Hz and 40 kHz, as function of the propagation direction. (b) Magnitude of all extracted phase velocities as function of the frequency. Highest and lowest velocities computed with SFEM (resp. at 90° and 0°) are plotted as solid black lines.

**Bending motion** The dominant source of out-of-plane velocity comes from the bending motion. As a consequence, in the studied frequency range, applying the HRWA to the measured signal without spatial filtering (Eq. (VII.2.9)) leads to the extraction of bending wavevectors. The phase velocity  $\mathbf{c}$  of these waves is plotted in Figure VII.6. In Figure VII.6a,  $\mathbf{c}$  is represented in a polar diagram for 10 frequencies covering the frequency range. Hence the dependence of the wave velocity as a function of its propagation direction can be studied. Numerical predictions (solid lines) are added to the HRWA results (dot markers). In Figure VII.6b, the magnitude of the phase velocity of all extracted waves is plotted as red markers. Numerical lowest and highest phase velocities (SFEM results at 0° and 90°) are added as black lines.

To interpret the results, the slenderness ratio is defined as the ratio of the wavelength  $\lambda$  over the plate thickness  $h$ . It is large at low frequencies ( $\lambda/h \approx 160$  at 500 Hz) thus the plate behaves as a thin plate. In this regime, the bending wave velocity is proportional to the square root of the frequency. Moreover, the bending motion is source of in-plane stresses which are mostly contained in the carbon fiber skins. As a consequence, the anisotropy of the phase velocity diagram is high and has symmetry planes corresponding to the fiber direction (90°). As the frequency increases, the wavelength decreases and the slenderness ratio as well ( $\lambda/h \approx 8$  at 10 kHz,  $\approx 4.5$  at 20 kHz,  $\approx 2.3$  at 40 kHz). The plate consequently behaves as a thick plate : out-of-plane shear strains, mostly contained in the foam core, become more and more significant

[116]. As the foam can be considered isotropic in the frequency range of interest, the bending wavevector magnitude tends to be independent of the wave propagation angle. In addition, as the shear effects are not dispersive, the bending velocity tends asymptotically toward a constant value.

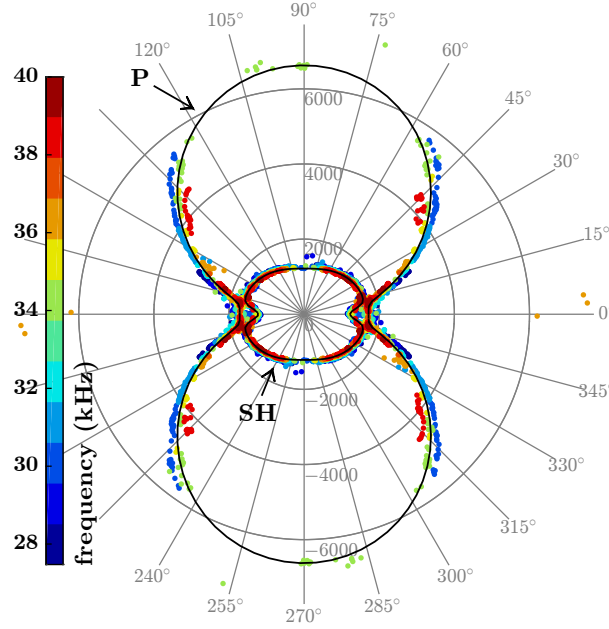


FIGURE VII.7 – Orthotropic sandwich plate with HD PVC foam core. Vectorial phase velocities of in-plane motion waves, as a function of the wave propagation direction and for frequencies between 28 kHz and 40 kHz : shear horizontal SH waves (inner contour) and primary P waves (outer contour). Dot markers : HRWA results applied to measurements, with colors corresponding to frequency. Solid lines : numerical wavevector results computed with the SFEM scheme at 34 kHz ([20]).

**In-plane motions** Laminated plates can exhibit coupled behavior between in-plane and out-of-plane motions, when the symmetry to the neutral plane is not exactly satisfied. Imperfect fabrication or piezoelectric disk used as source can break the plate mirror symmetry. In addition, longitudinal waves can be the source of out-of-plane displacement, because of the out-of-plane Poisson effect. Moreover, the SLDV velocity measurement may contain contributions from the in-plane components of the plate motion, when the laser beam is not exactly normal to the plate surface. In modal analysis, these contributions can be an issue, as they are not separable from the out-of-plane kinematic field, without a proper 3D velocity measurement. With the proposed HRWA, bending and in-plane motions can be separated because of their distinct wavevectors.

To perform the extraction of in-plane motion waves with the HRWA, the contribution of the bending waves in the signal has to be removed. To this end, a 2D spatial low-pass filter is applied on the signal (Eq. (VII.2.9)). As the bending wavevectors have been extracted previously, they are used to tune the cutoff wavenumber of the filter : at each frequency, the cutoff wavenumber is chosen as a fraction of the minimum bending wavevector extracted at this frequency. Using this strategy, in-plane motion wavevectors are extracted for frequencies between 28 kHz and 40 kHz.

In Figure VII.7, the experimentally extracted phase velocities Eq. (VII.2.3) are plotted as colored dot markers, the color denoting frequency. The experimental results are compared to



velocities computed with the SFEM scheme (at 34 kHz). Two kinds of waves can be separated : longitudinal waves (or Primary P waves) and shear horizontal SH waves. In a first approximation, the in-plane motion waves can be considered as non dispersive in the frequency range of interest : their phase velocity depends only on the wave propagation direction. Again, the polar diagram displays two symmetry planes at  $0^\circ$  and  $90^\circ$ , representative of the plate orthotropy. Looking closer, some dispersion can be observed in the diagram of the P waves. At the lowest frequencies (blue shade markers), the phase velocity magnitude is larger than at the highest frequencies (red shade markers). This dependence is related to the out-of-plane Poisson effect, which tends to increase with the frequency.

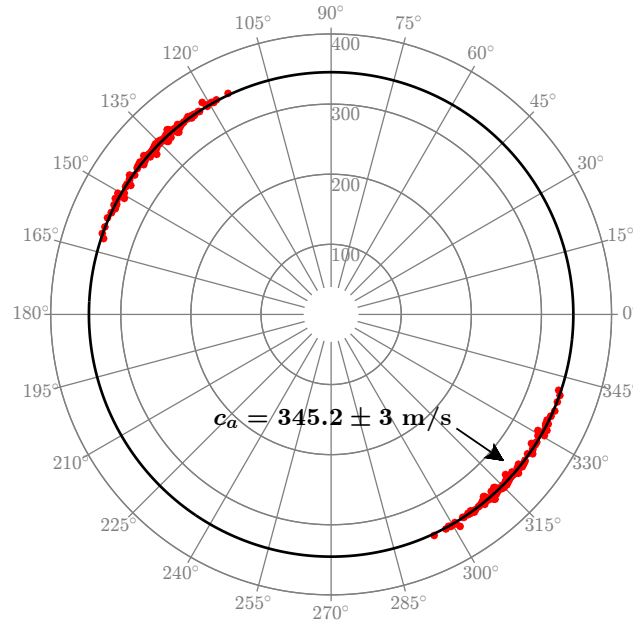


FIGURE VII.8 – Orthotropic sandwich plate with HD PVC foam core. Sound velocity  $c_a$  (m/s) measured from extracted wavevector for different frequencies. HRWA results : dot markers ; mean value : solid line

**Air-Coupled Waves** The out-of-plane motion of the plate is transmitted to the surrounding air, resulting in an acoustical field which in turn loads the plate. It is well known in acoustics that the coupling becomes strong when the speed of the bending waves becomes larger than the sound speed. The low mass per unit surface of the sandwich plate ( $840 \text{ g/m}^2$ ) increases the coupling also. In Figure VII.6b, the approximate sound velocity is denoted by a horizontal dashed line. Between 5 kHz and 10 kHz, identified bending wave phase velocities (red dots) seems to differ from SFEM numerical results, some of the experimental results being lower than the lowest predicted phase velocity. At these frequencies, the sound velocity coincides with the velocity of some of the bending waves. As a consequence, some extracted wavevectors may be related to waves travelling in the surrounding air. At higher frequencies ( $>10 \text{ kHz}$ ), bending wave velocity is higher than sound velocity. As a consequence, their different wavevector can be separated (see, for example, the result at 28 kHz in figure VII.5). By applying an appropriate 2D high-pass spatial filter to the velocity field (Eq. (VII.2.9)), the wavevectors  $\mathbf{k}_a$  related to air-coupled waves can be isolated. The resulting experimental sound velocity is represented in Figure VII.8. The mean identified velocity is  $c_a = 345 \pm 3 \text{ m/s}$ .

This study shows how different kinds of waves can be separated and identified with the HRWA. Thanks to its high-resolution aspects, the bending wavevectors are extracted in a wide frequency range (100 Hz to 40 kHz), even when only a few wavelengths are contained in the measured signal. In-plane motion waves can be extracted and analyzed. Finally, the sound speed is retrieved, as a consequence of the plate coupling with the surrounding air.

All these experimental results are compared with SFEM predictions computed from the mechanical properties of the plate constitutive materials and match closely. In this example, no inverse identification of the mechanical properties has been done. However, the good fit between the HRWA and numerical results gives an insight into the potential of wavevector extraction for anisotropic plate characterization. The wavevectors can be used to identify the plate constituent properties via an inverse problem, without much attention paid to excitation sources or boundary conditions. In particular, the ability to separate various plate wave types may allow to identify each layer properties, as the contribution of individual layers to the overall stiffness and inertia is different for each wave type.

### VII.3.2 Sandwich plate with honeycomb core

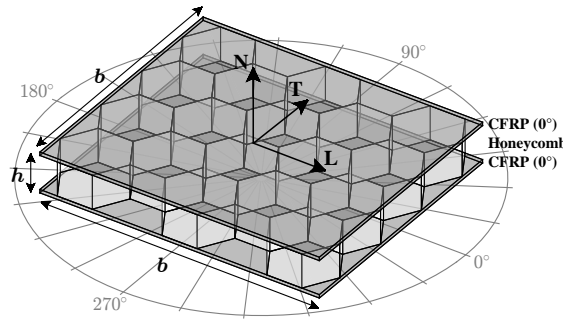


FIGURE VII.9 – Sandwich plate with honeycomb core. Scheme of the plate stacking. The two CFRP skins are oriented at  $0^\circ$ .  $h = 5.3$  mm,  $b = 60$  cm.

A second experimental study is performed on a square sandwich plate 60 cm wide, with carbon fiber skins oriented at  $0^\circ$  and a honeycomb core (see Figure VII.9). The light honeycomb core separate the two stiff skins, leading to a plate with high bending stiffness to weight ratio (the mass per unit surface is  $290$  g/m<sup>2</sup>). This architecture is chosen in order to illustrate the ability of the HRWA to capture individual layer properties : the distinct anisotropic properties of the carbon fiber skins and the honeycomb core result in a particular dependence of the wavevectors as a function of frequency and wave propagation direction.

The velocity field measurement is achieved with a SLDV on a grid of  $157 \times 157$  points. The Nyquist criterion, verified *a posteriori*, is satisfied. As excitation source, a piezoelectric disk is glued near the center of the plate, which is suspended with two thin rubber bands. Figure VII.10 gives the measured velocity field at 25 kHz. Because of the significant damping of the plate, few reflections occur and the field is dominated by the direct emission of the source.

Placing the excitation at the plate center allows the extraction of wavevectors in the surrounding of the source. Here, the wavenumber extraction procedure is applied on 100 reduced zones of the measured field. In Figure VII.10, 20 of these zones are represented. The wavevector extraction is performed for each individual zone. As the zones are chosen at a certain distance of the source, the field in each zone corresponds closely to a plane wave. Choosing zones closer to the excitation would yield an imaginary part of the extracted wavevectors more influenced

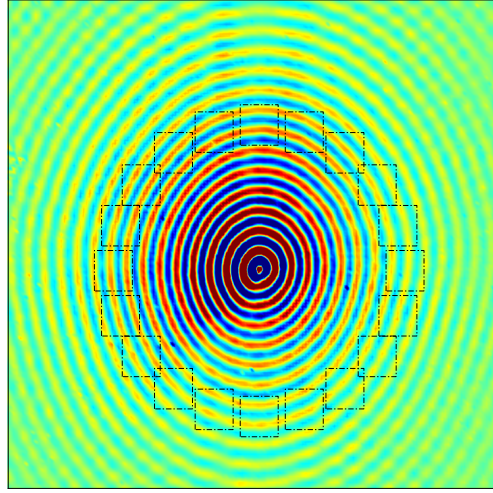


FIGURE VII.10 – Sandwich plate with honeycomb core. Measured harmonic velocity field at 25 kHz. 20 of the 100 zones used for the wavevector extraction are represented with dashed lines.

by the rather circular source wavefront. Sufficiently far from the source, the HRWA allows to identify the decay of a plane wave along its propagation direction.

Complex wavevector obtained with the HRWA are plotted as dot markers in Figure VII.11, for 9 frequencies covering the frequency range. Focusing on the real part of the extracted wavevectors (left of Figure VII.11), the principal directions of anisotropy shift of  $90^\circ$  as frequency increases : at low frequencies, the bending behavior is governed by the carbon fiber skins, oriented in the  $0^\circ$  direction ; the low-frequency wavevector is smallest in this direction. Out-of-plane shear effects increase with frequency and thus the polar profile of the real part of wavevectors is more and more influenced by the honeycomb core properties. According to the results, the core seems to have its stiffest direction oriented at  $90^\circ$ .

By contrast, the spatial decay of waves given by the imaginary part  $\tau$  of the wavevectors seems to be nearly isotropic (see Figure VII.11, on the right). As the signal in each reduced zone is close to a plane decaying wave, the real and imaginary parts of the wavevectors are nearly colinear. The decay factor of the plane waves  $\gamma_r(\omega)$  (see Eq. (VII.2.5)) can be studied. The Figure VII.12 displays the mean and standard deviation of this decay factor for all orientations as a function of frequency. Whereas  $\gamma$  is comprised between 3 and 5 % on the major part of the spectrum, a singularity around 34 kHz is observed, as it increases up to 30 %. At this frequency, the waves no longer propagate. Because of the periodic shape of the honeycomb core, this singularity can be related to a band-gap phenomenon : at these frequencies, the extracted wavevector magnitudes are around 420 rad/m, which corresponds to a wavelength of 15 mm. The half-wavelength being close to the size of the honeycomb pattern, the band-gap seems to be related to a local resonance of the cells of the honeycomb sandwich plate. As the problem of wave propagation in periodic plates is more complex [17] than the problem solved in the previous study, no theoretical results are given here to confirm this observation.

### VII.3.3 Inhomogeneous composite plate

The preceding experience shows the possibility of the HRWA to perform a local wavevector extraction on small zones of the signal. For this third experimental study, this feature is used to

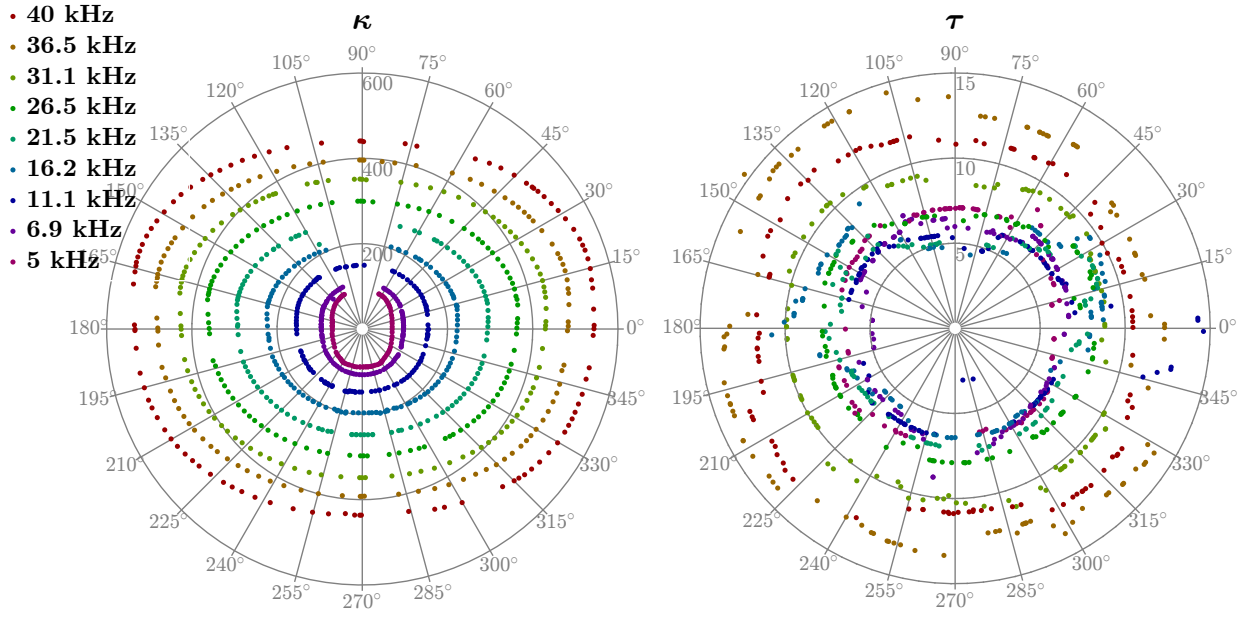


FIGURE VII.11 – Sandwich plate with honeycomb core. HRWA results. Polar representation of the wavevectors at various frequencies. Left : real part  $\kappa$ . Right : imaginary part  $\tau$ .

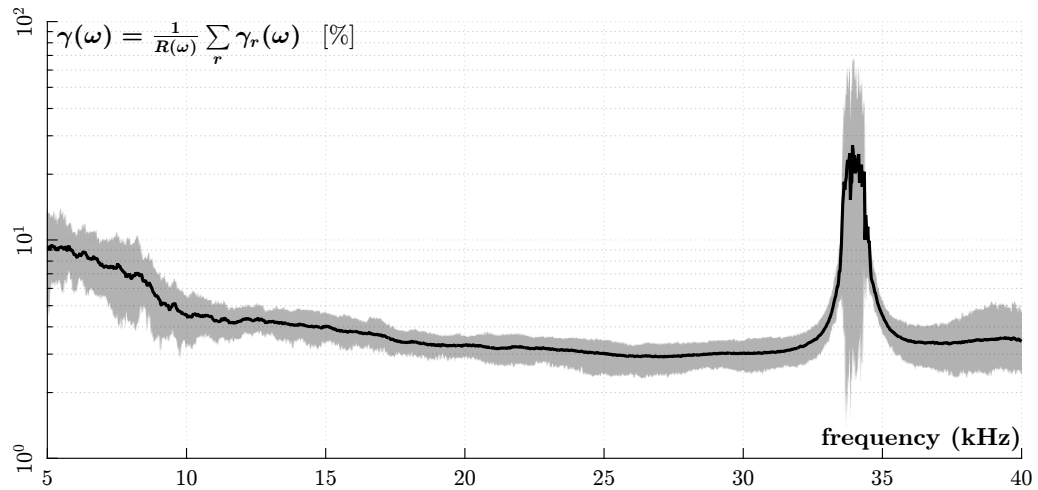


FIGURE VII.12 – Sandwich plate with honeycomb core. Decay factor of the extracted waves, as a function of frequency. Mean (solid black line) and confidence interval (gray domain) for all investigated zones in the response field.



identify the local specific bending stiffness. For this purpose, a laminated CFRP square plate with varying fiber directions has been fabricated. The 30 width plate is made of 36 patches with various fiber directions. Figure VII.13a shows a top view of the plate, where the fiber directions  $\theta$  are denoted by thin white lines. The stacking sequence is 4 ply, symmetric :  $[\theta, 90^\circ]_S$ . The two central plies at  $90^\circ$ , continued on the entire plate, work as a substrate for the mechanical cohesion of the patches. Material properties of the carbon prepreg, identified from tensile tests, are summarized in Table VII.1.

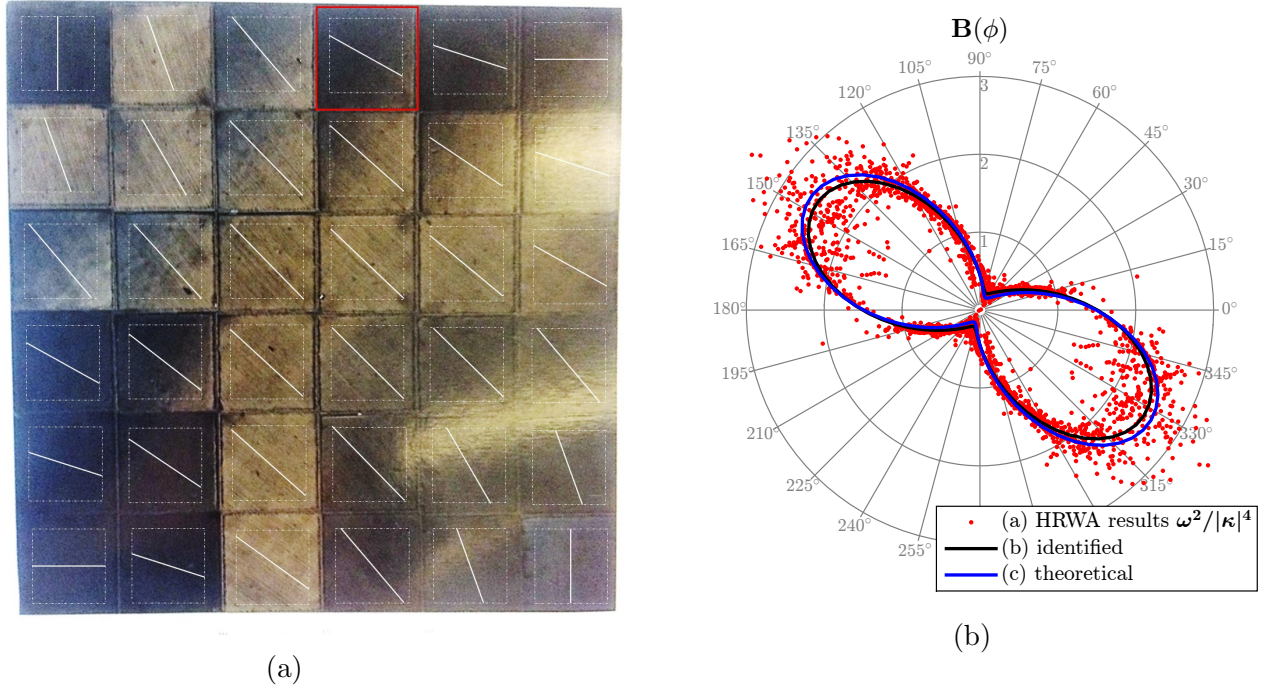


FIGURE VII.13 – Inhomogeneous CFRP plate. Identification of the local specific bending stiffness from HRWA results. (a) Top view of the plate (stacking sequence :  $[\theta, 90^\circ]_S$ ), which shows the fiber directions  $\theta$  of the top carbon layer. The zone relative to the figure VII.13b is surrounded in red. (b) Local specific bending stiffness  $B(\phi)$  (Eq. (VII.3.2)) : HRWA results (dot markers) ; least-Square fit of eq. VII.3.2 (black line) ; indicative theoretical diagram from material engineering constants of Table VII.1 (blue line).

For the measurements, the plate is excited from 500 Hz to 22 kHz with a shaker located in the bottom left corner. The velocity response is measured with a SLDV on a regular  $100 \times 100$  mesh grid of points, sufficient to respect the Nyquist criterion.

The HRWA is applied to reduced zones of the measured signal, that correspond to each patch location. Indeed, the mechanical properties of the plate are homogeneous in each zone. The wavevector extraction is performed for each of the 1600 available harmonic response fields between 500 Hz and 22 kHz. Hence a collection of wavevectors is obtained for each patch, as a function of the frequency.

As the zones used for wavevector extraction are small and may be close to plate boundaries, evanescent waves can be detected. Theoretically such waves may be solutions of the dispersion laws, so could be used for the identification of the plate. However, in practice, the extraction of evanescent wavevectors is sensitive to noise. In order to enhance the identification performed afterwards, evanescent waves are removed with  $\gamma_{\max} = 10\%$  (Eq. (VII.2.10)).

The largest wavevector magnitude extracted over all patches being around 580 rad/m, the

minimum involved wavelength  $\lambda$  is approximately 11 mm, which gives a slenderness ratio  $\lambda/h \approx 18$ . As a consequence, the plate can be considered as a thin plate in the frequency range of interest. The dispersion equation of the bending waves of an anisotropic thin plate can be computed analytically. Assuming frequency-independent material properties, it is given by the local equation of motion of the Classical Lamination Plate Theory (CLPT) (see VII.5.2) :

$$\begin{aligned} B(\phi) &= \frac{\omega^2}{|\boldsymbol{\kappa}(\omega, \phi)|^4} = \frac{D(\phi)}{M} \\ &= c^4 B_{11} + s^4 B_{22} + 2c^2 s^2 (B_{12} + 2B_{66}) \\ &\quad + 4c^3 s B_{16} + 4cs^3 B_{26} \end{aligned} \quad (\text{VII.3.2})$$

with

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}(\omega, \phi) &= |\boldsymbol{\kappa}(\omega, \phi)| \cdot [c, s] \\ &= |\boldsymbol{\kappa}(\omega, \phi)| \cdot [\cos(\phi), \sin(\phi)] \end{aligned} \quad (\text{VII.3.3})$$

and

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_c (h_{c+}^3 - h_{c-}^3) Q_{ij}^c \\ M &= \sum_c (h_{c+} - h_{c-}) \rho_c \end{aligned} \quad (\text{VII.3.4})$$

where  $c$  denotes the layer,  $Q_{ij}^c$  are the components of the layer plane stress stiffness matrix, given by the carbon fiber mechanical properties and the fiber orientations,  $h_{c+}$  and  $h_{c-}$  respectively the position of the top and bottom boundaries of the layer, and  $\phi$  is the wave propagation direction. The components of  $\mathbf{B}$  are assumed independent of the frequency. From eq. VII.3.2, an inverse problem can be formulated : given a collection of real wavevectors  $\boldsymbol{\kappa}_r = \boldsymbol{\kappa}(\omega_r, \phi_r)$ , extracted with the HRWA in a local zone  $z$ , the vector  $\mathbf{b}_z = [B_{11}^z, B_{22}^z, B_{12}^z + 2B_{66}^z, B_{16}^z, B_{26}^z]^\top$  is solution of the system :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_z \mathbf{b}_z &= \mathbf{d}_z \\ \mathbf{A}_z &= [c_r^4 \quad s_r^4 \quad 2c_r^2 s_r^2 \quad 4c_r^3 s_r \quad 4c_r s_r^3] \\ \mathbf{d}_z &= \frac{\omega_r^2}{|\boldsymbol{\kappa}_r|^4} \end{aligned} \quad (\text{VII.3.5})$$

As the system is over-determined,  $\mathbf{b}_z$  is estimated in the Least-Square sense. Since  $\mathbf{d}_z$  is strictly positive  $B_{11}$  and  $B_{22}$  are strictly positive too. By contrast, the off-diagonal components can be negative. An example of this local identification is shown in Figure VII.13b : for all frequencies, the wavevectors are extracted with the HRWA in the zone of the plate surrounded in red in Figure VII.13a. Experimental values of  $\omega^2/|\boldsymbol{\kappa}|^4$  are denoted with dot markers in the polar diagram. The result of  $\mathbf{B}(\phi)$  obtained with LS fitting (eq. VII.3.5) is plotted in black solid line. The identified specific bending stiffness is in good agreement with theoretical values (blue solid line), computed from material constants given in Table VII.1. The scattering in the values of  $B$  is mostly due to the amplification of the uncertainty by the fourth power of  $|\boldsymbol{\kappa}|$  in Eq. VII.3.2. In addition, it can be observed that the dispersion of the experimental values is larger in the directions of high bending stiffness : indeed, in these directions, waves have long wavelengths (corresponding to small wavenumbers) compared to the width of the zone of interest : as consequence, the wavevector extraction is more sensitive to noise in these directions.

The same procedure has been repeated for each patch location of the plate, in order to identify the local specific bending stiffness tensor components. The results are shown in Figure VII.14 : experimental values (a) are compared with theoretical values (b), and relative errors

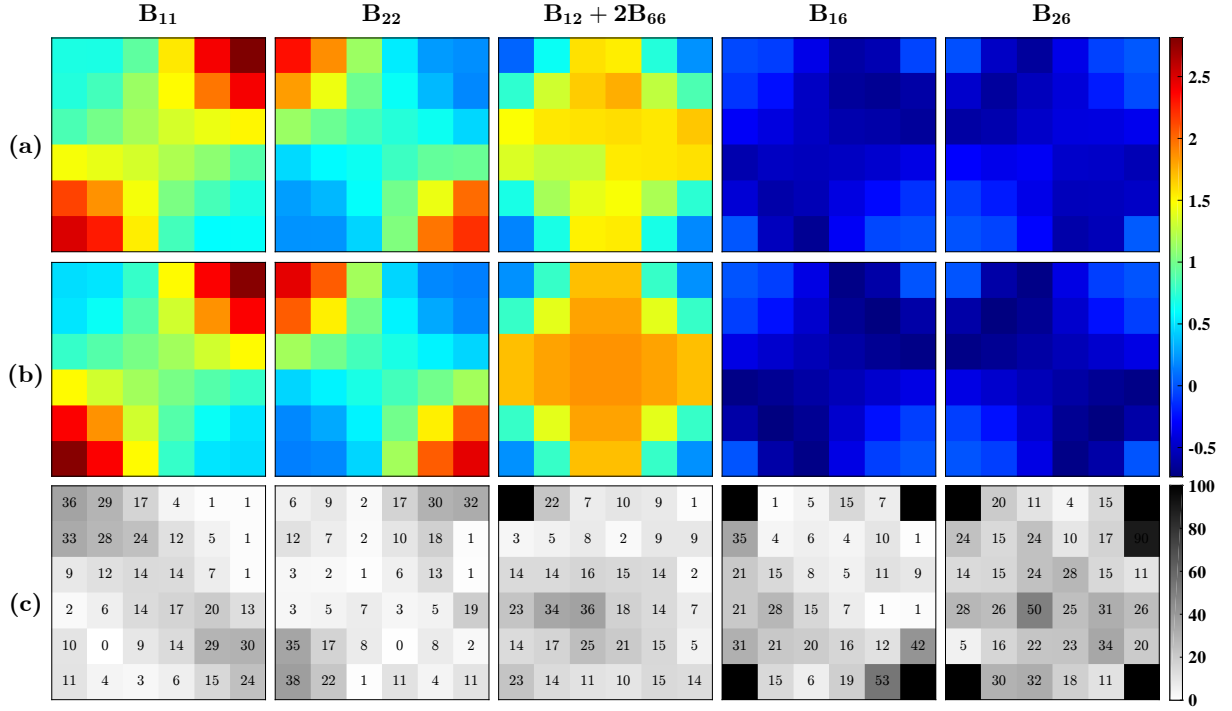


FIGURE VII.14 – Inhomogeneous CFRP plate. Components of the local specific bending stiffness tensor  $\mathbf{B}$ , for each patch of the plate (see figure VII.13a). (a) Identified values from HRWA results (eq VII.3.5); (b) theoretical predictions from material properties in Table VII.1; (c) rounded relative errors (%), black is more than 100%.

are given (c). Globally it can be observed that the identification errors are smaller when the components are larger : for example, coupling components  $B_{16}$  and  $B_{26}$  are more sensitive to noise than diagonal constants ( $B_{11}$  and  $B_{22}$ ). The relative error is particularly high (>200%) when theoretical components are equal to zero (black squares in Figure VII.14(c)). In addition, some differences can be explained by the uncertainties in the plate fabrication (patch angles and positions), and mechanical properties that differs from samples used for tensile tests in table VII.1.

This last study shows the possibility to identify a local mechanical behavior on inhomogeneous anisotropic plates with a simple linear inverse problem, using least-square estimator.

## VII.4 Conclusions and Perspectives

The High-Resolution Wavevector Analysis (HRWA) was presented. It allows to characterize the elastic behavior of composite plates. The implementation of the method, that makes use of the well-established signal processing ESPRIT algorithm and ESTER criterion, was summarized. By means of three experimental applications, the ability of the method to extract useful information from a measured kinematic field was illustrated. With the dependence of wavevectors as a function of the propagation direction and the frequency, the anisotropic behavior of the plate can be characterized for frequencies as low as the first modal frequencies. Various strain mechanisms such as bending, in plane shear or compression can be separated because of their distinct wavevectors and the ability of the algorithm to estimate the number of waves contained in the signal. In addition, the possibility to identify a local behavior in inhomogeneous plates

with an inverse problem using extracted wavevectors in a small zone of the plate thanks to the high resolution of the procedure is shown.

Various applications can be considered. In particular, the extracted wavevectors can be used to formulate an inverse identification problem of the material properties, with refined plate models. The wide-frequency domain of validity of the method could be used to identify refined layer and inter-layer properties (individual lamina behavior, interface stiffness, delamination, etc.). The local wavevector extraction could be used as a characterization tool in emerging laying technologies, e.g. in *Automatic Fibre Placement (AFP)* process [64, 179]. In addition, it could be used to detect local defects in a fabricated plate, like damages or delaminations. Indeed, the extraction zones in the third example have been chosen here to correspond to patch geometries; in a plate with continuously curved fibers, it could be possible to identify the local equivalent bending stiffness, by making the extraction zone slide continuously over the plate domain. At the end, a map of the mechanical properties of the plate could be represented, in order to find its defects.

As for now, a proper estimation of the wave decay can be achieved only in cases where the response field is close to a plane wave in its shape. This limits the ability to characterize the plate viscous behavior. This limitation is due to the signal model, which considers plane waves only (or *far-field* source). High-resolution algorithms suited for the identification of *near-field* sources has been developed [244, 243, 170], and could be used to identify the parameters of waves with a wavefront which is not plane. Moreover, uncertainties in the wavevector could be quantified by using results of the perturbation analysis of the ESPRIT algorithm [190].

## Acknowledgments

This work is funded by the french National Research Agency (ANR), in the frame of the MAESTRO project (*Modélisation Acoustique et Synthèse Sonore pour Tables d'harmonie de pianos*, ANR-14-CE07-0014).

## VII.5 Appendices

### VII.5.1 Wavevector extraction procedure

#### VII.5.1.1 The 2D-ESPRIT method

The 2D-ESPRIT methods deals with the estimation of the parameters  $\mathbf{k}_r$  and  $a_r$  of the signal model  $s(\mathbf{x})$  of equation VII.2.1. In this section, the signal order  $R$  is supposed to be known (see VII.5.1.2). The corresponding signal matrix  $\mathbf{S}$ , of which components are the sampling of  $s(\mathbf{x})$  along the grid  $\mathbf{x}_{nm}$  (equation VII.2.6, VII.2.7 and Fig. VII.1), can be expressed as follows :

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} + \mathbf{B} \quad (\text{VII.5.1})$$

with

$$\begin{aligned} S_{nm} &= u(\mathbf{x}_{nm}) + b(\mathbf{x}_{nm}) \\ &= \sum_{r=1}^R a_r z_{1,r}^n z_{2,r}^m + b(x_{nm}) \end{aligned} \quad (\text{VII.5.2})$$

where  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{B}$  matrices respectively denote the pure sum of decaying plane waves and the noise contribution in the signal and  $z_{d,r} = e^{ik_{d,r}\Delta_d}$  the complex *signal poles*.



**Rotational Invariance Property** If the pure signal  $\mathbf{U}$  is read by line  $\mathbf{u} = [U_{11}, \dots, U_{1L_2}, U_{21}, \dots, U_{L_1}]$  it can be written in the form :

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} \mathbf{a} \quad (\text{VII.5.3})$$

with  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_R]^\top$ . The Vandermonde matrix  $\mathbf{V}$  used here is expressed as :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \odot \mathbf{V}_2 \quad (\text{VII.5.4})$$

where  $\odot$  denotes the Khatri-Rao (column-wise Kronecker) product and :

$$\mathbf{V}_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_{d,1} & z_{d,2} & \cdots & z_{d,R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{d,1}^{L_d-1} & z_{d,2}^{L_d-1} & \cdots & z_{d,R}^{L_d-1} \end{bmatrix}_{L_d \times R} \quad (\text{VII.5.5})$$

The Vandermonde matrix respects a *rotational invariance* property. In the 2D-ESPRIT method, it is expressed as two recurrence relations between Vandermonde matrices built from two sub-parts of the signal. For each of the signal dimensions  $d \in \{1, 2\}$  :

$$\mathbf{V}^{\uparrow d} = \mathbf{V}^{\downarrow d} \mathbf{Z}_d \quad (\text{VII.5.6})$$

where  $\mathbf{Z}_d = \text{diag}(\{z_{d,1}, z_{d,2}, \dots, z_{d,R}\})$ . The superscripts  $\downarrow d$  and  $\uparrow d$  respectively denote the truncation of the first and the last index in the signal, in the direction  $d$ . As an example, the  $\mathbf{V}^{\uparrow 1} = \mathbf{V}_1^{\uparrow} \odot \mathbf{V}_2$ , where the  $\mathbf{V}_1^{\uparrow}$  matrix is built from the  $(L_1 - 1)$  first lines of  $\mathbf{S}$ .

As  $\mathbf{S}$  is a noisy version of  $\mathbf{U}$ , this invariance property is not exactly satisfied by the measured signal. However, it can be estimated, which is the main purpose of the ESPRIT algorithm.

**Autocovariance Matrix** From the  $n^{\text{th}}$  line of the signal  $\mathbf{S}$ , one can build the *Hankel* matrix  $\mathbf{h}_n$  as follows :

$$\mathbf{h}_n = \begin{bmatrix} S_{n0} & S_{n1} & \cdots & S_{n(K_2-1)} \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nK_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n(N_2-1)} & S_{nN_2} & \cdots & S_{n(L_2-1)} \end{bmatrix}_{N_2 \times K_2} \quad (\text{VII.5.7})$$

where  $N_2 = L_2 - K_2$ .

From the signal  $\mathbf{S}$ , a *Hankel-block-Hankel* (HbH) matrix  $\mathbf{H}$  is built, composed by the  $L_1$  matrices  $\mathbf{h}_n$  :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{K_1-1} \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{K_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{L_1-K_1-1} & \mathbf{h}_{L_1-K_1} & \cdots & \mathbf{h}_{L_1-1} \end{bmatrix}_{(N_1 N_2) \times (K_1 K_2)} \quad (\text{VII.5.8})$$

The role of the parameters  $K_d$  is discussed in the next section.

This HbH matrix is used to compute the autocovariance matrix of the signal :

$$\mathbf{C}_{SS} = \frac{1}{L_1 L_2} \mathbf{H}^* \mathbf{H} \quad (\text{VII.5.9})$$

**Subspace decomposition** By computing the eigenvalue decomposition of the hermitian autocovariance matrix, signal and noise subspaces can be selected :

$$\mathbf{C}_{SS} = \mathbf{P} \mathbf{\Gamma} \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{VII.5.10})$$

Without noise, the matrix  $\mathbf{C}_{SS}$  would be rank  $R$ , but is full rank in the presence of noise. However, as it is an asymptotically unbiased estimator of the signal autocovariance, its eigenvectors are poorly sensitive to an uncorrelated noise  $b$ . As a consequence, by isolating the  $R$  first eigenvectors  $\mathbf{p}_r$  of  $\mathbf{C}_{SS}$ , corresponding to its  $R$  dominant eigenvalues  $\Gamma_{rr}$ , the signal subspace  $\mathbf{W} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_R]$  can be selected. The matrix  $\mathbf{W}$  spans a signal subspace close to the subspace spanned by the Vandermonde matrix  $\mathbf{V}$ .

In the HbH matrix construction, (Eq. (VII.5.7)) and (Eq. (VII.5.8)), two parameters  $\{K_d, d \in \{1, 2\}\}$  have to be chosen. Observing  $\mathbf{C}_{SS}$  and  $\mathbf{W}$  leads to the constraint  $R \leq K_1 K_2$ . Kumaresan and Tufts [111] suggested to use these parameters to add  $P = K_1 K_2 - R$  virtual poles in the extraction, their role being to sample a potentially correlated noise contribution in  $\mathbf{B}$ , thus permitting to separate its influence in the extracted poles. In practice, the best strategy [192] consists in choosing a shape of  $\mathbf{H}$  so that it is almost square,  $K_d \approx L_d/2$ .

**Poles extraction** Since  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{W}$  matrix span close subspaces (not exactly the same because of noise), the transfer relation  $\mathbf{V} = \mathbf{W} \mathbf{T}$  between them can be estimated. By integrating this relation in the rotational invariance (Eq. (VII.5.6)), it comes :

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}_d \mathbf{T} \quad (\text{VII.5.11})$$

with

$$\mathbf{F}_d = (\mathbf{W}^{\downarrow d})^\dagger \mathbf{W}^{\uparrow d} \quad (\text{VII.5.12})$$

where  $\bullet^\dagger$  denotes the pseudo-inverse matrix. Therefore, the extraction of the poles  $z_{d,r}$  could be achieved thanks to the diagonalization of the matrices  $\mathbf{F}_d$ . If the two diagonalizations were made independently, a supplementary pairing step of the poles in the two directions would be necessary. Rouquette [188] suggested to jointly diagonalize the two matrices  $\mathbf{F}_d$  related to the two signal dimensions, by the diagonalization of a single matrix  $\mathbf{K}$  :

$$\mathbf{K} = \beta \mathbf{F}_1 + (1 - \beta) \mathbf{F}_2 = \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{VII.5.13})$$

where the parameter  $\beta$ , arbitrary, is chosen different from 1/2 (typically 0.55), in order to allow eigenvalues of multiplicity larger than 1. The wavevector extraction proved to be not sensitive to the parameter  $\beta$ .

Once  $\mathbf{T}$  has been evaluated from  $\mathbf{K}$ , the equations VII.5.11 are used to retrieve  $\mathbf{Z}_d$ , and finally the wavevectors :

$$\mathbf{k}_r = -i \left[ \frac{\ln(\cdot) z_{1,r}}{\Delta_1}, \frac{\ln(\cdot) z_{2,r}}{\Delta_2} \right] \quad (\text{VII.5.14})$$

If needed, the amplitudes  $a_r$  can be approximated by building the Vandermonde matrix  $\mathbf{V}$  and solving the linear system of equations VII.5.3 in the least-squares sense.

### VII.5.1.2 The 2D-ESTER criterion

The estimations of the two matrices  $\mathbf{F}_d$  (equation VII.5.12), made in the least-square sense, are sensitive to a wrong estimation of the signal order  $R$ . The ESTER criterion consists in searching the signal order  $R$  that minimizes the two errors of truncation  $\Sigma_d(r)$ ,  $r$  being a candidate for the signal order :

$$\Sigma_d(r) = \|\mathbf{W}^{\downarrow d}(r) \mathbf{F}_d(r) - \mathbf{W}^{\uparrow d}(r)\|_2 \quad (\text{VII.5.15})$$

In the present work, the geometrical mean of the two errors is used, so the two-dimensional ESTER criterion is expressed as :

$$R = \arg \max_{r \in \llbracket 1, r_{\max} \rrbracket} \left( \prod_d \Sigma_d(r) \right)^{-1/2} \quad (\text{VII.5.16})$$

In some applications of the ESTER criterion [14, 70, 77], a threshold parameter is added : the signal order is chosen as the largest value  $r$  for which the criterion reaches a local maximum larger than a fraction of the global maximum. In the present work, this strategy has not been used.

### VII.5.1.3 Implementation of the wavevector extraction procedure

1. The Hankel-block-Hankel matrix  $\mathbf{H}$  is built (Eq. (VII.5.8)) from the signal  $\mathbf{S}$  (Eq. (VII.2.7)), with  $K_d \approx L_d/2$
2. The autocovariance matrix  $\mathbf{C}_{SS}$  is computed (Eq. (VII.5.9)) and diagonalized
3. For each trial signal order  $r \in \llbracket 1, r_{\max} \rrbracket$  :
  - (a) The signal subspace matrix  $\mathbf{W}$  is built from the  $r$  dominant eigenvectors of  $\mathbf{C}_{SS}$
  - (b) The matrices  $\mathbf{F}_d$ ,  $d \in \{1, 2\}$  are computed (Eq. (VII.5.12))
  - (c) The two estimation errors  $\Sigma_d(r)$  are evaluated (Eq. (VII.5.15))

The signal order  $R$  is finally estimated thanks to the ESTER criterion (Eq. (VII.5.16)).
4. In order to evaluate the transfer matrix  $\mathbf{T}$ , the matrix  $\mathbf{K}$  is assembled and diagonalized (Eq. (VII.5.13))
5. The signal poles  $\mathbf{Z}_d$  are extracted (Eq. (VII.5.11))
6. Finally, the  $R$  complex wavevectors are deduced (Eq. (VII.5.14))

## VII.5.2 Bending wave dispersion laws given by the Classical Lamination Plate theory.

The fourth-order differential equation of bending motion of a thin anisotropic plate, given by the Classical Lamination Plate Theory, with the out-of-plane displacement  $u_3$  as unknown, is as follows :

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\alpha\beta\gamma\delta} + M \ddot{u}_3 = 0 \quad (\text{VII.5.17})$$

with Einstein notation for indices,  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{1, 2\}$  and  $D$  and  $M$  defined by equations VII.3.4. In order to get the dispersion law, the plane-wave approximation is taken.  $u_3$  is then expressed as :

$$u_3(\mathbf{x}, t) = U_3 e^{i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x})}$$

Equation VII.5.17 becomes :

$$\kappa_\alpha \kappa_\beta \kappa_\gamma \kappa_\delta D_{\alpha\beta\gamma\delta} - \omega^2 M = 0 \quad (\text{VII.5.18})$$

By taking Voigt notation and equation VII.3.3, the bending stiffness can be expressed in function of the wave propagation  $\phi$  :

$$\begin{aligned} D(\phi) &= M \frac{\omega^2}{|\boldsymbol{\kappa}(\omega, \phi)|^4} \\ &= c^4 D_{11} + s^4 D_{22} + 2c^2 s^2 (D_{12} + 2D_{66}) \\ &\quad + 4c^3 s D_{16} + 4cs^3 D_{26} \end{aligned} \quad (\text{VII.5.19})$$



## Quatrième partie

### Application à la table d'Harmonie du piano



## Chapitre VIII

# Application à la caractérisation de la table d'harmonie du SP190//

### Résumé

Ce chapitre présente l'**application des travaux proposés** dans cette thèse à la table d'harmonie du piano à queue Stephen Paulello SP190//.

Tout d'abord, le **dispositif de vibrométrie robotisé** proposé au chapitre III est mis en œuvre dans le but d'obtenir la **réponse transitoire libre** de la structure. L'installation expérimentale est décrite, ainsi que la définition de l'**environnement virtuel** nécessaire à la pré-visualisation des mouvements du bras robot et à la définition du maillage de mesures. Finalement, le **champ de vitesse hors-plan instantanée** correspondant à la réponse libre de la structure est obtenu sur un **maillage de 1630 points**, avec un rapport signal-à-bruit satisfaisant **jusqu'à 1800 Hz**.

Ensuite la méthode d'**analyse modale** décrite au chapitre V, section V.2, est appliquée à la mesure obtenue. Sur la base du critère de **stabilité de l'amortissement modal**, **80 modes** sont conservés. Un résultat sur la quantification des incertitudes sur les paramètres estimés est illustré.

Dans un troisième temps, l'identification des **propriétés de raideur de l'épicéa** composant la table, supposé **orthotrope homogène**, est réalisée à l'aide de la méthode inverse proposée au chapitre V, section V.3, basée sur les **données modales extraites**. Le modèle de la structure implémenté pour la résolution de ce problème est décrit. L'identification réalisée est critiquée sur la base de différents indicateurs permettant de juger de la **similarité des bases modales expérimentales et numériques**.

Enfin, l'**analyse en vecteurs d'onde** proposée au chapitre VII est mise en œuvre. Une extraction locale des vecteurs d'onde est réalisée, caractéristique de la **dispersion locale des ondes de flexion** dans la structure. Il est ensuite proposé d'identifier, à partir des collections de vecteurs d'onde obtenues, les **paramètres d'un modèle de plaque mince découplée**. Finalement, la **cartographie des raideurs équivalentes anisotropes locales en flexion** de la table d'harmonie est donnée. Sur la base de la **comparaison avec des résultats théoriques** est montrée la nécessité de prendre en compte le **couplage membrane-flexion**.



## VIII.1 Introduction

Ce dernier chapitre concerne l'application du travail présenté dans les chapitres précédents à la caractérisation d'une table d'harmonie de piano à queue. Conçue par le facteur de pianos français Stephen Paulello, cette table d'harmonie est destinée à équiper ses nouveaux modèles de 190 centimètres à cordes parallèles *SP190//*.

**Présentation** Sur la table d'harmonie du SP190//, les barres de renfort traditionnellement présentes sur les tables d'harmonie de piano servant à reprendre la charge normale des cordes ont disparu. Elles sont remplacées par une seconde couche d'épicéa (couche inférieure), qui vient s'ajouter à la première (couche supérieure). La table d'harmonie devient en conséquence un multicouche. De plus, Stephen Paulello cherche à régler *localement* la raideur de la table. Dans ce but, la couche inférieure ajoutée est réalisée par la découpe et l'assemblage d'un *patchwork* de planches d'épicéa, dont la direction des fibres est rendue variable (ou plus exactement, constante par morceaux).

Une photographie de la face inférieure de la table d'harmonie du SP190// est donnée en figure VIII.1. Le contraste a été volontairement accentué pour mettre en valeur les différentes directions de fibres. On peut donc remarquer que celles-ci sont disposées en forme de *soleil*, avec des angles allant de  $-80^\circ$  à  $30^\circ$ . La couche de bois située sur la face supérieure de la table d'harmonie, non visible ici, est homogène : les fibres sont toutes parallèles et orientées d'un angle de  $43^\circ$ .

**Problématique** La caractérisation de cette structure pose évidemment un certain nombre de problèmes. Tout d'abord, celle-ci doit idéalement être réalisée sur un domaine de fréquences

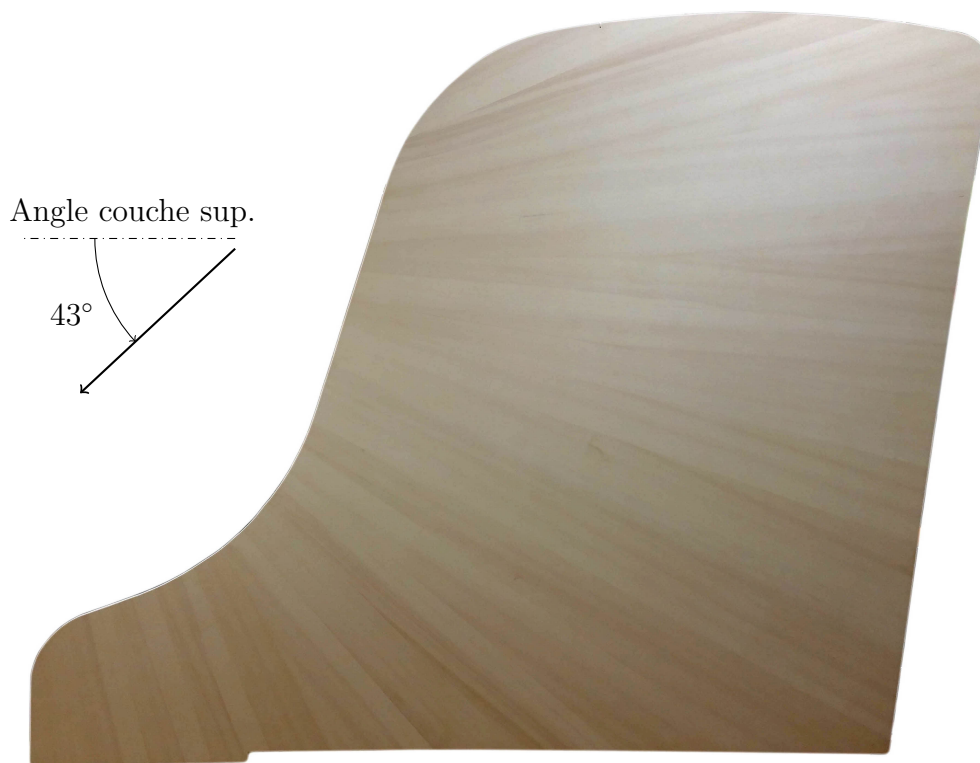


FIGURE VIII.1 – Photographie de la face inférieure de la table d'harmonie du SP190//

étendu, correspondant au régime fréquentiel dans lequel la table est responsable de la grande partie du son produit par l'instrument.

Ensuite, l'aspect multicouche de la structure introduit une complexité particulière. En effet, le bi-couche créé ne présente pas de symétrie par rapport à son plan neutre : en conséquence, les mécanismes de déformation en membrane et flexion sont couplés.

Enfin, la configuration variable de la section caractéristique doit absolument être prise en compte dans les procédures d'identification.

**Démarche** Les différentes contributions du travail de thèse sont appliquées à la caractérisation de la structure. Tout d'abord, le dispositif de vibrométrie robotisé présenté au chapitre III est utilisé pour mesurer la réponse transitoire de la structure. Ensuite, la technique d'analyse modale développée au chapitre V est mise en œuvre. Celle-ci permet ensuite la formulation et la résolution d'un problème aux valeurs propres, utilisant également les développements du chapitre V, section V.3. Enfin, la méthode d'analyse en vecteurs d'onde présentée au chapitre VII est appliquée. Est alors proposée l'identification locale du modèle de plaque mince équivalent, permettant d'obtenir la cartographie des propriétés anisotropes de la structure en flexion.

## VIII.2 Mesure de la réponse transitoire libre

La section qui suit présente la mesure effectuée sur la table d'harmonie du SP190//, utilisée dans la suite pour appliquer les méthodes d'identification proposées dans les chapitres précédents. Pour cela, le dispositif de vibrométrie robotisé présenté au chapitre III est utilisé. Ce dispositif particulier, qui permet la mesure du champ de vitesse instantanée de façon automatisée, nécessite toutefois une réflexion sur la conception et l'expérience. En particulier, l'automatisation de la mesure contraint celle-ci à être suffisamment répétable ; c'est à dire avec un écart-type entre les réalisations raisonnable par rapport au niveau du signal mesuré. Ce dispositif nécessite également de définir un modèle géométrique virtuel de l'expérience. La définition du maillage de mesure ainsi que la correction de celle-ci sont également discutée, et enfin les résultats illustrés.

### VIII.2.1 Dispositif expérimental

Deux vues du dispositif expérimental ayant permis la mesure de la structure sont proposées en figure VIII.2, permettant d'illustrer la description qui suit.

**Conditions libres** De façon à pouvoir appliquer la procédure d'identification utilisant les données modales telle que présentée au chapitre V, on cherche à mesurer la réponse transitoire libre de la structure. Dans l'idéal, cette réponse implique des conditions aux limites dont l'influence sur la réponse peut être négligée : une discussion a déjà été donnée à ce sujet au chapitre V, dans le cadre du cas d'application proposé en section V.4. La méthode classiquement employée consiste alors à suspendre la structure mesurée par des fils de raideur très faible par rapport à celle-ci ; c'est cette technique qui est utilisée ici. Toutefois, ici le poids de la table d'harmonie ( $\sim 7.4$  kg) oblige à la suspendre à des cordes ayant une raideur non négligeable. Celles-ci peuvent donc avoir un effet dans la réponse mesurée.

**Moyen d'excitation** La mesure de la réponse transitoire libre impose également l'utilisation d'un moyen d'excitation découplé de la structure. Le choix pris ici consiste à placer un pot vibrant à proximité de la surface de la table, dans le coin inférieur gauche (voir figure VIII.2). L'envoi d'un signal impulsif dans le pot vibrant permet d'utiliser celui-ci comme un marteau de choc automatisé. L'optimisation de différents paramètres (i.e. durée de l'impulsion électrique, distance de l'impacteur à la surface) permet finalement d'assurer une excitation correcte de la structure jusqu'à 2 kHz (voir figure VIII.5b plus bas).

**Mouvement de balancier** La bonne répétabilité de l'excitation impose toutefois que la distance entre le pot vibrant et la table au moment de l'impact soit constante. Cette nécessaire condition est malheureusement compromise par le mouvement de balancier imprimé à la table lors de l'impact. En effet, l'attente de l'amortissement complet de ce mouvement naturel entre chaque répétition de la mesure entraînerait une augmentation du temps de mesure total considérable. Pour pallier à ce problème, on choisit d'amortir ce mouvement de balancier à l'aide de fils supplémentaires, liant les coins de la table à des points fixes de l'installation expérimentale. On espère alors que l'influence de ceux-ci sur la réponse de la structure soit réduite ; on peut toutefois s'attendre à une légère modification des premiers modes de la structure. Finalement, le mouvement de balancier peut être considéré amorti deux secondes après le choc (voir figure VIII.5a plus bas).



FIGURE VIII.2 – Vues du dispositif expérimental (photo : Stephen Paulello)



**Placement du capteur** Une fois la table d'harmonie à mesurer suspendue, on place le dispositif de vibrométrie robotisé face à celle-ci, à une distance d'environ deux mètres. En effet, le bras robot utilisé (ABB IRB 120) ne dispose pas de l'amplitude de déplacement qui serait nécessaire pour pouvoir assurer l'incidence normale du rayon laser du capteur vélocimétrique (Polytec PDV-100) par rapport à la surface de la table. En conséquence, on est obligé d'effectuer la mesure à partir d'une incidence *oblique* du rayon laser. Cet angle d'incidence doit toutefois être réduit au maximum de manière à assurer un retour de signal optique satisfaisant au capteur. Dans ce but, le robot est placé à distance de la structure mesurée.

## VIII.2.2 Modélisation des géométries

L'utilisation du dispositif de vibrométrie robotisé impose tout d'abord la modélisation de la géométrie de l'expérience dans un environnement virtuel. Cela permet ensuite de définir les différentes cibles du vibromètre laser (point de mesure et rayon incident). Une fois les différentes géométries définies, les mouvements du robot peuvent être prévisualisés afin d'assurer le bon déroulement de l'expérience. Notamment, les différentes collisions qui peuvent avoir lieu doivent être clairement identifiées afin d'être évitées lors de la phase de mesure automatisée. Ici, la définition des cibles visées par le vibromètre laser (discutée plus bas) permet de mettre complètement de côté les problématiques liées aux collisions, en limitant fortement l'amplitude des mouvements du robot. En conséquence, seules les géométries du bras robot, du vibromètre laser et de la table d'harmonie sont définies dans l'environnement virtuel, dont une vue est proposée en figure VIII.3.

La difficulté principale rencontrée lors de cette application concerne la connaissance précise de la position des divers éléments composant le dispositif expérimental, de manière à ce que le modèle virtuel de l'expérience soit le plus fidèle possible à la réalité. En particulier, il est nécessaire de placer correctement la structure à mesurer dans le référentiel du bras robot, de manière à ce que la définition du maillage de mesure dans l'environnement virtuel corresponde

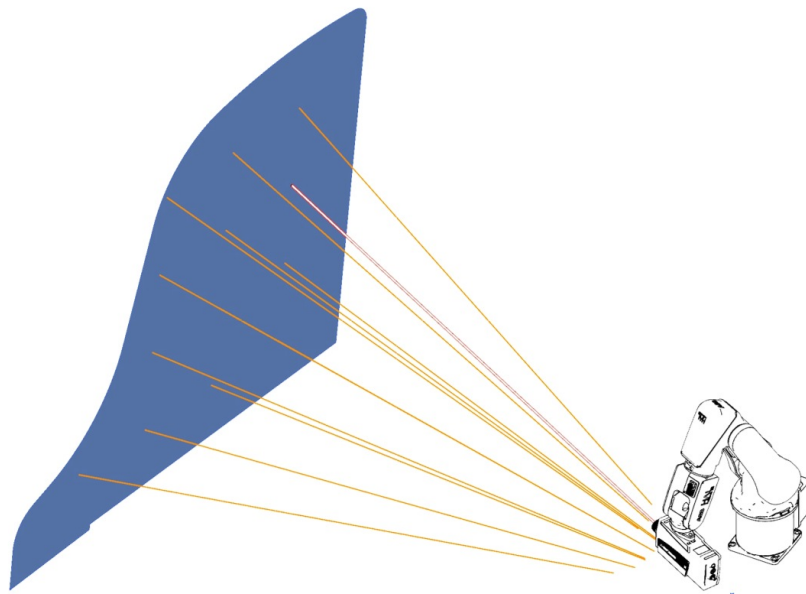


FIGURE VIII.3 – Vue de l'environnement expérimental virtuel

au maillage de points réellement mesurés.

La calibration de l'environnement virtuel est une perspective importante de travail autour du dispositif de vibrométrie robotisé : dans la mesure présentée ici, une incertitude importante existe sur la position *réelle* de la structure ( $\sim 2$  cm) : cette incertitude peut se traduire par un décalage global des points de mesure par rapport à leur position théorique.

On note toutefois que si la position du maillage de mesure est incertaine, l'espacement entre les différents points de ce maillage l'est moins : l'incertitude associée à cet espacement serait en effet due à une mauvaise connaissance de la *distance* entre le bras robot et la table d'harmonie mesurée ; celle-ci peut être déterminée avec une bonne précision.

### VIII.2.3 Définition du maillage

De manière à pouvoir appliquer l'analyse en vecteurs d'onde proposée au chapitre VII pour la caractérisation de la structure, le maillage de mesure est construit à partir d'une grille uniforme de points répartis sur la surface de la table. L'espacement de la grille est choisi de 3 centimètres ; en tout, 1630 points sont définis. Une vue du maillage obtenu est donnée en figure VIII.4.

De façon à éviter les collisions, on cherche à réduire les mouvements du robot. Pour cela, il est choisi de faire converger les rayons incidents du laser vers un point situé sur le côté du bras robot ; ce choix est bien visible sur la figure VIII.3. La contrainte qui reste alors à résoudre consiste à rendre la distance table d'harmonie-capteur fixe ; en effet, celui-ci nécessite d'être placé à une distance constante de la surface à mesurer car son système optique est manuel (la distance focale est donc fixe). En conséquence, les mouvements de translation du robot ne peuvent pas être complètement annulés. Toutefois, il est simple de trouver un point de convergence des rayons qui assure une faible amplitude des mouvements.

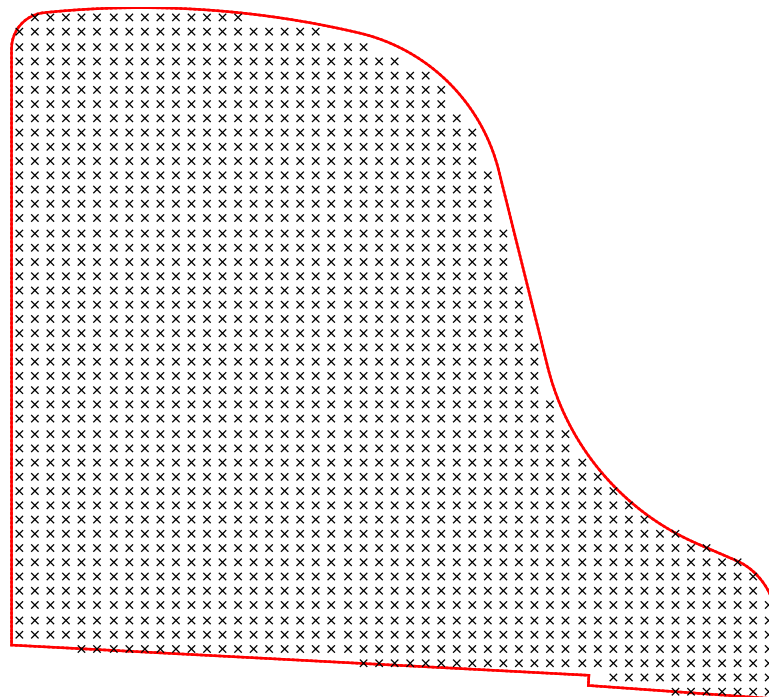


FIGURE VIII.4 – Maillage de mesure

### VIII.2.4 Correction de la mesure

Pour l'étude menée ici, on ne s'intéresse qu'au déplacement hors-plan de la structure ; les autres composantes du déplacement sont supposées négligeables. De façon à garder le temps total de mesure raisonnable, on choisit de ne mesurer la vitesse qu'à partir d'une seule incidence du vibromètre laser en chaque point (contrairement au cas d'application du chapitre III, où la vitesse tridimensionnelle est mesurée à partir de  $K \geq 3$  incidences du laser en chaque point). Dans ce cas, le signal acquis correspond à la vitesse de la structure projetée dans la direction du laser. Puisque celle-ci fait un angle qui n'est pas droit avec la surface de la structure, il est nécessaire de corriger la vitesse obtenue (avec le cosinus de l'angle). Cela est simplifié par la définition des géométries de l'expérience dans un environnement virtuel, qui permet donc d'automatiser la correction.

### VIII.2.5 Résultat

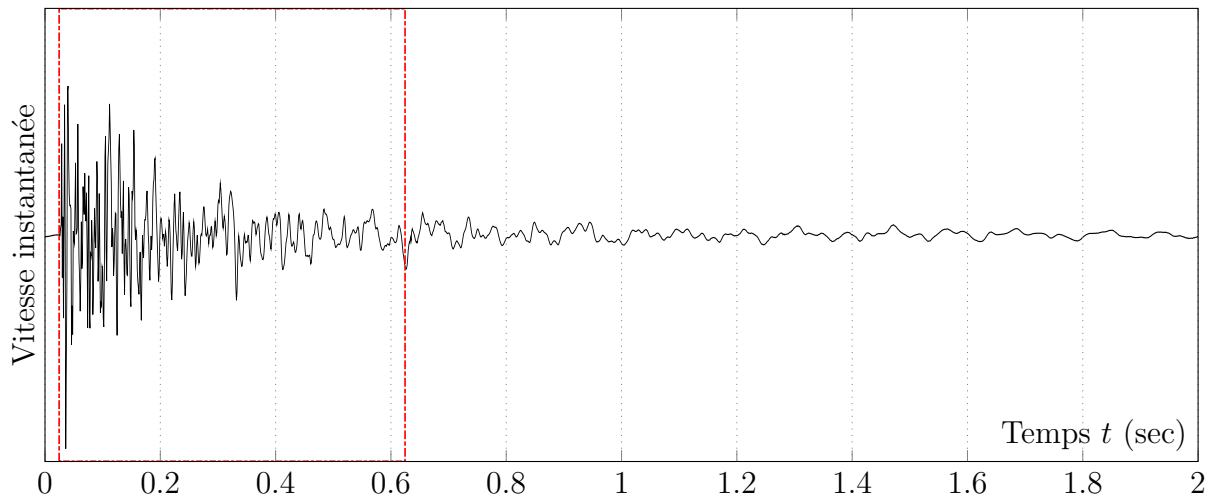
Les choix pris sur le moyen d'excitation et l'amortissement du mouvement de balancier permettent d'obtenir une mesure suffisamment répétable toutes les 2 secondes ; la fréquence d'échantillonnage est choisie de 10 kHz, de manière à respecter largement le critère de Nyquist (l'excitation est efficace jusqu'à 2 KHz). En chaque point du maillage, la mesure est répétée 20 fois ; ensuite, la médiane des 20 réalisations est prise. Cette technique, comme on l'a vu au chapitre III, est robuste face au bruit optique impulsif caractéristique du vibromètre laser, ce que la moyenne sur les réalisations ne serait pas. En tout, un peu plus de 18 heures de signal sont acquises ( $1630 \text{ points} \times 2 \text{ sec} \times 20 \text{ réalisations}$ ) ; en comptant la mise en mouvement du robot entre chaque point mesuré, l'expérience s'étale au total sur une vingtaine d'heures.

La figure VIII.5 donne quelques résultats représentatifs obtenus. Tout d'abord, la vitesse transverse instantanée de la structure en un point (sans unité) est tracée sur la figure VIII.5a.

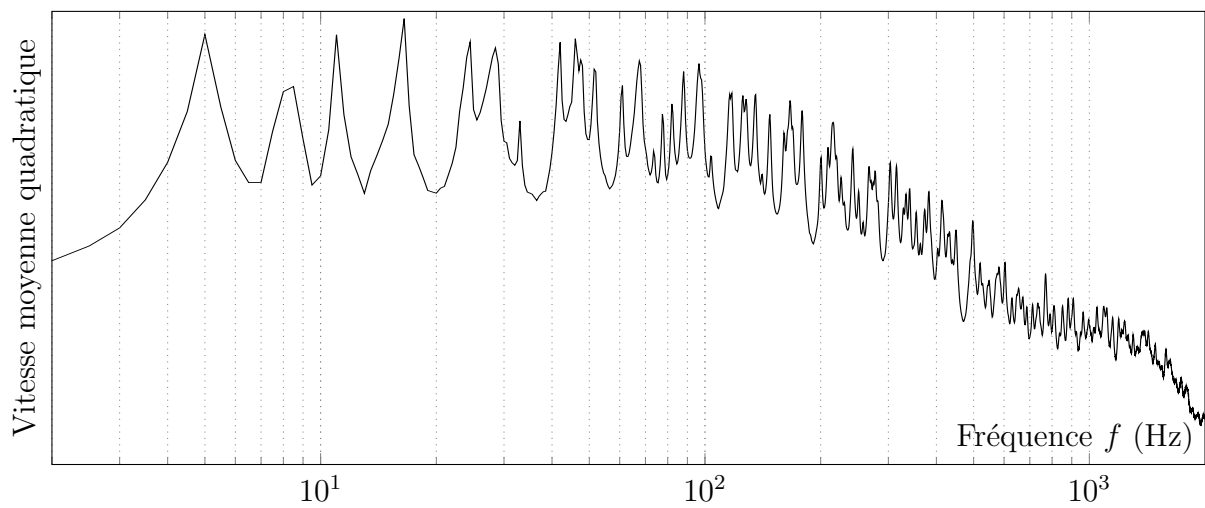
Juste en dessous, la figure VIII.5b représente le spectre de vitesse moyenne quadratique (sans unité), pris entre 2 Hz et 2 kHz. On peut observer que l'amplitude de celui-ci chute après 1500 Hz. Un comptage des pics permet d'estimer grossièrement l'ordre du signal à une centaine de modes avant 1 kHz ; au-dessus, il devient difficile de discerner les différents pics. Le premier mode observé se situe aux alentours de 5 Hz.

Enfin, deux déformées instantanées sont tracées sur les figures VIII.5c et VIII.5d. La première est prise 1.7 ms après l'impact ; on peut y observer le front d'onde. Celui-ci présente un profil qui peut s'apparenter à une ellipse. Par rapport au cas de la plaque d'épicéa (voir chapitre V, figure V.3c), l'anisotropie de la structure est visiblement moins forte : cela est dû à l'orientation différente des deux couches d'épicéa qui composent la table. La même remarque peut être faite au sujet de la deuxième déformée instantanée représentée sur la figure VIII.5d : il n'est alors pas possible de discerner une direction selon laquelle les longueurs d'ondes apparentes serait plus courtes.

Dans les sections qui suivent, les procédures d'identification proposées dans les chapitres précédents sont appliquées à la mesure obtenue. Dans le cas de l'analyse modale, le signal obtenu est utilisé directement. Dans le cas de l'analyse en vecteurs d'onde, la transformée de Fourier en temps est prise de manière à obtenir une collection de réponses harmoniques de la structure.



(a) Vitesse instantanée en un point



(b) Spectre moyen

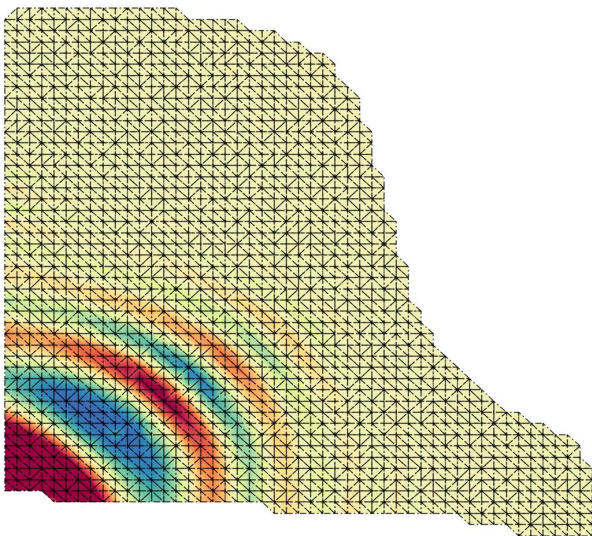
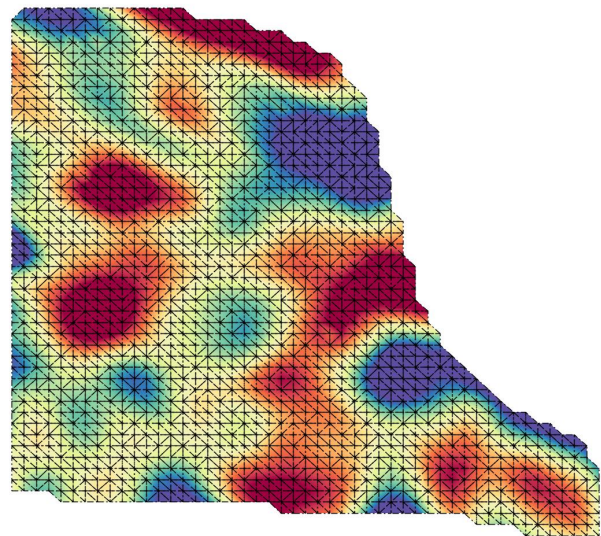
(c) Déformée instantanée à  $t - t_0 = 1.7$  ms.(d) Déformée instantanée à  $t - t_0 = 22$  ms.

FIGURE VIII.5 – Mesure réalisée sur la table d'harmonie du SP190//



### VIII.3 Analyse modale

La section qui suit décrit l'application de la méthode d'analyse modale proposée au chapitre V à la mesure de la réponse transitoire libre obtenue. Tout d'abord, une discussion sur la sélection des données pertinentes est menée. Ensuite, l'utilisation d'un critère de stabilité présenté au chapitre V est faite. A partir de l'observation de ce critère, 80 modes sont extraits de la réponse mesurée. Les données modales identifiées sont illustrées. Enfin, un résultat sur la quantification des incertitudes associées à ces estimations est donné.

#### VIII.3.1 Données utilisées

Comme dans le cas de l'application de la méthode à l'analyse modale de l'échantillon d'épicéa (voir chapitre V, section V.4), la totalité des données mesurées n'est pas utilisée. En effet, le début du signal (avant impact) ne contient pas d'information sur les modes de la structure ; de façon analogue, la vitesse mesurée une seconde après l'impact contient principalement la contribution des premiers modes de la structure, qui peuvent déjà être extraits à partir des premiers instants de la mesure. En conséquence, une fenêtre de 600 ms est conservée : le domaine temporel correspondant est encadré sur la figure VIII.5a (ligne rouge pointillée). Celui-ci correspond à 6000 échantillons temporels.

Les 1630 mesures ponctuelles obtenues sont ensuite injectées dans la méthode ESPRIT proposée dans le but de réaliser l'analyse modale de la structure. Une nouvelle fois, aucune technique de décimation ou de filtrage n'est appliquée au signal ; les données de mesure brutes sont utilisées.

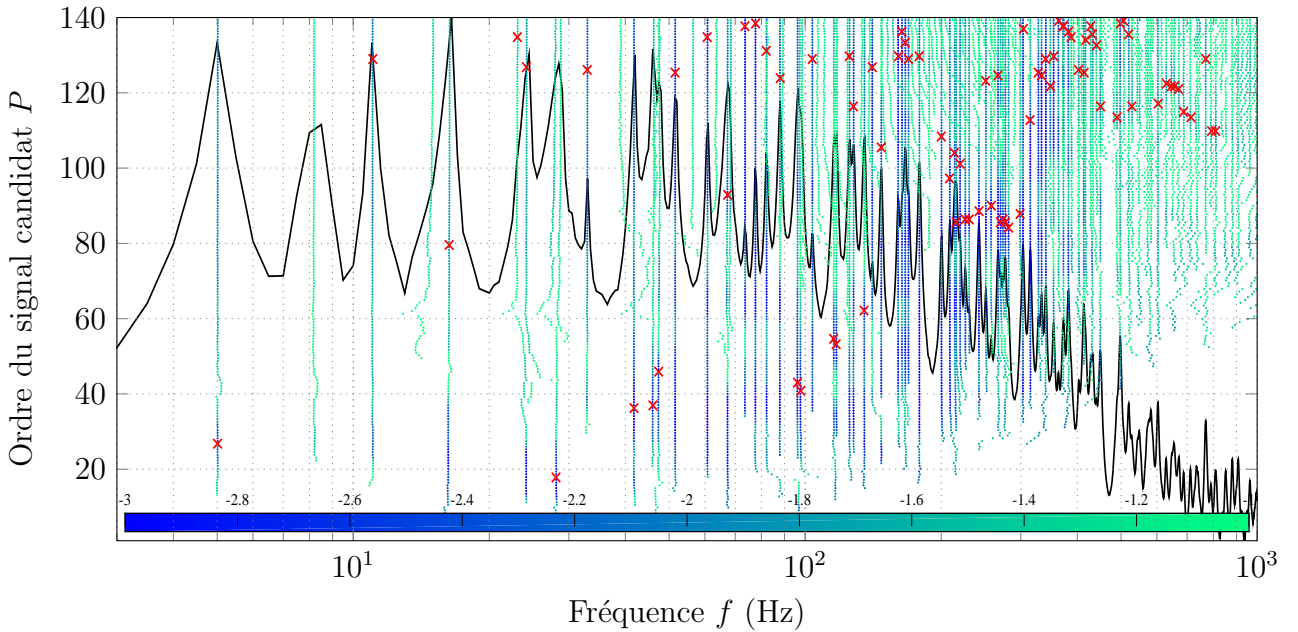


FIGURE VIII.6 – Diagramme de stabilisation. Critère  $\tilde{\sigma}_M(\xi_r)$  normalisé, avec  $M = 10$  (eq. (V.3.38)). Échelle de couleurs :  $\log(\tilde{\sigma}_M(\xi_r)/\xi_r)$ . Composantes conservées : croix rouges.

### VIII.3.2 Diagramme de stabilisation

On a vu que dans le cas de l'analyse modale, deux choix sont possibles pour l'estimation de l'ordre du signal (voir chapitre V). Le premier consiste à diviser le domaine fréquentiel en sous-bandes et d'appliquer la méthode ESPRIT à chaque signal obtenu ; dans ce cas, les critères MDL, ESTER ou SAMOS peuvent être appliqués car le nombre de composantes présentes dans le signal est réduit. La deuxième solution consiste à injecter la totalité des données dans la méthode et utiliser les critères de stabilisation ; c'est cette solution qui est retenue ici.

Sur le spectre représenté en figure VIII.5b, une centaine de pics peuvent être comptés entre 2 Hz et 1 kHz ; on choisit donc de dérouler la méthode ESPRIT complètement pour des ordres de signal candidats  $P \in \llbracket 1, 150 \rrbracket$  (en prenant en compte la parité du spectre, jusqu'à 300 composantes sont extraites). Ce calcul mène à la détermination d'une grande quantité de triplets modaux estimés pour des ordres  $P$  différents  $(\tilde{\phi}_r^P, \tilde{f}_r^P, \tilde{\xi}_r^P)$ , avec  $r \in \llbracket 1, P \rrbracket$ .

Au chapitre V a été montrée dans un cas d'application la pertinence du critère de complexité des modes  $\zeta_r$  (expression (V.2.9), voir figure V.6). Dans le cas présent, l'observation des résultats sur le diagramme de stabilisation montre une forte instabilité de l'amortissement  $\tilde{\xi}_r^P$  en fonction de l'ordre  $P$  ; on choisit donc ici de juger la stabilité des modes identifiés sur cet amortissement. Pour aider au choix des composantes à conserver, le critère  $\tilde{\sigma}_M(\xi_r)$  est calculé, avec  $M = 10$  (voir chapitre V, expression V.2.23). Cet indicateur donne une idée de l'incertitude sur l'estimation de l'amortissement modal.

Le diagramme de stabilisation correspondant est représenté sur la figure VIII.6. Le critère  $\tilde{\sigma}_M(\xi_r)$  est normalisé (divisé par  $\tilde{\xi}_r$ ), de façon à représenter sur l'échelle de couleur une estimation de l'incertitude relative sur  $\tilde{\xi}_r$ . L'échelle de couleurs, logarithmique, est d'ailleurs bornée : on a considéré qu'une incertitude relative de  $10^{-3}$  sur l'amortissement correspond à une composante stable ; à l'opposé, une incertitude de  $10^{-1}$  sur celui-ci est supposée associée à une composante instable.

### VIII.3.3 Résultat

Sur la base du critère de stabilisation proposé, 80 triplets modaux sont finalement conservés ; les points correspondant sur le diagramme de stabilisation sont dénotés par des croix rouges sur la figure VIII.6. On peut remarquer que les modes conservés ne correspondent pas tous au même ordre de signal candidat  $P$  ; ceci est une particularité du choix des composantes sur la base des critères de stabilisation. Par rapport à l'utilisation des critères MDL, ESTER et SAMOS, cette technique offre donc une liberté supplémentaire concernant le choix des composantes à conserver. Toutefois, ce choix entraîne l'impossibilité de quantifier les incertitudes par l'approche perturbative ; celle-ci nécessite en effet que tous les triplets modaux aient été extraits pour un même ordre de signal.

La figure VIII.7 représente les résultats de l'analyse modale effectuée sur un diagramme fréquence-amortissement. Les points bleus correspondent aux modes conservés (fréquences modales  $\tilde{f}_r$  et amortissements modaux  $\tilde{\xi}_r$ ). En arrière plan, le spectre mesuré a été représenté (ligne noire) de façon à permettre de visualiser la place de chaque mode sur celui-ci. Enfin, le spectre correspondant au modèle de signal reconstruit à partir des modes identifiés est superposé (ligne pointillée rouge).

On remarque que le modèle de signal reconstruit est très proche du signal mesuré jusqu'à 500 Hz (mode 72). Plus haut en fréquence, des composantes n'ont pas été conservées et/ou l'ordre du signal mal estimé. Le modèle de signal s'écarte alors nettement du signal mesuré.

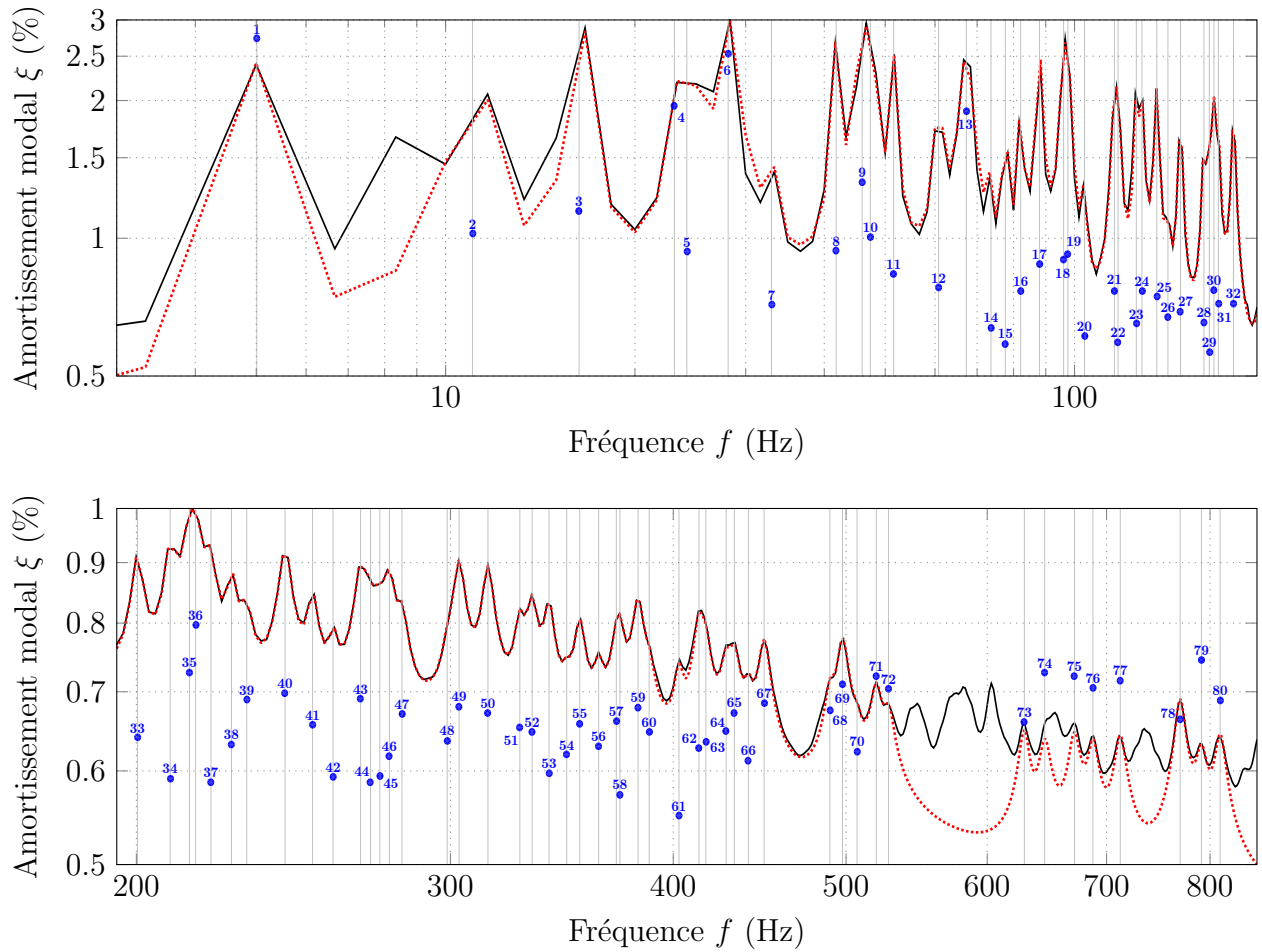


FIGURE VIII.7 – Résultats de l'analyse modale. Modes conservés (points bleus) numérotés de 1 à 80. Signal utilisé (ligne noire) et modèle de signal reconstruit (ligne rouge pointillée).

Il est possible de noter sur la figure VIII.7 que les amortissements modaux identifiés sont forts en basse fréquence (jusqu'à 3 % pour le premier mode) ; à partir du mode 14, l'amortissement modal ne dépasse pas 1 %. Le fort amortissement identifié sur les premiers modes peut être interprété comme l'effet des conditions aux limites appliquées à la structure, et notamment l'influence des fils ajoutés pour amortir le mouvement de balancier de la structure au cours de la mesure.

Les 80 déformées modales  $\tilde{\phi}_r$  identifiées sont représentées sur les figures VIII.8 et VIII.9, accompagnées de la fréquence  $f_r$  et de l'amortissement modal  $\tilde{\xi}_r$  associés. On note qu'il est difficile, contrairement au cas de la planche d'épicéa (voir figure V.8), de déterminer la direction principale d'anisotropie sur la seule observation des déformées.

Un phénomène particulièrement intéressant observé est la présence de modes *localisés* ; ceux-ci sont caractérisés par une déformée présentant des ventres localisés à certains endroits de la structure. On peut par exemple citer les déformées modales (22), (53) et (62) qui présentent une vibration confinée sur la partie inférieure de la plaque. Il est amusant de noter que ce phénomène est également caractéristique des tables d'harmonie de piano classiques, pour lesquelles la localisation est attribuée à la présence des raidisseurs [69, 222].

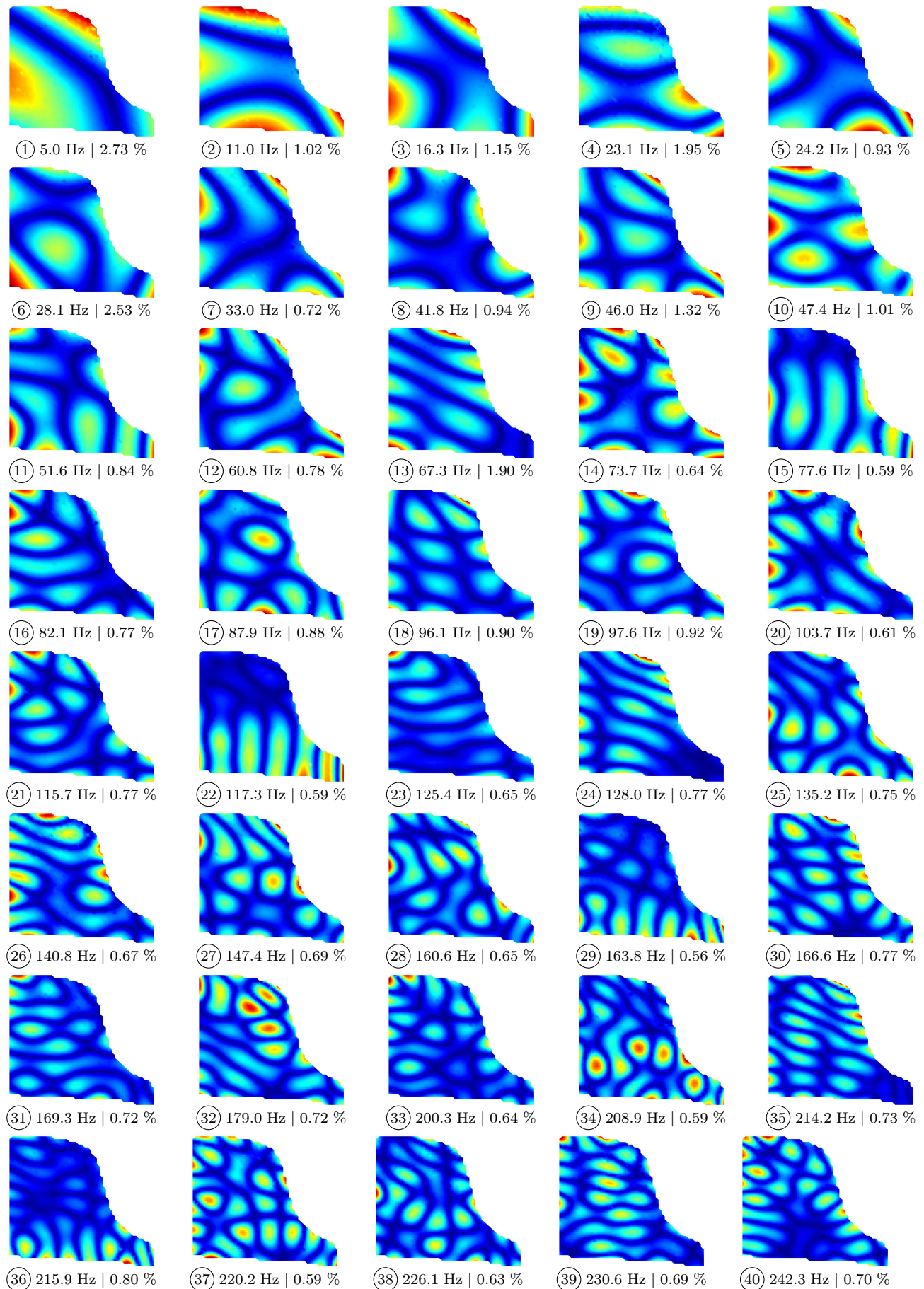


FIGURE VIII.8 – Déformées modales identifiées - I



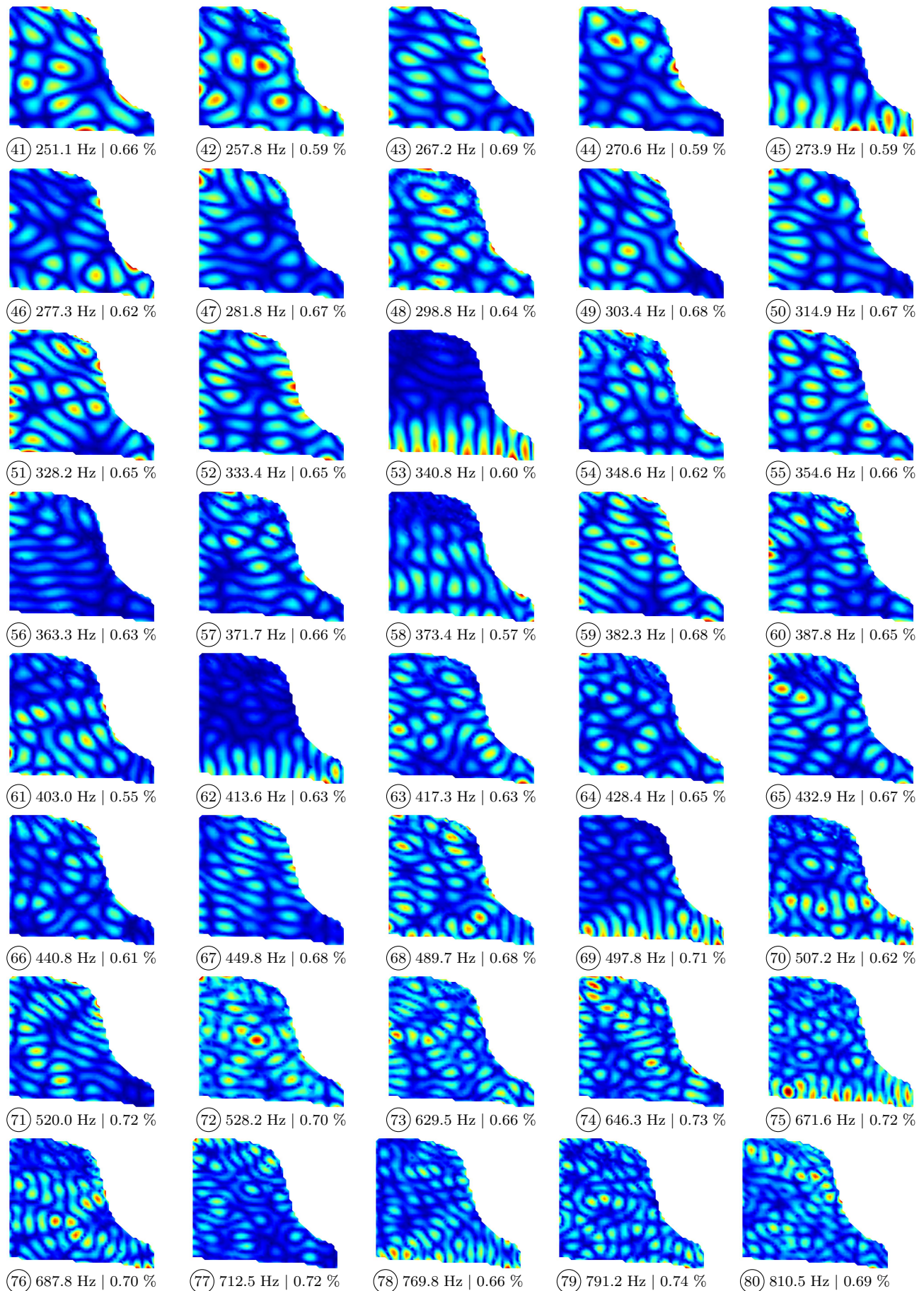


FIGURE VIII.9 – Déformées modales identifiées - II

### VIII.3.4 Incertitudes

Le dernier résultat présenté ici au sujet de l'analyse modale effectuée sur la table d'harmonie du SP190// concerne la quantification des incertitudes associées à l'estimation des fréquences et amortissements modaux. Comme on l'a évoqué plus haut, l'emploi des critères de stabilité pour le choix des composantes à conserver interdit l'utilisation de l'approche perturbative développée au chapitre IV, section IV.3 pour le cas de la méthode ESPRIT générale puis spécialisée dans le cadre de l'analyse modale au chapitre V, expression (V.2.16). En effet, l'approche perturbative se base sur une estimation classique par la méthode ESPRIT, qui suppose l'extraction des paramètres d'un signal dont l'ordre est connu. Dans le cas des critères de sélection des composantes modales correspondant à des ordres différents peuvent être conservées, empêchant l'utilisation de cette approche.

Cependant, on a également évoqué au chapitre V la possibilité d'utiliser le critère de stabilité  $\tilde{\sigma}_M$  (expression (V.2.23)) pour quantifier les incertitudes. Cette indicateur, contrairement à l'approche perturbative qui s'intéresse à l'incertitude due à une perturbation des *données*, quantifie l'incertitude due à une mauvaise estimation de l'*ordre du signal*. On a pu montrer dans un cas d'application que ces deux indicateurs peuvent donner des résultats différents (voir chapitre V, figure V.9).

Sur la figure VIII.10 sont tracées les incertitudes associées aux fréquences  $\tilde{f}_r$  et amortissement modaux  $\tilde{\xi}_r$  identifiés, estimées à partir de l'indicateur  $\tilde{\sigma}_M$  avec  $M = 10$  et en fonction du numéro du mode. En noir sont représentées l'incertitude *relative* sur les fréquences  $\tilde{\sigma}_M(\tilde{f}_r)/\tilde{f}_r$  et l'incertitude *absolue* sur les amortissements  $\tilde{\sigma}_M(\tilde{\xi}_r)$ . Comme dans le cas de l'échantillon d'épicéa, ces incertitudes sont très faibles : il est difficile de croire que l'incertitude relative sur les fréquences soit inférieure à  $10^{-3}$ .

Un point peut être noté : l'incertitude relative en fréquence (en noir) et l'incertitude absolue en amortissement (en rouge) semblent, dans la plupart des cas, être du même ordre de grandeur. Cela rejoint alors la formule de la variance des estimations de l'amortissement (voir expression (V.2.20)), dérivée dans le cadre de l'approche perturbative, et s'écrit sous la forme  $\sigma(\tilde{\xi}_r) = \sigma(\tilde{f}_r)/f_r$ .

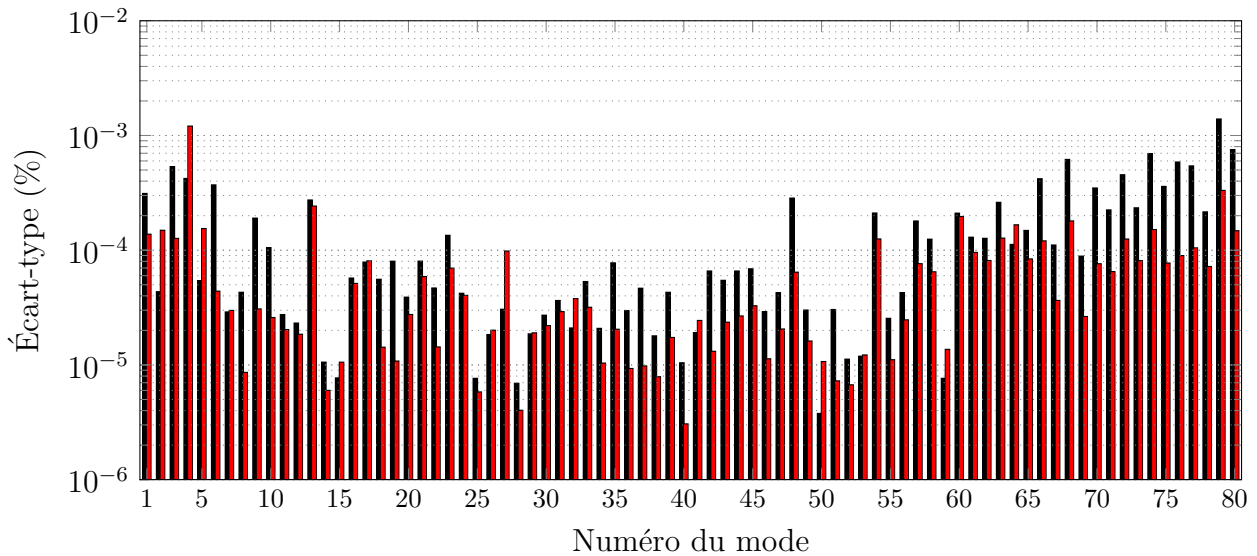


FIGURE VIII.10 – Incertitudes. Écart-type relatif en fréquence (noir) et absolu en amortissement (rouge), estimés par le biais de l'indicateur  $\tilde{\sigma}_M$  avec  $M = 10$  (eq. (V.3.38)).

## VIII.4 Identification sur les modes

La présente section présente le résultat de l'identification des propriétés mécaniques de l'épicéa constituant la table à partir des résultats de l'analyse modale présentée ci-avant. Tout d'abord, le modèle de la structure permettant de formuler le problème inverse aux valeurs propres est décrit. Ensuite, le choix des inconnues, qui représenteront les paramètres à identifier, est justifié. Enfin, le résultat de l'identification est présenté ; différents indicateurs sont illustrés (matrice de MAC, erreurs en fréquence, sensibilité des données modales), permettant de juger de la pertinence des résultats obtenus. Enfin, la comparaison des modes expérimentaux et numériques est présentée.

### VIII.4.1 Modèle associé

La première étape consiste à formuler un modèle de la structure adapté à la méthode de résolution d'un problème aux valeurs propres proposée au chapitre V, section V.3. En particulier, il est nécessaire que la sensibilité des données modales numériques  $\mathbf{q}_r$  et  $\lambda_r$  par rapport aux paramètres à identifier puisse être dérivée analytiquement.

Pour le besoin de l'application présentée ici, un modèle élément fini de la table d'harmonie du SP190// est implémenté. Celui-ci se base sur la géométrie de la table fournie par Stephen Paulello. Une problématique liée à l'implémentation de ce modèle concerne la définition du maillage : la topologie de celui-ci est fortement contrainte par la forme de la structure, ainsi que par la nécessité de suivre le *patchwork* formé par les différentes planches d'épicéa sur la face inférieure de la table. Cela entraîne la présence de singularités géométriques sur la structure, empêchant la définition d'un maillage de quadrangles. En conséquence, des éléments de type P1 triangulaires sont utilisés pour discrétiser la structure. Ce type d'éléments converge malheureusement plus lentement que les éléments quadrangulaires. De plus, les longueurs d'onde impliquées sont finalement assez réduites (voir mode (80) de la figure VIII.9). De façon à assurer

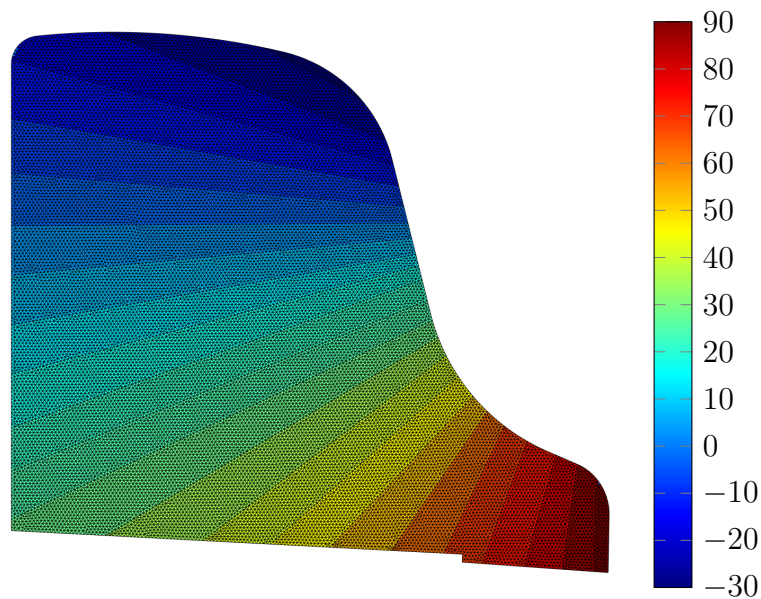


FIGURE VIII.11 – Maillage éléments finis utilisé pour l'application de la méthode d'identification. Couleur : angle des fibres de l'épicéa sur la couche inférieure.



la convergence, le maillage est composé d'un peu plus de 40 000 éléments triangulaires, ce qui entraîne un coût de calcul conséquent. Une vue du maillage éléments finis réalisé est donnée sur la figure VIII.11. Le modèle réduit utilisé est le modèle de plaque épaisse (ou Hencky-Mindlin).

### VIII.4.2 Choix des inconnues

Dans ce qui suit, on souhaite identifier les composantes du tenseur des raideurs en contraintes planes  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  ainsi que les modules de cisaillement hors-plan  $G_{\text{TR}}$  et  $G_{\text{LR}}$  de l'épicéa constituant la table d'harmonie. Trois difficultés majeures doivent être surmontées : (i) la géométrie de la structure et l'orientation des fibres du bois ne permettent pas de postuler une quelconque orthotropie *spéciale* du matériau ; (ii) plusieurs couches de bois sont présentes ; (iii) l'orientation des fibres du bois (et donc des axes d'orthotropie de celui-ci) varie dans l'espace, et cela est réalisé à partir de planches d'épicéa différentes. La prise en compte de la totalité des paramètres en tant qu'inconnues (orientation locale des fibres, propriétés des différentes planches et des différentes couches) ne semble pas un choix raisonnable. En conséquence, on choisit ici de réduire le nombre de paramètres.

En particulier, on suppose que le matériau employé est homogène, c'est à dire que toutes les planches utilisées pour la confection de la table ont les mêmes propriétés mécaniques. De plus, on considère que les angles des différentes couches sont connus *exactement*. En conséquence, *seulement* 6 paramètres restent à déterminer ; la matrice de raideur généralisée du modèle formulé prend alors la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{\text{LL}} \mathbf{K}^{\text{Q}_{\text{LL}}} + \mathbf{Q}_{\text{RR}} \mathbf{K}^{\text{Q}_{\text{RR}}} + \mathbf{Q}_{\text{LR}} \mathbf{K}^{\text{Q}_{\text{LR}}} + G_{\text{LR}} \mathbf{K}^{G_{\text{LR}}} + G_{\text{LT}} \mathbf{K}^{G_{\text{LT}}} + G_{\text{TR}} \mathbf{K}^{G_{\text{TR}}} \quad (\text{VIII.4.1})$$

où les matrices  $\mathbf{K}^p$  prennent en compte la rotation des tenseurs de raideur en contraintes planes (voir annexe B.1, expressions (B.1.14) et (B.1.15)), la forme des différents tenseurs de raideurs généralisés  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  du modèle de plaque épaisse (voir annexe C.2, expressions (C.2.25), (C.2.26), (C.2.27) et (C.2.28)) ainsi que la méthode d'assemblage de la matrice du modèle éléments finis (voir annexe A.2, expression A.2.27).

### VIII.4.3 Identification

L'identification proposée ici se concentre, comme dans le cas de la planche d'épicéa présentée au chapitre V, sur la minimisation des écarts entre les *valeurs propres* numériques et expérimentales : les *modes propres* numériques et expérimentaux identifiés ne sont quant à eux utilisés seulement pour faire correspondre les deux bases modales par le critère de MAC.

Par rapport au cas élémentaire présenté au chapitre V, des différences importantes doivent être soulignées : (i) les conditions aux limites appliquées ont un effet plus important sur la réponse transitoire libre mesurée : les premiers modes sont particulièrement influencés par ces conditions aux limites, ce qui se caractérise par un fort amortissement de ces modes ; (ii) les contributions des différents paramètres sont beaucoup moins bien séparées que dans le cas de l'échantillon d'épicéa, pour lequel certains modes correspondaient à une déformation purement longitudinale, d'autres une déformation purement transverse, etc. Dans le cas présent, l'aspect multicouche et la variation des propriétés mécaniques tend à mélanger toutes les contributions. Le problème inverse est donc beaucoup moins bien conditionné.

En conséquence, plusieurs choix supplémentaires concernant la régularisation du problème sont pris. Le premier consiste à écarter l'amortissement du problème et à réaliser l'identification de paramètres *réels* à partir de la minimisation des écarts en fréquence seulement



		$Q_{LL}$	$Q_{RR}$	$Q_{LR}$	$G_{LR}$	$G_{LT}$	$G_{TR}$
Initial	$\text{Re}\{\bullet\}$	11245	247	110	903	903	120
Identifié	$\text{Re}\{\bullet\}$	$12710 \pm 340$	$215 \pm 30$	$25 \pm 130$	$880 \pm 40$	$660 \pm 100$	$260 \pm 60$

TABLE VIII.1 – Résultat de l'identification. Raideurs en MPa.

(sans l'amortissement). Le deuxième consiste, pour pallier au problème de conditionnement, à amortir l'algorithme de descente (voir section V.3, expression (V.3.30)). A chaque itération de l'algorithme, seulement 10 % de la direction de descente est utilisée lors de la mise à jour des paramètres. Cela permet d'éviter les oscillations de l'algorithme autour d'un minimum local faiblement contrasté. Enfin, on choisit de favoriser les modes plus haute fréquence en utilisant la pondération proposée en fréquence (expression (V.3.29)). Dans cette dernière expression, le paramètre de pondération est choisit tel que  $\alpha = 0.8$ . Ensuite, la forme complexe des modes expérimentaux (agencement des ventres et lignes nœudales) peut entraîner une faible corrélation de ceux-ci avec les modes numériques ; pour cela, il est choisi de considérer deux modes corrélés à plus de 50 % (critère de MAC) comme équivalents. Enfin, il a été remarqué lors de l'analyse modale que certains modes de la structure avaient été *manqués* ; dans l'objectif d'assurer que chaque mode expérimental puisse avoir son équivalent numérique, on choisit de calculer 140 modes numériques à chaque itération (pour 80 modes expérimentaux disponibles). Ces choix influent bien sûr sur les résultats de l'identification ; quantifier cette influence représente une perspective de travail nécessaire.

Les 80 modes expérimentaux identifiés sont injectés dans le problème de minimisation afin d'identifier les 6 paramètres  $Q_{LL}$ ,  $Q_{RR}$ ,  $Q_{LR}$ ,  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  et  $G_{TR}$ . L'initialisation est faite sur les propriétés matériau identifiées sur l'échantillon d'épicéa (voir section V.4, tableau V.2). Seules la partie réelle de ces valeurs est prise en compte. Le critère de convergence est fixé tel

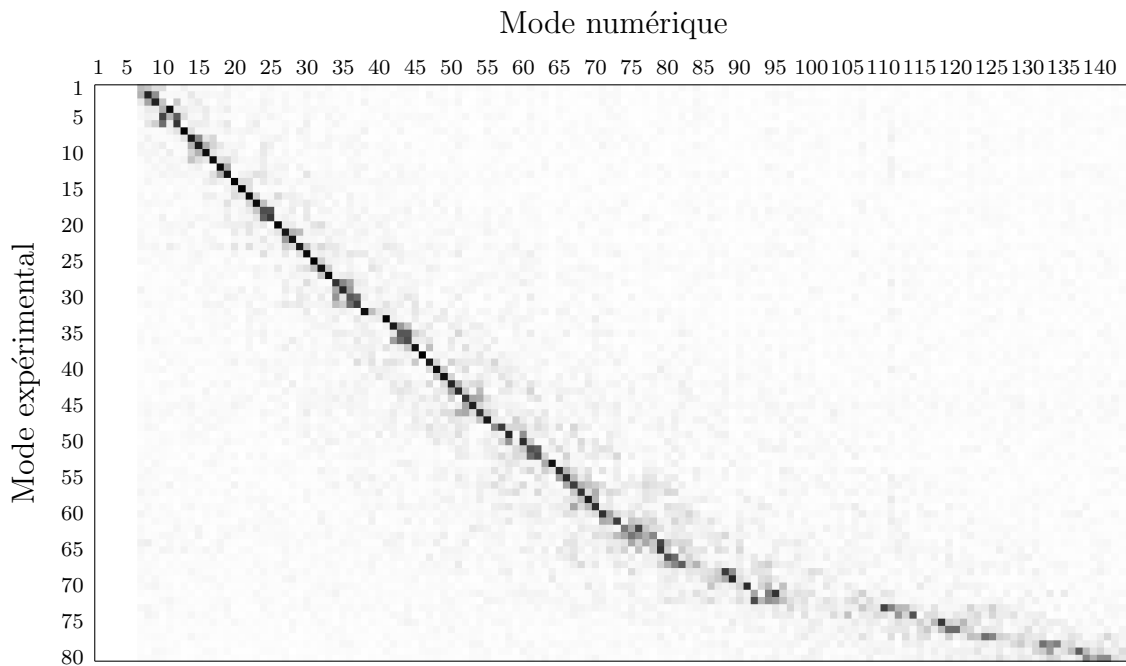


FIGURE VIII.12 – Matrice de MAC après identification.

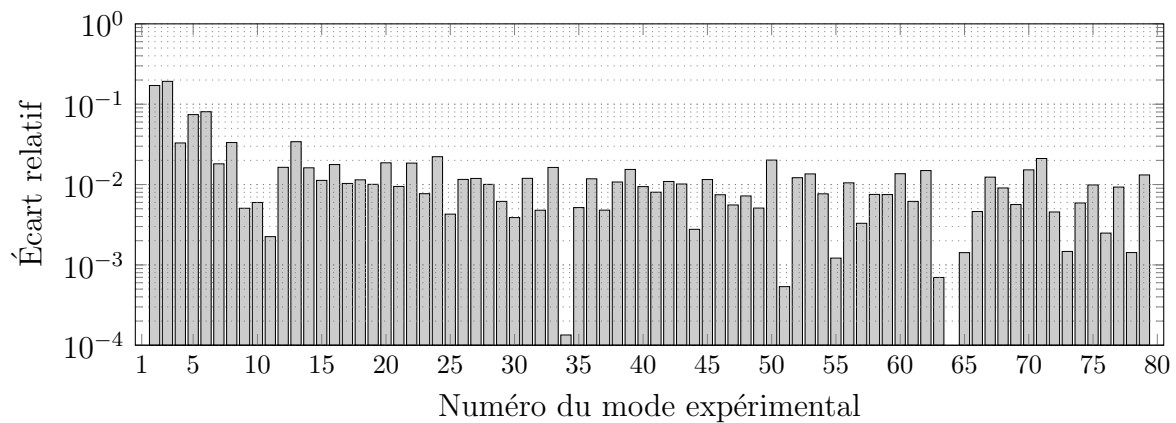
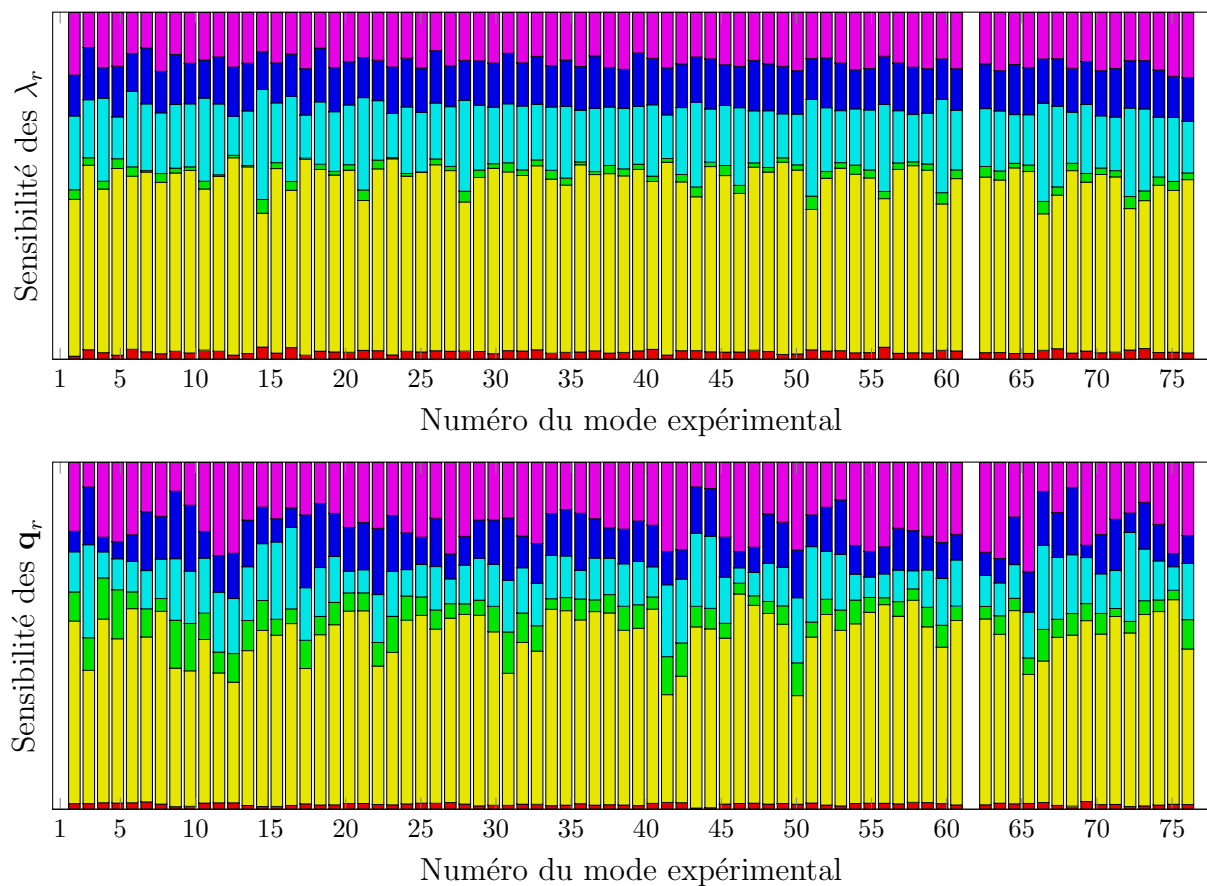
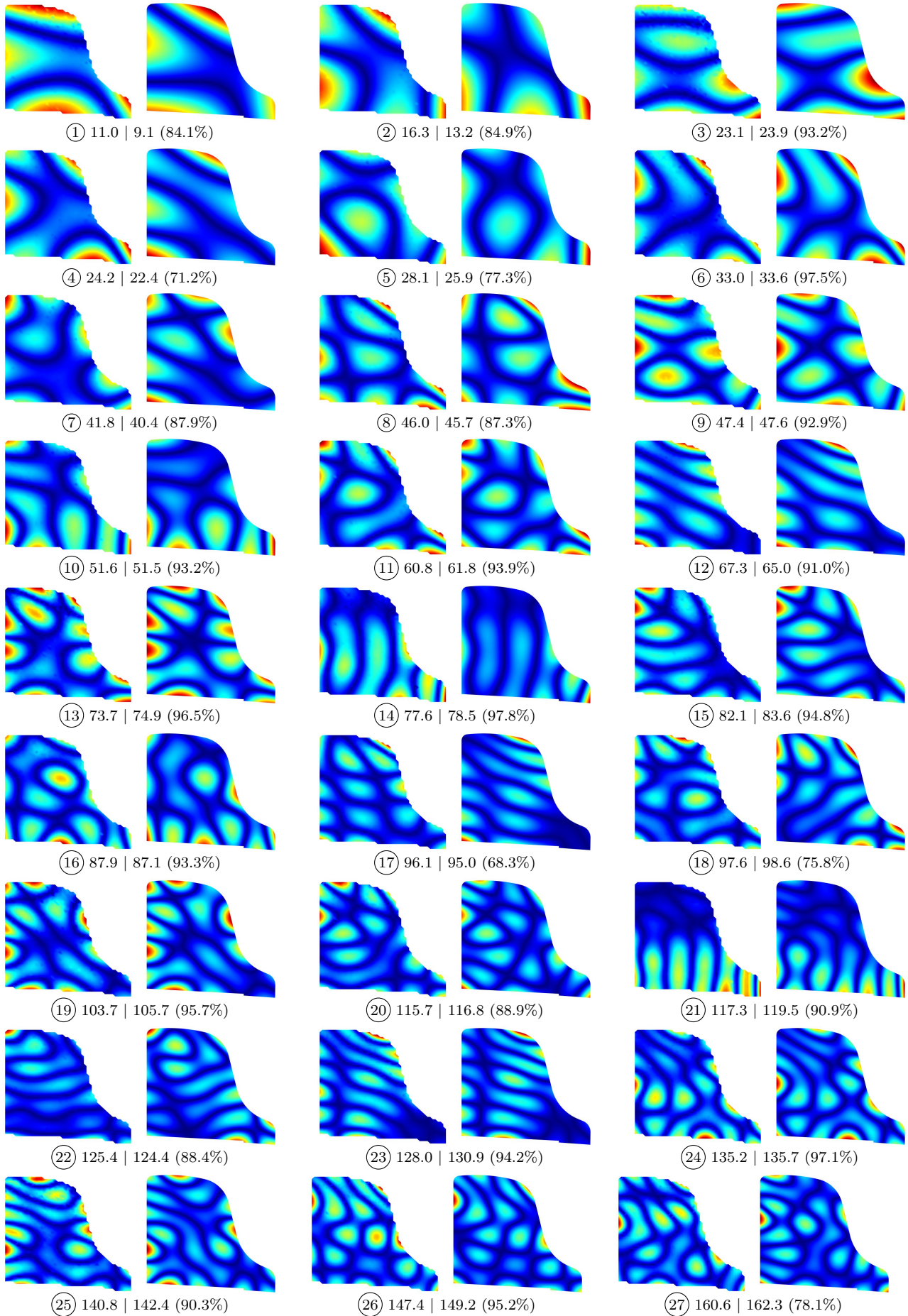
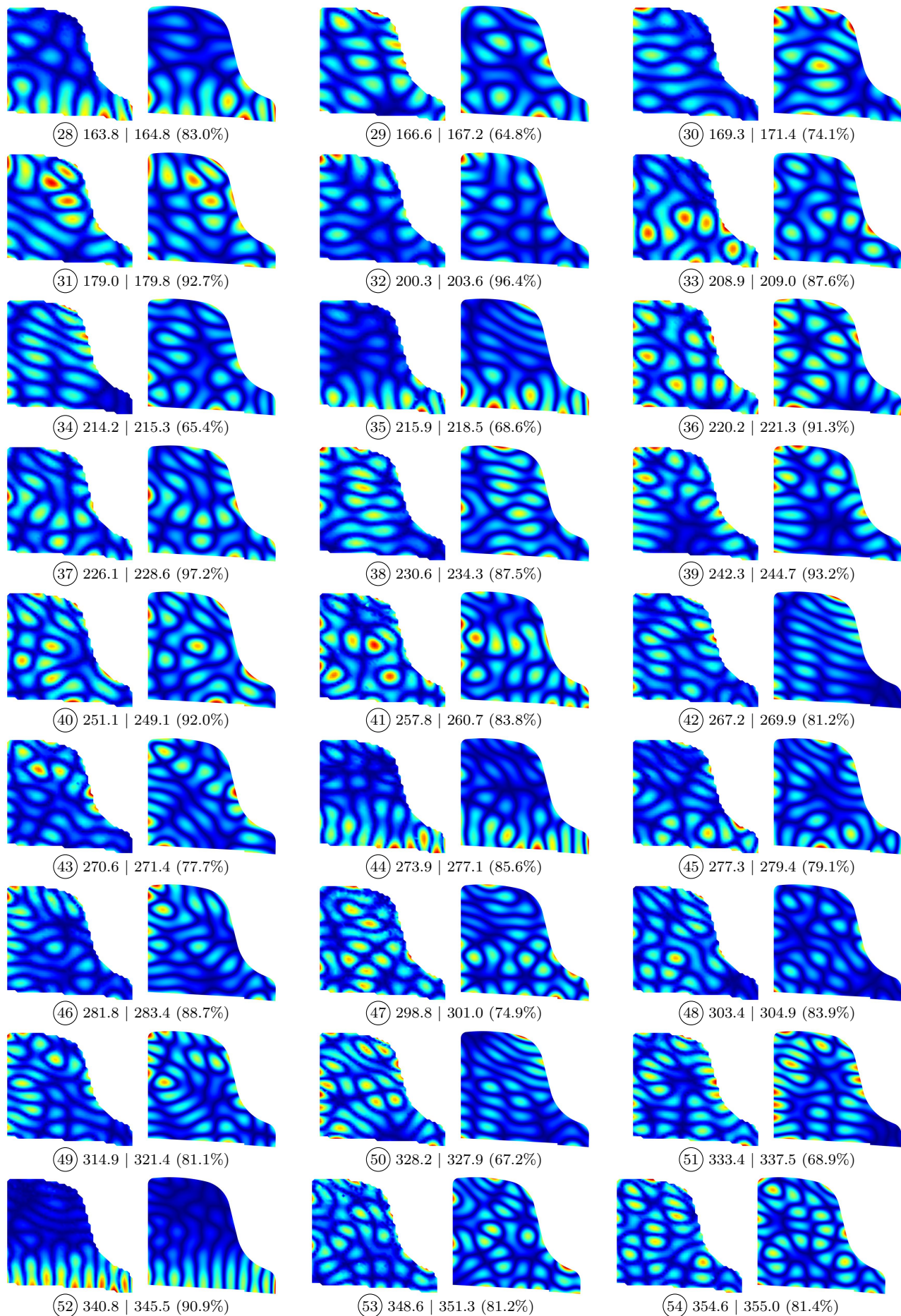


FIGURE VIII.13 – Écarts relatifs en fréquence après identification.

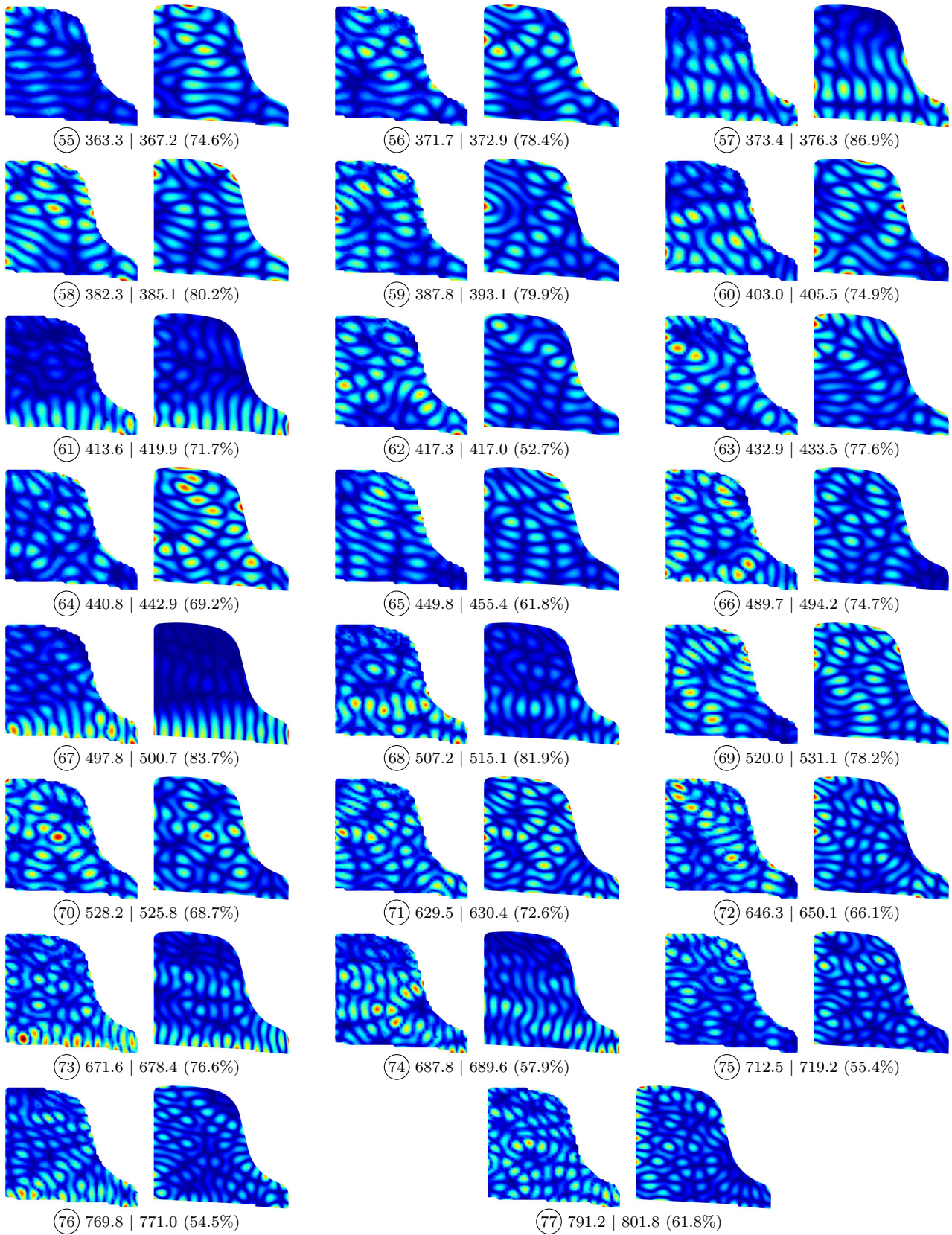
FIGURE VIII.14 – Sensibilités normalisées des données modales dans la configuration finale identifiée, et face aux paramètres  $Q_{LL}$  (rouge),  $Q_{RR}$  (jaune),  $Q_{LR}$  (vert),  $G_{LR}$  (cyan),  $G_{LT}$  (bleu) et  $G_{TR}$  (violet).

FIGURE VIII.15 – Comparaison des modes - I. Légende :  $f_r^{\text{exp}}$  |  $f_r^{\text{num}}$  (MAC%).



FIGURE VIII.16 – Comparaison des modes - II. Légende :  $f_r^{\text{exp}}$  |  $f_r^{\text{num}}$  (MAC).



FIGURE VIII.17 – Comparaison des modes - III. Légende :  $f_r^{\text{exp}}$  |  $f_r^{\text{num}}$  (MAC).

que  $\|\delta \mathbf{p}\| < 0.1$  MPa. Ce critère est atteint après 24 itérations et mène à l'identification des paramètres listés dans le tableau [VIII.1](#).

Les différentes figures qui suivent permettent de donner une idée de la pertinence des paramètres identifiés ainsi que d'expliquer l'incertitude qui leur est associée. Tout d'abord, sur la figure [VIII.12](#) est représentée la matrice de MAC correspondant à la dernière itération de l'algorithme de descente. La comparaison de cette matrice avec celle obtenue dans le cas de l'échantillon d'épicéa (chapitre [V](#), figure [V.13](#)) permet d'observer que plus de termes significatifs sont présents en dehors de la *diagonale* (au sens de la valeur la plus forte à chaque ligne). Ceci est dû à la forte complexité des modes expérimentaux, ceux-ci pouvant en conséquence être corrélés de façon significative avec plusieurs modes numériques. Ensuite, on peut observer que certains modes expérimentaux ont été manqués, notamment entre les modes 32, 33 et 49, 50. À partir du mode 62, de nombreux modes ont été manqués. Ce résultat est intéressant car il montre la possibilité d'itérer : sur la base de la connaissance des modes *manqués*, il serait possible de re-travailler sur le diagramme de stabilisation afin d'extraire ceux-ci expérimentalement.

La figure [VIII.13](#) représente les erreurs relatives en fréquence après identification. On peut remarquer que ces erreurs sont globalement inférieures à 2 %, les modes 1 à 8 et 13 mis à part. Ces derniers sont, comme on l'a évoqué plusieurs fois, influencés par les conditions aux limites, qui ne sont pas prises en compte dans le modèle ; cela explique en partie l'erreur observée.

Sur la figure [VIII.14](#) sont représentées les sensibilités des données modales numériques face à la perturbation des paramètres à identifier, correspondant à la dernière itération de l'algorithme de descente. L'observation de la sensibilité des valeurs propres  $\lambda_r$  est évocatrice : cette sensibilité est quasiment indépendante du mode. En conséquence, la matrice des sensibilité est mal conditionnée. Cela explique les fortes incertitudes relatives estimées sur les paramètres  $Q_{LR}$  (520 %),  $G_{LT}$  (15 %) et  $G_{TR}$  (23 %). Une fois de plus, on remarque que la sensibilité des vecteurs propres  $\mathbf{q}_r$  est différente de celle des valeurs propres : intégrer ceux-ci dans la fonction objectif pourrait de nouveau permettre d'améliorer la qualité des estimations.

Enfin, les figures [VIII.15](#), [VIII.16](#) et [VIII.17](#) donnent la comparaison entre les modes expérimentaux (à gauche) et numériques (à droite), ainsi que les fréquences qui leur sont associées. Malgré leur forme complexe, certains modes sont très similaires (voir modes [\(13\)](#), [\(19\)](#), [\(24\)](#), [\(37\)](#) à [\(39\)](#), etc.). La corrélation moyenne des modes expérimentaux et numériques est de 81 %.

## VIII.5 Analyse en vecteurs d'onde

Cette dernière section présente les résultats de l'application de l'analyse en vecteurs d'onde proposée au chapitre VII sur la réponse de la table d'harmonie du SP190// mesurée. Une analyse *locale* est réalisée, permettant de mesurer la dispersion des ondes sur un sous-domaine de la structure. La surface de dispersion obtenue est utilisée pour identifier les raideurs généralisées locales du modèle de plaque mince anisotrope. Les résultats obtenus sont comparés avec des résultats théoriques.

Dans les développements qui suivent, les détails concernant l'analyse en vecteurs d'onde sont succinctement évoqués. Pour des explications plus précises du fonctionnement de la méthode, le lecteur est renvoyé au chapitre VII.

### VIII.5.1 Extraction locale

De façon à appliquer l'analyse en vecteurs d'onde, la transformée de Fourier en temps de la réponse transitoire libre mesurée est prise ; cela permet d'obtenir une collection de réponses *harmoniques* de la structure. Sur chacune de ces réponses harmonique est ensuite appliquée l'analyse en vecteurs d'onde. On choisit ici de limiter le domaine de l'étude entre 50 Hz et 1750 Hz : plus bas en fréquence, les grandes longueurs d'onde impliquées entraînent une forte incertitude sur la détermination des vecteurs d'onde à l'aide de la méthode ESPRIT. Plus haut sur le spectre (au dessus de 1800 Hz), le niveau de signal-à-bruit est jugé insuffisant. Finalement, 3400 réponses harmoniques de la table sont disponibles, la méthode s'appliquant sur chacune d'entre elles. L'application locale de la méthode d'analyse en vecteurs d'onde se déroule en trois étapes : (i) choix des dimensions de la fenêtre d'étude ; (ii) extraction des vecteurs d'onde avec la méthode ESPRIT ; (iii) sélection des données pertinentes à l'aide de critères de confiance.

**Choix de la fenêtre d'étude** De manière à réaliser une analyse locale de la dispersion des ondes dans la structure, l'analyse en vecteurs d'onde est appliquée par sous-domaines. Le choix de la taille de ce sous-domaine (fenêtre d'analyse) est un compromis entre : (i) le souhait de caractériser *localement* la structure (donc sur la base d'une fenêtre réduite) ; (ii) la nécessité d'estimer les vecteurs d'onde avec une résolution satisfaisante (celle-ci augmentant avec la taille de la fenêtre d'étude).

Ici, c'est l'aspect *local* de la caractérisation qui est privilégié. La taille du sous-domaine choisie est donc une fenêtre carrée de  $6 \times 6$  points de mesure, ce qui représente une zone d'environ 15 cm de côté (voir maillage de mesure en figure VIII.4).

Le choix d'une fenêtre aussi réduite entraîne l'identification de vecteurs d'onde *non physiques* (cad. trop éloignés de la surface de dispersion). On donne donc plus bas trois critères permettant de sélectionner les vecteurs d'onde *physiques* à conserver pour l'identification des propriétés locales de la structure.

**Application de la méthode ESPRIT** Une fois les dimensions de la fenêtre d'analyse choisies, la méthode ESPRIT est appliquée : (i) sur chacune des 3400 réponses harmoniques disponibles ; (ii) pour chacune des 1060 fenêtres de  $6 \times 6$  points qui peuvent être définies sur le maillage de mesure.

De façon à juger de la pertinence des vecteurs d'onde extraits, l'incertitude sur ceux-ci est quantifiée par l'approche perturbative (voir chapitre IV, section IV.3).

Pour le choix de l'ordre du signal, c'est le critère SAMOS qui est utilisé (voir chapitre IV, section IV.3). Celui-ci nécessite de fixer les ordres de signal *candidats*  $P$  parmi lesquels l'ordre du signal  $R$  est choisi. Au vu de la taille de la fenêtre d'analyse utilisée, on se limite à l'extraction de 5 vecteurs d'onde au maximum. Les ordres candidats choisis sont donc tels que  $P \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ .

En tout, l'extraction des vecteurs d'onde locaux et de l'incertitude qui leur est associée est donc réalisée près de 4 millions de fois, pour un temps total de calcul de l'ordre de la dizaine d'heure (sur un ordinateur personnel). Finalement, une collection de vecteurs d'onde est obtenue pour chaque fenêtre d'analyse définie, la taille de cette collection étant typiquement de l'ordre de la dizaine de milliers.

**Sélection des données pertinentes** Sur la collection des vecteurs d'onde  $\tilde{\mathbf{k}}_r$  obtenus, une partie contient des estimations *non physiques* ou très incertaines : (i) correspondant à des ondes évanescentes (bords, sources) qu'il ne vaut mieux pas prendre en compte dans la procédure d'identification qui suit ; (ii) étant associés à une incertitude trop élevée ; (iii) correspondant à des longueurs d'onde  $\lambda = 2\pi/|\tilde{\mathbf{k}}_r|$  en dehors d'un domaine acceptable.

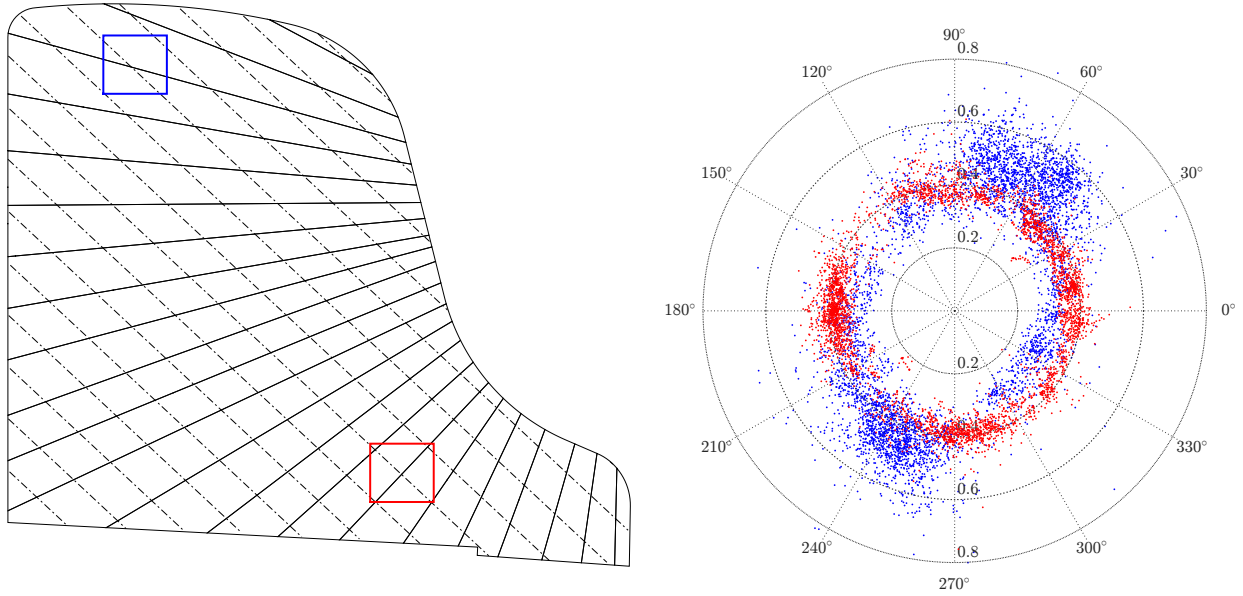
Trois critères de *confiance* peuvent alors être mis en œuvre pour sélectionner les vecteurs d'onde pertinents parmi la collection de vecteurs d'onde identifiés. Tout d'abord, on se propose d'utiliser le critère sur le taux de décroissance spatiale  $\gamma_r = \text{Im}\{\tilde{\mathbf{k}}_r\} / \text{Re}\{\tilde{\mathbf{k}}_r\}$  des ondes identifiées proposé au chapitre VII, expression VII.2.10. Un taux de décroissance spatiale trop important dénote alors une onde fortement évanescente, que l'on ne souhaite pas conserver. Dans les résultats présentés ici, on a appliqué ce critère tel que  $\gamma^{\max} = 30\%$ .

Ensuite, l'incertitude sur les vecteurs d'onde identifiés, estimée par le biais de l'approche perturbative, est utilisée pour ne conserver que les données associées à une incertitude *raisonnable*. En particulier, on utilise ici l'écart-type relatif  $\sigma(\tilde{\mathbf{k}}_r)/\|\tilde{\mathbf{k}}_r\|$  comme critère. Seuls les vecteurs d'onde associés à un écart-type relatif de moins de 30% sont conservés.

Enfin, un critère sur les longueurs d'onde  $\lambda_r = 2\pi/\|\tilde{\mathbf{k}}_r\|$  est formulé. En effet, on peut considérer que les ondes identifiées doivent se situer dans un domaine de longueur d'onde acceptable. Ici, on considère qu'un vecteur d'onde associé à une longueur d'onde plus grande que la taille de la structure (inscrite dans un carré d'environ 1.5 m de côté) n'est pas valide ; cela permet de poser la borne inférieure  $|\tilde{\mathbf{k}}_r| \geq k_{\min}$ , avec  $k_{\min} = 4.2$  rad/m. Pour la borne supérieure, on utilise le critère de Nyquist : un vecteur d'onde trop proche de ce critère est considéré comme trop incertain. Pour cela, on se base sur l'espacement des points du maillage de mesure (environ 3 cm). On choisit alors d'écarter les vecteurs d'onde associés à une longueur d'onde inférieure ou égale à trois fois le pas du maillage ; cela correspond au critère  $|\tilde{\mathbf{k}}_r| \leq k_{\max}$ , avec  $k_{\max} = 63$  rad/m.

**Résultat** Sur la figure VIII.18 sont illustrés deux résultats obtenus sur deux fenêtres d'analyse différentes. La figure VIII.18a est un schéma de la table d'harmonie du SP190//, où l'orientation des fibres de bois est dénotée par des lignes (couche inférieure en lignes pleines et couche supérieure en lignes pointillées). La collection de vecteurs d'onde obtenue sur les fenêtres bleue et rouge sont représentées sur la figure VIII.18b. On suppose que sur le domaine considéré, la structure se comporte comme une plaque mince ; la norme des vecteurs d'onde est donc proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. De manière à rendre les résultats plus lisibles, on a représenté sur cette figure les résultats correspondant aux vecteurs d'onde *normalisés*  $\tilde{\mathbf{k}}_r(\omega)/\sqrt{\omega}$  ; cet indicateur est normalement invariant en fréquence et permet de superposer tous les résultats sur un même diagramme polaire.





(a) Orientation des fibres et position des fenêtres d'analyse

(b) Vecteurs d'onde normalisés  $\tilde{\mathbf{k}}_r(\omega)/\sqrt{\omega}$ .

FIGURE VIII.18 – Exemple de collection de vecteurs d'onde obtenue.

Les deux zones bleue et rouge correspondent à deux configurations différentes de l'orientation des couches d'épicéa. En particulier, la zone rouge correspond à un cas pour lequel les fibres se croisent quasiment perpendiculairement ; les vecteurs d'onde normalisés identifiés semblent distribués sur un cercle. Au contraire, les vecteurs d'onde normalisés associés à la zone rouge présentent une certaine anisotropie : cela est dû au fait qu'à cette position, les deux couches de bois sont mieux alignées.

L'extraction locale des vecteurs d'onde par l'analyse proposée permet donc d'obtenir une collection de vecteurs d'onde comme celles représentées en figure VIII.18b pour chacune des 1060 fenêtres que l'on a défini sur le maillage de mesure. Cette extraction ne nécessite aucune hypothèse sur le comportement de la structure ; en conséquence, on peut imaginer identifier les paramètres de modèles de plaques variés à partir des collections de vecteurs d'onde obtenues.

### VIII.5.2 Identification du comportement de plaque mince

On se restreint ici à l'identification du comportement de plaque mince anisotrope équivalent en flexion. On reprend pour cela la procédure proposée au chapitre VII. Cette procédure formule l'identification des composantes du tenseur de raideur spécifique en flexion de plaque mince sous la forme d'une simple régression linéaire.

Cette procédure suppose toutefois que les comportements en flexion et en membrane de la plaque soient *découplés* ; cela permet notamment de rendre l'équation de dispersion des ondes de flexion scalaire (voir chapitre II, expression II.3.12). Dans le cas de la table d'harmonie du SP190//, ce n'est absolument pas le cas : la dissymétrie des couches d'épicéa couple ces deux mécanismes de déformation. La conséquence de ce couplage est un *assouplissement* global de la plaque en flexion ; on peut donc s'attendre à identifier, par cette procédure, des raideurs en flexions *sous-estimées*.

Seule la partie réelle  $\tilde{\mathbf{k}}_r$  des vecteurs d'onde identifiés est utilisée pour l'identification du

comportement de plaque mince équivalent. On rappelle la formule de la raideur de plaque mince découplée en flexion spécifique équivalente  $\tilde{B}(\theta)$ , où  $\theta$  est l'angle de propagation de l'onde, tel que  $\underline{\kappa} = k(\theta)[c \ s]$ , avec  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$  :

$$\tilde{B}(\theta) = \frac{\omega^2}{k(\theta)^4} = \frac{c^4 D_{11} + s^4 D_{22} + 2c^2 s^2 (D_{12} + 2D_{66}) + 4c^3 s D_{16} + 4cs^3 D_{26}}{M} \quad (\text{VIII.5.1})$$

où  $M = \rho h$  est la masse surfacique de la plaque. Par une simple régression linéaire (ici effectuée au sens des moindres carrés), les composantes de raideur en flexion équivalente normalisées  $D_{11}/M$ ,  $D_{22}/M$ ,  $D_{16}/M$ ,  $D_{26}/M$  et le terme  $(D_{12}+2D_{66})/M$  peuvent être estimés sur la collection de nombres d'onde  $k$  et angles  $\theta$  associés vecteurs d'onde extraits  $\underline{\mathbf{k}}_r$ . Cette procédure n'est pas plus détaillée ici ; on trouvera de plus amples informations au chapitre VII.

La figure VIII.19 illustre l'identification du modèle de plaque mince découplée local à partir d'une des collections de vecteurs d'onde obtenues. Tout d'abord, les composantes  $D_{\alpha\beta}/M$  sont identifiées à partir des vecteurs d'onde conservés (points rouges). À partir de ces composantes est ensuite calculée la surface de dispersion associée au mode de flexion associé au modèle de plaque mince identifié.

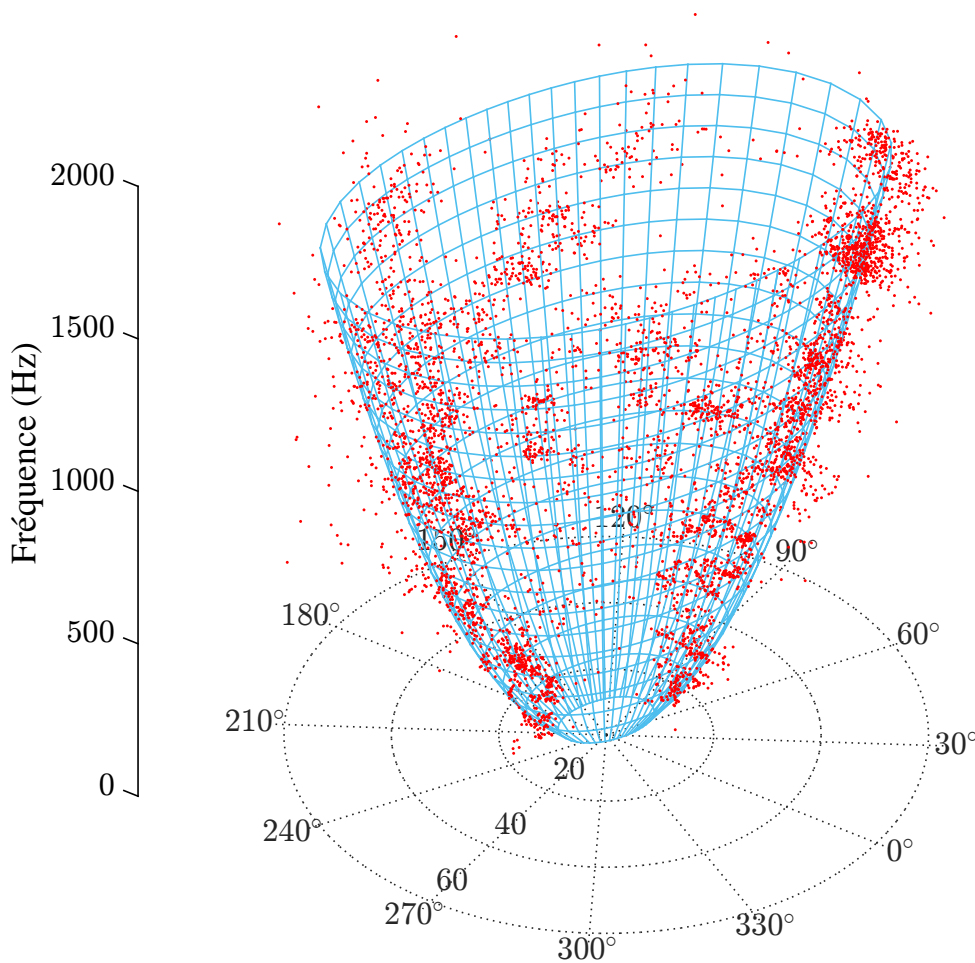
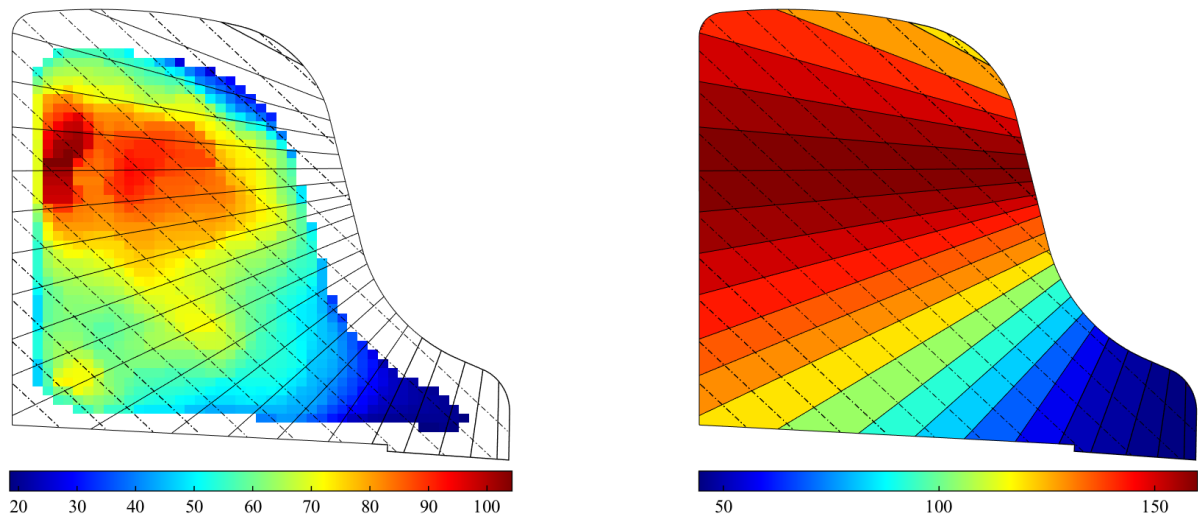
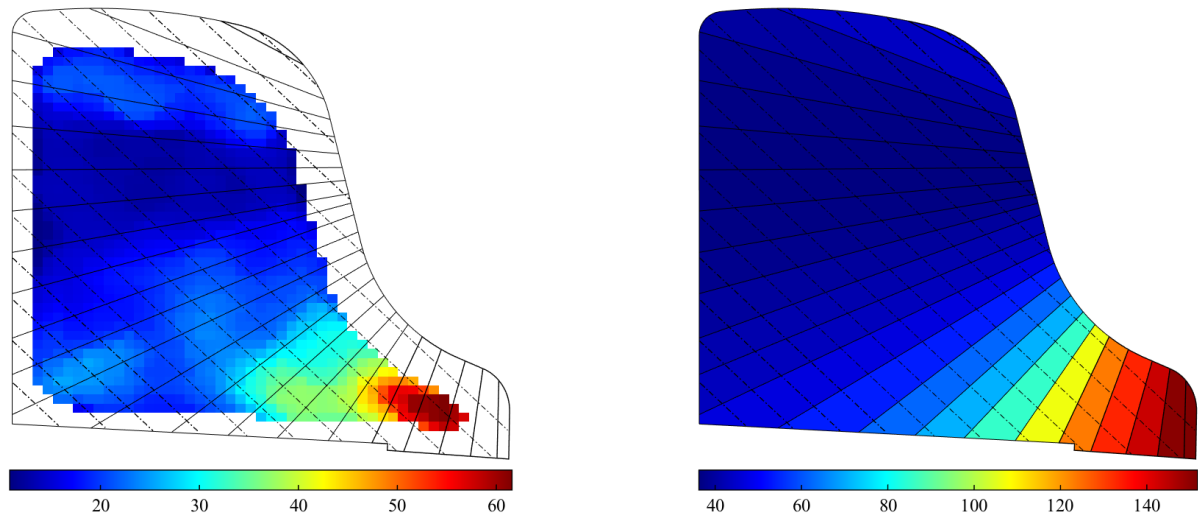
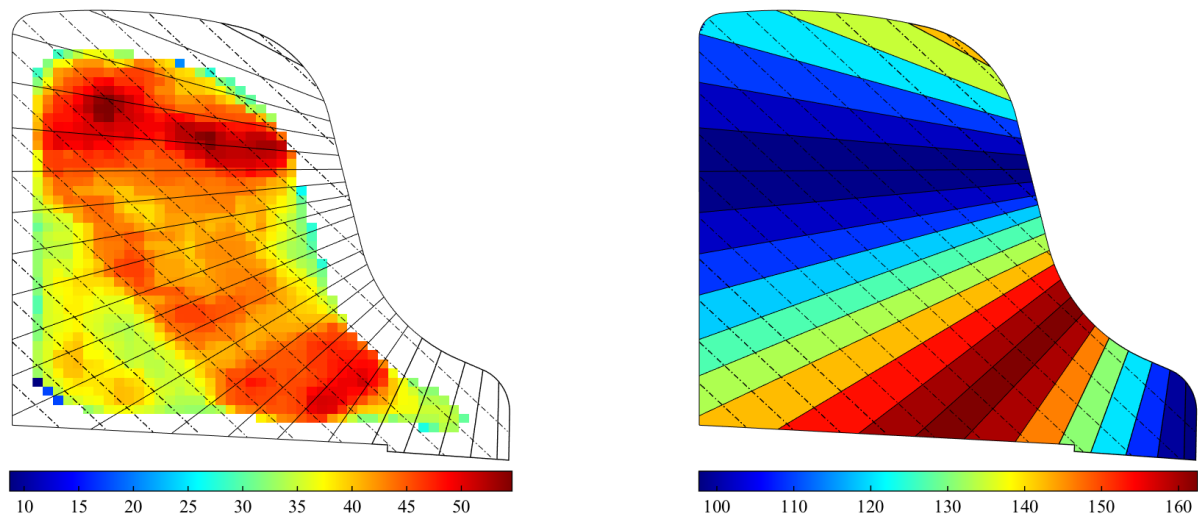


FIGURE VIII.19 – Exemple de surface de dispersion reconstruite à partir de l'identification d'un modèle de plaque mince découplée sur une collection de vecteurs d'onde extraits localement (points rouges).

FIGURE VIII.20 –  $D_{11}/M$ FIGURE VIII.21 –  $D_{22}/M$ FIGURE VIII.22 –  $(D_{12} + 2D_{66})/M$

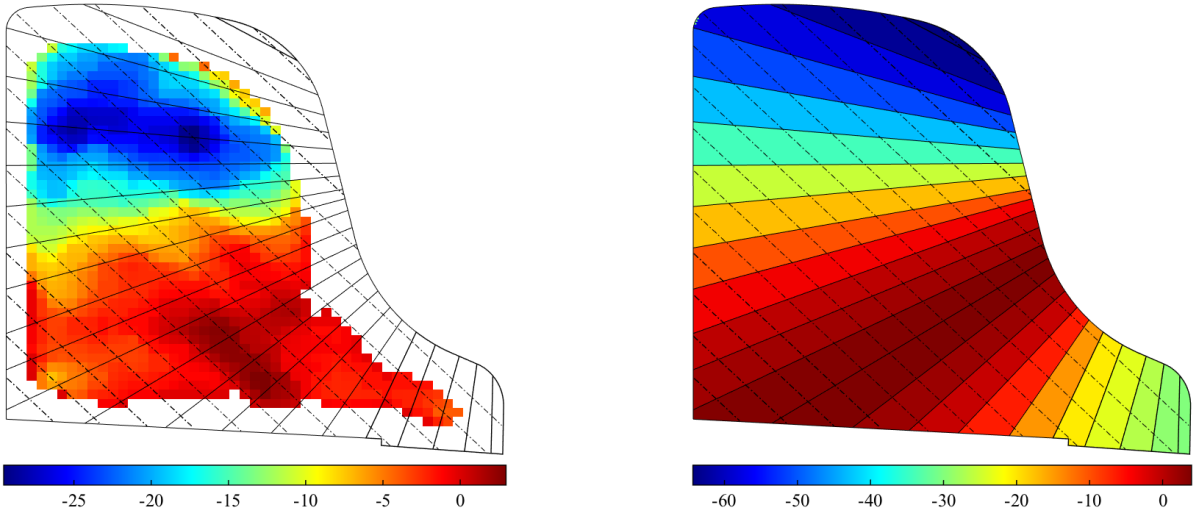


FIGURE VIII.23 –  $D_{16}/M$

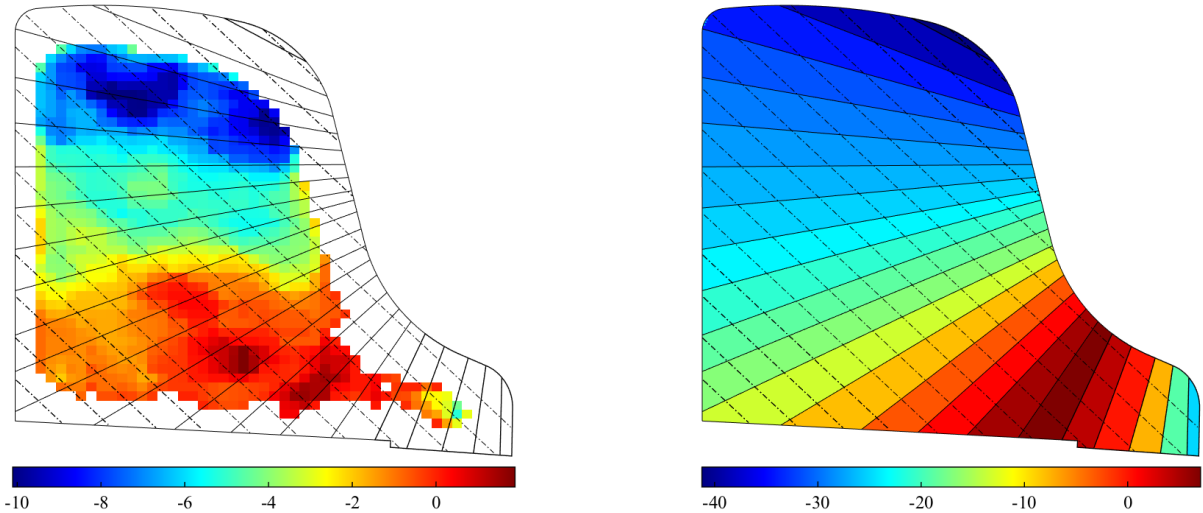


FIGURE VIII.24 –  $D_{26}/M$

Cette procédure est répétée pour chacune des 1060 fenêtres définies sur le maillage de mesure. A la fin, une carte des 5 paramètres  $D_{11}/M$ ,  $D_{22}/M$ ,  $D_{16}/M$ ,  $D_{26}/M$  et le terme  $(D_{12} + 2D_{66})/M$  est obtenue. Sur certaines collections de vecteurs d'onde, les critères de sélection proposés ci-avant ne suffisent pas à écarter les vecteurs d'onde *non-physiques*. En conséquence, l'estimation de ces paramètres peut être entachée d'une erreur importante en certains points de la carte obtenue. Ici, l'identification est réalisée sur une structure dont la variation des propriétés mécaniques est *relativement* lente ; de plus, la largeur de la fenêtre utilisée pour l'analyse en vecteurs d'onde ne justifie pas une variation très localisée des propriétés mécaniques identifiées, puisque deux jeux de paramètres identifiés sur des fenêtres voisines le sont à partir de données très similaires (un grande partie des deux fenêtres est commune). En conséquence, il est raisonnable de mettre en œuvre une technique de *moyennage* pour réduire l'effet des paramètres mal estimés. Pour cela, on emploie ici un filtre médian, qui a l'avantage d'être robuste au *bruit impulsif* (ici, une estimation des paramètres localement très différente des paramètres estimés aux points voisins). Ce filtre médian est choisi de la taille de la fenêtre et est appliqué directement sur la carte des paramètres identifiés.

Les cartes des paramètres sont représentées sur les figures de VIII.20 à VIII.24. Les valeurs identifiées par analyse en vecteurs d'onde sont représentées à chaque fois sur l'image de gauche ; à droite, on a représenté la raideur spécifique en flexion calculée à partir des propriétés mécaniques identifiées sur l'échantillon d'épicéa au chapitre V.

On remarque directement, à partir des échelles de couleurs, que les valeurs théoriques et expérimentales diffèrent sensiblement. Cela est d'autant plus visible sur la figure VIII.22, qui correspond au terme couplé  $(D_{12} + 2D_{66})/M$  : celui-ci décrit pour partie l'effet Poisson, qui a en réalité peu d'influence sur les vecteurs d'onde. L'incertitude qui lui est associée est donc très importante. Cette observation rejoint d'ailleurs l'application présentée au chapitre VII sur une plaque mince stratifiée (voir figure VII.14).

Les différences observées sont en fait en grande partie dues à la non prise en compte du couplage membrane-flexion dans le problème d'identification : le modèle de plaque identifié est un modèle *équivalent*, dans lequel seul le tenseur des raideurs en flexion  $\underline{\underline{D}}$  intervient. En réalité, le couplage entraîne le fait que les trois tenseurs  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{D}}$  (voir chapitre II, expression II.3.6) entrent en compte dans l'équation de dispersion des ondes de flexion. En particulier, le couplage membrane-flexion entraîne un *assouplissement* global du comportement en flexion : cela correspond bien à ce qui est identifié, les valeurs expérimentales étant globalement inférieures aux valeurs théoriques. Pour identifier correctement les propriétés locales du matériau, il serait donc indispensable de prendre le couplage en compte.

Malgré les fortes différences observées sur les composantes du tenseur de raideur identifiées, les tendances de l'évolution spatiale de ces paramètres semblent respectées.

## VIII.6 Conclusion

Dans ce chapitre ont été appliquées à la table d'harmonie du piano à queue Stephen Paulello SP190// les différentes contributions proposées tout au long du manuscrit. Tout d'abord, la mesure de la réponse transitoire de la structure a été réalisée à l'aide du dispositif de vibrométrie robotisé proposé au chapitre III. Celui-ci a permis l'acquisition de la vitesse hors-plan instantanée de la structure le long d'un maillage de 1630 points répartis uniformément sur la surface de celle-ci. Les différentes étapes menant à la réalisation de cette mesure ont été discutées.

Ensuite, la procédure d'analyse modale développée au chapitre V et utilisant la méthode ESPRIT proposée au chapitre IV a été appliquée afin d'extraire les données modales de la structure : modes, fréquences et amortissement modaux. Pour le choix des composantes à conserver, un critère basé sur la stabilisation de l'amortissement a été mise en œuvre ; ce même indicateur a également été utilisé pour estimer les incertitudes sur les fréquences et amortissements identifiés. En tout, 80 modes ont été extraits de la réponse transitoire libre de la structure.

Dans un troisième temps, les données modales expérimentales obtenues ont été utilisées pour exprimer un problème inverse, comme proposé au chapitre V, section V.3. La résolution de ce problème inverse aux valeurs propres a permis de montrer la possibilité d'identifier les six composantes du tenseur des raideurs associées au comportement supposé orthotrope de l'épicéa. Il a été montré que la sensibilité des valeurs propres entrant dans la fonction objectif du problème inverse est, dans le cas de la table d'harmonie du SP190//, très peu dépendante du numéro du mode. Cela entraîne donc un mauvais conditionnement du problème inverse, d'où une forte incertitude sur les paramètres identifiés.

Enfin, l'analyse en vecteurs d'onde locale, présentée au chapitre VII, a été appliquée à la collection de réponses harmoniques de la structure disponibles. Différents critères permettant le choix des vecteurs d'onde à conserver ont été donnés et mis en œuvre. Il a ensuite été proposé d'identifier localement un modèle de plaque mince découplée. Les cartographies spatiales des paramètres identifiées ont été illustrées et comparées à des valeurs théoriques. On a souligné l'importance de prendre en compte le modèle de plaque mince complet dans le but d'identifier correctement les propriétés matériau locales.





# Conclusion générale et perspectives

Pour conclure, on propose un résumé succinct de chaque chapitre du manuscrit, suivi à chaque fois de perspectives de travail plus ou moins avancées et qui pourraient consister en une poursuite intéressante des travaux proposés.

## Partie A : Etude et modélisation

La première partie du manuscrit a été consacrée à l'étude et la modélisation de la propagation des ondes dans les structures élancées dont la section caractéristique est hétérogène et composée de matériaux viscoélastiques anisotropes. Cela a permis de caractériser l'effet des différentes complexités de la structure sur les mécanismes régissant le transport de l'information mécanique à travers celle-ci.

### Propagation des ondes dans les structures élancées

Le chapitre I a consisté en la synthèse des différentes solutions de référence associées à la propagation des ondes dans les structures. La complexité des structures d'intérêt a été introduite progressivement, menant au final à l'implémentation de deux schémas éléments finis spectraux permettant le calcul des surfaces de dispersion caractéristiques des plaques composites et des poutres de section quelconque. La dernière section du chapitre a été consacrée à des études de cas, permettant de mettre en lumière, sur la base de l'observation des surfaces de dispersion et des profils des champs mécaniques associés à chaque mode, l'influence des complexités de la structure (anisotropie, stratification, mécanismes de perte).

L'étude menée a permis d'aborder les autres aspects du travail (formulation de modèles réduits, conception de dispositifs expérimentaux, proposition de méthodes inverses) d'un regard averti. En effet, la connaissance des phénomènes associés à la propagation des ondes dans les structures permet de formuler et critiquer des modèles réduits de structure, qui se basent sur une identification des mécanismes dominants du mouvement. Ensuite, l'estimation qu'il est possible de faire des longueurs d'onde impliquées dans la réponse en dynamique d'une structure sur un domaine fréquentiel donné permet de dimensionner les maillages mis en œuvre dans les mesures plein-champ. Enfin, la connaissance acquise sur la géométrie caractéristique des surfaces de dispersion associées à chaque type d'onde permet d'interpréter les résultats expérimentaux obtenus par la méthode d'analyse en vecteurs d'onde présentée dans les chapitres VI et VII.

### Surfaces de dispersion et correction des modèles réduits

Dans le chapitre II ont été dérivées les équations de dispersion caractéristiques des modèles de plaque épaisse (Hencky-Mindlin), plaque mince (Kirchhoff), poutre épaisse (Timoshenko) et

poutre mince (Euler-Bernoulli). La comparaison de ces surfaces de dispersion avec les résultats de référence obtenus par le biais des schémas éléments finis présentés au chapitre I a permis d'aborder la problématique de la correction de ces modèles. En particulier, on a montré la nécessité de corriger le comportement en cisaillement hors-plan obtenu lors de la formulation des modèles de plaque et poutre épaisses. Dans le cas des structures caractérisées par une section homogène, ce comportement est corrigé de façon satisfaisante avec l'utilisation du coefficient correcteur  $\xi^2 = \pi^2/12$ . Dans le cas des plaques sandwich, on a montré que l'utilisation d'une loi de mélange formulée comme l'inverse de l'intégrale des souplesses sur la section permet de corriger le comportement du modèle à la fois en raideur et en amortissement. On a également montré la nécessité de corriger le comportement en torsion des modèles de poutres.

La démarche adoptée (comparaison des surfaces de dispersion caractéristiques des modèles réduits avec les résultats de référence) peut s'appliquer à la formulation et la correction de nombreux modèles de structures. En particulier, il pourrait être intéressant d'appliquer ce travail à la validation de modèles plus élaborés, comme les modèles multiparticulaires (ou *layer-wise*). Ceux-ci présentent en effet des avantages intéressants pour l'identification des structures, car ils pourraient permettre d'identifier correctement les propriétés de différentes couches d'un stratifié, voir de caractériser le comportement des interfaces entre ces couches.

Lors de la dérivation des équations de dispersion associées au modèle de plaque mince a également été évoquée la possibilité d'utiliser la formulation polaire de l'élasticité plane. Les équations obtenues montrent alors de façon explicite la dépendance du vecteur d'onde en fonction de l'angle de propagation de l'onde. Les résultats présentés à ce sujet concernent un travail en cours.

## Partie B : Dispositif de mesure plein champ robotisé

La seconde partie du manuscrit a été consacrée à la présentation d'un dispositif de mesure robotisé. Celui-ci permet d'acquérir le champ de vitesse tridimensionnel instantané le long d'un maillage de points sur la surface d'une structure. Le dispositif proposé introduisant l'utilisation d'un bras robot industriel 6 axes, une discussion sur les implications de ce type de manipulateur dans le cadre d'expérimentations a été donnée. De façon à faciliter la conception des expériences utilisant ce dispositif, une solution logicielle a été implémentée et décrite. Celle-ci permet la modélisation et la pré-visualisation de l'expérience dans un environnement virtuel ainsi que l'acquisition et le traitement des signaux de façon automatisée. Grâce à la solution proposée, la mesure de la réponse de structures de géométries variées peut être réalisée sans intervention manuelle de l'utilisateur. Un cas d'application a été présenté, concernant la mesure du champ de vitesse tridimensionnel d'une poutre après impact. Les déformées modales, extraites à l'aide de la méthode d'analyse modale proposée au chapitre V, ont été comparées à leur équivalent numérique. La corrélation entre résultats expérimentaux et numériques a permis de juger de la pertinence des mesures obtenues.

Ce dispositif, à l'origine développé pour un besoin ponctuel, a finalement fournit la quasi-totalité des données expérimentales présentées dans ce manuscrit. Quelques pistes de travail peuvent être évoquées. Tout d'abord, il est dorénavant possible d'estimer la variance des mesures à partir des différentes répétitions de celles-ci. Cette possibilité n'a pas été illustrée ici, mais permettrait, dans les méthodes inverses, d'accorder un degré de confiance à chaque point de mesure associé à la variance estimée. Cela pourrait permettre de réduire le biais dû, par exemple, au bruit optique caractéristique du vibromètre laser doppler utilisé.

Une autre perspective de travail consiste en la généralisation de l'utilisation de bras robots

pour la conception des expériences en général. En effet, les robots industriels permettent de placer les capteurs avec une bonne précision (avec une incertitude sur la position typiquement inférieure au millimètre). De nombreux dispositifs expérimentaux pourraient profiter de ce gain de précision et de l'automatisation du positionnement ; on peut par exemple citer, pour rester dans le domaine de l'acoustique, la mesure intensimétrique, ou encore de puissance acoustique rayonnée. On peut également évoquer la possibilité d'utiliser ce moyen de positionnement en stéréovision. Et pour aller plus loin, on peut également évoquer l'idée de concevoir des essais quasi-statiques multiaxiaux à l'aide de bras robots.

## Partie C : Formulation de méthodes inverses

La troisième partie du manuscrit, composée de quatre chapitres, a été consacrée à la formulation de méthodes inverses permettant d'aborder l'identification des structures auxquelles ce travail s'intéresse. Un modèle de signal général de la réponse libre des structures a été formulé (réponse transitoire libre, zone sans chargement en régime harmonique), basé sur une décomposition en fonctions exponentielles oscillantes. Les procédures inverses proposées ont alors été formulées comme l'inversion du problème aux valeurs propres définissant les paramètres de ces exponentielles.

### Méthode ESPRIT unifiée

Tout d'abord, une méthode ESPRIT unifiée a été proposée, permettant d'identifier sur une réponse mesurée de structure les paramètres du modèle de signal (vecteurs d'onde complexes et amplitudes complexes). Celle-ci tente de prendre en compte un certain nombre de développements proposés par la communauté du traitement de signal afin de permettre son application aux mesures plein-champ : prise en compte de la totalité des données expérimentales, possibilité de traiter des signaux multidimensionnels, stratégie de décimation. La question de la quantification des incertitudes a également été abordée, par la dérivation de la sensibilité des paramètres estimés aux perturbations du modèle de signal. Cette étude a également été le moyen d'étudier l'influence de différents paramètres intrinsèques à la méthode (i.e facteur de lissage spatial, décimation) sur les performances de celle-ci. Enfin, différents critères de sélection de l'ordre du modèle de signal ont été présentés.

Les perspectives de travail autour de cette méthode sont nombreuses. Tout d'abord, celle-ci intègre la possibilité d'utiliser de multiples invariances de la grille de mesure pour estimer les vecteurs d'onde. Les expressions de la sensibilité des vecteurs propres dérivées dans la section IV.3 permettent de prendre en compte ces invariances, mais aucun résultat sur le gain en performance dû à cette stratégie n'a été présenté ; de plus, l'utilisation de multiples invariances n'est pas mise en œuvre dans le travail présenté. Un travail intéressant consisterait en conséquence à étudier l'effet de l'utilisation de plusieurs invariances sur les performances de la méthode.

Un des problèmes soulevés lors des développements consacrés à la présentation de la méthode ESPRIT unifiée concerne l'ambiguïté quant au signe des composantes du vecteur d'ondes associées aux dimensions du modèle en cosinus. Un travail reste à effectuer pour résoudre cette ambiguïté.

Enfin, la formulation de la méthode ESPRIT présentée passe par un modèle de signal matriciel, qui oblige à vectoriser le tableaux des données (pour former le vecteur des données, voir expression IV.2.13). Or cette manipulation entraîne la perte de la structure du tableau ; complexifiant fortement les développements et l'implémentation de la méthode. Il existe en

réalité des formulations tensorielles de la méthode ESPRIT [182], qui permettraient sûrement de simplifier la dérivation de la méthode.

## Analyse modale et identification inverse

Ensuite, une première application de la méthode pour l'analyse modale a été présentée dans le chapitre V. Dans ce cas précis, les critères de sélection de l'ordre du signal sont difficiles à appliquer ; on a donc présenté quelques critères de stabilité permettant d'aiguiller le choix des modes à conserver. Ensuite, on a présenté une procédure d'identification formulée sur la base d'un problème aux valeurs propres inverse. Les paramètres à identifier, qui entrent dans la construction des matrices caractérisant le problème inverse, sont estimés par la minimisation des écarts entre les données modales expérimentales et numériques. Cette minimisation est réalisée à l'aide d'une méthode de descente de gradient. L'expression analytique de ce gradient a été dérivée d'une étude de sensibilité. La régularisation du problème a été discutée, basée notamment sur la pondération des différentes erreurs et/ou l'amortissement de l'algorithme de descente. Tout au long de la présentation, une discussion sur la quantification des incertitudes a été menée. Un indicateur permettant d'estimer l'intervalle de confiance associé à chaque paramètre identifié a été donné. Enfin, le chapitre s'est terminé par l'application de la méthode proposée à l'identification des propriétés viscoélastiques d'un échantillon d'épicéa, modélisé à l'aide d'un comportement isotrope transverse hystérétique. Un très bon accord entre les données modales expérimentales et numériques a été obtenu.

Plusieurs perspectives de travail peuvent être évoquées concernant cette méthode. Tout d'abord, il semble primordial de prendre en compte l'erreur sur les modes dans la fonctionnelle à minimiser. On a en effet montré que la sensibilité des modes est différente de la sensibilité des valeurs propres, et permettrait par exemple de réduire l'incertitude sur l'identification des composantes du tenseur des raideurs associées à l'effet Poisson. Toutefois, la prise en compte des erreurs sur les modes doit être faite de façon correcte, de façon à ne pas privilégier ceux-ci par rapport à l'écart sur les valeurs propres. Les méthodes de quantification des incertitudes proposées consistent en un travail en cours ; l'identification des différentes sources d'incertitudes ainsi que la formulation d'estimateurs permettant de quantifier leur effet consiste donc en une perspective de travail intéressante. On a également évoqué l'idée d'intégrer des paramètres spécifiques aux conditions aux limites dans le problème, de façon à pouvoir appliquer la méthode dans des conditions expérimentales plus réalistes (applications in-situ). L'ajout de ces paramètres permettrait en effet de séparer l'effet des conditions aux limites de l'effet des propriétés matériau à identifier sur les données modales obtenues.

## Analyse en nombres d'onde

Dans le chapitre VI, reproduisant un article paru au *Journal of Sound and Vibration*, a été présentée une méthode d'analyse en nombres d'onde utilisant la méthode ESPRIT proposée. Celle-ci s'applique à la réponse harmonique des poutres, et permet l'identification des modules de Young et de cisaillement complexes apparents de celle-ci. Contrairement à l'analyse modale, l'identification est réalisée indépendamment des conditions aux limites appliquées sur la structure. La méthode proposée a été comparée à deux méthodes d'analyse en nombre d'onde existantes (IWC et Mc.Daniel), ce qui a permis de montrer (i) son pouvoir de séparation des différents types d'onde ; (ii) son efficacité computationnelle.

La méthode ESPRIT formulée au chapitre IV permet de prendre en compte un modèle

en cosinus; ce modèle présente un avantage important pour l'analyse en nombre d'onde, car il permet de *contraindre* les nombres d'onde associées à deux ondes de même nature et se propageant en sens inverse à être égaux. Dans le modèle en exponentielles amorties utilisé dans ce chapitre, cette contrainte est absente; cela est responsable du comportement instable de l'identification réalisée en basse fréquence (voir figure VI.7b). Il a été observé que l'utilisation du modèle en cosinus améliore les performances de la méthode proposée en basse fréquence; ce résultat n'a toutefois, faute de temps et d'espace, pas été présenté ici.

## Analyse en vecteurs d'onde

Le chapitre VII a consisté en la reproduction d'un article soumis au *Journal of Sound and Vibration* présentant une méthode originale d'analyse en vecteurs d'onde utilisant également la méthode ESPRIT proposée. Cette analyse s'applique à la réponse harmonique des plaques en général. La présentation a principalement consisté en l'illustration des possibilités offertes par la méthode en terme de caractérisation du comportement dynamique de plaques composites. Trois cas expérimentaux ont été proposés. Le premier a concerné la caractérisation d'une plaque sandwich carbone/mousse haute densité. La possibilité de séparer les différents types d'ondes se propageant dans la plaque (i.e. flexion, membrane) a été démontrée. La comparaison des vecteurs d'onde extraits a été menée avec des résultats numériques obtenus à partir des schémas éléments finis spectraux développés au chapitre I. La concordance des prédictions et des résultats expérimentaux a permis de juger de la pertinence de ces derniers. Dans un deuxième cas, on s'est intéressé à l'illustration des phénomènes intervenant dans la propagation des ondes dans une plaque sandwich dont l'âme est une structure en nid d'abeille. En fonction du domaine fréquentiel, l'influence des différentes couches de la plaque sur le comportement de celle-ci a pu être observée. Enfin, une troisième application s'est intéressée à l'identification des composantes du tenseur des raideurs spécifiques équivalentes en flexion sur une plaque mince stratifiée hétérogène. Sur la base de comparaison avec des résultats théoriques, la possibilité d'identifier le comportement en flexion anisotrope local, indépendamment des conditions aux limites, a été montrée.

Concernant la méthode d'analyse en vecteurs d'onde proposée, trois perspectives majeures peuvent être envisagées.

La première consisterait à étudier l'effet de la forme du front d'onde dans le champ proche des sources sur l'estimation. En effet, l'analyse en vecteurs d'onde identifie les paramètres d'ondes planes. Le caractère ponctuel des sources entraîne le fait qu'en champ proche, le front d'onde ne peut être considéré plan. Dans ce cas, le modèle de signal utilisé pour formuler la méthode ESPRIT n'est qu'une approximation très grossière de la réponse de la structure. Il a été observé que la partie imaginaire des vecteurs d'onde extraits est particulièrement sensible à la forme du front d'onde; ce qui empêche d'ailleurs l'identification du comportement visqueux des plaques par la méthode d'analyse en vecteurs d'onde.

La deuxième perspective de travail concerne le développement de méthodes d'identification basées sur des modèles réduits de structures plus évolués que le modèle de plaque mince. En effet, celui-ci a pu être utilisé pour formuler une méthode d'identification basée sur les vecteurs d'onde extraits localement grâce à la simplicité de l'équation de dispersion associée (scalaire). L'utilisation du modèle de plaque épaisse permettrait d'identifier les propriétés en cisaillement transverse des plaques composite. Toutefois, les équations de dispersion caractéristiques de ce modèle sont bien plus complexes : elles sont exprimées sous la forme d'un problème aux valeurs propres quadratique. La méthode d'identification associée nécessiterait alors la mise en œuvre

d'un problème aux valeurs propres quadratique *inverse*. La formulation de ce type de méthode est une perspective intéressante.

La troisième perspective associée à ce travail est représentée par la possibilité d'identifier les paramètres du modèle suivant :

$$\underline{u}(\underline{p}, x, t) = \sum_r^R \underline{a}(\underline{p}) e^{i(\omega_r t - k_r x)} \quad (\text{VIII.6.1})$$

qui représente l'analyse en nombre d'onde des modes propres d'une poutre. En plus de consister en une réduction très importante des données, l'identification associée permettrait d'identifier une pulsation  $\omega_r$  et un nombre d'onde  $k_r$  complexes.

## Application à la table d'harmonie du SP190//

La dernière partie du manuscrit a consisté en l'application des travaux proposés à la table d'harmonie du piano à queue Stephen Paulello SP190//. Tout d'abord, le dispositif de vibrométrie robotisé présenté au chapitre III a été utilisé pour obtenir la réponse transitoire libre de la structure. Le champ de vitesse hors-plan instantanée a été obtenu, avec un rapport signal-à-bruit satisfaisant jusqu'à 1800 Hz et le long d'un maillage spatial de 1630 points. Ensuite, la proposition du chapitre V a été appliquée à la réponse obtenue. L'analyse modale de la structure a été réalisée, permettant l'extraction de 80 modes expérimentaux. Ensuite, la procédure incluant la résolution du problème aux valeurs propres associé a été mise en œuvre. Sur la base de différents indicateurs permettant de juger de la similarité des bases modales expérimentales et numériques, les résultats obtenus ont pu être critiqués. Il a notamment été montré que la complexité de la structure dégradait le conditionnement du problème inverse. Enfin, l'analyse en vecteurs d'onde proposée au chapitre VII a été appliquée localement. À partir de chacune des collections de vecteurs d'onde obtenues, il a été proposé d'identifier les paramètres d'un modèle de plaque mince anisotrope découplée en flexion. Finalement, la cartographie des raideurs de flexion équivalentes obtenue a été représentée, ainsi que les valeurs théoriques correspondantes. Il a été montré que la non prise en compte du couplage membrane-flexion, globalement assouplissant, entraîne la sous-estimation des propriétés de raideur.

Concernant le travail présenté dans ce dernier chapitre, au moins deux perspectives importantes peuvent être évoquées. La première concerne un travail nécessaire sur l'identification des propriétés dissipatives de la structure. En effet, on s'est intéressé ici aux seules propriétés de raideur du matériau, la cause étant la forte influence des conditions aux limites sur l'amortissement. Plusieurs pistes peuvent être envisagées. La première consisterait à intégrer, dans le problème aux valeurs propres inverse basé sur les données modales, l'identification de paramètres associés aux conditions aux limites. Par exemple, il serait possible d'ajouter un paramètre complexe représentant le couplage d'un système ressort-amortisseur à chaque point d'attache des fils auxquels la structure est suspendue. Il pourrait ainsi être possible de séparer, dans les amortissements modaux identifiés, la contribution des conditions aux limites et des pertes intrinsèques au comportement viscoélastique de l'épicéa. La deuxième possibilité, pour identifier les propriétés dissipatives de l'épicéa, consisterait à découper des échantillons en forme de poutres et d'appliquer la méthode d'analyse en nombres d'onde proposée au chapitre VI. Celle-ci pourrait alors permettre d'identifier des modules de Young et de cisaillement complexes dépendants de la fréquence.

---

La deuxième perspective de travail concerne la prise en compte du couplage flexion-membrane dans l'identification du modèle de plaque mince local proposée. Cette prise en compte pourrait permettre l'estimation correcte des propriétés de raideur du matériau. Pour cela, une reformulation du problème utilisant la décomposition polaire pourrait présenter un certain avantage, en réduisant le nombre de paramètres à identifier.





# Bibliographie

- [1] Frédéric Ablitzer, Charles Pézerat, Jean-Michel Génevaux, and Jérôme Bégué. Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2454–2468, 2014.
- [2] Sondipon Adhikari. *Structural dynamic analysis with generalized damping models : identification*. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] Hirotugu Akaike. A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6) :716–723, 1974.
- [4] A. Leleux. *Contrôle non destructif de composites par ondes ultrasonores guidées, générées et détectées par multiélément*. PhD thesis, 2012.
- [5] TakeShi Amemiya. *Advanced Econometrics*. 1985.
- [6] P. M. Anselone and L. B. Rall. The solution of characteristic value-vector problems by Newton’s method. *Numerische Mathematik*, 11(1) :38–45, 1968.
- [7] Anders Askenfelt. *Five Lectures on the Acoustics of the Piano*. Number 64. Royal Swedish Academy of Music Stockholm, Sweden, 1990.
- [8] B Audoin, C Bescond, and M Deschamps. Measurement of stiffness coefficients of anisotropic materials from pointlike generation and detection of acoustic waves. *Journal of Applied Physics*, 80(1996) :3760–3771, 1996.
- [9] Bertram Alexander Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Krieger Publishing Company, 1973.
- [10] Stéphane Avril, Marc Bonnet, Anne Sophie Bretelle, Michel Grédiac, François Hild, Patrick Ienny, Félix Latourte, Didier Lemosse, Stéphane Pagano, Emmanuel Pagnacco, and Fabrice Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, 2008.
- [11] Roland Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l’estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique*. PhD thesis, Télécom ParisTech, 2005.
- [12] Roland Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l’estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique*. PhD thesis, Télécom ParisTech, 2005.
- [13] Roland Badeau, Bertrand David, and R Boyer. Eds Parametric Modeling And Tracking Of Audio Signals. *Proceedings of 5th Int. conf. on Digital Audio Effects (DAFx02)*, pages 26–28, 2002.

- [14] Roland Badeau, Bertrand David, and Gaël Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2) :450–458, 2006.
- [15] Roland Badeau, Bertrand David, and Gaël Richard. High-resolution spectral analysis of mixtures of complex exponentials modulated by polynomials. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(4) :1341–1350, 2006.
- [16] Roland Badeau, Gaël Richard, and Bertrand David. Performance of ESPRIT for estimating mixtures of complex exponentials modulated by polynomials. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(2) :492–504, 2008.
- [17] Harsh Baid, Christoph Schaal, Himadri Samajder, and Ajit Mal. Dispersion of Lamb waves in a honeycomb composite sandwich panel. *Ultrasonics*, 56 :409–416, 2015.
- [18] Pelin Gundes Bakir. Automation of the stabilization diagrams for subspace based system identification. *Expert Systems With Applications*, 38(12) :14390–14397, 2011.
- [19] Javad Baqersad, Peyman Poozesh, Christopher Niezrecki, and Peter Avitabile. Photogrammetry and optical methods in structural dynamics – A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, pages 1–18, 2016.
- [20] Ettore Barbieri, A Cammarano, S De Rosa, and F Franco. Waveguides of a Composite Plate by using the Spectral Finite Element Approach. *Journal of Vibration and Control*, 15(3) :347–367, 2009.
- [21] Ivan Bartoli, Alessandro Marzani, Francesco Lanza di Scalea, and Erasmo Viola. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5) :685–707, 2006.
- [22] Timothy J Beberniss and David A Ehrhardt. High-speed 3D digital image correlation vibration measurement : Recent advancements and noted limitations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 86 :35–48, 2017.
- [23] A. Bernard, M. J. S. Lowe, and M. Deschamps. Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(1) :186, 2001.
- [24] Alain Berry, Olivier Robin, and Fabrice Pierron. Identification of dynamic loading on a bending plate using the Virtual Fields Method. *Journal of Sound and Vibration*, 333(26) :7151–7164, 2014.
- [25] Abraham Bers. Note on group velocity and energy propagation. *American Journal of Physics*, 68(5) :482, 2000.
- [26] J. Berthaut. *Contribution à l'identification large bande des structures anisotropes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2004.
- [27] J. Berthaut, M. N. Ichchou, and L. Jezequel. K-space identification of apparent structural behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, 280 :1125–1131, 2005.

- [28] Jean-Marie Berthelot. Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method. *Composite Structures*, 74(2) :186–201, 2006.
- [29] Jean-Marie Berthelot, Mustapha Assarar, Youssef Sefrani, and Abderrahim El Mahi. Damping analysis of composite materials and structures. *Composite Structures*, 85(3) :189–204, 2008.
- [30] Jean-Marie Berthelot and Youssef Sefrani. Damping analysis of unidirectional glass and Kevlar fibre composites. *Composites Science and Technology*, 64(9) :1261–1278, 2004.
- [31] A. Bhaskar. Elastic waves in Timoshenko beams : the 'lost and found' of an eigenmode. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2101) :239–255, 2009.
- [32] M. A. Biot. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *Journal of Applied Physics*, 25(11) :1385–1391, 1954.
- [33] M a Biot. General theories of the equivalence of group velocity and energy transport. *Physical Rev.*, 105(4) :1129–1137, 1957.
- [34] MA Biot. Variational and Lagrangian methods in viscoelasticity. In *Deformation and Flow of Solids*, Madrid, 1956.
- [35] MA Biot. Linear thermodynamics and the mechanics of solids. . . . *Congress of Applied Mechanics, American Society of . . .*, pages 1–18, 1958.
- [36] Maurice A Biot. Dynamics of Viscoelastic Anisotropic Media. In *Fourth Midwestern Conference on Solid Mechanics*, Purdue University, 1955.
- [37] Xavier Boutillon. Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(746), 1988.
- [38] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures : electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, 2003.
- [39] Sébastien Brisard and Arthur Lebée. Direct Derivation of Plate Theories, 2017.
- [40] Iris Brémaud. Acoustical properties of wood in string instruments soundboards and tuned idiophones : Biological and cultural diversity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1) :807, 2012.
- [41] Voichita Bucur. Composite Materials for Musical Instruments. In *Handbook of Materials for String Musical Instruments*, pages 845–875. Springer, 2016.
- [42] José M. Carcione and Fabio Cavallini. Energy balance and fundamental relations in anisotropic-viscoelastic media. *Wave Motion*, 18(1) :11–20, 1993.
- [43] J. F. Caron and R. P. Carreira. Interface behaviour in laminates with simplified model. *Composites Science and Technology*, 63(5) :633–640, 2003.
- [44] R. P. Carreira, J. F. Caron, and A. Diaz Diaz. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials*, 34(4) :217–230, 2002.

- [45] E. Carrera. *Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells*, volume 9. 2002.
- [46] Jean-loïc Le Carrou, François Gautier, Roland Badeau, Jean-loïc Le Carrou, François Gautier, and Roland Badeau. Sympathetic string modes in the concert harp To cite this version : HAL Id : hal-00945199. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4) :744–752, 2009.
- [47] M. Castaings and B. Hosten. Guided waves propagating in sandwich structures made of anisotropic, viscoelastic, composite materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(5) :2622–2634, 2003.
- [48] M. Castaings, B. Hosten, and T. Kundu. Inversion of ultrasonic, plane-wave transmission data in composite plates to infer viscoelastic material properties. *NDT and E International*, 33(6) :377–392, 2000.
- [49] Michel Castaings and Michael Lowe. Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(2) :696, 2008.
- [50] Juliette Chabassier. *Modélisation et simulation numérique d ’ un piano par modèles physiques*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2012.
- [51] Antoine Chaigne and Christophe Lambourg. Time-Domain Simulation of Damped Impacted Plates - I - Theory and Experiments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109(4) :1422–1432, 2001.
- [52] Justin G Chen, Neal Wadhwa, Young-jin Cha, Frédo Durand, and William T Freeman. Modal identification of simple structures with high-speed video using motion magnification. *Journal of Sound and Vibration*, 345 :58–71, 2015.
- [53] Raef Cherif, Jean Daniel Chazot, and Nouredine Atalla. Damping loss factor estimation of two-dimensional orthotropic structures from a displacement field measurement. *Journal of Sound and Vibration*, 356 :61–71, 2015.
- [54] Hsing-Hsing Chiang and C. L. Nikias. The ESPRIT algorithm with higher-order statistics. *The Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, pages 163–168, 1989.
- [55] M T Chu. Inverse eigenvalue problems. *SIAM Rev.*, 40(1) :1–39, 1998.
- [56] Douglas Cline. *Variational Principles in Classical Mechanics*. University of Rochester River Campus Librarie, 2017.
- [57] Dominique Clorennec, Claire Prada, and Daniel Royer. Local and noncontact measurements of bulk acoustic wave velocities in thin isotropic plates and shells using zero group velocity Lamb modes. *Journal of Applied Physics*, 101(3), 2007.
- [58] G A Coquin. Attenuation of guided waves in isotropic viscoelastic materials. *Journal of Acoustical of Society of America*, 36(6) :1074–1080, 1964.
- [59] Roberto Corradi, Stefano Miccoli, Giacomo Squicciarini, and Paolo Fazioli. Modal analysis of a grand piano soundboard at successive manufacturing stages. *Applied Acoustics*, 125 :113–127, 2017.

- [60] J. Cuenca, F. Gautier, and L. Simon. Measurement of the complex bending stiffness of a flat panel covered with a viscoelastic layer using the image source method. In *8th European Conference on Noise Control 2009, EURONOISE 2009 - Proceedings of the Institute of Acoustics*, volume 31, 2009.
- [61] Ajith Damodaran, Larry Lessard, and A. Suresh Babu. An Overview of Fibre-Reinforced Composites for Musical Instrument Soundboards. *Acoustics Australia*, 43(1) :117–122, 2015.
- [62] S. K. Datta, A. H. Shah, R. L. Bratton, and T Chakraborty. Wave propagation in laminated composite plates. *JASA*, 83(6) :2020–2026, 1988.
- [63] Erdogan Dilaveroglu. Nonmatrix Cramér-Rao Bound Expressions for High-Resolution Frequency Estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(2) :463–474, 1998.
- [64] H-JA Lukaszewicz Dirk, Carwyn Ward, and Kevin D Potter. The engineering aspects of automated prepreg layup : History, present and future. *Composites Part B : Engineering*, 43(3) :997–1009, 2012.
- [65] El-hadi Djermoune and Marc Tomczak. Perturbation Analysis of Subspace-Based Methods in Estimating a Damped Complex Exponential. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(11) :4558–4563, 2009.
- [66] S B Dong, C Alpdogan, and E Taciroglu. International Journal of Solids and Structures Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 47(13) :1651–1665, 2010.
- [67] S B Dong and R B Nelson. On the Natural Vibrations and waves in laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 39(3) :739–745, 1972.
- [68] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2) :205–220, 2006.
- [69] Kerem Ege. *La table d’harmonie du piano - Etudes modales en basses et moyennes fréquences*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2009.
- [70] Kerem Ege, Xavier Boutillon, and Bertrand David. High-resolution modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4-5) :852–869, 2009.
- [71] Kerem Ege, Xavier Boutillon, and Marc Rébillat. Vibroacoustics of the piano soundboard : (Non)linearity and modal properties in the low- and mid-frequency ranges. *Journal of Sound and Vibration*, 332(5) :1288–1305, 2013.
- [72] Kerem Ege, Jean-François Caron, Stéphane Marcadet, and Hugo Martin. Remplacement de la table d’harmonie du violon par un sandwich balsa/fibre de lin. In *Journées Scientifiques et Techniques AMAC - Matériaux composites renforcés par des fibres végétales*, Lorient, France, 2010.
- [73] Kerem Ege, N. B. Roozen, Quentin Leclère, and Renaud G. Rinaldi. Assessment of the apparent bending stiffness and damping of multilayer plates ; modelling and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 426 :129–149, 2018.

- [74] Valentin Emiya, Bertrand David, and Roland Badeau. A parametric method for pitch estimation of piano tones. *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings*, 1, 2007.
- [75] Samuel Forest, Michel Amestoy, Gilles Damamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, and Matthieu Mazière. *Mecanique des Milieux Continus*. Ecole des Mines de Paris, 2009.
- [76] Jean-Baptiste-Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. 1822.
- [77] Vincent Fréour, François Gautier, Bertrand David, and Marthe Curtit. Extraction and analysis of body-induced partials of guitar tones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(6) :3930–3940, 2015.
- [78] Benjamin Friedlander. A Sensitivity Analysis of the MUSIC Algorithm. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(10) :1740–1751, 1990.
- [79] Michael Friswell and John E Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*, volume 38. Springer Science & Business Media, 2013.
- [80] N. Giordano. Mechanical impedance of a piano soundboard. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(January) :2128, 1998.
- [81] V T Grinchenko and V V Meleshko. Properties of harmonic waves propagating along the edge of a right-angle elastic wedge. *Soviet Physics Acoustics-USSR*, 27(2) :112–116, 1981.
- [82] Karl Grosh and Earl G. Williams. Complex wave-number decomposition of structural vibrations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(2) :836–848, 1993.
- [83] Bijit Halder and Thomas Kailath. Efficient estimation of closely spaced sinusoidal frequencies using subspace-based methods. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(2) :49–51, 1997.
- [84] Kevin R Hart, Patrick X L Chia, Lawrence E Sheridan, Eric D Wetzel, Nancy R Sottos, and Scott R White. Composites : Part A Mechanisms and characterization of impact damage in 2D and 3D woven fiber-reinforced composites. *Composites Part A*, 101 :432–443, 2017.
- [85] By N A Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1) :17–34, 1953.
- [86] H Hencky. Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. *ingenieur-archiv*, 16(1) :72–76, 1947.
- [87] Nick Higham. Nonlinear Eigenvalue Problems. In Chapman and Hall/CRC, editor, *The Handbook of Linear Algebra*. 2013.
- [88] Francis Begnaud Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*. 1987.
- [89] Harry H. Hilton. Implications and constraints of time-independent Poisson ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity. *Journal of Elasticity*, 63(3) :221–251, 2001.
- [90] B. L. Ho and R. E. Kalman. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions 1 ). *at - Automatisierungstechnik*, 14(1-12) :545–548, 1966.



- [91] Stephen D Holland. Air-coupled acoustic imaging with zero-group-velocity Lamb modes. 83(13) :2704–2706, 2003.
- [92] Shinya Honda and Yoshihiro Narita. Vibration design of laminated fibrous composite plates with local anisotropy induced by short fibers and curvilinear fibers. *Composite Structures*, 93(2) :902–910, 2011.
- [93] Petr Hora. Comparisons of the matrix techniques for modelling stress waves in multilayered media. In *Engineering Mechanics 2001*, Svratka, Czech Republic, 2001.
- [94] B. Hosten and M. Deschamps. Inhomogeneous wave generation and propagation in lossy anisotropic solids. Application to the characterization of viscoelastic composite materials. *Journal of Acoustical of Society of America*, 82(5) :1763–1770, 1987.
- [95] Bernard Hosten. Reflection and transmission of acoustic plane waves on an immersed orthotropic and viscoelastic solid layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(6) :2745–2752, 1991.
- [96] Bernard Hosten and Michel Castaings. Transfer matrix of multilayered absorbing and anisotropic media. Measurements and simulations of ultrasonic wave propagation through composite materials. *Journal of Acoustical of Society of America*, 94(3) :1488–1495, 1993.
- [97] Yingbo Hua. Estimating Two-Dimensional Frequencies by Matrix Enhancement and Matrix Pencil. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(9) :2267–2280, 1992.
- [98] Yingbo Hua and Tapan K. Sarkar. Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(5) :814–824, 1990.
- [99] Luc Jaouen, Amélie Renault, and Mickael Deverge. Elastic and damping characterizations of acoustical porous materials : Available experimental methods and applications to a melamine foam. *Applied Acoustics*, 69(12) :1129–1140, 2008.
- [100] Jer-nan Juang and Richard S Pappa. An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 8(5) :620–627, 1985.
- [101] N Kandil and G Verchery. New methods of design for stacking sequences of laminates. *Computer aided design in composite material technology*, pages 243–257, 1988.
- [102] Andrzej Katunin, Krzysztof Dragan, and Michał Dziendzikowski. Damage identification in aircraft composite structures : A case study using various non-destructive testing techniques. *Composite Structures*, 127 :1–9, 2015.
- [103] Steven M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing*. Prentice- Hall, Englewood Cliff, 1993.
- [104] Mathias Kersemans, Ives De Baere, Joris Degrieck, Koen Van Den Abeele, Lincy Pyl, Filip Zastavnik, Hugo Sol, and Wim Van Paepegem. Nondestructive damage assessment in fiber reinforced composites with the pulsed ultrasonic polar scan. *Polymer Testing*, 34 :85–96, 2014.

- [105] Mathias Kersemans, Arvid Martens, Koen Van Den Abeele, Joris Degrieck, Lincy Pyl, Filip Zastavnik, Hugo Sol, and Wim Van Paepegem. The quasi-harmonic ultrasonic polar scan for material characterization : Experiment and numerical modeling. *Ultrasonics*, 58 :111–122, 2015.
- [106] Hossam Khalil, Dongkyu Kim, Joonsik Nam, and Kyihwan Park. Accuracy and noise analyses of 3D vibration measurements using laser Doppler vibrometer. *Measurement*, 94 :883–892, 2016.
- [107] Dongkyu Kim, Hajun Song, Hossam Khalil, Jongsuh Lee, Semyung Wang, and Kyihwan Park. 3-D vibration measurement using a single laser scanning vibrometer by moving to three different locations. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 63(8) :2028–2033, 2014.
- [108] Sadanori Konishi and Genshiro Kitagawa. *Information Criteria and Statistical Modeling*. 2008.
- [109] Anastasiia A Krushynska and Viatcheslav V Meleshko. Normal waves in elastic bars of rectangular cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(3) :1324–1335, 2011.
- [110] Anastasiia A. Krushynska and Viatcheslav V. Meleshko. Normal waves in elastic bars of rectangular cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(3) :1324–1335, 2011.
- [111] R. Kumaresan and D. Tufts. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 30(6) :833–840, 1982.
- [112] H. Lamb. On Waves in an Elastic Plate. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 93(648) :114–128, 1917.
- [113] Horace Lamb. On the flexure of an elastic plate. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-21(1) :70–91, 1889.
- [114] Jean Laroche. The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94(4) :1958–1965, 1993.
- [115] A. Lebée and K. Sab. A Bending-Gradient model for thick plates. Part I : Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :2878–2888, 2011.
- [116] Arthur Lebée and Karam Sab. Homogenization of cellular sandwich panels. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(4-5) :320–337, 2012.
- [117] Arthur Lebée and Karam Sab. On the Generalization of Reissner Plate Theory to Laminated Plates, Part I : Theory. *Journal of Elasticity*, 126(1) :39–66, 2017.
- [118] Quentin Leclère, Frédéric Ablitzer, and Charles Pézerat. Practical implementation of the corrected force analysis technique to identify the structural parameter and load distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 351 :106–118, 2015.

- [119] Quentin Leclère and Charles Pézerat. Vibration source identification using corrected finite difference schemes. *Journal of Sound and Vibration*, 331(6) :1366–1377, 2012.
- [120] Harry B. Lee. The Cramer-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(6) :1508–1517, 1992.
- [121] Harry B Lee. The Cramer-Rao Bound on Frequency Estimates of Signals Closely Spaced in Frequency (Unconditional Case). *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6) :1569–1572, 1994.
- [122] Aweke N. Lemma, Alle Jan Van Der Veen, and Ed F. Deprettere. Joint angle-frequency estimation using multi-resolution ESPRIT. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 4 :1957–1960, 1998.
- [123] Kenneth Levenberg. A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2), 1944.
- [124] F Li and Richard J. Vaccaro. Unified analysis for DOA estimation algorithms in array signal processing. *Signal Processing*, 25(2) :147–169, 1991.
- [125] Jun Liu, Xiangqian Liu, and Xiaoli Ma. First-order perturbation analysis of singular vectors in singular value decomposition. *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing Proceedings*, 56(7) :532–536, 2007.
- [126] Kefei Liu, João Paulo C.L. da Costa, Hing Cheung So, and Lei Huang. Subspace techniques for multidimensional model order selection in colored noise. *Signal Processing*, 93 :1976–1987, 2013.
- [127] Kefei Liu, João Paulo C.L. da Costa, Hing Cheung So, and Lei Huang. Subspace techniques for multidimensional model order selection in colored noise. *Signal Processing*, 93 :1976–1987, 2013.
- [128] Augustus Edward Hough Love. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 179 :491–546, 1888.
- [129] Dirk H.J.A. Lukaszewicz, Carwyn Ward, and Kevin D Potter. The engineering aspects of automated prepreg layup : History, present and future. *Composites Part B : Engineering*, 43(3) :997–1009, 2012.
- [130] Richard H Lyon, Richard G DeJong, and Manfred Heckl. Theory and application of statistical energy analysis, 1995.
- [131] Brian R Mace, Denis Duhamel, Michael J Brennan, and Lars Hinke. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(May 2005) :2835–2843, 2005.
- [132] Kaushik Mahata and Torsten Söderström. ESPRIT-like estimation of real-valued sinusoidal frequencies. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(5) :1161–1170, 2004.
- [133] P O Malley, T Woods, J Judge, and J Vignola. Five-axis scanning laser vibrometry for three-dimensional measurements of non-planar surfaces. *Measurement Science and Technology*, (20), 2009.

- [134] Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-françois Caron, and Xavier Boutillon. High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) for the Mechanical Characterization of Viscoelastic Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2018.
- [135] Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-François Caron, Kerem Ege, and Xavier Boutillon. High-Resolution Wavevector Analysis for the characterization of the dynamic response of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, Final revision, 2018.
- [136] Donald W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11(2), 1963.
- [137] Marco Matter. Identification modale numérique-expérimentale des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites. 4215 :189, 2008.
- [138] M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani, and E. Viola. A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section. *Ultrasonics*, 53(7) :1227–1241, 2013.
- [139] J. Gregory McDaniel and W.. Steve Shepard Jr. Estimation of structural wave parameters from spatially sparse response measurementsle. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(4) :1674–1682, 2000.
- [140] R. D. Mindlin. Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :31–38, 1951.
- [141] R D Mindlin and H Deresiewicz. Timoshenko’s shear coefficient for flexural vibrations of beams. Technical report, Columbian Univ. New York, 1953.
- [142] T. Miyashita and Y. Fujino. Development of 3D vibration measurement system using laser doppler vibrometers. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 2006.
- [143] Marco Montemurro. An extension of the polar method to the first-order shear deformation theory of laminates. *Composite Structures*, 127 :328–339, 2015.
- [144] Marco Montemurro, Yao Koutsawa, Salim Belouettar, Angela Vincenti, and Paolo Vannucci. Design of damping properties of hybrid laminates through a global optimisation strategy. *Composite Structures*, 94(11) :3309–3320, 2012.
- [145] Geert Morren, Philippe Lemmerling, and Sabine Van Huffel. Decimative subspace-based parameter estimation techniques. *Signal Processing*, 83 :1025–1033, 2003.
- [146] John E. Mottershead, Michael Link, and Michael I. Friswell. The sensitivity method in finite element model updating : A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7) :2275–2296, 2011.
- [147] Adnan H Nayfeh. The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89(4) :1521–1531, 1991.
- [148] R B Nelson and S B Dong. High Frequency Vibrations and Waves in laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :739–745, 1973.

- [149] Viet Tung Nguyen, J. F. Caron, and Karam Sab. A model for thick laminates and sandwich plates. *Composites Science and Technology*, 65(3-4) :475–489, 2005.
- [150] H Oberst, G W Becker, and K Frankenfeld. {Ü}ber die D{ä}mpfung der Biegeschwingungen d{ü}nner Bleche durch fest haftende Bel{ä}ge II. *Acta Acustica united with Acustica*, 4(4) :433–444, 1954.
- [151] Hermann Oberst and Kurt Frankenfeld. {Ü}ber die D{ä}mpfung der Biegeschwingungen d{ü}nner Bleche durch fest haftende Bel{ä}ge. *Acta Acustica united with Acustica*, 2(6) :181–194, 1952.
- [152] M O'Donnell, E T Jaynes, and J G Miller. Kramers–Kronig relationship between ultrasonic attenuation and wave velocity. *Journal of Acoustical of Society of America*, pages 696–701, 1981.
- [153] David E Oliver, Matthias Schuessler, and Polytec Gmbh. Automated Robot-Based 3D Vibration Measurement System. *Sound and Vibration*, (April) :12–15, 2009.
- [154] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. I. *Physical Review*, 37 :237–241, 1931.
- [155] Lars Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. II. *Physical Review*, 37(4) :405–426, 1931.
- [156] B. Ottersten, M. Viberg, and T. Kailath. Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(5) :1122–1135, 1991.
- [157] N. J. Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14(5) :385–400, 1978.
- [158] Vikrant Palan, W. Steve Shepard, and J. Gregory McDaniel. Characterization of an experimental wavenumber fitting method for loss factor estimation using a viscoelastically damped structure. *Journal of Sound and Vibration*, 291(3-5) :1170–1185, 2006.
- [159] Jean Michel Papy, Leuven De Lathauwer, and Sabine Van Huffel. A shift invariance-based order-selection technique for exponential data modelling. *IEEE Signal Processing Letters*, 14(7) :473–476, 2007.
- [160] Stephen Paulello. Agrafe de fixation de corde vibrante pour instrument de musique, notamment pour piano, 2006.
- [161] C. Pezerat and J. L. Guyader. Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 61(3) :309–324, 2000.
- [162] A. Srikantha Phani, J. Woodhouse, and N. A. Fleck. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(4) :1995–2005, 2006.
- [163] S. Phillips and L. Lessard. Application of natural fiber composites to musical instrument top plates. *Journal of Composite Materials*, 46(2) :145–154, 2012.
- [164] Fabrice Pierron and Michel Grediac. *The Virtual Fields Method*. Springer, 2011.

- [165] V. F. Pisarenko. The Retrieval of Harmonies from a Covariance Function. *Geophysical Journal of the Royal astrophysical Society*, 33 :347–366, 1973.
- [166] Thomas J Plona, Bikash K Sinha, Sergio Kostek, and Shu-kong Chang. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. II : Theory versus experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 92(August) :1144–1155, 1992.
- [167] T. Pritz. Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson’s ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 214 :83–104, 1998.
- [168] R Prony. Essai experimental et analytique. *Journal de l’École Polytechnique*, 1(22) :24–76, 1795.
- [169] Lei Qiu, Bin Liu, Shenfang Yuan, and Zhongqing Su. Impact imaging of aircraft composite structure based on a model-independent spatial-wavenumber filter. *Ultrasonics*, 64 :10–24, 2016.
- [170] Tianshuang Qiu and Peng Wang. A Novel Method for Near-Field Source Localization in Impulsive Noise Environments. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 35(11) :4030–4059, 2016.
- [171] Michał Rak, Mohamed Ichchou, and Jan Holnicki-Szulc. Identification of structural loss factor from spatially distributed measurements on beams with viscoelastic layer. *Journal of Sound and Vibration*, 310(4-5) :801–811, 2008.
- [172] Lord Rayleigh. The Theory of Sound, 1877.
- [173] Lord Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :4–11, 1885.
- [174] Marc Rébillat and Xavier Boutillon. Measurement of relevant elastic and damping material properties in sandwich thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, 330(25) :6098–6121, 2011.
- [175] Eric Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech.*, pages A69—A77, 1945.
- [176] Eric Reissner. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1) :55–68, 1947.
- [177] Edwin Reynders. System Identification Methods for (Operational) Modal Analysis : Review and Comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 19(1) :51–124, 2012.
- [178] Edwin Reynders, Jeroen Houbrechts, and Guido De Roeck. Fully automated (operational) modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29 :228–250, 2012.
- [179] P. Ribeiro, H. Akhavan, a. Teter, and J. Warmi ski. A review on the mechanical behaviour of curvilinear fibre composite laminated panels. *Journal of Composite Materials*, 48(22) :2761–2777, 2013.
- [180] J. Rissanen. Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14(5) :465–471, 1978.

- [181] J. Rissanen. Estimation of structure by minimum description length. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 1(3-4) :395–406, 1982.
- [182] Florian Roemer, Martin Haardt, and Giovanni Del Galdo. Analytical performance assessment of multi-dimensional matrix- and tensor-based ESPRIT-type algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(10) :2611–2625, 2014.
- [183] S I Rokhlin and L Wang. Stable recursive algorithm for elastic wave propagation in layered anisotropic media : stiffness matrix method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3 Pt 1) :822–834, 2002.
- [184] N. B. Roozen, Q. Leclère, K. Ege, and Y. Gerges. Estimation of plate material properties by means of a complex wavenumber fit using Hankel’s functions and the image source method. *Journal of Sound and Vibration*, 390 :257–271, 2017.
- [185] Giuseppe Rosi and Nicolas Auffray. Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework. *Wave Motion*, 63 :120–134, 2016.
- [186] S J Rothberg, M S Allen, P Castellini, D Di Maio, J J J Dirckx, D J Ewins, B J Halkon, P Muyschondt, N Paone, T Ryan, H Steger, E P Tomasini, S Vanlanduit, and J F Vignola. An international review of laser Doppler vibrometry : Making light work of vibration measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 99(October 2016) :11–22, 2017.
- [187] S.J. Rothberg, M.S. Allen, P. Castellini, D. Di Maio, J.J.J. Dirckx, D.J. Ewins, B.J. Halkon, P. Muyschondt, N. Paone, T. Ryan, H. Steger, E.P. Tomasini, S. Vanlanduit, and J.F. Vignola. An international review of laser Doppler vibrometry : Making light work of vibration measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, (October) :0–1, 2016.
- [188] Stéphanie Rouquette and Mohamed Najim. Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(1) :237–245, 2001.
- [189] Richard Roy, A Paulraj, and Thomas Kailath. Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques-ESPRIT. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(7) :94–101, 1989.
- [190] Souleymen Sahnoun, Konstantin Usevich, and Pierre Comon. Multidimensional ESPRIT : Algorithm, Computations and Perturbation Analysis. Technical report, 2016.
- [191] Souleymen Sahnoun, Konstantin Usevich, and Pierre Comon. Multidimensional ESPRIT for Damped and Undamped Signals : Algorithm, Computations, and Perturbation Analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(22) :5897–5910, 2017.
- [192] Souleymen Sahnoun, Konstantin Usevich, Pierre Comon, Souleymen Sahnoun, Konstantin Usevich, and Pierre Comon. Optimal choice of Hankel-block-Hankel matrix shape in 2-D parameter estimation. *[Research Report] GIPSA-lab*, 2016.
- [193] Jean Salençon. *Mécanique des Milieux Continus Tome I. Concepts Généraux*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2005.
- [194] Jean Salençon. *Mécanique des Milieux Continus Tome II. Thermoélasticité*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2007.



- [195] Jean Salençon. *Viscoélasticité pour le Calcul des structures*. 2009.
- [196] Henrik Schmidt. A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with application to Gaussian beam reflection at fluid–solid interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(3) :813, 1985.
- [197] Henrik Schmidt and Gerard Tango. Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms. *Geophysical Journal International*, 84(2) :331–359, 1986.
- [198] Ralph O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-34(3) :190–194, 1986.
- [199] Roy Schmidt. *A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation*. PhD thesis, Standford University, 1981.
- [200] S Shahbazpanahi, S Valaee, and M H Bastani. Distributed source localization using ESPRIT algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(10) :2169–2178, 2001.
- [201] T. J. Shan, M. Wax, and T. Kailath. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(4) :806 – 811, 1985.
- [202] P. J. Shorter. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(5) :1917, 2004.
- [203] H. C. So, F. K W Chan, W. H. Lau, and Cheung F. Chan. An efficient approach for two-dimensional parameter estimation of a single-tone. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(4) :1999–2009, 2010.
- [204] V. C. Soon and Y. F. Huang. An Analysis of ESPRIT Under Random Sensor Uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(9) :2353–2358, 1992.
- [205] William M. Steedly and Randolph L. Moses. The Cramer-Rao Bound for Pole and Amplitude Coefficient Estimates of Damped Exponential Signals in Noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(3) :1305–1318, 1993.
- [206] Jens Steinwandt, Student Member, Florian Roemer, and Senior Member. Generalized Least Squares for ESPRIT-type Direction of Arrival Estimation. *IEEE Signal Processing Letters*, 24(11) :1681–1685, 2017.
- [207] Jens Steinwandt, Florian Roemer, and Martin Haardt. Second-order performance analysis of Standard ESPRIT. *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings*, (1) :3051–3055, 2017.
- [208] Jens Steinwandt, Florian Roemer, Martin Haardt, and Giovanni Del Galdo. Performance analysis of multi-dimensional ESPRIT-type algorithms for arbitrary and strictly non-circular sources with spatial smoothing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(9) :2262–2276, 2017.
- [209] Petre Stoica and Arye Nehorai. MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(5), 1989.

- [210] Petre Stoica and Yngve Sel. Model-Order Selection : A review of information criterion rules. *IEEE Signal processing Magazine*, 21(July) :36–47, 2004.
- [211] Petre Stoica and Torsten Söderström. On the resolution performance of spectral analysis. *Signal Processing*, 44 :153–161, 1995.
- [212] Petre Stoica and Torsten Söderström. Statistical Analysis of MUSIC and Subspace Rotation Estimates of Sinusoidal Frequencies. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(8) :1836–1847, 1991.
- [213] Anatoli Stulov. Experimental and computational studies of piano hammers. *Acta Acustica united with Acustica*, 91(6) :1086–1097, 2005.
- [214] Zhongqing Su, Lin Ye, and Ye Lu. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures : A review. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5) :753–780, 2006.
- [215] A. Swindlehurst and T. Kailath. On the sensitivity of the ESPRIT algorithm to non-identical subarrays. *Sadhana*, 15(3) :197–212, 1990.
- [216] A Lee Swindlehurst, Bjorn Ottersten, Richard Roy, and Thomas Kailath. Multiple Invariance ESPRIT. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(4), 1992.
- [217] Nguyen Duc Thai, Michele D’Ottavio, and Jean François Caron. Bending analysis of laminated and sandwich plates using a layer-wise stress model. *Composite Structures*, 96(2013) :135–142, 2013.
- [218] Donald O Thompson and Dale E Chimenti. *Review of progress in quantitative nondestructive evaluation*, volume 18. Springer Science & Business Media, 2012.
- [219] William T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21(2) :89–93, 1950.
- [220] Anders Thorin. *Non-smooth model of the grand piano action*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2013.
- [221] Benjamin Trevisan. *Prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques orthotropes raidies de forme quelconque - Application à la table d’harmonie de piano*. PhD thesis, Université de Lyon ; INSA de Lyon, 2016.
- [222] Benjamin Trévisan, Kerem Ege, and Bernard Laulagnet. Vibroacoustics of orthotropic plates ribbed in both directions : Application to stiffened rectangular wood panels. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(1) :227–246, 2016.
- [223] Benjamin Trévisan, Kerem Ege, and Bernard Laulagnet. A modal approach to piano soundboard vibroacoustic behavior. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(2) :690–709, 2017.
- [224] Sabine Van Huffel and Joos Vandewalle. *The total least squares problem : computational aspects and analysis*, volume 9. Siam, 1991.
- [225] Peter Van Overschee and B L De Moor. *Subspace identification for linear systems : Theory—Implementation—Applications*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [226] P Vannucci, X J Gong, and G Verchery. Determination des stratifies quasi-homogènes par l'approche polaire. *Comptes rendus du Congrès JNC 11 (11èmes Journées Nationales sur les Composites)*, pages 205–214, 1998.
- [227] P. Vannucci and G. Verchery. Stiffness design of laminates using the polar method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(50-51) :9281–9294, 2001.
- [228] P. Vannucci and G. Verchery. A new method for generating fully isotropic laminates. *Composite Structures*, 58(1) :75–82, 2002.
- [229] Paolo Vannucci. Strange Laminates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(13) :1532–1546, 2012.
- [230] Paolo Vannucci. *Anisotropic elasticity*. Springer, 2018.
- [231] Peter Verboven, Patrick Guillaume, Bart Cauberghe, Eli Parloo, and Steve Vanlanduit. Stabilization charts and uncertainty bounds for frequency-domain linear least squares estimators. *Proceedings of the IMAC-XXI Conference and Exposition on Structural Dynamics, Feb*, (January) :3–6, 2003.
- [232] G Verchery. Les Invariants des Tenseurs d'Ordre 4 du Type de l'Elasticite. *Euromech Colloquium 115*, (2) :93–104, 1979.
- [233] G Verchery and T S Vong. Graphic aided design of stacking sequences for laminates (Une methode d'aide graphique a la conception des sequences d'empilement dans les stratifies). In *National Workshop on Composites, 5 th, Paris, France, Sept. 9-11, 1986, Proceedings (A 87-50159 22-24)*. Paris, Editions Pluralis, 1986,, pages 267–280, 1986.
- [234] Romain Viala, Vincent Placet, and Scott Cogan. Identification of the anisotropic elastic and damping properties of complex shape composite parts using an inverse method based on finite element model updating and 3D velocity fields measurements (FEMU-3DVF) : Application to bio-based composite violin sou. *Composites : Part A*, 106 :91–103, 2018.
- [235] Angela Vincenti, Paolo Vannucci, and M Reza Ahmadian. Optimization of laminated composites by using genetic algorithm and the polar description of plane anisotropy. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(3) :242–255, 2013.
- [236] Johannes Vollmann, R Breu, and J Dual. High-resolution analysis of the complex wave spectrum in a cylindrical shell containing a viscoelastic medium .2. Experimental results versus theory. *Journal Of The Acoustical Society Of America*, 102(2) :909–920, 1997.
- [237] L. Wang and S. I. Rokhlin. Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media. *Ultrasonics*, 39(6) :413–424, 2001.
- [238] Thibault Wassereau, Charles Pezerat, J-L Guyader, and Frederic Ablitzer. Characterization of materials and flaw detection using force analysis technique. In *NOVEM 2015*, number April, Dubrovnik, Croatia, 2015.
- [239] K T Wong and Michael D Zoltowski. Closed-form multi-dimensional multi-invariance ESPRIT. *1997 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, 5 :3–6, 1997.

- [240] K.M. Wong, R.S. Walker, and G. Niezgoda. Effects of random sensor motion on bearing estimation by the MUSIC algorithm. *IEE Proceedings F Communications, Radar and Signal Processing*, 135(3) :233, 1988.
- [241] Zc Xi, Gr Liu, Ky Lam, and Hm Shang. Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108(5 Pt 1) :2179–86, 2000.
- [242] Zhengyuan Xu. Perturbation analysis for subspace decomposition with applications in subspace-based algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(11) :2820–2830, 2002.
- [243] S. Yuan, Y. Zhong, L. Qiu, and Z. Wang. Two-dimensional near-field multiple signal classification algorithm-based impact localization. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 26(4) :400–413, 2015.
- [244] Yongteng Zhong, Shenfang Yuan, and Lei Qiu. Multiple damage detection on aircraft composite structures using near-field MUSIC algorithm. *Sensors and Actuators, A : Physical*, 214 :234–244, 2014.



# Annexes





# Annexe A

## Généralités

## A.1 Dynamique du solide déformable

Cette section rappelle les concepts de mécanique du solide déformable nécessaires à la compréhension des développements théoriques de ce qui suit. On pourra ainsi se référer aux différentes définitions tout au long du manuscrit. L'objectif n'est donc pas de donner un cours de mécanique des milieux continus, qui exigerait une rigueur bien plus grande. Les concepts de base sont introduits, sans s'attarder sur leur justification. Le lecteur en quête d'approfondissements trouvera un nombre d'excellents ouvrages très détaillés sur le sujet ; on peut par exemple citer [193, 194, 75].

Tout d'abord, on rappelle les différents champs tensoriels (ou vectoriels) utiles à la description mécanique d'un solide déformable. Ensuite, on rappelle les équations *locales* qui lient ces champs et permettent de formuler le problème à résoudre.

### A.1.1 Cadre de travail

Le formalisme Lagrangien est adopté. Le problème à résoudre y est décrit sur la base d'une configuration de référence, sur laquelle la position d'un point matériel est notée  $\underline{\mathbf{X}}$ . A chaque instant  $t$ , la position  $\underline{\mathbf{x}}$  de ce point est donnée par une transformation bijective  $\underline{\phi}$  :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\phi}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (\text{A.1.1})$$

avec  $\underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{X}}$ . Pour cette première section, la dépendance des grandeurs d'intérêt en fonction du temps  $t$  est omise car implicite. Elle sera réintroduite plus tard, avec les notions portant sur le comportement viscoélastique.

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP). En effet, on s'intéresse dans ce manuscrit aux petits mouvements autour de l'état *naturel*, pris comme configuration de référence. L'hypothèse HPP nous permet de considérer que la géométrie du problème est peu modifiée au cours du mouvement : tous les champs caractéristiques du problème sont exprimés dans la configuration de référence. Les équations régissant la variation des champs caractéristiques du problème sont donc linéarisées, pour ce qui est de leur dépendance aux variables de l'espace.

### A.1.2 Champs tensoriels caractéristiques

On rappelle ici les différents champs qui entrent en compte dans l'étude de la dynamique d'un solide déformable.

#### A.1.2.1 Déplacements

On définit le vecteur déplacement  $\underline{\mathbf{u}} = {}^T[u_1, u_2, u_3]$  comme la différence entre les positions d'un point dans la configuration de référence et la configuration actuelle :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}} = \underline{\phi}(\underline{\mathbf{X}}) - \underline{\mathbf{X}} \quad (\text{A.1.2})$$

On peut alors définir, à partir de  $\underline{\mathbf{u}}$ , la vitesse  $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$  et l'accélération  $\underline{\ddot{\mathbf{u}}}$ .

### A.1.2.2 Déformations

Dans tout le manuscrit, on utilise le tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\epsilon}}$  comme mesure des déformations. On donne sa forme en fonction des déplacements (A.1.2) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})) + {}^T \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}))) \quad (\text{A.1.3})$$

C'est un tenseur d'ordre 2 symétrique, qui s'annule pour toute transformation de solide rigide (ou *isométrique*, cad. composée d'une translation et d'une rotation) infinitésimale.

### A.1.2.3 Contraintes

Le tenseur des *contraintes de Cauchy*  $\underline{\underline{\sigma}}$  est utilisé. Il est également symétrique d'ordre 2 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = {}^T \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{A.1.4})$$

## A.1.3 Équations locales du mouvement

On rappelle ici les différentes équations locales qui lient les champs de déplacement, de déformations et de contraintes. La formulation locale du problème complet est finalement donnée à titre de résumé.

On considère un solide déformable décrit par le volume  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ .

### A.1.3.1 Conservation de la quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un petit prisme de matière homogène permet de montrer les équations de la dynamique suivantes, qui doivent être respectées en chaque point  $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega$ , à condition que le champ de vitesse ne présente pas de saut (onde de choc) :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}})) + \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}) = \rho(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\ddot{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.1.5})$$

où  $\underline{\mathbf{f}}$  est la densité volumique des efforts extérieurs et  $\rho$  la masse volumique du matériau.

### A.1.3.2 Conditions aux limites

La frontière  $\partial\Omega$  est divisée en deux parties : sur  $\partial\Omega_u$  on impose un champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}^\partial$  ; sur  $\partial\Omega_f$  est imposé une densité surfacique de force  $\underline{\mathbf{T}}$ . On a alors :

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_u \quad \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}^\partial(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_f \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.1.7})$$

où  $\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}})$  est la normale sortante au point  $\underline{\mathbf{x}}$ . Pour que le problème soit correctement posé, on vérifie que :

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f = \partial\Omega \quad (\text{A.1.8})$$

$$\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_f = \emptyset \quad (\text{A.1.9})$$

Les conditions aux limites doivent en effet être imposées (nulles si besoin) sur toute la frontière, et on ne peut imposer à la fois un déplacement et un chargement.

### A.1.3.3 Comportement

On s'intéresse ici au solide élastique linéaire, dont la description des efforts internes est caractérisée par une relation contraintes-déformations linéaire, appelée *loi* ou *relation de comportement*. L'application linéaire qui en résulte s'exprime sous la forme de deux tenseurs du quatrième ordre :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1.10})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1.11})$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}$  sont respectivement appelés *tenseur des raideurs* et *tenseur des souplesses*.

### A.1.3.4 Conditions initiales

Les équations précédentes régissent l'*évolution* du système considéré. Afin de garantir l'unicité de la solution, il est nécessaire de définir l'état *initial* du système. Celui-ci est complètement défini par les champs de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}_0$  et de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}_0$  à l'instant d'origine  $t_0$  :

$$\underline{\mathbf{u}}(t = t_0) = \underline{\mathbf{u}}_0 \quad (\text{A.1.12})$$

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}(t = t_0) = \underline{\mathbf{v}}_0 \quad (\text{A.1.13})$$

### A.1.3.5 Formulation locale du problème de dynamique

On résume ici le problème de dynamique dans le cadre de l'élasticité linéaire. On en profite pour donner les notations indicielles des équations.

**Definition A.1.1** (Formulation locale du problème de dynamique). *Les champs  $\underline{\mathbf{u}}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont solution du problème de dynamique si toutes les équations suivantes sont vérifiées :*

<i>cinématique</i> :	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$	$[\Omega]$	(A.1.14)
<i>comportement</i> :	$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$	$[\Omega]$	
<i>équilibre</i> :	$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i$	$[\Omega]$	
<i>C.L. cinématiques</i> :	$u_i = u_i^\partial$	$[\partial\Omega_u]$	
<i>C.L. statiques</i> :	$\sigma_{ij} n_j = T_i$	$[\partial\Omega_f]$	
<i>C.I.</i> :	$u_i _{t=t_0} = u_{0,i}$ $\dot{u}_i _{t=t_0} = v_{0,i}$	$[\Omega]$	

### A.1.3.6 Conditions de continuité

L'utilisation des champs tensoriels dans des équations différentielles sous-entend une certaine régularité spatio-temporelle de ceux-ci (continuité, dérivabilité). On s'intéresse toutefois dans ce travail à la modélisation de structures présentant de fortes discontinuités à l'intérieur même du volume considéré. Dans ce cas, une façon de relâcher les contraintes sur la régularité des champs consiste à diviser le problème en plusieurs sous-problèmes dans lesquels les champs sont

continus. Les champs deviennent donc continus *par morceaux* et il est nécessaire d'ajouter des conditions aux limites entre les sous-domaines.

**Definition A.1.2** (Conditions de continuité). *Soient deux domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  séparés par une interface  $\partial\tilde{\Omega}$  de normale  $\underline{\mathbf{n}}$  (dont l'orientation est arbitraire). Alors les conditions aux limites exprimées de chaque côté de l'interface imposent,  $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\tilde{\Omega}$  :*

$$\underline{\underline{\sigma}}^+(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\sigma}}^-(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.1.15})$$

$$\underline{\mathbf{u}}^+(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}^-(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.1.16})$$

*Remarque A.1.1.* La continuité est imposée sur le *vecteur contrainte*  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}$ . Certaines composantes du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  peuvent donc présenter un saut à l'interface. Par exemple, si  $\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}_3$ , les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  ne sont pas nécessairement continues à l'interface.

### A.1.4 Le principe des travaux virtuels

Les équations de la dynamique précédemment exprimées (A.1.14) sont définies au sens *local*, c'est à dire qu'elles doivent être vérifiées en *tout point*  $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega$ . On parle en l'occurrence de *formulation forte*. Par opposition, les principes variationnels développent un point de vue *global*, exprimant les équations du mouvement sous forme intégrales. On parle dans ce cas de *formulation faible*.

Le Principe des Travaux Virtuels (PTV) fournit une approche rigoureuse pour la construction d'un modèle en mécanique. Il établit une loi de bilan qui porte sur le travail qui serait fourni par des *efforts* appliqués à un champ de déplacement virtuel arbitraire  $\underline{\mathbf{u}}^*$ .

Trois travaux virtuels sont définis : (1) le travail virtuel de la quantité d'accélération ; (2) le travail virtuel des efforts extérieurs ; (3) le travail virtuel des efforts intérieurs. Chacun de ces travaux est défini comme une forme linéaire intégrale portant sur le champ vectoriel  $\underline{\mathbf{u}}^*$  défini sur une partition quelconque du domaine  $\Omega$ . La construction d'un modèle sur la base du PTV se fait selon deux étapes : (1) postulat d'une forme linéaire définissant chaque travail ; (2) identification des cofacteurs de cette forme, qui deviennent alors les variables *duales* du modèle au sens de l'énergie.

Les champs  $\underline{\mathbf{u}}^*$  peuvent être vus comme des fonctions tests, dont le choix est arbitraire ; ils ne doivent pas être confondus avec le déplacement *réel*  $\underline{\mathbf{u}}$ . L'identification des variables duales se fait donc par le choix de champs virtuels  $\underline{\mathbf{u}}^*$  spécifiques, qui permettent d'annuler certaines intégrales pour isoler les cofacteurs d'intérêt.

Cette démarche rigoureuse est également intéressante par la flexibilité qu'elle offre dans le choix du modèle (choix de la forme linéaire). Elle est assez générale pour englober une grande variété de modèles, même si l'intérêt ici porte sur la modélisation de la dynamique des solides déformables.

#### A.1.4.1 Travail de la quantité d'accélération

La quantité d'accélération est définie à partir d'un petit volume  $d\Omega$  de masse élémentaire  $dm(\underline{\mathbf{x}}) = \rho(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega$ .

**Definition A.1.3** (Travail virtuel de la quantité d'accélération). *On définit le travail de la*

quantité d'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \, dm(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) \, d\Omega$  de la façon qui suit :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (\text{A.1.17})$$

où  $\ddot{\mathbf{u}}$  est l'accélération due au déplacement réel  $\mathbf{u}$ .

#### A.1.4.2 Travail des efforts extérieurs

Le système formé par la partition  $\Omega$  d'un solide déformable peut être soumis à des efforts extérieurs, qui peuvent prendre deux formes : (1) une densité surfacique d'efforts  $\mathbf{T}$  qui s'exercent sur son contour  $\partial\Omega$ , comme un champ de pression ; (2) une densité volumique de force  $\mathbf{f}$  qui s'exerce à distance dans  $\Omega$ , comme la force de gravité ou un champ électromagnétique.

**Définition A.1.4** (Travail virtuel des efforts extérieurs). *On définit le travail virtuel des efforts extérieurs à partir des champs vectoriels  $\mathbf{T}$  défini sur la frontière  $\partial\Omega$  et  $\mathbf{f}$  défini dans tout l'intérieur de  $\Omega$  :*

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) \, dS \quad (\text{A.1.18})$$

#### A.1.4.3 Travail des efforts intérieurs

La troisième forme de travail concerne les interactions entre les différents points matériels à l'intérieur de  $\Omega$ . On définit la densité de travail des efforts intérieurs  $w^i$ , dont la forme doit être postulée lors de la construction d'un modèle. Cette forme doit être représentative des mécanismes d'interaction internes au matériau, qui régissent la façon dont sont transmises les sollicitations à travers le continuum matériel.

Une propriété particulièrement importante du travail des efforts intérieurs est héritée du principe d'action-réaction et concerne le cas particulier des transformations isométriques (ou *rigidifiantes*), qui correspondent à un mouvement sans déformation (mouvement de *corps solide*).

**Propriété A.1.1.** *Soit un champ de déplacement virtuel correspondant à un mouvement rigidifiant :  $\mathbf{u}_r^*(\mathbf{x}) = \mathbf{\tau}_0^* + \mathbf{\theta}_0^* \wedge \mathbf{x}$  et  $w^i$  la densité de travail des efforts intérieurs. Alors l'égalité suivante doit être vérifiée :*

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}_r^*) = \int_{\Omega} w^i(\mathbf{u}_r^*(\mathbf{x})) \, d\Omega = 0 \quad (\text{A.1.19})$$

autrement dit, le travail des efforts intérieurs dû à un mouvement de corps rigide est nul.

Cette propriété restreint le choix de la densité de travail  $w^i$ . Généralement, on la postule sous une forme linéaire qui s'applique au déplacement virtuel et à ses gradients successifs. Dans le cadre de la mécanique du solide déformable classique, on s'arrête au premier gradient ;  $w^i$  se met alors sous la forme :

$$w_i(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \underline{\mathbf{grad}}(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \quad (\text{A.1.20})$$

En injectant cette forme dans (A.1.19), on montre que le cofacteur  $\mathbf{A}$  doit être nul et que  $\mathbf{B}$  est le tenseur symétrique  $\underline{\underline{\sigma}}$ , qui s'applique à la partie symétrique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  du gradient du déplacement.

**Definition A.1.5** (Travail virtuel des efforts intérieurs). *Dans le cadre d'une modélisation au premier gradient, le travail des efforts intérieurs se met sous la forme :*

$$\mathcal{U}(\underline{\mathbf{u}}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}})) \, d\Omega \quad (\text{A.1.21})$$

#### A.1.4.4 Équation de bilan

Le principe des travaux virtuels s'exprime comme une équation de bilan formée à partir des trois travaux élémentaires définis en (A.1.17), (A.1.18) et (A.1.21). Il s'énonce comme suit.

**Definition A.1.6** (Principe des travaux virtuels). *Soit un champ de déplacement virtuel  $\underline{\mathbf{u}}^*$  arbitraire, défini sur un domaine quelconque  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ . Soient les travaux des efforts extérieurs  $\mathcal{W}(\underline{\mathbf{u}}^*)$ , des efforts intérieurs  $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{u}}^*)$  et de la quantité d'accélération  $\mathcal{A}(\underline{\mathbf{u}}^*)$  ; alors on peut écrire :*

$$\forall \underline{\mathbf{u}}^*, \forall \Omega \quad \mathcal{W}(\underline{\mathbf{u}}^*) + \mathcal{U}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \mathcal{A}(\underline{\mathbf{u}}^*) \quad (\text{A.1.22})$$

La force de ce principe réside dans le fait qu'il est valable pour tout domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  continue par morceaux, et quelque soit le champ de déplacement virtuel  $\underline{\mathbf{u}}^*$ . Selon le choix de celui-ci, on peut en effet :

- séparer les différents types d'intégrales (choix d'un champ virtuel nul sur  $\partial\Omega$ , ou nul partout sauf sur la frontière, etc.).
- multiplier le nombre d'équations disponibles. En effet, le PTV est une équation scalaire unique, insuffisante telle quelle pour résoudre des problèmes à plusieurs inconnues.

#### A.1.4.5 Formulation faible du problème de dynamique

Si on remplace dans l'équation de bilan (A.1.22) les différentes expressions des travaux virtuels (A.1.17), (A.1.18) et (A.1.21), on obtient la formulation intégrale du problème de la dynamique suivante.

**Definition A.1.7** (Formulation faible). *Le principe des puissances virtuelles permet d'écrire l'équation intégrale suivante, vérifiée pour tout champ virtuel  $\underline{\mathbf{u}}^*$  et tout domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  :*

$$\forall(\underline{\mathbf{u}}^*, \Omega) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \, dS \quad (\text{A.1.23})$$

où  $\underline{\mathbf{f}}$  et  $\underline{\mathbf{T}}$  sont les densités d'efforts extérieurs volumique et surfacique.

#### A.1.4.6 Equivalence des approches globales et locales

On développe ici le résultat classique qui montre l'équivalence du principe des travaux virtuels et des équations locales de la dynamique. Pour commencer, la symétrie de  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$  et  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  nous permet d'écrire  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}(\underline{\mathbf{u}}^*)$ . On remarque alors que :

$$\underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^*) = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{grad}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) + \underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \quad (\text{A.1.24})$$



Après utilisation du théorème de la divergence, le principe des travaux virtuels (A.1.23) produit l'expression suivante, où la dépendance des champs en fonction de la position  $\underline{\mathbf{x}}$  et du temps  $t$  est omise car implicite :

$$\forall \underline{\mathbf{u}}^*, \forall \Omega \quad \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{div}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) + \underline{\mathbf{f}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^* dS = \int_{\Omega} \rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* d\Omega \quad (\text{A.1.25})$$

En choisissant une fonction test  $\underline{\mathbf{u}}^*$  de la bonne forme, on peut annuler l'intégrale sur la frontière  $\partial\Omega$ , pour ne conserver que l'intégrale dans le volume  $\Omega$ . Puisque l'égalité des intégrales est vraie  $\forall \Omega$ , alors les intégrandes sont égales. On obtient donc les conditions d'équilibre dynamique (A.1.5). De façon équivalente, on peut annuler l'intégrale de volume avec une fonction  $\underline{\mathbf{u}}^*$  adaptée. Sous certaines conditions de continuité par morceaux de la frontière  $\partial\Omega$ , on obtient les équations aux limites en contraintes (A.1.7).

## A.2 Quelques méthodes de résolution

Cette section explicite rapidement quelques méthodes qui sont utilisées dans ce travail pour résoudre des problèmes de dynamique. On distingue notamment les méthodes basées sur une formulation *forte* (résolution des équations locales (A.1.14)) de celles basées sur une formulation *faible* (résolution d'équations intégrales basées sur le PTV (A.1.22) ou tout autre principe variationnel).

### A.2.1 Réduction de l'espace des solutions

Sauf dans de rares cas, il est nécessaire, pour résoudre le problème de la mécanique du solide, de *réduire* l'espace des solutions disponibles. En effet, les équations du problème de la dynamique étant définies en tout point, et à chaque instant, l'espace des solutions est de dimension infinie. La résolution *numérique* d'un problème implique donc le passage d'une description continue des champs à une description *discrète*, de taille finie.

Dans le cadre de ce travail, seules des approches en déplacement sont formulées ; en conséquence, on raisonne dans ce qui suit sur le champ de déplacement. Toutefois, les démarches données ci-dessous peuvent s'appliquer à tous les champs tensoriels caractéristiques du problème de la dynamique (contraintes, déformations, déplacements).

#### A.2.1.1 Séparation des variables

Une première stratégie consiste à séparer les variables de temps et d'espace, c'est à dire écrire les composantes du champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  sous la forme d'une combinaison de fonctions séparables en temps et en espace :

$$u_i(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_n X_{n,i}(\underline{\mathbf{x}}) T_{n,i}(t) \quad (\text{A.2.1})$$

où les fonctions  $X_{n,i}$  sont à déterminer ; elles sont souvent choisies dans l'espace des solutions du problème homogène associé aux équations de la dynamique. Ce choix permet notamment d'exprimer, dans les équations différentielles (A.1.14), les dérivées partielles en temps et en espace de façon découplées. On utilise largement cette écriture dans ce travail.

*Remarque A.2.1* (Séparation des variables d'espace). De façon équivalente, on peut chercher des solutions *complètement séparées*, c'est à dire de la forme :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_n X_{n,i}(x_1) Y_{n,i}(x_2) Z_{n,i}(x_3) T_{n,i}(t) \quad (\text{A.2.2})$$

ce qui constitue une approximation supplémentaire. Cette écriture est abondamment employée dans ce travail, par exemple pour calculer les solutions du problème de propagation des ondes planes (chapitre I) ou pour approximer un champ de déplacement mesuré (voir chapitre IV) sur le développement de la méthode ESPRIT unifiée).

### A.2.1.2 Paramétrage généralisé

Une deuxième démarche de réduction de l'espace des solutions généralement adoptée consiste à projeter les fonctions  $X_{n,i}$  de (A.2.1) sur une base *tronquée*  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  de  $N$  fonctions *connues*  $n_i(\mathbf{x})$  de l'espace :

$${}^T\mathbf{n}(\mathbf{x}) = [n_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad n_N(\mathbf{x})] \quad (\text{A.2.3})$$

La séparation des variables (A.2.1) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}(\mathbf{x}) = {}^T\mathbf{n}(\mathbf{x}) \boxtimes \mathbb{I}^P \quad (\text{A.2.4})$$

où  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{PN}$  est le vecteur des *degrés de liberté*, ou *paramètres généralisés*. Le nombre  $P$  dénote le nombre de composantes du champ de déplacement vectoriel  $\mathbf{u}$ ; dans le cas des équations de la dynamique du solide 3D,  $P = 3$ . Toutefois, les modèles de structures élancées peuvent donner lieu à un champ de déplacement dont le nombre de composantes est différent ( $P = 5$  pour le modèle de plaque épaisse,  $P = 4$  pour la poutre d'Euler et  $P = 6$  pour la poutre de Timoshenko, etc.). La suite est donc formulée dans un cadre général, utilisant  $P$  composantes pour le déplacement.

Le gradient du déplacement est donc approximé de la façon qui suit :

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}} = {}^T\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}} \boxtimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{i-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}^{P-i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

La réduction de l'espace des solutions pose des questions fondamentales sur la qualité de la base de projection  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  choisie pour approximer les champs :

- *régularité* : les fonctions de base et leurs dérivées successives sont-elles définies et continues ?
- *complétude* : la base est-elle suffisante pour décrire toutes les solutions ? C'est à dire, est-ce-que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  ?
- *parcimonie* : combien de fonctions sont nécessaires pour décrire de façon correcte le champ de déplacement, ou à quelle vitesse tend la limite précédente vers 0 ?
- *conditionnement* : à quel point les fonctions de la base sont interdépendantes ?

Ces questions sont à la base du choix des fonctions, qui caractérise chaque méthode de résolution. La méthode de Ritz privilégie la régularité des fonctions, définies de façon globale et très parcimonieuses dans certains cas précis (série de Navier pour les plaques rectangulaires appuyées, fonctions de Bessel pour les membranes circulaires, etc.). La méthode des éléments finis privilégie plutôt une base de fonctions définies *par morceaux* ; la complétude et le conditionnement sont plus facilement garantis, mais la continuité peut poser problème au passage entre deux morceaux (ou éléments).

## A.2.2 Formulation forte

Les méthodes utilisant la formulation forte cherchent à résoudre toutes les équations *locales* du problème de dynamique (A.1.14), en chaque point et à tout instant. On présente ici deux de ces méthodes, que sont la méthode des différences finies et la méthode des résidus.

### A.2.2.1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est assez particulière car elle n'utilise pas la projection du champ de déplacement sur une base (A.2.4) mais une approximation locale des dérivées partielles sur un maillage de points régulier. En effet, le développement limité du champ de déplacement s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}} + dx_i \mathbf{e}_i, t) = \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \sum_{n=1}^N \frac{dx_i^n}{n!} \left. \frac{\partial^n \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_i^n} \right|_{\underline{\mathbf{x}}, t} + \mathcal{O}(dx_i^{N+1}) \quad (\text{A.2.6})$$

où  $N$  dénote l'ordre du développement. On peut construire à partir de celui-ci des *noyaux* de dérivation, qui servent à approximer les dérivées partielles en un point à partir du déplacement aux points voisins ; on en donne ici quelques exemples :

$$\left. \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \right|_{\underline{\mathbf{x}}, t} \simeq \frac{\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}} + dx_i \mathbf{e}_i, t) - \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}} - dx_i \mathbf{e}_i, t)}{2 dx_i} \quad (\text{A.2.7})$$

$$\left. \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_i^2} \right|_{\underline{\mathbf{x}}, t} \simeq \frac{\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}} + dx_i \mathbf{e}_i, t) - 2\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}} - dx_i \mathbf{e}_i, t)}{(dx_i)^2} \quad (\text{A.2.8})$$

On peut donc obtenir le champ de déformations à partir de l'approximation du premier gradient du déplacement, puis le champ de contraintes et ses dérivées à partir de l'approximation des dérivées d'ordre élevé du champ de déplacement. L'assemblage des équations obtenues en chaque point du maillage uniforme donne alors un système d'équations à résoudre, dont la solution est le déplacement instantané des points de la grille.

Cette méthode est en pratique assez peu opérationnelle, pour plusieurs raisons :

- La qualité de l'approximation des dérivées partielles dépend beaucoup de l'espacement  $dx$  des points du maillage ; le coût en calcul peut en être affecté.
- Les dérivées d'ordre supérieur sont difficiles à approximer, notamment sur les bords du maillage ; elles impliquent l'utilisation de noyaux de grande taille (prise en compte de nombreux voisins), ce qui a tendance à dégrader le caractère *creux* des matrices caractéristiques du système linéaire.
- La contrainte d'un maillage uniforme de point limite beaucoup la géométrie des problèmes qui peuvent être traités.

La méthode des différences finies n'est donc pas utilisée dans ce travail à des fins de résolution directe.

## A.2.3 Formulation faible

Les méthodes de résolution reposant sur une formulation faible sont basées sur des équations intégrales. Le principe des travaux virtuels (A.1.22) est utilisé ici, mais d'autres formulations variationnelles peuvent être employées.

### A.2.3.1 Utilisation du principe des travaux virtuels

On rappelle l'équation intégrale donnée par le PTV, qui définit le problème de dynamique à résoudre (A.1.23) :

$$\forall(\underline{\mathbf{u}}^*, \Omega) \quad , \quad \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^*) \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \, dS \quad (\text{A.2.9})$$

où on a utilisé la notation de Voigt explicitée dans la section suivante (B.1.1).

L'idée est alors d'utiliser l'approximation (A.2.4) pour donner une version *discrète* de cette équation. Notamment, on projette les champs *réels* et *virtuels* dans la même base. Cela impose l'utilisation de fonctions de base *cinématiquement admissibles*, c'est à dire qu'elles respectent toutes les conditions aux limites en déplacement (A.1.6).

La version discrétisée du PTV, utilisant la projection du déplacement sous la forme (A.2.4), se met sous la forme :

$$\forall \mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{PN} \quad , \quad {}^T\mathbf{q}^* \mathbf{K} \mathbf{q}(t) + {}^T\mathbf{q}^* \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) = {}^T\mathbf{q}^* \mathbf{f}(t) \quad (\text{A.2.10})$$

qui est vérifiée pour tout choix de vecteurs de degrés de liberté virtuels  $\mathbf{q}^*$ . On peut donc, en choisissant différents vecteurs virtuels, obtenir au maximum  $P \times N$  équations indépendantes, car  $P \times N$  vecteurs  $\mathbf{q}_n^*$  indépendants seulement existent. En particulier, si on choisit  ${}^T\mathbf{q}_n^* = [\mathbf{0}^{n-1} \quad 1 \quad \mathbf{0}^{PN-n}]$  ( $n^{\text{ième}}$  vecteur unité), on obtient la version discrétisée des équations du mouvement qui suit.

**Definition A.2.1** (Équations d'équilibre dynamique affaiblies généralisées). *Les équations d'équilibre dynamique portant sur les déplacements généralisés  $\mathbf{q}$  et formulées à partir du principe des travaux virtuels s'écrivent sous la forme suivante :*

$$\boxed{\mathbf{K} \mathbf{q}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(t)} \quad (\text{A.2.11})$$

avec :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} {}^T\mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{x}}) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \, d\Omega \quad (\text{A.2.12})$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho(\underline{\mathbf{x}}) {}^T\mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \, d\Omega \quad (\text{A.2.13})$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} {}^T\mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} {}^T\mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}) \, dS \quad (\text{A.2.14})$$

respectivement notés matrices de raideur généralisée, matrice de masse généralisée et vecteur force généralisé.  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques. La matrice  $\mathbf{B}$  est définie comme suit :

$${}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{33} & \mathbf{b}_{23} + \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{13} + \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.15})$$

où les  $\mathbf{b}_{ij}$  ont été définis en (A.2.5). Elle permet de donner une approximation des déformations en notation de Voigt (B.1.1) :  $\underline{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{B} \mathbf{q}$ .

### A.2.3.2 Méthode de Ritz

Comme on l'a évoqué plus haut, la méthode de Ritz est l'application du principe précédent dans le cas de fonctions de base  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  définies de façon globale sur tout le domaine  $\Omega$ .

Les fonctions choisies doivent être cinématiquement admissibles (respecter les conditions aux limites en déplacement). Cette contrainte restreint assez fortement la géométrie des problèmes qui peuvent être traités. Pour pallier à cela, certains auteurs [221, 223] proposent de formuler le PTV sur un domaine  $\hat{\Omega}$  étendu, dont la géométrie est simple. Les conditions aux limites cinématiques sur la frontière  $\partial\Omega$  sont alors forcées en faisant *travailler* les déplacements sur  $\partial\Omega_u$  (par l'ajout de raideurs et masses ponctuelles). Cette technique a ses inconvénients : (i) la raideur et la masse virtuelles ajoutées influencent le résultat ; (ii) les matrices de raideur et de masse généralisées associées à ces ajouts ponctuels sont pleines, donc lourdes à calculer et à stocker.

La méthode de Ritz est donc utilisée pour la résolution de problèmes dont la géométrie est élémentaire (rectangles, disques, etc.) et les conditions aux limites simples. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté (taille de  $\mathbf{q}$ ) nécessaires pour approximer correctement la solution est réduit. Le problème à résoudre est donc de petite taille, et souvent bien conditionné.

Dans certains cas, on peut même connaître une base de fonctions orthogonales, c'est à dire qui rendent les opérateurs de raideur et de masse généralisées  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  diagonaux. Dans ce cas précis, le système d'équations à résoudre est alors complètement découplé, et il suffit de résoudre  $3N$  équations scalaires aux dérivées partielles pour résoudre le problème. C'est le cas, par exemple, de la série en double sinus (série de Navier) pour les plaques rectangulaires simplement appuyées dont les axes de symétrie du matériau coïncident avec les directions principales de la plaque.

La méthode de Ritz est donc utilisée dans ce travail pour résoudre les problèmes impliquant une géométrie simple.

### A.2.3.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis prend le parti de définir des fonctions de base  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  *par morceaux*. Celles-ci sont choisies suffisamment simples pour faciliter les étapes d'intégration dans le but d'obtenir les opérateurs généralisés  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{f}$ . De plus, le sous-domaine sur lequel sont définies ces fonctions peut être ramené à une géométrie de référence élémentaire par une transformation simple. Le calcul des intégrales (A.2.12), (A.2.13) et (A.2.14) est réalisé sur cette géométrie élémentaire.

La construction d'un modèle aux éléments finis est donc réalisée de façon assez standardisée, ce qui, avec la grande variété de géométries qu'il est possible de traiter par cette méthode, en fait une solution très majoritairement adoptée par les codes de calcul actuels.

**Coordonnées locales** On approxime le champ de déplacement sur un sous-domaine élémentaire  $\hat{\Omega}^e$  de géométrie simple (en 2D : carré, triangle rectangle ; en 3D : cube, tétraèdre, etc.), à partir de  $Q$  fonctions de base  $\mathbf{n}^e(\boldsymbol{\xi})$  dans les coordonnées *locales*  $\boldsymbol{\xi}$ . Chacune de ces fonctions de base est reliée à un point caractéristique du domaine  $\hat{\Omega}^e$ , appelé *noeud* : la  $q^{\text{ième}}$  fonction de base est égale à 1 en  $\boldsymbol{\xi}_q$  et nulle aux  $Q - 1$  coordonnées  $\boldsymbol{\xi}_m$ ,  $m \neq q$ .

On se restreint dans ce travail aux éléments finis *isoparamétriques* ; le passage des coordonnées locales  $\boldsymbol{\xi}$  aux coordonnées *globales*  $\mathbf{x}$  se fait par le biais de la transformation géométrique

utilisant les fonctions de base  $\mathbf{n}^e(\underline{\xi})$  :

$$\underline{\mathbf{x}}(\underline{\xi}) = \mathbf{N}^e(\underline{\xi}) \mathbf{x}^e \quad (\text{A.2.16})$$

où  $\mathbf{N}^e$  est de la forme (A.2.4) et  $\mathbf{x}^e$  est le vecteur des positions des  $Q$  noeuds dans les coordonnées globales. Sur l'élément  $e$  (sous-domaine  $\hat{\Omega}^e$ ), le déplacement est approximé de la façon suivante :

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}^e \quad , \quad \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{N}^e(\underline{\xi}(\underline{\mathbf{x}})) \mathbf{q}^e \quad (\text{A.2.17})$$

où  $\mathbf{q}^e \in \mathbb{R}^{QP}$  est le vecteur des degrés de libertés de l'élément. La Jacobienne de la transformation est utilisée pour passer des dérivées dans les coordonnées globales aux dérivées dans les coordonnées locales :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\xi}} = \mathbf{J}^e(\underline{\xi}) \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_{ij}^e(\underline{\xi}) = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \Big|_{\underline{\xi}} = {}^T \mathbf{x}_j^e \frac{\partial \mathbf{n}^e}{\partial \xi_i} \Big|_{\underline{\xi}} \quad (\text{A.2.18})$$

où  $\mathbf{J}^e \in \mathbb{R}^{D \times D}$ , avec  $D = \dim(\underline{\mathbf{x}})$  la dimension du problème. On peut alors exprimer les  $\mathbf{b}_{ij}^e$  qui servent à approximer le gradient du déplacement (A.2.5) dans les coordonnées locales :

$$\mathbf{b}_{ij}^e(\underline{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{n}^e}{\partial \underline{\xi}} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x_j} \Big|_{\underline{\xi}} \boxtimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{i-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}^{P-i} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial \mathbf{n}^e}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{\underline{\xi}} [\mathbf{J}^e(\underline{\xi})]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{j-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}^{D-j} \end{bmatrix} \right) \boxtimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{i-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}^{P-i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.19})$$

On peut également exprimer le petit élément de volume dans les coordonnées globales et locales :

$$d\Omega = \det[\mathbf{J}^e(\underline{\xi})] d\hat{\Omega}^e \quad (\text{A.2.20})$$

ce qui permet d'exprimer une intégrale sur le domaine élémentaire  $\hat{\Omega}^e$  dans les coordonnées locales :

$$\int_{\hat{\Omega}^e} f(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}^e} f^e(\underline{\xi}) \det[\mathbf{J}^e(\underline{\xi})] d\hat{\Omega}^e \quad (\text{A.2.21})$$

d'où on déduit les matrices de raideur, de masse et vecteur force élémentaires :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\hat{\Omega}^e} {}^T \mathbf{B}^e(\underline{\xi}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e \mathbf{B}^e(\underline{\xi}) \det[\mathbf{J}^e(\underline{\xi})] d\hat{\Omega}^e \quad (\text{A.2.22})$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{\hat{\Omega}^e} \rho^e {}^T \mathbf{N}^e(\underline{\xi}) \mathbf{N}^e(\underline{\xi}) \det[\mathbf{J}^e(\underline{\xi})] d\hat{\Omega}^e \quad (\text{A.2.23})$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\hat{\Omega}^e} {}^T \mathbf{N}(\underline{\xi}) \underline{\mathbf{f}}(\underline{\xi}) \det[\mathbf{J}^e(\underline{\xi})] d\hat{\Omega}^e + \int_{\partial \hat{\Omega}^e} {}^T \mathbf{N}(\underline{\xi}) \underline{\mathbf{T}}(\underline{\xi}) \det[\mathbf{J}^e(\underline{\xi})] dS \quad (\text{A.2.24})$$

où on a considéré les propriétés mécaniques  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^e$  et  $\rho$  constantes sur l'élément. Ces opérateurs permettent d'évaluer les différents travaux élémentaires sur  $\hat{\Omega}^e$  associées aux  $Q \times P$  degrés de liberté  $\mathbf{q}^e$ .

**Assemblage des matrices** Les intégrales sur le domaine entier  $\Omega$  peuvent s'écrire comme une somme d'intégrales par morceaux sur les domaines élémentaires  $\hat{\Omega}^e$  (A.2.21) :

$$\int_{\Omega} f(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega = \sum_e^E \int_{\hat{\Omega}^e} f(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \quad (\text{A.2.25})$$

où  $E$  est le nombre de sous-domaines (ou d'*éléments*). Le calcul des opérateurs généralisés  $\mathbf{K}$  (A.2.12),  $\mathbf{M}$  (A.2.13) et  $\mathbf{f}$  (A.2.14) consiste en conséquence en l'assemblage des opérateurs élémentaires  $\mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{M}^e$  et  $\mathbf{f}^e$ .

Soit  $\mathbf{S}^e \in \mathbb{R}^{Q \times NP}$  la matrice de sélection qui permet de passer des  $N \times P$  degrés de liberté  $\mathbf{q}$  du système complet aux  $Q \times P$  degrés de liberté  $\mathbf{q}^e$  associés à l'élément  $e$  :

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{S}^e \mathbf{q} \quad (\text{A.2.26})$$

On écrit alors l'opération d'assemblage des opérateurs généralisés de la façon suivante :

$$\mathbf{K} = \sum_e^E \mathbf{S}^{e\top} \mathbf{K}^e \mathbf{S}^e \quad (\text{A.2.27})$$

$$\mathbf{M} = \sum_e^E \mathbf{S}^{e\top} \mathbf{M}^e \mathbf{S}^e \quad (\text{A.2.28})$$

$$\mathbf{f} = \sum_e^E \mathbf{S}^{e\top} \mathbf{f}^e \quad (\text{A.2.29})$$

Des éléments voisins partageant des noeuds, il est possible de garantir, dans certains cas, la continuité  $C^0$  de l'approximation du déplacement. Cependant, les continuités d'ordre plus élevé ne sont assurées que si les fonctions de base le permettent. Il est nécessaire, dans certains problèmes, d'enrichir les éléments (en ajoutant des noeuds) pour assurer la continuité des dérivées au passage entre les éléments. En effet, le non-respect de cette continuité peut entraîner des effets de *verrouillage* dus à la discontinuité des gradients.

Il faut noter que les intégrales élémentaires ne sont analytiques que pour des éléments finis très simples, souvent pas assez riches pour donner une approximation correcte du problème. Dans les autres cas, on utilise l'intégration réduite (par points de Gauss), qui permet d'évaluer les intégrandes qu'en un nombre réduit de points.

La méthode des éléments finis est très populaire par sa simplicité opérationnelle : (i) les intégrales définissant les opérateurs généralisés sont simples à calculer ; (ii) la visualisation des résultats est facilitée par la définition locale des degrés de liberté ; (iii) les conditions aux limites homogènes en déplacement sont imposées par suppression des degrés de liberté correspondants ; (iv) le couplage de différents types de structures (poutres, plaques) est assurée simplement par l'égalité des degrés de liberté aux points d'assemblage. Une grande variété de géométries et de problèmes peut donc être traitée.

Un deuxième avantage non négligeable de ce type de méthode est de former des opérateurs généralisés en structure *par bandes*. En conséquence, beaucoup de composantes de ces matrices sont nulles, rendant leur stockage et les opérations sur celles-ci optimisés (utilisation de matrices creuses).

## A.2.4 Décomposition modale

L'hypothèse de séparation des variables (A.2.1) a conduit à considérer les dépendances des champs en temps et en espace découplées. La discrétisation du problème spatial par la projection sur la base de fonctions  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  permet la formulation des équations d'équilibre généralisées (A.2.11), qui doivent être respectées à chaque instant.

Toutefois, la dépendance des champs en temps est toujours continue. La résolution des équations d'équilibre permet de déterminer les paramètres généralisés  $\mathbf{q}(t)$  à l'instant  $t$ , si leur



dérivée seconde instantanée  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  est connue. Afin de simuler numériquement l'évolution du système dans le temps, il est donc nécessaire de discrétiser ces équations en temps.

Pour cela, les différences finies peuvent être utilisés pour évaluer les dérivées temporelles ; cela conduit à la formulation de schémas d'intégration type Euler explicite ou Newmark implicite. On calcule alors la configuration du système  $\mathbf{q}$  à l'instant  $t$  en fonction des configurations précédentes (aux instants  $t - n\Delta t$ ).

Dans ce travail, on ne cherche pas forcément à obtenir l'histoire du mouvement des structures, mais plutôt les fonctions *propres* (ou *modes*) qui composent le mouvement *naturel* de celles-ci. Ces fonctions, caractéristiques du problème homogène de la dynamique linéaire (sans efforts extérieurs appliqués), sont intrinsèques à la structure. Elles sont données par la géométrie, la composition matérielle et les conditions aux limites en déplacement qui sont appliquées.

#### A.2.4.1 Base modale

Le système d'équations (A.2.11) est associé au système différentiel homogène suivant :

$$\left( \mathbf{K} + \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2.30})$$

Tous les coefficients étant constants, on peut chercher les solutions sous la forme :

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t} \quad (\text{A.2.31})$$

ce qui revient à résoudre le problème aux valeurs propres généralisées suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2.32})$$

**Definition A.2.2** (Base modale). *Les  $P \times N$  vecteurs propres  $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \dots \boldsymbol{\phi}_{PN}]$  sont les modes propres et sont définis comme suit :*

$$\boxed{\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n} \quad (\text{A.2.33})$$

où les  $\omega_n$  sont les pulsations propres liées à chaque mode.

Les modes propres  $\boldsymbol{\Phi}$  forment donc une *base* sur laquelle on peut projeter les équations pour calculer l'évolution spatio-temporelle du système. On écrit le vecteur des paramètres généralisés instantané sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres :

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{a}(t) \quad (\text{A.2.34})$$

où  $\mathbf{a}$  est le vecteur des *amplitudes modales* instantanées.

En régime conservatif, les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques (hermitiennes), ce qui entraîne *presque sûrement* des propriétés importantes sur la base modale ; en effet, la propriété qui suit est vérifiée si les pulsations propres  $\omega_n$  sont distinctes deux à deux. Dans le cas d'une plaque carrée par exemple, deux modes coexistent à la même fréquence ; ils sont donc couplés.

**Propriété A.2.1** (Orthogonalité des modes). *Si les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques hermitiennes, et que les pulsations  $\boldsymbol{\omega}$  sont distinctes deux à deux, alors la base des vecteurs propres est  $\mathbf{M}$ -orthogonale, c'est à dire :*

$$\boxed{{}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\mathbf{m}) \quad \text{et} \quad {}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\mathbf{k})} \quad (\text{A.2.35})$$

où le vecteur  $\mathbf{k}$  contient les raideurs modales généralisées et le vecteur  $\mathbf{m}$  les masses modales généralisées, qui sont reliées aux pulsations par la relation suivante :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}} \quad (\text{A.2.36})$$

On dit aussi que  $\Phi$  diagonalise conjointement  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

*Remarque A.2.2.* Les vecteurs propres  $\phi_n$  sont définis à une constante multiplicative près. Il peut être commode de choisir une norme pour définir une base modale unique. Une convention communément adoptée consiste à normer les vecteurs propres par rapport à la masse modale généralisée, c'est à dire :

$$m_n = {}^H\phi_n \mathbf{M} \phi_n = 1 \quad (\text{A.2.37})$$

Dans ce cas, on a  ${}^H\phi_n \mathbf{K} \phi_n = \omega_n^2$ .

#### A.2.4.2 Modal Assurance Criterion

On verra que dans le cas où les travaux des efforts intérieurs, des efforts extérieurs ou de l'accélération entraînent des dissipations, on peut perdre la propriété d'orthogonalité des modes propres (voir la section B.2 sur la modélisation du comportement viscoélastique). Il est alors fréquent de chercher à mesurer l'*alignement* des vecteurs propres de la base. Pour cela, le critère de MAC (pour *Modal Assurance Criterion*) est communément employé.

**Propriété A.2.2** (Modal Assurance Criterion (MAC)). *Soient deux bases modales  $\Phi$  et  $\Psi$ . On définit la matrice de MAC comme suit :*

$$\text{MAC}_{ij}(\Psi, \Phi) = \sqrt{\frac{|{}^H\psi_i \phi_j|}{\|\psi_i\| \|\phi_j\|}} \quad (\text{A.2.38})$$

qui correspond à la corrélation entre  $\Phi$  et  $\Psi$  et prend des valeurs entre 0 et 1.

On peut interpréter les composantes de la matrice de MAC comme la valeur absolue du *cosinus* de l'angle entre les vecteurs des bases. Ce critère est très utilisé en analyse modale, pour comparer une base modale mesurée à une base modale prédite par un modèle (voir chapitre V, section V.3).

*Remarque A.2.3* (Auto-MAC et  $\mathbf{M}$ -orthogonalité). Une *mesure* de l'alignement des vecteurs d'une base  $\Phi$  consiste à calculer la matrice d'auto-MAC, c'est à dire  $\text{MAC}(\Phi, \Phi)$ . Toutefois, une matrice d'auto-MAC calculée sur une base  $\mathbf{M}$ -orthogonale n'est pas *forcément* l'identité ; en effet, cela supposerait que la matrice des masses généralisées  $\mathbf{M}$  soit l'identité, ce qui n'est pas le cas en général. On fera notamment attention lorsque la masse volumique est variable sur la structure.

#### A.2.4.3 Réponse forcée

On réécrit le système d'équations généralisées (A.2.11) en y injectant la forme (A.2.34) :

$$\mathbf{K} \Phi \mathbf{a}(t) + \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (\text{A.2.39})$$

En multipliant à gauche par  ${}^H\Phi$ , on obtient  $P \times N$  équations découplées portant sur les amplitudes modales.

**Propriété A.2.3** (Équations dans la base modale). *Les équations d'équilibre dynamique conservatif projetées sur la base modale s'expriment comme un système d'équations découplées :*

$$\boxed{k_n a_n(t) + m_n \ddot{a}_n(t) = {}^H\phi_n \mathbf{f}(t)} \quad (\text{A.2.40})$$

et donnent la réponse d'un système conservatif à une sollicitation quelconque.

La résolution du problème dans la base modale consiste donc en la résolution de  $P \times N$  équations différentielles scalaires.

Une fois que l'histoire de l'évolution des amplitudes modales  $\mathbf{a}$  a été déterminée, on reconstruit les paramètres généralisés par la superposition modale (A.2.34).

#### A.2.4.4 Oscillations libres

On s'intéresse à l'évolution du système que l'on a *lâché* au temps  $t_0$ , soit  $\mathbf{f}(t \geq t_0) = 0$ . La configuration du système à l'instant  $t_0$  est donnée par  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$  et  $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(t_0)$  (conditions initiales).

Les équations (A.2.40) sont alors homogènes :

$$\forall t \geq t_0 \quad k_n a_n(t) + m_n \ddot{a}_n(t) = 0 \quad (\text{A.2.41})$$

ce qui donne l'évolution temporelle des amplitudes modales :

$$\forall t \geq t_0 \quad a_n(t) = \alpha_n e^{i\omega_n(t-t_0)} + \beta_n e^{-i\omega_n(t-t_0)} \quad (\text{A.2.42})$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les  $2 \times P \times N$  amplitudes  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\Phi(\alpha + \beta) = \mathbf{q}_0 \quad (\text{A.2.43})$$

$$\Phi \text{diag}(\mathbf{i}\omega)(\alpha - \beta) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{A.2.44})$$

en multipliant à gauche par  ${}^H\Phi\mathbf{M}$  puis en combinant les deux équations :

$$2\alpha = \text{diag}(\mathbf{m})^{-1} {}^H\Phi\mathbf{M}\mathbf{q}_0 - \mathbf{i} \text{diag}(\omega \circ \mathbf{m})^{-1} {}^H\Phi\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{A.2.45})$$

$$2\beta = \text{diag}(\mathbf{m})^{-1} {}^H\Phi\mathbf{M}\mathbf{q}_0 + \mathbf{i} \text{diag}(\omega \circ \mathbf{m})^{-1} {}^H\Phi\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{A.2.46})$$

on obtient finalement l'évolution de l'état du système.

**Définition A.2.3** (Oscillations libres). *La réponse libre d'un système dynamique conservatif dont les conditions initiales sont  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$  et  $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$  se met sous la forme,  $\forall t \geq t_0$  :*

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \sum_n^{P \times N} \frac{\phi_n {}^H\phi_n \mathbf{M}}{m_n} \mathbf{q}_0 \cos(\omega_n(t - t_0)) - \sum_n^{P \times N} \frac{\phi_n {}^H\phi_n \mathbf{M}}{m_n \omega_n} \dot{\mathbf{q}}_0 \sin(\omega_n(t - t_0))} \quad (\text{A.2.47})$$

*Remarque A.2.4.* La forme des oscillations libres ci-dessus revêt une importance primordiale pour le travail présenté ici. En effet, cette réponse en somme de fonctions sinusoïdales est une des hypothèses encourageant le développement de méthodes basées sur l'extraction de ce type de fonctions à partir de réponses de structures mesurés (voir chapitre IV).

### A.2.4.5 Régime harmonique permanent

On impose maintenant un second membre  $\mathbf{f}$  harmonique :

$$\mathbf{f}(t) = \tilde{\mathbf{f}} \cos(\omega t + \psi_F) \quad (\text{A.2.48})$$

Après un régime transitoire, le mouvement du système est lui aussi harmonique, de même fréquence :

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}} \cos(\omega t + \psi_q) = \Phi \tilde{\mathbf{a}} \cos(\omega t + \psi_q) \quad (\text{A.2.49})$$

L'équation d'équilibre (A.2.11) s'écrit alors :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi \tilde{\mathbf{a}} \cos(\omega t + \psi_q) = \tilde{\mathbf{f}} \cos(\omega t + \psi_F) \quad (\text{A.2.50})$$

ce qui nous informe que  $\psi_q = \psi_F$ . En multipliant par  ${}^H\Phi$  à gauche :

$$(\mathbf{k}_n - \omega^2 \mathbf{m}_n) \tilde{\mathbf{a}}_n = {}^H\phi_n \tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{A.2.51})$$

qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de (A.2.40). On note finalement que  $\mathbf{k}_n/\mathbf{m}_n = \omega_n^2$ , ce qui nous permet d'écrire ce qui suit.

**Definition A.2.4** (Réponse harmonique). *La réponse d'un système conservatif soumis à une force harmonique de pulsation  $\omega$  se met sous la forme suivante :*

$$\tilde{\mathbf{q}}(\omega) = \sum_n^{P \times N} \frac{\phi_n {}^H\phi_n}{(1 - (\omega/\omega_n)^2) \mathbf{k}_n} \tilde{\mathbf{f}}(\omega) \quad (\text{A.2.52})$$

où  $\tilde{\mathbf{q}}$  et  $\tilde{\mathbf{f}}$  sont les amplitudes des champs associés.

*Remarque A.2.5* (Modes de corps solide). Dans certains cas, il existe des modes correspondant à un mouvement rigidifiant ; ils ne génèrent pas d'énergie potentielle (car le tenseur des déformations est nulle pour tout mouvement rigidifiant infinisétiml), leur fréquence modale est en conséquence nulle. C'est le cas lorsque l'on modélise une structure *libre*, sur laquelle seules des conditions limites en efforts sont appliquées ((A.1.6),  $\partial\Omega_u = \emptyset$ ). Dans ce cas, on remarque que  $\mathbf{q}(\omega = 0)$  n'est pas défini : la structure s'en va vers l'infini si la moyenne des efforts n'est pas nulle. Ce type de condition ne correspond en fait pas à la réalité expérimentale ; un système ne peut être complètement découplé du monde extérieur. Toutefois, on utilise largement les conditions libres dans ce travail à des fins de caractérisation (voir par exemple chapitre V, section V.4).

*Remarque A.2.6* (Comportement asymptotique). En considérant le cas d'une structure à un degré de liberté, possédant en conséquence un mode unique. Deux comportements asymptotiques sont à noter :

- $\omega \rightarrow 0$  : la relation force-déplacement tend vers une valeur constante, proportionnelle à  $1/\mathbf{k}_n$ . Cela est cohérent avec le cas statique (effet de raideur seul).
- $\omega \rightarrow \infty$  : en conséquence  $(1 - (\omega/\omega_n)^2) \mathbf{k}_n \rightarrow -\omega^2 \mathbf{m}_n$  ; les effets d'inertie sont dominants.

Si on considère un système qui possède plusieurs modes, ces remarques restent valides. La raideur statique est proportionnelle à la somme de l'inverse des raideurs modales ; le comportement à l'infini est donné par la somme des inverses des masses modales. Cela peut être vu comme un assemblage de couples masse-ressort en série.

## Annexe B

# Comportement viscoélastique anisotrope

## B.1 Élasticité Anisotrope

Les équations du comportement (A.1.10) et (A.1.11) définissent les deux tenseurs d'ordre 4  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  respectivement appelés tenseur des raideurs et tenseur des souplesses. L'un des grands axes du travail présenté dans ce manuscrit porte sur l'identification de composantes de ces tenseurs sur la base de données expérimentales. La connaissance *a priori* de certaines relations d'interdépendance entre ces composantes permet de réduire le nombre de paramètres à identifier.

On rappelle dans cette section les symétries de ces tenseurs qui permettent de réduire le nombre de composantes indépendantes. On rappelle également la notation de Voigt, qui permet de visualiser (et mettre en œuvre) ces tenseurs sous forme de matrices  $6 \times 6$ .

Dans un deuxième temps, on rappelle la formule de changement de base d'un tenseur d'ordre 4, qui permet de changer le repère d'observation d'un matériau et d'en exprimer le comportement dans n'importe quel système de coordonnées. On se sert ensuite de la transformation pour montrer l'effet des symétries matérielles sur la forme de la relation de comportement. Des bornes sur la valeur des composantes de ces tenseurs sont données. Enfin, les constantes de l'ingénieur sont introduites.

On donne finalement le cas qui correspond à l'hypothèse des contraintes planes, qui permet de réduire encore le nombre de composantes du tenseur.

### B.1.1 Symétries de la relation de comportement

Les tenseurs des raideurs et des souplesses satisfont des propriétés de symétrie.

**Propriété B.1.1** (Symétries de la loi de comportement). *Les composantes de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  sont liées par deux types de relations de symétrie :*

$$\begin{aligned} \text{— Symétries majeures : } & \boxed{C_{ijkl} = C_{klij} \text{ et } S_{ijkl} = S_{klij}} \\ \text{— Symétries mineures : } & \boxed{C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \text{ et } S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}} \end{aligned}$$

ce qui réduit le nombre de composantes indépendantes à 21.

Les symétries mineures sont liées à la symétrie des tenseurs de contrainte  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$  et de déformation  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ . Elles réduisent le nombre de composantes indépendantes à 36. Les symétries majeures viennent de l'existence d'une énergie potentielle positive. Elles amènent 15 relations supplémentaires.

### B.1.2 Notation de Voigt

Les tenseurs d'ordre 4 définis plus haut sont difficiles à représenter, même réduits à 21 composantes indépendantes. La notation de Voigt propose une alternative intéressante. En utilisant les propriétés de symétrie des relations de comportement, des contraintes et des déformations, on peut réécrire (A.1.10) sous la forme matricielle  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ , soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

où on utilise la transformation des indices suivante :

$$11 \rightarrow 1 \quad 22 \rightarrow 2 \quad 33 \rightarrow 3 \quad 23 \rightarrow 4 \quad 13 \rightarrow 5 \quad 12 \rightarrow 6$$

Les facteurs 2 devant  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  et  $\varepsilon_6$  sont là pour prendre en compte les symétries mineures du tenseur d'origine  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ .

De la même façon, on définit la matrice des souplesses  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  comme l'inverse de la matrice des raideurs,  $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}$ . On écrit  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ , avec :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.2})$$

où les facteurs 2 et 4 compensent les facteurs 2 devant les composantes des déformations en cisaillement.

### B.1.3 Contraintes planes

La construction d'un modèle de structure élancée amène souvent à considérer certaines composantes du tenseur de contrainte négligeables. Sur la base de ces hypothèses, de nouvelles lois de comportement peuvent être formulées, basées sur un nombre de composantes réduit.

Les hypothèses classiques employées pour la construction d'un modèle de plaque ou de poutre consiste à *découpler* les mécanismes plans (indices 1 et 2) des mécanismes hors-plan (indice 3).

Considérons que la structure à modéliser présente une dimension petite  $e$  devant les deux autres (i.e. plaques), ici prise dans la direction  $\underline{\mathbf{e}}_3$ . Si les faces inférieure et supérieure de la structure étudiée sont libres, alors la contrainte  $\sigma_{33}$  s'y annule. Il est alors courant de supposer que  $\sigma_{33} = 0$  sur toute l'épaisseur.

Dans le cas où le matériau est monoclinique ( $C_{\alpha 333} = 0$ , voir équation (B.1.16) dans ce qui suit), cette hypothèse entraîne :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\text{B.1.3})$$

Les contraintes planes s'expriment alors comme suit :

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} + C_{\alpha\beta 33} \varepsilon_{33} \quad (\text{B.1.4})$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \quad (\text{B.1.5})$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  est le *tenseur des raideurs en contraintes planes*, et dont les composantes prennent la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{\alpha\beta 33} C_{\gamma\delta 33}}{C_{3333}} \quad (\text{B.1.6})$$



En notation de Voigt, la relation de comportement en contraintes planes se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.7})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.8})$$

*Remarque B.1.1.* L'utilisation de la loi de comportement en contraintes planes suppose le découplage des mécanismes plans ( $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ) des mécanismes de cisaillement hors-plan ( $\sigma_{\alpha 3}$ ,  $\varepsilon_{\alpha 3}$ ). Toutefois, elle n'impose pas la nullité de ces derniers. Par exemple, le modèle de plaque épaisse utilise la loi de comportement en contraintes planes pour décrire les mécanismes plans, tout en prenant en compte les termes de cisaillement hors-plan qui jouent un rôle dans la flexion.

### B.1.4 Changement de base

Considérons deux bases orthonormées  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{e}'_i)_{i=1,2,3}$  liées par la transformation  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{e}_i = P_{ij} \mathbf{e}'_j \quad (\text{B.1.9})$$

Les deux bases étant orthonormées,  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$  est une matrice orthonormée également. On étudie l'effet d'un changement de base sur le tenseur des raideurs :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}} &= C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\ &= C_{ijkl} P_{im} \mathbf{e}'_m \otimes P_{jn} \mathbf{e}'_n \otimes P_{kp} \mathbf{e}'_p \otimes P_{lq} \mathbf{e}'_q \\ &= C_{ijkl} P_{im} P_{jn} P_{kp} P_{lq} \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_n \otimes \mathbf{e}'_p \otimes \mathbf{e}'_q \end{aligned} \quad (\text{B.1.10})$$

**Définition B.1.1** (Changement de base pour la relation de comportement). Soit  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}'$ , l'expression dans la base  $(\mathbf{e}'_i)$  de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ , originellement exprimé dans la base  $(\mathbf{e}_i)$ . Alors les composantes de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}'$  s'écrivent :

$$C'_{nmpq} = C_{ijkl} P_{im} P_{jn} P_{kp} P_{lq} \quad (\text{B.1.11})$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$  est la matrice de passage de  $(\mathbf{e}'_i)$  vers  $(\mathbf{e}_i)$ .

On donne ici la formule qui correspond à une rotation du matériau d'un angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{e}_3$ . La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$  est de la forme :

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.12})$$

où  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$ .

**Propriété B.1.2** (Rotation de la loi de comportement). Soit un matériau dont la loi de comportement élastique s'écrit  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ , en notation de Voigt, dans la base  $(\mathbf{e}_i^\theta)$  tournée par rapport à  $(\mathbf{e}_i)$  d'un angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{e}_3$ . On peut alors écrire  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^\theta$ , le tenseur des raideurs dans la base  $(\mathbf{e}_i)$ ,

comme suit :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^\theta = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^\theta \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^\theta$$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}^\theta = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.13})$$

avec  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$ .

Cette formule est utilisée pour la modélisation des plaques composites stratifiées : celles-ci sont composées de multiples plis dont le matériau constitutif peut dans la majorité des cas être considéré orthotrope (voir ci-dessous, équation (B.1.17)). Ces plis sont tournés les uns par rapport aux autres avec des angles  $\theta$  qui varient d'une couche à l'autre afin d'obtenir un empilement dont le comportement est adapté aux besoins. La matrice de changement de base  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}^\theta$  permet donc d'exprimer le comportement de chaque couche dans le repère principal du stratifié.

De façon équivalente, on donne la matrice de rotation adaptée au changement de base de la relation de comportement en contraintes planes d'un matériau orthotrope. On exprime celle-ci entre deux versions vectorisées de la matrice de comportement en contraintes planes  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ .

**Propriété B.1.3** (Rotation de la loi de comportement en contraintes planes). Soit  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  la matrice des raideurs en contraintes planes (B.1.7) d'un matériau orthotrope, exprimée dans la base  $(\underline{\mathbf{e}}_i^\theta)$ , celle-ci étant tournée d'un angle  $\theta$  autour de  $\underline{\mathbf{e}}_3$  par rapport à la base  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$ . Dans la base  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$ , cette matrice est dénotée  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}^\theta$  et est relié à  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} Q_{11}^\theta \\ Q_{22}^\theta \\ Q_{12}^\theta \\ Q_{16}^\theta \\ Q_{26}^\theta \\ Q_{66}^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 \\ s^4 & c^4 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 \\ s^2c^2 & s^2c^2 & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 \\ c^3s & -s^3c & s^3c - c^3s & 2(s^3c - c^3s) \\ s^3c & -c^3s & c^3s - s^3c & 2(c^3s - s^3c) \\ s^2c^2 & s^2c^2 & -2s^2c^2 & c^4 + s^4 - 2s^2c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.14})$$

La partie du comportement liée au cisaillement hors-plan peut être exprimée dans la base  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$  de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{44}^\theta \\ C_{55}^\theta \\ C_{45}^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ s^2 & c^2 \\ -cs & cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{44} \\ C_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.15})$$

Ces deux dernières relations sont en pratique beaucoup utilisées car elles expriment la rotation du repère comme une relation linéaire entre les composantes des tenseurs dans les différentes bases. Elles sont notamment employées pour la construction de modèles de plaques composites stratifiées, composées de plis orthotropes.

### B.1.5 Symétries matérielles

Le tenseur des raideurs (A.1.10) ou (B.1.1) complet décrit un matériau *triclinique*, qui est le cas le plus général. Un tel matériau ne possède que la symétrie centrale, c'est à dire que son comportement est invariant par les transformations  $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$  seulement.

Dans ce qui suit, on se sert de la formule de changement de base (B.1.11) pour donner des indications sur la forme de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  lorsque le matériau possède certaines symétries. En effet, la loi de comportement doit être invariante pour les transformations qui correspondent à ces symétries ; cela ajoute de nouvelles relations entre les composantes des tenseurs de comportement. Le nombre de composantes indépendantes diminue en conséquence.

On précise que les formes de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  valent également pour les souplesses  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ .

#### B.1.5.1 Symétrie monoclinique

On considère le cas d'un matériau pour lequel le plan horizontal ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ) est un plan de symétrie. Dans ce cas,  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  se doit d'être invariant face à la transformation  $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3]$ . On a  $P_{33} = -1$ , ce qui impose que toute composante  $C_{ijkl}$  avec un nombre impair d'indices égaux à 3 est nulle (car censée changer de signe au cours de la transformation). En notation de Voigt, la matrice des raideurs prend donc la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.16})$$

qui est caractérisé par 13 composantes indépendantes.

#### B.1.5.2 Orthotropie

L'orthotropie caractérise un matériau qui possède au moins deux plans de symétrie orthogonaux. Soient un solide orthotrope dont les trois plans ont des normales qui coïncident avec la base canonique ( $\mathbf{e}_i$ ). Alors le comportement se doit d'être invariant aux transformations  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 = [-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2 = [\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  et  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3]$ . En conséquence, toute composante  $C_{ijkl}$  dont un indice est répété un nombre impair de fois s'annule. La matrice des raideurs devient :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.17})$$

qui est caractérisé par 9 composantes indépendantes. L'observation de la formule de rotation de la loi de comportement (B.1.13) permet de noter qu'une rotation d'un comportement orthotrope autour de  $\mathbf{e}_3$  résulte en un comportement monoclinique (B.1.16).

### B.1.5.3 Symétrie quadratique

La symétrie quadratique [230] est caractérisée par l'invariance du comportement par une rotation du repère de  $\pi/2$  autour d'un des vecteurs de la base canonique. Dans le cas de  $\underline{\mathbf{e}}_3$ , les indices des  $C_{ijkl}$  égaux à 1 et 2 peuvent être intervertis, d'où  $C_{22} = C_{11}$ ,  $C_{55} = C_{44}$  et  $C_{23} = C_{13}$  :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.18})$$

qui est caractérisé par 6 composantes indépendantes.

### B.1.5.4 Isotropie transverse

L'isotropie transverse est caractérisée par l'invariance du comportement pour toute rotation du repère autour d'un vecteur de la base. Dans le cas où  $\underline{\mathbf{e}}_3$  est l'axe de révolution, la nouvelle contrainte est  $2C_{66} = (C_{11} - C_{12})$ , soit :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.19})$$

qui est caractérisé par 5 composantes indépendantes.

### B.1.5.5 Symétrie cubique

Un matériau à symétrie cubique possède un comportement invariant face à une rotation d'un angle de  $\pi/2$  autour de n'importe lequel des vecteurs de  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$ . Les trois axes deviennent donc indiscernables, soit :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.20})$$

qui est caractérisé par 3 composantes indépendantes.

### B.1.5.6 Isotropie

Un matériau isotrope est invariant pour toute transformation de rotation pûre. En l'occurrence, seulement deux constantes indépendantes suffisent à le caractériser :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.21})$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, dont on rappelle la correspondance avec le module de Young  $E$ , de cisaillement  $G$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{aligned} \quad (\text{B.1.22})$$

On retrouve alors bien la loi de Hooke, exprimée sur les tenseurs :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \mathbb{I} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{B.1.23})$$

On donne également ici la forme de la matrice des raideurs en contraintes planes associée à un comportement isotrope. Celle-ci prend la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} &= \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\ a &= 4\mu \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ b &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1.24})$$

### B.1.6 Bornes sur les composantes des matrices de comportement

La déformation d'un solide ne pouvant pas être *source* d'énergie, le travail des déformations est toujours positif. On a alors la relation :

$$\forall \Omega, \forall \underline{\underline{\epsilon}} \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \, d\Omega > 0 \quad \rightarrow \quad \forall \underline{\underline{\epsilon}} \quad \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} > 0 \quad (\text{B.1.25})$$

Cette dernière expression exprime le fait que la matrice des raideurs  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  doit être définie positive, c'est à dire que toutes ses valeurs propres sont strictement supérieures à 0.

Au lieu de chercher à trouver les racines du déterminant de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ , on utilise plutôt la condition nécessaire et suffisante qui impose aux déterminant des sous-matrices successives d'être strictement positifs [230, équation (2.111)]. Dans le cas du matériau orthotrope (B.1.17), cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} C_{ii} &> 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ C_{11}C_{22} - C_{12}^2 &> 0 \\ C_{11}C_{22}C_{33} - C_{33}C_{12}^2 - C_{11}C_{23} - C_{22}C_{13}^2 + 2C_{12}C_{13}C_{23} &> 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1.26})$$

Ces bornes peuvent être utilisées dans un cadre expérimental pour valider un jeu de composantes identifiées ; elles pourraient également être introduites directement dans le problème inverse sous la forme de contraintes d'inégalité.

### B.1.7 Constantes de l'ingénieur

La notation des tenseurs de comportement sous forme de matrices permet, comme on l'a vu, de visualiser la relation contrainte-déformation et l'effet des différentes symétries matérielles. Toutefois, les composantes des matrices ainsi définies ne sont souvent pas utilisées pour qualifier les propriétés d'un matériau. On préfère employer les *constantes de l'ingénieur*, qui découlent d'un point de vue expérimental.

En effet, il est assez aisé de soumettre expérimentalement un échantillon à un champ de contrainte uniaxial uniforme. Suffisamment loin des ancrages, le principe de Saint-Venant nous permet de considérer que la section transversale d'un barreau en traction simple est chargée uniaxialement et uniformément. Prenons le cas d'une traction selon  $\underline{\mathbf{e}}_1$ , qui impose un champ de contrainte dont seule la composante  $\sigma_{11}$ , constante sur la section, est non nulle. Le matériau, orthotrope, a ses plans de symétrie orientés selon le repère cartésien. Le champ de déformation est alors de la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} &= 0 \\ \varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} \quad , \quad \varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11} \quad , \quad \varepsilon_{33} = S_{3311}\sigma_{11} \end{aligned}$$

Trois jauges de déformation permettent de mesurer  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{33}$ . Un capteur de force permet quand à lui de mesure la résultante  $F_1 = S\sigma_{11}$  et donc d'en déduire la contrainte. Trois composantes du tenseur des souplesses peuvent donc être caractérisées lors d'un test de traction. Les souplesses s'exprimant en  $\text{Pa}^{-1}$ , on préfère introduire une constante homogène à une pression ; le module de Young  $E_1 = \sigma_{11}/\varepsilon_{11} = S_{1111}^{-1}$  en Pa ; et les coefficients de Poisson  $\nu_{12} = -S_{1122}/S_{1111}$  sans unité. On comprend alors aisément que deux essais de traction selon deux plans de symétrie du matériau permettent d'identifier les 6 composantes indépendantes du bloc supérieur droit de la matrice des souplesses.

Un deuxième essai élémentaire consiste à imposer un état de contrainte en cisaillement uniforme. On peut faire cela par la mise en torsion d'un échantillon tubulaire. Par exemple, la torsion d'un tube d'axe de révolution  $\underline{\mathbf{e}}_3$  soumet localement le matériau à un champ de contrainte dont seule la composante  $\sigma_{12}$  est non nulle. On peut alors identifier la composante  $S_{1212}$  du tenseur des souplesses. De nouveau, on préfère définir une constante en Pascals ; soit le module de cisaillement  $G_{12} = \sigma_{12}/\varepsilon_{12} = S_{1212}^{-1}$ .

Ces essais de traction et de torsion permettent donc d'identifier la matrice des souplesses du matériau orthotrope complète, qui s'exprime en fonction des constantes de l'ingénieur comme

suit, dans le repère qui coïncide avec les axes d'orthotropie du matériau :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.27})$$

La symétrie de  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  impose certaines contraintes sur le choix des constantes :

$$S_{ij} = S_{ji} \quad \rightarrow \quad \nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i \quad (\text{B.1.28})$$

Bien que fastidieuse, l'inversion de la matrice des souplesses ainsi formulée peut être réalisée. On obtient alors l'expression de la matrice des raideurs en fonction des constantes de l'ingénieur :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} E_1 & \frac{\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{32}}{\Delta} E_2 & \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} E_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}}{\Delta} E_1 & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} E_2 & \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} E_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{21}}{\Delta} E_1 & \frac{\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{12}}{\Delta} E_2 & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.29})$$

avec  $\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{23} - 2\nu_{32}\nu_{21}\nu_{13}$ .

De la même façon, la loi de comportement en contraintes planes d'un matériau orthotrope peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.30})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.31})$$

*Remarque B.1.2 (Phénoménologie).* En reprenant l'expérience du barreau en traction, les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}$  caractérisent l'effet de réduction de section face à une déformation  $\varepsilon_{11}$  positive. Même si les expressions données ici sont dépendantes du repère, on utilisera de façon générale cette analogie pour parler de l'*effet Poisson*, qui se manifeste lors de la déformation d'un milieu continu.



*Remarque B.1.3 (Notations).* Les indices alphanumériques  $\{1, 2, 3\}$  attachés aux constantes de l'ingénieur dans les expressions ci-dessus correspondent aux directions de la base choisie. Toutefois, on rencontre au moins deux autres types de notation, qui dépendent de la communauté scientifique :

- Matériaux composites : on utilise plutôt les indices  $\{L, T, N\}$  en rapport à l'orientation locale des renforts utilisés (directions Longitudinale et Tangentielle respectivement parallèle et perpendiculaire aux fibres) et de l'épaisseur de la couche unitaire (direction Normale).
- Sciences du bois : les indices  $\{L, T, R\}$  sont utilisés, pour les directions parallèles aux rayons ligneux (Longitudinal), et par rapport aux cernes formés par l'alternance bois d'été/de printemps (directions Tangentielle au cerne et Radiale).

## B.2 Viscoélasticité linéaire

On a vu dans les sections précédentes que la loi de comportement élastique fait intervenir une relation contraintes-déformations. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, celle-ci prend la forme d'une application linéaire caractérisée par deux tenseurs d'ordre 4, le tenseur des raideurs  $\mathbb{C}$  et le tenseur des souplesses  $\mathbb{S}$ . Cette application porte sur les valeurs *instantanées* des déformations et contraintes.

Lorsque l'on cherche à étudier le comportement élastique d'un solide déformable, on peut effectuer quatre expériences élémentaires (de façon pratique ou par la pensée), exprimées dans une configuration uniaxiale : les expériences de retard, de relaxation, de recouvrance et d'effacement (voir figure B.1).

- (a) Relaxation : on soumet l'échantillon à un échelon de déformation  $\varepsilon(t) = \mathcal{H}(t)\varepsilon_0$ , où  $\mathcal{H}$  est la fonction de Heaviside. La contrainte atteint  $\sigma_0$  instantanément, puis décroît de façon monotone vers une asymptote  $\sigma_\infty$ . Cette contrainte asymptotique peut être nulle si la relaxation est complète.
- (b) Retard ou fluage : on soumet l'échantillon à un échelon de contrainte  $\sigma(t) = \mathcal{H}(t)\sigma_0$ . la réponse instantanée du matériau est alors caractérisée par la déformation finie  $\varepsilon_0$ . Ensuite, la déformation croît de façon monotone. La valeur  $\varepsilon_\infty$  (voir figure B.1b) n'est pas forcément finie, comme cela peut être le cas avec le fluage (ou des mécanismes de vieillissement en général).
- (c) Effacement : on soumet l'échantillon à un créneau de déformation de durée  $t_1$ . Par rapport à l'expérience de relaxation, on peut caractériser : (1) la réponse instantanée sous contraintes, différence entre  $\sigma_1^+$  et  $\sigma_1^-$  (voir figure B.1c), les deux états de contrainte avant et après arrêt du stimulus ; (2) l'effacement, caractérisé par la valeur asymptotique  $\sigma_\infty$ , qui peut être non nulle lorsqu'un phénomène *non réversible* est en jeu.
- (d) Recouvrance : on soumet l'échantillon à un créneau de contrainte de durée  $t_1$ . En plus de l'expérience de retard, on peut caractériser : (1) le retour instantané, entre  $\varepsilon_1^+$  et  $\varepsilon_1^-$  (voir figure B.1d), les deux états de déformation avant et après arrêt du stimuli ; (2) la recouvrance dénotée par  $\varepsilon_\infty$ , celle-ci pouvant être non-nulle si l'expérience donne lieu à des déformations résiduelles.

La description de ces expériences élémentaires permet d'introduire un concept fondamental dans l'élaboration d'un modèle de comportement viscoélastique : la contrainte ne dépend plus seulement de la valeur *instantanée* de la déformation, mais bien de l'*histoire* de celle-ci ; et réciproquement. Dans le cadre de ce travail, on se limitera aux phénomènes réversibles, caractérisés par une recouvrance et un effacement complets.

Les différents développements qui suivent tentent de dresser un tableau des différents aspects liés à la modélisation d'un comportement viscoélastique linéaire. Ils sont en partie inspirés de l'excellent ouvrage pédagogique de Jean Salençon [195]. Les différents principes fondamentaux sont également tirés des travaux de Onsager [155, 154] de Biot [32, 36, 34, 35] (propriétés du tenseur opérationnel) et de ceux de O'Donnell [152] (relations de Kramers-Kronig).

La section est organisée comme suit. Tout d'abord, on rappelle les principes qui permettent d'élaborer un modèle de comportement viscoélastique et de résoudre le problème de mécanique qui en découle. Ensuite, on présente certaines propriétés qui régissent le comportement viscoélastique linéaire et qui devraient être respectées par la loi de comportement. Enfin, on présente quelques modèles adaptés à la modélisation de structures dont les matériaux constitutifs présentent un comportement viscoélastique linéaire.

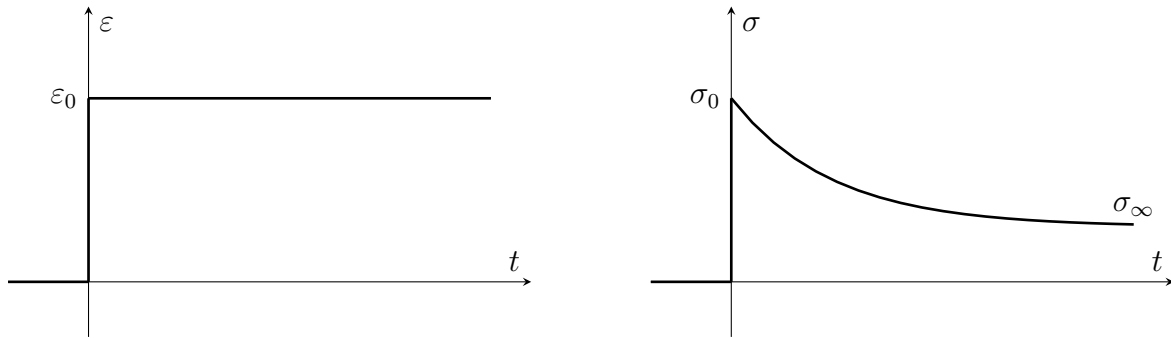
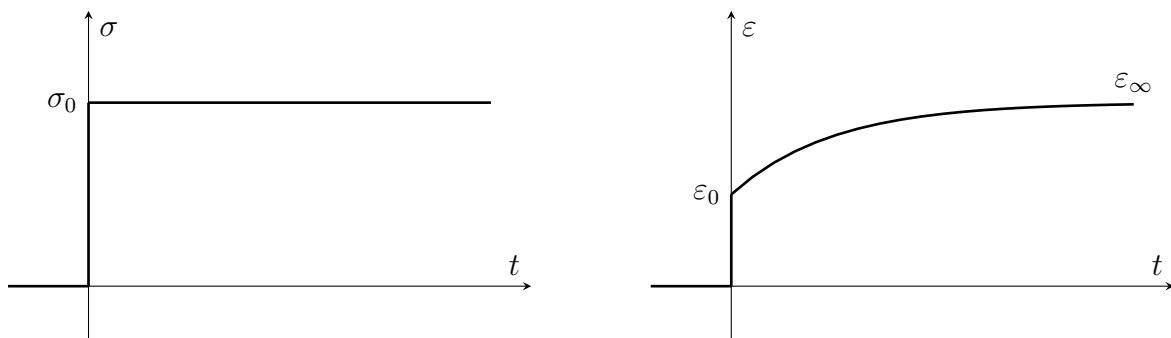
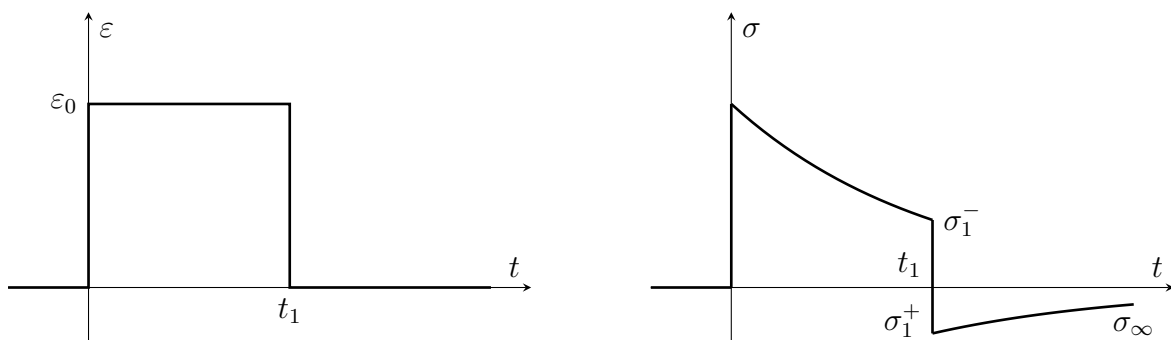
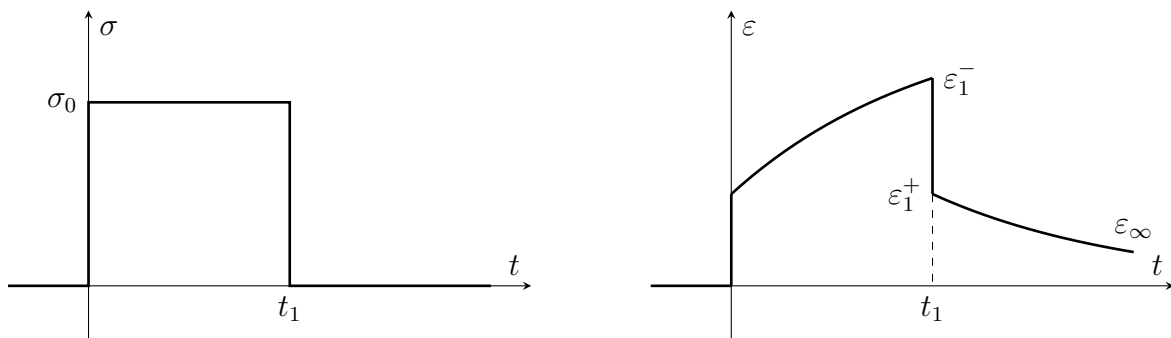
(a) Relaxation : stimulation par un *échelon de déformation*(b) Retard : stimulation par un *échelon de contrainte*(c) Effacement : stimulation par un *créneau de déformation*(d) Recouvrance : stimulation par un *créneau de contrainte*

FIGURE B.1 – Expériences uniaxiales élémentaires.

### B.2.1 Principe de superposition de Boltzmann

On a vu en introduction que la loi de comportement devait, pour prendre en compte les effets viscoélastiques, être fonction non plus des valeurs instantanées des contraintes et déformations, mais bien de leur histoire.

Le comportement viscoélastique linéaire est en conséquence décrit par une relation linéaire entre l'histoire des contraintes et l'histoire des déformations. Plus précisément, on parle de *matériau Boltzmannien* lorsque la réponse peut être décrite par la superposition des sollicitations passées.

**Definition B.2.1** (Principe de Boltzmann). *On peut écrire la relation contraintes-déformations d'un matériau Boltzmannien de la façon suivante :*

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, \tau) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}}, t - \tau) d\tau \quad (\text{B.2.1})$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  est le tenseur des fonctions de relaxation.

Le principe de superposition généralise en fait la loi de comportement élastique : la contrainte n'est plus une fonction linéaire de la déformation instantanée, mais bien une fonction linéaire de l'ensemble des états de déformations passés.

### B.2.2 Principe de correspondance

L'utilisation du principe de superposition pour résoudre le problème de dynamique (A.1.14) paraît compliqué. On introduit alors le principe de correspondance, qui présente un réel attrait opérationnel.

On remarque en effet que le choix d'un tenseur des relaxations tel que  $\forall \tau > t, \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau) = 0$  permet de réécrire le principe de superposition (B.2.1) sous la forme d'un produit de convolution :

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}(t) * \varepsilon_{kl}(t) \quad (\text{B.2.2})$$

De cette réécriture et du théorème de la convolution découle le principe de correspondance.

#### B.2.2.1 Le tenseur opérationnel

**Definition B.2.2** (Tenseur opérationnel des raideurs). *On définit le tenseur opérationnel des raideurs  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\omega)$  comme la transformée de Fourier du tenseur des relaxations  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)$  :*

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.2.3})$$

Le tenseur opérationnel des raideurs est alors utilisé pour lier la transformée de Fourier des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\omega)$  avec la transformée de Fourier des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\omega)$ .

**Definition B.2.3** (Relation contraintes-déformations dans l'espace de Fourier). *Dans l'espace de Fourier, la relation contraintes-déformations s'écrit comme suit :*

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) = \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) \quad (\text{B.2.4})$$

Dans l'espace de Fourier, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est donc *équivalente* à la loi de comportement élastique linéaire (A.1.10).

Le tenseur opérationnel des raideurs ainsi formulé possède des propriétés particulières qui sont étudiées plus loin.

### B.2.2.2 Formulation forte

Le principe de correspondance stipule que le problème de la dynamique (A.1.14) incluant un solide viscoélastique linéaire peut être résolu dans l'espace de Fourier.

**Propriété B.2.1** (Équations locales). *La formulation forte du problème de dynamique linéaire (A.1.14) se réécrit de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
 \text{cinématique : } \quad \varepsilon_{ij}(\omega) &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j}(\omega) + \mathbf{u}_{j,i}(\omega)) \\
 \text{comportement : } \quad \sigma_{ij}(\omega) &= \mathbf{C}_{ijkl}(\omega) \varepsilon_{kl}(\omega) \\
 \text{équilibre : } \quad \sigma_{ij,j}(\omega) + \mathbf{f}_i(\omega) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_i(\omega) &= 0 \\
 \text{C.L. cinématiques : } \quad \mathbf{u}_i(\omega) &= \mathbf{u}_i^\partial(\omega) \\
 \text{C.L. statiques : } \quad \sigma_{ij}(\omega) \mathbf{n}_j &= \mathbf{T}_i(\omega)
 \end{aligned} \tag{B.2.5}$$

où la dépendance des variables en les coordonnées  $\underline{\mathbf{x}}$  de l'espace est implicite.

*Remarque B.2.1.* Dans les équations qui précèdent, les conditions initiales n'apparaissent plus. En effet, la transformée de Fourier s'applique à une fonction définie pour  $t \in ]-\infty, \infty[$ . De façon à faire apparaître clairement les conditions initiales dans le problème, on peut utiliser la transformée de Laplace [195].

La résolution d'un problème viscoélastique linéaire dans l'espace de Fourier est équivalente à la résolution d'un problème élastique linéaire statique ; on peut voir que les effets d'inertie  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  ont un effet analogue aux efforts volumiques  $\underline{\mathbf{f}}$ . L'utilisation du principe de correspondance simplifie donc grandement la résolution du problème de dynamique non-conservatif.

### B.2.2.3 Formulation faible

L'application du principe de correspondance aux équation intégrales données par le principe des travaux virtuels (A.1.23) passe par l'application de l'égalité de Parseval. Soient deux fonctions du temps  $f_1$  et  $f_2$  à valeurs réelles et leur transformée de Fourier respective  $F_1$  et  $F_2$ . Alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^*F_1(\omega) F_2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) {}^*F_2(\omega) d\omega \tag{B.2.6}$$

Elle exprime la conservation de l'énergie par la transformée de Fourier.

**Propriété B.2.2** (Équation intégrale). *La formulation faible d'un problème de dynamique incluant une loi de comportement viscoélastique linéaire, exprimée à partir du principe des*

travaux virtuels (A.1.23), se met sous la forme :

$$\forall(\underline{\mathbf{u}}^*, \Omega) \quad \int_{\Omega} {}^* \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho {}^* \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Omega} {}^* \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} {}^* \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{T}} \, dS \quad (\text{B.2.7})$$

où les champs réels et virtuels sont exprimés dans le domaine de Fourier.

#### B.2.2.4 Méthodologie

La résolution d'un problème de dynamique incluant un matériau viscoélastique linéaire se déroule donc de la façon suivante :

1. Transformation des données connues du problème  $\underline{\mathbf{u}}_i^{\partial}(t)$ ,  $\mathbf{T}_i(t)$  et  $\mathbf{f}_i(t)$  dans le domaine de Fourier
2. Résolution des équations (B.2.5) dans le domaine de Fourier.
3. Prise de la transformée inverse des champs tensoriels obtenus afin d'obtenir la solution dans le domaine temporel.

Dans ce qui suit, on se propose d'étudier les propriétés du tenseur opérationnel qui permettent de restreindre les possibilités de lois de comportement qui peuvent être formulées.

### B.2.3 Propriétés du tenseur opérationnel

On a défini précédemment le tenseur opérationnel des raideurs  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega)$  (B.2.3), transformée de Fourier du tenseur des fonctions de relaxation  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(t)$  (B.2.1), lui-même généralisant la loi de comportement du matériau élastique linéaire (A.1.10).

#### B.2.3.1 Inversion

Il paraît difficile de définir l'inverse  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}(t)$  du tenseur des relaxations  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(t)$  à partir du seul principe de superposition (B.2.1). On peut toutefois écrire :

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}(t) * \varepsilon_{kl}(t) = C_{ijkl}(t) * S_{klpq}(t) * \sigma_{pq}(t)$$

d'où  $C_{ijkl}(t) * S_{klpq}(t) = \delta_{ijkl} \delta(t)$ . On a donc une définition de l'inverse dans l'espace de Fourier :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega)^{-1} \quad (\text{B.2.8})$$

où le *tenseur opérationnel des souplesses*  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\omega)$  est la transformée de Fourier du tenseur des fonctions de retard  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}(t)$ .

Dans la suite de ce document, les approches développées sont des approches cinématiques. En conséquence, on s'intéressera uniquement au tenseur opérationnel des raideurs, qui permet de calculer les contraintes à partir d'un champ de déformation donné. On désignera donc généralement par *tenseur opérationnel* le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega)$ .

### B.2.3.2 Écriture complexe

Les composantes du tenseur opérationnel sont complexes. La communauté scientifique adopte à ce sujet plusieurs écritures.

**Définition B.2.4.** *On peut écrire le tenseur opérationnel sous les formes suivantes :*

$$C_{ijkl}(\omega) = R_{ijkl}(\omega) + \mathbf{i} T_{ijkl}(\omega) \quad (\text{B.2.9})$$

$$= R_{ijkl}(\omega) \left( 1 + \mathbf{i} \eta_{ijkl}(\omega) \right) \quad (\text{B.2.10})$$

$$= R_{ijkl}(\omega) e^{\mathbf{i} \delta_{ijkl}(\omega)} \quad (\text{B.2.11})$$

où  $\mathbf{R}$  est le tenseur des raideurs dynamiques,  $\mathbf{T}$  le tenseur des pertes. Les composantes  $\eta_{ijkl}$  sont les facteurs de pertes (pertes ramenées aux raideurs) et les composantes  $\delta_{ijkl}$  les angles de pertes.

**Propriété B.2.3 (Parité).** *Le tenseur des fonctions de relaxation  $\mathbf{C}(t)$  étant une fonction réelle du temps, le tenseur opérationnel  $\mathbf{C}(\omega)$  possède les propriétés de parité suivantes :*

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(-\omega) &= R_{ijkl}(\omega) & (\text{partie réelle paire}) \\ T_{ijkl}(-\omega) &= -T_{ijkl}(\omega) \\ \eta_{ijkl}(-\omega) &= -\eta_{ijkl}(\omega) & (\text{partie imaginaire impaire}) \\ \delta_{ijkl}(-\omega) &= -\delta_{ijkl}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{B.2.12})$$

qui sont héritées des propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction réelle.

### B.2.3.3 Interprétation

Une interprétation des composantes complexes du tenseur opérationnel peut être donnée dans le cas où le système est animé par un mouvement harmonique (régime permanent).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}(t) &= A_{kl} \cos(\omega t + \phi_{kl}) \\ \sigma_{ij}(t) &= \sum_{k,l} A_{kl} R_{ijkl}(\omega) \cos(\omega t + \phi_{kl} + \delta_{ijkl}(\omega)) \end{aligned}$$

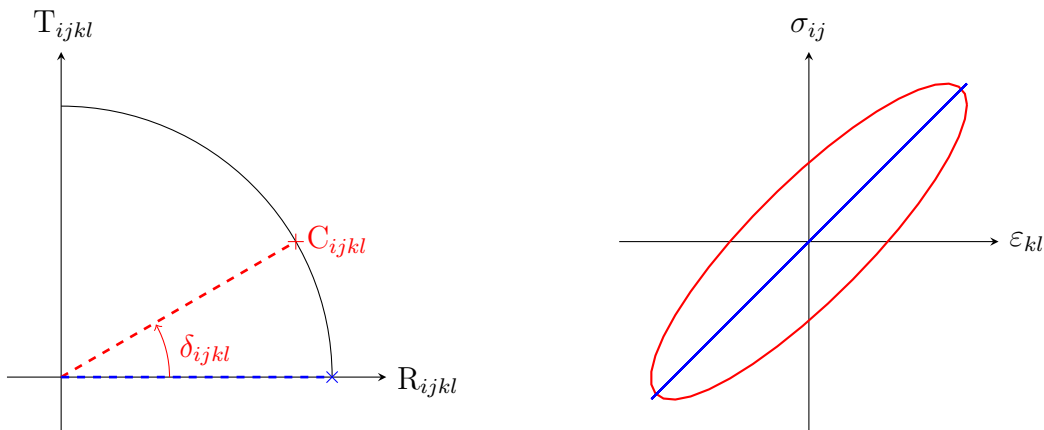


FIGURE B.2 – Interprétation graphique des composantes du tenseur opérationnel



où on a utilisé les propriétés de parité du tenseur opérationnel. Les effets visqueux introduisent donc les déphasages  $\delta_{ijkl}$  entre les contraintes  $\sigma_{ij}$  et les déformations  $\varepsilon_{kl}$ . Ce phénomène est représenté sur la figure B.2 ; dans le cas conservatif (en bleu), le tenseur opérationnel est purement réel ( $\delta_{ijkl} = 0$ ) et le diagramme contraintes-déformations suit une droite ; quand le comportement est dissipatif (en rouge), le déphasage est non nul et le diagramme contraintes-déformations suit une ellipse, signature du comportement hystérétique linéaire du matériau. L'aire de cette ellipse est d'ailleurs égale à l'énergie dissipée au cours d'un cycle :

$$\Delta\mathcal{U} = \oint \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} dt = \pi A_{ij} T_{ijkl}(\omega) A_{kl} \quad (\text{B.2.13})$$

qui met en avant le rôle du tenseur des pertes  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ . De façon équivalente, on donne l'énergie potentielle stockée :

$$\mathcal{U} = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dt = \frac{1}{2} A_{ij} R_{ijkl}(\omega) A_{kl} \quad (\text{B.2.14})$$

qui est fonction du tenseur des raideurs dynamiques  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ . On voit alors que le rapport entre les énergies élémentaires dissipées et les énergies potentielles élémentaires stockées fait apparaître les des facteurs de perte  $\eta_{ijkl}$  et des angles de perte  $\delta_{ijkl}$  :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\mathcal{U}_{ijkl}}{\mathcal{U}_{ijkl}} = \frac{T_{ijkl}}{R_{ijkl}} = \eta_{ijkl} = \tan(\delta_{ijkl}) \quad (\text{B.2.15})$$

où  $\Delta\mathcal{U} = \sum_{i,j,k,l} \Delta\mathcal{U}_{ijkl}$  et  $\mathcal{U} = \sum_{i,j,k,l} \mathcal{U}_{ijkl}$ .

### B.2.3.4 Symétries

On a vu précédemment B.1.1 que le tenseur caractérisant la loi de comportement élastique linéaire possède des symétries mineures et majeures. Il est possible de montrer que les tenseurs des raideurs dynamiques  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  et des pertes  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  possèdent les mêmes symétries.

Les symétries mineures sont justifiées par les mêmes arguments que dans le cas élastique : les contraintes et les déformations étant des tenseurs symétriques ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  et  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ), le tenseur opérationnel  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  peut être limité au groupe des tenseurs d'ordre 4 complexes possédant toutes les symétries mineures ( $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ ).

Les symétries majeures de  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  doivent être justifiées par des arguments thermodynamiques élaborés, que l'on ne développe pas ici. Les hypothèses de la théorie de Biot [32, 34, 36, 35] permettent, à partir du principe de réciprocité d'Onsager [154, 155], de justifier les symétries majeures du tenseur opérationnel ( $C_{ijkl} = C_{klij}$ ). De façon équivalente au cas élastique, Auld [9] se base sur l'existence d'une énergie de dissipation strictement positive pour justifier ces symétries.

On peut complètement transposer les résultats de section B.1 sur l'élasticité anisotrope au comportement viscoélastique anisotrope :

- La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  désigne le tenseur opérationnel en notation de Voigt (B.1.1). De façon équivalente, on définit les matrices des raideurs dynamiques  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  et des pertes  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ .

- Les différentes formes de la loi de comportement, conséquences des différentes symétries du matériau, sont identiques dans le cas élastique et le cas viscoélastique.
- Puisque l'énergie potentielle (B.2.14) et l'énergie dissipée (B.2.13) sont strictement positives, les bornes données en (B.1.26) dans le cas du matériau orthotrope restent valables, exprimées sur les composantes de  $\underline{\mathbf{R}}$  et  $\underline{\mathbf{T}}$  *indépendamment*.

*Remarque B.2.2.* Les symétries du tenseur opérationnel montrent que  $\underline{\mathbf{C}}(\omega)$  est symétrique *non Hermitienne*, soit  ${}^H\underline{\mathbf{C}}(\omega) = {}^*\underline{\mathbf{C}}(\omega) \neq \underline{\mathbf{C}}(\omega)$ . En conséquence, cet opérateur ne possède *pas* les propriétés classiques des matrices hermitiennes (valeurs propres réelles, sous-espace propre orthogonal, etc.).

### B.2.3.5 Dépendance des parties réelles et imaginaires

Pour formuler le principe de correspondance (B.2.5), on a eu besoin de donner la loi de comportement du solide viscoélastique dans l'espace de Fourier (B.2.4). Celle-ci utilise le fait que le principe de superposition de Boltzmann (B.2.1) peut être exprimé sous la forme d'un produit de convolution, à condition que le tenseur des fonctions de relaxations soit nul pour chaque instant succédant à l'instant actuel :

$$\forall \tau < 0 \quad \underline{\mathbf{C}}(\tau) = 0 \quad (\text{B.2.16})$$

On parle de condition de *causalité* (lien cause à effet) : la contrainte à l'instant actuel n'est fonction que des états de déformation *antérieurs*.

La condition de causalité a des conséquences sur la dépendance en fréquence des composantes du tenseur opérationnel. Cette dépendance en fréquence est liée aux relations de Kramer-Kronig (ou de Bayard-Bode), qui caractérisent tout système causal. Notamment, elles stipulent que les parties imaginaires et réelles du tenseur opérationnel (le tenseur des raideurs dynamiques et le tenseur des pertes) ne sont pas indépendantes.

On résume dans ce paragraphe les résultats donnés par O'Donnell [152] sur les conséquences de la causalité des fonctions de relaxation sur la dépendance en fréquence du tenseur opérationnel.

On a déjà utilisé le fait que les fonctions de relaxation sont *mesurables* (réelles) pour donner les propriétés de parité du tenseur opérationnel (B.2.12). En utilisant ces propriétés et l'écriture de  $\underline{\mathbf{C}}(\omega)$  sous la forme (B.2.9), on réécrit (B.2.3) comme suit :

$$\underline{\mathbf{C}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \underline{\mathbf{R}}(\omega) \cos(\omega\tau) + \underline{\mathbf{T}}(\omega) \sin(\omega\tau) \right) d\omega \quad (\text{B.2.17})$$

La causalité (B.2.16) conduit alors aux relations de Kramer-Kronig suivantes [152] :

$$\underline{\mathbf{R}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \underline{\mathbf{T}}(\lambda) d\lambda \quad (\text{B.2.18})$$

$$\underline{\mathbf{T}}(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \underline{\mathbf{R}}(\lambda) d\lambda \quad (\text{B.2.19})$$

où "v.p." dénote la valeur principale de Cauchy. Ces relations lient donc les parties réelle et imaginaire de  $\underline{\mathbf{C}}(\omega)$ . De façon équivalente, les relations de Bayard-Bode sont exprimées sur

l'amplitude et la phase du tenseur opérationnel (elles ont été établies à l'origine pour l'étude de la réponse des amplificateurs).

Conséquence directe des relations de Kramer-Kronig, les tenseurs  $\mathbf{R}_{\approx}$  et  $\mathbf{T}_{\approx}$  ne sont pas des fonctions de  $\omega$  indépendantes ; la connaissance de l'une d'entre elles sur le domaine fréquentiel complet permet de déterminer la seconde.

En particulier, O'Donnell montre (par un développement en série) que si  $\mathbf{C}_{\approx}$  est une fonction suffisamment lisse, alors l'intégrale devient locale.

**Propriété B.2.4** (Dépendance des parties réelles et imaginaires). *La forme locale et linéarisée des relations de Kramer-Kronig s'exprime de la façon suivante :*

$$\mathbf{T}_{\approx}(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \omega \frac{d\mathbf{R}_{\approx}(\omega)}{d\omega} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\eta}_{\approx}(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \frac{d\log(\mathbf{R}_{\approx}(\omega))}{d\log(\omega)} \quad (\text{B.2.20})$$

à condition que  $\mathbf{C}_{\approx}(\omega)$  soit une fonction suffisamment régulière.

On note ici quelques implications importantes des relations ci-dessus :

- D'après les bornes sur les composantes des matrices de comportement (B.1.26), on a  $T_{ii}(\omega) > 0$ , d'où les  $R_{ii}(\omega)$  sont des fonctions strictement positives et croissantes.
- Puisque  $\mathbf{T}_{\approx}$  prend des valeurs finies, la pente de  $\mathbf{R}_{\approx}(\omega)$  tend vers une valeur nulle quand  $\omega \rightarrow \infty$ . En conséquence,  $\mathbf{R}_{\approx}$  est bornée. De plus, on peut montrer que  $\mathbf{T}_{\approx}$  tend vers des valeurs faibles en haute fréquence.
- On remarque que  $\mathbf{T}_{\approx}$  est nul pour  $\omega = 0$ . La remarque précédente permet alors de conclure que  $\mathbf{T}_{\approx}$  (ou  $\boldsymbol{\eta}_{\approx}$ ) atteint au moins un maximum.

Pour finir, la proposition suivante donne une indication sur la variation des composantes du tenseur des raideurs dynamiques.

**Proposition B.2.1** (Variations du tenseur des raideurs). *Soit  $\eta_{ijkl}^{\max}$  tel que  $\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$ ,  $\eta_{ijkl} \leq \eta_{ijkl}^{\max}$ , alors :*

$$\frac{R_{ijkl}(\omega_2)}{R_{ijkl}(\omega_1)} \leq \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{\frac{2}{\pi} \eta_{ijkl}^{\max}} \quad (\text{B.2.21})$$

Dans le cas où  $\eta_{ijkl}^{\max}$  est petit, on pourra négliger la variation de  $\mathbf{R}_{\approx}$  avec la fréquence si le domaine fréquentiel d'étude est relativement restreint.

La figure B.3 donne la variation maximale de  $\mathbf{R}_{\approx}$  en fonction de l'extension  $r = \omega_{\max}/\omega_{\min}$  du domaine de fréquence d'étude. Dans le cadre de l'étude des structures rayonnantes pour les applications dans le domaine de l'audible, on a  $r = 1000$  (fréquences de 20 Hz à 20 kHz). Par exemple, si on prend le cas du bois, qui présente des mécanismes de perte de l'ordre de 2% dans la direction transverse ( $C_{TTTT}$ ), on peut s'attendre à une variation de 10% de la composante  $R_{TTTT}$  associée entre le bas et le haut du spectre.

*Remarque B.2.3.* Puisque les composantes des matrices de comportement opérationnelles sont dépendantes de la fréquence, on peut imaginer que les symétries d'un matériau puissent changer en fonction du domaine fréquentiel considéré [35].

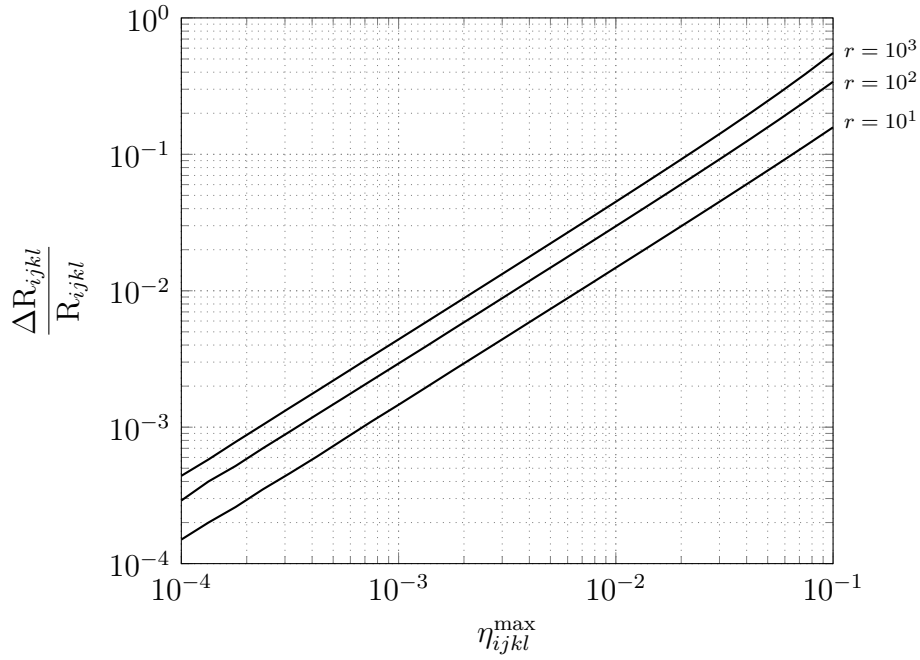


FIGURE B.3 – Borne supérieure de la variation des composantes du tenseur des raideurs  $\mathbf{R}(\omega)$  en fonction de la valeur maximale du facteur de pertes associé, pour différents rapports  $r = \omega_{\min}/\omega_{\max}$ .

### B.2.3.6 Constantes de l'ingénieur complexes

L'utilisation du tenseur opérationnel donne lieu à l'expression de constantes de l'ingénieur complexes, qui permettent de construire la matrice  $\underline{\mathbf{C}}(\omega)$  de façon équivalente au cas élastique (B.1.29). La construction ainsi faite est commode car elle est reliée à un contexte expérimental (essais de traction simple élémentaires).

On peut citer les travaux de Pritz qui étudie dans [167] la dépendance théorique du module d'Young et du coefficient de Poisson complexe. Il se place dans le cadre de l'expérience de relaxation (figure B.1a), dans lequel l'échantillon est soumis à un échelon de déformation. Il conclut que le module d'Young, à la manière du tenseur des raideurs dynamiques, est une fonction de la fréquence positive et strictement croissante. Le coefficient de Poisson, pour sa part, est une fonction strictement décroissante.

Toutefois, la définition des constantes de l'ingénieur complexes pose des problèmes, surtout pour ce qui est du coefficient de Poisson. On peut pour alimenter le propos citer le travail de Hilton [89], qui considère différentes définitions du coefficient de Poisson prises dans la littérature. Considérant par exemple la définition  $\nu_{ij}(t) = -\varepsilon_{jj}(t)/\varepsilon_{ii}(t)$ , il fait remarquer que le principe de correspondance est applicable seulement si  $\varepsilon_{ii}(t) = \varepsilon_{ii}^0$ , ce qui correspond à l'expérience de relaxation, un cas très particulier de chargement.

Afin de se placer dans les hypothèses qui permettent l'application du principe de correspondance (causalité, superposition, parité du tenseur opérationnel), il semble plus rigoureux de raisonner sur des fonctions reliant deux grandeurs *duales* au sens de l'énergie. C'est le cas des composantes  $C_{ijkl}$  du tenseur opérationnel (reliant les contraintes et les déformations), et de ses versions généralisées (ou *homogénéisées*), que l'on pourra rencontrer avec les modèles réduits de structure dans ce qui suit (voir chapitre II). Ainsi, les modules complexes (coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , Young  $E_i$ , compression isostatique  $K$ , cisaillement  $G_{ij}$ ) pourront parfois être

utilisés lorsqu'ils relient deux grandeurs généralisées duales (comme dans le cas des poutres, par exemple).

## B.2.4 Discrétisation

Dans le but de résoudre les problèmes de dynamique non conservatifs, on cherche à réduire l'espace des solutions qui respectent les équations locales (B.2.5) ou globales (B.2.7), comme dans le cas élastique (voir section A.2).

### B.2.4.1 Formulation discrète

Le principe de correspondance s'applique tout aussi bien au problème discrétisé (A.2.10), qui se reformule comme suit.

**Propriété B.2.5** (Système d'équations). *La version discrète du problème de mécanique exprimé dans l'espace de Fourier, portant sur les déplacements généralisés  $\mathbf{q}$  s'écrit comme suit :*

$$\left( \mathbf{K}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}(\omega) = \left( \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_R(\omega) + i \omega \mathbf{D}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (\text{B.2.22})$$

avec l'opérateur de raideur généralisée qui dépend de la fréquence :

$$\mathbf{K}(\omega) = \int_{\Omega} {}^H \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \quad (\text{B.2.23})$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho(\underline{\mathbf{x}}) {}^H \mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \quad (\text{B.2.24})$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} {}^H \mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} {}^H \mathbf{N}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}) dS \quad (\text{B.2.25})$$

où la matrice  $\mathbf{B}$  a été définie en (A.2.15).

Si on pose  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{R}}}_R(\omega) + i \underline{\underline{\mathbf{T}}}(\omega)$ , on peut exprimer les trois matrices  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{K}_R$  et  $\mathbf{D}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\Omega} {}^H \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{R}}}_0(\underline{\mathbf{x}}) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \quad (\text{B.2.26})$$

$$\mathbf{K}_R = \int_{\Omega} {}^H \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{R}}}_R(\underline{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \quad (\text{B.2.27})$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} {}^H \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \quad (\text{B.2.28})$$

Cette écriture permet de remarquer que la matrice  $\mathbf{K}_0$  correspond au cas conservatif ;  $\mathbf{K}_R$  décrit la variation des raideurs généralisées entraînée par les effets non conservatifs ;  $\mathbf{D}$  représente les mécanismes dissipatifs généralisés. Elle est de façon classique introduite devant un facteur  $\omega$ , qui correspond au modèle de dissipation visqueux traditionnellement utilisé. Ces trois matrices sont, par construction, symétriques hermitiennes (puisque les matrices  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  sont symétriques réelles).

Il est possible d'appliquer les relations de Kramer-Kronig sur les opérateurs généralisés. On développe l'expression de la matrice des dissipations généralisées en y injectant les relations de dispersion entre  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  (B.2.20) :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\omega) &= \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} {}^H\mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\Omega} {}^H\mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \frac{d\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega)}{d\omega} \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{d}{d\omega} \left[ \int_{\Omega} {}^H\mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\underline{\mathbf{R}}}_R(\underline{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{B}(\underline{\mathbf{x}}) d\Omega \right]\end{aligned}\tag{B.2.29}$$

**Propriété B.2.6** (Dispersion des opérateurs généralisés). *La dépendance théorique des matrices  $\mathbf{K}_R$  et  $\mathbf{D}$  s'exprime comme suit :*

$$\boxed{\mathbf{D}(\omega) = \frac{\pi}{2} \frac{d\mathbf{K}_R(\omega)}{d\omega}}\tag{B.2.30}$$

et découle directement des équations de Kramer-Kronig (B.2.20).

L'introduction des effets dissipatifs devraient donc forcément s'accompagner d'une dispersion fréquentielle de la raideur généralisée. Malgré le fondement physique de ces relations (dérivées de la causalité du système), de nombreux modèles s'en affranchissent.

#### B.2.4.2 Valeurs propres généralisées

On a vu qu'il est possible, dans le cas conservatif, de trouver une base sur laquelle projeter le problème afin de rendre les équations d'évolution découplées ((A.2.33), (A.2.34) et (A.2.40)). La possibilité de découpler les équations vient alors des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres généralisés composant la base modale (A.2.35). Ces propriétés sont dues au fait que les matrices de raideur et masse généralisées sont, dans le cas conservatif, symétriques hermitiennes définies positives et que les valeurs propres du système sont distinctes.

Dans le cas qui nous intéresse ici, le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  (ou la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  en notation de Voigt) est complexe, et on a montré que ses parties réelle  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  et imaginaire  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  sont symétriques. En conséquence,  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  n'est pas symétrique hermitienne (pour qu'elle le soit,  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  devrait être antisymétrique); l'opérateur de raideur généralisée  $\mathbf{K}$  ne l'est en conséquence pas. Il n'est donc pas possible, dans le cas général, d'obtenir un système d'équations découplées.

Il est tout de même possible de définir les vecteurs propres *de droite*  $\phi$  de l'opérateur d'équilibre dynamique non conservatif.

**Definition B.2.5** (Problème aux valeurs propres non linéaire). *Le problème aux valeurs propres correspondant à la recherche des solutions du problème de dynamique non conservatif homogène s'écrit comme suit :*

$$\boxed{(\mathbf{K}_0 + i\omega_n \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) - \omega_n^2 \mathbf{M}) \widetilde{\phi}_n = \mathbf{0}}\tag{B.2.31}$$

où on a posé :

$$\widetilde{\mathbf{D}}(\omega) = \mathbf{D}(\omega) - \frac{i}{\omega} \mathbf{K}_R(\omega)\tag{B.2.32}$$

*Cela représente un problème aux valeurs propres non linéaire ; la collection  $\Phi$  des vecteurs propres n'est dans le cas général pas  $\mathbf{M}$ -orthogonale (voir (A.2.35)).*

Le découplage des équations est toutefois très souhaitable d'un point de vue opérationnel ; on verra qu'il est d'ailleurs à la base de la construction des modèles de comportement majoritairement implémentés dans les codes de calcul. Certaines conditions sur les opérateurs généralisés permettent de garantir le découplage des équations d'évolution d'un système non conservatif. Les deux paragraphes qui suivent donnent deux principes largement utilisés pour chercher à diagonaliser le système d'équations homogène associé à l'équilibre dynamique non conservatif.

### B.2.4.3 Condition de Caughey

On reprend la base  $\Phi$ , qui rend diagonales les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{M}$  (A.2.40). En utilisant la projection  $\mathbf{q}(\omega) = \Phi \mathbf{a}(\omega)$  (A.2.33), les équations (B.2.23) deviennent :

$$\left( \text{diag}(\mathbf{k}) - \omega^2 \text{diag}(\mathbf{m}) \right) \mathbf{a} + i \omega {}^H \Phi \widetilde{\mathbf{D}}(\omega) \Phi \mathbf{a} = {}^H \Phi \mathbf{F}(\omega) \quad (\text{B.2.33})$$

En conséquence, les termes extra-diagonaux de  ${}^H \Phi \widetilde{\mathbf{D}}(\omega) \Phi$  couplent les équations d'évolution de la structure viscoélastique. On donne alors une condition pour que cette matrice soit diagonale ; autrement dit, que  $\Phi$  diagonalise  $\widetilde{\mathbf{D}}(\omega)$  pour tout  $\omega$ .

**Definition B.2.6** (Condition de Caughey). *Il est possible de trouver une base qui découple les équations d'équilibre du problème de dynamique non conservatif à condition que  $\forall \omega$  :*

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{D}}(\omega) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0 \mathbf{M}^{-1} \widetilde{\mathbf{D}}(\omega)} \quad (\text{B.2.34})$$

*qui est dérivée de la possibilité d'une diagonalisation jointe de  $\widetilde{\mathbf{D}}(\omega)$ ,  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{M}$  (assurée si les différents produits matriciels commutent).*

Même si elle donne un critère permettant d'assurer le découplage des équations pour un modèle de comportement donné, la condition de Caughey est en pratique peu utilisée pour construire un modèle de comportement, car elle n'est pas reliée à un phénomène physique particulier.

### B.2.4.4 Hypothèse de Basile

L'hypothèse de Basile concerne l'étude des systèmes peu amortis. Dans ce cas, la matrice  $\widetilde{\mathbf{D}}$  est d'un ordre au moins inférieur à la matrice des raideurs du système conservatif  $\mathbf{K}_0$ . Elle peut en conséquence être considérée comme une *perturbation* du système conservatif. L'influence de cette perturbation sur la base modale peut alors être étudiée, en posant  $\tilde{\omega}_n = \omega_n + \partial\Omega_n$  et  $\tilde{\phi}_n = \phi_n + \Delta\phi_n$ .

On montre en annexe E.1 que la perturbation de la base modale du système conservatif par l'introduction des mécanismes de perte est connue. Notamment, on remarque que la perturbation de la  $n^{\text{ième}}$  pulsation modale est de la forme (E.1.8) :

$$\partial\Omega_n = \frac{i}{2m_n} {}^H \phi_n \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n \quad (\text{B.2.35})$$



et ne dépend donc pas des modes  $k \neq n$ . Les pertes n'introduisent donc pas, au premier ordre, de couplage entre les pulsations modes  $\omega_n$  ; le terme de correction ne dépend pas des déformées et pulsations correspondant aux autres modes.

On montre de plus que la perturbation du  $n^{\text{ième}}$  mode propre est de la forme (E.1.12), à condition que les pulsations  $\omega$  du système conservatif soient bien distinctes :

$$\Delta \phi_n = i \frac{\omega_n}{m_n} \sum_{k \neq n} \frac{{}^H \phi_k \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n}{(\omega_n^2 - \omega_k^2)} \phi_k \quad (\text{B.2.36})$$

On voit que la perturbation est uniquement fonction des termes anti-diagonaux de la matrice  ${}^H \Phi \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \Phi$ , qui représente les termes de couplage du  $n^{\text{ième}}$  mode avec ses voisins. Cette matrice de couplage ne dépend d'ailleurs que de la matrice de dissipation évaluée à la pulsation  $\omega_n$ . Le couplage est donc *localisé* en fréquence.

**Propriété B.2.7** (Hypothèse de Basile). *Pour les structures faiblement amorties, si la séparation des modes en fréquence est satisfaisante et les termes de couplage modal faibles, les équations modales du mouvement sont dynamiquement découplées. De plus, les bases modales du système conservatif et du système incluant les pertes sont presque confondues.*

L'hypothèse de Basile est largement utilisée pour la justification des modèles d'amortissement implémentés dans les codes de calcul.

On donne dans les paragraphes qui suivent quelques modèles de comportement viscoélastique utilisés dans la modélisation de la réponse dynamique des structures. Deux types de modèles sont exposés ; (i) les modèles rhéologiques, basés sur une construction de la relation contrainte-déformation uniaxiale à partir d'éléments visqueux et élastiques élémentaires ; (ii) les modèles empiriques, basés sur certaines hypothèses et/ou observations et qui cherchent à simplifier la résolution du problème de dynamique non conservatif.

### B.2.5 Modèles rhéologiques

Pour modéliser le comportement viscoélastique des solides, une approche classique consiste à partir d'un comportement uniaxial  $\sigma(t) = c(t) * \varepsilon(t)$ , que l'on généralise ensuite aux composantes des tenseurs de comportement. Ce comportement uniaxial est modélisé à l'aide d'éléments élastiques (ressorts) et visqueux (amortisseurs). Le montage en série ou en parallèle de ces éléments donne des comportements différents (voir figure B.4).

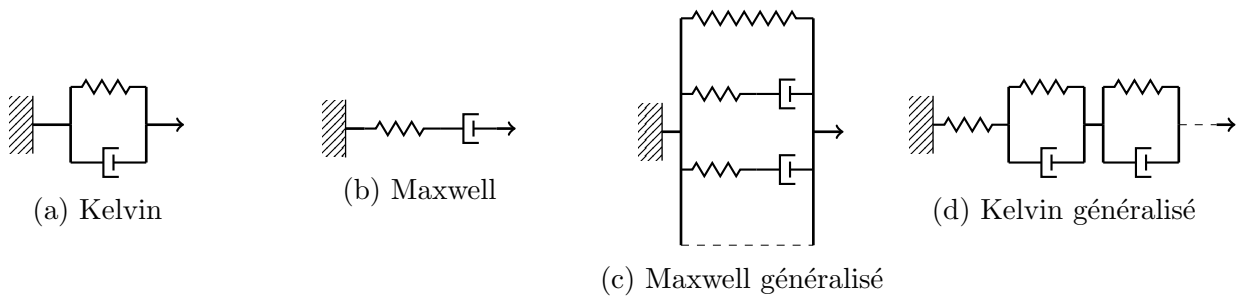


FIGURE B.4 – Modèles rhéologiques.



### B.2.5.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt (ou d'amortissement *visqueux*) modélise le comportement uniaxial par un ressort et un amortisseur en série (figure B.4a). La contrainte additionnelle  $\underline{\underline{\sigma}}^d$  due aux effets visqueux est donc proportionnelle au taux de déformation instantané, soit  $\underline{\underline{\sigma}}^d(t) = \underline{\underline{\tau}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t)$ . On écrit alors  $\underline{\underline{\sigma}}(\omega) + \underline{\underline{\sigma}}^d(\omega) = \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\omega) : \underline{\underline{\epsilon}}(\omega)$ .

**Definition B.2.7** (Comportement de Kelvin-Voigt). *Dans le cas du modèle de Kelvin-Voigt, le tenseur opérationnel prend la forme suivante :*

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{R}}} + i\omega \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{B.2.37})$$

soit  $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \omega \underline{\underline{\tau}}$ .

L'équilibre dynamique généralisé prend la forme :

$$(\mathbf{K}_0 + i\omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (\text{B.2.38})$$

avec  $\mathbf{D} = \int_{\Omega} {}^H \mathbf{B} \underline{\underline{\tau}} \mathbf{B} d\Omega$  (B.2.28) indépendante de  $\omega$ , par définition symétrique hermitienne. Dans le cas général, rien ne garantit que  $\mathbf{D}$  commute avec  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{M}$  simultanément ; la condition de Caughey (B.2.34) n'est donc pas vérifiée et il n'existe pas de base permettant de diagonaliser le système tel quel. Afin d'exprimer la réponse du système sous forme d'équations découplées, on réécrit le système précédent sous une forme linéarisée.

**Propriété B.2.8** (Modèle de Kelvin-Voigt). *Le système (B.2.38), quadratique en  $\omega$  et de taille  $N$  (où  $N$  est le nombre de degrés de liberté du système), est équivalent au système suivant :*

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ i\omega \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.39})$$

soit  $(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) \mathbf{q}' = \mathbf{f}'$ , le système de taille  $2N$  linéaire en  $\lambda = i\omega$ , caractérisé par des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  réelles et symétriques.

Le système ainsi obtenu possède une base propre orthogonale, à condition que les valeurs propres généralisées  $\lambda$  soient distinctes deux à deux.

Ce modèle est en réalité peu utilisé car la dépendance linéaire en  $\omega$  suppose de très fortes dissipations en haute fréquence. Formulé autrement, ce modèle ne possède pas d'élasticité instantanée ; le comportement est infiniment raide dans les premiers instants ( $\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t=0) \rightarrow \infty$ ). Il est en ce point plutôt adapté à la description des mécanismes visqueux dans les fluides.

### B.2.5.2 Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur montés en série (figure B.4b). Dans le domaine de Fourier, la fonction de relaxation uniaxiale qui en découle peut s'écrire  $c(\omega) = k/(1 + (k/i\omega\alpha))$ , avec  $k$  la raideur du ressort et  $\alpha$  la constante d'amortissement de l'élément visqueux. Pris tel quel, ce modèle possède une élasticité instantanée ( $c(\omega \rightarrow \infty) = k$ ) mais n'est pas stable :  $c(\omega = 0) = 0$  (l'amortisseur se détend indéfiniment). Il n'est donc pas utilisé pour modéliser le comportement viscoélastique des solides déformables.

### B.2.5.3 Modèle de Maxwell généralisé

En ajoutant un ressort en parallèle du modèle de Maxwell, on obtient un modèle stable car l'amortisseur ne peut plus se détendre indéfiniment. On généralise alors ce modèle en proposant un assemblage en parallèle de couples ressort-amortisseur et d'un ressort seul (figure B.4c). La fonction de relaxation d'un solide viscoélastique ainsi modélisé prend la forme suivante :

$$C_{ijkl}(\omega) = C_{ijkl}^0 + \sum_{n=1}^N C_{ijkl}^n \frac{1}{1 + (i\omega\tau_{ijkl}^n)^{-1}} \quad (\text{B.2.40})$$

où les  $C_{ijkl}^n$  sont les constantes d'élasticité et les  $\tau_{ijkl}^n$  sont les temps de relaxation.

A titre d'information, on peut donner la fonction de relaxation dans le domaine temporel :

$$C_{ijkl}(t) = \delta(t) \sum_{n=0}^N C_{ijkl}^n + \mathcal{H}(t) \sum_{n=1}^N C_{ijkl}^n \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ijkl}^n}\right) \quad (\text{B.2.41})$$

où  $\mathcal{H}(t)$  est l'échelon unité où fonction de Heaviside. La fonction se présente donc sous la forme d'un spectre discret de temps de relaxation, qui peuvent caractériser différents comportements dont les constantes de temps diffèrent (i.e fluage, viscoélasticité rapide, etc.).

Remarques :

- On peut montrer [195] que n'importe quel modèle rhéologique peut se mettre sous la forme d'un modèle de Maxwell généralisé.
- De façon équivalente, le modèle de Kelvin généralisé modélise le comportement uniaxial par un assemblage en série de couples ressort-amortisseur et d'un amortisseur seul (figure B.4d). Ce modèle est en fait équivalent à un modèle de Maxwell généralisé. Il est toutefois plus adapté à une formulation en contraintes, la sommation des comportements élémentaires se faisant sur les souplesses dynamiques. Dans ce travail, l'approche cinématique uniquement est utilisée, le modèle de Kelvin généralisé ne sera donc pas utilisé.
- Une généralisation supplémentaire peut consister à transformer le spectre discret de fonctions de relaxations élémentaires (B.2.41) en un spectre continu.

## B.2.6 Modèles empiriques

Les modèles qui suivent partent d'observations expérimentales ou du souhait de simplifier la résolution d'un problème de dynamique non conservatif.

### B.2.6.1 Amortissement modal

Il est possible de raisonner directement sur les équations d'équilibre. On fait l'hypothèse qu'il existe une base modale  $\Phi$  qui rend le système diagonal, telle que :

$${}^H\phi_n (\mathbf{K}_0 + i\omega\mathbf{D} - \omega^2\mathbf{M})\phi_n = k_n + i\omega d_n - \omega^2 m_n = 0 \quad (\text{B.2.42})$$

où la matrice des dissipations  $\mathbf{D}$  est indépendante de la pulsation. Les racines de ces équations caractéristiques sont les pulsations complexes du système dissipatif.

**Definition B.2.8** (Pulsation et coefficient d'amortissement modaux). *Les fréquences propres  $\tilde{\omega}_n$  d'un système décrit par un modèle utilisant l'amortissement modal s'expriment comme suit :*

$$\tilde{\omega}_n = i\xi_n\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi_n^2} \quad (\text{B.2.43})$$

où on pose le coefficient d'amortissement modal  $\xi_n = d_n/(2\sqrt{k_n m_n})$  et où  $\omega_n = \sqrt{k_n/m_n}$  est la pulsation modale du système conservatif associé.

*Remarque B.2.4.* Dans les cas que l'on traite dans ce travail, les effets visqueux sont présents mais faibles ; dans ce cas, on postule que  $\xi_n < 1$ . Les pulsations modales du système non conservatif posséderont donc toujours une partie réelle.

Les équations d'équilibre du système non conservatif s'écrivent donc dans la base modale :

$$\left(\omega_n^2 + 2i\omega\xi_n\omega_n - \omega^2\right)a_n(\omega) = \frac{1}{m_n} \mathbf{H}_n \phi_n \mathbf{f}(\omega) \quad (\text{B.2.44})$$

desquelles on déduit la réponse du système en régime harmonique permanent par une démarche identique à celle développée dans le cas conservatif (A.2.52). On considère alors le système comme un système linéaire, caractérisé par une fonction de transfert.

**Definition B.2.9** (Fonction de transfert). *Dans le cas du modèle d'amortissement modal, la réponse d'un système non conservatif se met sous la forme :*

$$\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{f}(\omega) \quad (\text{B.2.45})$$

où  $H_{ij}(\omega) = \sum_n \mathcal{H}_{inj}(\omega)$  est la matrice de transfert caractéristique du système. La composante  $\mathcal{H}_{inj}$  est telle que :

$$\mathcal{H}_{inj}(\omega) = \frac{\Phi_{in} * \Phi_{jn}}{(1 + i(\omega/\omega_n)\xi_n - (\omega/\omega_n)^2) k_n} \quad (\text{B.2.46})$$

et représente la contribution du  $n^{\text{ième}}$  mode dans l'influence de la  $j^{\text{ième}}$  composante des forces généralisées sur le mouvement du  $i^{\text{ième}}$  déplacement généralisé.

Le modèle d'amortissement modal considère donc le système amorti comme composé de  $3N$  sous systèmes à un degré de liberté, complètement découplés les uns des autres. Les réponses de chaque sous-système s'ajoutent pour former la réponse du système complet à une sollicitation.

La figure B.5 donne la forme des composantes  $\mathcal{H}_{inj}$  en fonction de la fréquence sur un diagramme de Bode, pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement modal  $\xi_n$ .

De façon analogue au cas conservatif, on peut passer les équations d'équilibre (B.2.44) dans le domaine temporel pour donner la forme générale de l'évolution du système libre.

**Definition B.2.10** (Réponse libre). *Dans le cas du modèle d'amortissement modal, l'évolution temporelle d'un système non conservatif préalablement mis en mouvement et libre de toute sollicitation prend la forme :*

$$\mathbf{q}(t) = \sum_n \phi_n \mathbf{a}_n e^{-\xi_n \omega_n t} \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} t + \psi_n\right) \quad (\text{B.2.47})$$

où les amplitudes  $\mathbf{a}$  sont données par les conditions initiales.

Cette forme générale est à la base des méthodes de caractérisation des systèmes par analyse modale opérationnelle, dont on propose dans ce travail une version *haute résolution* (voir chapitre IV).

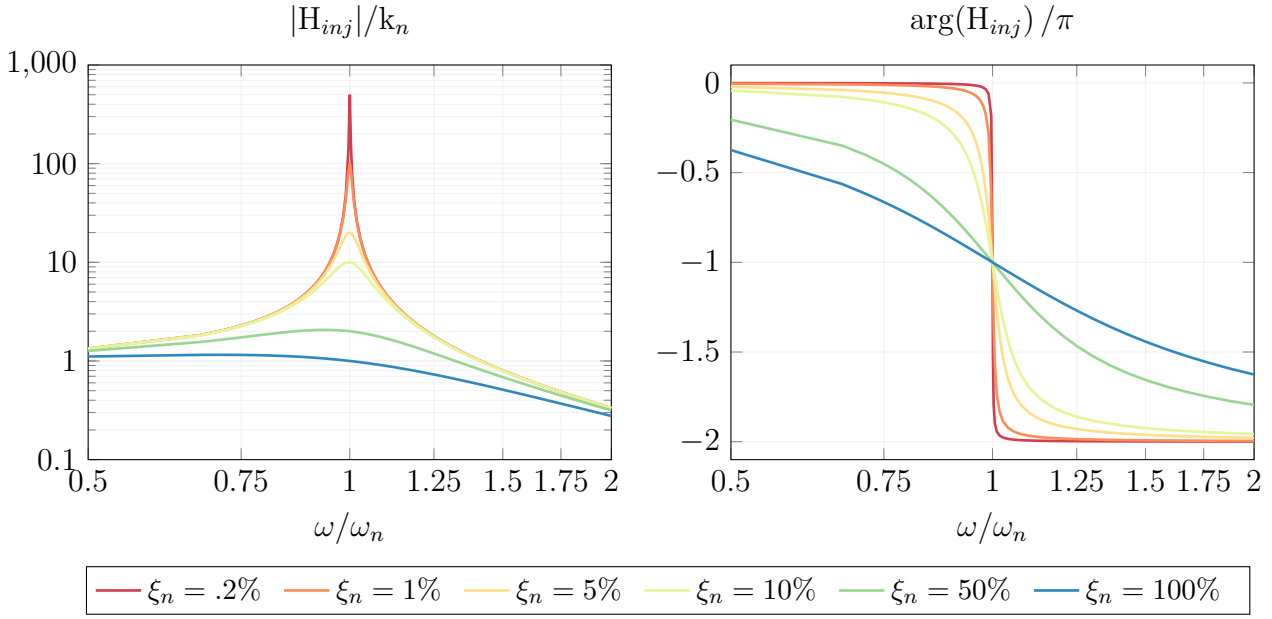


FIGURE B.5 – Forme des composantes de la fonction de transfert (B.2.46) pour différentes valeurs du coefficient d’amortissement modal  $\xi_n$ .

Le modèle d’amortissement modal part d’une définition qui n’a pas de lien direct avec le comportement viscoélastique tridimensionnel du matériau (ou des matériaux) composant le système. Après choix (ou identification) des pulsations modales  $\tilde{\omega}_n$  (B.2.43), il est possible de reconstruire la matrice des dissipations généralisées  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}_n \phi_n^H \phi_n = \left( 2\xi_n \sqrt{k_n m_n} \right) \phi_n^H \phi_n \quad (\text{B.2.48})$$

dont le lien avec le comportement viscoélastique tridimensionnel est donné par construction (B.2.28).

### B.2.6.2 Amortissement proportionnel ou de Rayleigh

Contrairement au modèle d’amortissement modal, le modèle d’amortissement de Rayleigh [172] part d’une définition de la matrice  $\mathbf{D}$ . Celle-ci est choisie de façon à pouvoir être diagonalisée dans la même base que  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{M}$ .

**Définition B.2.11** (Amortissement proportionnel). *Dans le cas du modèle d’amortissement de Rayleigh, la matrice de dissipation généralisée se met sous la forme :*

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{K}_0 + \beta \mathbf{M} \quad (\text{B.2.49})$$

et respecte la condition de Caughey (B.2.34).

On peut, à partir de cette définition, donner les coefficients d’amortissement modal liés à ce modèle.

**Définition B.2.12** (Coefficient d’amortissement modal de Rayleigh). *Dans le cas du modèle d’amortissement proportionnel, les coefficients d’amortissement modal  $\xi_n$  sont de la forme :*

$$2\xi_n = \alpha \omega_n + \frac{\beta}{\omega_n} \quad (\text{B.2.50})$$

et respecte la condition de Caughey (B.2.34).

Le modèle d'amortissement de Rayleigh consiste en une forte perte de généralité par rapport au modèle d'amortissement modal. En effet, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  fixent complètement les coefficients  $\xi_n$ , qui deviennent très importants quand la fréquence augmente ou quand elle tend vers 0. Ce modèle n'est donc valable que sur un domaine de fréquences réduit. De plus, l'amortissement est supposé homogène : il n'est pas possible de modéliser une quelconque hétérogénéité spatiale du comportement visqueux (dissipations locales par les conditions aux limites, anisotropie des mécanismes de pertes, etc.). On ne l'utilise donc pas dans ce travail.

Il faut noter qu'une généralisation du modèle de Rayleigh a été proposée sous la forme d'une combinaison de matrices respectant la condition de Caughey (B.2.34) :

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \sum_{d=0}^{D-1} \alpha_d (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0)^d \quad (\text{B.2.51})$$

Le modèle en *série de Caughey* permet de modéliser une plus grande variété de comportements que le modèle de Rayleigh ; toutefois, ce modèle non plus n'autorise pas la prise en compte d'hétérogénéités.

### B.2.6.3 Amortissement hystérétique

Le modèle hystérétique part de l'observation du diagramme contraintes-déformations en régime harmonique B.1, qui montre bien un déphasage entre les deux grandeurs duales. De plus, l'équation (B.2.21) et son illustration sur la figure B.3 permettent de supposer que les composantes du tenseur de comportement varient peu avec la fréquence lorsque les dissipations sont faibles. On considère alors un modèle simpliste qui suppose un tenseur opérationnel constant.

**Definition B.2.13** (Amortissement hystérétique). *Le modèle du solide hystérétique s'exprime par un tenseur opérationnel de la forme :*

$$\boxed{C_{ijkl}(\omega) = R_{ijkl} + i T_{ijkl}} \quad (\text{B.2.52})$$

où  $\underline{\mathbf{R}}$  et  $\underline{\mathbf{T}}$  sont des constantes.

Cette construction particulière ne peut être interprétée qu'en régime harmonique : elle ne respecte pas les conditions de causalité et les propriétés de parité du tenseur opérationnel.

La discrétisation d'un problème de dynamique utilisant le comportement hystérétique donne le système d'équations suivant :

$$(\mathbf{K}_0 + i \mathbf{K}_I - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (\text{B.2.53})$$

où  $\mathbf{K}_I = \int_{\Omega} {}^H \mathbf{B} \underline{\mathbf{T}} \mathbf{B} \, d\Omega$ .

Ce modèle est très utilisé en mécanique des structures peu amortissantes. En effet, sa formulation simple permet l'intégration dans de nombreuses méthodes de résolution : la loi correspond à une loi élastique exprimée avec une loi de comportement complexe. On utilise principalement le modèle hystérétique dans ce travail.

### B.2.6.4 Amortissement Structurel

Le modèle d'amortissement *structurel* considère que les dissipations généralisées du modèle hystérétique sont proportionnelles aux raideurs généralisées, soit  $\mathbf{K}_I = \eta \mathbf{K}$ . Dans ce cas, la base  $\Phi$  des modes du système conservatif diagonalise le membre de gauche de (B.2.53).

**Definition B.2.14** (Pulsations modales). *Dans le cas du modèle d'amortissement structurel, les pulsations modales sont de la forme :*

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 + i\eta} \quad (\text{B.2.54})$$

Dans le cas où les pertes sont faibles  $\eta \ll 1$ , on peut écrire  $\tilde{\omega}_n \approx \omega_n(1 + i\eta/2)$ . Il est alors possible d'établir le lien avec les coefficients d'amortissement modal.

**Definition B.2.15** (Coefficient d'amortissement modal). *Dans le cas où les dissipations sont faibles, le modèle d'amortissement structurel donne les coefficients d'amortissement modal suivants :*

$$\xi_n = \frac{\eta}{2} \quad (\text{B.2.55})$$

De nouveau, le modèle d'amortissement structurel ne permet pas de modéliser l'hétérogénéité spatiale des mécanismes de perte dans une structure. C'est ce qui, avec le facteur de pertes  $\eta$  fixé constant, en fait le modèle d'amortissement le plus simple.

### B.2.6.5 Énergie de déformation modale

Le modèle d'amortissement MSE (pour *Modal Strain Energy*) se sert de l'hypothèse de Basile (propriété B.2.7).

En effet, lorsque les mécanismes de perte peuvent être considérés comme des perturbations du système conservatif, on peut faire l'hypothèse que les termes de couplage inter-modaux associés sont faibles.

Cette hypothèse, associée à l'expression de la perturbation des modes propres (B.2.36), entraîne le fait que la base modale du système conservatif et du système amorti coïncident. De plus, les pulsations modales sont découplées, et leur perturbation est connue (B.2.35).

Un modèle hystérétique est utilisé (B.2.53), utilisant une matrice des dissipations  $\mathbf{D}$  symétrique et réelle et qui peut dépendre de la pulsation.

Dans la base modale, le comportement hystérétique est décrit par des facteurs de pertes modaux  $\eta_n$  (B.2.54), qui peuvent donc cette fois être fonction de la fréquence (en cela, le modèle d'amortissement MSE consiste en une extension du modèle d'amortissement structurel).

La base modale du système conservatif  $\Phi$  est tout d'abord calculée :

$$(\mathbf{K}_0 - \omega_n^2 \mathbf{M})\phi_n = \mathbf{0} \quad (\text{B.2.56})$$

Ce calcul est fait dans les réels, sur des matrices symétriques définies positives et constantes ; il est donc beaucoup moins coûteux que le calcul des vecteurs propres du système amorti (B.2.31).

La connaissance des pulsations propres  $\omega_n$  permet de construire les matrices de dissipation  $\mathbf{D}(\omega_n)$ .

**Definition B.2.16** (Facteurs de pertes modaux). *Dans le modèle d'amortissement MSE, les facteurs de pertes modaux  $\eta_n$  sont évalués comme le rapport des énergies de dissipation et potentielle, calculées à partir de la base réelle  $\Phi$  des vecteurs propres du système conservatif :*

$$\eta_n = \frac{1}{2\pi} \frac{{}^H\phi_n \mathbf{D}(\omega_n) \phi_n}{{}^H\phi_n \mathbf{K}_0 \phi_n} \quad (\text{B.2.57})$$

qui permettent de reconstruire les pulsations du système amorti  $\tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 + i\eta_n}$ . Les pertes étant supposées faibles, on a également  $\eta_n = 2\xi_n$  (B.2.55).

Le modèle MSE permet donc de découpler complètement les aspects liés à l'amortissement du problème d'équilibre dynamique. En cela, il est facile d'implémentation et assez optimisé, le calcul de la base modale se faisant sur des matrices réelles et constantes.

De plus, un comportement dissipatif riche peut être pris en compte par l'intermédiaire de la matrice  $\mathbf{D}$ , qui peut dépendre de la fréquence et prendre en compte l'hétérogénéité des mécanismes d'amortissement sur la structure. Cela en fait un modèle très apprécié.

## Annexe C

### Dérivation des modèles réduits classiques de structures élancées



## C.1 Démarche de formulation d'un modèle de structure

L'objectif de cette première section est de présenter une démarche de formulation d'un modèle de structure qui s'appuie sur une approche cinématique : le modèle est obtenu à partir du postulat d'un champ de déplacement. Cette approche est très largement répandue pour la formulation de modèles en dynamique des structures.

Dans ce qui suit, on omet la dépendance des variables en fonction du temps où de la fréquence ; on justifie ce choix par le principe de correspondance explicité dans l'annexe B.2 sur le comportement viscoélastique linéaire des matériaux. Ce principe stipule en effet que les équations exprimées dans l'espace de Fourier ou du temps sont équivalentes.

### C.1.1 Cadre de travail

La construction d'un modèle de structure *élancée* nécessite la formulation d'un certain nombre d'hypothèses. Celles-ci permettent de réduire le problème de dynamique tridimensionnel, décrit par les équations de la dynamique 3D (dans le cas élastique (A.1.14) ou viscoélastique (B.2.5)) à un problème exprimé sur une variété géométrique de dimension inférieure (surface ou courbe) et gouverné par des équations dites *généralisées*.

**Élancement équivalent** En statique, l'élancement est défini comme le rapport entre la taille de la *section* caractéristique  $h$  de la structure (épaisseur de la plaque ou largeur caractéristique de la section d'une poutre) et son *étalement spatial*  $L$  (cotés d'une plaque carrée, longueur d'une poutre). En dynamique, on peut définir l'élancement *équivalent* adimensionné  $\mu$  comme le rapport de la demie longueur d'onde  $\lambda$  sur la taille de la section caractéristique  $h$  :

$$\mu = \frac{\lambda}{2h} \quad (\text{C.1.1})$$

Lorsque la demie longueur  $\lambda/2$  d'onde coïncide avec  $h$ , l'élancement équivalent  $\mu$  est unitaire ; ce cas correspond à l'apparition des premiers modes d'ordre supérieur dans les plaques homogènes (voir section I.4). Ainsi défini, l'élancement équivalent permet de définir le régime *basse fréquence* comme le domaine pour lequel l'élancement est très grand devant 1, soit  $\mu \gg 1$ .

**Séparation des variables** La réduction du problème passe par une stratégie de *changement d'échelle*. Lorsque le rapport d'élancement équivalent  $\mu$  est grand devant 1, la structure peut être supposée vue *de loin*, sous la forme d'une *géométrie réduite* : une plaque s'apparente à une surface et une poutre à un segment de courbe. La dépendance des champs tensoriels de la mécanique peut en conséquence être exprimée sous forme *séparée* : soient, en reprenant le paramétrage proposé au chapitre précédent (voir définition I.1.1), les variables d'espace  $\underline{\mathbf{z}}$  qui paramètrent la position d'un point sur la section et les variables  $\underline{\mathbf{y}}$  qui paramètrent la position d'un point le long de la géométrie réduite. L'hypothèse de séparation des variables consiste alors à écrire, pour tous les champs  $\chi(\underline{\mathbf{x}})$  scalaires (composantes des champs tensoriels) impliqués dans le problème de mécanique :

$$\chi(\underline{\mathbf{x}}) = \zeta(\underline{\mathbf{z}})v(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{C.1.2})$$

Cette séparation permet donc de découpler la dépendance des champs sur la section, décrite par la fonction  $\zeta(\underline{\mathbf{z}})$ , de la dépendance de ces champs sur la géométrie réduite, décrite par  $v(\underline{\mathbf{y}})$ .

Elle permet également la séparation des intégrales sur les deux sous-domaines :

$$\int_{\underline{\mathbf{x}}} \chi(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}} = \int_{\underline{\mathbf{y}}} v(\underline{\mathbf{y}}) d\underline{\mathbf{y}} \int_{\underline{\mathbf{z}}} \zeta(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.3})$$

A partir de cette écriture peuvent en particulier être définies les *densités* de travail virtuel des efforts intérieurs  $d\mathcal{U}$  et d'accélération  $d\mathcal{A}$  telles que :

$$(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = \int_{\underline{\mathbf{y}}} (d\mathcal{U}(\underline{\mathbf{y}}), d\mathcal{A}(\underline{\mathbf{y}})) d\underline{\mathbf{y}} \quad (\text{C.1.4})$$

**Décomposition élémentaire** La formulation d'un modèle de structure élanée par une approche cinématique consiste à postuler un champ de déplacement sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\underline{\Phi}}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{C.1.5})$$

où la sommation est faite sur les indices  $n \in \{1, \dots, N\}$ , avec  $N$  l'ordre de la modélisation. Les fonctions élémentaires décrivant la variation du champ de déplacement le long de la section sont contenues dans les matrices  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$ . Les vecteurs  $\underline{\mathbf{U}}^{(n)}$  contiennent quant à eux les *degrés de liberté* du modèle ; on les appelle aussi *déplacements généralisés*.

Les matrices des fonctions élémentaires  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$  constituent donc le fondement de la construction d'un modèle de structure par une approche cinématique. Une fois ces matrices choisies, la dérivation du modèle consiste à (i) exprimer les champs mécaniques généralisés : déplacements, déformations, contraintes et efforts extérieurs ; (ii) dériver les comportements de raideur et d'inertie généralisés ; (iii) établir les équations d'équilibre dans leur formulation faible puis forte. Ces différentes étapes sont développées dans ce qui suit pour un cadre général.

## C.1.2 Champs mécaniques généralisés

### C.1.2.1 Déplacements

La première étape consiste à postuler un champ de déplacement de la forme (C.1.5) ; cela consiste à choisir  $N$  matrices  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$  contenant les fonctions de forme élémentaires et associées aux  $N$  vecteurs de degrés de liberté  $\underline{\mathbf{U}}^{(n)}$ . Pour être en mesure d'appliquer le principe des travaux virtuels pour la dérivation du modèle, les fonctions  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$  doivent être *cinématiquement admissibles*, c'est à dire qu'elles doivent permettre de respecter les conditions aux limites et de continuité (voir annexe A.1, équations (A.1.6) et (A.1.16)). A la fin, le vecteur complet des degrés de liberté ou *déplacements généralisés* est mis sous la forme :

$${}^T \underline{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}_1^{(0)} \dots \mathbf{U}_{M_0}^{(0)} \mathbf{U}_1^{(1)} \dots \mathbf{U}_{M_{N-1}}^{(N-1)}] \quad (\text{C.1.6})$$

où les  $M_n$  représentent le nombre de degrés de liberté associé à chaque ordre ; au total, le modèle est caractérisé par  $P = \sum_n M_n$  degrés de liberté cinématiques.

*Remarque C.1.1 (Exemple).* Pour éclaircir le formalisme adopté, on donne l'exemple d'un modèle de plaque dont la cinématique serait postulée sous la forme d'ordre  $N = 2$  suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}(z, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{U}}^{(0)}(\underline{\mathbf{y}}) + z \underline{\mathbf{U}}^{(1)}(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{C.1.7})$$

où l'ordre  $n = 0$  correspondrait donc aux translations uniformes de la section ;  $\underline{\underline{\Phi}}^{(0)} = \mathbb{I}$  ne contiendraient que des constantes. L'ordre  $n = 1$  serait quant à lui associé aux rotations de section ; la matrice  $\underline{\underline{\Phi}}^{(1)} = z\mathbb{I}$  contiendrait alors des termes affines en  $z$ . La cinématique du modèle serait donc décrite à partir des six degrés de liberté  $\mathbf{U}_p^{(n)}$ .

### C.1.2.2 Déformations

Une fois le champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  postulé, celui-ci peut être injecté dans les équations cinématiques pour déterminer le champ de déformation tridimensionnel  $\underline{\underline{\epsilon}}$  associé ainsi que les déformations généralisées correspondantes  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}$  :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})) = \text{sym}\{\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\underline{\nabla}}\} \quad (\text{C.1.8})$$

$$= \text{sym}\left\{\left(\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \otimes \underline{\underline{\nabla}}\right) \cdot \underline{\mathbf{U}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) + \underline{\underline{\Phi}}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \cdot \left(\underline{\mathbf{U}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \otimes \underline{\underline{\nabla}}\right)\right\} \quad (\text{C.1.9})$$

$$= \underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}(\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{y}})) \quad (\text{C.1.10})$$

où les tenseurs symétriques  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}$  sont les tenseurs de déformation généralisés. L'identification des composantes des  $\underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}$  se fait terme-à-terme avec les composantes des  $\underline{\mathbf{U}}^{(n)}$  et  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$ . Elles ne peuvent être écrites dans le cas général et ne seront rendues explicites que lors des développements spécifiques à chaque modèle réduit.

### C.1.2.3 Contraintes

L'étape suivante consiste à identifier les variables *duales* des déformations généralisées au sens du travail virtuel des efforts intérieurs. Pour cela, le champ de déformation tridimensionnel obtenu est injecté dans la densité des efforts intérieurs (C.1.4) :

$$-d\mathcal{U}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}}^H \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}})) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.11})$$

$$= \int_{\underline{\mathbf{z}}}^H \underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}(\underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}})) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.12})$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}(\underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}})) : \underline{\underline{\Sigma}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{C.1.13})$$

avec les tenseurs  $\underline{\underline{\Sigma}}^{(n)}$  des contraintes généralisées qui s'écrivent :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}}^H \underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.14})$$

où on a utilisé la symétrie des différents tenseurs.

*Remarque C.1.2.* L'expression des contraintes généralisées fait intervenir une projection du champ de contrainte tridimensionnel  $\underline{\underline{\sigma}}$  sur les fonctions  $\underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}$ . L'utilisation de la densité de travail des efforts intérieurs ci-dessus dans le principe des travaux virtuels ne garantit pas l'admissibilité *statique* du champ de contraintes tridimensionnel : celui-ci peut ne pas respecter les conditions aux limites et de continuité.

### C.1.2.4 Efforts extérieurs

L'identification des efforts extérieurs généralisés est réalisée en injectant la forme du champ de déplacement postulé dans le membre de droite du principe des travaux virtuels (A.1.22). En supposant que les efforts volumiques  $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}})$  sont nuls, on définit deux frontières  $\partial\underline{\mathbf{y}}$  et  $\partial\underline{\mathbf{z}}$ , qui dénotent respectivement la frontière de la géométrie réduite (i.e contour d'une plaque) et

la frontière de la section caractéristique (i.e les faces supérieure et inférieure de la plaque). Le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W} &= \int_{\partial \underline{\mathbf{x}}} {}^H \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}) \, d\partial \underline{\mathbf{x}} \\
 &= \int_{\partial \underline{\mathbf{y}}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \cdot \left[ \int_{\underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \cdot \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) \, d\partial \underline{\mathbf{z}} \right] d\partial \underline{\mathbf{y}} + \int_{\underline{\mathbf{y}}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \cdot \left[ \int_{\partial \underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \cdot \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) \, d\partial \underline{\mathbf{z}} \right] d\underline{\mathbf{y}} \\
 &= \int_{\partial \underline{\mathbf{y}}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \cdot \underline{\Theta}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\partial \underline{\mathbf{y}} + \int_{\underline{\mathbf{y}}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{y}}
 \end{aligned}$$

où on a posé les vecteurs des *chargements* généralisés  $\underline{\mathbf{F}}^{(n)}$  s'exerçant sur  $\partial \underline{\mathbf{z}}$  et des *efforts aux limites* généralisés  $\underline{\Theta}^{(n)}$  qui s'exercent  $\partial \underline{\mathbf{y}}$ . Ceux-ci s'écrivent comme suit :

$$\underline{\mathbf{F}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\partial \underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) \, d\partial \underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.15})$$

$$\underline{\Theta}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.16})$$

Il est bien sûr possible de modéliser des structures dont la conformation de la section caractéristique varie le long de la géométrie réduite ; ceci correspond à une frontière  $\partial \underline{\mathbf{z}}(\underline{\mathbf{y}})$  qui dépend de la position  $\underline{\mathbf{y}}$  sur la géométrie réduite.

### C.1.3 Comportement généralisé

Une fois que tous les champs de la mécanique généralisés ont été obtenus, il est nécessaire de dériver les relations donnant leur interdépendance. En particulier, l'objectif est de formuler des lois de comportement en raideur et en inertie généralisées.

#### C.1.3.1 Raideurs

L'expression des contraintes généralisées données à l'équation (C.1.14) contient le champ de contraintes tridimensionnel  $\underline{\sigma}(\underline{\mathbf{x}})$ . Celui-ci peut alors être remplacé en utilisant la loi de comportement locale  $\underline{\sigma}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbb{C}}(\underline{\mathbf{x}}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}})$  et la forme du champ de déformation en fonction des déformations généralisées (C.1.10). Les relations de comportement en raideur généralisées peuvent alors être obtenues :

$$\underline{\Sigma}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Upsilon}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\mathbb{C}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.17})$$

$$= \int_{\underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Upsilon}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\mathbb{C}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) : \underline{\Upsilon}^{(m)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\mathbf{E}}^{(m)}(\underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}})) \, d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.18})$$

$$= \underline{\Pi}^{(n,m)}(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{E}}^{(m)}(\underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}})) \quad (\text{C.1.19})$$

avec les  $N^2$  tenseurs opérationnels des raideurs généralisées  $\underline{\Pi}^{(n,m)}$  construits comme suit :

$$\underline{\Pi}^{(n,m)}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\Upsilon}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) : \underline{\mathbb{C}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) : \underline{\Upsilon}^{(m)}(\underline{\mathbf{z}}) \, d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.20})$$

et qui possèdent les même propriétés de symétrie que le tenseur opérationnel local  $\underline{\mathbb{C}}$  (les tenseurs  $\underline{\Upsilon}^{(n)}$  sont réels). De plus, ces tenseurs respectent les symétries majeures, soit  $\underline{\Pi}^{(n,m)} = \underline{\Pi}^{(m,n)}$ .

Les tenseurs de comportement définis ci-avant peuvent être à l'origine de couplages entre les différents mécanismes de déformation correspondant à des ordres  $n$  et  $m$  différents. Pour citer un cas concret, ce genre de couplage apparaît dans les plaques multicouches entre les mécanismes de membrane (ordre 0) et de flexion (ordre 1) lorsque la distribution des propriétés mécaniques dans l'épaisseur n'est pas symétrique par rapport au plan  $z = \text{cst}$  sur lequel le modèle est exprimé (plan *moyen*).

### C.1.3.2 Inerties

La dérivation du comportement inertiel généralisé passe par l'injection du champ d'accélération associé au champ de déplacement postulé dans la densité de travail virtuel des efforts d'accélération  $d\mathcal{A}$  (C.1.4).

Tout d'abord, le champ d'accélération est noté  $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}})$ ; il s'exprime directement en fonction du déplacement, suivant l'espace dans lequel le problème est formulé :  $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\ddot{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  ou  $\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega) = -\omega^2 \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \omega)$ . En conséquence, ce champ se projette dans la même base que  $\underline{\mathbf{u}}$  :

$$\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \underline{\mathbf{A}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{C.1.21})$$

La densité de travail virtuel des efforts d'accélération peut alors se réécrire sous la forme suivante (voir équation (A.1.17)) :

$$d\mathcal{A}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}} {}^H \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) \rho(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.22})$$

$$= \int_{\underline{\mathbf{z}}} \left[ {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) {}^H \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \right] \rho(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) \left[ \underline{\Phi}^{(m)}(\underline{\mathbf{z}}) \underline{\mathbf{A}}^{(m)}(\underline{\mathbf{y}}) \right] d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.23})$$

$$= {}^H \underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\Gamma}^{(n,m)}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{C.1.24})$$

avec les  $N^2$  tenseurs des inerties généralisées  $\underline{\Gamma}^{(n,m)}$  formés comme suit :

$$\underline{\Gamma}^{(n,m)}(\underline{\mathbf{y}}) = \int_{\underline{\mathbf{z}}} \rho(\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}}) {}^H \underline{\Phi}^{(n)}(\underline{\mathbf{z}}) \underline{\Phi}^{(m)}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.25})$$

ces tenseurs respectant également les symétries majeures, soit  $\underline{\Gamma}^{(n,m)} = \underline{\Gamma}^{(m,n)}$ . L'écriture ci-dessus montre que le comportement inertiel peut également être la source de couplages entre les différents degrés de liberté associés à des ordres  $n$  et  $m$  différents. Ces couplages viennent couramment d'une distribution dissymétrique de la densité  $\rho$  sur la section caractéristique de la structure.

## C.1.4 Équilibre généralisé

Une fois les champs mécaniques et les relations de comportement généralisés obtenus, la dernière étape de la formulation d'un modèle consiste à dériver les équations du mouvement généralisées. Celles-ci peuvent être exprimées sous la forme faible, utilisée notamment pour la résolution des problèmes par éléments finis ou méthode de Ritz (voir la section A.2 qui présente

succinctement ces deux méthodes). Les équations d'équilibre du modèles peuvent aussi être dérivées dans leur forme forte ; cette formulation permet l'utilisation de méthodes de résolution différentes, comme la méthode des différences finies (également présentée en section A.2). Dans ce travail, elles sont utilisées pour dériver les équations de dispersion associées aux modèles réduits. Ces équations locales s'accompagnent également de *conditions aux limites* généralisées.

#### C.1.4.1 Forme faible

Dans sa forme généralisée, le principe des travaux virtuels s'écrit comme suit, où  $\hat{\Omega}$  désigne une géométrie réduite quelconque et  $\partial\hat{\Omega}$  sa frontière :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{\mathbf{U}}^*, \hat{\Omega}) \quad & \int_{\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{E}}^{(n)}(\underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}})) : \underline{\underline{\Sigma}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_{\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\underline{\Gamma}}^{(n,m)}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\mathbf{A}}^{(m)}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{y}} \\ & = \int_{\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\mathbf{F}}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_{\partial\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n),*}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\Theta}^{(n)}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\partial\underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{C.1.26})$$

Cette écriture permet plus tard de dériver les équations locales. Pour son utilisation dans des schémas de résolution numériques, le principe des travaux virtuels est classiquement réécrit en injectant les relations de comportement généralisées (C.1.20).

Pour cela, la notation de Voigt est utilisée (voir annexe B.1) ; à la manière du vecteur complet des déplacements généralisés  $\underline{\mathbf{U}}$  (équation (C.1.6)), toutes les déformations généralisées sont concaténées pour former le *vecteur* des déformation généralisées  $\underline{\mathbf{E}}$ . Cela permet d'écrire les identités suivantes :

$${}^H \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\mathbf{E}} = {}^H \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)} : \underline{\underline{\Pi}}^{(n,m)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)} \quad (\text{C.1.27})$$

$${}^H \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = {}^H \underline{\mathbf{U}}^{(n)} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^{(n,m)} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{(m)} \quad (\text{C.1.28})$$

où suivant l'espace dans lequel le problème est formulé,  $\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{y}}, t) = \ddot{\underline{\mathbf{U}}}(\underline{\mathbf{y}}, t)$  ou  $\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{y}}, \omega) = -\omega^2 \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{y}}, \omega)$ . Les matrices généralisées  $\underline{\underline{\Pi}}$  et  $\underline{\underline{\Gamma}} \in \mathbb{R}^{P \times P}$  sont symétriques (la partie imaginaire de  $\underline{\underline{\Pi}}$  est, comme pour le tenseur opérationnel  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ , également symétrique).

De façon équivalente, les vecteurs complets des chargements généralisés  $\underline{\mathbf{F}}$  et des efforts aux limites généralisés  $\underline{\Theta}$  sont respectivement construits à partir de la concaténation des  $\underline{\mathbf{F}}^{(n)}$  et  $\underline{\Theta}^{(n)}$  (expressions (C.1.15) et (C.1.16)). Finalement, la formulation faible des équations du mouvement généralisées associée au modèle qui permet une mise en œuvre dans les méthodes de résolution numérique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall(\underline{\mathbf{U}}^*, \hat{\Omega}) \quad & \int_{\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{U}}^*) \cdot \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{U}}) \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_{\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{y}} \\ & = \int_{\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_{\partial\hat{\Omega}} {}^H \underline{\mathbf{U}}^*(\underline{\mathbf{y}}) \underline{\Theta}(\underline{\mathbf{y}}) \, d\partial\underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{C.1.29})$$

Les méthodes de résolution présentées en section A.2 permettent de résoudre cette équation : les déplacements généralisés peuvent à leur tour être projetés sur une base de fonctions  $\mathbf{n}(\underline{\mathbf{y}})$  (voir équation (A.2.3)), qui permet de discrétiser le problème. A la fin, un système matriciel du type (A.2.11) (problème élastique en temps) ou (B.2.22) (problème viscoélastique en fréquence) est construit et permet la résolution du problème de structure en dynamique.

### C.1.4.2 Forme forte

Comme on l'a vu dans le cas des équations de la dynamique du solide tridimensionnel, le principe des travaux virtuels donne une formulation intégrale qui est équivalente aux équations locales (voir section A.1.4). De la même manière, il est possible de déterminer les équations d'équilibre *locales* et les conditions aux limites qu'un modèle réduit doit satisfaire (formulation forte) à partir du PTV.

La formulation forte des équations du mouvement généralisées associées à un modèle est classiquement dérivée en trois étapes : (i) expression du travail des efforts intérieurs  $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{y}})$  sous la forme d'une application linéaire entre les tenseurs des contraintes généralisées  $\underline{\underline{\Sigma}}^{(n)}$  aux différents ordres  $n$  et les gradients successifs du vecteur virtuel des déplacements généralisés  $\underline{\mathbf{U}}^*$ ; (ii) application du théorème de la divergence pour transformer certaines des intégrales sur le domaine  $\hat{\Omega}$  en intégrales de contour portant sur  $\partial\hat{\Omega}$ ; (iii) choix de champs virtuels de déplacement  $\underline{\mathbf{U}}^*$  qui permettent de séparer les intégrales de surface et de volume et de *localiser* les équations en autorisant à égaliser les *intégrandes* des différents travaux virtuels.

Afin de mener à bien cette démarche, il est toutefois nécessaire de connaître *explicitement* les fonctions  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$  afin de déterminer les  $\underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}$  et les déformations généralisées associées  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}(\underline{\mathbf{U}})$ . Cela n'est donc pas possible dans le cas général donné ici; cette démarche sera explicitée dans la suite pour chaque modèle réduit.

### C.1.5 Correction du comportement

L'approche cinématique donnée ci-dessus, classiquement utilisée pour la résolution des problèmes de dynamique des structures, repose sur le postulat d'un champ cinématique *réduit*. Ce postulat se base naturellement sur l'identification empirique des mécanismes du mouvement *dominants* (i.e flèche due à la flexion d'une plaque). Les fonctions  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$  sur la base desquelles le déplacement est développé (voir (C.1.5)) sont donc choisies de façon à décrire ces mécanismes élémentaires.

L'identification des mécanismes de déplacement élémentaires est souvent satisfaisante pour la description du comportement inertiel de la structure. Toutefois, le comportement en raideur du modèle est décrit par les fonctions  $\underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}$ , qui contiennent les *dérivées* des fonctions  $\underline{\underline{\Phi}}^{(n)}$ . Celles-ci interviennent dans les déformations généralisées  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(n)}$  (C.1.10). La dérivation des fonctions de base appauvrit encore la description spatiale des champs de déformation et de contrainte dans la section caractéristique. En conséquence, le comportement dérivé tel quel est *raidissant* : la description insuffisante du champ de déformation entraîne une surestimation de la raideur de la structure.

Deux solutions sont alors envisageables : la première consiste à enrichir le modèle en ajoutant des fonctions de base et des degrés de liberté associés. Cette première solution possède toutefois l'inconvénient d'augmenter la dimension des problèmes à résoudre. La deuxième solution consiste à utiliser les degrés de liberté cinématiques d'origine, mais d'introduire des *corrections* sur le comportement, voire un comportement obtenu d'une façon complètement différente. C'est la deuxième solution qui est retenue dans ce travail.

En particulier, trois stratégies de correction du comportement peuvent être retenues : (i) postulat d'un état de contraintes particulier; (ii) correction par un coefficient multiplicateur; (iii) utilisation d'une *loi de mélange* particulière. Ces trois stratégies font l'objet des paragraphes qui suivent.



### C.1.5.1 État de contraintes particulier

Une première stratégie de correction du comportement obtenu peut consister à *relâcher* certaines des équations cinématiques (qui donnent le lien déplacement-déformations). Ce relâchement est classiquement fait sur une composante du champ de déformation  $\varepsilon_{ij}$  donnée nulle par le champ de déplacement postulé ( $u_{i,j} + u_{j,i} = 0$ ). L'argument du relâchement consiste alors à considérer non pas la composante de déformation  $\varepsilon_{ij}$  nulle, mais le *travail élémentaire* associé  $\mathcal{U}_{ij} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$  négligeable. Cela permet de supposer la contrainte correspondante  $\sigma_{ij}$  nulle.

Cette stratégie mène notamment à l'utilisation du comportement en contraintes *planes* (B.1.6) dans le cas des plaques et au comportement en contraintes *uniaxiales*  $\sigma_{ii} = E_i \varepsilon_{ii}$  dans le cas des poutres.

### C.1.5.2 Coefficients de correction

Une seconde stratégie de correction consiste à assigner un coefficient multiplicateur au comportement. Le problème devient alors de choisir ce coefficient afin que le comportement réduit résultant décrive au mieux le comportement tridimensionnel de la structure.

Le choix de ce coefficient peut être fait sur la base de solutions de références, pouvant également être obtenues à partir du modèle. Les deux résultats peuvent alors permettre, lorsqu'ils sont paramétrés par le comportement à corriger, de choisir le coefficient de correction.

Cette stratégie est par exemple adoptée dans le cas de la correction du comportement en cisaillement hors-plan du modèle de plaques épaisses homogènes. Pour cela, les fréquences de coupure des deux premiers modes d'ordre supérieur sont utilisées. Le coefficient de correction est alors exprimé comme le rapport des fréquences de coupure de référence sur les fréquences de coupure dérivées du modèle.

### C.1.5.3 Choix d'une loi de mélange

Les deux stratégies données ci-avant permettent de corriger le comportement lorsque les propriétés matériau sont homogènes dans la section caractéristique. Toutefois, la complexité supplémentaire apportée par l'introduction d'une distribution hétérogène des propriétés mécaniques dans la section oblige à chercher une façon différente de corriger le comportement.

Lorsque l'on souhaite modéliser avec peu de variables cinématiques  $\underline{\mathbf{U}}$  le comportement d'une section dont les propriétés mécaniques sont hétérogènes, il est nécessaire de déterminer un comportement *équivalent*; celui-ci est ici représenté dans la formulation de base par le tenseur opérationnel généralisé  $\underline{\underline{\Pi}}$  (équation (C.1.20)). Les composantes de celui-ci consistent en la projection de la distribution des propriétés mécaniques  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{z}})$  sur les fonctions cinématiques  $\underline{\underline{\Upsilon}}^{(n)}$ . Dans le cas où plusieurs matériaux constituent la section, le comportement généralisé obtenu est donc une combinaison linéaire des propriétés mécaniques de chaque constituant; on parle de *loi de mélange*.

En particulier, deux lois de mélange simples peuvent être évoquées, inspirées des bornes de Voigt et Reuss formulées dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation. La première de ces lois de mélange, notée  $\underline{\underline{\Pi}}^V$ , fait simplement la somme des raideurs sur la section caractéristique de la structure, soit :

$$\underline{\underline{\Pi}}^V = \int_{\underline{\mathbf{z}}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \quad (\text{C.1.30})$$



La seconde loi de mélange simple qui peut être utilisée consiste à prendre l'inverse de la somme des souplesses :

$$\boxed{\mathbf{\Pi}_{\approx}^R = \Omega^2 \left[ \int_{\underline{\mathbf{z}}} \mathbf{S}_{\approx}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \right]^{-1}} \quad (\text{C.1.31})$$

avec  $\Omega = \int_{\underline{\mathbf{z}}} 1 d\underline{\mathbf{z}}$  est la taille caractéristique de la section ( $\Omega = h$  pour un plaque et  $\Omega = S$  pour une poutre). Ces deux formulations sont utilisées dans ce travail pour la correction du comportement en cisaillement hors-plan du modèle de plaque épaisse dans le cas des structures sandwichs.

Puisque les développements de cette section ont été réalisés dans un cadre général, la forme explicite du champ de déplacement n'était pas connue. Dans les sections qui suivent, la démarche présentée ci-avant est appliquée pour dériver les différents modèles de structure élancée classiques, sur la base d'un champ de déplacement postulé.

## Modèles de plaques

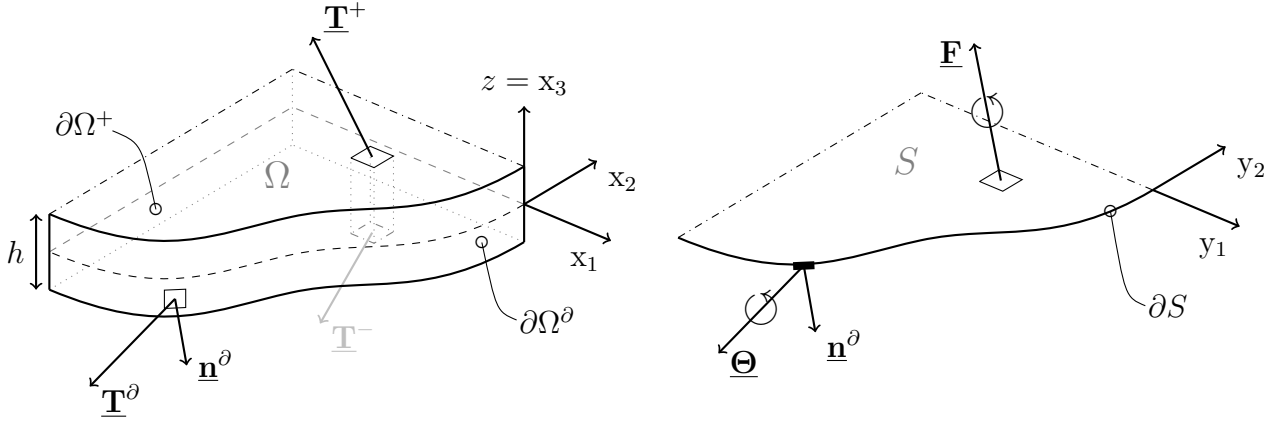


FIGURE C.1 – Formulation d'un modèle de plaque : réduction par intégration dans l'épaisseur  $h$  du domaine volumique  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  en un domaine surfacique  $S$  de contour  $\partial S$ .

La formulation d'un modèle de plaque consiste à réduire un problème tridimensionnel, caractérisé par une structure dont une des dimensions (épaisseur) est réduite par rapport aux autres, en un problème bidimensionnel (voir figure C.1). Typiquement, l'intégration du comportement, des efforts et des inerties dans l'épaisseur permet de transformer un problème exprimé sur un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  en un problème exprimé sur une surface  $S$  de contour  $\partial S$ . En général, la surface  $S$  est choisie de façon à coïncider avec le plan moyen du volume  $\Omega$ , si ce plan peut être défini (i.e symétrie de la plaque). L'intégration du problème dans l'épaisseur passe, selon la démarche présentée ci-avant, par le choix d'une cinématique décrivant la variation des champs le long d'une section caractéristique. Celle-ci permet alors d'intégrer les efforts extérieurs  $\underline{T}^\pm$  sur les surfaces supérieure et inférieure pour obtenir les chargements généralisés  $\underline{F}$ ; ainsi que d'intégrer les efforts  $\underline{T}^\partial$  sur la frontière  $\partial\Omega$  de façon à obtenir les efforts aux limites généralisés  $\underline{\Theta}$ .

## C.2 Cinématique de Hencky-Mindlin

Les paragraphes qui suivent développent la construction du modèle de plaque épaisse, selon la démarche proposée dans la section précédente.

### C.2.1 Champs mécaniques généralisés

#### C.2.1.1 Cinématique

Le champ de déplacement  $\underline{u}$  est postulé de la forme :

$$u_\alpha(z) = \Psi_\alpha + z\Phi_\alpha \quad (C.2.1)$$

$$u_3(z) = U_3 \quad (C.2.2)$$

où les déplacements généralisés sont les translations planes  $\underline{\Psi}$ , la flèche  $U_3$  et les rotations de section  $\underline{\Phi}$  de la plaque. Le vecteur  $\underline{U}$  contenant tous les déplacements généralisés (ou *degrés de*

*liberté*) du modèle s'exprime comme suit :

$${}^T\mathbf{U} = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad U_3 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2] \quad (\text{C.2.3})$$

Le modèle de plaque épaisse consiste donc en la réduction d'un domaine tridimensionnel  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  à trois degrés de liberté  $\mathbf{u}$  en un domaine bidimensionnel  $S$  de contour  $\partial S$  à cinq degrés de liberté  $\mathbf{U}$ . Le modèle est donc caractérisé par cinq équations du mouvement définies sur le domaine 2D  $S$  et cinq conditions aux limites statiques définies sur le contour  $\partial S$  de celui-ci.

### C.2.1.2 Déformations

A partir de la forme du champ de déplacement, les équations cinématiques sont appliquées pour obtenir la forme du champ de déformation :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(z) = \omega_{\alpha\beta} + z \kappa_{\alpha\beta} \quad (\text{C.2.4})$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}(z) = \gamma_{\alpha} \quad (\text{C.2.5})$$

$$\varepsilon_{33}(z) = 0 \quad (\text{C.2.6})$$

avec les tenseurs de déformation membranaire  $\underline{\omega}$ , de courbure  $\underline{\kappa}$  et de cisaillement hors-plan  $\underline{\gamma}$  de la forme :

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\Psi_{\alpha,\beta} + \Psi_{\beta,\alpha}) \quad (\text{C.2.7})$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\Phi_{\alpha,\beta} + \Phi_{\beta,\alpha}) \quad (\text{C.2.8})$$

$$\gamma_{\alpha} = \Phi_{\alpha} + U_{3,\alpha} \quad (\text{C.2.9})$$

Il s'avère que le champ de déformation tridimensionnel obtenu ne permet pas de décrire correctement le comportement d'une plaque, pour deux raisons : (i) l'effet Poisson transverse est bloqué ( $\varepsilon_{33} = 0$ ) ; (ii) les contraintes de cisaillement hors-plan  $\sigma_{\alpha 3}$  associées aux déformations  $\varepsilon_{\alpha 3}$  sont non nulles sur les faces supérieure et inférieure (pour  $\gamma_{\alpha} \neq 0$ ). Le premier aspect est traité par l'utilisation de la loi de comportement en contraintes planes, qui suppose  $\sigma_{33} = 0$  soit :

$$\varepsilon_{33}(z) = -\frac{C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\text{C.2.10})$$

Le deuxième aspect est quant à lui traité par la correction du comportement généralisé en cisaillement hors-plan du modèle ; cette correction est introduite plus loin.

### C.2.1.3 Contraintes

La forme du champ de déformation établie précédemment est injectée dans la densité de travail des efforts intérieurs comme un champ virtuel de déformation :

$$-d\mathcal{U} = \int_h \varepsilon_{ij}^*(z) \sigma_{ij}(z) dz \quad (\text{C.2.11})$$

$$= \int_h [\varepsilon_{\alpha\beta}^*(z) \sigma_{\alpha\beta}(z) + 2\varepsilon_{\alpha 3}^*(z) \sigma_{\alpha 3}(z)] dz \quad (\text{C.2.12})$$

$$= \omega_{\alpha\beta}^* N_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}^* M_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha}^* V_{\alpha} \quad (\text{C.2.13})$$

où les tenseurs des efforts membranaires  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ , des moments  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  et des efforts de cisaillement hors-plan  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  s'expriment comme suit :

$$N_{\alpha\beta} = \int_h \sigma_{\alpha\beta}(z) dz \quad (\text{C.2.14})$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_h \sigma_{\alpha\beta}(z) z dz \quad (\text{C.2.15})$$

$$V_\alpha = \int_h \sigma_{\alpha 3}(z) dz \quad (\text{C.2.16})$$

#### C.2.1.4 Efforts extérieurs

Le travail des efforts extérieurs s'écrit comme suit, en négligeant les efforts volumiques  $\underline{\mathbf{f}}$  :

$$\mathcal{W} = \int_{\partial\Omega^\pm} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{T}}^\pm d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^\partial} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{T}}^\partial d\mathbf{x} = \int_S \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{F}} d\mathbf{y} + \int_{\partial S} \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Theta}} d\ell \quad (\text{C.2.17})$$

où  $\underline{\mathbf{T}}^\pm$ ,  $\underline{\mathbf{F}}$  et  $\underline{\mathbf{\Theta}}$  sont notés sur la figure C.1. Le vecteur des efforts extérieurs généralisés  $\underline{\mathbf{F}}$ , associé aux chargements appliqués sur les faces inférieure et supérieure de la plaque, s'écrit comme suit :

$${}^T\underline{\mathbf{F}} = [p_1 \quad p_2 \quad F_3 \quad m_1 \quad m_2] \quad (\text{C.2.18})$$

$$p_\alpha = T_\alpha^+ + T_\alpha^- \quad , \quad F_3 = T_3^+ + T_3^- \quad , \quad m_\alpha = \frac{h}{2}(T_\alpha^+ - T_\alpha^-) \quad (\text{C.2.19})$$

avec  $\underline{\mathbf{p}}$  et  $F_3$  les résultantes extérieures et  $\underline{\mathbf{m}}$  les moments extérieurs. De la même façon, le vecteur des efforts aux limites généralisés  $\underline{\mathbf{\Theta}}$ , associé aux chargements appliqués sur la frontière  $\partial S$  de la plaque, s'écrit comme suit :

$${}^T\underline{\mathbf{\Theta}} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \Theta_3 \quad \mu_1 \quad \mu_2] \quad (\text{C.2.20})$$

$$\pi_\alpha = \int_h T_\alpha^\partial(z) dz \quad , \quad \Theta_3 = \int_h T_3^\partial(z) dz \quad , \quad \mu_\alpha = \int_h T_\alpha^\partial(z) z dz \quad (\text{C.2.21})$$

### C.2.2 Comportement généralisé

#### C.2.2.1 Raideurs

On reprend les expressions des contraintes généralisées  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  afin d'en extraire le comportement généralisé caractéristique du modèle :

$$N_{\alpha\beta} = \int_h Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z) \varepsilon_{\gamma\delta}(z) dz = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\delta} + B_{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (\text{C.2.22})$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_h Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z) \varepsilon_{\gamma\delta}(z) z dz = B_{\alpha\beta\gamma\delta} \omega_{\gamma\delta} + D_{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (\text{C.2.23})$$

$$V_\alpha = \int_h C_{\alpha 3\beta 3}(z) \varepsilon_{\beta 3}(z) dz = F_{\alpha\beta} \gamma_\beta \quad (\text{C.2.24})$$

où on a supposé un tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  correspondant à un matériau monoclinique ( $C_{\alpha\beta\gamma 3} = C_{\alpha 333} = 0$ , voir (B.1.16)). Le comportement s'exprime donc à partir des tenseurs du quatrième ordre  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  et du second ordre  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ , respectivement dénommés tenseurs de raideurs en membrane, de couplage, en flexion et en cisaillement hors-plan. Leurs expressions sont :

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_h Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z) dz \quad (\text{C.2.25})$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_h Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z) z dz \quad (\text{C.2.26})$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_h Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(z) z^2 dz \quad (\text{C.2.27})$$

$$F_{\alpha\beta} = \xi^2 \int_h C_{\alpha 3\gamma 3}(z) dz \quad (\text{C.2.28})$$

où le coefficient  $\xi^2$  inclut dans le comportement en cisaillement hors-plan  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  permet de corriger celui-ci de façon à prendre en compte la forme incorrecte des déformations de cisaillement hors-plan  $\underline{\underline{\gamma}}$ .

En notation de Voigt, la relation de comportement du modèle de plaque épaisse se met sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (\text{C.2.29})$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{N}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{V}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \\ & & \underline{\underline{\mathbf{F}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\omega}} \\ \underline{\underline{\kappa}} \\ \underline{\underline{\gamma}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{22} \\ 2\omega_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Cette formulation montre de façon claire le rôle de  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ , qui agit comme un couplage entre les mécanismes plans ( $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  et  $\underline{\underline{\omega}}$ ) et les mécanismes hors-plan ( $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ ,  $\underline{\underline{\kappa}}$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$ ). L'expression de  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  montre d'ailleurs que celle-ci est nulle pour une plaque dont la distribution des raideurs planes  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}(z)$  est symétrique ; dans ce cas, il n'y a pas de couplage membrane-flexion. On note également que dans le cas des plaques homogènes, les matrices  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  possèdent par construction la même forme que la matrice des raideurs en contraintes planes  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  ; si le matériau est *au moins* orthotrope dans le repère  $(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_i)$ , les termes de couplage s'annulent ( $A_{\alpha 6} = D_{\alpha 6} = 0$ ).

Finalement, le travail des efforts intérieurs peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$-d\mathcal{U} = \underline{\underline{\omega}}^* : \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{\kappa}}^* : \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{\gamma}}^* \cdot \underline{\underline{V}} \quad (\text{C.2.30})$$

$$= \underline{\underline{\omega}}^* \cdot \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{\kappa}}^* \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{\gamma}}^* \cdot \underline{\underline{V}} \quad (\text{C.2.31})$$

$$= \underline{\underline{\omega}}^* \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{\kappa}}^* \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{\omega}}^* \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\kappa}} + \underline{\underline{\kappa}}^* \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\kappa}} + \underline{\underline{\gamma}}^* \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \quad (\text{C.2.32})$$

$$= \underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{E}} \quad (\text{C.2.33})$$

Ces quatre formes différentes ont leur utilité : la première (C.2.30) conserve la structure des tenseurs et permettra de dériver la formulation forte (ou locale) des équations du mouvement ; les trois suivantes, utilisant la notation de Voigt, sont plutôt adaptées à une formulation matricielle du modèle, utile pour la discrétisation des équations intégrales.

### C.2.2.2 Inerties

En reprenant le champ cinématique  $\underline{\mathbf{u}}$  postulé pour la construction du modèle, on exprime la densité de travail de la quantité d'accélération en fonction des déplacements généralisés  $\underline{\mathbf{U}}$  :

$$d\mathcal{A} = \int_h \mathbf{u}_\alpha^*(z) \rho(z) \ddot{\mathbf{u}}_\alpha(z) dz + \int_h \mathbf{u}_3^*(z) \rho(z) \ddot{\mathbf{u}}_3(z) dz \quad (\text{C.2.34})$$

$$= \int_h (\Psi_\alpha^* + z \Phi_\alpha^*) \rho(z) (\ddot{\Psi}_\alpha + z \ddot{\Phi}_\alpha) dz + \int_h U_3^* \rho(z) \ddot{U}_3 dz \quad (\text{C.2.35})$$

$$= M \Psi_\alpha^* \ddot{\Psi}_\alpha + M U_3^* \ddot{U}_3 + I \Phi_\alpha^* \ddot{\Phi}_\alpha + J \Psi_\alpha^* \ddot{\Phi}_\alpha + J \Phi_\alpha^* \ddot{\Psi}_\alpha \quad (\text{C.2.36})$$

$$= \underline{\underline{U}}^* \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad (\text{C.2.37})$$

où on a posé :

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \int_h \rho(z) dz & J &= \int_h \rho(z) z dz & I &= \int_h \rho(z) z^2 dz \\ \underline{\underline{\Gamma}} &= \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}} \quad (\text{C.2.38})$$

$$(\text{C.2.39})$$

Une nouvelle fois, on remarque que l'inertie généralisée  $J$ , qui couple les translations planes  $\underline{\Psi}$  et les rotations de section  $\underline{\Phi}$ , est nulle si la distribution de la densité  $\rho$  est symétrique.

## C.2.3 Equilibre généralisé

### C.2.3.1 Formulation faible

Le PTV associé au choix de la cinématique de Hencky-Mindlin s'écrit comme suit :

$$\int_S \left( d\mathcal{A}(\underline{\mathbf{y}}) - d\mathcal{U}(\underline{\mathbf{y}}) \right) d\underline{\mathbf{y}} = \mathcal{W} \quad (\text{C.2.40})$$

soit, en injectant les différentes formes compactes et en omettant la dépendance en  $\underline{\mathbf{y}}$  :

$$\boxed{\int_S \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \underline{\ddot{\mathbf{U}}} \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_S \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Pi}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \, d\underline{\mathbf{y}} = \int_S \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{F}} \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_{\partial S} \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Theta}} \, d\ell} \quad (\text{C.2.41})$$

Cette formulation est notamment utilisée dans ce travail pour la construction de modèles éléments finis sur la base desquels sont formulés et résolus des problèmes inverses aux valeurs propres (voir chapitres V et VIII).

### C.2.3.2 Formulation forte

On note les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\omega}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} &= \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\Psi}}^*) : \underline{\underline{\mathbf{N}}} \\ &= \text{div}(\underline{\underline{\Psi}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}) - \underline{\underline{\Psi}}^* \cdot \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{N}}}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.42})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\kappa}}^* : \underline{\underline{\mathbf{M}}} &= \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\Phi}}^*) : \underline{\underline{\mathbf{M}}} \\ &= \text{div}(\underline{\underline{\Phi}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}) - \underline{\underline{\Phi}}^* \cdot \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.43})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\gamma}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} &= (\underline{\underline{\Phi}}^* + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{U}}_3^*)) \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} \\ &= \underline{\underline{\Phi}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} + \text{div}(\underline{\underline{U}}_3^* \underline{\underline{\mathbf{V}}}) - \underline{\underline{U}}_3^* \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.44})$$

les différents termes du principe des travaux virtuels appliqué à la cinématique de Hencky-Mindlin (C.2.40) deviennent, après application du théorème de la divergence :

$$\int_S \underline{\underline{\omega}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} \, d\underline{\mathbf{y}} = \int_{\partial S} \underline{\underline{\Psi}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial \, d\ell - \int_S \underline{\underline{\Psi}}^* \cdot \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{N}}}) \, d\underline{\mathbf{y}} \quad (\text{C.2.45})$$

$$\int_S \underline{\underline{\kappa}}^* : \underline{\underline{\mathbf{M}}} \, d\underline{\mathbf{y}} = \int_{\partial S} \underline{\underline{\Phi}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial \, d\ell - \int_S \underline{\underline{\Phi}}^* \cdot \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \, d\underline{\mathbf{y}} \quad (\text{C.2.46})$$

$$\int_S \underline{\underline{\gamma}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} \, d\underline{\mathbf{y}} = \int_S \underline{\underline{\Phi}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_{\partial S} \underline{\underline{U}}_3^* \underline{\underline{\mathbf{V}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial \, d\ell - \int_S \underline{\underline{U}}_3^* \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}) \, d\underline{\mathbf{y}} \quad (\text{C.2.47})$$

L'étape suivante consiste à choisir des champs de déplacement virtuels  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^*$  de façon à séparer les intégrales sur le domaine  $S$  de celles sur la frontière  $\partial S$ . En choisissant un champ de déplacement virtuel nul sur la frontière et quelconque sur le reste du domaine, on isole les intégrales de surface. On fait alors un choix supplémentaire, consistant à annuler toutes les composantes du déplacement virtuel généralisé sauf une.

Par exemple, si on choisit  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^*$  tel que seule  $\underline{\underline{U}}_3^*$  est non nulle sur  $S$  (cad.  $\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ ) et nulle sur  $\partial S$ , on obtient l'équation suivante à partir du PTV :

$$- \int_S \underline{\underline{U}}_3^* \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}) \, d\underline{\mathbf{y}} + \int_S M \underline{\underline{U}}_3^* \underline{\underline{\ddot{U}}}_3 \, d\underline{\mathbf{y}} = \int_S \underline{\underline{U}}_3^* \underline{\underline{F}}_3 \, d\underline{\mathbf{y}} \quad (\text{C.2.48})$$

Cette équation étant vraie pour tout choix de  $\underline{\underline{U}}_3^*$  et tout choix de domaine  $S$ , l'équation doit aussi être valable sur les intégrandes. On obtient donc une des équations du mouvement, liée au déplacement généralisé  $\underline{\underline{U}}_3$  :

$$\text{div}(\underline{\underline{\mathbf{V}}}) + \underline{\underline{F}}_3 = M \underline{\underline{\ddot{U}}}_3 \quad (\text{C.2.49})$$

En prenant maintenant un champ de déplacement virtuel  $\underline{\mathbf{U}}^*$  nul partout sauf sur le contour  $\partial S$ , où seule  $U_3^*$  prend des valeurs non nulles, le PTV devient :

$$\int_{\partial S} U_3^* \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial d\ell = \int_{\partial S} U_3^* \Theta_3 d\ell \quad (\text{C.2.50})$$

qui est vérifiée pour quelque soit  $\partial S$  et  $U_3^*$ , d'où on obtient :

$$\underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial = \Theta_3 \quad (\text{C.2.51})$$

soit la condition aux limites *statique* en cisaillement hors-plan sur la frontière  $\partial S$ . L'application de cette méthode aux 4 autres composantes du déplacement généralisé permet d'obtenir les 4 équations du mouvement et les 4 conditions aux limites restantes.

On résume ici les cinq équations locales régissant le mouvement d'une plaque modélisée à l'aide de la cinématique de Hencky-Mindlin, en notation indicielle :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha &= M \ddot{\Psi}_\alpha + J \ddot{\Phi}_\alpha \\ V_{\beta,\beta} + F_3 &= M \ddot{U}_3 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - V_\alpha + m_\alpha &= J \ddot{\Psi}_\alpha + I \ddot{\Phi}_\alpha \end{aligned}$$

(C.2.52)

Les cinq conditions aux limites *statiques* du modèle à respecter sur le contour  $\partial S$ , de normale  $\underline{\mathbf{n}}^\partial$ , sont :

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial = \underline{\underline{\pi}} \quad \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial = \Theta_3 \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^\partial = \underline{\underline{\mu}} \quad (\text{C.2.53})$$

La formulation forte et plus particulièrement les équations d'équilibres qui y sont associées sont utilisées au chapitre II pour dériver les équations de dispersion du modèle de plaque épaisse.



### C.3 Cinématique de Kirchhoff

Dans la section qui suit, est dérivé le modèle de plaque mince ou CPT pour *Classical Plate Theory* ou encore modèle de Kirchhoff. L'approche de construction du modèle est donnée par l'ajout d'une liaison cinématique dans le modèle de plaque épaisse. Elle correspond à l'hypothèse consistant à supposer que la section de la plaque reste perpendiculaire la fibre neutre lors du mouvement et se traduit par la relation suivante :

$$\underline{\Phi} = -\underline{\text{grad}}(U_3) \quad (\text{C.3.1})$$

La liaison cinématique formulée permet ainsi de passer du modèle de plaque épaisse à cinq degrés de liberté au modèle de plaque mince à trois degrés de liberté.

Le champ de déplacement tridimensionnel devient :

$$u_\alpha = \Psi_\alpha - z U_{3,\alpha} \quad (\text{C.3.2})$$

$$u_3 = U_3 \quad (\text{C.3.3})$$

et le vecteur des déplacements généralisés ou degrés de libertés est  ${}^T \underline{\mathbf{U}} = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ U_3]$ .

La démarche de construction du modèle de plaque mince est identique à celle développée pour le modèle de Hencky-Mindlin. On ne redonne donc pas la forme des différentes grandeurs généralisées, qui, lorsqu'elles ne sont pas négligées, sont identiques.

**Déformations** Le champ des déformations déformations planes est dérivé du champ de déplacement, et est donc linéaire dans l'épaisseur. De façon analogue au modèle de plaque épaisse, on postule un état de contraintes plan ( $\sigma_{33} = 0$ ), qui permet de déterminer la composante hors-plan des déformations ; une nouvelle fois, le tenseur des raideurs en contraintes planes est utilisé. Le champ de déformation tridimensionnel est donc de la forme :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(z) = \omega_{\alpha\beta} + z \kappa_{\alpha\beta} \quad , \quad \varepsilon_{\alpha 3}(z) = 0 \quad , \quad \varepsilon_{33}(z) = -\frac{C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}}(\omega_{\alpha\beta} + z \kappa_{\alpha\beta}) \quad (\text{C.3.4})$$

avec  $\underline{\omega}$  et  $\underline{\kappa}$  les tenseurs de déformation membranaire et de courbure respectivement définis en (C.2.7) et (C.2.8).

**Comportement** L'injection des déformations tridimensionnelles dans la densité de travail virtuel des efforts interne  $d\mathcal{U}$  montre que les tenseurs duaux de  $\underline{\omega}$  et  $\underline{\kappa}$  sont respectivement le tenseur des efforts membranaires  $\underline{\mathbf{N}}$  et des moments de flexion  $\underline{\mathbf{M}}$ . La relation de comportement s'exprime alors comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\Sigma} &= \underline{\Pi} \cdot \underline{\mathbf{E}} \\ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{N}} \\ \underline{\mathbf{M}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\kappa} \end{bmatrix} \end{aligned}} \quad (\text{C.3.5})$$

La densité de travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit donc sous les formes suivantes :

$$-d\mathcal{U} = \underline{\omega}^* : \underline{\mathbf{N}} + \underline{\kappa}^* : \underline{\mathbf{M}} \quad (\text{C.3.6})$$

$$= \underline{\omega}^* \cdot \underline{\mathbf{N}} + \underline{\kappa}^* \cdot \underline{\mathbf{M}} \quad (\text{C.3.7})$$

$$= \underline{\omega}^* \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\omega} + \underline{\kappa}^* \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\omega} + \underline{\omega}^* \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\kappa} + \underline{\kappa}^* \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\kappa} \quad (\text{C.3.8})$$

$$= \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{\mathbf{E}} \quad (\text{C.3.9})$$

De façon équivalente au modèle de Hencky-Mindlin, les formulations tensorielles sont préférées pour la dérivation de la formulation forte, tandis que les formes utilisant la notation de Voigt permettent, sur la base de la formulation faible, de schémas de résolution utilisant le formalisme matriciel.

**Inertie** Une nouvelle fois, les inerties généralisées associées au modèle de plaque mince sont dérivées de l'injection du champ cinématique postulé (C.3.3) dans la densité de travail de la quantité d'accélération  $d\mathcal{A}$ . Une hypothèse supplémentaire du modèle de plaque mince, très largement utilisée, consiste à négliger les termes associés aux rotations de section  $\underline{\Phi}$ . En conséquence, les inerties généralisées  $J$  et  $I$  n'entrent plus en compte ; on écrit alors :

$$\boxed{d\mathcal{A} = M \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \ddot{\underline{\mathbf{U}}}} \quad (\text{C.3.10})$$

Seules les translations de section  $\underline{\mathbf{U}}$  ont donc un rôle inertiel.

**Efforts extérieurs** L'expression du travail virtuel des efforts extérieurs associée au modèle de plaque épaisse (C.2.17) est réécrite en incluant la liaison cinématique :

$$\mathcal{W} = \int_S \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{F}} dS + \int_{\partial S} \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Theta}} d\ell \quad (\text{C.3.11})$$

$$\begin{aligned} &= \int_S \left[ \underline{\Psi}^* \cdot \underline{\mathbf{p}} + U_3^* \cdot F_3 - \underline{\text{grad}}(U_3^*) \cdot \underline{\mathbf{m}} \right] d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\partial S} \left[ \underline{\Psi}^* \cdot \underline{\pi} + U_3^* \cdot \Theta_3 - \underline{\text{grad}}(U_3^*) \cdot \underline{\mu} \right] d\ell \end{aligned} \quad (\text{C.3.12})$$

où  $\underline{\mathbf{F}}$  et  $\underline{\mathbf{\Theta}}$  sont respectivement définis en (C.2.18) et (C.2.20).

**Formulation Faible** On réécrit le principe des travaux virtuels (C.2.40) en intégrant les formes des différents travaux virtuels associés au modèle de Kirchhoff, ce qui permet d'obtenir la formulation faible des équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \int_S M \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \ddot{\underline{\mathbf{U}}} d\mathbf{y} + \int_S \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{\mathbf{E}} d\mathbf{y} &= \int_S \left[ \underline{\Psi}^* \cdot \underline{\mathbf{p}} + U_3^* \cdot F_3 - \underline{\text{grad}}(U_3^*) \cdot \underline{\mathbf{m}} \right] d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\partial S} \left[ \underline{\Psi}^* \cdot \underline{\pi} + U_3^* \cdot \Theta_3 - \underline{\text{grad}}(U_3^*) \cdot \underline{\mu} \right] d\ell \end{aligned} \quad (\text{C.3.13})$$

**Formulation forte** Comme dans le cas du modèle de Hencky-Mindlin, les équations fortes du mouvement sont dérivées par application du théorème de la divergence sur la formulation faible, puis choix de champs de déplacement virtuels permettant d'isoler les différentes intégrales. Dans le cadre du modèle de plaque mince, l'équation portant sur les moments est un peu modifiée afin de mettre en relation les efforts externes hors-plan  $F_3$  avec les moments internes  $\underline{\mathbf{M}}$ . En

réécrivant le terme du travail virtuel des efforts intérieurs associé aux moments  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  :

$$\int_S \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{M}}} \, d\mathbf{y} = - \int_S \underline{\underline{\mathbf{grad}}}(\underline{\underline{\mathbf{grad}}}(\mathbf{U}_3^*)) : \underline{\underline{\mathbf{M}}} \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.3.14})$$

$$= \int_S \left[ \operatorname{div}(\mathbf{U}_3^* \underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}})) - \mathbf{U}_3^* \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}})) - \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{grad}}}(\mathbf{U}_3^*) \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}) \right] d\mathbf{y} \quad (\text{C.3.15})$$

$$= \int_{\partial S} \mathbf{U}_3^* \underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^\partial \, d\ell - \int_{\partial S} \underline{\underline{\mathbf{grad}}}(\mathbf{U}_3^*) \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^\partial \, d\ell - \int_S \mathbf{U}_3^* \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}})) \, d\mathbf{y} \quad (\text{C.3.16})$$

on obtient, après injection dans le principe des travaux virtuels et choix des champs de déplacements virtuels appropriés, les équations du mouvement et les conditions aux limites associées aux moments. Trois équations du mouvement sont obtenues :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{N}_{\alpha\beta,\beta} + \mathbf{p}_\alpha &= M \ddot{\Psi}_\alpha \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta,\alpha\beta} &= M \ddot{\mathbf{U}}_3 \end{aligned}} \quad (\text{C.3.17})$$

ainsi que cinq équations aux limites statiques :

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^\partial = \underline{\underline{\boldsymbol{\pi}}} \quad , \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^\partial = \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} \quad , \quad \underline{\underline{\mathbf{div}}}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}^\partial = \theta_3 \quad (\text{C.3.18})$$

Les équations d'équilibre ci dessus, associées à la formulation forte des équations du mouvement des plaques minces, sont utilisées au chapitre II pour dériver les équations de dispersion du modèle de Kirchhoff.

## C.4 Cinématique de Timoshenko

Dans les paragraphes qui suivent est dérivé, sur la base de la démarche de formulation d'un modèle proposée au début de cette annexe, le modèle de poutre épaisse de Timoshenko.

### C.4.1 Champs mécaniques généralisés

#### C.4.1.1 Cinématique

Le champ de déplacement est postulé sur la section  $S$  de tel façon que celle-ci, plane à l'état naturel, reste plane au cours du mouvement. Les sections sont donc autorisées à se translater de  $U_3$  dans la direction de l'axe neutre, de  $\underline{\Psi}$  dans les deux directions du plan de la section et à tourner selon les angles  $\underline{\Phi}$  autour des trois axes ( $\underline{e}_i$ ). Le champ de déplacement sur la section est en conséquence postulé sous la forme linéarisée suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1(\underline{z}) \\ u_2(\underline{z}) \\ u_3(\underline{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.4.1)$$

$$\begin{cases} u_\alpha = \Psi_\alpha + (-1)^\alpha z_{3-\alpha} \Phi_3 \\ u_3 = U_3 + (-1)^\beta z_\beta \Phi_{3-\beta} \end{cases} \quad (C.4.2)$$

où on a omis la dépendance de toutes les variables en fonction de l'abscisse  $y$ . Le vecteur des déplacements généralisés ou degrés de liberté du modèle de Timoshenko  $\underline{U}$  est donc :

$${}^T \underline{U} = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad U_3 \quad \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \quad (C.4.3)$$

#### C.4.1.2 Déformations

L'application des équations cinématiques (A.1.3) sur le champ de déplacement postulé (C.4.2) mène à l'expression du champ de déformation tridimensionnel :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{33} = \epsilon + (-1)^{\beta+1} z_{3-\beta} \kappa_\beta \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha + (-1)^\alpha z_{3-\alpha} \nu \end{cases} \quad (C.4.4)$$

où  $\epsilon$ ,  $\underline{\kappa}$ ,  $\underline{\gamma}$  et  $\nu$  sont respectivement les déformations généralisées de traction, de courbure, de cisaillement transverse et de torsion. Ils s'expriment en fonction des degrés du liberté du modèle comme suit :

$$\begin{cases} \epsilon = U_{3,3} \\ \kappa_\alpha = \Phi_{\alpha,3} \\ \gamma_\alpha = \Psi_{\alpha,3} + (-1)^\alpha \Phi_{3-\alpha} \\ \nu = \Phi_{3,3} \end{cases} \quad (C.4.5)$$

Le champ cinématique postulé interdit l'effet Poisson : les déformations  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$  sont nulles. Ce choix de  $\underline{u}$  est en fait très raidissant ; pour pallier à ce problème, on relâche dans la suite certaines relations cinématiques, comme dans le cas de la formulation des modèles de plaque. De façon équivalente, la forme affine des déformations de cisaillement hors-plan  $\varepsilon_{\alpha 3}$  n'est pas assez riche pour décrire le comportement de l'objet tridimensionnel modélisé comme une poutre. Des coefficients  $\xi_t$  et  $\xi_s$  seront donc, comme dans le cas des plaques épaisses, intégrés aux comportements généralisés en torsion et en cisaillement transverse de la poutre.

### C.4.1.3 Contraintes

Au lieu de considérer des composantes de déformation  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  nulles, on néglige le travail des efforts intérieurs associé  $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ . Cela, associé aux conditions aux limites statiques sur le contour de la section  $\partial S$ , permet de considérer un état de contrainte uniaxial, c'est à dire  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ . En considérant de plus que les matériaux constitutifs de la section sont orthotropes (équation (B.1.17) soit  $S_{\alpha\beta\gamma 3} = S_{ii12} = S_{1323} = 0$ ), on peut écrire, en fonction du tenseur local des souplesses  $\mathbf{S}_{\approx}$  :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta 33} \sigma_{33} \\ \varepsilon_{\alpha 3} = S_{\alpha 3 \alpha 3} \sigma_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{33} = S_{33 33} \sigma_{33} \end{cases} \quad (\text{C.4.6})$$

ce qui permet, en utilisant l'expression du tenseur des souplesses (équation (B.1.27)) de donner la relation liant les contraintes et les déformations hors-plan, et celle donnant les déformations planes en fonction de la déformation hors-plan en fonction des constantes de l'ingénieur (où le plan considéré est celui de la section de la poutre) :

$$\begin{cases} \sigma_{33} = E_3 \varepsilon_{33} \\ \sigma_{\alpha 3} = G_{\alpha 3} \varepsilon_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{\alpha\alpha} = -\nu_{3\alpha} \varepsilon_{33} \end{cases} \quad (\text{C.4.7})$$

La densité de travail virtuel des efforts intérieurs  $d\mathcal{U}$  s'écrit comme suit :

$$-d\mathcal{U} = \int_S [\varepsilon_{33}^*(\underline{\mathbf{z}}) \sigma_{33}(\underline{\mathbf{z}}) + 2\varepsilon_{\alpha 3}^*(\underline{\mathbf{z}}) \sigma_{\alpha 3}(\underline{\mathbf{z}})] d\underline{\mathbf{z}} = N_3 \epsilon + \kappa_\alpha M_\alpha + V_\alpha \gamma_\alpha + M_3 \nu \quad (\text{C.4.8})$$

ou  $N_3$ ,  $\underline{\mathbf{M}}$ ,  $\underline{\mathbf{V}}$  et  $M_3$  sont respectivement l'effort de traction généralisé, les moments généralisés, les efforts de cisaillement généralisés et le couple de torsion généralisé ; leur expressions sont :

$$\begin{aligned} N_3 &= \int_S \sigma_{33}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\ M_\alpha &= \int_S (-1)^{\alpha+1} z_{3-\alpha} \sigma_{33}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\ V_\alpha &= \int_S \sigma_{\alpha 3}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\ M_3 &= \int_S (-1)^\beta z_{3-\beta} \sigma_{\beta 3}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{C.4.9})$$

### C.4.1.4 Efforts extérieurs

Le travail virtuel des efforts extérieurs  $\mathcal{W}$  est réécrit en injectant le champ cinématique du modèle de Timoshenko et en négligeant les forces volumique  $\underline{\mathbf{f}}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{T}} d\underline{\mathbf{x}} \\ &= \underline{\mathbf{U}}^*(y=0) \cdot \underline{\boldsymbol{\Theta}}^0 + \underline{\mathbf{U}}^*(y=L) \cdot \underline{\boldsymbol{\Theta}}^L + \int_L \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{F}} dy \end{aligned} \quad (\text{C.4.10})$$

ou les chargements linéiques  $\underline{\mathbf{F}}$  sont de la forme :

$${}^T \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & F_3 & m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4.11})$$

$$p_\alpha = \int_{\partial S} T_\alpha^\partial(\underline{\mathbf{z}}) d\ell$$

$$F_3 = \int_{\partial S} T_3^\partial(\underline{\mathbf{z}}) d\ell$$

$$m_\alpha = \int_{\partial S} (-1)^{\alpha+1} z_{3-\alpha} T_3^\partial(\underline{\mathbf{z}}) d\ell$$

$$m_3 = \int_{\partial S} (-1)^\alpha z_{3-\alpha} T_\alpha^\partial(\underline{\mathbf{z}}) d\ell$$

et les efforts aux limites  $\underline{\Theta}^i$  sont tels que :

$${}^T \underline{\Theta}^i = \begin{bmatrix} \pi_1^i & \pi_2^i & \Theta_3^i & \mu_1^i & \mu_2^i & \mu_3^i \end{bmatrix} \quad (\text{C.4.12})$$

$$\pi_\alpha^i = \int_S T_\alpha^i(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}}$$

$$\Theta_3^i = \int_S T_3^i(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}}$$

$$\mu_\alpha^i = \int_S (-1)^{\alpha+1} z_{3-\alpha} T_3^i(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}}$$

$$\mu_3^i = \int_S (-1)^\alpha z_{3-\alpha} T_\alpha^i(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}}$$

## C.4.2 Comportement généralisé

### C.4.2.1 Raideurs

Le comportement en raideur généralisé du modèle de Timoshenko est dérivé de l'injection des déformations généralisées (C.4.5) dans l'expression des efforts généralisés (C.4.9) en considérant le comportement des matériaux constitutifs orthotrope (B.1.17) :

$$N_3 = \int_S E_3(\underline{\mathbf{z}}) \left[ \epsilon + (-1)^{\beta+1} z_{3-\beta} \kappa_\beta \right] d\underline{\mathbf{z}} = A\epsilon + B_\beta \kappa_\beta \quad (\text{C.4.13})$$

$$M_\alpha = \int_S E_3(\underline{\mathbf{z}}) (-1)^{\alpha+1} z_{3-\alpha} \left[ \epsilon + (-1)^{\beta+1} z_{3-\beta} \kappa_\beta \right] d\underline{\mathbf{z}} = B_\alpha \epsilon + D_{\alpha\beta} \kappa_\beta \quad (\text{C.4.14})$$

$$V_\alpha = \int_S C_{\alpha 3 \beta 3}(\underline{\mathbf{z}}) \left[ \gamma_\beta + (-1)^\beta z_{3-\beta} v \right] d\underline{\mathbf{z}} = F_{\alpha\beta} \gamma_\beta + S_\alpha v \quad (\text{C.4.15})$$

$$M_3 = \int_S C_{\alpha 3 \beta 3}(\underline{\mathbf{z}}) (-1)^\alpha z_{3-\alpha} \left[ \gamma_\beta + (-1)^\beta z_{3-\beta} v \right] d\underline{\mathbf{z}} = S_\beta \gamma_\beta + K v \quad (\text{C.4.16})$$

où les comportements généralisés  $A$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $\underline{\mathbf{F}}$ ,  $\underline{\mathbf{S}}$  et  $K$  sont de la forme :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_S E_3(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\
 B_\alpha &= \int_S (-1)^{\alpha+1} z_{3-\alpha} E_3(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\
 D_{\alpha\beta} &= \int_S (-1)^{\alpha+\beta} z_{3-\alpha} z_{3-\beta} E_3(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\
 F_{\alpha\alpha} &= \xi_s^2 \int_S G_{\alpha 3}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\
 S_\alpha &= \xi_s \xi_t \int_S (-1)^\alpha z_{3-\alpha} G_{\alpha 3}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}} \\
 K &= \xi_t^2 \int_S z_{3-\alpha}^2 G_{\alpha 3}(\underline{\mathbf{z}}) d\underline{\mathbf{z}}
 \end{aligned} \tag{C.4.17}$$

où les coefficients de correction en torsion  $\xi_t$  et en cisaillement transverse  $\xi_s$  ont été intégrés pour prendre en compte le biais dû à la mauvaise description des composantes de déformation tridimensionnelle en cisaillement par la cinématique du modèle. La loi de comportement peut finalement se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{E}} \tag{C.4.18}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \\ V_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{11} & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 & S_2 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ v \end{bmatrix}$$

où l'on note que le comportement orthotrope des matériaux permet de découpler le comportement en cisaillement ( $\underline{\mathbf{F}}$ ,  $\underline{\mathbf{S}}$  et  $K$ ) du comportement axial ( $A$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$  et  $\underline{\mathbf{D}}$ ). De plus, lorsque la distribution des propriétés de raideur  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}(\underline{\mathbf{z}})$  possède deux plans de symétrie centrés sur l'axe neutre  $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{0}}$ , tous les termes de couplage ( $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $D_{12}$  et  $\underline{\mathbf{S}}$ ) s'annulent ; la matrice  $\underline{\underline{\Pi}}$  devient alors diagonale.

Dans le cas général, l'expression de la densité de travail virtuel des efforts intérieurs peut prendre les formes suivantes :

$$-d\mathcal{U} = \epsilon^* N + \underline{\underline{\kappa}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}} + \underline{\underline{\gamma}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} + v^* M_3 \tag{C.4.19}$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{E}}}^* \cdot \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \tag{C.4.20}$$

#### C.4.2.2 Inerties

Afin d'obtenir les inerties généralisées du modèle de poutre épaisse, on injecte le champ de déplacement tridimensionnel postulé (C.3.3) dans la densité de travail de la quantité d'accélé-

ration :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{A} &= \int_S \rho(\mathbf{z}) \mathbf{u}^*(\mathbf{z}) \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\
 &= M \Psi_\alpha^* \ddot{\Psi}_\alpha + J_\alpha (\Phi_3^* \ddot{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^* \ddot{\Phi}_3) + I_3 \Phi_3^* \ddot{\Phi}_3 \\
 &\quad + M U_3^* \ddot{U}_3 - J_\alpha (\Phi_\alpha^* \ddot{U}_3 + U_3^* \ddot{\Phi}_\alpha) + I_{\alpha\beta} \Phi_\alpha^* \ddot{\Phi}_\beta \\
 &= \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \underline{\ddot{\mathbf{U}}}
 \end{aligned} \tag{C.4.21}$$

où on a posé les inerties généralisées suivantes :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_S \rho(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\
 J_\alpha &= \int_S (-1)^\alpha z_{3-\alpha} \rho(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\
 I_{\alpha\beta} &= \int_S (-1)^{\alpha+\beta} z_{3-\alpha} z_{3-\beta} \rho(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\
 I_3 &= I_{11} + I_{22} \\
 \underline{\mathbf{\Gamma}} &= \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & M & -J_1 & -J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & I_{11} & I_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -J_2 & I_{12} & I_{22} & 0 \\ J_1 & J_2 & 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.4.22}$$

Il est intéressant de remarquer que les termes de couplage  $\mathbf{J}$  et  $I_{12}$  s'annulent si la distribution des densités  $\rho(\mathbf{z})$  n'est pas symétrique par rapport à l'axe neutre  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ .

### C.4.3 Equilibre généralisé

#### C.4.3.1 Formulation faible

La dérivation de la formulation faible se fait à partir du principe des travaux virtuels ; l'équation du mouvement obtenue est alors de la forme :

$$\int_L \underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Pi}} \cdot \underline{\mathbf{E}} dy + \int_L \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \underline{\ddot{\mathbf{U}}} dy = \underline{\mathbf{U}}^*(y=0) \cdot \underline{\mathbf{\Theta}}^0 + \underline{\mathbf{U}}^*(y=L) \cdot \underline{\mathbf{\Theta}}^L + \int_L \underline{\mathbf{U}}^* \cdot \underline{\mathbf{F}} dy \tag{C.4.23}$$

Cette forme permet la résolution de problèmes incluant des poutres par une méthode de type Ritz ou éléments finis.

#### C.4.3.2 Formulation forte

Comme dans le cas des plaques épaisses, la dérivation des équations locales du mouvement passe par l'application du théorème de la divergence (ou ici par intégration par parties) sur la forme faible des équations d'équilibre (C.4.23). En développant pour chaque terme du travail



des efforts intérieurs  $\mathcal{U}$  :

$$\int_L \epsilon^* N \, dy = \int_L U_{3,3}^* N \, dy = [U_3^* N]_0^L - \int_L U_3^* N_{,3} \, dy \quad (\text{C.4.24})$$

$$\int_L \kappa_\alpha^* M_\alpha \, dy = \int_L \Phi_{\alpha,3}^* M_\alpha \, dy = [\Phi_\alpha^* M_\alpha]_0^L - \int_L \Phi_\alpha^* M_{\alpha,3} \, dy \quad (\text{C.4.25})$$

$$\begin{aligned} \int_L \gamma_\alpha^* V_\alpha \, dy &= \int_L (\Psi_{\alpha,3}^* + (-1)^\alpha \Phi_{3-\alpha}^*) V_\alpha \, dy \\ &= [\Psi_\alpha^* V_\alpha]_0^L - \int_L \Psi_\alpha^* V_{\alpha,3} \, dy + \int_L (-1)^\alpha \Phi_{3-\alpha}^* V_\alpha \, dy \end{aligned} \quad (\text{C.4.26})$$

$$\int_L v^* M_3 \, dy = \int_L \Phi_{3,3}^* M_3 \, dy = [\Phi_3^* M_3]_0^L - \int_L \Phi_3^* M_{3,3} \, dy \quad (\text{C.4.27})$$

et en choisissant les bons champs de déplacement virtuel tests (annulation sur le domaine  $L$ , annulation aux extrémités), les équations régissant le comportement d'une poutre épaisse selon le modèle de Timoshenko sont obtenues.

Pour résumer, six équations du mouvement sont obtenues :

$$\begin{aligned} V_{\alpha,3} + p_\alpha &= M \ddot{\Psi}_\alpha + J_\alpha \ddot{\Phi}_3 \\ N_{,3} + F_3 &= M \ddot{U}_3 - J_\beta \ddot{\Phi}_\beta \\ M_{\alpha,3} + (-1)^\alpha V_{3-\alpha} + m_\alpha &= I_{\alpha\beta} \ddot{\Phi}_\beta - J_\alpha \ddot{U}_3 \\ M_{3,3} + m_3 &= I_3 \ddot{\Phi}_3 + J_\beta \ddot{\Psi}_\beta \end{aligned}$$

(C.4.28)

ainsi que douze conditions aux limites statiques, pour  $y = 0$  ou  $y = L$  :

$$N(y) = \Theta_3^y \quad , \quad M_\alpha(y) = \underline{\mu} \alpha^y \quad , \quad \underline{\mathbf{V}}(y) = \underline{\pi}^y \quad , \quad M_3(y) = \mu_3^y \quad (\text{C.4.29})$$

Les équations d'équilibre généralisées locales sont utilisées au chapitre II pour dériver les équations de dispersion associées au modèle de Timoshenko.

# Annexe D

## Perturbation des opérateurs matriciels

On donne ici quelques résultats sur la perturbation des opérations matricielles utilisées dans ce manuscrit. Ces résultats fournissent la base pour le calcul de la propagation des incertitudes dans les différents algorithmes de résolution inverse.

De façon générale, on note l'objet non perturbé  $\bullet$ , sa version perturbée  $\tilde{\bullet}$  ainsi que la perturbation liée  $\Delta\bullet$  tels que :

$$\tilde{\bullet} = \bullet + \Delta\bullet \quad (\text{D.0.1})$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on développe dans ce qui suit au premier ordre seulement le gradient de l'opérateur  $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{X})$  :

$$\Delta\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{X}}) - \mathbf{Y} = \nabla\mathcal{F}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} + \mathcal{O}(\|\Delta\mathbf{X}\|^2) \simeq \nabla\mathcal{F}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} \quad (\text{D.0.2})$$

où  $\|\bullet\|$  est une norme sous-multiplicative quelconque, c'est à dire que :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \quad (\text{D.0.3})$$

Ainsi, les effets du second ordre par rapport aux perturbations sont négligés.

### D.1 Inverse

Soit  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1}$ . On a alors :

$$\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} = (\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X})^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbf{X}^{-1}\Delta\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^{-1} \quad (\text{D.1.1})$$

En utilisant le développement de Taylor de  $(\mathbb{I} + \mathbf{X}^{-1}\Delta\mathbf{X})^{-1}$  au premier ordre, on obtient finalement :

$$\boxed{\Delta(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}^{-1}\Delta\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}} \quad (\text{D.1.2})$$

### D.2 Pseudo-inverse

Soit  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^\mathbf{H}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\mathbf{H}$ . On a alors :

$$\Delta\mathbf{Y} = \Delta\left((\mathbf{X}^\mathbf{H}\mathbf{X})^{-1}\right) \mathbf{X}^\mathbf{H} + (\mathbf{X}^\mathbf{H}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\mathbf{H} \Delta\mathbf{X} \quad (\text{D.2.1})$$

En utilisant le résultat précédent (D.1.1) :

$$\Delta \mathbf{Y} = \left( {}^H \mathbf{X} \mathbf{X} \right)^{-1} {}^H \Delta \mathbf{X} - \left( {}^H \mathbf{X} \mathbf{X} \right)^{-1} \left( {}^H \Delta \mathbf{X} \mathbf{X} + {}^H \mathbf{X} \Delta \mathbf{X} \right) \left( {}^H \mathbf{X} \mathbf{X} \right)^{-1} {}^H \mathbf{X} \quad (\text{D.2.2})$$

qui se simplifie finalement :

$$\Delta \left( \mathbf{X}^\dagger \right) = \left( {}^H \mathbf{X} \mathbf{X} \right)^{-1} {}^H \Delta \mathbf{X} \left( \mathbb{I} - \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \right) - \mathbf{X}^\dagger \Delta \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \quad (\text{D.2.3})$$

On remarque que si  $\mathbf{X}$  est carrée, alors  $\mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X} \mathbf{X}^{-1} = \mathbb{I}$  et on retrouve bien le résultat (D.1.1).

### D.3 Moindres carrés

Soit  $\mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}$ , où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est l'erreur sur les mesures  $\mathbf{B}$ . L'estimation aux moindres carrés de  $\mathbf{Y}$  est donnée par  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}$ . Par chaînage, on a :

$$\Delta \mathbf{Y} = \Delta \left( \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{B} + \mathbf{A}^\dagger \Delta \mathbf{B} \quad (\text{D.3.1})$$

En injectant (D.2.3) dans (D.3.1), on obtient :

$$\Delta \left( \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} \right) = \left( {}^H \mathbf{A} \mathbf{A} \right)^{-1} {}^H \Delta \mathbf{A} \left( \mathbb{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{B} - \mathbf{A}^\dagger \Delta \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} + \mathbf{A}^\dagger \Delta \mathbf{B} \quad (\text{D.3.2})$$

En remarquant que  $\left( \mathbb{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \right) \mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{Y} = \boldsymbol{\varepsilon}$ , on observe que premier terme de (D.3.2) est du second ordre. Finalement, au premier ordre :

$$\Delta \left( \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} \right) = \mathbf{A}^\dagger \left( \Delta \mathbf{B} - \Delta \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} \right) \quad (\text{D.3.3})$$

### D.4 Valeurs propres

Soit  $\mathbf{X}$  une matrice de taille  $N$  et de rang  $R \leq N$  acceptant la décomposition en valeurs propres suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{D.4.1})$$

où  $\mathbf{Y} = \text{diag}(\boldsymbol{\Lambda})$  contient les  $N$  valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{X}$ . La perturbation de  $\mathbf{Y}$  peut alors s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\Lambda} &= \Delta \left( \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{T} \right) \\ &= -\mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{X} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} \Delta \mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{X} \mathbf{T} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{T} \boldsymbol{\Lambda} \end{aligned} \quad (\text{D.4.2})$$

dont des termes extra-diagonaux peuvent apparaître. Si on s'intéresse aux valeurs propres uniquement, on utilise  $\lambda_i = {}^\top \mathbf{b}_i \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{b}_i$ , avec  $\mathbf{b}_i = {}^\top [\mathbf{0}^{i-1} \ 1 \ \mathbf{0}^{N-i}]$  le  $i^{\text{ième}}$  vecteur unité. On pose alors :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \ \cdots \ \mathbf{t}_N] \quad , \quad \mathbf{T}^{-1} = {}^\top [\boldsymbol{\tau}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{\tau}_N] \quad (\text{D.4.3})$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\Delta \lambda_i = {}^\top \boldsymbol{\tau}_i \Delta \mathbf{X} \mathbf{t}_i + {}^\top \mathbf{b}_i \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \Delta \mathbf{T} \mathbf{b}_i - {}^\top \mathbf{b}_i \Delta \mathbf{T} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{b}_i \quad (\text{D.4.4})$$

Sachant que  ${}^T\mathbf{b}_i\mathbf{\Lambda} = {}^T\mathbf{b}_i\lambda_i$  et  $\mathbf{\Lambda}\mathbf{b}_i = \lambda_i\mathbf{b}_i$ , les deux termes liés à  $\Delta\mathbf{T}$  s'annulent et la perturbation des valeurs propres s'écrit finalement :

$$\boxed{\Delta\lambda_i = {}^T\boldsymbol{\tau}_i\Delta\mathbf{X}\mathbf{t}_i \quad , \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \quad (\text{D.4.5})$$

On cherche souvent, dans le cadre de ce manuscrit, à décomposer en valeurs propres une matrice hermitienne  $\mathbf{X}_h = {}^H\mathbf{X}_h$ , soit :

$$\mathbf{X}_h = \mathbf{U}\boldsymbol{\Omega}{}^H\mathbf{U} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Omega} = {}^H\mathbf{U}\mathbf{X}_h\mathbf{U} \quad (\text{D.4.6})$$

où  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\boldsymbol{\omega})$  et  $\mathbf{U}$  est une matrice orthogonale :

$${}^H\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (\text{D.4.7})$$

d'où  $\mathbf{U}^{-1} = {}^H\mathbf{U}$ . En substituant dans (D.4.5), avec  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N]$  :

$$\boxed{\Delta\omega_i = {}^H\mathbf{u}_i\Delta\mathbf{X}_h\mathbf{u}_i} \quad (\text{D.4.8})$$

Au premier ordre, les valeurs propres d'une matrice ne sont donc pas perturbées par la rotation de ses vecteurs propres.

## D.5 Valeurs propres généralisées

On généralise (D.4.8) aux valeurs propres généralisées  $\boldsymbol{\lambda}$ , définies comme suit :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{u}_i \quad (\text{D.5.1})$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont deux matrices hermitiennes. La perturbation au premier ordre s'exprime ainsi :

$$\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\lambda_i\mathbf{M}\mathbf{u}_i + \lambda_i\Delta\mathbf{M}\mathbf{u}_i + \lambda_i\mathbf{M}\Delta\mathbf{u}_i \quad (\text{D.5.2})$$

L'astuce consiste alors à projeter la perturbation des vecteurs propres sur l'espace des vecteurs propres non perturbés :

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{E} \quad (\text{D.5.3})$$

avec  $\|\mathbf{E}\|$  petit. En utilisant cette projection, (D.5.2) devient :

$$\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_k\mathbf{E}_{ki} = \Delta\lambda_i\mathbf{M}\mathbf{u}_i + \lambda_i\Delta\mathbf{M}\mathbf{u}_i + \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{u}_k\mathbf{E}_{ki} \quad (\text{D.5.4})$$

On multiplie alors à gauche par  ${}^H\mathbf{u}_i$  ; en utilisant  ${}^H\mathbf{u}_i\mathbf{K}\mathbf{u}_j = {}^H\mathbf{u}_i\mathbf{M}\mathbf{u}_j = 0$  pour  $j \neq i$  :

$${}^H\mathbf{u}_i(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M})\mathbf{u}_i\mathbf{E}_{ii} = {}^H\mathbf{u}_i\Delta\lambda_i\mathbf{M}\mathbf{u}_i + {}^H\mathbf{u}_i\lambda_i\Delta\mathbf{M}\mathbf{u}_i - {}^H\mathbf{u}_i\Delta\mathbf{K}\mathbf{u}_i \quad (\text{D.5.5})$$

Le terme de gauche de cette dernière expression s'annulant par définition (D.5.1), on obtient finalement la perturbation des valeurs propres généralisées :

$$\boxed{\Delta\lambda_i = \frac{{}^H\mathbf{u}_i(\Delta\mathbf{K} - \lambda_i\Delta\mathbf{M})\mathbf{u}_i}{{}^H\mathbf{u}_i\mathbf{M}\mathbf{u}_i}} \quad (\text{D.5.6})$$

On retrouve bien le résultat (D.4.8) en posant  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ . De nouveau, les valeurs propres généralisées ne sont pas perturbées par la rotation des vecteurs propres.

## D.6 Vecteurs propres généralisés

On s'intéresse ici à la perturbation des vecteurs propres généralisés liés à la définition (D.5.1). On utilise (D.5.3), où les  $E_{ij}$  sont à déterminer. En multipliant (D.5.4) par  ${}^H\mathbf{u}_k$ , on a :

$${}^H\mathbf{u}_k \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_i + {}^H\mathbf{u}_k \mathbf{K} \mathbf{u}_k E_{ki} = {}^H\mathbf{u}_k \lambda_i \Delta \mathbf{M} \mathbf{u}_i + {}^H\mathbf{u}_k \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{u}_k E_{ki} \quad (\text{D.6.1})$$

En utilisant  $\mathbf{K} \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{M} \mathbf{u}_k$ , on obtient les termes extra-diagonaux de  $\mathbf{E}$  :

$$E_{ij} = \frac{{}^H\mathbf{u}_i (\Delta \mathbf{K} - \lambda_j \Delta \mathbf{M}) \mathbf{u}_j}{(\lambda_j - \lambda_i) {}^H\mathbf{u}_i \mathbf{M} \mathbf{u}_i} \quad (\text{D.6.2})$$

Enfin, on utilise la propriété d'orthogonalité de l'espace propre perturbé :

$$\widetilde{\mathbf{U}}^{-1} = {}^H\widetilde{\mathbf{U}} \Leftrightarrow (\mathbf{E} + \mathbb{I})^{-1} = {}^H(\mathbf{E} + \mathbb{I}) \Leftrightarrow {}^H\mathbf{E} \simeq -\mathbf{E} \quad (\text{D.6.3})$$

Au premier ordre,  $\mathbf{E}$  est donc anti-hermitienne, c'est à dire que  $E_{ii} \simeq 0$ . La perturbation d'un vecteur propre est donc, au premier ordre, orthogonale à celui-ci. On a donc finalement :

$$\Delta \mathbf{u}_i = \sum_{k \neq i} \frac{{}^H\mathbf{u}_k (\Delta \mathbf{K} - \lambda_i \Delta \mathbf{M}) \mathbf{u}_i}{(\lambda_i - \lambda_k) {}^H\mathbf{u}_i \mathbf{M} \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_k \quad (\text{D.6.4})$$

Ce développement n'est cependant valable que lorsque les valeurs propres généralisées  $\boldsymbol{\lambda}$  sont bien distinctes. Dans le cas contraire, il faudrait prendre en compte des termes d'ordre plus élevés.

## D.7 Décomposition en sous-espaces

Soit la matrice rectangulaire  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{K \times M}$  de rang  $R \leq N = \min(K, M)$  admettant la décomposition en sous-espaces suivante :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^H\mathbf{V} \\ {}^H\mathbf{V}_\perp \end{bmatrix} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} {}^H\mathbf{V} + \mathbf{U}_\perp \boldsymbol{\Sigma}_\perp {}^H\mathbf{V}_\perp \quad (\text{D.7.1})$$

avec  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})$  où  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^R$  contient les valeurs principales liées au sous espace principal de gauche  $\mathbf{U}$  et de droite  $\mathbf{V}$ , et  $\boldsymbol{\Sigma}_\perp = \text{diag}(\mathbf{0}^{N-R})$  contient les valeurs singulières liées au sous-espace orthogonal  $\mathbf{U}_\perp$  et  $\mathbf{V}_\perp$ . Ce dernier sous-espace, lié à des valeurs singulières nulles, est formé de vecteurs arbitrairement choisis dans l'espace des vecteurs orthogonaux à  $\mathbf{X}$ . Les vecteurs de ces sous-espaces respectent les propriétés suivantes :

$${}^H\mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbb{I} \quad (\text{D.7.2})$$

$${}^H\mathbf{V} \mathbf{V} = \mathbb{I} \quad (\text{D.7.3})$$

$${}^H\mathbf{U}_\perp \mathbf{U}_\perp = \mathbb{I} \quad (\text{D.7.4})$$

$${}^H\mathbf{V}_\perp \mathbf{V}_\perp = \mathbb{I} \quad (\text{D.7.5})$$

$${}^H\mathbf{U}_\perp \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}_\perp = \mathbf{0} \quad (\text{D.7.6})$$

$${}^H\mathbf{V}_\perp \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}_\perp = \mathbf{0} \quad (\text{D.7.7})$$

De plus, la décomposition (D.7.1) donne les propriétés suivantes :

$$\mathbf{XV} = \mathbf{U}\Sigma \quad (\text{D.7.8})$$

$$\mathbf{XV}_\perp = \mathbf{U}_\perp \Sigma_\perp \quad (\text{D.7.9})$$

On cherche alors à déterminer les variations  $\Delta\mathbf{U}$ ,  $\Delta\mathbf{U}_\perp$ ,  $\Delta\mathbf{V}$ ,  $\Delta\mathbf{V}_\perp$ ,  $\Delta\Sigma$  et  $\Delta\Sigma_\perp$  en fonction de la perturbation  $\Delta\mathbf{X}$ . Pour cela, une astuce [242] consiste à projeter la perturbation des sous-espaces sur les sous-espaces non perturbés :

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U} & \Delta\mathbf{U}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{U,pp}} & \mathbf{E}^{\text{U,ps}} \\ \mathbf{E}^{\text{U,sp}} & \mathbf{E}^{\text{U,ss}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7.10})$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{V} & \Delta\mathbf{V}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{V,pp}} & \mathbf{E}^{\text{V,ps}} \\ \mathbf{E}^{\text{V,sp}} & \mathbf{E}^{\text{V,ss}} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7.11})$$

On commence par différencier les relations exprimant l'orthogonalité des vecteurs propres et en tirer des conséquences sur les matrices  $\mathbf{E}^{\text{I,jk}}$ . A commencer par la relation (D.7.2) :

$${}^H\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbb{I} \Leftrightarrow {}^H\Delta\mathbf{U}\mathbf{U} + {}^H\mathbf{U}\Delta\mathbf{U} = 0 \Leftrightarrow {}^H\mathbf{E}^{\text{U,pp}} = -\mathbf{E}^{\text{U,pp}} \quad (\text{D.7.12})$$

La matrice  $\mathbf{E}^{\text{U,pp}}$  est donc anti-hermitienne. De même, on obtient avec les autres relations :

$${}^H\mathbf{E}^{\text{V,pp}} = -\mathbf{E}^{\text{V,pp}} \quad (\text{D.7.13})$$

$${}^H\mathbf{E}^{\text{U,ss}} = -\mathbf{E}^{\text{U,ss}} \quad (\text{D.7.14})$$

$${}^H\mathbf{E}^{\text{V,ss}} = -\mathbf{E}^{\text{V,ss}} \quad (\text{D.7.15})$$

$${}^H\mathbf{E}^{\text{U,ps}} = -\mathbf{E}^{\text{U,sp}} \quad (\text{D.7.16})$$

$${}^H\mathbf{E}^{\text{V,ps}} = -\mathbf{E}^{\text{V,sp}} \quad (\text{D.7.17})$$

La différentiation des relation (D.7.8) et (D.7.9) donne :

$$\Delta\mathbf{XV} + \mathbf{X}\Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{U}\Sigma + \mathbf{U}\Delta\Sigma \quad (\text{D.7.18})$$

$$\Delta\mathbf{XV}_\perp + \mathbf{X}\Delta\mathbf{V}_\perp = \Delta\mathbf{U}_\perp \Sigma_\perp + \mathbf{U}_\perp \Delta\Sigma_\perp \quad (\text{D.7.19})$$

En injectant (D.7.10) et (D.7.11) dans (D.7.18) et (D.7.19), on obtient :

$$\Delta\mathbf{XV} + \mathbf{U}\Sigma\mathbf{E}^{\text{V,pp}} + \mathbf{U}_\perp \Sigma_\perp \mathbf{E}^{\text{V,sp}} = \mathbf{U}\mathbf{E}^{\text{U,pp}}\Sigma + \mathbf{U}_\perp \mathbf{E}^{\text{U,sp}}\Sigma + \mathbf{U}\Delta\Sigma \quad (\text{D.7.20})$$

$$\Delta\mathbf{XV}_\perp + \mathbf{U}\Sigma\mathbf{E}^{\text{V,ps}} + \mathbf{U}_\perp \Sigma_\perp \mathbf{E}^{\text{V,ss}} = \mathbf{U}\mathbf{E}^{\text{U,ps}}\Sigma_\perp + \mathbf{U}_\perp \mathbf{E}^{\text{U,ss}}\Sigma_\perp + \mathbf{U}_\perp \Delta\Sigma_\perp \quad (\text{D.7.21})$$

où on a utilisé les propriétés (D.7.8) et (D.7.9). En multipliant par  ${}^H\mathbf{U}$ , on obtient :

$${}^H\mathbf{U}\Delta\mathbf{XV} + \Sigma\mathbf{E}^{\text{V,pp}} = \mathbf{E}^{\text{U,pp}}\Sigma + \Delta\Sigma \quad (\text{D.7.22})$$

$${}^H\mathbf{U}\Delta\mathbf{XV}_\perp + \Sigma\mathbf{E}^{\text{V,ps}} = \mathbf{E}^{\text{U,ps}}\Sigma_\perp \quad (\text{D.7.23})$$

On se concentre en premier lieu sur la première équation (D.7.22). On peut en réalité diviser celle-ci en deux parties : celle qui concerne les termes diagonaux (portant sur  $\Delta\Sigma$ ) et celle qui concerne les termes extra-diagonaux (portant sur les matrices anti-hermitiennes  $\mathbf{E}^{\text{I,jk}}$ ). La première nous donne directement la perturbation des valeurs principales :

$$\boxed{\Delta\sigma = \text{diag}(\Delta\Sigma) = \text{diag}({}^H\mathbf{U}\Delta\mathbf{XV})} \quad (\text{D.7.24})$$

et la second sur les termes extra-diagonaux de (D.7.22) permet d'écrire :

$$\Sigma \mathbf{E}^{V,pp} = \mathbf{E}^{U,pp} \Sigma \Leftrightarrow \mathbf{E}_{ij}^{U,pp} = \sigma_i \mathbf{E}_{ij}^{V,pp} \sigma_j^{-1} \quad (\text{D.7.25})$$

où on a négligé les termes extra-diagonaux de  ${}^H\mathbf{U} \Delta \mathbf{X} \mathbf{V}$ . Cette hypothèse est discutée dans [125] et semble raisonnable si les valeurs principales sont assez distinctes. Ensuite, en utilisant le fait que les matrices  $\mathbf{E}^{I,jk}$  sont anti-hermitiennes :

$$\sigma_i^2 \mathbf{E}_{ij}^{V,pp} = \sigma_j^2 \mathbf{E}_{ij}^{V,pp} \quad (\text{D.7.26})$$

Ce qui donne  $\mathbf{E}^{U,pp} = \mathbf{E}^{V,pp} = \mathbf{O}$  si les valeurs principales  $\sigma$  sont distinctes. On utilise maintenant le fait que  $\Sigma_{\perp} = \mathbf{O}$  dans (D.7.23), ce qui donne :

$$\mathbf{E}^{V,ps} = -\Sigma^{-1} {}^H\mathbf{U} \Delta \mathbf{X} \mathbf{V}_{\perp} \quad (\text{D.7.27})$$

En utilisant (D.7.17), on obtient finalement la perturbation de l'espace principal de droite :

$$\boxed{\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\perp} {}^H\mathbf{V}_{\perp} {}^H\Delta \mathbf{X} \mathbf{U} \Sigma^{-1}} \quad (\text{D.7.28})$$

En multipliant maintenant les equations (D.7.20) et (D.7.21) par  ${}^H\mathbf{U}_{\perp}$  :

$${}^H\mathbf{U}_{\perp} \Delta \mathbf{X} \mathbf{V} + \Sigma_{\perp} \mathbf{E}^{V,sp} = \mathbf{E}^{U,sp} \Sigma \quad (\text{D.7.29})$$

$${}^H\mathbf{U}_{\perp} \Delta \mathbf{X} \mathbf{V}_{\perp} + \Sigma_{\perp} \mathbf{E}^{V,ss} = \mathbf{E}^{U,ss} \Sigma_{\perp} + \Delta \Sigma_{\perp} \quad (\text{D.7.30})$$

En utilisant le même raisonnement que ci-dessus sur l'équation (D.7.30), on obtient la perturbation des valeurs singulières :

$$\boxed{\Delta \sigma_{\perp} = \text{diag}(\Delta \Sigma_{\perp}) = \text{diag}({}^H\mathbf{U}_{\perp} \Delta \mathbf{X} \mathbf{V}_{\perp})} \quad (\text{D.7.31})$$

Finalement, on déduit de (D.7.29) la perturbation de l'espace principal de gauche :

$$\boxed{\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_{\perp} {}^H\mathbf{U}_{\perp} \Delta \mathbf{X} \mathbf{V} \Sigma^{-1}} \quad (\text{D.7.32})$$

Quelques remarques :

- (D.7.32) et (D.7.32) montrent que la perturbation de l'espace des vecteurs principaux est, au premier ordre, portée par les vecteurs de l'espace orthogonal. On peut faire le parallèle avec la rotation d'un vecteur dans l'espace, qui est portée par les vecteurs orthogonaux à celui-ci au premier ordre (avec  $\sin(\alpha) \simeq \alpha$ ). Une variation colinéaire à celui-ci n'apparaît alors qu'au second ordre (avec  $\cos(\alpha) \simeq 1 - \alpha^2$ ).
- De nombreux algorithmes ne calculent que l'espace principal au moyen d'une décomposition en valeurs principales tronquée. Dans ce cas, il est toujours possible de calculer les perturbations (D.7.32) et (D.7.32) en utilisant  $\mathbf{U}_{\perp} {}^H\mathbf{U}_{\perp} = \mathbb{I} - \mathbf{U} {}^H\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}_{\perp} {}^H\mathbf{V}_{\perp} = \mathbb{I} - \mathbf{V} {}^H\mathbf{V}$  :

$$\Delta \mathbf{U} = (\mathbb{I} - \mathbf{U} {}^H\mathbf{U}) \Delta \mathbf{X} \mathbf{V} \Sigma^{-1} \quad (\text{D.7.33})$$

$$\Delta \mathbf{V} = (\mathbb{I} - \mathbf{V} {}^H\mathbf{V}) {}^H\Delta \mathbf{X} \mathbf{U} \Sigma^{-1} \quad (\text{D.7.34})$$

- L'espace des vecteurs principaux de gauche peut avoir été calculé à partir de la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{xx} = \frac{1}{M} \mathbf{X}^H \mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{U}$ , avec  $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{M} \mathbf{\Sigma}^2$ . Dans ce cas, on peut vouloir calculer la perturbation de l'espace principal de gauche sans avoir à calculer  $\mathbf{V}$ . sachant que  $\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1H} \mathbf{U}$ , on a :

$$\Delta \mathbf{U} = (\mathbb{I} - \mathbf{U}^H \mathbf{U}) \Delta \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{U} \quad (\text{D.7.35})$$

Si le calcul de la pseudo-inverse de  $\mathbf{X}$  n'est pas souhaitable, on peut toujours utiliser la propriété  ${}^H \mathbf{X} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}$ . Dans ce cas-là, la perturbation de l'espace principal de gauche devient :

$$\Delta \mathbf{U} = \frac{1}{M} (\mathbb{I} - \mathbf{U}^H \mathbf{U}) \Delta \mathbf{X}^H \mathbf{X} \mathbf{U} \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (\text{D.7.36})$$





# Annexe E

## Viscoélasticité

### E.1 Hypothèse de Basile

On donne ici la perturbation des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur d'équilibre d'un système entraînée par l'introduction des effets viscoélastiques.

On rappelle la définition des vecteurs propres  $\tilde{\Phi}$ , solutions des équations homogènes du système non conservatif :

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{i} \tilde{\omega}_n \tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\omega}_n) - \tilde{\omega}_n^2 \mathbf{M}) \tilde{\phi}_n = \mathbf{0} \quad (\text{E.1.1})$$

où les pulsations  $\tilde{\omega}$  sont les pulsations complexes du système dissipatif et la matrice  $\tilde{\mathbf{D}}$ , dépendante de la fréquence, décrit les mécanismes de dissipation.

Dans le cas conservatif ( $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ ), la base modale  $\tilde{\Phi}$  diagonalise les équations ; cette propriété s'écrit,  $\forall(k, n)$  :

$${}^H \phi_k \mathbf{K}_0 \phi_n = \delta_{kn} k_n \quad \text{et} \quad {}^H \phi_k \mathbf{M} \phi_n = \delta_{kn} m_n \quad (\text{E.1.2})$$

On cherche à déterminer les perturbations  $\Delta\omega_n$  et  $\Delta\phi_n$  telles que :

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \Delta\omega_n \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_n = \phi_n + \Delta\phi_n \quad (\text{E.1.3})$$

qui apparaissent avec l'introduction des dissipations  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

En injectant ces perturbations dans la définition des valeurs propres du système dissipatif, on obtient :

$$(\mathbf{i}(\omega_n + \Delta\omega_n) \tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\omega}_n) - (2\omega_n \Delta\omega_n + \Delta\omega_n^2) \mathbf{M})(\phi_n + \Delta\phi_n) = \mathbf{0} \quad (\text{E.1.4})$$

où on a pris en compte la définition des vecteurs propres du système conservatif, soit  $(\mathbf{K}_0 - \omega_n^2 \mathbf{M}) \phi_n = \mathbf{0}$ .

La première hypothèse consiste à considérer les perturbations comme faibles devant leur valeur initiale ; cela nous autorise à tronquer les termes d'ordre supérieur à 1 en les perturbations :

$$(\mathbf{i}(\omega_n + \Delta\omega_n) \tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\omega}_n) - 2\omega_n \Delta\omega_n \mathbf{M}) \phi_n + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{i} \omega_n \tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\omega}_n) - \omega_n^2 \mathbf{M}) \Delta\phi_n = \mathbf{0} \quad (\text{E.1.5})$$

La deuxième hypothèse considère que la matrice des dissipations  $\tilde{\mathbf{D}}$  est d'un ordre inférieur aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}_0$  caractérisant le système conservatif. Dans ce cas, on peut négliger les termes  $\Delta\omega_n \tilde{\mathbf{D}}$  et  $\tilde{\mathbf{D}} \Delta\phi_n$ , considérés comme des termes du second ordre, et supposer que  $\tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\omega}_n) \approx \tilde{\mathbf{D}}(\omega_n)$  :

$$(\mathbf{i} \omega_n \tilde{\mathbf{D}}(\omega_n) - 2\omega_n \Delta\omega_n \mathbf{M}) \phi_n + (\mathbf{K}_0 - \omega_n^2 \mathbf{M}) \Delta\phi_n = \mathbf{0} \quad (\text{E.1.6})$$

On commence par multiplier à gauche par  ${}^H\phi_n$ , soit :

$$i\omega_n {}^H\phi_n \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n - 2m_n \omega_n \Delta\omega_n = 0 \quad (\text{E.1.7})$$

où on a utilisé  ${}^H\phi_n (\mathbf{K}_0 - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0$  et les relations d'orthogonalité. On obtient alors la perturbation des valeurs propres du système :

$$\Delta\omega_n = \frac{i}{2m_n} {}^H\phi_n \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n \quad (\text{E.1.8})$$

qui ne dépendent que de la diagonale de la matrice modale des dissipations  ${}^H\Phi \widetilde{\mathbf{D}} \Phi$ .

On multiplie ensuite (E.1.6) à gauche par  ${}^H\phi_k$ , pour  $k \neq n$  :

$$i\omega_n {}^H\phi_k \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n + (\omega_k^2 - \omega_n^2) {}^H\phi_k \mathbf{M} \Delta\phi_n = 0 \quad (\text{E.1.9})$$

où on a de nouveau utilisé les propriétés d'orthogonalité et la définition des vecteurs propres.

La dernière étape consiste à projeter la perturbation des vecteurs propres  $\Delta\phi_n$  sur la base modale du système conservatif :

$$\Delta\phi_n = \alpha_{nj} \phi_j \quad (\text{E.1.10})$$

et à l'injecter dans l'équation précédente, pour obtenir :

$$i\omega_n {}^H\phi_k \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n + (\omega_k^2 - \omega_n^2) m_k \alpha_{nk} = 0 \quad (\text{E.1.11})$$

ce qui permet de déduire les coefficients  $\alpha$ . Finalement, on obtient la perturbation des vecteurs propres :

$$\Delta\phi_n = i\omega_n \sum_{k \neq n} \frac{{}^H\phi_k \widetilde{\mathbf{D}}(\omega_n) \phi_n}{(\omega_n^2 - \omega_k^2) m_n} \phi_k \quad (\text{E.1.12})$$

qui ne dépendent donc que des termes anti-diagonaux de la matrice modale des dissipations.

On remarque que la perturbation des vecteurs propres est inversement proportionnelle à la différence des valeurs propres ; la formule ci-dessus n'est d'ailleurs valable que si celles-ci sont toutes distinctes deux à deux.

# Annexe F

## Éléments finis spectraux

Cette annexe décrit très succinctement l'implémentation des schémas éléments finis spectraux utilisés dans ce travail, et notamment dans le cadre du chapitre I, section I.5. Les cas des guides d'onde plans et uniaxiaux sont traités.

### F.1 Guides d'onde plans

Les fonctions de forme utilisées dans ce travail pour l'approximation de la fonction de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3)$  sont choisies linéaires par morceaux ; sur l'élément  $e$ , on a pour  $\mathbf{x}_3 \in [\mathbf{x}_3^{e-1}, \mathbf{x}_3^e]$  :

$$\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}_3) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_3) \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{e-1} \\ \mathbf{q}^e \end{bmatrix} \quad (\text{F.1.1})$$

$$\mathbf{N}^e(\mathbf{x}_3) = \begin{bmatrix} {}^\top \mathbf{n}^e(\mathbf{x}_3) \boxtimes \mathbb{I}^3 \end{bmatrix} \quad (\text{F.1.2})$$

$$\mathbf{n}_1^e(\mathbf{x}_3) = \frac{\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_3}{h_e} \quad , \quad \mathbf{n}_2^e(\mathbf{x}_3) = \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_3^{e-1}}{h_e} \quad , \quad h_e = \mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_3^{e-1} \quad (\text{F.1.3})$$

$${}^\top \mathbf{q}^e = [\mathbf{q}_1^e \quad \mathbf{q}_2^e \quad \mathbf{q}_3^e] \quad (\text{F.1.4})$$

On exprime alors le vecteur des déformations en notation de Voigt (B.1.1) sur le  $n^{\text{ième}}$  élément :

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_3) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x}_3) \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{e-1} \\ \mathbf{q}^e \end{bmatrix} \quad (\text{F.1.5})$$

$$\mathbf{B}^e(\mathbf{x}_3) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_3) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_3) \quad (\text{F.1.6})$$

où la matrice  $\mathbf{G}$  a été définie en (I.3.18).

On considère que les propriétés mécaniques du matériau constitutif sont constantes sur l'élément ; on les dénote par le tenseur opérationnel en notation de Voigt  $\underline{\mathbf{C}}^e$  et la masse volumique  $\rho^e$ . On se limite d'ailleurs ici au cas du matériau monoclinique (B.1.16), ce qui est tout à fait général pour les applications visées.

L'opérateur de masse généralisé lié à l'élément  $e$  s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{M}^e = \int_{\mathbf{x}_3^{n-1}}^{\mathbf{x}_3^n} \rho^e {}^\top \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_3) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_3) d\mathbf{x}_3 \quad (\text{F.1.7})$$

et prend donc la forme :

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho^e h^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.1.8})$$

L'opérateur de raideur généralisé lié à l'élément  $e$  s'exprime comme suit :

$$\mathbf{K}^e = \int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n} {}^\top \mathbf{B}^e(x_3) \underline{\underline{\mathbf{C}}}^e \mathbf{B}^e(x_3) dx_3 \quad (\text{F.1.9})$$

dont on propose la décomposition (I.5.7) ; celle-ci met en jeu les matrices élémentaires  $\mathbf{K}_{ij}^{e,kl}$  dont la forme est donnée au paragraphe F.1.1.

L'assemblage des matrices de masse et de raideur complètes est classique ; on se reportera pour les détails à l'annexe A.2, expressions (A.2.27) et (A.2.28).

### F.1.1 Matrices élémentaires

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{k_1^2 h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{12}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{k_1 k_2 h_e}{6} \begin{bmatrix} \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{22}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{k_2^2 h_e}{6} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{13}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{i k_1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{33}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{23}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{i k_2}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{16}^e(\underline{\mathbf{k}}) &= \frac{h_e k_1^2}{6} \begin{bmatrix} \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \frac{h_e k_1 k_2}{3} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## F.2 Guides d'onde Uniaxiaux

Le problème à résoudre dans le cas des guides d'onde uniaxiaux est bidimensionnel ; les variables associées sont notées  $\underline{\mathbf{z}}$ . La fonction de polarisation  $\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}})$  est discrétisée par sa projection sur une base de fonctions définies par morceaux sur des domaines élémentaires. Ces domaines sont ici choisis triangulaires (éléments finis type *P1*). Chaque noeud  $p$  de l'élément  $e$  est associé à trois degrés de liberté  $\mathbf{q}^{e,p}$  permettant de prendre en compte les trois composantes du champ de déplacement. Finalement, la fonction de polarisation est exprimée sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{z}}) = \mathbf{N}(\underline{\mathbf{z}}) \mathbf{q}^e \quad (\text{F.2.1})$$

$${}^T \mathbf{q}^e = [q_1^{e,1} \ q_2^{e,1} \ q_3^{e,1} \ q_1^{e,2} \ q_2^{e,2} \ q_3^{e,2} \ q_1^{e,3} \ q_2^{e,3} \ q_3^{e,3}] \quad (\text{F.2.2})$$

$$\mathbf{N}(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = [{}^T \mathbf{n}(\underline{\boldsymbol{\xi}}) \boxtimes \mathbf{I}^3] \quad (\text{F.2.3})$$

$$n_1(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad , \quad n_2(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = \xi_1 \quad , \quad n_3(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = \xi_2 \quad (\text{F.2.4})$$

Son injection dans les équations du problème de propagation des ondes planes dans les guides d'onde permet de calculer les matrices de masse et de raideur généralisées  $\mathbf{M}^e$  et  $\mathbf{K}^e$  associées à chaque élément  $e$  et exprimées dans le repère intrinsèque de celui-ci par le biais de la coordonnée locale  $\underline{\boldsymbol{\xi}}$  (voir chapitre I, expressions I.3.14 et I.3.15 et annexe A.2 sur la formulation d'un modèle aux éléments finis). L'opérateur de masse généralisé élémentaire prend alors la forme suivante :

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho}{24} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 3 \\ -1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 6 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 6 \end{bmatrix}$$

et les opérateurs de raideur généralisés élémentaires, permettant d'écrire la décomposition donnée au chapitre I, expression (I.5.8), sont donnés dans le paragraphe suivant. Finalement, les matrices élémentaires sont assemblées de la façon décrite en annexe A.2, expressions (A.2.28) et (A.2.27) de façon à construire les opérateurs généralisés  $\mathbf{MetK}$  associés au guide d'onde complet.

### F.2.1 Matrices élémentaires

Pour améliorer la lisibilité de ce qui suit, on pose :

$$[\mathbf{J}^e]^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (\text{F.2.5})$$

$$\mathbf{K}_{440}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (c+d)^2 & \cdot & \cdot & -c(c+d) & \cdot & \cdot & -d(c+d) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c(c+d) & \cdot & \cdot & c^2 & \cdot & \cdot & cd \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -d(c+d) & \cdot & \cdot & cd & \cdot & \cdot & d^2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{K}_{441}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c+d & \cdot & \cdot & 2c+2d & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -c-d & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -c & \cdot & \cdot & -2c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2c-2d & \cdot & \cdot & 2c & \cdot & \cdot & 2d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -d & \cdot & \cdot & -2d & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{442}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{550}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (a+b)^2 & \cdot & \cdot & -a(a+b) & \cdot & -b(a+b) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -a(a+b) & \cdot & \cdot & a^2 & \cdot & ab \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -b(a+b) & \cdot & \cdot & ab & \cdot & b^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{551}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a+b & \cdot & \cdot & 2a+2b & \cdot \\ \cdot & \cdot & -a-b & \cdot & \cdot & a & \cdot & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot & -2a & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2a-2b & \cdot & \cdot & 2a & \cdot & 2b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -b & \cdot & \cdot & -2b & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{552}^e = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 6 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{66}^e = \begin{bmatrix} (c+d)^2 & (c+d)(a+b) & \cdot & -c(c+d) & -(c+d)a & \cdot & -d(c+d) & -(c+d)b & \cdot \\ (c+d)(a+b) & (a+b)^2 & \cdot & -(a+b)c & -a(a+b) & \cdot & -(a+b)d & -b(a+b) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -c(c+d) & -(a+b)c & \cdot & c^2 & ac & \cdot & cd & bc & \cdot \\ -(c+d)a & -a(a+b) & \cdot & ac & a^2 & \cdot & ad & ab & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -d(c+d) & -(a+b)d & \cdot & cd & ad & \cdot & d^2 & bd & \cdot \\ -(c+d)b & -b(a+b) & \cdot & bc & ab & \cdot & bd & b^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12}^e = \begin{bmatrix} \cdot & (c+d)(a+b) & \cdot & \cdot & -(a+b)c & \cdot & \cdot & -(a+b)d & \cdot \\ (c+d)(a+b) & \cdot & \cdot & -(c+d)a & \cdot & \cdot & -(c+d)b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -(c+d)a & \cdot & \cdot & ac & \cdot & \cdot & ad & \cdot \\ -(a+b)c & \cdot & \cdot & ac & \cdot & \cdot & bc & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -(c+d)b & \cdot & \cdot & bc & \cdot & \cdot & bd & \cdot \\ -(a+b)d & \cdot & \cdot & ad & \cdot & \cdot & bd & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a+b & \cdot & \cdot & 2a+2b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot & -2a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a-b & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -b & \cdot & \cdot & -2b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -2a-2b & \cdot & \cdot & 2a & \cdot & \cdot & 2b & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{23}^e = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c+d & \cdot & 2c+2d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -c & \cdot & -2c \\ \cdot & -c-d & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -d & \cdot & -2d \\ \cdot & -2c-2d & \cdot & \cdot & 2c & \cdot & \cdot & 2d \end{bmatrix}$$

# Annexe G

## ESPRIT

## G.1 Propriétés, démonstrations

### G.1.1 Invariance rotationnelle généralisée

On donne ici le cheminement qui mène au résultat (IV.2.32).

Tout d'abord, les notations suivantes sont posées :

$$\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} = \mathbf{J}_{\uparrow 1}^{e,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\uparrow D_e}^{e,(\ell)} \quad (\text{G.1.1})$$

$$\mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} = \mathbf{J}_{\downarrow 1}^{e,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow D_e}^{e,(\ell)} \quad (\text{G.1.2})$$

$$\mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{c,+,(\ell)} = \mathbf{J}_{\downarrow 1}^{c,+,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow D_e}^{c,+,(\ell)} \quad (\text{G.1.3})$$

$$\mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{c,-,(\ell)} = \mathbf{J}_{\downarrow 1}^{c,-,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow D_e}^{c,-,(\ell)} \quad (\text{G.1.4})$$

$$\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{c,(\ell)} = \mathbf{J}_{\uparrow 1}^{c,(\ell)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{J}_{\uparrow D_e}^{c,(\ell)} \quad (\text{G.1.5})$$

où les différentes matrices de sélection élémentaires sont définies à l'équation (IV.2.29). Sont également définies les matrices suivantes :

$$\widehat{\mathbf{V}}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} = \exp\left(\mathbf{i} \mathbf{M}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \quad (\text{G.1.6})$$

$$\widehat{\mathbf{V}}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} = \cos\left(\left(\mathbf{M}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} + \mathbf{1}^{\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}} \boxtimes \mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^c\right) \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \quad (\text{G.1.7})$$

Les matrices pilotes tronquées (IV.2.31) peuvent alors être développées comme suit, pour un vecteur translation  $\mathbf{q}$  dont toutes les composantes  $q_d$  sont positives ou nulles :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} &= \left[ \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} \boxtimes 2\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{c,(\ell)} \right] \mathbf{V}^{(\ell)} \\ &= 2 \left[ \exp\left(\mathbf{i} \left[ \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} \boxtimes \mathbb{I}^{[\ell]^e} \right] \mathbf{M}_e^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\left[ \mathbb{I}^{[\ell]^e} \boxtimes \mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{q}}^{c,(\ell)} \right] \mathbf{M}_c^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \\ &= 2 \left[ \exp\left(\mathbf{i} \mathbf{M}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\left(\mathbf{M}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} + \mathbf{1}^{\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}} \boxtimes \mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^c\right) \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \\ &= 2 \widehat{\mathbf{V}}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \circ \widehat{\mathbf{V}}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \\ \mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} &= \left[ \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{c,+,(\ell)} + \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{c,-,(\ell)} \right] \mathbf{V}^{(\ell)} \\ &= \left[ \exp\left(\mathbf{i} \left[ \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} \boxtimes \mathbb{I}^{[\ell]^c} \right] \mathbf{M}_e^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\left[ \mathbb{I}^{[\ell]^e} \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{c,+,(\ell)} \right] \mathbf{M}_c^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \\ &\quad + \left[ \exp\left(\mathbf{i} \left[ \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{e,(\ell)} \boxtimes \mathbb{I}^{[\ell]^c} \right] \mathbf{M}_e^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\left[ \mathbb{I}^{[\ell]^e} \boxtimes \mathbf{J}_{\downarrow \mathbf{q}}^{c,-,(\ell)} \right] \mathbf{M}_c^{(\bar{\ell})} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \\ &= \left[ \exp\left(\mathbf{i} \left(\mathbf{M}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} + \mathbf{1}^{\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}} \boxtimes \mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^e\right) \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\mathbf{M}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \\ &\quad + \left[ \exp\left(\mathbf{i} \left(\mathbf{M}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} + \mathbf{1}^{\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}} \boxtimes \mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^e\right) \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\left(\mathbf{M}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} + \mathbf{1}^{\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}} \boxtimes 2\mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^c\right) \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \\ &= 2 \widehat{\mathbf{V}}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \circ \widehat{\mathbf{V}}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \circ \left[ \mathbf{1}^{\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}}} \boxtimes \left[ \exp\left(\mathbf{i} \mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^c \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right) \right] \right] \\ &= 2 \left[ \widehat{\mathbf{V}}_e^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \circ \widehat{\mathbf{V}}_c^{(\bar{\ell}-\bar{\mathbf{q}})} \right] \text{diag}\left(\exp\left(\mathbf{i} \mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\mathbf{1}^{\top} \mathbf{q}^c \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c\right)\right) \end{aligned}$$

d'où l'égalité  $\mathbf{V}_{\downarrow \mathbf{q}}^{(\ell)} = \mathbf{V}_{\uparrow \mathbf{q}}^{(\ell)} \text{diag}(\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{q}})$ , pour  $\mathbf{q}$  tel que  $q_d \geq 0$ . Par le même déroulement, cette relation est encore généralisée pour tout vecteur  $\mathbf{q}$ , ce qui démontre la proposition IV.2.6.

### G.1.2 Lissage spatial

A partir du modèle matriciel (IV.2.14), on développe le calcul de la  $[\mathbf{p}]^{\text{ième}}$  colonne de  $\bar{\mathbf{U}}_{SS}(n)$  (IV.2.50), notée ici  $\mathbf{u}'_{\mathbf{p}}(n) \in \mathbb{C}^{[\mathbf{K}]}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_{\mathbf{p}}(n) &= \bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{K}} \mathbf{J}_{\mathbf{p}}^{SS, \mathbf{K}} \mathbf{u}(n) \\ &= \left[ \exp\left(\mathbf{i} \mathbf{J}_{\mathbf{p}^e}^{SS} \mathbf{M}_e^{\bar{\mathbf{L}}} \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \left( \cos\left(\bar{\mathbf{J}}_+^{\mathbf{K}^c} \mathbf{J}_{\mathbf{p}^c}^{SS, \mathbf{K}} \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{L}}} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} \phi(n)\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\bar{\mathbf{J}}_-^{\mathbf{K}^c} \mathbf{J}_{\mathbf{p}^c}^{SS, \mathbf{K}} \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{L}}} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} \phi(n)\right) \right] \beta(n) \end{aligned}$$

Avec  $\bar{\mathbf{J}}^{\mathbf{K}}$  la matrice de modification des données définie en (IV.2.22). Sur la base des vecteurs  $\mathbf{m}_d^{(\ell)}$  définis en (IV.2.16), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{p}^e}^{SS, \mathbf{K}} \mathbf{M}_e^{\bar{\mathbf{L}}} &= [\mathbf{m}_1^{\bar{\mathbf{K}}} + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \times \mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \mathbf{m}_{D_e}^{\bar{\mathbf{K}}} + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \times \mathbf{p}_{D_e}] \\ &= \mathbf{M}_e^{\bar{\mathbf{K}}} + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} \mathbf{p}^e \\ \bar{\mathbf{J}}_+^{\mathbf{K}^c} \mathbf{J}_{\mathbf{p}^c}^{SS, \mathbf{K}} \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{L}}} &= [\mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \times (\bar{\mathbf{K}}_{D_e+1} + \mathbf{p}_{D_e+1}) + \mathbf{m}_{D_e+1}^{\bar{\mathbf{K}}} \quad \dots \quad \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \times (\bar{\mathbf{K}}_D + \mathbf{p}_D) + \mathbf{m}_D^{\bar{\mathbf{K}}} \\ &= \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} (\bar{\mathbf{K}}^c + \mathbf{p}^c) + \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{K}}} \\ \bar{\mathbf{J}}_-^{\mathbf{K}^c} \mathbf{J}_{\mathbf{p}^c}^{SS, \mathbf{K}} \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{L}}} &= [\mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes (\bar{\mathbf{K}}_{D_e+1} + \mathbf{p}_{D_e+1}) - \mathbf{m}_{D_e+1}^{\bar{\mathbf{K}}} \quad \dots \quad \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes (\bar{\mathbf{K}}_D + \mathbf{p}_D) - \mathbf{m}_D^{\bar{\mathbf{K}}} \\ &= \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} (\bar{\mathbf{K}}^c + \mathbf{p}^c) - \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{K}}} \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau l'identité suivante :

$$\begin{aligned} 2\cos(a) \cos(b) &= \cos(a+b) \cos(a-b) \\ a &= \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} (\bar{\mathbf{K}}^c + \mathbf{p}^c) \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} \phi(n) \\ b &= \mathbf{M}_c^{\bar{\mathbf{K}}} \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c \end{aligned}$$

et en posant  $\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}(n) \in \mathbb{C}^R$  tel que :

$$\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}(n) = 2 \left[ \exp\left(\mathbf{i}^{\top} \mathbf{p}^e \text{diag}(\mathbf{h}^e) \mathbf{K}^e\right) \circ \cos\left(\mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} (\bar{\mathbf{K}}^c + \mathbf{p}^c) \text{diag}(\mathbf{h}^c) \mathbf{K}^c + \mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes^{\top} \phi(n)\right) \right]$$

il vient :

$$\mathbf{u}'_{\mathbf{p}}(n) = [\mathbf{V}^{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{1}^{[\bar{\mathbf{K}]}]} \boxtimes \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}(n))] \beta(n) = \mathbf{V}^{\mathbf{K}} \text{diag}(\beta(n)) \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}(n)$$

La matrice des données adoucie  $\bar{\mathbf{U}}_{SS}(n)$  étant la concaténation de vecteurs  $\mathbf{u}'_{\mathbf{p}}(n)$  pour différents  $\mathbf{p}$ , on obtient à la fin :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_{SS}(n) &= [\mathbf{u}'_{[0, \dots, 0, 0]}(n) \quad \dots \quad \mathbf{u}'_{[0, \dots, 0, M_D-1]}(n) \quad \mathbf{u}'_{[0, \dots, 1, 0]}(n) \quad \dots \quad \mathbf{u}'_{[M_1-1, \dots, M_D-1]}(n)] \\ &= \mathbf{V}^{\mathbf{K}} \text{diag}(\beta(n)) [\tilde{\mathbf{v}}_{[0, \dots, 0, 0]}(n) \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{v}}_{[0, \dots, 0, M_D-1]}(n) \quad \tilde{\mathbf{v}}_{[0, \dots, 1, 0]}(n) \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{v}}_{[M_1-1, \dots, M_D-1]}(n)] \\ &= \mathbf{V}^{\mathbf{K}} \text{diag}(\beta(n)) {}^{\top} \bar{\mathbf{V}}^{\mathbf{M}}(n) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité menant directement à l'expression (IV.2.52).

## G.2 Résultats sur les performances

### G.2.1 Composante unique

On développe ici le calcul de la norme du vecteur  $\mathbf{z}_d = \text{vec}\left\{\text{tens}\{\mathbf{x}\} * \text{tens}\{\mathbf{y}_d\}\right\}$  dans (IV.3.16) pour un signal à une composante exponentielle unique  $u(\mathbf{x}) = \beta \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ ,  $R = 1$ . On considère le cas de l'algorithme ND-ESPRIT, qui n'utilise pas d'invariances multiples, soit  $\mathbf{Q} = \mathbb{I}$ .

La technique de lissage spatial (IV.2.51) est utilisée : à partir d'une grille de taille  $\mathbf{L}$ , on prend  $\lfloor \mathbf{M} \rfloor$  sous-grilles de taille  $\mathbf{K} \circ \boldsymbol{\delta}$ , décimées par  $\boldsymbol{\delta}$  (IV.2.62).

Le signal est composé d'une seule composante exponentielle ; en conséquence,  $D_c = 0$  et on a  $\mathbf{J}^{\mathbf{K}} = \mathbb{I}^{\lfloor \mathbf{K} \rfloor}$  (IV.2.22). Puisque  $R = 1$ , la matrice polaire (IV.2.18) est un scalaire noté  $\nu_d^{\delta_d} = \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{q}_n, \boldsymbol{\delta}} = \pi^{\mathbf{e}_n, \boldsymbol{\delta}} = \exp(i h_d \delta_d \mathbf{k}_d)$ . La matrice pilote (IV.2.25) est égale au vecteur de Vandermonde  $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\delta}}^{\ell}$  qui peut se mettre sous la forme suivante, avec  $\mathbf{v}_{\delta_d}^{\ell_d} = [1 \ \nu_d^{\delta_d} \ \dots \ \nu_d^{(\ell_d-1)\delta_d}]$  :

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\delta}}^{\ell} = \mathbf{v}_{\delta_1}^{\ell_1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{v}_{\delta_D}^{\ell_D}$$

On rappelle que la pseudo-inverse d'un vecteur est telle que  $\mathbf{p}^{\dagger} = \|\mathbf{p}\|^{-2} \mathbf{H} \mathbf{p}$ . On note alors  $\mu_{\ell_d, \delta_d}$  la norme au carré de  $\mathbf{v}_{\delta_d}^{\ell_d}$ , qui s'exprime comme suit :

$$\mu_{\ell_d, \delta_d} = \|\mathbf{v}_{\delta_d}^{\ell_d}\|^2 = \sum_{n=0}^{\ell_d-1} |\nu_d|^{2n\delta_d} = \begin{cases} \ell_d & |\nu_d| = 1 \\ \frac{1-|\nu_d|^{2\delta_d\ell_d}}{1-|\nu_d|^{2\delta_d}} & |\nu_d| \neq 1 \end{cases}$$

La pseudo-inverse du vecteur de Vandermonde s'exprime alors comme suit :

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\delta}}^{\ell \dagger} = \frac{\mathbf{H} \mathbf{v}_{\delta_1}^{\ell_1}}{\mu_{\ell_1, \delta_1}} \boxtimes \dots \boxtimes \frac{\mathbf{H} \mathbf{v}_{\delta_D}^{\ell_D}}{\mu_{\ell_D, \delta_D}}$$

Puisque les matrices de sélection  $\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{e}_d}^{\mathbf{K}}$ ,  $\mathbf{J}_{\uparrow \mathbf{e}_d}^{\mathbf{K}}$  et  $\mathbf{J}^{\boldsymbol{\delta}}$  sont définies par le produit de Kronecker de matrices de sélection élémentaires liées à chaque dimension  $d$  (IV.2.29), (IV.2.59), les expressions analytiques de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}_d$  (IV.3.17) se simplifient alors comme suit, en utilisant la propriété (IV.1.19) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{* \beta} \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{M}_1}}{\mu_{\mathbf{M}_1, 1}} \boxtimes \dots \boxtimes \frac{\mathbf{v}_1^{\mathbf{M}_D}}{\mu_{\mathbf{M}_D, 1}} \\ \mathbf{y}_d &= \frac{i}{* \nu_d^{\delta_d} h_d \delta_d} \mathbf{y}_d^1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{y}_d^D \\ \mathbf{H} \mathbf{y}_d^i &= \begin{cases} \mathbf{H} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\delta}}^{\mathbf{K}_i} \mathbf{J}^{\boldsymbol{\delta}_i} / \mu_{\mathbf{K}_i, \delta_i} & i \neq d \\ \mathbf{H} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\delta}}^{\mathbf{K}_{d-1}} \left( \mathbf{J}_{\downarrow d}^{\mathbf{K}_d} - \nu_d^{\delta_d} \mathbf{J}_{\uparrow d}^{\mathbf{K}_d} \right) \mathbf{J}^{\boldsymbol{\delta}_d} / \mu_{\mathbf{K}_{d-1}, \delta_d} & i = d \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas étudié ici, les tenseurs  $\boldsymbol{\mathcal{X}}$  et  $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_d$  sont de rang 1 (IV.1.21). On peut donc séparer la convolution (IV.1.22) et obtenir une expression simplifiée de  $\mathbf{z}_d$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_d &= \text{vec}\left\{\boldsymbol{\mathcal{X}} * \boldsymbol{\mathcal{Y}}_d\right\} \\ &= \frac{1}{* \beta} \frac{i}{* \nu_d^{\delta_d} h_d \delta_d} \mathbf{z}_d^1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{z}_d^D \end{aligned}$$

où  $\mathbf{z}_d^i = (\mu_{M_i,1})^{-1} \mathbf{v}_1^{M_i} * \mathbf{y}_d^i$ . Finalement, on peut donner l'expression de la norme de  $\mathbf{z}_d$  suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}_d\|^2 &= \frac{1}{|\beta|^2} \frac{1}{|\nu_d^{\delta_d}|^2} \frac{1}{h_d^2 \delta_d^2} \|\mathbf{z}_d^1\|^2 \times \dots \times \|\mathbf{z}_d^D\|^2 \\ &= \frac{1}{|\beta|^2} \frac{1}{|\nu_d^{\delta_d}|^2} \frac{1}{h_d^2 \delta_d^2} f(K_d, M_d, \delta_d) \prod_{i \neq d} g(K_i, M_i, \delta_i) \end{aligned} \quad (\text{G.2.1})$$

avec :

$$\begin{aligned} f(K, M, \delta) &= \frac{1}{\mu_{K-1,\delta}^2 \mu_{M,1}^2} \|\mathbf{v}_1^M * (\mathbf{J}^\delta (\mathbf{J}_{\downarrow d}^K - *_{\nu_d^\delta} \mathbf{J}_{\uparrow d}^K) \mathbf{v}_\delta^{K-1})\|^2 \\ g(K, M, \delta) &= \frac{1}{\mu_{K,\delta}^2 \mu_{M,1}^2} \|\mathbf{v}_1^M * (\mathbf{J}^\delta \mathbf{v}_\delta^K)\|^2 \end{aligned}$$

A partir d'ici, les développements sont dérivés dans le cas d'une composante exponentielle non amortie, c'est à dire que  $\text{Im}\{\mathbf{k}\} = \mathbf{0}$ , soit  $|\nu_d| = 1$ . On s'intéresse tout d'abord au calcul de  $g(K, M, \delta)$ . Pour les besoins de la résolution analytique qui suit, on pose  $M = \delta M'$ , ce qui revient à prendre une longueur  $L$  multiple de  $\delta$  :  $L = (K - 1)\delta + M = (K + M' - 1)\delta$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^M * (\mathbf{J}^\delta \mathbf{v}_\delta^K) &= \mathbf{v}_1^M * \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\delta-1} & \nu_d^\delta & \mathbf{0}^{\delta-1} & \dots & \nu_d^{(K-1)\delta} & \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{v}_1^M * \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{m\delta} \\ \nu_d^{m\delta} \\ \mathbf{0}^{(K-m)\delta-1} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{K-1} \nu_d^{m\delta} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{m\delta} \\ \mathbf{v}_1^M \\ \mathbf{0}^{(K-m)\delta-1} \end{bmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{v}} \boxtimes \mathbf{v}_1^\delta \end{aligned}$$

où  $\mathbf{v}_1^\delta = [1 \ \nu_d \ \dots \ \nu_d^\delta]$  et on a posé :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= [1, 2\nu_d^\delta, \dots, N_\ominus \nu_d^{(N_\ominus-1)\delta}, \\ &\quad N_\ominus \nu_d^{N_\ominus\delta}, \dots, N_\ominus \nu_d^{(N_\oplus-1)\delta}, \dots, 2\nu_d^{(N_\oplus+N_\ominus-3)\delta}, \nu_d^{(N_\oplus+N_\ominus-2)\delta}] \end{aligned}$$

avec  $N_\oplus = \max(K, M')$  et  $N_\ominus = \min(K, M')$ . La norme de  $\hat{\mathbf{v}}$  s'écrit comme suit, pour  $|\nu_d| = 1$  :

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 &= \sum_{n=0}^{N_\ominus-1} |\nu_d^{2\delta}|^n (n+1)^2 + \sum_{n=N_\ominus}^{N_\oplus-1} |\nu_d^{2\delta}|^n N_\ominus^2 + \sum_{n=N_\oplus}^{N_\oplus+N_\ominus-2} |\nu_d^{2\delta}|^n (N_\oplus + N_\ominus - 1 - n)^2 \\ &= N_\ominus^2 N_\oplus - \frac{N_\ominus(N_\ominus^2 - 1)}{3} \end{aligned}$$

on en déduit finalement l'expression de  $g(K, M, \delta)$  pour le cas du vecteur d'onde réel :

$$g(K, M, \delta) = \frac{1}{\mu_{K,\delta}^2 \mu_{M,1}^2} \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 \|\mathbf{v}_1^\delta\|^2 = \frac{\delta N_\ominus^2}{K^2 M^2} \left( N_\oplus - \frac{N_\ominus^2 - 1}{3N_\ominus} \right) \quad (\text{G.2.2})$$

Ce qui est en accord avec [191, Proposition 3] dans le cas non décimé, cad.  $\delta = 1$ .



On s'intéresse maintenant au calcul de  $f(\mathbf{K}, \mathbf{M}, \delta)$  dans le cas d'un vecteur d'onde réel :

$$\begin{aligned}
 {}^\top \mathbf{J}^\delta \left( {}^\top \mathbf{J}_{\downarrow d}^{\mathbf{K}} - *_{\nu_d^\delta} {}^\top \mathbf{J}_{\uparrow d}^{\mathbf{K}} \right) \mathbf{v}_\delta^{\mathbf{K}-1} &= {}^\top \mathbf{J}^\delta \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_\delta^{\mathbf{K}-1} \end{bmatrix} - *_{\nu_d^\delta} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\delta^{\mathbf{K}-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(\mathbf{K}-1)\delta} \\ \nu_d^{(\mathbf{K}-2)\delta} \\ \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} *_{\nu_d^\delta} \\ \mathbf{0}^{(\mathbf{K}-1)\delta} \\ \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} + (1 - |\nu_d^{2\delta}|) {}^\top \mathbf{J}^\delta \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^{\mathbf{K}-2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 \mathbf{v}_1^{\mathbf{M}} * \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(\mathbf{K}-1)\delta} \\ \nu_d^{(\mathbf{K}-2)\delta} \\ \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} *_{\nu_d^\delta} \\ \mathbf{0}^{(\mathbf{K}-1)\delta} \\ \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} \right) &= \nu_d^{(\mathbf{K}-2)\delta} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(\mathbf{K}-1)\delta} \\ \mathbf{v}_1^{\mathbf{M}} \\ \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} - *_{\nu_d^\delta} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{\mathbf{M}} \\ \mathbf{0}^{(\mathbf{K}-1)\delta} \\ \mathbf{0}^{\delta-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}
 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{f(\mathbf{K}, \mathbf{M}, \delta) = \frac{1}{\mu_{\mathbf{K}-1, \delta}^2 \mu_{\mathbf{M}, 1}^2} \left( \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 - 2\Re\{\mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}\} \right) = 2 \frac{\min(\mathbf{M}, (\mathbf{K}-1)\delta)}{(\mathbf{K}-1)^2 \mathbf{M}^2}} \quad (\text{G.2.3})$$