



UNIVERSITÉ PARIS-EST
École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : Génie Civil

Présentée par

Vinh Hoang Tan LE

Titre

Modélisation micromécanique de la fissuration
des matériaux hétérogènes
par des modèles d'inclusion
avec décollement à l'interface

Composition du jury

Albert Giraud	Université de Lorraine	Rapporteur
Habibou Maitournam	ENSTA ParisTech	Rapporteur
Julie Diani	Ecole Polytechnique	Examinatrice
Julien Sanahuja	EDF R&D	Examineur
Amade Pouya	Ecole des Ponts ParisTech	Directeur de thèse
Sébastien Brisard	Ecole des Ponts ParisTech	Co-directeur

Résumé

Le décollement à l'interface constitue l'un des principaux modes de ruine pour les matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice". Du point de vue de la modélisation, il est donc essentiel de décrire le comportement de tels matériaux comportant des interfaces partiellement décollées.

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (en élasticité plane), ce travail concerne tout d'abord l'analyse de fissures interfaciales situées à la frontière d'une inclusion circulaire, immergée dans une matrice infinie. La solution générique d'un tel problème, s'appuyant sur la méthode des potentiels complexes de Muskhelishvili, a été proposée par Perlman et Sih (1966). Cette solution générale a été appliquée successivement aux cas d'une fissure unique et de deux fissures symétriques par Toya (1974) et Prasad et Simha (2002, 2003), respectivement. Nous utilisons ici la méthodologie de Perlman et Sih (1966) pour calculer la solution au problème de deux fissures d'interface de longueurs différentes, mais partageant le même axe de symétrie. Sur la base de la solution obtenue, nous analysons ensuite la propagation de deux fissures initialement symétriques. Nous montrons que la propagation peut être asymétrique : la longueur d'une des fissures croît, tandis que celle de l'autre reste constante.

Ensuite, le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka est adopté pour étudier l'effet du décollement partiel de l'interface sur le comportement macroscopique du matériau. Finalement, nous présentons une courbe de contrainte-déformation macroscopique du matériau hétérogène de type "inclusion-matrice" soumis à une traction uniaxiale tenant compte de l'endommagement dû au décollement à l'interface. L'influence de paramètres tels que fraction surfacique des inclusions, taille des particules et angle initial des fissures sur cette courbe est examinée.

Mots-clés : Méthode des potentiels complexes ; mécanique de la rupture ; interface inclusion-matrice ; méthodes d'homogénéisation ; loi macroscopique d'endommagement, décollement.

Abstract

Debonding at the interface is one of the main failure modes for "inclusion-matrix" materials. From a modeling point of view, it is therefore essential to describe the behavior of such materials with partially bonded interfaces.

In the framework of 2D linear elastic fracture mechanics, this work concerns first of all the analysis of interfacial fissures located at the boundary of a circular inclusion, immersed in an infinite matrix. The generic solution of such a problem, based on the complex potential method of Muskhelishvili, has been proposed by Perlman and Sih (1966). This general solution was applied successively to the cases of a single crack and two symmetric cracks by Toya (1974) and Prasad and Simha (2002, 2003), respectively. We use here the methodology of Perlman and Sih (1966) to calculate the solution to the problem of two interface cracks of different lengths, but sharing the same axis of symmetry. On the basis of the solution obtained, we then analyze the propagation of two initially symmetrical cracks. We show that the propagation can be asymmetrical : the length of one of the cracks grows, while that of the other remains constant.

Then, the Mori-Tanaka homogenization scheme is adopted to study the effect of the partial debonding of the interface on the macroscopic behavior of the material. Finally, we present a macroscopic stress-strain curve of the "inclusion-matrix" material subjected to uniaxial traction taking into account damage due to debonding at the interface. The influence of parameters such as surface fraction of inclusions, particle size and initial crack angle on this curve is examined.

Keywords : Complex potential method ; fracture mechanics ; inclusion-matrix interface ; homogenization methods ; macroscopic damage law ; debonding.

Table des matières

Table des figures	vi
1 Introduction	1
1.1 Contexte général et l'objectif de la thèse	1
1.2 Roches argileuses	3
1.3 Introduction de la mécanique de la rupture d'interface	6
1.3.1 Champ de contrainte et déplacement	7
1.3.2 Facteur d'intensité de contraintes complexe	8
1.3.3 Mode mixte	9
1.3.4 Zone de contact	9
1.3.5 Taux de restitution de l'énergie	10
1.3.6 Critère de propagation	10
1.4 Introduction de la méthode d'homogénéisation	11
1.4.1 Comportement homogénéisé d'un volume élémentaire représentatif du matériau hétérogène	11
1.4.2 Quelques schémas standard d'estimation du tenseur d'élasticité effectif	14
1.5 Contenu du travail de thèse	15
2 Résolution du problème	17
2.1 Introduction	17
2.2 Position du problème et forme générale de la solution	18
2.3 Détermination des constantes d'intégration	20
2.4 Expression de contraintes sur la partie adhésive et de déplacements relatifs sur la partie décollée de l'interface	23
2.5 Conclusions	24
3 Propagation des fissures d'interface	26
3.1 Introduction	26
3.2 Facteur d'intensité de contraintes complexe	26
3.3 Domaine de validité de la solution	28
3.4 Comparaison avec une analyse par éléments finis	29
3.5 Taux de restitution d'énergie	36
3.6 Discussion : propagation symétrique ou asymétrique	37
3.6.1 Démarrage de la propagation	38
3.6.2 Arrêt et redémarrage de la propagation	40

3.7	Conclusions	42
4	Application de méthodes d'homogénéisation	43
4.1	Introduction	43
4.2	Approche générale du problème	43
4.3	Méthode de Mori-Tanaka	46
4.4	Application de la méthode de Mori-Tanaka	48
	4.4.1 Matériau biphasique	49
	4.4.2 Matériau à trois phases	54
4.5	Loi macroscopique d'endommagement	56
	4.5.1 Étude paramétrique	58
4.6	Conclusions	61
5	Conclusions et perspectives	63
5.1	Conclusions	63
5.2	Perspectives	64
	5.2.1 Perspectives à court terme	64
	5.2.2 Perspectives à long terme	68
A	Estimation de l'intégrale I_0	70
A.1	Etude de la fonction f	70
A.2	Évaluation de l'intégrale I_0	71
A.3	Limitation des erreurs d'arrondi	72
A.4	Implémentation du calcul	72
B	Analyse énergétique de la propagation des fissures	77
B.1	Raisonnement de Griffith	77
B.2	Branchement de fissure	78
	Bibliographie	86

Table des figures

1.1	Section transverse d'un composite isotrope renforcé de fibres en traction uniaxiale (Talreja, 2016)	2
1.2	Modèle d'inclusion-matrice avec décollement partiel à l'interface	3
1.3	Schéma géologique de l'est de la France (Brommundt et al., 2014).	4
1.4	Variation de la fraction volumique de la matrice argileuse, de la calcite et des grains de quartz en fonction de la profondeur (Abou-Chakra Guéry et al., 2009).	5
1.5	Volume élémentaire représentatif de l'argilite du Callovo-Oxfordien (Abou-Chakra Guéry et al., 2009).	5
1.6	Système de coordonnées en pointe d'une fissure	7
1.7	Distribution de déplacement Δu_y près de la pointe d'une fissure d'interface.	8
1.8	Echelle macroscopique et échelle microscopique (Abou-Chakra Guéry, 2007)	12
1.9	Conditions au bord	13
2.1	Deux fissures dissymétriques à l'interface inclusion-matrice sous contrainte uniforme à l'infini	18
3.1	Le système de coordonnées locales (n, t) à la pointe de la fissure	27
3.2	Taille de la zone de contact s_c pour une inclusion raide soumise à une contrainte distante uniaxiale le long de l'axe Ox	29
3.3	Géométrie des simulations numériques décrites dans la section 3.4.	30
3.4	Exemple de maillage triangulaire non structuré de 143514 éléments pour le cas asymétrique $\beta_1 = 40^\circ$ and $\beta_2 = 30^\circ$	30
3.5	Régression linéaire des quantités numériques \mathcal{Q}_I et \mathcal{Q}_{II} , qui doivent se comporter de manière linéaire par rapport à \sqrt{s} . La qualité de l'ajustement se dégrade pour les nœuds trop proches ou trop éloignés de la pointe de la fissure. Par conséquent, seuls les nœuds situés dans la zone ombrée sont utilisés pour effectuer la régression linéaire. (inclusion raide, $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 30^\circ$)	31
3.6	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (une fissure, cas homogène).	32
3.7	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (une fissure, inclusion raide).	32
3.8	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (une fissure, inclusion souple).	33
3.9	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures symétriques, cas homogène).	33
3.10	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures symétriques, inclusion raide).	34
3.11	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures symétriques, inclusion souple).	34

3.12	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures asymétriques, $\beta_2 = 30^\circ$, cas homogène).	35
3.13	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures asymétriques, $\beta_2 = 30^\circ$, inclusion raide).	35
3.14	K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures asymétriques, $\beta_2 = 30^\circ$, inclusion souple).	36
3.15	Taux de restitution d'énergie normalisé (inclusion raide, contrainte uniaxiale à l'infini).	37
3.16	Discussion du mode de propagation des fissures.	38
3.17	Taux de restitution d'énergie G_1 , G_2 après le démarrage de la propagation des fissures (inclusion raide, contrainte uniaxiale à l'infini).	41
4.1	Matériau biphasique	44
4.2	Matériau à N phases des inclusions	45
4.3	Schéma Mori-Tanaka	47
4.4	Module d'Young horizontal E_{xx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	50
4.5	Module d'Young vertical E_{yy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	51
4.6	Module de cisaillement G_{xy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	51
4.7	Module d'Young horizontal E_{xx} en fonction de la fraction surfacique f_{qa}^I (%)	52
4.8	Coefficient de Poisson «horizontal/vertical» ν_{xy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	53
4.9	Coefficient de Poisson «vertical/horizontal» ν_{yx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	53
4.10	Erreur relative entre $\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}$ et $\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}$ en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	54
4.11	Module d'Young horizontal E_{xx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	55
4.12	Module d'Young vertical E_{yy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	55
4.13	Module de cisaillement G_{xy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	56
4.14	Echelle macroscopique et échelle microscopique en cours d'évolution de l'endommagement.	56
4.15	Relation contrainte-déformation à l'échelle macroscopique	58
4.16	Effet de la fraction surfacique sur la relation contrainte-déformation	59
4.17	Effet de la taille des inclusions sur la relation contrainte-déformation	60
4.18	Effet de l'angle initial des fissures d'interface sur la relation contrainte-déformation	61
5.1	Problème de n fissures à l'interface inclusion-matrice sous contrainte uniforme à l'infini (Perlman and Sih, 1967)	65
A.1	Erreur relative ε_r (%) du calcul de l'intégrale $I_0^{[N]}$ ($\epsilon = 0.15$).	74
A.2	Erreur relative ε_r^* (%) entre deux approches ($\epsilon = 0.15$).	74
A.3	Erreur relative ε_r (%) du calcul de l'intégrale $I_0^{[N]}$ ($\beta_0 = 45^\circ$).	75
A.4	Erreur relative ε_r^* (%) entre deux approches ($\beta_0 = 45^\circ$).	75
B.1	Energie total avant et après la propagation sous le même chargement.	78
B.2	Branchement de la fissure.	79

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte général et l'objectif de la thèse

La prédiction de la microfissuration dans les matériaux géologiques et du génie civil tels que les roches argileuses ou les bétons est d'un intérêt majeur, notamment dans le contexte du stockage souterrain des déchets radioactifs. Il est en effet primordial de disposer d'outils permettant d'assurer que les propriétés naturelles d'étanchéité de l'ouvrage et de la barrière géologique seront suffisantes tout au long de la durée de vie du stockage. Plus généralement, la fissuration est un mécanisme présent dans la quasi-totalité des structures de génie civil, et sa compréhension est indispensable pour la prévision de leur tenue à long terme vis-à-vis des sollicitations mécaniques, mais aussi thermiques, hydriques ou chimiques.

Du point de vue de la microstructure, les roches argileuses peuvent être considérées comme un composite du type "inclusion-matrice", dans lequel on peut supposer que les inclusions (alcite et quartz) sont sphériques en 3D ou circulaires en 2D et distribuées de manière aléatoire dans la matrice argileuse ([Abou-Chakra Guéry et al., 2009](#)). Dans ces matériaux, l'interface joue un rôle très important dans le comportement mécanique. En fait, l'un des modes de rupture courants dans les composites est la rupture à l'interface (Figure 1.1). La résistance interfaciale influence largement les propriétés mécaniques du composite (la rigidité, la résistance et le comportement à la rupture...) ainsi que les propriétés hydrauliques (perméabilité...). Du point de vue de la modélisation, il est donc essentiel de pouvoir décrire avec précision le comportement général des composites de type "matrice-inclusion" comportant des interfaces partiellement fissurées.

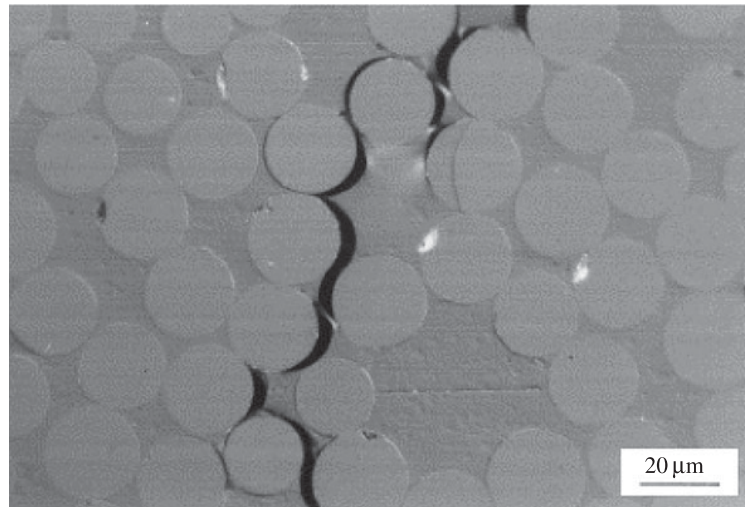


FIGURE 1.1 – Section transverse d’un composite isotrope renforcé de fibres en traction uniaxiale (Talreja, 2016)

La fissuration des géomatériaux à matrice argileuse a fait l’objet de nombreuses recherches à caractère expérimental et théorique, mais sa compréhension et maîtrise pour des applications industrielles nécessite encore des efforts, notamment sur le plan de la modélisation constitutive. Dans ce contexte, il est maintenant reconnu que les approches multi-échelles prenant en compte la complexité des microstructures et des interactions physiques qui y opèrent seront nécessaires pour compléter et enrichir la capacité prédictive des approches macroscopiques plus traditionnelles. Pour cela, la solution de Eshelby au problème d’une inclusion équivalente intégrée dans une matrice infinie reste jusqu’à présent la pierre angulaire de l’étude des propriétés effectives de matériaux hétérogènes (Eshelby, 1957). On peut citer les applications importantes de la solution de Eshelby au homogénéisation des milieux multifissurés tels que : l’estimation des propriétés effectives de matériaux fissurés (Walsh, 1965a,b; Budiansky and O’connell, 1976; Hoenig, 1979; Zimmerman, 1985; Benveniste, 1985; Hashin, 1983; Kachanov, 1992, 1993; Pouya, 2015; Zheng and Du, 2001; Zaoui, 2002; Markenscoff and Dascalu, 2012; Giraud and Sevostianov, 2013), puis la prise en compte des effets de fermeture et de frottement des fissures (Deude et al., 2002; Pensée et al., 2002; Dormieux et al., 2006b; Zhu et al., 2009), ainsi que les effets de la pression interstitielle (Brace, 1960; Budiansky and O’connell, 1976; Thompson and Willis, 1991; Chateau and Dormieux, 1998; Deudé et al., 2002; Dormieux et al., 2002, 2006a; Dormieux and Kondo, 2007) et l’effet de l’anisotropie (Giraud et al., 2007; Barthélémy, 2009).

Cependant, une limitation des travaux ci-dessus, du moins pour le problème qui nous intéresse ici, est qu’ils supposent une adhérence parfaite entre l’inclusion et la matrice c’est-à-dire la continuité du déplacement à l’interface. Un objectif de cette thèse est d’explorer les voies possibles de développement d’un modèle d’inclusion-matrice qui inclut un décollement partiel à l’interface (Figure 1.2). Il permettrait alors de modéliser la fissuration qui se localise très souvent sur cette interface.

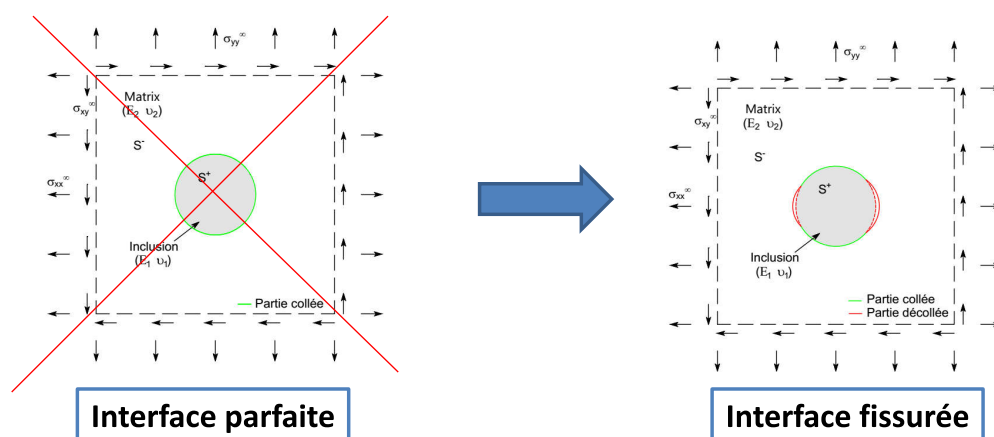


FIGURE 1.2 – Modèle d'inclusion-matrice avec décollement partiel à l'interface

En résumé, il est essentiel de décrire le comportement des matériaux des matériaux hétérogènes comportant des interfaces partiellement décollées. L'objectif de la thèse est de :

- Développer un modèle analytique ou semi-analytique d'inclusion-matrice qui inclut un décollement partiel à l'interface.
- Analyser la propagation des fissures d'interface en se basant sur la mécanique linéaire élastique de la rupture.
- Implémenter la solution obtenue dans les schémas d'homogénéisation pour estimer les modules effectifs de matériaux et étudier le comportement macroscopique du matériau tenant compte de l'endommagement dû au décollement à l'interface.

Dans cette introduction, nous présentons d'abord la composition des roches argileuses dans le contexte du stockage souterrain des déchets radioactifs. Puis, nous introduisons des notions de base de la mécanique de la rupture pour la modélisation de la propagation des fissures d'interface. Nous passerons ensuite en revue la théorie de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes. Enfin, le contenu du travail de thèse sera décrit.

1.2 Roches argileuses

Les roches argileuses, ou argilites, du site de Bure sont des roches bien compactées du Callovo-Oxfordford (COx) situées à l'est du bassin parisien (Bornert et al., 2010). L'argilite du COx se caractérise par une très faible conductivité hydraulique qui limite le transfert de l'eau et par un faible coefficient de diffusion qui retarde considérablement le transport de solutés. L'argilite a également une faible déformabilité et une forte capacité d'absorption des radionucléides (Mohajerani, 2011). Ces propriétés avantageuses en font une roche-hôte potentielle pour le stockage des déchets radioactifs à haute activité à grande profondeur. Cette formation argileuse sédimentaire, d'environ 150 m d'épaisseur, est située à environ 500 m de profondeur.

La figure 1.3 illustre un schéma géologique typique [Brommundt et al. \(2014\)](#) de la région orientale de la France.

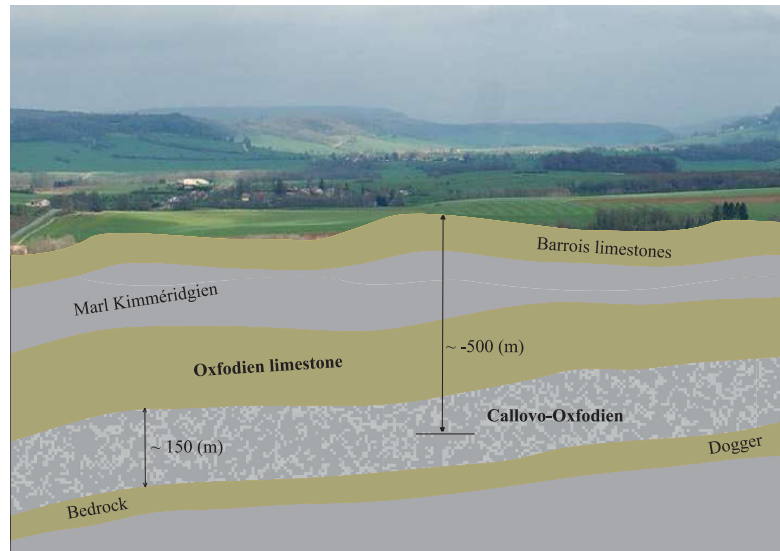


FIGURE 1.3 – Schéma géologique de l'est de la France ([Brommundt et al., 2014](#)).

Suivant les études de [Chiarelli et al. \(2003\)](#) et [Robinet et al. \(2012\)](#), les caractéristiques de base de cette argile en fonction de la séquence stratigraphique sont de 15% à 30% de tectosilicates (principalement du quartz et des feldspaths), 20% à 25% de carbonates (principalement de la calcite et de la dolomite), 35% à 60% du taux d'argile (principalement illite et illite/smectite interstratifiée, kaolinite, mica et chlorite) et 0% à 3% de pyrite. Comme le montre la figure 1.4, la composition minéralogique change de manière significative en ce qui concerne la profondeur des couches rocheuses ([Andra, 1999](#)).

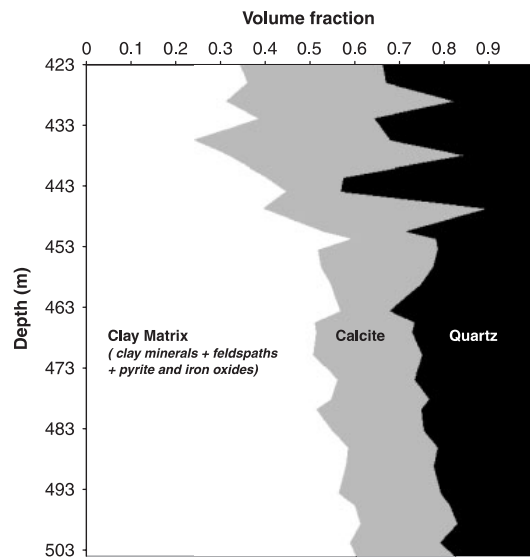


FIGURE 1.4 – Variation de la fraction volumique de la matrice argileuse, de la calcite et des grains de quartz en fonction de la profondeur (Abou-Chakra Guéry et al., 2009).

Du point de vue de la composition du matériau, l'argilite peut être alors considérée comme un composite triphasé du type "inclusion-matrice", dans lequel les phases de calcite et de quartz incorporées sont supposées être sphériques en 3D ou circulaires en 2D et distribuées de manière aléatoire dans la matrice argileuse (Abou-Chakra Guéry et al., 2009).

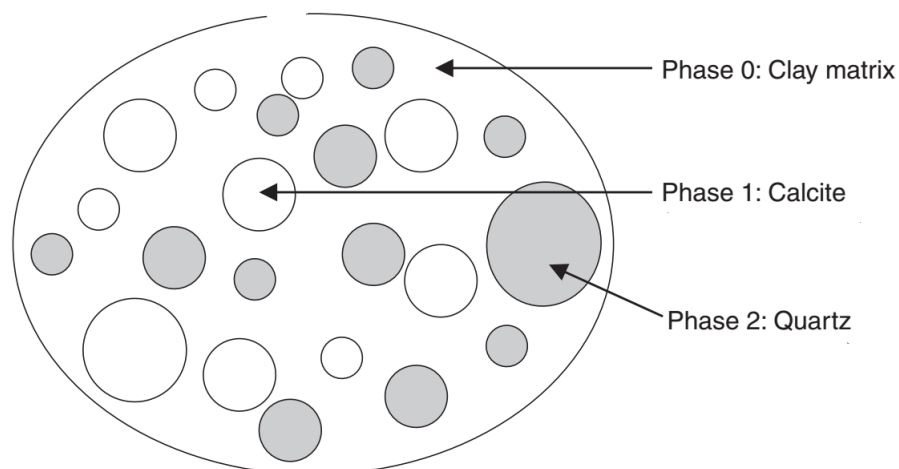


FIGURE 1.5 – Volume élémentaire représentatif de l'argilite du Callovo-Oxfordien (Abou-Chakra Guéry et al., 2009).

1.3 Introduction de la mécanique de la rupture d'interface

Depuis le travail de pionnier de [Coulomb \(1776\)](#), la prédiction de la résistance des matériaux solides était basée sur des approches phénoménologiques. De nombreux critères de rupture phénoménologiques en termes de contrainte ou de déformation ont été proposés et étalonnés par rapport aux résultats expérimentaux. Dans les critères couramment utilisés, une enveloppe de rupture dans l'espace de contrainte ou de déformation est construite sur la base de données expérimentales avec un nombre limité d'essais.

En général, les théories classiques prédisent la rupture des matériaux et structures avec une précision satisfaisante dans les applications où le champ de contraintes est relativement uniforme. Pourtant, ces théories ne soient pas encore fiables pour un milieu hétérogène à cause des défauts présentés dans des matériaux réels. En effet, la présence des fissures dans les matériaux peut entraîner la perturbation de contraintes à la pointe des fissures. Donc, de nombreuses ruptures structurelles ont été observées à des contraintes bien inférieures aux valeurs critiques spécifiées dans les théories classiques.

L'approche de l'étude de la rupture qui permet de prendre en compte l'existence de défauts dans les matériaux est *la mécanique de la rupture*, qui fournit un traitement quantitatif basé sur une analyse des contraintes, liées à la résistance à la rupture sous différents types de chargement et géométrie structurelle contenant des défauts ([Castelli and Scavia, 2004](#)). La caractéristique principale de la mécanique de la rupture est qu'une fissure existe déjà. La nucléation de fissures peut être traitée par le critère couplé (contrainte et énergie) de [Leguillon \(2002\)](#), la mécanique de l'endommagement ([Lemaitre et al., 1985](#); [Kachanov, 2013](#)).

Dans le domaine de la mécanique linéaire élastique de la rupture, tout le corps est supposé se comporter de manière élastique linéaire. De plus, la mécanique linéaire élastique de la rupture est utilisée pour modéliser la rupture de matériaux essentiellement fragiles. Pour la fissuration d'un matériau homogène, le lecteur peut se référer aux livres de [Anderson \(2017\)](#) ou de [Janssen et al. \(2004\)](#). Ce mémoire concerne la fissuration de l'interface d'un bimatériau. Un intérêt particulier est donc porté à la propagation des fissures à l'interface entre deux matériaux distincts.

Les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture des fissures d'interface sont dus à [Williams \(1959\)](#); [England \(1965\)](#); [Erdogan \(1965\)](#); [Rice and Sih \(1965\)](#); [Malyshev and Salganik \(1965\)](#). Ce sujet reste de nos jours un domaine de recherche très actif.

Deux approches de la mécanique de la rupture ont été développées pour l'analyse des fissures interfaciales ([Manti et al., 2005](#)). L'une s'appelle *le modèle ouvert* et l'autre s'appelle *le modèle de contact*. Dans le modèle ouvert, les lèvres des fissures doivent être libres de tractions alors que dans le modèle de contact, les lèvres de la fissure sont supposées entrer en contact au niveau des deux extrémités de la fissure sous l'application de la charge. La première approche est basée sur les travaux de [Williams \(1959\)](#); [Rice \(1988\)](#); [Hutchinson and Suo \(1991\)](#), tandis que la seconde est essentiellement basée sur les travaux de [Comninou \(1977, 1978\)](#); [Comninou and Schmueser \(1979\)](#); [Gautesen and Dundurs \(1987\)](#); [Dundurs \(1988\)](#).

Dans cette section, nous présentons brièvement les principales notions de la mécanique de la rupture pour les fissures interfaciales. Nous supposons que les fissures sont ouvertes, c'est-à-dire que le vecteur contrainte est nul sur les deux lèvres des fissures.

1.3.1 Champ de contrainte et déplacement

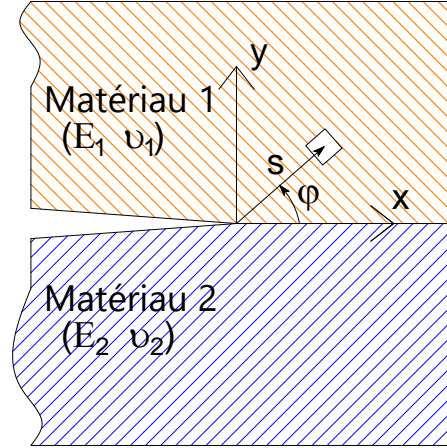


FIGURE 1.6 – Système de coordonnées en pointe d'une fissure

Considérons une fissure à l'interface entre deux matériaux élastiques dissemblables avec le module d'Young et le coefficient de Poisson pour les lèvres supérieure et inférieure, notés respectivement E_j et ν_j ($j = 1, 2$) (voir la figure 1.6). Selon la solution analytique pour une fissure d'interface plane (Williams, 1959), l'expression asymptotique de la contrainte et du déplacement relatif lorsque $s \rightarrow 0$ (s est la distance depuis la pointe de fissure) est la suivante :

$$\sigma_{xx}(s, \varphi = 0) + i\sigma_{xy}(s, \varphi = 0) = \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{2\pi}} s^{i\epsilon-1/2}, \quad (1.1)$$

$$\Delta u_y(s) + i\Delta u_x(s) = \frac{8}{(1 + 2i\epsilon) \cosh(\pi\epsilon) E^*} \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{2\pi}} s^{i\epsilon+1/2}, \quad (1.2)$$

où s et φ sont les coordonnées polaires de pôle à la pointe de la fissure (voir la figure 1.6) et $2/E^* = 1/E_1^* + 1/E_2^*$ ($E_j^* = E_j$ pour les problèmes de contrainte plane, $E_j^* = E_j/(1 - \nu_j^2)$ pour les problèmes de déformation plane). Dans cette formule ci-dessus, \mathcal{K} est le facteur d'intensité de contrainte complexe, $\mathcal{K} = K_1 + iK_2$ (il sera discuté plus tard) et ϵ est la constante définie comme suit :

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}, \quad (1.3)$$

où $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ pour la déformation plane, et $\kappa_j = \frac{3-\nu_j}{1+\nu_j}$ pour la contrainte plane et $\mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$ est le module de cisaillement. La singularité oscillatoire $s^{i\epsilon}$ dans les équations (1.1) et (1.2) peut être révélé en utilisant la formule d'Euler :

$$s^{i\epsilon} = \cos(\epsilon \ln s) + i \sin(\epsilon \ln s). \quad (1.4)$$

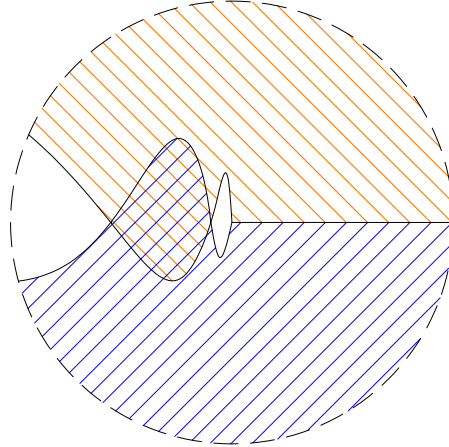


FIGURE 1.7 – Distribution de déplacement Δu_y près de la pointe d'une fissure d'interface.

Clairement, si $\epsilon = 0$, les oscillations en pointe de fissure disparaissent. Pour deux matériaux dont les coefficients de Poisson sont positifs, $|\epsilon| \leq 0.175$. L'égalité a lieu lorsque $\mu_2/\mu_1 \rightarrow \infty$ et $\nu_1 = 0$ ou $\mu_1/\mu_2 \rightarrow \infty$ et $\nu_2 = 0$.

A cause de la présence du terme d'oscillation $s^{i\epsilon}$, quelques commentaires sur les champs de contrainte et de déplacement dans les deux équations (1.1) et (1.2) sont (Sun and Jin, 2012) :

- La singularité des contraintes de type $s^{-1/2+i\epsilon}$ et la dépendance des déplacements relatifs vis-à-vis de s selon $s^{1/2+i\epsilon}$ près de la pointe de fissure impliquent que les contraintes et les déplacements présentent un caractère oscillant lorsqu'ils changent indéfiniment de signe lorsque s s'approche de 0 (voir la figure 1.7).
- La nature oscillatoire du champ de déplacement implique l'interpénétration de deux faces de fissure, ce qui est physiquement inadmissible. En d'autres termes, les faces de la fissure doivent entrer en contact près de la pointe (voir la section 1.3.4).
- Dans le cas particulier de $\epsilon = 0$, les termes oscillatoires disparaissent et les champs de contrainte et de déplacement près de la pointe ont exactement les mêmes formes que ceux des matériaux homogènes.

1.3.2 Facteur d'intensité de contraintes complexe

Dans le contexte de la mécanique linéaire de la rupture, nous admettons la singularité à la pointe de la fissure. Les facteurs d'intensité de contraintes sont utilisés pour exprimer le niveau de cette singularité.

D'après les expressions (1.1) et (1.2), la partie réelle et imaginaire du facteur d'intensité de contrainte complexe \mathcal{K} joue un rôle similaire à celui des modes d'ouverture (mode I) et de cisaillement plan (mode II) dans des problèmes homogènes si $\epsilon = 0$. Cependant, pour $\epsilon \neq 0$, les composantes K_1 et K_2 ne représentent pas respectivement les modes conventionnelles I et II. En raison du terme d'oscillation, même un chargement en mode pur I entraîne des contraintes de cisaillement à la pointe de la fissure.

Par conséquent, les deux parties de facteur d'intensité de contraintes complexe sont toujours couplés.

L'équation (1.1) montre que le facteur d'intensité de contrainte a une dimension $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2-i\epsilon}$, c'est donc un concept qui n'a aucune signification physique. Ainsi, il convient de définir les facteurs d'intensité de contrainte K_I et K_{II} au sens classique (avec des dimensions physiques : $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$) par l'introduction d'une longueur de référence supplémentaire ℓ (Rice, 1988). Donc, sur la base de l'argument de Rice, le facteur d'intensité de contrainte complexe de type classique est définie comme suit :

$$\sigma_{xx}(s, \varphi = 0) + i\sigma_{xy}(s, \varphi = 0) = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi s}} \frac{s^{i\epsilon}}{\ell}, \quad (1.5)$$

En effet, les deux définitions (1.1) et (1.5) sont essentiellement identiques et peuvent être liées par :

$$K_I + iK_{II} = \ell^{i\epsilon} \mathcal{K}. \quad (1.6)$$

1.3.3 Mode mixte

Puisque les deux parties de facteur d'intensité de contraintes complexe sont toujours couplés, il est utile de définir le mode mixte. En effet, le mode mixte décrit le rapport entre la partie imagine et la partie réelle du facteur d'intensité de contraintes complexe :

$$\tan \psi_K = \frac{K_{II}}{K_I}, \quad (1.7)$$

ce qui équivaut à

$$\tan \psi_K = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} \right)_{s=\ell}, \quad (1.8)$$

Puisque les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} dépendent de la longueur de référence ℓ , l'angle de mode mixte dépend également la longueur de référence ℓ . Si la valeur ℓ est remplacée par ℓ' , l'angle de mode mixte est décalé de (Hutchinson and Suo, 1991) :

$$\psi'_K = \psi_K + \epsilon \ln \frac{\ell'}{\ell}. \quad (1.9)$$

1.3.4 Zone de contact

Dans une fissure d'interface, les déplacements de la surface de la fissure présentent un caractère oscillant, c'est-à-dire qu'ils changent de signe indéfiniment lorsque s approche de zéro. Cette nature oscillatoire signifie que les surfaces de fissure supérieure et inférieure se chevaucheront près de la pointe de la fissure, ce qui est physiquement irréaliste. Néanmoins, comme l'explique Rice (1988), la solution oscillante reste pertinente pour l'analyse de la propagation de la fissure si la taille de la zone de contact est beaucoup plus petite que la longueur de la fissure.

En ce qui concerne la taille de la zone de contact s_c , Rice (1988) la définit comme étant la plus grande valeur de s pour laquelle $\Delta u_y(s) = 0$. A partir de l'équation (1.2), les solutions sont de la forme :

$$\Re \left\{ \frac{\mathcal{K}}{1 + 2i\epsilon} s_c^{i\epsilon} \right\} = 0 \quad (1.10)$$

qui donne

$$s_c = \exp \left[\frac{1}{\epsilon} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\Re(\mathcal{K}) + 2\epsilon\Im(\mathcal{K})}{\Im(\mathcal{K}) - 2\epsilon\Re(\mathcal{K})} \right) + n\pi \right\} \right] \quad (1.11)$$

pour $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ et il faut choisir la plus grande valeur de n telle que s est inférieure et égale à la longueur de la fissure.

Lorsque la taille de la zone de contact peut devenir comparable à la longueur de la fissure, les conditions de contact à petite échelle ne sont plus valables. En raison de la présence d'une zone de contact importante, il n'y a plus de mode de fracture I en avant du fond de fissure. Ainsi, la fissure d'interface se développe exclusivement en mode II.

1.3.5 Taux de restitution de l'énergie

Pour analyser la propagation de la fissure, nous utilisons un critère basé sur le taux de restitution d'énergie G (Griffith, 1921). Le taux de restitution d'énergie est l'énergie dissipée lors de la fissuration par unité de surface de la fracture nouvellement créée. En raison de la nature oscillatoire des champs de contrainte et de déplacement au voisinage de la pointe de fissure d'interface, les taux de restitution d'énergie en mode I et en mode II, G_I et G_{II} , en utilisant la technique intégrale de fermeture de fissure de Irwin (1957), n'existent pas pour les fissures d'interface (Sun and Jih, 1987; Raju et al., 1988; Toya, 1992). Cependant, le taux de restitution d'énergie total G défini comme étant $G_I + G_{II}$ existe toujours (Malyshev and Salganik, 1965; Sun and Jih, 1987). On peut montrer que la formule de Irwin (1957) reliant le taux de restitution d'énergie total d'une fissure d'interface au facteur d'intensité de contraintes complexe \mathcal{K} s'écrit, dans le cas d'une fissure d'interface (Malyshev and Salganik, 1965) :

$$G = \frac{1}{E^*} \frac{\mathcal{K}\bar{\mathcal{K}}}{\cosh^2(\pi\epsilon)}. \quad (1.12)$$

1.3.6 Critère de propagation

Selon le critère énergétique basé sur le taux de restitution d'énergie, la fissure se propage lorsque le taux de restitution d'énergie atteint une valeur critique. L'expérience de Cao and Evans (1989) montre que la résistance d'interface pour un système bimatériel donné n'est pas une constante, mais dépend du mode mixte ψ_K . Le critère du taux de restitution d'énergie peut donc être exprimé par :

$$G = G_c(\psi_K) \quad (1.13)$$

où G_c est la valeur critique de taux de restitution d'énergie. Dans ce contexte, Hutchinson and Suo (1991) ont proposé deux critères comme suit :

$$G_c(\psi_K) = G_{Ic}(1 + \tan^2[(1 - \lambda)\psi_K]), \quad (1.14)$$

$$G_c(\psi_K) = G_{Ic}[1 + (1 - \lambda)\tan^2\psi_K], \quad (1.15)$$

où λ traduit l'influence de la contribution en mode II ($\lambda = 1$ correspond à une interface constante, sans effet de mode mixte) et G_{Ic} est la ténacité en mode I

pur (associée à la valeur minimale de G_c). Pour les interfaces comme verre/époxy, le critère (1.14) avec $\lambda = 0$ représente une très bonne approximation des résultats expérimentaux (voir [Liechti and Chai \(1992\)](#); [Charalambides et al. \(1992\)](#); [Banks-Sills and Ashkenazi \(2000\)](#)).

Notons que, comme abordé dans la section 1.3, ψ_k dépend de la longueur de référence ℓ . Par conséquent, la variation de la longueur de référence associée au changement de G_c . [Hutchinson and Suo \(1991\)](#) ont également proposé une sélection de la longueur de référence, c'est que le choix de placer la valeur minimale de G_c correspond à la valeur zéro de mode mixte ψ_k . Donc, si $\psi_k = 0$ alors $G_c = G_{Ic}$.

1.4 Introduction de la méthode d'homogénéisation

Dans le calcul des structures, les matériaux constitutifs sont souvent supposés homogènes. En réalité, le matériau est toujours hétérogène à une échelle inférieure, plus ou moins petite suivant les matériaux. C'est évident dans le cas des matériaux composites ainsi que des matériaux géologiques et du génie civil tels que les roches argileuses ou les bétons. Pour le dimensionnement d'une structure d'un tel matériau, on cherche donc à remplacer le matériau hétérogène par un milieu dit homogène équivalent caractérisé par des propriétés mécaniques effectives.

Le but de la démarche d'homogénéisation est de prédire le comportement mécanique d'un matériau hétérogène en utilisant des informations reliées à la microstructure.

Dans son travail de pionnier, [Eshelby \(1957\)](#) a résolu le problème général du matériau. Les travaux d'Eshelby constituent l'ossature théorique de l'analyse de nombreux problèmes d'intérêt en mécanique des matériaux composites. Dans la littérature, l'approche d'Eshelby a été largement adoptée dans divers schémas d'homogénéisation pour prédire les modules effectifs des matériaux le schéma dilué ([Eshelby, 1957](#)), le schéma de Mori-Tanaka ([Mori and Tanaka, 1973](#); [Benveniste, 1987](#)), le schéma auto-cohérent ([Hill, 1965](#); [Budiansky and O'connell, 1976](#); [Horii and Nemat-Nasser, 1983](#)), le schéma différentiel ([Hashin, 1988](#)), le schéma Ponte Castaneda et Willis ([Castañeda and Willis, 1995](#)), le schéma Interaction Direct Derivative ([Zheng and Du, 2001](#))...

Dans cette section, les principes de base de la méthode d'homogénéisation sont présentés. L'objectif est de prédire les modules effectifs de matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice", qui correspondent à la microstructure des roches argileuses ([Abou-Chakra Guéry et al., 2009](#)). Pour plus de détails sur la démarche d'homogénéisation, le lecteur peut consulter les livres de [Zaoui \(2000\)](#), de [Bornert et al. \(2001\)](#) ou la thèse de [Huynh \(2006\)](#).

1.4.1 Comportement homogénéisé d'un volume élémentaire représentatif du matériau hétérogène

La mise oeuvre d'une approche micromécanique nécessite de définir un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau étudié ([Hill, 1963](#); [Dormieux et al., 2006b](#)). Le VER est ainsi formé à partir de l'ensemble des constituants choisis (inclusions, fissures, pores, etc.) pour la description du matériau étudié (voir la figure

1.8). Ce volume élémentaire représentatif doit satisfaire à deux conditions (Bornert et al., 2001) :

- Être plus grand que la longueur caractéristique des constituants afin que leur nombre soit suffisant pour permettre une représentation statistique correcte du matériau étudié.
- Être plus petit que la longueur caractéristique d'une structure mécanique pour pouvoir éventuellement être remplacé par un matériau homogène équivalent lors d'un calcul de structure.

En d'autres termes :

$$d \ll l \ll L \quad (1.16)$$

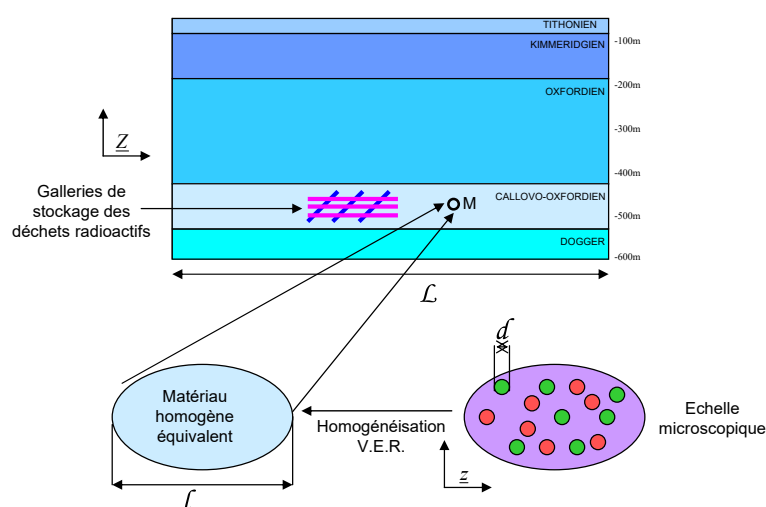


FIGURE 1.8 – Echelle macroscopique et échelle microscopique (Abou-Chakra Guéry, 2007)

Nous considérons un VER du matériau élastique linéaire hétérogène constitué de N phases de type inclusions, immergées dans une matrice infinie (phase "m"). Les inclusions de chaque phase ont des propriétés mécaniques différentes. Nous représentons ce VER par un volume représentative Ω , avec sa frontière $\partial\Omega$. Nous désignons le volume représentatif de la phase k ($k = 1, \dots, N$) par Ω_k^i . Sa fraction volumique est $f_k^i = \Omega_k^i / \Omega$. Le VER du matériau étant défini, il convient maintenant de préciser les conditions aux limites du problème d'homogénéisation qui sera étudié. Deux types de conditions au bord sont généralement considérés en homogénéisation des matériaux : *i.* déformations homogènes au bord, *ii.* contraintes homogènes au bord.

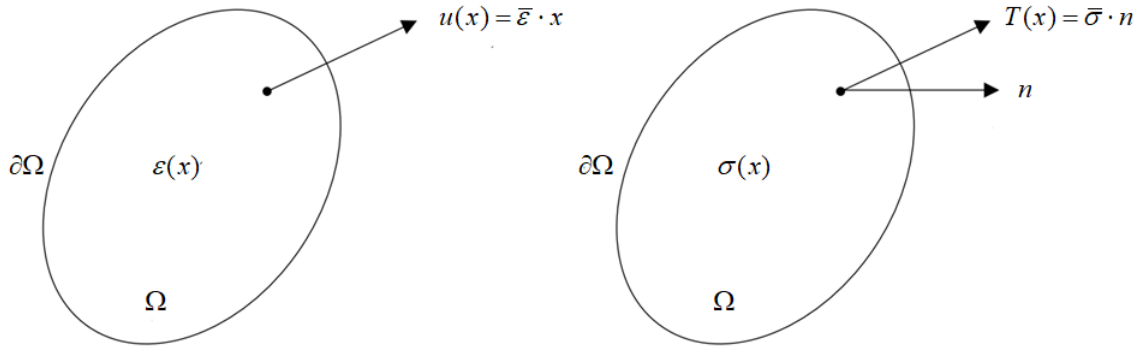


FIGURE 1.9 – Conditions au bord

Déformations homogènes au bord. Le premier problème est la condition dite : "déformations homogènes", imposée au point x de la frontière $\partial\Omega$ du VER et définie par (Figure 1.9, à gauche) :

$$u(x) = \bar{\varepsilon} \cdot x, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (1.17)$$

La condition aux limites d'Hashin (1983) implique :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon(x) d\Omega = f^m \varepsilon^m + \sum_{k=1}^N f_k^i \varepsilon_k^i \quad (1.18)$$

où f^m est la fraction volumique de la matrice, ε^m et ε_k^i sont respectivement des déformations moyennes dans la matrice et dans la phase k ($k = 1, \dots, N$), et $\bar{\varepsilon}$. Considérant le comportement linéaire-élastique de la matrice et des phases d'inclusions, le principe de superposition implique l'existence d'une relation linéaire entre la déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$ et les déformations moyennes ε^m et ε_k^i :

$$\varepsilon^m = \mathbb{A}^m : \bar{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^i = \mathbb{A}_k^i : \bar{\varepsilon}, \quad (1.19)$$

où \mathbb{A}^m et \mathbb{A}_k^i sont les tenseurs de concentration des déformations du quatrième ordre de la matrice et de la phase k , respectivement. La considération supplémentaire de la règle de la contrainte moyenne, $\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = f^m \sigma^m + \sum_{k=1}^N f_k^i \sigma_k^i$, donne la loi de comportement macroscopique (Hill, 1963) :

$$\bar{\sigma} = \mathbb{C}^{\text{eff}} : \bar{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{\text{eff}} = \mathbb{C}^m + \sum_{k=1}^N f_k^i (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}^m) : \mathbb{A}_k^i \quad (1.20)$$

est tenseur d'élasticité homogénéisé. \mathbb{C}_k^i représente tenseur de modules élastiques de la phase k et \mathbb{C}^m est celui de la matrice.

Contraintes homogènes au bord. La condition au bord alternative est les contraintes homogènes (Figure 1.9, à droite) :

$$T(x) = \bar{\sigma} \cdot n, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (1.21)$$

De façon analogue, dans le cas de la traction homogène imposée à la limite du VER, nous pouvons montrer que :

$$\bar{\epsilon} = \mathbb{S}^{\text{eff}} : \bar{\sigma} \quad (1.22)$$

où \mathbb{S}^{eff} est le tenseur de souplesse homogénéisé :

$$\mathbb{S}^{\text{eff}} = \mathbb{S}^{\text{m}} + \sum_{k=1}^N f_k^i (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^{\text{m}}) : \mathbb{B}_k^i \quad (1.23)$$

et où le tenseur \mathbb{B} est analogue à \mathbb{A} , appelé le tenseur de localisation des contraintes, tel que :

$$\sigma^{\text{m}} = \mathbb{B}^{\text{m}} : \bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \sigma_k^i = \mathbb{B}_k^i : \bar{\sigma}, \quad (1.24)$$

Dans l'équation (1.23), \mathbb{S}_k^i et \mathbb{S}^{m} représentent respectivement les souplesses de la phase k et de la matrice. On note l'identité $\mathbb{S}_k^i = (\mathbb{C}_k^i)^{-1}$ et $\mathbb{S}^{\text{m}} = (\mathbb{C}^{\text{m}})^{-1}$

\mathbb{S}^{eff} et \mathbb{C}^{eff} ne sont pas rigoureusement inverses l'un de l'autre. Si la condition de séparation des échelles $d \ll l$ est satisfaite, on admet que les deux types de sollicitation sont équivalents (Zaoui, 2000; Huynh, 2006).

1.4.2 Quelques schémas standard d'estimation du tenseur d'élasticité effectif

Schéma dilué

Le schéma dilué stipule que chaque inclusion se comporte comme une inclusion isolée dans la matrice infinie soumise à l'infini à une déformation macroscopique homogène $\bar{\epsilon}$, ce qui correspond au problème de l'hétérogénéité d'Eshelby. Les interactions entre les inclusions sont négligées. Le tenseur de concentration moyenne de la phase k est donné par :

$$\mathbb{A}_k^i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_k^i : (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}^{\text{m}})]^{-1} \quad (1.25)$$

où \mathbb{I} est le tenseur d'identité de quatrième ordre et \mathbb{P}_k^i est le tenseur de Hill (1965) de la phase k . Des solutions de \mathbb{P}_k^i sont disponibles pour un certain nombre de formes d'inclusion et de symétries du tenseur d'élasticité de la matrice (Laws, 1985; Eshelby, 1957; Laws, 1975; Hellmich et al., 2004; Mura, 2013).

En remettant le résultat ci-dessus dans la relation (1.21), l'estimation du tenseur d'élasticité homogène est obtenue par le schéma dilué :

$$\mathbb{C}^{\text{DIL}} = \mathbb{C}^{\text{m}} + \sum_{i=1}^N f_k^i (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}^{\text{m}}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_k^i : (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}^{\text{m}})]^{-1} \quad (1.26)$$

Par analogie, dans le cas d'une contrainte macroscopique homogène $\bar{\sigma}$ imposée à la limite du VER. L'estimation du tenseur de souplesse effectif s'écrit :

$$\mathbb{S}^{DIL} = \mathbb{S}^m + \sum_{i=1}^N f_k^i (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}_k^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{Q}_k^i : (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}_k^m)]^{-1} \quad (1.27)$$

où \mathbb{Q}_k^i est le tenseur analogue à \mathbb{P}_k^i , on note l'identité ([Bornert et al., 2001](#)) :

$$\mathbb{S}^m : \mathbb{Q}_k^i + \mathbb{S}_k^i : \mathbb{C}^m = \mathbb{I} \quad (1.28)$$

Schéma Mori-Tanaka

Pour prendre en compte l'interaction entre les inclusions, une autre approche souvent utilisée dans la littérature, c'est le schéma de [Mori and Tanaka \(1973\)](#). Dans ce schéma, les inclusions représentatives de chaque sont encore plongées une à une dans la matrice infinie, soumise cette fois à l'infini à la déformation ε^m (au lieu de la déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$). L'estimation du tenseur d'élasticité effectif à l'aide du schéma de Mori-Tanaka est exprimée par la forme :

$$\mathbb{C}^{MT} = \mathbb{C}^m + \sum_{i=1}^N f_k^i (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}_k^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_k^i : (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}_k^m)]^{-1} : \mathbb{A}^m \quad (1.29)$$

Dans la forme ci-dessous, les formules des tenseurs de localisation en déformation de la matrice et de la phase k sont définies comme suit :

$$\mathbb{A}^m = \left[f^m \mathbb{I} + \sum_{i=1}^N f_k^i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_k^i : (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}_k^m)]^{-1} \right]^{-1}, \quad (1.30)$$

$$\mathbb{A}_k^i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_k^i : (\mathbb{C}_k^i - \mathbb{C}_k^m)]^{-1} : \mathbb{A}^m \quad (1.31)$$

Une démarche similaire en contrainte macroscopique imposée $\bar{\sigma}$ aurait conduit au schéma de Mori-Tanaka pour le tenseur des souplesses effectives \mathbb{S}^{MT} , donnée par la relation suivante :

$$\mathbb{S}^{MT} = \mathbb{S}^m + \sum_{i=1}^N f_k^i (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}_k^m) : [\mathbb{I} + \mathbb{Q}_k^i : (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}_k^m)]^{-1} : \mathbb{B}^m \quad (1.32)$$

où

$$\mathbb{B}^m = \left[f^m \mathbb{I} + \sum_{i=1}^N f_k^i [\mathbb{I} + \mathbb{Q}_k^i : (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}_k^m)]^{-1} \right]^{-1}, \quad (1.33)$$

$$\mathbb{B}_k^i = [\mathbb{I} + \mathbb{Q}_k^i : (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}_k^m)]^{-1} : \mathbb{B}^m \quad (1.34)$$

1.5 Contenu du travail de thèse

Ce travail est présenté dans ce document en trois chapitres :

Au chapitre 2, la thèse se concentre sur le problème de deux fissures dissymétriques en forme d'arc située le long de l'interface entre une hétérogénéité élastique circulaire et une matrice infinie soumise à une contrainte uniforme à l'infini (Figure 2.1). Parmi les différentes méthodes mathématiques pour résoudre ce problème, nous trouvons que la méthode de potentiels complexes [Muskhelishvili \(1953\)](#) est bien appropriée pour prendre en compte la présence des fissures. Dans cette méthode, les contraintes et les déplacements sont exprimés en termes de fonctions de variables complexes. Des contributions importantes à ce problème ont déjà été rapportées dans la littérature. [Perlman and Sih \(1967\)](#); [Toya \(1974\)](#); [Prasad and Simha \(2003, 2002\)](#) ont utilisé cette méthode pour étudier le problème des fissures situées le long de l'interface d'une inclusion circulaire intégrée dans un solide infini. Cependant, ces travaux ont été soit limités à une seule fissure ou à deux fissures symétriques, soit ont donné le système d'équations pour le problème multi-fissures sans la solution finale. Nous avons établi la solution pour le cas de deux fissures asymétriques.

Au chapitre 3, l'expression des facteurs d'intensité de contraintes à l'extrémité des fissures est présentée. Pour vérifier la solution, les facteurs d'intensité de contraintes analytiques pour différents valeurs d'angles de fissure dans le cas de la traction uniaxiale sous des conditions de déformation plane ont été comparés à la solution obtenue par la méthode numérique d'extrapolation des sauts de déplacements. On calcule également le taux de restitution d'énergie totale pour la fissure d'interface. Ce paramètre est important pour prédire la fissuration des matériaux dans le contexte de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Sur la base de la solution obtenue, nous analysons la propagation de deux fissures initialement symétriques. Nous montrons que la propagation peut être asymétrique : la longueur de l'une des fissures croît, tandis que celle de l'autre reste constante.

Au chapitre 4, à partir de la solution du problème élémentaire d'interaction inclusion-matrice présentée dans le chapitre 2, nous établissons la relation générale entre la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique du matériau tenant compte l'endommagement dû au décollement partiel à l'interface entre l'inclusion et la matrice. Ensuite, on présente une loi macroscopique d'endommagement du matériau hétérogène de type "inclusion-matrice" soumis à une traction uniaxiale. Finalement, on examine l'influence de paramètres tels que : fraction volumique des inclusions, taille des particules et angle initial des fissures sur la relation constitutive du matériau.

Chapitre 2

Résolution du problème d'interaction inclusion-matrice avec décollement partiel à l'interface

2.1 Introduction

Le chapitre 2 se concentre sur le problème de deux fissures asymétriques en forme d'arc située le long de l'interface entre une hétérogénéité élastique circulaire et une matrice infinie soumise à une contrainte uniforme à l'infini (Figure 2.1). Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de potentiels complexes (Muskhelishvili, 1953). Dans cette méthode, les contraintes et les déplacements sont exprimés en termes de fonctions de variables complexes. Des contributions importantes à ce problème ont déjà été rapportées dans la littérature. Perlman and Sih (1967); Toya (1974); Prasad and Simha (2003, 2002) ont utilisé cette méthode pour étudier le problème des fissures situées le long de l'interface d'une inclusion circulaire intégrée dans un solide infini. Cependant, ces travaux ont été soit limités à une seule fissure ou à deux fissures symétriques, soit ont donné le système d'équations pour le problème multi-fissures sans la solution finale. En fait, le problème de l'interaction entre deux fissures asymétriques à l'interface inclusion-matrice est une solution générale prolongeant deux cas particuliers déjà étudiés dans la littérature : une seule fissure (où une fissure a une longueur nulle) et deux fissures symétriques (où deux fissures ont la même longueur).

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.2, nous présentons la solution générale du problème de deux fissures asymétriques. Cette solution contient des constantes d'intégration. La détermination des constantes d'intégration est ensuite effectuée dans la section 2.3. Finalement, la section 2.4 exprime l'expression de contraintes sur la partie adhésive et de déplacements relatifs sur la partie décollée de l'interface entre l'inclusion et la matrice.

2.2 Position du problème et forme générale de la solution

Considérons le problème de deux fissures de longueurs différentes situées le long de l'interface entre une hétérogénéité élastique circulaire de rayon a et une matrice infinie soumise à une contrainte uniforme à l'infini (voir figure 2.1). Les deux fissures L_1 et L_2 sont symétriques par rapport à l'axe horizontal, chacune sous-tend un angle de $2\beta_i$ ($i = 1, 2$). Dans ce qui suit, les domaines S^+ et S^- désignent l'inclusion et la matrice, respectivement. E_1 et ν_1 (resp. E_2 et ν_2) sont le module d'Young et le coefficient de Poisson de l'inclusion (resp. la matrice). Enfin, L_a désigne la partie adhésive de l'interface.

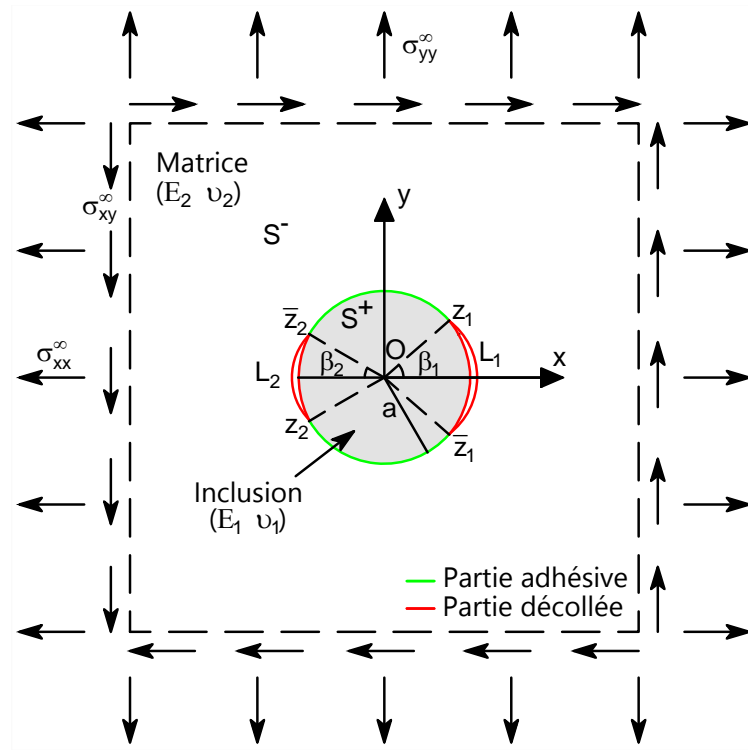


FIGURE 2.1 – Deux fissures dissymétriques à l'interface inclusion-matrice sous contrainte uniforme à l'infini

Pour ce problème, le vecteur contrainte est nul sur $L_1 \cup L_2$, alors que la continuité des contraintes et des déplacements est requise sur L_a . Ces conditions impliquent que :

$$(\sigma_{rr})_1 + (\sigma_{r\theta})_1 = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2.1)$$

$$(\sigma_{rr})_2 + (\sigma_{r\theta})_2 = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2.2)$$

$$(\sigma_{rr})_1 + i(\sigma_{r\theta})_1 = (\sigma_{rr})_2 + i(\sigma_{r\theta})_2 \quad \text{sur } L_b \quad (2.3)$$

$$(u_x)_1 + i(u_y)_1 = (u_x)_2 + i(u_y)_2 \quad \text{sur } L_b \quad (2.4)$$

dans les quelles σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ désignent des composantes (en coordonnées polaires) de contrainte et u_x , u_y indiquent les composantes (en coordonnées cartésiennes) de déplacement.

Suivant Prasad and Simha (2002), qui ont étudié le cas de deux fissures identiques, nous avons utilisé la méthode des potentiels complexes (Muskhelishvili, 1953; Milne-Thomson, 1968). Selon la notation de Milne-Thomson (1968), les composantes de déplacement \mathbf{u} et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ dans S^+ (ou S^-) peuvent être exprimées sous la forme de deux fonctions analytiques W et w :

$$(\sigma_{rr})_j + (\sigma_{r\theta})_j = W_j(z) + \overline{W}_j(\bar{z}), \quad (2.5)$$

$$2[(\sigma_{rr})_j + i(\sigma_{r\theta})_j] = W_j(z) + \overline{W}_j(\bar{z}) - \bar{z}\overline{W}'_j(\bar{z}) - (\bar{z}/z)\overline{w}_j(\bar{z}), \quad (2.6)$$

$$4\mu_j \frac{\partial}{\partial \theta} [(u_x)_j + i(u_y)_j] = iz[\kappa_j W_j(z) - \overline{W}_j(\bar{z}) + \bar{z}\overline{W}'_j(\bar{z}) + (\bar{z}/z)\overline{w}_j(\bar{z})], \quad (2.7)$$

avec $j = 1$ pour $z \in S^+$ (l'inclusion) et $j = 2$ pour $z \in S^-$ (la matrice) et

$$\kappa_j, \text{ contraintes planes} = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} \quad \text{et} \quad \kappa_j, \text{ déformations planes} = 3 - 4\nu_j. \quad (2.8)$$

Nous utilisons également les constantes suivantes :

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}, \quad m = \frac{\mu_1(1 + \kappa_2)}{\mu_2(1 + \kappa_1)} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{\ln \alpha}{2\pi}, \quad (2.9)$$

où $\mu_j = E_j/[2(1 + \nu_j)]$, $j = 1, 2$ dénote le module de cisaillement.

Pour les fissures circulaires, il est commode d'introduire les fonctions Ω_j définies comme suit (Perlman and Sih, 1967; Prasad and Simha, 2002)

$$\Omega_j(z) = -\overline{W}_j\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z}\overline{W}'_j\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z^2}\overline{w}_j\left(\frac{a^2}{z}\right). \quad (2.10)$$

En prenant le complexe conjugué de (2.10) et remplaçant a^2/\bar{z} par z , nous obtenons :

$$w_j(z) = \frac{a^2}{z^2} \left[\overline{\Omega}_j\left(\frac{a^2}{z}\right) + W_j(z) - zW'_j(z) \right] \quad (2.11)$$

Puis, en substituant (2.11) dans les équations (2.6) et (2.7), nous trouvons :

$$2[(\sigma_{rr})_j + i(\sigma_{r\theta})_j] = W_j(z) - \Omega_j\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) + \left(\frac{\bar{z}^2}{a^2} - \frac{\bar{z}}{z}\right)\overline{W}_j(\bar{z}), \quad (2.12)$$

$$4\mu_j \frac{\partial}{\partial \theta} [(u_x)_j + i(u_y)_j] = iz \left[\kappa_j W_j(z) + \Omega_j\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) - \left(\frac{\bar{z}^2}{a^2} - \frac{\bar{z}}{z}\right)\overline{W}_j(\bar{z}) \right], \quad (2.13)$$

En faisant tendre z vers un point $ae^{i\theta}$ de l'interface, les conditions (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) deviennent :

$$W_1^+(ae^{i\theta}) - \Omega_1^-(ae^{i\theta}) = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2.14)$$

$$W_2^-(ae^{i\theta}) - \Omega_2^+(ae^{i\theta}) = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\mu_1} [\kappa_1 W_1^+(ae^{i\theta}) + \Omega_1^-(ae^{i\theta})] = \frac{1}{\mu_2} [\kappa_2 W_2^-(ae^{i\theta}) + \Omega_2^+(ae^{i\theta})] \quad \text{sur } L_b \quad (2.16)$$

$$W_1^+(ae^{i\theta}) - \Omega_1^-(ae^{i\theta}) = W_2^-(ae^{i\theta}) - \Omega_2^+(ae^{i\theta}) \quad \text{sur } L_b \quad (2.17)$$

Les exposants $+$ et $-$ dans les fonctions W_j et Ω_j , $j = 1, 2$ désignent les valeurs limites lorsque $z \rightarrow ae^{i\theta}$ depuis $z \in S^+$ (l'inclusion) et $z \in S^-$ (la matrice), respectivement.

Puisque les contraintes et les déplacements sont continues à travers la partie adhésive L_a de l'interface, les équations (2.16) et (2.17) peuvent être considérées comme les conditions de continuité de $W_j(z)$ et $\Omega_j(z)$ à travers L_a (Perlman and Sih, 1967). Ainsi, $W_1(z)$ et $\Omega_1(z)$ dans les équations (2.16) et (2.17) peuvent être résolus explicitement en termes de $W_2(z)$ et $\Omega_2(z)$ comme

$$W_1(z) = \frac{\mu_2 + \kappa_2\mu_1}{\mu_2(1 + \kappa_1)}W_2(z) - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2(1 + \kappa_1)}\Omega_2(z) \quad (2.18)$$

$$\Omega_1(z) = \frac{\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1}{\mu_2(1 + \kappa_1)}W_2(z) + \frac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2(1 + \kappa_1)}\Omega_2(z) \quad (2.19)$$

En insérant ces deux équations ci-dessus dans les équations (2.14) et (2.15), nous obtenons le problème de Hilbert comme suit :

$$[W_2(ae^{i\theta}) - \Omega_2(ae^{i\theta})]^+ + \alpha[W_2(ae^{i\theta}) - \Omega_2(ae^{i\theta})]^- = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2.20)$$

$$[W_2(ae^{i\theta}) + \alpha\Omega_2(ae^{i\theta})]^+ - [W_2(ae^{i\theta}) + \alpha\Omega_2(ae^{i\theta})]^- = 0 \quad \text{sur } L_1 \cup L_2 \quad (2.21)$$

La solution du problème Hilbert nous donne les expressions de W_2 et Ω_2 (Muskhelishvili, 1953). Ensuite, nous substituons les expressions de W_2 et Ω_2 dans les équations (2.18) et (2.19). Nous obtenons les expressions de W_1 , Ω_1 , W_2 et Ω_2 comme suit :

$$(1 + \alpha)W_1(z) = mQ(z) + \chi(z)P(z), \quad (2.22)$$

$$(1 + \alpha)\Omega_1(z) = mQ(z) - \alpha\chi(z)P(z), \quad (2.23)$$

$$(1 + \alpha)W_2(z) = Q(z) + \alpha\chi(z)P(z), \quad (2.24)$$

$$(1 + \alpha)\Omega_2(z) = Q(z) - \chi(z)P(z), \quad (2.25)$$

où nous introduisons la fonction de Plemelj χ ($z_1 = ae^{i\beta_1}$, $z_2 = ae^{i(\beta_2 - \pi)}$)

$$\chi(z) = (z - \bar{z}_1)^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} (z - z_1)^{-\frac{1}{2} - i\epsilon} (z - \bar{z}_2)^{-\frac{1}{2} + i\epsilon} (z - z_2)^{-\frac{1}{2} - i\epsilon}, \quad (2.26)$$

et

$$Q(z) = e_0 + \frac{t_1}{z} + \frac{t_2}{z^2}, \quad P(z) = P_2 z^2 + P_1 z + P_0 + \frac{P_{-1}}{z} + \frac{P_{-2}}{z^2}, \quad (2.27)$$

$e_0, t_1, t_2, P_{-2}, \dots, P_2$ sont huit constantes à déterminer. Ceci est discuté dans la section 2.3.

2.3 Détermination des constantes d'intégration

Les huit constantes d'intégration $e_0, t_1, t_2, P_{-2}, \dots, P_2$ sont obtenue en exprimant : *i.* Le comportement à l'infini de W_2 et de w_2 (4 équations), *ii.* L'analyticité de W_1 et w_1 en $z = 0$ (3 équations) et *iii.* La condition d'univocité des déplacements (1 équation).

Comportement à l'infini de W_2 et de w_2 . Suivant [Milne-Thomson \(1968, chap.IV,§4.10\)](#), ces fonctions se comportent comme suit :

$$W_2(z) = A^\infty + \mathcal{O}(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.28)$$

$$w_2(z) = B^\infty + \mathcal{O}(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.29)$$

où

$$2A^\infty = \sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty \quad \text{et} \quad B^\infty = \sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty + 2i\sigma_{xy}^\infty \quad (2.30)$$

et σ^∞ dénote la contrainte à l'infini.

Dans la présente section, nous utiliserons les développements asymptotiques de la fonction de Plemelj χ à l'infini et à l'origine :

$$\chi(z) = z^{-2}[1 + z^{-1}F_{21} + \mathcal{O}(z^{-2})] \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.31)$$

$$\chi(z) = F_{10}(1 + zF_{11} + z^2F_{12}) + \mathcal{O}(z^3) \quad (z \rightarrow 0), \quad (2.32)$$

où les symboles F_{ij} ont été introduits par [Prasad and Simha \(2002\)](#) pour $\beta_1 = \beta_2$. Quand $\beta_1 \neq \beta_2$, nous trouvons :

$$a^2F_{10} = -\exp[2\epsilon(\beta_1 + \beta_2)], \quad (2.33)$$

$$aF_{11} = \cos \beta_1 - \cos \beta_2 + 2\epsilon(\sin \beta_1 - \sin \beta_2), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} a^2F_{12} = & \epsilon^2(2 - \cos 2\beta_1 - \cos 2\beta_2 - 4 \sin \beta_1 \sin \beta_2) \\ & + 2\epsilon[\sin 2\beta_1 + \sin 2\beta_2 - \sin(\beta_1 + \beta_2)] \\ & + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2) - \cos \beta_1 \cos \beta_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$a^{-1}F_{21} = \cos \beta_1 - \cos \beta_2 - 2\epsilon(\sin \beta_1 - \sin \beta_2). \quad (2.36)$$

En introduisant le développement asymptotique (2.31) dans l'équation (2.24) et en identifiant avec l'équation (2.28), nous trouvons :

$$\alpha P_2 + e_0 = (1 + \alpha) A^\infty \quad \text{et} \quad \alpha P_1 + \alpha F_{21} P_2 + t_1 = 0. \quad (2.37)$$

Ensuite, la combinaison des équations (2.10), (2.28) et (2.29) fournit le développement suivant de Ω_2 en $z = 0$:

$$\Omega_2(z) = \frac{a^2}{z^2} \overline{B^\infty} + \mathcal{O}(1) \quad (z \rightarrow 0), \quad (2.38)$$

qui, en identifiant avec l'équation (2.25), conduit à :

$$-F_{10}P_{-2} + t_2 = (1 + \alpha) a^2 \overline{B^\infty}, \quad (2.39)$$

$$F_{10}F_{11}P_{-2} + F_{10}P_{-1} - t_1 = 0. \quad (2.40)$$

Analyticité de W_1 et de w_1 à $z = 0$. Nous exprimons enfin que W_1 et w_1 doivent être analytiques en $z = 0$. En développant l'équation (2.22) et en exprimant que la puissance négative de z doit disparaître, conduit à :

$$F_{10}P_{-2} + m t_2 = 0 \quad \text{et} \quad F_{10}F_{11}P_{-2} + F_{10}P_{-1} + m t_1 = 0. \quad (2.41)$$

Pour exprimer l'analyticité de w_1 en $z = 0$, nous combinons les équations (2.10) avec les développements asymptotiques des équations (2.22) et (2.23) en $z \rightarrow 0$ et $z \rightarrow \infty$, respectivement. On a :

$$F_{10}F_{12}P_{-2} + F_{10}(F_{11}P_{-1} + P_0) - \alpha\overline{P_2} + m(e_0 + \overline{e_0}) = 0, \quad (2.42)$$

et

$$\alpha P_1 + \alpha F_{21}P_2 - m t_1 = 0. \quad (2.43)$$

Les équations (2.37), (2.39), (2.40), (2.41) et (2.43) conduisent ensuite à :

$$e_0 = (1 + \alpha) A^\infty - \alpha P_2, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1 + \alpha}{1 + m} a^2 \overline{B^\infty}, \quad (2.44)$$

$$P_{-2} = -\frac{m}{F_{10}} t_2, \quad P_{-1} = \frac{m F_{11}}{F_{10}} t_2, \quad P_1 = -F_{21} P_2, \quad (2.45)$$

et on voit qu'il ne reste que deux constantes d'intégration inconnues, à savoir : P_0 et P_2 , qui sont liées par l'équation (2.42)

$$\alpha(1 + 2m)\Re(P_2) - i\alpha\Im(P_2) - F_{10}P_0 = m \frac{1 + \alpha}{1 + m} [2(1 + m)A^\infty + (F_{11}^2 - F_{12})a^2 \overline{B^\infty}], \quad (2.46)$$

où \Re et \Im désignent les parties réelle et imaginaire de leur argument.

Univocité des déplacements. L'équation restante est trouvée à partir de la condition d'uniformité des déplacements (Perlman and Sih, 1967)

$$\int_{L_j} \chi^+(t)(P_2 t^2 + P_1 t + P_0 + P_{-1} t^{-1} + P_{-2} t^{-2}) dt = 0, \quad (2.47)$$

où il est rappelé que L_j ($j = 1, 2$) désigne l'un des deux les fissures de l'arc, alors que χ^+ est défini sur $L_1 \cup L_2$ comme suit :

$$\chi^+(ae^{i\theta}) = \lim_{r \searrow a^-} \chi^+(re^{i\theta}). \quad (2.48)$$

En sélectionnant la fissure L_1 (située entre $z = ae^{-i\beta_1}$ et $z = ae^{i\beta_1}$) dans l'équation (2.47), nous obtenons la condition :

$$I_2 P_2 + I_1 P_1 + I_0 P_0 + I_{-1} P_{-1} + I_{-2} P_{-2} = 0, \quad (2.49)$$

où

$$I_k = a^k \int_{-\beta_1}^{\beta_1} \frac{\cos[\epsilon \ln f_1(\beta_1, \beta_2, \theta) - k\theta]}{\sqrt{f_2(\beta_1, \beta_2, \theta)}} d\theta, \quad (2.50)$$

pour $k = -2, -1, 0, 1, 2$, avec

$$f_1(\beta_1, \beta_2, \theta) = g_1(\beta_1, \beta_2, \theta) / g_2(\beta_1, \beta_2, \theta), \quad (2.51)$$

$$f_2(\beta_1, \beta_2, \theta) = g_1(\beta_1, \beta_2, \theta) g_2(\beta_1, \beta_2, \theta), \quad (2.52)$$

$$g_1(\beta_1, \beta_2, \theta) = \sin \frac{1}{2}(\beta_1 - \theta) \cos \frac{1}{2}(\beta_2 - \theta), \quad (2.53)$$

$$g_2(\beta_1, \beta_2, \theta) = \sin \frac{1}{2}(\beta_1 + \theta) \cos \frac{1}{2}(\beta_2 + \theta). \quad (2.54)$$

Les intégrales (2.50) sont singulières ; en effet, lorsque $\theta \rightarrow \beta_1$, l'argument du logarithme tend vers 0 et le numérateur de l'intégrande oscille à une fréquence qui croît de façon exponentielle. Afin de minimiser les erreurs d'arrondis, l'évaluation numérique de ces intégrales devrait être effectuée comme suit : *i.* calculer et stocker la contribution de chaque oscillation, *ii.* additionner séparément les contributions positives et négatives (ordonnées par magnitude croissante), *iii.* additionner la somme de toutes les contributions positives et la somme de toutes les contributions négatives. Enfin, il convient de noter qu'un majorant rigoureux de l'erreur rigoureuse peut être à l'aide de résultats standards sur les séries alternées (voir annexe A pour plus de détails).

Cependant, dans le cas présent, la contribution de chaque nouvelle oscillation diminue de façon exponentielle, au point que même la première oscillation s'annule à la précision de la machine. L'approche rigoureuse décrite ci-dessus s'est donc révélée superflue et nous nous sommes reposés sans plus de précautions sur la fonction standard `quad` du package `scipy.integrate` Python¹ (qui encapsule la bibliothèque Fortran QUADPACK) pour calculer les intégrales I_k .

Expression de P_2 . La résolution des équations (2.46) et (2.49) conduit finalement à

$$\begin{aligned} \Re(P_2) = & \{F_{10}[(F_{12}I_0 - I_{-2})\Re(P_{-2}) + (F_{11}I_0 - I_{-1})\Re(P_{-1})] \\ & + 2m(1 + \alpha)I_0A^\infty\} (2\alpha mI_0 - F_{10}F_{21}I_1 + \alpha I_0 \\ & + F_{10}I_2)^{-1} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \Im(P_2) = & -F_{10}[(F_{12}I_0 - I_{-2})\Im(P_{-2}) + (F_{11}I_0 - I_{-1})\Im(P_{-1})] \\ & \cdot (F_{10}F_{21}I_1 + \alpha I_0 - F_{10}I_2)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

et P_0 est alors déduit de l'équation (2.49).

2.4 Expression de contraintes sur la partie adhésive et de déplacements relatifs sur la partie décollée de l'interface

À partir des équations (2.6) et (2.10), la traction sur la partie adhésive de l'interface peut être exprimée comme suit :

$$2[(\sigma_{rr})_1 + i(\sigma_{r\theta})_1](ae^{i\theta}) = W_1^+(ae^{i\theta}) - \Omega_1^-(ae^{i\theta}), \quad (2.57)$$

où $\beta_1 < \theta < \pi - \beta_2$ (ou $-\pi + \beta_2 < \theta < -\beta_1$). En substituant dans l'équation (2.57) les expressions (2.22) et (2.23) des potentiels complexes W_1 et Ω_1 et en utilisant la continuité de P , Q et χ (sur la partie adhésive de l'interface), on trouve l'expression des contraintes :

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}\chi^+(ae^{i\theta})P(ae^{i\theta}). \quad (2.58)$$

1. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/integrate.html>, consulté pour la dernière fois le 17-05-2019.

où

$$\chi^+(ae^{i\theta}) = -i \frac{\exp[\epsilon(\beta_1 + \beta_2) - i(\epsilon \ln f_3(\beta_1, \beta_2, \theta) + \theta)]}{4a^2 \sqrt{f_4(\beta_1, \beta_2, \theta)}}, \quad (\beta_1 < \theta < \pi - \beta_2), \quad (2.59)$$

$$\chi^+(ae^{i\theta}) = i \frac{\exp[\epsilon(\beta_1 + \beta_2) - i(\epsilon \ln f_3(\beta_1, \beta_2, \theta) + \theta)]}{4a^2 \sqrt{f_4(\beta_1, \beta_2, \theta)}}, \quad (-\pi + \beta_2 < \theta < -\beta_1). \quad (2.60)$$

avec

$$f_3(\beta_1, \beta_2, \theta) = -f_1(\beta_1, \beta_2, \theta), \quad (2.61)$$

$$f_4(\beta_1, \beta_2, \theta) = -f_2(\beta_1, \beta_2, \theta). \quad (2.62)$$

De même, nous pouvons déduire les déplacements relatifs de deux lèvres de la fissure, $\Delta u_i(ae^{i\theta}) = (u_i)_2(ae^{i\theta}) - (u_i)_1(ae^{i\theta})$ ($i = x, y$) à partir de l'équation (2.13) comme suit :

$$4 \frac{\partial}{\partial \theta} [\Delta(u_x) + i\Delta(u_y)](ae^{i\theta}) = iae^{i\theta} \left\{ \frac{1}{\mu_2} [\kappa_2 W_2^-(ae^{i\theta}) + \Omega_2^+(ae^{i\theta})] - \frac{1}{\mu_1} [\kappa_1 W_1^+(ae^{i\theta}) + \Omega_1^-(ae^{i\theta})] \right\}, \quad (2.63)$$

où $-\beta_1 < \theta < \beta_1$ (ou $\pi - \beta_2 < |\theta| < \pi$). Pour exprimer les déplacements relatifs $\Delta(u_i)(ae^{i\theta})$ sur la partie décollée de l'interface, nous combinons l'équation (2.59) avec les expressions (2.22), (2.23), (2.24) et (2.25) des potentiels complexes W_j et Ω_j . Ensuite, nous utilisons la discontinuité de χ à travers l'interface fissurée, $\chi^+(ae^{i\theta}) = -\alpha\chi^-(ae^{i\theta})$ (la fonction χ est la solution de l'équation homogène associée à (2.20)). Nous obtenons :

$$4(1 + \alpha)[\Delta(u_x) + i\Delta(u_y)](ae^{i\theta}) = -iae^{i\theta}(c_1 + c_2) \int_{\beta_1}^{\theta} \chi^+(ae^{i\theta}) P(ae^{i\theta}) d\theta. \quad (2.64)$$

où $c_j = (\kappa_j + 1)/\mu_j$ ($j = 1, 2$) et

$$\chi^+(ae^{i\theta}) = -\frac{\exp[\epsilon(\beta_1 + \beta_2 + \pi) - i(\epsilon \ln f_1(\beta_1, \beta_2, \theta) + \theta)]}{4a^2 \sqrt{f_2(\beta_1, \beta_2, \theta)}}, \quad (-\beta_1 < \theta < \beta_1), \quad (2.65)$$

$$\chi^+(ae^{i\theta}) = \frac{\exp[\epsilon(\beta_1 + \beta_2 + \pi) - i(\epsilon \ln f_1(\beta_1, \beta_2, \theta) + \theta)]}{4a^2 \sqrt{f_2(\beta_1, \beta_2, \theta)}}, \quad (\pi - \beta_2 < |\theta| < \pi). \quad (2.66)$$

2.5 Conclusions

Ce chapitre porte principalement sur le problème de deux fissures asymétriques en forme d'arc située le long de l'interface entre une inclusion élastique circulaire et une matrice infinie soumises à une contrainte uniforme à l'infini. En fait, ce problème d'interaction de deux fissures asymétriques à l'interface inclusion-matrice est une solution générale prolongeant deux cas particuliers déjà étudiés dans la littérature :

une seule fissure (où une fissure a une longueur nulle) et deux fissures symétriques (où deux fissures ont la même longueur). La solution obtenue nécessite l'intégration numérique des intégrales montrées en équation (2.50). Cependant, les méthodes d'intégration numérique standard permettent de fournir des estimations précises de ces intégrales sans précaution supplémentaire.

Dans le chapitre 3, l'expression (2.58) des contraintes sont utilisés pour exprimer les facteurs d'intensité de contraintes, desquels le taux de restitution d'énergie est ensuite déduit. Ce dernier est un élément important pour l'analyse de la propagation de la fissure. De plus, les résultats ci-dessus sont la base de la construction d'une loi macroscopique d'endommagement des matériaux de type "inclusion-matrice" tenant compte de la présence des fissures à l'interface. Ceci est étudié dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Propagation des fissures d'interface

3.1 Introduction

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le chapitre 3 concerne la propagation des fissures le long de l'interface entre l'inclusion circulaire et la matrice infinie du problème de deux fissures asymétriques mentionné dans le chapitre 2.

Dans la section 3.2, l'expression du facteur d'intensité de contraintes complexe à l'extrémité d'une fissure est présentée. A cause de la solution oscillatoire du champ de déplacement, qui implique une zone d'interpénétration en pointe de la fissure, l'estimation de la gamme dans laquelle la solution est valable pour analyser la propagation des fissures est étudié dans la section 3.3. Ensuite, la section 3.4 est consacrée à la vérification de la solution analytique. Les facteurs d'intensité de contraintes analytiques pour différents valeurs des angles de fissures dans le cas de la traction uniaxiale sous des conditions de déformation plane ont été comparés à la solution obtenue par la méthode numérique d'extrapolation des sauts de déplacements. Dans la section 3.5, nous montrerons quelques résultats concernant le taux de restitution d'énergie pour différentes configurations des deux fissures. En tant qu'application, en utilisant des arguments basés sur le critère de l'énergie, la section 3.6 aborde enfin la propagation symétrique par rapport à la propagation asymétrique de deux fissures interfaciales initialement symétriques.

3.2 Facteur d'intensité de contraintes complexe

La solution analytique pour une fissure d'interface plane entre deux matériaux isotropes élastiques a été obtenue par Williams (1959) qui a trouvé les contraintes le long de la partie adhésive de l'interface et les déplacements relatifs de deux lèvres de la fissure, $\Delta u_i(s) = u_i(s, \varphi = \pi) - u_i(s, \varphi = -\pi)$. Suivant cette solution, l'expression asymptotique des contraintes et des déplacements relatifs lorsque $s \rightarrow 0$ (s est la

distance du point courant à la pointe de la fissure) est la suivante :

$$\sigma_{nn}(s, \varphi = 0) + i\sigma_{nt}(s, \varphi = 0) = \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{2\pi}} s^{i\epsilon-1/2}, \quad (3.1)$$

$$\Delta u_n(s) + i\Delta u_t(s) = \frac{8}{(1 + 2i\epsilon) \cosh(\pi\epsilon) E^*} \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{2\pi}} s^{i\epsilon+1/2}, \quad (3.2)$$

où s et φ sont les coordonnées polaires de pôle à la pointe de la fissure (le pôle étant placé à la pointe de la fissure, comme illustré sur la figure 3.1, gauche) et $2/E^* = 1/E_1^* + 1/E_2^*$ ($E_j^* = E_j$ pour les problèmes de contrainte plane, $E_j^* = E_j/(1 - \nu_j^2)$ pour les problèmes de déformation plane).

Dans les expressions ci-dessus, \mathcal{K} indique le facteur d'intensité de contraintes complexe, dont les dimensions physiques sont "peu intuitives" : $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2-i\epsilon}$. Il est d'usage de définir les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} au sens classique (avec les dimensions physiques : $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$) par l'introduction d'une longueur de référence supplémentaire ℓ (Rice, 1988)

$$K_I + iK_{II} = \ell^{i\epsilon} \mathcal{K}. \quad (3.3)$$

La sélection d'une valeur appropriée pour la longueur de référence ℓ est généralement une tâche difficile pour laquelle il n'existe pas de méthodologie claire. Cependant, pour la présente étude, ℓ peut être choisi arbitrairement. En effet, dans la section 3.4, nous comparons les valeurs analytiques de K_I et de K_{II} avec des estimations par éléments finis ; pour les besoins de cette comparaison, ℓ peut être considérée comme une constante de normalisation. Ensuite, dans les sections 3.5 et 3.6, notre analyse de la propagation des fissures est basée sur le taux de restitution d'énergie G et la ténacité interfaciale G_c . Ni le taux de restitution d'énergie [voir l'équation (3.10)], ni la ténacité interfaciale (supposée constante) ne dépendent de ℓ . Nous avons donc choisi arbitrairement $\ell = a$ dans le reste de ce chapitre.

Les développements asymptotiques (3.1) et (3.2) restent valables pour des fissures courbes. Dans le cas présent, σ_{nn} et σ_{nt} peuvent être reliés à σ_{rr} et à $\sigma_{r\theta}$ dans l'équation (2.58) comme suit (voir figure 3.1, à droite) :

$$\sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}. \quad (3.4)$$

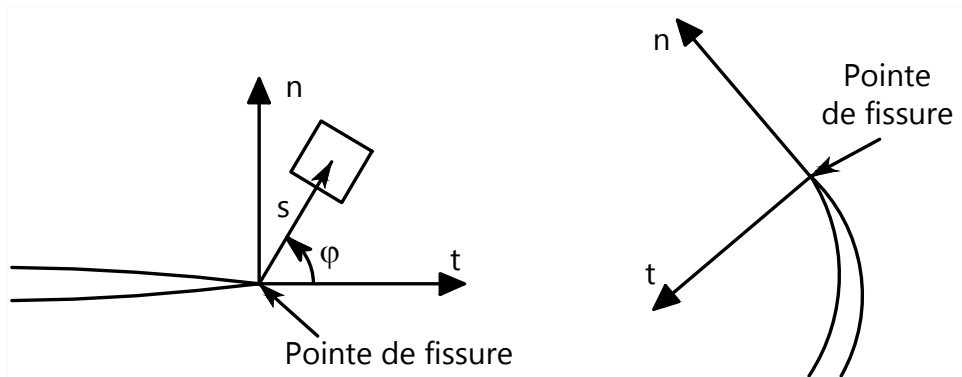


FIGURE 3.1 – Le système de coordonnées locales (n, t) à la pointe de la fissure

Ensuite, le facteur d'intensité de contraintes complexe \mathcal{K} à la pointe de la fissure $z_1 = ae^{i\beta_1}$ est obtenu à partir d'un développement asymptotique de $\chi(ae^{i\theta})$ dans l'équation (2.58), quand $\theta \xrightarrow{\sim} \beta_1$:

$$\begin{aligned} \overline{a^{i\epsilon}\mathcal{K}} &= K_I - iK_{II} \\ &= \frac{-i\sqrt{2\pi} \exp[\epsilon(\beta_1 + \beta_2) - i(\epsilon\psi + \beta_1)] P(ae^{i\beta_1})}{4a\sqrt{2a \sin \beta_1 \cos \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}}, \end{aligned} \quad (3.5a)$$

où

$$\psi = \ln \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)}{2 \sin \beta_1 \cos \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)}. \quad (3.5b)$$

Il est facile de vérifier que l'on retrouve les résultats de Prasad and Simha (2003) (une seule fissure) et de Il est facile de vérifier que l'on retrouve les résultats de Prasad and Simha (2003) (une seule fissure) et de Prasad and Simha (2002) (deux fissures identiques) en prenant successivement $\beta_2 = 0$ et $\beta_2 = \beta_1 = \beta_0$ dans l'équation (3.5).

3.3 Domaine de validité de la solution

En raison du facteur $s^{i\epsilon}$ de l'équation (3.2), le saut de déplacement entre les deux lèvres de la fissure présente un caractère oscillant, ce qui conduit à un chevauchement des surfaces supérieure et inférieure de la fissure lorsque l'on approche de la pointe de fissure. Ceci est physiquement irréaliste et la solution élastique linéaire présentée ci-dessus devrait en toute rigueur être remplacée par une solution non linéaire tenant compte du contact (Comminou, 1977, 1978). Cependant, comme l'a expliqué Rice (1988), la solution élastique linéaire permet d'obtenir une approximation acceptable de la solution vraie si la taille de la zone de contact reste petite par rapport à la longueur totale de la fissure.

Soit s_c la taille de la zone de contact ; c 'est la plus grande valeur de s telle que $\Delta u_n(s) = 0$ et

$$s_c \leq 2a\beta_1 \quad (3.6)$$

(la zone de contact doit être plus courte que la fissure). On peut facilement trouver que s_c maximise, sous la contrainte (3.6), la quantité suivante Sun and Qian (1997)

$$s_c = \exp \left[\frac{1}{\epsilon} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\Re(\mathcal{K}) + 2\epsilon\Im(\mathcal{K})}{\Im(\mathcal{K}) - 2\epsilon\Re(\mathcal{K})} \right) + n\pi \right\} \right], \quad (3.7)$$

pour $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. L'expression ci-dessus ne dépend pas de la longueur de référence ℓ , comme le souligne le fait que nous avons utilisé le facteur d'intensité de contraintes complexe \mathcal{K} pour exprimer cette valeur plutôt que K_I et K_{II} .

Dans le cas d'une inclusion raide, soumise à une contrainte uniaxiale à l'infini le long de l'axe $0x$, nous avons tracé s_c dans la Figure 3.2 pour divers les valeurs de β_1 et β_2 (pour chaque courbe, β_2 est fixe, alors que β_1 varie). Cette figure montre clairement que l'étendue de la zone de contact reste négligeable pour des valeurs de β_1

allant jusqu'à environ 55° . En conséquence, on supposera toujours dans la suite de ce chapitre que les fissures sont telles que $\beta_1, \beta_2 \leq 55^\circ$, de sorte que la solution élastique linéaire déduite ci-dessus est une excellente approximation de la vraie solution.

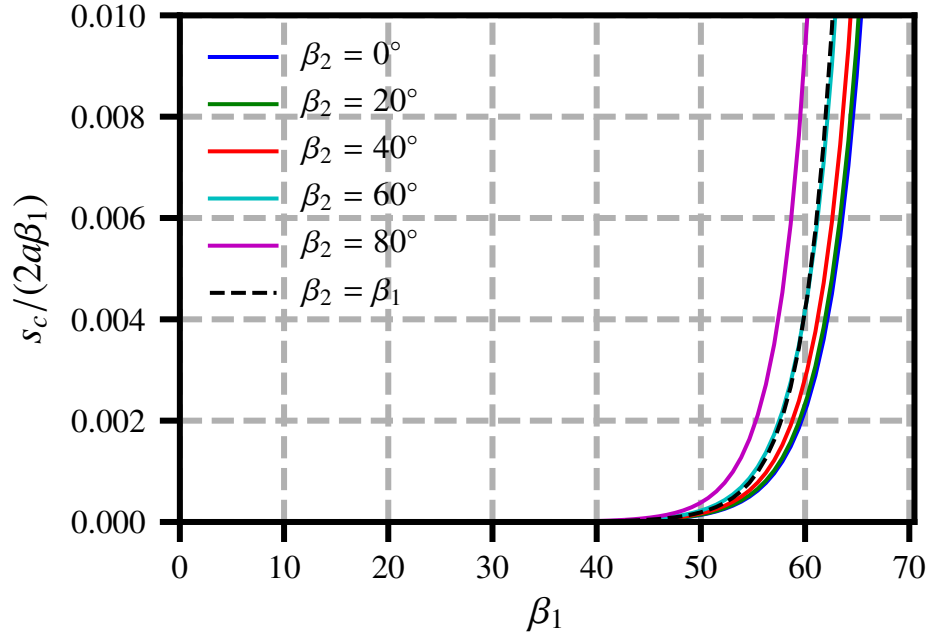


FIGURE 3.2 – Taille de la zone de contact s_c pour une inclusion raide soumise à une contrainte distante uniaxiale le long de l'axe $0x$.

3.4 Comparaison avec une analyse par éléments finis

Nous avons effectué une analyse par éléments finis du problème ci-dessus avec différentes configurations des deux fissures afin de vérifier la cohérence de nos résultats analytiques. Nous avons utilisé le code d'éléments finis *Porofis* (Pouya, 2015) pour effectuer des simulations en déformations planes.

Le modèle est représenté sur la figure 3.3. Afin de minimiser les effets de bord, nous avons sélectionné un domaine de grande taille $H = 40a$. Les contraintes uniaxiales $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^\infty$ sont appliquées aux bords gauche et droit de ce domaine tandis que les bords supérieur et inférieur sont libres. Nous avons utilisé des éléments linéaires à trois nœuds avec un maillage fin (maillage $\sim 0.001a$ près de l'interface entre l'inclusion et la matrice ; maillage $\simeq 10^{-5}a$ près des pointes des fissures). Diverses géométries de fissures ont été prises en compte (chacune donnant lieu à un maillage différent) :

1. une seule fissure, c.-à-d. $\beta_2 = 0$ et $\beta_1 = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 55^\circ$,
2. deux fissures symétriques, c.-à-d. $\beta_1 = \beta_2 = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 55^\circ$,
3. deux fissures asymétriques : $\beta_2 = 30^\circ$ et $\beta_1 = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 55^\circ$,

figure 3.4 montre le maillage utilisé pour $\beta_1 = 40^\circ$ et $\beta_2 = 30^\circ$. Pour chaque géométrie, les facteurs d'intensité de contraintes sont estimés pour les différentes combinaisons de propriétés du matériau :

1. $E_1 = E_2$ et $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ (cas homogène),
2. $E_1 = 10E_2$, $\nu_1 = 0.2$ et $\nu_2 = 0.3$ (inclusion raide),
3. $E_2 = 10E_1$, $\nu_1 = 0.2$ et $\nu_2 = 0.3$ (inclusion souple).

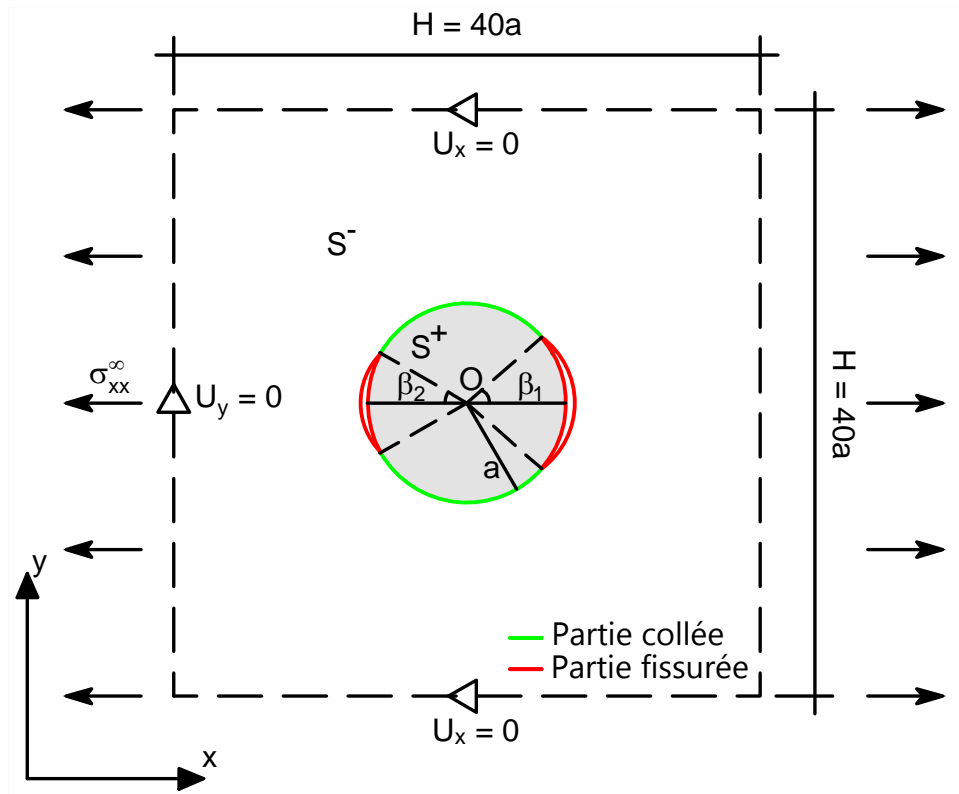


FIGURE 3.3 – Géométrie des simulations numériques décrites dans la section 3.4.

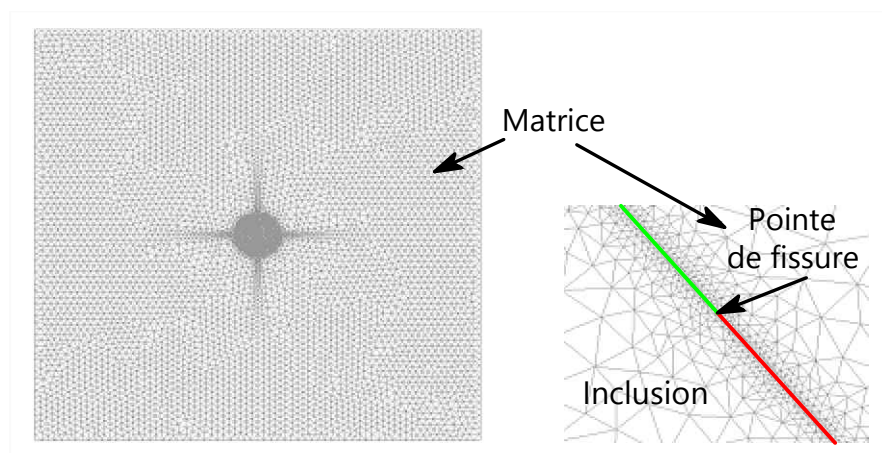


FIGURE 3.4 – Exemple de maillage triangulaire non structuré de 143514 éléments pour le cas asymétrique $\beta_1 = 40^\circ$ and $\beta_2 = 30^\circ$.

Nous avons estimé les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} à partir des

quantités $\mathcal{Q}_I(s)$ et $\mathcal{Q}_{II}(s)$ définies comme suit [voir l'équation (3.2)] :

$$\mathcal{Q}_I + i\mathcal{Q}_{II} = \frac{1 + 2i\epsilon}{8} \sqrt{2\pi} E^* \cosh(\pi\epsilon) \left(\frac{a}{s}\right)^{i\epsilon} (\Delta u_n + i\Delta u_t), \quad (3.8)$$

où $\Delta u_n(s)$ et $\Delta u_t(s)$ désignent les composantes normale et tangentielle de la discontinuité de déplacement (s : longueur d'arc à partir de la pointe de fissure), qui sont des sorties du code numérique. Quand $s \rightarrow 0$, cette quantité doit se comporter comme suit

$$\mathcal{Q}_I + i\mathcal{Q}_{II} \sim (K_I + iK_{II})\sqrt{s}, \quad s \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

La figure 3.5 représente les valeurs nodales de \mathcal{Q}_I et de \mathcal{Q}_{II} en fonction de \sqrt{s} . Comme prévu, les deux quantités varient quasi-linéairement avec \sqrt{s} , ce qui permet de calculer K_I et K_{II} par régression linéaire. Pour ce faire, nous avons sélectionné des nœuds qui ne sont pas trop proches de la pointe de la fissure (où la qualité de l'ajustement se dégrade, à cause de la singularité) et pas trop éloignés de la pointe de fissure [où le comportement asymptotique (3.9) ne tient plus]. Nous avons constaté que l'intervalle $0.03 \leq \sqrt{s/a} \leq 0.06$ donnait un ajustement satisfaisant pour tous les cas considérés ici.

Les figures 3.6 à 3.14 montrent un bon accord entre les facteurs d'intensité de contraintes ainsi estimés et la formule analytique (3.5) pour toute la gamme de (β_1, β_2) listées ci-dessus.

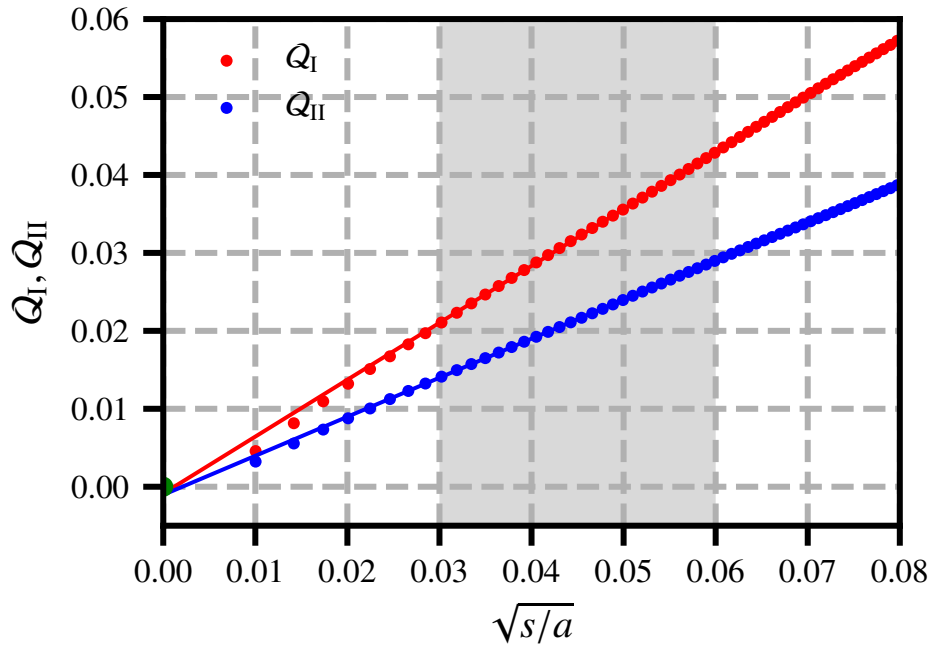


FIGURE 3.5 – Régression linéaire des quantités numériques \mathcal{Q}_I et \mathcal{Q}_{II} , qui doivent se comporter de manière linéaire par rapport à \sqrt{s} . La qualité de l'ajustement se dégrade pour les nœuds trop proches ou trop éloignés de la pointe de la fissure. Par conséquent, seuls les nœuds situés dans la zone ombrée sont utilisés pour effectuer la régression linéaire. (inclusion raide, $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 30^\circ$)

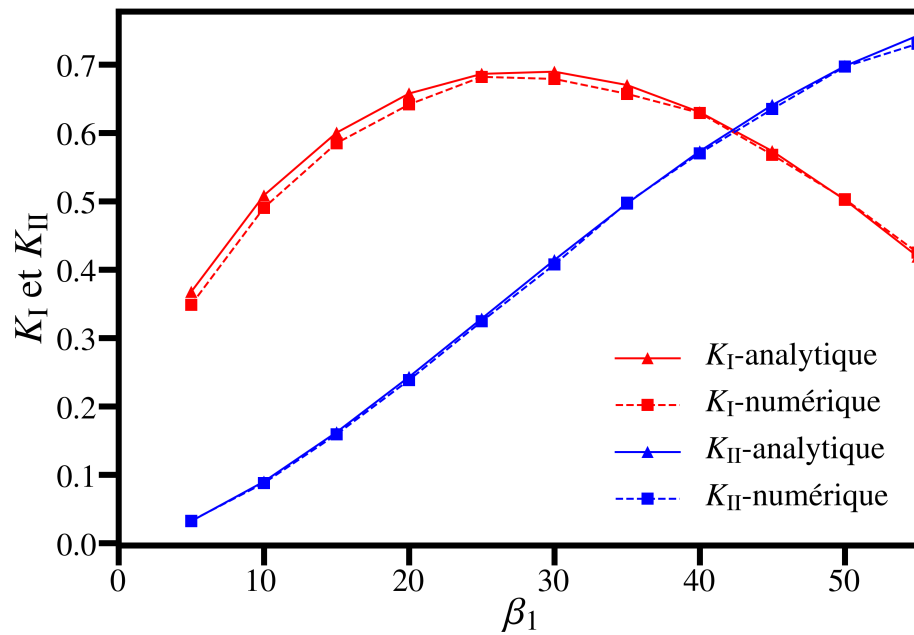


FIGURE 3.6 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (une fissure, cas homogène).

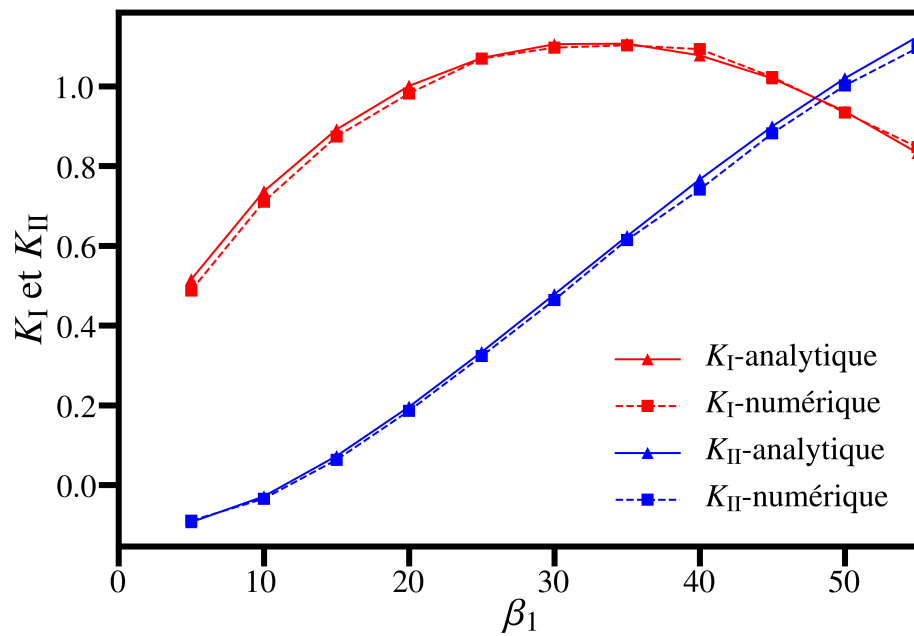


FIGURE 3.7 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (une fissure, inclusion raide).

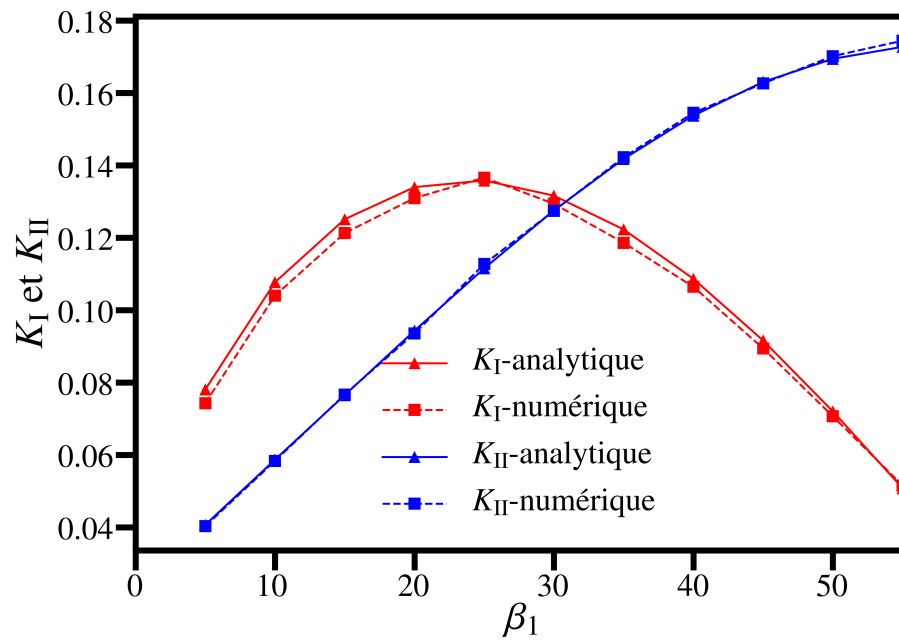


FIGURE 3.8 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (une fissure, inclusion souple).

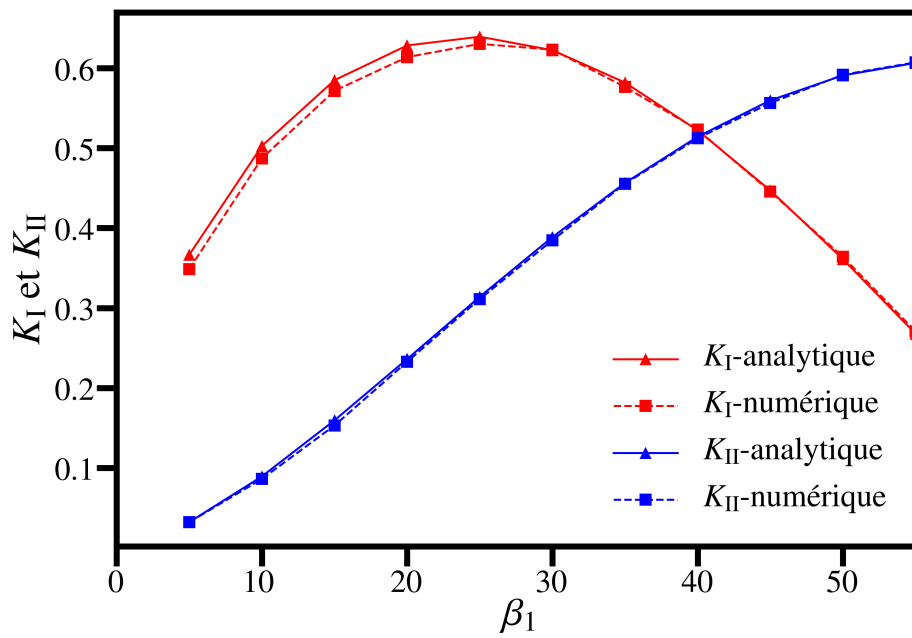


FIGURE 3.9 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures symétriques, cas homogène).

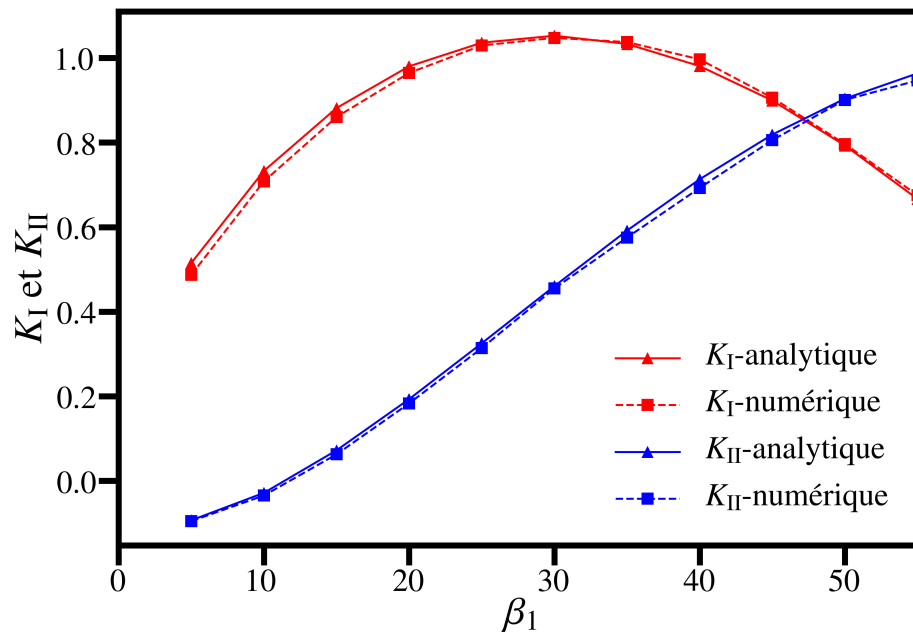


FIGURE 3.10 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures symétriques, inclusion raide).

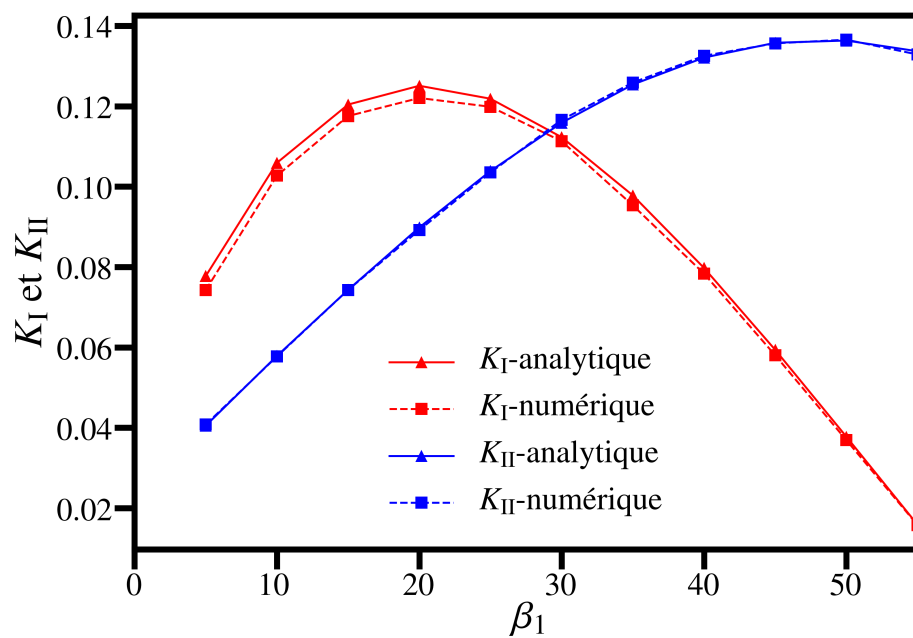


FIGURE 3.11 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures symétriques, inclusion souple).

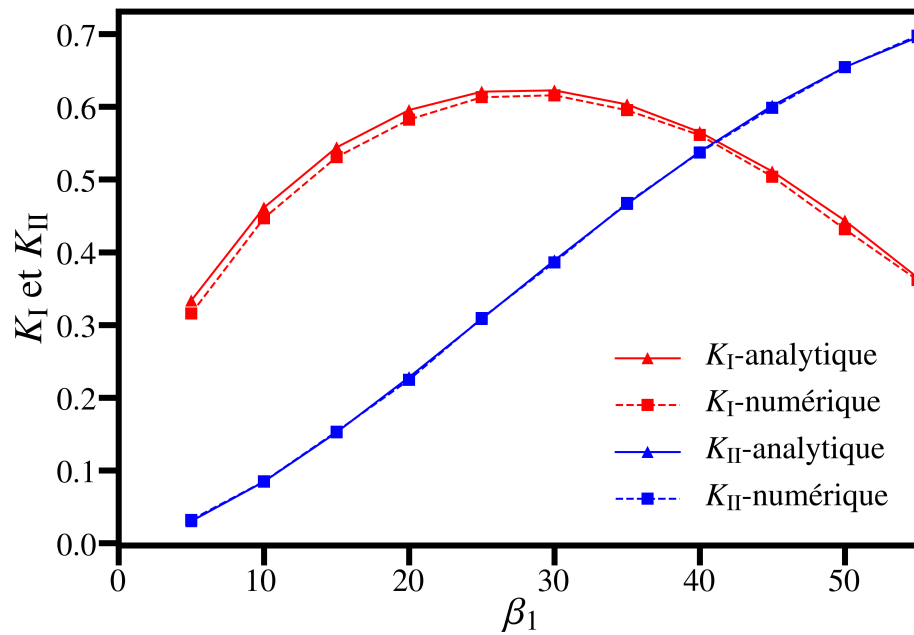


FIGURE 3.12 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures asymétriques, $\beta_2 = 30^\circ$, cas homogène).

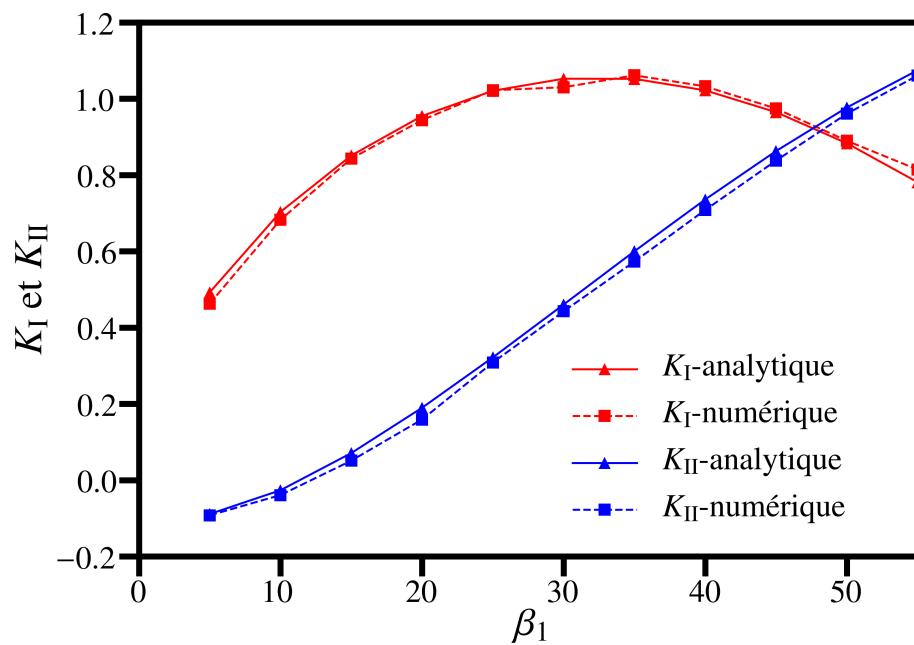


FIGURE 3.13 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures asymétriques, $\beta_2 = 30^\circ$, inclusion raide).

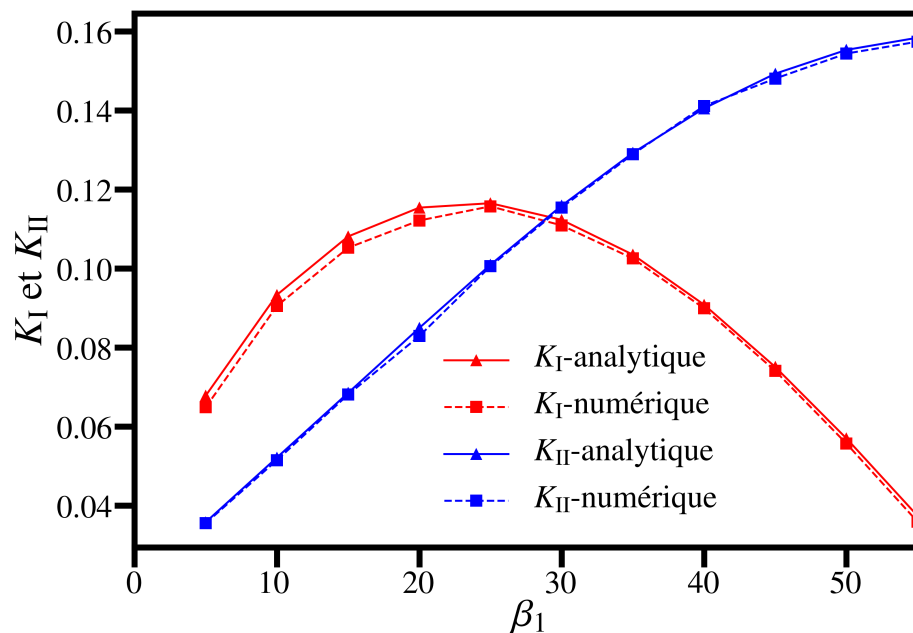


FIGURE 3.14 – K_I et K_{II} en fonction de β_1 (deux fissures asymétriques, $\beta_2 = 30^\circ$, inclusion souple).

3.5 Taux de restitution d'énergie

Suivant [Sun and Jin \(2012\)](#), nous considérons un critère de propagation de fissure basé sur le taux de restitution d'énergie. Le taux de restitution d'énergie d'une fissure d'interface peut être relié au facteur d'intensité de contraintes complexe via l'extension suivante de la formule d'Irwin ([Malyshev and Salganik, 1965](#)) :

$$G = \frac{1}{E^*} \frac{\mathcal{K}\bar{\mathcal{K}}}{\cosh^2(\pi\epsilon)}. \quad (3.10)$$

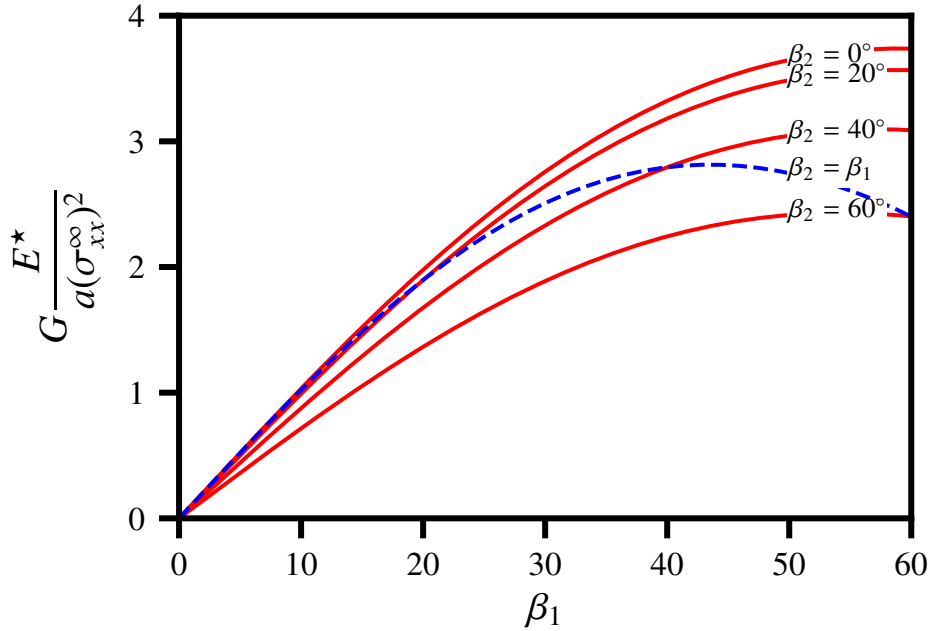


FIGURE 3.15 – Taux de restitution d'énergie normalisé (inclusion raide, contrainte uniaxiale à l'infini).

La figure 3.15 représente, pour une inclusion raide sous la contrainte uniaxiale à l'infini σ_{xx}^∞ , le taux de restitution d'énergie à la pointe $z_1 = e^{i\beta_1}$. Pour chaque courbe en trait plein dans cette figure, β_2 est fixe, tandis que β_1 varie de 0° à 60° . La ligne en pointillé fait référence au taux de restitution d'énergie pour le cas de deux fissures symétriques $\beta_1 = \beta_2$.

Le graphique $\beta_2 = 0^\circ$ correspond aux résultats de [Toya \(1974\)](#) (une seule fissure). L'observation de la figure 3.15 montre que le taux de restitution d'énergie est une fonction décroissante de β_2 (β_1 étant fixe). Cela peut s'expliquer par le fait que, pour la même contrainte appliquée à l'infini, une valeur supérieure de β_2 diminue l'intensité de contraintes à la pointe z_1 . Notons que les mêmes tendances sont observées pour les cas d'inclusion homogène et d'inclusion souple.

3.6 Discussion : propagation symétrique ou asymétrique

Dans cette section, nous proposons une application simple des résultats analytiques précédentes. Nous considérons une inclusion circulaire partiellement décollée, comme illustré dans la figure 3.1, avec $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$ (configuration initialement *symétrique*). Il est souligné que nous ne supposons pas forcément que le décollement de $\beta_1 = \beta_2 = 0$ à $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0 > 0$ a eu lieu par un processus de nucléation/propagation de fissure. Nous supposons plutôt que l'échantillon a été *créé* avec une interface partiellement collée et nous écartons par conséquent toute discussion concernant la stabilité de propagation des fissures entre $\beta_i = 0$ et $\beta_i = \beta_0$. Quoi qu'il en soit, cet exemple se prête à une analyse intéressante, à savoir la discussion de la stabilité de la propagation au-delà de cet état pré-fissuré.

Cette étude contient deux sections. La section 3.6.1 a pour but la discussion du mode de propagation. Il convient de mentionner que cette analyse se limite au début de la propagation des fissures interfaciales. Ensuite, afin d'étudier la courbe d'équilibre complète au-delà de la charge critique, il nous faudrait déterminer si la propagation est stable ou instable. Ceci est étudié dans la section 3.6.2.

3.6.1 Démarrage de la propagation

Cette partie a pour but la discussion du mode de propagation. Il convient de mentionner que cette analyse se limite au début de la propagation des fissures interfaciales. L'inclusion est soumise à une traction uniaxiale à l'infini σ_{xx}^∞ dans la direction $0x$ (Figure 3.16). Lorsque le chargement atteint une valeur critique $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_c$, les fissures L_1 et L_2 commencent à se propager. En introduisant les incréments $\delta\beta_1$ et $\delta\beta_2$ des angles de fissure, des considérations hâtives de symétrie pourraient suggérer que $\delta\beta_1 = \delta\beta_2$. L'analyse proposée ci-dessous montre qu'en réalité la situation peut être plus complexe, avec deux résultats possibles : *i.* la propagation symétrique ($\delta\beta_1 = \delta\beta_2 > 0$) et la propagation asymétrique ($\delta\beta_1 > 0$ et $\delta\beta_2 = 0$, ou $\delta\beta_2 > 0$ et $\delta\beta_1 = 0$) où une seule fissure se propage.

Notre discussion est basée sur des arguments énergiques, sous les hypothèses suivantes :

1. Le mode de propagation sélectionné minimise l'énergie totale nécessaire à la création d'une longueur totale de fissure prescrite, comme indiqué par ex. (Griffith, 1921; Erdogan and Sih, 1963) (voir Annexe B pour plus de détails).
2. La bifurcation des fissures dans la matrice ou l'inclusion n'est pas prise en compte.
3. Les deux fissures se propagent symétriquement par rapport à l'axe $0x$.
4. La valeur critique G_c est supposée constante.

Il est à noter que l'hypothèse 3 est une hypothèse assez forte pour laquelle nous n'avons pas de justification théorique. Cependant, nos simulations numériques semblent confirmer que la symétrie sera d'abord brisée autour de l'axe $0y$ plutôt que de l'axe $0x$, comme nous pouvons le comprendre intuitivement.

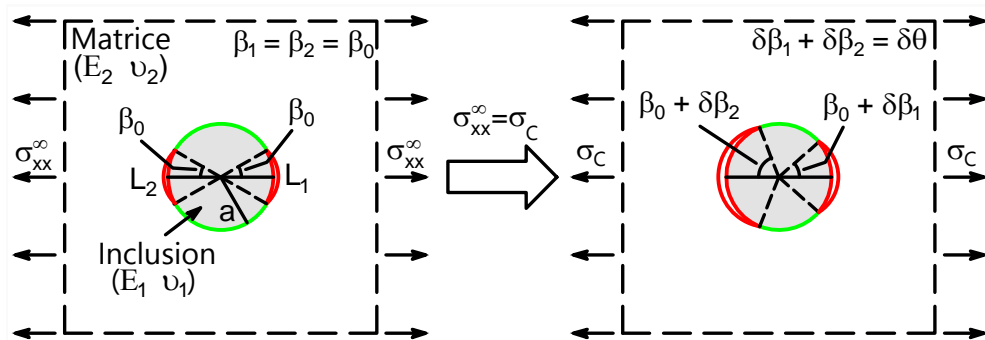


FIGURE 3.16 – Discussion du mode de propagation des fissures.

L'énergie totale Π du système, à minimiser selon l'hypothèse 1, est la somme de l'énergie potentielle W_p et de l'énergie dissipée W_s . En raison de l'hypothèse 4, nous

avons $W_s(\beta_1, \beta_2) = 2a(\beta_1 + \beta_2)G_c$, et

$$\Pi(\beta_1, \beta_2) = W_p(\beta_1, \beta_2) + 2a(\beta_1 + \beta_2)G_c. \quad (3.11)$$

À partir d'une configuration initiale (β_1, β_2) , une propagation aura lieu si une configuration proche $(\beta_1 + \delta\beta_1, \beta_2 + \delta\beta_2)$ telle que $\Pi(\beta_1 + \delta\beta_1, \beta_2 + \delta\beta_2) < \Pi(\beta_1, \beta_2)$ peuvent être exposés avec $\delta\beta_i \geq 0$ ($i = 1, 2$). Puisque nous explorons uniquement les états voisins, l'énergie Π peut être développée au voisinage de l'état initial (β_1, β_2) :

$$\begin{aligned} \Pi(\beta_1 + \delta\beta_1, \beta_2 + \delta\beta_2) \simeq & \Pi(\beta_1, \beta_2) + \frac{\partial W_p}{\partial \beta_1} \delta\beta_1 + \frac{\partial W_p}{\partial \beta_2} \delta\beta_2 + 2a(\delta\beta_1 + \delta\beta_2)G_c \\ & + \frac{\partial^2 W_p}{\partial \beta_1^2} \frac{\delta\beta_1^2}{2} + \frac{\partial^2 W_p}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \delta\beta_1 \delta\beta_2 + \frac{\partial^2 W_p}{\partial \beta_2^2} \frac{\delta\beta_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où les dérivées de W_p sont évaluées à β_1, β_2 . En introduisant du taux de restitution de l'énergie $G_i(\beta_1, \beta_2)$, ($i = 1, 2$) aux extrémités de la fissure L_i , nous avons la relation classique

$$G_i(\beta_1, \beta_2) = -\frac{1}{2a} \frac{\partial W_p}{\partial \beta_i}, \quad (3.13)$$

où l'hypothèse 3 a été utilisée (ce qui explique le facteur 2 dans l'équation ci-dessus). En combinant les équations (3.12) et (3.13), on trouve

$$\begin{aligned} \Pi(\beta_1 + \delta\beta_1, \beta_2 + \delta\beta_2) \simeq & \Pi(\beta_1, \beta_2) \\ & + 2a(G_c - G_1)\delta\beta_1 + 2a(G_c - G_2)\delta\beta_2 \\ & - a \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \delta\beta_1^2 - 2a \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2} \delta\beta_1 \delta\beta_2 - a \frac{\partial G_2}{\partial \beta_2} \delta\beta_2^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

ce qui montre que la propagation ne peut se produire que si $G_1 = G_c$ ou $G_2 = G_c$. Dans le cas présent, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$, ce qui signifie que

$$G_1 = G_2 = G_c \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial G_2}{\partial \beta_2} \quad (\beta_1 = \beta_2 = \beta_0) \quad (3.15)$$

au début de la propagation. En partant de l'équation (3.14), on a alors

$$\begin{aligned} \Pi(\beta_0 + \delta\beta_1, \beta_0 + \delta\beta_2) \simeq & \Pi(\beta_0, \beta_0) - a(\delta\beta_1^2 + \delta\beta_2^2) \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} \\ & - 2a\delta\beta_1\delta\beta_2 \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Selon l'hypothèse 1, le mode de propagation est tel que la diminution d'énergie est maximisée, la longueur totale des fissures créées étant prescrite. En d'autres termes, si on prend en compte la longueur totale de propagation $\delta\theta$, on considère les modes de propagation de la forme suivante

$$\delta\beta_1 = \lambda\delta\theta, \quad \delta\beta_2 = (1 - \lambda)\delta\theta, \quad (3.17)$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$, et minimise $\Pi(\beta_0 + \lambda\delta\theta, \beta_0 + (1 - \lambda)\delta\theta)$ par rapport à λ . À partir des équations (3.16) et (3.17),

$$\begin{aligned} \Pi(\beta_0 + \lambda\delta\theta, \beta_0 + (1 - \lambda)\delta\theta) \simeq & \Pi(\beta_0, \beta_0) - a\delta\theta^2 \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} \\ & + 2a\lambda(1 - \lambda)\Psi(\beta_0)\delta\theta^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\text{où } \Psi(\beta_0) = \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} - \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0}. \quad (3.19)$$

La minimisation de la quantité ci-dessus par rapport à λ est simple et nous obtenons

- si $\Psi(\beta_0) < 0$ alors $\lambda = \frac{1}{2}$: la propagation est symétrique,
- si $\Psi(\beta_0) > 0$ alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$: la propagation est asymétrique.

Pour illustrer la discussion ci-dessus, nous considérons le cas d'une inclusion raide (voir la section 3.4), avec $\beta_0 = 30^\circ$. La matrice est soumise à une contrainte uniaxiale à l'infini σ_{xx}^∞ , et le taux de restitution d'énergie G_1 peut être exprimé comme suit :

$$G_i = (\sigma_{xx}^\infty)^2 a \hat{G}_i(\beta_1, \beta_2). \quad (3.20)$$

De même,

$$\Psi(\beta_0) = (\sigma_{xx}^\infty)^2 a \hat{\Psi}(\beta_0) \quad \text{with} \quad \hat{\Psi}(\beta_0) = \frac{\partial \hat{G}_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} - \frac{\partial \hat{G}_1}{\partial \beta_2} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0}. \quad (3.21)$$

Nous avons trouvé numériquement que dans ce cas $\hat{\Psi}(\beta_0) = 0.00176 > 0$. Par conséquent, la propagation est asymétrique. Il convient de noter que, malgré nos investigations numériques approfondies, nous n'avons pas été en mesure de produire un cas pour lequel une propagation symétrique se produirait. Cela pourrait être lié à l'hypothèse 4, qui pourrait être une simplification excessive (Hutchinson and Suo, 1991).

Pour fermer cette discussion, il convient de mentionner que cette analyse se limite au début de la propagation des fissures interfaciales, *sous chargement constant*. En pratique, le chargement appliquée à l'infini est variable. Autrement dit, la variation de l'énergie totale provient à la fois de la variation du chargement et de celle des angles des fissures. Cependant, en utilisant la principe des puissances virtuelles, on peut montrer que la dérivée de l'énergie totale par rapport au chargement (à géométrie fixe) est nulle (Leblond and Germain, 2003, chap.2,§2.2). Donc, il est raisonnable d'écarter la variation du chargement de l'analyse précédente.

3.6.2 Arrêt et redémarrage de la propagation

Lors du démarrage de la propagation des fissures, $G_1 = G_2 = G_c$, le mode de propagation dépend donc du signe de $\Psi(\beta_0)$. Après le démarrage de la fissure, plusieurs scénarios de propagation peuvent se produire en fonction du taux de restitution de l'énergie :

- Si $\Psi(\beta_0) < 0$:
 - $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} + \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} < 0$: la propagation est symétrique et stable,
 - $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} + \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} > 0$: la propagation est symétrique et instable.
- Si $\Psi(\beta_0) > 0$:
 - $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} < 0$: la propagation est asymétrique et stable,
 - $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} > 0$: la propagation est asymétrique et instable.

En cas de propagation stable, une augmentation de la charge est nécessaire pour que la fissure puisse croître, alors qu'une propagation instable de la fissure est obtenue sans augmentation de la charge. Lors du démarrage de la fissure, la stabilité de la propagation dépend du signe de $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1}$ (ou $\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} + \frac{\partial G_1}{\partial \beta_2}$) dans le cas d'une propagation asymétrique (ou symétrique), c'est-à-dire du sens d'évolution du taux de restitution d'énergie.

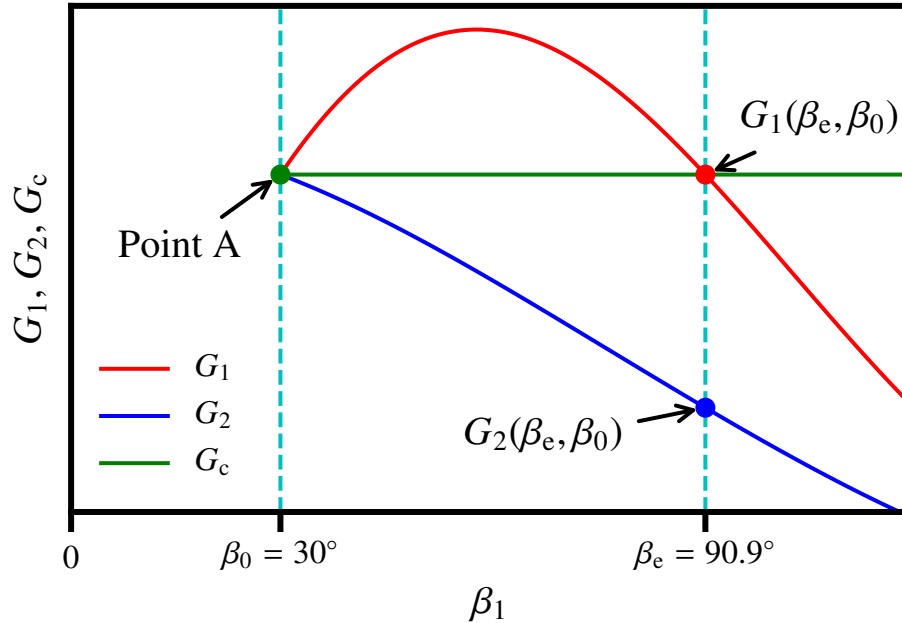


FIGURE 3.17 – Taux de restitution d'énergie G_1 , G_2 après le démarrage de la propagation des fissures (inclusion raide, contrainte uniaxiale à l'infini).

Revenons à l'exemple de la section ci-dessus en ajoutant des données d'entrée nécessaires : $G_c = 10 \text{ Jm}^{-2}$, $a = 10^{-5} \mu\text{m}$. Le chargement critique σ_c est déterminé à partir de l'équation (3.20), $\sigma_c = \sqrt{G_c/a\hat{G}_1(\beta_1, \beta_2)} = 0.89 \text{ MPa}$. La propagation des fissures commence dès que $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_c$ (le point A). Comme souligné dans l'exemple ci-dessus, la fissure se propage de façon asymétrique car $\Psi(\beta_0) > 0$. Il est donc supposé que la fissure L_1 se propage alors que la fissure L_2 reste constante. La Figure 3.17 exprime l'évolution de G_1 et G_2 en fonction de β_1 sous une valeur fixe de β_2 ($\beta_2 = \beta_0 = 30^\circ$). Cette figure montre le cas d'une variation croissante de G_1 après le démarrage, ce qui entraîne une propagation instable de la fissure. La fissure se

propage brutalement jusqu'à un angle $\beta_1 = \beta_e$ satisfaisant $G_1(\beta_e, \beta_0) = G_c$. Suivant la Figure 3.17, la longueur de la fissure L_2 reste toujours constante car $G_2(\beta_e, \beta_0) < G_c$.

De plus, si on continue à augmenter le chargement à l'infini ($\sigma_{xx}^\infty > \sigma_c$), on montre deux points intéressants : *i.* il n'y a que la fissure L_1 qui se propage car $G_2(\beta_e, \beta_0) < G_1(\beta_e, \beta_0)$, *ii.* la propagation de la fissure L_1 devient lente et progressive avec le chargement ($\frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} \Big|_{\beta_1=\beta_e, \beta_2=\beta_0} < 0$). Autrement dit, une fois que la configuration devient asymétrique, les fissures ont tendance à augmenter l'asymétrie.

3.7 Conclusions

Ce chapitre a pour objectif d'étudier la propagation des fissures à l'interface entre l'inclusion et la matrice infinie du problème de deux fissures asymétriques sous une contrainte uniforme à l'infini.

Suivant l'expression asymptotique des contraintes et des déplacements relatifs au voisinage de la pointe de la fissure, nous avons obtenu le facteur d'intensité de contraintes complexe \mathcal{K} à la pointe $z_1 = ae^{i\beta_1}$. L'analyse par éléments finis du problème de deux fissures asymétriques est effectuée avec différentes configurations des deux fissures afin de vérifier la cohérence de nos résultats analytiques. Il est à noter que le maillage est suffisamment raffiné au niveau des pointe de fissures afin d'obtenir une bonne précision des résultats des simulations numériques. Nous avons montré un bon accord entre les facteurs d'intensité de contraintes ainsi estimés et la formule analytique pour différents valeurs de β_1 et β_2 . Puis, l'expression du taux de restitution de l'énergie est dérivée du facteur d'intensité de contraintes complexe via l'extension de la formule d'Irwin. En effet, le taux de restitution d'énergie est un paramètre important pour prédire la fissuration des matériaux dans le contexte de la mécanique linéaire élastique de la rupture.

En appliquant des résultats analytiques, nous discutons de la propagation de deux fissures initialement identiques. Lorsque le chargement à l'infini atteint une valeur critique, les deux fissures commencent à se propager. Deux résultats sont possibles après le démarrage : la propagation symétrique (les deux fissures se propagent à l'identique) et la propagation asymétrique (une fissure se propage pendant que l'autre est arrêtée). Nous avons montré que la propagation asymétrique des fissures est parfois plus favorable que la propagation symétrique. Puis, il est intéressant de noter que une fois que la configuration devient asymétrique, les fissures ont tendance à augmenter l'asymétrie.

Dans le chapitre 4, l'étude de la propagation ci-dessus sera combinée aux méthodes d'homogénéisation pour construire une relation contrainte-déformation macroscopique d'endommagement.

Chapitre 4

Application de méthodes d'homogénéisation

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'effet du décollement partiel de l'interface sur le comportement macroscopique de matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice". Dans la section 4.2, nous établissons la relation générale entre la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique du matériaux tenant compte la présence des fissures à l'interface entre les inclusions et la matrice. Puis, la méthode de Mori – Tanaka est adoptée à la section 4.3 pour étudier l'effet du décollement de l'interface sur les propriétés effectives du matériau. Ce dernier est présenté dans la section 4.4. Dans la section 4.5, nous présentons une loi macroscopique d'endommagement du matériau soumis à une traction uniaxiale. Enfin, la section 4.5 examine l'influence de paramètres tels que : fraction surfacique des inclusions, taille des particules et angle initial des fissures sur la relation constitutive du matériau.

4.2 Approche générale du problème

Nous considérons un *Volume Élémentaire Représentatif* (VER) du matériau élastique linéaire hétérogène constitué d'inclusions circulaires (phase "i"), immergées dans une matrice infinie (phase "m"). L'interface matrice-inclusion est caractérisée par la présence des fissures en forme d'arc. Nous représentons ce VER par une aire représentative S , avec sa frontière ∂S . L'aire S du milieu est la somme de l'aire de la matrice S^m et des inclusions S^i . La fraction surfacique des inclusions f est donnée par S^i/S . En supposant qu'on impose des conditions de contrainte macroscopique uniforme $\bar{\sigma}$ au contour ∂S , on souhaite calculer la déformation macroscopique $\bar{\epsilon}$ (figure 4.1).

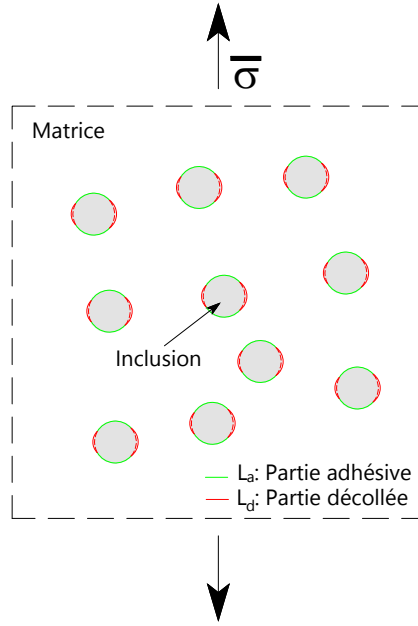


FIGURE 4.1 – Matériau biphasique

Soient σ^m et σ^i respectivement désignées les contraintes moyennes de la matrice et des inclusions. La contrainte macroscopique du milieu élastique $\bar{\sigma}$ est liée à σ^m et σ^i par :

$$\bar{\sigma} = (1 - f)\sigma^m + f\sigma^i \quad (4.1)$$

où σ^i (équivalent σ^m) définit sur la base de l'intégrale de la surface S^i (équivalent S^m) (Benveniste, 1985) :

$$\sigma^i = \frac{1}{S^i} \int_{S^i} \sigma dS^i, \quad \sigma^m = \frac{1}{S^m} \int_{S^m} \sigma dS^m \quad (4.2)$$

En utilisant les théorèmes de la contrainte moyenne (Hashin, 1983), la contrainte moyenne dans les inclusions σ^i devient :

$$\sigma^i = \frac{1}{2S^i} \int_{L_a} (\sigma n \otimes x + x \otimes \sigma n) dl \quad (4.3)$$

où x représente les coordonnées d'un point considéré sur la partie adhésive L_a de l'interface entre des inclusions et la matrice et n est le vecteur normal unitaire sur l'interface pointant dans la matrice.

De même, les déformations moyennes dans la matrice et dans des inclusions sont respectivement notées ϵ^m et ϵ^i . La contrainte macroscopique du milieu élastique $\bar{\sigma}$ est donnée par (Pensée, 2002; Tan et al., 2005) :

$$\bar{\epsilon} = (1 - f)\epsilon^m + f\epsilon^i + f\epsilon^{\text{int}} \quad (4.4)$$

où le terme additionnel $f\epsilon^{\text{int}}$ représente la contribution du décollement à l'interface, ϵ^{int} est lié à la discontinuité de déplacement $\Delta u = u_m - u_i$ à travers l'interface décollée

L_d par :

$$\varepsilon^{\text{int}} = \frac{1}{2S^i} \int_{L_d} (\Delta u \otimes n + n \otimes \Delta u) dl \quad (4.5)$$

u_m et u_i sont respectivement les déplacements à l'interface du côté de la matrice et du côté des inclusions.

L'élasticité de la matrice et de l'inclusion est définie par deux tenseurs de souplesse S^m et S^i :

$$\varepsilon^m = S^m : \sigma^m, \quad \varepsilon^i = S^i : \sigma^i \quad (4.6)$$

La combinaison des équations (4.1), (4.4) et (4.6) nous donne la relation entre la déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$ et la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\varepsilon} = S^m : \bar{\sigma} + f(S^i - S^m) : \sigma^i + f\varepsilon^{\text{int}} \quad (4.7)$$

On étend ce résultat au cas d'un milieu hétérogène à N phases des inclusions circulaires (Figure 4.2). Les inclusions de chaque phase ont des propriétés mécaniques différentes.

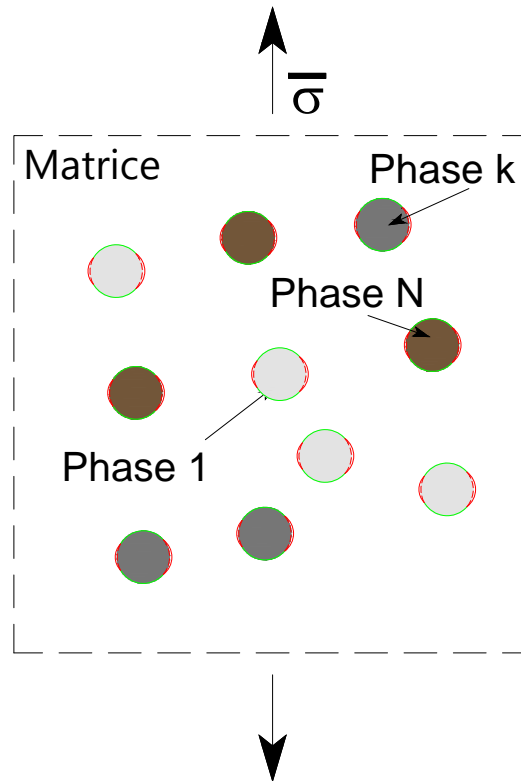


FIGURE 4.2 – Matériau à N phases des inclusions

Nous désignons l'aire représentative de la phase k ($k = 1, \dots, N$) par S_k^i . Sa fraction surfacique est $f_k^i = S_k^i/S$. La contrainte moyenne σ_k^i dans la phase k et la déformation liée à la discontinuité de déplacement $\varepsilon_k^{\text{int}}$ à travers la partie décollée de

l'interface entre des inclusions de la phase k et la matrice deviennent donc :

$$\sigma_k^i = \frac{1}{2S_k^i} \int_{L_k^a} (\sigma n \otimes x + x \otimes \sigma n) dl, \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_k^{\text{int}} = \frac{1}{2S_k^i} \int_{L_k^d} (\Delta u \otimes n + n \otimes \Delta u) dl. \quad (4.9)$$

où L_k^d (resp. L_k^a) est la partie décollée (resp. adhésive) de l'interface entre des inclusions de la phase k et la matrice.

La déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$ et la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$ dans (4.1) et (4.7) deviennent donc :

$$\bar{\sigma} = (1 - f)\sigma^m + \sum_{k=1}^N f_k^i \sigma_k^i, \quad (4.10)$$

$$\bar{\varepsilon} = \mathbb{S}^m : \bar{\sigma} + \sum_{k=1}^N f_k^i \left[(\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m) : \sigma_k^i + \varepsilon_k^{\text{int}} \right]. \quad (4.11)$$

où $f = \sum_{k=1}^N f_k^i$ est la fraction surfacique totale des inclusions, \mathbb{S}_k^i est le tenseur de souplesse élastique des inclusions de la phase k .

Il est important de noter que les équations (4.10) et (4.11) sont exactes. Pour obtenir la déformation macroscopique de ce milieu $\bar{\varepsilon}$, il faut évaluer des σ_k^i et $\varepsilon_k^{\text{int}}$ ($k = 1, \dots, N$) en fonction de $\bar{\sigma}$. Dans notre étude, les approximations pour évaluer σ_k^i et $\varepsilon_k^{\text{int}}$ lié à des inclusions de la phase k seront exprimés par la méthode de Mori-Tanaka.

4.3 Méthode de Mori-Tanaka

La méthode de [Mori and Tanaka \(1973\)](#) convient aux matériaux hétérogènes car elle tient compte de l'interaction entre les inclusions dans le processus d'estimation des modules d'élasticité macroscopique. Pour cette méthode, nous estimons la contrainte moyenne σ_k^i dans des inclusions de la phase k par celle qui s'établit dans une inclusion représentative de même forme et de même caractéristiques élastiques immergée dans la matrice soumise à l'infini à la contrainte moyenne dans la matrice σ^m ([Pensée, 2002](#); [Dormieux et al., 2006b](#); [Giraud et al., 2007](#)).

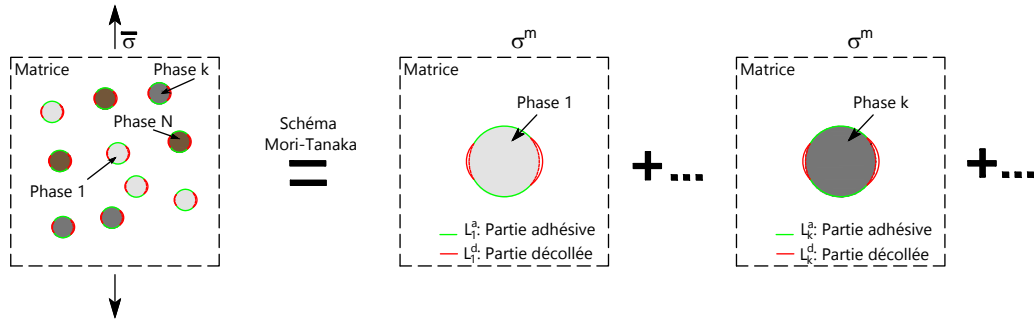


FIGURE 4.3 – Schéma Mori-Tanaka

Puisque le comportement du milieu est supposé être élastique linéaire, la contrainte moyenne σ_k^i et la déformation liée au déplacement relatif à travers de l'interface $\varepsilon_k^{\text{int}}$ ($k = 1, \dots, N$) sont des fonctions linéaires de la contrainte moyenne dans la matrice σ^m appliquée à l'infini. Donc, σ_k^i et $\varepsilon_k^{\text{int}}$ peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\sigma_k^i = \mathbb{K}_k : \sigma^m, \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_k^{\text{int}} = \mathbb{H}_k : \sigma^m. \quad (4.13)$$

En identifiant les tenseurs \mathbb{K}_k et \mathbb{H}_k dans deux équations (4.12) et (4.13) avec la traction $T = \sigma n$ et le saut de déplacement Δu sur l'interface dans deux équations (4.8) et (4.9), nous obtenons deux relations suivantes :

$$\mathbb{K}_k : \sigma^m = \frac{1}{2S^i} \int_{L_k^a} (\sigma n \otimes x + x \otimes \sigma n) dl, \quad (4.14)$$

$$\mathbb{H}_k : \sigma^m = \frac{1}{2S^i} \int_{L_k^d} (\Delta u \otimes n + n \otimes \Delta u) dl. \quad (4.15)$$

A partir de l'expression de la contrainte et du saut de déplacement dans les deux équations (2.58) et (2.59), nous pouvons déduire les composantes des tenseurs \mathbb{K}_k et \mathbb{H}_k .

En substituant (4.12) en (4.10), nous obtenons l'expression de σ^m en fonction de $\bar{\sigma}$:

$$\sigma^m = \left[(1 - f)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^N f_k^i \mathbb{K}_k \right]^{-1} : \bar{\sigma}, \quad (4.16)$$

avec $\mathbb{1}$ la matrice unité. En identifiant l'équation (4.16) et l'équation (1.24), on trouve :

$$\mathbb{B}^m = \left[(1 - f)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^N f_k^i \mathbb{K}_k \right]^{-1} \quad (4.17)$$

où \mathbb{B}^m est le tenseur de localisation en contrainte de la matrice.

Par analogie, nous en déduisons le tenseur de localisation en contrainte de la phase k , \mathbb{B}_k^i en substituant (4.16) en (4.12) :

$$\mathbb{B}_k^i = \mathbb{K}_k^i : \left[(1 - f)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^N f_k^i \mathbb{K}_k \right]^{-1} \quad (4.18)$$

La combinaison des équations (4.12), (4.13) et (4.16) fournit l'expression de σ_k^i et $\varepsilon_k^{\text{int}}$ en fonction de $\bar{\sigma}$. Finalement, l'équation (4.11) devient :

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \mathbb{S}^m + \sum_{k=1}^N f_k^i \left[(\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m) : \mathbb{K}_k + \mathbb{H}_k \right] : \left[(1-f)\mathbb{I} + \sum_{k=1}^N f_k^i \mathbb{K}_k \right]^{-1} \right\} : \bar{\sigma} \quad (4.19)$$

et nous identifions alors :

$$\mathbb{S}^{\text{eff}} = \mathbb{S}^m + \sum_{k=1}^N f_k^i \left[(\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m) : \mathbb{K}_k + \mathbb{H}_k \right] : \left[(1-f)\mathbb{I} + \sum_{k=1}^N f_k^i \mathbb{K}_k \right]^{-1}, \quad (4.20)$$

où \mathbb{S}^{eff} est définie comme le tenseur *effectif* de ce milieu.

Notons que le tenseur \mathbb{H}_k^i ($k = 1, \dots, N$) représente la contribution de la partie fissurée à l'interface, tandis que le tenseur \mathbb{K}_k^i exprime la contrainte moyenne de la phase k . Dans le cas où la liaison entre la matrice et les inclusions est parfaite, le tenseur \mathbb{H}_k^i sera nul. On pourra ensuite trouver la relation en \mathbb{K}_k^i et \mathbb{Q}_k^i (tenseur analogue à tenseur de Hill (1965), revoir l'équation (1.29)) en identifiant (4.17) et (1.34) :

$$\mathbb{K}_k^i = [\mathbb{I} + (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m) : \mathbb{Q}_k^i]^{-1} \quad (4.21)$$

Par conséquent, en mettant $\mathbb{H}_k^i = 0$ et substituant (4.21) en (4.20), le tenseur effectif \mathbb{S}^{eff} dans l'équation (4.21) devient :

$$\mathbb{S}^{\text{eff}} = \mathbb{S}^m + \sum_{i=1}^N f_k^i (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m) : [\mathbb{I} + (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m) : \mathbb{Q}_k^i]^{-1} : \left[(1-f)\mathbb{I} + \sum_{i=1}^N f_k^i [\mathbb{I} + \mathbb{Q}_k^i : (\mathbb{S}_k^i - \mathbb{S}^m)]^{-1} \right]^{-1} \quad (4.22)$$

On retrouve le tenseur de souplesse effectif obtenue par le schéma de Mori-Tanaka classique

4.4 Application de la méthode de Mori-Tanaka

Dans tout ce qui suit, nous considérons un VER soumis à divers types de sollicitations comme illustré dans la figure 4.2. Notre objectif est de caractériser le comportement effectif de ce matériau par le méthode de Mori-Tanaka. Nous supposons que les fissures sont ouvertes, c'est-à-dire que le vecteur contrainte est nul sur les deux lèvres des fissures.

Le matériau étudié est composé d'une matrice argileuse et d'inclusions minérales (calcites, grains de quartz). Les paramètres élastiques associés aux constituants de la matrice argileuse, de la calcite et du quartz sont choisis selon la littérature (Abou-Chakra Guéry et al., 2009) : $E_m = 3$ GPa, $\nu_m = 0.3$, $E_{ca} = 95$ GPa, $\nu_{ca} = 0.27$, $E_{qu} = 101$ GPa et $\nu_{qu} = 0,06$.

Nous nous plaçons naturellement dans le repère donné par la direction horizontale ($0x$) et la direction verticale ($0y$). Souvent, dans les applications, on a à faire avec des structures planes minces. Il est donc d'intérêt d'examiner le cas où ces couches minces soient soumises à un état plan de contrainte. Le comportement élastique

effectif de ce milieu dépend des paramètres par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

On compte donc 5 coefficients indépendants : les modules d'Young horizontal E_x et vertical E_y , les coefficients de Poisson «horizontal/vertical» ν_{xy} et «vertical/horizontal» ν_{yx} , et le module de cisaillement vertical G_{xy} . Ces 5 paramètres doivent être déterminées en fonction des caractéristiques mécaniques de la matrice et des inclusions, des fissures d'interface et la fraction surfacique des inclusions.

4.4.1 Matériau biphasique

Dans cette étude, le milieu VER est supposé comprendre deux phases (la matrice argileuse et des grains de quartz). Pour un milieu biphasique, l'équation (4.20) devient :

$$\mathbb{S}^{\text{eff}} = \mathbb{S}^{\text{m}} + f_{\text{qa}}^{\text{i}} \left[(\mathbb{S}_{\text{qa}}^{\text{i}} - \mathbb{S}^{\text{m}}) : \mathbb{K}_{\text{qa}} + \mathbb{H}_{\text{qa}} \right] : \left[(1 - f_{\text{qa}}^{\text{i}}) \mathbb{I} + f_{\text{qa}}^{\text{i}} \mathbb{K}_{\text{qa}} \right]^{-1}, \quad (4.24)$$

L'indice "qa" désigne les grains de quartz. Comme discuté ci-dessus, les propriétés effectives du milieu dépendent des angles β_1 , β_2 et de la fraction surfacique f_{qa}^{i} . Nous limitons notre étude au cas de deux fissures symétriques, c'est-à-dire $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$. En effet, nous trouvons la même tendance des propriétés effectives dans le cas d'une seule fissure ou de deux fissures asymétriques.

La figure 4.4 présente l'évolution du module horizontal E_x en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$). Pour chaque courbe de cette figure, la fraction surfacique des inclusions f est fixe, alors que β_0 varie de 0 à 80°.

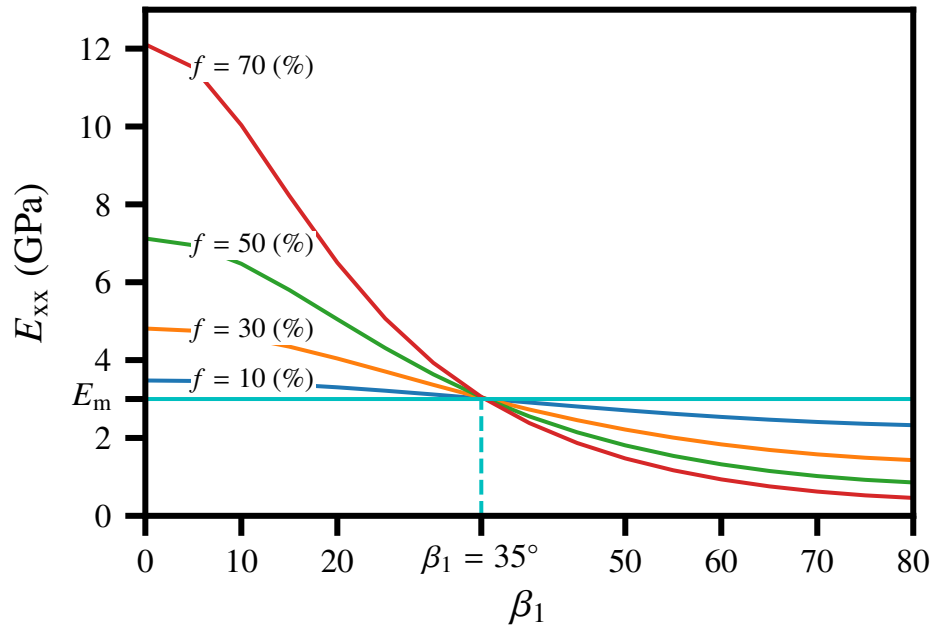
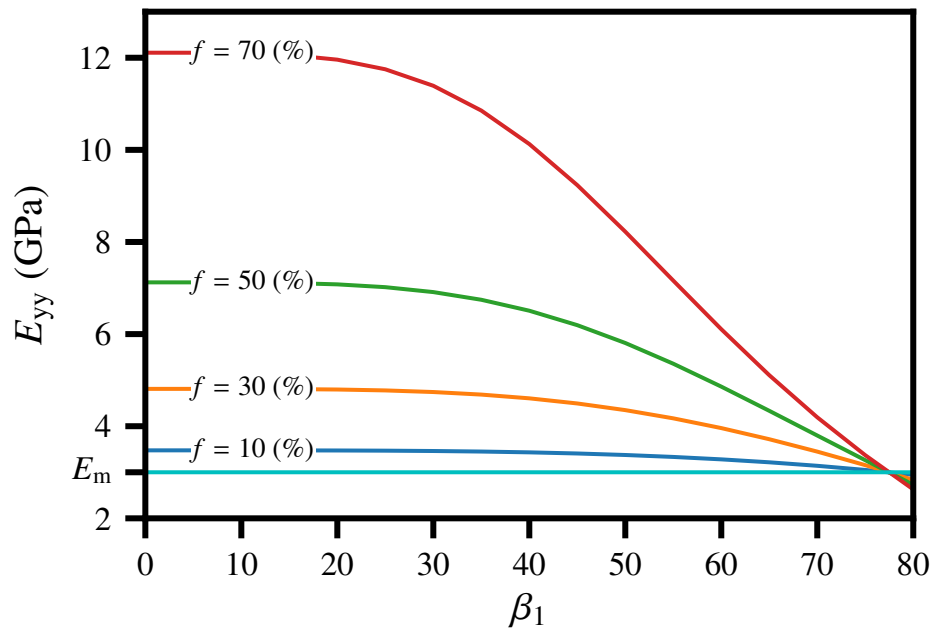
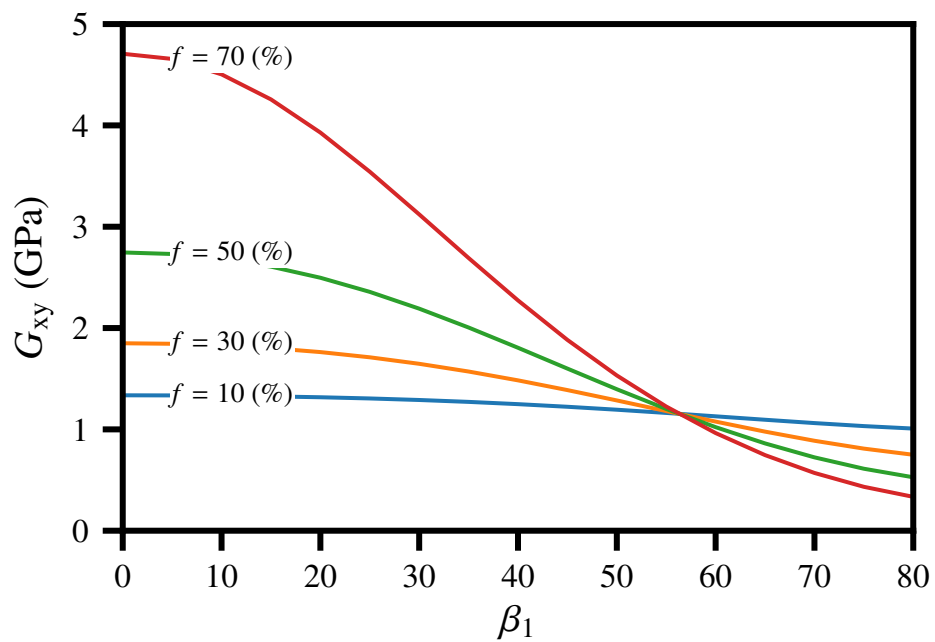


FIGURE 4.4 – Module d'Young horizontal E_{xx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

L'observation de la figure 4.4 montre que, pour le même angle de β_0 , le module d'Young horizontal est une fonction décroissante (reps. croissante) de f quand l'angle β_0 est petit (reps. grand). Cela s'explique par le fait que, pour une faible valeur de β_1 , une valeur supérieure de f augmente le module d'Young effectif du milieu car le module d'Young de la calcite E_{ca} est plus élevé que celui de la matrice. Au contraire, la présence des inclusions diminue le module d'Young horizontal à cause de la faible cohérence entre la calcite et la matrice. Notons que les mêmes tendances sont observées pour le d'Young vertical E_{yy} et le module de cisaillement vertical G_{xy} (figures 4.5 et 4.6).

De plus, une remarque intéressante c'est que toutes les courbes passent par le point $\beta_0 \simeq 35^\circ$ auquel le module d'Young effectif est égale à celui de la matrice E_x . Cela signifie que, quand $\beta_0 \simeq 35^\circ$, le module d'Young effectif E_m ne dépend plus de la quantité des inclusions et est égale à le module de la matrice E_m . Cela peut s'expliquer que si on voit les inclusions avec ces deux fissures comme une inclusion équivalent. Elle a exactement la même raideur que la matrice, il n'y a plus de contraste. Donc, on est dans un milieu homogène. C'est la raison pour laquelle, tous les courbes passent exactement dans le même point. Cela sera montré plus clairement dans la figure 4.7.

FIGURE 4.5 – Module d'Young vertical E_{yy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)FIGURE 4.6 – Module de cisaillement G_{xy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

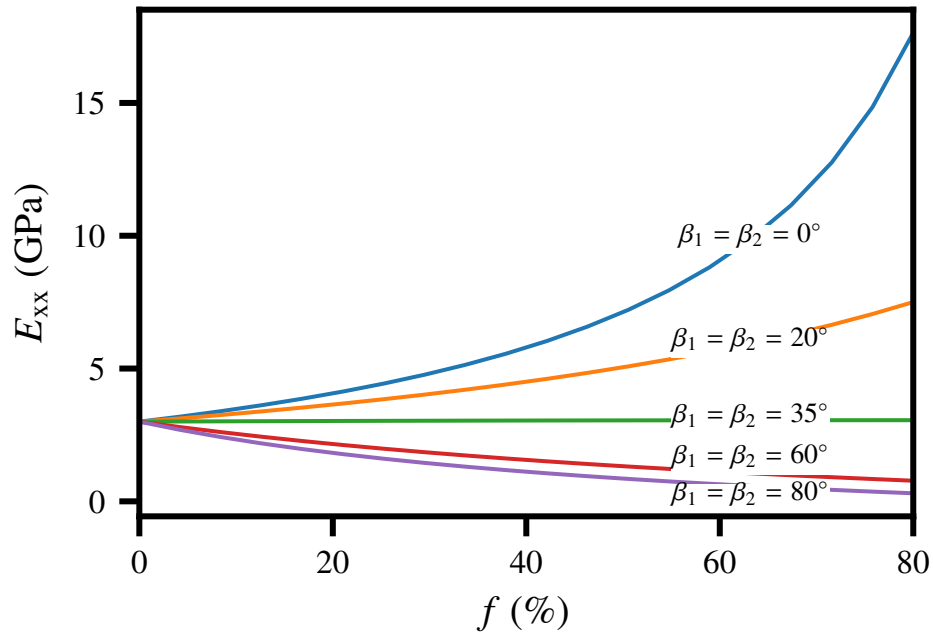


FIGURE 4.7 – Module d'Young horizontal E_{xx} en fonction de la fraction surfacique f_{qa}^I (%)

La figure 4.7 exprime l'évolution du module horizontal E_{xx} en fonction de la fraction des inclusions f_{qa}^I . Pour chaque courbe β_1 est fixe et égale à β_2 . Dans cette figure, nous pouvons voir que, lorsque $\beta_1 = \beta_2 = 35^\circ$, la valeur de E_{xx} reste constante lorsque f_{qa}^I augmente et est égale à la valeur de E_m . En outre, lorsque $\beta_1 = \beta_2 > 35^\circ$ (resp. $\beta_1 = \beta_2 < 35^\circ$), E_{xx} est une fonction croissante (reps. décroissante) de f_{qa}^I .

Les figures 4.8 et 4.9 présentent respectivement l'évolution des coefficients de Poisson «horizontal/vertical» ν_{xy} et «vertical/horizontal» ν_{yx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$).

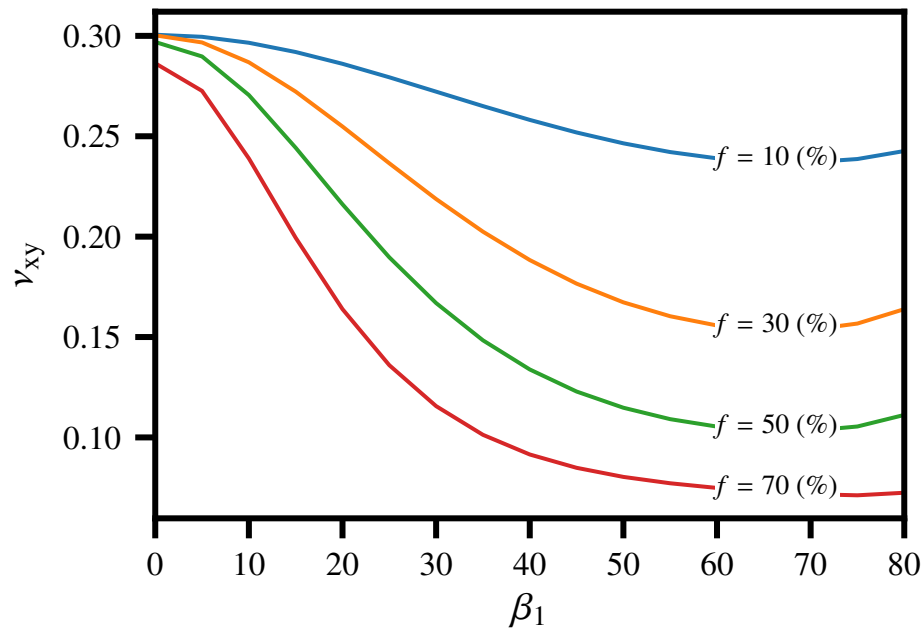


FIGURE 4.8 – Coefficient de Poisson «horizontal/vertical» ν_{xy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

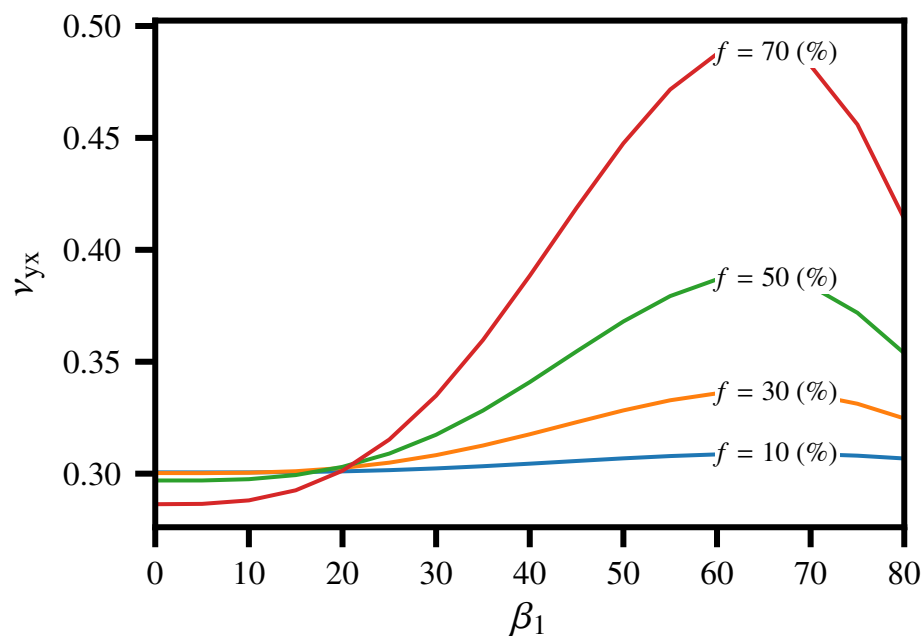


FIGURE 4.9 – Coefficient de Poisson «vertical/horizontal» ν_{yx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

De plus, car la symétrie de la matrice d'élasticité effective n'est pas garantie dans le schéma de Mori-Tanaka (Benveniste et al., 1991; Schjødt-Thomsen and Pyrz, 2001). Nous avons effectué la vérification de la symétrie de la matrice d'élasticité effective dans l'équation (4.23), c'est-à-dire l'erreur relative entre les deux termes

$\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}$ et $\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}$. La figure 4.10 montre des faibles erreurs relatives au cours d'évolution de l'angle β_0 . Cela assure la symétrie de la matrice d'élasticité effective.

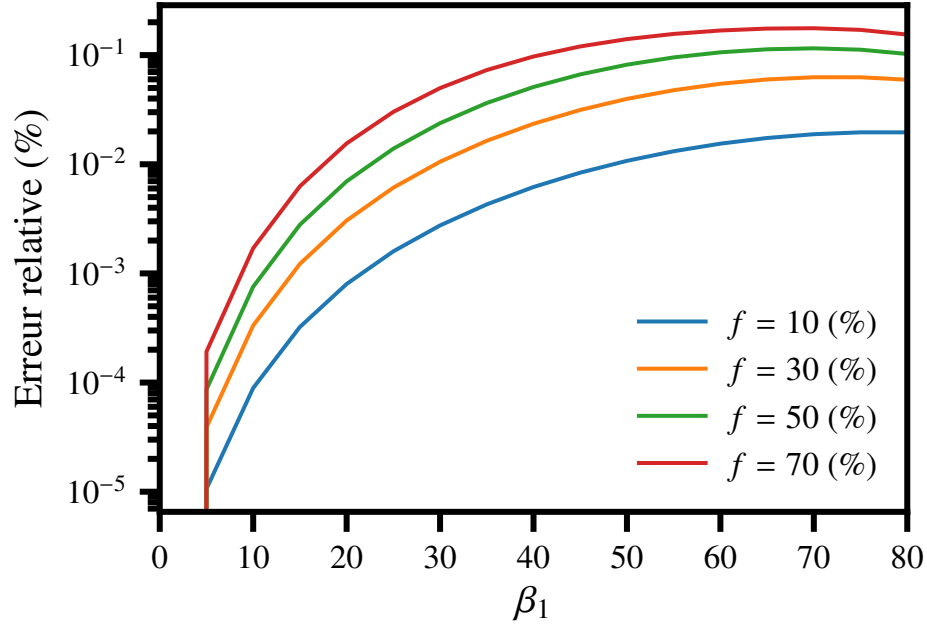


FIGURE 4.10 – Erreur relative entre $\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}$ et $\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}$ en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

4.4.2 Matériau à trois phases

Nous étudions dans cette section un VER avec une matrice et deux types des inclusions minérales (le quartz et la calcite). Les fractions de volume de inclusions correspondantes sont désignées par f_{qu} et f_{ca} , respectivement.

La figure 4.11 présente l'évolution du module horizontal E_{xx} en fonction de β_1 . Pour chaque courbe de cette figure, l'angle de β_2 est fixe, aLorsque β_0 varie de 0 à 60°. De plus, $f_{\text{qu}} = 0.25$ et $f_{\text{ca}} = 0.3$ sont utilisés pour toutes les courbes. L'observation du l'évolution des courbes de E_{xx} , nous remarquons que, sous le même valeur de β_2 , plus la partie décollée croît le long de l'interface plus le matériau perd son raideur. Dans les figures 4.12 et 4.13, nous présentons l'évolution du module d'Young vertical E_{yy} et de cisaillement G_{xy} . Les mêmes tendances de l'évolution sont observées pour ces deux modules.

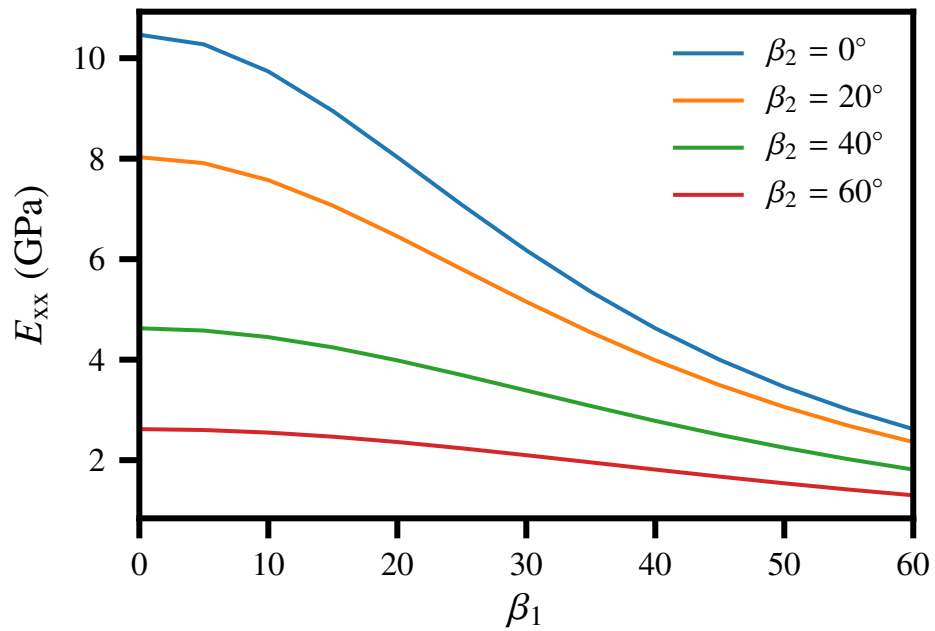


FIGURE 4.11 – Module d'Young horizontal E_{xx} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

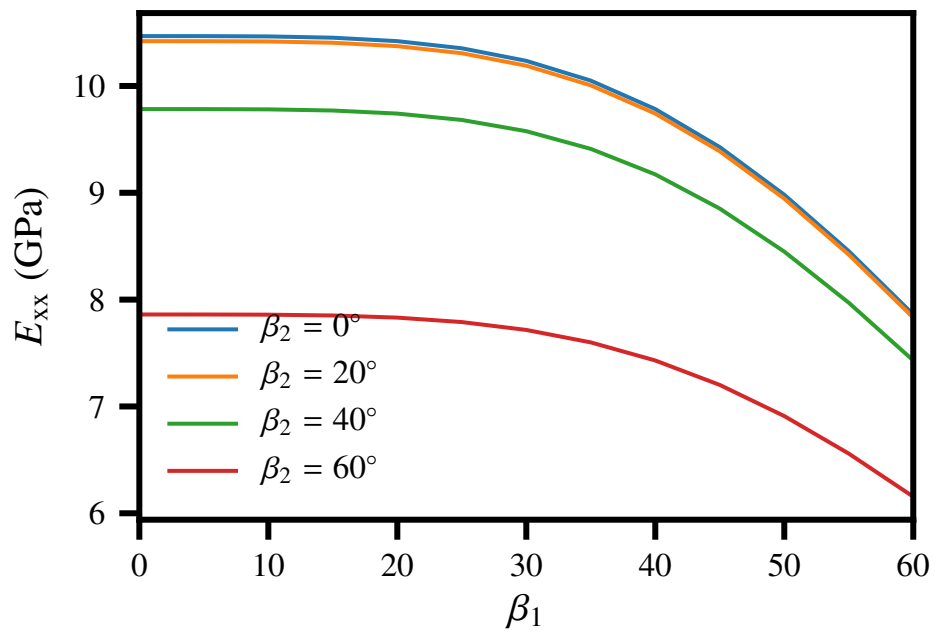
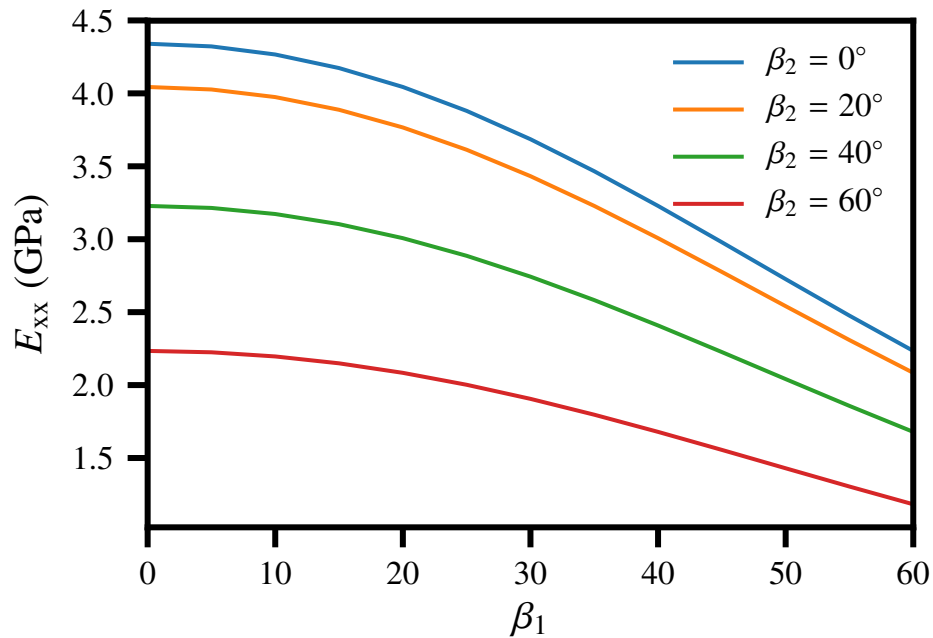


FIGURE 4.12 – Module d'Young vertical E_{yy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)


 FIGURE 4.13 – Module de cisaillement G_{xy} en fonction de β_0 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)

4.5 Loi macroscopique d'endommagement

Dans cette section, nous fournissons une application qui illustre l'évolution des propriétés effectifs du matériau hétérogène de type inclusion-matrice avec l'évolution des microfissurations à l'interface.

Nous considérons un VER à l'échelle microscopique constitué de deux phases comme illustré dans la figure 4.14 à gauche, où f est la fraction surfacique des inclusions, toutes de même rayon a . Soient β_1 et β_2 les angles des fissures initiales à l'interface entre les inclusions et la matrice, nous prenons ici $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0 > 0$. La matrice est soumise à une contrainte macroscopique uniaxiale $\bar{\sigma}_{xx}$.

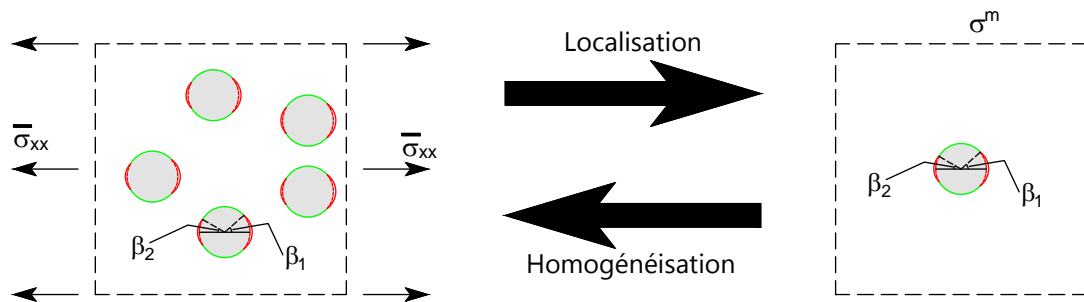


FIGURE 4.14 – Echelle macroscopique et échelle microscopique en cours d'évolution de l'endommagement.

L'augmentation du chargement macroscopique $\bar{\sigma}_{xx}$ risque d'activer la propagation des fissures d'interface préexistantes. Par conséquent, afin de décrire l'évolution des

propriétés constitutives homogénéisées, il est important de prédire la propagation des fissures à l'interface entre les inclusions et la matrice.

La présence des inclusions entraîne une perturbation du champ de contrainte environnant. Comme précédemment, cette perturbation est approchée en considérant que chacune des inclusions est soumise à l'infini égale à la contrainte moyenne dans la matrice σ^m au lieu de la contrainte de la macroscopique (figure 4.14 à droite). Lorsque la contrainte σ^m atteint la valeur critique, les fissures β_1 et β_2 sur chaque inclusion commencent à se propager. Le démarrage et l'arrêt de la propagation des fissures ont été discuté dans la chapitre 3.

Une analyse incrémentale est réalisée pour obtenir la relation contrainte-déformation macroscopique due aux processus d'endommagement se produisant à l'échelle microscopique. Dans cette analyse, la méthode de Mori-Tanaka est adoptée pour le passage micro-macro. Ainsi, l'analyse de propagation de fissure est basée sur la mécanique linéaire de la rupture d'interface. L'algorithme de la procédure est décrit comme suit :

- **Etape 1** : Incrémenter la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}_{xx}$ de $\Delta\bar{\sigma}$, c'est-à-dire $\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} + \Delta\bar{\sigma}$.
- **Etape 2** : Calculer la contrainte moyenne dans la matrice σ^m en résolvant l'équation (4.16).
- **Etape 3** : Appliquer le résultat de σ^m pour prédire la propagation des fissures d'interface, selon la discussion de la section 3.6
- **Etape 4** : Suite à la stabilité de la propagation, mettre à jour des angles des fissures β_1 et β_2 .
- **Etape 5** : Calculer la déformation macroscopique correspondante $\bar{\varepsilon}_{xx}$ en utilisant la relation (4.19).

L'algorithme précédent a été implémenté en langage `Python` pour obtenir la relation de comportement macroscopique. Les paramètres matériaux sont : $E_m = 4$ GPa, $\nu_m = 0.3$, $E_i = 95$ GPa, $\nu_i = 0.27$. Dans cette modélisation, la fraction surfacique des inclusions est $f = 24\%$, le décollement initial $\beta_0 = 30^\circ$, $G_c = 0.05$ J.m⁻². L'incrément de chargement de calcul $\Delta\bar{\sigma}$ est égal à 0.01 MPa.

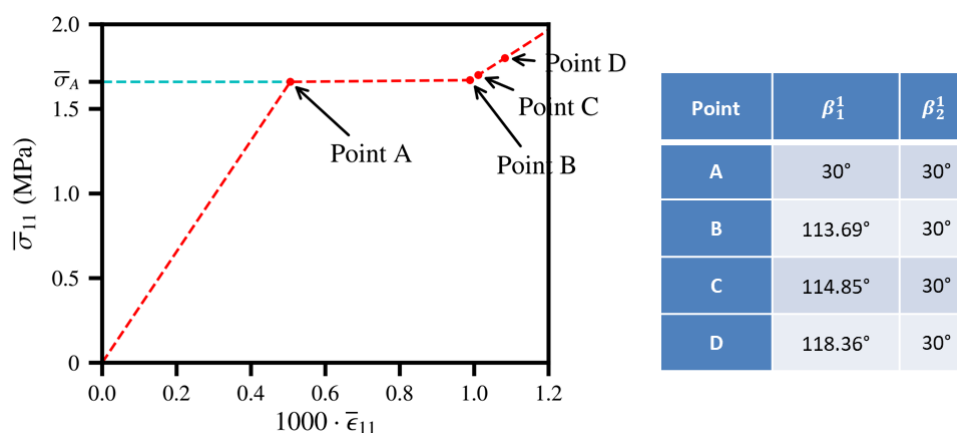


FIGURE 4.15 – Relation contrainte-déformation à l'échelle macroscopique

La figure 4.15 montre le comportement contrainte-déformation macroscopique en traction uniaxiale pour le matériau sélectionné. Initialement, lorsque la contrainte macroscopique appliquée est faible, le niveau de singularité de la pointe des fissures est bien inférieure à la résistance de rupture de l'interface. La réponse contrainte-déformation est donc linéaire. En augmentant le chargement jusqu'à la contrainte critique $\bar{\sigma}_A$, le taux de restitution de l'énergie disponible pour les fissures d'interface atteint la ténacité de l'interface et les fissures commencent à se propager le long de l'interface. Il est intéressant de noter que les fissures se propagent de façon asymétrique et brutalement jusqu'au point B. Au-delà du point B, nous trouvons une réponse macroscopique non linéaire avec propagation stable des fissures.

4.5.1 Étude paramétrique

Dans la section précédente, nous avons présenté un concept d'une loi macroscopique d'endommagement du matériau hétérogène de type inclusion-matrice avec décollement à l'interface. Cette loi macroscopique s'appuie sur des paramètres matériels dont la signification physique est évidente. L'influence des différentes propriétés microscopiques sur le comportement macroscopique du matériau est présentée dans cette section. Les paramètres considérés sont la fraction surfacique des inclusions, la taille des inclusions, l'angle initial des fissures d'interface.

Effet de la fraction surfacique des inclusions

Pour examiner l'effet de la fraction surfacique des inclusions sur la relation constitutive macroscopique, nous changeons la valeur de cette fraction et fixons tous les autres paramètres.

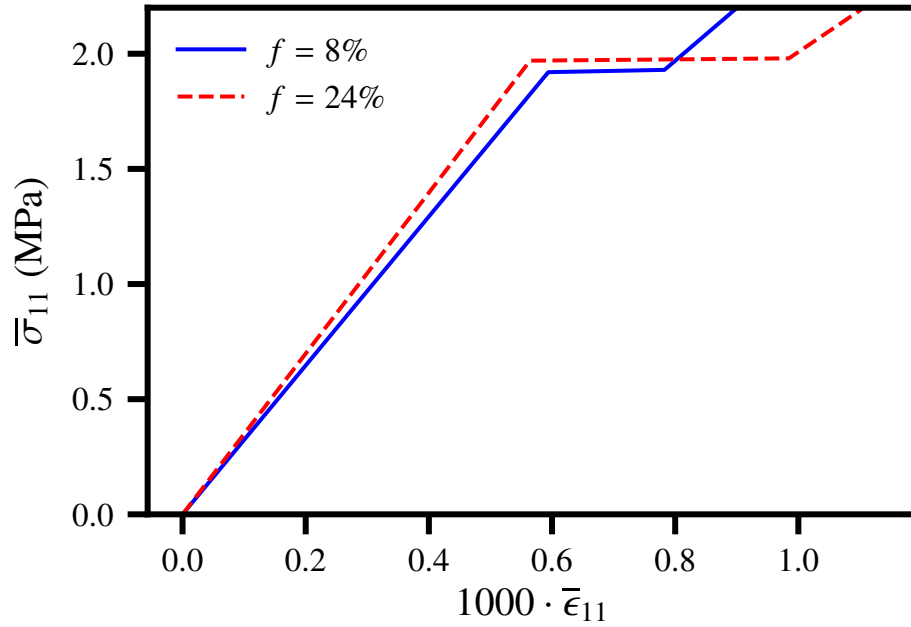


FIGURE 4.16 – Effet de la fraction surfacique sur la relation contrainte-déformation

La figure 4.16 illustre l'influence de la relation macroscopique contrainte – déformation sur la fraction surfacique. Quand le chargement est encore faible, l'augmentation de la fraction surfacique d'inclusions entraîne une augmentation de la rigidité globale du milieu. Les inclusions ont un module d'élasticité plus grande que celui de la matrice. L'augmentation de la fraction surfacique d'inclusions permet donc de rendre le matériau plus rigide. De plus, le pourcentage des fissures à l'interface inclusion-matrice augmente également, entraînant le niveau de la singularité en tête de chaque fissure plus réparti. Donc, une contrainte critique plus haute est nécessaire pour que les fissures d'interface commencent à se propager. Pourtant, après la propagation instable, la partie décollée domine à l'interface inclusion-matrice. Par conséquent, une dégradation plus sévère est trouvée dans le cas du milieu avec une plus grande fraction surfacique des inclusions.

Effet de la taille des inclusions

Nous étudions dans cette section un matériau avec des inclusions circulaires de deux rayons différents, $a_1 = 40 \mu\text{m}$ et $a_2 = 20 \mu\text{m}$. Les fractions de volume des inclusions correspondantes sont désignées par $f_1 = 16\%$ et $f_2 = 12\%$, respectivement. Soit β_1^j et β_2^j ($j = 1, 2$) les angles des fissures initiales à l'interface entre les inclusions de rayon a_j et la matrice. On prend ici $\beta_1^1 = \beta_2^1 = \beta_1^2 = \beta_2^2 = 30^\circ$.

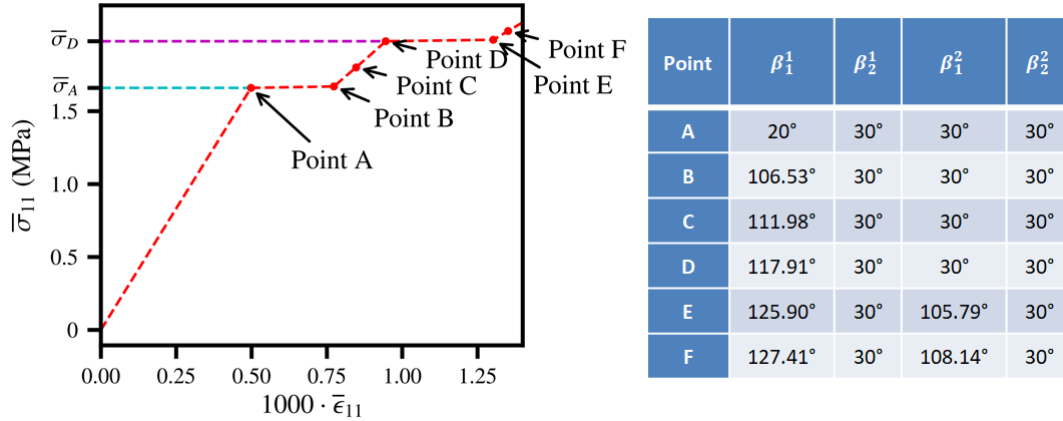


FIGURE 4.17 – Effet de la taille des inclusions sur la relation contrainte-déformation

L'observation de la réponse contrainte-déformation macroscopique présentée dans la figure 4.19, nous trouvons que le moment du démarrage de la propagation des fissures d'interface est différent. Cette différence est exprimée par le nombre de paliers horizontaux de la courbe contrainte-déformation. En effet, la valeur critique de contrainte, nécessaire à la propagation des fissures d'interface, est inversement proportionnelle à la taille de l'inclusion (voir l'équation (3.20)). Par conséquent, les fissures sur l'interface entre les inclusions de plus grand rayon $a_1 = 40 \mu\text{m}$ et la matrice se propagent en premier. La réponse contrainte-déformation macroscopique dans ce cas se résume comme suit : d'abord, le comportement est linéaire quand $\bar{\sigma}_{xx} < \bar{\sigma}_A$. Au-delà de $\bar{\sigma}_A$, la droite horizontale correspond à la propagation instable des fissures β_1^2 sur l'interface entre les inclusions de rayon a_2 et la matrice. Puis, cette propagation devient stable avec le chargement, donnant lieu à une courbe contrainte-déformation non-linéaire. Ensuite, lorsque $\bar{\sigma}_{xx}$ atteint $\bar{\sigma}_D$, les fissures à l'interface entre les petites inclusions et la matrice se propagent de façon instable jusqu'au point E. Finalement, nous retrouvons une réponse macroscopique non linéaire avec propagation stable des fissures.

Effet de l'angle initial des fissures d'interface

De même, pour étudier l'influence de l'angle initial des fissures d'interface sur la relation constitutive macroscopique, nous modifions quelques paramètres par rapport au cas précédent. Les deux familles d'inclusions sont supposées de même rayon, c'est-à-dire ($a_1 = a_2 = 40 \mu\text{m}$, tandis que, $\beta_1^1 = \beta_2^1 = 20^\circ$ et $\beta_1^2 = \beta_2^2 = 40^\circ$).

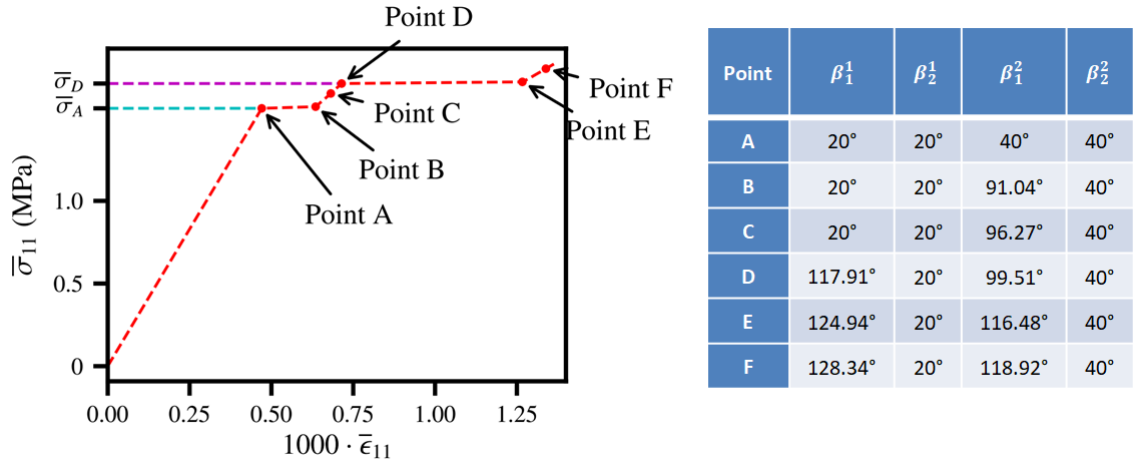


FIGURE 4.18 – Effet de l'angle initial des fissures d'interface sur la relation contrainte-déformation

Dans cette étude, la courbe contrainte-déformation a la même allure que dans le cas précédent. Due à la valeur supérieure du taux restitution de l'énergie, sous la même contrainte macroscopique appliquée à l'infini $\bar{\sigma}_{xx}$, les fissures des angles initiales $\beta_1^2 = \beta_2^2 = 40^\circ$ se propagent au premier (voir la ligne en pointillé dans la figure 3.15).

4.6 Conclusions

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'effet du décollement partiel de l'interface sur le comportement macroscopique de matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice".

La solution élémentaire du chapitre 2 est implémentée dans le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka pour examiner l'effet du décollement partiel de l'interface et de la fraction surfacique des inclusions sur les modules effectifs des matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice". Quand les angles des fissures sont faibles, la présence des inclusions raides renforce les modules d'Young et de cisaillement du milieu. Lorsque les angles des fissures sont grands, plus la fraction volumique des inclusions augmente, plus les modules effectifs diminuent. Il existe des angles des fissures pour lesquels l'ensemble inclusion+fissures a la même raideur que la matrice (dans une direction donnée). Par conséquent, le raideur du milieu contenant des fissures avec ces angles reste constante lorsque la fraction surfacique augmente et est égale à la raideur de la matrice. Nous avons par ailleurs vérifié que le schéma de Mori-Tanaka conduit à une estimation symétrique du tenseur de raideur homogénéisé.

Nous présentons ensuite une courbe de contrainte-déformation macroscopique du matériau soumis à une traction uniaxiale tenant compte de l'endommagement dû au décollement à l'interface. La procédure d'homogénéisation de Mori-Tanaka est adoptée pour la transition micro-macro. Dans le cas d'une famille d'inclusions, la réponse contrainte-déformation macroscopique comporte trois étapes : le comportement

linéaire quand le chargement est inférieur à la valeur critique ; au-delà de la valeur critique, un palier horizontal correspondant à la propagation instable des fissures ; ensuite, une réponse non linéaire correspondant à la propagation stable des fissures.

L'influence de paramètres tels que fraction surfacique des inclusions, taille des particules et angle initiale des fissures sur la courbe de contrainte-déformation est examinée.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Conclusions

Dans le présent travail de thèse, nous avons apporté des contributions à la modélisation de la microfissuration dans des matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice" tenant compte du décollement à l'interface entre l'inclusion et la matrice. Les contributions développées de cette thèse sont résumées ci-après.

Tout d'abord, la solution à l'équilibre élastique linéaire d'une inclusion circulaire partiellement liée à une matrice homogène et soumise à une contrainte uniforme à l'infini a été étudiée par la méthode des potentiels complexes (Muskhelishvili, 1953). L'analyse a été simplifiée en considérant deux fissures d'interface de longueurs différentes, mais partageant le même axe de symétrie. Nous nous appuyons sur les résultats généraux (pour un nombre quelconque de fissures de longueur quelconque) de [Perlman and Sih \(1967\)](#) pour obtenir la solution présentée dans ce travail, qui étend les résultats de [Toya \(1974\)](#); [Prasad and Simha \(2003\)](#) (cas d'une seule fissure) et [Prasad and Simha \(2002\)](#) (cas de deux fissures coaxiales de longueurs égales). Cette solution est semi-analytique, au sens où les expressions algébriques sont explicites, mais font intervenir des constantes qu'il est nécessaire de déterminer numériquement.

Une deuxième contribution correspond à l'étude de la propagation des fissures d'interface. Contrairement aux matériaux homogènes, l'ouverture de la fissure d'interface dérivée d'une analyse élastique linéaire présente un caractère oscillatoire près de la pointe de la fissure, en raison de la présence d'un facteur $s^{i\epsilon}$ [s : distance depuis la pointe de la fissure; ϵ : constante oscillatoire de [Williams \(1959\)](#)]. Selon la solution oscillatoire, l'interpénétration a lieu au voisinage de la pointe de la fissure. Toutefois, lorsque l'étendue de la zone dans laquelle les oscillations ont lieu peut être négligée devant la longueur de la fissure, on peut admettre que la solution oscillatoire reste pertinente pour l'analyse de la propagation de la fissure. Dans le problème considéré ici, lorsque l'angle de la fissure augmente, la zone dans laquelle se produisent les oscillations augmente et devient significative pour les angles supérieurs à 55° degrés. Par conséquent, les résultats pour ces cas peuvent ne pas être valables pour l'analyse de la propagation de la fissure. Puis, les expressions semi-analytiques des facteurs d'intensité de contraintes sont comparées à la simulation numérique directe par la méthode des éléments finis et la méthode d'extrapolation du déplacement. Quelques résultats concernant le taux de restitution d'énergie sont ensuite présentés

pour différentes configurations des deux fissures soumises à l'infini à une contrainte uniaxiale. Ensuite, partant d'une configuration initiale où les deux fissures ont la même longueur, on utilise le critère énergétique de la mécanique de la rupture élastique linéaire pour analyser la propagation des fissures sous un chargement à l'infini dans la direction de l'axe de symétrie. Nous montrons que la propagation peut être asymétrique : la longueur d'une des fissures croît, tandis que celle de l'autre reste constante. Une fois que la configuration devient asymétrique, les fissures ont tendance à augmenter l'asymétrie.

Enfin, la troisième contribution concerne l'application des résultats précédents à l'homogénéisation. La solution élémentaire obtenue dans le chapitre 2 est implémentée dans le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka pour examiner l'effet du décollement partiel de l'interface et de la fraction volumiques des inclusions sur les modules effectifs des matériaux hétérogènes de type "inclusion-matrice". Un modèle micromécanique simple est ensuite proposé pour étudier l'effet de l'endommagement dû au décollement de l'interface entre les inclusions et la matrice infinie. La procédure d'homogénéisation de Mori-Tanaka est adoptée pour la transition micro-macro. Le matériau modèle est composé d'une matrice argileuse et des inclusions minérales, sous traction uniaxiale. En effet, ce modèle n'est pas limité aux matériaux argileux hétérogènes et peut également être utilisé pour simuler le comportement d'autres composites renforcés par des particules. L'effet de divers phénomènes d'endommagement survenant à l'échelle microscopique sur les relations de comportement macroscopiques est étudié en détail. Finalement, une étude paramétrique nous a permis de comprendre le rôle joué par chacun des paramètres du modèle.

5.2 Perspectives

Nous présentons dans ce paragraphe quelques prolongements possibles aux travaux présentés ici, en les regroupant en perspectives à court terme et perspectives à long terme.

5.2.1 Perspectives à court terme

Problème multifissures d'interface

Dans ce travail de thèse, nous avons appliqué la méthodologie de [Perlman and Sih \(1967\)](#) pour trouver la solution du problème de deux fissures de longueurs différentes, mais partageant le même axe de symétrie, situées à l'interface entre une inclusion circulaire et la matrice infinie. Cette méthodologie est en fait générale, et s'applique au cas de n fissures en générale (Figure 5.1).

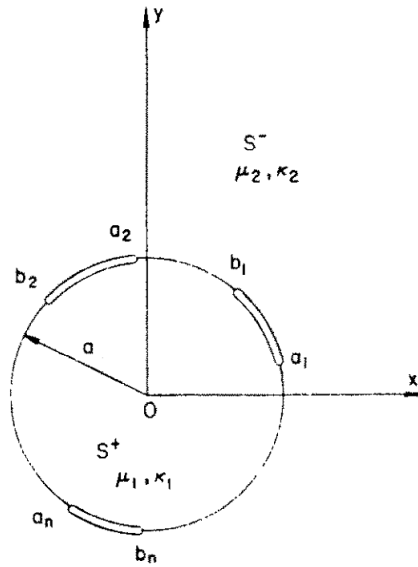


FIGURE 5.1 – Problème de n fissures à l'interface inclusion-matrice sous contrainte uniforme à l'infini (Perlman and Sih, 1967)

Dans le cadre d'un problème n fissures d'interface, nous supposons que l'interface matrice-inclusion est fissurée le long des arcs L_1, L_2, \dots, L_n . Soient a_k, b_k les deux points de la fissure L_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

De même que dans le cas de deux fissures asymétrique examiné dans la section 2.2, le déplacement \mathbf{u} et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ sont exprimés en fonction des fonctions complexes $W_j(z)$ et $\Omega_j(z)$ ($j = 1, 2$). Suivant la méthodologie de Perlman and Sih (1967), nous pouvons déduire l'expression générale de $W_j(z)$ et $\Omega_j(z)$ pour un ensemble de n fissures circulaires comme suit :

$$(1 + \alpha)W_1(z) = mQ(z) + \chi(z)P(z), \quad (5.1)$$

$$(1 + \alpha)\Omega_1(z) = mQ(z) - \alpha\chi(z)P(z), \quad (5.2)$$

$$(1 + \alpha)W_2(z) = Q(z) + \alpha\chi(z)P(z), \quad (5.3)$$

$$(1 + \alpha)\Omega_2(z) = Q(z) - \chi(z)P(z), \quad (5.4)$$

Ces équations ci-dessus sont similaires aux équations (2.22), (2.23), (2.24) et (2.25). Cependant, la fonction de Plemelj $\chi(z)$ dans le cas n fissures est définie comme suit :

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\frac{1}{2}+i\epsilon} (z - b_k)^{-\frac{1}{2}-i\epsilon} \quad (5.5)$$

et

$$Q(z) = e_0 + \frac{t_1}{z} + \frac{t_2}{z^2}, \quad P(z) = \sum_{k=1}^n P_k z^k + P_0 + \frac{P_{-1}}{z} + \frac{P_{-2}}{z^2}, \quad (5.6)$$

Pour le problème de n fissures, $e_0, t_1, t_2, P_{-2}, \dots, P_n$ sont constantes d'intégration à déterminer. Nous comptons donc $(6 + n)$ constantes d'intégration.

Les $6+n$ constantes d'intégration $e_0, t_1, t_2, P_{-2}, \dots, P_n$ sont obtenue en exprimant : *i.* Le comportement à l'infini de W_2 et de w_2 (4 équations), *ii.* L'analyticité de W_1 et

w_1 en $z = 0$ (3 équations) et *iii.* La condition d'univocité des déplacements ($n - 1$ équations).

Pour les deux éléments *i.* et *ii.*, la procédure est similaire à celle écrite dans la section 2.3; elle se repose sur la détermination des développements asymptotiques de la fonction de Plemelj $\chi(z)$ à l'infini et à l'origine.

Les équations restantes ($n - 1$ équations) se trouvent à partir des conditions que les déplacements doivent être à valeur unique, c-à-d $\Delta u_x + i\Delta u_y$ doit revenir à sa valeur d'origine quand le point z décrit un contour fermé autour de chaque fissure, L_k ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\int_{L_j} \chi^+(t)(P_2 t^2 + P_1 t + P_0 + P_{-1} t^{-1} + P_{-2} t^{-2}) dt = 0, \quad (5.7)$$

Le problème a n fissures sur l'interface. Donc, pour trouver $n - 1$ équations restantes, on n'a besoin que de choisir $n - 1$ fissures (la n -ième fissure conduit à une condition redondante).

Chacune de ces conditions peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{k=1}^n I_{k,j} P_k + I_{0,j} P_0 + I_{-1,j} P_{-1} + I_{-2,j} P_{-2} = 0, \quad (5.8)$$

où $I_{k,j} = \int_{L_j} \chi^+(t) t^k dt$. Comme discuté à la section 2.3, les intégrales $I_{k,j}$ peuvent être singulières. Cependant, les méthodes d'intégration numérique standard permettent de fournir des estimations précises de ces intégrales sans précaution supplémentaire.

Loi d'évolution de l'endommagement

Une des perspectives importantes des travaux du chapitre 4 est de proposer une loi d'évolution de l'endommagement dû à la propagation des fissures à l'interface entre les inclusions et la matrice, ainsi qu'une loi d'évolution des modules effectifs. Dans ce travail, le décollement à l'interface est exprimé à travers des angles des fissures, on peut considérer l'évolution de l'endommagement comme la variation des angles des fissures avec le chargement.

Une illustration simple de la loi d'endommagement du cas d'un matériau composé de deux phases (une matrice infinie et une inclusion circulaire) est présentée ci-dessous (revoir la figure 2.1). L'inclusion circulaire avec une fissure d'arc d'interface est incorporée à la matrice infinie et soumise à l'infini à une traction uniaxiale σ_{xx}^∞ . La fissure L_1 sous-tend un angle de $2\beta_1$, tandis que l'angle β_2 est supposé nul. Soit G est le taux de restitution en pointe de la fissure L_1 . En adoptant la théorie de Griffith, une fissure commence à se propager quand le taux de restitution d'énergie G atteint la valeur critique G_c :

$$G = G_c \quad (5.9)$$

La matrice est soumise à une contrainte uniaxiale à l'infini σ_{xx}^∞ , et l'angle β_2 est supposé nul. Le taux de restitution d'énergie G peut être exprimé comme suit :

$$G = (\sigma_{xx}^\infty)^2 a \hat{G}(\beta_1) \quad (5.10)$$

Donc, il est possible d'adopter un critère d'endommagement de la forme suivante :

$$f = \sigma_{xx}^\infty - \sigma_c(\beta_1) \quad (5.11)$$

où $\sigma_c(\beta_1) = \sqrt{G_c/(a\hat{G}(\beta_1))}$. Le critère qui vient d'être décrit, et qui sera utilisé comme loi de propagation locale, s'interprète de la façon suivante :

- si $\sigma_{xx} < \sigma_c(\beta_1)$ alors $\dot{\beta}_1 = 0$ pas de l'évolution de l'endommagement
- si $\sigma_{xx} = \sigma_c(\beta_1)$ alors $\dot{\beta}_1 \geq 0$ évolution de l'endommagement

Comme l'endommagement est décrit par la variable β_1 , l'évolution de cette variable peut être déduite de l'équation de consistance $\dot{f} = 0$ au cours du processus de l'endommagement :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}^\infty} \dot{\sigma}_{xx}^\infty + \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1 = \dot{\sigma}_{xx}^\infty + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1 = 0 \quad (5.12)$$

L'évolution complète de l'endommagement est donc la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = 0, & \text{si } f < 0 \\ \dot{\beta}_1 = 0, & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \dot{\beta}_1 = -(\partial \sigma_c / \partial \beta_1)^{-1} \dot{\sigma}_{xx}^\infty, & \text{autres cas} \end{cases} \quad (5.13)$$

La relation entre la déformation macroscopique et la contrainte macroscopique s'écrit (revoir l'équation (4.20)) :

$$\bar{\varepsilon} = \mathbb{S}^{\text{eff}} \sigma_{xx}^\infty \quad (5.14)$$

où $\bar{\sigma} = [\sigma_{xx}^\infty \ 0 \ 0]^T$. La formulation en vitesse s'obtient par différentiation de l'équation ci-dessus. On a donc :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\mathbb{S}}^{\text{eff}} : \sigma_{xx}^\infty + \mathbb{S}^{\text{eff}} : \dot{\sigma}_{xx}^\infty \quad (5.15)$$

Car \mathbb{S}^{eff} dépend du variable β_1 , la variation de \mathbb{S}^{eff} en cours de l'évolution de l'endommagement s'écrit :

$$\dot{\mathbb{S}}^{\text{eff}} = \frac{\partial \mathbb{S}^{\text{eff}}}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1 \quad (5.16)$$

En combinant les équations (5.13), (5.15) et (5.16), l'évolution de la réponse contrainte-déformation macroscopique associée à la loi d'endommagement s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}} = \mathbb{S}^{\text{eff}} : \dot{\sigma}_{xx}^\infty, & \text{si } f < 0 \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \mathbb{S}^{\text{eff}} : \dot{\sigma}_{xx}^\infty, & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \left[-(\partial \sigma_c / \partial \beta_1)^{-1} \frac{\partial \mathbb{S}^{\text{eff}}}{\partial \beta_1} + \mathbb{S}^{\text{eff}} \right] : \dot{\sigma}_{xx}^\infty, & \text{autres cas} \end{cases} \quad (5.17)$$

La propagation des fissures avec un critère plus réaliste

Dans la section 3.6, nous avons montré que la propagation peut être asymétrique depuis un état initialement symétrique. Cela dépend du signe de la fonction $\psi(\beta_0)$ qui est définie dans l'équation (3.17). En effet, nous n'avons pas été en mesure

de produire un cas pour lequel une propagation symétrique se produirait. Cela pourrait être lié à l'hypothèse que G_c est constante. En réalité, suivant les travaux expérimentaux de [Cao and Evans \(1989\)](#), G_c dépend de l'angle de mixité de mode ψ_k , où $\tan \psi_k = K_I/K_{II}$ (revoir la section [1.3.6](#)). C'est la raison pour laquelle, G_c est une fonction qui dépend des angles β_1 et β_2 . De même que la discussion dans la section [3.6.1](#), en utilisant un critère plus réaliste, nous pouvons montrer que la fonction $\psi(\beta_0)$ a la forme suivante :

$$\Psi(\beta_0) = \left. \frac{\partial(G_1 - G_{1c})}{\partial\beta_1} \right|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0} - \left. \frac{\partial(G_1 - G_{1c})}{\partial\beta_2} \right|_{\beta_1=\beta_2=\beta_0}. \quad (5.18)$$

où

- si $\Psi(\beta_0) < 0$: la propagation est symétrique,
- si $\Psi(\beta_0) > 0$: la propagation est asymétrique.

Nous avons néanmoins vu au paragraphe [1.3](#) que ce critère de propagation fait intervenir une longueur ℓ de référence. A notre connaissance, il n'y a pas consensus sur la manière de choisir cette longueur ([Rice, 1988](#); [Shih, 1991](#); [Hutchinson and Suo, 1991](#)). Une réflexion théorique sur la signification de cette longueur constitue donc une perspective indispensable et très intéressante.

5.2.2 Perspectives à long terme

Nucléation des fissures

On note que la caractéristique principale de la mécanique de la rupture est de partir d'une fissure déjà existante. La nucléation du décollement partiel à l'interface inclusion-matrice initialement non endommagée ne peut pas être traitée par la théorie de Griffith.

Pour prédire la nucléation des fissures d'interface, on peut par exemple utiliser un critère de contrainte normale. Ce critère prédit la rupture aux points de l'interface où la valeur locale de la traction normale est supérieure à la résistance à la traction de l'interface. Cependant, ce critère ne peut traiter que le début de la propagation. La question sur le chemin d'équilibre complet au-delà de la charge critique est inexplicable.

Pour résoudre ces difficultés [Leguillon \(2002\)](#) a proposé une approche cohérente en combinant les deux critères contrainte-énergie sous la désignation anglo-saxonne de Finite Fracture Mechanics (pour plus de détails sur ce sujet, voir [Weißgraeber et al. \(2016\)](#)). Puis, [Mantič \(2009\)](#) a utilisé cette approche pour l'étude de la nucléation des fissures d'interface.

Il est possible d'associer l'analyse de la propagation de la fissure dans la section [3.6](#) à l'analyse de la nucléation de la fissure réalisée par [Mantič \(2009\)](#) et [García et al. \(2015\)](#). Dans la dernière référence, en utilisant le critère couplé (contrainte-énergie) de [Leguillon \(2002\)](#), les auteurs concluent qu'il faut souvent s'attendre à une nucléation asymétrique plutôt qu'à une nucléation symétrique.

Passage en trois dimensions

Nos contributions dans le cadre de ce travail sont consacrées principalement au problème en deux dimensions (2D). Le passage à trois dimensions (3D) constitue donc une perspective importante de ce travail.

La solution semi-analytique utilisée ici et due à [Perlman and Sih \(1967\)](#) repose sur la méthode des potentiels complexes de [Muskhelishvili \(1953\)](#). Cette méthode ne permet pas de traiter des problèmes tridimensionnels, et il est nécessaire d'adopter une autre stratégie. Le problème d'une fissure sphérique dans un solide élastique a été abordé au premier par [Ziuzin and Mossakovskii \(1970\)](#); [Prokhorova and Solov'ev \(1976\)](#). [Martynenko and Ulitko \(1978\)](#) ont proposé une nouvelle approche basée sur la méthode des fonctions propres. Le problème a été réduit à un système d'équations intégral-différentielles. Dans cette méthode, une solution générale du problème en question sous une forme analytique explicite a été suggérée, ainsi qu'une méthode analytique permettant de résoudre certaines équations intégral-différentielles. Une analyse locale des contraintes et des déplacements près du bord de la fissure sphérique a été réalisée et les facteurs d'intensité de contraintes ont été obtenus.

Plus tard, [Martynenko \(1983\)](#); [Martynenko and Lebedyeva \(2006\)](#) ont appliqué cette méthode au problème de la fissure interfaciale sphérique. [Martynenko \(1983\)](#); [Martynenko and Lebedyeva \(2006\)](#) ont obtenu des résultats semi-analytiques pour les facteurs d'intensité de contraintes en pointe de la fissure. Pourtant, à cause des difficultés mathématiques dans l'estimation du nombre d'intégrales dans le calcul, ils n'ont pas trouvé l'expression de contraintes sur la partie adhésive et de déplacements relatifs sur la partie décollée de l'interface. Par ailleurs, ces travaux ont été limités à une seule fissure interfaciale sphérique. La solution générique pour le problème multi-fissures d'interface n'a pas été établie. Ces limitations constituent donc une perspective intéressante. Pour plus de détail de cette méthode, le lecteur peut se référer aux articles de [Martin \(2001\)](#) et de [Martynenko and Lebedyeva \(2006\)](#).

C'est notre ambition que de suivre quelques-unes des pistes évoquées ci-dessus.

Annexe A

Estimation de l'intégrale I_0

Le but de cette partie est d'estimer l'intégrale I_0 dans l'équation (2.50) pour $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$

$$I_0(\beta_0, \epsilon) = 2 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \frac{\cos\left[\epsilon \ln\left(\frac{\sin(\beta_0 - \theta)}{\sin(\beta_0 + \theta)}\right)\right]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta. \quad (\text{A.1})$$

Cette intégrale est singulière. En effet, lorsque $\theta \rightarrow \beta_0$, l'argument du logarithme tend vers 0, et le numérateur de l'intégrande oscille donc de plus en plus vite. Pour estimer cette intégrale, on commence donc par calculer les racines successives de l'intégrande. On intègre ensuite entre deux racines successives, puis on somme les intégrales partielles, en tronquant la série lorsque la précision est suffisante.

En tenant compte de la parité de l'intégrande, on remarque tout d'abord que I_0 se simplifie en

$$I_0(\beta_0, \epsilon) = 4 \int_0^{\beta_0} \frac{\cos\left[\epsilon \ln f(\theta, \beta_0)\right]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta, \quad (\text{A.2})$$

où l'on a posé

$$f(\theta, \beta_0) = \frac{\sin(\beta_0 - \theta)}{\sin(\beta_0 + \theta)} \quad (\text{A.3})$$

A.1 Etude de la fonction f

Soit f cette fonction. On remarque tout d'abord que

$$f(\theta, \beta_0) \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \beta_0 \leq \pi/2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \beta_0. \quad (\text{A.4})$$

En effet,

$$\sin(\beta_0 + \theta) - \sin(\beta_0 - \theta) = 2 \sin \theta \cos \beta_0 \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

Pour trouver les zéros de l'intégrande de I_0 , il suffit donc de résoudre pour $n = 0, 1, 2, \dots$ l'équation

$$\ln f(\theta_n, \beta_0) = -(n + 1/2) \frac{\pi}{\epsilon} \iff f(\theta_n, \beta_0) = e_n, \quad (\text{A.6})$$

$$\iff (1 - e_n) \sin \beta_0 \cos \theta_n - (1 + e_n) \cos \beta_0 \sin \theta_n = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\iff \sin(\alpha_n - \theta_n) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\iff \theta_n = \alpha_n + k\pi, \quad (\text{A.9})$$

où l'on a défini l'angle α_n par

$$\sin \alpha_n = \frac{(1 - e_n) \sin \beta_0}{\sqrt{1 + e_n^2 + 2e_n(\cos \beta_0 - \sin \beta_0)}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_n = \frac{(1 + e_n) \cos \beta_0}{\sqrt{1 + e_n^2 + 2e_n(\cos \beta_0 - \sin \beta_0)}}, \quad (\text{A.10})$$

et $e_n = \exp[-(n + 1/2)\pi/\epsilon]$. On observe que α_n ainsi défini est toujours compris entre 0 et $\pi/2$, de sorte que, sans ambiguïté

$$\alpha_n = \arctan \left[\frac{1 - e_n}{1 + e_n} \tan \beta_0 \right] = \arctan \left\{ \tanh \left[(n + 1/2) \frac{\pi}{2\epsilon} \right] \tan \beta_0 \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Les racines θ_n sont par ailleurs recherchées également entre 0 et $\pi/2$, donc $k = 0$. Finalement, on obtient l'expression analytique des racines

$$\theta_n = \arctan \left\{ \tanh \left[(n + 1/2) \frac{\pi}{2\epsilon} \right] \tan \beta_0 \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{A.12})$$

et on montre qu'elles convergent exponentiellement vers β_0 .

A.2 Évaluation de l'intégrale I_0

En posant $\theta_{-1} = 0$, on décompose l'intégrale en une série

$$I_0(\beta_0, \epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \frac{\cos[\epsilon \ln f(\theta, \beta_0)]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta. \quad (\text{A.13})$$

Sur chaque intervalle $[\theta_{n-1}, \theta_n]$, l'intégrande est de signe constant ; chaque terme peut donc être évalué par des méthodes numériques standard. Bien entendu, la série sera tronquée. On introduit donc la somme

$$I_0^{[N]}(\beta_0, \epsilon) = \sum_{n=0}^N 4 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \frac{\cos[\epsilon \ln f(\theta, \beta_0)]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta = 4 \int_0^{\theta_N} \frac{\cos[\epsilon \ln f(\theta, \beta_0)]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta, \quad (\text{A.14})$$

et le reste

$$R_0^{[N]}(\beta_0, \epsilon) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} 4 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \frac{\cos[\epsilon \ln f(\theta, \beta_0)]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta = 4 \int_{\theta_N}^{\beta_0} \frac{\cos[\epsilon \ln f(\theta, \beta_0)]}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}} d\theta. \quad (\text{A.15})$$

On obtient aisément la majoration suivante

$$|R_0^{[N]}(\beta_0, \epsilon)| \leq 4 \int_{\theta_N}^{\beta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta) \sin(\beta_0 + \theta)}}, \quad (\text{A.16})$$

et, en observant que l'intégrande est une fonction décroissante

$$|R_0^{[N]}(\beta_0, \epsilon)| \leq \frac{4(\beta_0 - \theta_N)}{\sqrt{\sin(\beta_0 - \theta_N) \sin(\beta_0 + \theta_N)}} \simeq 4 \sqrt{\frac{\beta_0 - \theta_N}{\sin 2\beta_0}}. \quad (\text{A.17})$$

La méthode pour calculer I_0 est donc la suivante. Pour $n = 1, 2, 3, \dots$

1. Calculer θ_n , puis l'intégrale entre θ_{n-1} et θ_n .
2. Calculer la somme $I_0^{[N]}$ (en séparant termes positifs et termes négatifs, et en sommant les plus petits termes d'abord).
3. Calculer le majorant du reste. Si $|R_0^{[N]}| \leq \varepsilon I_0^{[N]}$, alors arrêter le calcul (ε : tolérance fixée par l'utilisateur, $\varepsilon = 10^{-8}$).

A.3 Limitation des erreurs d'arrondi

Les θ_n convergent très rapidement vers β_0 , et la différence $\beta_0 - \theta$ sera donc généralement très petite, ce qui peut entraîner d'importantes erreurs d'arrondis. Il est préférable dans ce cas d'effectuer le changement de variable $\psi = \beta_0 - \theta$.

On a alors

$$I_1(\beta_0, \epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4 \int_{\psi_n}^{\psi_{n-1}} \frac{\cos \left[\epsilon \ln \frac{\sin \psi}{\sin(2\beta_0 - \psi)} \right]}{\sqrt{\sin \psi \sin(2\beta_0 - \psi)}} d\theta, \quad (\text{A.18})$$

avec

$$\psi_n = \beta_0 - \theta_n = \arctan \frac{e_n \sin 2\beta_0}{1 + e_n \cos 2\beta_0} \quad (\text{A.19})$$

et

$$|R_1^{[N]}(\beta_0, \epsilon)| \leq \frac{4\psi_n}{\sqrt{\sin \psi_n \sin(2\beta_0 + \psi_n)}} \simeq 4 \sqrt{\frac{\psi_n}{\sin 2\beta_0}}. \quad (\text{A.20})$$

La formule précédente est intéressante. En effet, ψ_n pourra au mieux être calculé à 10^{-16} près (erreur absolue). Donc l'erreur absolue sur le calcul de l'intégrale ne pourra être plus petite que $10^{-8}/\sqrt{\sin 2\beta_0}$.

A.4 Implémentation du calcul

Comme I_0 est une fonction qui dépend de β_0 et ϵ , nous avons effectué deux cas de calcul :

1. $\epsilon = 0.15$ et $\beta_0 = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 89^\circ$,
2. $\beta_0 = 45^\circ$ et $\epsilon = 0.005, 0.022, 0.039, \dots, 0.175$.

Pour chaque cas, nous avons estimé des erreurs relatives :

1. Erreur relative ε_r du calcul de l'intégrale $I_0^{[N]}$, $\varepsilon_r = \frac{\sum_{n=0}^N \varepsilon_a^n + |R_1^{[N]}(\beta_0, \epsilon)|}{I_0^{[N]}(\beta_0, \epsilon)}$; où ε_a^n est erreur absolue de l'intégrande sur chaque intervalle $[\theta_{n-1}, \theta_n]$ par des méthodes numériques standard.
2. Erreur relative ε_r^* entre $I_0^{[N]}(\beta_0, \epsilon)$ et $I_0^*(\beta_0, \epsilon)$, $\varepsilon_r^* = \frac{|I_0^{[N]} - I_0^*|}{I_0^{[N]}}$; où I_0^* est le résultat de l'intégrande I_0 obtenue par la fonction `quad` du module `scipy.integrate` en Python.

Le code suivant donne le source python permettant de réaliser l'approche décrite ci-dessus.

```
import itertools

import numpy as np

from scipy.integrate import quad

def integrand(psi, beta, epsilon):
    sin1 = np.sin(psi)
    sin2 = np.sin(2*beta-psi)
    return 4*np.cos(epsilon*np.log(sin1/sin2))/np.sqrt(sin1*sin2)

def I0(beta, epsilon):
    c = np.cos(2*beta)
    s = np.sin(2*beta)
    psi2 = beta
    integrals = []
    errors = []
    minimum_error = 1E-8/np.sqrt(s) # Limitation des erreurs d'
                                     arrondi

    for n in itertools.count():
        e = np.exp(-(n+0.5)*np.pi/epsilon)
        psi1 = np.arctan(e*s/(1+e*c))
        integral, error = quad(integrand, psi1, psi2, args=(beta,
                                                             epsilon))

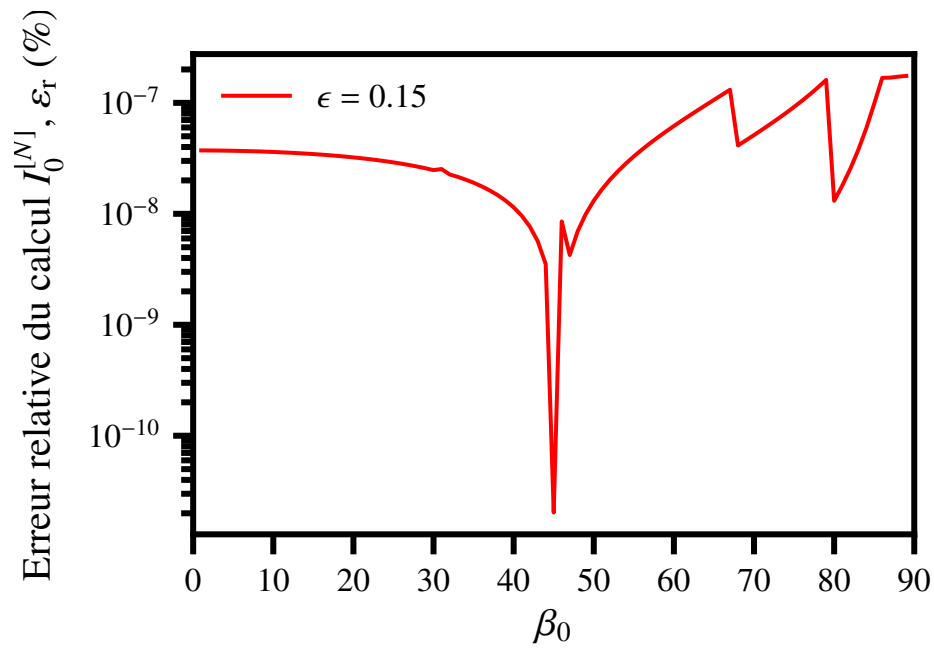
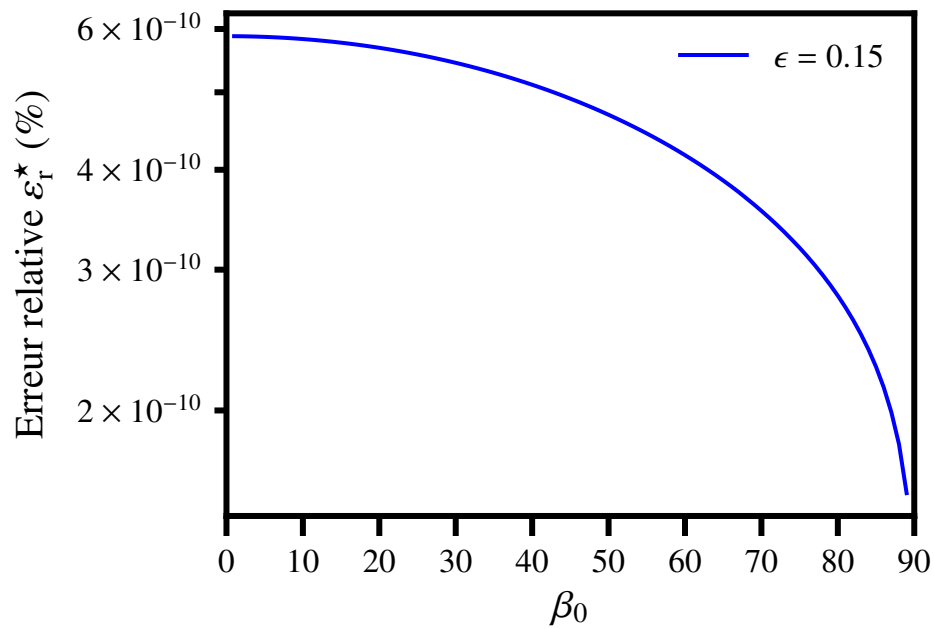
        integrals.append(integral)
        total_integral = np.math.fsum(integrals)

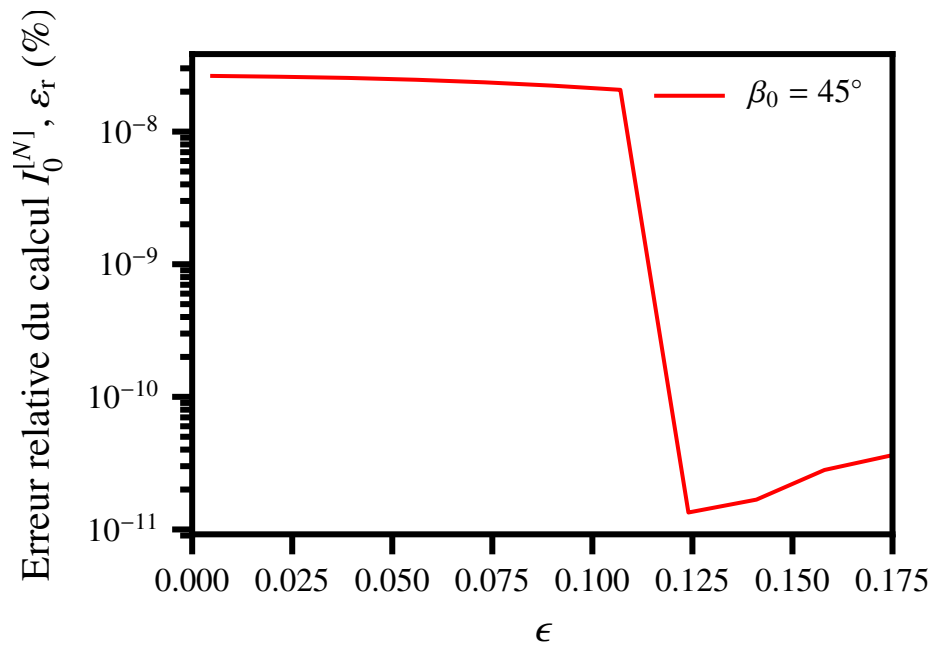
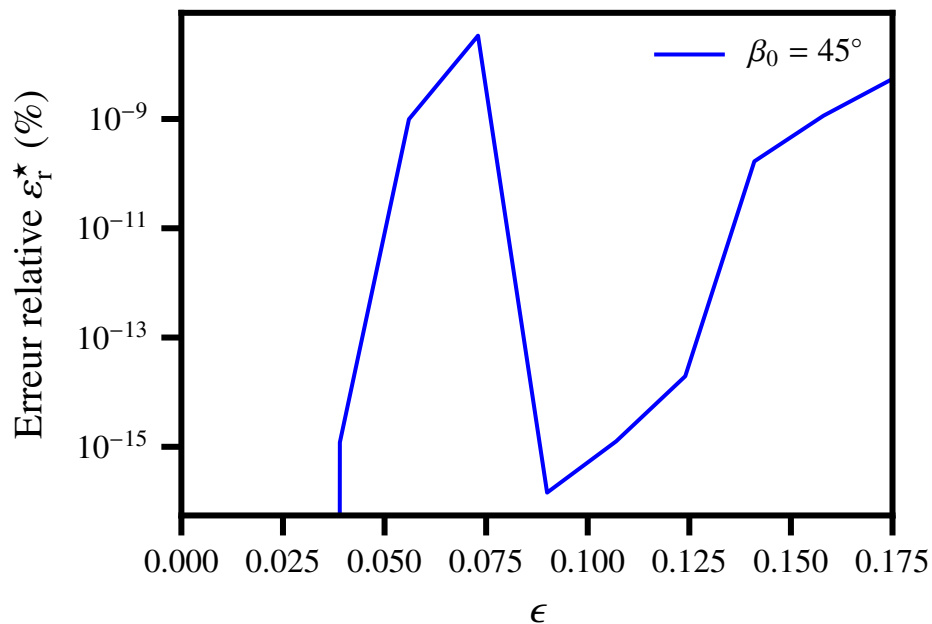
        errors.append(error)
        Rn = 4*np.sqrt(psi1/np.sin(2*beta))
        total_error = np.math.fsum(errors)+Rn

        psi2 = psi1
        if (Rn <= 1e-8*abs(total_integral))
            or (total_error <= minimum_error):
            return total_integral, total_error

def I0_star(beta, epsilon):
    numerical_integration, _ = quad(integrand, 0, beta, args=(beta,
                                                             epsilon))

    return numerical_integration
```

FIGURE A.1 – Erreur relative ε_r (%) du calcul de l'intégrale $I_0^{[N]}$ ($\epsilon = 0.15$).FIGURE A.2 – Erreur relative ε_r^* (%) entre deux approches ($\epsilon = 0.15$).

FIGURE A.3 – Erreur relative ϵ_r (%) du calcul de l'intégrale $I_0^{[N]}$ ($\beta_0 = 45^\circ$).FIGURE A.4 – Erreur relative ϵ_r^* (%) entre deux approches ($\beta_0 = 45^\circ$).

Les figures A.1 et A.3 montrent des faibles erreurs relatives ϵ_r sur le calcul de l'intégrale $I_0^{[N]}$ pour toute la gamme de (β_0, ϵ) -valeurs listées ci-dessus. Cela signifie que les résultats de $I_0^{[N]}$ sont très proche des résultats réelle de l'intégrale I_0 .

Cependant, des petites erreurs relatives ϵ_r^* entre $I_0^{[N]}$ et I_0^* dans les figures A.2 et A.4 montrent que l'approche décrite ci-dessus n'est pas nécessaire et nous nous sommes donc appuyés sans précaution sur la fonction `quad` du module `scipy.integrate`

pour évaluer l'intégrale I_0 . Notons que des faibles erreurs relatives sont également observées pour les autres intégrales, I_k ($k = -2, -1, 1, 2$) (les figures ne sont pas reproduites ici).

Annexe B

Analyse énergétique de la propagation des fissures

B.1 Raisonnement de Griffith

Griffith (1921) a été le premier à étudier la rupture d'un point de vue énergétique. Il étudie l'éventualité de la propagation d'une fissure sous chargement constant.

Si l'on crée une longueur de fissure l . L'énergie total Π d'un milieu s'écrit :

$$\Pi(l) = W_p + W_s \quad (\text{B.1})$$

où W_p est l'énergie potentielle et W_s est l'énergie dissipée.

Hypothèse de Griffith (1921) s'écrit : la fissure avance lorsque cela lui permet de minimiser son énergie totale :

D'après Griffith (1921), il a comparé les énergies avant et après propagation sous le même chargement :

- si $W_p(l) + W_s(l) < W_p(l + dl) + W_s(l + dl)$: la fissure n'évolue pas et conserver la longueur l ,

- si $W_p(l) + W_s(l) \geq W_p(l + dl) + W_s(l + dl)$: le corps "a intérêt" à accroître la longueur de la fissure de dl pour minimiser son énergie.

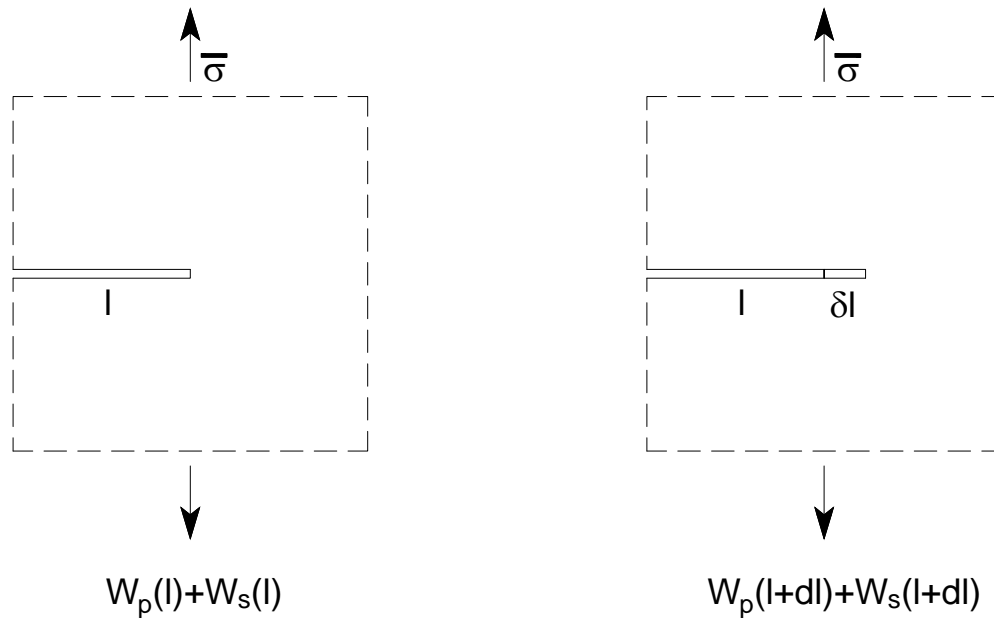


FIGURE B.1 – Energie total avant et après la propagation sous le même chargement.

Concernant son raisonnement, la condition pour la propagation d'une fissure sera :

$$\Pi(l) \geq \Pi(l + dl) \quad (\text{B.2})$$

B.2 Branchement de fissure

Théorie de Griffith se limite au cas d'une propagation de fissure en ligne droite. En réalité, sous un chargement donné, il faut considérer aussi la possibilité de changement de direction de propagation de la fissure la chargement, appelé aussi branchement de la fissure. En générale, en présence de branchement, sous chargement constant, l'énergie total Π ne dépend pas seulement de la longueur de fissure l , mais aussi d'un angle α qui représente la direction de propagation

$$\Pi = \Pi(l, \alpha) \quad (\text{B.3})$$

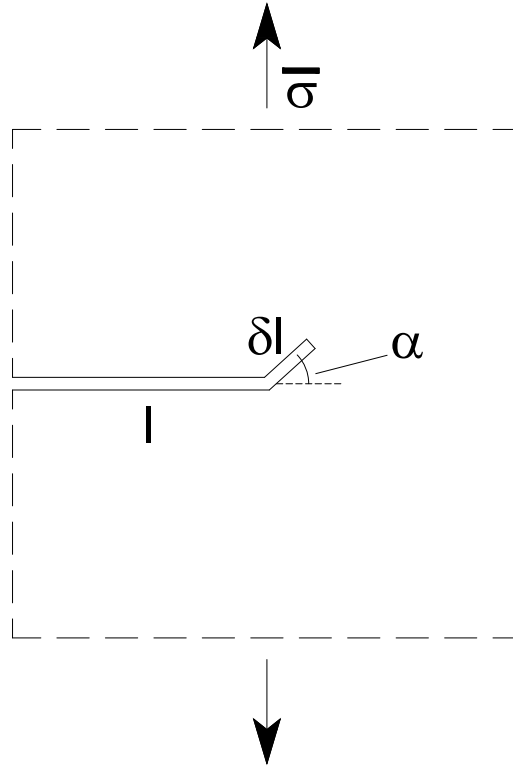


FIGURE B.2 – Branchement de la fissure.

Dans le cadre de l'extension de la théorie de Griffith, [Erdogan and Sih \(1963\)](#) a proposé une critère pour prédire la direction de propagation de fissure.

Hypothèse de [Erdogan and Sih \(1963\)](#) s'écrit : La fissure se développera dans la direction dans laquelle la variation de l'énergie totale par une unité de longueur d'avancement de fissure sera minimum et la fissure commencera à croître lorsque cela lui permet de minimiser son énergie totale.

D'après cette hypothèse, la fissure commence à se propager dans la direction $\alpha = \alpha_0$, sous une unité de longueur d'avancement dl , si elle satisfait deux conditions :

- $\Pi(l + dl, \alpha_0) \leq \Pi(l, \alpha_0)$.
- $\delta\Pi = \Pi(l + dl, \alpha_0) - \Pi(l, \alpha_0)$ est maximale $\forall \alpha \in [-\pi, \pi]$.

Notre étude dans la section 3.6.1 repose sur l'hypothèse de [Erdogan and Sih \(1963\)](#) : le mode de propagation de la fissure choisi est lié à la valeur minimale de la variation de l'énergie totale $\delta\Pi(\beta_1, \beta_2)$ lors d'une unité de longueur d'avancement $\delta\theta$, où $\delta\beta_1 + \delta\beta_2 = \delta\theta$.

Bibliographie

- Abou-Chakra Guéry, A., 2007. Contributions à la modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l'argilite du callovo-oxfordien. Ph.D. thesis, Lille 1.
- Abou-Chakra Guéry, A., Cormery, F., Shao, J.-F., Kondo, D., 2009. A multiscale modeling of damage and time-dependent behavior of cohesive rocks. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 33 (5), 567–589.
- Anderson, T. L., 2017. *Fracture mechanics : fundamentals and applications*. CRC press.
- Andra, 1999. *Referentiel geologique du site de meuse/haute-marne*.
- Banks-Sills, L., Ashkenazi, D., 2000. A note on fracture criteria for interface fracture. *International Journal of Fracture* 103 (2), 177–188.
- Barthélémy, J.-F., 2009. Compliance and hill polarization tensor of a crack in an anisotropic matrix. *International Journal of Solids and Structures* 46 (22-23), 4064–4072.
- Benveniste, Y., 1985. The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mechanics of Materials* 4 (2), 197–208.
- Benveniste, Y., 1987. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of materials* 6 (2), 147–157.
- Benveniste, Y., Dvorak, G., Chen, T., 1991. On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (7), 927–946.
- Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., 2001. *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*.
- Bornert, M., Vales, F., Gharbi, H., Nguyen Minh, D., 2010. Multiscale full-field strain measurements for micromechanical investigations of the hydromechanical behaviour of clayey rocks. *Strain* 46 (1), 33–46.
- Brace, W., 1960. An extension of the griffith theory of fracture to rocks. *Journal of Geophysical Research* 65 (10), 3477–3480.

- Brommundt, J., Kaempfer, T. U., Enssle, C., Mayer, G., Wendling, J., 2014. Full-scale 3d modelling of a nuclear waste repository in the callovo-oxfordian clay. part 1 : thermo-hydraulic two-phase transport of water and hydrogen. Geological Society, London, Special Publications 400 (1), 443–467.
- Budiansky, B., O'connell, R. J., 1976. Elastic moduli of a cracked solid. *International journal of Solids and structures* 12 (2), 81–97.
- Cao, H., Evans, A., 1989. An experimental study of the fracture resistance of bimaterial interfaces. *Mechanics of materials* 7 (4), 295–304.
- Castañeda, P. P., Willis, J. R., 1995. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43 (12), 1919–1951.
- Castelli, M., Scavia, C., 2004. Fracture mechanics approach to the study of failure in rock. *Revue française de génie civil* 8 (5-6), 653–682.
- Charalambides, M., Kinloch, A., Wang, Y., Williams, J., 1992. On the analysis of mixed-mode failure. *International Journal of Fracture* 54 (3), 269–291.
- Chateau, X., Dormieux, L., 1998. Approche micromécanique du comportement d'un milieu poreux non saturé. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy* 326 (9), 533–538.
- Chiarelli, A.-S., Shao, J.-F., Hoteit, N., 2003. Modeling of elastoplastic damage behavior of a claystone. *International Journal of plasticity* 19 (1), 23–45.
- Comninou, M., 1977. The interface crack. *Journal of Applied Mechanics* 44 (4), 631–636.
- Comninou, M., 1978. The interface crack in a shear field. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics* 45, 287–290.
- Comninou, M., Schmueser, D., 1979. The interface crack in a combined tension-compression and shear field. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics* 46, 345–348.
- Coulomb, C., 1776. Remarque sur la rupture des corps. *Mémoire présenté par divers savants à l'Académie* Vol. 7.
- Deude, V., Dormieux, L., Kondo, D., Maghous, S., 2002. Micromechanical approach to nonlinear poroelasticity : application to cracked rocks. *Journal of engineering mechanics* 128 (8), 848–855.
- Deudé, V., Dormieux, L., Kondo, D., Pensée, V., 2002. Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré. *Comptes Rendus Mécanique* 330 (8), 587–592.
- Dormieux, L., Kondo, D., 2007. Micromechanics of damage propagation in fluid-saturated cracked media. *Revue Européenne de Génie Civil* 11 (7-8), 945–962.

- Dormieux, L., Kondo, D., Ulm, F.-J., 2006a. A micromechanical analysis of damage propagation in fluid-saturated cracked media. *Comptes Rendus Mecanique* 334 (7), 440–446.
- Dormieux, L., Kondo, D., Ulm, F.-J., 2006b. *Microporomechanics*. John Wiley & Sons.
- Dormieux, L., Molinari, A., Kondo, D., 2002. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (10), 2203–2231.
- Dundurs, J., 1988. The interface crack under combined loading. *Journal of Applied Mechanics* 55, 581.
- England, A., 1965. A crack between dissimilar media. *J. appl. Mech* 32 (2), 400–402.
- Erdogan, F., 1965. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Journal of Applied Mechanics* 32 (2), 403–410.
- Erdogan, F., Sih, G., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of basic engineering* 85 (4), 519–525.
- Eshelby, J. D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 241 (1226), 376–396.
- García, I., Mantič, V., Graciani, E., 2015. Debonding at the fibre–matrix interface under remote transverse tension. one debond or two symmetric debonds? *European Journal of Mechanics-A/Solids* 53, 75–88.
- Gautesen, A., Dundurs, J., 1987. The interface crack in a tension field. *Journal of Applied Mechanics* 54 (1), 93–98.
- Giraud, A., Huynh, Q. V., Hoxha, D., Kondo, D., 2007. Effective poroelastic properties of transversely isotropic rock-like composites with arbitrarily oriented ellipsoidal inclusions. *Mechanics of Materials* 39 (11), 1006–1024.
- Giraud, A., Sevostianov, I., 2013. Micromechanical modeling of the effective elastic properties of oolitic limestone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 62, 23–27.
- Griffith, A. A., 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221, 163–198.
- Hashin, Z., 1983. Analysis of composite materials—a survey. *Journal of Applied Mechanics* 50 (3), 481–505.
- Hashin, Z., 1988. The differential scheme and its application to cracked materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 36 (6), 719–734.

- Hellmich, C., Barthélémy, J.-F., Dormieux, L., 2004. Mineral–collagen interactions in elasticity of bone ultrastructure—a continuum micromechanics approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 23 (5), 783–810.
- Hill, R., 1963. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (5), 357–372.
- Hill, R., 1965. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (4), 213–222.
- Hoenig, A., 1979. Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *International Journal of Solids and Structures* 15 (2), 137–154.
- Horii, H., Nemat-Nasser, S., 1983. Overall moduli of solids with microcracks : load-induced anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31 (2), 155–171.
- Hutchinson, J. W., Suo, Z., 1991. Mixed mode cracking in layered materials. In : *Advances in applied mechanics*. Vol. 29. Elsevier, pp. 63–191.
- Huynh, Q. V., 2006. Estimation des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des méthodes d’homogénéisation. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Irwin, G. R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of applied mechanics* 24 (3), 361–364.
- Janssen, M., Zuidema, J., Wanhill, R., 2004. *Fracture mechanics : Fundamentals and applications*.
- Kachanov, L., 2013. *Introduction to continuum damage mechanics*. Vol. 10. Springer Science & Business Media.
- Kachanov, M., 1992. Effective elastic properties of cracked solids : critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews* 45 (8), 304–335.
- Kachanov, M., 1993. Elastic solids with many cracks and related problems. In : *Advances in applied mechanics*. Vol. 30. Elsevier, pp. 259–445.
- Laws, N., 1975. On interfacial discontinuities in elastic composites. *Journal of Elasticity* 5 (3-4), 227–235.
- Laws, N., 1985. A note on penny-shaped cracks in transversely isotropic materials. *Mechanics of Materials* 4 (2), 209–212.
- Leblond, J.-B., Germain, P., 2003. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès science publications.
- Leguillon, D., 2002. Strength or toughness ? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 21 (1), 61–72.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Germain, P., 1985. *Mécanique des matériaux solides*. Vol. 2. Dunod Paris.

- Liechti, K., Chai, Y., 1992. Asymmetric shielding in interfacial fracture under in-plane shear. *Journal of applied mechanics* 59 (2), 295–304.
- Malyshev, B., Salganik, R., 1965. The strength of adhesive joints using the theory of cracks. *International Journal of Fracture* 1 (2), 114–128.
- Manti, V., Blázquez, A., Correa, E., París, F., et al., 2005. Analysis of interface cracks with contact in composites by 2d bem. *WIT Transactions on State-of-the-art in Science and Engineering* 21.
- Mantič, V., 2009. Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. application of a coupled stress and energy criterion. *International journal of Solids and Structures* 46 (6), 1287–1304.
- Markenscoff, X., Dascalu, C., 2012. Asymptotic homogenization analysis for damage amplification due to singular interaction of micro-cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60 (8), 1478–1485.
- Martin, P., 2001. The spherical-cap crack revisited. *International journal of solids and structures* 38 (26-27), 4759–4776.
- Martynenko, M., 1983. The axisymmetric problem for an elastic medium with a spherical inclusion, weakened by a crack on an interphase boundary. In : *Dokl. Akad. Nauk USSR, Ser. A. Vol. 7.* pp. 39–44.
- Martynenko, M., Lebedyeva, I., 2006. Axisymmetric problem for a spherical crack on the interface of elastic media. *Journal of engineering mathematics* 56 (4), 371–384.
- Martynenko, M., Ulitko, A., 1978. Stress state near the vertex of a spherical notch in an unbounded elastic medium. *International Applied Mechanics* 14 (9), 911–918.
- Milne-Thomson, L. M., 1968. *Plane elastic systems.* Vol. 6. Springer.
- Mohajerani, M., 2011. Etude expérimentale du comportement thermo-hydro-mécanique de l'argilite du callovo-oxfordien. Ph.D. thesis.
- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica* 21 (5), 571–574.
- Mura, T., 2013. *Micromechanics of defects in solids.* Springer Science & Business Media.
- Muskhelishvili, N. I., 1953. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Noordhoff, Groningen, The Netherlands.
- Pensée, V., 2002. Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par mésolfissuration. Ph.D. thesis, Lille 1.
- Pensée, V., Kondo, D., Dormieux, L., 2002. Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics* 128 (8), 889–897.

- Perlman, A., Sih, G., 1967. Elastostatic problems of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials. *International Journal of Engineering Science* 5 (11), 845–867.
- Pouya, A., 2015. A finite element method for modeling coupled flow and deformation in porous fractured media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 39 (16), 1836–1852.
- Prasad, P., Simha, K., 2002. Interactions of interfacial arc cracks. *International Journal of Fracture* 117 (1), 39–62.
- Prasad, P., Simha, K., 2003. Interface crack around circular inclusion : Sif, kinking, debonding energetics. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2), 285–307.
- Prokhorova, N., Solov'ev, I. I., 1976. Axisymmetric problem for an elastic space with a spherical cut : Pmm vol. 40, n 4, 1976, pp. 692–698. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 40 (4), 640–646.
- Raju, I., Crews, J., Aminpour, M., 1988. Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite laminates. *Engineering fracture mechanics* 30 (3), 383–396.
- Rice, J., 1988. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech. (Trans. ASME)* 55 (1), 98–103.
- Rice, J., Sih, G. C., 1965. Plane problems of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics* 32 (2), 418–423.
- Robinet, J.-C., Sardini, P., Coelho, D., Parneix, J.-C., Prêt, D., Sammartino, S., Boller, E., Altmann, S., 2012. Effects of mineral distribution at mesoscopic scale on solute diffusion in a clay-rich rock : Example of the callovo-oxfordian mudstone (bure, france). *Water Resources Research* 48 (5).
- Schjødt-Thomsen, J., Pyrz, R., 2001. The mori–tanaka stiffness tensor : diagonal symmetry, complex fibre orientations and non-dilute volume fractions. *Mechanics of Materials* 33 (10), 531–544.
- Shih, C., 1991. Cracks on bimaterial interfaces : elasticity and plasticity aspects. *Materials Science and Engineering : A* 143 (1-2), 77–90.
- Sun, C., Jin, Z., 2012. *Fracture mechanics*. Academic Press, Boston.
- Sun, C., Qian, W., 1997. The use of finite extension strain energy release rates in fracture of interfacial cracks. *International Journal of Solids and Structures* 34 (20), 2595 – 2609.
- Sun, C. T., Jih, C., 1987. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Engineering Fracture Mechanics* 28 (1), 13–20.
- Talreja, R., 2016. Physical modelling of failure in composites. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 374 (2071), 20150280.

- Tan, H., Huang, Y., Liu, C., Geubelle, P. H., 2005. The mori–tanaka method for composite materials with nonlinear interface debonding. *International Journal of Plasticity* 21 (10), 1890–1918.
- Thompson, M., Willis, J., 1991. A reformation of the equations of anisotropic poroelasticity. *Journal of Applied Mechanics* 58 (3), 612–616.
- Toya, M., 1974. A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 22 (5), 325–348.
- Toya, M., 1992. On mode i and mode ii energy release rates of an interface crack. *International journal of fracture* 56 (4), 345–352.
- Walsh, J., 1965a. The effect of cracks on the compressibility of rock. *Journal of Geophysical Research* 70 (2), 381–389.
- Walsh, J., 1965b. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks. *Journal of Geophysical Research* 70 (2), 399–411.
- Weißgraeber, P., Leguillon, D., Becker, W., 2016. A review of finite fracture mechanics : crack initiation at singular and non-singular stress raisers. *Archive of Applied Mechanics* 86 (1-2), 375–401.
- Williams, M., 1959. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the seismological society of America* 49 (2), 199–204.
- Zaoui, A., 2000. Matériaux hétérogènes et composites : majeure de mécanique, option matériaux et structures : promotion 1998, majeure 1, 2e année. École polytechnique.
- Zaoui, A., 2002. Continuum micromechanics : survey. *Journal of Engineering Mechanics* 128 (8), 808–816.
- Zheng, Q.-S., Du, D.-X., 2001. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49 (11), 2765–2788.
- Zhu, Q.-Z., Kondo, D., Shao, J.-F., 2009. Homogenization-based analysis of anisotropic damage in brittle materials with unilateral effect and interactions between microcracks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 33 (6), 749–772.
- Zimmerman, R. W., 1985. The effect of microcracks on the elastic moduli of brittle materials. *Journal of Materials Science Letters* 4 (12), 1457–1460.
- Ziuzin, V., Mossakovskii, V., 1970. Axisymmetric loading of a space with a spherical cut : *Pmm* vol. 34, n 1, 1970, pp. 179–183. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 34 (1), 172–177.