



**HAL**  
open science

**Simulation multi-échelles par  $EF^2$  de structures  
composites périodiques en régime  
viscoélastique-viscoplastique- endommageable avec  
couplage thermomécanique fort.**

El-Hadi Tikarrouchine

► **To cite this version:**

El-Hadi Tikarrouchine. Simulation multi-échelles par  $EF^2$  de structures composites périodiques en régime viscoélastique-viscoplastique- endommageable avec couplage thermomécanique fort.. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2019. Français. NNT : 2019ENAM0032 . tel-02409393

**HAL Id: tel-02409393**

**<https://pastel.hal.science/tel-02409393v1>**

Submitted on 13 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2019-ENAM-0032

École doctorale n° 432: Science des Métiers de l'ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité "Mécanique-Matériaux"**

présentée et soutenue publiquement par

**EI-hadi TIKARROUCHINE**

le 06 September 2019

**Simulation multi-échelles par  $EF^2$  de structures composites  
périodiques en régime viscoélastique-viscoplastique-  
endommageable avec couplage thermomécanique fort**

Directeur de thèse: **Fodil Meraghni**  
Co-encadrement de la thèse: **George Chatzigeorgiou**

**Jury**

**M. Olivier Allix**, Professeur, ENS-Paris-Saclay, LMT-Cachan  
**Mme. Elhem Ghorbel**, Professeur, Université de Cergy-Pontoise  
**M. Noel Lahellec**, Maître de conférences (HDR), Aix-Marseille Université, LMA-CNRS  
**M. Amine Ammar**, Professeur, Arts et Métiers ENSAM - Campus Angers  
**M. Hamid Zahrouni**, Professeur, Université de Lorraine  
**M. Fodil Meraghni**, Professeur, Arts et Métiers ENSAM - Campus Metz  
**M. George Chatzigeorgiou**, CR1 (HDR), CNRS, Arts et Métiers ENSAM - Campus Metz  
**M. Francis Praud**, Maître de conférences, Arts et Métiers ENSAM - Campus Metz

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Invité

**T  
H  
È  
S  
E**





## Remerciements

Je tiens d'abord à adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse, Professeur **Fodil Mergahni** pour m'avoir proposé et accordé sa confiance pour ces travaux de thèse qui traitent un sujet pluridisciplinaire et ouvert. Je tiens à saluer également ses conseils avisés, son soutien et son encouragement durant ces trois années. J'espère être à la hauteur de ses attentes et de sa confiance. C'est un honneur d'avoir profité de ses compétences et de ses dons pédagogiques et humains.

Mes remerciements s'adressent également à mon co-encadrant Monsieur **George Chatzigeorgiou** pour son soutien, ses conseils et encouragements tout au long de ma thèse et pour m'avoir fait découvrir les méthodes de calcul multi-échelles, l'homogénéisation périodique et développement de lois de comportement. Je salue vivement sa gentillesse, ses conseils judicieux et toute l'aide qu'il m'a apporté. Il était toujours disponible pour répondre à mes questions lors de mes passages réguliers à son bureau ou lors des discussions dans les couloirs!!

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur **Olivier Allix** d'avoir accepté de présider mon jury de thèse ainsi que pour ses remarques et sa bonne humeur. Je tiens à remercier vivement Madame **Elhem Ghorbel** et Monsieur **Noel Lahellec** qui ont accepté la pénible tâche de rapporteurs. Merci pour vos rapports enrichissants et pour vos questions pertinentes. Mes plus sincères remerciements vont également à Messieurs **Amine Ammar** et **Hamid Zahrouni** pour avoir accepté d'être membres de mon jury et d'examiner mon travail et apporté des remarques très intéressantes.

Je tiens également à remercier **Boris Piotrowski** et **Sylvain Pagura** pour le support informatique et technique. Mes remerciements vont également à **Yves Chemisky**, **Francis Praud**, **Adil Benaarbia**, **Kevin Bonnay** et **Laurent Peltier** pour leurs disponibilités et pour toute l'aide apportée. Leurs portes étaient toujours ouvertes pour moi.

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Étude des Microstructure et Mécanique des Matériaux (LEM3) à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - Campus de Metz. Tout au long de ma thèse, j'ai pu apprécier l'ambiance qui y règne. Je tiens donc à remercier tous les membres de l'équipe SMART pour leur accueil durant ce projet.

Mes remerciements s'adressent à tous mes amis et mes collègues au LEM3 pour leurs gentillesse ainsi que pour tous les bons moments passés ensemble : **Aziz Nasri, Pascal Pomarede, Paul Didier, Nada Miquoi, Paul Lohmuller, Mathilde Barral, Clément Nony-Davadie, Chrysoula Chatzigeorgiou, Younes EL HACHI, Nadia Achour, Francis Adzima, Dimitris Chatziathanasiou, Dimitris Anagnostou, Pierre Charbonnier, Patrick Moll, Gaël Lecoz, Dominique Vincent.**

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude à mes parents et je dédie ce travail pour eux. Vous avez manifesté beaucoup de sacrifices afin de me voir grandir devant vos yeux. Vous avez toujours voulu que je sois ce que je suis, et aujourd'hui, je vous remercie de tout mon cœur pour tous les sacrifices que vous avez faite pour moi.

Mes chaleureux remerciements vont particulièrement à **Dina**, mon épouse, pour son soutien, son aide et sa patience durant ces années de thèse. Merci beaucoup de m'avoir supporté surtout durant ces derniers mois de rédaction.

J'exprime toute ma gratitude à mes chères sœurs, mon frère et son épouse ainsi que leurs enfants, pour leurs soutiens tout au long de cette période malgré la distance. J'apprécie beaucoup la grande affection que vous tenez pour moi.

Enfin, je remercie aussi tous mes amis et surtout mon beau-frère **Oussama** et mon amis, **Yahia Achour** pour leurs soutiens et leurs aides.

Que les oubliés me pardonnent. . .

# Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xvii
Notations	xix
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2 Cadre théorique d'homogénéisation périodique et modélisation multi-échelles</b>	<b>5</b>
2.1 Introduction . . . . .	5
2.2 Homogénéisation périodique . . . . .	9
2.2.1 Transition d'échelle . . . . .	10
2.2.2 Périodicité . . . . .	13
2.2.3 Solution du problème macroscopique . . . . .	15
2.2.4 Solution du problème microscopique . . . . .	15
2.2.5 Homogénéisation en élasticité linéaire . . . . .	16
2.2.6 Homogénéisation non linéaire . . . . .	19
2.3 Méthodes d'homogénéisation à champs moyens . . . . .	20
2.3.1 Méthode de Mori-Tanaka . . . . .	20
2.4 Conclusions . . . . .	22
<b>3 Simulation de la réponse non linéaire des structures composites 3D en régime VPD par la Méthode EF<sup>2</sup></b>	<b>25</b>
3.1 Introduction . . . . .	25
3.2 Transition d'échelle non linéaire : approche incrémentale . . . . .	27
3.2.1 Résolution du problème de la cellule unitaire . . . . .	27
3.3 Comportement non-linéaire local de la matrice . . . . .	34
3.3.1 Lois d'état et lois d'évolution . . . . .	35

3.4	Calcul multi-échelles par EF <sup>2</sup> et implémentation numérique . . . . .	38
3.4.1	Concept et algorithme numérique de la méthode EF <sup>2</sup> . . . . .	39
3.5	Applications et capacités de la méthode EF <sup>2</sup> dans le calcul des structures composites 3D . . . . .	45
3.5.1	Comparaison avec la méthode d'homogénéisation semi-analytique des composites multi-couches . . . . .	45
3.5.2	Structure composite 3D (Meuwissen) renforcée de fibres courtes	48
3.5.3	Structure composite complexe 3D . . . . .	53
3.6	Conclusions . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Validation expérimentale de l'approche EF<sup>2</sup> pour une structure en composite PA66-tissé sergé 2-2</b>	<b>59</b>
4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Stratégie de calcul par EF <sup>2</sup> . . . . .	61
4.2.1	Représentation géométrique de la structure macroscopique et leur microstructure . . . . .	62
4.2.2	Lois de comportement des constituants . . . . .	65
4.2.3	Récapitulatif des paramètres des lois de comportement : intro- duction dans le calcul EF <sup>2</sup> . . . . .	73
4.3	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	76
4.3.1	Géométrie des échantillons et préparation des conditions d'essais	76
4.3.2	Mesure des champs cinématiques par corrélation d'images numé- riques "DIC" . . . . .	79
4.4	Résultats expérimentaux et comparaison avec l'approche EF <sup>2</sup> . . . . .	81
4.4.1	Essais de traction monotone pour $\theta = 0^0$ . . . . .	81
4.4.2	Essais de traction monotone pour $\theta = \pm 45^0$ . . . . .	87
4.4.3	Essais de traction monotone pour $\theta = \pm 30^0$ . . . . .	91
4.5	Analyse macro-micro de la réponse mécanique du composite tissé obtenue par la stratégie de calcul EF <sup>2</sup> . . . . .	95
4.5.1	Chargements monotones à $\theta = 0^0$ . . . . .	95
4.5.2	Chargements monotones pour $\theta = \pm 30^0$ . . . . .	101
4.6	Conclusions . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Modélisation multi-échelles thermomécanique fortement couplée des structures composites à base polymère</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction . . . . .	107

5.2	Cadre théorique et transition d'échelles d'un composite sous conditions thermomécaniques . . . . .	109
5.2.1	Problème macroscopique . . . . .	112
5.2.2	Problème microscopique . . . . .	113
5.3	Implémentation numérique : processus itératif et opérateurs tangents . . . . .	118
5.3.1	Problème macroscopique . . . . .	120
5.3.2	Problème de la cellule unitaire (problème microscopique) . . . . .	121
5.3.3	Comportement thermoélastique-viscoplastique avec écrouissage isotrope de la matrice . . . . .	124
5.4	Calcul multi-échelles par EF <sup>2</sup> d'un problème thermomécanique fortement couplé . . . . .	127
5.5	Applications numériques et capacités de la stratégie de calcul EF <sup>2</sup> . . . . .	131
5.5.1	Validation de l'approche EF <sup>2</sup> par comparaison avec la structure entièrement maillée . . . . .	132
5.5.2	Structure 3D non symétrique constituée d'un composite renforcé de fibres de verre courtes . . . . .	136
5.6	Conclusions . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>
	<b>Annexe A Solution semi-analytique d'un composite multi-couches</b>	<b>175</b>
A.1	Problème local de la cellule unitaire . . . . .	175
A.2	Calcul des opérateurs tangents . . . . .	178
	<b>Annexe B Convergence forte et convergence faible de la température</b>	<b>181</b>
B.1	Problème thermique 1D d'un composite multi-couches . . . . .	181
	<b>Annexe C Connexion de la cellule unitaire avec les nœuds de pilotage thermiques</b>	<b>185</b>
C.1	Équations thermiques pour les faces . . . . .	186
C.2	Équations thermiques pour le premier groupe d'arêtes . . . . .	186
C.3	Équations thermiques pour le deuxième groupe d'arêtes . . . . .	188
C.4	Équations thermiques pour le troisième groupe d'arêtes . . . . .	189
C.5	Équations thermiques pour les nœuds situés dans les huit coins de la cellule unitaire . . . . .	189



# Table des figures

2.1	Représentation schématique de principe d'homogénéisation périodique par transition d'échelle micro-macro. Ce dernier reste valable tant que la condition $\bar{V} \gg V$ est satisfaite. . . . .	9
2.2	Définition de la cellule unitaire du milieu périodique dans un réseaux hexagonal.	10
2.3	Définition du champ de déplacement comme la somme d'une partie affine et d'une fluctuation périodique . . . . .	13
2.4	Schéma de calcul par transition d'échelle. . . . .	16
2.5	Composite avec plusieurs inhomogénéités distribuées d'une manière aléatoire dans la matrice [31]. . . . .	21
3.1	Représentation schématique d'un matériau composite à microstructure périodique avec prise en compte de la séparation d'échelle. . . . .	28
3.2	Définition des conditions aux limites périodique (CLPs) sur la cellule unitaire en 2D soumise à une déformation macroscopique. . . . .	29
3.3	Connexion des nœuds de pilotages avec la cellule unitaire. . . . .	31
3.4	Connexion de nœud de pilotage 11 avec la cellule unitaire ( $u_{11}^{cd} = \bar{\varepsilon}_{11}$ et les autres composantes sont nulles). . . . .	31
3.5	Connexion de nœud de pilotages 13 avec la cellule unitaire ( $u_{13}^{cd} = 2\bar{\varepsilon}_{13}$ et les autres composantes sont nulles). . . . .	32
3.6	Schéma rhéologique du comportement viscoplastique avec endommagement ductile de la matrice polymère [149]. . . . .	35
3.7	Comportement global du composite implémenté sous la forme d'une "Méta-UMAT" (User Material Subroutine) qui fait appel au problème microscopique (cellule unitaire) à chaque incrément de déformation/temps. . . . .	41
3.8	Organigramme de l'algorithme de calcul à deux échelles (EF <sup>2</sup> ) dans Abaqus/Standard pour un cas non linéaires. . . . .	43
3.9	Étapes de parallélisation du code EF <sup>2</sup> dans Abaqus/Standard. . . . .	44



3.10	Dimensions de la structure composite multi-couches ainsi que la microstructure associée à chaque point d'intégration macroscopique. . . . .	47
3.11	Conditions aux limites et chargement macroscopiques appliqués sur la structure composite multi-couches. . . . .	47
3.12	Comparaison du résultat numérique de l'approche EF <sup>2</sup> avec une solution semi-analytique sur un composite multi-couches à phases élastoplastiques en termes de réponses contrainte-déformation macroscopique. . . . .	48
3.13	Microstructure du composite renforcé par des fibres courtes distribuées d'une manière périodique dans la matrice. . . . .	49
3.14	Essai charge-décharge à différentes vitesses de chargement sur une structure composite 3D de type Meuwissen. . . . .	50
3.15	Réponse globale de la structure composite en termes de force-déplacement pour la composante 11. Comparaison entre la solution EF <sup>2</sup> et la solution de Mori-Tanaka. . . . .	51
3.16	Réponse macroscopique du composite au point A en termes de contrainte-déformation pour les composantes 11, 22, 33 et en cisaillement 12 (comparaison entre EF <sup>2</sup> et la solution de Mori-Tanaka). . . . .	52
3.17	Champs de contrainte macro-micro de composite pour la composante 11 avec Abaqus/Standard. . . . .	53
3.18	Essai de traction à différentes vitesses de chargement sur une structure composite 3D de démonstration. . . . .	54
3.19	Réponse macroscopique du composite au point A en termes de contrainte-déformation pour les composantes 11, 22, 33 et de cisaillement 12. . . . .	55
3.20	Réponse macroscopique du composite au point B en termes de contrainte-déformation pour les composantes 11, 22, 33 et de cisaillement 12. . . . .	55
3.21	Champs ds contraintes macroscopique et microscopique du composite dans la direction de traction 1 obtenus via la méthode EF <sup>2</sup> dans Abaqus/Standard. . . . .	56
4.1	Dimensions et conditions aux limites appliquées sur le macro-modèle. . . . .	62
4.2	Définition géométrique de la microstructure construite via le logiciel <i>TexGen</i> . Le domaine bleu représente la phase matricielle, tandis que les domaines rouge et vert représentent les torons dans le sens chaîne et trame, respectivement. . . . .	63
4.3	Microstructure du composite étudié obtenue par microtomographie à rayons X. . . . .	64
4.4	Discrétisation spatial des modèles macroscopique et microscopique dédiés pour l'analyse multi-échelles. . . . .	65

4.5	Représentation 2D du motif de tissage. Le domaine bleu représente la matrice PA66 et les domaines rouge et vert représentent les torons de chaîne et trame, respectivement. . . . .	65
4.6	Schéma rhéologique du comportement viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile pour la matrice polymère [149]. . . . .	67
4.7	Mécanismes d'endommagement transversal dans les composites unidirectionnels (a) initiation des micro-fissures, (b) propagation des micro-fissures par coalescence, (c) fracture de l'interface fibre/matrice [75]. . . . .	70
4.8	Évaluation de l'endommagement avec l'approche d'homogénéisation à champs moyens : (a) État initial du matériau unidirectionnel isotrope transverse. (b) Introduction des micro-fissures dans le VER sous forme d'une densité de vide $\gamma_c$ . (c) Évaluation de la réduction de la rigidité causée par $\gamma_c$ par homogénéisation [148]. . . . .	70
4.9	Comportement global du composite tissé implémenté sous forme d'une "Méta-UMAT" qui fait appel au problème microscopique (cellule unitaire) pour chaque incrément de temps/déformation. . . . .	76
4.10	Géométrie des éprouvettes utilisées dans les essais expérimentaux montrant la position relative de la zone utile ainsi que la partie modélisée. . . . .	77
4.11	Orientations des échantillons choisis pour les essais expérimentaux. . . . .	78
4.12	Mouchetis réalisé sur une éprouvette d'essai à l'aide d'une bombe aérosol. . . . .	79
4.13	(a) Protocole expérimental pour les essais de traction monotone sur le composite étudié (b) système d'acquisitions des données "DIC" et caméra thermique. . . . .	80
4.14	Réponse mécanique du composite orienté à $\theta = 0^0$ pour les deux vitesses de chargement étudiées (trois échantillons pour chaque vitesse). . . . .	81
4.15	Réponse mécanique globale du composite orienté à $\theta = 0^0$ pour deux vitesses de chargement (comparaison des résultats expérimentaux et EF <sup>2</sup> ). . . . .	82
4.16	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux dans la direction de chargement (direction 2) obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = 0^0$ pour les trois temps d'analyse : $t_1$ début de la non linéarité, $t_2$ milieu de chargement et $t_3$ avant la rupture (Figure 4.15). . . . .	84
4.17	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux dans la direction 1 obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = 0^0$ pour les trois temps d'analyse représentés sur la Figure 4.15 ( $t_1, t_2$ et $t_3$ ). . . . .	85

4.18	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux dans la direction de cisaillement 1-2 obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = 0^\circ$ pour les trois temps d'analyse représentés sur la Figure 4.15 ( $t_1, t_2$ et $t_3$ ). . . . .	86
4.19	Réponse mécanique globale du composite orienté à $\theta = \pm 45^\circ$ pour les deux vitesses de chargement (comparaison des résultats expérimentaux et EF <sup>2</sup> ). . . . .	87
4.20	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique dans la direction 2 (direction de chargement) obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = \pm 45^\circ$ pour les trois temps de sollicitation représentés sur la Figure 4.19. . . . .	89
4.21	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique dans la direction 1 obtenus par "DIC" et EF <sup>2</sup> pour $\theta = \pm 45^\circ$ avant rupture. . . . .	90
4.22	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique pour le cisaillement 12 obtenus par "DIC" et EF <sup>2</sup> pour $\theta = \pm 45^\circ$ avant rupture. . . . .	90
4.23	Réponse mécanique globale du composite orienté à $\theta = \pm 30^\circ$ pour les deux vitesses de chargement (comparaison des résultats expérimentaux et EF <sup>2</sup> ). . . . .	91
4.24	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des évolutions spatio-temporelles des champs de déformation obtenus par "DIC" et EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = \pm 30^\circ$ dans la direction de chargement pour les trois temps d'analyse ( $t_1, t_2$ et $t_3$ ). . . . .	93
4.25	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique dans la direction 1 obtenus par "DIC" et l'approche EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = \pm 30^\circ$ avant rupture. . . . .	94
4.26	Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique pour la direction de cisaillement 1-2 obtenus par "DIC" et l'approche EF <sup>2</sup> pour la configuration $\theta = \pm 30^\circ$ avant rupture. . . . .	94
4.27	Distribution spatiale des champs de contraintes macroscopiques ( $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}$ et $\bar{\sigma}_{12}$ ) dans la plaque trouée en utilisant un calcul EF <sup>2</sup> pour la configuration $[0^\circ]$ . . . . .	96
4.28	Réponses mécaniques macroscopiques du composite pour la configuration $\theta = 0^\circ$ au point A de la structure (Figure 4.27) obtenues par EF <sup>2</sup> pour les composantes 11, 22, 33 et 12. Les deux vitesses de chargement sont $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ et $0.024 \text{ mm.s}^{-1}$ . . . . .	97

4.29	Réponses mécaniques macroscopiques du composite pour la configuration $\theta = 0^0$ au point B de la structure (Figure 4.27) obtenues par EF <sup>2</sup> pour les composantes 11, 22, 33 et 12. Les deux vitesses de chargement sont $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ et $0.024 \text{ mm.s}^{-1}$ . . . . .	97
4.30	Distribution des champs locaux à la fin de la simulation des essais de traction monotone sens trame, effectuée avec une vitesse de $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ sur le composite à configuration $\theta = 0^0$ au point A de la structure (Figure 4.27). Les contraintes locales dans les torons sont exprimées dans le repère local des torons. . . . .	99
4.31	Distribution des champs locaux à la fin de la simulation des essais de traction monotone sens trame effectuée avec une vitesse de $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ sur le composite à configuration $\theta = \pm 0^0$ au point B de la structure (Figure 4.27). Les contraintes locales dans les torons sont exprimées dans le repère local des torons. . . . .	100
4.32	Distribution des champs de contraintes macroscopiques pour les composantes $\bar{\sigma}_{11}$ , $\bar{\sigma}_{22}$ et $\bar{\sigma}_{12}$ dans la macro-structure pour la configuration $\theta = \pm 30^0$ , obtenue par la méthode EF <sup>2</sup> . . . . .	101
4.33	Réponses mécaniques macroscopiques du composite pour la configuration $\theta = \pm 30^0$ au point A de la structure (Figure 4.27) obtenues par EF <sup>2</sup> pour les composantes 11, 22, 33 et 12. Les deux vitesses de chargement sont $0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ et $0.033 \text{ mm.s}^{-1}$ . . . . .	102
4.34	Champs locaux dans la microstructure observés au point A de la structure (Figure 4.27) à la fin de la simulation des essais de traction monotone pour la configuration $\theta = \pm 30^0$ , effectuée avec une vitesse de $0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ . Les contraintes locales dans les torons sont exprimées dans le repère local des torons. . . . .	103
4.35	Évolution de l'endommagement (D) dans la matrice ainsi que la densité des micro-fissures $\gamma_c$ dans les torons pour les temps d'analyse $t = 1.8 \text{ s}$ , $t = 3.4 \text{ s}$ et $t = 4.2 \text{ s}$ pour la configuration $\theta = \pm 30^0$ . . . . .	104
5.1	Représentation schématique du problème de séparation d'échelles. . . . .	110
5.2	L'organigramme de l'algorithme de calcul par EF à deux échelle (EF <sup>2</sup> ) pour une réponse thermomécanique non linéaire fortement couplée d'un composite dans Abaqus/Standard. . . . .	128
5.3	Connexion des nœuds de pilotage avec la cellule unitaire pour le calcul des composantes des opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques. . .	129
5.4	Connexion de la cellule unitaire avec les nœuds de pilotage thermiques. . . .	131

5.5	Dimensions et discrétisation du (a) modèle macroscopique et (b) de la micro-structure observée à chaque point d'intégration macroscopique de la simulation EF <sup>2</sup> . . . . .	133
5.6	Discrétisation EF de la structure 3D entièrement maillée. . . . .	134
5.7	Comparaison de la réponse macroscopique de l'approche EF <sup>2</sup> et la solution EF à échelle unique en termes de contrainte-déformation. . . .	135
5.8	Erreur relative de la réponse mécanique macroscopique des deux solutions EF <sup>2</sup> et EF à une seule échelle. . . . .	135
5.9	Comparaison de la température macroscopique des deux approches au point A situé à la même position dans les deux structures. . . . .	136
5.10	Dimensions et discrétisation spatiale de la structure macroscopique non symétrique en 3D. . . . .	137
5.11	Discrétisation et dimensions spatiales de la cellule unitaire du composite renforcé par des fibres courtes, maillée avec des éléments tétraédriques de type C3D4. . . . .	137
5.12	Champs des flux de chaleur microscopiques générés pour le calcul de la conductivité thermique macroscopique $\bar{\kappa}$ dans les trois directions de l'espace : (a) $q_1$ , (b) $q_2$ et (c) $q_3$ . . . . .	138
5.13	Conditions aux limites thermomécaniques ainsi que le trajet de chargement mécanique appliqué sur la structure macroscopique. . . . .	140
5.14	Distribution des champs de contraintes macroscopiques dans la structure (en MPa) pour la direction de chargement (direction 1) en utilisant l'approche EF <sup>2</sup> pour les temps d'analyse de (a) $t_2 = 200s$ et (b) $t_3 = 300s$ . . . . .	142
5.15	Distribution des champs de contraintes microscopiques dans la micro-structure (en MPa) dans la direction de chargement au point critique A de la structure en utilisant l'approche EF <sup>2</sup> pour les temps d'analyse de (a) $t_2 = 200s$ et (b) $t_3 = 300s$ . . . . .	142
5.16	Évolution de la contrainte macroscopique en fonction de la déformation au point critique A de la structure (Figure 5.14) pour les composantes 11, 22, 33 et le cisaillement 12. . . . .	143
5.17	Distribution spatio-temporelle de la température macroscopique (en $K$ ) dans la structure composite pour les temps d'analyse (a) $t_1 = 100s$ , (b) $t_2 = 200s$ et (c) $t_3 = 300s$ . Le champ du température hétérogène tend à être uniforme à la fin de l'analyse. . . . .	143

5.18	Évolution de la température macroscopique aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) pour la durée totale d'analyse. Une élévation globale de la température de 16°C est obtenue lors du chargement thermomécanique en 300s. . . . .	144
5.19	Champ de distribution de la dissipation locale $\dot{\Phi}$ dans la microstructure correspondant au point critique caractéristique A de la structure pour les temps d'analyse (a) $t_1 = 100s$ et (b) $t_3 = 300s$ (en $mW.mm^{-3}$ ). . . . .	144
5.20	Évolution de la dissipation locale macroscopique $\bar{\dot{\Phi}}$ aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) durant l'analyse. . . . .	145
5.21	Discrétisation EF de la structure macroscopique 3D et les conditions aux limites thermomécaniques appliquées. . . . .	146
5.22	Champs de contrainte macroscopiques dans la structure composite dans la direction 1 pour deux temps d'analyse : (a) $t_2 = 600s$ correspondant à la traction et (b) $t_3 = 800s$ correspondant à la compression. . . . .	148
5.23	Champs de contrainte microscopiques dans la microstructure correspondante au point critique A de la structure dans la direction 1 pour les deux temps d'analyse : (a) $t_2 = 600s$ et (b) $t_2 = 800s$ . . . . .	148
5.24	Évolution des contraintes macroscopiques en fonction des déformations au point critique A de la structure (Figure 5.22) pour les composantes 11, 22, 33 et le cisaillement 12. . . . .	149
5.25	Distribution macroscopique de la température (en $K$ ) dans la structure macroscopique pour les temps d'analyse : (a) $t_2 = 600s$ , (b) $t_3 = 800s$ et (c) $t_4 = 1000s$ . . . . .	149
5.26	Évolution de la température macroscopique aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) pour la durée totale d'analyse. . . . .	150
5.27	Distribution des champs de la dissipation local $\dot{\Phi}$ (en $mW.mm^{-3}$ ) au point caractéristique A de la structure pour les temps d'analyse : (a) $t_1 = 400s$ , (b) $t_2 = 600s$ et (c) $t_3 = 800s$ . . . . .	150
5.28	Évolution de l'effet du dissipation locale sur la température macroscopique aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) au cours de l'analyse. . . . .	151
A.1	Cellule unitaire d'un composite multi-couches avec $N$ phases différentes. . . . .	176
B.1	Composite multi-couches soumis à une élévation de température sur une extrémité [31]. . . . .	182

---

B.2	(a) Variation de la température en fonction de la position pour différentes valeurs de $\epsilon$ et (b) comparaison du profil de la température entre le composite réel et le matériau homogénéisé à $t = 1000$ s. . . . .	183
B.3	Un zoom sur la variation spatiale de (a) la température et (b) le gradient de température dans le composite réel pour $\epsilon = 0.001$ à $t=1000$ s. . . .	183
C.1	Notation des nœuds situés sur les faces, les arêtes et les coins de la cellule [148].	185
C.2	Équations thermiques pour toutes les faces parallèles opposées de la cellule unitaire. . . . .	186
C.3	Équations thermiques pour le 1 <sup>er</sup> groupe d'arêtes de la cellule unitaire. . . .	187
C.4	Équations thermiques pour le 2 <sup>ème</sup> groupe d'arêtes de la cellule unitaire. . .	188
C.5	Équations thermiques pour le 3 <sup>ème</sup> groupe d'arêtes de la cellule unitaire. . .	189
C.6	Équations thermiques pour les huit coins de la cellule unitaire. . . . .	190

# Liste des tableaux

2.1	Équations de base de la transition d'échelle entre l'échelle macroscopique et microscopique [182]	11
3.1	Lois d'état et lois d'évolution du modèle VPD de la matrice	38
3.2	Paramètres matériaux des deux phases	46
3.3	Paramètres matériaux pour la matrice polymère	49
4.1	Dimensions caractéristiques de la microstructure tissée du composite étudié [148].	64
4.2	Lois d'état et lois d'évolution du modèle VE-VPD de la matrice PA66 [149, 148].	68
4.3	Paramètres de la matrice polyamide 6-6 [148].	74
4.4	Paramètres des torons [148].	75
4.5	Écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique pour la configuration $\theta = 0^0$ .	82
4.6	Écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique pour la configuration $\theta = \pm 45^0$ .	88
4.7	Écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique pour $\theta = \pm 30^0$ .	92
5.1	Transition d'échelles entre les champs macroscopique et microscopique [30]. Les scalaires $e$ et $\bar{e}$ désignent l'énergie interne microscopique et macroscopique respectivement.	112
5.2	Lois d'état et lois d'évolution	126
5.3	Paramètres du matériau composite modélisé constituer d'une matrice polymère thermo-viscoplastique renforcée par des fibres de verre courtes	139





# Notations

## Abbreviations

1D : Unidimensionnel.

2D : Bidimensionnel.

3D : Tridimensionnel.

CLPs : Conditions aux limites périodiques.

Coeff. : Coefficient.

DIC : Corrélation d'images numériques (Digital Image Correlation).

EF : Éléments finis.

EF<sup>2</sup> : Éléments finis au carré.

Exp. : Exposant.

KV : Branche de Kelvin-Voigt.

RH : Humidité relative.

SDVs : Les variables d'états internes (Solution Dependent Variables).

VE-VPD : Viscoélastique viscoplastique endommageable.

VE : Viscoélastique.

VER : Volume élémentaire représentatif.

VP : Viscoplastique.

VPD : Viscoplastique et endommagement.

## Symboles

Les scalaires :  $A, B, \dots, a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$

Les vecteurs :  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \dots$

Tenseurs d'ordre 2 :  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \dots \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \dots$

Tenseurs d'ordre 4 :  $\mathbb{A}, \mathbb{B} \dots$

Tenseurs identité d'ordre 2 et 4 :

$$(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij}, \quad (\mathbb{I})_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

### Produits tensoriels

Produit contracté sur deux indices :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}, \quad (\mathbb{A} : \mathbf{B})_{ij} = A_{ijkl}B_{kl}, \quad (\mathbb{A} : \mathbb{B})_{ijkl} = A_{ijmn}B_{mnkl}.$$

Produit contracté sur un seul indice :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})_i = A_{ij} b_j.$$

Produit d'un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre  $n + 1$  et un tenseur  $\mathbf{B}$  d'ordre  $m + 1$  donne un tenseur d'ordre  $[n + m]$  :

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{B}} = A_{i_1 i_2 \dots i_n q} B_{i_{n+1} i_{n+2} \dots i_{n+m} q}.$$

Produit d'un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre  $n + 2$  et un tenseur  $\mathbf{B}$  d'ordre  $m + 2$  donne un tenseur d'ordre  $[n + m]$  :

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{B}} = A_{i_1 i_2 \dots i_n p q} B_{i_{n+1} i_{n+2} \dots i_{n+m} p q}.$$

Produits dyadiques :

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j, \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}, \quad (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}, \\ (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}.$$

### Opérateurs tensoriels

Inverse d'un tenseur d'ordre 2 et 4 :

$$\mathbf{A}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \\ \mathbb{A}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A}^{-1} : \mathbb{A} = \mathbb{A} : \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}.$$

Trace d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = A_{ii}.$$

Transposé d'un tenseur :

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}, \quad (\mathbb{A}^T)_{ijkl} = A_{klji}.$$

### Opérateurs différentiel

Divergence :

$$\text{div}(\mathbf{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \quad (\text{div}(\mathbf{A}))_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}.$$

Gradient :

$$(\mathbf{grad}(a))_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}, \quad (\mathbf{grad}(\mathbf{a}))_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Vitesse :

la vitesse d'une quantité d'ordre indéfinie  $\mathcal{A}$  est donnée par :  $\dot{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}$ .

### Définitions

Contrainte déviatorique :

$$\mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \text{hyd}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}.$$

Contrainte hydrostatique :

$$\text{hyd}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Contrainte équivalente au sens de von Mises :

$$\text{eq}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma}))}.$$

La partie positif et négatif d'un scalaire :

$$\langle a \rangle_+ = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}, \quad \langle a \rangle_- = \begin{cases} a & \text{si } a \leq 0 \\ 0 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Moyenne :

la moyenne d'une quantité d'ordre indéfinie  $\mathcal{A}$  est donnée par :  $\langle \mathcal{A} \rangle$ .

### Notation de Voigt

Les tenseurs de contrainte et de déformation : Pour la notation de Voigt les tenseurs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont écrits sous forme d'un vecteur  $6 \times 1$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{Sym} & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}.$$

Produit contracté entre le tenseur de contrainte et le tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{array} \right\}.$$

Tenseur de rigidité d'ordre 4 :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{pmatrix}.$$

Tenseur de souplesse d'ordre 4 :

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1112} & 2S_{1113} & 2S_{1123} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2213} & 2S_{2223} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3313} & 2S_{3323} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1212} & 4S_{1213} & 4S_{1223} \\ 2S_{1311} & 2S_{1322} & 2S_{1333} & 4S_{1312} & 4S_{1313} & 4S_{1323} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2312} & 4S_{2313} & 4S_{2323} \end{pmatrix}.$$

Tenseurs d'identité d'ordre 2 et 4 :

$$\mathbf{I} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ sym & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$


---

# Chapitre 1

## Introduction générale

Dans un contexte industriel fortement concurrentiel sous-tendu par des considérations d'allègement de structures et des exigences de réduction des émissions de CO<sub>2</sub>, l'utilisation des matériaux composites constitue une solution technologique de choix en termes de résistances et de performances. Pour des applications dans le transport, ces matériaux permettent d'alléger les composants ou leurs sous-ensembles en maintenant le niveau d'exigence requis pour la sécurité et la durabilité. En effet, dans l'industrie de l'automobile, la réduction de la masse de composants est l'une des problématiques principales avec en toile de fond l'optimisation de leurs performances et la diminution de leurs coûts de fabrication. Les composites à matrice thermoplastique avec des renforts périodiques et/ou aléatoires sont des candidats potentiels pour de telles applications à forte valeur. L'intérêt des matrices thermoplastiques réside dans leur facilité de mise en œuvre (principalement par injection) et leurs propriétés thermomécaniques avérées. Ces polymères sont bien connus pour leur comportement dépendant du temps et de la température. De plus, certains thermoplastiques à base de polyamide ont un comportement extrêmement sensible aux conditions environnementales à savoir l'humidité relative et la température de service. Cette dépendance conduit à une combinaison de la rhéologie et des processus de dégradation complexes des différents constituants.

L'un des freins majeurs à l'utilisation intensive des composites à matrice thermoplastique pour des applications structurales réside dans la difficulté à maîtriser leurs réponses thermomécaniques à différentes échelles. Un des enjeux consiste à prédire et simuler la réponse globale d'une structure composite sous chargement et y refléter les effets de microstructure et du couplage thermo-hygro-mécanique. Cette problématique nécessite le développement d'outils avancés de calcul prédictifs et de simulations numériques adaptées à la filière composite et capables de maîtriser l'interaction : microstructure - procédé – performances dans la chaîne de conception.

Cependant, la maîtrise du comportement thermomécanique des thermoplastiques renforcés intégrant l'endommagement et la rhéologie est une problématique encore largement ouverte. Le caractère multi-échelles des matériaux composites et les effets de microstructure amplifient cette complexité. En effet, les outils de simulation numérique sont fortement en développement et à valider expérimentalement. Depuis quelques années, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes de modélisations afin de décrire les mécanismes régissant le comportement du composite d'une manière suffisamment fine. Néanmoins, la plupart de ces approches ne tiennent pas compte des effets induits par la microstructure sur la réponse de la structure ainsi que les interactions entre les effets mécaniques et thermiques résultant principalement de la dissipation mécanique et du couplage thermomécanique. Pour cette raison, la prédiction du comportement mécanique et/ou thermomécanique couplé des matériaux composites avec prise en compte des effets microstructuraux constitue à présent un fort courant de recherche. Parmi les nombreuses méthodes numériques utilisées pour résoudre les problèmes non linéaires des composites à renforts architecturés, les méthodes basées sur le principe d'homogénéisation périodique sont les plus adaptées à ce type de matériaux. Elles permettent de modéliser le comportement global d'une structure composite considérant les interactions entre les différents constituants observés à l'échelle microscopique. Néanmoins, la plupart des travaux dans la littérature concernent l'homogénéisation périodique de matériaux non linéaires en régimes purement mécanique ou thermomécanique sans couplage sur un point matériel ou des structures 2D.

L'homogénéisation des composites architecturés ayant un comportement fortement non linéaire intégrant la rhéologie (viscoélasticité, plasticité, viscoplasticité) et l'endommagement (ductile et anisotrope) couplés aux effets de température (thermoélasticité, thermo-viscoplasticité, auto-échauffement, dissipation) représente une difficulté d'un ordre supérieur. C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent travail de la thèse dont l'objectif est de développer une approche de modélisation par éléments finis multi-échelles basée sur le principe d'homogénéisation périodique. Cette modélisation à fort contenu physique devra permettre la prédiction des réponses non-linéaires globales et locales de structures composites 3D en régime thermomécanique fortement couplé. La réponse macroscopique des structures composites est simulée en prenant compte tous les effets induits par la microstructure à savoir, les hétérogénéités, les interactions microstructurales ainsi que les effets de couplage thermomécanique et de la dissipation. Une attention particulière sera portée sur les composites à matrice polyamide et à renforts tissés ou fibres de verre courtes.

---

Pour atteindre ces objectifs, un cadre d'homogénéisation périodique est établi via un schéma de calcul par EF<sup>2</sup>, pour résoudre les problèmes des structures multi-échelles, non-linéaires mécaniques et thermomécaniques fortement couplés. Dans l'approche proposée, la réponse macroscopique du composite est déterminée à travers une simulation par EF à deux échelles à l'aide d'un schéma de résolution implicite, utilisant un algorithme numérique spécifique pour résoudre simultanément le système d'équations non linéaire à l'échelle macroscopique et microscopique. Pour cela, une cellule unitaire représentative de la microstructure est affectée à chaque point d'intégration macroscopique. Celle-ci intègre toutes les caractéristiques géométriques et matérielles de la microstructure du composite étudié. Des lois de comportement locaux multi-mécanismes tenant compte de la viscoélasticité, la viscoplasticité, l'endommagement et la thermoélasticité-viscoplasticité ont été développés pour la matrice thermoplastique. Pour les renforts, des modèles élastiques et thermoélastiques ont été adoptés pour les fibres courtes, tandis qu'un modèle constitutif hybride phénoménologique est utilisé pour décrire le comportement local des torons pour le cas des composites tissés. Ce dernier prend en compte, au moyen d'un modèle micromécanique, l'effet de l'endommagement anisotrope et de l'anélasticité causée par la microfissuration transverse des torons.

Parallèlement aux efforts de modélisation menés lors de la mise en place numérique de ce travail de thèse, une approche expérimentale est également mise en œuvre pour la caractérisation de la réponse structurale des composites tissés à matrice polyamide. Celle-ci a alimenté la modélisation multi-échelle développée et a permis sa validation expérimentale sur une configuration d'essai hétérogène.

La démarche suivie pour atteindre les objectifs fixés s'articule principalement sur les quatre chapitres suivants :

- Dans le chapitre 2, un cadre complet de modélisation multi-échelles basé sur le concept d'homogénéisation périodique est présenté ainsi que tous les aspects de transition entre l'échelle microscopique et macroscopique d'un composite. Le chapitre présente brièvement la méthode de champs moyens "Mori-Tanaka" considérée comme une base de comparaison pour valider les résultats de la simulation multi-échelles proposée.
- Dans le chapitre 3, La stratégie de calcul multi-échelles "EF<sup>2</sup>" a été développée pour la prédiction du comportement mécanique macroscopique fortement non-linéaire de structures composites 3D, à microstructure périodique, présentant une réponse dépendante du temps. L'implémentation numérique des calculs a été réalisée au moyen de techniques de calcul parallèle dans Abaqus/Standard. Les capacités de l'approche développée ont été démontrées à travers des simulations



numériques sur des structures composites constituées d'une matrice polymère viscoplastique endommageable renforcée par des fibres de verre courtes.

- Dans le chapitre 4, une approche expérimentale est mise en place pour la validation de l'approche proposée en configuration d'essai hétérogène. Cette validation expérimentale permet également de faire ressortir ces performances et ces capacités prédictives aux trois échelles micro-méso et macroscopique. Le comportement de la matrice polymère est décrit par le modèle constitutif phénoménologique viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile. Tandis que le comportement des torons est décrit par le modèle constitutif hybride phénoménologique micromécanique tenant compte de l'endommagement anisotrope et l'anélasticité induits par les micro-fissures dans les torons. Les performances et les capacités de la méthodes EF<sup>2</sup> ont été démontrées via une comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux pour différentes configurations des séquences d'empilement.
- Dans le chapitre 5, l'approche EF<sup>2</sup> développée a été adaptée aux calculs multi-échelles thermomécaniques fortement couplés non linéaires. Pour cette raison, un cadre d'homogénéisation périodique multi-échelles thermomécaniquement couplé est mis en place. Il vise à prédire le comportement macroscopique dépendant du temps et de la température pour les composites dissipatifs à microstructure périodique. L'approche a été validée à travers un calcul de structure sur un composite constitué d'une matrice thermoélastique-viscoplastique renforcée par des fibres de verre courtes thermoélastiques.

# Chapitre 2

## Cadre théorique d'homogénéisation périodique et modélisation multi-échelles

### 2.1 Introduction

Les matériaux utilisés dans l'industrie peuvent être des matériaux hétérogènes, constitués de plusieurs phases à l'échelle de la microstructure. Un des enjeux majeurs de la mécanique des matériaux est d'accéder à la réponse mécanique aux différentes échelles. D'un point de vue numérique, cette problématique entraîne de nombreuses difficultés pour des problèmes fortement non linéaires car la présence de différentes phases conduit à des comportements mécaniques différents de celui des phases constitutives.

Pour prédire la réponse globale de ces matériaux, plusieurs auteurs ont proposé des modèles constitutifs (modèles phénoménologiques) intégrant différentes rhéologies et mécanismes de déformation, à savoir viscoélasticité [123, 82], viscoplasticité [50, 4, 49], viscoélasticité couplée à la viscoplasticité [122, 121], ou même des modèles viscoélastiques, viscoplastiques couplées à l'endommagement [98, 99, 86, 184, 149]. L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles ne prennent pas en compte l'effet des différentes microstructures observées à l'échelle microscopique sur la réponse macroscopique de la structure. Pour cela, les chercheurs se sont orientés vers des méthodes plus performantes qui peuvent modéliser ces types de matériaux pour pouvoir expliquer les nombreux phénomènes existants entre les différents constituants présents à l'échelle microscopique (e.g. interactions entre fibres, matrice, interface, etc) pour estimer la réponse globale

du composite. Ces méthodes sont connues sous le nom de méthodes d'homogénéisation ou méthodes multi-échelles mettant en œuvre une ou plusieurs transitions d'échelles.

Les méthodes multi-échelles représentant un fort courant de recherche et une thématique encore largement ouverte mobilisant les efforts de la communauté "mécanique des matériaux" dans le monde. Ces méthodes peuvent mener non seulement à des calculs de structures réelles (le cas des méthodes EF<sup>2</sup>), mais aussi elles permettent de concevoir de nouveaux matériaux plus performants (par exemple à la fois plus légers et rigides, ou plus légers et résistants), tout en jouant sur la morphologie et les matériaux constituant les différentes phases de la microstructure. Parmi les méthodes existantes, deux semblent particulièrement intéressantes à cet effet :

- i) Les approches à champs moyens [153], elles sont fondées sur la théorie de l'inclusion équivalente d'Eshelby [53], qui a donné naissance à la micromécanique des matériaux à microstructure aléatoire. On citera le schéma micromécanique de Mori-Tanaka [124, 15, 17], auto-cohérent [72, 153], le modèle d'interpolation double inclusion "Lielen's model" proposé par Nemat-Nasser et Hori [127] ou encore la méthode proposée par Ponte Castañeda et Willis [146]. Ces modèles traitent généralement les cas des inclusions ellipsoïdales avec ou sans enrobage, distribuées de manière aléatoire dans une matrice [16]. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux cas de composites renforcés de fibres courtes ou longues ainsi que les composites tissés si on suppose que les ondulations des fils sont négligeable [1]. Elles ont été développées pour estimer le comportement global du composite en utilisant les moyennes des champs de contrainte et de déformation pour chaque phase du matériau. Elles ont été utilisées initialement pour des cas linéaires [140]. Ensuite, ces méthodes ont été étudiées de manière approfondie dans la littérature. Plusieurs auteurs ont introduit des extensions pour pouvoir modéliser le cas de comportements non linéaires des matériaux composites par exemple : viscoélastiques, élastoplastiques, viscoplastiques en intégrant les mécanismes d'endommagement [63, 147, 97, 115, 145, 57, 116, 45, 28, 109, 141, 39, 117, 25, 40]. Puisque ces méthodes reposent sur des solutions semi-analytiques, ils ont un coût de calcul rapide mais malheureusement une précision limitée et doivent être utilisées avec prudence. Elles se sont avérées précises pour les cas linéaires. Par contre, pour les cas non linéaires, en particulier lorsque la matrice présente un comportement non linéaire, la réponse de ces approches est imprécise. Cette imprécision est principalement due au fait que les champs de contrainte et de déformation dans chaque phase sont approximés par leurs moyennes de phase et sont donc traités comme homogènes. Une telle approche est problématique pour

les composites constitués de phases dont le comportement est non linéaires. En effet, les champs de contrainte et de déformation sont répartis de manière non uniforme dans les phases. Pour cette raison, l'approche en champs moyens conduit à des prédictions rigides de la réponse globale dans les composites comprenant une matrice non linéaire et des inclusions rigides [28, 45]. Afin de remédier à la surestimation de la rigidité du composite, plusieurs auteurs ont adopté une technique dite d'isotropisation sur des matériaux composites élastoplastiques [45, 79, 44], élastoviscoplastiques [38] et viscoélastiques-viscoplastiques [121]. La méthode consiste à extraire la partie isotrope de l'opérateur tangente anisotrope de la phase matricielle et utiliser le module tangent isotrope dans les calculs réduisant ainsi la réponse rigide globale.

- ii) Les approches d'homogénéisation à champs complets [159, 173]. La simulation numérique des matériaux composites nécessite des approches plus performantes capables de prendre en compte toutes les hétérogénéités existant à l'échelle de la microstructure. On citera les méthodes basées sur l'homogénéisation périodique [14, 160, 176, 125]. Ces méthodes ont pour objectif principal de construire un modèle de comportement du matériau homogène équivalent à travers sa microstructure représentant le volume élémentaire représentative (VER). Elles fournissent un cadre rigoureux permettant de définir correctement le concept de comportement homogénéisé indépendamment du choix des lois de comportement locales des constituants [32, 29]. Contrairement aux approches à champs moyens, ces méthodes sont adaptées au composite à microstructure périodique permettant de déterminer la réponse macroscopique du composite en tenant compte de l'effet des différents constituants présentent dans la microstructure (échelle micro) ainsi que l'effet de la microstructure (échelle méso). Ces méthodes qualifiées de méthodes d'EF multi-échelles ou  $EF^2$  ont été intégrées dans le calcul de structures hétérogènes afin de refléter l'effet de la microstructure sur le matériau puis par transition d'échelle sur la structure composite. Leurs principal avantage réside dans ses capacités à prévoir le comportement des structures complexes à différentes échelles pour tout type de microstructures périodiques et quel que soit le type de comportement non linéaire des constituants. La méthode  $EF^2$  a été utilisée dans un cadre complet de calcul multi-échelles par F. Feyel [54], puis elle a été utilisée et développée par plusieurs auteurs, par exemple [55, 56, 11, 128, 129, 177, 162, 138]. La majorité de ces travaux traites des problèmes 2D conduisant à une bonne étude pour démontrer les capacités de la méthode. Néanmoins, présente un intérêt limité pour une utilisation pratique

dans la prédiction de la réponse globale de matériaux composites hétérogènes, où la disposition spatiale des phases est principalement 3D. L'idée de base de cette méthode est d'associer à chaque point d'intégration (point de Gauss) de la structure macroscopique une cellule unitaire qui représente le plus petit élément répété dans la structure (VER). Un calcul EF local doit être effectué sur la cellule unitaire : les déformations macroscopiques aux points d'intégrations sont imposées sur les limites de la cellule unitaire et le problème microscopique est alors résolu numériquement. Les contraintes locales obtenues au niveau de la microstructure sont alors moyennées pour obtenir les contraintes macroscopiques à chaque point d'intégration de la structure macroscopique. La procédure est alors répétée pour tous les points d'intégrations macroscopiques, et pour toutes les itérations jusqu'à l'équilibre de la structure composite. Cette technique sera présentée en détail dans le chapitre 3.

La technique EF<sup>2</sup> est la plus appropriée pour le calcul de structures en matériaux composites à microstructure périodique. Dans ce premier chapitre nous présentons le cadre théorique complet de la modélisation multi-échelles par homogénéisation périodique dans le cas des petites déformations et petites rotations, en conditions isothermes et pour le cas purement mécanique. Le cadre intégrant de l'effet de couplage thermomécanique fort sera expliqué en détails dans le chapitre 5. La théorie de l'homogénéisation périodique est l'ingrédient de base de la méthode EF<sup>2</sup>. Elle établit le principe de transition d'échelles entre les quantités macroscopiques et microscopiques. Le comportement global du composite est alors obtenu par un calcul EF sur sa cellule unitaire qui contient les caractéristiques géométriques et matériels des constituants (matrice, fibres, enrobages et/ou inclusions). Pour appliquer le cadre d'homogénéisation périodique dans l'approche multi-échelles EF<sup>2</sup>, des conditions aux limites spécifiques sont appliquées sur la cellule unitaire en utilisant des nœuds de pilotage. Ces derniers peuvent être considérés comme des nœuds fictifs supplémentaires permettant de contrôler la cellule unitaire. Ces nœuds fictifs pourront être liés directement à la contrainte et/ou la déformation macroscopique [105, 106, 167, 5, 148].

Enfin, le chapitre introduit brièvement la technique d'homogénéisation champs moyens de type Mori-Tanaka fondée sur la théorie d'Eshelby. Cette modélisation servira de base de comparaison afin de valider les premiers calculs par la méthode multi-échelles EF<sup>2</sup>.

## 2.2 Homogénéisation périodique

Dans le calcul des structures, les matériaux sont souvent supposés homogènes. En réalité, le matériau est toujours hétérogène à une échelle inférieure. Comme pour le cas des matériaux composites, on constate que le matériau est constitué de différentes phases pouvant être considérées comme des phases homogènes à l'échelle microscopique. Pour modéliser le comportement d'un milieu hétérogène, il est utile de définir un milieu homogène équivalent, i.e. le matériau hétérogène est remplacé par un matériau homogénéisé équivalent ayant en moyenne une réponse macroscopique équivalente (Figure 2.1). Pour cela, il faut faire le lien entre les effets induits par les différents constituants observés à l'échelle microscopique de la microstructure représentée par la réponse de la cellule unitaire, et le comportement global de la structure à l'échelle macroscopique. Cette transition d'échelles entre les phases, la cellule unitaire et enfin la macrostructure est assurée par les méthodes d'homogénéisation (Figure 2.1).

L'objectif principal des méthodes d'homogénéisation est donc de construire un modèle de comportement du matériau homogène équivalent ayant en moyenne un comportement identique à l'assemblage des cellules unitaires observées à l'échelle microscopique. Dans ce travail, deux échelles sont considérées : i) Échelle macroscopique représentant l'échelle de la structure composite, représentée par les coordonnées macroscopiques  $\bar{\mathbf{x}}$ . ii) Échelle microscopique traduisant l'échelle de la microstructure, représentée par les coordonnées microscopiques  $\mathbf{x}$ .

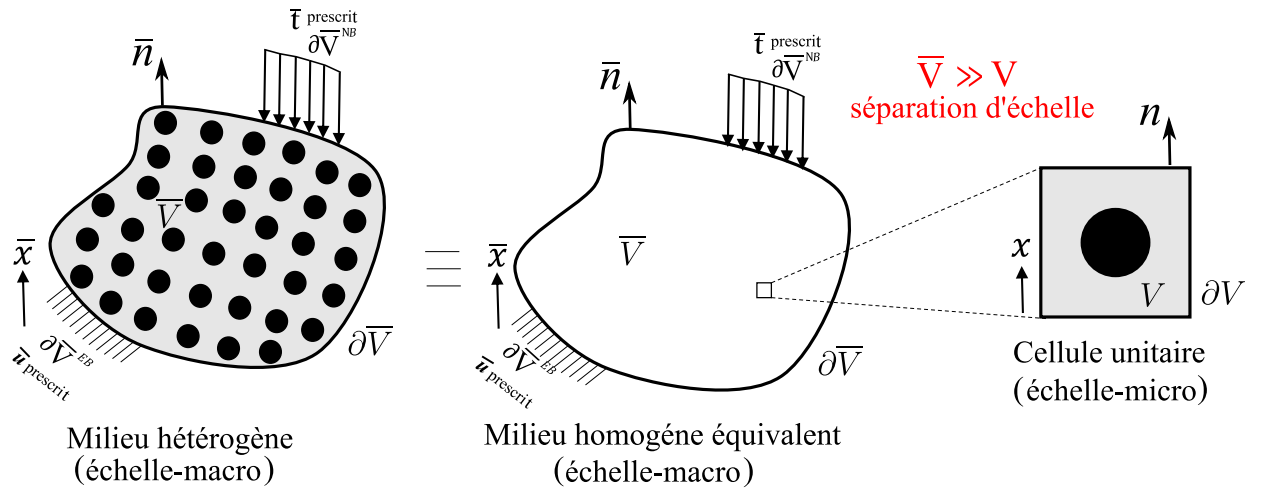


FIGURE 2.1 Représentation schématique de principe d'homogénéisation périodique par transition d'échelle micro-macro. Ce dernier reste valable tant que la condition  $\bar{V} \gg V$  est satisfaite.

Il faut noter que le concept d'homogénéisation périodique est valable tant que la séparation d'échelle est respectée. Cela signifie que le volume caractéristique de la cellule unitaire doit être bien inférieure au volume caractéristique de la structure ( $V \ll \bar{V}$ ) (Figure 2.1).

### *Cellule unitaire*

L'homogénéisation a pour but de faire une transition d'échelles de la microstructure à la macrostructure où le matériau hétérogène est considéré comme homogénéisé. Tout milieu périodique est défini par sa propre cellule unitaire représentative de sa microstructure, que l'on répète le long des trois directions de l'espace pour construire la macrostructure. La cellule de base n'est pas définie de manière unique (Figure 2.2), mais les propriétés effectives du composite sont déterminées d'une façon unique, même s'ils sont calculées sur des cellules différentes. Le choix des cellules unitaires est fait de telles sortes qu'elle simplifie l'exploitation des conditions aux limites périodiques ainsi qu'une bonne représentation des hétérogénéités dans la microstructure. Le plus simple c'est de prendre une cellule unitaire avec une forme parallélépipédique, cette forme est la plus pratique en vue de la résolution numérique des problèmes d'homogénéisation.

Une cellule unitaire contient toutes les caractéristiques géométriques et matérielles de la microstructure, à savoir les fractions volumiques, les lois de comportement, les orientations des différentes constituants, etc.

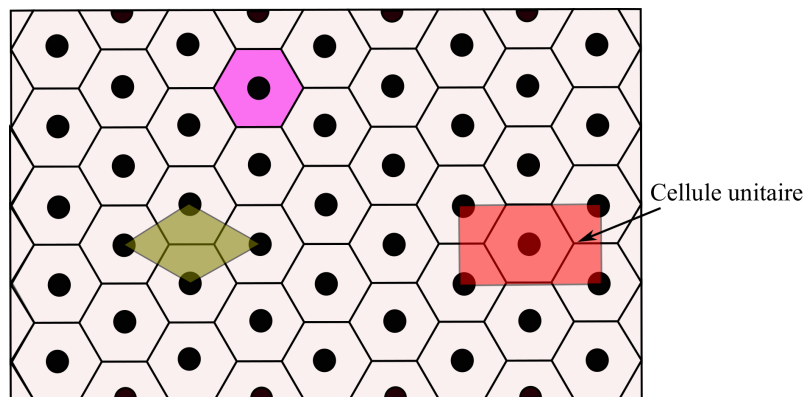


FIGURE 2.2 Définition de la cellule unitaire du milieu périodique dans un réseaux hexagonal.

#### 2.2.1 Transition d'échelle

A l'échelle macroscopique, le corps déformable occupe un volume  $\bar{V}$  délimité par une surface  $\partial\bar{V}$  dont le vecteur normal sortant  $\bar{n}$ . Chaque point macroscopique est

défini par un vecteur de position  $\bar{\mathbf{x}}$  dans  $\bar{V}$  et est connecté à une cellule unitaire. Au niveau microscopique, le matériau est considéré comme hétérogène. La cellule unitaire périodique occupe un volume  $V$  délimité par la surface  $\partial V$  avec le vecteur normal sortant  $\mathbf{n}$ . Chaque point microscopique est défini par un vecteur de position  $\mathbf{x}$  dans  $V$  (Figure 2.1). Si on considère des conditions quasi statiques (les effets d'inertie étant négligeables), le mouvement de tout point matériel macroscopique et microscopique,  $M(\bar{\mathbf{x}})$  et  $M(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  respectivement, est régi par les équations macroscopiques et microscopiques du tableau 2.1.

TABLE 2.1 Équations de base de la transition d'échelle entre l'échelle macroscopique et microscopique [182]

Équations	Échelle macroscopique $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{V}$	Échelle microscopique $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{V}, \forall \mathbf{x} \in V$
Équilibre	$\overline{\mathbf{div}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \overline{\rho \mathbf{b}} = 0$	$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$
Déformations	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{grad}}_{sym}(\bar{\mathbf{u}})$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}_{sym}(\mathbf{u})$
Lois constitutives	$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$	$\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$
Énergies de déformation	$\bar{W}_\varepsilon = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$W_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$

Dans le tableau 2.1,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sont les tenseurs d'ordre deux de la contrainte et de la déformation microscopique et macroscopique, respectivement.  $\overline{\rho \mathbf{b}}$  est le vecteur des forces de volume macroscopique (force par unité de volume) appliqué sur  $\bar{V}$ .  $\overline{\rho \mathbf{b}}$  n'a pas de contrepartie microscopique, ceci est une conséquence directe de l'hypothèse de séparation d'échelle (théorème de Hill) [173, 127].

Les lois de conservation sont généralement accompagnées par des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou des conditions aux limites mixtes. Le problème "macroscopique" est défini par les équations à l'échelle macroscopique présentées dans la partie gauche du tableau 2.1 avec les conditions aux limites macroscopiques, comme illustré dans la Figure 2.1. Un déplacement prescrit  $\bar{\mathbf{u}}^{prescrit}$  peut être appliqué sur la surface  $\partial \bar{V}^{EB}$  avec un vecteur de contrainte externe  $\bar{\mathbf{t}}^{prescrit}$  imposé sur la surface



$$\partial\bar{V}^{NB}. \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{u}}^{prescrit}(\bar{\mathbf{x}}, t) & \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\bar{V}^{EB}, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{t}}^{prescrit}(\bar{\mathbf{x}}, t) & \forall \bar{\mathbf{x}} \in \partial\bar{V}^{NB}, \\ \text{avec } \partial\bar{V}^{EB} \cap \partial\bar{V}^{NB} = \emptyset. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le problème "microscopique" est défini par les équations formulées à l'échelle microscopique présentées dans la partie droite du tableau 2.1. A cette échelle, des conditions aux limites périodiques sont prises en compte. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à la section 2.2.2.

### *Couplage entre les deux échelles (microscopique et macroscopique)*

Puisque l'homogénéisation périodique est basée sur le principe de séparation d'échelles, il faut établir le lien entre les quantités microscopiques et macroscopiques. Le couplage entre ces deux échelles est satisfait en se basant sur le théorème de la moyenne [73, 127]. Dans un milieu hétérogène réel, les champs locaux des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  oscillent autour de leurs valeurs moyennes  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , respectivement. Les champs de contraintes et de déformations macroscopiques sont alors obtenus par la moyenne volumique sur la cellule unitaire de leurs quantités microscopiques équivalentes (Équations 2.2 et 2.3).

D'après le théorème de la divergence, on peut démontrer que la contrainte et la déformation moyennes au sein d'une cellule unitaire sont égales respectivement à la contrainte et à la déformation appliquées sur ses limites. Ces derniers sont considérées comme la contrainte et la déformation macroscopique, respectivement :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} dS, \quad (2.2)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)) dS \quad (2.3)$$

De plus, tenant compte du théorème de la moyenne formulé à travers la condition de Hill-Mandel [71, 172], il est établi que la moyenne de la variation du travail mécanique microscopique effectué dans le volume de la cellule unitaire devra être égal à la variation locale de travail mécanique au niveau macroscopique :

$$\bar{W}_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{V} \int_V W_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV. \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Périodicité

L'hypothèse de périodicité implique que le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  de tout point matériel microscopique  $M(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  peut être décomposé en une partie affine à laquelle une fluctuation périodique  $\tilde{\mathbf{u}}$  est ajoutée (Figure 2.3, Équation 2.5) [173].

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

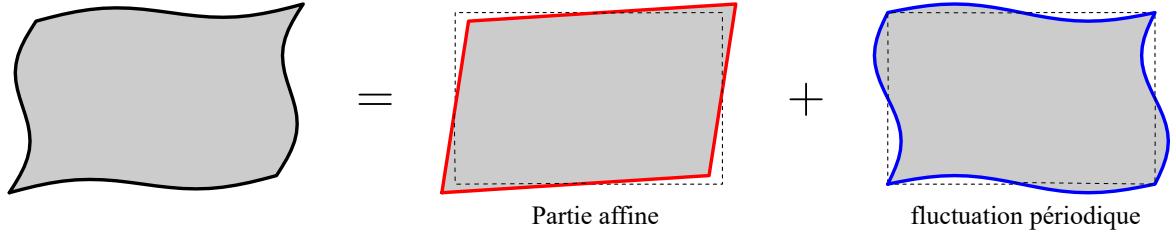


FIGURE 2.3 Définition du champ de déplacement comme la somme d'une partie affine et d'une fluctuation périodique

Dans l'équation 2.5, le premier terme correspond à la partie affine qui est reliée directement au tenseur de déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , tandis que le deuxième terme correspond à la fluctuation périodique. La partie fluctuante  $\tilde{\mathbf{u}}$  prend les mêmes valeurs sur chaque paire de nœuds parallèles opposés  $\mathbf{x}_+$  et  $\mathbf{x}_-$  de la cellule unitaire.

$$\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_+, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_-, t). \quad (2.6)$$

Considérant l'hypothèse de périodicité, le champ de déformation local prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{grad}_{sym}(\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)) \quad (2.8)$$

La moyenne de la déformation produite par la partie périodique  $\tilde{\mathbf{u}}$  est nulle (Équation 2.9).

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV \\ &= \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par conséquent, la moyenne de déformation totale est bien égale à la déformation macroscopique (Équation 2.10).

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (2.10)$$

Le champ de contrainte locale  $\boldsymbol{\sigma}$ , satisfait l'équilibre local et l'équilibre aux interfaces, i.e. la connexion d'une cellule unitaire avec les cellules voisines. Le vecteur de contrainte  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est également anti-périodique ( $\boldsymbol{\sigma}$  prend des valeurs identiques mais  $\mathbf{n}$  prend des valeurs opposées sur chaque paire de nœuds parallèles opposés de la cellule unitaire).

$$\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_+, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_+) = -\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_-, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_-). \quad (2.11)$$

Considérant le lemme de Hill-Mandel, si les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifient simultanément les conditions aux limites périodiques et anti-périodiques i.e. ils sont de la forme des équations 2.5 et 2.11 respectivement, alors, on utilisant le théorème de la divergence, la différence entre la moyenne volumique du travail microscopique et du travail macroscopique peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_V W_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV - \bar{W}_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ &= \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) dS. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En substituant l'équation 2.5 dans 2.12, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_V W_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dV - \bar{W}_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

La condition de Hill-Mandel est vérifiée dans l'équation ci-dessus à cause de la périodicité du champ de déplacement  $\tilde{\mathbf{u}}$  et l'anti-périodicité du vecteur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . Finalement, à partir de l'équation 2.13, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.14)$$

### 2.2.3 Solution du problème macroscopique

Dans le contexte d'analyse multi-échelles des problèmes des structures composites, la solution du problème macroscopique est obtenue directement via la résolution d'un problème non linéaire local de la cellule unitaire périodique à chaque point d'intégration macroscopique par EF. La relation entre la contrainte et la déformation macroscopique en chaque point matériel de la structure est obtenue à partir de la solution d'un problème de conditions aux limites approprié à l'échelle de la microstructure, i.e. les deux problèmes microscopique et macroscopique sont résolus d'une manière simultanée [55, 56, 11, 128, 162, 138].

### 2.2.4 Solution du problème microscopique

On considère un matériau hétérogène avec une microstructure périodique. A l'échelle de la microstructure, la cellule unitaire contient les caractéristiques géométriques ainsi que les lois de comportement de chaque phase. En effet, la réponse macroscopique en contrainte ou en déformation peut être obtenue par la résolution du problème de la cellule unitaire (Figure 2.4) en suivant : une approche dans l'espace de déformation (contrôle en déformation) ou dans l'espace de contrainte (contrôle en contrainte) [113, 174] :

Pour une approche pilotée en déformation, la solution unique pour le champ de déformation  $\mathbf{u}$  est obtenue en résolvant les équations microscopiques présentées dans la partie droite du tableau 2.1 en considérant l'équation 2.5 comme des conditions aux limites de type Dirichlet pour une déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  donnée. Par conséquent, la contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est calculée par moyennation des champs locaux (équation 2.2).

Pour une approche contrôlée en contrainte, la solution unique pour le champ de déformation  $\mathbf{u}$  est obtenue en résolvant les mêmes équations microscopiques du tableau 2.1 avec des conditions aux limites de type Neumann avec la condition  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$  pour une contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  imposée sur la cellule unitaire. La déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est obtenue par moyennation des déformations locales (équation 2.3).

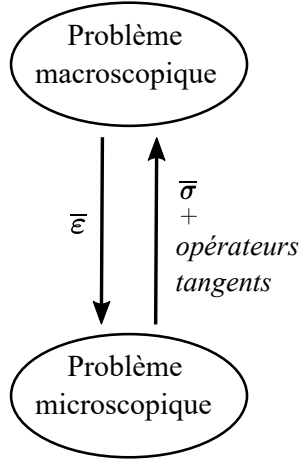


FIGURE 2.4 Schéma de calcul par transition d'échelle.

## 2.2.5 Homogénéisation en élasticité linéaire

Dans le cas linéaire élastique la relation entre la contrainte et la déformation locale (échelle microscopique) est donnée par les deux équations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbb{C}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbb{S}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

où  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{S}$  sont respectivement les tenseurs de quatrième ordre de rigidité et de souplesse microscopiques, avec :

$$\mathbb{C} = \mathbb{S}^{-1}. \quad (2.17)$$

A l'aide de la notation de Voigt modifiée, i.e. en réécrivant les 6 composantes des tenseurs de contrainte et de déformation en deux vecteurs-colonnes ( $6 \times 1$ ) et les 21 composantes des tenseurs de rigidité et de souplesse en deux matrices ( $6 \times 6$ ) et par symétrie matérielle, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ Sym & & & & & C_{2323} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1112} & 2S_{1113} & 2S_{1123} \\ & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2213} & 2S_{2223} \\ & & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3313} & 2S_{3323} \\ & & & 4S_{1212} & 4S_{1213} & 4S_{1223} \\ & & & & 4S_{1313} & 4S_{1323} \\ Sym & & & & & 4S_{2323} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Les deux tenseurs de rigidité et de souplesse ont une symétrie mineure et une symétrie majeure. De la même manière, on peut montrer que la loi de comportement macroscopique est également linéaire :

$$\bar{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{x}}, t) : \bar{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (2.20)$$

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbb{S}}(\bar{\mathbf{x}}, t) : \bar{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.21)$$

avec  $\bar{\mathbb{C}}$  et  $\bar{\mathbb{S}}$  sont respectivement les tenseurs de quatrième ordre de rigidité et de souplesse macroscopique. A l'aide de la notation de Voigt et en considérant les symétries matérielles (symétrie mineure et majeure), cela donne :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1133} & \bar{C}_{1112} & \bar{C}_{1113} & \bar{C}_{1123} \\ & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2233} & \bar{C}_{2212} & \bar{C}_{2213} & \bar{C}_{2223} \\ & & \bar{C}_{3333} & \bar{C}_{3312} & \bar{C}_{3313} & \bar{C}_{3323} \\ & & & \bar{C}_{1212} & \bar{C}_{1213} & \bar{C}_{1223} \\ & & & & \bar{C}_{1313} & \bar{C}_{1323} \\ Sym & & & & & \bar{C}_{2323} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{1111} & \bar{S}_{1122} & \bar{S}_{1133} & 2\bar{S}_{1112} & 2\bar{S}_{1113} & 2\bar{S}_{1123} \\ & \bar{S}_{2222} & \bar{S}_{2233} & 2\bar{S}_{2212} & 2\bar{S}_{2213} & 2\bar{S}_{2223} \\ & & \bar{S}_{3333} & 2\bar{S}_{3312} & 2\bar{S}_{3313} & 2\bar{S}_{3323} \\ & & & 4\bar{S}_{1212} & 4\bar{S}_{1213} & 4\bar{S}_{1223} \\ & & & & 4\bar{S}_{1313} & 4\bar{S}_{1323} \\ Sym & & & & & 4\bar{S}_{2323} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Pour calculer le tenseur de rigidité macroscopique  $\bar{\mathbb{C}}$  on suit l'approche pilotée en déformation. Le tenseur de rigidité macroscopique est construit colonne par colonne en calculant la contrainte résultante des six cas de chargement unitaire (cette méthode est qualifiée de technique de perturbation). Les six états de déformations unitaires sont

donnés en notation de Voigt comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(11)} = (\bar{\varepsilon}_{11} = K \quad \bar{\varepsilon}_{22} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{33} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(22)} = (\bar{\varepsilon}_{11} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{22} = K \quad \bar{\varepsilon}_{33} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(33)} = (\bar{\varepsilon}_{11} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{22} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{33} = K \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(12)} = (\bar{\varepsilon}_{11} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{22} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{33} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} = K \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(13)} = (\bar{\varepsilon}_{11} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{22} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{33} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} = K \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(23)} = (\bar{\varepsilon}_{11} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{22} = 0 \quad \bar{\varepsilon}_{33} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} = 0 \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} = K)^T. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

où  $K$  est une valeur réelle non nulle (on prend ici  $K = 1$ ), la composante  $ijkl$  du tenseur de rigidité macroscopique est donnée par la composante  $ij$  du vecteur de contrainte calculée à l'état  $kl$  de la déformation élémentaire divisé par  $K$ .

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(kl)}}{K} \quad ij, kl = 11, 22, 33, 12, 13, 23. \quad (2.25)$$

De la même manière, pour calculer le tenseur de souplesse macroscopique  $\bar{\mathbb{S}}$ , on suit l'approche contrôlée par contrainte. Le tenseur de souplesse macroscopique est alors construit colonne par colonne en calculant la déformation résultante des six cas de chargement unitaire. les six états de contrainte unitaires sont donnés en notation de Voigt comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(11)} = (\bar{\sigma}_{11} = K \quad \bar{\sigma}_{22} = 0 \quad \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \bar{\sigma}_{12} = 0 \quad \bar{\sigma}_{13} = 0 \quad \bar{\sigma}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(22)} = (\bar{\sigma}_{11} = 0 \quad \bar{\sigma}_{22} = K \quad \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \bar{\sigma}_{12} = 0 \quad \bar{\sigma}_{13} = 0 \quad \bar{\sigma}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(33)} = (\bar{\sigma}_{11} = 0 \quad \bar{\sigma}_{22} = 0 \quad \bar{\sigma}_{33} = K \quad \bar{\sigma}_{12} = 0 \quad \bar{\sigma}_{13} = 0 \quad \bar{\sigma}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(12)} = (\bar{\sigma}_{11} = 0 \quad \bar{\sigma}_{22} = 0 \quad \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \bar{\sigma}_{12} = K \quad \bar{\sigma}_{13} = 0 \quad \bar{\sigma}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(13)} = (\bar{\sigma}_{11} = 0 \quad \bar{\sigma}_{22} = 0 \quad \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \bar{\sigma}_{12} = 0 \quad \bar{\sigma}_{13} = K \quad \bar{\sigma}_{23} = 0)^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(23)} = (\bar{\sigma}_{11} = 0 \quad \bar{\sigma}_{22} = 0 \quad \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \bar{\sigma}_{12} = 0 \quad \bar{\sigma}_{13} = 0 \quad \bar{\sigma}_{23} = K)^T, \end{array} \right. \quad (2.26)$$

La composante  $ijkl$  du tenseur de souplesse macroscopique est donnée par la composante  $ij$  du vecteur de déformation calculée à l'état  $kl$  de la contrainte élémentaire

divisé par  $K$ .

$$\bar{S}_{ijkl} = \begin{cases} \frac{\bar{\varepsilon}_{ij(kl)}}{K} & si \quad kl = 11, 22, 33 \\ \frac{\bar{\varepsilon}_{ij(kl)}}{2K} & si \quad kl = 12, 13, 23 \end{cases} \quad (2.27)$$

Les tenseurs de rigidités et de souplesses macroscopiques ont une symétrie majeure produite par la cohérence énergétique des travaux microscopique et macroscopique (équation 2.13), et l'un est égale à l'inverse de l'autre (et vice versa) [120].

$$\bar{\mathbb{C}} = \bar{\mathbb{S}}^{-1}. \quad (2.28)$$

### 2.2.6 Homogénéisation non linéaire

Pour les matériaux non linéaires, la relation entre la contrainte et la déformation macroscopiques n'est pas explicite à travers un tenseur de rigidité. Néanmoins, la réponse en contrainte macroscopique pour un incrément de déformation macroscopique donné peut être calculée à l'aide d'un schéma de résolution implicite incrémental, où le comportement à l'échelle microscopique est linéarisé et corrigé à chaque incrément de déformation. Ensuite, le comportement macroscopique peut être obtenu par linéarisation, afin de prédire le prochain incrément. Pour cela, les lois de comportement sont formulées à l'aide d'un opérateur tangent pour accélérer la convergence de la solution. Pour un incrément de temps microscopique donné, la relation contrainte-déformation à l'échelle microscopique est écrite comme suit :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, t) = \mathbb{D}^\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, t) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, t) \quad (2.29)$$

avec  $\mathbb{D}^\varepsilon$  est un tenseur d'ordre 4, appelé "le module tangent mécanique microscopique". Afin de relier le problème local au problème global, l'opérateur tangent macroscopique  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$  est nécessaire. Ce dernier est calculé en utilisant la technique de perturbation au moyen des six cas de chargement élémentaires comme décrit précédemment pour le cas de l'élasticité linéaire. Pour un incrément de temps macroscopique donné, la relation entre la contrainte et la déformation macroscopique est donnée par la relation suivante :

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) = \bar{\mathbb{D}}^\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}}, t) : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) \quad (2.30)$$

avec  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$  est le module tangent mécanique macroscopique calculé à chaque incrément de temps macroscopique et à chaque point d'intégration macroscopique.



## 2.3 Méthodes d'homogénéisation à champs moyens

Dans cette section, nous présentons brièvement la méthode d'homogénéisation à champs moyens Mori-Tanaka [124] en linéaire élastique. Cette méthode servira par la suite comme une base de comparaison avec la méthode à champs complets EF<sup>2</sup> développée dans le cas de calcul des structure composite 3D.

### 2.3.1 Méthode de Mori-Tanaka

La méthode Mori-Tanaka a été proposée en 1973 [124]. Ici, la représentation de cette approche est méthode sur la discussion de [17, 153]. Le comportement global d'un matériau composite dépend fortement des propriétés et de la géométrie des différents constituants présent dans la microstructure à savoir la fraction volumique et les orientations des constituants. Considérons un matériau composite constitué d'une matrice élastique (indice 0) et de  $N$  inhomogénéités élastiques de forme ellipsoïdale représentées en Figure 2.5. Dans le volume élémentaire représentatif de ce composite, la matrice a un volume  $V_0$ , tandis que la  $r^{\text{ième}}$  inhomogénéité occupe l'espace  $\mathfrak{B}_r$  à un volume  $V_r$ .

Les effets des inhomogénéités  $\mathfrak{B}_i$  de tenseur de rigidité mécanique  $\mathbb{C}_i$  sont transmis à l'inhomogénéité  $\mathfrak{B}_r$  de tenseur de rigidité mécanique  $\mathbb{C}_r$  via la déformation et la contrainte dans la matrice  $\mathfrak{B}$  qui l'entoure, avec le tenseur de rigidité mécanique  $\mathbb{C}_0$ . Puisque les différents champs varient d'un point à un autre dans la matrice, la déformation et la contrainte moyennes  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0$  dans celle-ci représentent de bonnes approximations des champs réels de la matrice entourant chaque inhomogénéité, lorsqu'un grand nombre d'inhomogénéités sont distribuées d'une manière aléatoire dans la matrice. Il est possible de supposer que l'absence d'une inhomogénéité n'affectera pas le comportement élastique global du composite moyen. Par conséquent, l'inhomogénéité  $\mathfrak{B}_r$  peut être vue comme une inhomogénéité ellipsoïdale placée dans une matrice uniforme, soumise à un champ de déformation uniforme  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ . Sous cette hypothèse, la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  dans la  $r^{\text{ième}}$  inhomogénéité est exprimée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbb{T}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (2.31)$$

avec  $\mathbb{T}_r$  tenseur d'interaction exprimé comme suit :

$$\mathbb{T}_r = \left[ \mathbb{I} + \mathbb{S}_r : \mathbb{C}_0^{-1} : [\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0] \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_0 = \mathbb{I}. \quad (2.32)$$

$\mathbb{S}_r$  est le tenseur d'Eshelby par phase, qui dépend des propriétés de la matrice  $\mathbb{C}_0$  et de la forme de la  $r^{\text{ième}}$  inhomogénéité [31].

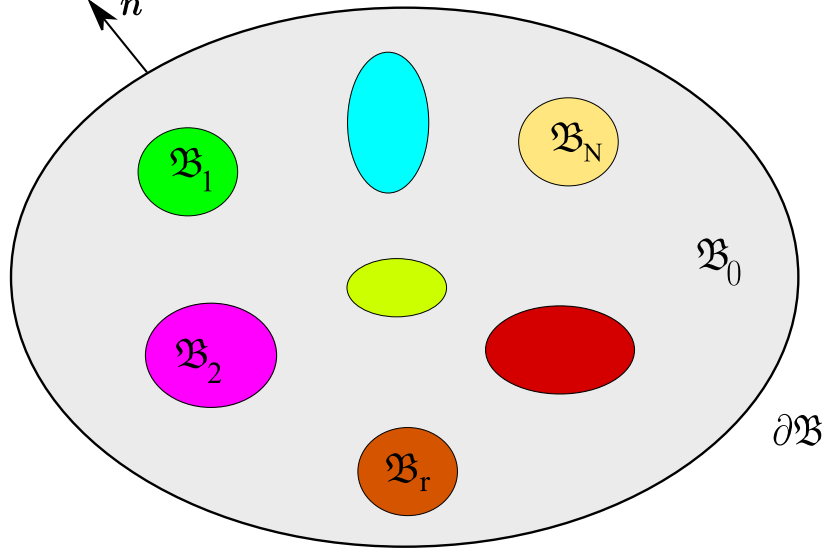


FIGURE 2.5 Composite avec plusieurs inhomogénéités distribuées d'une manière aléatoire dans la matrice [31].

En se basant sur le problème de l'inclusion équivalente d'Eshelby, les lois de comportement reliant les contraintes et les déformations par phase sont exprimées comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}_r = \mathbb{C}_r : \boldsymbol{\varepsilon}_r. \quad (2.33)$$

où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbb{A}_r^\varepsilon : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.34)$$

$\mathbb{A}_r^\varepsilon$  est le tenseur de localisation des déformations pour une phase ( $r$ ). Il est indépendant de vecteur de position. À partir de ces définitions et les équations 2.3, on peut écrire les équations suivantes :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{r=0}^N c_r \boldsymbol{\varepsilon}_r, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{r=0}^N c_r \boldsymbol{\sigma}_r, \quad c_r = \frac{V_r}{V}. \quad (2.35)$$

avec  $c_r$  est la fraction volumique. Le comportement macroscopique du composite est exprimé de la même manière. Il est écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbb{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.36)$$

avec  $\bar{\mathbb{C}}$  est le tenseur de rigidité mécanique macroscopique donné par la relation suivante :

$$\bar{\mathbb{C}} = \sum_{r=0}^N c_r \mathbb{C}_r : \mathbb{A}_r^\varepsilon. \quad (2.37)$$

L'estimation de tenseur de localisation des déformations par phase  $\mathbb{A}_r^\varepsilon$  est la tâche principale des différentes méthodes basées sur la théorie de l'inclusion équivalente d'Eshelby. Moyennant l'équation 2.31 sur le volume de VER et considérant l'équation 2.35 donne :

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{r=0}^N c_r \mathbb{T}_r : \varepsilon_0. \quad (2.38)$$

L'équation 2.38 permet d'exprimer la déformation moyenne dans la matrice tel que :

$$\varepsilon_0 = \left[ \sum_{n=0}^N c_n \mathbb{T}_n \right]^{-1} : \bar{\varepsilon}. \quad (2.39)$$

Combinant les équations 2.34, 2.39 et considérant l'équation 2.31, on peut identifier le tenseur de localisation des déformations par phase  $\mathbb{A}_r^\varepsilon$  :

$$\mathbb{A}_r^\varepsilon = \mathbb{T}_r : \left[ \sum_{n=0}^N c_n \mathbb{T}_n \right]^{-1} \quad \text{avec} \quad \sum_{r=0}^N c_r \mathbb{A}_r^\varepsilon = \mathbb{I}. \quad (2.40)$$

Pour les matériaux non linéaires, les champs de déformations et de contraintes microscopiques par phase et macroscopiques  $\varepsilon_r, \sigma_r, \bar{\varepsilon}$  et  $\bar{\sigma}$  respectivement, sont remplacés par leurs incréments de déformations et de contraintes microscopiques et macroscopiques  $\Delta\varepsilon_r, \Delta\sigma_r, \Delta\bar{\varepsilon}$  et  $\Delta\bar{\sigma}$ , respectivement. De plus, le tenseur de rigidité microscopique par phase  $\mathbb{C}_r$  et macroscopique  $\bar{\mathbb{C}}$  sont également remplacés par le module tangent microscopique  $\mathbb{D}_r^\varepsilon$  et macroscopique  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$ , respectivement.

## 2.4 Conclusions

Dans ce premier chapitre, une étude bibliographique des méthodes multi-échelles pour le calcul des structures et des matériaux hétérogènes a été introduite, que ce soit pour les méthodes à champs moyens ou les méthodes à champs complets. Le chapitre présente un cadre général de modélisation multi-échelles des structures composites basée sur le principe d'homogénéisation périodique. Ce principe est considéré comme l'élément de base de l'approche de modélisation multi-échelles à champs complets EF<sup>2</sup> objet de notre travail. Le cadre établi met en évidence le principe de transition d'échelle entre les quantités microscopique et macroscopique. L'approche présentée ici,

permet de calculer la réponse macroscopique du matériau hétérogène en appliquant des conditions aux limites appropriées sur la cellule unitaire. Elle permet également de piloter cette dernière, soit en déformation, en contrainte ou même des conditions aux limites mixtes contrainte-déformation. Cette approche est très fiable pour la prédiction des propriétés effectives macroscopiques des composites à microstructure périodique via un calcul par EF sur la cellule unitaire. Cela indépendamment de la microstructure et du comportement des constituants considérés.

Le chapitre présente également l'approche de Mori-Tanaka incrémentale qui servira comme base de comparaison pour valider la méthode de modélisation EF<sup>2</sup> développée. Dans le chapitre qui suit, la méthode de simulation multi-échelles EF<sup>2</sup> proposée sera présentée en détail pour le cas des problèmes mécaniques purs. La méthode permet de prédire la réponse macroscopique non linéaire de structures composites 3D à microstructure périodique. Les résultats numériques de l'approche seront comparés à ceux d'un calcul à champs moyens par Mori-Tanaka.



# Chapitre 3

## Simulation de la réponse non linéaire des structures composites 3D en régime VPD par la Méthode EF<sup>2</sup>

### 3.1 Introduction

Les matériaux composites à base polymères sont de plus en plus utilisés dans différents secteurs industriels (automobile, aérospatial, sport, etc), en raison de leurs propriétés mécaniques, thermiques et structurales importantes. La maîtrise du comportement de ces matériaux reste un sujet de recherche scientifique complexe et une des préoccupations majeures des industries, notamment sur le plan de dimensionnement et de la tenue des structures soumises à des sollicitations mécaniques complexes. Pour cela, il est nécessaire de mettre en place des méthodes prédictives capables de calculer la réponse du composite à différentes échelles. Elles doivent intégrer les effets microstructuraux ainsi que les effets induits par la géométrie des structures sur la réponse mécanique globale du composite. À cet effet, les méthodes de modélisation et de simulation avancées, intégrant les effets de la microstructure constituant un domaine de recherche important de par ses retombées.

Une des premières approches numériques à champs complets faisant intervenir les deux échelles consiste à simuler la structure entière en reproduisant explicitement toutes les hétérogénéités présentes dans la microstructure. Un maillage fin doit aussi être réalisé pour la structure et les hétérogénéités. Pour des petites structures, cette

technique peut être efficace. Cependant, pour des structures réelles complexes, cette approche est extrêmement lourde en terme de temps de calcul et d'espace mémoire, ce qui limite considérablement sa mise en œuvre. Ces problèmes peuvent être allégés ou contournés par des méthodes de sous-domaines ou par la méthode LATIN (méthode à grand incrément de temps) développée par Ladevèze et al. [93, 95, 133]. Le couplage de la méthode LATIN avec des méthodes de réduction de modèles a permis de diminuer le coût du temps de calcul ainsi que le stockage [94, 132, 96, 37].

Selon l'étude bibliographique présentée dans le chapitre 1, l'approche numérique la plus adaptée au calcul des structures composites 3D, intégrant l'impact des non linéarités des constituants microscopiques sur la réponse globale du matériau reste l'approche par homogénéisation multi-échelles EF<sup>2</sup>. L'idée de base de cette méthode a été introduite initialement par Renard et Marmonier en 1987 [155] et ensuite, plusieurs chercheurs ont développé cette approche pour la rendre plus flexible pour différents types d'analyses. Par exemple, Smit et al [169] ont proposé une méthode d'homogénéisation tenant compte des grandes déformations pour calculer la réponse mécanique des structures 2D en régime viscoélastique. Feyel et Chaboche [54–56] ont développé un cadre de calcul par "EF<sup>2</sup>" pour des composites 2D en régime viscoplastique dans le logiciel d'EF ZeBuLoN. D'autres auteurs ont également utilisé ou introduit des extensions sur la méthode, on citera par exemple [180, 67, 11, 189, 128, 129, 177, 51, 48, 162, 138].

Dans ce chapitre, l'approche de simulation multi-échelles EF<sup>2</sup> est exposée. Elle est basée sur le concept de l'homogénéisation périodique. La méthode est implémentée dans un code commercial d'EF Abaqus/Standard permettant de prévoir le comportement macroscopique 3D non linéaire de composites à microstructure périodique en considérant que chaque point d'intégration macroscopique est un point matériel, où les caractéristiques microstructurales sont représentées par une cellule unitaire, contenant les caractéristiques géométriques et matérielles des constituants de la microstructure (matrice, torons, fibres et/ou inclusions). Par conséquent, une analyse par EF multi-échelles a été développée à l'aide d'un schéma de résolution implicite utilisant l'algorithme de Newton-Raphson pour résoudre simultanément le système d'équations non linéaires à deux échelles (macroscopique et microscopique). Le principal avantage de cette méthodologie est qu'elle peut prendre en compte tout type de comportement non linéaire des constituants (élastoplastique, viscoélastique, viscoplastique-endommageable ou viscoélastique-viscoplasticité-endommageable), ainsi que tout type de microstructure périodique. L'approche EF<sup>2</sup> proposée est mise en œuvre via une technique de parallélisation dans Abaqus/Standard afin de réaliser une réduction significative du temps de calcul.

Le chapitre est présenté de la manière suivante : la section 3.2 décrit le principe de transition d'échelle en régime non linéaire (approche incrémentale) entre les champs locaux et les champs macroscopiques. La section présente également la mise en œuvre numérique de la résolution du problème de la cellule unitaire par la méthode d'EF en utilisant le concept des nœuds de pilotage ("constraint drivers"). Dans la section 3.3, la loi de comportement de type élasto-viscoplastique avec endommagement ductile est présentée pour la matrice polymère. Dans la section 3.4, l'implémentation numérique de la méthode EF<sup>2</sup> est détaillée pour un problème purement mécanique non linéaire avec l'implémentation parallèle du code dans Abaqus/Standard. Dans la section 3.5, l'approche est validée, en comparant les résultats numériques avec une solution semi-analytique sur une structure composite multi-couches 3D. Ensuite, un exemple d'une structure composite 3D présentant des champs de contrainte non uniformes est présenté. Dans cet exemple, la microstructure est constituée d'une matrice polymère élasto-viscoplastique avec endommagement ductile, renforcée par des fibres de verre courtes. Les résultats numériques de la simulation sont comparés à ceux de la méthode de Mori-Tanaka. Enfin, les capacités de la méthode proposée sont montrées à travers la simulation de la réponse mécanique d'une structure sous un chargement complexe ayant différentes vitesses de déformation.

## 3.2 Transition d'échelle non linéaire : approche incrémentale

Considérant le composite de la Figure 3.1, le matériau est supposé hétérogène à un niveau inférieur et caractérisé par une microstructure périodique. Comme l'homogénéisation est basée sur le principe de séparation d'échelles, il faut définir un lien entre l'échelle microscopique et celle macroscopique afin de pouvoir prédire le comportement global de la structure en tenant en compte des effets des hétérogénéités présentes dans la microstructure.

### 3.2.1 Résolution du problème de la cellule unitaire

On se basant sur l'hypothèse de périodicité de champ de déplacement (équation 2.5) et l'anti-périodicité du vecteur de contrainte  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , le problème microscopique



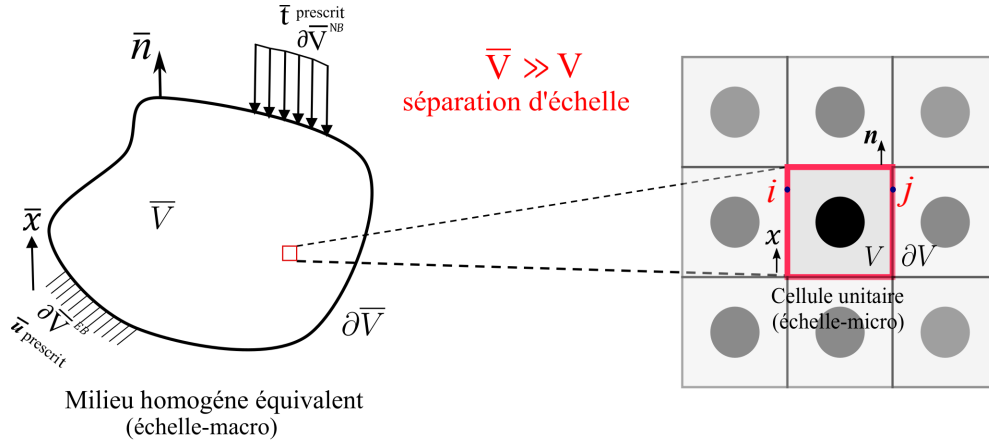


FIGURE 3.1 Représentation schématique d'un matériau composite à microstructure périodique avec prise en compte de la séparation d'échelle.

est formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})) = 0 & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \mathbf{u}^i(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^i, t) - \mathbf{u}^j(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^j, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) & \forall \mathbf{x} \in \partial V. \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j, \mathbf{x}^i$  et  $\mathbf{x}^j$  les vecteurs de déplacement et de position de chaque paire de noeuds parallèles opposés de la cellule unitaire, respectivement (Figure 3.1). La relation entre la contrainte et la déformation microscopique dans les approches incrémentales est donnée via une expression linéarisée pour un incrément de temps donné (Équation 3.2) :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \mathbb{D}^\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (3.2)$$

Afin de résoudre le problème 3.1 de la cellule unitaire par la méthode des EF avec prise en considération des conditions aux limites périodiques (Équation 3.1<sub>3</sub>), la technique des noeuds de pilotage (constraint drivers) est mise en place pour contrôler la cellule unitaire.

### a) Résolution par EF du problème linéaire de la cellule unitaire

L'utilisation de la technique d'homogénéisation périodique pour résoudre le problème de la cellule unitaire par la méthode EF, nécessite des conditions aux limites spécifiques. Dans cette sous-section, nous présentons une méthode générale permettant de définir des conditions aux limites périodiques sur la cellule unitaire. Cette méthode est capable d'appliquer tout type de déformation macroscopique, de contrainte macroscopique, ou

même des conditions mixtes contrainte-déformation sur une cellule unitaire de forme cubique [5, 148].

Deux conditions de continuité importantes doivent être satisfaites sur les limites de la cellule unitaire et les cellules unitaires voisines : la première est que les cellules unitaires ne peuvent pas être séparées les unes des autres ou pénétrer dans la cellule voisine après la déformation. La seconde est que les cellules unitaires peuvent être assemblées en tant que corps physiquement continu, i.e. la distribution de vecteur de contrainte sur les limites parallèles opposées doit être la même (anti-périodicité de  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ).

Le maillage de chaque cellule de base doit être rigoureusement périodique. Cela signifie que pour chaque nœud d'une surface limite, il doit y avoir un nœud correspondant à la même position relative sur la surface limite parallèle opposée (nœuds en vis-à-vis). Les déplacements sur chaque paire de nœuds parallèles opposés sont donnés sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}^i = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}^i + \tilde{\mathbf{u}}^i, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}^j = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{u}}^j, \quad (3.4)$$

avec  $\tilde{\mathbf{u}}^i = \tilde{\mathbf{u}}^j$  sur chaque limite parallèle opposée. La différence entre les deux équations ci-dessus donne l'équation 3.5 :

$$\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^j = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (3.5)$$

La représentation graphique d'une cellule unitaire en 2D sous un état de déformation macroscopique prenant en compte des conditions aux limites périodiques est illustrée sur la Figure 3.2.

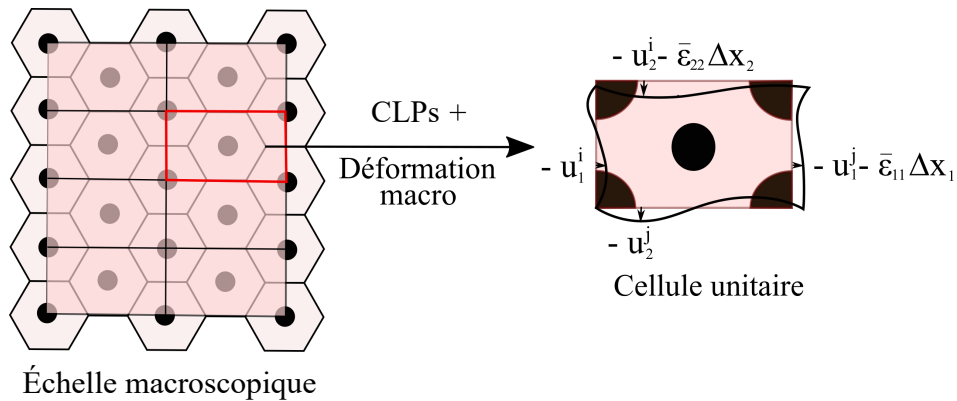


FIGURE 3.2 Définition des conditions aux limites périodique (CLPs) sur la cellule unitaire en 2D soumise à une déformation macroscopique.

Pour le cas des structures 3D, on considère une cellule unitaire de forme cubique. Afin d'appliquer un état de déformation macroscopique  $\bar{\epsilon}$  sur cette cellule en tenant compte des conditions aux limites périodiques, un gradient de déplacement est appliqué entre chaque paire de nœuds parallèles opposés (désignés par les indices  $i$  et  $j$  dans la Figure 3.3). Ce gradient est directement lié à la déformation macroscopique par la relation cinématique générale suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_1^i - u_1^j \\ u_2^i - u_2^j \\ u_3^i - u_3^j \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{11} & \bar{\epsilon}_{12} & \bar{\epsilon}_{13} \\ & \bar{\epsilon}_{22} & \bar{\epsilon}_{23} \\ Sym & & \bar{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_1^i - x_1^j \\ x_2^i - x_2^j \\ x_3^i - x_3^j \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

avec  $u_1, u_2, u_3$  et  $x_1, x_2, x_3$  représentant respectivement les composantes des vecteurs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de position  $\mathbf{x}$ . Les six composantes du tenseur de déformation macroscopique  $\bar{\epsilon}$  sont introduites comme des "nœuds de pilotage" permettant de contrôler la cellule unitaire. Ils sont liés au maillage de la cellule unitaire via des équations cinématiques obtenues à partir de l'équation 3.6. Ces nœuds de pilotage sont introduits comme des nœuds fictifs où seul leur premier degré de liberté est utilisé. Les déplacements de ces nœuds fictifs notés  $u_{ij}^{cd}$  prennent exactement les valeurs des composantes du tenseur de déformation macroscopique  $\bar{\epsilon}$  :

$$\begin{cases} u_{11}^{cd} = \bar{\epsilon}_{11} \\ u_{22}^{cd} = \bar{\epsilon}_{22} \\ u_{33}^{cd} = \bar{\epsilon}_{33} \\ u_{12}^{cd} = 2\bar{\epsilon}_{12} \\ u_{13}^{cd} = 2\bar{\epsilon}_{13} \\ u_{23}^{cd} = 2\bar{\epsilon}_{23} \end{cases} \quad (3.7)$$

Les forces de réaction résultantes sur ces nœuds additionnels fictifs notés :  $F_{11}^{cd}$ ,  $F_{22}^{cd}$ ,  $F_{33}^{cd}$ ,  $F_{12}^{cd}$ ,  $F_{13}^{cd}$  et  $F_{23}^{cd}$  correspondent directement aux composantes du tenseur de contrainte macroscopique multiplié par le volume de la cellule unitaire (Figure 3.3). Grâce au principe des nœuds de pilotage, la cellule unitaire peut être pilotée indépendamment, soit en déplacement (contrôle en déformation imposée), en force (contrôle en contrainte imposée) ou mixte (contrainte-déformation) comme est illustré dans la Figure 3.3. Pour montrer l'utilisation des nœuds de pilotage dans le contrôle des cellules unitaires avec prise en compte des conditions aux limites périodiques, deux cas de chargement sont présentés :

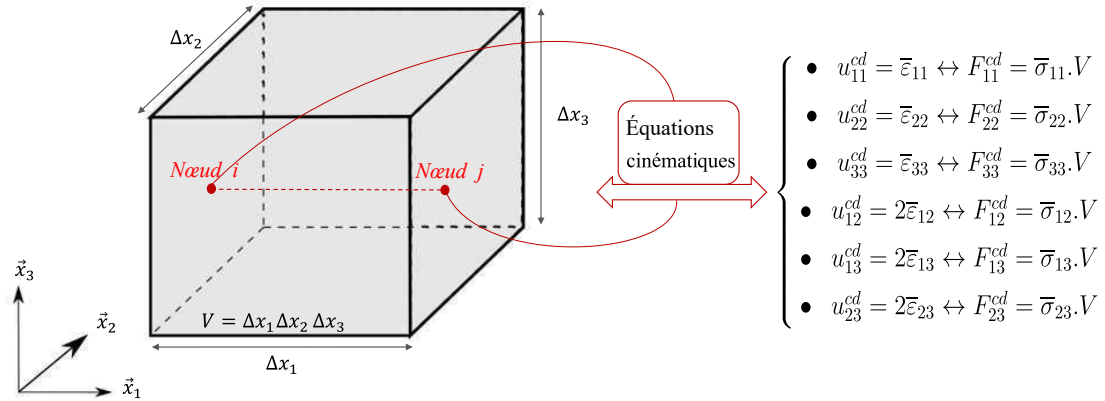
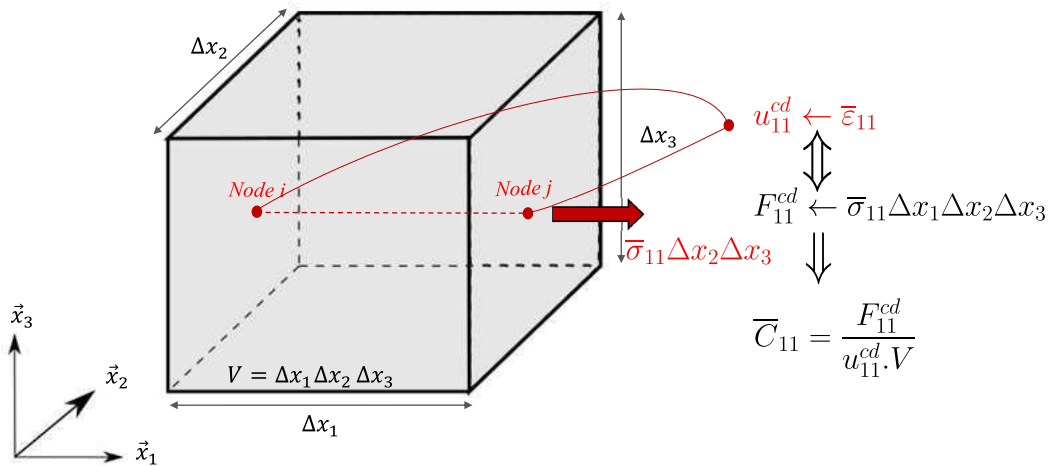


FIGURE 3.3 Connexion des nœuds de pilotages avec la cellule unitaire.

- 1<sup>er</sup> cas : en considérant la traction suivant la direction  $\vec{x}_1$ , l'équation 3.6 est écrite sous la forme suivante :

$$u_1^i - u_1^j = \bar{\varepsilon}_{11} (x_1^i - x_1^j) \Leftrightarrow u_1^i - u_1^j - u_{11}^{cd} \Delta x_1 = 0 \quad (3.8)$$

avec  $\Delta x_1, \Delta x_2$  et  $\Delta x_3$  les dimensions de la cellule unitaire suivant les trois directions de l'espace  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$ , respectivement. Si  $\bar{\varepsilon}_{11}$  est défini comme le déplacement du nœud fictif 11, la force de réaction résultante est donnée comme le produit de la contrainte macroscopique  $\bar{\sigma}_{11}$  par le volume de la cellule unitaire ( $F_{11}^{cd} = \bar{\sigma}_{11} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ ). On procède de la même manière pour obtenir les forces  $F_{22}^{cd}$  et  $F_{33}^{cd}$  dans la direction  $\vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$ , respectivement (Figure 3.4).

FIGURE 3.4 Connexion de nœud de pilotage 11 avec la cellule unitaire ( $u_{11}^{cd} = \bar{\varepsilon}_{11}$  et les autres composantes sont nulles).

- 2<sup>ème</sup> cas : en considérant le cisaillement 13 dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ , l'équation 3.6 est écrite sous la forme suivante :

$$u_3^i - u_3^j = 2\bar{\varepsilon}_{13} \frac{1}{2} (x_1^i - x_1^j) \Leftrightarrow u_3^i - u_3^j - u_{13}^{cd} \frac{1}{2} \Delta x_1 = 0 \quad (3.9)$$

$$u_1^k - u_1^l = 2\bar{\varepsilon}_{13} \frac{1}{2} (x_3^k - x_3^l) \Leftrightarrow u_1^k - u_1^l - u_{13}^{cd} \frac{1}{2} \Delta x_3 = 0 \quad (3.10)$$

Si  $\bar{\varepsilon}_{13}$  est le déplacement de nœud fictif 13, la force de réaction sur ce nœud est donnée par le produit de la contrainte macroscopique  $\bar{\sigma}_{13}$  et le volume de la cellule unitaire ( $F_{13}^{cd} = \bar{\sigma}_{13} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ ). De la même manière, on obtient les forces de cisaillement  $F_{12}^{cd}$  et  $F_{23}^{cd}$ , respectivement (Figure 3.5). Plus de détails sur cette méthode sont données dans [148].

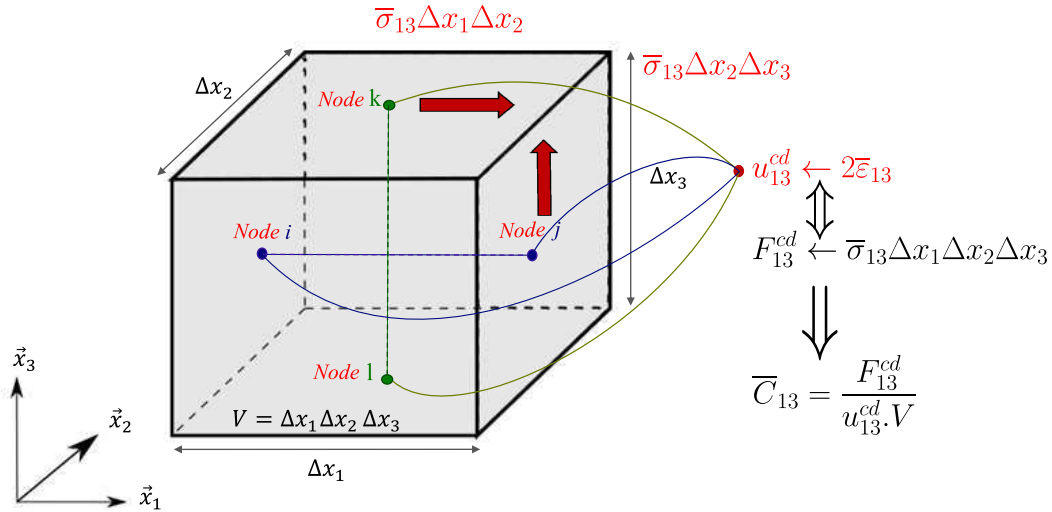


FIGURE 3.5 Connexion de nœud de pilotages 13 avec la cellule unitaire ( $u_{13}^{cd} = 2\bar{\varepsilon}_{13}$  et les autres composantes sont nulles).

### b) Résolution du problème non linéaire de la cellule unitaire

Considérant un comportement non linéaire, la relation entre la contrainte et la déformation macroscopique ne peut pas être définie explicitement par un tenseur de rigidité macroscopique comme dans le cas linéaire. Cependant, pour un incrément de déformation macroscopique  $\Delta \bar{\varepsilon}$  donné, la réponse globale peut être calculée en utilisant un schéma de résolution implicite incrémentale en linéarisant le problème microscopique à chaque incrément de temps. Le problème macroscopique est également linéarisé afin de prédire le prochain incrément en utilisant le même schéma de résolution. Cette linéarisation nécessite une écriture des lois de comportement macroscopique sous une

forme incrémentale (équation 3.11). Par conséquent, l'équilibre au niveau macroscopique en l'absence des forces de volume pour un incrément de temps macroscopique est donné par l'équation 3.12.

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{x}}) &= \langle \mathbb{D}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \rangle \\ &= \bar{\mathbb{D}}^\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}}) : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\boldsymbol{x}}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in V, \quad \forall \bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{V},\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\overline{\mathbf{div}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{x}})) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in V, \quad \forall \bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{V}.\tag{3.12}$$

avec  $\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{x}})$  l'incrément de tenseur de contrainte macroscopique associé au point d'intégration macroscopique  $\bar{\boldsymbol{x}}$  pour chaque incrément de déformation macroscopique. La relation entre la contrainte et la déformation macroscopique dans le cas non linéaire, est donnée en notation de Voigt par l'équation 3.13.

$\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$  est l'opérateur tangent mécanique macroscopique par incrément. Il est construit de la même manière qu'en élasticité linéaire (voir section 2.2.5) en calculant la contrainte macroscopique résultante des six états de déformation élémentaires écrits aussi en notation de Voigt (équation 3.14) à chaque incrément de déformation macroscopique. Cette technique, nommée technique de perturbation est réalisée via le concept de nœuds de pilotage.

$$\begin{pmatrix} \Delta\bar{\sigma}_{11} \\ \Delta\bar{\sigma}_{22} \\ \Delta\bar{\sigma}_{33} \\ \Delta\bar{\sigma}_{12} \\ \Delta\bar{\sigma}_{13} \\ \Delta\bar{\sigma}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{1111}^\varepsilon & \bar{D}_{1122}^\varepsilon & \bar{D}_{1133}^\varepsilon & \bar{D}_{1112}^\varepsilon & \bar{D}_{1113}^\varepsilon & \bar{D}_{1123}^\varepsilon \\ & \bar{D}_{2222}^\varepsilon & \bar{D}_{2233}^\varepsilon & \bar{D}_{2212}^\varepsilon & \bar{D}_{2213}^\varepsilon & \bar{D}_{2223}^\varepsilon \\ & & \bar{D}_{3333}^\varepsilon & \bar{D}_{3312}^\varepsilon & \bar{D}_{3313}^\varepsilon & \bar{D}_{3323}^\varepsilon \\ & & & \bar{D}_{1212}^\varepsilon & \bar{D}_{1213}^\varepsilon & \bar{D}_{1223}^\varepsilon \\ & & & & \bar{D}_{1313}^\varepsilon & \bar{D}_{1323}^\varepsilon \\ Sym & & & & & \bar{D}_{2323}^\varepsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{23} \end{pmatrix}\tag{3.13}$$

$$\begin{cases} \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(11)} = (K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(22)} = (0 \ K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(33)} = (0 \ 0 \ K \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(12)} = (0 \ 0 \ 0 \ K \ 0 \ 0)^T \\ \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(13)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ K \ 0)^T \\ \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(23)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ K)^T \end{cases}\tag{3.14}$$

la composante  $ijkl$  de l'opérateur tangent macroscopique est calculée de la même manière que pour le cas élastique présenté dans la section 2.2.5.

$$\bar{D}_{ijkl}^\varepsilon = \frac{\Delta\bar{\sigma}_{ij(kl)}}{K}, \quad ij, kl = 11, 22, 33, 12, 13, 23.\tag{3.15}$$

La procédure décrite ci-dessus, explique comment la transition d'échelle est effectuée entre les différents échelles via le processus d'homogénéisation périodique dans un cas général de comportement non linéaire. Dans la section suivante, un comportement non linéaire spécifique de la phase matricielle des exemple étudiés est brièvement développé. Il s'agit d'une loi élasto-viscoplastique avec endommagement ductile pour les polymère semi-cristallins.

### 3.3 Comportement non-linéaire local de la matrice

Cette section a pour objectif de mettre en place un deuxième ingrédient principal de l'approche d'EF multi-échelles qui concerne le comportement local des phases. Dans le composite étudié, seule la matrice aura un comportement non linéaire.

Les polymères thermoplastiques sont connus par leur comportement dissipatif qui combine des propriétés solides et fluides, dépendant du temps et de la vitesse de déformation. L'utilisation de ces matériaux dans des conditions de fonctionnement extrêmes ou dans des environnements agressifs cause des dégradations importantes de leurs propriétés physiques, ce qui entraîne généralement leur défaillance [9, 41].

Dans ce chapitre, le comportement local de la matrice polymère est défini par un modèle phénoménologique élasto-viscoplastique avec endommagement ductile basé sur les principes de la thermodynamique pour les polymères semi-cristallins [103, 104, 87, 149]. Le modèle est décrit par le schéma rhéologique présenté dans la Figure 3.6. Il est composé d'un ressort linéaire soumis à une déformation élastique  $\epsilon_e$  et une branche viscoplastique constituée d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle, présentant un comportement non linéaire. Cette branche est soumise à une déformation viscoplastique  $\epsilon_p$ . Le ressort linéaire et la branche viscoplastique sont positionnés en série.

L'endommagement considéré isotrope et est introduit par une variable scalaire  $D$  à travers la théorie de la mécanique de l'endommagement continue "Continuum Damage Mechanics (CDM)" basée sur le principe de la contrainte effective [102–104]. Si l'endommagement est considéré comme un phénomène isotrope, la "CDM" devient facilement applicable pour un cas 3D. La contrainte effective est alors donnée par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.16)$$

La déformation totale  $\epsilon$  se décompose en une partie élastique  $\epsilon_e$  et une partie viscoplastique  $\epsilon_p$  :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (3.17)$$

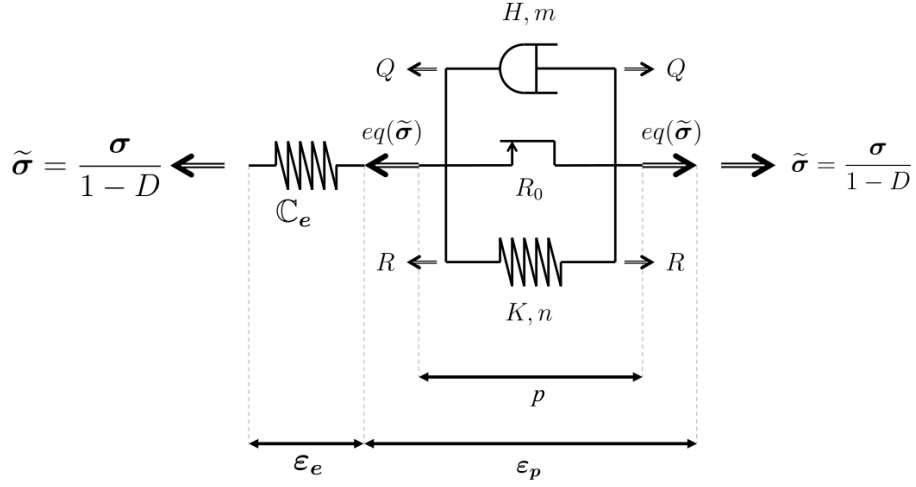


FIGURE 3.6 Schéma rhéologique du comportement viscoplastique avec endommagement ductile de la matrice polymère [149].

On suppose que la branche viscoplastique n'est sensible qu'à la partie déviatorique de contrainte effective  $eq(\tilde{\sigma})$ . De plus, l'endommagement est supposé ductile. Il évolue seulement lorsque la déformation viscoplastique est activée [87, 102].

### 3.3.1 Lois d'état et lois d'évolution

La loi de comportement de la matrice est formulée dans un cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [66, 103]. Dans ce cadre, un potentiel thermodynamique qui est une fonction des variables observables et des variables internes est introduit. Ce potentiel est choisi sous forme de l'énergie libre de Helmholtz  $\psi$ . La différentielle de celui-ci par rapport aux variables d'état permet d'obtenir les variables conjuguées. Le potentiel  $\psi$  est une fonction de la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , la variable d'état associée à l'écrouissage isotrope  $p$ , la déformation viscoplastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  et la variable d'endommagement  $D$ . Il s'écrit comme la somme de l'énergie stockée dans le ressort élastique  $\psi_e$  et la branche viscoplastique  $\psi_p$ .

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, p, \boldsymbol{\varepsilon}_p, D) = \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, D) + \psi_p(p) \quad (3.18)$$

avec

$$\rho\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, D) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) : (1 - D)\mathbb{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (3.19)$$

$$\rho\psi_p(p) = \int_0^p R(\xi) d\xi \quad (3.20)$$



$\mathbb{C}_e$  représente le tenseur de rigidité initial de ressort linéaire défini pour les matériaux isotropes.  $R$  est la fonction d'écroutissage isotrope, choisie sous la forme d'une fonction puissance, qui doit être croissante, positive et nulle en  $p = 0$  :

$$R(p) = K p^n, \quad (3.21)$$

avec  $K$  et  $n$  les paramètres du matériau viscoplastique. Les variables associées  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $-\boldsymbol{\sigma}$ ,  $R$  et  $-Y$  sont calculées par différentiation du potentiel d'état par rapport aux variables internes  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ,  $p$  et  $D$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - D) \mathbb{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (3.22)$$

$$-\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \quad (3.23)$$

$$R(p) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} \quad (3.24)$$

$$-Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})^2}{2E(1-D)^2} T_e(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.25)$$

où  $T_e$  est la fonction de triaxialité de la contrainte du ressort élastique. Celle-ci est égal à 1 dans le cas uni-axial, si non :

$$T_e = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left[ \frac{\text{hyd}(\boldsymbol{\sigma})}{\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})} \right] \quad (3.26)$$

Dans les équations ci-dessus,  $E$  présente le module de Young et  $\nu$  le coefficient de poisson du matériau polymère étudié. Selon le second principe de la thermodynamique, la dissipation mécanique est toujours positive ou nulle (inégalité de Clausius Duhem). On suppose que la dissipation mécanique et thermique sont découplées, le taux de l'énergie mécanique dissipée  $\dot{\Phi}$  est positive ou nulle. Cette dernière est donnée par la différence entre le taux de l'énergie de déformation  $\dot{W}_e$  et celui de l'énergie stockée  $\rho \dot{\psi}$  (Équation 3.27) :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \dot{W}_e - \rho \dot{\psi} \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \right) \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - R \dot{p} + Y \dot{D} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La viscoplasticité et l'endommagement sont considérés comme des phénomènes couplés [102, 87]. Par conséquent, l'évolution de  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ,  $p$  et  $D$  est décrite par la normalité d'une fonction indicative convexe  $F$  composée de deux formes  $f(\boldsymbol{\sigma}, R; D)$  et  $f_D(Y; D)$ . Elle est exprimée comme suit :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y; D) = \underbrace{\frac{\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})}{1-D} - R(p) - R_0}_{f(\boldsymbol{\sigma}, R; D)} + \underbrace{\frac{S}{(\beta+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta+1}}_{f_D(Y; D)} \quad (3.28)$$

Dans la dernière expression, le terme  $f(\boldsymbol{\sigma}, R; D)$  représente la fonction critère permettant d'activer le mécanisme viscoplastique ( $\dot{p} > 0$  si  $f \geq 0$ , sinon  $\dot{p} = 0$  et  $f < 0$ ), exprimée dans l'espace des contraintes effectives.  $f_D$  le terme additionnel qui prend en compte l'évolution de l'endommagement en même temps que la viscoplasticité.

$\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})$  est la contrainte équivalente de von Mises,  $R_0$  est le seuil d'élasticité, tandis que  $S$  et  $\beta$  sont les paramètres du matériau liés à l'endommagement.

Comme mentionné précédemment, l'évolution des variables internes est donnée par la normalisation de la fonction indicative  $F(\boldsymbol{\sigma}, R, Y; D)$  en introduisant le multiplicateur viscoplastique-endommagement  $\lambda$  ( $\dot{\lambda} \geq 0$ ).

$$\dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}, \quad (3.29)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \frac{3 \mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \text{eq}(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\dot{p}}{1-D} = \frac{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\sigma})}{1-D} \dot{p}, \quad (3.30)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda} = \left(\frac{Y}{S}\right)^\beta \frac{\dot{p}}{1-D} = \frac{\Omega(Y)}{1-D} \dot{p}. \quad (3.31)$$

avec  $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\sigma})$  et  $\Omega(Y)$  qui sont donnés par :

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3 \mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \text{eq}(\boldsymbol{\sigma})}, \quad \Omega(Y) = \left(\frac{Y}{S}\right)^\beta. \quad (3.32)$$

L'évolution du multiplicateur  $\lambda$  n'est activée ( $\dot{\lambda} > 0$ ) que si la fonction critère  $f$  devient positive. L'effet de la viscosité est introduit en considérant une relation entre la partie positive de  $f$  et  $\dot{p}$  via une fonction  $Q$ . Cette dernière est choisie sous la forme d'une loi de puissance :

$$\langle f \rangle_+ = Q(\dot{p}), \quad Q(\dot{p}) = H\dot{p}^m \quad (3.33)$$

où  $H$  et  $m$  sont les paramètres du matériau liés à la viscoplasticité. La fonction  $Q(\dot{p})$  doit être croissante, positive et nulle en  $\dot{p} = 0$ . Il est à noter que la déformation viscoplastique équivalente effective désignée par la variable scalaire  $p$  ne peut qu'augmenter ( $\dot{p} > 0$  si  $f \geq 0$ ) ou rester constante ( $\dot{p} = 0$  si  $f < 0$ ).

Ce type de modèle phénoménologique permet de capturer certains effets bien connus dans les polymères thermoplastiques, à savoir l'effet de la vitesse de chargement à travers les phénomènes de fluage et de relaxation, ainsi que la réduction de la rigidité causée par l'endommagement ductile. Le Tableau. 3.1 résume les variables thermodynamiques, les lois d'évolution et le critère viscoplastique du modèle de type von Mises. Dans ce tableau,  $\mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma})$  présente la partie déviatorique de la contrainte.

TABLE 3.1 Lois d'état et lois d'évolution du modèle VPD de la matrice

Variable d'état observable	Variable conjuguée	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - D) \mathbb{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$	
Variables internes	Variables conjuguées	Variables flux
$p$	$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = R(p)$	$\dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	$-\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \frac{3 \mathbf{Dev}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \text{eq}(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\dot{p}}{1 - D}$
$D$	$-Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$	$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda} = \left(\frac{Y}{S}\right)^\beta \frac{\dot{p}}{1 - D}$
	Critère $f(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})}{1 - D} - R(p) - R_0$	Activation VP ( $\dot{\lambda} > 0$ si $f \geq 0$ ) $\langle f \rangle_+ = Q(\dot{p})$

### 3.4 Calcul multi-échelles par EF<sup>2</sup> et implémentation numérique

Afin de prédire le comportement macroscopique des structures composites, en tenant compte de l'effet de la microstructure, un schéma d'homogénéisation dans le cadre

de la méthode EF<sup>2</sup> est mis en place. Selon Feyel [54], cette approche considère que le problème macroscopique et le problème hétérogène microscopique de la cellule unitaire sont résolus simultanément. À l'échelle macroscopique, le matériau est supposé être un milieu homogénéisé avec un comportement non linéaire. La réponse macroscopique est calculée en résolvant un problème de conditions aux limites périodiques appropriées au niveau microscopique en utilisant un schéma d'homogénéisation. Les informations macroscopiques importantes (déformation) sont transmises à la cellule unitaire par l'intermédiaire de la technique des noeuds de pilotage ("constraint drivers") comme expliqué précédemment (voir section 3.2.1).

Il faut mentionner que la réponse macroscopique est obtenue par le processus d'homogénéisation communément appelée "la réponse homogénéisée". Les champs macroscopiques (contrainte et module tangent) dépendent de la réponse microscopique de chaque point d'intégration de la cellule unitaire. Les champs de déformation macroscopique sont hétérogènes dans la structure. Par conséquent, la réponse homogénéisée varie en chaque point macroscopique entraînant un type d'hétérogénéité spatiale.

### 3.4.1 Concept et algorithme numérique de la méthode EF<sup>2</sup>

Après avoir défini le concept de noeuds de pilotage ainsi que le comportement local des constituants, la mise en œuvre numérique de l'approche par EF à deux échelles est présentée en détail dans cette section. La méthode proposée appartient à la catégorie générale des modèles multi-échelles. Cette méthode est capable de prédire la réponse des matériaux composites à différentes échelles (microscopique, mésoscopique et macroscopique). En effet, le comportement constitutif macroscopique est calculé directement à partir de la cellule unitaire qui définit la géométrie et les équations constitutives phénoménologiques de chaque constituant observé à l'échelle de la microstructure. Globalement la méthode EF<sup>2</sup> développée est basée sur trois étapes principales selon [54] :

- (1) Une description géométrique et un modèle EF pour la cellule unitaire afin de modéliser le comportement à l'échelle microscopique.
- (2) Les lois constitutives locales permettant de définir le comportement de chaque constituant de la microstructure.
- (3) Les relations de transition d'échelles reliant les champs locaux et globaux (contraintes et déformations).

La transition d'échelle est donnée par la théorie de l'homogénéisation, en utilisant la moyenne volumique sur la cellule unitaire des quantités microscopiques, obtenues à

partir de la résolution d'un problème des conditions aux limites périodiques appropriées. La déformation macroscopique est introduite dans la cellule unitaire en utilisant les six nœuds de pilotage connectés au modèle EF de la cellule unitaire à travers des équations cinématiques (équation 3.6). Ainsi, le comportement macroscopique de la structure composite est calculé en considérant que la réponse matérielle de chaque point d'intégration macroscopique est établie à partir de l'homogénéisation d'un problème de cellule unitaire représentative, connectée à chaque point d'intégration macroscopique. Cette cellule unitaire contient toutes les caractéristiques géométriques et matérielles des différentes phases de la microstructure.

L'approche EF<sup>2</sup> proposée ici, a été développée dans le cadre d'un schéma de résolution implicite, au moyen d'un algorithme itératif du type Newton-Raphson dans Abaqus/Standard, dédiée à la résolution du système d'équations non linéaires à deux échelles. À chaque incrément de déformation macroscopique, l'opérateur tangent et la contrainte macroscopique sont calculés à chaque point d'intégration macroscopique en résolvant itérativement un problème d'EF à l'échelle microscopique.

### a) Concept de transition entre les échelles dans les calculs EF<sup>2</sup>

Dans le cadre de la modélisation par EF<sup>2</sup>, la résolution globale est effectuée à chaque incrément de temps macroscopique en résolvant un problème d'équilibre local à chaque point d'intégration macroscopique. À chaque incrément de temps, le problème microscopique est résolu via l'application de l'incrément de déformation macroscopique sur la cellule unitaire à travers les conditions aux limites périodiques. Le système d'équations sous une forme incrémentale linéarisée est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{D}^\varepsilon(\mathbf{x}) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \mathbf{div}(\Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0 & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \Delta \mathbf{u}_i - \Delta \mathbf{u}_j = \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) & \forall \mathbf{x} \in \partial V \end{array} \right. \quad (3.34)$$

La subroutine développée à l'échelle microscopique (Micro-UMAT) traduit le comportement local non linéaire des constituants et estime les contraintes, les opérateurs tangents et les variables internes  $\mathbf{V}_k$  à l'échelle microscopique à chaque point de la cellule unitaire. La contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est ensuite calculée en faisant la moyenne volumique des contraintes microscopiques sur le volume de la cellule unitaire. Les opérateurs tangents locaux de chaque point microscopique de la cellule unitaire sont utilisés pour calculer l'opérateur tangent macroscopique  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$  en résolvant un problème linéaire (sur

l'incrément), par l'utilisation des six cas de chargement élémentaires décrits dans la sous-section 3.2.1.

Les variables internes et les contraintes locales sont enregistrées à la fin de chaque incrément du pas de temps macroscopique  $n$ , comme étant des conditions initiales pour le prochain incrément du pas de temps  $n + 1$ . Une fois que les quantités macroscopiques  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$  sont calculées, l'analyse à l'échelle macroscopique est ensuite exécutée pour la résolution de l'équilibre global, et l'incrément de déformation macroscopique  $\Delta\bar{\varepsilon}$  est fourni par le solveur EF d'Abaqus/Standard à chaque point macroscopique. Cette information est transmise à l'échelle macroscopique à travers la macro-subroutine (désigné ici par Méta-UMAT) qui représente le comportement d'un point matériel macroscopique et contient les équations de cellule unitaire. Ensuite, le processus de calcul revient au problème local. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que la convergence numérique soit atteinte pour les deux problèmes numériques microscopique et macroscopique. Une fois que la convergence est atteinte, l'analyse passe à l'incrément de temps suivant. La procédure itérative effectuée au sein de la Méta-UMAT est résumée dans la Figure 3.7.

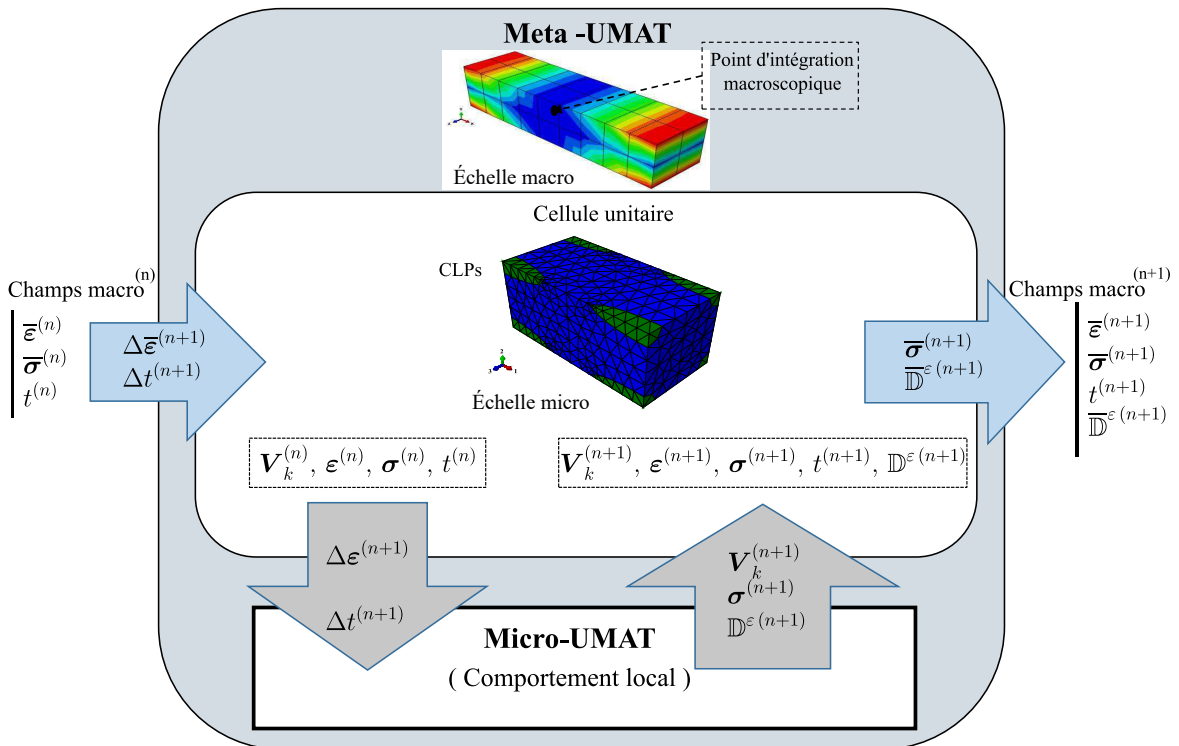


FIGURE 3.7 Comportement global du composite implémenté sous la forme d'une "Méta-UMAT" (User Material Subroutine) qui fait appel au problème microscopique (cellule unitaire) à chaque incrément de déformation/temps.

**b) Algorithme de la méthode EF<sup>2</sup>**

L'organigramme de l'algorithme de calcul à deux échelles EF<sup>2</sup> développé pour le cas des problèmes fortement non linéaires dans Abaqus/Standard est présenté dans la Figure 3.8. Comme montré dans les Figures 3.7 et 3.8, le problème macroscopique est résolu à chaque incrément de déformation/temps d'une manière linéarisée, en tenant compte du module tangent homogénéisé macroscopique  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$ . Un schéma numérique dédié, fondé sur la prédiction élastique et la correction inélastique adopté pour les milieux anisotropes est utilisé à l'échelle des constituants via un sous-programme utilisateur "Micro-UMAT". Ce schéma connu dans la littérature sous le nom de "return mapping algorithm – convex cutting plane" [168]. Dans ce qui suit, ce schéma est sera noté "return mapping algorithm".

En ce qui concerne l'implémentation numérique dans Abaqus, comme mentionné précédemment, la Méta-UMAT fait appel au script python pour lancer le calcul microscopique dans chaque point d'intégration macroscopique de la structure composite pour l'incrément de déformation macroscopique donné par Abaqus. Les conditions aux limites périodiques (CLPs) ainsi que la déformation macroscopique sont appliquées sur la cellule unitaire au moyen du script python à chaque incrément de temps. Le script appelle également le solveur EF d'Abaqus pour résoudre le problème microscopique par l'intermédiaire de la Micro-UMAT, afin d'obtenir la réponse microscopique via un processus itératif ("return mapping algorithm"). Une fois l'équilibre local atteint, i.e. la réponse locale ( $\sigma$  et  $\mathbb{D}^\varepsilon$ ) est calculée, la contrainte macroscopique est récupérée sur les nœuds de pilotage sous la forme d'une force de réaction divisée sur le volume de la cellule unitaire. Ensuite, le module tangent macroscopique est également calculé en mappant les modules tangents locaux sur la cellule unitaire à travers les six états de déformation élémentaires. Grâce au script python, les quantités macroscopiques calculées ( $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$ ) sont transférées à la Méta-UMAT afin que l'équilibre global soit vérifié. Si la convergence globale est atteinte, le processus passe à l'incrément de temps suivant  $n + 1$ .

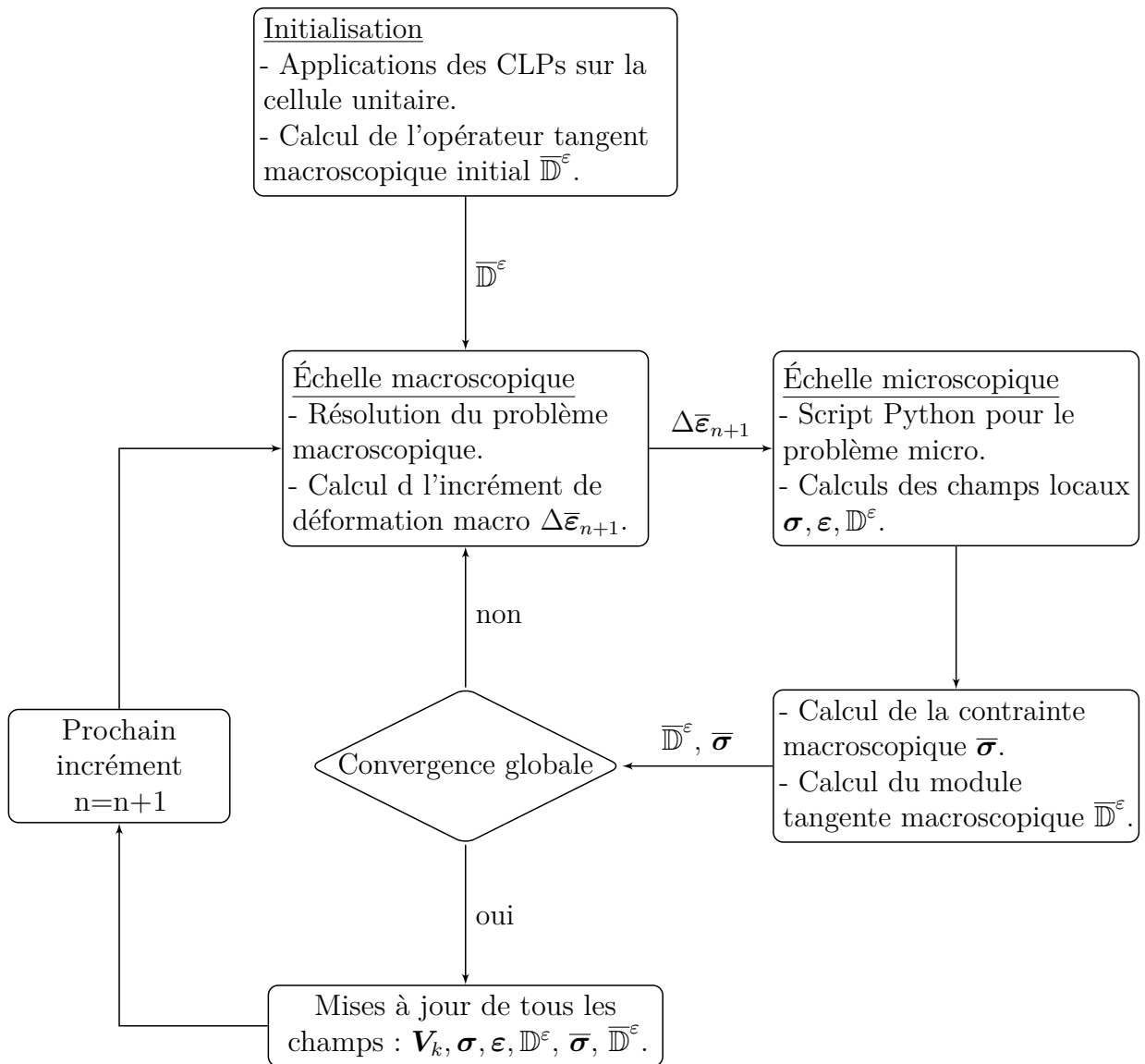


FIGURE 3.8 Organigramme de l'algorithme de calcul à deux échelles (EF<sup>2</sup>) dans Abaqus/Standard pour un cas non linéaire.

### c) Implémentation parallèle du code EF<sup>2</sup> dans Abaqus/Standard

L'objectif principal de la technique EF<sup>2</sup> est de faire un calcul de structure sur des structures composites réelles. Pour cela, il est primordial de réduire le temps de calcul. Les calculs par les méthodes multi-échelles en général ou la méthode EF<sup>2</sup> en particulier sont très coûteux en terme de temps de calcul. Cela, est dû principalement à la transition entre les deux échelles ainsi que le nombre de degrés de liberté des deux modèles EF microscopique et macroscopique. Ceci rend ce type de calcul inaccessible



avec des stations de calcul classiques (en termes d'espace mémoire et de vitesse de calcul). Par conséquent, des procédures de calcul parallèles sur plusieurs processeurs sont indispensables. Pour réduire ce temps de calcul élevé, une implémentation parallèle de la procédure EF<sup>2</sup> a été faite dans Abaqus/Standard. En utilisant un script "shell", tous les calculs EF des cellules unitaires d'un même élément macroscopique (un calcul par point d'intégration macroscopique) sont envoyés sur un seul nœud de calcul (un ensemble de processeurs) et sont résolus de manière itérative. Les calculs correspondant à chaque élément macroscopique sont effectués sur différents nœuds de calcul qui sont exécutés en parallèle. La procédure de parallélisation est présentée dans la Figure 3.9.

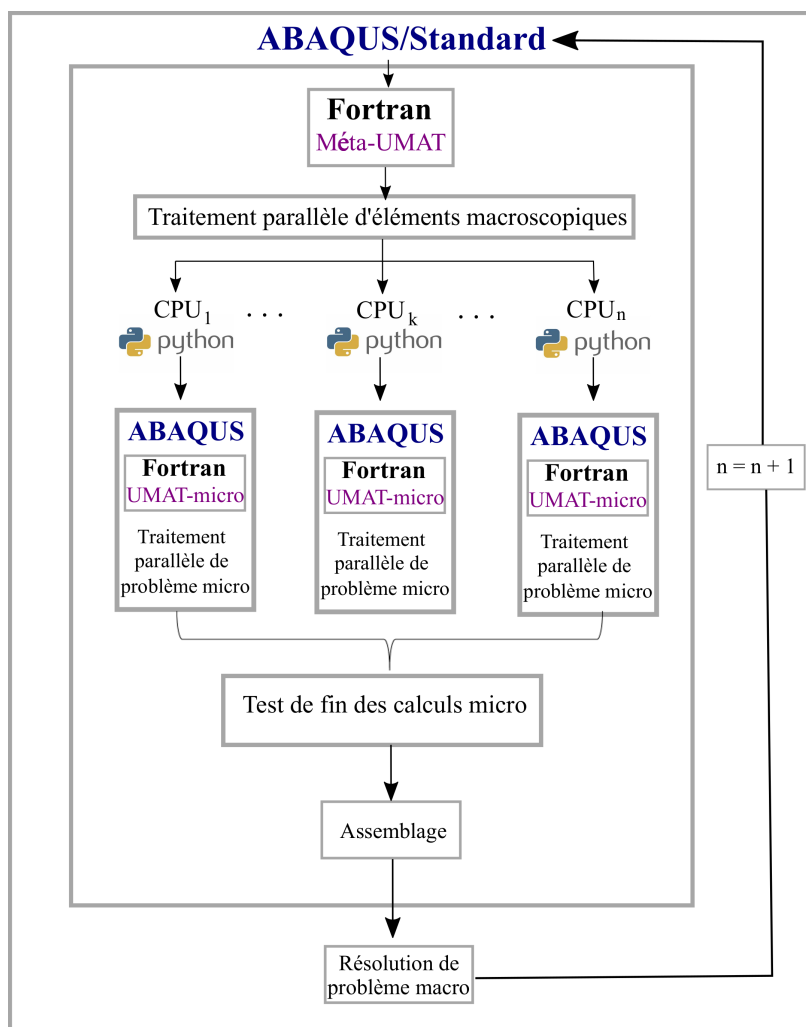


FIGURE 3.9 Étapes de parallélisation du code EF<sup>2</sup> dans Abaqus/Standard.

En effet, le calcul parallèle est limité par le nombre des nœuds de calcul disponibles dans la station de calcul. Les calculs EF microscopiques en chaque point d'intégration macroscopique peuvent également être effectués en parallèle (ce qui est souvent le cas).

La Méta-UMAT appelle un script python approprié pour résoudre le problème local (y compris le calcul de l'opérateur tangent macroscopique) à chaque point d'intégration macroscopique, en utilisant la Micro-UMAT. Ensuite, le solveur global d'Abaqus vérifie que tous les calculs effectués par différents processeurs sont exécutés avant de procéder à la résolution du problème macroscopique et avant de passer au prochain incrément de déformation/temps macroscopique.

## 3.5 Applications et capacités de la méthode EF<sup>2</sup> dans le calcul des structures composites 3D

Afin de valider l'approche multi-échelles que nous avons développée dans le cadre des calculs de structures composites 3D fortement non linéaires, trois cas d'exemples ont été traités : le premier considère une structure composite multi-couches périodique constituée d'une phase linéaire élastique et d'une phase non linéaire avec un comportement élasto-plastique. Il a été démontré dans [32], qu'en utilisant une approche incrémentale d'intégration temporelle linéarisée, il existe une solution semi-analytique à ce problème donnée en Annexe A. Cet exemple est utilisé comme une validation numérique de l'approche développée. Pour le deuxième exemple, il s'agit d'une structure composite 3D avec une microstructure constituée d'une phase matricielle ayant un comportement élasto-viscoplastique couplée à l'endommagement ductile, renforcée par des fibres de verre courtes. Les résultats de la simulation multi-échelles sont comparés à ceux d'une approche de modélisation classique à champs moyens (schéma de Mori-Tanaka incrémental [97]). Pour le troisième exemple, une structure composite 3D plus complexe a été simulée pour mettre en évidence les capacités de l'approche dans le cas de calcul d'une structure composite réelle.

### 3.5.1 Comparaison avec la méthode d'homogénéisation semi-analytique des composites multi-couches

L'approche proposée a été validée en comparant les résultats numériques avec la méthode d'homogénéisation semi-analytique présentée dans l'annexe A [32]. La structure composite simulée est présentée dans la Figure 3.10. À l'échelle microscopique, la structure est composée d'un empilement périodique de deux phases différentes. La première présente un comportement élastique (exposant  $e$ ) et la seconde un comportement élasto-plastique (exposant  $p$ ). Les fractions volumiques des deux phases sont égales, i.e.  $V^e = V^p = 0.5$ . La forme macroscopique de la structure est un parallélépipède. Pour

la phase élasto-plastique, le critère de déformation plastique est donné par la forme suivante :

$$f_p(\boldsymbol{\sigma}, p) = \text{eq}(\boldsymbol{\sigma}) - R(p) - R_0 \leq 0. \quad (3.35)$$

avec  $\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})$  la contrainte équivalente de von Mises et  $R_0$  le seuil d'élasticité. La fonction d'écrouissage  $R(p)$  est choisie sous la forme d'une fonction de puissance [103] :

$$R(p) = K \cdot p^n \quad (3.36)$$

où  $K$  et  $n$  sont les paramètres d'écrouissage isotrope du matériau.  $p$  est la déformation plastique cumulée. Les paramètres matériels des deux phases sont donnés dans Tableau 3.2.

Comme présenté dans la section 3.2.1, des conditions aux limites périodiques sont appliquées à la cellule unitaire du matériau multi-couches. Les conditions aux limites macroscopiques imposées correspondent à un cisaillement pur dans la direction 1-2. Ces conditions aux limites macroscopiques sont imposées de telle sorte que la relation entre le déplacement sur les limites est  $\bar{\mathbf{u}}^0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \bar{\mathbf{n}}$ , avec  $\bar{\mathbf{n}}$  est la normale sortante. Toutes les composantes du tenseur  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$  sont nulles sauf  $\bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21}$ , voir Figure 3.11-b.

Dans de telles conditions, il faut noter que les résultats numériques des deux analyses par EF doivent être indépendants du maillage, car des champs homogènes sont considérés dans toutes les phases. La Figure 3.12 présente la réponse macroscopique du composite multi-couches des deux analyses (l'approche EF<sup>2</sup> et la méthode semi-analytique) en termes de contrainte-déformation dans la direction du cisaillement 1-2.

TABLE 3.2 Paramètres matériaux des deux phases

Mécanismes		Paramètres	valeur	unité
Phase élasto-plastique	Module de Young	$E$	2000	MPa
	Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-
	Limite d'élasticité	$R_0$	10	MPa
	Coeff. écrouissage isotrope	$K$	60	MPa.s
	Exp. écrouissage isotrope	$n$	0.15	s
Phase élastique	Module de Young	$E$	6000	MPa
	Coefficient de Poisson	$\nu$	0.2	-

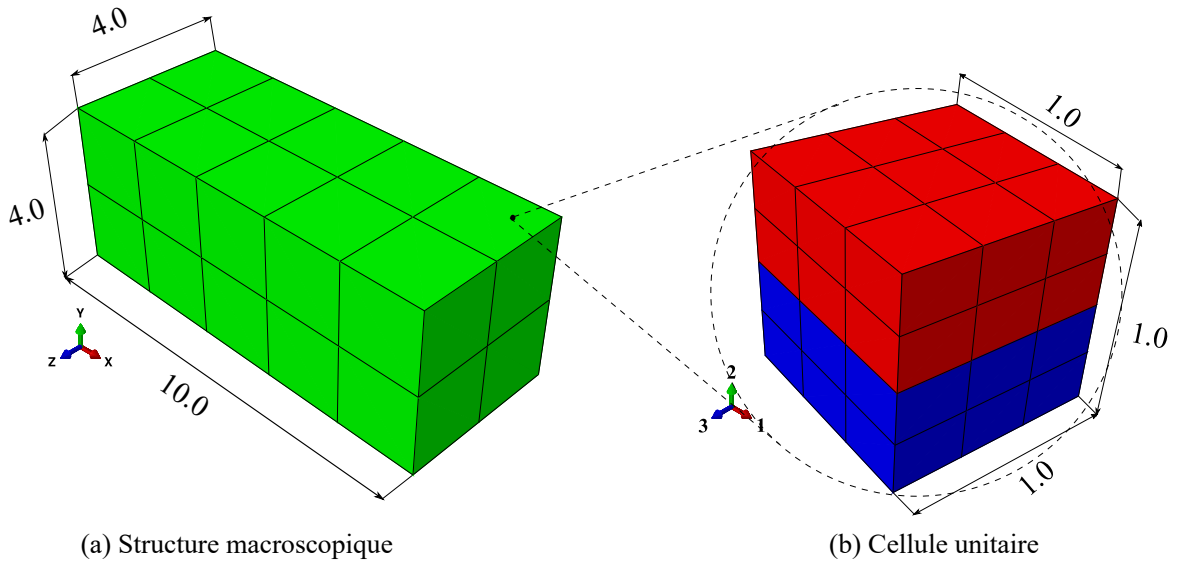


FIGURE 3.10 Dimensions de la structure composite multi-couches ainsi que la microstructure associée à chaque point d'intégration macroscopique.

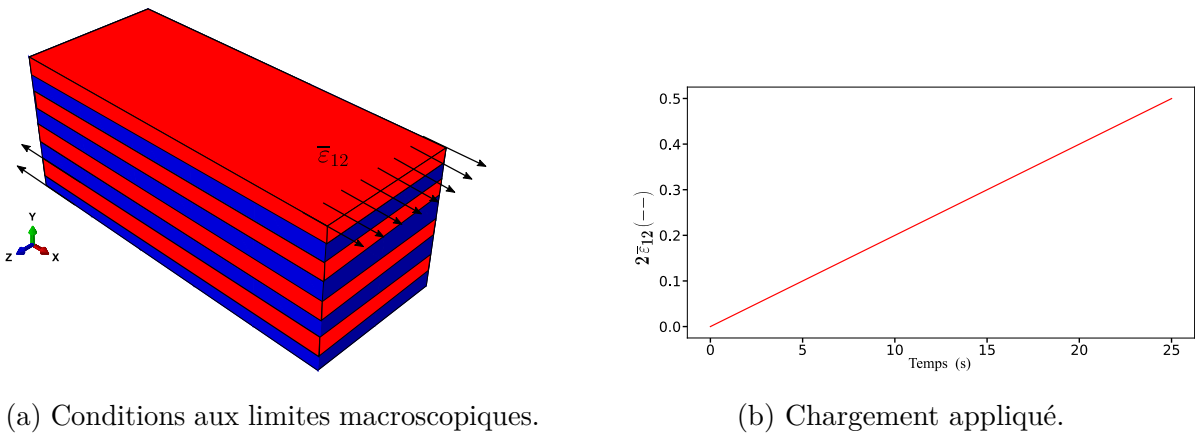


FIGURE 3.11 Conditions aux limites et chargement macroscopiques appliqués sur la structure composite multi-couches.

Les résultats des deux approches sont identiques démontrant ainsi la validité et la capacité de l'approche proposée à prédire la réponse globale non linéaire des structures composites 3D.

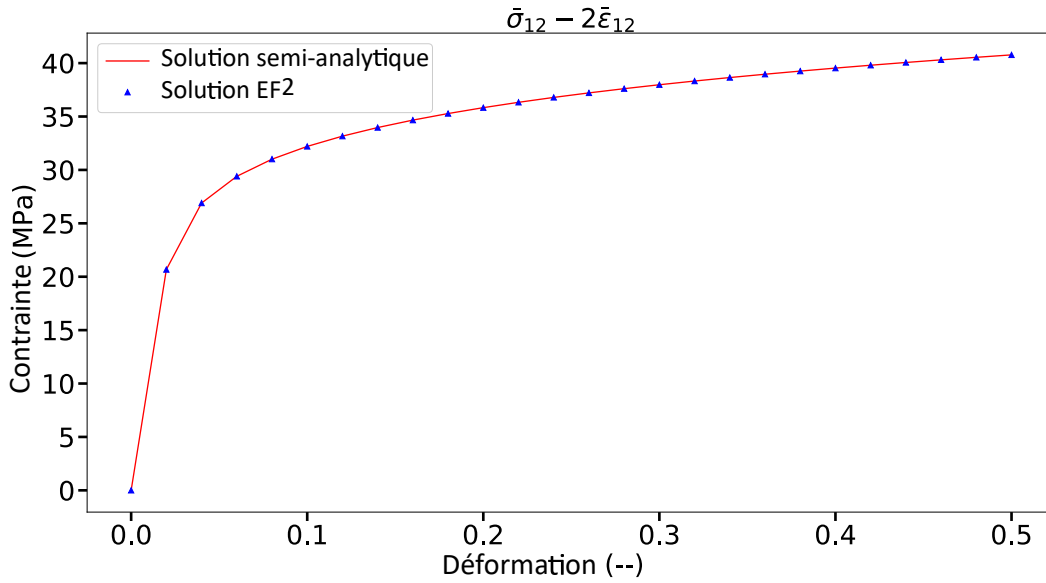


FIGURE 3.12 Comparaison du résultat numérique de l'approche EF<sup>2</sup> avec une solution semi-analytique sur un composite multi-couches à phases élastoplastiques en termes de réponses contrainte-déformation macroscopique.

### 3.5.2 Structure composite 3D (Meuwissen) renforcée de fibres courtes

Afin de démontrer les capacités de l'approche EF<sup>2</sup> à identifier la réponse globale des composites 3D, dans le cas de pièces généralement fabriquées en industrie, le deuxième cas de test est réalisé sur une structure non symétrique, où des champs de déformation et de contrainte hétérogènes sont observés durant la sollicitation en traction dans la direction 1. Le matériau composite est constitué d'une matrice polymère élasto-viscoplastique avec endommagement ductile, renforcée par des fibres de verre courtes alignées et disposées dans un réseau hexagonal périodique (Figure 3.13). La cellule unitaire est maillée par 6857 éléments de type C3D4 (éléments triangulaires à 4 nœuds avec un point d'intégration, éléments solides 3D pour une analyse statique). Les fractions volumiques de la matrice et des fibres sont respectivement  $V^m = 0.925$  et  $V^f = 0.075$ , tandis que le facteur de forme de la fibre ellipsoïdale est de (4, 1, 1). Les propriétés élastiques des fibres sont les suivantes : le module de Young  $E^f = 72000$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu^f = 0.26$ . Les propriétés du matériau de la matrice sont données dans le Tableau. 3.3. Ces paramètres sont basés sur le travail de [149], ils ne tiennent pas compte de la réponse viscoélastique.

La Figure 3.14-a présente les dimensions de la structure macroscopique ainsi que la discrétisation EF qui consiste en 100 éléments de type C3D8 (8 nœuds avec 8

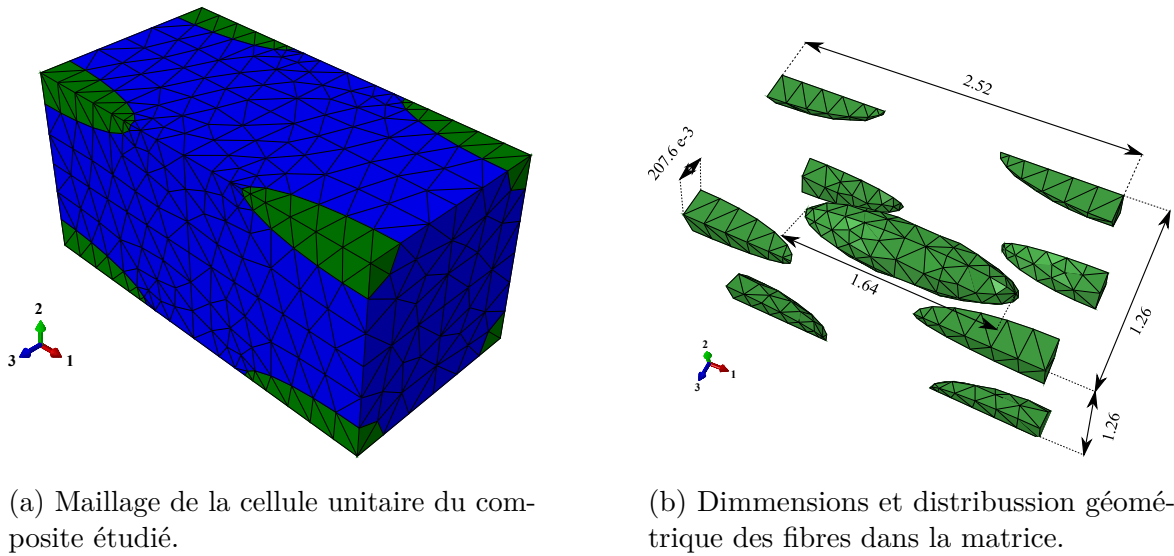


FIGURE 3.13 Microstructure du composite renforcé par des fibres courtes distribuées d'une manière périodique dans la matrice.

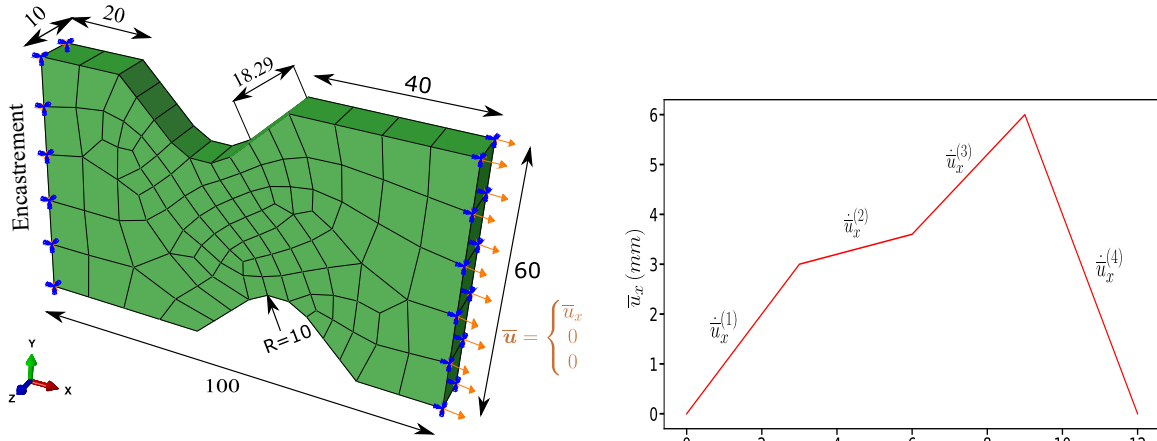
TABLE 3.3 Paramètres matériaux pour la matrice polymère

Mécanismes	Paramètres	valeur	unité
Viscoplastique- endommageable (VPD)	Module de Young	$E$	1680 MPa
	Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3 -
	Limite d'élasticité	$R_0$	10.0 MPa
	Coeff. écrouissage isotrope	$K$	365.0 MPa
	Exp. écrouissage isotrope	$n$	0.39 -
	Résistance VP	$H$	180.0 MPa.s <sup>m</sup>
	Exp. VP	$m$	0.3 -
	Coeff. d'endommagement	$S$	6.0 MPa
	Exp. d'endommagement	$\beta$	-1.70 -

points d'intégration, éléments solides 3D pour une analyse statique). Il est à noter que plusieurs analyses ont été faites pour différents maillages de la structure macroscopique pour un calcul homogène, les résultats ont confirmé que le maillage choisi de 100 éléments était suffisant pour les besoins du manuscrit.

La structure étudiée (Figure 3.14-a) est encastree à une extrémité et soumise à un chargement à différentes vitesses comme illustré dans la Figure 3.14-b, sur l'autre

extrémité. La sollicitation est contrôlée en déplacement et consiste en trois étapes de chargement avec des vitesses différentes ( $\dot{\bar{u}}_x^{(1)} = 1 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $\dot{\bar{u}}_x^{(2)} = 0.2 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $\dot{\bar{u}}_x^{(3)} = 0.8 \text{ mm.s}^{-1}$ ), suivies d'une étape de déchargement avec une vitesse de déplacement de ( $\dot{\bar{u}}_x^{(4)} = 2 \text{ mm.s}^{-1}$ ).



(a) Dimensions et maillage de la structure macroscopique.

(b) trajet de chargement appliqué.

FIGURE 3.14 Essai charge-décharge à différentes vitesses de chargement sur une structure composite 3D de type Meuwissen.

Les résultats numériques de la méthode EF<sup>2</sup> sont comparés à ceux obtenus par la méthode à champs moyens de Mori-Tanaka incrémentale. Cette méthode a été largement utilisée pour la simulation du comportement des composites [45] ainsi que de structures à matériau intelligent [144]. Ce schéma d'homogénéisation est considéré comme valide dans des cas spécifiques comme il est démontré dans [97], mais certaines corrections spécifiques peuvent être nécessaires [24, 28]. Puisque les corrections proposées ne sont pas uniques et dépendent du type de composite, la méthode incrémentale régulière est utilisée. Pour cela, le problème linéarisé est écrit en terme de module tangent algorithmique anisotrope des phases non linéaires [97]. L'avantage du schéma de Mori-Tanaka réside dans son efficacité en terme de temps de calcul, il s'agit d'une méthode semi-analytique où les non-linéarités du matériau sont prises en compte que dans un sens moyen et non pas à chaque point microscopique local de la cellule unitaire. La réponse globale de la structure en termes de force-déplacement calculée par l'approche EF<sup>2</sup> est illustrée dans la Figure 3.15 et comparée à la réponse globale prédite par l'approche à champs moyens de Mori-Tanaka.

Comme prévu, les deux approches prévoient des réponses comparables, notamment en régime élastique. Cependant, pour le régime viscoplastique, la simulation basée

sur les champs moyens ne prend pas bien en compte la variation de la vitesse de déformation du trajet de chargement appliqué et prédit une réponse plus rigide que celle de l'approche à champs complets EF<sup>2</sup>. Cet aspect est connu dans la littérature. Cette rigidification se produit lorsqu'une phase présente un comportement non linéaire. Des observations similaires ont été rapportées dans la littérature, en particulier lorsque la phase matricielle se comporte comme un milieu viscoélastique-viscoplastique [121, 28]. Les auteurs ont proposé des formulations numériques spécifiques (isotropisation) pour traiter cette limite des méthodes basées sur le principe de champs moyens.

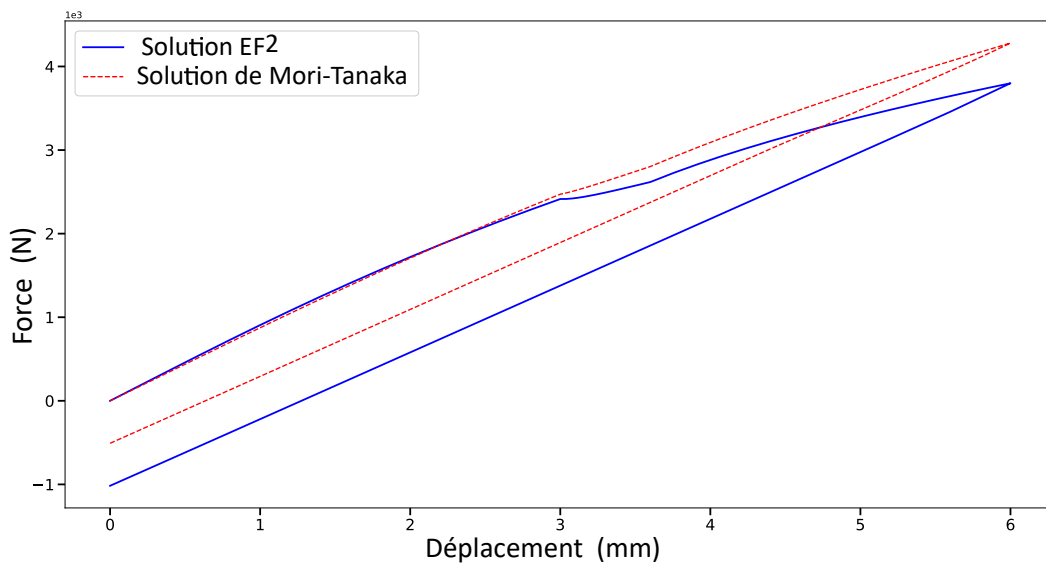


FIGURE 3.15 Réponse globale de la structure composite en termes de force-déplacement pour la composante 11. Comparaison entre la solution EF<sup>2</sup> et la solution de Mori-Tanaka.

La Figure 3.16 présente les courbes de contrainte-déformation au point macroscopique critique A de la Figure 3.17-a. En raison de la forme semi-analytique de la méthode de Mori-Tanaka, les calculs sont plus rapides que pour la méthode EF<sup>2</sup> mais nécessitent des incréments de temps plus petits. Les résultats montrent que l'approche multi-échelles EF<sup>2</sup> prédit bien le changement de la vitesse de chargement lié au comportement viscoplastique de la matrice polymère. En revanche, il est clairement observé que la réponse prédite par Mori-Tanaka ne décrit pas ce phénomène d'une manière précise, comme attendu. Elle est plus rigide avec une perte considérable de la plasticité, comparée à la solution EF<sup>2</sup>. Les résultats montrent également que la réponse du composite est fortement influencée par la présence de la matrice, présentant à la fois une réponse viscoplastique par le biais de phénomène de relaxation, ainsi qu'une réduction de la rigidité due à l'endommagement ductile dans la matrice polymère.



La Figure 3.17 présente la distribution spatiale des champs de contrainte macroscopique (Figure 3.17-a) et microscopique (Figure 3.17-b) au point critique A de la macro-structure, dans la direction de chargement 1 à la fin de l'analyse. Il est clair que pour un tel point matériel critique (le point le plus sollicité), le schéma incrémental de Mori-Tanaka adopté ici reste insuffisamment précis pour prédire la réponse locale afin d'utiliser ces résultats dans le calcul de l'évolution de l'endommagement.

Cependant, même si la convergence du maillage est difficile à obtenir pour avoir des résultats exacts, le cadre EF<sup>2</sup> établi, peut fournir une prédiction beaucoup plus élevée que les méthodes à champs moyens lorsque une structure composite est modélisée, où la matrice présente une réponse fortement non linéaire. Il faut mentionner que l'homogénéisation périodique donne d'excellents résultats pour les structures 3D et que la précision numérique dépend du calcul EF. Néanmoins, lorsqu'il s'agit de structures de plaques ou de coques, l'homogénéisation périodique nécessite des modifications appropriées, comme décrit dans [81], en raison de la perte de la périodicité dans le sens de l'épaisseur. Cela donne une prédiction moins précise pour l'effet de Poisson hors plan. En revanche, l'hypothèse de périodicité hors plan peut être satisfaite lorsque la microstructure contient un grand nombre de fibres ou de couches dans l'épaisseur.

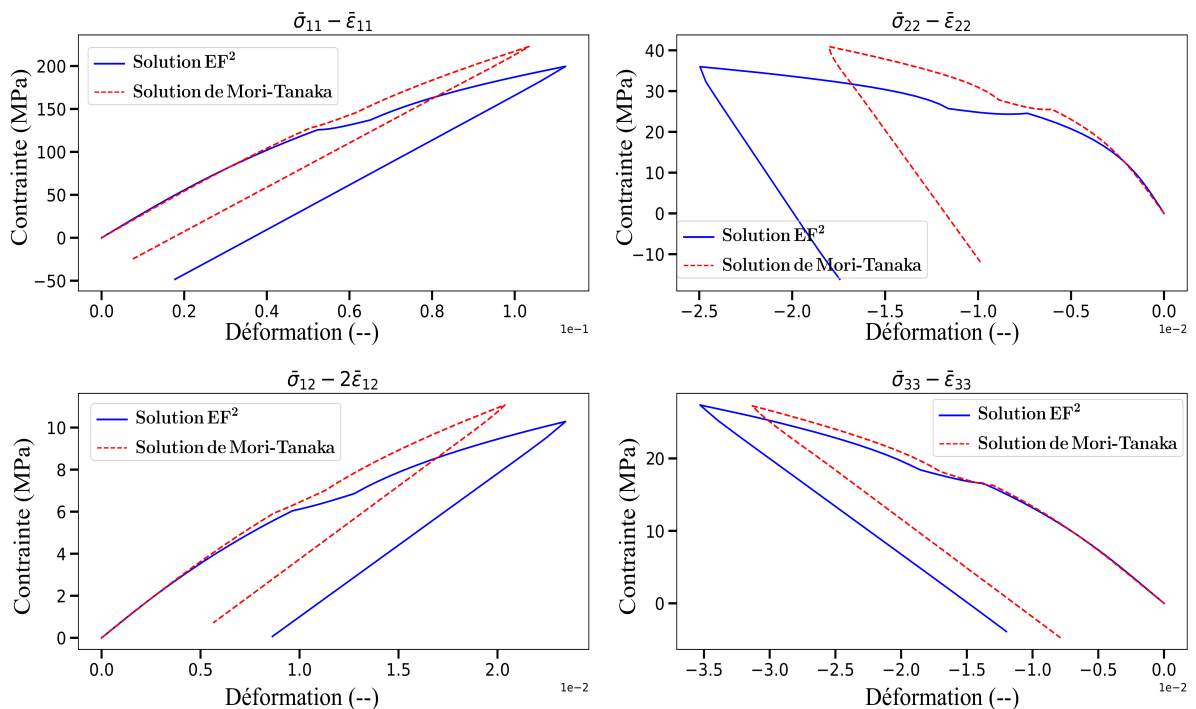
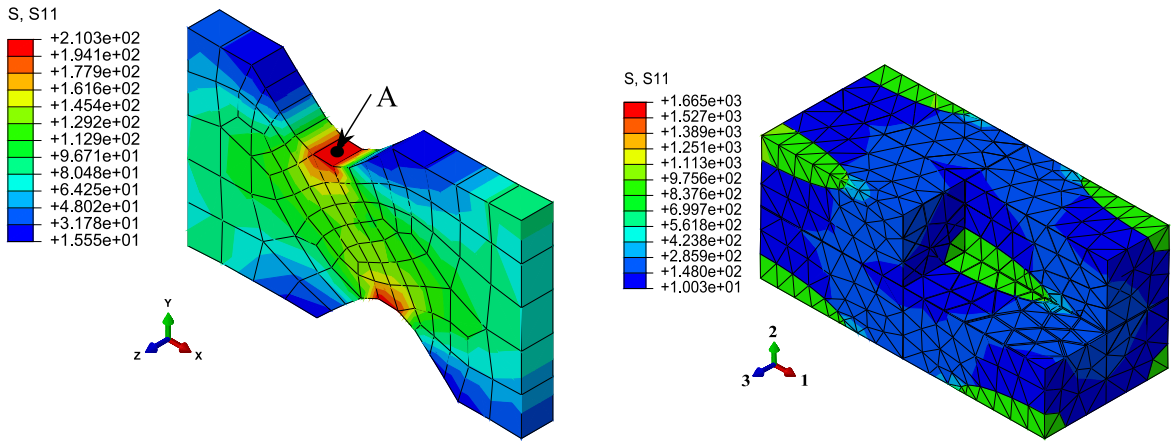


FIGURE 3.16 Réponse macroscopique du composite au point A en termes de contrainte-déformation pour les composantes 11, 22, 33 et en cisaillement 12 (comparaison entre EF<sup>2</sup> et la solution de Mori-Tanaka).



(a) Champs de contrainte macroscopique de la structure composite.

(b) Champs de contrainte microscopique de la microstructure au point A.

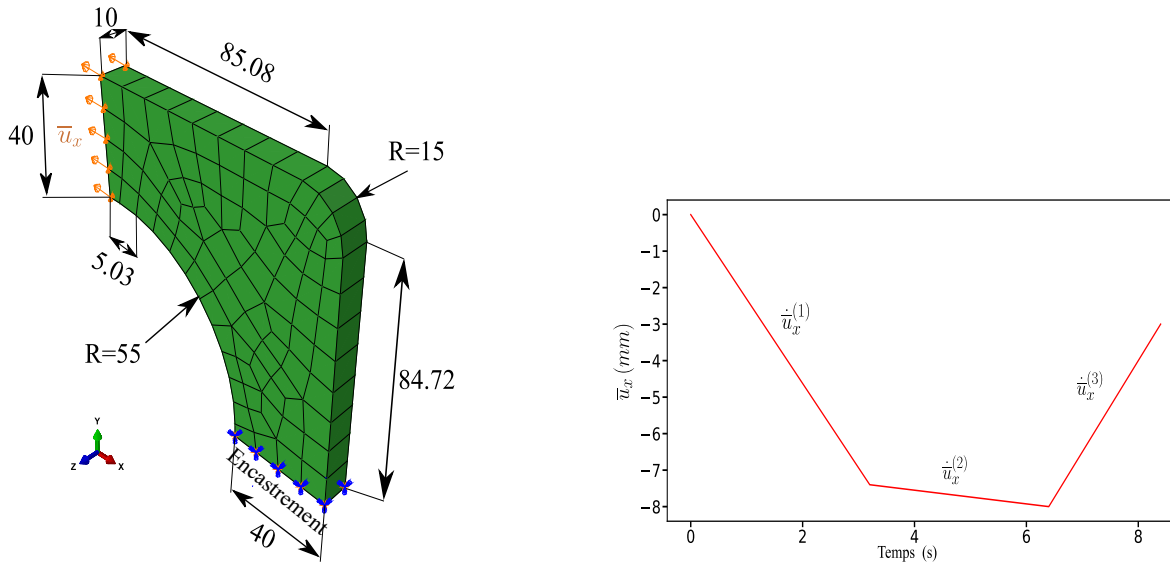
FIGURE 3.17 Champs de contrainte macro-micro de composite pour la composante 11 avec Abaqus/Standard.

### 3.5.3 Structure composite complexe 3D

Dans cette section, une troisième structure composite 3D est simulée, afin d'illustrer les capacités et la flexibilité de l'approche développée lorsque des conditions aux limites plus complexes sont appliquées à l'échelle macroscopique. La structure modélisée consiste en une pièce 3D montrée en Figure 3.18-a. Elle est constituée d'un composite à matrice thermoplastique renforcée de fibres de verre courtes alignées. Les deux phases (matrice et fibres) ont le même comportement que celui présenté dans la section 3.5.2. La structure est encastrée à une extrémité et soumise à un déplacement à différentes vitesses sur l'autre extrémité (Figure 3.18-b). Le trajet de chargement est contrôlé en déplacement. Il est constitué de deux étapes de chargement avec des vitesses de déplacement différentes ( $\dot{u}_x^{(1)} = 2.1875 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $\dot{u}_x^{(2)} = 0.15625 \text{ mm.s}^{-1}$ ) suivies d'une étape de déchargement à une vitesse de déplacement de  $\dot{u}_x^{(3)} = 0.9375 \text{ mm.s}^{-1}$ .

Dans les Figures 3.19 et 3.20, la réponse mécanique macroscopique du composite en termes de contrainte-déformation est représentée en deux points distincts A et B de la structure (Fig.3.21-c).

L'approche est capable de reproduire l'effet de la microstructure sur la réponse globale du composite, comme illustré sur la Figure 3.21 pour deux points critiques de la structure. En effet, sur la partie encastrée (point A), il est clair que la structure est soumise à une charge de traction selon  $y$  (la direction 2), ainsi qu'une charge de cisaillement dans le plan  $xy$  (la direction 1-2). Ces réponses sont principalement dues aux conditions aux limites macroscopiques appliquées sur la structure. De plus, pour le



(a) Structure composite macroscopique.

(b) Trajet de chargement appliqué.

FIGURE 3.18 Essai de traction à différentes vitesses de chargement sur une structure composite 3D de démonstration.

point B, on constate que la contrainte est plus élevée dans la direction  $x$  (direction de chargement 1). La Figure 3.21-c montre la distribution spatiale des champs de contrainte macroscopique dans la structure composite (direction 1), ainsi que la distribution des champs locaux de contrainte dans les deux cellules unitaires situées en deux points macroscopiques différents A et B (Figures 3.21-a et 3.21-b, respectivement).

La réponse du composite est fortement affectée par la rhéologie (VP) de la matrice à travers le phénomène de la pseudo relaxation causée par le changement de vitesse de chargement, ainsi que la réduction de module de rigidité pendant le déchargement causée par l'endommagement ductile dans la matrice.

Concernant la parallélisation du calcul, le temps de calcul CPU devient 18 fois plus rapide que la méthode sans parallélisation pour le même nombre d'incréments (42 incrément), le temps de calcul réel de l'analyse effectuée sur 18 processeurs était d'environ 72h pour une structure macroscopique contenant 90 éléments de type C3D8 avec 6857 éléments microscopiques de type C3D4.

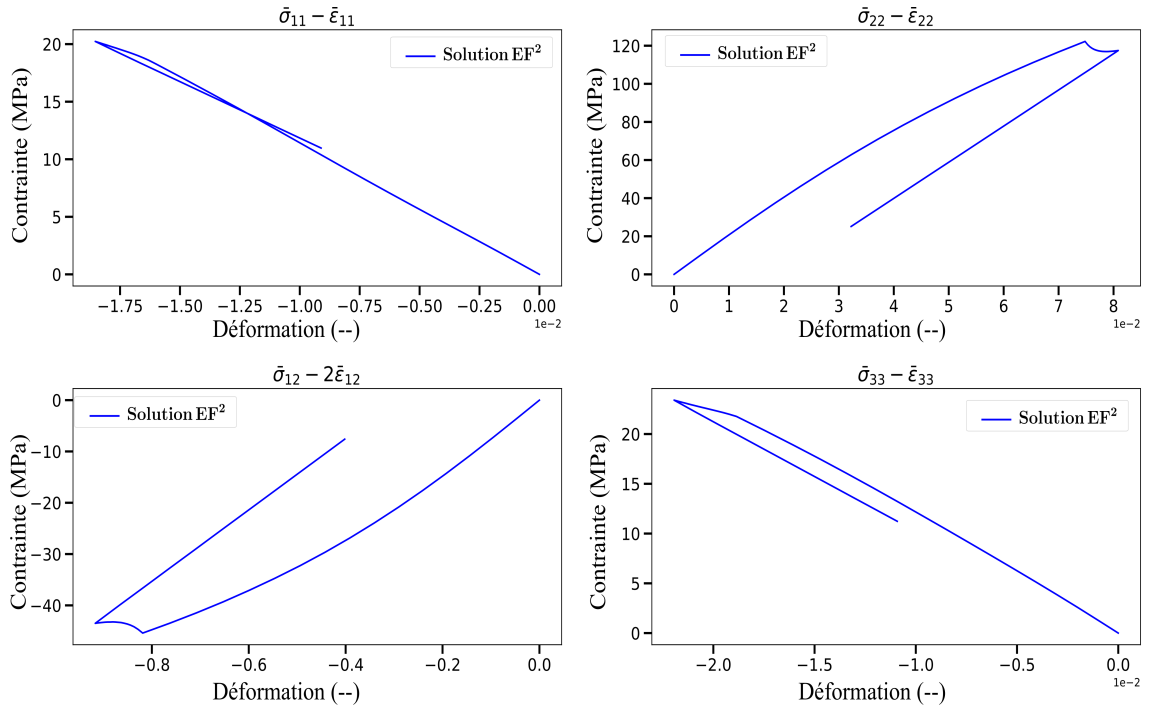


FIGURE 3.19 Réponse macroscopique du composite au point A en termes de contrainte-déformation pour les composantes 11, 22, 33 et de cisaillement 12.

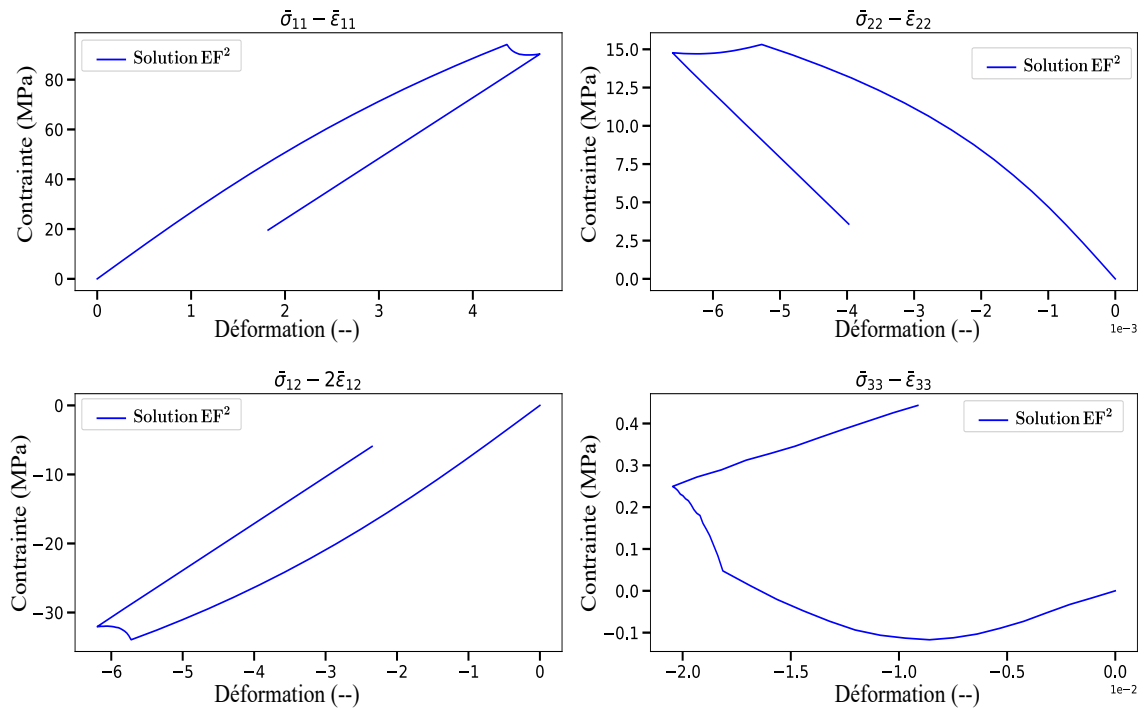


FIGURE 3.20 Réponse macroscopique du composite au point B en termes de contrainte-déformation pour les composantes 11, 22, 33 et de cisaillement 12.

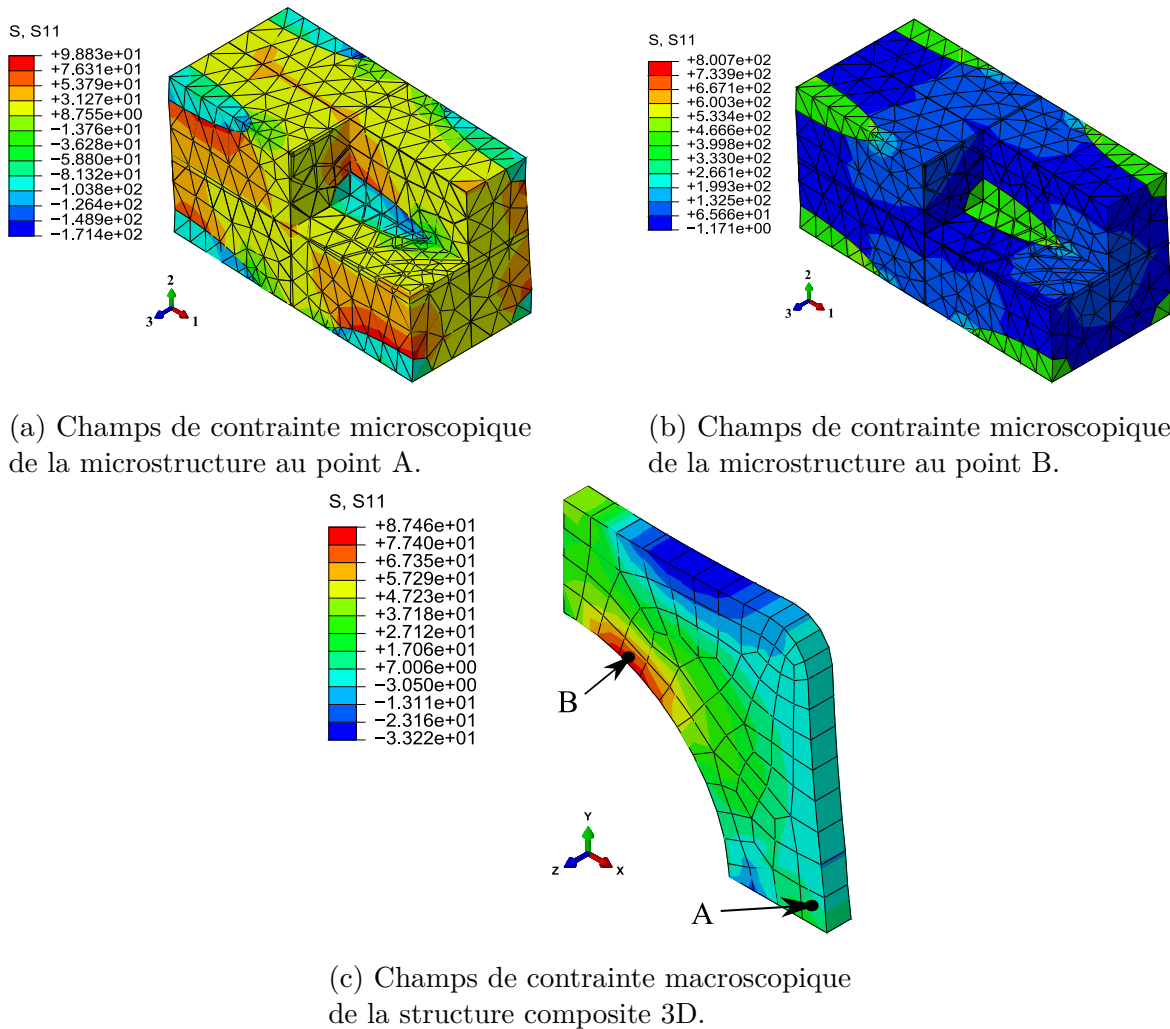


FIGURE 3.21 Champs ds contraintes macroscopique et microscopique du composite dans la direction de traction 1 obtenus via la méthode EF<sup>2</sup> dans Abaqus/Standard.

### 3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche d’homogénéisation multi-échelles par éléments finis (EF<sup>2</sup>) dédiée au calcul des structures composites 3D à comportement non linéaire. L’approche est totalement intégrée dans le logiciel commercial d’EF Abaqus/Standard, en utilisant le calcul parallèle. Le principal avantage de cette méthode est qu’elle n’exige pas de forme analytique pour les lois de comportement à l’échelle macroscopique, tout en tenant compte des effets de la microstructure et des comportements locaux des constituants sur la réponse globale de la structure. Elle peut intégrer tout type de microstructure périodique avec tout type de comportement

non linéaire du renforcement (fibres et/ou particules) et de la matrice (plastique, viscoélastique, viscoplastique et endommagement).

La stratégie de calcul multi-échelles a été testée sur trois exemples numériques indépendants : dans le premier exemple, une structure composite multi-couches 3D à deux phases élasto-plastiques a été modélisée et comparée avec une solution semi-analytique afin de valider la mise en œuvre numérique de l'approche développée. Dans le deuxième exemple, un composite à matrice élasto-viscoplastique endommageable renforcée par des fibres de verre courtes sous un chargement complexe a été simulé avec la méthode EF<sup>2</sup>. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par la méthode de Mori-Tanaka. Les réponses obtenues sont en accord avec celles présentées dans la littérature dans des cas similaires. Cela permet de mettre en évidence l'importance d'utiliser la méthode à champs complets pour une stratégie de modélisation générique avec des capacités de prédiction élevées. Dans le troisième exemple, une structure composite 3D plus complexe a été simulée dans laquelle la microstructure est constituée d'une matrice élasto-viscoplastique endommageable renforcée par des fibres de verre courtes. Les capacités d'une telle approche pour reproduire les effets de la microstructure sur la réponse globale du composite en chaque point macroscopique ont été démontrées.

La réponse macroscopique de la structure met bien en évidence les phénomènes de fluage et de relaxation caractéristiques des comportements dépendant de la vitesse de déformation. Ce comportement visqueux ainsi que la réduction de la rigidité observée lors du déchargement ont été induits par la nature viscoplastique et l'endommagement dans la matrice polymère. Il faut noter que pour les composites où la matrice présente un comportement fortement non-linéaire, la méthode de Mori-Tanaka avec des modifications appropriées (isotropisation) pourrait améliorer la réponse de composite [118, 121].

Dans le chapitre suivant, l'approche de modélisation EF<sup>2</sup> développée est appliquée pour un cas de comportement plus complexe, il s'agit d'un composite tissé constitué d'une matrice polyamide 6-6 à comportement viscoélastique-viscoplastique-endommageable et des torons présentant un comportement anélastique avec endommagement anisotrope.



# Chapitre 4

## Validation expérimentale de l'approche $EF^2$ pour une structure en composite PA66-tissé sergé 2-2

### 4.1 Introduction

Les composites à renfort tissé sont de plus en plus utilisés dans plusieurs secteurs industriels en raison de leur capacité à satisfaire des exigences élevées que les matériaux conventionnels ne peuvent pas atteindre. Ces composites présentent d'excellentes performances, notamment en matière de légèreté, de rigidité et de durabilité structurale. Le principal avantage de ce type de matériau est sa grande flexibilité à obtenir de grand spectre de propriétés mécaniques en modifiant l'architecture de la microstructure lors de la conception. L'architecture de la microstructure tissée est définie par la période spatiale représentant le plus petit intervalle pour qu'un motif se répète suivant la direction du toron chaîne ou trame. Selon l'architecture conçue, différents types de composites tissés peuvent exister : tissu de type taffetas, sergé 2-2 et/ou satin [23].

Les paramètres principaux influençant le comportement d'une structure tissée sont : i) les caractéristiques géométriques des torons (diamètre, nombre de fibres, ténacité, etc), l'architecture du tissage et ii) les propriétés mécaniques de la matrice (thermoplastique, thermodurcissable) et des renforts (fibres de verre, de carbone, etc). La géométrie complexe de la microstructure des composites tissés rend leur modélisation très difficile. Pour cela, plusieurs méthodes de modélisation numérique ont été mises en place afin de bien comprendre le comportement de ces matériaux. Parmi ces méthodes, deux sont très utilisées dans la communauté des composites :



- Les modèles phénoménologiques, qui permettent d'estimer le comportement global des composites tissés sans prendre en compte l'effet de la microstructure. Les propriétés effectives du matériau sont calculées en modélisant la structure globale tout en considérant le matériau comme étant homogène. Ces modèles nécessitent l'intégration de nombreux mécanismes pour qu'ils soient performants, tel que l'endommagement, la plasticité, la viscosité, l'anisotropie et le couplage thermomécanique [92, 76, 151, 77, 156, 78, 88, 89, 98, 110, 148]. Les modèles phénoménologiques requièrent un grand nombre de paramètres à identifier, qui sont valables seulement pour une configuration spécifique de la microstructure. Cela rend ce type de modèles très limités pour un calcul de structure.
- Les approches multi-échelles, qui permettent de modéliser le comportement global des structures composites en tenant compte des effets induits par le comportement des différents constituants de la microstructure. Pour les composites renforcés de fibres courtes, fibres longues ou inclusions, il existe des solutions analytiques ou semi analytiques via les approches de modélisation à champs moyens (Mori-Tanaka, auto-cohérent, voir chapitre 2). Cependant, pour les composites tissés il n'existe aucune solution analytique ou semi analytique permettant d'identifier leurs comportement global. Pour cette raison, l'utilisation des approches multi-échelles basées sur l'homogénéisation périodique est primordiale. En effet, la majorité des travaux présentés dans la littérature concernant les composites tissés prédisent la réponse globale du VER seulement [13, 185, 190]. Dans ce sens, la plupart des travaux réalisés dans le cadre de comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour ce type de matériau ont été effectués sur un point matériel macroscopique [163, 175, 8, 158].

En plus des deux catégories ci-dessus, d'autres auteurs ont essayé de combiner les deux approches (phénoménologique et multi-échelles) pour avoir une base de données qui sert par la suite à identifier un modèle purement phénoménologique [134, 5, 62, 148].

Le but de ce chapitre est de modéliser la réponse structurale des composites tissés en tenant compte de l'effet induit par la microstructure. L'approche de modélisation par "EF<sup>2</sup>" proposée dans le chapitre 3, est appliquée pour un calcul de structure sur un matériau composite tissé 3D à base polymère. Cette approche de modélisation est capable i) de simuler le comportement macroscopique en tout point de la structure avec prise en compte des effets de la microstructure, et ii) de suivre l'évolution spatio-temporelle de chaque mécanisme existant à l'échelle microscopique.

Une procédure expérimentale a été mise en place afin de montrer la validité et les performances de l'approche EF<sup>2</sup> développée dans le cas d'un calcul de structure sur des

composites tissés. Une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques a été faite sur une plaque trouée 3D pour différentes configurations de séquence d'empilement. Le matériau étudié consiste en un composite tissé du type sergé 2-2. La microstructure est constituée d'une matrice PA66 représentée par un comportement viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile et des torons représentés par un comportement non-linéaire avec un endommagement anisotrope. Les réponses globales (force-déplacement) et macroscopiques locales (mesure du champ cinématique) obtenues expérimentalement et numériquement sont comparées. À cet effet, la technique de mesure du champ cinématique par corrélation d'images numériques a été utilisée afin de calculer les champs de déformation macroscopiques locaux dans la plaque trouée. Il est à noter que ce processus de validation de l'approche EF<sup>2</sup> par des données d'expérience n'a jamais été considéré dans la littérature pour le cas des composites tissés en 3D.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la section 4.2 présente la stratégie de calcul par EF<sup>2</sup> adoptée pour la modélisation du comportement de composite tissé. La section présente également les caractéristiques géométriques de la microstructure tissée utilisée ainsi que les lois de comportement des phases (matrice PA66 et tissus). La section 4.3 présente la mise en œuvre expérimentale, ainsi que la technique de mesure du champ cinématique adoptée pour la validation de l'approche EF<sup>2</sup>. Dans la section 4.4, les prédictions numériques sont comparées aux résultats expérimentaux. Enfin, les capacités de l'approche développée à prédire le comportement macroscopique et microscopique en tout point de la structure sont discutées dans la section 4.5.

## 4.2 Stratégie de calcul par EF<sup>2</sup>

L'objectif de cette section est de mettre en évidence les performances et les capacités de l'approche proposée à prédire le comportement des structures composites tissées à deux échelles : i) échelle macroscopique : à travers les champs de déformation et de contrainte macroscopiques, ii) échelle microscopique : en prédisant les champs de déformation et de contrainte microscopiques ainsi que toutes les variables d'endommagement, la dissipation d'énergie, l'évolution de la plasticité, etc. À cet effet, des calculs de structures sont réalisés à travers l'approche EF<sup>2</sup> sur une structure démonstrateur. Par la suite, les résultats numériques obtenus par EF<sup>2</sup> sont comparés aux résultats expérimentaux afin de valider la stratégie de calcul développée.

### 4.2.1 Représentation géométrique de la structure macroscopique et leur microstructure

Une structure hétérogène 3D du type plaque trouée a été étudiée dans ce chapitre. Cette étude a été choisie pour montrer les capacités de la technique EF<sup>2</sup> à capturer la réponse macroscopique hétérogène du composite produite par l'effet de structure (la présence du trou) et de suivre également l'évolution des différents mécanismes locaux existant au niveau de la microstructure : l'endommagement, les états de déformations locaux, la dissipation d'énergie, etc.

Dans ce sens, différentes configurations des séquences d'empilement ont été choisies. Pour des raisons de symétrie de la structure hétérogène étudiée, on considère que le 1/4 de la zone utile de la plaque pour la partie simulation numérique. Celle-ci représente le macro-modèle pour l'approche multi-échelles EF<sup>2</sup>. La Figure 4.1 présente les dimensions du 1/4 de la zone utile de l'éprouvette ainsi que les conditions aux limites macroscopiques appliquées. Des conditions de symétrie sont appliquées sur l'extrémité gauche et le bord inférieur de la structure. Tandis que le bord supérieur est chargé en déplacement vertical  $\bar{u}_y$  selon l'axe  $y$  sous forme de conditions aux limites de Dirichlet. Les caractéristiques géométriques de l'éprouvette entière utilisée lors des essais expérimentaux sont présentées dans la section 4.3.

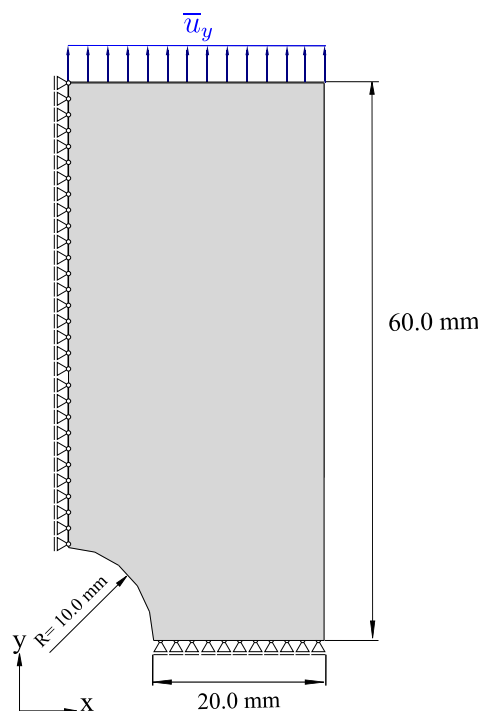


FIGURE 4.1 Dimensions et conditions aux limites appliquées sur le macro-modèle.

Chaque point d'intégration macroscopique de la plaque trouée est représenté par une cellule unitaire représentative de la microstructure tissée étudiée. Les caractéristiques géométriques et microstructurales de cette cellule unitaire sont représentées dans la sous-section ci-dessous.

### *Cellule unitaire du matériau composite tissé*

La microstructure utilisée est un composite à renfort tissé équilibré du type sergé 2-2 (Figure 4.2-a). Les représentations géométrique et EF de la microstructure sont effectuées à l'aide du logiciel *TexGen* [166, 107]. Cette microstructure est définie à travers les paramètres géométriques  $a, b, e, L$  et  $\delta$  (Figure 4.2-b), obtenus par microtomographie à rayons X (Figure 4.3, Tableau 4.1) [148].  $a$  et  $b$  sont les dimensions de la section transversale des torons supposée elliptique,  $e$  représente l'épaisseur de la microstructure.  $L$  est la distance dans le plan entre les centres des deux torons parallèles consécutifs et  $\delta$  est l'espace entre deux torons perpendiculaires. En réalité, les torons sont constitués de plusieurs fibres unidirectionnelles intégrées dans une matrice. Dans ce travail, les torons sont considérés comme un milieu homogène équivalent, ayant un comportement non linéaire avec endommagement anisotrope.

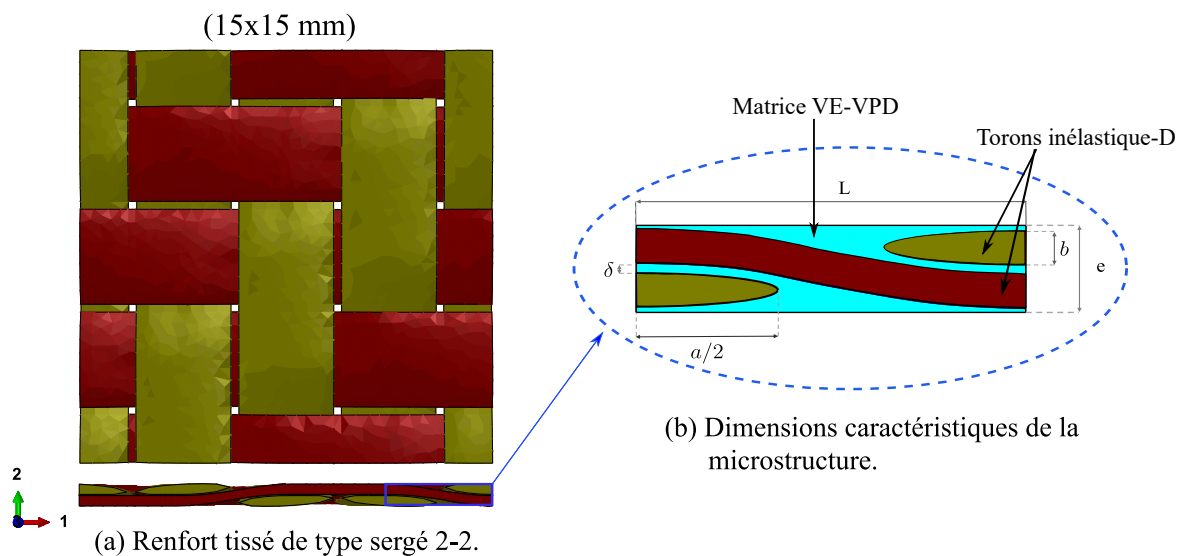
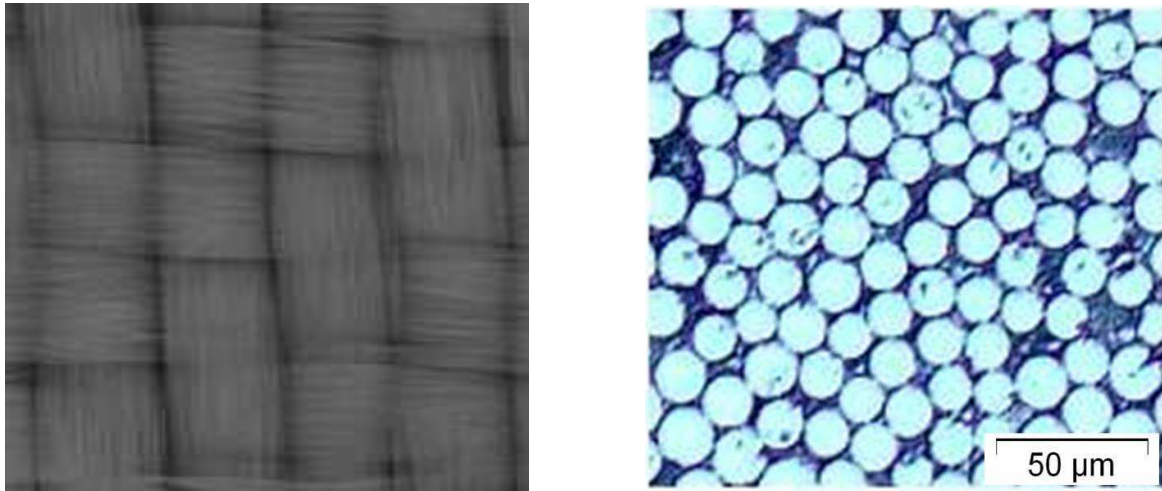


FIGURE 4.2 Définition géométrique de la microstructure construite via le logiciel *TexGen*. Le domaine bleu représente la phase matricielle, tandis que les domaines rouge et vert représentent les torons dans le sens chaîne et trame, respectivement.

Il est à noter que la périodicité de la microstructure est bien respectée dans les plans des torons, par contre elle n'est pas toujours satisfaite dans la troisième direction. Dans ce travail, cette condition de périodicité est considérée comme satisfaite dans les



(a) Microstructure du composite étudié construite par microtomographie à rayons X avec une taille de voxel de  $6 \mu\text{m}$  [139].

(b) Distribution des fibres dans les torons obtenue par microtomographie. Le rayon des fibres est d'environ  $17 \mu\text{m}$  [148].

FIGURE 4.3 Microstructure du composite étudié obtenue par microtomographie à rayons X.

TABLE 4.1 Dimensions caractéristiques de la microstructure tissée du composite étudié [148].

Dimensions caractéristiques	$a$	$b$	L	e	$\delta$
Valeurs (mm)	3.46	0.21	3.75	0.5	0.025

trois directions de l'espace. La fraction volumique des torons dans la cellule unitaire est d'environ 59%. Les analyses par microtomographie ont permis d'obtenir une fraction volumique des fibres dans les torons d'environ 85%. Cela a permis de connaître la fraction volumique des fibres dans le composite, qui est d'environ 50%. Les analyses par microtomographie à rayons X ont permis également d'avoir les dimensions du VER étudié. Ce dernier fait  $15 \times 15 \times 0.5 \text{ mm}^3$ . Ces dimensions sont très importantes pour le choix de dimensions des éprouvettes par la suite.

D'autre part, la Figure 4.4-a présente la discrétisation EF de la macro-structure (1/4 de la partie utile de la plaque trouée), qui consiste en 162 nœuds et 64 éléments du type C3D8 (8 nœuds à 8 points d'intégration, éléments solides 3D pour une analyse statique). Tandis que les Figures 4.4-b et 4.4-c présentent la discrétisation EF de la microstructure représentant chaque point d'intégration macroscopique du macro-modèle. Celle-ci consiste en 8522 nœuds et 40060 éléments du type C3D4 (il s'agit d'élément tétraédrique avec 4 nœuds et 1 point d'intégration, élément solide 3D pour

une analyse statique). Le maillage de la cellule unitaire respecte bien la condition de périodicité.

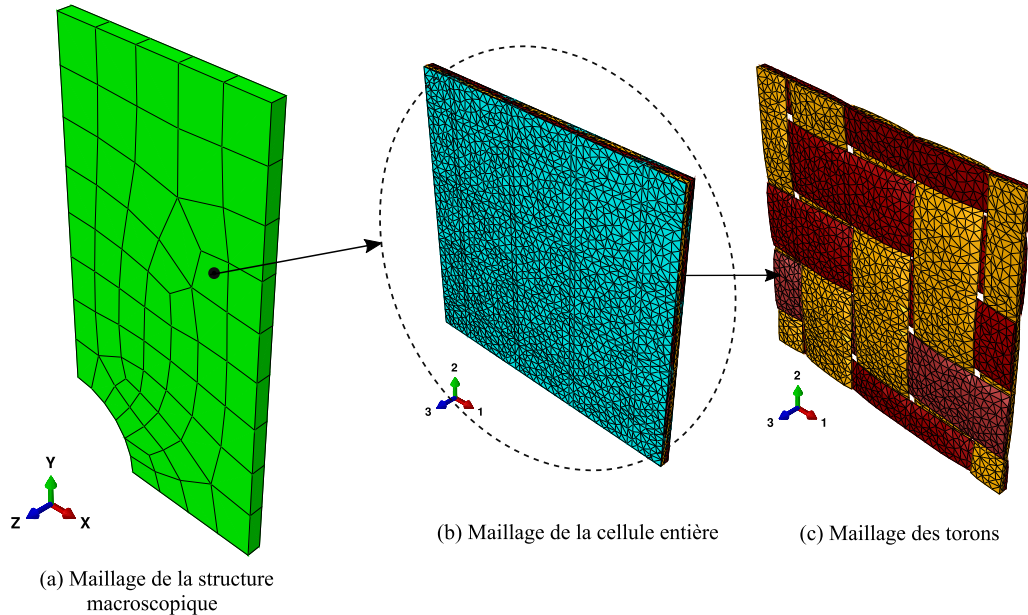


FIGURE 4.4 Discretisation spatiale des modèles macroscopique et microscopique dédiés pour l'analyse multi-échelles.

### 4.2.2 Lois de comportement des constituants

Pour modéliser la réponse mécanique macroscopique d'un tel matériau, il faut connaître le comportement de chaque constituant de la microstructure. À cet effet, un comportement viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile est défini pour la matrice PA66 et un comportement inélastique avec endommagement anisotrope est défini pour les torons (Figure 4.5). Les deux sous-sections suivantes présentent brièvement les modèles de comportement associés à chaque phase du composite étudié.

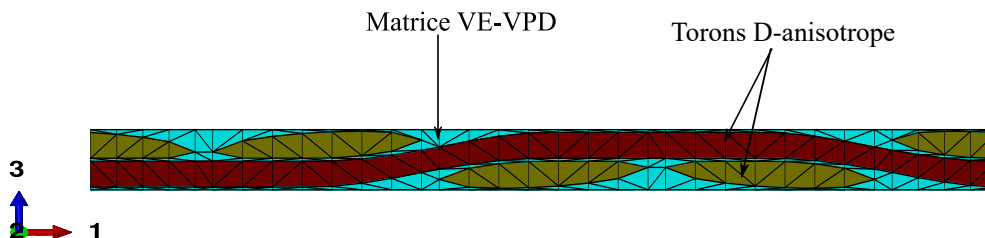


FIGURE 4.5 Représentation 2D du motif de tissage. Le domaine bleu représente la matrice PA66 et les domaines rouge et vert représentent les torons de chaîne et trame, respectivement.

Il faut noter que dans ce chapitre, la structure est supposée être dans des conditions isothermes. Le couplage thermomécanique fort est pris en compte dans le chapitre suivant.

### **a) Comportement viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile (VE-VPD) de la matrice PA66**

La loi de comportement de la matrice polymère du composite étudié a été développée dans [149] en utilisant un cadre thermodynamique approprié. Elle est appliquée pour prédire le comportement des polymères semi-cristallins comme le PA66, sous l'hypothèse de petites déformations et petites rotations.

Les semi-cristallins sont connus pour leur comportement complexe, qui dépend du temps et aux conditions environnementales, à savoir l'humidité relative et la température [10, 100, 9, 112, 149]. Ces matériaux sont soumis également à une réduction de la rigidité lors du chargement causée par les mécanismes d'endommagement qui sont liés à l'initiation, le développement et la propagation des micro-fissures [130, 131, 41].

Le modèle en question, développé au sein de l'équipe [149], prend en compte la viscoélasticité, la viscoplasticité et l'endommagement ductile dans les PA66. La viscoélasticité est décrite à travers une série de branches de Kelvin-Voigt, en considérant une représentation différentielle<sup>1</sup>. Tandis que l'endommagement est introduit via la mécanique de l'endommagement continue ("CDM") qui utilise le principe de la contrainte effective [102–104].

Le modèle de comportement est représenté par le schéma rhéologique de la Figure 4.6. Il est constitué d'un ressort linéaire élastique,  $N$  branches viscoélastiques de Kelvin-Voigt positionnées en série et une branche viscoplastique constituée d'un ressort et un amortisseur non linéaires positionnés en parallèle. Le ressort élastique subit une déformation  $\varepsilon_e$ . La branche viscoplastique subit une déformation viscoplastique  $\varepsilon_p$ . Chaque branche  $i$  de Kelvin-Voigt subit une déformation  $\varepsilon_{v_i}$ . Considérant plusieurs branches de Kelvin-Voigt dans le modèle permettent de capturer les effets de dépendance au temps (fluage et relaxation) dans des plages de temps étendues, contrairement à une seule branche où ces effets sont capturés dans une plage de temps particulière.

---

1. Dans ce modèle, des branches de Kelvin-Voigt ont été choisies à la place des branches Maxwell. Une série de branches de Kelvin-Voigt en parallèle implique une décomposition additive de la déformation, i.e. chaque branche a sa propre déformation viscoélastique et que toutes les branches sont soumises à la même contrainte. Cependant, une série de branches de Maxwell en parallèle impliquent une décomposition additive de la contrainte [86], i.e. chaque branche a sa propre contrainte et que toutes les branches ont la même déformation.

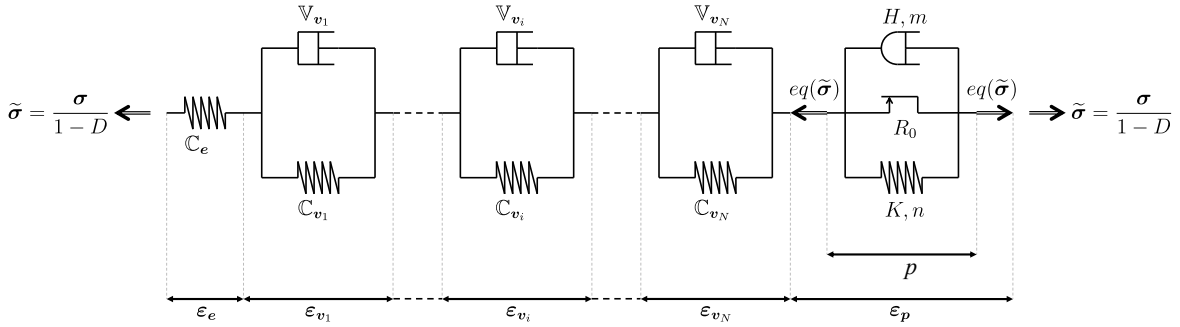


FIGURE 4.6 Schéma rhéologique du comportement viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile pour la matrice polymère [149].

Les éléments rhéologiques précédents sont assemblés en série. La déformation totale  $\epsilon$  de l'ensemble est donnée par :

$$\epsilon = \epsilon_e + \sum_{i=1}^N \epsilon_{v_i} + \epsilon_p. \quad (4.1)$$

Toutes les branches partagent la même contrainte effective. La branche viscoplastique est supposée être sensible uniquement à la partie déviatorique de la contrainte.

La dualité entre la contrainte et la déformation implique l'existence d'une variable d'état  $p$ , qui est reliée au tenseur de déformation  $\epsilon_p$  par les lois d'évolution. D'autre part, l'endommagement représenté par la variable scalaire  $D$ , est supposé ductile et couplé à la viscoplasticité. Il n'évolue que lorsque la déformation viscoplastique  $\epsilon_p$  est générée [104, 86].

- ***Lois d'état et lois d'évolution***

Le comportement de la matrice polymère étudiée, est formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI) [64, 65, 63, 31]. Ce cadre postule l'existence d'un potentiel thermodynamique, fonction des variables d'état ( $\epsilon$ ,  $\epsilon_{v_i}$ ,  $\epsilon_p$ ,  $p$  et  $D$ ). Dans cette étude, le potentiel thermodynamique est considéré comme l'énergie libre d'Helmholtz. Cette énergie est écrite sous forme d'une somme des énergies emmagasinées dans le ressort linéaire  $\psi_e$ , les branches viscoélastiques de Kelvin-Voigt  $\psi_{v_i}$  et la branche viscoplastique  $\psi_p$  [149] :

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon, \epsilon_{v_i}, \epsilon_p, p, D) = & \frac{1}{2} \left( \epsilon - \sum_{i=1}^N \epsilon_{v_i} - \epsilon_p \right) : (1-D) \mathbb{C}_e : \left( \epsilon - \sum_{i=1}^N \epsilon_{v_i} - \epsilon_p \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \epsilon_{v_i} : (1-D) \mathbb{C}_{v_i} : \epsilon_{v_i} + \int_0^p R(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Les variables conjuguées  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{v_i}$ ,  $R$  et  $Y$  sont calculées par différentiation du potentiel d'état par rapport aux variables d'états  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ,  $p$  et  $D$ . Les équations associées sont données dans le Tableau 4.2.

À partir de l'inégalité de Clausius-Duhem, la dissipation mécanique est toujours positive ou nulle (deuxième principe de la thermodynamique) [69, 80]. Par conséquent, dans des conditions isothermes, le taux de l'énergie dissipée est égal à la différence entre le taux de l'énergie de déformation  $\dot{W}_\varepsilon$  et le taux de l'énergie stockée  $\rho\dot{\psi}$  :

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \dot{W}_\varepsilon - \rho\dot{\psi} \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{v_i} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{\partial\psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial\psi}{\partial D} \dot{D} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{v_i} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{v_i} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - R\dot{p} + Y\dot{D} \geq 0.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Les variables thermodynamiques, les lois d'évolution et le critère viscoplastique du modèle VE-VPD de la matrice PA66, sont décrits par l'ensemble des équations résumées dans le Tableau 4.2 [149, 148].

TABLE 4.2 Lois d'état et lois d'évolution du modèle VE-VPD de la matrice PA66 [149, 148].

Variable d'état observable	Variable conjuguée	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - D) \mathbb{C}_e : \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{v_i} - \boldsymbol{\varepsilon}_p \right)$	
Variables internes	Variables conjuguées	Variables flux
$\boldsymbol{\sigma}_{v_i}$	$\boldsymbol{\sigma}_{v_i} = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{v_i}} = -(1 - D) \mathbb{C}_{v_i} : \boldsymbol{\varepsilon}_{v_i} + \boldsymbol{\sigma}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{v_i} = \frac{\partial\phi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{v_i}} = \frac{\mathbb{V}_{v_i}^{-1}}{1 - D} : \boldsymbol{\sigma}_{v_i}$
$p$	$R = \rho \frac{\partial\psi}{\partial p} = R(p)$	$\dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	$-\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_p}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \frac{3 \text{Dev}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \text{eq}(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\dot{p}}{1 - D}$
$D$	$-Y = \rho \frac{\partial\psi}{\partial D} = Y_e + \sum_{i=1}^N Y_{v_i}$	$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda} = \left( \frac{Y}{S} \right)^\beta \frac{\dot{p}}{1 - D}$
	Critère	Activation VP ( $\dot{\lambda} > 0$ si $f \geq 0$ )
	$f(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})}{1 - D} - R(p) - R_0$	$\langle f \rangle_+ = Q(\dot{p})$

Dans le Tableau 4.2,  $\mathbb{C}_e$  et  $\mathbb{C}_{v_i}$  sont les tenseurs de rigidité initiaux du ressort linéaire et le ressort de la  $i^{\text{ème}}$  branche de Kelvin-Voigt, respectivement,  $\sigma_{v_i}$  la contrainte visqueuse,  $R_0$  le seuil d'élasticité et  $R$  la fonction d'écrouissage isotrope donnée dans le chapitre 3 pour le cas du comportement VPD.  $Y$  est la densité d'énergie libérée, écrite sous forme d'une somme de la densité d'énergie dissipée dans le ressort linéaire  $Y_e$  ainsi que dans chaque branche de Kelvin-Voigt  $Y_{v_i}$ . Enfin,  $S$  et  $\beta$  sont les paramètres du matériau liés à l'endommagement (pour plus de détails voir [149]).

### **b) Comportement non-linéaire avec endommagement anisotrope des torons**

Cette sous-section a pour objectif de présenter la loi de comportement inélastique des torons qui a été développée au sein de l'équipe [150]. À l'échelle de la microstructure du composite étudié, les torons sont composés de plusieurs fibres unidirectionnelles intégrées dans une matrice. Le comportement d'un toron peut être considéré comme équivalent à celui d'un composite unidirectionnel. Dans le cas de composites renforcés par des fibres rigides unidirectionnelles, le comportement dans la direction longitudinale (direction des fibres) présente une réponse élastique fragile. Tandis que dans la direction transversale ainsi que pour le cisaillement dans le plan (cisaillement 12), la réponse présente généralement une propagation progressive de l'endommagement avant rupture. Cet endommagement est induit par l'apparition des micro-fissures qui se déclenchent par décollement dans les interfaces fibre/matrice (Figure 4.7-a) se propageant par coalescence (Figure 4.7-b) jusqu'à la rupture du matériau (Figure 4.7-c) [154, 101, 42, 61, 75].

Le modèle est basé sur une formulation micromécanique phénoménologique hybride présentée dans [70, 191, 152]. Ce modèle prend en compte l'endommagement anisotrope et l'inélasticité induite par les micro-fissures dans les composites unidirectionnels, où la déformation inélastique permanente est supposée être causée par l'ouverture irréversible des micro-fissures. Dans ce sens, l'endommagement est introduit par une description micromécanique d'un volume élémentaire représentatif (VER) qui contient des micro-fissures. La réduction de la rigidité induite par la présence de ces micro-fissures est obtenue à travers un schéma micromécanique du type Mori-Tanaka [124], en introduisant une densité des micro-fissures  $\gamma_c$  (fraction volumique du vide) dans le VER. Cette réduction de rigidité est représentée par un tenseur de quatrième ordre  $\mathbb{D}(\gamma_c)$  qui réduit progressivement le tenseur de rigidité isotrope transverse initial  $\mathbb{C}_0$  du matériau composite unidirectionnel non endommagé, comme il est montré dans la Figure 4.8.

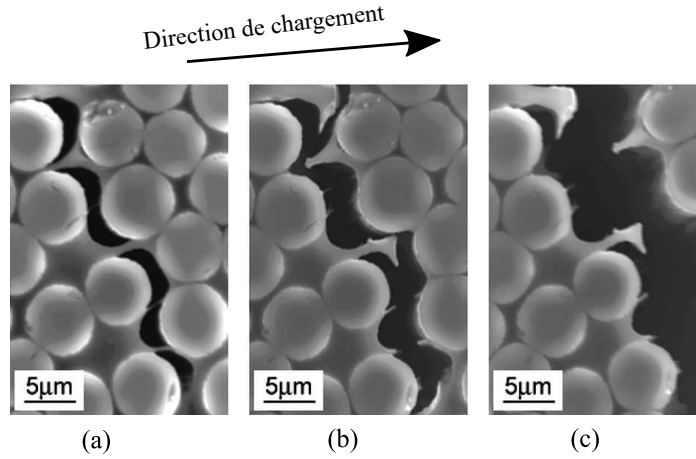


FIGURE 4.7 Mécanismes d'endommagement transversal dans les composites unidirectionnels (a) initiation des micro-fissures, (b) propagation des micro-fissures par coalescence, (c) fracture de l'interface fibre/matrice [75].

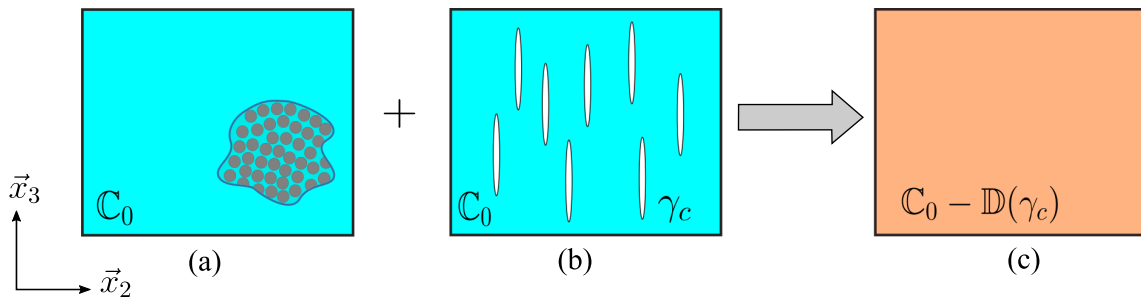


FIGURE 4.8 Évaluation de l'endommagement avec l'approche d'homogénéisation à champs moyens : (a) État initial du matériau unidirectionnel isotrope transverse. (b) Introduction des micro-fissures dans le VER sous forme d'une densité de vide  $\gamma_c$ . (c) Évaluation de la réduction de la rigidité causée par  $\gamma_c$  par homogénéisation [148].

- ***Lois d'état et lois d'évolution***

L'endommagement anisotrope dans ce type de matériaux est souvent accompagné par des déformations inélastiques permanentes causées par les ouvertures irréversibles des micro-fissures [92, 21, 22, 148, 150]. Cette déformation est donnée par le tenseur  $\varepsilon_{ir}$ . La déformation totale dans la phase des torons est égale à la somme de la déformation élastique (réversible)  $\varepsilon_e$ , et la déformation inélastique (irréversible)  $\varepsilon_{ir}$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ir}. \quad (4.4)$$

D'autre part, le potentiel d'état (énergie libre d'Helmholtz) est fonction de la variable d'état observable  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et les variables d'état internes  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ir}$  et  $\gamma_c$  :

$$\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{ir}, \gamma_c) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ir}) : (\mathbb{C}_0 - \mathbb{D}(\gamma_c)) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ir}). \quad (4.5)$$

Les variables conjuguées, à savoir la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et la densité d'énergie dissipée  $Y_c$  dans les torons, sont calculées par dérivation du potentiel d'état par rapport aux variables d'état  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ir}$  et  $\gamma_c$ , respectivement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad -\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ir}}, \quad Y_c = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_c}. \quad (4.6)$$

Le tenseur  $\mathbb{D}(\gamma_c)$  est calculé en fonction de la densité des micro-fissures  $\gamma_c$  à travers un schéma micromécanique de Mori-Tanaka [124]. Ces micro-fissures sont représentées par des inclusions du vide ellipsoïdales quasi plates avec une rigidité nulle, où la normale de ces inclusions est orientée selon la deuxième direction  $\vec{x}_2$  (Figure 4.8). Dans cette configuration, la réduction de la rigidité dans la direction longitudinale (direction des fibres) est quasi nulle, tandis que la réduction de la rigidité dans la direction transversale et le cisaillement dans le plan  $(x_1, x_2)$  est assez importante. La rigidité globale du matériau endommagé est donnée par :

$$\mathbb{C}_0 - \mathbb{D}(\gamma_c) = (1 - \gamma_c) \mathbb{C}_0 : \mathbb{A}_0(\gamma_c). \quad (4.7)$$

$\mathbb{A}_0(\gamma_c)$  est le tenseur de localisation de déformation dans la partie vierge du matériau (non endommagée) calculé à partir d'un schéma de Mori-Tanaka [124, 153]. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à l'article [150]. Après le calcul, le tenseur de réduction de la rigidité  $\mathbb{D}(\gamma_c)$  est donné par :

$$\mathbb{D}(\gamma_c) = \gamma_c \mathbb{C}_0 : \mathbb{T}_c : \mathbb{A}_0(\gamma_c). \quad (4.8)$$

Selon le deuxième principe de la thermodynamique, la dissipation mécanique est toujours positive ou nulle (l'inégalité de Clausius-Duhem) [69, 80]. Cette dissipation est donnée par la différence entre le taux de l'énergie de déformation  $\dot{W}_\varepsilon$  et le taux de

l'énergie stockée  $\rho\dot{\psi}$  [150] :

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= \dot{W}_\varepsilon - \rho\dot{\psi} \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{ir}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ir} + \frac{\partial\psi}{\partial\gamma_c} \dot{\gamma}_c \right) \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ir} + Y_c \dot{\gamma}_c \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Les lois d'évolution sont obtenues à partir de la dissipation via un potentiel approprié. Comme il est déjà mentionné précédemment, la fraction volumique des fibres dans les torons est d'environ 85%. Pour cela, leur comportement est supposé indépendant du temps, en raison de la faible fraction volumique de la matrice dans les torons (environ 15%).

- **Activation et évolution d'endommagement dans les torons**

Dans un tel modèle, la direction de développement de la densité des micro-fissures  $\gamma_c$  est choisie sous forme d'un critère d'interaction quadratique anisotrope [74, 136], donné sous la forme générale suivante :

$$H_c(\boldsymbol{\sigma}_0) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbb{H} : \boldsymbol{\sigma}_0} \tag{4.10}$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}_0$  la contrainte locale dans la partie vierge du matériau ( $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0$ ) et  $\mathbb{H}$  un tenseur de quatrième ordre configuré de telle sorte que  $H_c$  ne soit sensible qu'aux composants 22 et 12 de la contrainte locale  $\boldsymbol{\sigma}_0$ .

La densité des micro-fissures est évaluée en fonction de la valeur maximale de la fonction critère  $H_c$  notée ici  $g(\sup(H_c))$ . La fonction  $g$  est choisie sous forme d'une loi de Weibull [186]. Finalement, l'évolution de la densité des micro-fissures est donnée par la loi suivante :

$$\gamma_c = g(\sup(H_c)) = \gamma_c^\infty \left[ 1 - \exp \left( - \left[ \frac{\langle \sup(H_c) - 1 \rangle_+}{S} \right]^\beta \right) \right], \tag{4.11}$$

avec  $S$  et  $\beta$  sont les paramètres du matériau et  $\gamma_c^\infty$  le niveau de saturation des micro-fissures, avec  $\gamma_c \leq \gamma_c^\infty$ .

### 4.2.3 Récapitulatif des paramètres des lois de comportement : introduction dans le calcul EF<sup>2</sup>

L'étude structurale des composites tissés de ce chapitre est réalisée à l'aide du cadre EF<sup>2</sup> présenté dans le chapitre précédent. Le composite étudié est constitué d'une matrice PA66 représentée par un comportement VE-VPD (voir sous-section 4.2.2-a) renforcée par un tissu du type sergé 2-2 représenté par un comportement non-linéaire avec endommagement anisotrope (voir sous-section 4.2.2-b).

L'identification des paramètres des deux lois de comportement a été effectuée dans les travaux de [148]. La loi de la matrice du composite a été identifiée directement à partir des essais réalisés sur le polyamide 66 seul et l'ensemble des paramètres sont regroupés dans le Tableau 4.3. Tandis que pour les torons, il est proposé d'identifier les paramètres à travers la réponse macroscopique du composite entier, car il n'est pas possible de séparer les torons de la matrice pour réaliser sur celui-ci des essais mécaniques. Par conséquent, tous les paramètres du modèle de torons donnés dans le Tableau 4.4 ont été identifiés à partir des essais quasi-statiques sur le composite. Plus de détails sur la procédure d'identification des paramètres sont donnés dans [149, 148].

TABLE 4.3 Paramètres de la matrice polyamide 6-6 [148].

Mécanismes		Paramètres	valeur	unité	
VE	Ressort	Module de Young	$E$	2731	MPa
	élastique	Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-
	1 <sup>ère</sup> KV	Module élastique	$E_{v_1}$	8766	MPa
		Viscosité	$\eta_{v_1}$	1395	MPa.s
		Temps caractéristique	$\tau_{v_1}$	0.16	s
	2 <sup>ème</sup> KV	Module élastique	$E_{v_2}$	13754	MPa
		Viscosité	$\eta_{v_2}$	165601	MPa.s
		Temps caractéristique	$\tau_{v_2}$	12.04	s
	3 <sup>ème</sup> KV	Module élastique	$E_{v_3}$	15010	MPa
		Viscosité	$\eta_{v_3}$	457955	MPa.s
		Temps caractéristique	$\tau_{v_3}$	30.51	s
	4 <sup>ème</sup> KV	Module élastique	$E_{v_4}$	11634	MPa
		Viscosité	$\eta_{v_4}$	1307516	MPa.s
Temps caractéristique		$\tau_{v_4}$	112.39	s	
VP-D		Limite d'élasticité	$R_0$	4.86	MPa
		Coeff. écrouissage isotrope	$K$	1304.33	MPa
		Exp. écrouissage isotrope	$n$	0.674	
		Résistance VP	$H$	47.35	MPa.s <sup>m</sup>
		Exp. VP	$m$	0.068	-
		Coeff. d'endommagement	$S$	21.607	MPa
		Exp. d'endommagement	$\beta$	-1.105	-

TABLE 4.4 Paramètres des torons [148].

	Paramètres	valeur	unité
Composantes non nulles du tenseur de rigidité initiale	$C_{0_{1111}}$	65822	MPa
	$C_{0_{1122}} = C_{0_{1133}}$	7041	MPa
	$C_{0_{2222}} = C_{0_{3333}}$	23947	MPa
	$C_{0_{2233}}$	6971	MPa
	$C_{0_{1212}} = C_{0_{1313}}$	8661	MPa
	$C_{0_{2323}} = \frac{1}{2} (C_{0_{2222}} - C_{0_{2233}})$	8488	MPa
Seuil d'endo. en traction transverse	$R_{22}$	20.0	MPa
Seuil d'endo. en cisaillement 12	$R_{12}$	7.5	MPa
1 <sup>er</sup> paramètre de la loi Weibull	$S$	12.3	-
2 <sup>ème</sup> paramètre de la loi Weibull	$\beta$	2.75	-
Saturation des micro-fissures	$\gamma_c^\infty$	0.025	-
Inélasticité en traction transverse	$a_{22}$	3.6	-
Inélasticité en cisaillement 12	$a_{12}$	2.15	-

Après la définition des géométries de la structure macroscopique, de la cellule unitaire ainsi que les lois de comportement et les paramètres identifiés de chaque phase du composite étudié, la procédure de calcul par EF<sup>2</sup> se déroulera de la même manière comme il est expliqué dans le chapitre 3. La procédure itérative effectuée à chaque incrément de temps/déformation macroscopique dans chaque point d'intégration macroscopique est résumée dans la Figure 4.9. Cette procédure est répétée pour chaque incrément de temps/déformation macroscopique jusqu'à convergence.



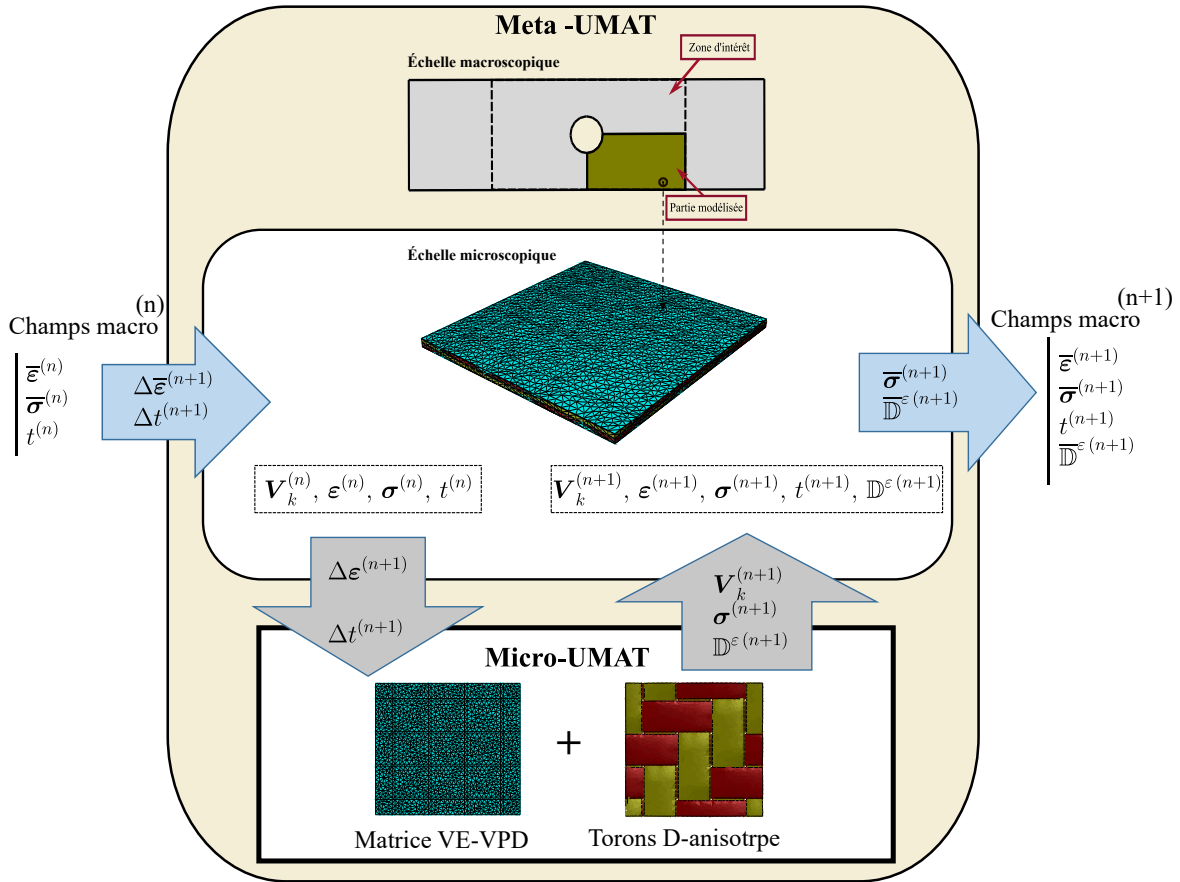


FIGURE 4.9 Comportement global du composite tissé implémenté sous forme d'une "Méta-UMAT" qui fait appel au problème microscopique (cellule unitaire) pour chaque incrément de temps/déformation.

### 4.3 Mise en œuvre expérimentale

Dans cette section, la mise en œuvre expérimentale dédiée pour la validation de l'approche de modélisation multi-échelles est présentée. Les objectifs sont : i) réaliser différents essais expérimentaux sur des plaques trouées constituées du composite étudié pour identifier la réponse mécanique et ii) comparer les résultats expérimentaux avec ceux issus du calcul EF<sup>2</sup>.

#### 4.3.1 Géométrie des échantillons et préparation des conditions d'essais

Le matériau composite tissé à matrice PA66 a été fourni sous forme de plaques de dimensions  $450 \times 450 \times 2 \text{ mm}^3$ . Sur chaque plaque, 5 éprouvettes peuvent être découpées. La Figure 4.10 présente la géométrie de l'éprouvette étudiée. Celle-ci est

une plaque trouée ayant 220 mm en longueur, 60 mm en largeur et 2 mm en épaisseur. Le rayon du trou est de 10 mm. L'éprouvette indique une zone utile de taille de  $120 \times 60 \times 2 \text{ mm}^3$ . La zone utile a été choisie au centre des éprouvettes. Selon l'orientation, 8 à 9 VER soient compris dans la longueur et 3 à 4 VER dans la largeur de la zone utile de l'éprouvette. Il est à rappeler que le VER du composite actuel est un cube d'environ  $15 \times 15 \times 0.5 \text{ mm}^3$ . Ces dimensions ont été obtenues par microtomographie à rayons X (voir sous-section 4.2.1).

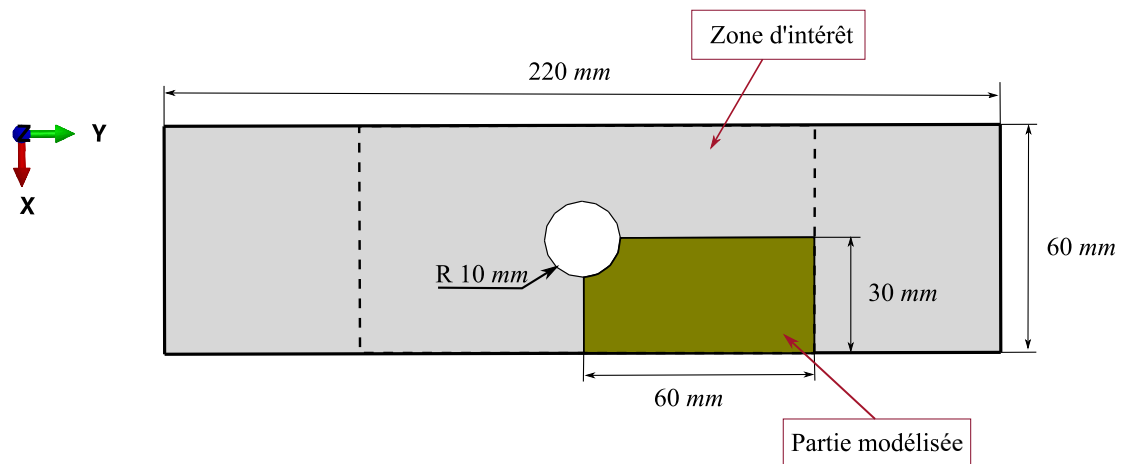


FIGURE 4.10 Géométrie des éprouvettes utilisées dans les essais expérimentaux montrant la position relative de la zone utile ainsi que la partie modélisée.

Tous les échantillons ont été découpés à l'aide d'une machine de découpe au jet d'eau afin de réduire l'apparition de micro-fissures près des bords. Il est bien connu dans la littérature que ce type de matériau (composite tissé à matrice PA66) est très sensible aux conditions environnementales à savoir l'humidité relative (RH) et la température [100, 112, 111]. Après la découpe, les éprouvettes ont été mises dans une chambre de conditionnement en humidité "Memmert HCP256" sous un air contenant 50% d'humidité relative à une température de 65°C. Ce conditionnement en humidité s'est poursuivi jusqu'à ce que la concentration d'eau soit relativement homogène dans la totalité de l'éprouvette. Cela a été vérifié en pesant régulièrement les échantillons jusqu'à ce que leur masse n'évolue plus. Ensuite, tous les échantillons ont été placés dans des sacs étanches afin de les maintenir aux conditions environnementales imposées (RH50%). Les essais mécaniques ont été réalisés sur des plaques trouées stratifiées ayant des séquences d'empilement symétriques et équilibrées du type  $[\pm\theta]$  avec une épaisseur du pli d'environ 0.5 mm.

En raison de l'influence des orientations des plis sur la réponse mécanique du composite tissé, trois configurations des séquences d'empilement ont été considérées

dans ce travail. Dans la première, l'échantillon est orienté à  $\theta = 30^\circ$  du sens de toron chaîne. Dans la seconde, l'échantillon est orienté à  $\theta = 45^\circ$  du sens de toron chaîne. Enfin, dans la troisième, l'échantillon est orienté à  $\theta = 90^\circ$  du sens de toron chaîne<sup>2</sup> (Figure 4.11). En considérant ce type de configurations, les éprouvettes sont chargées en traction pure, sans génération de cisaillement ou des effets de courbure [20]. De plus, la séquence d'empilement équilibrée permet d'empêcher la déformation en cisaillement dans le plan du stratifié. En effet, en chaque couche élémentaire une contrainte de cisaillement non nulle est générée dans le plan de cette même couche. Cette contrainte prend des valeurs opposées d'une couche  $+\theta$  à une couche  $-\theta$  et par conséquent disparaît à l'échelle de l'ensemble du composite stratifié.

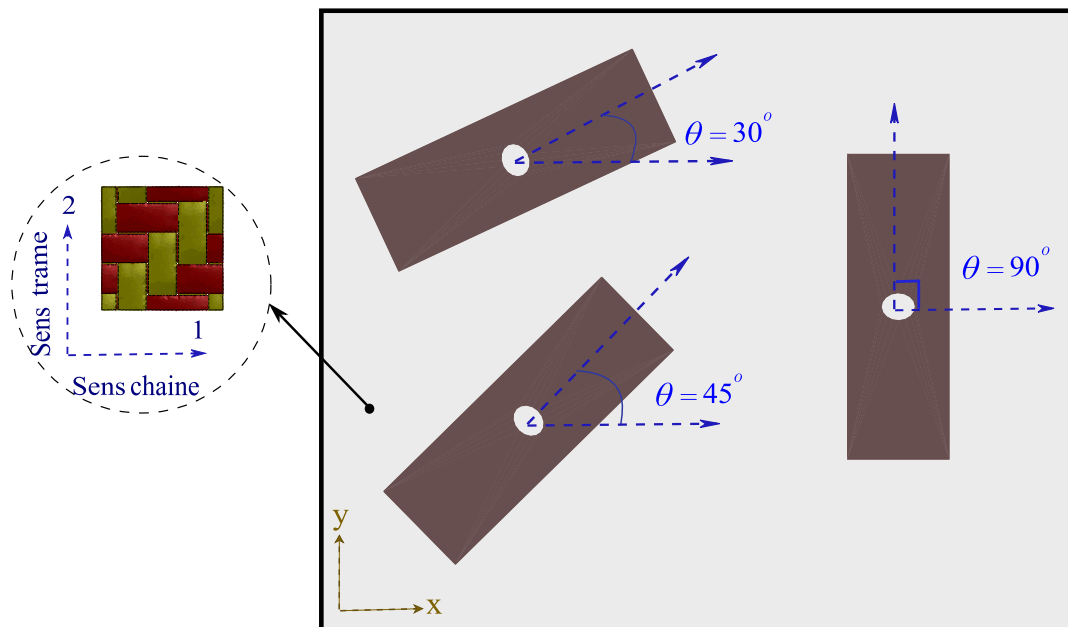


FIGURE 4.11 Orientations des échantillons choisis pour les essais expérimentaux.

Tous les essais de traction monotone à différentes vitesses ont été réalisés à RH50% et à température ambiante (23°C), avec une machine de traction à commande hydraulique "MTS 647 Hydraulic Wedge Gripe" selon la norme ISO 9001. La mesure des champs cinématique et thermique a été effectuée au moyen d'une caméra CCD refroidie et d'une caméra thermique à infra rouge, respectivement. Il est à noter que les résultats thermiques ne sont pas présentés à ce stade car le couplage thermomécanique fort n'est pas pris en compte dans ce chapitre. La discussion portera uniquement sur la réponse mécanique macroscopique et microscopique ainsi que les champs de déformation macroscopique locaux obtenus par corrélation d'images numériques "DIC".

2. Les configurations  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$  sont équivalentes, car le tissé est équilibré.

### 4.3.2 Mesure des champs cinématiques par corrélation d'images numériques "DIC"

La procédure expérimentale des essais pour corrélation d'images numériques a été réalisée suivant ces trois étapes principales :

- i) **Préparation de la surface de l'éprouvette.** Un mouchetis noir et blanc (des taches noires sur un fond blanc) a été appliqué sur la surface de la plaque trouée. Le fond de peinture blanche a été réalisé à l'aide d'une bombe aérosol. Ce fond doit être assez épais pour avoir une couleur uniforme. Ensuite, des gouttelettes de peinture noire sont projetées au-dessus. La taille et la répartition des taches noires sont optimisées afin de faciliter le post-traitement des données de corrélation d'images à l'échelle de la zone d'intérêt choisie sur l'éprouvette (Figure 4.12).

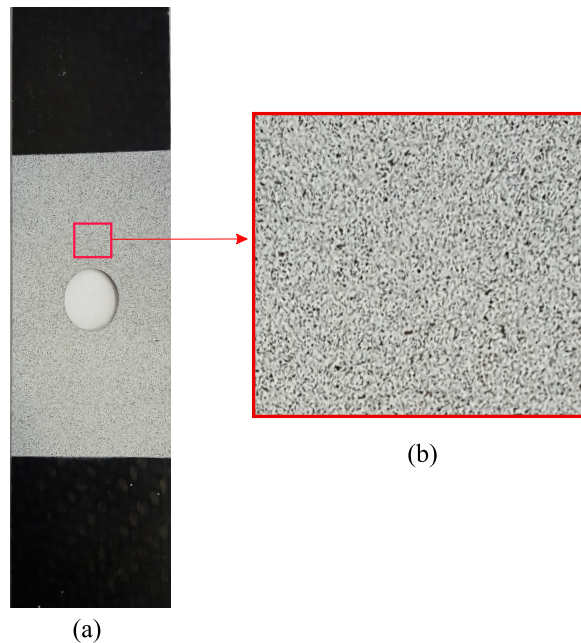


FIGURE 4.12 Mouchetis réalisé sur une éprouvette d'essai à l'aide d'une bombe aérosol.

- ii) **Acquisition et enregistrement des images.** Une caméra CCD LIMESS refroidie par effet Peltier est utilisée. Cette caméra est équipée d'un capteur CCD de 2400 x 2000 pixels avec une vitesse d'acquisition d'environ 30 images/seconde. Un ordinateur équipé d'un logiciel d'acquisition assure le réglage de la caméra et le stockage des images. Un système d'éclairage en lumière blanche a été également mis en place pour améliorer le contraste sur la surface afin d'augmenter la précision.

iii) **Post-traitement des données et le calcul des champs de déformation locaux.** Les images obtenues ont été traitées à l'aide du logiciel de corrélation d'images Vic2D [12], afin de suivre l'évolution des champs de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$ . Les champs de déformation macroscopique locaux ( $\bar{\varepsilon}_{11}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{22}$  et  $\bar{\varepsilon}_{12}$ ) dans la zone d'intérêt de la plaque ont été par la suite obtenus par dérivation spatiale de  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Pour l'acquisition des données cinématiques, une image est enregistrée pour une fréquence de 2 Hz (soit 2 images/seconde) pour les essais à une vitesse rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ). Pour les essais lents ( $\dot{u}_y = 0.024 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{u}_y = 0.033 \text{ mm.s}^{-1}$ ), l'acquisition est réalisée à une fréquence de 1 Hz. Le montage expérimental et les moyens d'acquisition adoptés pour la validation de l'approche EF<sup>2</sup> sont présentés dans la Figure 4.13.

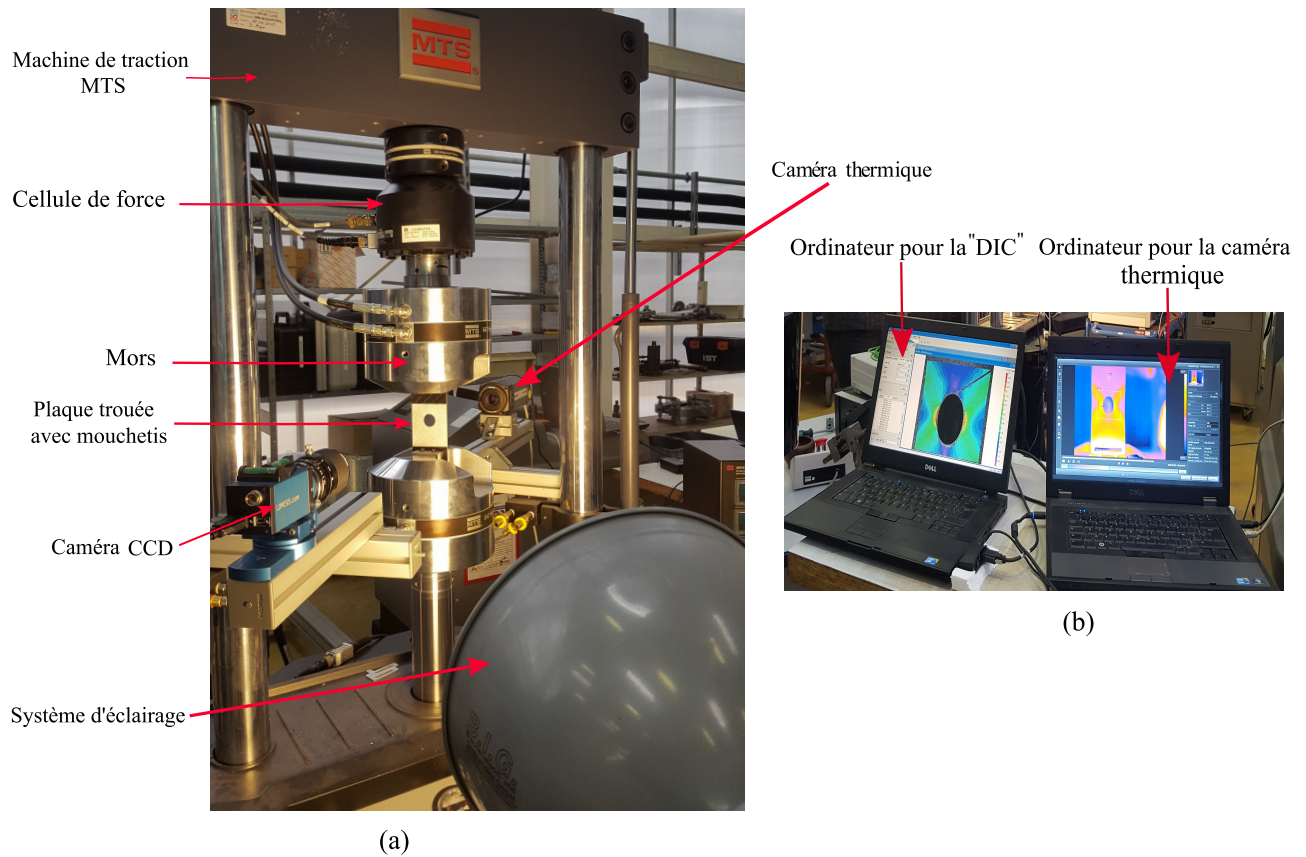


FIGURE 4.13 (a) Protocole expérimental pour les essais de traction monotone sur le composite étudié (b) système d'acquisitions des données "DIC" et caméra thermique.

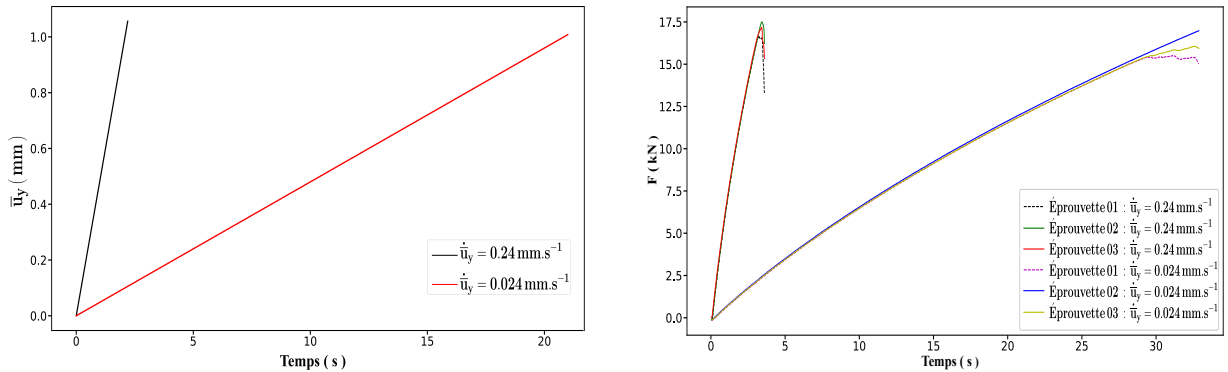
## 4.4 Résultats expérimentaux et comparaison avec l'approche EF<sup>2</sup>

En raison de l'anisotropie induite par l'architecture de la microstructure du composite étudié, trois différentes configurations ont été étudiées. Pour chaque configuration choisie, deux vitesses de chargement monotone ont été considérées. Pour chaque vitesse, l'essai a été réalisé trois fois à fin d'évaluer la répétabilité des essais expérimentaux.

Dans les sous-sections suivantes, les réponses globales ainsi que celles macroscopiques locales (calculées par "DIC") du composite tissé sont comparées aux résultats numériques calculés par EF<sup>2</sup>.

### 4.4.1 Essais de traction monotone pour $\theta = 0^0$

Les essais de traction monotone pour l'orientation  $\theta = 0^0$  ont été pilotés en déplacement à deux vitesses de chargement différentes ( $\dot{\bar{u}}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{\bar{u}}_y = 0.024 \text{ mm.s}^{-1}$ , Figure 4.14-a) jusqu'à rupture. La réponse expérimentale globale, force macroscopique en fonction du temps du composite étudié a été présentée dans la Figure 4.14-b pour la configuration  $\theta = 0^0$ . La Figure 4.14-b montre bien la répétabilité des résultats des essais de traction monotone pour les deux vitesses de chargement.



(a) Déplacement appliqué en fonction du temps.

(b) Réponse du composite en termes de force en fonction du temps.

FIGURE 4.14 Réponse mécanique du composite orienté à  $\theta = 0^0$  pour les deux vitesses de chargement étudiées (trois échantillons pour chaque vitesse).

#### a) Réponse globale : comparaison des courbes force-déplacement

Pour démontrer la validité et les performances de l'approche proposée, les résultats expérimentaux sont comparés à ceux du calcul par EF<sup>2</sup>. La Figure 4.15 présente la

réponse macroscopique expérimentale et numérique du composite. Il est clairement observé que le modèle multi-échelles fournit des tendances similaires aux résultats expérimentaux. Les réponses macroscopiques sont relativement précises pour la séquence d'empilement  $\theta = 0^\circ$ . Les écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique aux différents temps d'analyse  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont représentés dans le Tableau 4.5 pour les deux vitesses de chargement étudiées.

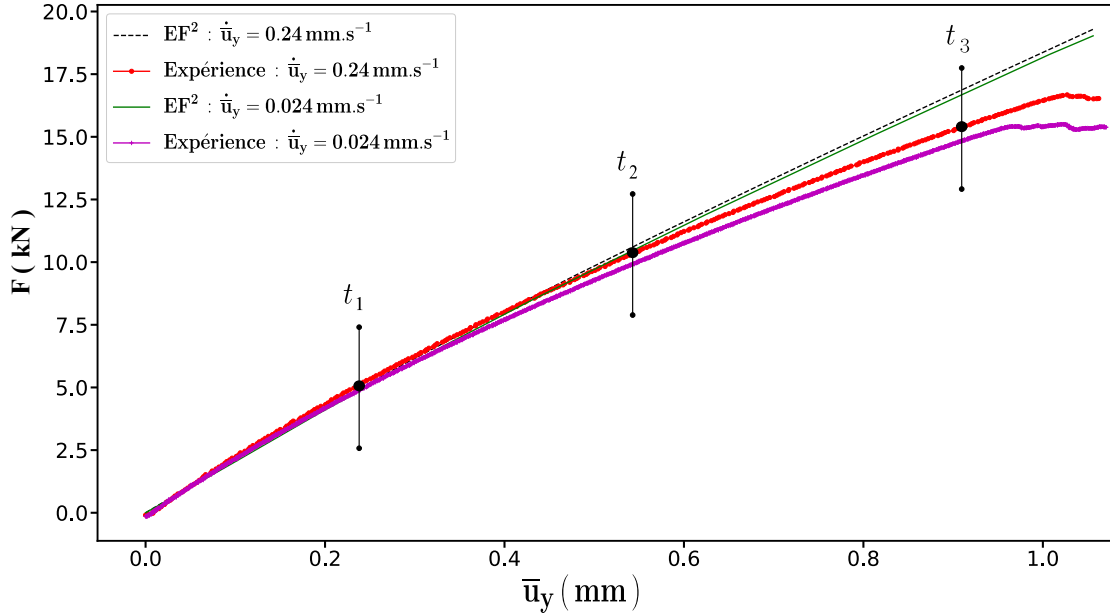


FIGURE 4.15 Réponse mécanique globale du composite orienté à  $\theta = 0^\circ$  pour deux vitesses de chargement (comparaison des résultats expérimentaux et EF<sup>2</sup>).

TABLE 4.5 Écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique pour la configuration  $\theta = 0^\circ$ .

Essai rapide	$t_1 = 0.5 \text{ s}$	$t_2 = 1.1 \text{ s}$	$t_3 = 1.8 \text{ s}$
$\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$	0.8%	3%	8%
Essai lent	$t_1 = 5 \text{ s}$	$t_2 = 11 \text{ s}$	$t_3 = 18 \text{ s}$
$\dot{u}_y = 0.024 \text{ mm.s}^{-1}$	0.6%	3.8%	11%

Le comportement du composite est quasi-linéaire jusqu'à rupture à un niveau de force relativement élevé (environ 15 kN). Cela est dû au fait que le chargement est suivant le toron trame (direction 2), et par conséquent la partie la plus importante de l'effort est supportée par ce dernier qui se comporte élastiquement. De plus, il est aisé d'observer que le matériau à  $\theta = 0^\circ$  n'est pas sensible à la vitesse de chargement.



Cela est dû à la faible fraction volumique de la matrice dans les torons, ce qui rend le comportement du composite faiblement non linéaire dans la direction des torons.

**b) Réponse locale : comparaison des évolutions spatio-temporelles des champs de déformation ("DIC" et EF<sup>2</sup>)**

Les résultats de corrélation d'images numériques sur les essais hétérogènes ont permis de suivre les évolutions spatio-temporelles des champs de déformation macroscopique locaux sur la structure hétérogène étudiée (plaque trouée). Pour les essais rapides ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ), ces champs ont été comparés à ceux obtenus par le calcul EF<sup>2</sup> pour les trois composantes  $\bar{\varepsilon}_{11}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{22}$  et  $\bar{\varepsilon}_{12}$  et pour les trois temps de sollicitation  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Concernant ces champs de déformation, la composante  $\bar{\varepsilon}_{22}$  est la plus importante pour analyser le comportement macroscopique du composite étudié.

La comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux obtenus par "DIC" et par le calcul EF<sup>2</sup> est présentée dans les figures suivantes : la Figure 4.16 pour la composante  $\bar{\varepsilon}_{22}$  (direction de chargement), la Figure 4.17 pour la composante  $\bar{\varepsilon}_{11}$ , et la Figure 4.18 pour la composante de cisaillement plan  $\bar{\varepsilon}_{12}$ . Pour les trois figures précédentes les résultats sont présentés dans la zone utile de la plaque trouée.

Il est à rappeler que la simulation numérique a été effectuée seulement sur le 1/4 de la plaque trouée. Par conséquent, la distribution des champs de déformation dans toute la partie utilisée de la plaque est obtenue par symétrie.

La comparaison des champs de déformation  $\bar{\varepsilon}_{22}$  et  $\bar{\varepsilon}_{11}$  des deux approches mène à conclure que la distribution spatio-temporelle (d'un point de vue qualitatif et quantitatif) de la déformation macroscopique locale est quasi-identique comme il est indiqué dans les Figures 4.16 et 4.17. Cela montre que l'approche proposée décrit bien la réponse du matériau composite lors d'un calcul de structure avec prise en compte de l'effet de la microstructure. Pour la déformation de cisaillement 12, la comparaison entre les champs obtenus par "DIC" et ceux simulés par EF<sup>2</sup> se limite au quart de la plaque trouée discrétisée (Figure 4.18). En effet, l'ensemble du champs de déformation sur toute la structure ne peut être obtenu par une simple reproduction de ce quart du plaque, et cela est dû au fait que le cisaillement induit une anti-symétrie de la répartition spatio-temporelle de cette composante de déformation  $\bar{\varepsilon}_{12}$ . La Figure 4.18 montre une bonne corrélation de l'évolution spatio-temporelle du champs de déformation  $\bar{\varepsilon}_{12}$  entre les champs de cisaillement mesurés par "DIC" et simulés par EF<sup>2</sup> dans la zone discrétisée. On observe que pour les trois temps d'analyse considérés ( $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ ), les valeurs et les gradients de  $\bar{\varepsilon}_{12}$  ("DIC" et EF<sup>2</sup>) sont quasi-identiques d'un point de



vue qualitative et quantitatif confirmant ainsi la performance de la stratégie de calcul multi-échelles développée.

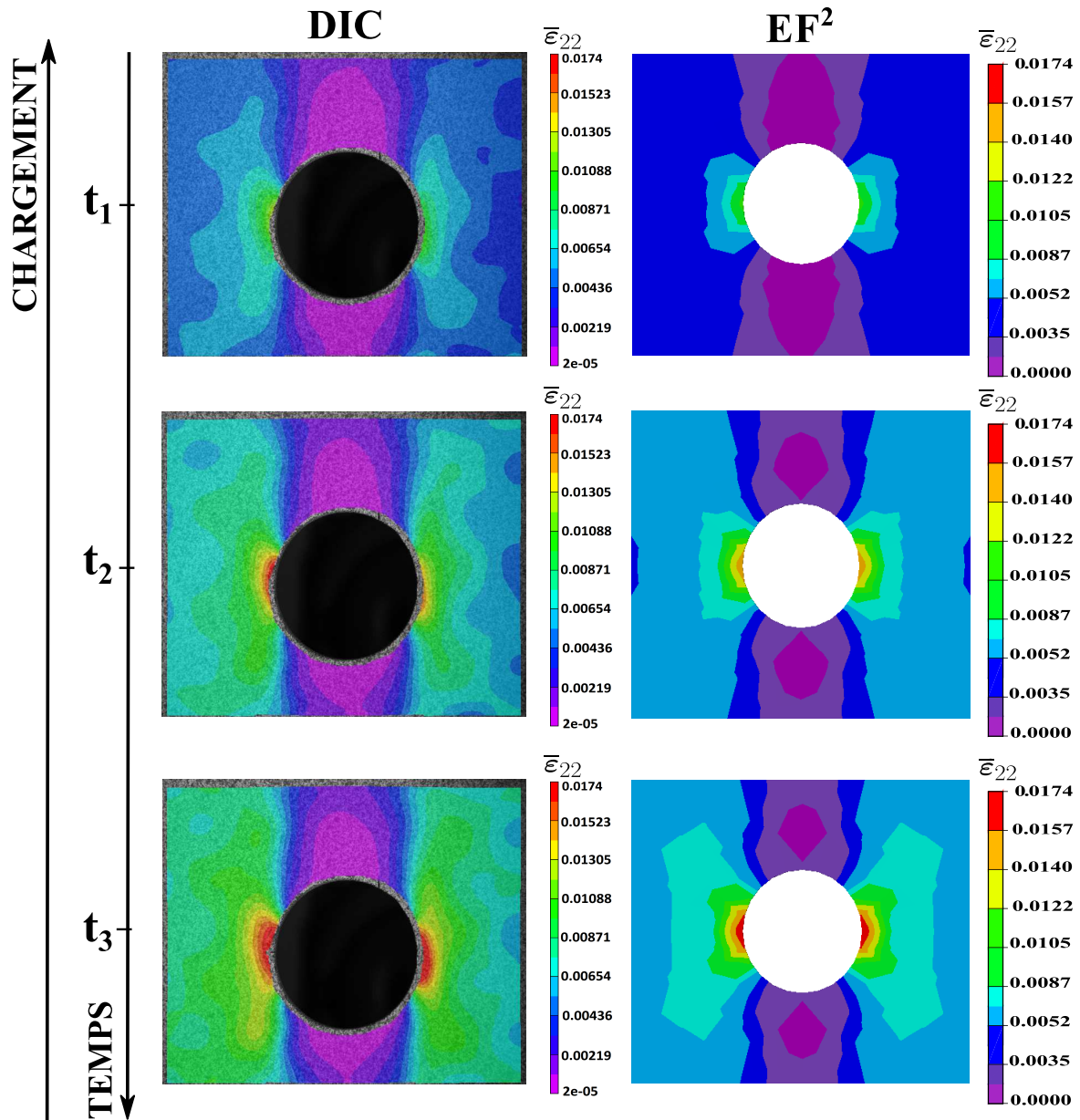


FIGURE 4.16 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux dans la direction de chargement (direction 2) obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = 0^\circ$  pour les trois temps d'analyse :  $t_1$  début de la non linéarité,  $t_2$  milieu de chargement et  $t_3$  avant la rupture (Figure 4.15).

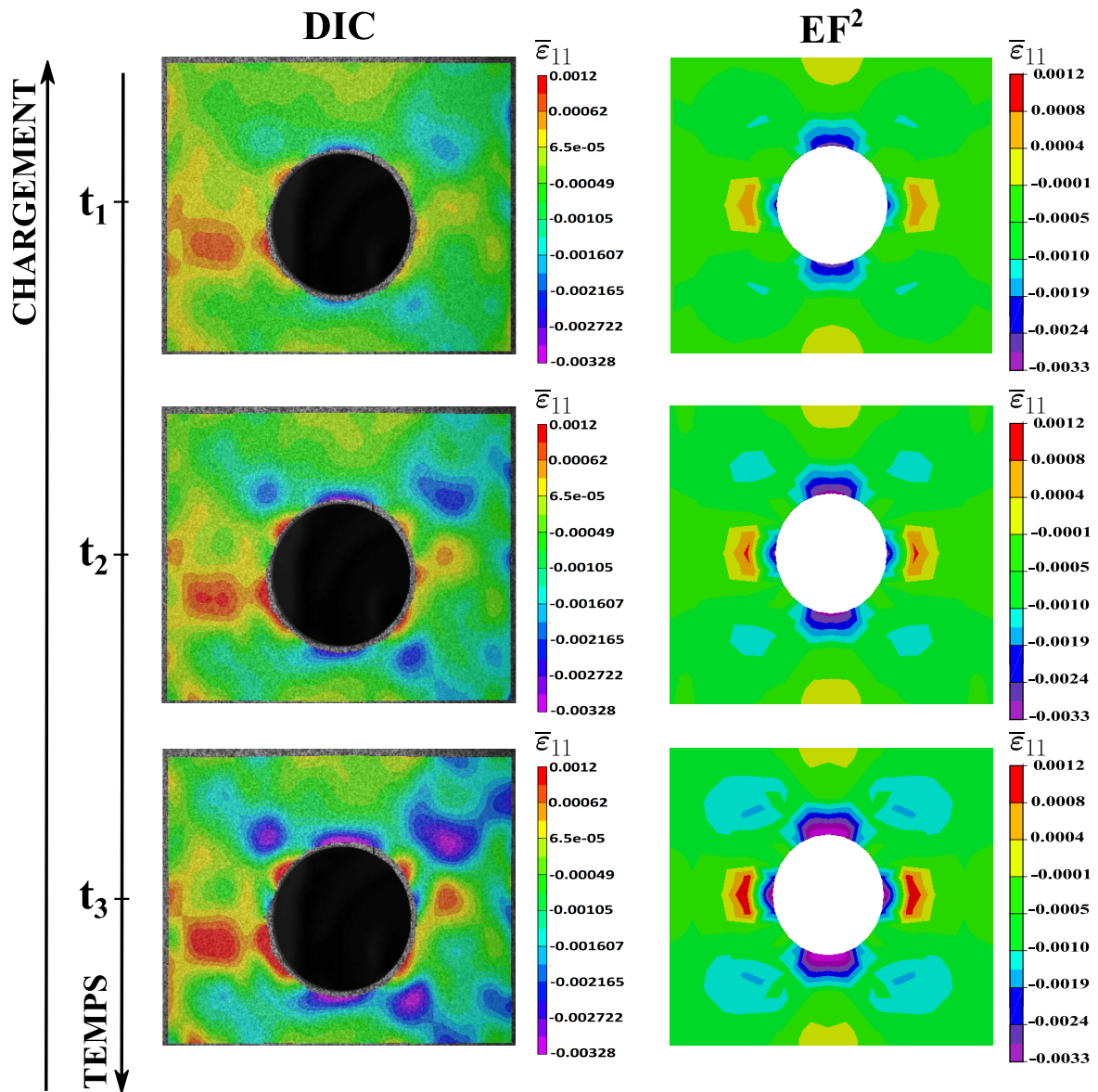


FIGURE 4.17 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux dans la direction 1 obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = 0^\circ$  pour les trois temps d'analyse représentés sur la Figure 4.15 ( $t_1, t_2$  et  $t_3$ ).

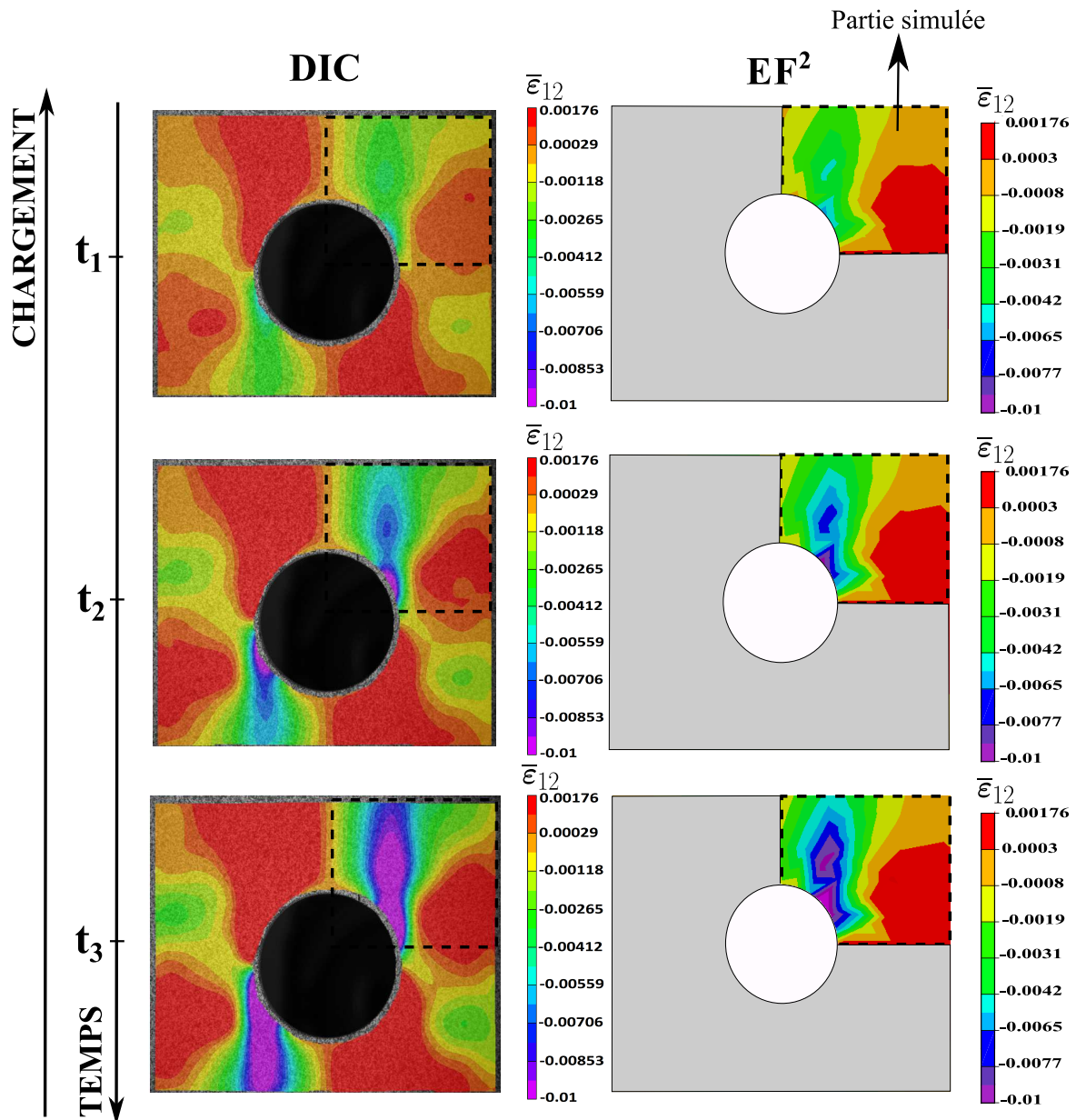


FIGURE 4.18 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.24 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux dans la direction de cisaillement 1-2 obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = 0^\circ$  pour les trois temps d'analyse représentés sur la Figure 4.15 ( $t_1, t_2$  et  $t_3$ ).

### 4.4.2 Essais de traction monotone pour $\theta = \pm 45^0$

#### a) Réponse globale : comparaison des courbes force-déplacement

Pour la configuration  $\theta = \pm 45^0$ , les essais ont été pilotés en déplacement avec deux vitesses de chargement ( $\dot{\bar{u}}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{\bar{u}}_y = 0.033 \text{ mm.s}^{-1}$ ). La réponse mécanique macroscopique en termes de force-déplacement des essais de traction monotone est présentée pour les deux approches (expérimentale et EF<sup>2</sup>) dans la Figure 4.19. Globalement, une bonne corrélation entre la réponse macroscopique estimée par le modèle multi-échelles et l'approche expérimentale est obtenue avec des ordres de grandeur similaires. Les écarts estimés entre les résultats expérimentaux et l'approche EF<sup>2</sup> pour  $\theta = \pm 45^0$  sont donnés dans le Tableau 4.6 pour les deux vitesses. La réponse du composite est clairement non linéaire en comparaison avec celle de la configuration  $\theta = 0^0$ . Cela est dû au fait que le chargement est appliqué à  $\pm 45^0$  par rapport à la direction des torons de chaîne. Dans ce cas la réponse non linéaire macroscopique est principalement due à la rhéologie (VE-VP) de la matrice polyamide 66, à son endommagement ductile et enfin à la dégradation dans les torons (fissuration transverse).

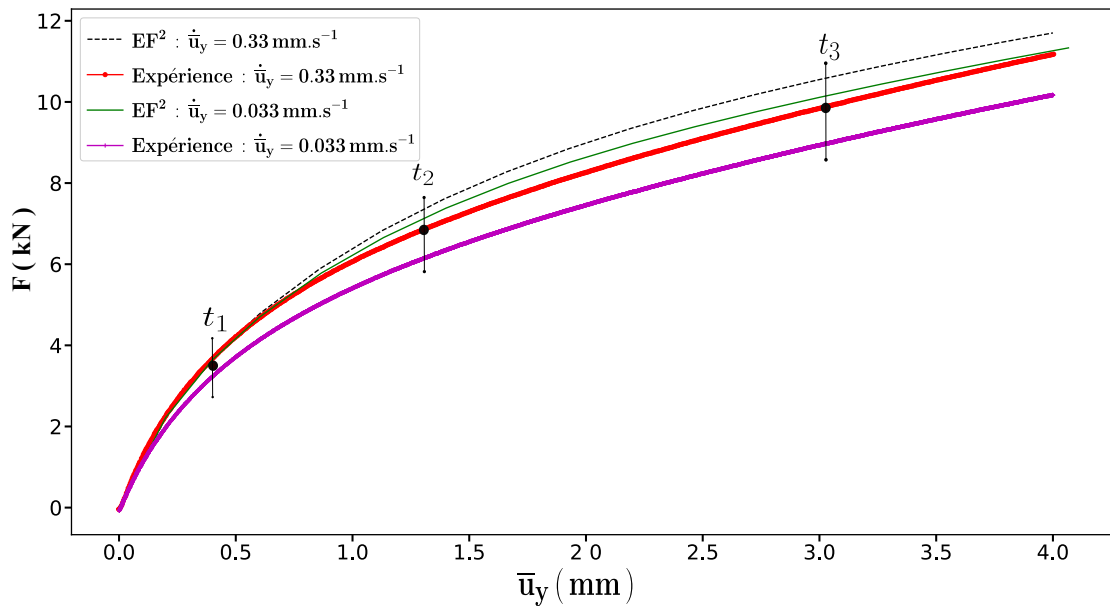


FIGURE 4.19 Réponse mécanique globale du composite orienté à  $\theta = \pm 45^0$  pour les deux vitesses de chargement (comparaison des résultats expérimentaux et EF<sup>2</sup>).

TABLE 4.6 Écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique pour la configuration  $\theta = \pm 45^\circ$ .

Essai rapide	$t_1 = 0.3 \text{ s}$	$t_2 = 2.1 \text{ s}$	$t_3 = 4.5 \text{ s}$
$\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$	0.65%	6.4%	7.3%
Essai lent	$t_1 = 3 \text{ s}$	$t_2 = 21 \text{ s}$	$t_3 = 45 \text{ s}$
$\dot{u}_y = 0.033 \text{ mm.s}^{-1}$	5%	12%	13.4%

### b) Réponse locale : comparaison des évolutions spatio-temporelles des champs de déformation ("DIC" et EF<sup>2</sup>)

La Figure 4.20 présente une comparaison de l'évolution de la distribution spatio-temporelle des champs de déformation macroscopique locaux obtenus par "DIC" et l'approche multi-échelles développée pour les trois temps d'analyse  $t_1, t_2$  et  $t_3$ . Cette comparaison est présentée pour la composante  $\bar{\varepsilon}_{22}$  (direction de chargement). Les Figures 4.21 et 4.22 présentent une comparaison entre les champs de déformation calculés par "DIC" et EF<sup>2</sup> à la fin de l'analyse ( $t_3$ ) pour les composantes  $\bar{\varepsilon}_{11}$  et le cisaillement  $\bar{\varepsilon}_{12}$ . Ces comparaisons sont présentées pour la vitesse de chargement  $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ .

La prédiction des champs de déformation obtenue par EF<sup>2</sup> dans la direction du chargement ( $\bar{\varepsilon}_{22}$ , Figure 4.20) est similaire à celle obtenue expérimentalement par "DIC" d'un point de vue valeurs numériques et distribution spatio-temporelle, où les points critiques (les points les plus sollicités en traction et les plus sollicités en compression) sont bien capturés par le modèle multi-échelles.

Néanmoins, un grand écart des champs de déformation entre les deux approches est observé pour les composantes  $\bar{\varepsilon}_{11}$  et  $\bar{\varepsilon}_{12}$  (Figures 4.21 et 4.22). Cet écart est dû aux trois facteurs principaux qui peuvent intervenir soit dans l'approche expérimentale ou dans le calcul par EF<sup>2</sup> :

- i) Cette différence peut être due aux conditions aux limites appliquées sur la structure (démonstrateur) et à la conséquence inhérente aux conditions de symétrie supposées sur le modèle EF de la structure. Pour avoir les mêmes conditions aux limites appliquées expérimentalement et numériquement, il aurait été nécessaire de simuler la structure entière sans aucune hypothèse de symétrie et en considérant les conditions aux limites "réelles" qui consistent en un encastrement sur un bord et un déplacement imposé à l'autre bord. Cette solution est certes efficace mais implique un coût de calcul élevé. Une autre solution consiste à



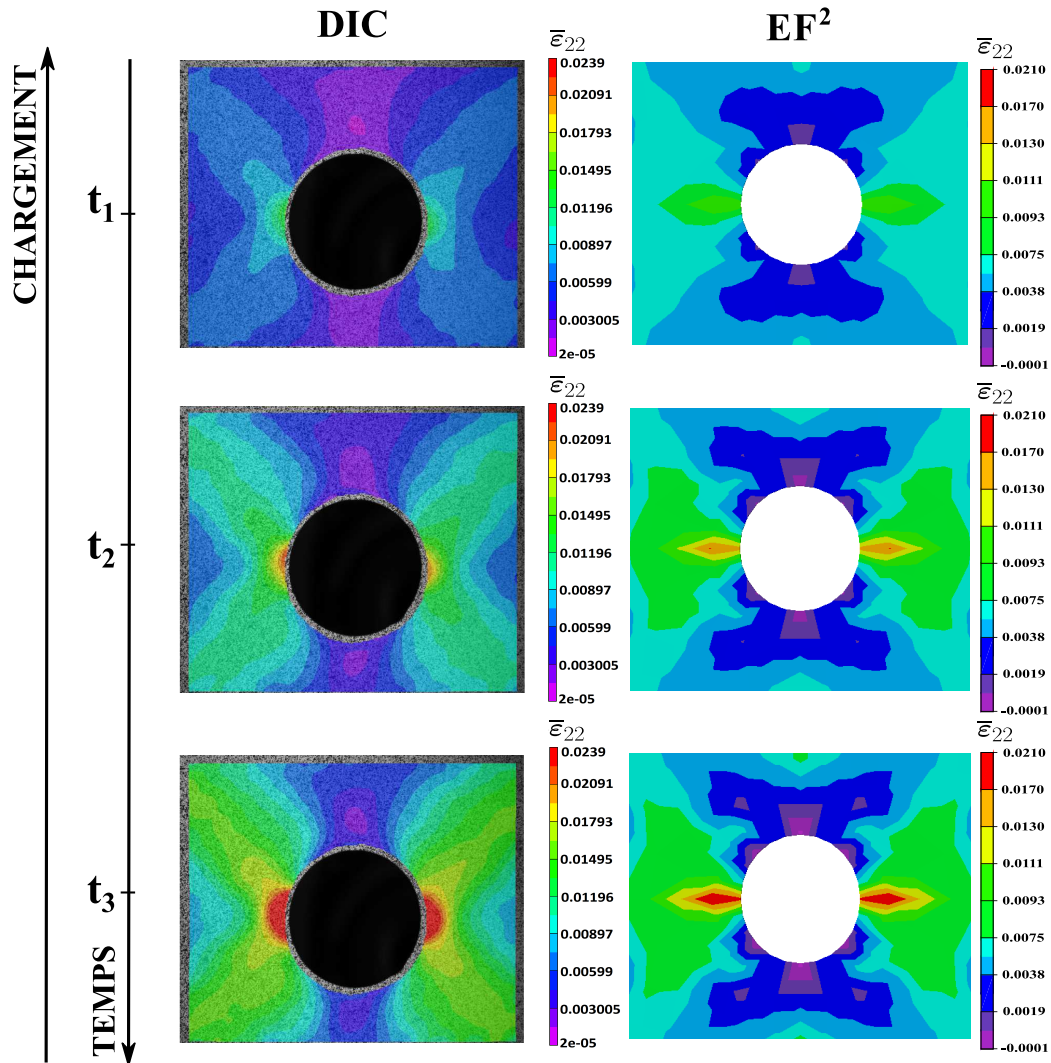


FIGURE 4.20 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique dans la direction 2 (direction de chargement) obtenus par corrélation d'images numériques ("DIC") et l'approche EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = \pm 45^\circ$  pour les trois temps de sollicitation représentés sur la Figure 4.19.

discrétiser la zone d'intérêt autour du trou et appliquer des conditions aux limites expérimentales qui sont exactement les déplacements mesurés par "DIC" sur les deux frontières de cette zone.

- ii) La condition de périodicité de la microstructure n'est pas scrupuleusement prise en compte sur la largeur de la plaque testée. En effet, la taille du VER ( $15 \times 15 \text{ mm}^2$ ) impose un faible nombre de VER (3 à 4 VER) sur la largeur de la plaque ( $60 \text{ mm}$ ) et ne permet donc pas de respecter la condition de périodicité. Compte tenu de la taille du VER, il aurait été nécessaire d'augmenter considérablement la

largeur de la plaque trouée et par conséquent sa taille rendant l'essai mécanique délicat à cause des capacités des machines d'essais. Pour cette raison qu'une très bonne corrélation entre les résultats expérimentaux ("DIC") et numériques (EF<sup>2</sup>) a été obtenue dans la direction du chargement (direction 2), où la condition de périodicité est bien respectée (8 à 9 VER). Par contre, une corrélation de moindre qualité a été notée dans la direction 1 (transverse), où la condition de périodicité n'est pas bien respectée.

- iii) La non prise en compte de certains mécanismes d'endommagement dans les torons, tels que la décohésion dans l'interface torons/matrice, les frottements inter-torons et les rotations des torons lorsque le composite est chargé en cisaillement plan. La différence peut être due, à un degré moindre, à la non prise en compte d'autres mécanismes dans les modèles constitutifs tels que la viscoélasticité, viscoplasticité des torons. En effet, seul un endommagement anisotrope est intégré dans la modélisation des torons.

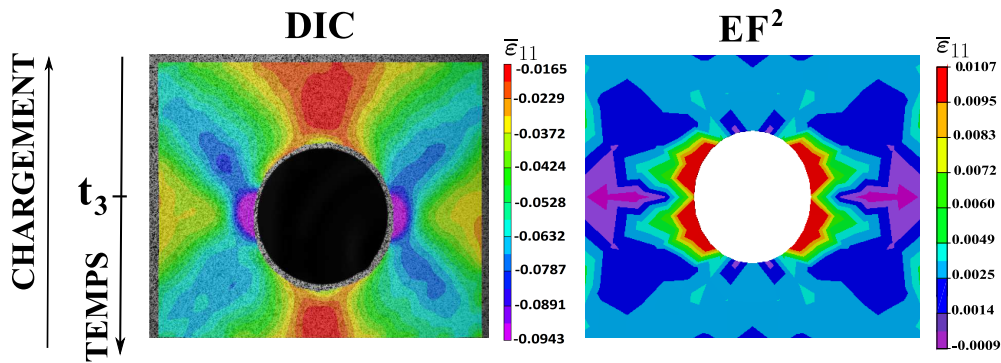


FIGURE 4.21 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique dans la direction 1 obtenus par "DIC" et EF<sup>2</sup> pour  $\theta = \pm 45^\circ$  avant rupture.

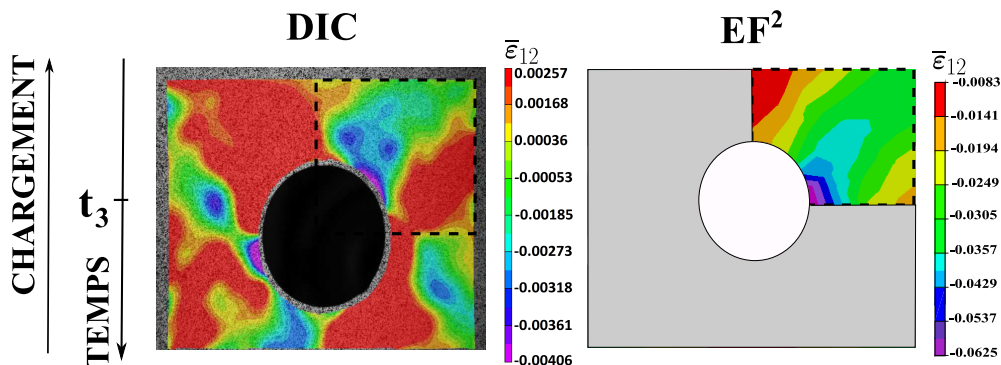


FIGURE 4.22 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique pour le cisaillement 12 obtenus par "DIC" et EF<sup>2</sup> pour  $\theta = \pm 45^\circ$  avant rupture.

### 4.4.3 Essais de traction monotone pour $\theta = \pm 30^\circ$

#### a) Réponse globale : comparaison des courbes force-déplacement

Pour la configuration intermédiaire  $\theta = \pm 30^\circ$ , les essais de traction monotone sont pilotés en déplacement pour deux vitesses de chargement différentes ( $\dot{\bar{u}}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{\bar{u}}_y = 0.033 \text{ mm.s}^{-1}$ ). La réponse macroscopique du composite étudié en termes de force-déplacement est présentée dans la Figure 4.23 pour les deux vitesses de chargement ainsi que pour les deux approches expérimentale et EF<sup>2</sup>.

Les résultats obtenus présentent une tendance comparable et proche pour les deux approches dans la zone entre  $t = 0$  et  $t_2$  où l'écart maximum est d'environ 15.6%. Cependant, un écart relativement considérable entre les deux réponses (force-déplacement) est observé à la fin de l'essai et vers le début de la rupture (dans l'intervalle du temps  $[t_2, t_3]$ ). Cet écart est au maximum d'environ 18.3%. La tendance obtenue par la méthode multi-échelles reste proche de ce qui est observé expérimentalement, avec des ordres de grandeur similaires. Les écarts estimés entre les réponses obtenues via les deux approches sont présentés dans le Tableau 4.7. Ces écarts observés entre les deux approches sont dus principalement aux facteurs mentionnés précédemment dans la sous section 4.4.2.

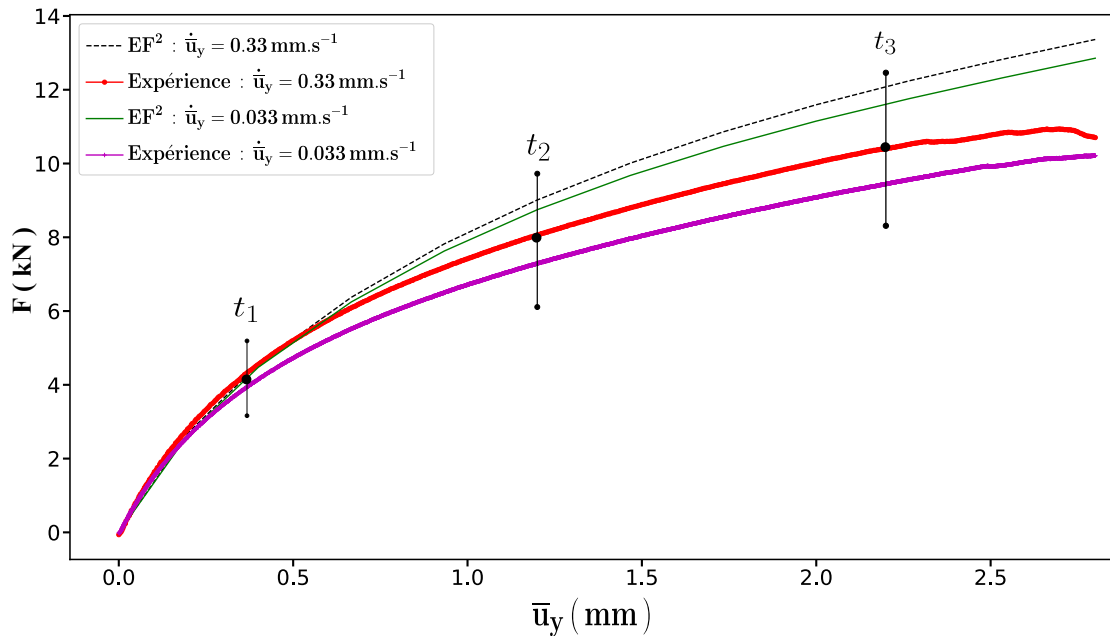


FIGURE 4.23 Réponse mécanique globale du composite orienté à  $\theta = \pm 30^\circ$  pour les deux vitesses de chargement (comparaison des résultats expérimentaux et EF<sup>2</sup>).



TABLE 4.7 Écarts estimés entre la réponse expérimentale et numérique pour  $\theta = \pm 30^0$ .

Essai rapide	$t_1 = 0.6 s$	$t_2 = 2.2 s$	$t_3 = 3.2 s$
$\dot{u}_y = 0.33 mm.s^{-1}$	0.59%	12%	16%
Essai lent	$t_1 = 6 s$	$t_2 = 22 s$	$t_3 = 32 s$
$\dot{u}_y = 0.033 mm.s^{-1}$	5.6%	15.6%	18.3%

D'un point de vue comportement global, le composite présente une réponse non linéaire et intermédiaire entre celles observées pour les deux configurations  $\theta = 0^0$  et  $\theta = \pm 45^0$ . Cette non linéarité est due au comportement VE-VPD de la matrice PA66. À  $\pm 30^0$  par rapport à la direction des torons du chaîne, la réponse globale du composite est principalement affectée par la matrice. La non linéarité est due également à la dégradation dans les torons causée par la présence des micro-fissurations.

La différence dans les réponses globales (force-déplacement) entre les différentes configurations de stratification ( $[0^0]$ ,  $[\pm 30^0]$  et  $[\pm 45^0]$ ) fait ressortir la forte anisotropie du matériau composite étudié induite par l'architecture de la microstructure tissée. Cette anisotropie est globalement bien capturée par les modèles constitutifs locaux et l'approche multi-échelles développée.

### b) Réponse locale : comparaison des évolutions spatio-temporelles des champs de déformation ("DIC" et EF<sup>2</sup>)

Pour la réponse macroscopique locale du composite à  $\theta = \pm 30^0$ , la Figure 4.24 présente une comparaison de l'évolution des champs de déformation macroscopique locaux obtenus par "DIC" et par EF<sup>2</sup> pour la vitesse de chargement  $\dot{u}_y = 0.33 mm.s^{-1}$  dans les directions de chargement 2. Les Figures 4.25 et 4.26 présentent une comparaison entre les champs de déformation obtenus par les deux approches à la fin de l'analyse ( $t_3$ ) pour les directions 1 et cisaillement 1-2.

Dans la direction du chargement ( $\bar{\varepsilon}_{22}$ ), l'approche multi-échelles fournit des tendances comparables et proches aux résultats expérimentaux. Néanmoins, d'un point de vue valeurs numériques, un écart d'environ 30% est observé entre les deux approches (Figure 4.24). Une tendance quasi-identique est observée entre les résultats obtenus par "DIC" et EF<sup>2</sup> pour la composante de cisaillement  $\bar{\varepsilon}_{12}$  dans le quart discrétisé en termes de distribution spatiale et valeurs numériques (Figure 4.26). Par contre, une différence assez importante est observée pour la composante  $\bar{\varepsilon}_{11}$  (Figure 4.25). Les différences observées entre les résultats des deux techniques sont dues principalement aux trois

facteurs mentionnés précédemment dans la sous section 4.4.2. De plus, le chargement hors axes entraîne des rotations importantes entre les torons dans la microstructure, ceci cause des décohésions dans les interfaces torons/matrice. Ces phénomènes ne sont pas pris en compte dans l'approche numérique.

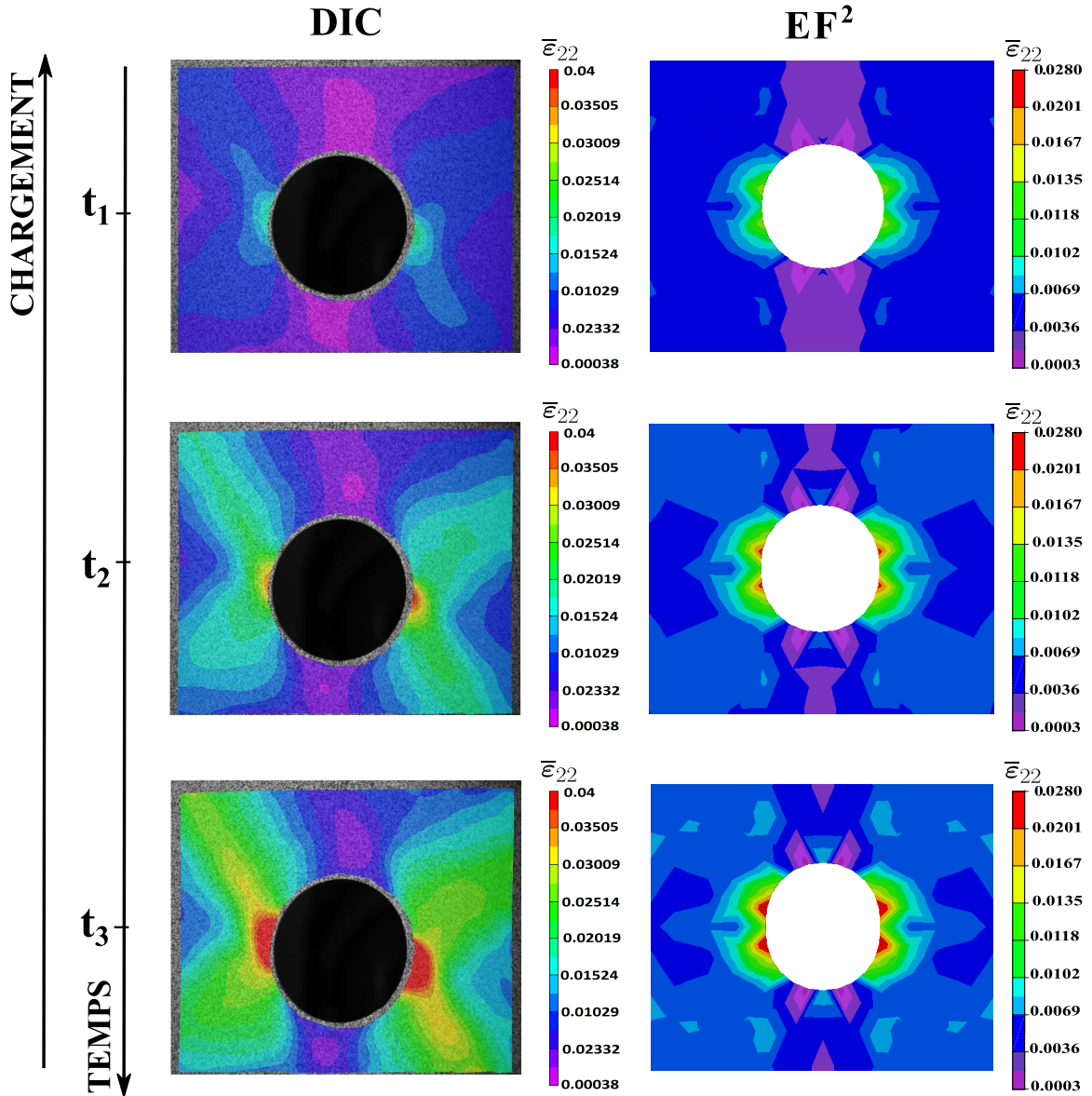


FIGURE 4.24 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des évolutions spatio-temporelles des champs de déformation obtenus par "DIC" et EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$  dans la direction de chargement pour les trois temps d'analyse ( $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ ).

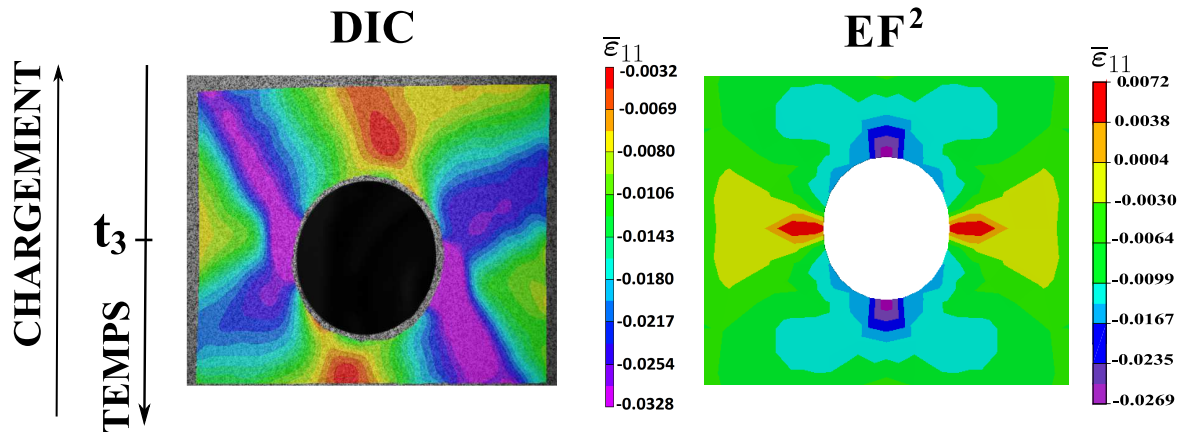


FIGURE 4.25 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique dans la direction 1 obtenus par "DIC" et l'approche EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$  avant rupture.

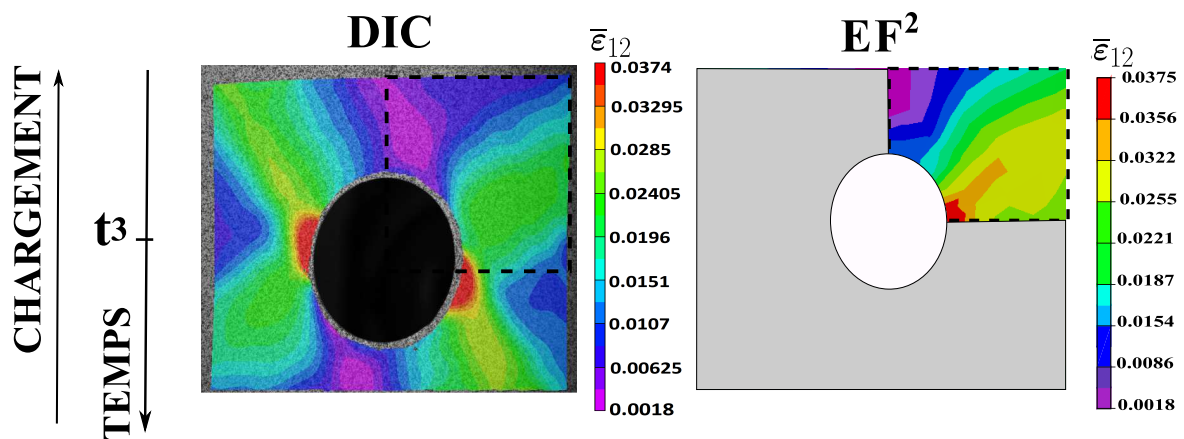


FIGURE 4.26 Essai rapide ( $\dot{u}_y = 0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ ) : Comparaison des champs de déformation macroscopique pour la direction de cisaillement 1-2 obtenus par "DIC" et l'approche EF<sup>2</sup> pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$  avant rupture.

Finalement, la stratégie de calcul par EF<sup>2</sup> développée dans le cadre de cette thèse donne des prédictions quasi-identiques et proches de la réalité sur différentes configurations des séquences d'empilement du composite. Ces résultats sont très satisfaisants pour une analyse de calcul de structure aussi complexe, qui prend en compte l'effet de la microstructure. Néanmoins, il est primordial d'intégrer d'autres mécanismes plus complexes dans les lois constitutives (rotation des torons, endommagement interfacial, etc), afin d'éviter les problèmes rencontrés précédemment lors de chargement hors axes.

## 4.5 Analyse macro-micro de la réponse mécanique du composite tissé obtenue par la stratégie de calcul EF<sup>2</sup>

L'objectif de cette section est de présenter les performances et les capacités de l'approche EF<sup>2</sup> à prédire la réponse mécanique et le comportement dissipatif des composites à différentes échelles. Les avantages principaux de cette technique résident dans sa capacité à calculer la réponse globale du composite en tenant en compte des effets de la microstructure. L'approche est également capable de suivre l'évolution spatio-temporelle des différents phénomènes observés à l'échelle microscopique à savoir, les mécanismes d'endommagement, la dissipation d'énergie, l'évolution de la plasticité dans les différentes phases, etc. Ces phénomènes sont généralement inaccessibles par les approches expérimentales.

Afin de bien montrer ces avantages, les résultats numériques macroscopiques et microscopiques calculés par l'approche EF<sup>2</sup> sont présentés pour deux configurations de stratification ( $[0^0]$  et  $[\pm 30^0]$ ) pour les essais de traction monotone sur la plaque trouée.

### 4.5.1 Chargements monotones à $\theta = 0^0$

#### a) Champs macroscopiques

Pour la configuration  $\theta = 0^0$ , les Figures 4.27-a, 4.27-b et 4.27-c présentent respectivement la distribution spatiale des champs de contrainte macroscopique dans la structure simulés par EF<sup>2</sup> pour les composantes 11, 22 et le cisaillement 12. Comme prévu, la contrainte la plus importante est dans la direction du chargement (direction 2). Cette contrainte est localisée sur les limites du trou (point A, Figure 4.27-b). Par contre, le point le plus sollicité en compression dans la direction 1 est le point B (Figure 4.27-a). Le cisaillement 12 est localisé dans la direction transversale (direction 1, Figure 4.27-c). Cela est également observé expérimentalement.

La Figure 4.28 présente les courbes de contrainte-déformation macroscopiques au point A de la structure pour les composantes 11, 22, 33 et 12 pour les deux vitesses de chargement. Les résultats montrent que la plus grande valeur de la contrainte est dans la direction de chargement ( $\bar{\sigma}_{22}$ ), avec une partie beaucoup plus faible observée dans la direction transversale ( $\bar{\sigma}_{11}$ ).

D'autre part, la Figure 4.29 présente les courbes de contrainte-déformation au point B pour les mêmes composantes 11, 22, 33 et 12. Il est clairement observé que la contrainte

la plus importante en ce point est  $\bar{\sigma}_{11}$  dans le sens de la compression. Cependant, la composante  $\bar{\sigma}_{22}$  est moins élevée et ce est dû à un effet de poisson. Le comportement global du composite à  $\theta = 0^0$  n'est pas sensible à la vitesse de chargement lorsqu'il est sollicité dans la direction des torons. Ceci est dû au fait que les torons se comportent élastiquement dans cette direction. Ces constatations sont vérifiées expérimentalement dans les sections précédentes.

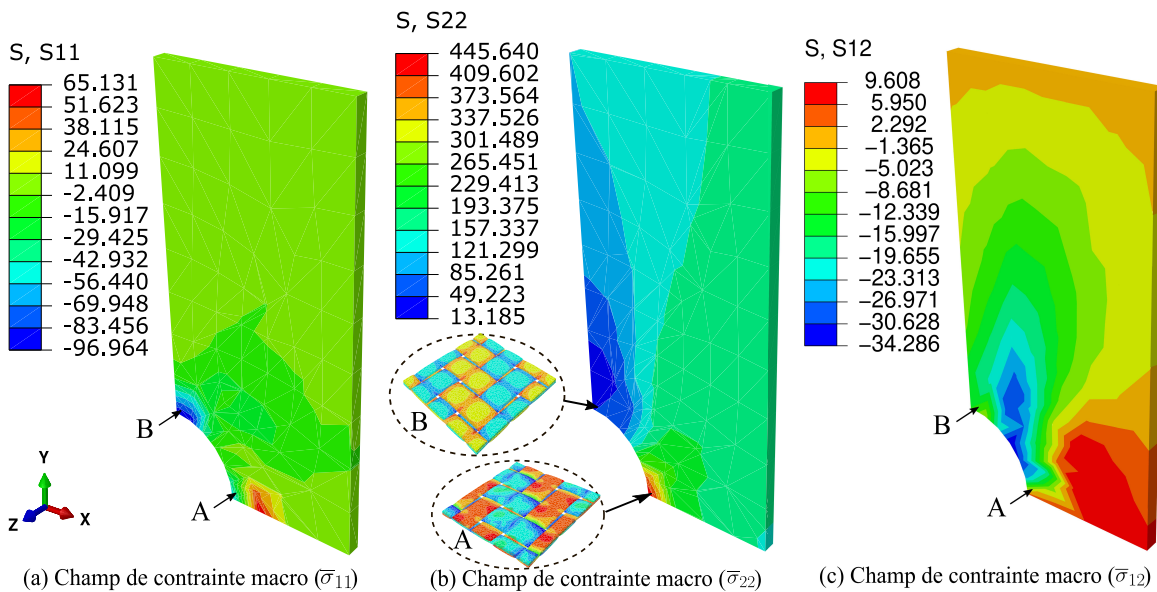


FIGURE 4.27 Distribution spatiale des champs de contraintes macroscopiques ( $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  et  $\bar{\sigma}_{12}$ ) dans la plaque trouée en utilisant un calcul EF<sup>2</sup> pour la configuration [0<sup>0</sup>].

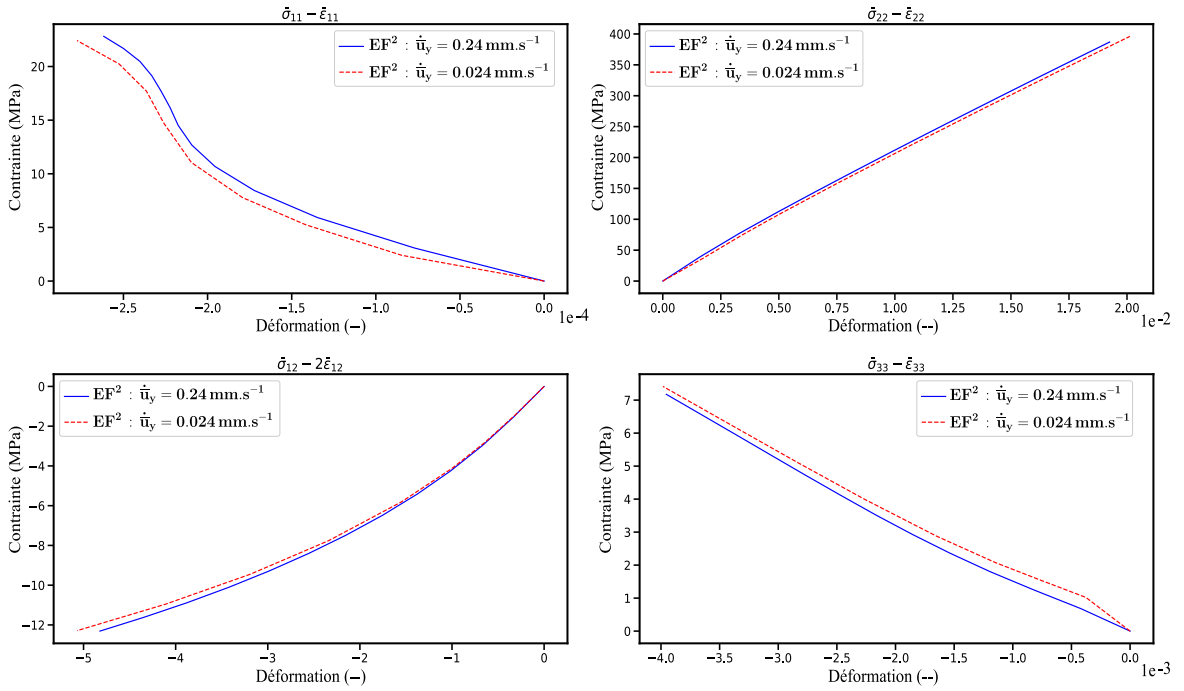


FIGURE 4.28 Réponses mécaniques macroscopiques du composite pour la configuration  $\theta = 0^0$  au point A de la structure (Figure 4.27) obtenues par EF<sup>2</sup> pour les composantes 11, 22, 33 et 12. Les deux vitesses de chargement sont  $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $0.024 \text{ mm.s}^{-1}$ .

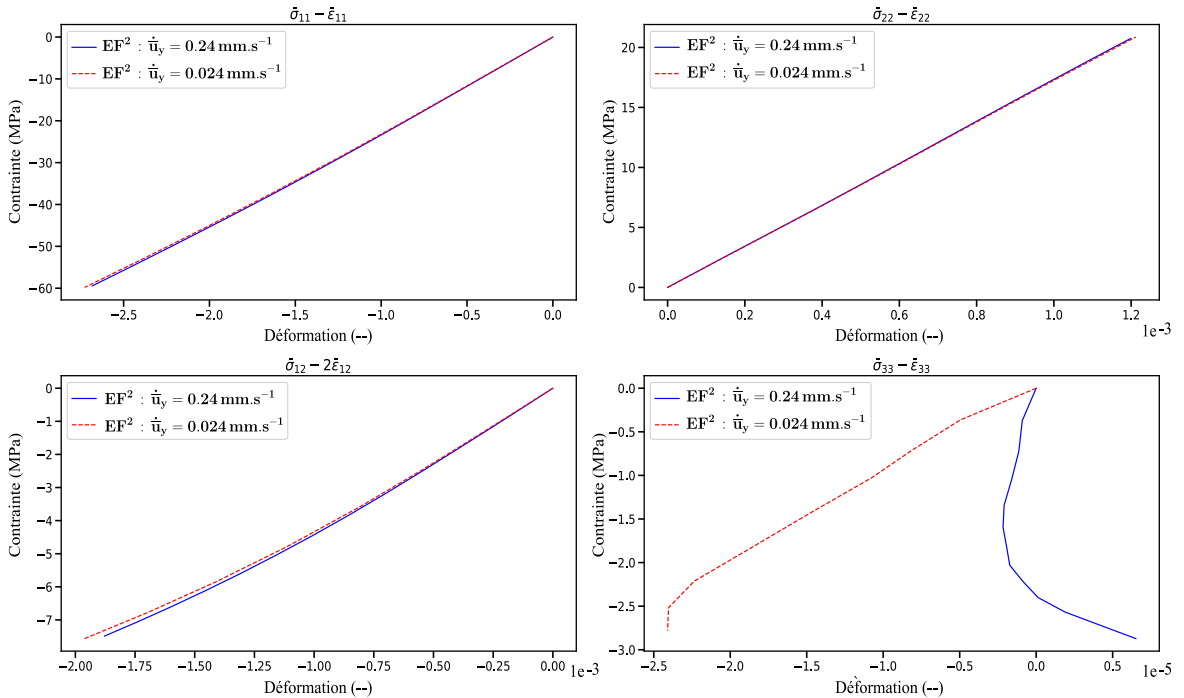


FIGURE 4.29 Réponses mécaniques macroscopiques du composite pour la configuration  $\theta = 0^0$  au point B de la structure (Figure 4.27) obtenues par EF<sup>2</sup> pour les composantes 11, 22, 33 et 12. Les deux vitesses de chargement sont  $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $0.024 \text{ mm.s}^{-1}$ .

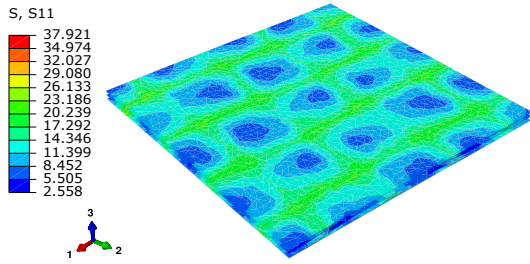
**b) Champs microscopiques**

Les Figures 4.30 et 4.31 présentent respectivement les champs locaux dans la microstructure aux point A et B de la structure macroscopique à la fin du chargement. Il faut préciser que les contraintes locales dans les torons sont données dans le repère local de chaque point matériel du toron. Comme le montre la Figure 4.30, lorsque le composite est chargé dans le sens trame, la plus grande partie de l'effort est supportée par les torons de trame dans leur direction transversale 2 (Figure 4.30-b). Au même temps, une partie moindre de cet effort est également transmise aux torons de chaîne dans leur direction longitudinale (Figure 4.30-d). Ceci provoque des micro-fissures dans ces derniers (Figure 4.30-h). Ces micro-fissurations sont localisées surtout dans les croisements entre les torons. Ce constat est observé également pour le cisaillement dans le plan 12 (Figure 4.30-f). Pour la matrice, les contraintes sont concentrées surtout dans les zones de croisement entre les torons (Figures 4.30-a, 4.30-c et 4.30-e). Les concentrations des contraintes conduisent à l'apparition d'endommagement dans ces zones (Figure 4.30-g). Cela devrait entraîner un adoucissement au sein de la matrice et/ou une rupture des torons et par conséquent la ruine de la structure. Ces aspects ne sont pas pris en compte dans la formulation actuelle des modèles constitutifs des constituants. Les valeurs des contraintes élevées observées dans certaines zones de croisement des torons (zones de localisations) sont dues à un artefact de calcul car les modèles constitutifs ne prend pas en compte un critère de rupture ou des approches non locales pour modéliser les localisations. Afin d'éviter ce problème, il aurait été nécessaire de considérer un critère d'arrêt piloté par la contrainte ultime des torons ou utilisé des approches non locales capables de capturer la relaxation de contrainte associée à l'endommagement élevé.

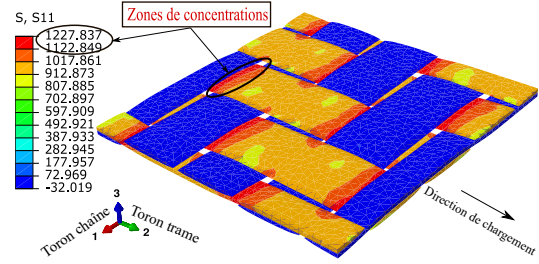
Pour le point B (Figure 4.31), la plus grande partie de l'effort de la compression par effet de poisson est supportée par les torons de chaîne dans leur direction longitudinale 1 (Figure 4.31-b). Une partie de cet effort est supportée par les torons trame (Figure 4.31-d), provoquant une légère microfissuration dans les zones de croisement des torons (Figure 4.31-h). Les Figures 4.31-a, 4.31-c et 4.31-e confirment que la plus grande partie de la contrainte au point B est transférée aux torons. Pour cela, il n'y a plus d'endommagement dans la matrice en ce point (Figure 4.31-g).

En effet, pour la configuration d'empilement  $\theta = 0^0$ , l'endommagement dans les torons sens chaîne et dans la matrice ont des effets limités à l'échelle macroscopique. Cela est dû au fait que la partie la plus importante de la charge est portée par les torons de trame. Pour cette raison, la réponse du composite est quasi-linéaire à l'échelle macroscopique pour le stratifié  $0^0$ .

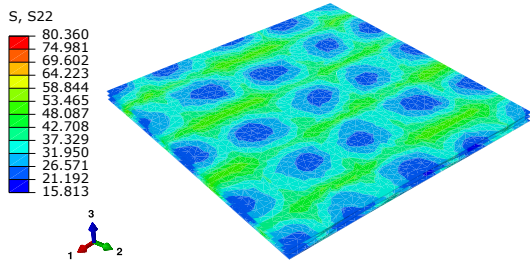




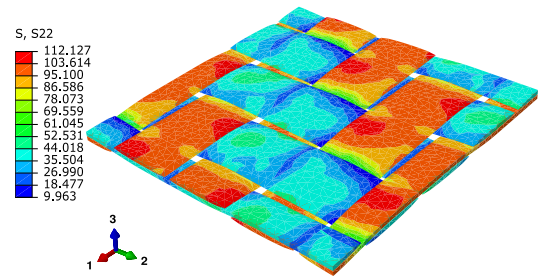
(a) Contrainte longitudinale ( $\sigma_{11}$ ) dans la matrice.



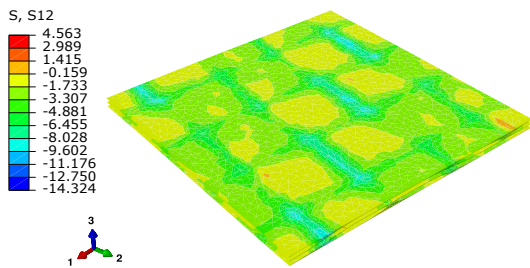
(b) Contrainte longitudinale ( $\sigma_{11}$ ) dans les torons.



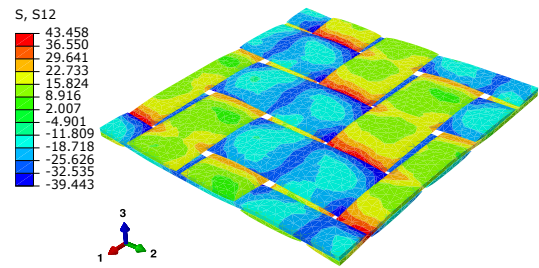
(c) Contrainte transversale ( $\sigma_{22}$ ) dans la matrice.



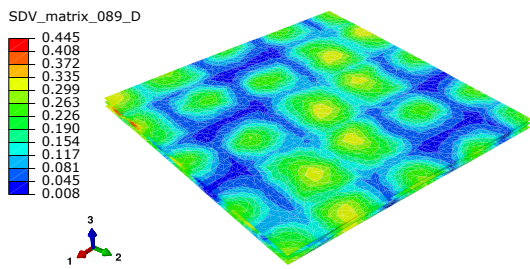
(d) Contrainte transversale ( $\sigma_{22}$ ) dans les torons.



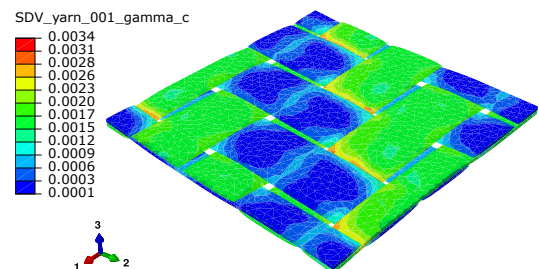
(e) Contrainte de cisaillement plan ( $\sigma_{12}$ ) dans la matrice.



(f) Contrainte de cisaillement plan ( $\sigma_{12}$ ) dans les torons.



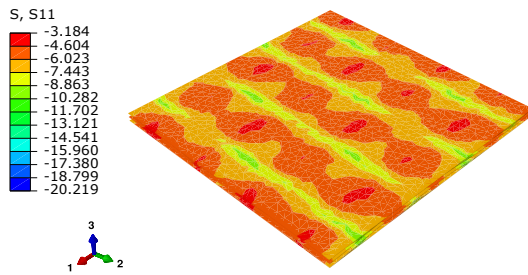
(g) Endommagement ( $D$ ) dans la matrice.



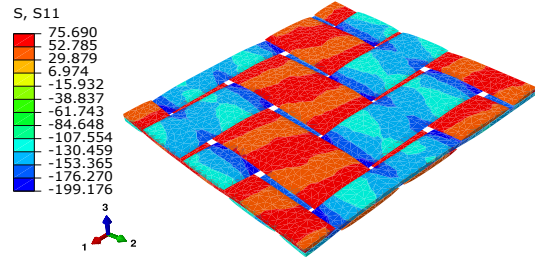
(h) Densité des micro-fissures ( $\gamma_c$ ) dans les torons.

FIGURE 4.30 Distribution des champs locaux à la fin de la simulation des essais de traction monotone sens trame, effectuée avec une vitesse de  $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$  sur le composite à configuration  $\theta = 0^0$  au point A de la structure (Figure 4.27). Les contraintes locales dans les torons sont exprimées dans le repère local des torons.

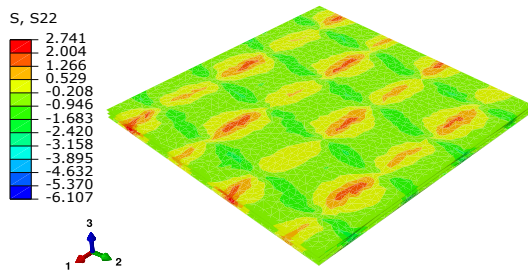




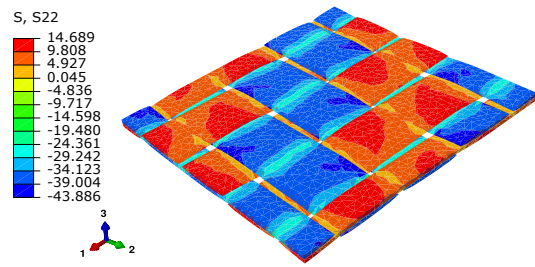
(a) Contrainte longitudinale ( $\sigma_{11}$ ) dans la matrice.



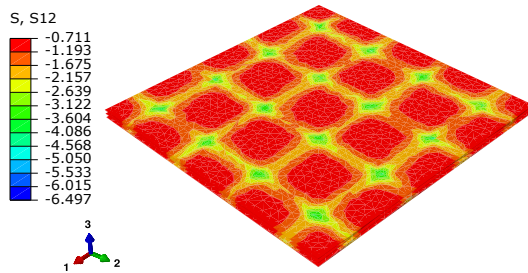
(b) Contrainte longitudinale ( $\sigma_{11}$ ) dans les tows.



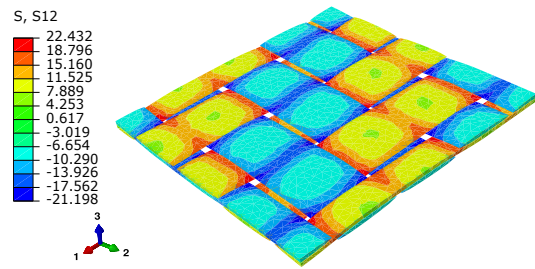
(c) Contrainte transversale ( $\sigma_{22}$ ) dans la matrice.



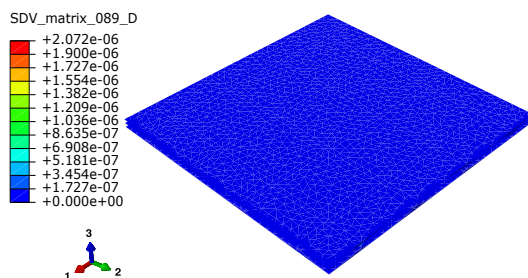
(d) Contrainte transversale ( $\sigma_{22}$ ) dans les tows.



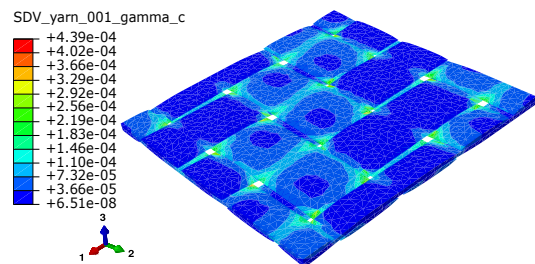
(e) Contrainte de cisaillement plan ( $\sigma_{12}$ ) dans la matrice.



(f) Contrainte de cisaillement plan ( $\sigma_{12}$ ) dans les tows.



(g) Endommagement ( $D$ ) dans la matrice.



(h) Densité des micro-fissures ( $\gamma_c$ ) dans les tows.

FIGURE 4.31 Distribution des champs locaux à la fin de la simulation des essais de traction monotone sens trame effectuée avec une vitesse de  $0.24 \text{ mm.s}^{-1}$  sur le composite à configuration  $\theta = \pm 0^\circ$  au point B de la structure (Figure 4.27). Les contraintes locales dans les tows sont exprimées dans le repère local des tows.

### 4.5.2 Chargements monotones pour $\theta = \pm 30^\circ$

#### a) Champs macroscopiques

Pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$ , les Figures 4.32-a, 4.32-b et 4.32-c présentent la distribution spatiale des champs de contrainte macroscopique dans les directions 1, 2 et le cisaillement 1-2. La Figure 4.33 présente les courbes de contrainte-déformation au point A de la structure pour les composantes  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$ ,  $\bar{\sigma}_{33}$  et le cisaillement  $\bar{\sigma}_{12}$  pour les deux vitesses de chargement. Les résultats montrent que la réponse du composite reste quasi-linéaire avec un effet de vitesse négligeable dans le sens des torons chaîne et trame. En revanche, une non-linéarité assez importante est observée en cisaillement plan 12, et l'effet de vitesse devient plus visible (Figure 4.33). Ce constat est dû au chargement hors axes ( $\theta = \pm 30^\circ$ ) du composite qui entraîne une non linéarité importante en cisaillement causée par la rhéologie de la matrice (VE-VP) ainsi que son l'endommagement et les micro-fissurations dans les torons.

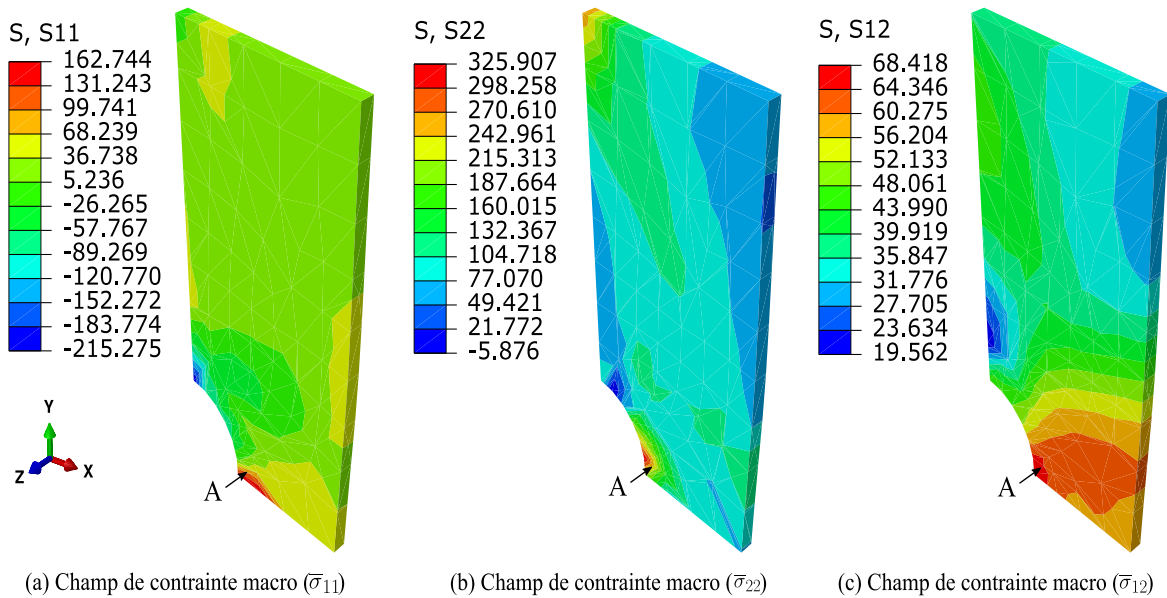


FIGURE 4.32 Distribution des champs de contraintes macroscopiques pour les composantes  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  et  $\bar{\sigma}_{12}$  dans la macro-structure pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$ , obtenue par la méthode EF<sup>2</sup>.

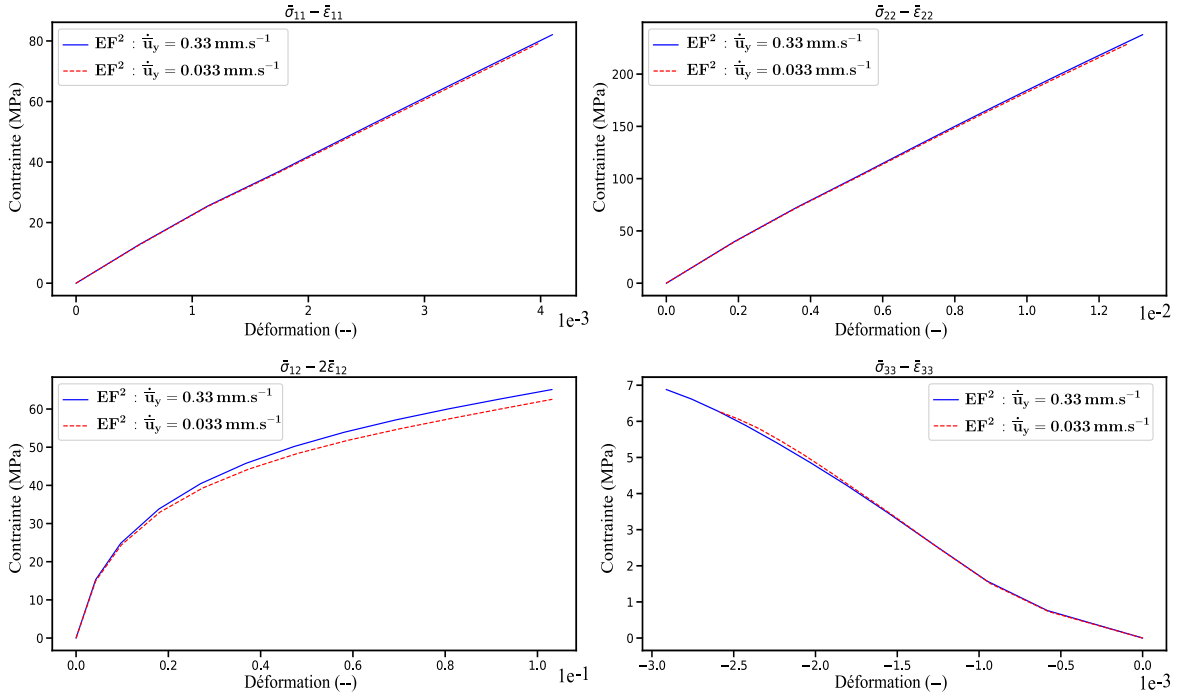


FIGURE 4.33 Réponses mécaniques macroscopiques du composite pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$  au point A de la structure (Figure 4.27) obtenues par EF<sup>2</sup> pour les composantes 11, 22, 33 et 12. Les deux vitesses de chargement sont  $0.33 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $0.033 \text{ mm.s}^{-1}$ .

### b) Champs microscopiques

Les Figures 4.34-a, 4.34-b, 4.34-c et 4.34-d représentent la distribution des champs de contrainte microscopique dans la matrice et dans les torons, respectivement. La microstructure subit à la fois une contrainte de traction importante dans le sens des torons trame et une compression dans le sens des torons chaîne (Figure 4.34-b). Elle subit également un cisaillement dans le plan 1-2 (Figure 4.34-d), où les contraintes locales dans les torons chaîne et trame sont inversées (i.e. si le toron trame subit une traction, le toron chaîne subit une compression et vice versa). Ceci entraîne une concentration des contraintes dans les zones de croisement des torons. Par conséquent, ce phénomène conduit à une croissance rapide des micro-fissures à la fois dans les torons de chaîne et trame et surtout dans les zones de croisement (Figure 4.35-f). Les valeurs élevées de la contrainte locale dans certaines zones de croisement entre les torons traduisent un artefact de calcul et sont dues également à la non prise en compte d'un critère d'arrêt en fonction de la contrainte ultime des torons.

D'autre part, les efforts sont transférés vers la matrice d'une manière progressive. Les contraintes locales se concentrent principalement dans les zones de croisement des torons (Figure 4.34-a). Dans ces zones, l'endommagement matriciel se développe

progressivement comme il est montré dans la Figure 4.35-e. Il faut noter que ces mécanismes d'endommagement et la réduction de la rigidité ont des influences importantes sur la réponse macroscopique du composite surtout en cisaillement 12. Ce dernier est clairement piloté par le comportement de la matrice.

La Figure 4.35 montre bien l'évolution spatio-temporelle progressive de l'endommagement matriciel qui se localise dans les zones de croisement des torons, ainsi que l'évolution de la densité des micro-fissures dans les torons. Cette dernière est développée progressivement dans les torons sens chaîne, sens trame et surtout entre les torons. En effet, lorsque la matrice s'endommage localement, une partie de la charge qu'elle soutient est progressivement transférée aux torons. Ce phénomène est dû aux interactions dans la microstructure qui est accompagné par une augmentation de la densité des micro-fissures intra-torons. Il est beaucoup plus important lorsque le composite est chargé dans le sens du cisaillement plan.

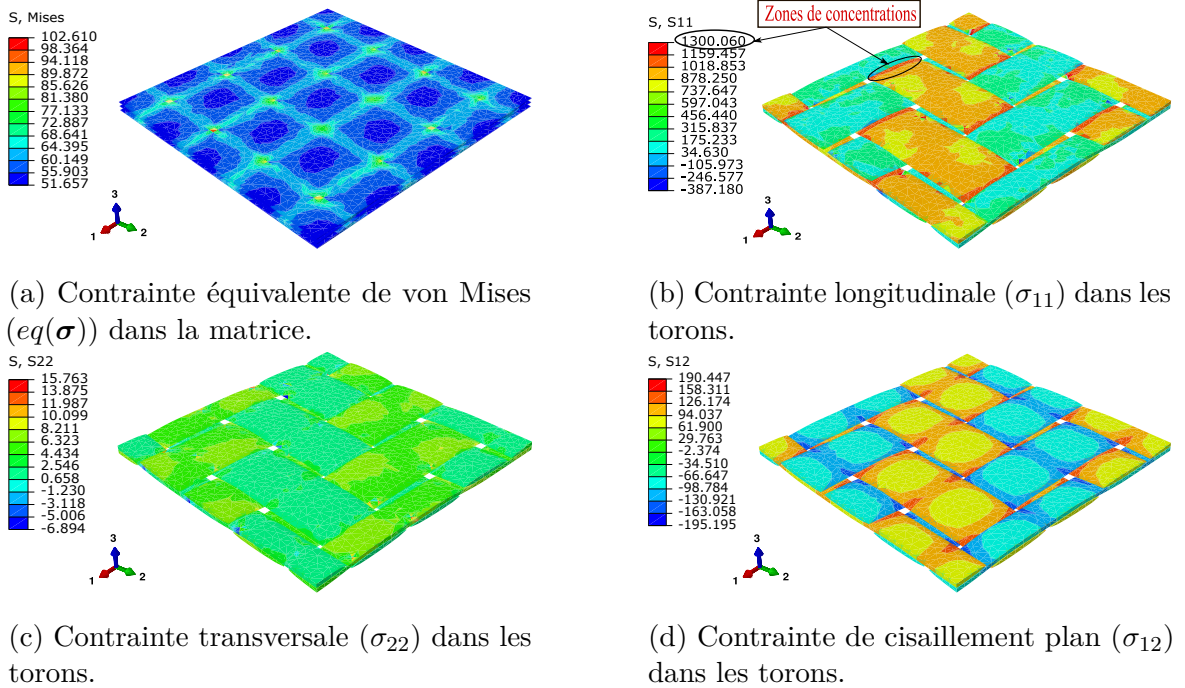
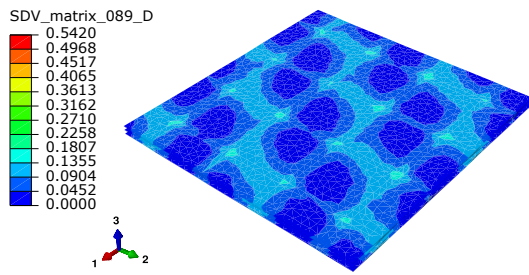
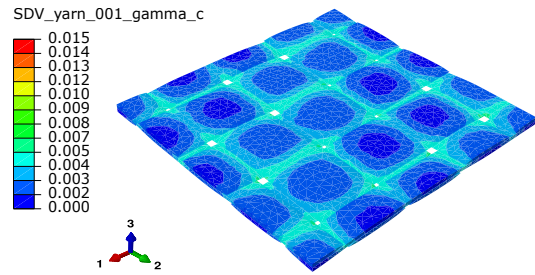


FIGURE 4.34 Champs locaux dans la microstructure observés au point A de la structure (Figure 4.27) à la fin de la simulation des essais de traction monotone pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$ , effectuée avec une vitesse de  $0.33 \text{ mm.s}^{-1}$ . Les contraintes locales dans les torons sont exprimées dans le repère local des torons.

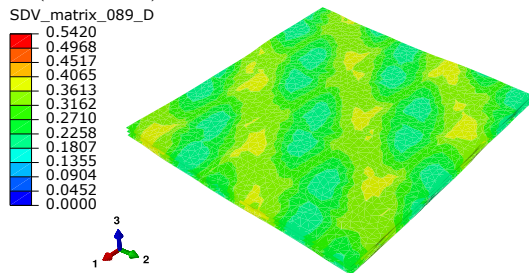




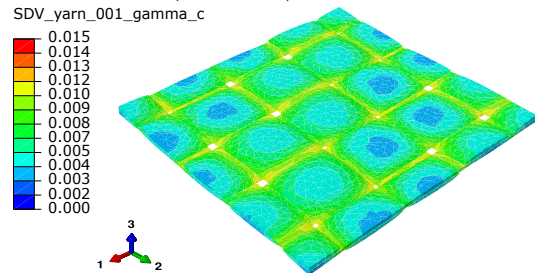
(a) Endommagement (D) dans la matrice à ( $t = 1.8 s$ ).



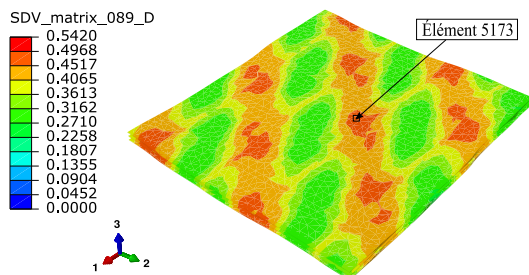
(b) Densité des micro-fissures ( $\gamma_c$ ) dans les torons à ( $t = 1.8 s$ ).



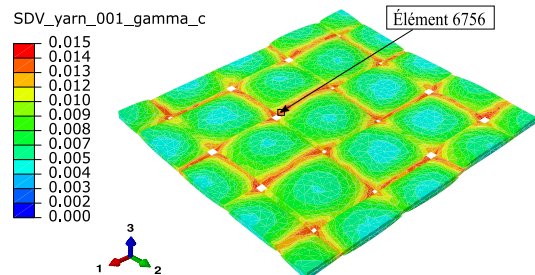
(c) Endommagement (D) dans la matrice à ( $t = 3.4 s$ ).



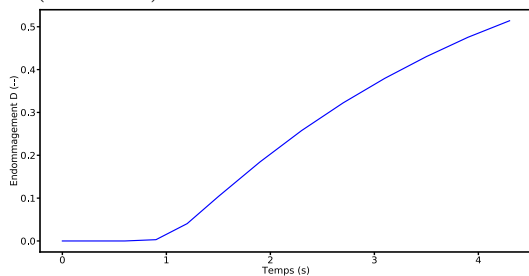
(d) Densité des micro-fissures ( $\gamma_c$ ) dans les torons à ( $t = 3.4 s$ ).



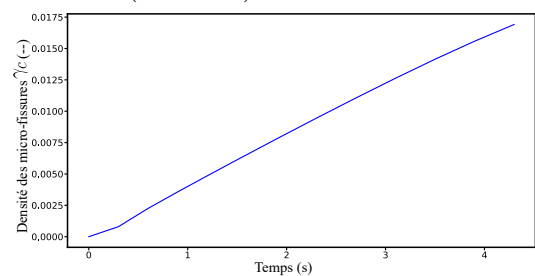
(e) Endommagement (D) dans la matrice à ( $t = 4.2 s$ ).



(f) Densité des micro-fissures ( $\gamma_c$ ) dans les torons à ( $t = 4.2 s$ ).



(g) Évolution de l'endommagement (D) dans la matrice pour l'élément 5173 de la Figure 4.35-e.



(h) Évolution de la densité des micro-fissures ( $\gamma_c$ ) dans les torons pour l'élément 6756 de la Figure 4.35-f.

FIGURE 4.35 Évolution de l'endommagement (D) dans la matrice ainsi que la densité des micro-fissures  $\gamma_c$  dans les torons pour les temps d'analyse  $t = 1.8 s$ ,  $t = 3.4 s$  et  $t = 4.2 s$  pour la configuration  $\theta = \pm 30^\circ$ .

## 4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, l'approche de modélisation multi-échelles développée dans le chapitre 3 a été validée à travers un calcul de structure en 3D sur un composite tissé (sergé 2-2) à matrice thermoplastique (PA66). Les résultats numériques obtenus par le calcul EF<sup>2</sup> sur une plaque trouée ont été comparés aux résultats expérimentaux pour trois configurations de séquences d'empilement ( $[0^0]$ ,  $[\pm 30^0]$  et  $[\pm 45^0]$ ). Des modèles constitutifs locaux pour la matrice et pour les torons (sous-section 4.2.2) fortement non linéaires ont été assemblés à l'aide de l'approche multi-échelles EF<sup>2</sup>. Ils ont permis de prédire le comportement macroscopique du composite étudié en tenant en compte des effets de la microstructure observés dans chaque constituant de la cellule unitaire.

La cellule unitaire à chaque point d'intégration macroscopique du composite étudié a été générée à l'aide des données microstructurales obtenues par microtomographie à rayons X. Les paramètres des deux modèles de comportement ont été identifiés dans les travaux de [148] à RH50% pour la matrice thermoplastique ainsi que pour les torons. Les performances et les capacités de l'approche proposée ont été mises en évidence à travers des comparaisons entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux obtenus pour trois configurations de stratification. Les résultats obtenus montrent le bon accord entre la simulation par EF<sup>2</sup> et les expériences démontrant ainsi la validité et les performances de la technique EF<sup>2</sup>. Les résultats ont montré également les capacités de l'approche à capter la réponse anisotrope du matériau composite induite par les effets de la microstructure, la dépendance au temps ainsi que la vitesse de déformation de la matrice thermoplastique.

Les prédictions numériques sont assez précises pour la configuration  $\theta = 0^0$ . Cependant, certains écarts entre les résultats numériques et expérimentaux ont été observés pour les configurations  $\theta = \pm 30^0$  et  $\theta = \pm 45^0$ . Cela est dû principalement à d'autres phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans les modèles constitutifs tels que i) la décohésion de l'interface torons/matrice intervenant lorsque le composite est chargé en cisaillement plan, ii) l'effet de vitesse qui intervient dans les torons (tel que la viscoélasticité), iii) les rotations des torons dans la microstructure.

Dans le chapitre qui suit, cette approche multi-échelles est adaptée au calcul des structures composites à comportement thermomécanique fortement couplé.



# Chapitre 5

## Modélisation multi-échelles thermomécanique fortement couplée des structures composites à base polymère

### 5.1 Introduction

Les composites à matrice thermoplastique tels que les polymères semi-cristallins sont bien connus pour leur dépendance à la vitesse de chargement due à une combinaison des propriétés à la fois solides et fluides. Certains se sont également sensibles aux conditions environnementales à savoir l'humidité relative et la température [9, 112, 100]. Pour modéliser ces matériaux, il est essentiel de prévoir leur réponse thermomécanique en tenant compte de la microstructure et des auto-échauffements résultant principalement de la dissipation mécanique et du couplage thermomécanique. Pour satisfaire à ces exigences élevées, des approches de modélisation et de simulation avancées sont nécessaires. Elles doivent être formulées dans le cadre rigoureux de la thermodynamique des processus irréversibles intégrant les interactions entre la température, la déformation, l'endommagement, etc.

Les matériaux composites sont fréquemment utilisés dans des régimes dissipatifs (tels que la plasticité, la viscoélasticité et/ou la viscoplasticité) couplés à des mécanismes d'endommagement [2, 19, 7]. De tels phénomènes sont accompagnés d'auto-échauffements importants au cours du chargement influençant sur les propriétés du matériau et donc sur la réponse structurale. Pour cela, le couplage thermomécanique est très important



à prendre en compte, en particulier dans le cas des composites à matrice polymère thermoplastique, où l'utilisation opérationnelle pour celle-ci se situe dans des plages de température au voisinage de la transition vitreuse. Les couplages thermomécaniques complets sont naturellement déduits lorsque les équations constitutives traduisant la réponse des matériaux sont dérivées d'un cadre thermodynamique cohérent [64–66].

L'objectif principal de ce chapitre est de mettre en place un cadre d'homogénéisation multi-échelles thermomécanique fortement couplé. Il sera dédié à la prédiction de comportement microscopique et macroscopique de structures composites dissipatives, non linéaires à microstructure périodique. Le cadre développé est basé sur le principe d'homogénéisation périodique, où des équations d'homogénéisation thermomécaniques couplées ainsi qu'un schéma de calcul par  $EF^2$  sont mis en place.

Considérant la réponse mécanique pure des composites, de nombreux modèles multi-échelles pour des matériaux non linéaires ont été proposés dans la littérature [173, 147, 180, 116, 188, 3, 2, 28, 11, 118, 83, 90, 26, 119, 32, 29]. Pour la modélisation des matériaux composites périodiques, la technique  $EF^2$  est une solution appropriée permettant de simuler la réponse macroscopique de la structure, avec la prise en compte de tous les mécanismes observés dans la microstructure hétérogène [56, 129, 11, 182]. Cependant, peu de travaux ont été proposés avec un couplage thermomécanique dans le cadre de la stratégie de calcul par  $EF^2$ . En effet, la plupart des travaux présentés dans la littérature concernant l'homogénéisation périodique se concentrent sur des problèmes purement mécaniques ou thermomécaniques non couplés.

En effet, l'approche d'homogénéisation multi-échelles dans un cadre de problèmes thermomécaniques couplés a été présentée dans un premier temps pour des travaux sur la thermoélasticité linéaire [60]. Par la suite, plusieurs auteurs ont développé d'autres approches pour des cas plus complexes [179, 143, 58, 161]. Par exemple, Özdemir et al [137] ont proposé un schéma multi-échelles thermomécanique découplé comme une extension de la solution  $EF^2$  thermique pure. Chatzigeorgiou et al [30] ont proposé un cadre d'homogénéisation couplé, particulièrement adapté aux composites dissipatifs non linéaires. Le cadre développé a été appliqué à l'étude de structures composites périodiques stratifiées à l'aide d'une solution semi-analytique présentée dans [32]. Des applications de calcul par  $EF^2$  dans le cas du couplage thermomécanique basé sur la théorie d'homogénéisation ont été présentées pour des alliages à mémoire de forme dans [164, 187] ainsi que pour des composites thermo-viscoplastiques en 2D dans [18] et également en 3D dans [181].

L'originalité du présent chapitre réside dans le développement d'un cadre d'homogénéisation thermomécanique fortement couplé via un schéma de calcul par  $EF^2$  pour des

structures composites 3D à l'aide du logiciel commercial Abaqus/Standard. L'approche proposée prédit la réponse thermomécanique non linéaire des structures composites pour tous types de lois de comportement inélastiques des différents constituants du composite. La stratégie développée, basée sur le concept de transition d'échelles, identifie le comportement macroscopique en tout point matériel de la structure composite. Pour cela, une cellule unitaire périodique y attachée et des lois d'équilibre microscopique sont résolues. La cellule unitaire contient les caractéristiques thermomécaniques et géométriques des différents constituants de la microstructure. L'analyse multi-échelles est introduite en utilisant un schéma de résolution implicite. Le schéma de "return mapping algorithm" est utilisé pour résoudre les équations de comportement locales [168, 31]. Des applications numériques illustratives qui prennent en compte des constituants en régime thermoélastique-viscoplastique ont été étudiées.

La constitution de ce chapitre est la suivante. La section 5.2 décrit la formulation théorique de l'approche d'homogénéisation prenant en compte les processus thermomécaniques fortement couplés, ainsi que la transition d'échelle entre les champs microscopique et macroscopique. Dans la section 5.3, l'implémentation numérique du processus itératif est détaillée pour un problème 3D général non linéaire, incluant le calcul de tous les opérateurs tangents thermomécaniques. La section présente brièvement la loi de comportement thermo-viscoplastique considérée pour la matrice. La section 5.4 présente l'algorithme de l'approche multi-échelles (EF<sup>2</sup>) du problème thermomécanique entièrement couplé. Les capacités de la stratégie de calcul sont démontrées par la simulation de la réponse thermomécanique d'une structure composite complexe 3D sous différents trajets de chargement thermomécanique dans la section 5.5. Les analyses numériques ont montré que cette approche est capable de restituer avec précision la réponse couplée des structures composites multi-échelles non linéaires dépendantes de la température ainsi que de la vitesse de chargement.

## 5.2 Cadre théorique et transition d'échelles d'un composite sous conditions thermomécaniques

L'homogénéisation des milieux périodiques, décrit un matériau composite comme étant un problème à deux échelles : i) l'échelle microscopique, qui définit la microstructure du matériau (fibres, particules, matrice, etc.) et ii) l'échelle macroscopique, qui définit la structure macroscopique du matériau. Au niveau macroscopique, le corps déformable occupe un volume  $\bar{V}$  délimité par la surface  $\partial\bar{V}$ , avec le vecteur normal sortant  $\bar{n}$ . Chaque point macroscopique est défini par un vecteur de position

$\bar{\mathbf{x}}$  dans  $\bar{V}$  connecté avec une cellule unitaire. Au niveau microscopique, le matériau est considéré comme hétérogène et la cellule unitaire contient toutes les informations des différents constituants et leur géométrie. La cellule unitaire périodique, occupe un volume  $V$  délimité par la surface  $\partial V$  avec le vecteur normal sortant  $\mathbf{n}$ . Chaque point microscopique est défini par un vecteur de position  $\mathbf{x}$  dans  $V$ . Les deux vecteurs de position  $\mathbf{x}$  et  $\bar{\mathbf{x}}$  sont reliés par la relation  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}/\epsilon$ , avec  $\epsilon$  la longueur caractéristique de la microstructure. Selon la théorie de l'homogénéisation périodique, la séparation du problème global en deux échelles fournit des résultats précis tant que la longueur caractéristique est proche de zéro. Autrement dit, le volume caractéristique de la cellule unitaire doit être beaucoup plus petit que le volume caractéristique de la structure ( $V \ll \bar{V}$ , Figure 5.1). D'un point de vue pratique, la différence minimale acceptable entre la taille de la cellule unitaire et la taille de la macro-structure (pour la validité de l'approche proposée) dépend de deux facteurs : (i) la variation des conditions aux limites liée à la longueur caractéristique du phénomène, et (ii) le contraste des propriétés matérielles des constituants du VER correspondant à la longueur caractéristique de la microstructure. Pour plus de détails, voir [14, 160, 6, 125].

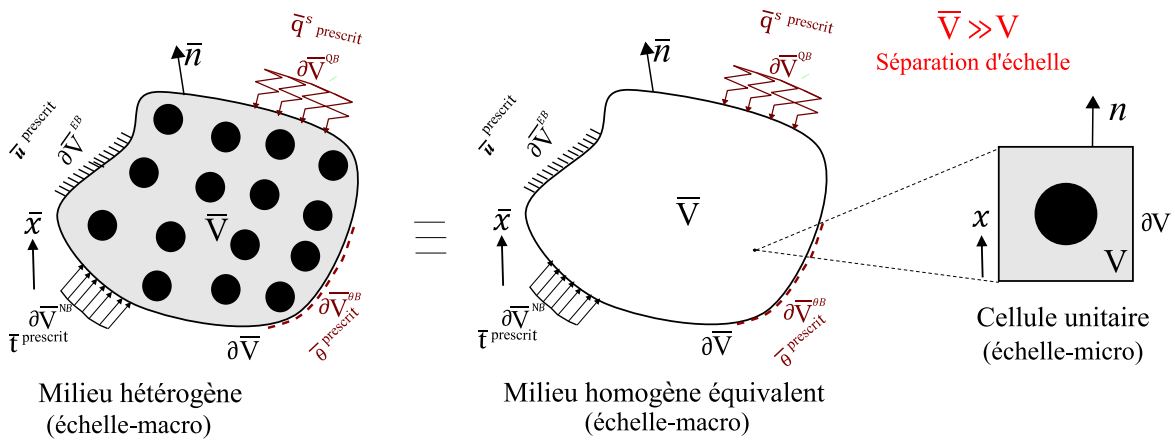


FIGURE 5.1 Représentation schématique du problème de séparation d'échelles.

La théorie de l'homogénéisation cherche à calculer la réponse globale à chaque point macroscopique  $\bar{\mathbf{x}}$ . Pour ce faire, les champs thermomécaniques macroscopiques sont calculés en utilisant les informations provenant de leurs champs microscopiques équivalents. Pour atteindre cet objectif, des règles de transition d'échelles appropriées entre les variables microscopiques et macroscopiques sont introduites. Selon le théorème de la moyenne, lorsqu'une contrainte, une déformation, un gradient de température ou un flux de chaleur uniforme sont appliqués aux limites de la cellule unitaire, les champs

microscopiques moyens correspondants (dans le volume de la cellule unitaire) sont égaux aux champs appliqués [31]. Ces champs moyens représentent respectivement la contrainte, la déformation, le gradient de température et le flux chaleur macroscopique [73].

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{x} dS, \quad (5.1)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS, \quad (5.2)$$

$$\overline{\nabla \theta} = \langle \nabla \theta \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \theta dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \theta \mathbf{n} dS, \quad (5.3)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{q} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{x} dS. \quad (5.4)$$

Dans les expressions ci-dessus  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  représentent les tenseurs de contrainte et de déformation microscopiques et macroscopiques, respectivement, tandis que  $\nabla \theta$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\overline{\nabla \theta}$  et  $\bar{\mathbf{q}}$  désignent le gradient de température et le flux de chaleur microscopiques et macroscopiques, respectivement. De plus,  $\mathbf{u}$  est le vecteur de déplacement microscopique. L'opérateur  $\langle \bullet \rangle$  correspond à la valeur moyenne d'un champ microscopique.

Le mouvement de tout point matériel macroscopique et microscopique  $\bar{M}(\bar{\mathbf{x}})$  et  $M(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ , respectivement, est régi par les équations macroscopiques et microscopiques présentées dans le Tableau 5.1. Dans ce tableau,  $\bar{\rho \mathbf{b}}$  et  $\bar{\rho R}$  représentent les forces de volume macroscopiques et le terme de source de chaleur, respectivement.  $\bar{\rho \mathbf{b}}$  et  $\bar{\rho R}$  n'ont pas d'équivalence microscopique, cela est une conséquence directe de l'hypothèse de séparation d'échelles (théorème de Hill) [173, 127].  $\eta$  et  $\bar{\eta} = \langle \eta \rangle$  désignent l'entropie spécifique microscopique et macroscopique, respectivement. Il est à noter que la température  $\bar{\theta}$  apparaît uniquement par sa valeur macroscopique. Autrement dit, la cellule unitaire correspondante à un point macroscopique est soumise à une température (macroscopique) uniforme  $\theta = \bar{\theta}$ . Cette condition dérive de la théorie d'homogénéisation par expansion asymptotique d'ordre zéro et de son application aux principes de la thermodynamique [30, 31]. Cependant, les gradients de température microscopique  $\nabla \theta$  est macroscopique  $\overline{\nabla \theta}$  sont distincts.

Les sous sections suivantes décrivent de manière plus précise le problème thermo-mécanique fortement couplé aux échelles macroscopique et microscopique.

TABLE 5.1 Transition d'échelles entre les champs macroscopique et microscopique [30]. Les scalaires  $e$  et  $\bar{e}$  désignent l'énergie interne microscopique et macroscopique respectivement.

Équations	Échelle-macro $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{V}$	Échelle-micro $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{V}, \forall \mathbf{x} \in V$
Terme d'énergie $r$	$\bar{r} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\bar{e}} = \langle r \rangle$	$r = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{e}$
Équilibre	$\overline{\text{div}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \bar{\rho}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$	$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$
Bilan énergétique	$\bar{r} - \overline{\text{div}}(\bar{\mathbf{q}}) + \bar{\rho}\bar{R} = 0$	$\text{div}(\mathbf{q}) = 0$
Déformations	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\text{grad}}_{sym}(\bar{\mathbf{u}})$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{grad}_{sym}(\mathbf{u})$
Lois constitutives	$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\theta})$	$\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$
Énergies de déformation	$\dot{\bar{W}}_\varepsilon = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	$\dot{W}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$
Inégalités d'entropie	$\bar{\theta}\dot{\eta} + \bar{r} - \frac{\bar{q}}{\bar{\theta}} \cdot \overline{\nabla}\bar{\theta} \geq 0$	$\bar{\theta}\dot{\eta} + r - \frac{q}{\bar{\theta}} \cdot \nabla\theta \geq 0$

### 5.2.1 Problème macroscopique

Le corps déformable  $\bar{V}$  présenté dans la Figure 5.1 est soumis à des conditions aux limites thermomécaniques sur sa surface  $\partial\bar{V}$ . Négligeant les effets d'inertie, la conservation de la quantité de mouvement linéaire et l'équation du bilan énergétique à l'échelle macroscopique sont écrites de la manière suivante :

$$\overline{\text{div}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \bar{\rho}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

$$\bar{r} - \overline{\text{div}}(\bar{\mathbf{q}}) + \bar{\rho}\bar{R} = 0. \quad (5.6)$$

De plus, les expressions de la déformation et du gradient de température macroscopique sont données par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\text{grad}}_{sym}(\bar{\mathbf{u}}) \quad \text{dans} \quad \bar{V}, \quad (5.7)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\theta} = \overline{\text{grad}}(\bar{\theta}) \quad \text{dans} \quad \bar{V}. \quad (5.8)$$

Les lois de conservation sont généralement accompagnées par des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou des conditions aux limites thermomécaniques mixtes. En règle générale, deux conditions aux limites mécanique et thermique distinctes peuvent être appliquées sur  $\overline{\partial V}$ . i) Un déplacement prescrit  $\overline{\mathbf{u}}^{prescrit}$  peut être appliqué sur la surface  $\overline{\partial V}^{EB}$  et une traction externe  $\overline{\mathbf{t}}$  peut être appliquée sur la surface  $\overline{\partial V}^{NB}$ . ii) Une température prescrite  $\overline{\theta}^{prescrit}$  peut être considérée sur la surface  $\overline{\partial V}^{\theta B}$  et un flux de chaleur externe  $\overline{\mathbf{q}}^s$  appliqué sur la surface  $\overline{\partial V}^{QB}$  (Figure 5.1),

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}^{prescrit} & \text{sur } \overline{\partial V}^{EB}, \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{t}} & \text{sur } \overline{\partial V}^{NB}, \\ \overline{\theta} = \overline{\theta}^{prescrit} & \text{sur } \overline{\partial V}^{\theta B}, \\ -\overline{\mathbf{q}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{q}}^s & \text{sur } \overline{\partial V}^{QB}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Les surfaces précédemment définies font partie de la surface limite globale  $\overline{\partial V}$ . Ces surfaces satisfaisant l'équation 5.10 pour les conditions aux limites mécaniques, ainsi que l'équation 5.11 pour les conditions aux limites thermiques :

$$\overline{\partial V}^{EB} \cup \overline{\partial V}^{NB} = \overline{\partial V}, \quad (5.10)$$

$$\overline{\partial V}^{\theta B} \cup \overline{\partial V}^{QB} = \overline{\partial V}. \quad (5.11)$$

Si la convection est prise en compte (conditions aux limites de type Robin), des conditions aux limites thermiques mixtes, de la forme :

$$\overline{\mathbf{q}}^c = h_c (\overline{\theta}_0 - \overline{\theta}), \quad (5.12)$$

peuvent être affectées à une partie de la surface limite de la structure. Ce terme exprime le flux de chaleur convectif (loi de Newton). Dans la dernière relation,  $\overline{\mathbf{q}}^c = \dot{\overline{Q}}\overline{A}$  représente le flux de chaleur prescrit,  $\dot{\overline{Q}}$  le transfert de chaleur par unité de temps et  $\overline{A}$  désigne la zone de transfert de chaleur de la surface.  $h_c$  est le coefficient de transfert de chaleur par convection entre un fluide et la surface où le fluide s'écoule. Par ailleurs,  $\overline{\theta}_0$  et  $\overline{\theta}$  sont les températures du fluide et de la surface solide, respectivement.

### 5.2.2 Problème microscopique

Comme mentionné précédemment, une cellule unitaire périodique est attribuée à chaque point matériel macroscopique. Cette cellule prend en considération toutes les

caractéristiques géométriques et matérielles de la microstructure. Comme il est défini par la théorie d'expansion asymptotique d'ordre zéro, au niveau de telles cellules unitaires, l'équation d'équilibre microscopique est résolue en considérant que la température est constante en chaque point de la cellule unitaire et égale à la température macroscopique. Le terme énergétique  $r$  et les modules tangents thermomécaniques sont également identifiés pour la même température macroscopique.

Considérant le problème thermique pur, le bilan énergétique microscopique est réduit à l'équation de conduction de la chaleur en régime permanent. Dans ce sens, les problèmes thermomécanique couplé et thermique pur peuvent être traités séparément [30]. Mathématiquement parlant, l'hypothèse sous-jacente à cette condition est que la température converge fortement vers une valeur spécifique (égale à la température macroscopique). Une valeur uniforme est donc imposée au niveau de la cellule unitaire correspondante à un point macroscopique. D'autre part, le gradient de température converge faiblement, ce qui implique que le gradient de température microscopique varie à l'intérieur de la cellule unitaire. Sa valeur moyenne peut donc être définie comme étant le gradient de température macroscopique au point macroscopique considéré [31]. L'exemple de l'annexe B présente les détails de ce calcul.

Pour assouplir ce découplage au niveau du problème microscopique, des théories d'homogénéisation d'ordre supérieur intégrant la variation de la température microscopique à l'intérieur de la cellule unitaire sont utilisées. Dans ce cas, on peut également prendre en compte les effets de taille. Bien que cette approche soit valide d'un point de vue mathématique (voir par exemple [46] pour les matériaux thermoélastiques), les implications thermodynamiques ne sont pas tout à fait claires. L'homogénéisation de second ordre dans les composites à réponse purement mécanique introduit des gradients de déformation macroscopiques entrant directement en jeu dans le comportement global [85]. Ce comportement est compatible avec des cadres thermodynamiques existants [59]. D'autre part, la théorie du second ordre pour les processus thermomécaniques couplés introduit une dépendance supplémentaire de la contrainte au gradient de température [46]. D'un point de vue physique, une telle relation est problématique car elle n'est pas valable pour les théories thermodynamiques existantes fondées sur les variables internes [36, 66].

Dans ce travail, la théorie d'homogénéisation d'ordre zéro, telle que décrite dans [30] est utilisée. L'hypothèse  $\theta = \bar{\theta}$  adoptée dans ce travail, prédit les déformations thermiques en parfait accord avec les techniques établies dans la communauté des méthodes micromécaniques (Entre autres, la formule de Levin est bien connue et largement utilisée pour le calcul du coefficient de dilatation thermique d'un composite).

Par ailleurs, d'autres études de l'homogénéisation périodique ont été réalisées dans le cas de la thermoélasticité [52, 178] et de la thermo-viscoélasticité [188].

Il est à noter que la relation de la température micro-macro proposée ici permet d'établir une représentation macroscopique du seconde principe de la thermodynamique, comme illustré dans [30]. Une relation micro-macro de la température plus étendue ne fournit pas une définition claire de l'entropie macroscopique ni de la représentation macroscopique de la dissipation due à la conduction thermique [164]. Il faut également noter que le cadre d'homogénéisation obtenu par la méthode d'expansion asymptotique d'ordre zéro ne prend pas en compte les effets de taille. Autrement dit, la taille du VER n'influe pas la réponse macroscopique. Des effets de taille peuvent apparaître soit en raison d'une microstructure n'étant pas suffisamment petite, soit en raison de phénomènes liés à l'instabilité, tels que la localisation de contrainte, le décollement des interphases, etc. Dans ces conditions, les effets de gradient de déformation peuvent être très importants et doivent être pris en compte dans les théories d'homogénéisation d'ordre supérieur.

#### **a) Problème microscopique thermomécanique couplé**

A chaque point macroscopique, la cellule unitaire correspondante sert à identifier les quantités microscopiques dont les valeurs moyennes fournissent les champs macroscopiques. Dans la partie mécanique du problème, la contrainte microscopique est évaluée à travers l'équation d'équilibre microscopique, dans laquelle la déformation et la température macroscopiques sont utilisées comme données d'entrée. Une fois le problème mécanique microscopique résolu, la contrainte macroscopique est évaluée en faisant la moyenne des contraintes microscopiques sur le volume de la cellule unitaire. Comme information supplémentaire, on obtient également le terme d'énergie macroscopique  $\bar{r}$ . Il correspond à la valeur moyenne de leurs équivalents microscopiques. Le terme énergétique  $r$  dépend exclusivement des variables liées à la contrainte, à la déformation et à la température absolue. Il peut donc être calculé une fois que l'équilibre microscopique est établi. Les informations sur les gradients de température microscopiques sont obtenues à partir du problème thermique pur microscopique et ne sont pas nécessaires à ce stade.

Le système d'équilibre microscopique est résolu à travers des conditions aux limites de déplacement périodiques (CLPs) sous une température macroscopique uniforme  $\bar{\theta}$ . La condition de périodicité implique que le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  de tout point matériel microscopique situé dans une position  $\mathbf{x}$  est décrit par une partie affine et une



fluctuation périodique  $\tilde{\mathbf{u}}$  :

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t). \quad (5.13)$$

La partie de fluctuation périodique  $\tilde{\mathbf{u}}$  prend les mêmes valeurs sur chaque paire de nœuds parallèles opposés de la cellule unitaire. La moyenne de la déformation produite par  $\tilde{\mathbf{u}}$  est nulle. En revanche, la moyenne de la déformation microscopique totale est égale à la déformation macroscopique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (5.14)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) dV = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (5.16)$$

De plus, le vecteur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est anti-périodique. Le système d'équilibre mécanique microscopique en absence de force de volume est donné par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})) = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \theta = \bar{\theta} & \forall \mathbf{x} \in V, \\ \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) & \forall \mathbf{x} \in \partial V. \end{cases} \quad (5.17)$$

Dans l'équation des conditions aux limites (5.17)<sub>4</sub>,  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_j$  sont les vecteurs de déplacement pour les positions  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$ , respectivement. Ils représentent une paire de points matériels parallèles opposés sur les limites de la cellule unitaire. La solution du système d'équations ci-dessus utilisant l'approche incrémentale est détaillée dans la section 5.3.

### **b) Problème thermique pur : calcul de la conductivité thermique macroscopique**

La théorie de l'homogénéisation d'ordre zéro réduit le bilan énergétique microscopique à l'équation de conduction de la chaleur en régime permanent :

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\theta}, \mathbf{x})) = 0, \quad \text{with } \mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \theta, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (5.18)$$

Généralement, le tenseur de conductivité thermique  $\boldsymbol{\kappa}$  est considéré constant et indépendant de la température dans les solides. Pour résoudre l'équation du bilan énergétique (5.18), des conditions aux limites périodiques en température sont prises en compte. L'hypothèse de périodicité implique que le champ de température  $\theta$  est égal à la somme d'une partie macroscopique  $\overline{\nabla\theta}$  et une fluctuation périodique  $\tilde{\theta}$  :

$$\theta(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \overline{\nabla\theta}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{x} + \tilde{\theta}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t). \quad (5.19)$$

La partie de fluctuation périodique prend la même valeur sur chaque point parallèle opposé sur les limites de la cellule unitaire. En appliquant l'opérateur gradient, l'équation (5.19) donne :

$$\nabla\theta = \overline{\nabla\theta} + \nabla\tilde{\theta}. \quad (5.20)$$

La moyenne de l'équation (5.20) donne l'équation (5.3). La périodicité de la température microscopique est accompagnée d'une contrainte supplémentaire qui implique l'anti-périodicité du vecteur de flux de chaleur  $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ .

Le bilan énergétique microscopique représenté par l'équation (5.18) est un problème linéaire qui peut être résolu une fois pour calculer le tenseur de conductivité thermique macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ . En effet, la substitution de l'équation (5.20) dans (5.18) donne :

$$\text{div} \left( \boldsymbol{\kappa} \cdot (\overline{\nabla\theta} + \nabla\tilde{\theta}) \right) = 0. \quad (5.21)$$

En supposant que le gradient de température macroscopique  $\overline{\nabla\theta}$  soit connu, la solution de l'équation homogène ci-dessus est écrite sous la forme suivante :

$$\tilde{\theta} = \boldsymbol{\psi}^\theta \cdot \overline{\nabla\theta}, \quad (5.22)$$

où  $\boldsymbol{\psi}^\theta$  est un vecteur périodique appelé le vecteur correcteur. La substitution de l'équation (5.22) dans (5.21) donne :

$$\overline{\nabla\theta} \text{div} \left( [\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa} \tilde{\cdot} \nabla\boldsymbol{\psi}^\theta]^T \right) = 0. \quad (5.23)$$

La dernière expression doit être satisfaite pour toute valeur arbitraire de la variable macroscopique  $\overline{\nabla\theta}$ . Cela implique que le vecteur correcteur doit satisfaire l'équation linéaire suivante :

$$\text{div} \left( [\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa} \tilde{\cdot} \nabla\boldsymbol{\psi}^\theta]^T \right) = 0. \quad (5.24)$$

À l'aide des équations (5.20) et (5.22), le flux de chaleur (5.18)<sub>2</sub> est écrit comme :

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A}^\kappa \cdot \overline{\nabla \theta}, \quad (5.25)$$

avec

$$\mathbf{A}^\kappa = \mathbf{I} + [\nabla \psi^\theta]^T. \quad (5.26)$$

En faisant la moyenne de l'équation 5.25 sur le volume de la cellule unitaire, et en supposant également que le flux de chaleur macroscopique est exprimé par une loi de comportement similaire à son équivalent microscopique,

$$\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \overline{\nabla \theta}, \quad (5.27)$$

donne le tenseur de conductivité thermique macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ ,

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \langle \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{A}^k \rangle. \quad (5.28)$$

Bien que le présent travail traite des composites à conductivité thermique constante au niveau des constituants de la microstructure, le cadre proposé permet d'adopter des conductivités thermiques à température variable. Dans ce cas, la condition  $\theta = \bar{\theta}$  de la théorie d'homogénéisation d'expansion asymptotique d'ordre zéro permet d'exprimer les conductivités thermiques microscopiques en fonction de la température macroscopique. Ainsi, le tenseur de conductivité thermique doit être calculé à chaque incrément de temps.

Puisque l'on considère que la conductivité thermique est constante et indépendante de la température, le problème thermique pur microscopique est linéaire et aucune procédure itérative n'est requise pour le résoudre. Le calcul numérique de la conductivité thermique macroscopique est présenté dans la section 5.4.

### 5.3 Implémentation numérique : processus itératif et opérateurs tangents

La résolution numérique du problème d'homogénéisation thermomécanique fortement couplé, pour des composites constitués des matériaux dissipatifs standards généralisés, nécessite des méthodes numériques très robustes. Avant de passer au schéma de résolution numérique, les définitions d'incrément et d'itérations suivantes sont introduites.

Dans les schémas incrémentaux pour les matériaux non linéaires, la variable de temps est discrétisée en plusieurs étapes. Généralement, la discrétisation temporelle suit une procédure numérique d'Euler. Au cours d'un pas de temps, un système d'équations non linéaires est résolu de manière itérative. Sur un pas de temps, des itérations sont généralement nécessaires pour trouver les valeurs correctes satisfaisant le système d'équations. Pour cela, deux notations doivent être définies :

- Le symbole  $\Delta$  avant une variable indique l'incrément du pas de temps de la variable entre deux pas de temps consécutifs. La valeur mise à jour de la variable  $\phi$  est exprimée à partir du pas de temps précédent  $n$  par la relation :

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta\phi.$$

- Le symbole  $\delta$  avant une variable indique l'incrément d'itération ( $k$ ) de la variable à un incrément du pas de temps ( $n$ ). Les valeurs actuelles de la variable  $\phi$  et son incrément du pas de temps  $\Delta\phi$  sont mis à jour de l'itération  $k$  à l'itération  $k + 1$  par :

$$\phi^{(n+1)(k+1)} = \phi^{(n+1)(k)} + \delta\phi,$$

$$\Delta\phi^{(n+1)(k+1)} = \Delta\phi^{(n+1)(k)} + \delta\phi.$$

Une complexité supplémentaire de la procédure d'homogénéisation par rapport aux matériaux homogènes standards réside dans le fait que la solution du problème de la cellule unitaire dépend fortement de la solution numérique de l'analyse macroscopique et inversement d'une manière fortement couplée. En d'autres termes, les problèmes aux deux échelles (macroscopique et microscopique) devraient être résolus simultanément, par le biais de schémas itératifs. En effet :

- Le problème de la cellule unitaire à chaque point d'intégration macroscopique est utilisé pour évaluer la contrainte macroscopique  $\bar{\sigma}$ , le terme énergétique macroscopique  $\bar{r}$  et les quatre opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques (définis plus tard dans cette section). Ces quantités sont calculées à l'aide des analyses d'EF en prenant compte des conditions de déplacement périodique dans la cellule unitaire.
- L'analyse macroscopique prend en considération les problèmes microscopiques avec les incréments de temps mis à jour de la déformation macroscopique  $\Delta\bar{\epsilon}$  et la température  $\Delta\bar{\theta}$ , ainsi que l'histoire de tous les champs microscopiques.

Les étapes de processus numérique et les procédures itératives sont décrites dans les sous-sections suivantes pour les deux échelles.

### 5.3.1 Problème macroscopique

À l'échelle macroscopique, les lois d'équilibre, la cinématique et les conditions aux limites exprimées par les équations (5.5)-(5.8), (5.9) et/ou (5.12), doivent être accompagnées par des lois constitutives macroscopiques pour que le système d'équation soit capable de trouver la solution. Dans le cas des matériaux non linéaires et en particulier pour les méthodes d'homogénéisation non linéaires, les expressions analytiques qui servent à obtenir la réponse macroscopique sont très peu utilisées en raison de leur complexité. Pour cela, les formalismes incrémentaux sont les plus adaptés pour ce type de problème. En général, pour un schéma incrémental itératif, à un incrément de temps spécifique, l'incrément de contrainte macroscopique ( $\bar{\sigma}$ ) et du terme énergétique macroscopique ( $\bar{r}$ ) pour une itération spécifique sont liés aux incréments de déformation macroscopique ( $\bar{\varepsilon}$ ) et de température ( $\bar{\theta}$ ) de la même itération à travers les relations suivantes :

$$\delta\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{D}}^\varepsilon : \delta\bar{\varepsilon} + \bar{\mathbf{D}}^\theta \delta\bar{\theta}, \quad \delta\bar{r} = \bar{\mathbf{R}}^\varepsilon : \delta\bar{\varepsilon} + \bar{R}^\theta \delta\bar{\theta}, \quad (5.29)$$

avec

$$\delta\bar{\varepsilon} = \overline{\mathbf{grad}}_{sym} \delta\bar{\mathbf{u}}. \quad (5.30)$$

Dans les expressions ci-dessus,  $\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon$ ,  $\bar{\mathbf{D}}^\theta$ ,  $\bar{\mathbf{R}}^\varepsilon$  et  $\bar{R}^\theta$  sont les quatre opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques. Ces opérateurs tangents sont calculés à chaque point d'intégration macroscopique et à chaque incrément d'itération macroscopique à partir d'une résolution du problème de la cellule unitaire. Ce problème sera expliqué en détail dans la sous-section suivante. La relation constitutive finale, reliant l'incrément du flux de chaleur macroscopique au gradient de température macroscopique pour une itération spécifique, est donnée par :

$$\delta\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \bar{\nabla} \delta\bar{\theta}, \quad \text{où} \quad \bar{\nabla} \delta\bar{\theta} = \overline{\mathbf{grad}} \delta\bar{\theta}. \quad (5.31)$$

Il faut rappeler que le tenseur de conductivité thermique macroscopique est considéré comme constant et est calculé une fois au début du processus à partir de l'équation (5.28). A l'aide de ces incréments, la contrainte, le terme d'énergie et le flux de chaleur sont mis à jour de manière itérative à travers les expressions linéarisées suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(n+1)(k+1)} &= \bar{\sigma}^{(n+1)(k)} + \delta\bar{\sigma}, \\ \bar{r}^{(n+1)(k+1)} &= \bar{r}^{(n+1)(k)} + \delta\bar{r}, \\ \bar{\mathbf{q}}^{(n+1)(k+1)} &= \bar{\mathbf{q}}^{(n+1)(k)} + \delta\bar{\mathbf{q}} = -\bar{\boldsymbol{\kappa}} \cdot (\bar{\nabla}\theta^{(n+1)(k)} + \bar{\nabla}\delta\bar{\theta}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les valeurs de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\bar{r}$  à chaque point d'intégration macroscopique pour un incrément d'itération sont calculées à partir de la solution du problème de la cellule unitaire microscopique, expliquée en détail dans la sous-section suivante.

A partir des valeurs mises à jour, l'équation d'équilibre (5.5) et le bilan énergétique (5.6) sont écrits comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{div}} \left( \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(n+1)(k+1)} \right) + \bar{\boldsymbol{\rho}} \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{0}, \\ \bar{r}^{(n+1)(k+1)} - \overline{\mathbf{div}} \left( \bar{\mathbf{q}}^{(n+1)(k+1)} \right) + \bar{\rho} \bar{R} &= 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Le système d'équations linéarisées ci-dessus n'accepte que les incréments d'itération de déplacement  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  et de température  $\delta \bar{\theta}$  comme inconnus. Sa résolution fournit éventuellement les incréments de temps des déformations macroscopiques  $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et de température  $\Delta \bar{\theta}$  à l'échelle de la macrostructure. Ces incréments de temps et l'état précédent de tous les champs macroscopiques constituent les données d'entrée de base du problème de la cellule unitaire attachée à chaque point d'intégrations macroscopique.

Les équations (5.33) sont résolues de manière itérative jusqu'à ce que  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  et  $\delta \bar{\theta}$  à chaque point macroscopique convergent avec une tolérance prédéfinie.

### 5.3.2 Problème de la cellule unitaire (problème microscopique)

Une fois que l'histoire des champs macroscopiques ainsi que l'incrément de temps de la déformation et de la température macroscopiques sont obtenus en un point d'intégration macroscopique, le problème de la cellule unitaire attachée à ce point est résolu séparément en deux étapes. La première étape est consacrée au calcul de la contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et du terme énergétique  $\bar{r}$ . La seconde étape est dédiée au calcul des opérateurs tangents macroscopiques.

#### a) Première étape du problème de la cellule unitaire : contrainte macroscopique

Dans la première étape, le système d'équations mécaniques microscopiques (5.17) est résolu pour le pas de temps  $t_{n+1}$  sous une température uniforme  $\bar{\theta}^{(n+1)} = \bar{\theta}^n + \Delta \bar{\theta}$ . La déformation macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^n + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , ainsi que toutes les valeurs des champs (macroscopiques et microscopiques) au pas de temps précédent  $t_n$  sont utilisées comme entrée supplémentaire du problème. Il est à noter que les exposants  $n+1$  et  $n$  désignent les quantités définies aux pas de temps  $t_{n+1}$  et  $t_n$ , respectivement. Dans un schéma itératif de "return mapping algorithm", la déformation et la température n'évoluent

pas avec les itérations. En effet, celles-ci sont fournies comme des entrées à partir du solveur EF. Ce dernier donne la solution des équations d'équilibres (ici, elles sont calculées à partir de l'analyse EF macroscopique). Dans ce sens,  $\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$  et  $\delta\bar{\theta} = 0$ .

Le tenseur de contrainte microscopique au pas de temps  $n + 1$  peut être exprimé sous une forme linéarisée par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)(k+1)} = \boldsymbol{\sigma} \left( \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\theta}^{n+1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)(k)} \right) + \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{grad}_{sym} \delta \boldsymbol{u}, \quad (5.34)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur de déformation microscopique calculé à l'étape précédente d'itération microscopique.  $\mathbb{D}^\varepsilon$  désigne l'opérateur tangent mécanique microscopique (tenseur d'ordre quatre). La contrainte microscopique  $\boldsymbol{\sigma}$  et les modules tangents thermomécaniques microscopiques sont obtenus à partir de la loi de comportement du matériau considéré. Dans les logiciel EF tels que Abaqus, les lois de comportement des constituants sont définies numériquement à l'aide d'un sous-programme utilisateur "UMAT" ("User Material"). Les structures algorithmiques de tels sous-programmes pour différents types de lois de comportement sont présentées dans [31].

En combinant toutes les expressions ci-dessus, le système mécanique (5.17) est écrit sous la forme linéarisée suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \left( \boldsymbol{\sigma}^{(n+1)(k+1)} \right) = \mathbf{0} & \forall \boldsymbol{x} \in V, \\ \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) & \forall \boldsymbol{x} \in \partial V. \end{cases} \quad (5.35)$$

Le dernier système, est un système linéarisé avec incrément de déplacement  $\delta \boldsymbol{u}$  inconnu. Ce système a une solution unique tant que  $\mathbb{D}^\varepsilon$  est défini positif. L'équation (5.35) est résolue de manière itérative jusqu'à ce que  $\delta \boldsymbol{u}$  converge vers une tolérance prédéfinie à chaque point microscopique. Une fois que la convergence est atteinte, le calcul des déplacements  $\boldsymbol{u}$ , des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  microscopiques se poursuit. De plus, il est également possible de calculer le terme d'énergie microscopique  $r$  à chaque point de la cellule unitaire sans passer par la résolution de l'équation du bilan énergétique. Par conséquent, la contrainte macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et le terme d'énergie macroscopique  $\bar{r}$  sont calculés en faisant la moyenne de leurs équivalents microscopiques.

Il est à noter que le calcul du flux de chaleur microscopique  $\boldsymbol{q}$  n'est pas requis pour l'analyse EF macroscopique car la conductivité thermique macroscopique  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$  est constante pour des caractéristiques géométriques et matérielles spécifiques d'une cellule unitaire.

**b) Deuxième étape du problème de la cellule unitaire : opérateurs tangents**

La deuxième étape est dédiée au calcul des opérateurs tangents macroscopiques. Pour cette partie d'analyse, les incréments d'itération macroscopiques de contrainte et de température sont supposés non nuls. Dans ce cas, les incréments d'itération microscopique de contrainte et de terme d'énergie  $r$  sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{D}^\varepsilon : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}^\theta \delta\bar{\theta}, \\ \delta r &= \mathbf{R}^\varepsilon : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + R^\theta \delta\bar{\theta},\end{aligned}\quad (5.36)$$

avec

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{grad}_{sym} \delta\tilde{\mathbf{u}}. \quad (5.37)$$

Les opérateurs tangents thermomécaniques microscopiques  $\mathbb{D}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{D}^\theta$ ,  $\mathbf{R}^\varepsilon$  et  $R^\theta$  sont des tenseurs tangents instantanés calculés à la fin de la procédure itérative de la première partie du problème de la cellule unitaire. Dans cette deuxième partie, ces opérateurs tangents sont considérés comme constants. L'équilibre microscopique est donné par l'équation 5.38 :

$$\mathbf{div}(\delta\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad (5.38)$$

ou (après combinaison des équations (5.38) et (5.36))

$$\mathbf{div}(\mathbb{D}^\varepsilon : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}^\theta \delta\bar{\theta} + \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{grad}_{sym} \delta\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}. \quad (5.39)$$

Il s'agit d'un problème linéaire avec des conditions aux limites périodiques en terme de déplacement  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ . Sa solution peut être écrite sous la forme suivante [52] :

$$\delta\tilde{\mathbf{u}} = \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\chi}^\varepsilon + \delta\bar{\theta} \boldsymbol{\chi}^\theta, \quad (5.40)$$

où le tenseur de troisième ordre  $\boldsymbol{\chi}^\varepsilon$  et le vecteur  $\boldsymbol{\chi}^\theta$  sont périodiques et sont appelés les termes correcteurs. La substitution de l'équation (5.40) dans (5.39) donne :

$$\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{div}([\mathbb{D}^\varepsilon + \mathbb{D}^\varepsilon \tilde{\cdot} \mathbf{grad}\boldsymbol{\chi}^\varepsilon]^T) + \delta\bar{\theta} \mathbf{div}(\mathbf{D}^\theta + \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{grad}\boldsymbol{\chi}^\theta) = \mathbf{0}. \quad (5.41)$$

L'équation homogène ci-dessus a une solution pour des valeurs arbitraires des variables macroscopiques  $\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\delta\bar{\theta}$  seulement si les termes correcteurs satisfont les équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{div}([\mathbb{D}^\varepsilon + \mathbb{D}^\varepsilon \tilde{\cdot} \mathbf{grad}\boldsymbol{\chi}^\varepsilon]^T) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{div}(\mathbf{D}^\theta + \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{grad}\boldsymbol{\chi}^\theta) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (5.42)$$



À partir de ce système linéaire découplé on obtient les deux quantités  $\mathbf{grad}_{sym}\boldsymbol{\chi}^\varepsilon$  et  $\mathbf{grad}_{sym}\boldsymbol{\chi}^\theta$ . En utilisant l'équation (5.40), les incréments des champs microscopiques sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbb{A}^\varepsilon : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{A}^\theta \delta\bar{\theta}, \\ \delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbb{A}^\varepsilon : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + [\mathbf{D}^\theta + \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{A}^\theta] \delta\bar{\theta}, \\ \delta r &= \mathbf{R}^\varepsilon : \mathbb{A}^\varepsilon : \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + [R^\theta + \mathbf{R}^\varepsilon : \mathbf{A}^\theta] \delta\bar{\theta},\end{aligned}\tag{5.43}$$

avec

$$\mathbb{A}^\varepsilon = \mathbb{I} + \mathbb{I} \tilde{\cdot} \mathbf{grad}_{sym}\boldsymbol{\chi}^\varepsilon, \quad \mathbf{A}^\theta = \mathbf{grad}_{sym}\boldsymbol{\chi}^\theta.\tag{5.44}$$

En faisant la moyenne des équations (5.43)<sub>2,3</sub> sur le volume de la cellule permet d'obtenir les opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques qui sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{D}}^\varepsilon &= \langle \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbb{A}^\varepsilon \rangle, \quad \bar{\mathbf{D}}^\theta = \langle \mathbf{D}^\theta + \mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{A}^\theta \rangle, \\ \bar{\mathbf{R}}^\varepsilon &= \langle \mathbf{R}^\varepsilon : \mathbb{A}^\varepsilon \rangle, \quad \bar{R}^\theta = \langle R^\theta + \mathbf{R}^\varepsilon : \mathbf{A}^\theta \rangle.\end{aligned}\tag{5.45}$$

La procédure itérative incrémentale décrite ci-dessus pour les deux parties du problème de la cellule unitaire, nécessite des lois constitutives qui représentent bien le comportement de chaque constituant de la microstructure.

Ces lois de comportement sont mises en œuvre sous forme d'un schéma basé sur "return mapping algorithm" et devraient fournir i) les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et les variables d'état internes  $\mathbf{V}_k$  pour une déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et une température  $\theta = \bar{\theta}$  donnée aussi que ii) les opérateurs tangents thermomécaniques  $\mathbb{D}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{D}^\theta$ ,  $\mathbf{R}^\varepsilon$  et  $R^\theta$ .

Dans ce chapitre, les exemples étudiés considèrent deux types de lois de comportements pour les différentes phases : une loi thermoélastique pour les fibres et une loi thermoélastique-viscoplastique avec écrouissage isotrope pour la matrice. Il est à noter que les détails concernant la mise en œuvre numérique de ces lois ne sont pas présentés en détail dans ce manuscrit. Cependant, les points essentiels du comportement de la matrice sont brièvement décrits dans la sous-section suivante.

### 5.3.3 Comportement thermoélastique-viscoplastique avec écrouissage isotrope de la matrice

La loi de comportement thermoélastique-viscoplastique choisie pour la matrice des exemples étudiés est formulée dans le contexte des petites déformations et des petites

rotations. La déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est aussi décomposée en une partie élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , une partie viscoplastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  et une partie thermique  $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_{th}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{th} = \boldsymbol{\alpha} (\theta - \theta^i), \quad (5.46)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  est le tenseur de dilatation thermique du deuxième ordre et  $\theta^i$  est la température initiale. D'un point de vue thermodynamique, les lois d'état pour un matériau standard généralisé sont obtenues par différentiation du potentiel d'énergie libre de Helmholtz par rapport aux variables d'état. Les variables d'état choisies pour cette loi de comportement sont la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , la température  $\theta$  et les variables internes  $\mathbf{V}_k$  représentées par la déformation viscoplastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  et la variable d'état associée à l'écouissage isotrope  $p$ . Le potentiel d'énergie libre de Helmholtz pour un matériau thermoélastique-viscoplastique à écouissage isotrope est choisi sous la forme suivante [103, 149, 31] :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \mathbf{V}_k) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}_p, p) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\alpha}(\theta - \theta^i)] : \mathbb{C}_e : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\alpha}(\theta - \theta^i)]}_{\psi^e} \\ &\quad + c_0 \underbrace{\left[ (\theta - \theta^i) - \theta \ln \left( \frac{\theta}{\theta^i} \right) \right] - \eta_0 \theta + e_0}_{\psi^{th}} + \underbrace{\int_0^p R(p') dp'}_{\psi^{vp}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Dans le potentiel ci-dessus,  $\mathbb{C}_e$  désigne le tenseur élastique du quatrième ordre,  $c_0$  représente la capacité thermique spécifique par unité de volume à pression constante. De plus,  $\eta_0$  et  $e_0$  sont l'entropie initiale et l'énergie interne, respectivement. Enfin,  $R(p)$  est la fonction d'écouissage liée à la viscoplasticité, choisie ici sous la forme d'une loi de puissance :

$$R(p) = K p^n, \quad (5.48)$$

où  $K$  et  $n$  sont les paramètres du matériau liés à l'écouissage isotrope. Suivant la procédure classique, les dérivées du potentiel d'énergie libre d'Helmholtz sont utilisées pour identifier les variables conjuguées des variables d'état. Le Tableau 5.2 résume les différentes variables impliquées dans la description thermodynamique de la loi de comportement.

TABLE 5.2 Lois d'état et lois d'évolution

Variables d'état observables	Variables conjuguées	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\alpha}(\theta - \theta^i))$	
$\theta$	$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} + c_0 \ln\left(\frac{\theta}{\theta^i}\right) + \eta_0$	
Variables d'état internes	Variables conjuguées	Variables flux
$p$	$R = \frac{\partial \psi}{\partial p} = R(p)$	$\dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	$-\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \frac{3 \text{Dev}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \text{eq}(\boldsymbol{\sigma})} \dot{p}$

Selon le second principe de la thermodynamique, la dissipation est toujours positive ou nulle. Pour ce matériau, les dissipations mécaniques et thermiques sont supposées découplées et la viscoplasticité est le seul mécanisme qui stocke de l'énergie de manière permanente. D'après les principes de la thermodynamique, la dissipation mécanique intrinsèque (locale) est finalement exprimée comme :

$$\dot{\Phi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - R\dot{p} \geq 0. \quad (5.49)$$

De plus, les lois d'évolution pour  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  et  $p$  sont obtenues à partir de la fonction critère  $f(\boldsymbol{\sigma}, R)$  à travers la règle de normalité classique [31] :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = \text{eq}(\boldsymbol{\sigma}) - R - R_0. \quad (5.50)$$

Dans l'équation 5.50,  $\text{eq}(\boldsymbol{\sigma})$  représente la contrainte équivalente au sens de von Mises et  $R_0$  le seuil d'élasticité. Les équations d'évolution des variables d'états internes sont résumées dans le Tableau 5.2. En raison de la nature viscoplastique du matériau, le critère  $f$  n'est pas similaire à celui utilisé en plasticité, c'est-à-dire toujours négatif ou nul. Celui-ci, il satisfait la relation suivante :

$$\langle f \rangle_+ = Q(\dot{p}), \quad \text{avec} \quad Q(\dot{p}) = H\dot{p}^m, \quad (5.51)$$

C'est-à-dire que l'effet de la viscosité est introduit à travers une relation entre la partie positive de  $f$  et  $\dot{p}$  via une fonction  $Q$ . La déformation viscoplastique équivalente effective désignée par la variable  $p$  ne peut qu'augmenter ( $p > 0$  si  $f \geq 0$ ) ou rester constant ( $p = 0$  si  $f < 0$ ). Dans l'équation 5.51,  $H$  et  $m$  sont des paramètres du matériau lié à la viscosité.

La loi de comportement ci-dessus pour les matériaux thermoélastique-viscoplastique est bien établie dans la littérature [103]. Son implémentation numérique via un schéma de "return mapping algorithm" ainsi que l'identification de ses opérateurs tangents thermomécaniques  $\mathbb{D}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{D}^\theta$ ,  $\mathbf{R}^\varepsilon$  et  $R^\theta$  sont discutées en détail dans [30, 31].

## 5.4 Calcul multi-échelles par EF<sup>2</sup> d'un problème thermomécanique fortement couplé

Pour prédire le comportement macroscopique d'une structure composite tout en tenant compte des effets de la microstructure et des couplages thermomécaniques forts, un schéma d'homogénéisation dans le cadre de la technique EF<sup>2</sup> a été mis en place. Le cadre proposé ici, est l'extension de l'approche développée dans [182] avec la prise en considération de la partie thermique du problème d'homogénéisation, comme il est indiqué dans les sections précédentes.

Pour résoudre ce type de problème fortement couplé, on considère le matériau au niveau de la macro-structure comme étant un milieu homogénéisé soumis à des conditions aux limites thermomécaniques appropriées. Par conséquent, la réponse de tout point macroscopique est obtenue à partir de la solution d'un problème microscopique thermomécanique couplé au niveau de la cellule unitaire en utilisant des conditions aux limites périodiques.

L'organigramme de l'algorithme de stratégie de calcul par EF<sup>2</sup> est présenté dans la Figure 5.2. L'approche est totalement intégrée dans le logiciel d'EF Abaqus/Standard et permet de calculer la réponse macroscopique thermomécanique couplée, fortement non linéaire des composites.

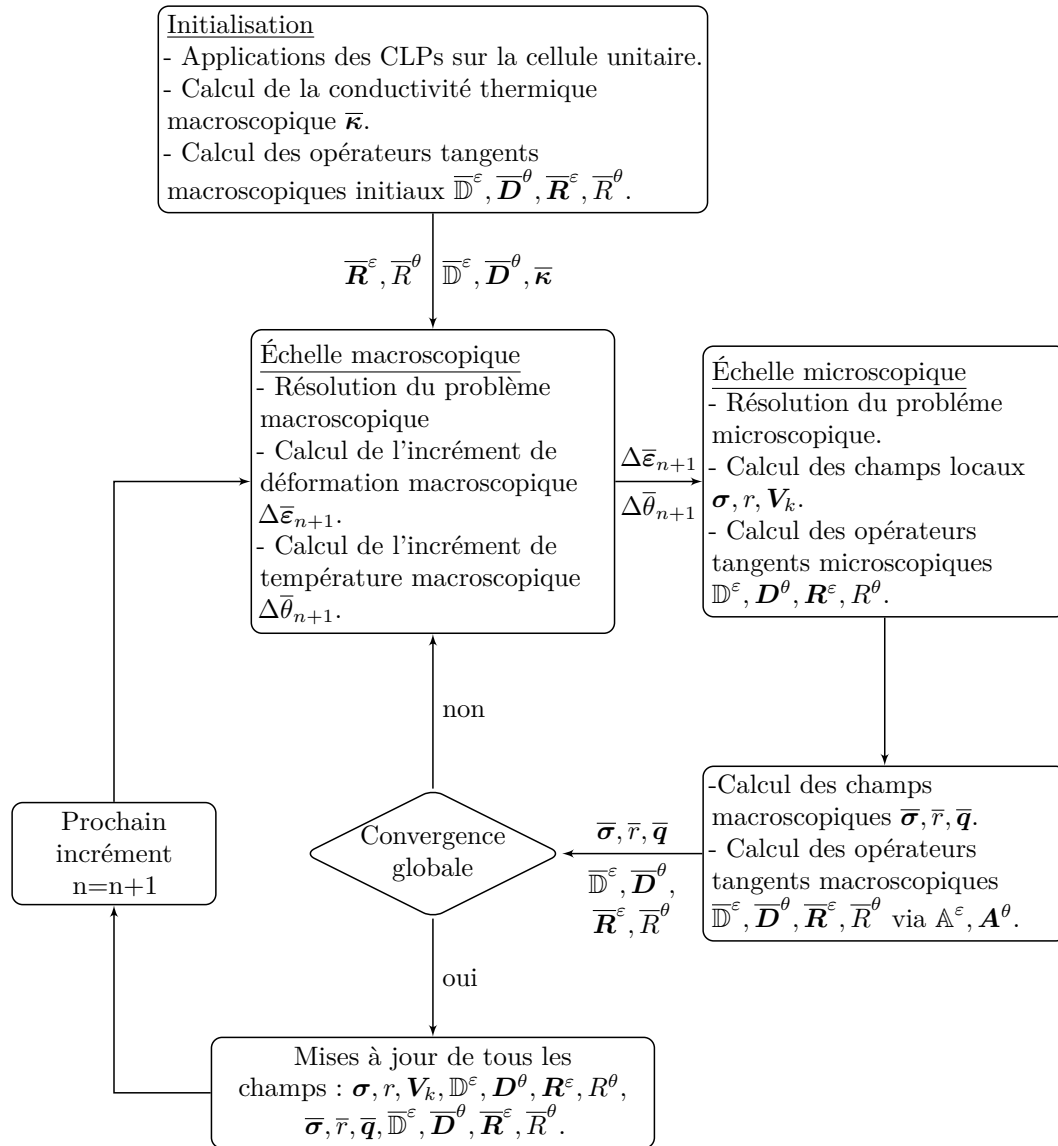


FIGURE 5.2 L'organigramme de l'algorithme de calcul par EF à deux échelle (EF<sup>2</sup>) pour une réponse thermomécanique non linéaire fortement couplée d'un composite dans Abaqus/Standard.

Le calcul des opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques ainsi que le tenseur de la conductivité thermique macroscopique est décrit ci-dessous :

### a) Calcul des opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques en chaque point de Gauss

Afin d'accélérer la convergence globale, il faut introduire les opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques dans le processus de convergence du calcul EF.

Ces opérateurs tangents sont calculés en faisant le mappage des opérateurs tangents thermomécaniques microscopiques sur la cellule unitaire par l'intermédiaire des conditions aux limites périodiques. Les conditions aux limites périodiques dans la cellule unitaire peuvent être appliquées numériquement en utilisant le concept des nœuds de pilotage ("constraint drivers", section 3.2.1). Cette technique introduit six nœuds fictifs permettant d'appliquer un état de déformation, de contrainte ou même mixte contrainte-déformation macroscopique sur une cellule unitaire périodique ([105, 167]). Ces nœuds de pilotage sont liés à la cellule unitaire par l'équation cinématique (5.17)<sub>4</sub>. Le déplacement attribué à ces nœuds de pilotage représente les déformations macroscopiques. Le lecteur pourra se référer à [148, 182, 181] pour plus de détails.

Pour obtenir les opérateurs tangents thermomécaniques, sept cas de chargement élémentaires sont considérés au niveau microscopique (Figure 5.3). Les opérateurs tangents microscopiques en chaque point d'intégration de la cellule unitaire sont obtenus à la fin de la première partie du problème de la cellule unitaire. Ces opérateurs tangents sont utilisés comme des entrées dans les sept analyses et sont considérés comme constants.

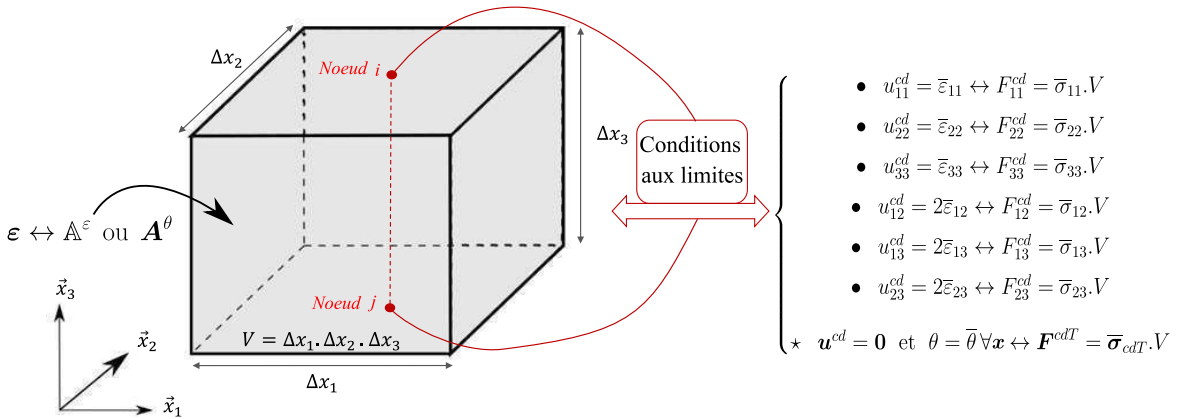


FIGURE 5.3 Connexion des nœuds de pilotage avec la cellule unitaire pour le calcul des composantes des opérateurs tangents thermomécaniques macroscopiques.

Dans un premier temps, les six cas de chargement élémentaires de type mécanique sont réalisés, dans lesquels des états de déformation élémentaires (une composante égale à 1 et le reste égale à zéro) sont affectés aux nœuds de pilotage (voir section 3.2.1). Dans chaque cas de chargement élémentaire, les forces générées sur les nœuds fictifs divisées par le volume de la cellule unitaire représentent une colonne de l'opérateur tangent mécanique macroscopique  $\mathbb{D}^\varepsilon$  [182], tandis que les déformations générées à chaque point microscopique représentent une colonne du tenseur de concentration mécanique  $\mathbb{A}^\varepsilon$ . En assemblant les résultats des six cas de chargements mécaniques et en utilisant l'équation

(5.45<sub>3</sub>), les opérateurs tangents macroscopiques  $\overline{\mathbb{D}}^\varepsilon$  et  $\overline{\mathbf{R}}^\varepsilon$  sont obtenus. Dans le septième cas de chargement élémentaire de type thermique, le déplacement nul est considéré pour tous les nœuds de pilotage, tandis qu'une température macroscopique unitaire ( $\overline{\theta} = 1$ ) est attribuée à chaque point de la cellule unitaire. Les forces générées aux nœuds de pilotage divisée par le volume de la cellule unitaire représentent directement l'opérateur tangent macroscopique thermique  $\overline{\mathbf{D}}^\theta$ , tandis que les déformations générées à chaque point microscopique représentent le tenseur de concentration thermique  $\mathbf{A}^\theta$ . Le dernier opérateur tangent thermomécanique  $\overline{\mathbf{R}}^\theta$  est obtenu en moyennant l'équation (5.45)<sub>4</sub> sur le volume de la cellule unitaire.

### b) Calcul du tenseur de la conductivité thermique macroscopique

Comme il est déjà mentionné dans la section précédente, la conductivité thermique macroscopique  $\overline{\kappa}$  est calculée une fois au début de la procédure d'homogénéisation périodique séparément de l'équilibre microscopique. Cela peut être considéré comme un calcul séparé de la procédure itérative EF<sup>2</sup>. En général dans les analyses par EF pour les milieux périodiques, la cellule unitaire est associée à un maillage périodique. Cela signifie que pour chaque nœud situé sur une limite de la cellule unitaire, il y a toujours un autre nœud à la même position relative du côté parallèle opposé. Pour appliquer un gradient de température macroscopique  $\overline{\nabla\theta}$  sur la cellule unitaire en tenant compte des conditions aux limites périodiques en température, un champ de température est appliqué entre chaque paire de nœuds parallèles opposés. Ces derniers sont désignés ici par les indices  $i$  et  $j$ . Le champ de température est lié au gradient de température macroscopique par la relation générale suivante [171] :

$$\theta^i - \theta^j = \overline{\nabla\theta} \cdot (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j). \quad (5.52)$$

D'un point de vue technique, à l'aide du concept des nœuds de pilotage, on peut appliquer numériquement les trois composantes du vecteur de gradient de température macroscopique  $\overline{\nabla\theta}$  sur la cellule unitaire, tout en tenant en compte les conditions aux limites périodiques en température (Figure 5.4). Plus de détails sur ce concept sont présentés dans l'Annexe C et les références [105, 106, 167]. Ces nœuds de pilotage (trois "constraint drivers") sont liés au maillage de la cellule unitaire par l'équation 5.52. Leurs températures notés ici par  $\theta_i^{cd}$ , prennent exactement les valeurs du vecteur gradient de température macroscopique.

Lors des calculs par EF dans Abaqus/Standard, l'analyse de transfert de chaleur permet de calculer un vecteur de flux de chaleur sur ces nœuds fictifs. Ce flux de

chaleur correspond directement au flux de chaleur macroscopique  $\bar{\mathbf{q}}$  multiplié par le volume de la cellule unitaire  $V$ .

Pour obtenir le tenseur de conductivité thermique macroscopique, on applique sur la cellule unitaire les trois cas de chargement élémentaires thermiques qui correspondent au gradient de température macroscopique unitaire :

$$\nabla\theta^1 = (1 \ 0 \ 0)^T, \quad \nabla\theta^2 = (0 \ 1 \ 0)^T, \quad \nabla\theta^3 = (0 \ 0 \ 1)^T. \quad (5.53)$$

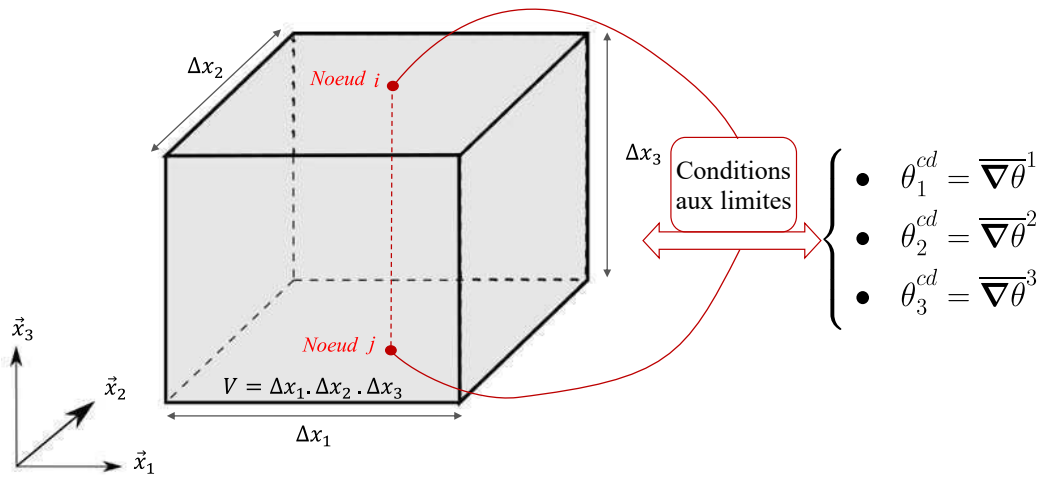


FIGURE 5.4 Connexion de la cellule unitaire avec les nœuds de pilotage thermiques.

Les flux de chaleur macroscopiques  $\bar{\mathbf{q}}^1$ ,  $\bar{\mathbf{q}}^2$  et  $\bar{\mathbf{q}}^3$  générés sur les nœuds de pilotage fictifs, correspondent directement aux trois colonnes du tenseur (d'ordre 2) de la conductivité thermique macroscopique :

$$(\bar{\boldsymbol{\kappa}})_{ij} = -(\bar{\mathbf{q}}^i)_j. \quad (5.54)$$

## 5.5 Applications numériques et capacités de la stratégie de calcul EF<sup>2</sup>

L'approche EF à deux échelles proposée ici, est appliquée sur des structures composites complexes en 3D. Ces structures sont constituées d'une matrice polymère thermoélastique-viscoplastique dont la loi de comportement est présentée dans la sous-section 5.3.3, renforcée par des fibres de verre courtes ayant un comportement thermoélastique.



L'objectif principal de cette section est de démontrer les performances et les capacités de la technique d'EF à deux échelles, thermomécanique fortement couplée, pour prédire la réponse globale des structures composites 3D soumises à des cas de chargement thermomécaniques complexes.

La section est divisée en trois parties pour mettre en évidence les différents aspects de la technique proposée. La première partie 5.5.1 démontre la validation de l'approche multi-échelles à travers une comparaison des résultats numériques de la technique développée avec ceux du modèle EF entièrement maillé sous des conditions adiabatiques. Pour cette raison, une microstructure avec une inclusion sphérique est considérée sous un chargement macroscopique donné. Dans la deuxième partie 5.5.2, un essai de traction sur une structure 3D non symétrique de type Meuwissen a été étudié, en pilotage par déplacement à trois vitesses différentes, avec des conditions aux limites thermiques (mixtes) de type Robin qui sont appliquées sur deux surfaces différentes. Finalement, la troisième partie 5.5.2 correspond à un chargement cyclique (traction-compression) sur la même structure 3D non symétrique dans des conditions thermiques variables. Il est à noter que dans les deux derniers exemples, le matériau composite est constitué d'une matrice thermoélastique-viscoplastique renforcée par des fibres de verre courtes thermoélastiques alignées.

### 5.5.1 Validation de l'approche EF<sup>2</sup> par comparaison avec la structure entièrement maillée

Afin de valider l'approche proposée, les résultats numériques sont comparés à ceux d'un calcul EF à une seule échelle en considérant une structure complète de  $10 \times 10 \times 10$  cellules unitaires<sup>1</sup> (Figure 5.6) sous les mêmes conditions aux limites. Pour les deux simulations numériques, un cube 3D soumis à un chargement contrôlé en déplacement dans la direction 1 (jusqu'à 10% de déformation avec une vitesse de  $10^{-2} s^{-1}$ ) avec des conditions aux limites thermiques de Neumann nulles a été simulé. La discrétisation EF pour le modèle macroscopique et pour la cellule unitaire de chaque point d'intégration macroscopique pour le problème d'EF<sup>2</sup> est illustrée dans la Figure 5.5. La discrétisation du modèle macroscopique est constituée de 64 nœuds et 27 éléments de type C3D8T (8 nœuds à 8 points d'intégration, élément solide 3D pour une analyse couplée de température-déplacement). Par ailleurs, la discrétisation de la cellule unitaire est

---

1. Un cube de  $10 \times 10 \times 10 mm^3$  est constitué d'une cellule unitaire de  $1 \times 1 \times 1 mm^3$  répétée périodiquement dans les trois directions de l'espace.

constituée de 292 nœuds et 1219 éléments de type C3D4<sup>2</sup> (Figure 5.5-b). La cellule unitaire est constituée d'une matrice thermoélastique-viscoplastique renforcée par une inclusion sphérique thermoélastique. D'autre part, la structure entièrement maillée est constituée de la même cellule unitaire, répétée périodiquement dans les trois directions spatiales (Figures 5.6-a et 5.6-b). Sa discrétisation est faite avec des éléments de type C3D4T (éléments tétraédriques avec un point d'intégration, élément solide 3D pour une analyse couplée de température-déplacement). Le maillage est constitué de 208651 nœuds et 1219000 éléments (Figure 5.6). Les fractions volumiques de la matrice et des inclusions sont respectivement  $V^m = 0.8$  et  $V^f = 0.2$  pour les deux modèles.

Les deux cas (EF<sup>2</sup> et structure entièrement maillée) sont soumis aux mêmes types des conditions de chargement thermomécaniques. Les paramètres du matériau des deux phases sont présentés dans le Tableau 3.3. La conductivité thermique macroscopique  $\bar{\kappa}$  est calculée à partir de la solution du problème thermique pur (présenté dans la section 5.4). Il a été constaté que dans cet exemple, la conductivité thermique macroscopique  $\bar{\kappa}$  est isotrope, avec  $\bar{\kappa}_{11} = \bar{\kappa}_{22} = \bar{\kappa}_{33} = 4.23 \cdot 10^{-4}$  W/mmK.

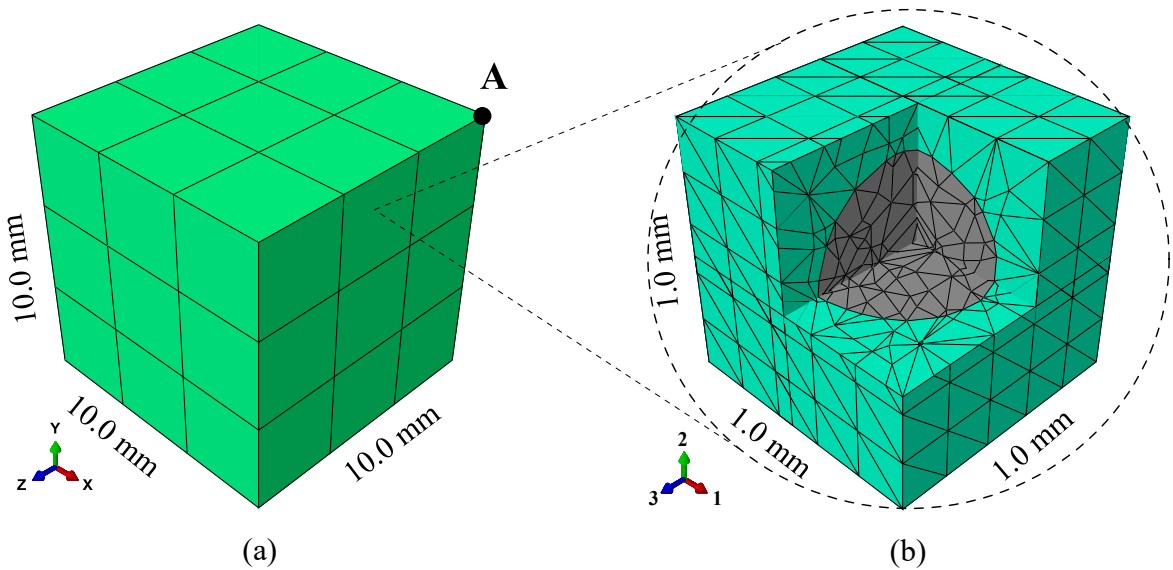
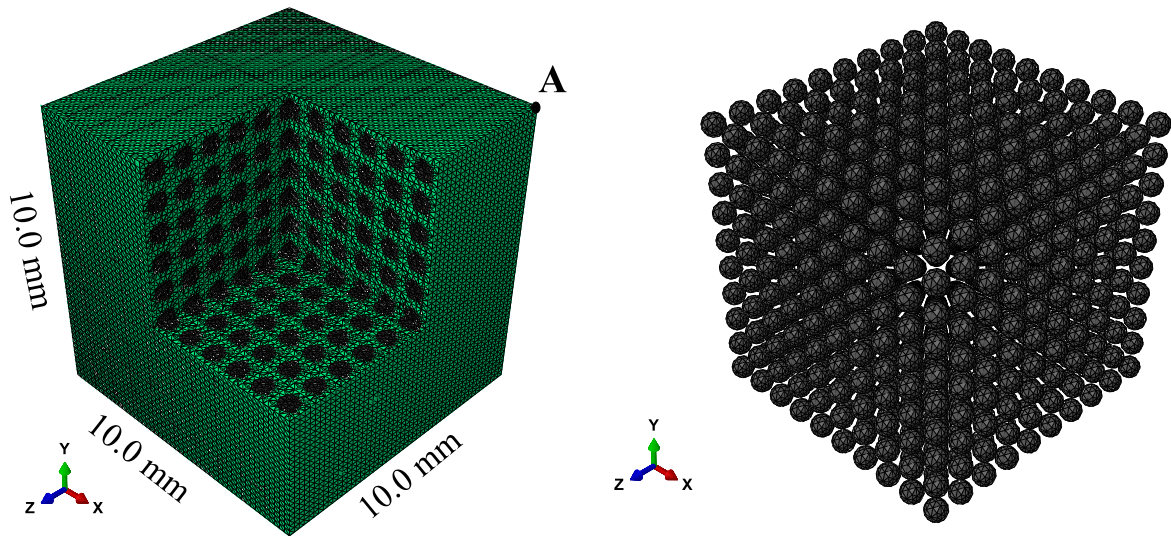


FIGURE 5.5 Dimensions et discrétisation du (a) modèle macroscopique et (b) de la micro-structure observée à chaque point d'intégration macroscopique de la simulation EF<sup>2</sup>.

2. À partir de l'analyse microscopique, seuls les termes thermomécaniques couplés sont nécessaires. Ces termes peuvent être calculés directement à partir de la contrainte, la déformation, la température et les variables internes via la loi de comportement mécanique. Des éléments finis thermomécaniquement couplés ne sont pas nécessaires à cette échelle.



(a) Dimensions et discrétisation EF de la structure entièrement maillée.

(b) Maillage des inclusions de la structure entièrement maillée.

FIGURE 5.6 Discretisation EF de la structure 3D entièrement maillée.

La Figure 5.7 illustre la réponse macroscopique sur l'ensemble du volume du modèle  $EF^2$  ainsi que sur la structure entièrement maillée, en termes de contrainte-déformation dans la direction 1. Les résultats des deux approches présentent un très bon accord entre les deux analyses, démontrant la précision et la capacité de la méthode  $EF^2$  proposée à prédire la réponse globale des structures composites 3D multi-échelles non linéaires. Une validation similaire peut être trouvée dans [47] pour des problèmes 2D. La présentation d'erreur relative  $\left( \frac{\|\bar{\sigma}_{11}^{EF^2}\| - \|\bar{\sigma}_{11}^{\text{référence}}\|}{\|\bar{\sigma}_{11}^{EF^2}\|} \right)$  en fonction du temps confirme le bon accord entre les deux simulations. La solution de la stratégie de calcul multi-échelles comparée à la solution de la structure complète présente une erreur relative comprise entre 0 et 0.3% (Figure 5.8). La Figure 5.9 présente l'évolution de la température macroscopique des deux approches au point A situé à la même position dans les deux structures. Il est à noter qu'un artefact numérique d'élévation de la température peut être observé au début des analyses d' $EF^2$  et d'EF à une seule échelle. Cette élévation de température non physique est due au choix du grand pas de temps pour réduire le temps de calcul. De plus, on peut également observer que pour la réponse thermique, la différence maximale entre les deux calculs est de  $0.25 K$ , ce qui est acceptable pour une telle analyse thermoélastique-viscoplastique.

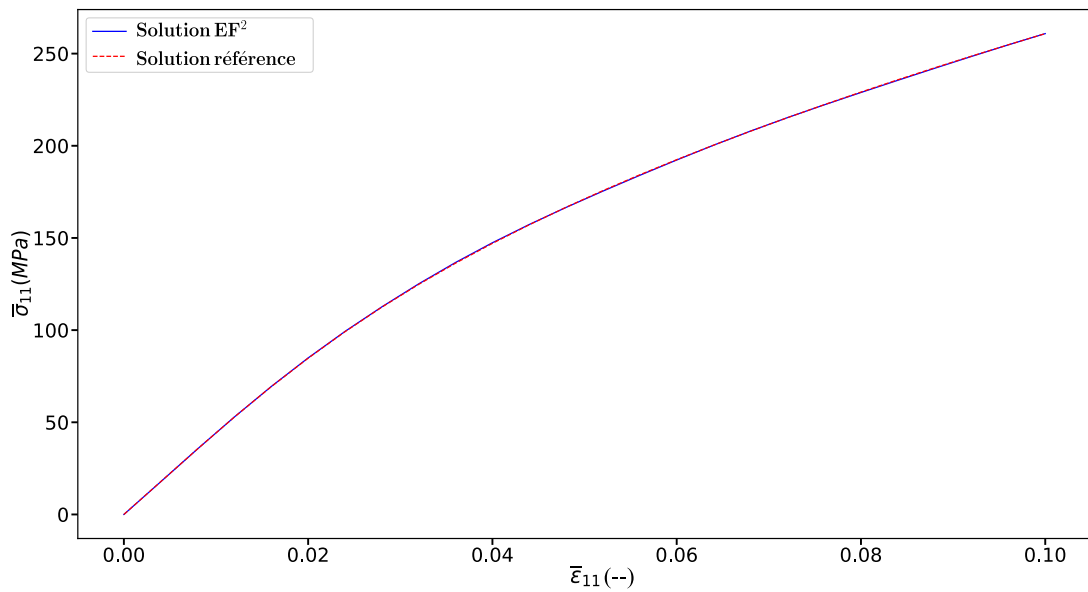


FIGURE 5.7 Comparaison de la réponse macroscopique de l'approche EF<sup>2</sup> et la solution EF à échelle unique en termes de contrainte-déformation.

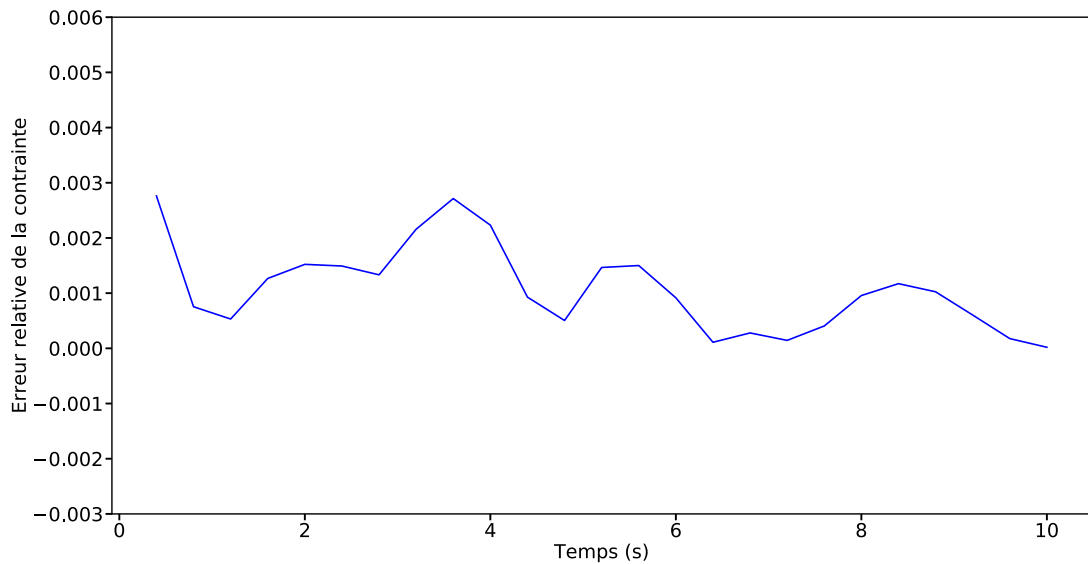


FIGURE 5.8 Erreur relative de la réponse mécanique macroscopique des deux solutions EF<sup>2</sup> et EF à une seule échelle.

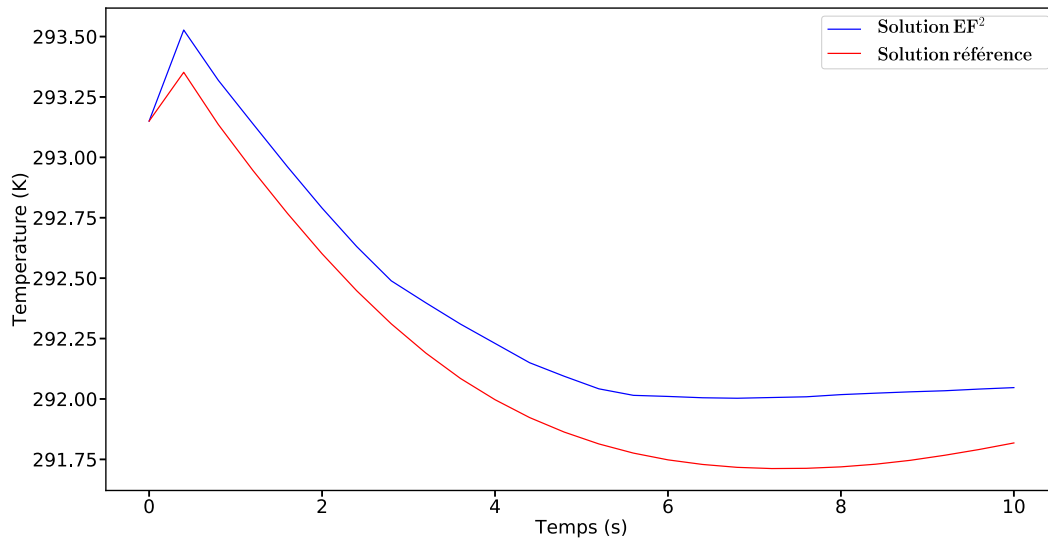


FIGURE 5.9 Comparaison de la température macroscopique des deux approches au point A situé à la même position dans les deux structures.

### 5.5.2 Structure 3D non symétrique constituée d'un composite renforcé de fibres de verre courtes

Cette section a pour objectif de montrer les performances de l'approche proposée à simuler le comportement global des structures composites 3D à travers deux exemples d'analyse par EF<sup>2</sup> réalisés sur une structure 3D non symétrique (Figure 5.10). La structure est constituée d'une matrice polymère renforcée par des fibres de verre courtes alignées et disposées dans un réseau hexagonal périodique (Figure 5.11). La Figure 5.10 présente les dimensions de la structure macroscopique ainsi que la discrétisation EF du modèle constituée de 84 éléments de type C3D8T. Dans les deux exemples, la structure 3D est soumise à un trajet de chargement thermomécanique complexe. Le but est d'illustrer les capacités de la technique à i) capturer les effets de vitesse causés par le changement de la vitesse de chargement et ii) calculer l'évolution spatio-temporelle de la dissipation en différentes positions de la structure due au chargement cyclique.

La microstructure représentant chaque point d'intégration macroscopique de la structure est présentée dans la Figure 5.11. Cette microstructure est maillée par 5881 éléments du type C3D4. Les fractions volumiques de la matrice et des fibres sont respectivement  $V^m = 0.844$  et  $V^f = 0.156$ . Le rapport de forme pour la fibre ellipsoïdale est (4.5, 1, 1). Les propriétés du matériau des fibres thermoélastiques et de la matrice polymère thermoélastique-viscoplastique sont résumées dans le Tableau 5.3.

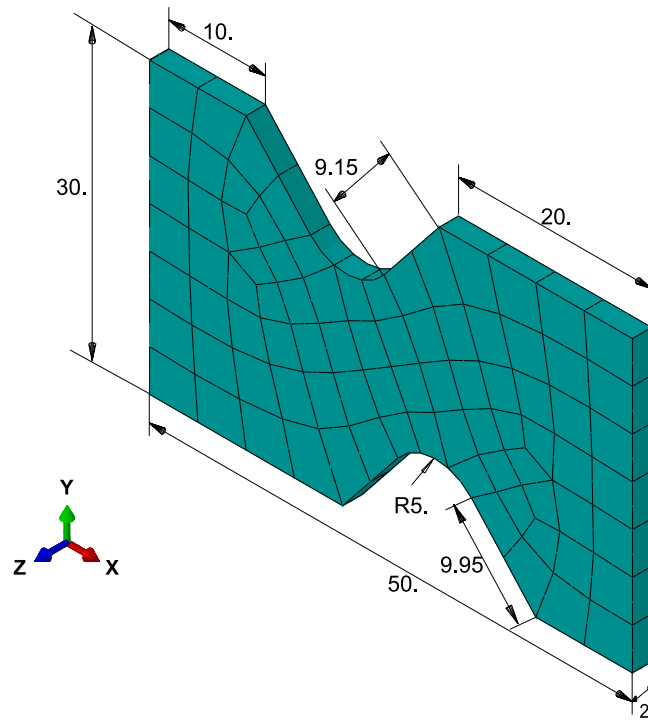
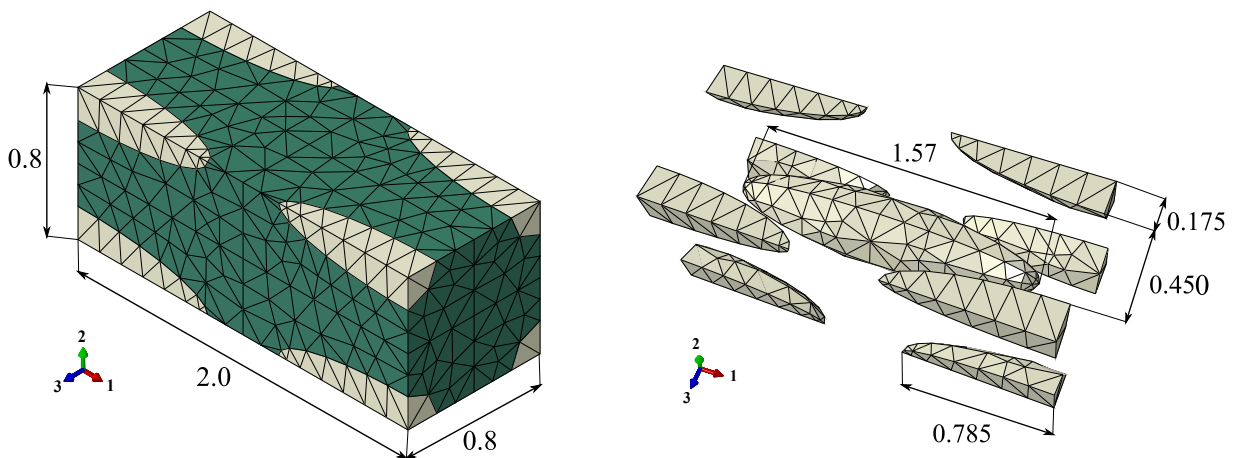


FIGURE 5.10 Dimensions et discrétisation spatiale de la structure macroscopique non symétrique en 3D.



(a) Microstructure du composite étudié. Le domaine maron représente les fibres et le domaine vert représente la matrice.

(b) Dimensions et disposition spatiale des fibres de verre courtes.

FIGURE 5.11 Discrétisation et dimensions spatiales de la cellule unitaire du composite renforcé par des fibres courtes, maillée avec des éléments tétraédriques de type C3D4.

Comme il a été déjà discuté dans les sections précédentes, la conductivité thermique macroscopique est calculée une fois, séparément du processus EF<sup>2</sup>. À partir de la

solution du problème thermique pur présenté dans la section 5.4. Comme attendu, la conductivité thermique macroscopique (équation. 5.54) présente un comportement isotrope transverse pour le composite renforcé de fibres courtes, où l'axe  $x$  étant un axe de symétrie. La solution de l'analyse de transfert de chaleur faite dans Abaqus est présentée dans la Figure 5.12 pour les trois composantes du vecteur de flux de chaleur permettant d'obtenir le tenseur de la conductivité thermique macroscopique  $\bar{\kappa}$ . Le calcul a montré que  $\bar{\kappa}_{11} = 4.28 \cdot 10^{-4}$  et  $\bar{\kappa}_{22} = \bar{\kappa}_{33} = 4.02 \cdot 10^{-4}$  W/mmK.

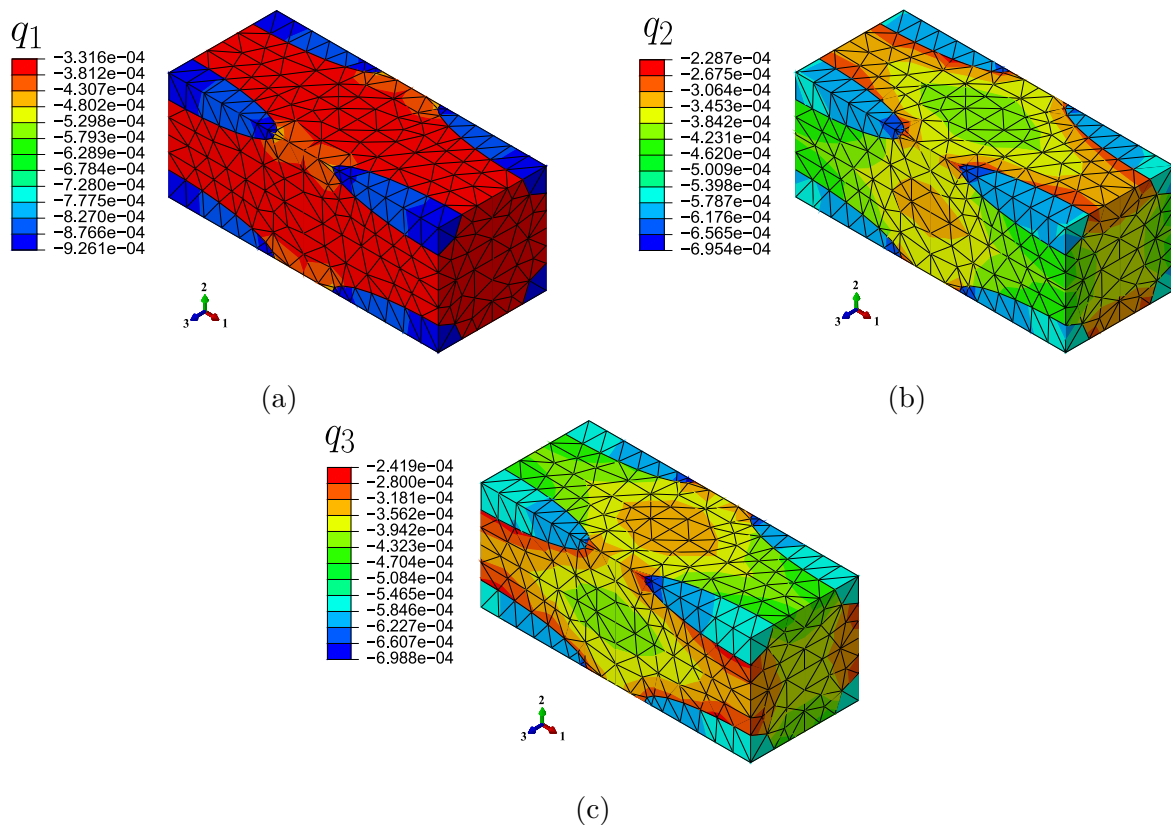


FIGURE 5.12 Champs des flux de chaleur microscopiques générés pour le calcul de la conductivité thermique macroscopique  $\bar{\kappa}$  dans les trois directions de l'espace : (a)  $q_1$ , (b)  $q_2$  et (c)  $q_3$ .

TABLE 5.3 Paramètres du matériau composite modélisé constituer d'une matrice polymère thermo-viscoplastique renforcée par des fibres de verre courtes

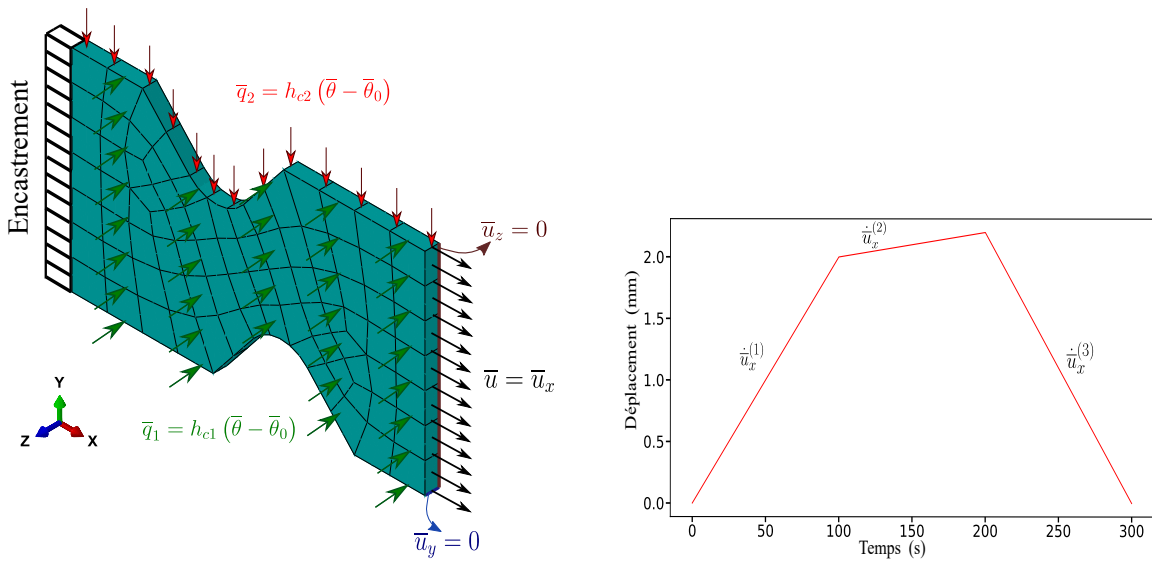
Mécanismes		Paramètres	valeur	unité
Thermoélastique- viscoplastique	Module de Young	$E$	2.680	GPa
	Coeff. de Poisson	$\nu$	0.3	-
	Expansion thermique	$\alpha$	95.0e-06	1/K
	Densité	$\rho$	1.19e-03	g/mm <sup>3</sup>
	Capacité thermique	$C_p$	1590	J/gK
	Conductivité thermique	$\kappa$	0.35e-03	W/mmK
	Limite d'élasticité	$R_0$	15.0	MPa
	Coeff. écrouissage isotrope	$K$	365.0	MPa
	Exp. écrouissage isotrope	$n$	0.39	-
	Résistance VP	$H$	180.0	MPa.s <sup>m</sup>
Exp. VP	$m$	0.3	-	
Thermoélastique	Module de Young	$E$	72.0	GPa
	Coeff. de Poisson	$\nu$	0.26	-
	Expansion thermique	$\alpha$	9.0e-06	1/K
	Densité	$\rho$	2.53e-03	g/mm <sup>3</sup>
	Capacité thermique	$C_p$	830	J/gK
	Conductivité thermique	$\kappa$	0.93e-03	W/mmK
	Température initiale	$\theta_{int}$	293.15	K

### a) Chargement thermomécanique contrôlé en déplacement à vitesse variable par intervalle

Dans cet exemple, la réponse globale de la structure composite 3D est obtenue par la technique de modélisation multi-échelles thermomécanique fortement couplée (EF<sup>2</sup>). Les résultats mettent en évidence les effets du changement de la vitesse de chargement sur la réponse macroscopique du composite en termes de contrainte-déformation. Ces effets sont dus au comportement visqueux de la matrice polymère. La Figure 5.13-a présente les conditions aux limites thermomécaniques macroscopiques appliquées sur la



structure. Cette structure est encadrée sur une extrémité et est soumise au trajet de chargement mécanique de la Figure 5.13-b sur l'autre extrémité. La simulation a été exécutée en considérant des conditions aux limites thermiques de type Robin. Dans la Figure 5.13-a,  $\bar{q}_i$  est le flux de chaleur à travers la surface,  $h_{ci}$  est le coefficient d'échange thermique du fluide qui entoure la surface.  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\theta}_0$  sont la température en un point de la surface et la température du puits de référence, respectivement. La trajectoire de chargement contrôlée en déplacement consiste en deux étapes de chargement avec des vitesses différentes ( $\dot{\bar{u}}_x^{(1)} = 2.0 \times 10^{-2} \text{ mm.s}^{-1}$  et  $\dot{\bar{u}}_x^{(2)} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ mm.s}^{-1}$ ) suivie d'une étape de déchargement avec une vitesse de déplacement de  $\dot{\bar{u}}_x^{(3)} = 2.2 \times 10^{-2} \text{ mm.s}^{-1}$ .



(a) Conditions aux limites thermomécaniques macroscopiques appliquées sur la structure composite.

(b) Trajet de chargement mécanique contrôlé en déplacement  $\bar{u}_x$  avec différentes vitesses de déplacement.

FIGURE 5.13 Conditions aux limites thermomécaniques ainsi que le trajet de chargement mécanique appliqué sur la structure macroscopique.

Dans la première étape, le déplacement  $\bar{u}_x$  est linéairement croissant de 0 à 2 mm en 100s. Dans la deuxième étape, la vitesse de chargement est diminuée et le déplacement reste linéairement croissant, passant de 2 à 2.2 mm en 100s. Après les 200s, le déplacement appliqué diminue de 2.2 à 0 mm en 100s. Un incrément de temps constant  $\Delta t = 5s$  est imposé durant toute l'analyse.

Les conditions convectives sont appliquées sur la surface de face avec un coefficient d'échange thermique  $h_{c1}$  et sur la surface de dessus avec un coefficient d'échange thermique  $h_{c2}$  comme est illustré dans la Figure 5.13-a. Les deux coefficients d'échanges sont égaux à  $h_{c1} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ W/mm}^2\text{K}$  et  $h_{c2} = 6.0 \times 10^{-4} \text{ W/mm}^2\text{K}$ , respectivement. Ils

sont supposés constants pendant toute l'analyse. Dans cette simulation, la température initiale de la structure est supposée égale à  $\bar{\theta}_{int} = 293.15$  K (20°C) et la température extérieure égale à  $\bar{\theta}_0 = 310.15$  K (37°C). Dans la simulation thermomécanique, la température  $\bar{\theta}_{int}$  doit être égale à  $\theta^i$  (voir l'Équation 5.46) pour éviter les contraintes résiduelles et s'assurer que l'état initial de la structure non chargée soit en équilibre thermique.

Les résultats obtenus à partir de l'analyse par EF<sup>2</sup> sont présentés à des points macroscopiques caractéristiques de la structure composite. Les Figures 5.14 et 5.15 présentent la distribution spatio-temporelle des champs de contraintes macroscopiques et microscopiques dans la direction 1 à  $t = 200s$  et  $t = 300s$  pour la macro-structure et la cellule unitaire observée au point A. Comme prévu, on constate que dans la direction de chargement, la plus grande partie de la contrainte est transférée aux fibres dans leur direction longitudinale (direction 1). Ces derniers sont orientés suivant la direction de chargement. La Figure 5.16 montre les courbes en termes de contrainte-déformation au point critique caractéristique A de la structure (Figure 5.14) à la fin du chargement thermomécanique. Les résultats montrent bien que la réponse du composite est fortement influencée par la présence de la matrice polymère par le biais du phénomène de relaxation.

D'autre part, la Figure 5.17 présente la distribution spatio-temporelle de la température macroscopique dans la structure pour les temps d'analyse  $t_1 = 100s$ ,  $t_2 = 200s$  et  $t_3 = 300s$ . La Figure 5.18 montre l'évolution de la température macroscopique en fonction du temps dans différents points de la structure (A, B, C, D, E et F). La réponse en température présente une élévation de 16°C. Cette élévation est due principalement aux conditions aux limites thermiques macroscopiques (convection). L'augmentation de la température macroscopique obtenue par le calcul EF<sup>2</sup>, peut avoir un impact important sur le comportement du matériau thermoplastique en raison de sa faible conductivité thermique.

L'intérêt de l'approche EF<sup>2</sup> fortement couplée réside également dans l'estimation de la dissipation locale et globale dans la structure. La Figure 5.19 présente la distribution spatio-temporelle de la dissipation locale  $\dot{\phi}$  dans la microstructure au point critique A pour les temps d'analyse  $t_1 = 100s$  et  $t_3 = 300s$ . Il est constaté que la dissipation est localisée au niveau des interfaces fibres-matrice et notamment à la tête des fibres. Dans la Figure 5.20, l'évolution de la dissipation locale macroscopique  $\dot{\bar{\Phi}}$  en fonction du temps est présentée en plusieurs points caractéristiques de la structure (A, B, C, D, E et F). Il est constaté que la dissipation a une augmentation rapide lorsque le composite entre dans le régime plastique. Cette augmentation est suivie d'une chute rapide puis

d'une légère diminution pendant les étapes de relaxation et de déchargement, respectivement. Enfin, une légère augmentation est obtenue en phase de compression lorsque le composite entre dans la dernière étape de plastification vers la fin de l'analyse.

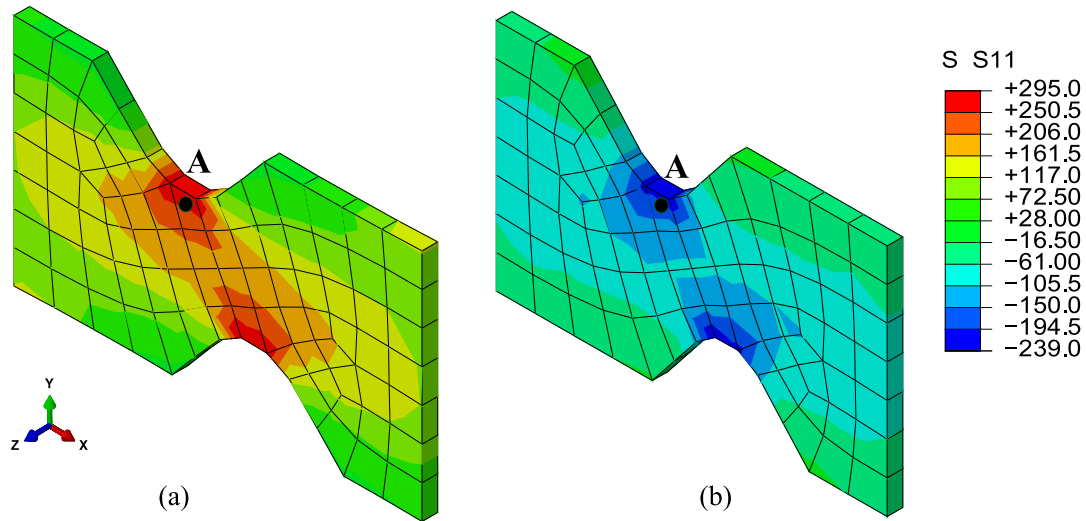


FIGURE 5.14 Distribution des champs de contraintes macroscopiques dans la structure (en MPa) pour la direction de chargement (direction 1) en utilisant l'approche EF<sup>2</sup> pour les temps d'analyse de (a)  $t_2 = 200s$  et (b)  $t_3 = 300s$ .

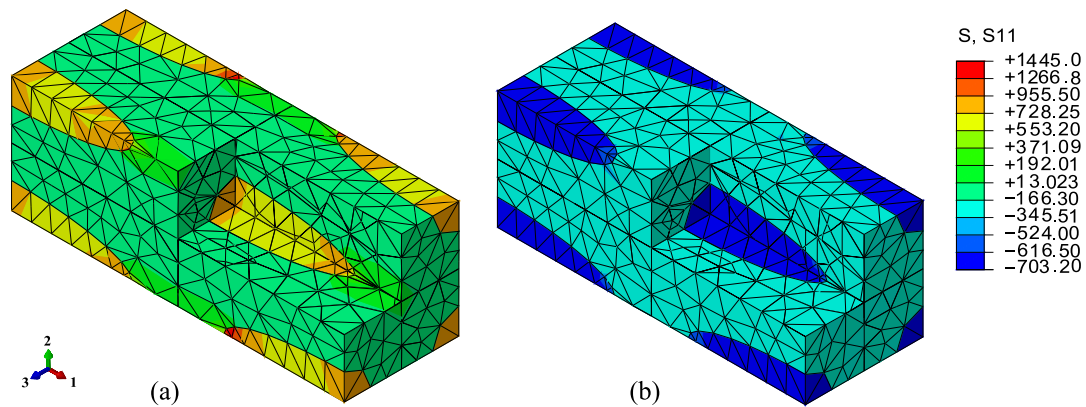


FIGURE 5.15 Distribution des champs de contraintes microscopiques dans la microstructure (en MPa) dans la direction de chargement au point critique A de la structure en utilisant l'approche EF<sup>2</sup> pour les temps d'analyse de (a)  $t_2 = 200s$  et (b)  $t_3 = 300s$ .

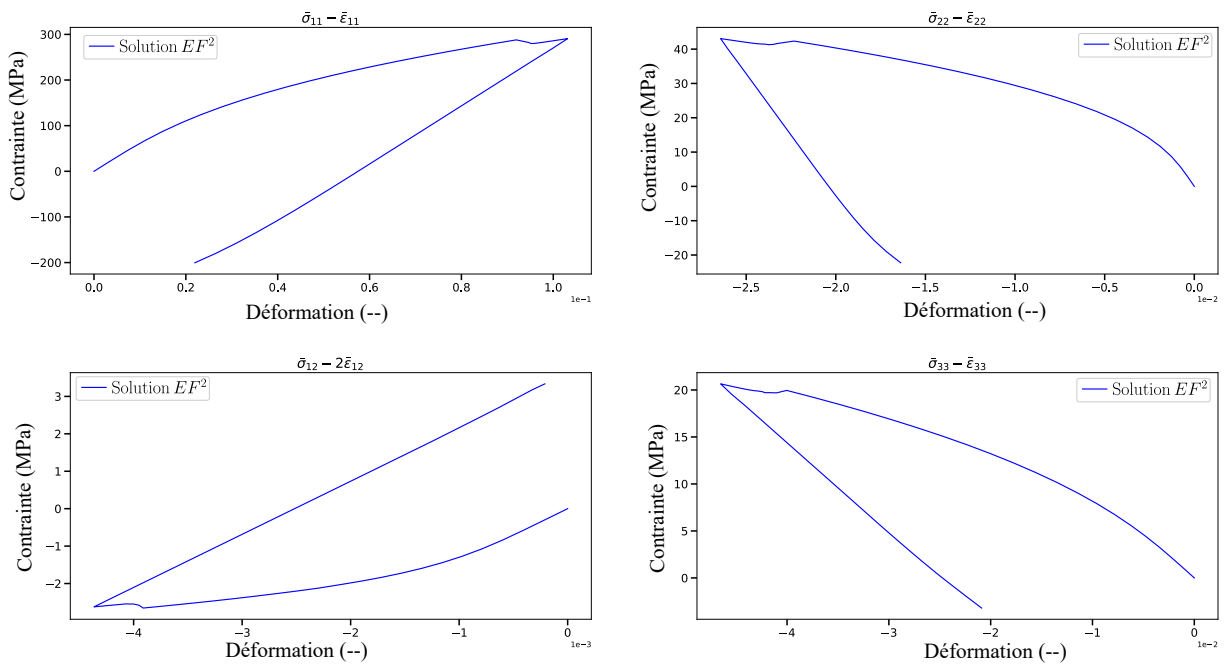


FIGURE 5.16 Évolution de la contrainte macroscopique en fonction de la déformation au point critique A de la structure (Figure 5.14) pour les composantes 11, 22, 33 et le cisaillement 12.

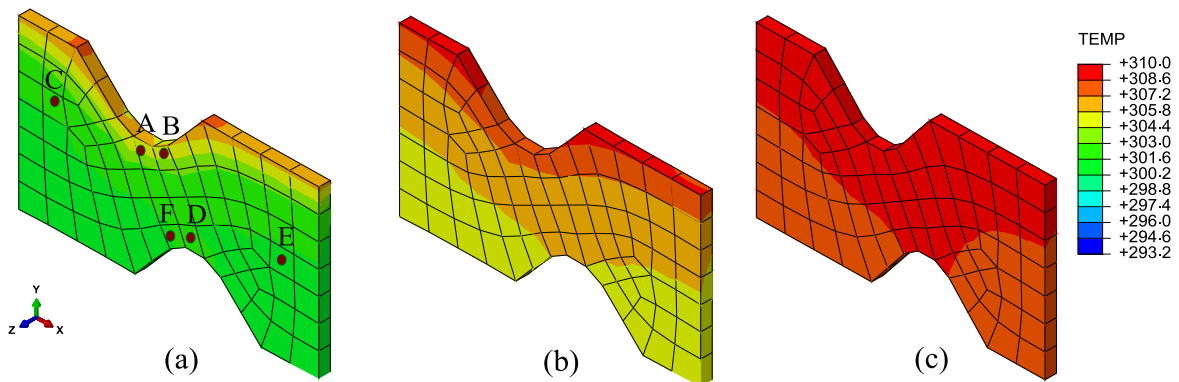


FIGURE 5.17 Distribution spatio-temporelle de la température macroscopique (en K) dans la structure composite pour les temps d'analyse (a)  $t_1 = 100s$ , (b)  $t_2 = 200s$  et (c)  $t_3 = 300s$ . Le champ du température hétérogène tend à être uniforme à la fin de l'analyse.

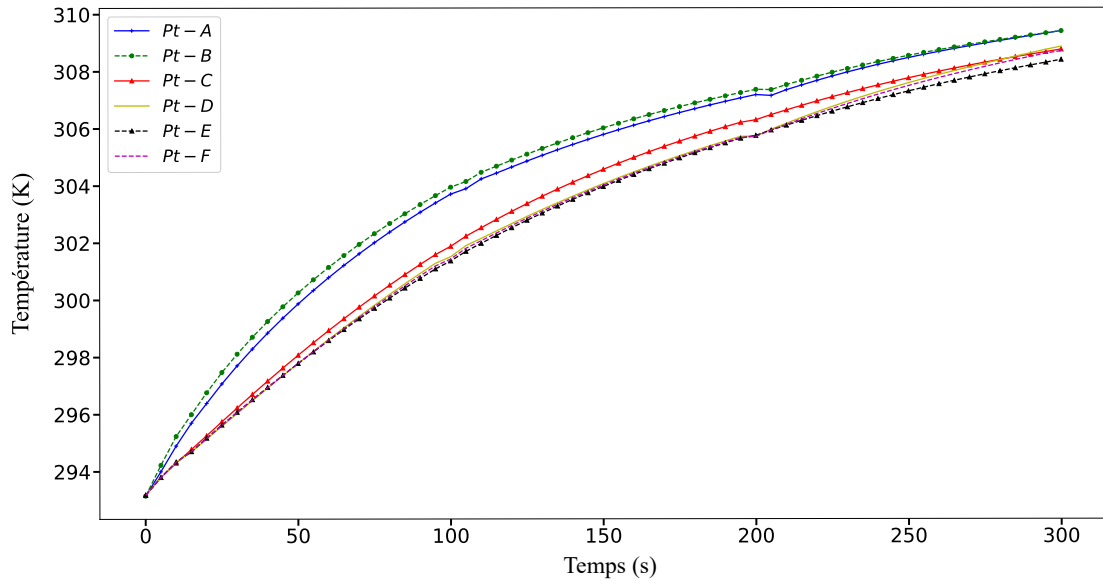


FIGURE 5.18 Évolution de la température macroscopique aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) pour la durée totale d'analyse. Une élévation globale de la température de 16°C est obtenue lors du chargement thermomécanique en 300s.

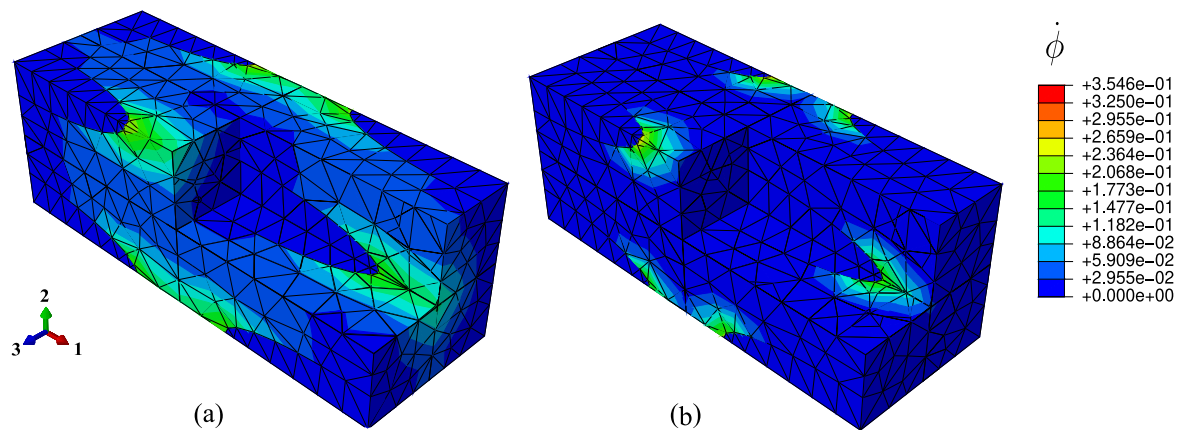


FIGURE 5.19 Champ de distribution de la dissipation locale  $\dot{\Phi}$  dans la microstructure correspondant au point critique caractéristique A de la structure pour les temps d'analyse (a)  $t_1 = 100s$  et (b)  $t_3 = 300s$  (en  $mW.mm^{-3}$ ).

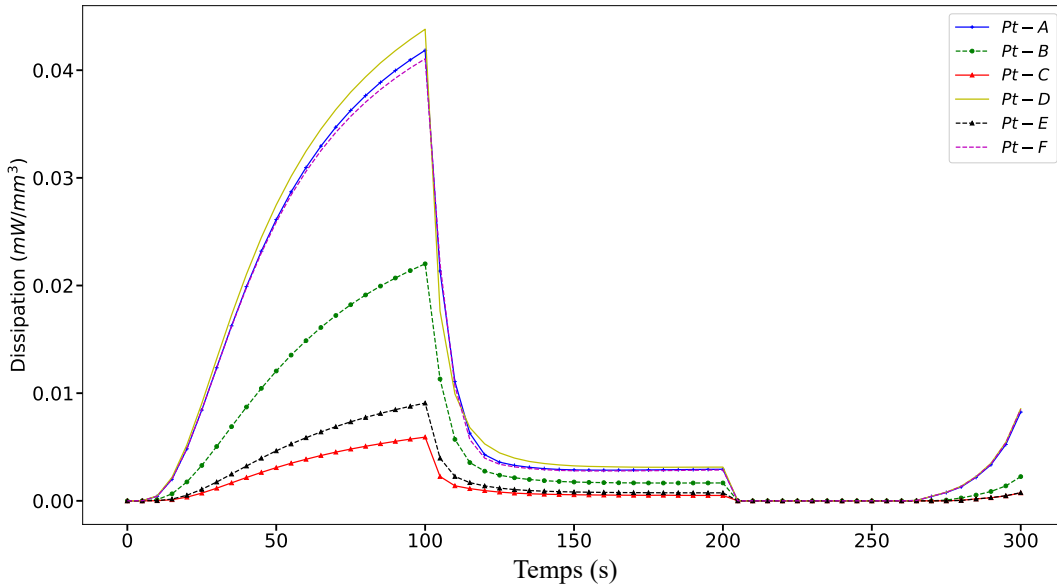


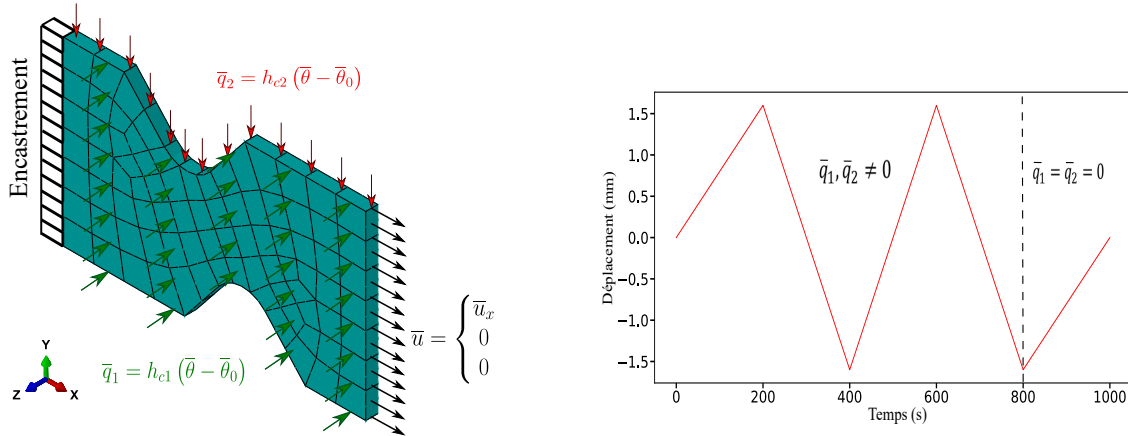
FIGURE 5.20 Évolution de la dissipation locale macroscopique  $\dot{\Phi}$  aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) durant l'analyse.

### b) Chargement thermomécanique cyclique

Le troisième exemple numérique présente une application de conception pratique de structures composites. Elle consiste à étudier la réponse thermomécanique couplée sous un chargement cyclique. La structure modélisée (Figure 5.21-a) est encastree sur une extrémité et est soumise au chargement cyclique présenté en Figure 5.21-b sur l'autre extrémité (essai de traction-compression).

Durant la première étape (de  $t = 0s$  à  $t = 800s$ ), la surface avant ainsi que la surface supérieure de la structure subissent des conditions aux limites thermiques du type Robin. Celles-ci consistent en un transfert de chaleur par convection forcée traduit au moyen de deux coefficients d'échanges thermiques différents (Figure 5.21-a). Le coefficient d'échange thermique de la surface avant  $h_{c1}$  est supposé égal à  $4.0 \times 10^{-4} W/mm^2K$ , tandis que le second coefficient, imposé sur la surface supérieure  $h_{c2}$ , est supposé égal à  $8.0 \times 10^{-4} W/mm^2K$ . L'autre étape de simulation (de  $t = 800s$  à  $t = 1000s$ ) est effectuée sous des conditions aux limites thermiques de Neumann nulle. La température externe  $\bar{\theta}_0$  est supposée égale à 313.15 K. Il faut bien noter que pour cet exemple, la valeur de la capacité thermique spécifique  $C_p$  a été augmentée artificiellement  $10^3$  fois. Ce choix de valeur non physique a été adopté pour éviter certains problèmes techniques rencontrés lors du processus de calcul utilisant le solveur thermomécanique du logiciel EF Abaqus/Standard. Ces problèmes techniques, mises en évidence, lors

de l'interruption des calculs sont liés à la cohérence de certaines unités du solveur EF d'Abaqus. Néanmoins, ce point n'altère pas l'objectif de cet exemple : "démontrer la capacité de calcul par EF<sup>2</sup> à simuler la réponse globale des composites sous un chargement thermomécanique cyclique".



(a) Discretisation EF ainsi que les conditions aux limites thermomécaniques imposées sur la structure macroscopique. (b) Trajet de chargement mécanique.

FIGURE 5.21 Discretisation EF de la structure macroscopique 3D et les conditions aux limites thermomécaniques appliquées.

Les champs de contrainte et de température macroscopiques, ainsi que l'évolution de la dissipation sont présentés aux points caractéristiques de la structure composite. Dans les Figures 5.22 et 5.23, les champs de contrainte macroscopiques et microscopiques dans la direction 1 (direction de chargement) sont présentés pour deux temps d'analyse correspondant à la traction (Figures 5.22-a, 5.23-a) et à la compression (Figures 5.22-b, 5.23-b), respectivement. Comme prévu, une contrainte très importante est transférée aux fibres et aux interfaces entre les fibres et la matrice. Cela est dû au trajet de chargement orienté dans la direction des fibres. Les Figures 5.24, montrent l'évolution de la contrainte macroscopique en fonction de la déformation due au chargement cyclique pour les composantes 11, 22, 33 et le cisaillement 12 au point A de la structure correspond au point le plus sollicité. Il est clairement observé que l'amplitude de la contrainte la plus élevée est selon la direction des fibres (direction de transfert de charge). Le matériau présente une accumulation de la déformation d'un cycle à l'autre. De plus, des boucles d'hystérésis peuvent également être observées à chaque cycle en raison de la nature viscoplastique de la matrice polymère.

La Figure 5.25 présente l'évolution de la température macroscopique due au chargement cyclique et à la convection forcée à différents temps d'analyse. Comme attendu, l'élévation de la température induite par les mécanismes dissipatifs et la convection forcée reste relativement faible (environ 1 à 4°C, Figure 5.26). Entre 0 et 800s, la température macroscopique présente une élévation quasi linéaire. Celle-ci devient constante avec une légère diminution. L'élévation de la température est principalement causée par la convection forcée. Elle n'est pas influencée d'une manière significative par la dissipation en raison du faible nombre de cycles (3 à 5 cycles). À un tel nombre de cycle, l'auto-échauffement du matériau dû à la dissipation reste négligeable. Néanmoins, pour un nombre de cycles plus élevé (100 à 1000 cycles), l'accumulation de la dissipation deviendrait plus significative et l'augmentation relative de la température serait plus visible. D'un point de vue énergétique, la distribution spatio-temporelle de la dissipation est présentée dans la Figure 5.27 au point critique A pour trois temps d'analyse,  $t_1 = 400s$ ,  $t_2 = 600s$  et  $t_3 = 800s$ . Il convient de noter que l'équation du bilan énergétique permet d'estimer l'effet de la dissipation sur la vitesse de température  $\dot{\theta}$ . En effet, l'équation de la chaleur macroscopique s'écrit comme suit :

$$\overline{\rho C_p} \dot{\theta} = -\overline{\text{div}(\bar{q})} + \text{termes thermomécaniques macro} + \dot{\bar{\Phi}}. \quad (5.55)$$

La Figure 5.28 montre la variation temporelle de la dissipation  $\dot{\bar{\Phi}}$  divisée par le  $\overline{\rho C_p} = \langle \rho C_p \rangle$  pour différents points de la structure pendant l'essai de traction-compression. Comme il est mentionné précédemment, la chaleur générée par la dissipation semble être faible en raison du faible nombre de cycles simulés. Malheureusement, un grand nombre de cycles, compte tenu du couplage thermomécanique fort en utilisant la technique multi-échelles EF<sup>2</sup> reste difficile à simuler en raison du coût de calcul élevé.



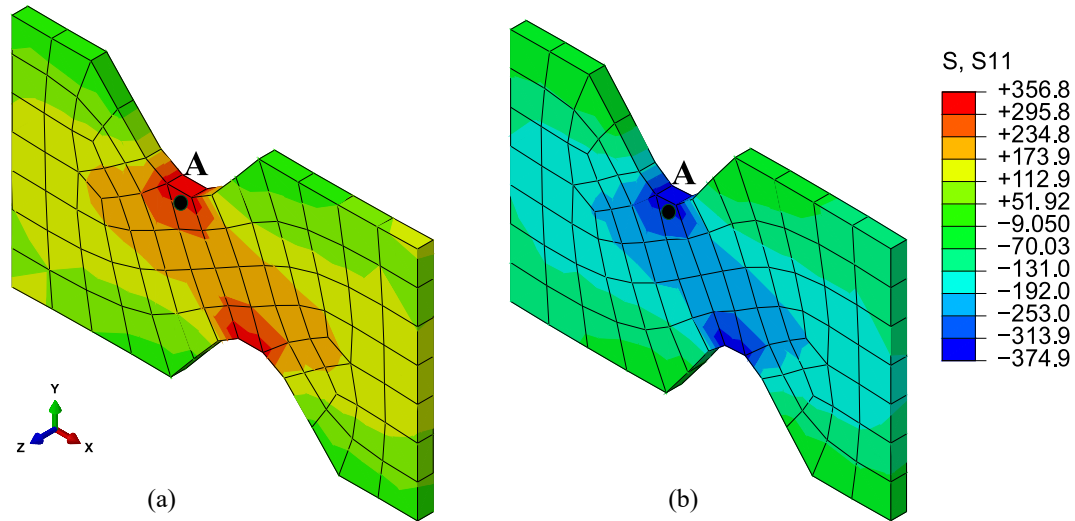


FIGURE 5.22 Champs de contrainte macroscopiques dans la structure composite dans la direction 1 pour deux temps d'analyse : (a)  $t_2 = 600s$  correspondant à la traction et (b)  $t_3 = 800s$  correspondant à la compression.

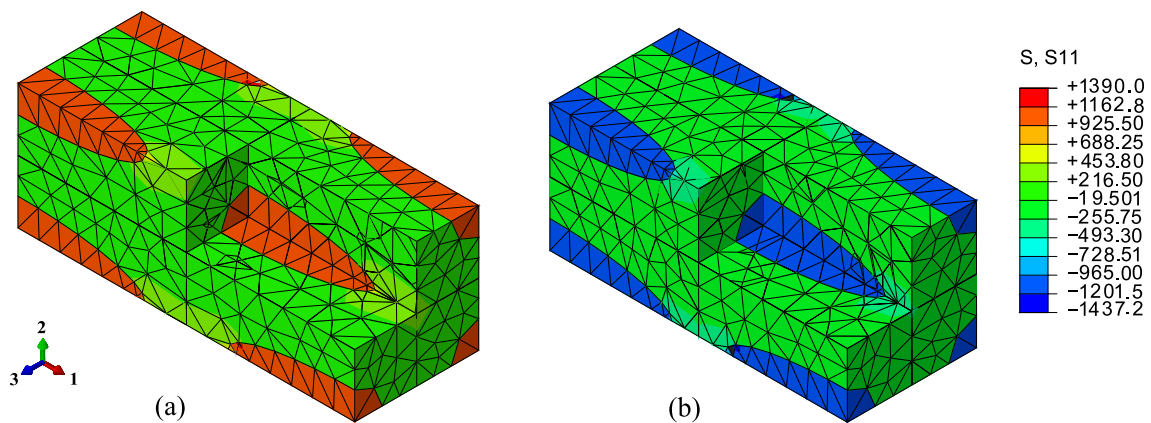


FIGURE 5.23 Champs de contrainte microscopiques dans la microstructure correspondante au point critique A de la structure dans la direction 1 pour les deux temps d'analyse : (a)  $t_2 = 600s$  et (b)  $t_2 = 800s$ .

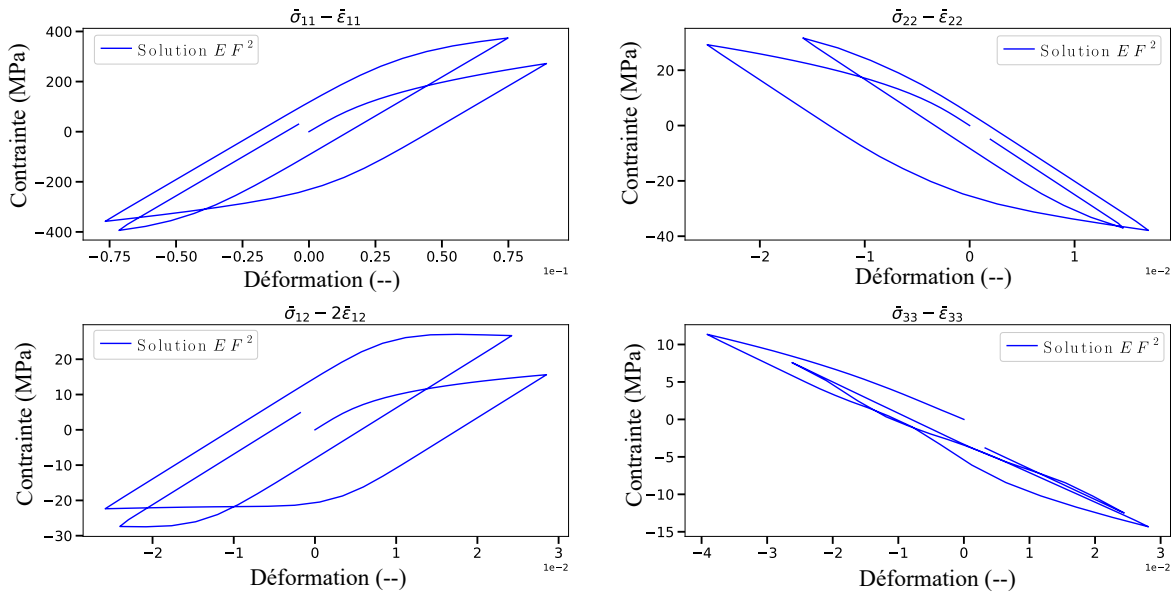


FIGURE 5.24 Évolution des contraintes macroscopiques en fonction des déformations au point critique A de la structure (Figure 5.22) pour les composantes 11, 22, 33 et le cisaillement 12.

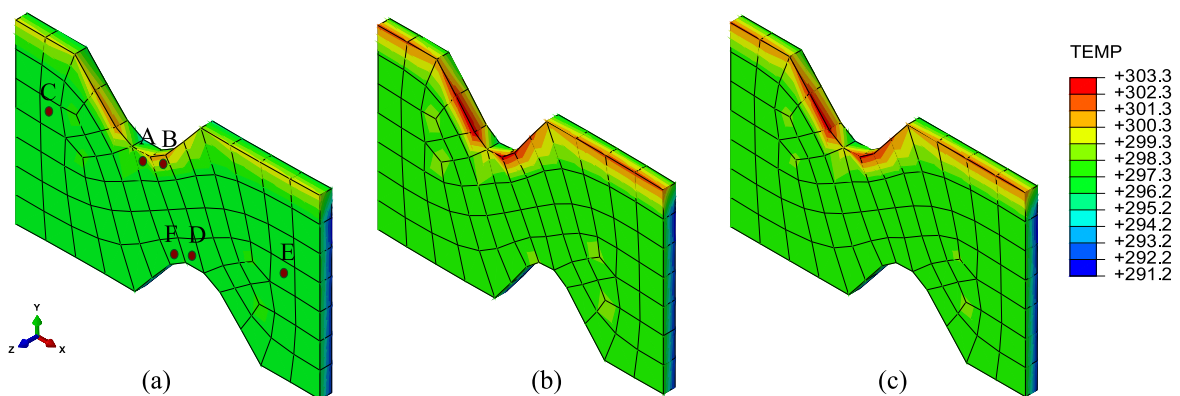


FIGURE 5.25 Distribution macroscopique de la température (en  $K$ ) dans la structure macroscopique pour les temps d'analyse : (a)  $t_2 = 600s$ , (b)  $t_3 = 800s$  et (c)  $t_4 = 1000s$ .

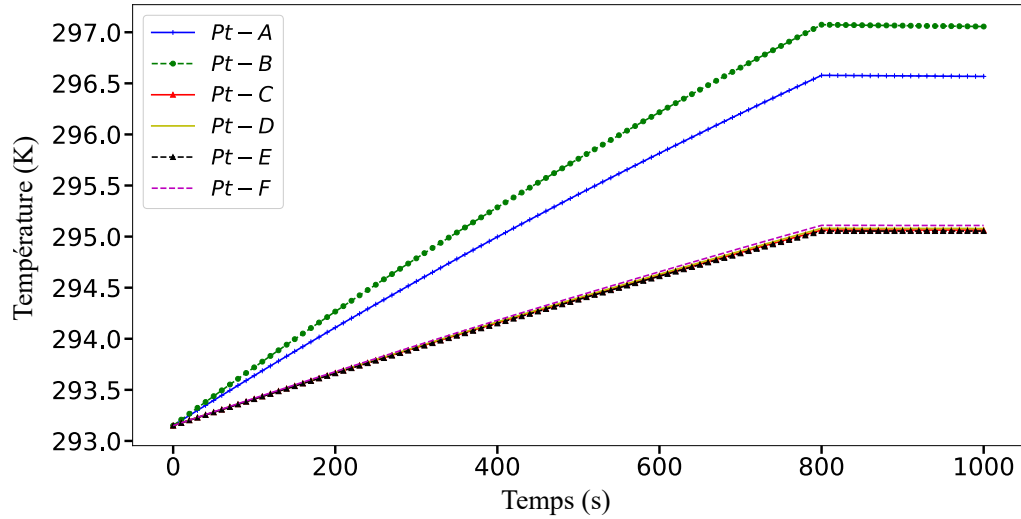


FIGURE 5.26 Évolution de la température macroscopique aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) pour la durée totale d'analyse.

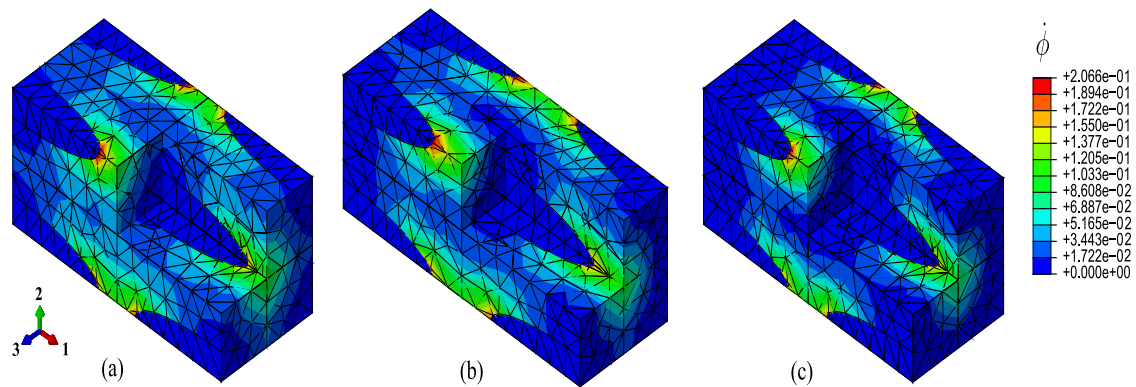


FIGURE 5.27 Distribution des champs de la dissipation local  $\dot{\Phi}$  (en  $mW.mm^{-3}$ ) au point caractéristique A de la structure pour les temps d'analyse : (a)  $t_1 = 400s$ , (b)  $t_2 = 600s$  et (c)  $t_3 = 800s$ .

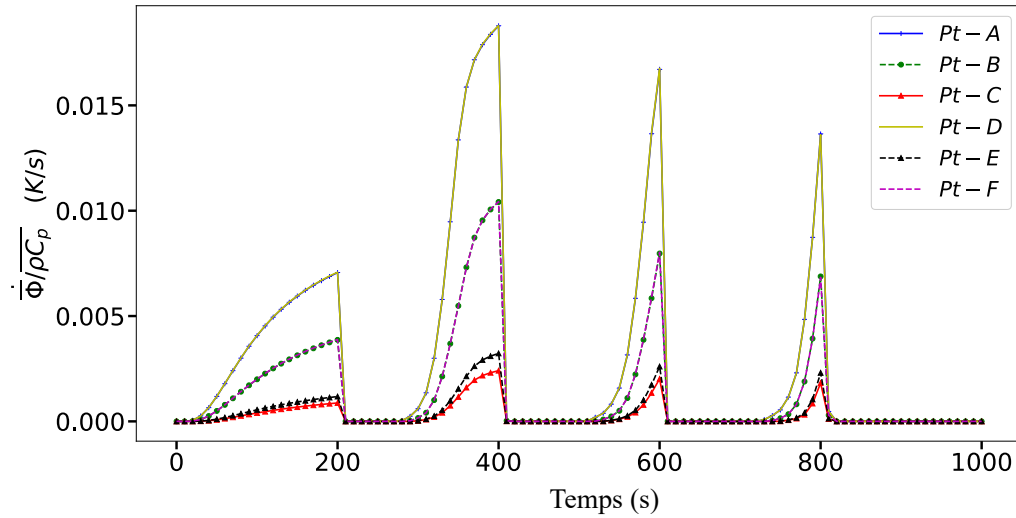


FIGURE 5.28 Évolution de l'effet du dissipation locale sur la température macroscopique aux points caractéristiques (A, B, C, D, E et F) au cours de l'analyse.

## 5.6 Conclusions

Ce chapitre présente une stratégie de modélisation multi-échelles, thermomécanique entièrement couplée (EF<sup>2</sup>), pour des structures composites 3D, en considérant des comportements fortement non linéaires des constituants. L'approche est totalement implémentée dans le code commercial Abaqus/Standard, en utilisant le calcul parallèle pour la réduction de temps de calcul. Un cadre établi qui a été limité aux chargements mécaniques [182] est étendu au schéma d'homogénéisation thermomécanique fortement couplé afin de prédire la réponse structurale thermo-inélastique avec l'hypothèse des petites déformations et petites rotations.

L'avantage principal de la technique de simulation développée, réside dans sa capacité à intégrer tout type de microstructure périodique 3D considérant différents types de modèles constitutifs thermomécaniques non linéaires des constituants (thermo-plastique, thermo-viscoélastique, thermoélastique-viscoplastique, etc). Les applications numériques simulées dans ce travail traitent des comportements de type thermoélastique-viscoplastique connus pour des matrices polymères. Les résultats obtenus capturent bien la dépendance de la réponse structurale à la vitesse de chargement, ainsi que les couplages thermomécaniques dans les composites polymères sous un chargement thermomécanique complexe.

La stratégie proposée a été validée par une comparaison des résultats issus de calcul EF<sup>2</sup> avec une simulation équivalente à une seule échelle (structure entièrement maillée).

D'autres simulations ont été effectuées pour démontrer les performances de l'approche multi-échelles. Dans le premier exemple, une structure 3D complexe non symétrique à matrice polymère thermoélastique-viscoplastique renforcée par des fibres de verre courtes thermoélastiques a été étudiée sous un chargement thermomécanique complexe. Cet exemple a montré l'effet du trajet de chargement sur la réponse macroscopique de la structure composite. Dans le deuxième exemple, un chargement cyclique avec des conditions aux limites thermiques variables est appliqué sur la structure 3D non symétrique qui consiste en un composite renforcé de fibres de verre courtes avec une matrice polymère thermoélastique-viscoplastique. L'exemple montre bien l'évolution de la dissipation et son influence sur les variations de la température macroscopique lors du chargement thermomécanique.

D'un point de vue pratique, la stratégie proposée peut être utilisée dans le cas des composites présentant une forte interaction entre les champs mécaniques et thermiques. On citera les matériaux polymères renforcés dont le comportement viscoplastique/viscoélastique est sensible aux variations de la température. Par ailleurs, d'autres études sur le comportement local des constituants peuvent être envisagées, par exemple, prendre en compte l'effet du couplage de l'endommagement et la viscoplasticité avec la dissipation et l'augmentation de la température.

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse s'est fixé comme objectif principal la mise en place d'une approche de simulation multi-échelles adaptée aux calculs des structures composites 3D périodiques en régime viscoélastique, viscoplastique avec prise en compte de l'endommagement dans les phases. La modélisation a été menée dans le cas d'une matrice thermoplastique renforcée sous l'hypothèse des petites déformations et rotations. Une approche numérique à deux échelles permettant de traiter des problèmes thermomécaniques non linéaires fortement couplés des structures composites périodiques a donc été proposée. Cette approche, nommée EF<sup>2</sup>, est basée sur la méthode de l'homogénéisation périodique faisant intervenir les champs complets. Elle permet de prédire le comportement global des matériaux composites à différentes échelles (microscopique et macroscopique) en introduisant les caractéristiques thermomécaniques des constituants afin de traduire les effets de la microstructure sur la réponse globale de la structure. L'approche développée a été intégrée dans le logiciel de calcul EF Abaqus/Standard.

La stratégie de calcul proposée repose principalement sur l'assemblage des modèles des phases constituant le composite étudié et sur une description géométrique et matérielle de la microstructure (e.g. arrangement, propriétés des constituants, etc). Une cellule unitaire représentative de la microstructure est donc définie au niveau de chaque point matériel de la structure. Celle-ci contient toutes les caractéristiques géométriques des différentes phases (renforts, matrice), ainsi que leurs lois de comportement local. L'approche peut être déployée sur tous les matériaux architecturés ayant une microstructure périodique. La formulation incrémentale de l'approche permet d'intégrer un grand nombre de lois de comportement non linéaires des phases considérant les aspects rhéologiques (viscoélasticité, viscoplasticité, etc), les mécanismes d'endommagement ou encore thermomécaniques couplés (thermoélasticité, thermo-viscoplasticité, etc).

Afin d'aboutir aux objectifs définis pour cette thèse, deux principales actions ont été accomplies :

La première consiste à proposer une technique de simulation multi-échelles EF<sup>2</sup> pour prédire la réponse mécanique non-linéaire de structures composites 3D à microstructure périodique dont le comportement des phases a été modélisé à travers des formulations incrémentales. Pour cela, le cadre d'homogénéisation périodique multi-échelles a été présenté dans le chapitre 2. Ce dernier introduit la notion de transition d'échelles entre les quantités macroscopiques et microscopiques afin de déterminer la réponse macroscopique du composite via un calcul EF sur une cellule unitaire (VER). L'approche EF à deux échelles a été ensuite développée dans le chapitre 3 en vue de simuler la réponse de structures composites 3D sous chargement mécanique. L'implémentation numérique de l'approche a été effectuée à travers un calcul parallèle afin de réduire le temps de calcul. Les performances de la stratégie de calcul EF<sup>2</sup> ont été démontrées à travers un calcul de structure sur des composites 3D constitués d'une matrice polymère viscoplastique-endommageable renforcée par des fibres de verre courtes alignées. Les résultats obtenus ont permis de montrer les capacités de la stratégie de calcul à reproduire les effets de microstructure sur la réponse globale du composite en chaque point macroscopique.

Afin de bien démontrer la validité expérimentale et les capacités de l'approche dans le cas de calcul de structures composites à microstructure complexe, un composite à renfort tissé de type sergé 2-2 a été étudié. Pour cela, une approche expérimentale a été mise en place dans le chapitre 4. Elle a permis de caractériser le comportement mécanique du composite à renfort tissé et matrice thermoplastique (PA66). Les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats numériques obtenus par le calcul EF<sup>2</sup> pour différentes configurations de séquences d'empilement. Des modèles constitutifs locaux intégrant la rhéologie (VE-VP) dans la matrice PA66 et son endommagement ductile ainsi que la dégradation dans les torons (fissuration transverse) ont été utilisés pour le calcul EF<sup>2</sup>. Ces modèles ont permis de prédire le comportement macroscopique du composite étudié en tenant compte des effets de la microstructure. Les résultats expérimentaux obtenus par "DIC" montrent le bon accord entre les prédictions numériques EF<sup>2</sup> et les expériences. Ces résultats ont montré les performances et les capacités de l'approche proposée à prédire l'évolution spatio-temporelle des différents phénomènes observés à l'échelle de la microstructure, à savoir la rhéologie et les mécanismes d'endommagement dans la matrice ainsi que l'accumulation des micro-fissures dans les torons, etc.

La deuxième action de cette thèse a été consacrée à la formulation d'une modélisation multi-échelles adaptée aux problèmes thermomécaniques fortement couplés et à son application aux calculs de structures composites 3D à microstructure périodique. À cet effet, une formulation de l'approche EF<sup>2</sup> dans un cadre de couplage thermomécanique a été développée et présentée dans le chapitre 5. Elle a permis de simuler le comportement global des structures composites tout en prenant compte des effets de couplage thermomécanique (dûs à l'auto-échauffement des matériaux sollicités) ainsi que les effets de la microstructure. L'approche a été validée à travers des simulations du comportement des structures composites constituées d'une matrice thermoélastique-viscoplastique renforcée par des fibres de verre courtes thermoélastiques. Les résultats ont montré les capacités de l'approche EF<sup>2</sup> à reproduire les effets de couplage thermomécanique sur la réponse globale du composite. L'approche développée est très utile dans le cas des composites présentant une forte interaction entre les champs mécaniques et thermiques. On citera les matériaux composites à base polymère dont le comportement viscoélastique/viscoplastique est très sensible aux variations de la température. La dissipation mécanique causée par les mécanismes visqueux entraîne une augmentation de la température. Celle-ci affectera les propriétés mécaniques du matériau et par conséquent sa rhéologie ainsi que son endommagement. Dans telles problématiques, une analyse thermomécanique fortement couplée par EF<sup>2</sup> devient nécessaire.

La stratégie de calcul multi-échelles développée dans cette thèse a permis de réaliser des avancées dans la simulation par EF de structures hétérogènes à microstructure périodique. Néanmoins, elle présente encore des limites quant à son utilisation intensive et prédictive de la rupture de ces structures. Ainsi, de nombreuses voies de développement peuvent être envisagées (liste non exhaustive) afin d'accroître le caractère prédictif et les performances de cette stratégie :

- Il serait intéressant d'intégrer des méthodes non locales pour capturer la localisation due à l'endommagement. Actuellement, les approches basées sur la mécanique de l'endommagement continue sont largement utilisées pour modéliser l'initiation des fissures dans les matériaux composites. Néanmoins, ces approches ne sont pas capables de capturer la localisation des déformations induite par la propagation des fissures. Celle-ci rend la réponse mécanique instable (adoucissement) où les calculs EF basés sur des approches locales offrent une solution dépendante du maillage. Cet aspect présente une des limites des approches locales dont la solution nécessite le développement de modèles non locaux introduisant une longueur caractéristique. Dans le cas de l'endommagement, ces modèles font appel à de nouvelles variables et à leurs gradients afin de traduire cet adoucisse-



ment dans la zone de localisation des déformations [114, 170, 108]. Néanmoins, les modèles d'endommagement non locaux restent fastidieux à mettre en œuvre et à exploiter dans les codes commerciaux de calcul par EF. Pour cette raison, le développement de ces approches constitue actuellement un fort courant de recherche mobilisant de nombreuses équipes en France et dans le monde. On citera par exemple les approches à champs de phases [35, 91, 43] ou les approches à "gradients enhanced continuum damage" [135, 84, 165]. D'autres méthodes permettent de décrire la fissure et sa propagation indépendamment du maillage de la structure, telle que la méthode des éléments finis étendus ("X-FEM"). Elle permet de simuler une description précise des quantités physiques dans la zone de la fissure [142, 183, 68].

- Une deuxième perspective consisterait à intégrer des mécanismes d'endommagement de l'interface dans les comportements locaux. Les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 4 ont montré que lorsque le composite est sollicité en cisaillement plan, des mécanismes d'endommagement peuvent être générés au niveau des interfaces fibres/matrice ou torons/matrice. Ces derniers ne sont pas pris en compte dans les modèles constitutifs utilisés. Ces mécanismes pourraient être modélisés via l'introduction de critères locaux [40] ou par des éléments cohésifs dans le modèle de la cellule unitaire [33]. Cela permettrait de bien représenter les phénomènes de décohésion à l'interface renfort/matrice. L'intégration de ces mécanismes permettrait d'améliorer le caractère prédictif du calcul EF<sup>2</sup> et de bien reproduire les effets d'endommagements locaux sur la réponse globale du composite.
- Une troisième perspective à ce travail de thèse pourrait être la réduction du temps de calcul. Pour atteindre cet objectif, une technique basée sur un calcul parallèle a été développée dans le chapitre 3. Cette parallélisation des calculs peut être améliorée par des techniques spécifiques en cours d'implantation au sein de l'équipe et présentée récemment dans [27]. Le calcul parallèle peut être également couplé à des méthodes de réduction de modèles fondées sur les techniques de décomposition ("POD, PGD") afin d'aboutir à des calculs plus rapides. Ces méthodes utilisent souvent les techniques dites non-incrémentales pour la résolution numérique selon un processus itératif. L'avantage principal de ces méthodes réside dans le fait que l'espace et le temps sont discrétisés indépendamment avec une résolution fine des deux discrétisations [34, 126, 157, 51]. L'utilisation des méthodes de réduction de modèles dans la stratégie de calcul par EF<sup>2</sup> permettrait d'envisager des analyses en fatigue oligocyclique

pour l'estimation de la tenue en service des structures composites ainsi que la simulation de structures plus complexes.



# Bibliographie

- [1] Abdin, Y., Jain, A., Verpoest, I., and Lomov, S. (2016). Mean-field based micro-mechanical modelling of short wavy fiber reinforced composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 91 :472 – 483. CompTest 2015.
- [2] Aboudi, J. (2004). Micromechanics-based thermoviscoelastic constitutive equations for rubber-like matrix composites at finite strains. *International Journal of Solids and Structures*, 41(20) :5611 – 5629.
- [3] Aboudi, J., Pindera, M.-J., and Arnold, S.-M. (2003). Higher-order theory for periodic multiphase materials with inelastic phases. *International Journal of Plasticity*, 19(6) :805–847.
- [4] Achour, N., Chatzigeorgiou, G., Meraghni, F., Chemisky, Y., and Fitoussi, J. (2015). Implicit implementation and consistent tangent modulus of a viscoplastic model for polymers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 103 :297 – 305.
- [5] Al Kassem, G. (2010). *Micromechanical material models for polymer composites through advanced numerical simulation techniques*. PhD thesis, Aachen. Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 2009.
- [6] Allaire, G. (1992). Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23 :1482–1518.
- [7] Anagnostou, D., Chatzigeorgiou, G., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2018). Hierarchical micromechanical modeling of the viscoelastic behavior coupled to damage in SMC and SMC-hybrid composites. *Composites Part B : Engineering*, 151 :8–24.
- [8] Anzelotti, G., Nicoletto, G., and Riva, E. (2008). Mesomechanic strain analysis of twill-weave composite lamina under unidirectional in-plane tension. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(8) :1294 – 1301. Full-field Measurements in Composites Testing and Analysis.
- [9] Arif, M., Meraghni, F., Chemisky, Y., Despringre, N., and Robert, G. (2014). In situ damage mechanisms investigation of pa66/gf30 composite : Effect of relative humidity. *Composites Part B : Engineering*, 58 :487 – 495.
- [10] Arruda, E.-M., Boyce, M.-C., and Jayachandran, R. (1995). Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers. *Mechanics of Materials*, 19(2) :193 – 212.

- [11] Asada, T. and Ohno, N. (2007). Fully implicit formulation of elastoplastic homogenization problem for two-scale analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22) :7261–7275.
- [12] Avri, S., Pierron, F., Sutton, M.-A., and Yan, J. (2008). Identification of elasto-visco-plastic parameters and characterization of lüders behavior using digital image correlation and the virtual fields method. *Mechanics of Materials*, 40(9) :729 – 742.
- [13] Bednarczyk, B.-A., Stier, B., Simon, J.-W., Reese, S., and Pineda, E.-J. (2015). Meso- and micro-scale modeling of damage in plain weave composites. *Composite Structures*, 121 :258 – 270.
- [14] Bensoussan, A., Lions, J.-L., and Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic methods for periodic structures*.
- [15] Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of mori-tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2) :147 – 157.
- [16] Benveniste, Y., Dvorak, G., and Chen, T. (1989). Stress fields in composites with coated inclusions. *Mechanics of Materials*, 7(4) :305 – 317.
- [17] Benveniste, Y., Dvorak, G., and Chen, T. (1991). On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(7) :927 – 946.
- [18] Berthelsen, R., Denzer, R., Oppermann, P., and Menzel, A. (2017). Computational homogenisation for thermoviscoplasticity : application to thermally sprayed coatings. *Computational Mechanics*, 60 :739–766.
- [19] Bertram, A. and Krawietz, A. (2012). On the introduction of thermoplasticity. *Acta Mechanica*, 223(10) :2257–2268.
- [20] Boisse, P., Hamila, N., Guzman-Maldonado, E., Madeo, A., Hivet, G., and dell’Isola, F. (2017). The bias-extension test for the analysis of in-plane shear properties of textile composite reinforcements and preregs : a review. *International Journal of Material Forming*, 10(4) :473–492.
- [21] Boubakar, M.-L., Trivaudey, F., Perreux, D., and Vang, L. (2002). A meso-macro finite element modelling of laminate structures - Part I : Time-independent behaviour. *Journal of Composite Structures*, 58(2) :pp. 271–286.
- [22] Boubakar, M.-L., Vang, L., Trivaudey, F., and Perreux, D. (2003). A meso–macro finite element modelling of laminate structures : Part ii : time-dependent behaviour. *Composite Structures*, 60(3) :275 – 305.
- [23] Boufaïda, Z. (2015). *Analyse des propriétés mécaniques de composites taffetas verre/matrice acrylique en relation avec les propriétés d’adhésion des fibres sur la matrice*. Theses, Université de lorraine -Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [24] Brassart, L., Doghri, I., and Delannay, L. (2010). Homogenization of elasto-plastic composites coupled with a nonlinear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. *International Journal of Solids and Structures*, 47(5) :716–729.

- [25] Brassart, L., Stainier, L., Doghri, I., and Delannay, L. (2012). Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*, 36 :86 – 112.
- [26] Brenner, R. and Suquet, P. (2013). Overall response of viscoelastic composites and polycrystals : exact asymptotic relations and approximate estimates. *International Journal of Solids and Structures*, 50(10) :1824–1838.
- [27] Brent, R.-B., Gregory, W.-R., Philip, S.-B., and Darren, J.-H. (2019). Development and validation of a genetic l-system programming framework for topology optimization of multifunctional structures. *Computers and Structures*, 218 :152 – 169.
- [28] Chaboche, J.-L., Kanoute, P., and Roos, A. (2005). On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *International Journal of Plasticity*, 21(7) :1409–1434.
- [29] Charalambakis, N., Chatzigeorgiou, G., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2018). Mathematical homogenization of inelastic dissipative materials : a survey and recent progress. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 30 :1–51.
- [30] Chatzigeorgiou, G., Charalambakis, N., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2016). Periodic homogenization for fully coupled thermomechanical modeling of dissipative generalized standard materials. *International Journal of Plasticity*, 81 :18–39.
- [31] Chatzigeorgiou, G., Charalambakis, N., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2018). *Thermomechanical Behavior of Dissipative Composite Materials*. ISTE Press - Elsevier, London.
- [32] Chatzigeorgiou, G., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2015). Computational micro to macro transitions for shape memory alloy composites using periodic homogenization. *Smart Materials and Structures*, 24(3) :035009.
- [33] Chatzigeorgiou, G., Meraghni, F., and Javili, A. (2017). Generalized interfacial energy and size effects in composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 106 :257 – 282.
- [34] Chinesta, F., Ammar, A., and Cueto, E. (2010). Proper Generalized Decomposition of Multiscale Models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1114–1132.
- [35] Christian, M., Martina, H., and Fabian, W. (2010). A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45) :2765 – 2778.
- [36] Coleman, B. D. and Gurtin, M. E. (1967). Thermodynamics with Internal State Variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2) :597–613.
- [37] Cremonesi, M., Néron, D., Guidault, P.-A., and Ladevèze, P. (2013). A pgd-based homogenization technique for the resolution of nonlinear multiscale problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267 :275 – 292.

- [38] Czarnota, C., Kowalczyk-Gajewska, K., Salahouelhadj, A., Martiny, M., and Mercier, S. (2015). Modeling of the cyclic behavior of elastic–viscoplastic composites by the additive tangent mori–tanaka approach and validation by finite element calculations. *International Journal of Solids and Structures*, 56-57 :96 – 117.
- [39] Delannay, L., Doghri, I., and Pierard, O. (2007). Prediction of tension–compression cycles in multiphase steel using a modified incremental mean-field model. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22) :7291 – 7306.
- [40] Despringre, N., Chemisky, Y., Bonnay, K., and Meraghni, F. (2016). Micromechanical modeling of damage and load transfer in particulate composites with partially debonded interface. *Composite Structures*, 155 :77 – 88.
- [41] Detrez, F., Cantournet, S., and Seguela, R. (2011). Plasticity/damage coupling in semi-crystalline polymers prior to yielding : Micromechanisms and damage law identification. *Polymer*, 52(9) :1998 – 2008.
- [42] Dillon, G. and Buggy, M. (1995). Damage development during flexural fatigue of carbon fibre-reinforced peek. *Composites*, 26(5) :355 – 370.
- [43] Dittmann, M., Aldakheel, F., Schulte, J., Wriggers, and Hesch, C. (2018). Variational phase-field formulation of non-linear ductile fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 342 :71 – 94.
- [44] Doghri, I., Brassart, L., Adam, L., and Gérard, J.-S. (2011). A second-moment incremental formulation for the mean-field homogenization of elasto-plastic composites. *International Journal of Plasticity*, 27(3) :352 – 371.
- [45] Doghri, I. and Ouair, A. (2003). Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures : Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *International Journal of Solids and Structures*, 40(7) :1681–1712.
- [46] Dong, H., Cui, J., Nie, Y., and Yang, Z. (2017). Second-Order Two-Scale Computational Method for Nonlinear Dynamic Thermo-Mechanical Problems of Composites with Cylindrical Periodicity. *Communications in Computational Physics*, 21(4) :1173–1206.
- [47] Drago, A. and Pindera, M.-J. (2007). Micro-macromechanical analysis of heterogeneous materials : Macroscopically homogeneous vs periodic microstructures. *Composites Science and Technology*, 67(6) :1243 – 1263.
- [48] Drosopoulos, G., Wriggers, P., and Stavroulakis, G. (2014). A multi-scale computational method including contact for the analysis of damage in composite materials. *Computational Materials Science*, 95 :522 – 535.
- [49] Drozdov, A. D. and Christiansen, J. (2007). Cyclic viscoplasticity of solid polymers : The effects of strain rate and amplitude of deformation. *Polymer*, 48(10) :3003–3012.
- [50] Duan, Y., Saigal, A., Greif, R., and Zimmerman, M.-A. (2001). A uniform phenomenological constitutive model for glassy and semi crystalline polymers. . *Polymer engineering and science*, 41 :1322–1328.

- [51] El Halabi, F., González, D., Chico, A., and Doblaré, M. (2013). Fe2 multiscale in linear elasticity based on parametrized microscale models using proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 257 :183 – 202.
- [52] Ene, H. I. (1983). On linear thermoelasticity of composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 21(5) :443–448.
- [53] ESHELBY, J.-D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241,(1226,) :376–396.
- [54] Feyel, F. (1999). Multiscale fe2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Computational Materials Science*, 16(1) :344–354.
- [55] Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000a). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3) :309 – 330.
- [56] Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000b). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3) :309 – 330.
- [57] Fisher, F. and Brinson, L. (2001). Viscoelastic interphases in polymer–matrix composites : theoretical models and finite-element analysis. *Composites Science and Technology*, 61(5) :731 – 748.
- [58] Fleischhauer, R., Božić, M., and Kaliske, M. (2016). A novel approach to computational homogenization and its application to fully coupled two-scale thermomechanics. *Computational Mechanics*, 58(5) :769–796.
- [59] Forest, S. (2009). Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 135 :117–131.
- [60] Francfort, G. (1983). Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 14(4) :696–708.
- [61] Gamstedt, E.-K. and Sjögren, B.-A. (1999). Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies. *Composites Science and Technology*, 59(2) :167 – 178.
- [62] Garoz Gómez, D., Gilabert Villegas, F.-A., Sevenois, R., Spronk, S., and Van Paepegem, W. (2017). Material parameter identification of the elementary ply damage mesomodel using virtual micro-mechanical tests of a carbon fiber epoxy system. *Composite Structures*, 181 :391–404.
- [63] Gavazzi, A.-C. and Lagoudas, D.-C. (1990). On the numerical evaluation of eshelby’s tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. *Computational Mechanics*, 7(1) :13–19.
- [64] Germain, P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus, Tome I : Théorie Générale*. Masson, Paris.



- [65] Germain, P. (1982). Sur certaines définitions liées à l'énergie en mécanique des solides. *International Journal of Engineering Science*, 20(2) :245–259.
- [66] Germain, P., Nguyen, Q. S., and Suquet, P. (1983). Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020.
- [67] Ghosh, S., Lee, K., and Raghavan, P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(14) :2335 – 2385.
- [68] Gibert, G., Prabel, B., Gravouil, A., and Jacquemoud, C. (2019). A 3d automatic mesh refinement x-fem approach for fatigue crack propagation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 157 :21 – 37.
- [69] Grmela, M. and Lebon, G. (1990). Hamiltonian extended thermodynamics. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 23(14) :3341–3351.
- [70] Guillaume, C. (2008). *Multiscale modeling of the mechanical behavior of woven composite materials*. Theses, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I.
- [71] Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5) :357 – 372.
- [72] Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4) :213 – 222.
- [73] Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2) :79–95.
- [74] Hill, R. and Orowan, E. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033) :281–297.
- [75] Hobbiebrunken, T., Hojo, M., Adachi, T., De Jong, C., and Fiedler, B. (2006). Evaluation of interfacial strength in cf/epoxies using fem and in-situ experiments. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(12) :2248 – 2256. The 11th US–Japan Conference on Composite Materials.
- [76] Hochard, C., Aubourg, P.-A., and Charles, J.-P. (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2) :221 – 230.
- [77] Hochard, C., Payan, J., and Bordreuil, C. (2006). A progressive first ply failure model for woven ply cfrp laminates under static and fatigue loads. *International Journal of Fatigue*, 28(10) :1270 – 1276. The Third International Conference on Fatigue of Composites.
- [78] Hochard, C. and Thollon, Y. (2010). A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 32(1) :158 – 165. Fourth International Conference on Fatigue of Composites (ICFC4).

- [79] Jiang, T. and Shao, J. (2009). On the incremental approach for nonlinear homogenization of composite and influence of isotropization. *Computational Materials Science*, 46(2) :447 – 451.
- [80] Jou, D., Casas-Vázquez, J., and Lebon, G. (1999). Extended irreversible thermodynamics revisited (1988-98). *Reports on Progress in Physics*, 62(7) :1035–1142.
- [81] Kalamkarov, A.-L. and Kolpakov, A.-G. (1997). *Analysis, design and optimization of composite structures*. Wiley, West Sussex.
- [82] Khan, A. S., Lopez-Pamies, O., and Kazmi, R. (2006). Thermo-mechanical large deformation response and constitutive modeling of viscoelastic polymers over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 22(4) :581–601.
- [83] Khatam, H. and Pindera, M.-J. (2010). Plasticity-triggered architectural effects in periodic multilayers with wavy microstructures. *International Journal of Plasticity*, 26(2) :273–287.
- [84] Kiefer, B., Waffenschmidt, T., Sprave, L., and Menzel, A. (2018). A gradient-enhanced damage model coupled to plasticity—multi-surface formulation and algorithmic concepts. *International Journal of Damage Mechanics*, 27(2) :253–295.
- [85] Kouznetsova, V., Geers, M. G. D., and Brekelmans, W. A. M. (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8) :1235–1260.
- [86] Krairi, A. and Doghri, I. (2014a). A thermodynamically-based constitutive model for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage. *International Journal of Plasticity*, 60 :163–181.
- [87] Krairi, A. and Doghri, I. (2014b). A thermodynamically-based constitutive model for thermoplastic polymers coupling viscoelasticity, viscoplasticity and ductile damage. *International Journal of Plasticity*, 60 :163–181.
- [88] Krasnobrizha, A. (2015). *Modelling of the hysteretic behavior of woven composite using a collaborative elastoplastic damaged model with fractional derivatives*. Theses, Ecole Centrale Nantes, Université Bretagne Loire ; Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique – UMR CNRS 6183.
- [89] Krasnobrizha, A., Rozycki, P., Cosson, P., and Gornet, L. (2016). Modélisation des mécanismes d’hystérésis des composites tissés à l’aide d’un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires. *Matériaux & Techniques*, 104(4) :407.
- [90] Kruch, S. and Chaboche, J.-L. (2011). Multi-scale analysis in elasto-viscoplasticity coupled with damage. *International Journal of Plasticity*, 27(12) :2026–2039.
- [91] Kuhn, C., Noll, T., and Müller, R. (2016). On phase field modeling of ductile fracture. *GAMM-Mitteilungen*, 39(1) :35–54.

- [92] Ladeveze, P. and LeDantec, E. (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3) :257 – 267.
- [93] Ladeveze, P., Loiseau, O., and Dureisseix, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :121–138.
- [94] Ladeveze, P. and Nouy, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28) :3061 – 3087. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [95] Ladeveze, P., Nouy, A., and Loiseau, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(43) :4869 – 4891.
- [96] Ladeveze, P., Passieux, J.-C., and Néron, D. (2010). The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21) :1287 – 1296. Multiscale Models and Mathematical Aspects in Solid and Fluid Mechanics.
- [97] Lagoudas, D.-C., Gavazzi, A.-C., and Nigam, H. (1991). Elastoplastic behavior of metal matrix composites based on incremental plasticity and the mori-tanaka averaging scheme. *Computational Mechanics*, 8(3) :193–203.
- [98] Launay, A., Maitournam, M., Marco, Y., Raoult, I., and Szmytka, F. (2011). Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide : Experimental study and constitutive equations. *International Journal of Plasticity*, 27(8) :1267 – 1293.
- [99] Launay, A., Maitournam, M.-H., Marco, Y., and Raoult, I. (2013a). Multiaxial fatigue models for short glass fiber reinforced polyamide – part i : Nonlinear anisotropic constitutive behavior for cyclic response. *International Journal of Fatigue*, 47 :382–389.
- [100] Launay, A., Marco, Y., Maitournam, M.-H., and Raoult, I. (2013b). Modelling the influence of temperature and relative humidity on the time-dependent mechanical behaviour of a short glass fibre reinforced polyamide. *Mechanics of Materials*, 56 :1 – 10.
- [101] Laws, N. and Brockenbrough, J. (1987). The effect of micro-crack systems on the loss of stiffness of brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9) :1247 – 1268.
- [102] Lemaitre, J. (1985). Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1) :31–49.
- [103] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- [104] Lemaitre, J. and Desmorat, R. (2005). *Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failure*. Springer.

- [105] Li, S. (1999). On the unit cell for micromechanical analysis of fibre-reinforced composites. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 455(1983) :815–838.
- [106] Li, S. (2000). General unit cells for micromechanical analyses of unidirectional composites. *Composites : Part A*, 32 :815–826.
- [107] Lin, H., Brown, L.-P., and Long, A.-C. (2011). Modelling and simulating textile structures using texgen. In *Advances in Textile Engineering*, volume 331 of *Advanced Materials Research*, pages 44–47. Trans Tech Publications.
- [108] Linse, T., Hütter, G., and Kuna, M. (2012). Simulation of crack propagation using a gradient-enriched ductile damage model based on dilatational strain. *Engineering Fracture Mechanics*, 95 :13 – 28. Cracks in Microstructures and Engineering Components.
- [109] Love, B. and Batra, R. (2006). Determination of effective thermomechanical parameters of a mixture of two elastothermoviscoplastic constituents. *International Journal of Plasticity*, 22(6) :1026 – 1061.
- [110] Mahboob, Z., Chemisky, Y., Meraghni, F., and Bougherara, H. (2017). Mesoscale modelling of tensile response and damage evolution in natural fibre reinforced laminates. *Composites Part B : Engineering*, 119 :168 – 183.
- [111] Malpot, A. (2017). *Fatigue Behaviour of a Woven Glass-Fibre-Reinforced Polyamide Composite for Automotive Application*. Theses, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique - Poitiers.
- [112] Malpot, A., Touchard, F., and Bergamo, S. (2015). Effect of relative humidity on mechanical properties of a woven thermoplastic composite for automotive application. *Polymer Testing*, 48 :160 – 168.
- [113] Marigo, J.-J., Mialon, P., Michel, J.-C., and Suquet, P. (1987). Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d’une structure hétérogène périodique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(1) :47–75.
- [114] Mediavilla, J., Peerlings, R., and Geers, M. (2006). An integrated continuous–discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(7) :895 – 916.
- [115] Meraghni, F. and Benzeggagh, M.-L. (1995). Micromechanical modelling of matrix degradation in randomly oriented discontinuous-fibre composites. *Composites Science and Technology*, 55(2) :171–186.
- [116] Meraghni, F., Desrumaux, F., and Benzeggagh, M.-L. (2002). Implementation of a constitutive micromechanical model for damage analysis in glass mat reinforced composite structures. *Composites Science and Technology*, 62(16) :2087–2097.
- [117] Mercier, S. and Molinari, A. (2009a). Homogenization of elastic–viscoplastic heterogeneous materials : Self-consistent and mori-tanaka schemes. *International Journal of Plasticity*, 25(6) :1024 – 1048.

- [118] Mercier, S. and Molinari, A. (2009b). Homogenization of elastic–viscoplastic heterogeneous materials : Self-consistent and mori-tanaka schemes. *International Journal of Plasticity*, 25(6) :1024–1048.
- [119] Mercier, S., Molinari, A., Berbenni, S., and Berveiller, M. (2012). Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 20(2) :024004.
- [120] Michel, J., Moulinec, H., and Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1) :109 – 143.
- [121] Miled, B., Doghri, I., Brassart, L., and Delannay, L. (2013). Micromechanical modeling of coupled viscoelastic–viscoplastic composites based on an incrementally affine formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 50(10) :1755–1769.
- [122] Miled, B., Doghri, I., and Delannay, L. (2011). Coupled viscoelastic–viscoplastic modeling of homogeneous and isotropic polymers : Numerical algorithm and analytical solutions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47) :3381–3394.
- [123] Moreau, S., Chrysochoos, A., Muracciole, J.-M., and Wattrisse, B. (2005). Analysis of thermoelastic effects accompanying the deformation of pmma and pc polymers. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(8) :648–653.
- [124] Mori, T. and Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571–574.
- [125] Murat, F. and Tartar, L. (1997). H-convergence, in Topics in the mathematical modelling of composite materials. In Cherkaev, A. and Kohn, R. V., editors, *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, volume 31, pages 21–43. Birkhäuser, Boston.
- [126] Nasri, A. (2017). *Dimensional reduction for the simulation of metal fatigue*. Theses, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers - ENSAM.
- [127] Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (1999). Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials. *North Holland*, (2nd edition).
- [128] Nezamabadi, S., Yvonnet, J., Zahrouni, H., and Potier-Ferry, M. (2009). A multi-level computational strategy for handling microscopic and macroscopic instabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(27) :2099 – 2110.
- [129] Nezamabadi, S., Zahrouni, H., Yvonnet, J., and Potier-Ferry, M. (2010). A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 8 :287–301.
- [130] Nouri, H. and Meraghni, F. (2008). *Modélisation et identification de lois de comportement avec endommagement en fatigue polycyclique de matériaux composites à matrice thermoplastique*. PhD thesis. Thèse de doctorat Mécanique Paris, ENSAM 2008.

- [131] Nouri, H., Meraghni, F., and Lory, P. (2009). Fatigue damage model for injection-molded short glass fibre reinforced thermoplastics. *International Journal of Fatigue*, 31(5) :934 – 942.
- [132] Nouy, A. and Ladeveze, P. (2004). Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving micro problems. *Int. J. Multiscale Comput. Engrg*, page 170.
- [133] Nouy, A. and Ladeveze, P. (2010). Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :351–372.
- [134] Obert, E., Daghia, F., Ladevèze, P., and Ballere, L. (2014). Micro and meso modeling of woven composites : Transverse cracking kinetics and homogenization. *Composite Structures*, 117 :212 – 221.
- [135] Oliver-Leblond, C., Dumontet, H., and Kondo, D. (2016). A micro-mechanics based strain gradient damage model : formulation and solution for the torsion of a cylindrical bar. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 56 :19–30.
- [136] Ottosen, N. and Ristinmaa, M. (2005). *The Mechanics of Constitutive Modeling*. The Mechanics of Constitutive Modeling. Elsevier Science.
- [137] Özdemiř, I., Brekelmans, W. A. M., and Geers, M. G. D. (2008). Fe2 computational homogenization for the thermo-mechanical analysis of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(3) :602–613.
- [138] Papadopoulos, V. and Tavlaki, M. (2016). The impact of interfacial properties on the macroscopic performance of carbon nanotube composites. a fe2-based multiscale study. *Composite Structures*, 136 :582–592.
- [139] Pascal, P. (2018). *Damage detection in PA 66/6/Glass woven fabric using ultrasonic techniques towards durability prediction of automotive parts*. Theses, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers - ENSAM.
- [140] Pierard, O., Friebel, C., and Doghri, I. (2004). Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites : a general framework and its validation. *Composites Science and Technology*, 64(10) :1587 – 1603.
- [141] Pierard, O., González, C., Segurado, J., LLorca, J., and Doghri, I. (2007). Micro-mechanics of elasto-plastic materials reinforced with ellipsoidal inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 44(21) :6945 – 6962.
- [142] Pierres, E., Baietto, M.-C., and Gravouil, A. (2011). Experimental and numerical analysis of fretting crack formation based on 3d x-fem frictional contact fatigue crack model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(7) :532 – 551. Surface mechanics : facts and numerical models.
- [143] Pina, J., Kouznetsova, V., and Geers, M. (2015). Thermo-mechanical analyses of heterogeneous materials with a strongly anisotropic phase : the case of cast iron. *International Journal of Solids and Structures*, 63 :153 – 166.

- [144] Piotrowski, B., Ben Zineb, T., Patoor, E., and Eberhardt, A. (2012). Modeling of niobium precipitates effect on the ni47ti44nb9 shape memory alloy behavior. *International Journal of Plasticity*, 36 :130 – 147.
- [145] Ponte Castañeda, P. and Suquet, P. (1997). Nonlinear composites. volume 34 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 171 – 302. Elsevier.
- [146] Ponte Castañeda, P. and Willis, J. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12) :1919 – 1951.
- [147] Ponte-Castañeda, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) :45–71.
- [148] Praud, F. (2018). *Multi-scale modelling of thermoplastic-based woven composites, cyclic and time-dependent behaviour*. Theses, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM.
- [149] Praud, F., Chatzigeorgiou, G., Bikard, J., and Meraghni, F. (2017a). Phenomenological multi-mechanisms constitutive modelling for thermoplastic polymers, implicit implementation and experimental validation. *Mechanics of Materials*, 114 :9–29.
- [150] Praud, F., Chatzigeorgiou, G., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2017b). Hybrid micromechanical-phenomenological modelling of anisotropic damage and anelasticity induced by micro-cracks in unidirectional composites. *Composite Structures*, 182 :223 – 236.
- [151] Puck, A. and Schürmann, H. (2002). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12) :1633 – 1662.
- [152] Qi, M., Giraud, A., Colliat, J., and Shao, J. (2016). A numerical damage model for initially anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 100-101 :245 – 256.
- [153] Qu, J. and Cherkaoui, M. (2006). Fundamentals of micromechanics of solids. *Wiley*.
- [154] Reifsnider, K.-L. and Jamison, R. (1982). Fracture of fatigue-loaded composite laminates. *International Journal of Fatigue*, 4(4) :187 – 197.
- [155] Renard, J. and Marmonier, M.-F. (1987). Etude de l'initiation de l'endommagement dans la matrice d'un matériau composite par une méthode d'homogénéisation. *Aerospace Science and Technology*, 9 :37–51.
- [156] Ruijter, W. (2009). Analysis of mechanical properties of woven textile composites as a function of textile geometry.
- [157] Ryckelynck, D., Lampoh, K., and Quilicy, S. (2016). Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, 51(2) :309–317.

- [158] Saleh, M.-N., Lubineau, G., Potluri, P., Withers, P.-J., and Soutis, C. (2016). Micro-mechanics based damage mechanics for 3d orthogonal woven composites : Experiment and numerical modelling. *Composite Structures*, 156 :115 – 124. 70th Anniversary of Professor J. N. Reddy.
- [159] Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques heterogenes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4) :331 – 351.
- [160] Sanchez-Palencia, E. (1978). Non-homogeneous media and vibration theory. In *Lecture Notes in Physics 127*. Springer-Verlag, Berlin.
- [161] Schindler, S., Mergheim, J., Zimmermann, M., Aurich, J. C., and Steinmann, P. (2017). Numerical homogenization of elastic and thermal material properties for metal matrix composites (mmc). *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 29(1) :51–75.
- [162] Schröder, J., Labusch, M., and Keip, M.-A. (2016). Algorithmic two-scale transition for magneto-electro-mechanically coupled problems : Fe2-scheme : Localization and homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 302 :253 – 280.
- [163] Scida, D., Aboura, Z., Benzeggagh, M., and Bocherens, E. (1999). A micro-mechanics model for 3d elasticity and failure of woven-fibre composite materials. *Composites Science and Technology*, 59(4) :505 – 517.
- [164] Sengupta, A., Papadopoulos, P., and Taylor, R. L. (2012). A multiscale finite element method for modeling fully coupled thermomechanical problems in solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91 :1386–1405.
- [165] Seupel, A., Hütter, G., and Kuna, M. (2018). An efficient fe-implementation of implicit gradient-enhanced damage models to simulate ductile failure. *Engineering Fracture Mechanics*, 199 :41 – 60.
- [166] Sherburn, M. (2007). *Geometric and mechanical modelling of textiles*. Phd thesis, University of Nottingham.
- [167] Shuguang, L. and Anchana, W. (2004). Unit cells for micromechanical analyses of particle-reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 36(7) :543–572.
- [168] Simo, J.-C. and Hughes, T.-J.-R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York.
- [169] Smit, R., Brekelmans, W., and Meijer, H. (1998). Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1) :181 – 192.
- [170] Sornin, D. and Saanouni, K. (2011). About elastoplastic nonlocal formulations with damage gradients. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(6) :845–875.
- [171] Suquet, P. (1983). Analyse limite et homogenisation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris II*, 295 :1355–1358.



- [172] Suquet, P. (1985). Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. *Plasticity today : modelling, methods and applications*, pages 279–310.
- [173] Suquet, P. M. (1987). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In *Lecture Notes in Physics*, volume 272, pages 193–278. Springer, Berlin.
- [174] Swan, C.-C. (1994). Techniques for stress- and strain-controlled homogenization of inelastic periodic composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 117(3) :249 – 267.
- [175] Tabiei, A. and Yi, W. (2002). Comparative study of predictive methods for woven fabric composite elastic properties. *Composite Structures*, 58(1) :149 – 164.
- [176] Tartar, L. (1978). Non linear constitutive relations and homogenization. In Penha, G. M. D. L. and Medeiros, L. A. J., editors, *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, volume 30 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 472 – 484. North-Holland.
- [177] Tchalla, A., Belouettar, S., Makradi, A., and Zahrouni, H. (2013). An abaqus toolbox for multiscale finite element computation. *Composites Part B : Engineering*, 52 :323–333.
- [178] Temizer, I. (2012). On the asymptotic expansion treatment of two-scale finite thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, 53 :74–84.
- [179] Temizer, I. and Wriggers, P. (2011). Homogenization in finite thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2) :344 – 372.
- [180] Terada, K. and Kikuchi, N. (2001). A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(40) :5427–5464.
- [181] Tikarrouchine, E., Chatzigeorgiou, G., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2019). Fully coupled thermo-viscoplastic analysis of composite structures by means of multi-scale three-dimensional finite element computations. *International Journal of Solids and Structures*, 164 :120 – 140.
- [182] Tikarrouchine, E., Chatzigeorgiou, G., Praud, F., Piotrowski, P., Chemisky, Y., and Meraghni, F. (2018). Three-dimensional fe2 method for the simulation of non-linear, rate-dependent response of composite structures. *Composite Structures*, 193 :165–179.
- [183] Tumbajoy-Spinel, D.-Y., Feulvarch, ., Bergheau, J.-M., and Kermouche, G. (2013). 2d axisymmetric x-fem modeling of the hertzian cone crack system. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(9) :715 – 725.
- [184] Vasiukov, D., Panier, S., and Hachemi, A. (2015). Non-linear material modeling of fiber-reinforced polymers based on coupled viscoelasticity–viscoplasticity with anisotropic continuous damage mechanics. *Composite Structures*, 132 :527–535.

- [185] Wang, L., Wu, J., Chen, C., Zheng, C., Li, B., Joshi, S.-C., and Zhou, K. (2017). Progressive failure analysis of 2d woven composites at the meso-micro scale. *Composite Structures*, 178 :395 – 405.
- [186] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1033) :293–297.
- [187] Xu, R., Bouby, C., Zahrouni, H., Ben Zineb, T., Hu, H., and Potier-Ferry, M. (2018). 3d modeling of shape memory alloy fiber reinforced composites by multiscale finite element method. *Composite Structures*, 200 :408 – 419.
- [188] Yu, Q. and Fish, J. (2002). Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales : a coupled thermo-viscoelastic example problem. *International Journal of Solids and Structures*, 39(26) :6429–6452.
- [189] Yvonnet, J. and He, Q.-C. (2007). The reduced model multiscale method (r3m) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223(1) :341 – 368.
- [190] Zhou, L., Chen, M.-W., Liu, C., and Wu, H. (2018). A multi-scale stochastic fracture model for characterizing the tensile behavior of 2d woven composites. *Composite Structures*, 204 :536 – 547.
- [191] Zhu, Q., Shao, J., and Kondo, D. (2011). A micromechanics-based thermodynamic formulation of isotropic damage with unilateral and friction effects. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(3) :316 – 325.



# Annexe A

## Solution semi-analytique d'un composite multi-couches

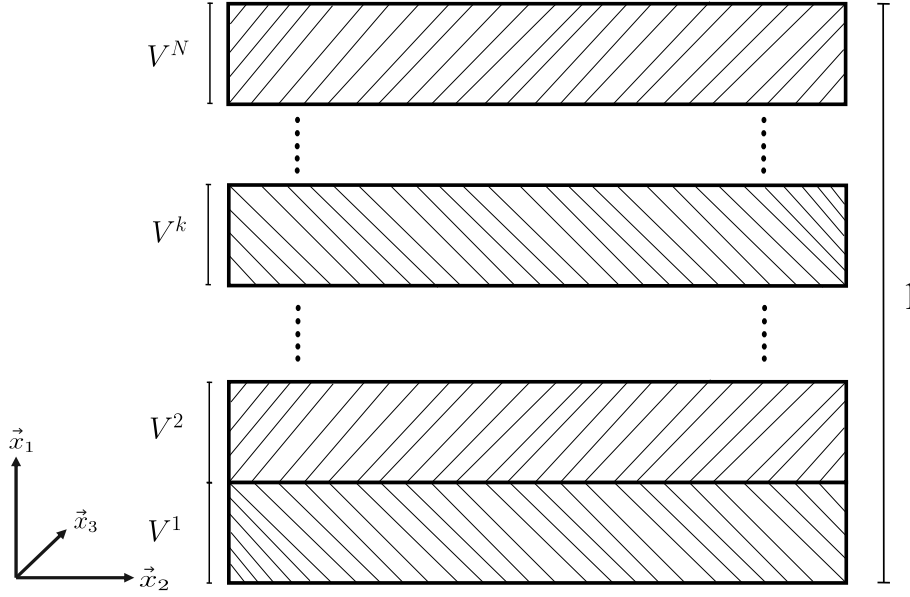
Pour les milieux périodiques, un des problèmes ayant une solution analytique ou semi analytique en régime non linéaire consiste en un multi-coches. Ce problème admet une solution pouvant être à celle obtenue par homogénéisation périodique. En effet, un matériau multi-couches est conçu d'un assemblage de cellules unitaires constituées elles-mêmes de plusieurs phases empilées. Ici, on considère un matériau multi-couches dont la cellule unitaire est constituée de  $N$  phases empilées, tels qu'elles sont présentées dans la Figure A.1. Chaque phase à une fraction volumique  $V^k$  et un module tangent  $\mathbb{D}^{(k)}$  avec  $\sum_{i=1}^N V^{(i)} = 1$ . Pour résoudre un tel problème, deux étapes sont nécessaire : i) la première étape concerne la résolution du problème de la cellule unitaire et le calcul de la contrainte macroscopique et ii) la deuxième partie concerne le calcul du module tangent macroscopique.

### A.1 Problème local de la cellule unitaire

Le système d'équilibre microscopique au sein de la cellule unitaire sous forme linéarisé s'écrit dans le cas général sous la forme suivante [32] :

$$\mathbf{div}(\mathbb{D} : \mathbf{grad}\delta\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.1})$$

avec  $\mathbb{D}$  est le module tangent mécanique et  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$  la partie périodique du déplacement. En raison de la forme de la microstructure multi-couches, tous les champs ne varient que dans la direction  $x_1$  de l'espace (direction d'empilement). Cela simplifie le problème

FIGURE A.1 Cellule unitaire d'un composite multi-couches avec  $N$  phases différentes.

d'équilibre de la cellule unitaire en un problème 1D. Pour une cellule unitaire multi-couches sous conditions aux limites périodiques,  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$  est uniforme selon les deux directions de l'espace  $x_2$  et  $x_3$  et présente une non-uniformité uniquement sur l'axe  $x_1$  [32]. L'équation A.1 peut être réduite à une équation différentielle 1-D et la forme locale pour chaque phase est représentée sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dx_1} \left( \mathbf{D}_{nn}^{(k)} \cdot \frac{d\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}}{dx_1} + \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\mathbf{D}_{nn}^{(k)} = \begin{bmatrix} D_{1111}^{(k)} & D_{1121}^{(k)} & D_{1131}^{(k)} \\ D_{2111}^{(k)} & D_{2121}^{(k)} & D_{2131}^{(k)} \\ D_{3111}^{(k)} & D_{3121}^{(k)} & D_{3131}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(k)} \\ \tilde{u}_2^{(k)} \\ \tilde{u}_3^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} \\ \sigma_{21}^{(k)} \\ \sigma_{31}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

En raison de la continuité de vecteur de contrainte dans la direction d'empilement  $x_1$  et après intégration de l'équation A.2, le système d'équations différentielles A.2 devient :

$$\mathbf{D}_{nn}^{(k)} \cdot \frac{d\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}}{dx_1} + \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)} = \mathbf{m}, \quad \implies \quad \frac{d\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}}{dx_1} = [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(k)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)}], \quad (\text{A.4})$$

avec  $\mathbf{m}$  est un vecteur constant indépendant du matériau. Après une intégration de l'équation différentielle A.4, la solution du système d'équation A.2 est donnée sous la forme suivante :

$$\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} = [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(k)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)}] x_1 + \mathbf{c}^{(k)}, \quad (\text{A.5})$$

avec  $\mathbf{c}^{(k)}$  des vecteurs constants dépendants du matériau. Dans la dernière expression,  $\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$  est une fonction linéaire de  $x_1$ . La position  $x_1$  varie de 0 à  $V^1$  pour la couche 1 et de  $V^{k-1}$  à  $V^k$  pour la couche  $k$ . Par conséquent, à partir de la condition de périodicité du déplacement  $\mathbf{u}^{(k)}$ , on peut supposer que  $\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(0) = \delta\tilde{\mathbf{u}}^{(N)}(1) = 0$ . Cela permet d'écrire :

$$\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^{(N)} = -[\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(N)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(N)}]. \quad (\text{A.6})$$

La condition de continuité de  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$  dans toutes les interfaces des différents plis permet d'écrire la relation suivante :

$$\delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(V^{(k)}) = \delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k+1)}(V^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (\text{A.7})$$

Utilisant l'équation (A.5), on peut écrire l'équation (A.7) pour chaque phase sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(1)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}] V^{(1)} &= [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(2)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)}] V^{(1)} + \mathbf{c}^{(2)}, \\ &\vdots \\ [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(k)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(k)}] \sum_{i=1}^k V^{(i)} + \mathbf{c}^{(k)} &= \\ [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(k+1)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(k+1)}] \sum_{i=1}^k V^{(i)} + \mathbf{c}^{(k+1)}, \\ &\vdots \\ [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(N-1)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(N-1)}] \sum_{i=1}^{N-1} V^{(i)} + \mathbf{c}^{(N-1)} &= \\ [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(N)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(N)}] \sum_{i=1}^{N-1} V^{(i)} - [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(N)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(N)}]. \end{aligned}$$

Après sommation de toutes les expressions précédentes on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \cdot [\mathbf{m} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)}] V^{(i)} = \mathbf{0},$$

Par conséquent,  $m$  est donné via l'expression suivante :

$$\mathbf{m} = \left[ \sum_{i=1}^N V^{(i)} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \right]^{-1} \cdot \left[ \sum_{r=1}^N V^{(i)} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Connaissant le vecteur  $m$  (équation A.8), on peut calculer l'incrément de la déformation microscopique  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  en chaque phase du multi-couches à partir de l'équation A.4 :

$$\delta\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{d\delta\tilde{u}_1^{(k)}}{dx_1}, \quad 2\delta\varepsilon_{21}^{(k)} = \frac{d\delta\tilde{u}_2^{(k)}}{dx_1}, \quad 2\delta\varepsilon_{31}^{(k)} = \frac{d\delta\tilde{u}_3^{(k)}}{dx_1}, \quad (\text{A.9})$$

$$\delta\varepsilon_{kl}^{(k)} = 0 \quad \text{pour les autres composantes .}$$

## A.2 Calcul des opérateurs tangents

Le tenseur d'élasticité de chaque couche est décomposé à l'aide des trois tenseurs d'ordre 2 suivants<sup>1</sup> [153, 31] :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{nn}^{(k)} &= \begin{bmatrix} D_{1111}^{(k)} & D_{1121}^{(k)} & D_{1131}^{(k)} \\ D_{2111}^{(k)} & D_{2121}^{(k)} & D_{2131}^{(k)} \\ D_{3111}^{(k)} & D_{3121}^{(k)} & D_{3131}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{nt}^{(k)} = \begin{bmatrix} D_{1122}^{(k)} & D_{1133}^{(k)} & D_{1123}^{(k)} \\ D_{2122}^{(k)} & D_{2133}^{(k)} & D_{2123}^{(k)} \\ D_{3122}^{(k)} & D_{3133}^{(k)} & D_{3123}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_{tt}^{(k)} &= \begin{bmatrix} D_{2222}^{(k)} & D_{2233}^{(k)} & D_{2223}^{(k)} \\ D_{3322}^{(k)} & D_{3333}^{(k)} & D_{3323}^{(k)} \\ D_{2322}^{(k)} & D_{2333}^{(k)} & D_{2323}^{(k)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Dans le cas général, la déformation et l'équation d'équilibre au niveau microscopique, sont écrites sous la forme linéarisée incrémentale suivante :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{grad}\delta\tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{div}(\delta\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.11})$$

À l'aide du module tangent, l'incrément de contrainte s'écrit comme suit :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{A.12})$$

---

1. le tenseur de rigidité est considéré dans un cas général, où toutes les couches possèdent une anisotropie complète, i.e. le tenseur de rigidité est constitué de 21 composants indépendants

La combinaison des équations A.11 et A.12 donne :

$$\mathbf{div} (\mathbb{D} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbb{D} : \mathbf{grad} \delta \tilde{\boldsymbol{u}}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.13})$$

La solution de l'équation homogène ci-dessus, est donnée sous la forme suivante [31] :

$$\delta \tilde{\boldsymbol{u}} = \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\chi} \quad (\text{A.14})$$

où  $\boldsymbol{\chi}$  est un tenseur périodique d'ordre 3 appelé le terme correcteur. Combinant les équations A.14 et A.13, on obtient la forme générale de l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{div} \left( [\mathbb{D} + \mathbb{D} : \mathbf{grad} \delta \boldsymbol{\chi}]^T \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.15})$$

En suivant la même démarche que pour le problème de la cellule unitaire, l'équation générale A.15 est réduite à un problème 1D à deux équations. Par conséquent, la forme locale pour chaque phase  $k$  prend les deux formes suivantes :

$$\frac{d}{dx_1} \left( \mathbf{D}_{nn}^{(k)} \cdot \frac{d\boldsymbol{\chi}_n^{(k)}}{dx_1} + \mathbf{D}_{nn}^{(k)} \right) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx_1} \left( \mathbf{D}_{nn}^{(k)} \cdot \frac{d\boldsymbol{\chi}_t^{(k)}}{dx_1} + \mathbf{D}_{nt}^{(k)} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\boldsymbol{\chi}_n^{(k)} = \begin{bmatrix} \chi_{111}^{(k)} & \chi_{211}^{(k)} & \chi_{311}^{(k)} \\ \chi_{112}^{(k)} & \chi_{212}^{(k)} & \chi_{312}^{(k)} \\ \chi_{113}^{(k)} & \chi_{213}^{(k)} & \chi_{313}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\chi}_t^{(k)} = \begin{bmatrix} \chi_{221}^{(k)} & \chi_{331}^{(k)} & \chi_{231}^{(k)} \\ \chi_{222}^{(k)} & \chi_{332}^{(k)} & \chi_{232}^{(k)} \\ \chi_{223}^{(k)} & \chi_{333}^{(k)} & \chi_{233}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Étant donné que la forme du système d'équations A.16 est la même que celle de l'équation A.2, sa solution a donc une forme similaire de l'équation A.5 :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\chi}_n^{(k)}}{dx_1} &= [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(k)} \cdot [\mathbf{m}_n - \mathbf{D}_{nn}^{(k)}], \\ \frac{d\boldsymbol{\chi}_t^{(k)}}{dx_1} &= [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(k)} \cdot [\mathbf{m}_t - \mathbf{D}_{nt}^{(k)}], \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$



Après le calcul, les quantités  $m_n$  et  $m_t$  prend les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n &= \left[ \sum_{i=1}^N V^{(i)} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \right]^{-1}, \\ \mathbf{m}_t &= \left[ \sum_{i=1}^N V^{(i)} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \right]^{-1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^N V^{(i)} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \cdot \mathbf{D}_{nt}^{(i)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Finalement, le module tangent du composite multi-couches est donné par les trois tenseurs suivants :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_{nn} &= \sum_{i=1}^N V^{(i)} \left[ \mathbf{D}_{nn}^{(i)} \cdot \frac{d\chi_n^{(i)}}{dx_1} + \mathbf{D}_{nn}^{(i)} \right] = \mathbf{m}_n, \\ \bar{\mathbf{D}}_{nt} &= \sum_{i=1}^N V^{(i)} \left[ \mathbf{D}_{nn}^{(i)} \cdot \frac{d\chi_t^{(i)}}{dx_1} + \mathbf{D}_{nt}^{(i)} \right] = \mathbf{m}_t = \bar{\mathbf{D}}_{nn} \cdot \left[ \sum_{i=1}^N V^{(i)} [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \cdot \mathbf{D}_{nt}^{(i)} \right], \\ \bar{\mathbf{D}}_{tn} &= \bar{\mathbf{D}}_{nt}^T, \\ \bar{\mathbf{D}}_{tt} &= \sum_{i=1}^N V^{(i)} \left[ \mathbf{D}_{tn}^{(i)} \cdot \frac{d\chi_t^{(i)}}{dx_1} + \mathbf{D}_{tt}^{(i)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N V^{(i)} \left[ \mathbf{D}_{tn}^{(i)} \cdot [\mathbf{D}_{nn}^{-1}]^{(i)} \cdot [\bar{\mathbf{D}}_{nt} - \mathbf{D}_{nt}^{(i)}] + \mathbf{D}_{tt}^{(i)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

# Annexe B

## Convergence forte et convergence faible de la température

### B.1 Problème thermique 1D d'un composite multicouches

Considérons le matériau multicouches de la Figure B.1 constitué d'une cellule unitaire répétée contenant deux couches thermiquement isotropes : i) une couche en acier 316 qui possède une conductivité thermique  $\kappa_1$  et une capacité calorifique  $\tilde{c}_1$  par unité de volume de :

$$\kappa_1 = 1.5\text{E-}5 \text{ MW}/(\text{m K}), \quad \tilde{c}_1 = \rho_1 c_{p1} = 3.9 \text{ MPa/K}$$

et ii) une couche en céramique SiC ayant une conductivité thermique  $\kappa_2$  et une capacité calorifique  $\tilde{c}_2$  par unité de volume de :

$$\kappa_2 = 1.2\text{E-}4 \text{ MW}/(\text{m K}), \quad \tilde{c}_2 = \rho_2 c_{p2} = 2.325 \text{ MPa/K}.$$

Les deux phases du matériau composite utilisé ont des fractions volumiques égales ( $v^{f1} = v^{f2} = 0.5$ ). Initialement, la structure globale est sous une température uniforme égale à  $293,15 \text{ K}$ . Des conditions aux limites en température sont appliquées sur la structure. En effet, la température est fixée sur une extrémité à  $293,15 \text{ K}$ , alors qu'elle augmente linéairement sur l'autre extrémité de  $293,15$  à  $393,15 \text{ K}$  en  $1000 \text{ s}$  (Figure B.1) [31].

La taille de la structure macroscopique est égale à  $1 \text{ m}$ , tandis que la longueur caractéristique adimensionnelle de la cellule unitaire est  $\epsilon$ . Autrement dit, la taille

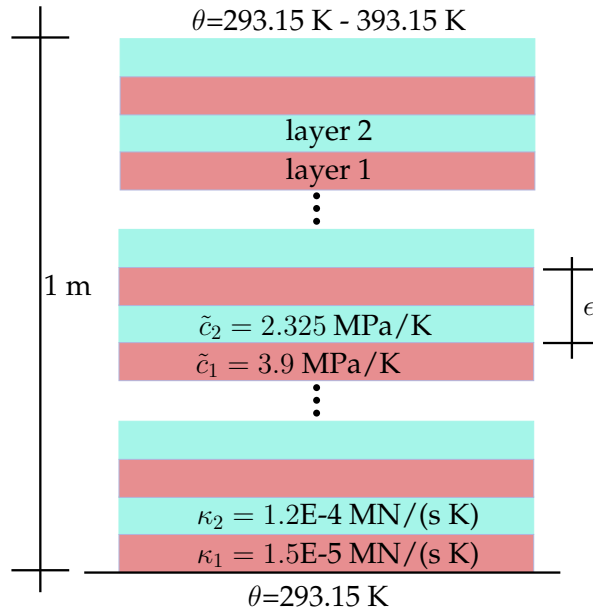


FIGURE B.1 Composite multi-couches soumis à une élévation de température sur une extrémité [31].

réelle de la cellule unitaire est  $\epsilon = 1$ . En négligeant les sources de chaleur et les effets mécaniques, l'expression de l'équation d'énergie en 1D peut être écrite comme une équation différentielle aux dérivées partielles paraboliques classiques :

$$\tilde{c}_i \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

L'indice  $i$  prend les valeurs 1 et 2, en fonction des couches. En considérant la continuité de la température et du flux chaleur à l'interface entre deux couches voisines, l'équation d'énergie peut être résolue numériquement à l'aide de la méthode des différences finies. Dans la Figure B.2-a, la température en fonction de la position est présentée à la fin de l'analyse pour différentes tailles des cellules unitaires. Les résultats ont montré que pour des grandes valeurs de  $\epsilon$ , le profil de la température change de manière significative lors du passage d'une couche à l'autre. Cependant, pour des valeurs très petites de  $\epsilon$ , les fluctuations disparaissent et le profil de température macroscopique devient plus lisse. Par conséquent, pour des petites valeurs de  $\epsilon$ , le composite peut être remplacé par un milieu homogène équivalent obéissant à l'équation aux dérivées partielles 1D suivante :

$$\tilde{\bar{c}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \bar{\kappa} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2},$$

avec  $\tilde{\bar{c}} = \langle \tilde{c}_i \rangle = 3.1125 \text{ MPa/K}$  et  $\bar{\kappa} = \langle \kappa_i^{-1} \rangle^{-1} = 2.667\text{E-}5 \text{ MN/[s K]}$ .

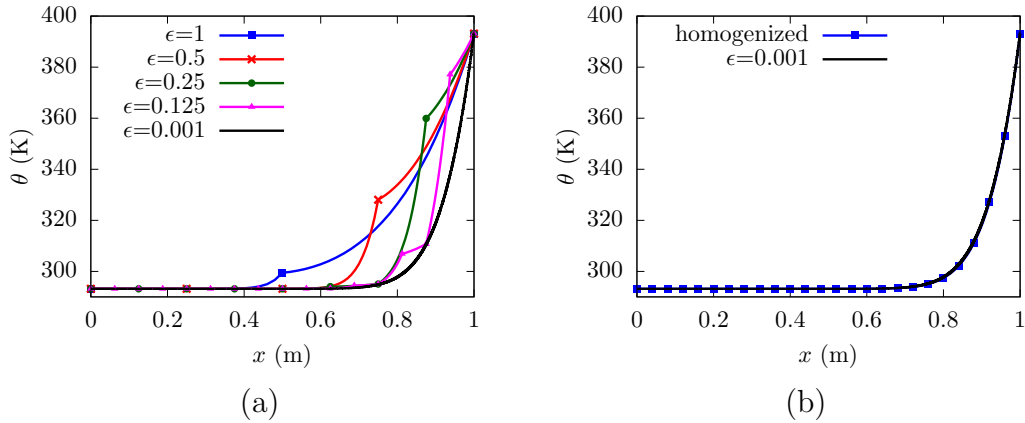


FIGURE B.2 (a) Variation de la température en fonction de la position pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et (b) comparaison du profil de la température entre le composite réel et le matériau homogénéisé à  $t = 1000$  s.

Les expressions de  $\tilde{c}$  et  $\bar{\kappa}$  sont celles données par la théorie d'homogénéisation par expansion asymptotique d'ordre zéros pour ce problème 1D. L'approche d'homogénéisation donne des résultats similaires à ceux qui sont issues d'un calcul pour des valeurs de  $\epsilon$  trop petites pour la courbe température-position (Figure B.2-b). Cela confirme que la méthode d'homogénéisation proposée, prédit la réponse du composite avec une très bonne précision lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Une observation intéressante de la solution de la structure réelle (qui confirme la convergence faible étudiée dans l'approche d'homogénéisation) consiste dans le fait que même si la température présente un profil lisse à  $\epsilon = 0,001$ , son gradient reste très oscillant (Figure B.3).

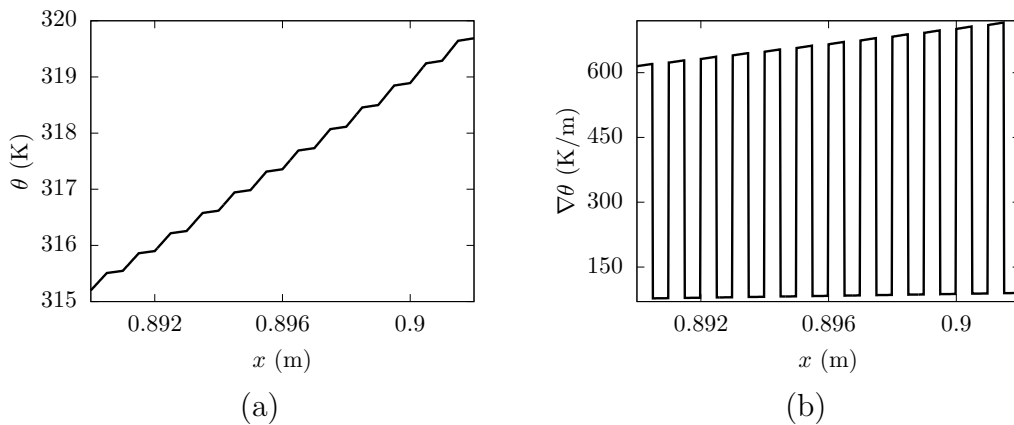


FIGURE B.3 Un zoom sur la variation spatiale de (a) la température et (b) le gradient de température dans le composite réel pour  $\epsilon = 0.001$  à  $t=1000$  s.



# Annexe C

## Connexion de la cellule unitaire avec les nœuds de pilotage thermiques

Afin d'appliquer des conditions aux limites périodiques en température sur une cellule unitaire de forme cubique à l'aide de la méthode des nœuds de pilotage ("constraint drivers"), il est nécessaire d'identifier dans un premier temps les nœuds situés sur : les faces, les arêtes et les coins de la cellule. Pour plus de simplicité, la notation présentée dans la Figure C.1 [148] sera utilisée par la suite :

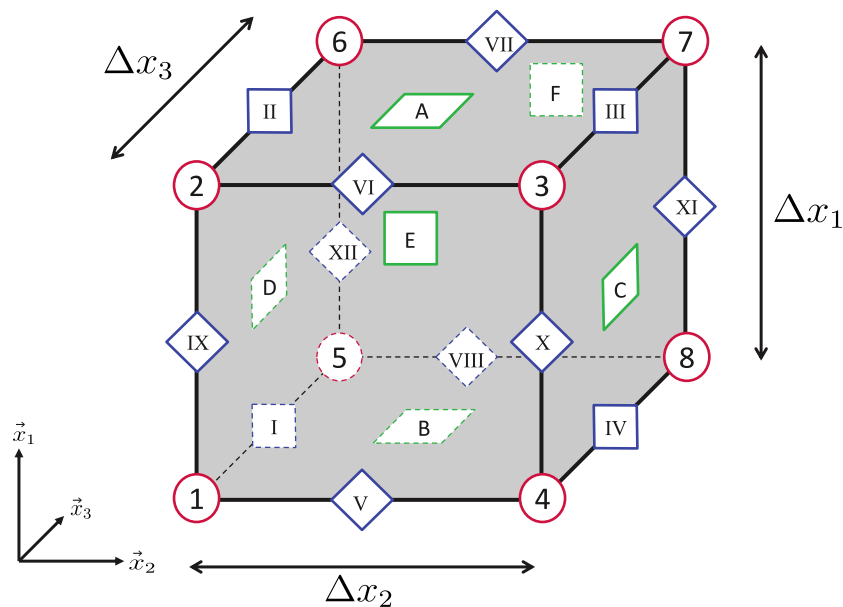


FIGURE C.1 Notation des nœuds situés sur les faces, les arêtes et les coins de la cellule [148].

## C.1 Équations thermiques pour les faces

D'après l'équation 5.52 donnée dans le chapitre 5, les équations thermiques reliant les nœuds de pilotage thermiques avec les nœuds situés dans la même position relative sur des faces opposées de la cellule unitaire sont écrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta^A - \theta^B - \theta_1^{cd} \Delta x_1 = 0 \\ \theta^C - \theta^D - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \\ \theta^E - \theta^F - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec les faces de A à F de la cellule unitaire sont présentées dans la Figure C.2

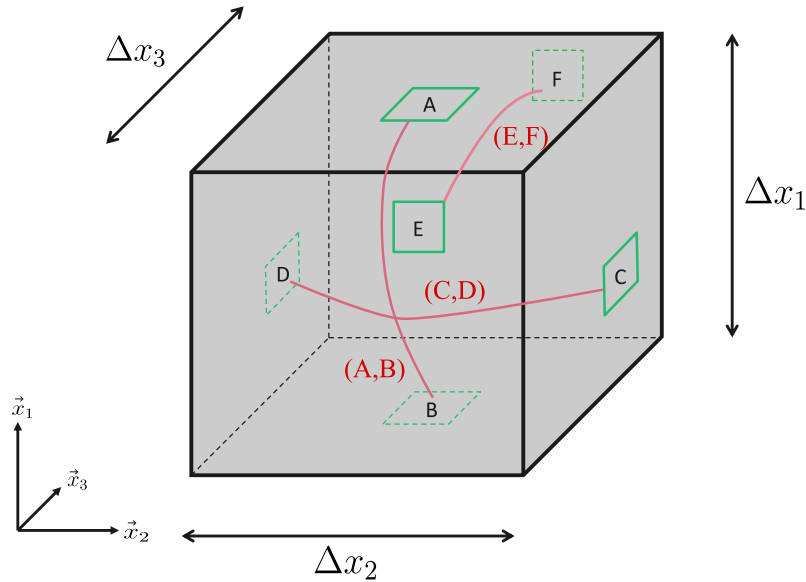


FIGURE C.2 Équations thermiques pour toutes les faces parallèles opposées de la cellule unitaire.

## C.2 Équations thermiques pour le premier groupe d'arêtes

Les nœuds situés sur les arêtes de la cellule unitaire appartiennent à deux faces différentes à la fois. Pour cela, il est clair que deux nœuds opposés peuvent être trouvés à la même position relative. D'après l'équation 5.52, quatre équations peuvent être déduites pour le premier groupe d'arêtes. Ces équations sont initialement écrites sous

la forme suivante :

$$\begin{cases} \theta^{II} - \theta^I - \theta_1^{cd} \Delta x_1 = 0 \\ \theta^{III} - \theta^{II} - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \\ \theta^{III} - \theta^{IV} - \theta_1^{cd} \Delta x_1 = 0 \\ \theta^{IV} - \theta^I - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Les arêtes de I à IV sont présentées dans la Figure C.3. Le système d'équations C.2 est défini avec une redondance qui rend le système sur-conditionné. Par exemple l'arête III est à la fois liée aux arêtes II et IV qui sont eux mêmes liées à l'arête I. Pour rendre le système solvable, il est préférable de remplacer les équations (III, II) et (III, IV) par l'équation (III, I) obtenue soit en remplaçant l'équation (II, I) dans (III, II) ou (IV, I) dans (III, VI) :

$$\begin{cases} \theta^{II} - \theta^I - \theta_1^{cd} \Delta x_1 = 0 \\ \theta^{III} - \theta^I - \theta_1^{cd} \Delta x_1 - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \\ \theta^{IV} - \theta^I - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

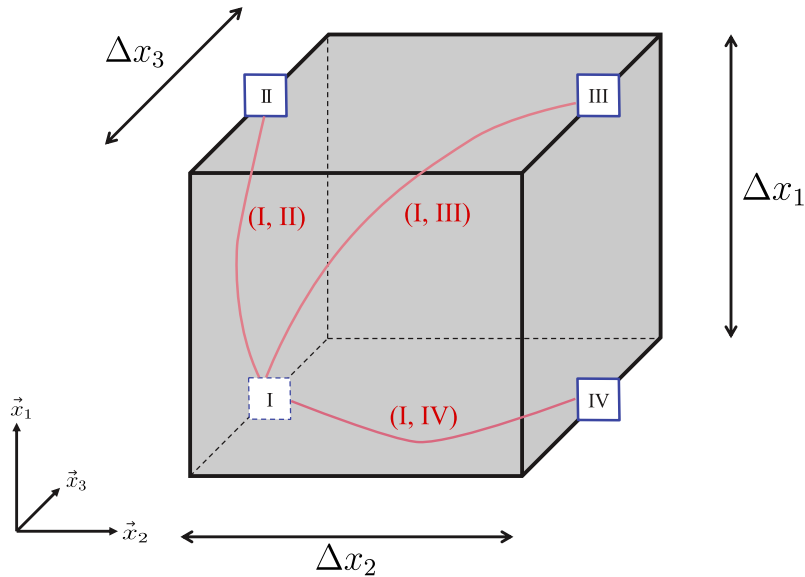


FIGURE C.3 Équations thermiques pour le 1<sup>er</sup> groupe d'arêtes de la cellule unitaire.



### C.3 Équations thermiques pour le deuxième groupe d'arêtes

De la même manière, à partir de l'équation 5.52 et après simplification, les équations thermiques du second groupe des arêtes sont écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \theta^{VI} - \theta^V - \theta_1^{cd} \Delta x_1 = 0 \\ \theta^{VIII} - \theta^V - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \\ \theta^{VII} - \theta^V - \theta_1^{cd} \Delta x_1 - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \end{cases} \quad (C.4)$$

avec les arêtes de V à VIII sont représentées sur la Figure C.4

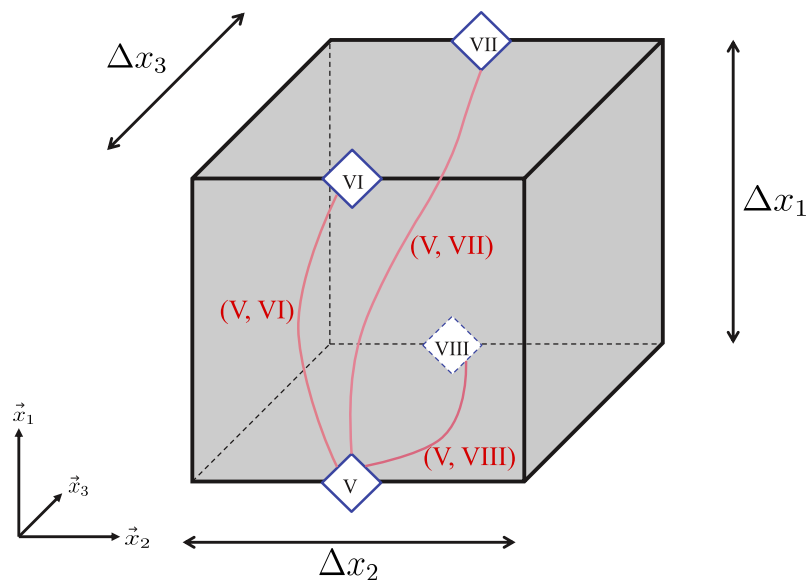


FIGURE C.4 Équations thermiques pour le 2<sup>ème</sup> groupe d'arêtes de la cellule unitaire.

## C.4 Équations thermiques pour le troisième groupe d'arêtes

De la même manière, à partir de l'équation 5.52 et après simplification, les équations thermiques du troisième groupe des arêtes sont écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \theta^X - \theta^{IX} - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \\ \theta^{XII} - \theta^{IX} - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \\ \theta^{XI} - \theta^{IX} - \theta_2^{cd} \Delta x_2 - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

avec les arêtes de IX à XII sont représentées sur la Figure C.5

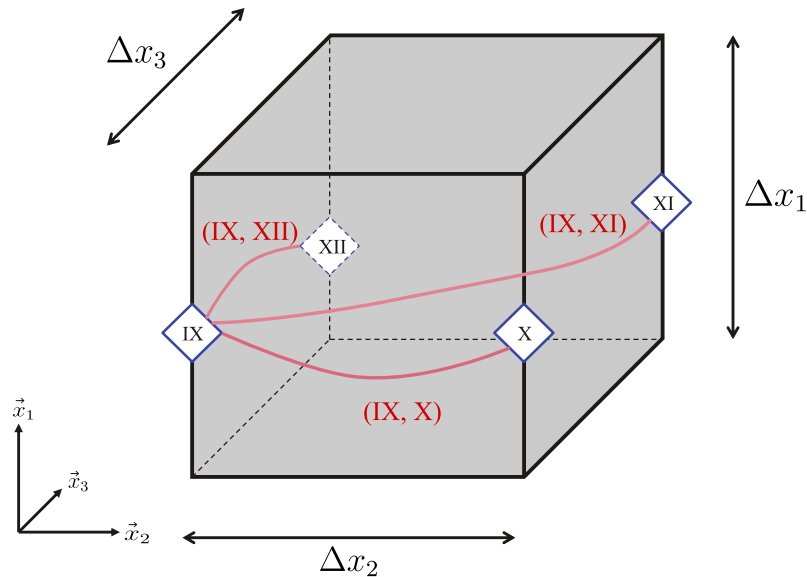


FIGURE C.5 Équations thermiques pour le 3<sup>ème</sup> groupe d'arêtes de la cellule unitaire.

## C.5 Équations thermiques pour les nœuds situés dans les huit coins de la cellule unitaire

En suivant la même méthodologie, à partir de l'équation 5.52, les équations thermiques des nœuds situés dans les coins de la cellule unitaire sont écrites sous la forme

suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^2 - \theta^1 - \theta_1^{cd} \Delta x_1 = 0 \\ \theta^4 - \theta^1 - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \\ \theta^5 - \theta^1 - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \\ \theta^3 - \theta^1 - \theta_1^{cd} \Delta x_1 - \theta_2^{cd} \Delta x_2 = 0 \\ \theta^6 - \theta^1 - \theta_1^{cd} \Delta x_1 - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \\ \theta^8 - \theta^1 - \theta_2^{cd} \Delta x_2 - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \\ \theta^7 - \theta^1 - \theta_1^{cd} \Delta x_1 - \theta_2^{cd} \Delta x_2 - \theta_3^{cd} \Delta x_3 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

où les coins de 1 à 8 sont présentés dans la Figure C.6

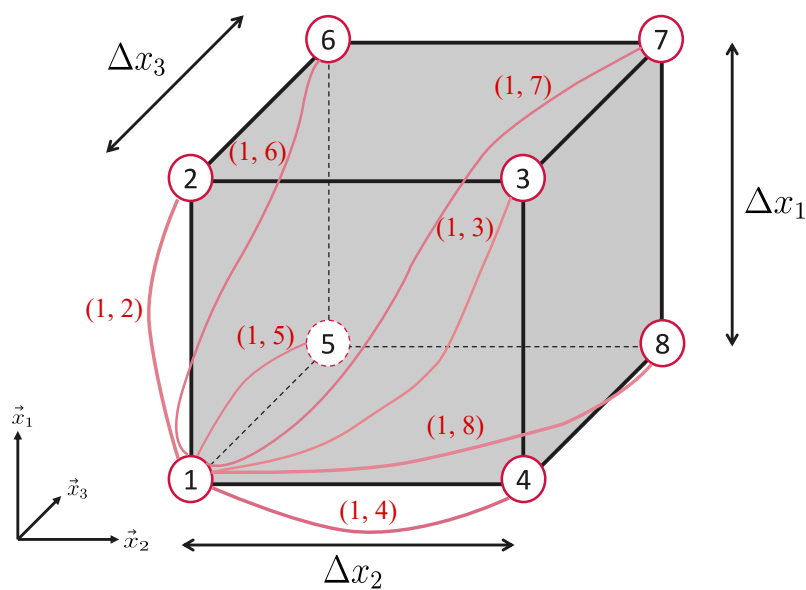


FIGURE C.6 Équations thermiques pour les huit coins de la cellule unitaire.



## Simulation multi-échelles par EF<sup>2</sup> de structures composites périodiques en régime viscoélastique-viscoplastique- endommageable avec couplage thermomécanique fort

**Résumé:** Une approche de simulation numérique multi-échelles EF<sup>2</sup> fondée sur la théorie de l'homogénéisation périodique a été développée pour prédire la réponse globale couplée mécanique et thermomécanique fortement non linéaire des structures composites 3D. La stratégie de calcul intègre les effets de la microstructure périodique en introduisant l'architecture des renforts et les lois constitutives locales. Les lois de comportement des constituants utilisées obéissent aux lois de matériaux standards généralisées et sont formulées dans un cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI). Les équations caractéristiques (équilibre et lois de la thermodynamique) sont formulées sous l'hypothèse des petites déformations et rotations, et résolues simultanément de façon incrémentale aux deux échelles (microscopique et macroscopique). Sur le plan numérique, une implémentation au moyen de routines UMAT imbriquées (Méta-UMAT) a été développée et combinée à une technique de parallélisation dans le code de calcul Abaqus/Standard. La stratégie de calcul multi-échelles est appliquée pour simuler la réponse globale de structures composites 3D soumises à des trajets de chargement thermomécaniques complexes. Les structures composites sont constituées d'une matrice polymère thermoplastique viscoélastique-viscoplastique avec endommagement ductile et renforcées par différents types de renforcements (fibres courtes ou tissus). L'endommagement anisotrope dans les torons de tissu est modélisé à travers une approche micromécanique permettant de suivre l'évolution de la densité de micro-fissures transverses. Cette stratégie de calcul peut être déployée sur les structures en matériaux composites ayant une microstructure périodique et dont les phases présentent différents types des lois de comportement non linéaires (rhéologie, mécanismes d'endommagement et couplage thermomécanique). Les capacités de l'approche multi-échelles sont démontrées en comparant les prédictions numériques aux résultats expérimentaux en termes de réponse globale et de champs de déformation macroscopiques et microscopiques. Les performances de l'approche sont également illustrées à travers l'accès aux répartitions spatio-temporelles des variables internes à l'échelle de la microstructure ainsi que la dissipation intrinsèque dans les phases constitutives.

**Mots clés:** Calcul multi-échelles par EF, processus thermo-mécanique, homogénéisation périodique, composite tissé, matrices thermoplastiques, méthode des EF<sup>2</sup>.

## Multiscale FE<sup>2</sup> simulation of periodic composite structures in viscoelastic-viscoplastic-damageable regime with strong thermomechanical coupling

**Abstract:** A multi-scale FE<sup>2</sup> approach based on the periodic homogenization theory is developed to predict the overall response of nonlinear mechanical and fully coupled thermomechanical 3D composite structures. The computational strategy integrates the periodic microstructure effects by introducing the architecture of the reinforcement and the local constitutive laws. The considered constituents' constitutive laws obey generalized standard materials laws and are formulated within the framework of thermodynamics of irreversible processes. The characteristic equations (equilibrium and thermodynamics laws) are formulated under the assumption of small strains and rotations. They are solved simultaneously at both scales (microscopic and macroscopic) using an incremental scheme. For the numerical implementation, an advanced Meta-UMAT subroutine is developed and combined with a parallelization technique in the finite element commercial software Abaqus/Standard. The multi-scale computational strategy is applied to simulate the overall response of 3D composite structures under complex thermomechanical loading paths. The composite structures consist of thermoplastic polymer matrix with viscoelastic-viscoplastic behavior and ductile damage, reinforced by different types of reinforcements (short fibers or woven fabrics). The anisotropic damage within the yarns is modeled through a micromechanical approach to follow the transverse microcracks density evolution. This computational strategy is deployed on composite structures having periodic microstructure, whose phases exhibit different types of nonlinear behavior laws (rheology, damage mechanisms and thermomechanical coupling). The capabilities of the multi-scale approach are demonstrated (i) by comparing numerical predictions with experimental results in terms of global response, macroscopic and microscopic strain fields, and (ii) through the access to spatio-temporal distributions of internal variables at the microstructure scale as well as the intrinsic dissipation in the constitutive phases.

**Keywords:** Multi-scale FE computation, thermo-mechanical processes, periodic homogenization, woven composites, thermoplastic matrices, FE<sup>2</sup> method.

