



**HAL**  
open science

# Comportement mécanique et dégradation d'une voie ferrée en tunnel

Tien Hoang

► **To cite this version:**

Tien Hoang. Comportement mécanique et dégradation d'une voie ferrée en tunnel. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2017. Français. NNT : 2017PESC1104 . tel-02918108

**HAL Id: tel-02918108**

**<https://pastel.hal.science/tel-02918108v1>**

Submitted on 20 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS-EST  
École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement

**THÈSE**

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST**

Présentée par

**Tien HOANG**

Titre

---

**COMPORTEMENT MÉCANIQUE ET DÉGRADATION  
D'UNE VOIE FERRÉE EN TUNNEL**

---

Soutenue le 19 janvier 2017 devant le jury composé de

Fekri Meftah	INSA de Rennes	Président du jury
Geert Degrande	Université de Louvain	Rapporteur
Christophe Petit	Université de Limoges	Rapporteur
Jean-Luc Pochet	Eurotunnel Group	Examineur
Denis Duhamel	Ecole des Ponts ParisTech	Directeur de thèse
Gilles Foret	Ecole des Ponts ParisTech	Co-directeur de thèse



## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, les Professeurs Denis Duhamel et Gilles Foret, pour la confiance qu'ils m'ont accordé en me permettant de travailler sur ce sujet de thèse. Leur soutien et leurs conseils m'ont beaucoup aidé en particulier pendant mes moments de doute et d'incertitude. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes plus sincères remerciements vont également au Professeur Alain Ehrlacher. Son expérience, sa clarté d'esprit et ses qualités humaines m'ont été d'un précieux recours lorsque j'ai pris la décision de commencer une thèse.

Je tiens à remercier vivement l'équipe d'Eurotunnel Maintenance (Jean-Luc Pochet, Patrick Joyez, Raphaël Caby, Clotilde Boudon, Francis Sabatier) sans qui ce travail n'aurait certainement pas pris la forme actuelle. Les nombreuses et diverses discussions que nous avons eues ont été fort utiles. Je remercie tout particulièrement Monsieur Jean-Luc Pochet pour avoir accepté de participer à mon jury.

J'exprime aussi ma sincère reconnaissance aux Professeurs Fekri Meftah (INSA de Rennes), Geert Degrande (Université de Louvain) et Christophe Petit (Université de Limoges) qui ont accepté de juger ce travail et d'en être le président et les rapporteurs.

Je tiens à remercier également les personnes du Laboratoire Navier qui m'ont accueilli chaleureusement au laboratoire (Karam Sab, Marie-Françoise Kaspi) et qui ont participé à l'encadrement de ma thèse (Gwendal Cumunel, Hai-Ping Yin). Ma gratitude va aussi à Madame Françoise Preteux (Directrice de la recherche à l'ENPC) et à Monsieur Gégard Mozelle qui m'ont encouragé sur la démarche de dépôt de brevet menée dans le cadre de ce travail.

En fin, j'exprime ma gratitude à mes parents et mes beaux-parents pour m'avoir supporté et encouragé. Merci à ma petite famille pour avoir suivi cette aventure.



## Résumé

Les voies ferrées n'ont cessé d'évoluer depuis l'apparition du premier rail en fer laminé (1789). Les traverses en bois laissent maintenant place à des traverses en béton alors que dans certains pays et dans les tunnels, le ballast est remplacé par des dalles continues en béton armé ou non. Ce type de voie nécessite cependant l'intégration de systèmes supports de rails permettant d'assurer le confort des passagers. Le système "low vibration track" développé par la société Sonnevile fait partie de ce type de système. Il se compose d'un blochet en béton reposant sur une semelle micro-cellulaire le tout étant intégré dans un "chausson" en caoutchouc noyé dans la dalle en béton non armé. Ce système équipe aujourd'hui un peu plus de 1100 km de voies de par le monde dont les voies du tunnel sous la Manche, tunnel ayant la section sous-marine la plus longue du monde.

Ce travail rentre dans le cadre de la chaire de recherche commune à l'Ecole des Ponts ParisTech et au groupe Eurotunnel et s'intéresse, d'une part à l'étude du comportement dynamique et, d'autre part à la dégradation de la voie ferroviaire du tunnel sous la Manche.

La première partie de ce travail présente les modèles existants appliqués aux voies ballastées et propose de développer des modèles pour les voies non ballastées. En utilisant une condition périodique en régime stationnaire, on démontre que la distribution des efforts sur les systèmes supports est gouvernée par une relation caractéristique qui ne dépend pas du comportement des supports. Ce résultat permet de proposer un "système équivalent" de la voie représenté par un ressort caractérisé par sa rigidité et une pré-force qui ne dépendent que des caractéristiques du rail et du chargement. Ce modèle analytique permet alors de calculer rapidement la réponse dynamique de la voie quel que soit le comportement des supports (linéaires ou non linéaires), ce modèle ayant été validé par confrontation avec les résultats des mesures réalisées en tunnel. Ce modèle a enfin été développé pour une voie dont les supports présentent des propriétés mécaniques différentes (supports sains ou endommagés) et a été implanté dans un logiciel (logiciel "**EuroAnalyse**") qui permet de calculer la réponse dynamique de la voie en intégrant l'évolution des caractéristiques mécaniques de la voie.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'endommagement des blochets en béton du système support. La première phase de cette étude porte sur la compréhension de ces endommagements à l'aide d'une modélisation éléments finis 3D du blochet, la seconde étant consacrée à la mise au point d'une méthode d'identification de ces endommagements en tunnel. Pour ce faire, ce travail met expérimentalement en évidence l'existence d'une variation des deux premières fréquences propres et du coefficient d'amortissement des blochets en fonction de leur état de dégradation. Les mesures sur blochet montrent en effet qu'il existe une corrélation entre l'état de dégradation des blochets et leur signature vibratoire, ces mesures étant en accord avec les calculs éléments finis effectués. La méthode de mesure des fréquences propres basée sur l'analyse modale a été implantée dans un logiciel (logiciel "**EuroDetection**") qui fera partie intégrante du système automatique de détection des endommagements des blochets en tunnel que la société Eurotunnel utilisera dans le cadre de ses campagnes de maintenance de la voie.



## Abstract

Railways have been evolving since the onset of the first rail rolled iron (1789). Wooden sleepers now give way to concrete sleepers while in some countries and commonly in tunnels ballast is replaced by continuous concrete slabs. This type of track, however, requires the integration of rail supports systems to ensure passenger comfort. The "low vibration track" (LVT) system developed by the company Sonnevile is such a system. It contains a concrete block based on a micro-cellular pad all integrated in a rubber boot embedded in the slab of unreinforced concrete. This system today covers more than 1100km of railway track around the world, including the Channel tunnel.

This work takes place within the framework of joint research between Ecole des Ponts ParisTech and the Eurotunnel group, that investigates the railway dynamic behavior and the support system degradation in the Channel tunnel.

The first part of this work presents existing models for ballasted tracks and proposes extended models for non-ballasted tracks. Using a periodic condition of the railway track in steady state it can be shown that the distribution of loads on the support systems is governed by a characteristic relation that does not depend on the support behavior. This result allows us to offer an equivalent system represented by a preloaded spring. This analytical model is then used to calculate the dynamic response of the track by combining with support behavior (linear or nonlinear). This model has been validated by comparison with measurement data in the Channel tunnel. Lastly, a model is presented for a track whose supports have different properties. This model allows rapid calculation of track leveling due to support damage and has been integrated into the new software "**EuroAnalyse**".

The second part of this work deals with the degradation of the LVT concrete block. Firstly, the research focuses on the damage mechanism by calculating the block stress with the help of the finite element method. The result shows that the concrete experiences tension stresses which can lead to damage by fatigue loads. Secondly, a method of identification is developed to monitor the concrete blocks in a tunnel. We show that the eigen frequencies of the block depend on its damage level and this is demonstrated by data and simulations. The method of measuring the eigen frequencies based on modal analysis has been integrated into the software "**EuroDetection**" which will be part of the track monitoring system for Eurotunnel.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralité sur la voie ferrée dans le tunnel sous la Manche</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Composants constituant de la voie dans le tunnel	6
1.3 Comportement d'un système LVT	9
1.3.1 Caractérisation des composants élastiques	9
1.3.2 Comportement statique et dynamique en condition de laboratoire	10
1.3.3 Schéma du modèle mécanique	10
1.4 Dynamique d'une voie ferroviaire non-ballastée	12
1.4.1 Réponse d'un système LVT au passage des trains	12
1.4.2 Contrôle géométrique d'une voie ferrée	13
1.4.3 Modélisation dynamique d'une voie ferrée	14
1.5 Dégradation d'un système LVT de voie sans ballast	16
1.5.1 Comportement du béton	16
1.5.2 Fatigue du béton	18
1.6 Méthodes de détection d'endommagement	22
1.6.1 Détection de l'endommagement en utilisant la méthode de l'analyse modale	24
1.6.2 Analyse modale d'une traverse de voie ballastée	24
1.7 Conclusion	25
<b>I Comportement mécanique d'une voie ferrée non-ballastée</b>	<b>27</b>
<b>2 Modèle mécanique de voies ferrées homogènes</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction	29
2.1.1 Modélisation dynamique d'une voie ferrée	29
2.1.2 Comportement mécanique d'un système LVT	31
2.2 Modèles pour la voie ferrée homogène	33
2.2.1 Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli	34
2.2.2 Modèle de poutre de Timoshenko	37
2.2.3 Système équivalent d'une poutre périodiquement supportée	42
2.3 Application aux voies du tunnel sous la Manche	45
2.3.1 Influence du modèle de poutre	45
2.3.2 Comparaison mesure et modèle	46
2.4 Autres modèles de voie homogène	48
2.4.1 Réponse au passage d'un train	48
2.4.2 Modèle de voie dans la direction longitudinale	50

2.5	Modèles de voie homogène non-linéaire . . . . .	53
2.5.1	Support non-linéaire à un degré de liberté . . . . .	53
2.5.2	Support non-linéaire à deux degrés de liberté . . . . .	56
2.6	Conclusion . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Comportement mécanique d'une voie ferrée non-homogène</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Modèle dynamique pour voie non-homogène . . . . .	66
3.2.1	Supports linéaires non-identiques . . . . .	66
3.2.2	Équation dynamique . . . . .	68
3.3	Calcul des réponses . . . . .	70
3.3.1	Méthode directe . . . . .	70
3.3.2	Méthode itérative . . . . .	71
3.3.3	Applications numériques . . . . .	72
3.4	Comportement dynamique d'une voie dégradée . . . . .	75
3.4.1	Dégradation de l'ensemble des supports . . . . .	76
3.4.2	Dégradation d'une zone de supports . . . . .	79
3.4.3	Influence du taux de remplacement des supports de voie réparée . . . . .	82
3.4.4	Mécanisme de la propagation de l'endommagement . . . . .	84
3.5	Introduction au logiciel EuroAnalyse . . . . .	84
3.5.1	Fonctions principales . . . . .	85
3.5.2	Utilisation du logiciel . . . . .	86
3.6	Conclusion . . . . .	88
<b>II</b>	<b>Dégradation d'un support de voie non-ballastée</b>	<b>89</b>
<b>4</b>	<b>Dégradation d'un système LVT pour voie non-ballastée</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	91
4.2	Dégradation d'un système LVT . . . . .	92
4.2.1	Dégradation des composants élastomères . . . . .	92
4.2.2	Dégradation du blochet . . . . .	94
4.3	Caractérisation des matériaux du système . . . . .	95
4.3.1	Essais de compression réalisés à Eurotunnel en 2005 . . . . .	95
4.3.2	Essais de traction-compression réalisés en laboratoire . . . . .	99
4.3.3	Mesure par émission acoustique . . . . .	102
4.4	Calcul des contraintes . . . . .	105
4.4.1	Modèle 3D du système LVT . . . . .	105
4.4.2	Résultats et analyses . . . . .	107
4.5	Dégradation d'un blochet par la fatigue . . . . .	110
4.5.1	Application des lois empiriques de la fatigue du béton . . . . .	110
4.6	Conclusion . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Détection de l'endommagement des blochets</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Mesure de la réponse vibratoire des blochets . . . . .	114
5.2.1	Matériels et dispositif de mesure . . . . .	114
5.2.2	Enregistrement et traitement des signaux . . . . .	115
5.2.3	Résultats des mesures en condition libre . . . . .	116
5.3	Calcul des fréquences propres des blochets . . . . .	120

5.3.1	Modèle 3D du blochet . . . . .	120
5.3.2	Fissuration d'un blochet . . . . .	123
5.3.3	Classification de l'endommagement des blochets . . . . .	124
5.4	Base de données expérimentale des blochets usés . . . . .	129
5.4.1	Méthode de mesure . . . . .	130
5.4.2	Traitement des données . . . . .	130
5.5	Influence des conditions externes . . . . .	133
5.5.1	Mesure des fréquences d'une portion de voie . . . . .	133
5.5.2	Mesure et excitation directe . . . . .	134
5.5.3	Validation par mesures in situ . . . . .	137
5.6	Système de surveillance des blochets . . . . .	138
5.6.1	Introduction au logiciel EuroDetection . . . . .	139
5.6.2	Fonctions principales . . . . .	139
5.7	Conclusion . . . . .	142
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>143</b>
	Contexte industriel . . . . .	143
	Contributions scientifiques . . . . .	143
	Perspectives et discussions . . . . .	145
	Publications et communications . . . . .	146



# Introduction

## 20ans sous la Manche

Le douze février 1986, le traité de Cantorbéry est signé par les ministres des affaires étrangères français et britannique pour "la construction et l'exploitation d'une liaison fixe transmanche par des sociétés privées concessionnaires". Une frontière terrestre séparera désormais la France et le Royaume-Uni dans le tunnel sous la Manche. Un rêve vieux de deux siècles peut enfin devenir réalité<sup>1</sup>.

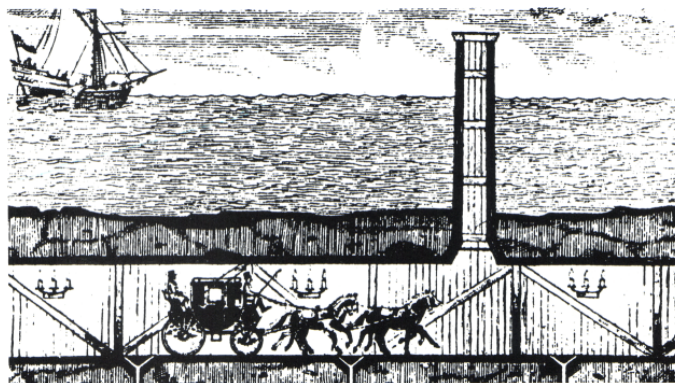


FIGURE 1 – Projet d'Albert Mathieu-Favier d'un tunnel sous la Manche, 1802

Le 6 mai 1994 le premier Shuttle emprunte le tunnel sous la Manche dans le cadre de l'inauguration officielle du tunnel. Avec une section sous-marine de près de 38 km, le tunnel sous la Manche est le plus long tunnel jamais réalisé sous la mer. Les trois tunnels, longs de 50 km chacun, ont été forés à une profondeur de 40 mètres sous le fond de la Manche et relient Coquelles, dans le Calaisis, à Folkestone, dans le Kent. Exploitées par la société franco-britannique Eurotunnel, les circulations ferroviaires dans les tunnels sont assurées par deux voies monodirectionnelles qui utilisent un système "low vibration track" (LVT) sans ballast. Ce système, développé par la société suisse Sonneville, équipe aujourd'hui un peu plus de 1100km de voie de par le monde dont trois des quatre tunnels ferroviaires les plus longs au monde.

Le 6 juin 2014, à l'occasion de la célébration du 20ème anniversaire de l'inauguration du tunnel sous la Manche, Eurotunnel a annoncé des résultats d'exploitation confortant ainsi la décision prise le 12/02/1986 : 330 millions de voyageurs, plus de 65 millions véhicules, plus de 250 millions tonnes de marchandises. Le tunnel sous la Manche est classé à la première place de la liste des Sept Merveilles du monde moderne par l'American Society of Civil Engineering, cette liste consacrant les monuments du XXème siècle et faisant directement référence aux sept merveilles du monde antique<sup>1</sup>.

1. J. Gounon et al., *20 ans sous la Manche*, Editions SW Télématique, 2014

## Coopération ENPC – Eurotunnel

Le 31 janvier 2013 Eurotunnel et l'Ecole des Ponts ParisTech ont signé un accord de partenariat portant sur la création d'une chaire d'enseignement et de recherche intitulée "Science pour le transport ferroviaire" dans le but de développer un partenariat scientifique dédié à l'étude de l'activité ferroviaire dans son ensemble.

Ce travail rentre dans le cadre de cette coopération et porte sur la compréhension du comportement mécanique de la voie et des mécanismes de dégradation du système de support LVT. Ce système est composé de deux blochets indépendants reposant dans des chaussons en caoutchouc, d'une semelle sous rail et d'une semelle micro-cellulaire sous blochet. Une fois les rails mis en place, les chaussons ont été noyés dans le béton (non armé) de la voie (voir la figure ci-dessous).

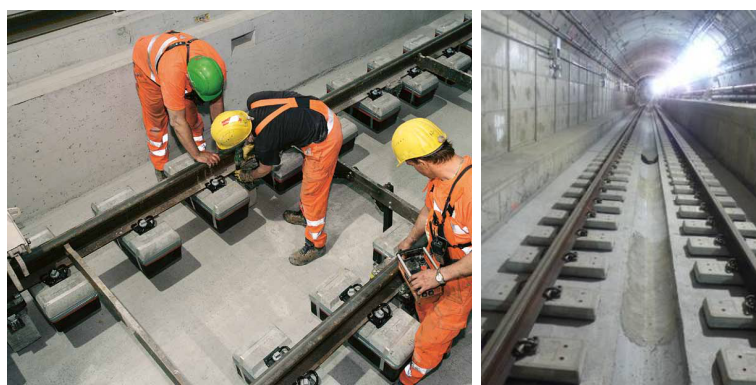


FIGURE 2 – Système de support sans ballast LVT (photo source : Sonneville.com)

Le vieillissement des voies du tunnel sous la Manche dû au trafic important implique le remplacement de certains éléments du système LVT (chaussons, semelle micro cellulaire, blochets, béton érodé autour de certains blochets). Le remplacement de ces différents éléments rentre dans le cadre de la maintenance classique des voies ferroviaires. Cependant, Eurotunnel dispose de peu d'éléments pour optimiser cette maintenance, les voies étant de conception récente. D'autre part, le remplacement de ces éléments (blochets et chaussons en particulier) pourrait aussi s'avérer complexe. Il est donc nécessaire d'établir les modes d'endommagement et la vitesse de vieillissement de ces éléments afin d'adapter au mieux la maintenance de la voie et ainsi prolonger au maximum sa durée de vie.

L'objectif de cette thèse est de proposer une méthode opérationnelle en tunnel capable de détecter les endommagements des supports et d'en analyser les conséquences sur le comportement de la voie afin d'optimiser les travaux de maintenance de la voie. Les travaux de thèse sont à la fois numériques et expérimentaux. Des simulations ont été effectuées à l'aide de méthodes analytique et numérique pour modéliser le comportement dynamique d'une portion de voie constituée d'un rail rattaché aux blochets sous charge roulante. Ce modèle de comportement dynamique de voie a été validé par des essais in situ. A partir de ce modèle de comportement de voie, nous avons analysé les modes de dégradation principaux de la voie en fonction de la nature et du nombre de cycles de chargement. Les résultats de ces calculs permettent d'analyser d'éventuelles concentrations de contrainte responsables de dégradations observées. En parallèle, une méthode expérimentale a été développée pour détecter les endommagements. Cette méthode se doit d'être non-destructive et d'une mise en œuvre rapide pour pouvoir s'appliquer dans le tunnel dans le cadre des opérations de maintenance.

## Structure du mémoire

Ce mémoire est composé de cinq chapitres. Le premier chapitre présente des généralités sur la voie du tunnel sous la Manche. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés à l'étude du comportement dynamique de la voie. Les chapitres 4 et 5 traitent quant à eux de la dégradation des systèmes de supports de voie.

Précisément, le chapitre 1 présente la voie dans le tunnel sous la Manche avec son système de supports sans ballast. Nous présentons aussi dans ce chapitre les essais et les mesures des caractéristiques statiques et dynamiques des composants de la voie effectués dans le tunnel en 2005. Ce chapitre présente en dernier lieu une synthèse bibliographique portant d'une part sur la dynamique d'une voie ferroviaire et d'autre part, sur l'endommagement des structures en béton et plus particulièrement le comportement en fatigue du béton et les méthodes d'identification des fissures.

Le deuxième chapitre détaille les modèles analytiques de voies homogènes (voies avec supports identiques) que l'on trouve dans la littérature. Ces modèles sont développés à partir d'un modèle utilisé pour l'étude des voies ballastées. Ici, nous prenons en compte le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli puis de Timoshenko, un support linéaire puis non-linéaire et enfin d'autres modèles sont considérés. Nous effectuons ensuite la validation des modèles par la comparaison avec les données des mesures réalisées dans le tunnel sous la Manche. Enfin, nous analysons les rôles des paramètres du système de support sur la réponse dynamique de la voie.

Le troisième chapitre présente le modèle analytique qui a été développé pour modéliser les voies non-hogènes. Ce modèle prend donc en compte des supports ayant des comportements différents en utilisant deux méthodes (directe et itérative) pour résoudre le problème posé. Ce modèle est ensuite utilisé pour étudier l'influence des supports endommagés sur la réponse de la voie et de leurs supports voisins. Cette méthode est implantée dans le logiciel **EuroAnalyse** qui permet de calculer rapidement les réponses de la voie lorsque les comportements des supports sont connus et la dernière partie de ce chapitre donne lieu à la présentation du logiciel.

Le quatrième chapitre concerne la dégradation du système support. Nous présentons tout d'abord les essais de caractérisation des matériaux constitutifs du système support réalisés en laboratoire et in situ, puis, une modélisation 3D permettant de calculer les contraintes dans le système. Ce résultat permet d'estimer la durée de vie des blochets en utilisant des lois empiriques de fatigue du béton.

Enfin, le cinquième chapitre présente la méthode d'identification des endommagements par l'analyse modale. Pour cela nous avons utilisé une modélisation par éléments finis pour étudier les modes propres des blochets neufs et fissurés en analysant les variations des fréquences propres en fonction des types et des niveaux d'endommagement. Ce résultat numérique est validé par les mesures des modes propres au laboratoire et en tunnel. Nous présentons en dernier lieu le logiciel **EuroDetection** qui sera utilisé en tunnel pour déterminer le niveau et le type d'endommagement des blochets ainsi que le système mécanique développé pour appliquer de la méthode dans le tunnel.





# Chapitre 1

## Généralité sur la voie ferrée dans le tunnel sous la Manche

### 1.1 Introduction

Le tunnel sous la Manche est constitué de deux tunnels mono-voie et monodirectionnels réservés à la circulation ferroviaires des navettes Eurotunnel et des trains et d'un tunnel de service qui permet l'accès aux opérations de maintenance, de sécurité et à l'évacuation des voyageurs en cas d'incident (voir la figure 1.1). Ce Le tunnel de service est un tunnel routier dans lequel circulent des véhicules électriques et diesel. Il sert également d'accès à la ventilation de l'ensemble de l'ouvrage et il est relié tous les 375 mètres par des galeries de communication.

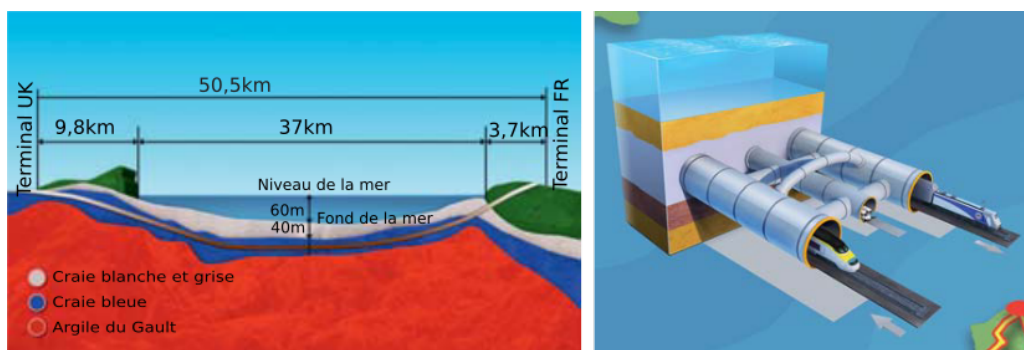


FIGURE 1.1 – Tunnel sous la Manche (photo source : Eurotunnel.com)

Les deux tunnels ferroviaires, de 7.6m de diamètre, sont séparés d'une distance de 30 mètres. Chaque tunnel ferroviaire comprend une seule voie ferrée surplombée par une caténaire et deux trottoirs, l'un réservé aux opérations de maintenance, l'autre plus large prévu pour les besoins d'évacuation en cas d'urgence. Les deux voies sont équipées des systèmes de support sans ballast "low vibration track" (LVT). Ce système a été développé par la société suisse Sonneville et il reste particulièrement adapté à une utilisation en tunnel car conçu pour minimiser les opérations de maintenance.

Les voies du tunnel sous la Manche accumulent les records en termes d'exploitation. Plus de 270 trains y circulent chaque jour, soit un passage toutes les 3 minutes aux heures de pointe. Les navettes camions portent jusqu'à 32 poids-lourds de 44 tonnes chacun. Ces trains de 800 m de long roulent à 140 km/h. A la même vitesse, les navettes passagers transportent jusqu'à 120 voitures et 12 autocars. Les navettes Eurostar circulent quant à

elles 160 km/h.

En raison de ce trafic qui est quasiment le double du trafic d'un réseau ferroviaire habituel, le suivi du vieillissement de la voie est une des priorités de la société Eurotunnel. Cependant, Eurotunnel dispose de peu d'éléments pour optimiser cette maintenance, les voies étant de conception récente. D'autre part, le remplacement de ces éléments pourrait aussi s'avérer complexe. Il est donc nécessaire d'établir le mode et la vitesse de vieillissement de ces différents éléments afin d'adapter au mieux la maintenance de la voie et ainsi prolonger au maximum sa durée de vie.

## 1.2 Composants constituant de la voie dans le tunnel

Le système LVT est composé d'une part d'un blochet en béton et d'une semelle élastique reposant tous les deux dans un chausson en caoutchouc, lui même intégré dans la dalle en béton non armé (voir Figure 1.2). D'autre part, lors de la fixation du rail aux blochets, une semelle élastique est intercalée entre le rail et les blochets. Les deux composants élastiques (semelle sous rail et semelle élastique) sont combinés ensemble selon la spécificité du projet et confèrent au système sa propriété caractéristique d'élasticité à deux étages. Comme pour la structure ballastée, la semelle élastique est destinée à répartir les charges et à réduire les influences des basses fréquences. En revanche, la semelle sous rail protège le système des influences des hautes fréquences.

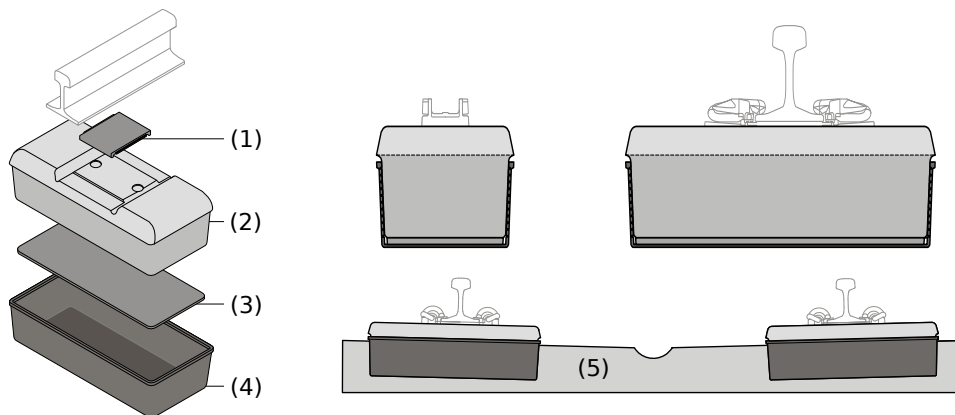


FIGURE 1.2 – Le système LVT et sa mise en place : (1) semelle sous rail, (2) blochet en béton indépendant, (3) semelle élastique, (4) chausson en caoutchouc et (5) dalle béton

La conception du chausson en caoutchouc empêche tout contact entre le blochet et la dalle en béton. De plus, la semelle sous blochet permet d'obtenir une raideur du système très faible sous charge dynamique. Toutes les fonctions nécessaires à la voie sont supportées par le blochet en béton. Ce système permet alors de réduire les exigences en termes de caractéristiques mécaniques du béton de remplissage.

### Le rail

La voie dans le tunnel est constituée de rails Vignole UIC 60 de nuance 90A (voir la figure 1.3). Le support doit permettre de recevoir des rails plus lourds si nécessaire (jusqu'au UIC 68). Les caractéristiques principales des voies sont :

- Écartement de la voie : 1435 mm

- Inclinaison des rails : 1/20e en degré
- Vitesse maximale permise par la voie : 200 km/h
- Vitesse maximale sur voie déviée des appareils : 70 km/h
- Charge maximale à l'essieu : 22.5 tonnes

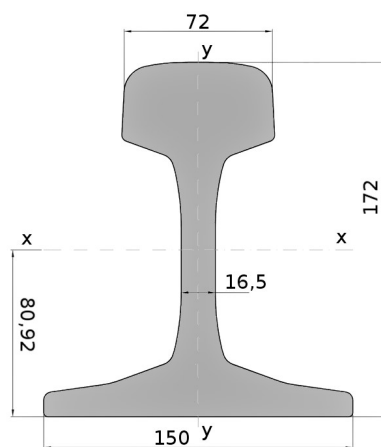


FIGURE 1.3 – La section du rail UIC60

### Le blochet en béton

Le blochet est un bloc en béton armé qui reprend à lui seul presque toute la totalité du poids du système LVT. Cette structure est conçue pour pouvoir supporter à la fois la charge verticale (compression) et la charge horizontale (cisaillement) grâce à l'intégration du blochet dans la dalle. Les caractéristiques géométriques des blochets sont indiquées ci-dessous.

- Longueur de la surface d'appui : 640 mm
- Largeur de la surface d'appui : 264 mm
- Épaisseur sous rail : 200 mm
- Inclinaison de la table de contact avec le rail : 1/20 en degré
- Inclinaison des faces en contact avec le chausson :  $2^{\circ}85$  soit 1/20

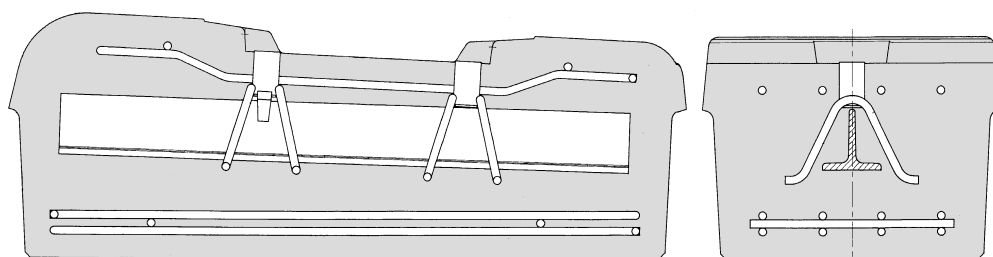


FIGURE 1.4 – Blochet du système LVT

La masse totale du blochet est de 97.5 kg, dont 90 kg de béton et 7.25 kg d'acier. Les renforts sont répartis principalement dans la longueur du blochet avec trois couches de fils d'acier et une barre en forme de "T" qui se trouve au milieu du blochet (voir Figure 1.4). Cette barre joue aussi le rôle d'ancrage des deux inserts permettant la fixation des rails.

Le béton du blochet est de type BHP (béton de haute performance) avec une résistance supérieure à 50 MPa. Les résultats de tests effectués lors de la fabrication sont les suivants :

- Résistance à la compression : 56,1 MPa (7 jours) et 67.5 MPa (28 jours)
- Résistance à la traction : 4,8 MPa(7 jours) et 4.7 MPa (28 jours)

### La semelle sous rail

La semelle sous rail fait partie du premier étage élastique et elle est placée entre le rail et la table du blochet. Aucun contrôle n'est demandé sur ce composant. Cette semelle sous-rail est remplacée à la fréquence correspondant à un trafic équivalent à 700 millions de tonnes de chargement, ce qui correspond aux campagnes de renouvellement de rails classiques.

A l'origine, la semelle sous rail était réalisée en éthylène-acétate de vinyle (EVA) de même que la semelle sous blochet. Elle a été remplacée par de nouvelles semelles de raideur identique à celle d'origine.

### La semelle micro-cellulaire

Elle représente le deuxième étage élastique du système LVT de Sonnevile. Elle est placée sous le blochet et repose sur le chausson qui l'enveloppe.

Cette semelle joue un rôle important dans la répartition des charges sur la dalle. Au contraire de la semelle sous rail, le remplacement de la semelle sous blochet n'est pas prévu et celle-ci doit durer toute la vie du blochet. Cette semelle est en micro-cellular d'éthylène-acétate de vinyle (EVA).

### Le chausson en caoutchouc

Il représente le troisième et dernier étage élastique. Il est placé entre le béton de voie et la semelle micro-cellulaire sous blochet, pour la partie basse du blochet et entre le béton de voie et le blochet au niveau des faces latérales des blochets.

Le chausson est constitué de caoutchouc butadiène-styrène (SBR). Le matériau est constitué au minimum de 50% de SBR en volume.

### Le système d'attache

Cette pièce, à l'origine avec une tête hexagonale, a évolué puisqu'aujourd'hui la tête de vis est rectangulaire pour prendre en compte les besoins du service de maintenance (voir la figure 1.5).

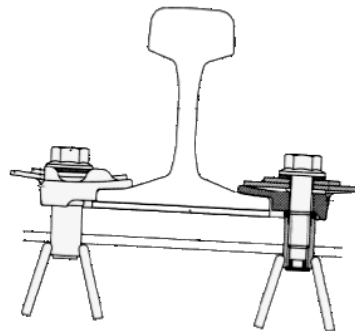


FIGURE 1.5 – Système d'attache du système LVT

## Le remplacement d'un système LVT

Le système LVT est présenté comme un système sans maintenance autre que le changement des rails et des semelles sous rail. Cependant, si la rupture d'un blochet survient, il convient de le remplacer avec la méthode utilisée à ce jour par les services de maintenance d'Eurotunnel qui consiste à :

- Retirer le blochet et ses éléments élastiques,
- Traiter la cavité et nettoyer celle-ci,
- Mettre en place un blochet de remplacement pré-équipé avec chausson et semelle micro-cellulaire,
- Régler de la géométrie,
- Préparer et couler de la résine de coulage,
- Attendre la prise de la résine et remettre en service de la voie.

A noter que l'on distingue les blochets d'origine et les blochets de remplacement. Le blochet de remplacement possède une encoche en partie haute sur sa largeur et ses dimensions sont inférieures de 10 mm pour la largeur et la la longueur et de 5 mm pour la hauteur par rapport au blochet d'origine. Comme pour le blochet, le chausson d'origine et le chausson de remplacement se distinguent par des profils différents en partie haute.

## 1.3 Comportement d'un système LVT

### 1.3.1 Caractérisation des composants élastiques

Pour mesurer les propriétés mécaniques des composants d'un système LVT, des essais ont été réalisés en novembre 2005 au Centre d'Essais Voie IG.EV de la SNCF. Les essais ont eu pour objectifs de déterminer les raideurs statique et dynamique des semelles et leurs coefficients d'amortissement. Pour cela, les essais ont consisté à placer une semelle entre deux plaques métalliques, l'ensemble étant sollicité par un vérin appliquant une force normale suivant deux modes (statique et dynamique) comme le montre la figure 1.6. Les raideurs et les coefficients d'amortissement sont obtenus par acquisition du déplacement et de la force appliquée. Le résultat des essais est présenté dans les tableaux 1.1 et 1.2.

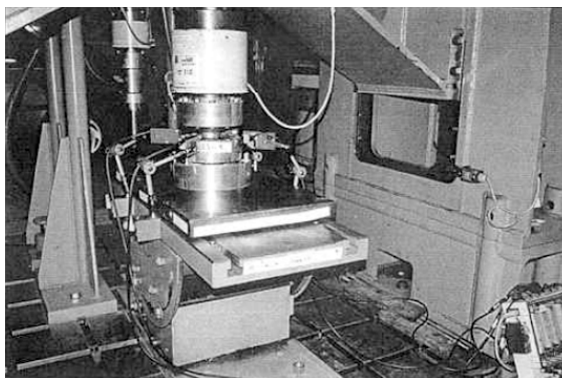


FIGURE 1.6 – Essais statique et dynamique des semelles élastiques

*Semelle sous rail* : Procédure de mesure de la raideur statique de la semelle sous rail :

- Mise en place réalisée par cycles de charge/décharge entre 20 et 95 kN à 5 Hz pendant 5000 cycles
- Relaxation pendant une période d'environ 5 minutes

- Mesure de la raideur statique par chargement continu de 0.5 à 95 kN à la vitesse de 50 kN/mn, palier au chargement maximal durant cinq secondes et déchargement à 50 kN/mn.
- Chargement réalisé trois fois et mesure de la raideur statique entre 30 et 60 kN, 30 et 80 kN, 20 et 95 kN.

Pour la raideur dynamique, la mesure est réalisée à 5 Hz entre 30 et 65 kN, 30 et 80 kN, 20 et 95 kN.

Chargement	kN	30-65	20-95
Raideur statique	MN/m	175	187,5
Raideur dynamique	MN/m	387,9	356,6
Taux d'amortissement	%	4,45	4,51

TABLE 1.1 – Propriétés mécaniques des semelles sous rail

*Semelle sous blochet* : Procédure de mesure de la raideur statique :

- Mise en place réalisée par des cycles charge/décharge entre 7 et 75 kN à 5 Hz pendant 5000 cycles
- Relaxation pendant une période d'environ 5 minutes
- Mesure de la raideur statique par chargement continu de 0.5 à 75 kN à la vitesse de 50kN/mn, palier au chargement maximal durant cinq secondes et déchargement à 50 kN/mn.
- Chargement réalisé trois fois et mesure de la raideur statique entre 10 et 45 kN, 10 et 60 kN, 2.5 et 75 kN.

Pour la raideur dynamique, la mesure est réalisée à 5Hz entre 10 et 45 kN, 10 et 60 kN, 2.5 et 75 kN.

Chargement	kN	10-45	3-75
Raideur statique	MN/m	33	31,44
Raideur dynamique	MN/m	46,55	37,17
Taux d'amortissement	%	4,07	3,93

TABLE 1.2 – Propriétés mécaniques des semelles sous blochet

### 1.3.2 Comportement statique et dynamique en condition de laboratoire

Pour mesurer les paramètres d'un système support complet, on installe ces systèmes dans les conditions réelles et ils sont donc noyés dans la dalle. Deux morceaux de rail sont alors mis en place avec un système d'attache comme le montre la figure 1.7. Les essais d'une voie assemblée ont ainsi été réalisés avec deux types de dispositifs : poutre horizontale et bielle inclinée (de  $26^0$ ). Alors que la poutre horizontale ne transmet que la force verticale, la bielle inclinée applique aussi des forces transversales sur le rail. Ce système permet d'étudier l'effet des forces transversales sur la raideur du support. Le tableau 1.3 montre les résultats des mesures sur la voie assemblée en statique et dynamique.

### 1.3.3 Schéma du modèle mécanique

Pour une force  $F_n$  appliquée sur le système LVT, on peut décomposer cette force en trois composantes dans trois directions (par rapport au rail) : verticale, transversale et

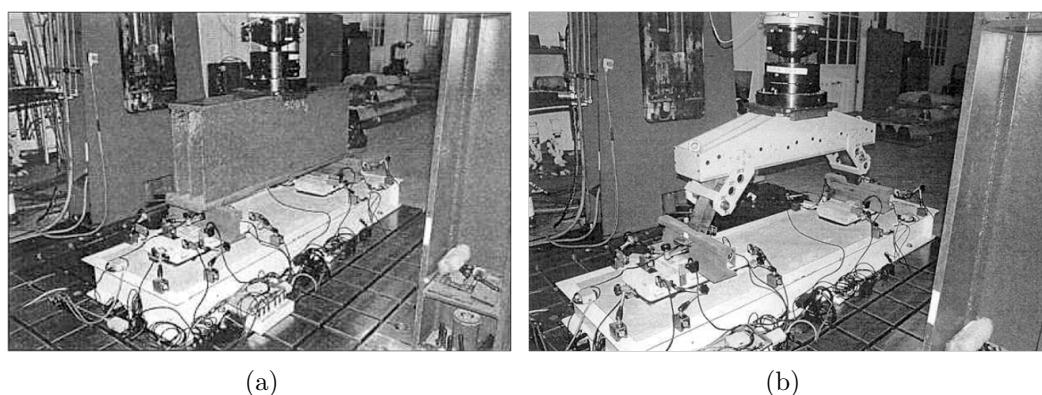


FIGURE 1.7 – Essais statique et dynamique d'une voie assemblée avec poutre horizontale (a) et bielle inclinée (b)

	Unité	Statique		Dynamique 5Hz	
Chargement	kN	10-47,5	2,5-75	20-95	5-150
Poutre horizontale	MN/m	25,9	27,87	47,61	40,36
Avec bielles inclinées	MN/m	30,58	32,61	62,22	52,90

TABLE 1.3 – Propriétés mécaniques des semelles sous rail et sous blochet

longitudinale. La figure 1.8 montre le modèle des forces de contact entre un blochet et les autres composants d'un support.

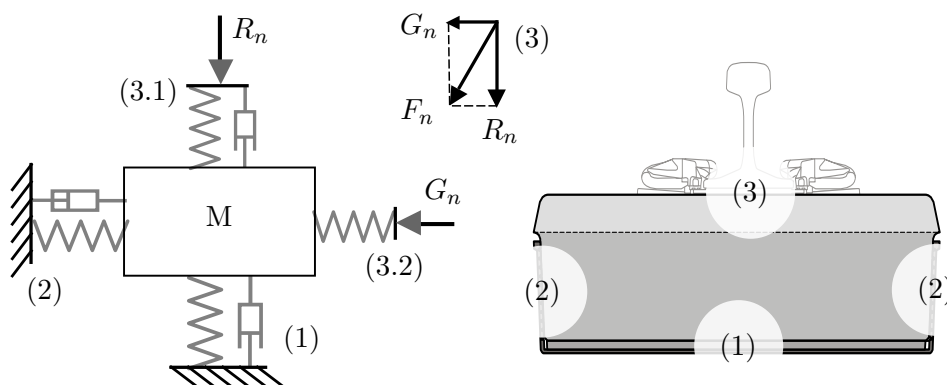


FIGURE 1.8 – Modèle mécanique d'un système LVT : contact (1) blochet - semelle et chausson - dalle, contact (2) blochet - chausson - dalle, contact (3) rail - semelle - blochet

Suivant l'axe vertical, la semelle sous blochet et la base du chausson en caoutchouc ont des comportements élastiques et amortis. De plus, ces composants sont pré-contraints à cause de la masse du blochet et du rail ; ils sont supposés être toujours en contact avec le blochet et modélisés par un système ressort - amortisseur (noté par (1) dans la figure 1.8).

Les surfaces latérales du chausson travaillent indépendamment en pression (et non en tension) lorsque le blochet se déplace selon l'axe transversal ou longitudinal. De ce fait, on peut modéliser ces deux parties comme un système ressort - amortisseur avec des paramètres dynamiques d'une partie en pression (notée par (2) dans la figure 1.8).

La semelle sous rail se déforme suivant trois directions (compression verticale, cisaillements transversal et longitudinal) lorsqu'elle est soumise au déplacement de la surface de



contact avec le rail. On peut alors décomposer la force de réaction dans trois directions pour analyser séparément le mouvement du blochet dans chaque direction (notée par (3) dans la figure 1.8).

## 1.4 Dynamique d'une voie ferroviaire non-ballastée

### 1.4.1 Réponse d'un système LVT au passage des trains

Des mesures d'efforts et de déplacements ont été effectués sur la voie au passage des trains dans trois zones différentes dans le tunnel. Ces zones se différencient par l'état des blochets (blochets d'origine sains, blochets dégradés, nouveaux blochets) et sont nommées : zone saine d'origine, zone dégradée et zone réparée. Dans chaque configuration, un blochet a été instrumenté et son comportement a été déterminé au passage des trains pendant une période d'au moins 24 heures (voir la figure 1.9). Pendant cette période, les caractéristiques de tous les trains (type, vitesse et charge de roue) ont été enregistrées.

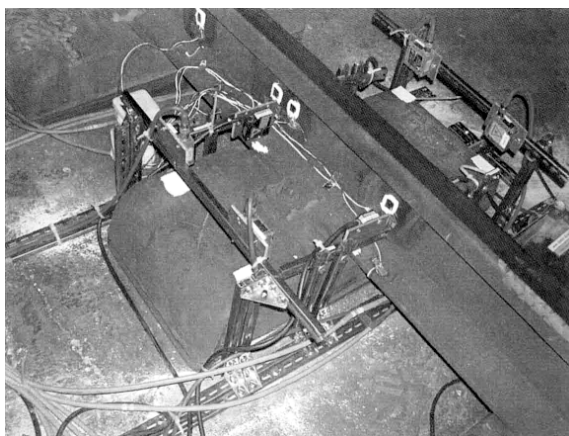


FIGURE 1.9 – Mesure in situ de la réponse d'un support Sonneville

Le comportement du blochet est déterminé par la mesure des mouvements verticaux au niveau de ses quatre extrémités, celui du rail par la mesure en 4 points encadrant la semelle sous rail, tous les déplacements étant pris par rapport au radier. Les charges  $Q$  et  $Q-R$  sont mesurées à l'aide de jauges de déformation collées sur la fibre neutre du rail. La réaction du support est déduite par soustraction des deux signaux ( $Q-(Q-R)$ ). La figure 1.10 présente le schéma du dispositif de mesure réalisé.

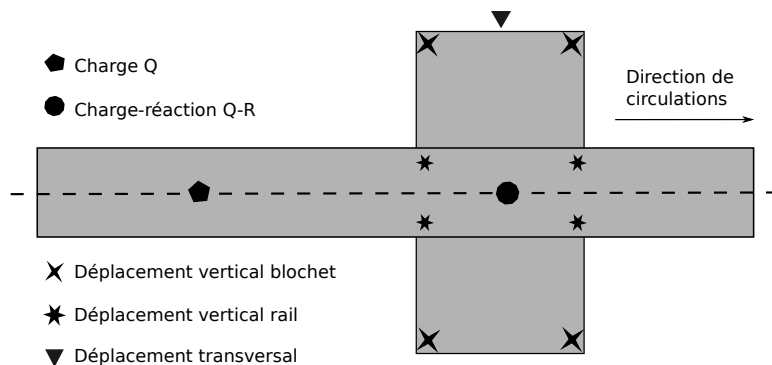


FIGURE 1.10 – Schéma du dispositif de mesures (vue de dessus)

*Étalonnage complémentaire dans la direction transversale* : Le déplacement transversal du blochet a été mesuré lors de l'application d'un effort calibré de 20kN transversalement sur le champignon.

*Traitement des signaux* : Les signaux sont enregistrés pendant le passage des trains. Pour certains trains comme l'Eurostar, les signaux sont quasiment périodiques parce que les chargements sont repartis dans les wagons. On calcule donc une seule période du signal en faisant la moyenne des périodes du signal obtenu pour un train.

*Résultat* : Les paramètres principaux du système LVT dans les trois configurations sont repris dans le tableau 1.4.

Paramètre	Unité	zone 1	zone 2	zone 3
Raideur verticale	kN/mm	29,2	9,9	25,9
Raideur semelle	kN/mm	286	78	194,9
Raideur transversale	kN/mm	23,5	12,5	14,4
R/Q moyen	%	45,8	22,6	33,6

TABLE 1.4 – Résultat de mesure des raideurs du système de support

### 1.4.2 Contrôle géométrique d'une voie ferrée

Le contrôle des défauts géométriques est important dans le cadre de la maintenance d'une voie ferroviaire. Il existe différentes catégories de défauts et on définit les quatre types de défauts géométriques ci-dessous :

- *Nivellement longitudinal* : résultant du tassement global et résiduel
- *Nivellement transversal* : on évalue deux modes : l'écart de dévers (l'inclinaison transversale de la voie) et le gauche ou torsion de voie (le décalage vertical entre deux files de rails)
- *Dressage* : la variation transversale du milieu des rails par rapports à la position théorique initiale
- *Écartement* : variation de la distance entre deux rails

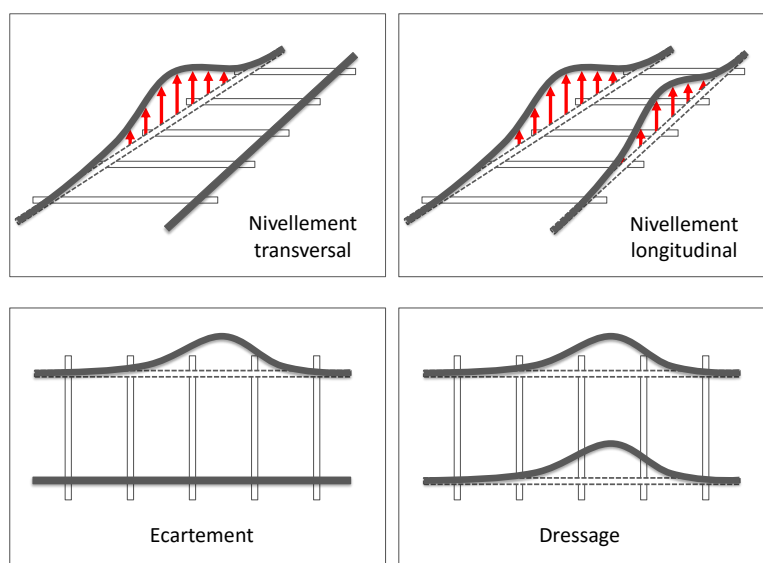


FIGURE 1.11 – Les défauts géométriques d'une voie ferroviaire

Quand il est manuel, le contrôle de l'état des voies est une opération qui se pratique à l'aide d'instruments très simples.

- avec la règle et le niveau, on vérifie le nivellement transversal ;
- avec la jauge d'écartement, on mesure l'entre-distance des rails ;
- avec la ficelle, on vérifie la régularité des flèches de la voie en courbe.

De plus, l'œil exercé du praticien apprécie le nivellement longitudinal et les défauts de tracé. Mais ce contrôle, qui demande beaucoup de temps, ne peut s'opérer que sur une voie libre de toute charge : il ne décèle pas les défauts qui se manifestent ou ceux qui s'aggravent sous l'effet des charges et perturbations que la voie subit au passage des trains. Par ailleurs, il ne laisse subsister, en vue des études ultérieures, aucun document figuratif des défauts relevés. Même si les méthodes modernes d'entretien donnent aux voies une stabilité telle que la périodicité de leur révision s'en trouve sensiblement allongée, il est indispensable de les soumettre périodiquement à un contrôle systématique enregistrant tous les défauts sous charge.

La voiture enregistreuse (Mauzin de SNCF ou le système de mesure de DMA) peut entrer dans la composition d'un train ordinaire roulant à une vitesse normale et remplit les conditions d'un tel contrôle.

### 1.4.3 Modélisation dynamique d'une voie ferrée

L'étude de la dynamique d'une voie ferrée soumise à un chargement induit par le trafic des trains a donné lieu à de nombreux travaux depuis un siècle. Cette structure dynamique est assez complexe et sa modélisation doit prendre en compte :

- **le contact roue-rail** : l'effort appliqué sur le rail est déterminé à l'aide de cette modélisation. Comme la taille de la zone de contact est très petite par rapport à la dimension du rail, la plupart des modèles dynamiques de voie limite le chargement à des forces mobiles ponctuelles. Ces forces ponctuelles peuvent être des forces constantes, harmoniques ou des systèmes de type ressort-masse-amortisseur...
- **le rail** : le rail étant un solide homogène, il peut être modélisé par une poutre ou un solide 3D. Dans la plupart des modélisations, le rail est modélisé par une poutre. Le choix du modèle de poutre dépend des conditions de la voie (vitesse du train, rigidité des semelles...)
- **le support du rail** : c'est l'ensemble composé de la semelle sous rail, des supports (les traverses ou les systèmes de supports sans ballast) et de la fondation (le ballast et les sous couches ou la dalle pour une voie non-ballastée). La modélisation du support peut-être faite avec différentes approches : milieu continu ou appuis périodiques.

Pour la voie étudiée à savoir le système LVT sans ballast, il n'existe pas de modèle spécifique mais on peut considérer des modèles équivalents existants pour la voie ballastée, les traverses associées au ballast et le système LVT jouant les mêmes rôles dans une voie ferroviaire.

#### Modèle de poutre sur une fondation continue

Le premier modèle est développé en 1926 par Timoshenko lorsqu'il traite le problème d'une poutre reposant sur une fondation de type Winkler soumise à une force mobile. Ce système est le plus simple pour modéliser le couplage entre le rail et la fondation. Ce modèle est développé dans le livre de Fryba [38] qui propose des analyses complètes. Dans ce modèle, Fryba a considéré que la poutre est en contact avec la fondation sur toute sa longueur (voir la figure 1.12). Lorsqu'il y a un déplacement non nul de la poutre, la fondation génère une pression sur la poutre qui est proportionnelle au déplacement. Ceci

mène à une équation différentielle d'ordre quatre lorsqu'on utilise le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Une vitesse critique pour laquelle la résonance apparaît a été trouvée. Elle dépend de la densité ainsi que de la rigidité en flexion de la poutre et aussi de la rigidité de la fondation. La vitesse critique augmente quand la rigidité de la fondation augmente.

Pour prendre en compte la masse des traverses et les différentes couches de la voie ballastée, Nguyen et al. [111] ont développé ce modèle en ajoutant une couche de masse et trois systèmes de ressort-amortisseur. Les auteurs ont aussi développé le modèle 3D de la voie en utilisant la méthode des éléments finis. La méthode numérique a aussi été développée par d'autres auteurs [6, 15, 51] pour calculer les réponses non-stationnaires de la voie.

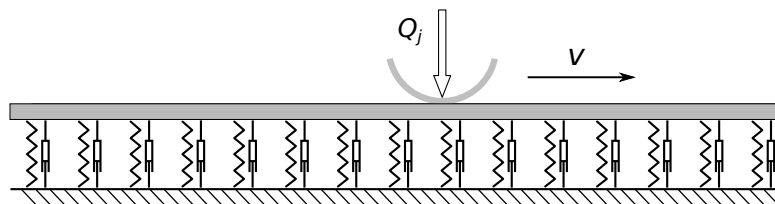


FIGURE 1.12 – Modèle dynamique de poutre sur un milieu continu

Depuis quelques années, ce modèle est développé en considérant des fondations plus complexes. Parmi ces développements, certains auteurs considèrent une loi de comportement cubique pour la fondation [7, 30, 60] en utilisant la technique de perturbation ou la méthode de Galerkin [29]. Pour les fondations n'étant pas sollicitées en traction, les méthodes numériques sont aussi utilisées [20, 133]. La méthode numérique est aussi utilisée pour étudier les fondations non-homogènes [17, 117, 135]. Dans ce travail, la fondation présentant une zone non-homogène permet de modéliser des défauts de la fondation ou des problèmes de transition (zone entre ballast/non-ballast, les ponts...)

### Modèle de poutre périodiquement supportée

La poutre périodiquement supportée a été développée à partir de 1960 pour tenir compte de la discontinuité des traverses (ou des supports). Ce modèle contient une poutre infinie posée sur des appuis qui sont séparés de la même distance égale à la distance entre les traverses. Chaque appui peut être représenté par une combinaison de ressorts, amortisseurs et une masse (voir la figure 1.13). Grâce à la périodicité de la structure, les auteurs proposent une condition de périodicité du déplacement de la poutre.

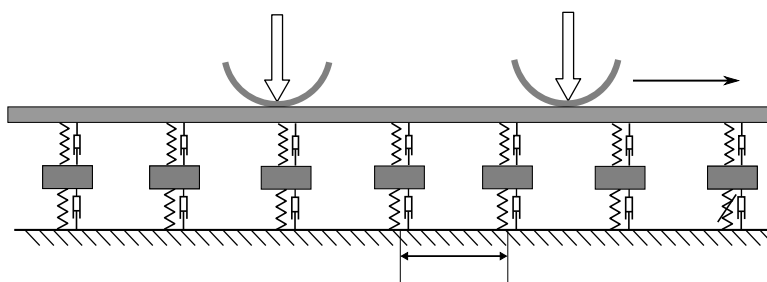


FIGURE 1.13 – Modèle de poutre périodiquement supportée

Mead [87, 91] a développé un modèle avec des supports élastiques et des charges

harmoniques basé sur la propagation des ondes dans les structures périodiques et une résolution utilisant un traitement par séries de Fourier. Sheng et al. [137, 138] ont quant à eux déterminé les charges à partir des interactions roue-rail. Une condition de périodicité a été utilisée par Metrikine et al. [96, 147] et Belotserkovskiy [11] pour résoudre le système avec le déplacement des forces concentrées. Nordborg [Nordborg1998, 113] a utilisé la transformation de Fourier avec le théorème de Floquet pour obtenir la fonction de Green dans son modèle. La formulation de Green est également utilisée par Foda et al. [37] pour calculer la réponse de la structure.

## 1.5 Dégradation d'un système LVT de voie sans ballast

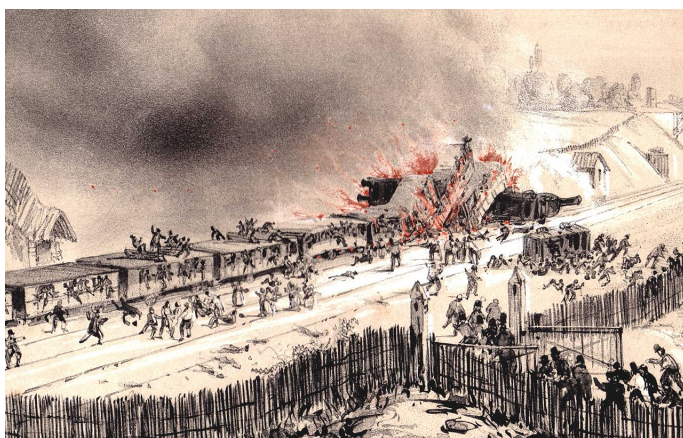


FIGURE 1.14 – L'accident du chemin ferroviaire Paris-Versailles (le 8 mai 1842)

La fatigue est un type d'endommagement provoqué par des chargements cycliques tels que ceux provoqués par la circulation des trains. Cet endommagement peut être la cause d'accidents graves. Le premier accident ferroviaire causé par la fatigue est survenu en 1842 sur la ligne de chemin de fer Paris-Versailles (voir Figure 1.14). L'étude de la fatigue des métaux a commencé au milieu du 19<sup>ème</sup> siècle et celle du béton au début de 20<sup>ème</sup> siècle. Il existe aujourd'hui de nombreux travaux expérimentaux et numériques sur la fatigue du béton. Cependant, la fatigue du béton reste encore un phénomène mal maîtrisé par rapport à celle de l'acier et ceci en raison de son hétérogénéité.

Pour le système LVT, il n'existe pas de retour d'expérience sur son comportement en fatigue. Cependant, ces systèmes ont été mis en service depuis quelques dizaines d'années et ont déjà subi des millions de cycles de chargement et il est donc nécessaire d'étudier leur durée de vie en fatigue. Parmi les composants du système, le blochet en béton est le plus sensible à ce type d'endommagement. Dans la partie suivante, nous nous intéressons donc à la fatigue du béton et aux méthodes de détection des endommagements du béton pour avoir une vue générale sur la fatigue du blochet.

### 1.5.1 Comportement du béton

#### Béton sous chargement statique

La résistance du béton en compression est de 10 à 20 fois plus grande que sa résistance en traction [82]. C'est pourquoi la plupart des grandes structures en béton sont conçues pour que le béton travaille en compression. Pour étudier le comportement du béton en

compression, différents types d'essais avec différentes formes d'éprouvettes peuvent être utilisés. Le comportement typique du béton en compression est présenté sur la figure 1.15.

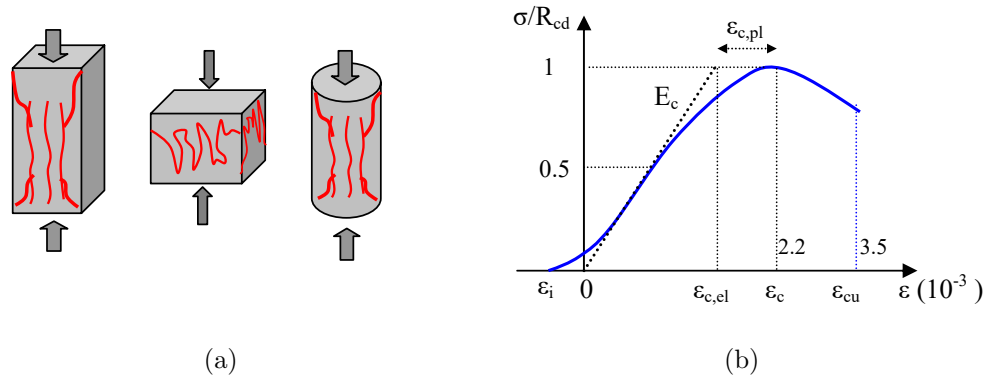


FIGURE 1.15 – Béton en compression statique : (a) fissurations du béton et (b) courbe de contrainte en fonction de déplacement (contrôle en déplacement)

De même, afin d'étudier le comportement du béton en traction, différents types d'essai avec différentes formes d'éprouvettes peuvent être utilisés. Le comportement typique du béton en traction est présenté dans la figure 1.16.

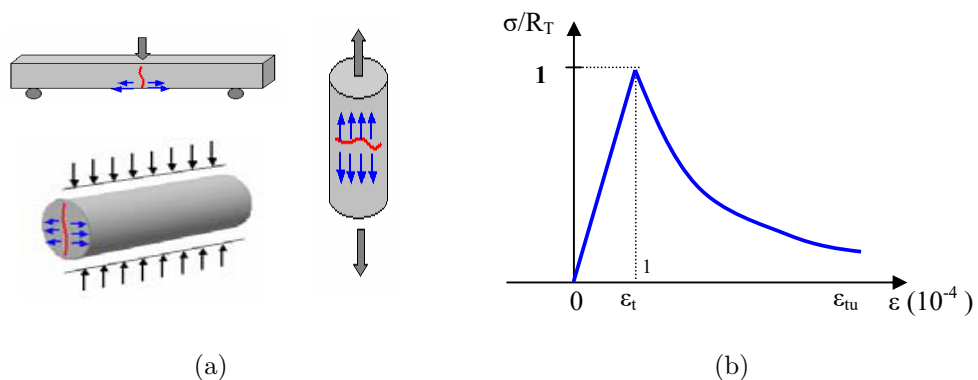


FIGURE 1.16 – Béton en traction statique : (a) fissurations du béton et (b) courbe de contrainte en fonction de déplacement (contrôle en déplacement)

### Béton sous chargement dynamique

En réalisant des essais de traction sur les éprouvettes rectangulaires (poutres) entaillées, Reinhardt [125] a montré l'existence de boucles d'hystérésis sous sollicitations cycliques du béton (Figure 1.17). Il a observé des déformations permanentes à la fin de chaque phase de déchargement. Afin de modéliser le comportement cyclique du béton, différents modèles ont été proposés dans la littérature. Les modèles les plus simples sont basés sur un comportement élastique endommageable. Nous pouvons aussi trouver des modèles élasto-plastiques endommageables et des modèles plus complexes pour modéliser les boucles d'hystérésis.

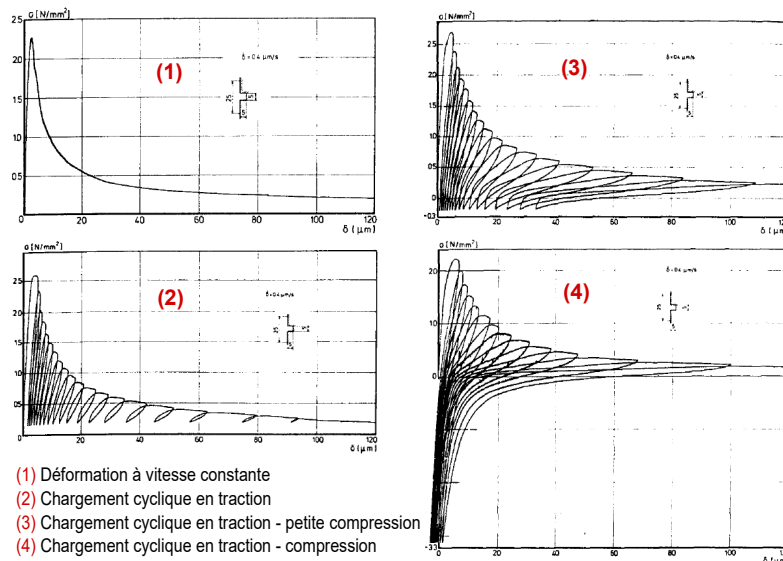


FIGURE 1.17 – Des boucles d’hystérésis sous sollicitations cycliques du béton

## 1.5.2 Fatigue du béton

### Mécanisme de fatigue

Sous un chargement cyclique, des micro-fissures se produisent et se propagent jusqu’à la rupture. Ce processus émet des sons que l’on peut enregistrer en laboratoire. Lors d’un essai à la rupture, le nombre d’événements acoustiques peut être représenté par  $\omega$  qui varie entre 0 (pour le début d’essai : éprouvette non endommagée) et 1 (fin de l’essai : rupture de l’éprouvette). En fonction du nombre de cycles  $n$ , il existe 3 phases (voir Figure 1.18) :

- Phase I (initiale) : évolution rapide des détériorations du béton. Cette phase prend environ de 5 à 10% du nombre total de cycles  $N_F$
- Phase II (stable) : taux de détérioration stable. Cette phase contribue à la plupart de la durée de fatigue (environ 80 à 90% de  $N_F$ )
- Phase III (finale) : accélération de la détérioration jusqu’à la rupture

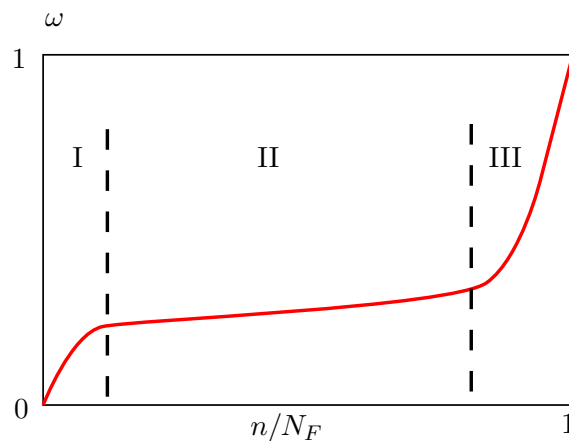


FIGURE 1.18 – Évolution de la détérioration du béton mesuré par l’émission acoustique

### Résistance à la fatigue

Les chargements de fatigue sont définis à l'aide d'un chargement moyen et d'une amplitude :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (1.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (1.2)$$

où  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$  sont les contraintes maximale et minimale du chargement. En fonction des valeurs de  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$ , on peut avoir un chargement alternatif, répétitif, ou ondulé (voir Figure 1.19).

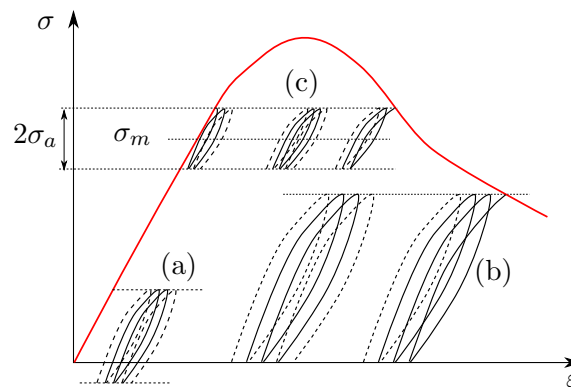


FIGURE 1.19 – Différents types de chargements : (a) alternatif, (b) répétitif et (c) ondulé

La relation entre le chargement et le nombre de cycles jusqu'à la rupture est décrit par la courbe de Wöhler (voir Figure 1.20). A cause de l'hétérogénéité, la résistance à la fatigue est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne. En fonction du nombre de cycles ( $N_F$ ), il existe 3 types de fatigue : oligocyclique ( $N_F \leq 10^4$ ), normale ( $10^4 \leq N_F \leq 10^7$ ) et mégacyclique ( $N_F \geq 10^7$ )

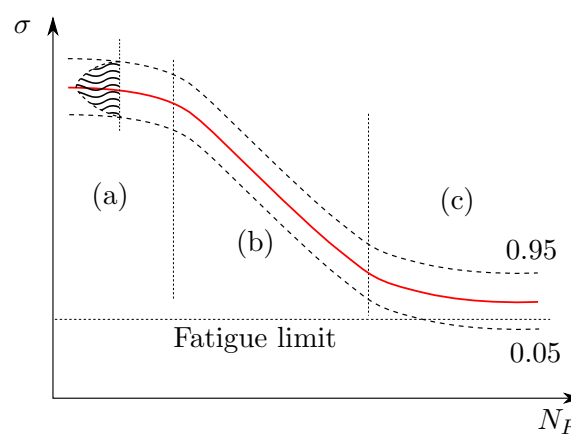


FIGURE 1.20 – Différents types de fatigue : (a) oligocyclique, (b) normale et (c) mégacyclique

### Déformation et endommagement en fatigue

La propagation des microfissures est accompagnée par la décroissance du module élastique longitudinal et l'augmentation de la déformation irréversible. L'évolution de la



Modèle	Année	Compression	Traction	Flexion
Aas-Jakobsen	1970	oui	oui	non
Thomas	1981	oui	oui	oui
Zhang	1996	oui	oui	non
Cornelissen	1984	oui	oui	oui
Shi	1993	non	non	oui

TABLE 1.5 – Modèles empiriques de la fatigue du béton

déformation maximale  $\varepsilon_{max}$  qui correspond au niveau maximum de contrainte du cycle s'écrit à l'aide de la formules de Sparks et Menzies :

$$\frac{d\varepsilon_{max}}{dn} = \left( \frac{N_F}{A} \right)^B$$

où  $A, B$  sont des variables matériaux.

### Les lois empiriques de la fatigue du béton

Les approches empiriques sont simples et pratiques pour estimer l'ordre de grandeur de la durée de vie des structures et ces approches sont validées par l'expérience pour certains cas de référence. Cependant, quand le chargement est différent d'un chargement cyclique classique (essais), il est difficile d'appliquer les modèles empiriques. Les modèles empiriques ne peuvent donc pas toujours expliquer le mécanisme de l'endommagement et prévenir la propagation des fissures. On présente ci-dessous des lois empiriques de la fatigue du béton que l'on utilisera par la suite pour estimer l'ordre de grandeur de la durée de vie du blochet.

**Modèle d'Aas-Jakobsen (1970)** : Les essais sur la fatigue du béton montrent l'effet de la contrainte minimum  $\sigma_{min}$  qui suit la formule d'Aas-Jakobsen (avec la correction  $\beta$  de Terfers) [82]

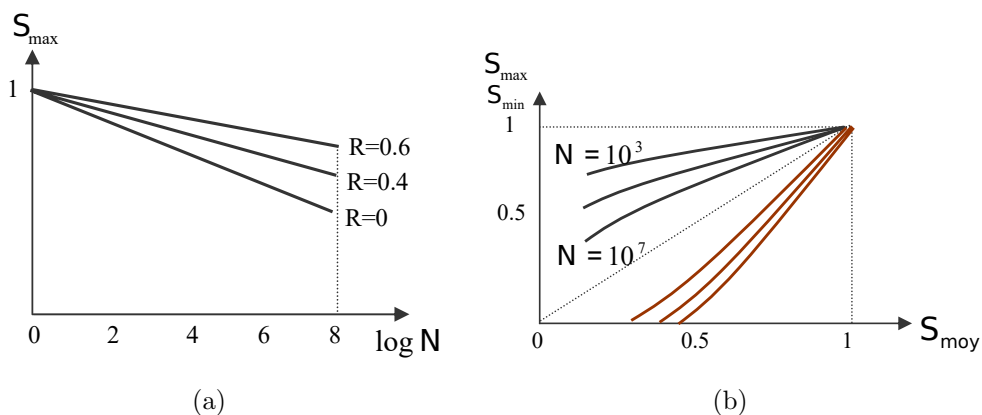


FIGURE 1.21 – Courbe de Wöhler (a) et diagramme de Goodman-Smith (b) du modèle d'Aas-Jakobsen

$$S_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u} = 1 - \beta(1 - R) \log N \quad (1.3)$$

où  $\sigma_u$  est la résistance du matériau et  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ ,  $\beta = 0.0684$ . Ce modèle a différentes représentations graphiques. Si on fixe  $R$  et que l'on trace la contrainte maximum en fonction

de la durée de vie, on obtient la courbe de Wöhler. En revanche, si on fixe la durée de vie en traçant la contrainte maximum en fonction de la contrainte moyenne, on obtient le diagramme de Goodman-Smith (voir Figure 1.21). Ils existent aussi les diagrammes de Haigh et de Ris qui présentent les contraintes lorsque la durée de vie est fixée (voir Figure 1.22).

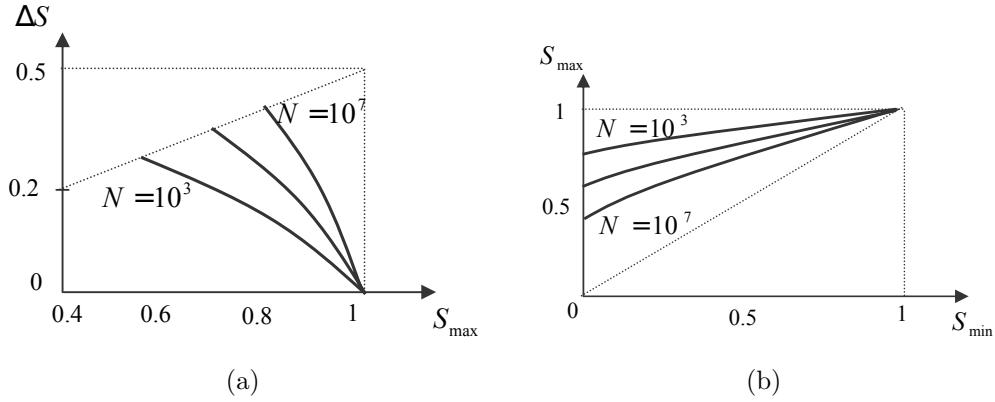


FIGURE 1.22 – Diagrammes de Haigh (a) et de Ros (b) pour le modèle d'Aas-Jakobsen

**Modèle de Thomas T.C.Hsu (1981) :** Béton non armé en compression et en flexion  
— Fatigue normale et megacyclique :

$$S_{max} = 1 - 0.0662(1 - 0.556R) \log N - 0.0294 \log T \quad (1.4)$$

— Fatigue oligocyclique :

$$S_{max} = 1.2 - 0.2R - 0.133(1 - 0.779R) \log N - 0.053(1 - 0.445R) \log T \quad (1.5)$$

où  $T$  est la période du chargement en seconde.

**Formules de Cornelissen H.A.W (1984)**

— Traction simple :

$$N = \alpha - 14.52 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^T} + 2.79 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^T} \quad (1.6)$$

où  $\sigma_u^T$  est la résistance en compression,  $\alpha = 14.81$  pour béton sec et  $\alpha = 13.92$  pour béton humide.

— Traction - compression :

$$\log N = 9.36 - 7.93 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^T} - 2.59 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^C} \quad (1.7)$$

où  $\sigma_u^T$  et  $\sigma_u^C$  sont les résistances en traction et en compression.

— Flexion simple :

$$N = 12.53 - 10.95 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^F} \quad (1.8)$$

où  $\sigma_u^F$  est la résistance en flexion.

— Flexion alternative :

$$\log N = 9.91 - 7.45 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^F} - 1.93 \frac{\sigma_{min}}{\sigma_u^C} \quad (1.9)$$

**Modèle exponentiel de Shi et al. (1993)** : En se basant sur l'équation exponentielle de fatigue, utilisée par les chercheurs dans le domaine des routes en béton, Shi et al. ont proposé une nouvelle équation pour la fatigue du béton en flexion :

$$S_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u} = aN_{eq}^{-b} = aN^{-b(1-R)} \quad (1.10)$$

où  $a, b$  sont des paramètres à déterminer à l'aide d'essais.

**Modèle de Zhang et al. (1996)**

$$S_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u} = C_f(1 - \beta(1 - R) \log N) \quad (1.11)$$

où  $C_f$  est un paramètre qui dépend de la fréquence [155].

### Approches numériques

**Mécanique de l'endommagement** : c'est une discipline de la mécanique qui se base sur la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles. Elle est basée sur :

- La définition des variables d'état (variables observables  $(\varepsilon, T)$  et variables internes  $(\alpha)$ )
- Le choix du potentiel thermodynamique, l'énergie libre  $(\Psi_e)$ , pour obtenir les lois d'état
- La détermination du potentiel de dissipation  $(\Phi)$  afin d'obtenir les lois complémentaires.

Il existe un grand nombre de modèles appliquant la mécanique de l'endommagement pour la fatigue. On peut citer le modèle d'évolution d'endommagement de Paas, la formulation de Marigo,...

**Mécanique de la rupture** : La mécanique de la rupture permet de modéliser la propagation des fissures en considérant les contraintes singulières en fond de fissure. Il existe des modèles linéaire (avec 3 modes de fissures comme le montre la figure 1.23) et non linéaire (avec une zone plastique et micro-fissurée)

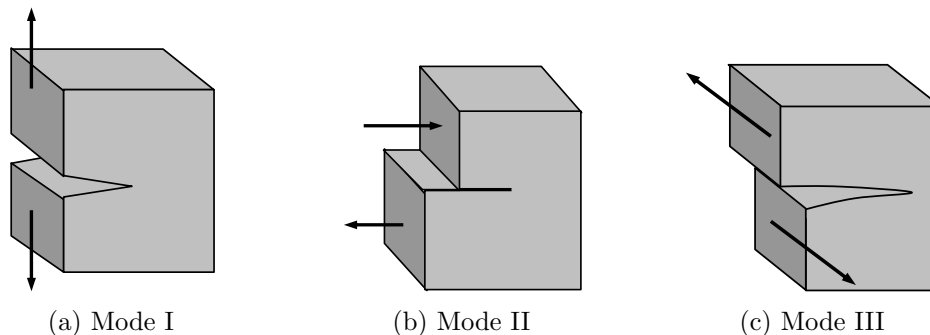


FIGURE 1.23 – Les modes de fissuration : (a) ouverture, (b) cisaillement plan et (c) cisaillement antiplan

La fatigue du matériau se compose de trois phases : initiation, propagation et rupture brutale. La mécanique de la rupture est utilisée pour étudier la phase de propagation des fissures par fatigue (loi de Paris-Endogan).

## 1.6 Méthodes de détection d'endommagement

Le système LVT étant très récent (par rapport à la voie ballastée), il n'existe que très peu de travaux de recherche portant sur l'étude de l'endommagement de ce système.

De plus, les endommagements potentiels ne sont pas facilement observables parce que le blochet est inséré dans le chausson en élastomère qui est noyé dans la dalle béton. Ainsi, pour pouvoir faire la surveillance classique lors des opérations de maintenance, le rail doit être soulevé pour pouvoir observer la table du blochet. Cependant, le résultat de cette observation ne permet pas d'identifier l'état général du système car la plupart des endommagements apparaissent à l'intérieur et/ou au niveau des surfaces inférieures du blochet. Par conséquent, il est nécessaire de disposer d'une méthode pour détecter les endommagements du blochet. A la demande d'Eurotunnel, la méthode doit respecter certains critères :

- La méthode doit être non-destructive. Elle doit être applicable dans les conditions normales de la voie pour ne pas perturber la circulation après la mesure.
- Le temps de mesure doit être assez court parce que le temps total pour la maintenance est limité.
- Le résultat obtenu avec cette méthode doit permettre de détecter l'état d'endommagement général du blochet afin de prévoir sa durée de vie restante.

A partir du premier critère, on peut citer ici quelques méthodes existantes non-destructives :

- **L'émission acoustique** : A l'aide d'un récepteur placé en un point de la surface de l'objet à ausculter, on peut mesurer le temps de propagation des ondes acoustiques (ultra-son) générées par une source positionnée en un autre point de la surface. Lorsqu'il y a une fissure, les parcours des ondes sont plus longs, ce qui fait augmenter le temps de parcours et cette information est traitée pour retrouver la profondeur de la fissure. Cette méthode est assez précise et elle est souvent utilisée dans le génie civil. Cependant, cette méthode n'est applicable que pour détecter une seule fissure à la fois. Dans le cas où il y a plusieurs fissures, on doit reprendre la mesure pour chaque fissure ce qui n'est pas envisageable dans le tunnel pour des problèmes de temps et de méthodologie.
- **La corrélation d'images** : C'est la version automatique de l'observation à l'œil. Cette méthode n'est donc applicable que pour les défauts de surfaces non-cachés et ce n'est pas le cas des blochets.
- **Mesure des ondes élastiques** : Cette méthode reprend le même principe que la méthode d'émission acoustique. Au lieu d'avoir une source acoustique, on excite la structure et on enregistre les ondes élastiques. Cette méthode est moins précise que l'émission acoustique et présente les mêmes limites dans le cadre d'une application aux blochets.
- **Mesure de la résistance électrique (pour béton armé)** : La résistance électrique augmente lorsque les renforts acier sont cassés. Cette propriété peut servir à détecter la rupture des renforts en acier dans les blochets. Cependant, les blochets se cassent généralement d'abord dans la partie en béton et cette technique n'est pas utilisable en tunnel.
- **L'analyse modale** : Chaque structure possède des modes propres qui dépendent notamment de la géométrie et des caractéristiques mécaniques de la structure telle que sa raideur. L'endommagement de la structure entraîne donc une modification de ses modes propres. L'analyse modale permet de mesurer les modes propres mais cette méthode reste souvent qualitative.

Parmi les méthodes non-destructives présentées précédemment, l'analyse modale est la méthode qui apparaît la plus adaptée aux blochets. Ainsi, on rappellera dans cette partie les applications de cette méthode dans le domaine du génie civil en général et dans l'industrie ferroviaire en particulier

### 1.6.1 Détection de l'endommagement en utilisant la méthode de l'analyse modale

Il existe différentes méthodes de détection des endommagements basées sur la réponse vibratoire d'une structure. On utilise différents paramètres (fréquences propres, modes propres courbures modales), les FRFs et des données pour identifier les défauts de la structure. Parmi ces méthodes, la méthode basée sur les fréquences propres est la plus simple et elle s'est développée vers les années 1970 avec des recherches sur la variation des fréquences due au changement de masse et de rigidité des structures. Salawu [131] a résumé 65 articles portant sur la détection d'endommagements à partir du changement des fréquences. Par exemple, Farrar [34, 36] a montré l'existence du changement des fréquences naturelles d'une structure en béton armé en utilisant la modélisation numérique et les mesures expérimentales.

La raison importante qui conduit à utiliser des techniques d'identification d'endommagements à partir de la mesure des fréquences vient du fait que les fréquences propres sont sensibles aux différents types d'endommagement (local ou global). Elles peuvent de plus être déterminées facilement dans beaucoup d'applications en utilisant seulement un capteur de type accéléromètre, vibromètre... Cependant, la difficulté est qu'elles peuvent être facilement influencées par des variations de l'environnement comme la température ou l'humidité ce qui pose un problème pour la détection de l'endommagement des structures réelles.

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode basée sur les déformées modales. Il existe différentes techniques pour cette méthode. On peut utiliser directement la déformée modale, la courbure modale, la flexibilité ou l'énergie de déformation modale. Par exemple, Plachý [121] a utilisé cette méthode pour détecter les endommagements des ponts grâce à son système d'excitation et de mesure des modes. L'application de cette méthode a été développée par plusieurs auteurs pour analyser les défauts des ponts et d'autres grands ouvrages. Cependant, la mesure de la déformée modale nécessite de disposer de plusieurs capteurs placés en différentes positions de la structure.

Plutôt que d'utiliser les paramètres modaux pour obtenir des informations sur le défaut, une autre technique consiste à étudier directement les réponses en fréquence ou FRF (frequency response function) de la structure. Wang et al [149] ont proposé une nouvelle technique basée sur la FRF pour identifier des endommagements d'une structure avec des barres en acier. L'application de cette méthode sur des données numériques a donné de bons résultats. Cependant, les résultats expérimentaux n'ont pas complètement confirmé les résultats numériques. D'autres techniques utilisent la transformation de Hilbert-Huang ou la transformation en ondelettes [151, 152]. L'avantage de ces méthodes est que les données peuvent être obtenues directement à partir des réponses vibratoires en temps indépendamment du domaine modal.

### 1.6.2 Analyse modale d'une traverse de voie ballastée

Les premiers calculs dynamiques ont été réalisés à l'aide d'un modèle de poutre du fait de l'élanement des traverses. En faisant une comparaison entre les résultats analytiques et expérimentaux, Grassie (1995) a démontré que le modèle de poutre de Timoshenko peut être utilisé pour calculer les 6 premières fréquences pour 12 types différents de traverses.

En 2006, Remennikov et al. [126] ont étudié l'effet de couplage du ballast sur les modes propres d'une traverse en utilisant la méthode des éléments finis et en réalisant des mesures expérimentales. Ils ont montré que les fréquences et les amortissements d'une traverse augmentent de façon significative lorsque la traverse est posée sur le ballast.

Ces auteurs ont aussi étudié l'effet de la raideur de la semelle sous rail (2006) et ont montré que l'augmentation des fréquences et des amortissements est encore plus importante lorsque la raideur de la semelle augmente. Enfin, les mêmes auteurs ont fait en 2007 une comparaison des modes propres d'une traverse en conditions libres et posée sur le ballast en utilisant le modèle de poutre d'Euler-Bernouli, la méthode des éléments finis et des mesures expérimentales.

En 2014, Lam et al. [71] ont étudié la faisabilité de la méthode d'analyse modale pour détecter l'endommagement du ballast. En se basant sur l'hypothèse que la traverse est une poutre, les auteurs ont montré comment les modes propres changent lorsqu'il y a endommagement du ballast. A partir de ces résultats, ils ont proposé une méthode de détection de l'endommagement en utilisant l'analyse modale. Cependant, cette méthode est assez limitée parce que la sensibilité n'est pas très grande et que la mesure doit être faite sur toute la longueur de la traverse.

En 2015, Matsuoka et al. [67] ont proposé une méthode de détection des endommagements en utilisant la mesure des modes propres in situ. Ces auteurs ont démontré que les trois premiers modes propres dépendent de la fissuration en surface d'une traverse. Ces auteurs ont conclu en particulier que le 3ème mode est le plus utilisable pour détecter l'endommagement à l'aide d'une seule mesure de fréquence parce qu'il n'est pas influencé par le ballast et par la semelle sous rail.

## 1.7 Conclusion

Les voies ferroviaires du tunnel sous la Manche sont équipées d'un système de support de rail LVT sans ballast. Le vieillissement de ces voies est dû au trafic important dans le tunnel et implique le changement de certains composants du système dans le cadre des opérations de maintenance. Cependant, il est nécessaire de maîtriser la durée de vie du système pour prévoir ces opérations. D'autre part les systèmes LVT sans ballast étant très récents et parce qu'il n'existe pas d'étude sur ceux-ci, il est dans ce cas nécessaire d'étudier le comportement mécanique de la voie en intégrant les caractéristiques actuelles des voies en tunnel (nouvelle géométrie du blochet, niveau d'endommagement des blochets...).

Ce chapitre a tout d'abord présenté les composants constituant les supports de rail des voies dans le tunnel ainsi que leurs comportements mécaniques et une synthèse bibliographique des modèles dynamiques de la voie ballastée qui sont potentiellement applicables pour la voie dans le tunnel. Ce chapitre a ensuite présenté les essais réalisés en 2005 sur un système support et les résultats obtenus. Les résultats de ces essais permettront de valider les modèles de voie élaborés dans le cadre de notre travail.

D'autre part, la dégradation du système support sans ballast est un sujet de recherche peu ou pas traité car il y a actuellement peu de retour expérimental sur ce système récemment conçu et encore peu commercialisé. Il existe cependant des approches numériques pour analyser la dégradation du système : calcul à la rupture, mécanique de l'endommagement... Pour pouvoir analyser rapidement les causes de l'endommagement du système support, ce chapitre a ensuite présenté les lois empiriques de la fatigue du béton étant entendu que le blochet en béton sera le composant du système le plus sensible à un endommagement par fatigue. Enfin, un des objectifs de ce travail étant de développer une méthode non-destructive de détection des endommagements des supports, le présent chapitre s'achève par la présentation d'une étude bibliographique portant sur les méthodes existantes de détection d'endommagement des structures béton. Cette étude montre que la méthode d'analyse modale semble le plus adaptée aux campagnes de mesure dans le tunnel et aux critères imposés par Eurotunnel.



Première partie

**Comportement mécanique d'une  
voie ferrée non-ballastée**





## Chapitre 2

# Modèle mécanique de voies ferrées homogènes

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Modélisation dynamique d'une voie ferrée

La modélisation de la réponse dynamique d'une voie ferrée soumise aux chargements d'un train est un sujet qui a donné lieu à de nombreux travaux de recherche depuis des dizaines d'années. Il existe de nombreuses approches analytiques et numériques pour ce problème dynamique. Ainsi, la plupart des modèles ont été développés pour la voie ballastée. Il n'existe cependant que peu de publications pour la voie non-ballastée comme celles du tunnel sous la Manche. Ce type de voie est équipé des systèmes de support LVT indépendants qui sont découplés de la dalle béton grâce aux chaussons en caoutchouc dans lesquels ils reposent.

Pour analyser le comportement dynamique d'une telle voie, il faut modéliser chaque composant de la voie afin d'en tenir compte dans les équations dynamiques de la structure. Comme le montre la figure 2.1, il y a 3 éléments de la voie à modéliser : le chargement des roues, le rail et les supports du rail. Ici, on considère que la dalle béton n'a pas d'influence sur la réponse de la voie parce qu'elle est découplée des supports comme mentionné précédemment.

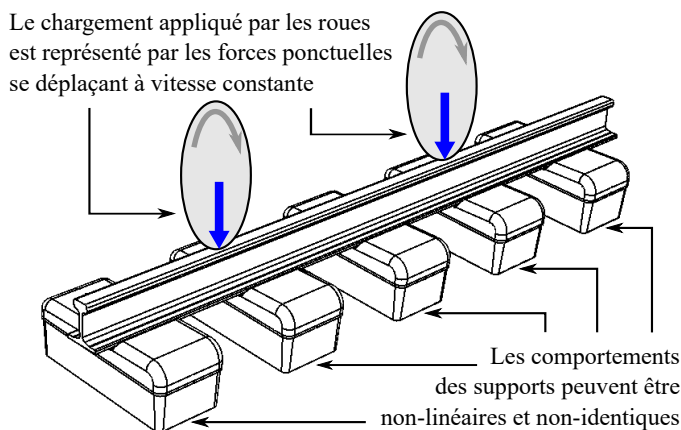


FIGURE 2.1 – Composants à modéliser pour une voie non-ballastée

## Modélisation du chargement appliqué au rail par les roues

On considère que le chargement est constitué de forces constantes qui se déplacent à une vitesse constante. Chaque force mobile est caractérisée par la distance entre cette force et la première force. Ainsi, lorsque le train contient plusieurs voitures de même charge, les forces ponctuelles sont réparties de façon périodique. Ce type de chargement présente alors des avantages dans le calcul des réponses.

## Modélisation du rail

Le rail est modélisé par une poutre. On rappelle que la poutre est une notion mécanique pour modéliser des structures élancées à une dimension (comme le rail) qui sont représentées par une courbe moyenne et une section. Dans la théorie des poutres, on suppose que la déformation de la section est négligeable. On distingue deux modèles de poutre :

- Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli : on considère que la section reste perpendiculaire à la courbe moyenne. En flexion, la poutre d'Euler-Bernoulli a une seule variable qui est le déplacement.
- Modèle de poutre de Timoshenko : par rapport au modèle d'Euler-Bernoulli, ce modèle prend en compte la rotation de la section par rapport à la courbe moyenne. Il y a donc deux variables : le déplacement et la rotation.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les deux modèles de poutre pour modéliser le rail et comparer ces deux modèles pour pouvoir comprendre les limites de la poutre d'Euler-Bernoulli dans la modélisation dynamique d'une voie ferrée.

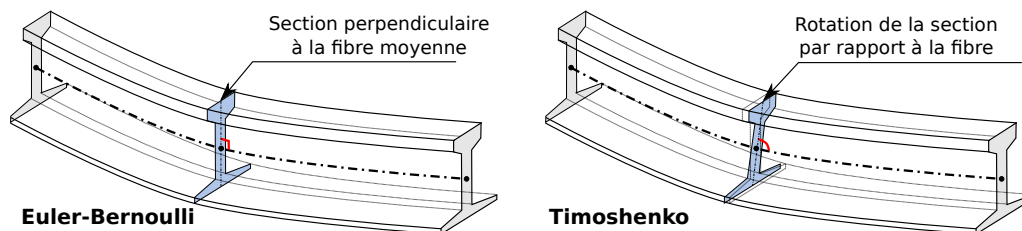


FIGURE 2.2 – Modélisation du rail à l'aide des modèles de poutre d'Euler-Bernoulli (à gauche) et de Timoshenko (à droite)

## Modélisation des supports

Pour le système LVT utilisé dans le tunnel sous la Manche, les essais montrent que le comportement des composants en compression est linéaire en petite déformation. Cependant, ils possèdent aussi un comportement non-linéaire en grande déformation. Cette propriété vient du fait qu'il y a des composants (semelle sous blochet et semelle sous rail) en polymère. Pour modéliser le système LVT, le modèle doit donc prendre en compte le fait que les supports sont bien séparés et qu'ils travaillent indépendamment. De plus, il doit considérer aussi les cas suivants

- Comportement d'un seul support : la loi de comportement peut être linéaire ou non-linéaire.
- Comportement de l'ensemble des supports : lorsque les supports sont identiques, cela définit une voie homogène. S'il y a un ou plusieurs supports de type différent, cela définit une voie non-homogène.

### Choix de modèle

Le tableau 2.1 présente des choix de modèle pour chaque composant de la voie. Pour chaque combinaison des choix des composants, on peut avoir un modèle analytique correspondant (il y a donc  $2 \times 2 \times 2 = 8$  modèles possibles). Dans ce chapitre, nous allons développer des modèles pour une voie homogène (c'est-à-dire, pour laquelle les supports sont identiques). Le modèle existant le plus proche est la poutre périodiquement supportée qui considère une poutre reposant sur des appuis périodiques soumise à des charges mobiles. En revanche, ce modèle ne prend pas en compte la non-linéarité. La nouveauté de cette étude est que l'on considère des supports linéaires et/ou non-linéaires et des poutres d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko. Ces options couvrent donc toutes les possibilités d'une voie homogène.

Modèle du rail	Modèle d'un support	Homogénéité de la voie
Poutre d'Euler-Bernoulli	Comportement linéaire	Supports identiques
Poutre de Timoshenko	Comportement non-linéaire	Supports non-identiques

TABLE 2.1 – Les choix du modèle analytique pour la voie non ballastée

### 2.1.2 Comportement mécanique d'un système LVT

#### Comportement visco-élastique linéaire

Pour le système LVT, on peut utiliser un système masse-ressort comme représenté dans la figure 2.3 pour modéliser le comportement dynamique. Dans ce système, le blochet en béton est la masse rigide, la semelle sous rail et l'ensemble semelle sous blochet et le chausson étant modélisés par deux ressorts-amortisseurs.

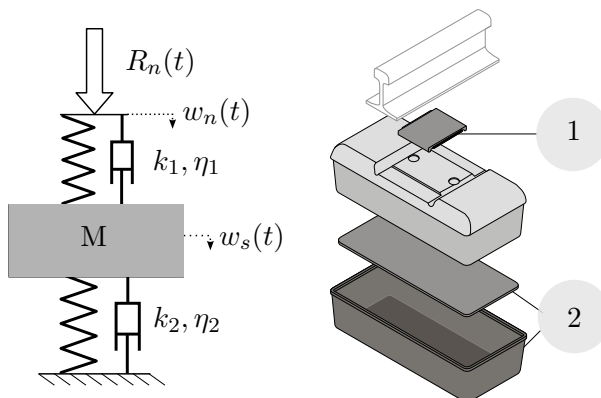


FIGURE 2.3 – Modèle du comportement visco-élastique d'un système de support avec semelle sous rail (1), semelle sous blochet et chausson (2)

Notons  $w_s(t)$  le déplacement vertical du blochet en béton et  $w_n(t)$  le déplacement vertical du rail à la position du support. La force de réaction sur le rail est calculée à l'aide de l'expression suivante :

$$R_n(t) = -\eta_1 \frac{d(w_n(t) - w_s(t))}{dt} - k_1(w_n(t) - w_s(t)) \quad (2.1)$$

où  $k_1, \eta_1$  sont la raideur et le coefficient d'amortissement de la semelle sous rail.

L'équation dynamique du blochet s'écrit

$$M \frac{d^2 w_s(t)}{dt^2} + \eta_2 \frac{dw_s(t)}{dt} + k_2 w_s(t) = -R_n(t) \quad (2.2)$$

où  $k_2, \eta_2$  sont la raideur et le coefficient d'amortissement de la semelle sous blochet et du chausson ;  $M$  est la masse du blochet.

En prenant la transformation de Fourier des équations (2.1) et (2.2), on peut écrire :

$$\begin{cases} \hat{R}_n(\omega) = -(k_1 + i\omega\eta_1) [\hat{w}_n(\omega) - \hat{w}_s(\omega)] \\ [k_2 + i\omega\eta_2 - M\omega^2] \hat{w}_s(\omega) = -\hat{R}_n(\omega) \end{cases}$$

A partir de la dernière équation, on peut déduire la relation suivante :

$$\hat{R}_n(\omega) = -K(\omega) \hat{w}_n(\omega) \quad (2.3)$$

où  $K_s(\omega)$  s'obtient à l'aide de l'équation :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1 + i\omega\eta_1} + \frac{1}{k_2 + i\omega\eta_2 - M\omega^2} \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) définit une relation linéaire entre la force et le déplacement du support appliqués sur le rail et représente la loi de comportement du support dont  $K$  est la rigidité dynamique. Pour les autres supports linéaires, on peut avoir une autre formule pour  $K$  mais cette loi reste toujours la même.

### Comportement non-linéaire à un degré de liberté

La loi de comportement non-linéaire d'un support est représentée par une fonction non-linéaire  $f$  qui dépend du déplacement et de la vitesse du support :

$$R_n(t) = -f(w_n(t), w'_n(t)) \quad (2.5)$$

Par exemple, pour modéliser une fondation qui a deux rigidités différentes en compression et en traction, on utilise une loi bilinéaire qui est décrite par l'expression :

$$f(w_n, w'_n) = \begin{cases} k_p w_n & \text{si } w_n \leq 0 \\ k_t w_n & \text{si } w_n > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Une autre exemple est la loi cubique donnée par :

$$f(w_n, w'_n) = k w_n + \eta w'_n + \varepsilon w_n^3 \quad (2.7)$$

**Remarque :** Dans certains cas, on peut séparer la partie linéaire et non-linéaire en réécrivant l'équation (2.5)

$$R_n(t) = -k w_n - \eta w'_n - f(w_n, w'_n) \quad (2.8)$$

### Comportement non-linéaire à deux degrés de liberté

Dans ce modèle, on considère que le support est un système avec une masse et deux ressorts-amortisseurs comme représenté dans la figure 2.3 sauf que le ressort inférieur a un comportement non-linéaire. La force non-linéaire dépend du déplacement et de la vitesse de la masse :  $f(w_s, w'_s)$ . L'équation dynamique du blochet (2.2) devient alors :

$$M \frac{d^2 w_s(t)}{dt^2} + \eta_2 \frac{dw_s(t)}{dt} + k_2 w_s(t) + f(w_s, w'_s) = -R_n(t) \quad (2.9)$$

Cette équation et l'équation (2.1) décrivent le comportement du système de support non-linéaire à deux degrés de liberté. Avec la partie non-linéaire, on ne peut pas réduire ces deux équations à une relation simple dans le domaine des fréquences comme dans le cas linéaire précédent. Dans la section 2.5.2, on utilisera une méthode numérique pour résoudre ce système d'équation en se basant sur la méthode de balance harmonique.

## 2.2 Modèles pour la voie ferrée homogène

Pour une voie où les supports sont identiques, on peut modéliser le rail comme une poutre infinie posée sur des appuis identiques séparés par la distance  $l$ , comme cela est présenté dans la figure 2.4. La poutre est soumise à des forces mobiles  $Q_j$  de même vitesse  $v$  qui sont caractérisées par les distances à la première charge  $D_j$ .

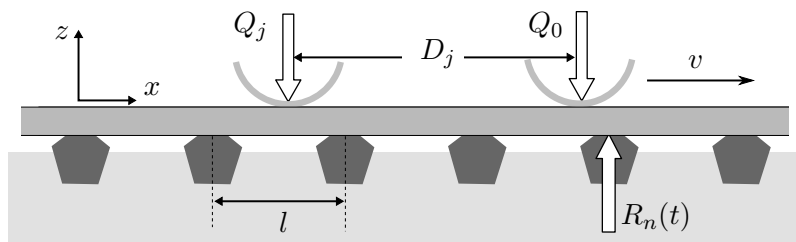


FIGURE 2.4 – Modèle de voie ferroviaire sans ballast dans la direction verticale

Lorsque la voie est stationnaire, les supports jouent le même rôle et ils doivent travailler de la même façon. Ils ont donc la même réponse lorsque les forces mobiles se déplacent d'un support à l'autre. En particulier, les forces de réaction des supports sont décrites par une même fonction mais avec un délai qui est égal au temps de déplacement entre deux supports.

$$R_n(t) = R\left(t - \frac{nl}{v}\right) \quad (2.10)$$

où  $R_n$  est la force de réaction du support à  $x = nl$  et  $R(t)$  est la force de réaction du support à l'origine  $x = 0$ .

La force totale appliquée sur le rail est la somme des forces de réaction  $R_n$  et des forces mobiles  $Q_j$ . On peut écrire cette force à l'aide des fonctions de Dirac :

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(t) \delta(x - nl) - \sum_{j=0}^K Q_j \delta(x + D_j - vt) \quad (2.11)$$

En remplaçant l'équation (2.10) dans la dernière équation, on obtient :

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R\left(t - \frac{x}{v}\right) \delta(x - nl) - \sum_{j=0}^K Q_j \delta(x + D_j - vt) \quad (2.12)$$

La force totale ayant une seule fonction inconnue  $R(t)$ , on dit aussi que c'est un modèle à un degré de liberté. Dans le cas où les supports ne sont pas identiques, la force totale sera décrite par plusieurs fonctions inconnues (ou "plusieurs degrés de liberté"). Nous allons utiliser la force totale (2.12) pour les équations dynamiques de la poutre. D'abord, on utilisera le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Ensuite, on appliquera cette force pour le modèle de poutre de Timoshenko. Enfin, on comparera les deux modèles de poutre avec des applications numériques pour les supports linéaires.

### 2.2.1 Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli

Dans la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli, la déformation en flexion d'une poutre est caractérisée par une seule variable qui est le déplacement de la fibre moyenne de la poutre comme le montre la figure 2.5. Lorsque la poutre est soumise à la force  $F(x, t)$ , ce déplacement vérifie l'équation dynamique suivante :

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} - F(x, t) = 0 \quad (2.13)$$

où  $\rho$  et  $E$  sont la masse volumique et le module d'Young,  $S$  et  $I$  sont la section et le moment d'inertie de la poutre.  $w_r(x, t)$  est le déplacement de la poutre. L'indice  $r$  dénote le rail.

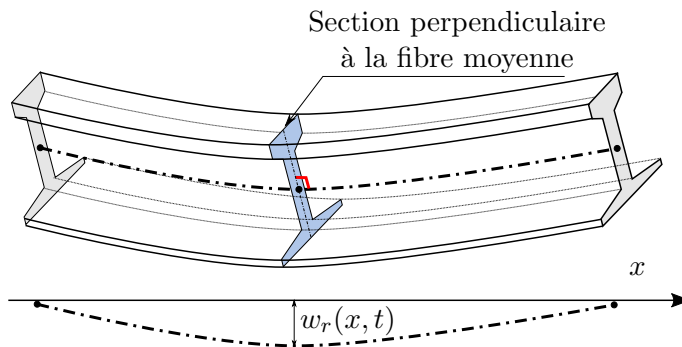


FIGURE 2.5 – Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli en flexion

Pour résoudre l'équation (2.13) avec la force totale présentée dans l'équation (2.12), nous allons réaliser la transformation de Fourier de ces équations par rapport à  $t$  puis par rapport à  $x$ . Ensuite, nous utiliserons la propriété du peigne de Dirac [14] pour déterminer la relation entre le déplacement de la poutre  $w_r(x, t)$  et la force de réaction  $R(t)$ .

Dans un premier temps, en remplaçant l'équation (2.12) dans l'équation (2.13) et en prenant la transformation de Fourier par rapport à la variable temps  $t$ , on obtient l'expression suivante :

$$EI \frac{\partial^4 \hat{w}_r(x, \omega)}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 \hat{w}_r(x, \omega) + \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-i \frac{\omega}{v} (x + D_j)} - \hat{R}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{\omega}{v} x} \delta(x - nl) = 0$$

où  $\hat{w}_r(x, \omega)$  et  $\hat{R}(\omega)$  sont les transformées de Fourier de  $w_r(x, t)$  et  $R(t)$ . En prenant la transformation de Fourier de la dernière équation par rapport à la variable  $x$ , on obtient :

$$(EI k_x^4 - \rho S \omega^2) \tilde{w}_r(k_x, \omega) + 2\pi \delta \left( k_x + \frac{\omega}{v} \right) \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-i \frac{\omega}{v} D_j} - \hat{R}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i (k_x + \frac{\omega}{v}) nl} = 0 \quad (2.14)$$

où  $\tilde{w}_r(k_x, \omega)$  est la transformée de Fourier de  $\hat{w}_r(x, \omega)$  par rapport à  $x$ . Le dernier terme de l'équation (2.14) est un peigne de Dirac qui a la propriété suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x + \frac{\omega}{v})nl} = \frac{2\pi}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_x + \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi}{l}n\right)$$

Ensuite, à partir de l'équation (2.14),  $\tilde{w}_r(k_x, \omega)$  peut être obtenu grâce à l'équation :

$$\tilde{w}_r(k_x, \omega) = \frac{2\pi}{EI(k_x^4 - \lambda_e^4)} \left[ \frac{\hat{R}(\omega)}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_x + \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi}{l}n\right) - \delta\left(k_x + \frac{\omega}{v}\right) \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-i\frac{\omega}{v}D_j} \right]$$

avec  $\lambda_e = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$ . Enfin, en prenant la transformation de Fourier inverse de  $\tilde{w}_r(k_x, \omega)$ , on en déduit l'expression de  $\hat{w}_r(x, \omega)$  qui s'écrit de la façon suivante :

$$\hat{w}_r(x, \omega) = \frac{\hat{R}(\omega)}{lEI} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l})x}}{(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l})^4 - \lambda_e^4} - \sum_{j=0}^K \frac{Q_j e^{-i\frac{\omega}{v}(x+D_j)}}{vEI \left[ (\frac{\omega}{v})^4 - \lambda_e^4 \right]} \quad (2.15)$$

On peut réduire cette dernière équation en posant :

$$\eta_e(x, \omega) = \frac{1}{lEI} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{l}x}}{(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l})^4 - \lambda_e^4} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{Q}_e(\omega) = \mathcal{K}_e(\omega) \sum_{j=0}^K \frac{Q_j e^{-i\frac{\omega}{v}D_j}}{vEI \left[ (\frac{\omega}{v})^4 - \lambda_e^4 \right]} \quad (2.17)$$

où  $\mathcal{K}_e(\omega) = \eta_e(0, \omega)^{-1}$ . On obtient alors :

$$\hat{w}_r(x, \omega) e^{i\frac{\omega}{v}x} = \hat{R}(\omega) \eta_e(x, \omega) - \eta_e(0, \omega) \mathcal{Q}_e(\omega) \quad (2.18)$$

Cette dernière équation décrit une relation dans le domaine des fréquences entre la force de réaction et le déplacement de la poutre. Cette relation est le résultat de l'équation dynamique et de la condition périodique. Elle ne dépend pas du comportement des supports. C'est donc une relation fondamentale des poutres d'Euler-Bernoulli périodiquement supportées.

### Formulation de la fonction $\eta_e(x, \omega)$

Dans les résultats précédents, nous avons utilisé des expressions analytiques assez simples à calculer. La fonction  $\eta_e(x, \omega)$  ne rentre pas de ce cas. En fait, cette fonction est une série infinie. On va réduire cette fonction en utilisant le développement de Fourier. A partir de l'équation (2.16), on obtient :

$$\eta_e(x, \omega) = \frac{l}{2\lambda_e^2 EI} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi n \frac{x}{l}}}{(\frac{\omega l}{v} + 2\pi n)^2 - (l\lambda_e)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi n \frac{x}{l}}}{(\frac{\omega l}{v} + 2\pi n)^2 + (l\lambda_e)^2} \right]$$

On va démontrer que les dernières expressions peuvent être réduites de la façon suivante : pour  $x \in [0, l]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi n \frac{x}{l}}}{(\frac{\omega l}{v} + 2\pi n)^2 - (l\lambda_e)^2} = \frac{e^{i\frac{\omega}{v}x} \sin \lambda_e(l-x) + e^{-i\frac{\omega}{v}x} \sin \lambda_e x}{2l\lambda_e \cos l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v}} \quad (2.19)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi n \frac{x}{l}}}{(\frac{\omega l}{v} + 2\pi n)^2 + (l\lambda_e)^2} = \frac{e^{i\frac{\omega}{v}x} \sinh \lambda_e(l-x) + e^{-i\frac{\omega}{v}x} \sinh \lambda_e x}{2l\lambda_e \cosh l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v}} \quad (2.20)$$



et on obtient donc le résultat suivant pour l'expression de  $\eta_e(x, \omega)$  :

$$\eta_e(x, \omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{v}x}}{4\lambda_e^3 EI} \left[ \frac{\sin \lambda_e(l-x) + e^{-i\frac{\omega l}{v}} \sin \lambda_e x}{\cos l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{\sinh \lambda_e(l-x) + e^{-i\frac{\omega l}{v}} \sinh \lambda_e x}{\cosh l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v}} \right] \quad (2.21)$$

En fait, les termes "de gauche" des équations (2.19) et (2.20) sont deux séries de Fourier par rapport à la variable  $x$ . Pour cette raison, il suffit de démontrer que les développements de Fourier des fonctions "de droite" de ces équations correspondent aux séries "de gauches".

Soit  $f(x)$  la fonction "de droite" de l'équation (2.19) pour  $x \in [0, l]$  et  $f(x+nl) = f(x)$ . Cette fonction est continue par morceaux et périodique. Par conséquent, le développement de Fourier de cette fonction converge. Par définition, le coefficient de la série de Fourier est calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{l} \int_0^l f(x) e^{i2\pi n \frac{x}{l}} dx \\ &= \int_0^l \frac{\left[ \sin \lambda_e(l-x) + e^{-i\frac{\omega l}{v}} \sin \lambda_e x \right] e^{i\left(\frac{\omega l}{v} + 2\pi n\right)x}}{2l^2 \lambda_e \left( \cos l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v} \right)} dx \end{aligned}$$

La dernière expression est une intégration d'une fonction trigonométrique qui peut être calculée et on obtient :

$$c_{-n} = \frac{1}{\left(\frac{\omega l}{v} + 2\pi n\right)^2 - (l\lambda_e)^2}$$

La somme "de gauche" de l'équation (2.19) est donc le développement de Fourier de la fonction  $f(x)$  et l'équation (2.19) est démontrée. De la même façon, on peut démontrer l'équation (2.20). L'équation (2.21) est donc démontrée.

Enfin, on obtient pour  $x = 0$  :

$$\mathcal{K}_e(\omega) = \eta_e(0, \omega)^{-1} = 4\lambda_e^3 EI \left[ \frac{\sin l\lambda_e}{\cos l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{\sinh l\lambda_e}{\cosh l\lambda_e - \cos \frac{\omega l}{v}} \right]^{-1} \quad (2.22)$$

### Calcul des réponses

En écrivant l'équation (2.18) pour  $x = ql$ , on obtient le déplacement vertical de la poutre à la position du support  $q$ .

$$\hat{w}_r(ql, \omega) e^{i\frac{\omega}{v}ql} = \hat{R}(\omega) \eta_e(ql, \omega) - \eta_e(0, \omega) \mathcal{Q}_e(\omega) \quad (2.23)$$

De plus, on considère les réponses du support  $q$  avec un décalage de temps  $t = ql/v$  qui correspond au temps de déplacement des forces mobiles jusqu'à ce support. On peut noter :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_q(t) = w_r \left( ql, t - \frac{ql}{v} \right) \\ \mathbf{R}_q(t) = R_q \left( t - \frac{ql}{v} \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

En combinant les dernières équations avec l'équation (2.10), on peut écrire :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{w}}_q(\omega) = \hat{w}_r(ql, \omega) e^{i\frac{\omega}{v}ql} \\ \hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = \hat{R}(\omega) \end{cases} \quad (2.25)$$

En remplaçant les dernières équations dans l'équation (2.23), on obtient alors l'expression suivante :

$$\hat{\mathbf{w}}_q(\omega) = \hat{\mathbf{R}}_q(\omega)\eta(ql, \omega) - \eta_e(0, \omega)\mathcal{Q}_e(\omega)$$

De plus, l'équation (2.16) nous permet d'écrire  $\eta_e(ql, \omega) = \eta_e(0, \omega)$ . On obtient donc le résultat suivant à partir de la dernière équation :

$$\hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = \mathcal{K}_e(\omega)\hat{\mathbf{w}}_q(\omega) + \mathcal{Q}_e(\omega) \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) est une relation entre le déplacement et la force de réaction du support  $q$ . En combinant cette relation avec la loi de comportement du support (2.3) et en remarquant que  $K_q = K$  et cela quelque soit  $q$  car les supports sont identiques, on obtient les expressions portant sur les réponses du support suivantes :

$$\hat{\mathbf{w}}_q(\omega) = \frac{-\mathcal{Q}_e(\omega)}{\mathcal{K}_e(\omega) + K(\omega)} \quad (2.27)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = \frac{\mathcal{Q}_e(\omega)K(\omega)}{\mathcal{K}_e(\omega) + K(\omega)} \quad (2.28)$$

où  $K(\omega)$  est la rigidité dynamique d'un support.

Pour obtenir le déplacement de la poutre, on remplace l'expression trouvée pour  $\hat{\mathbf{w}}_q(\omega)$  dans l'équation (2.18). On obtient alors :

$$\hat{w}_r(x, \omega) = \mathcal{Q}_e(\omega)e^{i\frac{\omega}{v}x} \left[ \frac{\eta_e(x, \omega)K(\omega)}{\mathcal{K}_e(\omega) + K(\omega)} - \eta_e(0, \omega) \right] \quad (2.29)$$

Les équations (2.27), (2.28) et (2.29) formulent les réponses en fréquence de la poutre et de ses supports. Les réponses en temps peuvent être calculées par la transformation de Fourier inverse de ces résultats. Dans certains cas de charges mobiles, on peut calculer analytiquement ces réponses. Ce calcul sera présenté dans la section 2.4.2.

### 2.2.2 Modèle de poutre de Timoshenko

Le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli pourrait être inapproprié quand on l'applique pour le rail dans certains cas, en particulier quand la distance entre les supports est petite ou la vitesse des charges mobiles (c'est-à-dire la vitesse du train) est grande. Le modèle de poutre de Timoshenko peut donc être plus adapté car il prend en compte la rotation de section de la poutre (voir la figure 2.6). Dans ce modèle, le champ de déformation est caractérisé d'une part par le déplacement et d'autre part par la rotation de la section de la poutre. Lorsque la poutre est soumise à une force  $F(x, t)$ , l'équation dynamique de la poutre est la suivante :

$$\begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} = \kappa S G \left( \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \right) + F(x, t) \\ \rho I \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial x^2} + \kappa S G \left( \frac{\partial w_r}{\partial x} - \phi_r \right) \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $w_r(x, t)$  et  $\phi_r(x, t)$  sont respectivement le déplacement vertical et la rotation de la section de la poutre ;  $\rho$  et  $E$  sont respectivement la masse volumique et le module d'Young de l'acier ;  $S, I, G$  et  $\kappa$  sont respectivement la section, le moment d'inertie, le module de cisaillement et le facteur de cisaillement de la section de la poutre. La force totale  $F(x, t)$  est définie par l'équation (2.12).

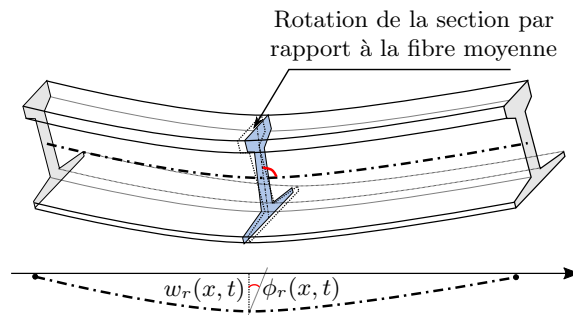


FIGURE 2.6 – Modèle de poutre de Timoshenko en flexion

Les équations (2.30) et (2.12) définissent la dynamique de la poutre en régime stationnaire. Par la suite, nous allons résoudre ces équations en effectuant une transformation de Fourier par rapport au temps  $t$ , puis en utilisant le développement en série de Fourier par rapport à  $x$ .

Notons  $\partial_t$  et  $\partial_x$  la dérivation partielle respectivement par rapport à  $t$  et à  $x$ . En effectuant la transformation de Fourier de l'équation (2.30) par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\begin{cases} \kappa SG \partial_x \hat{\phi}_r = \kappa SG \partial_x^2 \hat{w}_r + \rho S \omega^2 \hat{w}_r + \hat{F}(x, \omega) \\ -\kappa SG \partial_x \hat{w}_r = EI \partial_x^2 \hat{\phi}_r - (\kappa SG - \rho I \omega^2) \hat{\phi}_r \end{cases} \quad (2.31)$$

A partir de l'équation (2.12), on obtient la transformée de Fourier de  $F(x, t)$  :

$$\hat{F}(x, \omega) = e^{-\frac{i\omega}{v}x} \left( \hat{R}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl) - \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-\frac{i\omega}{v}D_j} \right) \quad (2.32)$$

Par conséquent,  $e^{\frac{i\omega}{v}x} \hat{F}$  est une fonction périodique par rapport à  $x$ . Donc, si on pose :

$$\hat{w}_r = \Psi(x, \omega) e^{-\frac{i\omega}{v}x} \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_r = \Phi(x, \omega) e^{-\frac{i\omega}{v}x} \quad (2.33)$$

l'équation (2.31) devient :

$$\begin{cases} \kappa SG \left( \partial_x \Phi - \frac{i\omega}{v} \Phi \right) = \kappa SG \left( \partial_x^2 \Psi - 2 \frac{i\omega}{v} \partial_x \Psi - \frac{\omega^2}{v^2} \Psi \right) + \rho S \omega^2 \Psi + e^{\frac{i\omega}{v}x} \hat{F}(x, \omega) \\ \kappa SG \left( \frac{i\omega}{v} \Psi - \partial_x \Psi \right) = EI \left( \partial_x^2 \Phi - 2 \frac{i\omega}{v} \partial_x \Phi - \frac{\omega^2}{v^2} \Phi \right) - (\kappa SG - \rho I \omega^2) \Phi \end{cases} \quad (2.34)$$

D'après le théorème de Floquet [148], l'équation (2.34) a une solution périodique. On peut trouver cette solution en utilisant les développements de Fourier de  $\Phi$  et  $\Psi$  qui s'écrivent :

$$\Psi(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\omega) e^{i2\pi n \frac{x}{l}} \quad \text{et} \quad \Phi(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(\omega) e^{i2\pi n \frac{x}{l}} \quad (2.35)$$

où  $p_n$  et  $q_n$  sont les coefficients de Fourier de  $\Psi$  et  $\Phi$ . De plus, les coefficients de Fourier de  $e^{\frac{i\omega}{v}x} \hat{F}$  dans l'équation (2.32) sont donnés par :

$$\frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \left[ \hat{R}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl) - \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-\frac{i\omega}{v}D_j} \right] e^{-i2\pi n \frac{x}{l}} dx = \frac{\hat{R}(\omega)}{l} - \frac{\delta_{0n}}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-\frac{i\omega}{v}D_j}$$

où  $\delta_{0n} = 1$  si  $n = 0$  et  $\delta_{0n} = 0$  si  $n \neq 0$ . En effectuant le développement de Fourier de l'équation (2.34), on obtient donc :

$$\begin{cases} \kappa SG \left( \frac{i2\pi n}{l} - \frac{i\omega}{v} \right) q_n = -\kappa SG \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2 p_n + \rho S \omega^2 p_n + \frac{\hat{R}(\omega)}{l} - \frac{\delta_{0n}}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-\frac{i\omega}{v} D_j} \\ \kappa SG \left( \frac{i\omega}{v} - \frac{i2\pi n}{l} \right) p_n = -EI \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2 q_n - (\kappa SG - \rho I \omega^2) q_n \end{cases} \quad (2.36)$$

On obtient ensuite le résultat suivant à partir de la deuxième équation de (2.36) :

$$q_n = \frac{-\kappa SG \left( \frac{i\omega}{v} - \frac{i2\pi n}{l} \right) p_n}{EI \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2 + (\kappa SG - \rho I \omega^2)}$$

Puis, en remplaçant la dernière équation dans l'équation (2.36) on obtient :

$$\begin{cases} p_n = \tilde{p}_n \hat{R}(\omega) - \delta_{0n} \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-\frac{i\omega}{v} D_j} \\ q_n = \tilde{q}_n \hat{R}(\omega) - \delta_{0n} \frac{\tilde{q}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-\frac{i\omega}{v} D_j} \end{cases} \quad (2.37)$$

où  $\tilde{p}_n, \tilde{q}_n$  sont calculés à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{p}_n = \frac{\kappa SG - \rho I \omega^2 + EI \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2}{l z_n} \\ \tilde{q}_n = -\frac{i \kappa SG \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)}{l z_n} \end{cases} \quad (2.38)$$

avec :

$$z_n = \kappa S G E I \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^4 - \rho I S \omega^2 (\kappa G + E) \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2 + \rho S \omega^2 (\rho I \omega^2 - \kappa S G) \quad (2.39)$$

On peut alors obtenir  $\tilde{p}_0$  et  $\tilde{q}_0$  en prenant  $n = 0$  dans l'équation (2.38) :

$$\begin{cases} \tilde{p}_0 = \frac{\kappa SG - \rho I \omega^2 + EI \frac{\omega^2}{v^2}}{l \left[ \kappa SG \left( EI \frac{\omega^4}{v^4} - \rho S \omega^2 \right) - \rho SI (\kappa G + E - \rho v^2) \frac{\omega^4}{v^2} \right]} \\ \tilde{q}_0 = \frac{-i \kappa SG \frac{\omega}{v}}{l \left[ \kappa SG \left( EI \frac{\omega^4}{v^4} - \rho S \omega^2 \right) - \rho SI (\kappa G + E - \rho v^2) \frac{\omega^4}{v^2} \right]} \end{cases} \quad (2.40)$$

En remplaçant l'équation (2.37) dans l'équation (2.35), on obtient :

$$\begin{cases} \Psi(x, \omega) = \hat{R}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_n e^{i2\pi n \frac{x}{l}} - \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-\frac{i\omega}{v} D_j} \\ \Phi(x, \omega) = \hat{R}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_n e^{i2\pi n \frac{x}{l}} - \frac{\tilde{q}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-\frac{i\omega}{v} D_j} \end{cases} \quad (2.41)$$

On peut de plus réduire les dernières expressions en posant :

$$\begin{cases} \eta(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_n e^{i \frac{2\pi n}{l} x} \\ \gamma(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_n e^{i \frac{2\pi n}{l} x} \end{cases} \quad (2.42)$$

Les fonctions  $\eta$  et  $\gamma$  sont des séries infinies qui peuvent être réduites en des fonctions plus simples présentées dans les équations (2.49) et (2.53). En remplaçant les équations (2.41) et (2.42) dans l'équation (2.33), on obtient :

$$\begin{cases} \hat{w}_r(x, \omega) e^{i\frac{\omega}{v}x} = \hat{R}(\omega)\eta(x, \omega) - \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-i\frac{\omega}{v}D_j} \\ \hat{\phi}_r(x, \omega) e^{i\frac{\omega}{v}x} = \hat{R}(\omega)\gamma(x, \omega) - \frac{\tilde{q}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-i\frac{\omega}{v}D_j} \end{cases} \quad (2.43)$$

L'équation (2.43) est une relation entre la transformation de Fourier du déplacement de la poutre et de la force de réaction. Ce résultat est la conséquence de la condition de périodicité et de l'équation dynamique de la poutre de Timoshenko.

### Formulation des fonctions $\eta(x, \omega)$ et $\gamma(x, \omega)$

La fonction  $z_n$  dans l'équation (2.39) est un polynôme d'ordre deux par rapport à  $X = \left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{L}\right)^2$  et on peut le réécrire comme suit :

$$z_n(\omega) = \kappa SGEI \left[ \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2 - \lambda_1^2 \right] \left[ \left( \frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l} \right)^2 + \lambda_2^2 \right] \quad (2.44)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left( \frac{\rho}{E} - \frac{\rho}{\kappa G} \right)^2 + \frac{\rho S \omega^2}{EI}} + \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \\ \lambda_2^2 = \sqrt{\frac{\omega^4}{4} \left( \frac{\rho}{E} - \frac{\rho}{\kappa G} \right)^2 + \frac{\rho S \omega^2}{EI}} - \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \end{cases} \quad (2.45)$$

Pour simplifier l'expression de  $\tilde{p}_n$ , on remplace l'équation (2.44) dans la première équation de (2.38) et on peut écrire :

$$\tilde{p}_n(\omega) = \frac{1}{lEI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left[ \frac{C_1}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \lambda_1^2} - \frac{C_2}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 + \lambda_2^2} \right] \quad (2.46)$$

Ensuite, en prenant l'égalité des coefficients des deux expressions de  $\tilde{p}_n$  dans les équations (2.38) et (2.46), on obtient :

$$\begin{cases} C_1 = 1 - \frac{\rho I \omega^2 - EI \lambda_1^2}{\kappa S G} \\ C_2 = 1 - \frac{\rho I \omega^2 + EI \lambda_2^2}{\kappa S G} \end{cases} \quad (2.47)$$

En remplaçant l'équation (2.46) dans l'équation (2.42), on obtient :

$$\eta(x, \omega) = \frac{1}{lEI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_1 e^{i\frac{2\pi n}{l}x}}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \lambda_1^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_2 e^{i\frac{2\pi n}{l}x}}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 + \lambda_2^2} \right] \quad (2.48)$$

Les équations (2.19) et (2.20) nous permettent de remplacer les deux termes de sommes infinies et on obtient par conséquent l'expression de  $\eta(x, \omega)$  :

$$\eta(x, \omega) = \frac{1}{2EI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left[ \frac{C_1}{\lambda_1} \frac{\sin \lambda_1(l-x) + e^{-i\frac{\omega l}{v}} \sin \lambda_1 x}{\cos l\lambda_1 - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{C_2}{\lambda_2} \frac{\sinh \lambda_2(l-x) + e^{-i\frac{\omega l}{v}} \sinh \lambda_2 x}{\cosh l\lambda_2 - \cos \frac{\omega l}{v}} \right] \quad (2.49)$$

Pour calculer  $\gamma(x, \omega)$ , nous utilisons les équations (2.38) et (2.39) qui nous permettent d'écrire :

$$\tilde{q}_n(\omega) = \frac{-i}{lEI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left[ \frac{\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \lambda_1^2} - \frac{\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 + \lambda_2^2} \right] \quad (2.50)$$

En effectuant la dérivée par rapport à  $x$  des équations (2.19) et (2.20), on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\cos \lambda_1(l-x) - e^{-i\frac{\omega l}{v}} \cos \lambda_1 x}{\cos l\lambda_1 - \cos \frac{\omega l}{v}} = \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i \left(\frac{2\pi n}{l} - \frac{\omega}{v}\right) e^{ix\left(\frac{2\pi n}{l} - \frac{\omega}{v}\right)}}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \lambda_1^2} \quad (2.51)$$

$$\frac{\cosh \lambda_2(l-x) - e^{-i\frac{\omega l}{v}} \cosh \lambda_2 x}{\cosh l\lambda_2 - \cos \frac{\omega l}{v}} = \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i \left(\frac{2\pi n}{l} - \frac{\omega}{v}\right) e^{ix\left(\frac{2\pi n}{l} - \frac{\omega}{v}\right)}}{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi n}{l}\right)^2 + \lambda_2^2} \quad (2.52)$$

Ensuite, en combinant ces deux dernières équations avec l'équation (2.50), on obtient l'expression de  $\gamma(x, \omega)$  dans l'équation (2.42) :

$$\gamma(x, \omega) = \frac{i}{2EI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left[ \frac{\cos \lambda_1(l-x) - e^{-i\frac{\omega l}{v}} \cos \lambda_1 x}{\cos l\lambda_1 - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{\cosh \lambda_2(l-x) - e^{-i\frac{\omega l}{v}} \cosh \lambda_2 x}{\cosh l\lambda_2 - \cos \frac{\omega l}{v}} \right] \quad (2.53)$$

*Remarque* : On peut obtenir l'expression de  $\eta(0, \omega)$  en prenant  $x = 0$  dans l'équation (2.49) :

$$\eta(0, \omega) = \frac{1}{2EI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \left[ \frac{C_1 \sin \lambda_1 l}{\lambda_1 \cos l\lambda_1 - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{C_2 \sinh \lambda_2 l}{\lambda_2 \cosh l\lambda_2 - \cos \frac{\omega l}{v}} \right] \quad (2.54)$$

### Calcul des réponses

Pour calculer la force de réaction d'un support, nous allons calculer le déplacement de la poutre à la position  $x = ql$  qui est aussi le déplacement du support  $q$  :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{w}}_q(\omega) = \hat{w}_r(ql, \omega) e^{i\frac{\omega}{v} ql} \\ \hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = \hat{R}(\omega) \end{cases} \quad (2.55)$$

En remplaçant  $x = ql$  dans l'équation (2.43), on obtient :

$$\hat{w}_r(ql, \omega) e^{i\frac{\omega}{v} ql} = \hat{R}(\omega) \eta(ql, \omega) - \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-i\frac{\omega}{v} D_j} \quad (2.56)$$

Par conséquent, on peut également écrire :

$$\hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = \mathcal{K}_T(\omega) \hat{\mathbf{w}}_q(\omega) + \mathcal{Q}_T(\omega) \quad (2.57)$$

où  $\mathcal{K}_T(\omega)$  et  $\mathcal{Q}_T(\omega)$  sont définis par :

$$\mathcal{K}_T(\omega) = \eta^{-1}(0, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_T(\omega) = \mathcal{K}_T(\omega) \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-i\frac{\omega}{v} D_j} \quad (2.58)$$

$\tilde{p}_0(\omega)$  et  $\eta(0, \omega)$  sont calculés à l'aide des équations (2.40) et (2.54).

En combinant les équations (2.57) et (2.3), on obtient les réponses des supports :

$$\begin{cases} \hat{R}(\omega) = \frac{K(\omega)\mathcal{Q}_T(\omega)}{\mathcal{K}_T(\omega) + K(\omega)} \\ \hat{w}_s(\omega) = \frac{-\mathcal{Q}_T(\omega)}{\mathcal{K}_T(\omega) + K(\omega)} \end{cases} \quad (2.59)$$

Ensuite, en remplaçant les derniers résultats et l'équation (2.58) dans l'équation (2.43) on obtient le déplacement de la poutre :

$$\begin{cases} \hat{w}_r(x, \omega) = \mathcal{Q}_T(\omega) \left( \frac{K(\omega)\eta(x, \omega)}{K(\omega) + \mathcal{K}_T(\omega)} - \eta(0, \omega)e^{-i\frac{\omega}{v}x} \right) \\ \hat{\phi}_r(x, \omega) = \mathcal{Q}_T(\omega) \left( \frac{K(\omega)\gamma(x, \omega)}{K(\omega) + \mathcal{K}_T(\omega)} - \gamma(0, \omega)e^{-i\frac{\omega}{v}x} \right) \end{cases} \quad (2.60)$$

Les équations (2.59) et (2.60) décrivent complètement les réponses de la voie dans le domaine des fréquences. Les réponses en temps sont ensuite calculées par la transformation inverse de Fourier.

### 2.2.3 Système équivalent d'une poutre périodiquement supportée

Dans les parties précédentes, on a déduit la relation entre les forces de réaction des supports  $\hat{\mathbf{R}}_q(\omega)$  et leurs déplacements  $\hat{\mathbf{w}}_q(\omega)$  à partir de l'équation dynamique de la poutre (quelque soit le modèle). Cette relation est décrite par l'équation (2.26) pour la poutre d'Euler-Bernoulli et l'équation (2.57) pour la poutre de Timoshenko. En comparant ces deux équations, on peut les écrire sous une forme commune comme suit :

$$\hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = \mathcal{K}(\omega)\hat{\mathbf{w}}_q(\omega) + \mathcal{Q}(\omega) \quad (2.61)$$

où les fonctions  $\kappa$  et  $\mathcal{Q}$  ont des indices  $E$  pour la poutre d'Euler-Bernoulli et  $T$  pour la poutre de Timoshenko. Ces fonctions peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\omega) &= \mathcal{K}(\omega) \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_j Q_j e^{-i\omega \frac{D_j}{v}} \\ \mathcal{K}(\omega) &= 2EI(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left( \frac{C_1}{\lambda_1} \frac{\sin l\lambda_1}{\cos l\lambda_1 - \cos \frac{l\omega}{v}} - \frac{C_2}{\lambda_2} \frac{\sinh l\lambda_2}{\cosh l\lambda_2 - \cos \frac{l\omega}{v}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.62)$$

avec les paramètres qui sont présentés dans le tableau 2.2.

La relation entre la force et le déplacement dans l'équation (2.61) est applicable pour tous les supports et elle ne dépend pas du comportement des supports. Elle est le résultat de l'équation dynamique de la poutre et de la condition de périodicité des supports. C'est une propriété de base de la poutre périodiquement supportée. Cette relation s'apparente à une loi de comportement d'un ressort de raideur  $\mathcal{K}(\omega)$  et de pré-force  $\mathcal{Q}(\omega)$  comme le montre la figure 2.7. Il faut remarquer que la raideur équivalente  $\mathcal{K}(\omega)$  est un nombre réel et elle dépend de la fréquence. De plus, on voit que ces deux modèles ne diffèrent que par les expressions des paramètres dans les expressions de la raideur  $\mathcal{K}$  et de la pré-force  $\mathcal{Q}$ .

- *Raideur équivalente* : elle ne dépend que de deux groupes de paramètres :  $\lambda_{1,2}$  et  $C_{1,2}$ . La raideur équivalente ne diffère dans les deux modèles que par la prise en compte du module de cisaillement  $\kappa G$  et de la vitesse du son  $\sqrt{E/\rho}$ , prise en compte qui est faite dans le modèle de poutre de Timoshenko. En ignorant la contribution de ces deux termes, la raideur équivalente des deux modèles est identique.

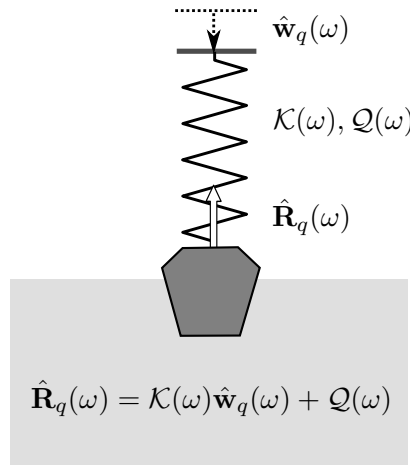


FIGURE 2.7 – Système équivalent de la poutre périodiquement supportée

Poutre d'Euler-Bernoulli	Poutre de Timoshenko
$C_{1,2} = 1$	$C_{1,2} = 1 - \frac{\rho I \omega^2 \mp EI \lambda_{1,2}^2}{\kappa S G}$
$\lambda_{1,2}^2 = \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$	$\lambda_{1,2}^2 = \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{EI} + \frac{\omega^4}{4} \left( \frac{\rho}{E} - \frac{\rho}{\kappa G} \right)^2} \pm \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right)$
$\tilde{p}_0 l = \frac{1}{EI \frac{\omega^4}{v^4} - \rho S \omega^2}$	$\tilde{p}_0 l = \frac{\kappa S G - \rho I \omega^2 + EI \frac{\omega^2}{v^2}}{\kappa S G \left( EI \frac{\omega^4}{v^4} - \rho S \omega^2 \right) - \rho S I (\kappa G + E - \rho v^2) \frac{\omega^4}{v^2}}$

TABLE 2.2 – Formulation du système équivalent d'une poutre périodiquement supportée

- *Pré-force* : La pré-force ne dépend pas seulement des charges mobiles mais aussi des caractéristiques de la poutre. On trouve aussi que le modèle de Timoshenko est identique à celui d'Euler-Bernoulli lorsqu'on ignore les termes qui dépendent du cisaillement et de la vitesse du son.

En conclusion, lorsque le module de cisaillement et la vitesse du son dans le modèle de Timoshenko sont très grands et que les termes concernant leur inverses sont négligeables, les deux modèles de poutre donnent la même formulation de la réponse dynamique du système. Ce phénomène est totalement cohérent avec la théorie des poutres classiques.

L'avantage du système équivalent est que l'on peut modéliser séparément la poutre et les supports. Par exemple, on peut calculer facilement les réponses des supports linéaires, grâce au système équivalent en combinant les deux équations (2.3) et (2.61). On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_q(\omega) = \frac{-\mathcal{Q}(\omega)}{\mathcal{K}(\omega) + K(\omega)} \\ \mathbf{R}_q(\omega) = \frac{\mathcal{Q}(\omega)K(\omega)}{\mathcal{K}(\omega) + K(\omega)} \end{cases} \quad (2.63)$$

Pour les supports non-linéaire, on peut utiliser les méthodes semi-analytique ou numériques pour calculer les réponses. Ces méthodes sont présentées dans la section 2.5.



Densité	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	7850
Module d'Young	$E$	GPa	210
Module de cisaillement	$G$	GPa	81
Coefficient de cisaillement	$\kappa$		0.4
Section	$S$	10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup>	7.69
Moment d'inertie en flexion	$I$	10 <sup>-5</sup> m <sup>4</sup>	3.055
Distance entre deux traverses	$l$	m	0.6
Force mobile	$Q$	kN	100
Vitesse de force mobile	$v$	km/h	300

TABLE 2.3 – Paramètres d'une poutre périodiquement supportée

### Exemple du système équivalent

Nous allons maintenant prendre l'exemple d'une voie non-ballastée avec des paramètres donnés dans le tableau 2.3. La figure 2.8 montre la rigidité  $\kappa$  en fréquence pour différentes vitesses avec les modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. On voit que cette rigidité atteint un maximum au niveau des valeurs de fréquences  $(0.5 + n)v/l$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). En fait, les fréquences  $nv/l$  correspondent au mouvement de la force d'un support à l'autre et ces maximum expliquent le couplage de la poutre et de ses supports. De plus, la rigidité équivalente peut être négative à hautes fréquences. Ce phénomène vient du fait que les supports peuvent être soumis à des forces de traction quand les forces mobiles s'approchent ou s'éloignent du support et cela, particulièrement à haute vitesse. Cette remarque est importante parce que les supports sont plutôt conçus pour travailler en compression.

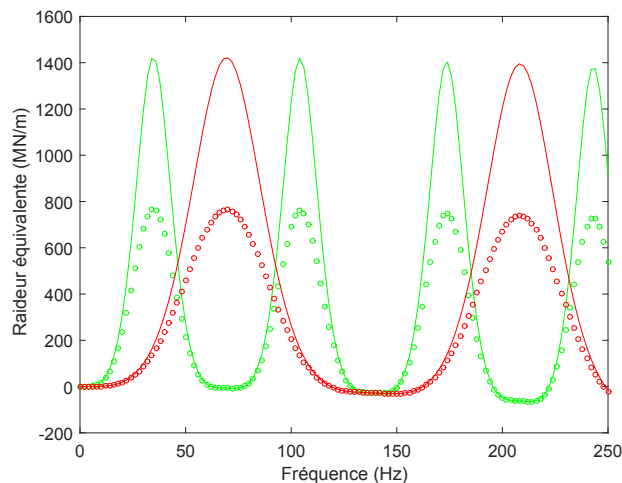


FIGURE 2.8 – Raideurs équivalentes de la poutre de Timoshenko (cercle) et d'Euler-Bernoulli (courbe continue) avec la vitesse de 150 km/h (vert) et 300 km/h (rouge)

La figure 2.9 montre la pré-force  $Q_e$  pour une force mobile de 100kN à différentes vitesses pour les deux modèles de poutre. Il faut remarquer que la pré-force est plus importante pour les basses fréquences. De plus, plus la vitesse de la force est grande, plus les hautes fréquences sont excitées. Ce phénomène pourrait être intéressant pour déterminer la bande de fréquence utile dans l'analyse dynamique de la voie à grande vitesse.

On voit que les deux modèles de poutre donnent presque la même pré-force équivalente. D'autre part, la poutre de Timoshenko donne une rigidité équivalente inférieure à celle

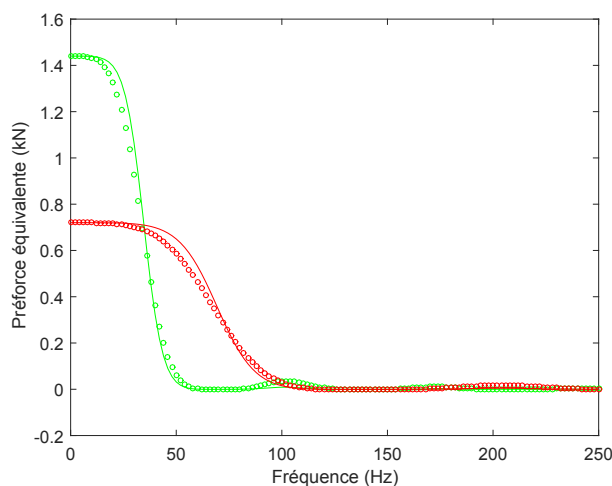


FIGURE 2.9 – Pré-forces équivalentes de la poutre de Timoshenko (cercle) et d’Euler-Bernoulli (courbe continue) avec la vitesse de 150 km/h (vert) et 300 km/h (rouge)

obtenue pour la poutre d’Euler-Bernoulli. On remarque que la différence se fait uniquement au niveau des pics de la rigidité qui correspondent aux hautes fréquences. En d’autres termes, l’influence des modèles de poutre est plus importante pour les hautes fréquences. Dans les sections suivantes, nous allons comparer les réponses des supports avec les deux modèles.

## 2.3 Application aux voies du tunnel sous la Manche

### 2.3.1 Influence du modèle de poutre

Les réponses ont été calculées pour le support linéaire en utilisant l’équation (2.60) avec les paramètres donnés dans le tableau 2.3 et les paramètres du support  $k_s = 20$  MN/m,  $\eta_s = 0,1$  mNs/m. La figure 2.10 représente la force de réaction et le déplacement du support dans le domaine des fréquences et dans le domaine temporel. Bien que la rigidité équivalente des deux modèles de poutre soient différentes, les réponses sont pratiquement identiques, car elles sont plus affectées par les basses fréquences. En outre, la plus grande vitesse conduit à des réponses avec des amplitudes plus petites mais, d’une plus grande plage de fréquences. Ensuite, nous allons étudier l’influence du modèle de poutre sur les réponses à l’aide d’études paramétriques.

La théorie de Timoshenko montre que les deux modèles de poutre peuvent être équivalents en statique lorsque  $\frac{EI}{\kappa l^2 SG} \ll 1$ . On remarque que la valeur correspondant à l’exemple précédent est 0,0715, qui est proche de la limite de cette condition. Par conséquent, il est nécessaire d’étudier l’influence du modèle de poutre sur les réponses dynamiques. Les paramètres externes qui pourraient avoir une incidence sur les réponses sont la vitesse de la force et la rigidité du support.

Les figures 2.11 et 2.12 montrent le maximum de la force de réaction par rapport à ces paramètres. Lorsque la vitesse de la force mobile ou de la raideur du support augmentent, la force de réaction augmente et la différence entre les deux modèles de poutre est plus importante. Ces résultats montrent que le modèle de Timoshenko devrait être utilisé pour les forces mobiles de grande vitesse ou des supports de grande rigidité.

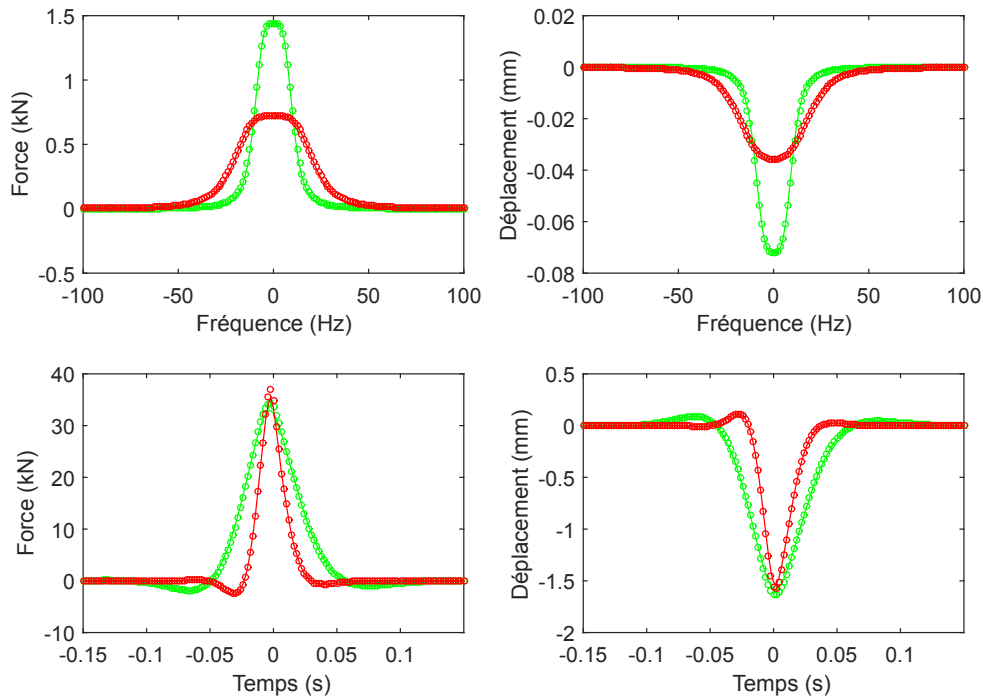


FIGURE 2.10 – Réponses des supports avec le modèle de poutre de Timoshenko (cercle) et d'Euler-Bernoulli (ligne continue) avec la vitesse 150 km/h (vert) et 300 km/h (rouge)

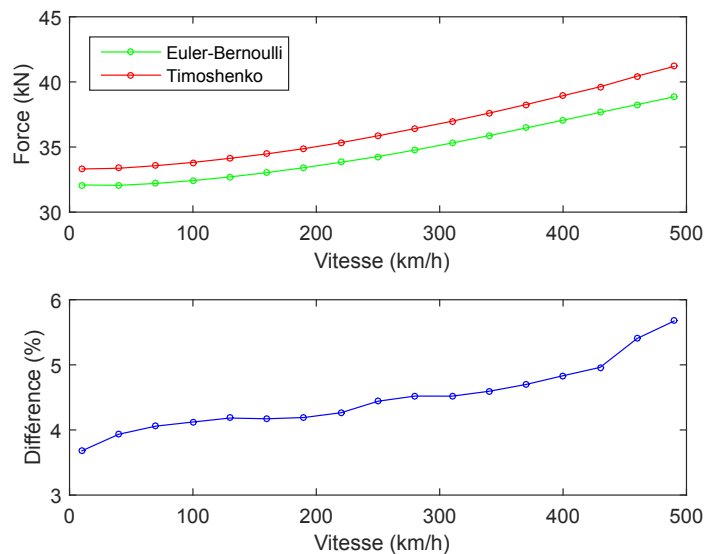


FIGURE 2.11 – Influence de la vitesse des forces sur les forces de réaction

### 2.3.2 Comparaison mesure et modèle

On considère la voie sans ballast dans une zone saine d'origine qui est présentée dans la section 1.3. Les paramètres du rail et du système de Sonneville sont donnés dans le tableau 2.4. Les paramètres équivalents du dispositif sous blochet (la semelle et le chausson) dans

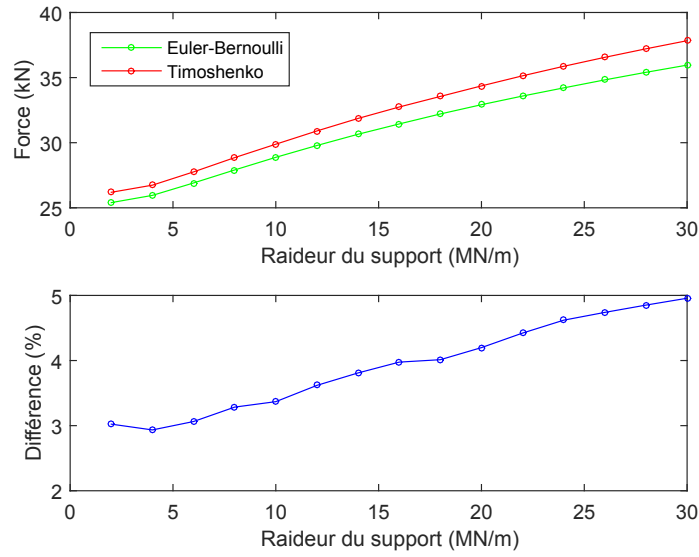


FIGURE 2.12 – Influence de la raideur du support sur les forces de réaction

le modèle sont calculés par :

$$\begin{cases} \eta_2 = \eta_s + \eta_c = 0.35 \text{ MNs/m} \\ k_2 = \left( \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_c} \right)^{-1} = 18 \text{ MN/m} \end{cases}$$

Rail	Module d'Young ( $E$ )	GPa	200
	Masse par unité de longueur ( $\rho S$ )	kg/m	60
	Rigidité en flexion ( $EI$ )	MNm <sup>2</sup>	6,3
Blochet	Masse ( $M$ )	kg	100
	Distance entre 2 blochets ( $L$ )	m	0,6
Semelle sous rail	Amortissement ( $\eta_1$ )	MNs/m	1.0
	Rigidité ( $k_1$ )	MN/m	200
Semelle sous blochet	Amortissement ( $\eta_s$ )	MNs/m	0,3
	Rigidité ( $k_s$ )	MN/m	40
Chausson	Amortissement ( $\eta_c$ )	Ns/m <sup>2</sup>	-
	Rigidité ( $k_c$ )	MN/m	-
Chargement	Vitesse ( $v$ )	m/s	45
	Charge de roues ( $Q$ )	kN	75
	Longueur de boggie ( $D$ )	m	3
	Longueur d'une voiture ( $H$ )	m	18

TABLE 2.4 – Paramètres de la voie dans une zone saine d'origine

Nous allons calculer les réponses du support en déplacement et en force de réaction à l'aide des formules (2.27) et (2.28) du modèle de voie avec la poutre d'Euler-Bernoulli et les comparer avec les résultats de mesure. Les figures 2.14 et 2.13 montrent un bon accord entre le résultat du modèle et les mesures.

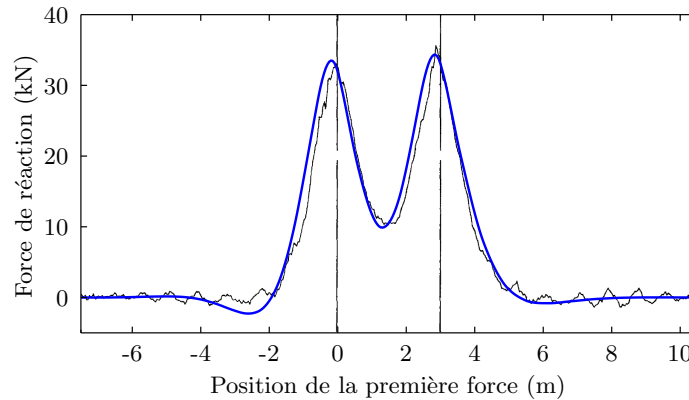


FIGURE 2.13 – Forces de réaction obtenues par les mesures in situ (noir) et par le modèle analytique (bleu)

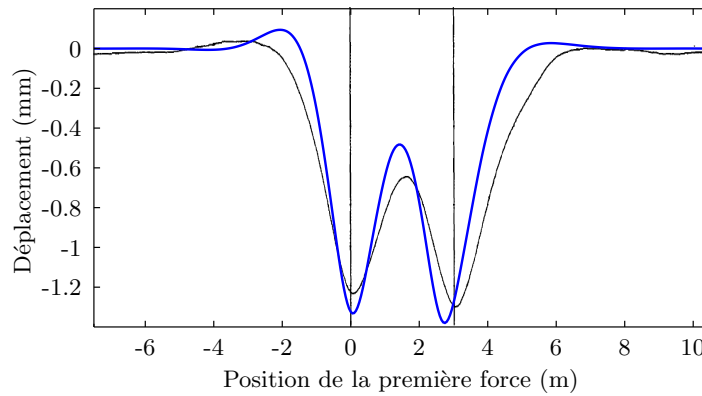


FIGURE 2.14 – Déplacements du rail au niveau d'un support obtenus par les mesures in situ (noir) et par le modèle analytique (bleu)

## 2.4 Autres modèles de voie homogène

### 2.4.1 Réponse au passage d'un train

On considère un chargement qui est une série périodique de charges mobiles. Ce type de chargement peut être utilisé pour représenter le chargement généré par un train de plusieurs wagons de mêmes masses comme illustré sur la figure 2.15 (par exemple, un train de voyageurs complètement occupé). Ce chargement est modélisé par des charges identiques ( $Q_j = Q$  avec  $j \in \mathbb{Z}$ ) caractérisées par les distances à une charge de référence comme suit :

$$D_j = \begin{cases} jH & \text{pour la roue amont} \\ jH + D & \text{pour la roue aval} \end{cases}$$

où  $H$  et  $D$  sont respectivement la longueur d'un wagon et la distance entre deux roues d'un boggie.

En utilisant la propriété du peigne de Dirac, on peut réécrire la pré-force du système

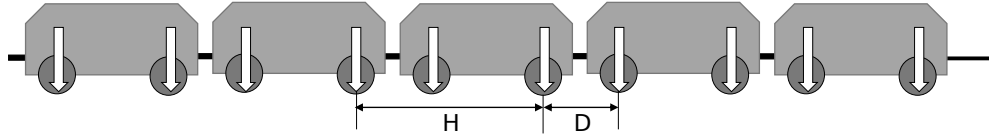


FIGURE 2.15 – Chargement par un train comme une série périodique de charges

équivalent dans l'équation (2.62) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\omega) &= \mathcal{K}(\omega)\tilde{p}_0(\omega)\frac{l}{v}\sum_j Q_j e^{-i\omega\frac{D_j}{v}} \\ &= \mathcal{K}(\omega)\tilde{p}_0(\omega)\frac{l}{v}Q\left(1 + e^{-i\omega\frac{D}{v}}\right)\sum_j e^{-i\omega\frac{H}{v}j} \\ &= \mathcal{K}(\omega)\tilde{p}_0(\omega)\frac{2\pi Ql}{H}\left(1 + e^{-i\omega\frac{D}{v}}\right)\sum_j \delta\left(\omega + \frac{2\pi v}{H}j\right) \end{aligned}$$

En remplaçant la dernière équation dans l'équation (2.63) et en prenant la transformation de Fourier inverse, on obtient :

$$\hat{\mathbf{w}}_q(t) = \frac{-Ql}{H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{K}(\omega)\tilde{p}_0(\omega)(1 + e^{-i\omega\frac{D}{v}})}{\mathcal{K}(\omega) + K(\omega)}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega + \frac{2\pi v}{H}j\right)e^{i\omega t}d\omega$$

En utilisant la propriété du peigne de Dirac et en séparant le terme correspondant à  $j = 0$ , on déduit :

$$\mathbf{w}_q(t) = \frac{-2Ql}{HK(\omega=0)} - \frac{Ql}{H}\sum_{\substack{j\neq 0 \\ \omega=\omega_j}}\frac{\mathcal{K}(\omega)\tilde{p}_0(\omega)}{\mathcal{K}(\omega) + K(\omega)}\left(1 + e^{-i2\pi j\frac{D}{H}}\right)e^{i\omega t} \quad (2.64)$$

où  $\omega_j = 2\pi j\frac{v}{H}$ . De la même façon, avec les équations (2.29) et (2.30), les résultats analytiques suivants peuvent être obtenus pour la réponse du système :

$$\mathbf{R}_q(t) = \frac{2Ql}{H} + \frac{Ql}{H}\sum_{\substack{j\neq 0 \\ \omega=\omega_j}}\frac{\mathcal{K}(\omega)K(\omega)\tilde{p}_0(\omega)}{\mathcal{K}(\omega) + K(\omega)}\left(1 + e^{-i2\pi j\frac{D}{H}}\right)e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

où  $K(\omega)$  est la raideur dans le domaine fréquentiel du support. On voit que les réponses sont des séries de Fourier de fréquence de base  $f = \frac{v}{H}$ .

Tandis que la réponse en fréquence de l'équation (2.63) est valable pour tous les types de chargement, les formules de la réponse dans le temps (2.64) et (2.65) sont valables uniquement pour des chargements périodiques. On s'intéresse à comparer ces deux formules pour déterminer la différence entre les réponses à des chargements uniques et périodiques.

Nous calculons alors la force de réaction pour une seule charge  $Q = 75$  kN et pour une série de charges séparées par la distance  $H = 18$  m (ici on prend  $Q_1 = 75$  kN,  $Q_2 = 0$  et  $D = 0$ ). La figure 2.16 montre que les deux réponses sont superposées avec un décalage dans le temps égal à  $H/v$ . On peut donc estimer la force de réaction pour une seule charge mobile grâce à la formule (2.64) pour plusieurs charges.

La figure 2.17 montre le déplacement du rail sur une longueur de wagon  $H$  aux instants où une roue se situe en 3 différentes positions : au-dessus d'un support, à égale distance entre deux supports et au-dessus du support voisin. On voit que la forme de la courbe de déplacement ne change quasiment pas mais elle se déplace avec le mouvement du train.

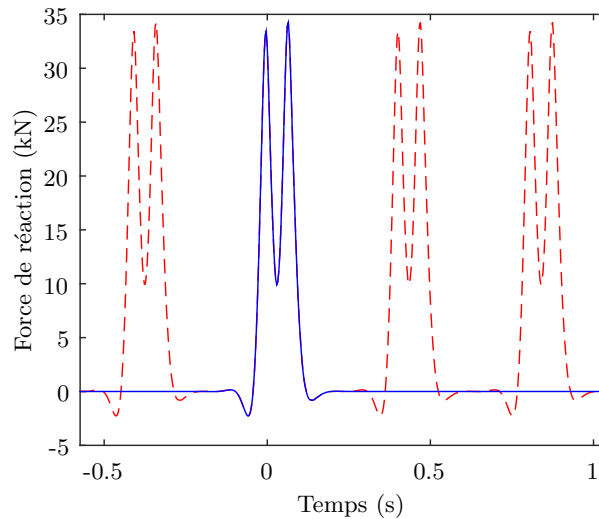


FIGURE 2.16 – Forces de réaction d’un support calculées pour une seule charge (courbe rouge) et pour un chargement périodique (courbe en pointillés)

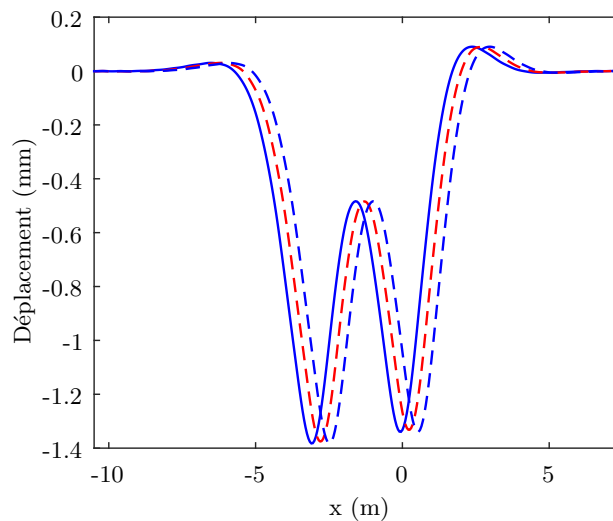


FIGURE 2.17 – Déplacement vertical du rail sur une longueur de wagon pour 3 positions d’une roue : au-dessus d’un support (courbe bleu continue), à égale distance entre deux supports (courbe rouge discontinue) et au-dessus du support voisin (courbe bleu discontinue)

## 2.4.2 Modèle de voie dans la direction longitudinale

Le rail peut être soumis à des forces longitudinales mobiles à cause du frottement entre la roue et le rail. Ces forces excitent le déplacement uniaxial du rail qui est décrit par l’équation suivante (poutre d’Euler-Bernoulli) :

$$\rho S \frac{\partial^2 u_r(x, t)}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u_r(x, t)}{\partial x^2} - F_x(x, t) = 0 \quad (2.66)$$

où  $u_r(x, t)$  est le déplacement longitudinale. La force totale  $F_x(x, t)$  se compose des forces longitudinales mobiles  $F_j$  et des forces de réaction des supports  $G_n(t)$ . Il faut noter que la force  $G_n(t)$  vient de la force de cisaillement du système de support. Quand le système est

stationnaire, on utilise la même condition périodique qui est décrite par :  $G_n(t) = G(t - \frac{nl}{v})$ . On a donc :

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(t - \frac{x}{v}\right) \delta(x - nl) - \sum_{j=0}^K F_j \delta(x - D_j - vt)$$

En prenant la transformation de Fourier de la dernière équation par rapport au temps  $t$ , on obtient :

$$-\rho S \omega^2 \hat{u}_r(x, \omega) - ES \frac{d^2 \hat{u}_r(x, \omega)}{dx^2} = \hat{G}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{v}x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nl) - \frac{1}{v} \sum_{j=0}^K F_j e^{i\frac{\omega}{v}(x-D_j)} \quad (2.67)$$

Ensuite, en prenant la transformation de Fourier en  $x$ , on obtient :

$$S(E\lambda^2 - \rho\omega^2) \tilde{u}_r(k_x, \omega) = \hat{G}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{\omega}{v} + k_x)nl} - 2\pi \delta(k_x + \frac{\omega}{v}) \sum_{j=0}^K \frac{F_j}{v} e^{-i\frac{\omega}{v}D_j} \quad (2.68)$$

En utilisant la propriété de peigne de Dirac, on déduit donc :

$$\tilde{u}_r(k_x, \omega) = \frac{2\pi}{S(Ek_x^2 - \rho\omega^2)} \left[ \frac{\hat{G}(\omega)}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_x + \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l}\right) - \delta\left(k_x + \frac{\omega}{v}\right) \sum_{j=0}^K \frac{F_j}{v} e^{-i\frac{\omega}{v}D_j} \right] \quad (2.69)$$

Enfin, on prend la transformation de Fourier inverse de la dernière équation et on obtient le résultat suivant :

$$\hat{u}_r(x, \omega) = \frac{\hat{G}(\omega)}{lS} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l})x}}{E\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \rho\omega^2} - \sum_{j=0}^K \frac{F_j e^{i\frac{\omega}{v}(x-D_j)}}{vS \left[E\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \rho\omega^2\right]} \quad (2.70)$$

Si on prend  $x = 0$ , la dernière équation devient :

$$\hat{u}_r(0, \omega) = \frac{\hat{G}(\omega)}{lS} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{E\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \rho\omega^2} - \sum_{j=0}^K \frac{F_j e^{-i\frac{\omega}{v}D_j}}{vS\omega^2 \left(\frac{E}{v^2} - \rho\right)} \quad (2.71)$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} \eta_L(\omega) &= \frac{1}{lSE} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{l}\right)^2 - \frac{\rho}{E}\omega^2} \\ &= \frac{1}{\omega S \sqrt{\rho E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{l\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}}{\left(l\frac{\omega}{v} + 2\pi n\right)^2 - \left(l\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)^2} \end{aligned}$$

$\eta_L(\omega)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\eta_L(\omega) = \frac{1}{2\omega S \sqrt{\rho E}} \frac{\sin\left(l\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)}{\cos\left(l\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) - \cos\left(\frac{l}{v}\omega\right)} \quad (2.72)$$

A partir de l'équation (2.71), on a :

$$\hat{u}_r(0, \omega) = \hat{G}(\omega) \eta_L(\omega) - \sum_{j=0}^K \frac{F_j e^{-i\frac{\omega}{v}D_j}}{vS\omega^2 \left(\frac{E}{v^2} - \rho\right)}$$



ou on peut écrire :

$$\hat{G}(\omega) = \mathcal{K}_L(\omega)\hat{u}_r(0, \omega) + \mathcal{F}_L(\omega) \quad (2.73)$$

avec :

$$\mathcal{K}_L(\omega) = \frac{1}{\eta_L} = 2\omega S \sqrt{\rho E} \frac{\cos(l\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}) - \cos(\frac{l}{v}\omega)}{\sin(l\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}})} \quad (2.74)$$

$$\mathcal{F}_L(\omega) = \frac{v\mathcal{K}_L(\omega)}{\omega^2(E - \rho v^2)} \sum_{j=0}^K F_j e^{-i\frac{\omega}{v}D_j} \quad (2.75)$$

L'équation (2.73) nous permet d'obtenir une relation entre le déplacement et la force appliquée sur un support du rail. Cette relation est linéaire comme le ressort équivalent dans les parties précédentes mais avec des raideurs et forces différentes. En combinant cette relation avec le comportement d'un support, on trouvera analytiquement la réponse des supports et de la poutre.

### Calcul des réponses dans la direction longitudinale

On applique maintenant cette relation pour le comportement visco-élastique linéaire du système de Sonnevile dans la direction longitudinale.

Notons  $u_t(t)$  le déplacement du blochet selon la direction longitudinale. La semelle sous le rail est soumise à un cisaillement  $u_r(t) - u_t(t)$ . La force de réaction est donc calculée par :

$$G(t) = -g_1(u_r(0, t) - u_t(t)) \quad (2.76)$$

où  $g_1$  est le module de cisaillement de la semelle sous rail dans la direction longitudinale.

Le déplacement longitudinal du blochet selon la longueur du rail est donné par l'équation dynamique suivante :

$$M \frac{d^2 u_t(t)}{dt^2} + c_3 \frac{du_t(t)}{dt} + (g_1 + k_3)u_t = g_1 u_r(0, t) \quad (2.77)$$

où  $c_3, k_3$  sont le coefficient d'amortissement et la raideur dans la direction longitudinale des parois amont et aval du chausson.

En prenant la transformation de Fourier des équations (2.76) et (2.77), on en déduit :

$$\hat{u}_t(\omega) = \frac{g_1}{-M\omega^2 - ic_3\omega + g_1 + k_3} \hat{u}_r(0, \omega) \quad (2.78)$$

$$\hat{G}(\omega) = \frac{-M\omega^2 - ic_3\omega + k_3}{-M\omega^2 - ic_3\omega + g_1 + k_3} \hat{u}_r(0, \omega) = -k_L(\omega)\hat{u}_r(0, \omega) \quad (2.79)$$

avec :

$$k_L(\omega) = \frac{-M\omega^2 - i\eta_3\omega + c_1}{-M\omega^2 - i\eta_3\omega + c_1 + c_2}$$

A partir des équations (2.79) et (2.73), on obtient la réponse dans la direction longitudinale :

$$\hat{u}_r(0, \omega) = \frac{-\mathcal{F}_L(\omega)}{\mathcal{K}_L(\omega) + k_L(\omega)} \quad \hat{G}(\omega) = \frac{k_L(\omega)\mathcal{F}_L(\omega)}{\mathcal{K}_L(\omega) + k_L(\omega)} \quad (2.80)$$

## 2.5 Modèles de voie homogène non-linéaire

Dans la section 2.2, nous avons vu que les poutres périodiquement supportées peuvent être remplacées par un système équivalent. Ce modèle permet de simplifier les calculs dynamiques de la structure si les supports sont non-linéaires. Cependant, une difficulté vient du fait que l'équation du système équivalent est dans le domaine fréquentiel tandis que la loi de comportement est souvent dans le domaine temporel. Pour résoudre ce problème, nous allons proposer deux méthodes itératives dans cette section. La première méthode concerne les supports non-linéaires à un degré de liberté et la deuxième pour la non-linéarité à deux degrés de liberté.

### 2.5.1 Support non-linéaire à un degré de liberté

On considère un système de support qui a un comportement non linéaire, comme indiqué dans la section 2.1.2 avec la force de réaction d'un support donnée par l'équation (2.5). Ce comportement s'écrit de la façon suivante :

$$R(t) = -(k_s w + \eta_s w' + f(w)) \quad (2.81)$$

où  $k_s$  et  $\eta_s$  sont respectivement la raideur et le coefficient d'amortissement du support,  $f(w)$  est une fonction non-linéaire qui décrit le comportement non-linéaire du support. La dernière équation et l'équation du système équivalent (2.62) décrivent complètement les réponses des supports (la force  $R$  et le déplacement  $w$ ). Pour résoudre ces deux équations, on va d'abord simplifier la partie linéaire de la loi de comportement. Si on pose :

$$P(t) = R(t) + k_s w(t) + \eta_s w'(t) \quad (2.82)$$

En effectuant la transformation de Fourier, on peut aussi écrire de la façon suivante l'équation (2.82) :

$$\hat{P}(\omega) = \hat{R}(\omega) + K_s(\omega)\hat{w}(\omega) \quad (2.83)$$

où  $K_s = k_s + i\omega\eta_s$ . En remplaçant l'équation (2.82) dans l'équation (2.81) et l'équation (2.83) dans l'équation (2.62), on obtient :

$$\begin{cases} P(t) = -f(w(t)) \\ \hat{P}(\omega) = (\mathcal{K}_T(\omega) + K_s(\omega))\hat{w}(\omega) + \mathcal{Q}_T(\omega) \end{cases} \quad (2.84)$$

Lorsque  $f(w) = 0$ , la dernière équation donne exactement le même résultat que pour les supports linéaires présentés dans la section précédente. Lorsque  $f(w) \neq 0$ , on a obtenu une équation dans le domaine fréquentiel et l'autre dans le domaine temporel. Pour résoudre ce problème, on va discrétiser les fonctions inconnues  $P(t)$  et  $w(t)$  et leurs transformées de Fourier. On peut remarquer que ces fonctions (et leurs transformées de Fourier) ont des supports bornés (voir les exemples numériques dans la section précédente). Par conséquent, on peut utiliser le théorème d'échantillonnage de Shannon [84] pour discrétiser ces fonctions.

### Méthode numérique

On suppose qu'il existe  $T, \Omega$  tels que :

$$\begin{cases} P(t) \simeq 0, w(t) \simeq 0 & \text{si } |t| \geq T \\ \hat{P}(\omega) \simeq 0, \hat{w}(\omega) \simeq 0 & \text{si } |\omega| \geq \Omega \end{cases} \quad (2.85)$$

On va discrétiser les réponses  $w(t)$ ,  $P(t)$  et leurs transformées de Fourier en considérant leurs valeurs à  $t = n\Delta t$  et  $\omega = n\Delta\omega$  avec  $|n| \leq N$ . La discrétisation doit satisfaire le théorème d'échantillonnage de Shannon [84] :

$$\Omega \geq \frac{\pi}{\Delta t} \text{ and } T \geq \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad (2.86)$$

Parce que  $T = N\Delta t$  et  $\Omega = N\Delta\omega$ , la dernière condition devient :

$$N\Delta t\Delta\omega \geq \pi \quad (2.87)$$

La discrétisation de la première équation de (2.84) devient :

$$P_n = -f(w_n) \quad |n| \leq N \quad (2.88)$$

où  $P_n = P(n\Delta t)$  et  $w_n = w(n\Delta t)$ . Pour discrétiser la deuxième équation de (2.84), on a besoin de calculer les transformations de Fourier des réponses discrètes  $P_n$  et  $w_n$ , qui sont données par (voir [84]) :

$$\begin{cases} \hat{P}_d(\omega) = \sum_n P_n e^{-in\omega\Delta t} = \frac{\hat{P}(\omega)}{\Delta t} & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \\ \hat{w}_d(\omega) = \sum_n w_n e^{-in\omega\Delta t} = \frac{\hat{w}(\omega)}{\Delta t} & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \end{cases} \quad (2.89)$$

Par conséquent, la discrétisation de la transformation de Fourier ( $\hat{P}$ ,  $\hat{w}$ ) est déduite à partir de la dernière équation :

$$\begin{cases} \hat{P}_m = \hat{P}(m\Delta\omega) = \Delta t \sum_n P_n e^{-inm\Delta t\Delta\omega} & |m\Delta\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \\ \hat{w}_m = \hat{w}(m\Delta\omega) = \Delta t \sum_n w_n e^{-inm\Delta t\Delta\omega} & |m\Delta\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \end{cases} \quad (2.90)$$

En combinant les conditions des équations (2.87), (2.88) et la dernière équation, on obtient :

$$N\Delta\omega\Delta t = \pi \quad (2.91)$$

et on a :

$$\begin{cases} \hat{P}_m = \Delta t \sum_{n=-N}^N P_n e^{-inm\Delta t\Delta\omega} & |m| \leq N \\ \hat{w}_m = \Delta t \sum_{n=-N}^N w_n e^{-inm\Delta t\Delta\omega} & |m| \leq N \end{cases} \quad (2.92)$$

On peut écrire la dernière équation de la façon suivante :

$$\underline{\hat{P}} = \underline{A} \underline{P} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{w}} = \underline{A} \underline{w} \quad (2.93)$$

où  $\underline{P}$  et  $\underline{w}$  sont les vecteurs colonnes de  $P_n$  et  $w_n$  ( $-N \leq n \leq N$ ) et  $\underline{A}$  est une matrice carrée définie par l'équation (2.92). Puis, en remplaçant la dernière équation dans la deuxième équation de (2.84), on obtient :

$$\underline{A} \underline{P} = \underline{K} \underline{A} \underline{w} + \underline{Q} \quad (2.94)$$

où  $\underline{Q}$  est le vecteur colonne de  $Q_n = \mathcal{Q}_T(n\Delta\omega)$  et  $\underline{K}$  est une matrice diagonale de  $K_n = \mathcal{K}_T(n\Delta\omega) + K_s(n\Delta\omega)$  (avec  $-N \leq n \leq N$ ).

Finalement, en combinant les équations (2.88) et (2.94), on obtient :

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}} \underline{w} + \underline{\underline{A}} \underline{f}(w) + \underline{Q} = 0 \quad (2.95)$$

où  $\underline{f}$  est un vecteur colonne de  $f_n = f(w_n)$ .

L'équation (2.95) est non-linéaire par rapport à  $\underline{w}$ . Si  $\underline{f}(w) \equiv 0$  (c'est-à-dire un support linéaire), on peut obtenir la solution de cette équation comme suit :

$$\underline{w}_0 \equiv -(\underline{\underline{K}} \underline{\underline{A}})^{-1} \underline{Q} = -\underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{\underline{K}}^{-1} \underline{Q}) \quad (2.96)$$

Le dernier résultat est exactement la discrétisation de la solution analytique dans l'équation (2.27). Dans un cas général, on peut utiliser un solveur numérique pour l'équation (2.95). Ici, on utilise le solveur "fsolve" de MATLAB. Une difficulté est que ce solveur ne calcule pas des solutions complexes. Nous avons donc besoin de décomposer l'inconnue  $\underline{w}$  en deux parties réelles et imaginaires. La valeur initiale du solveur est prise comme la solution linéarisée présentée dans l'équation (2.96).

### Exemple

On considère un support non-linéaire dont la loi de comportement suit l'équation (2.81) avec  $k_s = 20\text{MN/m}$ ,  $\eta_s = 0.1\text{MN/s/m}$  et la loi non-linéaire donnée par  $f(w) = cw^3$  avec  $c = 10\text{kN/mm}^3$ . On va calculer les réponses par la méthode numérique donnée par l'équation (2.96) avec  $N = 250$ ,  $\Delta t = 0.001\text{s}$  (donc,  $\Delta\omega = \pi/N\Delta t = 4\pi$  qui correspond à la fréquence de 2Hz). La figure 2.18 montre les résultats avec les deux modèles de poutres et

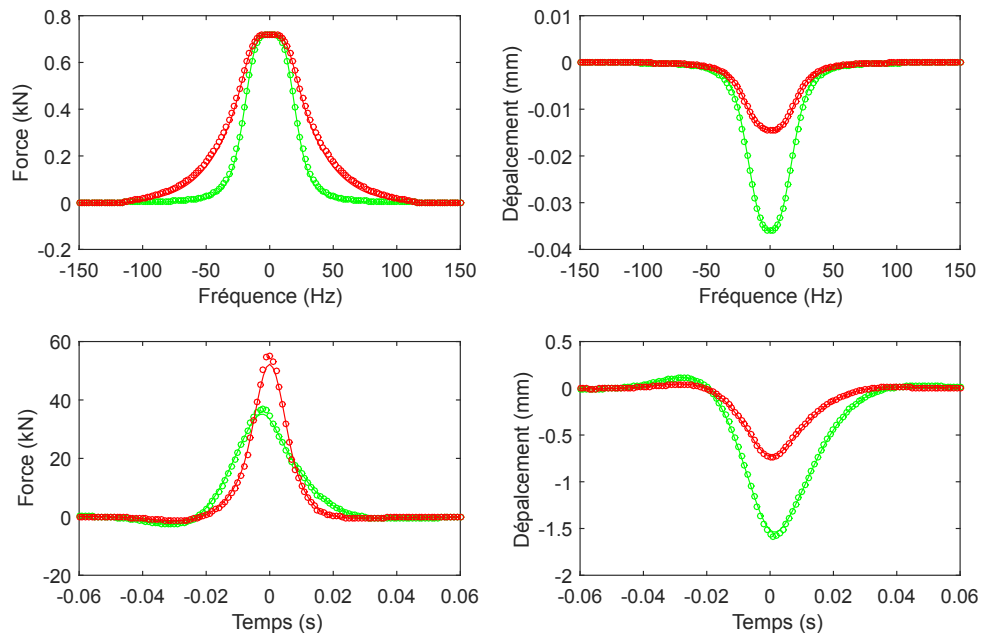


FIGURE 2.18 – Réponses des supports avec le modèle poutre de Timoshenko (cercles) and d'Euler-Bernoulli (courbe continue) avec les supports linéaires (vert) et non-linéaires (rouge)

des supports linéaires et non-linéaires. On voit que les réponses ont des formes similaires pour les deux modèles de poutres et de comportements du support. En particulier, les

forces de réaction dans le domaine des fréquences ont le même pic maximum pour une valeur de fréquence nulle, mais le support non linéaire a de plus grandes amplitudes dans les hautes fréquences.

### 2.5.2 Support non-linéaire à deux degrés de liberté

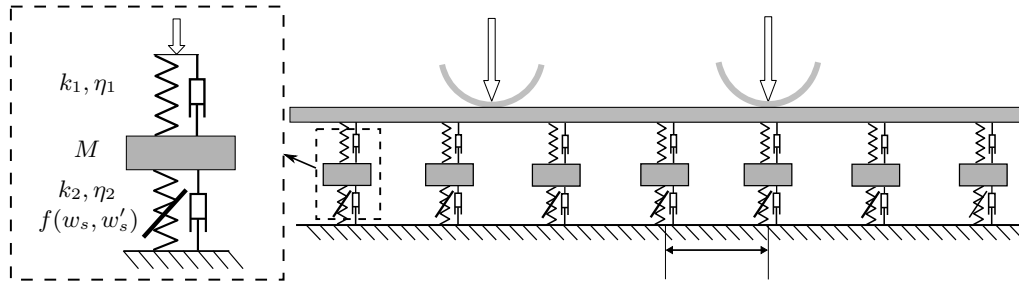


FIGURE 2.19 – Modèle de voie non-linéaire à deux degrés de liberté

On considère un système de support non-linéaire comme dans la figure 2.19 de la section 2.1.2 avec le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Ce système contient une semelle visco-élastique sous le rail de raideur  $k_1$  et de coefficient d'amortissement  $\eta_1$ . La semelle sous blochet a un comportement non-linéaire de raideur  $k_2$ , de coefficient d'amortissement  $\eta_2$  et la partie non-linéaire décrite par une fonction  $f(w_s, w'_s)$ , où  $w_s$  et  $w'_s$  sont respectivement le déplacement et la vitesse du blochet. La force de réaction du blochet est donnée par l'équation (2.9) :

$$R(t) = -\eta_1 \frac{d}{dt} [w_r(0, t) - w_s(t)] - k_1 (w_r(0, t) - w_s(t)) \quad (2.97)$$

En effectuant la transformation de Fourier de la dernière équation par rapport au temps  $t$ , on obtient :

$$\hat{R}(\omega) = -\kappa_p [\hat{w}_r(0, \omega) - \hat{w}_s(\omega)] \quad (2.98)$$

où  $\kappa_p = i\omega\eta_1 + k_1$ . La combinaison de la dernière équation et de l'équation (2.61) conduit au résultat suivant :

$$\begin{cases} \hat{w}_r(0, \omega) = \frac{\kappa_p \hat{w}_s(\omega) - \mathcal{Q}_e}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} \\ \hat{R}(\omega) = \frac{\kappa_p}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} (\mathcal{K}_e \hat{w}_s(\omega) + \mathcal{Q}_e) \end{cases} \quad (2.99)$$

L'équation dynamique du blochet est donnée par l'expression suivante :

$$M \frac{d^2 w_s(t)}{dt^2} + \eta_2 \frac{dw_s}{dt} + k_2 w_s + f(w_s, w'_s) = -R(t) \quad (2.100)$$

où  $M$  est la masse du blochet,  $f(w_s, w'_s)$  est la partie non linéaire de la force de réaction de la fondation. En substituant l'équation (2.97) dans la dernière équation, on a :

$$M w_s'' + \eta_s w_s' + k_s w_s + f = \eta_1 w_r'(0, t) + k_1 w_r(0, t) \quad (2.101)$$

où  $\eta_s = \eta_1 + \eta_2$  et  $k_s = k_1 + k_2$ . En effectuant la transformation de Fourier et la transformation de Fourier inverse du terme "de droite" de l'équation (2.101), on obtient le résultat suivant :

$$\eta_1 w_r'(0, t) + k_1 w_r(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_p \hat{w}_r(0, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.102)$$

En remplaçant l'équation (2.102) dans l'équation (2.101), on peut écrire :

$$Mw_s'' + \eta_s w_s' + k_s w_s + f(w_s, w_s') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_p^2 \hat{w}_s(\omega) - \kappa_p \mathcal{Q}_e}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} e^{i\omega t} d\omega \quad (2.103)$$

L'équation (2.103) est l'équation dynamique du blochet. Cette équation est similaire à celle des oscillateurs non linéaires mais, elle contient des termes correspondants à l'interaction entre la poutre et le blochet. Afin de simplifier ces termes, on considère que la solution périodique existe lorsque les forces mobiles sont une série périodique (voir la section 2.4.1).

### Série périodique de forces mobiles

Quand un train contient de nombreux wagons identiques, les charges par roues sont égales ( $Q_j = Q$ ) et les distances  $D_j$  sont données par :

$$D_j = \begin{cases} jH & \text{pour les roues aval} \\ jH + D & \text{pour les roues amont} \end{cases} \quad (2.104)$$

où  $D$  est la distance entre les roues arrière d'un bogie avant et  $H$  est la distance entre deux roues avant de deux bogies. Cette série de charges mobiles peut être utilisée pour représenter les charges limites d'une voie ferrée. En tenant compte des charges mobiles comme d'une série périodique infinie ( $j \in \mathbb{Z}$ ), on va utiliser la périodicité de cette série afin de réduire le terme du côté droit de l'équation (2.103).

En substituant l'équation (2.104) dans l'équation (2.62), nous obtenons :

$$\mathcal{Q}_e = \frac{Q\mathcal{K}_e}{vEI} \frac{(1 + e^{-i\omega \frac{D}{v}})}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \lambda_e^4} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{H}{v} j} \quad (2.105)$$

De plus, la propriété du peigne de Dirac [14] nous permet d'écrire :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{H}{v} j} = 2\pi \frac{v}{H} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi v}{H} j\right) \quad (2.106)$$

Donc, l'équation (2.105) devient :

$$\mathcal{Q}_e = 2\pi \frac{Q\mathcal{K}_e}{EIH} \frac{1 + e^{-i\omega \frac{D}{v}}}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \lambda_e^4} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi v}{H} j\right) \quad (2.107)$$

En substituant la dernière équation dans le dernier terme de l'équation (2.103), on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_p \mathcal{Q}_e e^{i\omega t} d\omega}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} = \sum_{\substack{j=-\infty \\ \omega=\omega_j}}^{\infty} \frac{Q e^{i\omega_j t}}{EIH} \left[ \frac{1 + e^{-i\omega \frac{D}{v}}}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \lambda_e^4} \frac{\kappa_p \mathcal{K}_e}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} \right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{i\omega_j t} \quad (2.108)$$

où  $\omega_j = 2\pi j \frac{v}{H}$  et  $F_j$  est calculée par l'expression suivante :

$$F_j = \frac{Q}{EIH} \left[ \frac{1 + e^{-i\omega \frac{D}{v}}}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \lambda_e^4} \frac{\kappa_p \mathcal{K}_e}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} \right]_{\omega=\omega_j} \quad (2.109)$$

Par conséquent, en substituant l'équation (2.108) dans l'équation (2.103), on peut écrire :

$$Mw_s'' + \eta_s w_s' + k_s w_s + f(w_s, w_s') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_p^2 \hat{w}_s(\omega) e^{i\omega t}}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} d\omega - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{i\omega_j t} \quad (2.110)$$

L'équation (2.110) décrit une oscillation forcée avec la force d'excitation  $\sum F_j e^{i\omega_j t}$ . Cette force est périodique avec une fréquence  $f_0 = v/H$ . Par conséquent, on cherche une solution périodique de  $w_s(t)$  qui peut être représentée par une série de Fourier :

$$w_s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\omega_j t} \quad (2.111)$$

Cette expression peut également être écrite comme suit :

$$\hat{w}_s(\omega) = 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \delta(\omega - \omega_j)$$

En substituant la dernière équation dans le terme "de droite" de l'équation (2.110), on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_p^2 \hat{w}_s(\omega) e^{i\omega t}}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} d\omega = \sum_{\substack{j=-\infty \\ \omega=\omega_j}}^{\infty} c_j e^{i\omega_j t} \left[ \frac{\kappa_p^2}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} \right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j P_j e^{i\omega_j t} \quad (2.112)$$

où  $P_j$  est calculé par :

$$P_j = \left[ \frac{\kappa_p^2}{\kappa_p + \mathcal{K}_e} \right]_{\omega=\omega_j} \quad (2.113)$$

Donc, l'équation (2.110) devient :

$$Mw_s'' + \eta_s w_s' + k_s w_s + f = \sum_j c_j P_j e^{i\omega_j t} - \sum_j F_j e^{i\omega_j t} \quad (2.114)$$

où  $F_j$  et  $P_j$  sont calculés par les équations (2.109) et (2.113). En particulier, on a  $P_0 = k_1$  et  $F_0 = 2Q \frac{L}{H}$ .

Dans l'équation (2.114)  $F_j$  correspond aux charges mobiles et  $P_j$  correspond au couplage du système de support et de la poutre. Ces quantités dépendent des paramètres de la poutre et de la semelle sous rail  $\kappa_p$  mais, ils ne dépendent pas des paramètres de la semelle sous blochet. Par conséquent, en utilisant la périodicité des charges mobiles, on a réduit l'équation dynamique (2.110) à une équation d'un oscillateur forcé. Ainsi, on peut utiliser des techniques analytiques ou numériques pour les oscillateurs non linéaires forcés afin de trouver la solution périodique de cette équation. Dans la partie suivante, nous allons présenter une méthode numérique pour résoudre cette équation.

### Méthode d'itération

On va utiliser la méthode de balance harmonique [108] et la procédure itérative [99, 102] pour les oscillateurs non-linéaires pour développer une méthode numérique pour résoudre l'équation (2.114). En effectuant le développement de Fourier de cette équation, on obtient :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (Mw_s'' + \eta_s w_s' + k_s w_s + f) e^{-i\omega_j t} dt = c_j P_j - F_j$$

En substituant l'équation (2.111) dans la dernière équation et en regroupant les termes similaires, on peut écrire :

$$(k_s + i\omega_j \eta_s) c_j + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(w_s, w'_s) e^{-i\omega_j t} dt = (M\omega_j^2 + P_j) c_j - F_j \quad (2.115)$$

où  $w'_s$  est calculé à l'aide de l'équation (2.111) :

$$w_s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\omega_j t}, \quad w'_s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} i\omega_j c_j e^{i\omega_j t} \quad (2.116)$$

L'équation (2.115) est l'équilibre harmonique de l'équation (2.111). Cette équation établit pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  un système d'équations par rapport à  $\{c_j\}$ . Lorsque le comportement de la fondation est linéaire, c'est-à-dire  $f(w_s, w'_s) = 0$ , on peut obtenir la solution analytique comme suit :

$$c_j = \frac{F_j}{P_j + M\omega_j^2 - i\omega_j \eta_s - k_s} \quad (\forall j \in \mathbb{Z}) \quad (2.117)$$

Pour une fonction non linéaire  $f(w_s, w'_s)$ , on peut calculer la solution périodique en utilisant les techniques de l'oscillateur non linéaire. Ici, on utilise les procédures d'itération en considérant les  $n$  premiers harmoniques de la solution :

$$w_{nm}(t) = \sum_{j=-n}^n c_j^m e^{i\omega_j t} \quad \forall m \geq 1 \quad (2.118)$$

Dans un premier temps, on prend la valeur initiale  $c_j^1 = 0 \forall j$ . Ensuite, on construit la série  $\{c_j^m\}$  telle que  $c_j^m \rightarrow c_j$  quand  $m, n \rightarrow \infty$  en insérant un indice  $m$  dans l'équation (2.115). Une telle série  $\{c_j^m\}$  est donnée par :

$$\begin{cases} (i\eta_s \omega_j + k_s) c_j^{m+1} + \mathcal{F}_j^m = (M\omega_j^2 + P_j) c_j^m - F_j & \text{pour } |j| \leq n_0 \\ (i\eta_s \omega_j + k_s) c_j^m + \mathcal{F}_j^m = (M\omega_j^2 + P_j) c_j^{m+1} - F_j & \text{pour } n_0 < |j| \leq n \end{cases}$$

où  $0 \leq n_0 \leq n$  et  $n_0$  sont choisis pour la convergence de la série  $\{c_j^m\}$ . Ici, les coefficients  $\mathcal{F}_j^m$  sont calculés à l'aide de l'expression :

$$\mathcal{F}_j^m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(w_{nm}, w'_{nm}) e^{-i\omega_j t} dt \quad (2.119)$$

On peut réécrire la série  $\{c_j^m\}$  comme suit

$$c_j^{m+1} = \begin{cases} \frac{M\omega_j^2 + P_j}{k_s + i\eta_s \omega_j} c_j^m - \frac{\mathcal{F}_j^m + F_j}{k_s + i\eta_s \omega_j} & \forall |j| \leq n_0 \\ \frac{k_s + i\eta_s \omega_j}{M\omega_j^2 + P_j} c_j^m + \frac{\mathcal{F}_j^m + F_j}{M\omega_j^2 + P_j} & \forall |j| > n_0 \end{cases} \quad (2.120)$$

La dernière équation définit des séquences récurrentes  $\{c_j^m\}$ . Si ces séquences  $\{c_j^m\}$  convergent pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  lorsque  $n, m \rightarrow \infty$ , en remplaçant  $c_j^m, c_j^{m+1}$  par leurs limites, on retrouve l'équation (2.115). Par conséquent, ces séquences convergent vers la solution de l'équation (2.115). Dans la section suivante, nous allons utiliser ces séquences pour calculer la réponse du blochet sur les différentes fondations.



Masse du rail	$\rho S$	$\text{kgm}^{-1}$	60
Raideur du rail	$EI$	$\text{MNm}^2$	6.3
Vitesse du train	$v$	$\text{km/h}$	160
Charge par roue	$Q$	$\text{kN}$	100
Masse du blochet	$M$	$\text{kg}$	90
Distance entre les supports	$l$	$\text{m}$	0.6
Longueur de boogie	$D$	$\text{m}$	3
Longueur de wagon	$H$	$\text{m}$	18
Raideur de semelle sous rail	$k_1$	$\text{MNm}^{-1}$	200
Coefficient d'amortissement de semelle sous rail	$\eta_1$	$\text{MNsm}^{-1}$	1.0
Raideur linéaire de fondation	$k_2$	$\text{MNm}^{-1}$	20
Coefficient d'amortissement linéaire de fondation	$\eta_2$	$\text{MNsm}^{-1}$	0.2

TABLE 2.5 – Paramètres d'une voie ferrée sans ballast

### Exemples

**Support linéaire :** On considère un support linéaire, c'est-à-dire  $f(w_s, w'_s) = 0$ . La solution analytique est donnée par l'équation (2.117). Maintenant, nous allons calculer la réponse par la méthode numérique. En remplaçant  $f(w_s, w'_s) = 0$  dans l'équation (2.119), on obtient  $\mathcal{F}_j^m = 0$  et l'équation (2.120) devient :

$$c_j^{m+1} = \begin{cases} \frac{(M\omega_j^2 + P_j) c_j^m - F_j}{k_s + i\eta_s\omega_j} & \text{si } 0 \leq |j| \leq n_0 \\ \frac{(k_s + i\eta_s\omega_j) c_j^m + F_j}{M\omega_j^2 + P_j} & \text{si } n_0 < |j| \leq n \end{cases}$$

En combinant la dernière équation et l'équation (2.117), on obtient :

$$c_j^{m+1} - c_j = \begin{cases} \frac{M\omega_j^2 + P_j}{k_s + i\eta_s\omega_j} (c_j^m - c_j) & \text{si } 0 \leq |j| \leq n_0 \\ \frac{k_s + i\eta_s\omega_j}{M\omega_j^2 + P_j} (c_j^m - c_j) & \text{si } n_0 < |j| \leq n \end{cases}$$

La dernière équation décrit des séquences géométriques qui convergent vers zéro si et seulement si :

$$\begin{cases} \left| \frac{M\omega_j^2 + P_j}{k_s + i\eta_s\omega_j} \right| < 1 & \text{si } 0 \leq |j| \leq n_0 \\ \left| \frac{k_s + i\eta_s\omega_j}{M\omega_j^2 + P_j} \right| < 1 & \text{si } n_0 < |j| \leq n \end{cases}$$

Par conséquent, si  $n_0$  est choisi pour que ces dernières conditions soient satisfaites, la procédure d'itération converge vers la solution analytique. Dans le cas contraire, cette procédure ne converge pas.

La figure 2.20 représente la réponse en déplacement d'un support linéaire déterminée en utilisant la méthode numérique avec différents nombres d'itération. Les paramètres de la voie sont donnés dans le tableau 2.5. Ici, on trace le déplacement vertical du blochet dans une période des charges mobiles qui correspond au temps mis par le train pour se déplacer sur une longueur  $H$ . Le temps  $t = 0$  correspond au moment où la roue avant se

situé sur le support. Les calculs ont été effectués avec le nombre d'harmoniques  $n = 15$  et le paramètre  $n_0 = 0$ . On voit que les résultats numériques s'accordent bien avec le résultat analytique lorsque le nombre d'itérations est supérieur à 15.

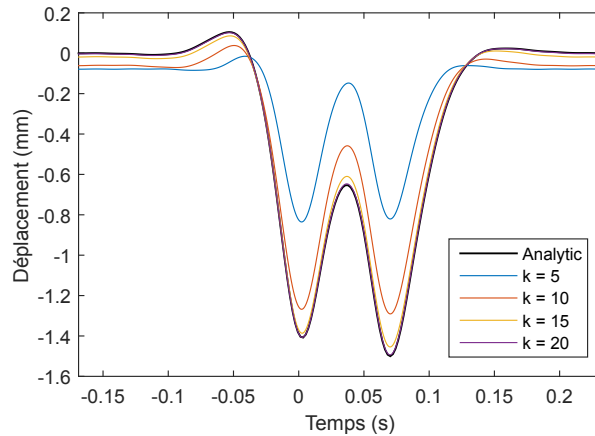


FIGURE 2.20 – Solutions analytique et numérique pour la fondation linéaire avec différents nombres d'itération

**Support non-linéaire cubique** : Considérons un support non-linéaire avec la partie non linéaire qui suit une loi cubique :

$$f(w_s, w'_s) = ek_3w_s^3 \quad (2.121)$$

où  $e = 0.8$  et  $k_3 = 20 \text{ kNmm}^{-3}$ . Les autres paramètres sont donnés dans le tableau 2.5. Comme dans l'exemple précédent, le déplacement du blochet est calculé avec un nombre d'harmoniques  $n = 15$ . La figure 2.21 montre les résultats pour différents nombres d'itérations  $m$ . Lorsque  $m \geq 15$ , la réponse n'évolue plus et la procédure d'itération converge. L'influence du paramètre non-linéaire  $e$  sur la réponse du blochet a été étudiée comme dans la figure 2.22. Lorsque  $e = 0$ , la fondation est linéaire. L'amplitude du déplacement diminue lorsque le paramètre non linéaire augmente. En effet, plus le paramètre  $e$  est grand, plus le support est rigide.

**Support bilinéaire** : Considérons un support avec différents comportements linéaires en compression et en traction. Une telle loi de comportement peut être décrite par la rigidité en compression ( $k^+$ ) et en traction ( $k^-$ ) et un coefficient d'amortissement ( $\eta_2$ ). En séparant les parties linéaires et non linéaires du comportement, la partie non linéaire du support est donnée par :

$$f(w_s, w'_s) = \begin{cases} (k^+ - k_2)w_s & \text{si } w < 0 \\ (k^- - k_2)w_s & \text{si } w \geq 0 \end{cases} \quad (2.122)$$

On calcule alors le déplacement du blochet avec différents nombres d'harmoniques et d'itérations afin d'étudier la convergence de la méthode numérique. Les paramètres sont donnés dans le tableau 2.5 avec  $k^+ = 20 \text{ MKm}^{-1}$  et  $k^- = 10 \text{ MKm}^{-1}$ . La figure 2.23 montre les résultats numériques avec différents nombres d'itérations tandis que le nombre d'harmoniques est  $n = 15$ . On retrouve la convergence avec des nombres différents d'harmoniques pour  $m = 100$  lorsque  $n \geq 10$  comme le montre la figure 2.24. Par conséquent,

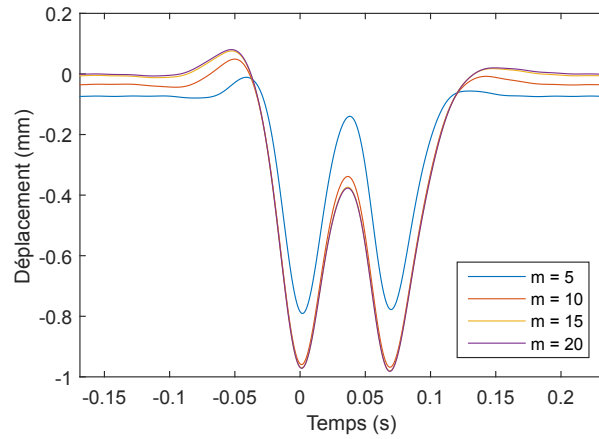


FIGURE 2.21 – Résultats numériques pour la fondation cubique non-linéaire avec différents nombres d'itération

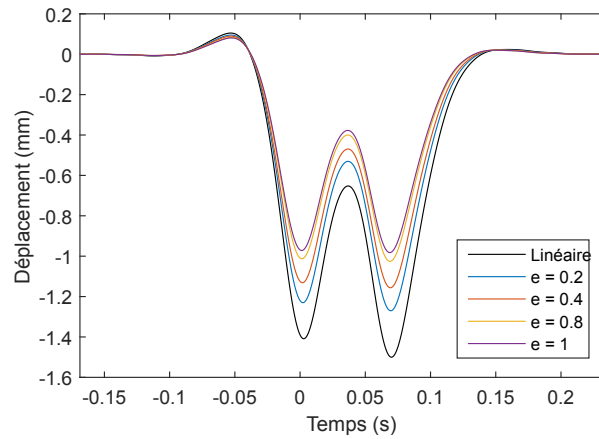


FIGURE 2.22 – Effet du paramètre non-linéaire de la fondation cubique sur le déplacement du support

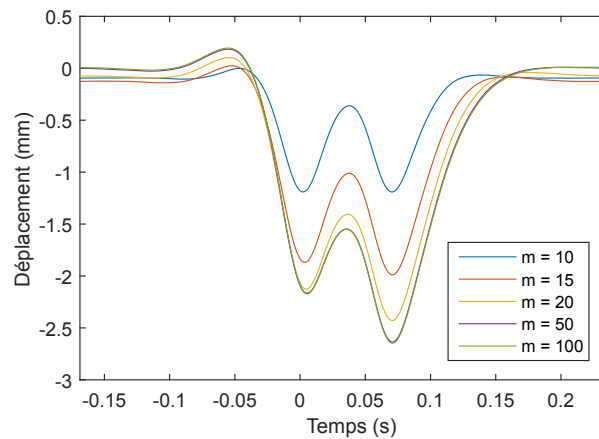


FIGURE 2.23 – Résultats numériques pour la fondation bilinéaire avec différents nombres d'itérations

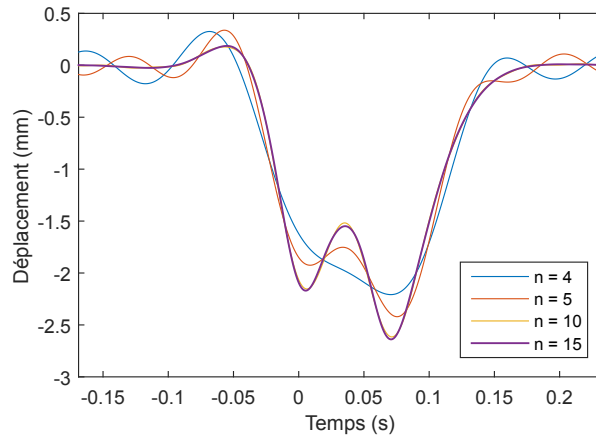


FIGURE 2.24 – Résultats numériques pour la fondation bilinéaire avec différents nombres d'harmoniques

le résultat montre que les premiers harmoniques sont plus importants et les harmoniques d'ordre élevé ( $n > 10$ ) peuvent être négligeables dans ce cas.

L'influence du paramètre non-linéaire  $r = k^-/k^+$  est étudiée en utilisant la méthode numérique avec  $n = 15$  et  $m = 100$ . La figure 2.25 montre le déplacement du blochet pour différents paramètres  $r$ . Lorsque  $r = 1$ , le support est linéaire et pour  $r = 0$ , le support n'a pas de raideur en traction. On voit qu'une petite raideur de traction de la fondation peut avoir une grande influence sur la réponse du système dynamique. Notons que le temps de calcul est presque instantané pour ces trois exemples, ce qui représente est un avantage de cette méthode semi-analytique.

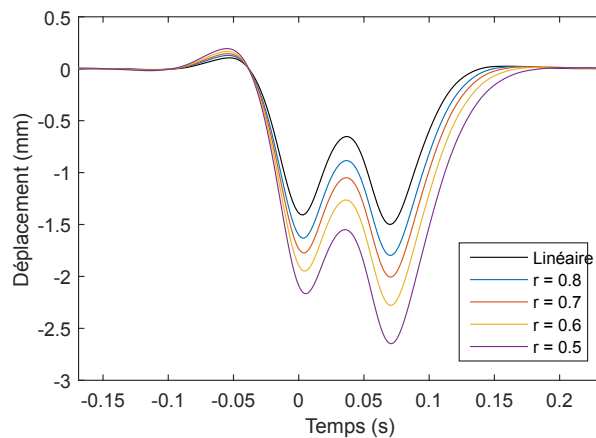


FIGURE 2.25 – Effet du paramètre non-linéaire de la fondation bilinéaire sur le déplacement du support

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle analytique pour calculer la réponse stationnaire d'une voie ferroviaire sans ballast soumise à des charges mobiles dans 3 directions : verticale, transversale et longitudinale. Les modèles de poutre d'Euler-Bernoulli

et de Timoshenko supportés par des appuis périodiques ont été utilisés pour modéliser le rail et ses supports. Cette étude a démontré qu'une poutre (quelque soit le modèle) périodiquement supportée est équivalente à un ressort dont la raideur et la pré-charge dépendent des paramètres de la poutre. Cette équivalence permet de calculer la réponse des supports linéaires et non-linéaires. De plus, elle a démontré que lorsque le cisaillement est négligeable, le modèle de poutre de Timoshenko devient la poutre d'Euler-Bernoulli, ce qui est bien en accord avec la théorie des poutres classiques. D'autre part, le système équivalent existe aussi pour la dynamique de la voie dans la direction longitudinale.

Les applications numériques ont été faites pour une voie dans la zone saine d'origine dans le tunnel sous la Manche. La comparaison entre le modèle et la mesure montre que les résultats sont en accord lorsque l'amortissement est pris en compte dans le modèle. Ensuite, différentes techniques ont été développées pour les supports non-linéaires. En basant sur la procédure itérative, on peut utiliser la méthode de la balance harmonique ou la méthode numérique pour calculer les réponses dans le cas où la loi de comportement du support contient un ou deux degrés de liberté. Désormais, nous avons établi un modèle complet pour étudier la dynamique d'une voie ferrée homogène. Dans le chapitre suivant, nous allons développer ce modèle pour des voies plus générales qui ont des supports avec différents comportements (voie non-homogène).

## Chapitre 3

# Comportement mécanique d'une voie ferrée non-homogène

### 3.1 Introduction

Le tunnel sous la Manche présente des zones où les systèmes de supports sont dégradés. Cette dégradation implique que les supports n'ont pas tous le même comportement et que les voies sont non-homogènes. Cette non-homogénéité se retrouve dans beaucoup de problèmes de voie ferroviaire. Par exemple : la non-homogénéité de la fondation, les ponts, les zones de transition entre ballast/non-ballast,... C'est un sujet qui a donné lieu à de nombreuses recherches depuis quelques années [17, 117, 135]. Dans ces travaux, les chercheurs ont développé un modèle des poutres sur une fondation élastique. Cependant, ces modèles ne prennent pas en compte les distances entre les supports. De plus, la distance entre les supports est une caractéristique importante dans la voie non-ballastée comme celles utilisant le système LVT parce que les supports travaillent indépendamment.

Nous avons modélisé dans le chapitre précédent des voies ferrées homogènes avec le modèle de poutres périodiquement supportées soumises à des charges mobiles. Dans ce chapitre, nous allons développer ce modèle pour voie non-homogène en considérant que les supports possèdent des comportements différents. On considère dans un premier temps que les supports ont des comportements qui varient périodiquement selon la poutre. On utilise donc une nouvelle condition de périodicité pour résoudre l'équation dynamique de la poutre. Ensuite, on suppose que les supports non-homogènes font partie d'un grand intervalle de la voie pour que les trains viennent et sortent de l'intervalle dans un état stationnaire. Avec cette hypothèse, on peut considérer que cet intervalle est une période d'une voie périodique comme dans le cas précédent. Ces nouvelles conditions permettent d'obtenir une relation entre les déplacements et les forces de réaction des supports. Cette relation ne dépend pas de la loi de comportement des supports et on peut l'appliquer pour les supports linéaires ou non linéaires. Pour calculer les réponses, nous avons deux méthodes : la méthode directe et la méthode itérative. Dans la méthode directe, on calcule directement les réponses en inversant une matrice résultante de la relation et de la loi de comportement. Cette méthode n'est applicable que pour les comportements linéaires. De l'autre côté, la méthode itérative est développée pour les comportements linéaires et non linéaires en utilisant la transformation de Fourier discrète.

Pour appliquer ce nouveau modèle aux voies dans le tunnel sous la Manche, nous avons développé un logiciel "**EuroAnalyse**" dans le cadre de ce travail. Ce logiciel est conçu pour prendre en compte tous les paramètres de la voie en état réel avec une interface graphique. Il s'agit des voies réparées ou les supports sont remplacés périodiquement ou des

voies avec des zones endommagées. Enfin, nous avons effectué des études paramétriques avec ce logiciel pour analyser le comportement de la voie lorsque les propriétés mécaniques des composants changent.

## 3.2 Modèle dynamique pour voie non-homogène

### 3.2.1 Supports linéaires non-identiques

Comme dans le chapitre précédent, on modélise le rail par le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli et les blochets par des appuis. On considère une poutre infinie basée sur des supports visco-élastiques comme présenté dans la figure 3.1. Ces supports ne sont pas identiques mais ils sont distribués périodiquement le long de la poutre avec la distance entre deux supports valant  $l$ . La poutre est soumise à des charges mobiles  $Q_j$  qui sont caractérisées par la distance à la première charge  $D_j$ .

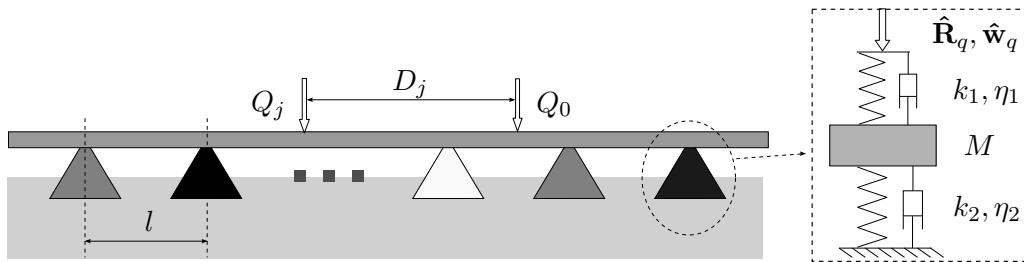


FIGURE 3.1 – Poutre posée sur des supports non-identiques

Le comportement visco-élastique de chaque support peut s'écrire comme suit :

$$\hat{R}_q(\omega) = -K_q \hat{w}_q(\omega) \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

où  $\hat{R}_q$  et  $\hat{w}_q$  sont la force de réaction et le déplacement du support  $q$ ;  $K_q$  est la raideur dynamique du support  $q$ . La raideur d'un support linéaire représenté par le système masse-ressort comme indiqué dans la figure 3.1 peut être calculée via les paramètres de chaque composant du support comme suit :

$$\frac{1}{K_q} = \frac{1}{k_1 + i\omega\eta_1} + \frac{1}{k_2 + i\omega\eta_2 - M\omega^2} \quad (3.2)$$

où  $K_p, K_f, \eta_p, \eta_f$  et  $M$  sont respectivement les raideurs, les coefficients d'amortissement et la masse. Ici, les indices  $p$  et  $f$  se réfèrent respectivement à la semelle sous rail et au blochet. Quand les supports ne sont pas identiques, leurs raideurs dynamiques sont donc différentes.

Pour comparer les réponses des supports lorsqu'elles sont situées à la distance relative aux forces mobiles, on utilise une référence pour que le temps  $t = 0$  corresponde au moment où la première force passe sur le support. Comme les forces mobiles prennent le temps  $t = ql/v$  pour parcourir la distance entre le support  $q$  et l'origine, on utilise le changement de variable comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_q(t) = R_q(t + \frac{ql}{v}) \\ \mathbf{w}_q(t) = w_q(t + \frac{ql}{v}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = e^{iql\frac{\omega}{v}} \hat{R}_q(\omega) \\ \hat{\mathbf{w}}_q(\omega) = e^{iql\frac{\omega}{v}} \hat{w}_q(\omega) \end{cases} \quad (3.3)$$

En remplaçant l'équation (3.1) dans la dernière équation, on obtient :

$$\hat{\mathbf{R}}_q(\omega) = -K_q(\omega) \hat{\mathbf{w}}_q(\omega) \quad (3.4)$$

Pour une poutre infinie, il y a un nombre infini de forces  $\hat{\mathbf{R}}_q$ . Pour limiter le nombre des inconnues, on considère que les raideurs des supports sont distribuées périodiquement selon la longueur de la poutre comme sur la figure 3.2. C'est-à-dire, il existe un nombre  $m$  tel que les deux supports situés à la distance  $L = ml$  ont la même raideur :  $K_q = K_{q+nm} \forall n \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent,  $L$  est la période de la structure le long de la poutre.

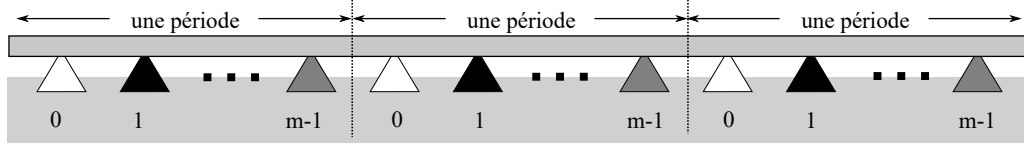


FIGURE 3.2 – Système de supports périodiques non-homogènes

Dans le régime stationnaire, les réponses des supports sont considérées se répéter lorsque les forces se déplacent d'une longueur qui est égale à une période du système des supports  $L = ml$ . Cela se traduit par le fait que les forces de réaction de deux supports à distance  $L$  sont décrites par une même fonction mais avec un décalage de temps qui est égal au temps de déplacement des forces d'un support à l'autre. En d'autres termes, la force de réaction du support  $q = p + nm$  à la coordonnée  $x = (p + nm)l$  est donnée par l'expression :

$$R_{nm+p}(t) = R_p\left(t - \frac{nL}{v}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

où  $R_p(t)$  (avec  $0 \leq p < m$ ) est la force de réaction du support  $p$  à la coordonnée  $x = pl$ . En combinant les équations (3.1) et (3.5), on obtient :

$$\mathbf{R}_{p+nm}(t) = \mathbf{R}_p(t) \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{R}}_{p+nm}(\omega) = \hat{\mathbf{R}}_p(\omega) \quad (3.6)$$

Par conséquent, il y a  $m$  forces inconnues  $\hat{\mathbf{R}}_q$  et on peut réécrire la loi de comportement des supports dans un intervalle  $L = ml$  sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{m-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{w}}_0 \\ \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{w}}_{m-1} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

qui s'écrit aussi :

$$\underline{\hat{\mathbf{R}}} = -\underline{\mathbf{K}} \underline{\hat{\mathbf{w}}} \quad (3.8)$$

où  $\underline{\mathbf{K}} = \text{diag}(K_0, K_1, \dots, K_{N-1})$ , et  $\underline{\hat{\mathbf{w}}}$  et  $\underline{\hat{\mathbf{R}}}$  sont les vecteurs de déplacements  $\hat{\mathbf{w}}_p$  et de force  $\hat{\mathbf{R}}_p$ .

### Remarques

1. Comme les supports sont linéaires, la loi de comportement pour un ensemble de supports a aussi une forme linéaire comme dans l'équation (3.8). Lorsqu'il y a des supports non-linéaires, la loi de comportement doit être décrite par une fonction non-linéaire comme suit :

$$\mathbf{R} = f(\underline{\mathbf{w}})$$

2. Pour une voie qui contient une zone non-homogène, on peut considérer que cette zone est incluse dans un intervalle plus grand avec de nombreux supports voisins homogènes



comme le montre la figure 3.3. On peut supposer que le nombre de supports voisins est suffisamment grand pour que les réponses des supports ne changent pas lorsque les forces mobiles viennent et partent de cet intervalle (et ces réponses sont à peu près égales à la réponse d'une voie homogène). Par conséquent, cet intervalle peut être considéré comme une période d'un système de supports périodiques et on peut appliquer le modèle de supports périodiques non-identiques. Dans la partie 3.3.2, cette condition sera vérifiée par des exemples numériques.

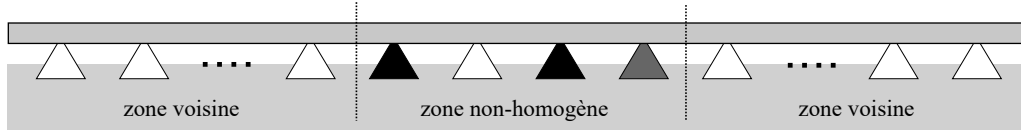


FIGURE 3.3 – Poutre périodiquement supportée avec une zone de défaut

### 3.2.2 Équation dynamique

L'équation dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli soumise à une force externe  $F(x, t)$  s'écrit :

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (3.9)$$

où  $w_r(x, t)$  est le déplacement de la poutre,  $\rho$  et  $E$  sont la masse volumique et le module d'Young,  $S$  et  $I$  sont la section et le moment d'inertie de la poutre.

La force externe  $F(x, t)$  appliquée sur la poutre est la somme des forces de réaction des supports  $\{R_q\}$  et des forces mobiles  $\{Q_j\}$ . Cette force peut être représentée à l'aide des fonctions de Dirac comme suit :

$$F(x, t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_q(t) \delta(x - ql) - \sum_{j=0}^K Q_j \delta(x + D_j - vt) \quad (3.10)$$

où  $D_j$  est la distance entre la force  $Q_j$  et la première force mobile. En substituant l'équation (3.5) dans la dernière équation, on peut écrire :

$$F(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{m-1} R_p \left(t - \frac{nL}{v}\right) \delta(x - pl - nL) - \sum_{j=0}^K Q_j \delta(x + D_j - vt) \quad (3.11)$$

Les équations (3.9) et (3.11) établissent une relation entre les forces de réaction et le déplacement de la poutre. Pour réduire cette relation, on utilise les transformations de Fourier et la propriété du peigne de Dirac comme dans le chapitre précédent. D'abord, en effectuant la transformation de Fourier des équations (3.9) et (3.11) par rapport au temps  $t$ , on obtient :

$$\begin{cases} \hat{F}(x, \omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{m-1} \hat{R}_p(\omega) e^{-i\omega \frac{nL}{v}} \delta(x - nL - pl) - \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-i\omega \frac{x+D_j}{v}} \\ EI \frac{\partial^4 \hat{w}_r(x, \omega)}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 \hat{w}_r(x, \omega) = \hat{F}(x, \omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

Ensuite, en effectuant une transformation de Fourier de la dernière équation par rapport à  $x$ , on a :

$$(EI k_x^4 - \rho S \omega^2) \tilde{w}_r(k_x, \omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{m-1} \hat{R}_p(\omega) e^{-i \frac{\omega}{v} n L - i k_x (n L + p l)} - 2\pi \delta \left( k_x + \frac{\omega}{v} \right) \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{v} e^{-i \frac{\omega}{v} D_j} \quad (3.13)$$

où  $\tilde{w}_r(k_x, \omega)$  est la transformée de Fourier de  $\hat{w}_r(x, \omega)$  par rapport à  $x$ . De plus, en utilisant les propriétés du peigne de Dirac [14], la somme infinie dans l'équation (3.13) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{m-1} \hat{R}_p(\omega) e^{-i(k_x + \frac{\omega}{v})nL - i k_x p l} &= \left( \sum_{p=0}^{m-1} \hat{R}_p(\omega) e^{-i k_x p l} \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i(k_x + \frac{\omega}{v})nL} \right) \\ &= \hat{R}(k_x, \omega) \frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta \left( k_x + \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{L} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

où  $\hat{R}(k_x, \omega)$  est définie par :

$$\hat{R}(k_x, \omega) = \sum_{p=0}^{m-1} \hat{R}_p(\omega) e^{-i k_x p l} \quad (3.15)$$

En remplaçant l'équation (3.14) dans l'équation (3.13), on peut écrire :

$$\tilde{w}_r(k_x, \omega) = \frac{2\pi \hat{R}(k_x, \omega)}{LEI(k_x^4 - \lambda_e^4)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta \left( k_x + \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{L} \right) - \frac{2\pi \delta \left( k_x + \frac{\omega}{v} \right)}{vEI(k_x^4 - \lambda_e^4)} \sum_{j=0}^K Q_j e^{-i \frac{\omega}{v} D_j} \quad (3.16)$$

où  $\lambda_e = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$ . Finalement,  $\hat{w}_r(x, \omega)$  est obtenu par la transformation inverse de Fourier de  $\tilde{w}_r(k_x, \omega)$  par rapport à  $k_x$  :

$$\hat{w}_r(x, \omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\hat{R}_p(\omega)}{LEI} \frac{e^{-i(\frac{2\pi n}{L} + \frac{\omega}{v})(x - pl)}}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{L}\right)^4 - \lambda_e^4} - \sum_{j=0}^K \frac{Q_j}{vEI} \frac{e^{-i\omega \frac{x + D_j}{v}}}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \lambda_e^4} \quad (3.17)$$

La dernière équation peut aussi être écrite comme suit :

$$\hat{w}_r(x, \omega) e^{i\omega \frac{x}{v}} = \sum_{p=0}^{m-1} \hat{\mathbf{R}}_p(\omega) \eta(pl - x) - w_e(\omega) \quad (3.18)$$

où  $\hat{\mathbf{R}}_p(\omega) = \hat{R}_p e^{i\frac{\omega}{v} pl}$  et,  $w_e(\omega)$  et  $\eta(x)$  sont définis par :

$$w_e(\omega) = \frac{1}{vEI} \sum_{j=0}^K \frac{Q_j e^{-i\frac{\omega}{v} D_j}}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \lambda_e^4} \quad (3.19)$$

$$\eta(x) = \frac{1}{LEI} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L} x}}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{L}\right)^4 - \lambda_e^4} \quad (3.20)$$

La fonction  $\eta(x)$  est la somme d'une série infinie qui peut être réduite en une expression plus simple (voir la section 2.2.1 du chapitre II) :  $\forall x \in [0, L]$

$$\eta(x) = \frac{e^{i\omega \frac{x}{v}}}{4\lambda_e^3 EI} \left[ \frac{\sin \lambda_e(L - x) + e^{-i\omega \frac{L}{v}} \sin \lambda_e x}{\cos L\lambda_e - \cos \frac{\omega L}{v}} - \frac{\sinh \lambda_e(L - x) + e^{-i\omega \frac{L}{v}} \sinh \lambda_e x}{\cosh L\lambda_e - \cos \frac{\omega L}{v}} \right] \quad (3.21)$$

L'équation (3.18) établit une relation entre le déplacement de la poutre et les forces de réaction des supports dans le domaine des fréquences. Cette relation ne dépend pas du comportement des supports. C'est un résultat de la condition périodique et de l'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli. Dans la partie suivante, on va utiliser cette relation pour calculer les réponses en combinant avec la loi de comportement des supports présentée dans la section 3.2.1.

### 3.3 Calcul des réponses

#### 3.3.1 Méthode directe

A partir de l'équation (3.18), on peut obtenir les réponses du support  $q$  ( $\hat{\mathbf{w}}_q, \hat{\mathbf{R}}_q$ ) en remplaçant la coordonnée  $x = ql$  dans cette équation :

$$\hat{\mathbf{w}}_q = w_r(ql, \omega) e^{i\omega \frac{ql}{v}} = \sum_{p=0}^{m-1} \hat{\mathbf{R}}_p \eta_{p-q} - w_e \quad (3.22)$$

où  $\eta_{q-p}$  peut être obtenu à partir de l'équation (3.20) ou (3.21)

$$\eta_{p-q} = \eta_{(x=pl-ql)} = \frac{1}{LEI} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i2\pi n \frac{p-q}{m}}}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{L}\right)^4 - \lambda_e^4} \quad (3.23)$$

Il faut remarquer que  $\forall q > p, \eta_{p-q} = \eta_{m+p-q}$ . L'équation (3.22) peut alors être réécrite sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_{m-1} \\ \eta_{m-1} & \eta_0 & \cdots & \eta_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{m-1} \end{pmatrix} = w_e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{w}}_0 \\ \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{w}}_{m-1} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

ou

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\hat{\mathbf{R}}}} = w_e \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\hat{\mathbf{w}}}} \quad (3.25)$$

où la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  et les vecteurs  $\underline{\underline{\hat{\mathbf{R}}}}, \underline{\underline{\mathbf{I}}}, \underline{\underline{\hat{\mathbf{w}}}}$  sont définis pour correspondre aux termes de l'équation (3.24), particulièrement

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_{m-1} \\ \eta_{m-1} & \eta_0 & \cdots & \eta_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

L'équation (3.25) représente la relation entre les forces  $\underline{\underline{\hat{\mathbf{R}}}}$  et les déplacements  $\underline{\underline{\hat{\mathbf{w}}}}$  des supports dans une période de la structure. C'est aussi le résultat de la condition de périodicité et de l'équation dynamique de poutre ; elle ne dépend pas de la loi du comportement des supports. Pour trouver les réponses des supports, on va combiner cette relation avec la loi de comportement des supports dans l'équation (3.8).

$$(\underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}} + \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \underline{\underline{\hat{\mathbf{w}}}} = -w_e \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.27)$$

Si on pose :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}} + \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \quad (3.28)$$

Les réponses des supports sont :

$$\begin{cases} \hat{\underline{\mathbf{W}}} = -w_e \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{I}} \\ \hat{\underline{\mathbf{R}}} = w_e \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{I}} \end{cases} \quad (3.29)$$

On voit que  $\underline{\mathbf{A}}$  est une matrice non-unité de dimension  $m \times m$  et elle dépend de  $\omega$ . Par conséquent, on doit inverser cette matrice pour toutes les fréquences pour trouver les forces de réaction des supports. Ce calcul est simple et rapide quand le nombre de supports est petit et la loi de comportement est linéaire. Dans l'autre cas, on utilise une méthode itérative que nous allons présenter ensuite en utilisant la transformation de Fourier rapide (FFT)

### 3.3.2 Méthode itérative

La matrice  $\underline{\mathbf{C}}$  dans l'équation (3.25) est circulaire et elle peut être représentée par un produit de convolution (voir [45]) comme suit :

$$\hat{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\eta} * \hat{\underline{\mathbf{R}}} - w_e \underline{\mathbf{I}} \quad (3.30)$$

où  $\underline{\eta} = (\eta_0 \ \eta_1 \ \dots \ \eta_{m-1})^T$ . Ainsi, on peut réécrire la dernière équation en utilisant la transformation de Fourier discrète comme suit :

$$\mathcal{F}_q\{\hat{\underline{\mathbf{W}}}\} = \mathcal{F}_q\{\underline{\eta}\} \mathcal{F}_q\{\hat{\underline{\mathbf{R}}}\} - w_e \mathcal{F}_q\{\underline{\mathbf{I}}\} \quad (3.31)$$

où  $\mathcal{F}_q\{\}$  avec  $0 \leq q \leq m-1$  dénote le composant  $q+1$  de la transformation discrète de Fourier. De plus, on a :

$$\mathcal{F}_q\{\underline{\mathbf{I}}\} = m\delta_{0q} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_q\{\underline{\eta}\} = \chi_q \quad (3.32)$$

où  $\delta_{0q} = 1$  si  $q = 0$  et  $\delta_{0q} = 0$  autrement. Pour calculer  $\chi_q$ , on prend la définition de  $\eta_p$  à partir de l'équation (3.23) :

$$\eta_p = \eta(pl) = \frac{1}{LEI} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i2\pi n \frac{pl}{L}}}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi n}{L}\right)^4 - \lambda_e^4} \quad (3.33)$$

Si on pose  $n = rm + p$  (avec  $0 \leq p \leq m-1$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ) et  $L = ml$ , la dernière équation devient :

$$\eta_p = \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{mlEI} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i2\pi(mr+q) \frac{p}{m}}}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi(mr+q)}{ml}\right)^4 - \lambda_e^4} = \frac{1}{m} \sum_{q=0}^{m-1} e^{i2\pi \frac{pq}{m}} \chi_q \quad (3.34)$$

où  $\chi_q$  est défini par :

$$\chi_q = \frac{1}{lEI} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi(mr+q)}{ml}\right)^4 - \lambda_e^4} \quad (3.35)$$

L'équation (3.34) est la formulation de la transformation inverse de Fourier du vecteur  $\underline{\eta} = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_{m-1})^T$ . Par conséquent,  $\chi_q$  ( $0 \leq q < m$ ) est la transformation discrète de Fourier de  $\underline{\eta}$ .

De plus, on voit que la fonction  $\chi_q$  dans l'équation (3.35) est un cas particulier de la fonction  $\eta(x)$  dans l'équation (3.20) avec  $x = 0$ ,  $n = m$  et  $\frac{\omega}{v}$  remplacé par  $\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi q}{ml}$ . Ainsi,  $\chi_q$  peut être déduite de  $\eta(x)$  en utilisant l'équation (3.21)

$$\chi_q = \frac{1}{4\lambda_e^3 EI} \left( \frac{\sin l\lambda_e}{\cos l\lambda_e - \cos\left(\frac{\omega l}{v} + \frac{2\pi q}{m}\right)} - \frac{\sinh l\lambda_e}{\cosh l\lambda_e - \cos\left(\frac{\omega l}{v} + \frac{2\pi q}{m}\right)} \right) \quad (3.36)$$

Ainsi, l'équation (3.31) devient :

$$\mathcal{F}_q\{\hat{\mathbf{R}}\} = \kappa_q \mathcal{F}_q\{\hat{\mathbf{w}}\} + m \mathcal{Q}_e \delta_{0q} \quad (3.37)$$

où  $\kappa_q = \chi_q^{-1}$  et  $\mathcal{Q}_e = \kappa_0 w_e$ .

L'équation (3.37) est une relation caractéristique d'une poutre périodiquement supportée soumise à des forces mobiles. Cette équation relie les transformations de Fourier discrètes des forces de réaction et déplacements dans une période de la structure. Lorsque tous les supports sont identiques, les vecteurs de réactions forces et les déplacements sont proportionnels à  $\mathbf{I}$  et cette équation peut être réduite à  $\hat{\mathbf{R}}_0 = \kappa_0 \hat{\mathbf{w}}_0 + \mathcal{Q}_e$ . Ceci est le résultat actuel du modèle pour une poutre périodiquement supportée avec des supports identiques dans la section 2.2 du chapitre II. Ensuite, on va combiner la relation avec les lois constitutives des supports dans l'équation (3.8) pour calculer les réponses.

Si on pose :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}} + K_{nd} \hat{\mathbf{w}} \quad (3.38)$$

où  $K_{nd}$  est la raideur d'un support sans défaut. En remplaçant l'équation (3.38) dans les équations (3.8) et (3.31), on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}} = -(\underline{\mathbf{K}} - K_{nd} \underline{\mathbf{I}}) \hat{\mathbf{w}} \\ \mathcal{F}_q\{\hat{\mathbf{w}}\} = \frac{-1}{\kappa_q + K_{nd}} \left[ \mathcal{F}_q\{\tilde{\mathbf{R}}\} + m \mathcal{Q}_e \delta_{1q} \right] \end{cases} \quad (3.39)$$

Le schéma itératif peut être développé à partir de la dernière équation. Avec une valeur donnée du déplacement  $\hat{\mathbf{w}}$ , on peut calculer la force  $\tilde{\mathbf{R}}$  en utilisant la première équation de (3.39). Ensuite, le déplacement est recalculé en utilisant la seconde équation à l'aide de la transformation de Fourier rapide (FFT). La procédure est répétée jusqu'à ce que les réponses convergent. Les valeurs initiales peuvent être choisies comme la réponse d'une poutre périodiquement supportée avec un système de supports identiques. Le déplacement s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{w}}_{initial} = \frac{-\mathcal{Q}_e}{\kappa_0 + K_{nd}} \mathbf{I} \quad (3.40)$$

## Remarques

1. Pour la structure avec une zone de défaut comme indiqué dans la figure 3.3,  $K_q = K_{nd}$  lorsque le support  $q$  est en dehors de la zone de défaut. Ainsi, le vecteur  $\tilde{\mathbf{R}}$  défini dans l'équation (3.38) prend des valeurs nulles pour tous les composants à l'extérieur de la zone non-homogène, ce qui permet au schéma itératif de converger rapidement.

2. La méthode itérative est applicable pour les supports non-linéaires si on remplace la matrice de rigidité  $\underline{\mathbf{K}}$  par la loi de comportement des supports.

### 3.3.3 Applications numériques

#### Réparation d'un support sur trois

Pour réparer rapidement une voie dégradée, on peut choisir une méthode de remplacement d'un support sur trois. Ce remplacement crée une voie dont les supports sont distribués périodiquement selon la longueur du rail comme illustré dans la figure 3.2. La période du système de supports contient donc un support réparé et deux supports dégradés. On considère une telle voie avec les paramètres donnés dans le tableau 3.1.

Masse du rail	$\rho S$	$\text{kgm}^{-1}$	60
Raideur du rail	$EI$	$\text{MNm}^2$	6.3
Vitesse des forces	$v$	$\text{km/h}$	160
Charge par roue	$Q$	$\text{kN}$	100
Masse du blochet	$M$	$\text{kg}$	90
Distance entre deux blochets	$l$	$\text{m}$	0.6
Raideur de semelle sous rail	$K_p$	$\text{MNm}^{-1}$	200
Coefficient d'amortissement de semelle sous rail	$\zeta_p$	$\text{MNsm}^{-1}$	1.0
Raideur du blochet réparé	$K_f$	$\text{MNm}^{-1}$	20
Coefficient d'amortissement du blochet réparé	$\zeta_f$	$\text{MNsm}^{-1}$	0.2
Raideur du blochet endommagé	$K'_f$	$\text{MNm}^{-1}$	10
Coefficient d'amortissement du blochet endommagé	$\zeta'_f$	$\text{MNsm}^{-1}$	0.2

TABLE 3.1 – Paramètres d'une voie réparée périodiquement

Les rigidités dynamiques des supports de la voie sont calculées par l'équation (3.2) :

$$K_0 = K_{\text{repaired}} = \frac{(K_f + i\omega\zeta_f - M\omega^2)(K_p + i\omega\zeta_p)}{K_f + k_p + i\omega(\zeta_f + \zeta_p) - M\omega^2} \quad (3.41)$$

$$K_1 = K_2 = K_{\text{damaged}} = \frac{(K'_f + i\omega\zeta'_f - M\omega^2)(K_p + i\omega\zeta_p)}{K'_f + K_p + i\omega(\zeta'_f + \zeta_p) - M\omega^2} \quad (3.42)$$

Les figures 3.4 et 3.5 montrent les réponses des trois supports consécutifs dans une période de la voie en utilisant la méthode directe. Dans ces figures, la courbe de voie d'origine est la réponse d'une voie dont tous les supports sont réparés ( $K_0 = K_1 = K_2 = K_r$ ). Ici, on a utilisé la référence à  $t = 0$  correspondant au moment où la force mobile est située sur le support.

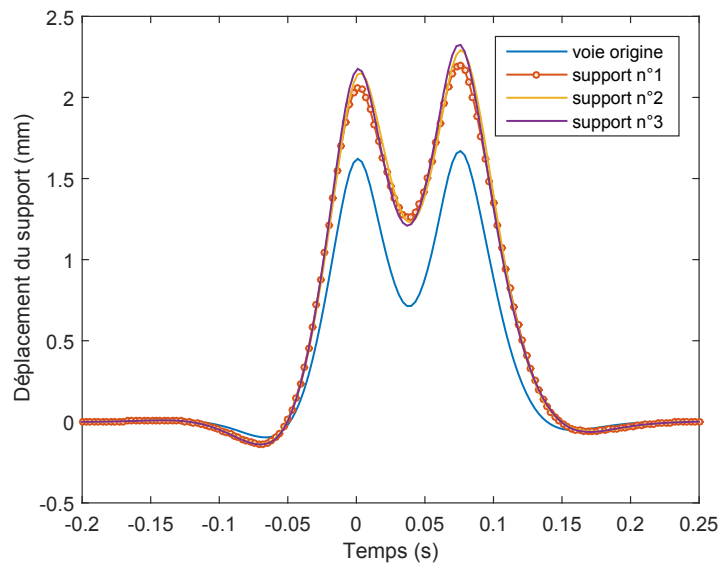


FIGURE 3.4 – Déplacement du blochet(mm)

On voit que les déplacements des trois supports sont à peu près identiques et qu'ils sont plus importants que celui de la voie d'origine. En effet, les rigidités des supports

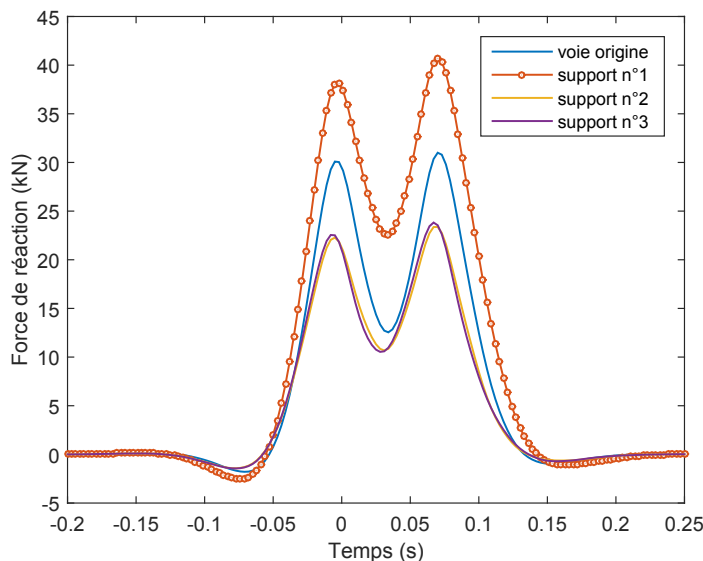


FIGURE 3.5 – Force de réaction du blochet (kN)

endommagés sont plus faibles que celle d'un support réparé et cela provoque alors un déplacement plus important. D'autre part, les trois forces de réaction sont différentes. Le support réparé est surchargé alors que les supports endommagés sont sous-chargés lorsque l'on les compare à la force de réaction de la voie d'origine. En conclusion, le remplacement périodique peut améliorer la rigidité de la voie, mais les supports réparés sont alors surchargés. Ce résultat est important car l'augmentation de force (environ de 25% dans ce cas) implique l'augmentation des contraintes locales dans le blochet qui peut causer une rupture du support à courte durée de vie en fatigue.

### Voie avec deux supports cassés

Dans cet exemple, on considère une voie dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.1, cette voie contenant deux supports cassés (raideurs nulles). Les réponses de la voie sont calculées par la méthode itérative pour un intervalle de 18 supports où les deux supports cassés se trouvent au milieu de l'intervalle (supports numéro 9 et 10).

La figure 3.6 montre les réponses des supports dans cet intervalle. Les forces de réaction des deux supports cassés sont nulles parce que leur raideur est nulle. D'autre part, les forces de réaction des autres supports voisins sont approximativement égales à la réponse de la voie originelle sauf les quatre supports situés à côté des blochets cassés. Ce résultat est bien en accord avec l'hypothèse que la réaction des supports situés loin de la zone de défaut reste inchangée. De plus, on voit que les surcharges des deux supports voisins sont importantes. En particulier, le taux de surcharge des supports situés juste à côté des supports cassés est de l'ordre de 53%. Par conséquent, cela va impacter la durée de vie de ce support qui va être raccourcie.

La figure 3.7 montre le déplacement du rail. Les deux stries correspondent aux positions des deux forces mobiles. De plus, les deux pics correspondent à la zone de défaut au moment où les forces mobiles passent dessus. On voit que le déplacement augmente de 1.6mm à 3.6mm, ce qui peut causer un nivellement de la voie (voir les types de défaut géométrique d'une voie ferrée dans le chapitre I).

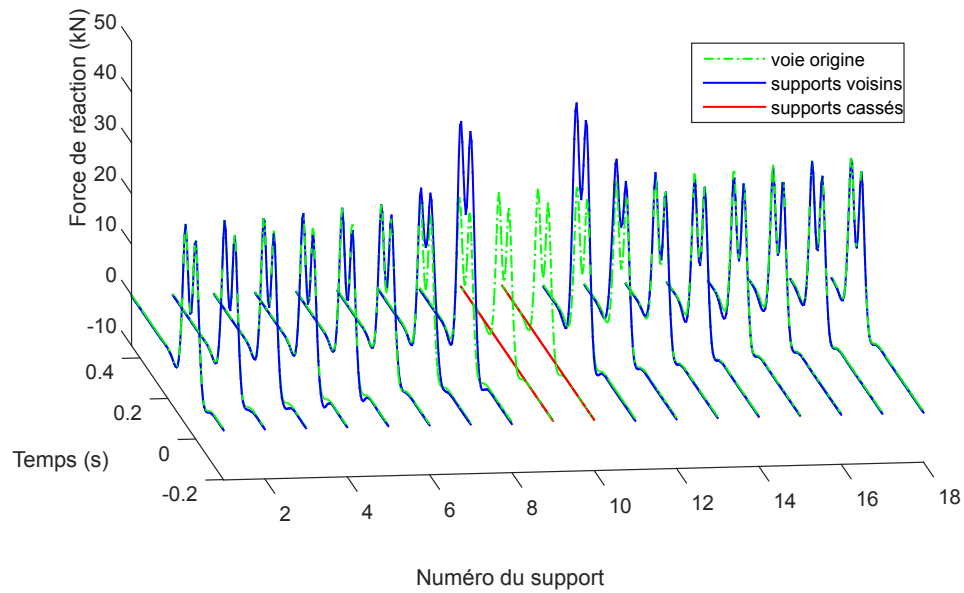


FIGURE 3.6 – Forces de réaction des supports (kN)

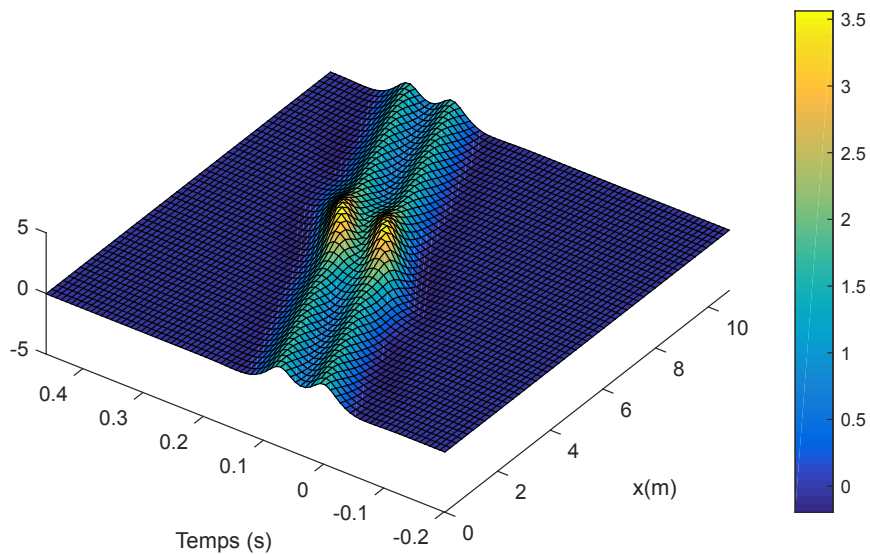


FIGURE 3.7 – Déplacement du rail(mm)

### 3.4 Comportement dynamique d'une voie dégradée

Le trafic important en tunnel est la cause majeure du vieillissement des voies. Ce vieillissement implique l'endommagement de certains composants du système de support de la voie. Cet endommagement peut être dans certaine zone de la voie ou peut affecter l'ensemble des supports (voir la figure (3.8)). Pour comprendre le comportement mécanique d'une voie contenant des supports endommagés, nous allons faire une analyse paramétrique en utilisant les modèles développés. On peut identifier 3 types de voies contenant des systèmes de supports dégradés.



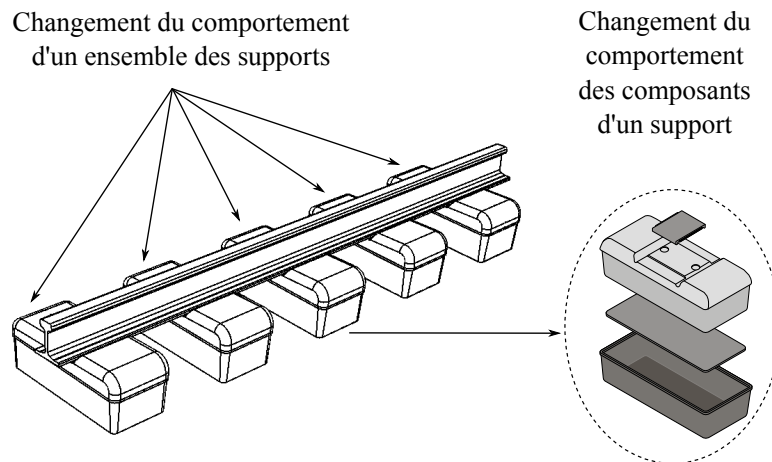


FIGURE 3.8 – Étude paramétrique du comportement d'une voie dégradée

- **Dégradation de l'ensemble des supports** : les supports restent identiques mais leur comportement change. Il y a dans ce cas 4 paramètres mécaniques à étudier :
  - + Changement de la raideur de semelle sous rail ( $k_1$ )
  - + Changement du coefficient d'amortissement de semelle sous rail ( $\eta_1$ )
  - + Changement de la raideur de semelle sous blochet et de chausson ( $k_2$ )
  - + Changement du coefficient d'amortissement de semelle sous blochet et de chausson ( $\eta_2$ )
- **Dégradation d'une zone de supports** : on étudie dans ce cas la dégradation d'un seul ou de plusieurs supports d'une voie originelle
  - + Dégradation d'un support : on fait varier le coefficient d'amortissement et la raideur statique d'un seul support pour comprendre l'influence de l'endommagement d'un support.
  - + Plusieurs supports cassés : c'est un cas extrême où des supports sont cassés consécutivement. On étudie alors le changement des réponses en fonction du nombre de supports cassés.
- **Réparation par le remplacement périodique** : lorsqu'il y a plusieurs supports dégradés consécutivement, nous allons remplacer un pourcentage des supports de façon périodique. Ce processus crée une voie périodique et on peut analyser l'influence du taux de remplacement.

Pour chaque type de voie, nous allons analyser le changement des réponses des supports et du rail en fonction de changement des paramètres du comportement. Ces trois cas d'étude nous permettent d'avoir un point de vue général sur le comportement d'une voie dégradée. Pour une voie réelle qui ne se trouve pas dans ces cas d'étude, on peut faire une analyse dans des conditions réelles en utilisant les modèles présentés précédemment.

### 3.4.1 Dégradation de l'ensemble des supports

Lorsque les supports sont dégradés de la même façon, la voie reste homogène et on peut utiliser le modèle de poutre périodiquement supportée présenté dans le chapitre 2. On peut alors étudier les variations de la réponse lorsque les paramètres caractéristiques du système de support changent. On procède pour cela à une étude paramétrique pour laquelle on reprend l'exemple de la voie dans une zone saine d'origine du tableau 3.2 en faisant varier un paramètre pour déterminer l'influence de ce paramètre sur la réponse des supports et du rail.

Rail (UIC60)	Masse	kg/m	60
	Module d'Young	GPa	200
	Rigidité en flexion ( $EI$ )	MNm <sup>2</sup>	6,3
Semelle sous rail	Raideur	MN/m	210
	Coefficient d'amortissement	MNs/m	1.1
Semelle sous blochet	Raideur	MN/m	18
	Coefficient d'amortissement	MNs/m	0.5
Blochet	Masse	kg	100

TABLE 3.2 – Paramètres d'un support original

### Influence de la raideur de la semelle sous blochet

On étudie la réponse d'un support en fonction de la raideur de la semelle sous blochet ( $k_2$ ) en faisant varier cette raideur entre 8 et 50MN/m pour 4 coefficients d'amortissement  $\eta_2$  différents. La figure 3.9 montre les réponses du support de voie sans ballast en déplacement et en force. Les formes des courbes ne changent pas quand la raideur  $k_2$  change mais les amplitudes (valeurs maximales) de ces courbes changent.

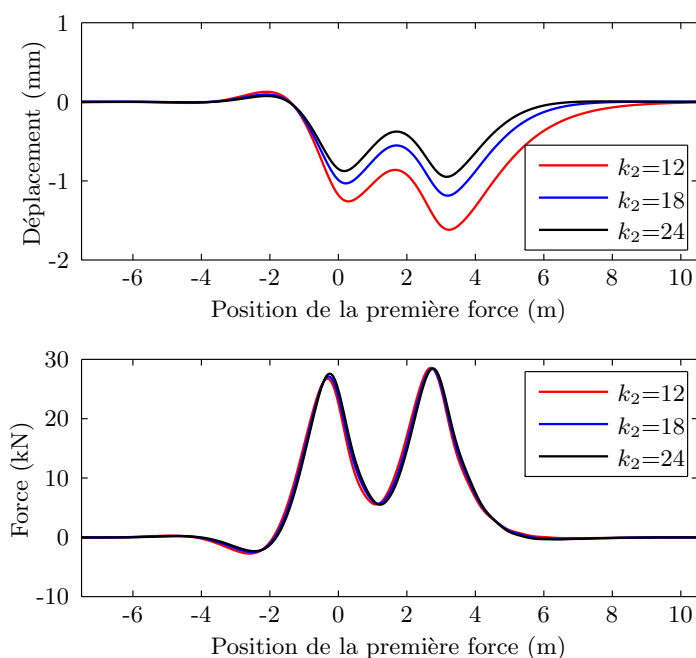


FIGURE 3.9 – Déplacement du blochet (en haut) et force de réaction (en bas) pour différentes raideurs  $k_2$ (MN/m) avec l'amortissement  $\eta_2 = 0, 35$  (MNs/m)

La figure 3.10 montre que les amplitudes du déplacement et de la force varient plus lorsque l'amortissement est faible. Quand l'amortissement est grand, la force appliquée sur le support n'augmente pas quand la raideur  $k_2$  augmente. Cette propriété exprime donc le fait que les supports souples ( $k_2$  est petit) mais plus amortis ( $\eta_2$  est grand) sont plus avantageux pour la voie sans ballast.

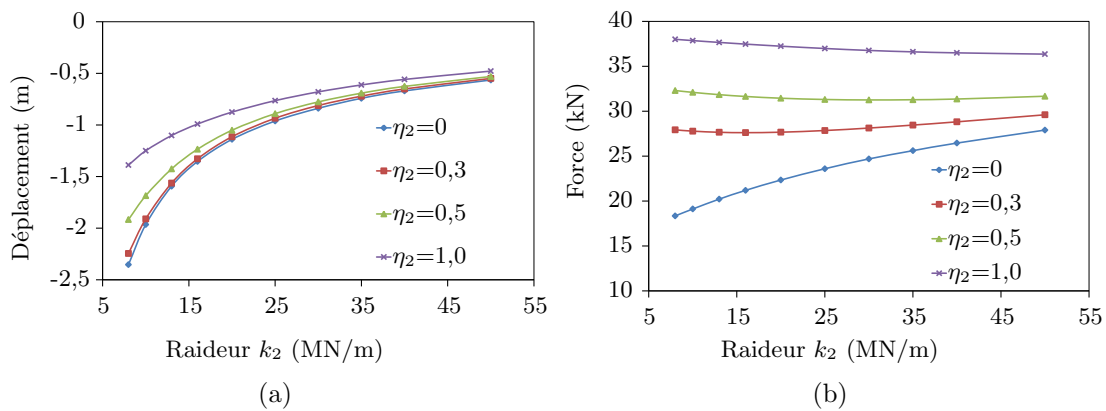


FIGURE 3.10 – Déplacement (a) et force de réaction (b) du support en fonction de la raideur  $k_2$  avec différentes valeurs de l'amortissement  $\eta_2$  (MN/s/m)

### Influence du coefficient d'amortissement de la semelle sous blochet

On fixe maintenant la raideur  $k_2$  (avec 4 valeurs différentes) et on fait varier le coefficient d'amortissement  $\eta_2$  entre 0 et 4MN/s/m. La figure (3.11) montre la réponse d'un support avec 3 coefficients d'amortissement différents. On voit que lorsque l'amortissement augmente, le déplacement diminue et la force de réaction augmente. De plus, ce paramètre explique la dissymétrie de la courbe de déplacement où le déplacement correspondant à la première charge est plus grand par rapport à celui de la deuxième charge. Ce phénomène a été observé dans les mesures en 2005 présentées dans la section 1.4 du chapitre 1.

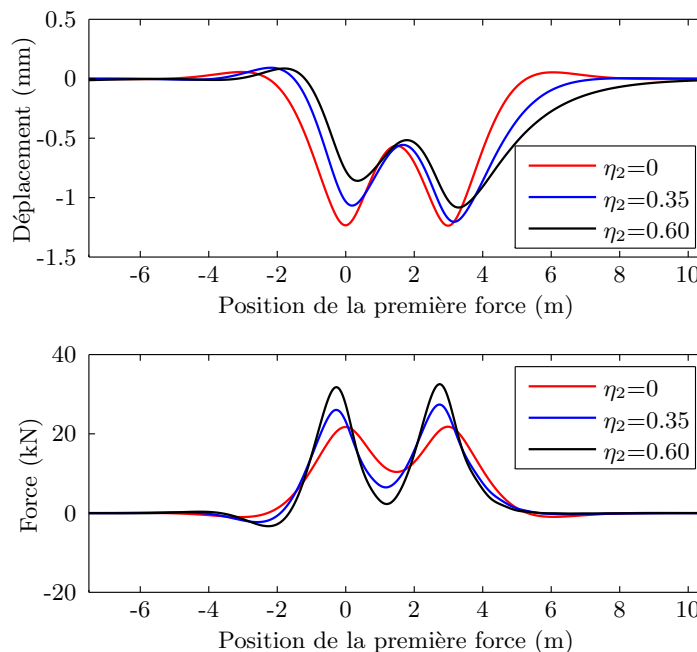


FIGURE 3.11 – Déplacement blochet (en haut) et force de réaction (en bas) pour différents amortissements  $\eta_2$  (MN/s/m) avec la raideur  $k_2 = 18$  (MN/m)

La figure 3.12 montre les amplitudes du déplacement et de la force de réaction en

fonction du coefficient d'amortissement  $\eta_2$  pour 4 valeurs différentes de la raideur  $k_2$ . Lorsque  $\eta_2$  augmente, la force du blochet augmente et le déplacement diminue.

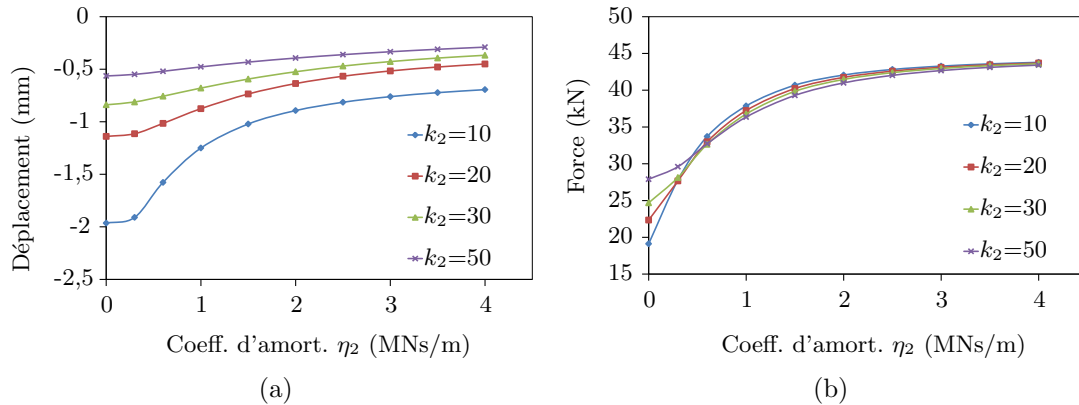


FIGURE 3.12 – Déplacement (a) et force de réaction (b) du support en fonction de l'amortissement  $\eta_2$  avec différentes valeurs de la raideur  $k_2$  (MN/m)

### Influence des caractéristiques de la semelle sous rail

Dans la conception du système LTV, la semelle sous rail est beaucoup plus rigide que la semelle sous blochet. Par conséquent, cette semelle ne doit pas trop influencer sur la réponse du système (en terme de déplacement et force). Seul le déplacement du rail qui dépend de façon significative des paramètres de cette semelle. (Ce déplacement engendre la différence de déplacement entre le rail et le blochet). La figure 3.13 montre le résultat de ce déplacement en fonction de la raideur ( $k_1$ ) et du coefficient d'amortissement ( $\eta_1$ ).

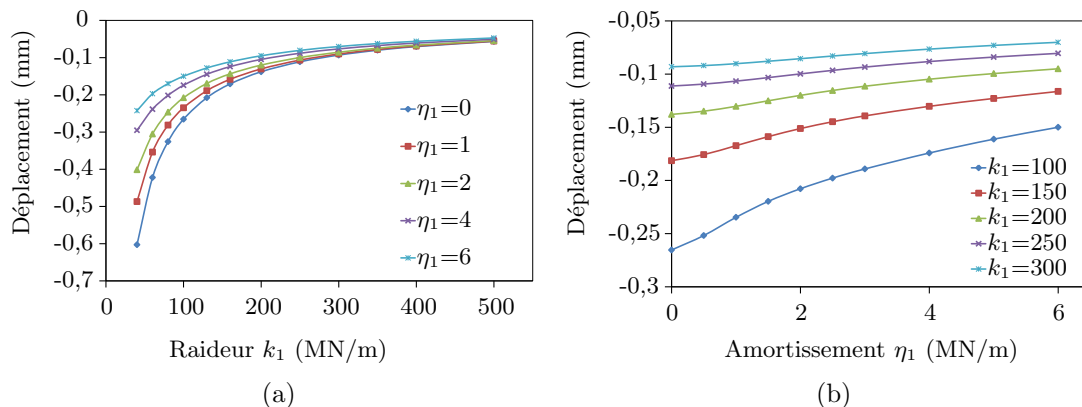


FIGURE 3.13 – Déplacement du support en fonction de la raideur  $k_1$  (a) et de l'amortissement  $\eta_1$  (b) de la semelle sous rail

### 3.4.2 Dégradation d'une zone de supports

La dégradation d'un composant du système de support implique un changement des paramètres de comportement. Par exemple, la dégradation de la semelle sous blochet diminue l'amortissement et augmente la raideur. D'ailleurs, la dégradation du blochet en béton cause une diminution importante de la raideur totale et/ou la perte de masse. On va analyser le rôle de ces paramètres lorsque l'on change un seul paramètre.

On considère une voie avec les paramètres donnés par le tableau 3.2. On étudie la variation des réponses en faisant varier la raideur et l'amortissement d'un blochet. En général, le blochet dégradé et ses voisins sont les plus influencés par le changement. On appelle les blochets voisins amont et/ou aval, les blochets voisins de la zone dégradée suivant le sens de circulation comme indiqué dans la figure 3.14.

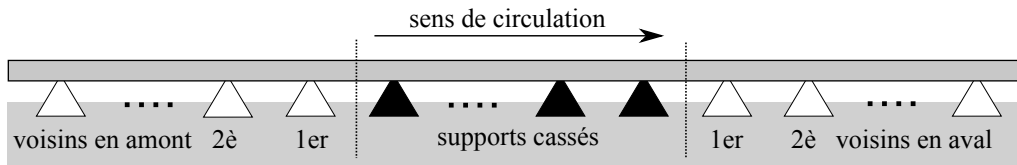


FIGURE 3.14 – Numérotation des blochets voisins

### Influence de la raideur

On considère une voie donnée dans le tableau 3.2. Dans cette voie, il y a un support dégradé qui a une raideur plus petite (qui varie entre 0 et 30MN/m) par rapport aux supports originaux. Avec le modèle analytique, on calcule le déplacement et la force de réaction des supports en fonction de la raideur du support dégradé. Le résultat montre qu'il y a deux supports en amont et un support en aval qui présentent des changements importants. Les réponses des autres supports ne sont pas influencées de façon significative.

Dans la figure 3.15, on voit que les déplacements augmentent lorsque la raideur diminue. De plus, l'augmentation du déplacement est plus importante au niveau du support dégradé ce qui peut impliquer le nivellement de la voie. D'autre part, la force de réaction du support dégradé diminue quand celles des supports voisins augmentent (voir la figure 3.16). Ceci explique que le support dégradé est sous-chargé quand ses voisins sont surchargés.

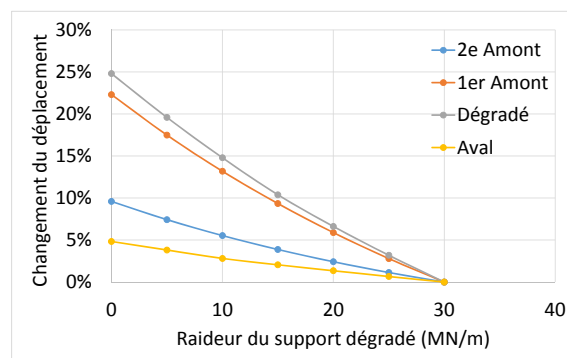


FIGURE 3.15 – Déplacement du support en fonction de la raideur du système

### Influence de l'amortissement

On calcule les réponses de la voie donnée dans le tableau 3.2 contenant un support avec un coefficient d'amortissement variant entre 0 et 0.5MN/m. Dans ce cas, il y a deux supports voisins (un en amont et un en aval) qui sont influencés par ce changement. Les figures 3.17 et 3.18 montrent les changements de déplacement et de force du support dégradé et de ses deux voisins. On voit qu'il y a une différence entre les supports en amont et en aval. Quand les réponses (force et déplacement) du support en aval sont plus importantes, celles du support en amont sont plus faibles. Ce résultat montre que la dégradation se

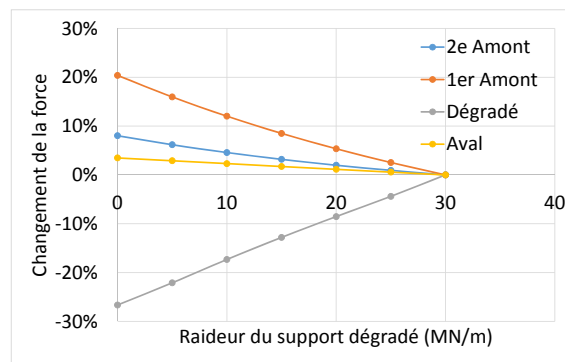


FIGURE 3.16 – Force de réaction du support en fonction de la raideur du système

propage vers l'aval plutôt que l'amont (c'est à dire dans le sens de circulation du train) lorsque les supports perdent de l'amortissement.

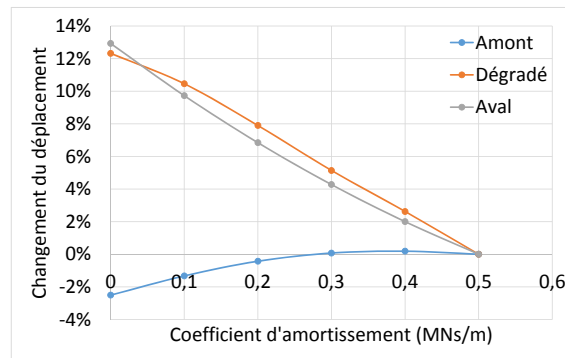


FIGURE 3.17 – Déplacement du support en fonction de l'amortissement

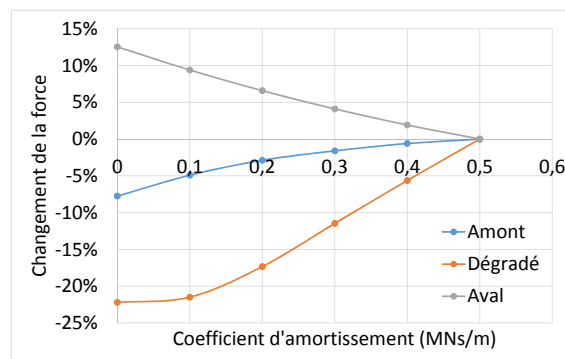


FIGURE 3.18 – Force de réaction du support en fonction de l'amortissement

### Influence des supports cassés consécutivement

On considère des voies avec des supports cassés (raideur et amortissement nuls). Les supports cassés se trouvent entourés de nombreux supports sains comme le montre la figure 3.19. Nous allons étudier les réponses en forces et en déplacements des supports en fonction du nombre de supports cassés.

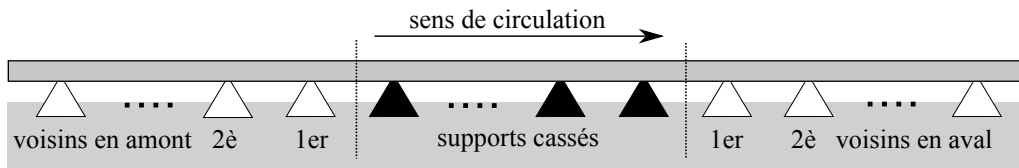


FIGURE 3.19 – Voie ferrée avec des supports cassés

Le résultat montre qu'il y a seulement trois supports voisins (deux en amont et un en aval) qui sont influencés de façon importante par les supports cassés. La figure 3.20 montre le changement de déplacement du support dégradé et de ses voisins. On voit que l'augmentation du déplacement est importante lorsqu'il y a plusieurs supports cassés ce qui implique un nivellement important. D'autre part, les courbes dans la figure 3.21 montrent l'augmentation des forces de réaction des supports voisins. Cette surcharge tend à se stabiliser lorsque le nombre de supports cassés augmente. Ce phénomène vient du fait que la poutre travaille en flexion simple sur deux appuis lorsqu'il y a de nombreux supports cassés.

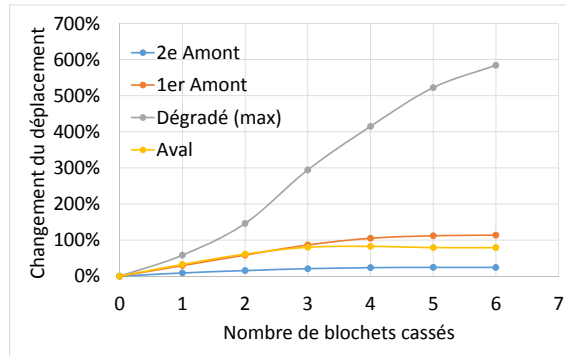


FIGURE 3.20 – Déplacement du support en fonction de l'amortissement

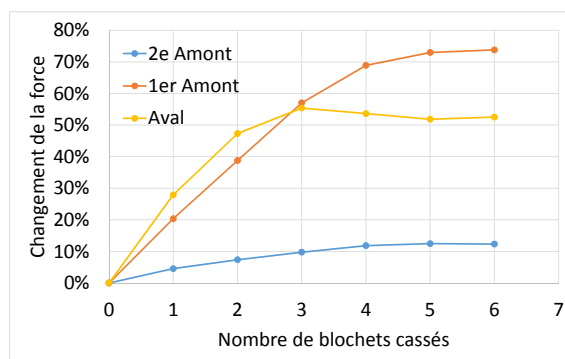


FIGURE 3.21 – Force de réaction du support en fonction de l'amortissement

### 3.4.3 Influence du taux de remplacement des supports de voie réparée

On considère une voie réparée avec un pourcentage de remplacement des supports. La voie compose alors deux types de supports (remplacé et ancien) qui présentent des comportements différents. En général, les supports remplacés sont plus rigides que les supports d'origine qui sont endommagés. Dans le cas du remplacement périodique, le taux

de remplacement des supports de  $1/N$  implique le remplacement d'un support qui se trouve parmi  $(N - 1)$  supports anciens dans un intervalle de longueur  $L = Nl$  de la voie (voir la figure 3.22).

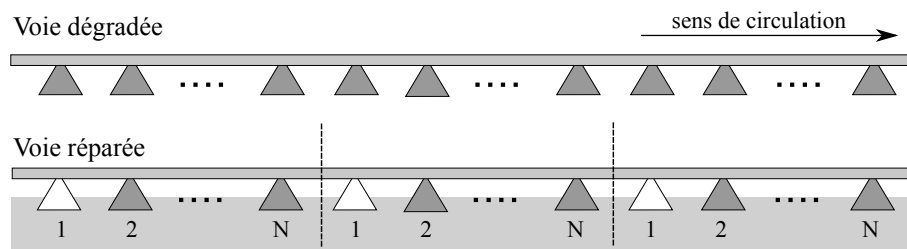


FIGURE 3.22 – Voie réparée par le remplacement périodique

Pour calculer les réponses de ce type de voie, on utilise la méthode directe présentée dans la section 3.3.1. Par exemple, on considère une voie réparée utilisant le système de support LVT ayant des caractéristiques données dans le tableau 3.2. Dans cette voie, on remplace 10% des blochets de façon périodique, c'est-à-dire, on remplace 1 support par tranche de 10 supports. La figure 3.23 présente les forces de réactions pour une force mobile  $Q = 70\text{kN}$  se déplaçant à la vitesse  $v = 150\text{km/h}$  et d'une voie ayant une raideur de supports dégradés  $k_2 = 9\text{MN/m}$ . On voit que la force de réaction du blochet remplacé est plus grande que la force de réaction du support ancien et que les courbes obtenues pour les supports anciens approchent la courbe obtenue pour la voie originelle.

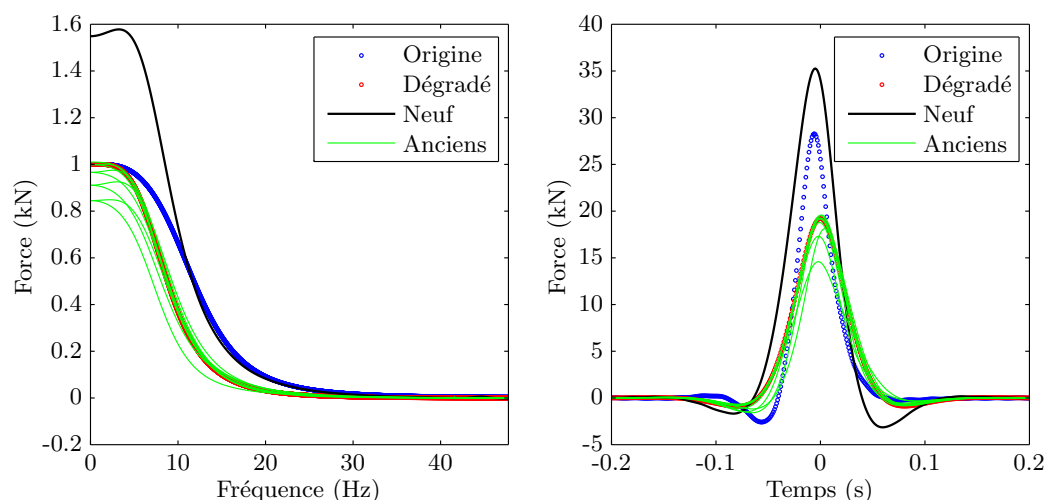


FIGURE 3.23 – Déplacement du rail dans trois types de voie : originelle (bleu), dégradée (rouge), et réparée avec  $N = 10$  (noire pour le support neuf et vert pour les supports anciens)

### Surcharge des supports remplacés

Les supports remplacés dans une voie réparée sont donc soumis à des forces plus grandes que celles appliquées aux supports d'une voie saine d'origine. Cette augmentation des forces de réaction aura par conséquent d'accélérer le vieillissement des supports. Il est nécessaire de contrôler cette augmentation pour que la contrainte maximum ne puisse pas atteindre la contrainte limite correspondant à une durée de vie définie.



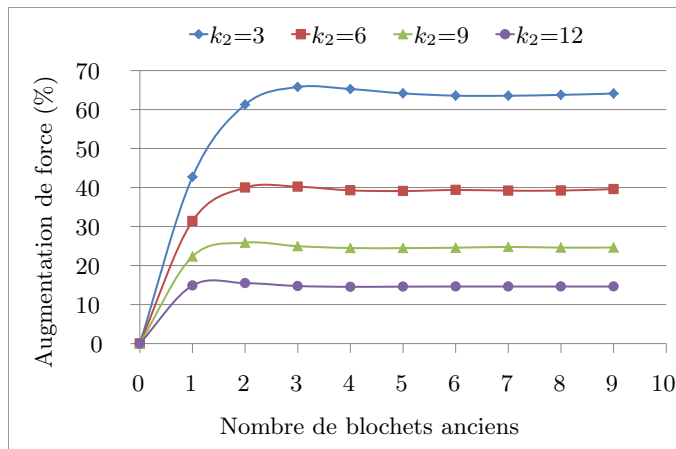


FIGURE 3.24 – Augmentation de la force appliquée à un blochet "neuf" (raideur 18MN/m) en fonction du nombre de blochets anciens où les blochets dégradés ont différentes raideurs  $k_2$ (MN/m)

La figure 3.24 montre l'augmentation de la force maximale appliquée au support neuf (par rapport à la force de réaction pour la voie d'origine) en fonction du nombre de supports anciens. Quelle que soit la raideur des supports anciens, la force de réaction des supports neufs augmente d'un certain pourcentage qui varie essentiellement pour  $N \leq 4$  (taux de remplacement de 25%). D'autre part, quand les supports sont plus endommagés ( $k_2$  petit), les supports de remplacement (neufs) sont soumis à des forces plus importantes. Ce résultat conduit à la remarque suivante :

**Remarque :** Si le système de support de la voie est très endommagé (c'est-à-dire,  $k_2$  est petit, les supports anciens ne supportent plus les charges), les supports de remplacement se trouvent très surchargés et peuvent avoir des durées de vie écourtées. Ceci est surtout vrai pour un taux de remplacement inférieur à 25%.

### 3.4.4 Mécanisme de la propagation de l'endommagement

Les résultats que nous avons obtenus montrent que les supports dégradés sont sous-chargés et leurs voisins sont généralement surchargés. Ce résultat explique un mécanisme de la propagation de l'endommagement schématisé dans la figure 3.25. Quand un ou plusieurs supports sont dégradés, ils sont sous-chargés ce qui implique un ralentissement de l'évolution de l'endommagement. D'autre part, les voisins sont surchargés ce qui implique une accélération de leur endommagement. Par conséquent, cet endommagement se propage, à son tour, aux autres supports voisins (supports situés en amont et en aval de la zone initialement considérée). Ce mécanisme explique que l'on trouve plus fréquemment des zones de supports endommagées que des supports individuels endommagés. De plus, si le coefficient d'amortissement des supports est important, la propagation de l'endommagement est plus importante dans le sens inverse de circulation (voir les résultats dans la figure 3.21).

## 3.5 Introduction au logiciel EuroAnalyse

Lors des campagnes de surveillance des voies du tunnel sous la Manche, on peut déterminer l'état des systèmes de support LVT avec le système de détection développé dans ce travail. Les mesures déjà effectuées montrent que les supports ne sont pas identiques

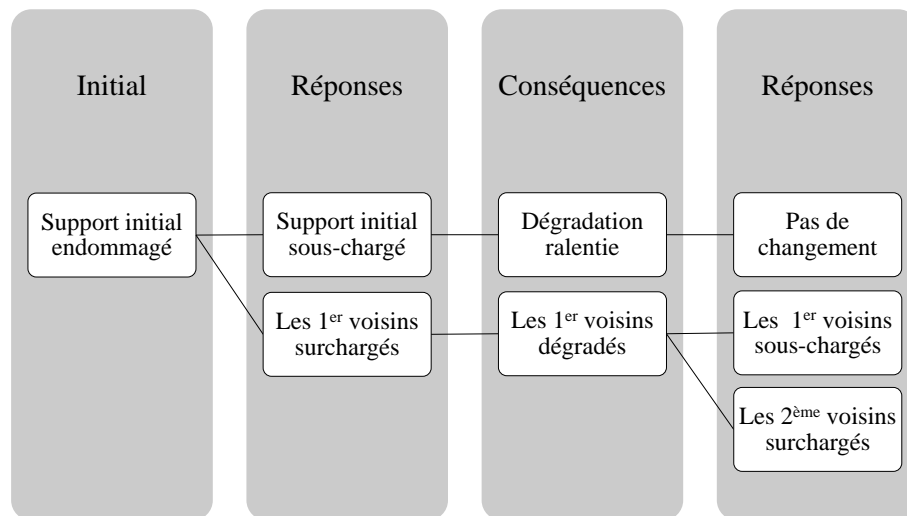


FIGURE 3.25 – Mécanisme de la propagation de l'endommagement

et que leur raideur varie selon les zones de voie. Pour analyser les conséquences de cette non-homogénéité sur la dynamique des voies, il faut prendre en compte ces paramètres identifiés afin de déterminer les zones où il faudra conduire des opérations de maintenance qui visent à remplacer les systèmes trop endommagés. Un calcul qui prend en compte toute la voie n'est pas faisable car il est trop coûteux en terme de temps de calcul. Par conséquent, on a besoin de découper la voie en plusieurs intervalles pour les analyser indépendamment.

Pour analyser la dynamique d'un intervalle de la voie, imaginons que cette intervalle se trouve au milieu d'une voie parfaite. Cette configuration est bien accord avec le modèle de voie avec une zone de défaut. Le modèle de voie non-homogène est donc bien adapté pour ce type d'analyse. Le logiciel **EuroAnalyse** est développé pour cet objectif en se basant sur ce modèle.

### 3.5.1 Fonctions principales

Le logiciel **EuroAnalyse** permet de calculer et visualiser les réponses d'une voie non-ballastée soumise à des charges mobiles avec une interface graphique. Le principe du logiciel est présenté dans le schéma de la figure 3.26. En se basant sur le programme MATLAB, les entrées du logiciel sont les paramètres de la voie en état réel qui contiennent :

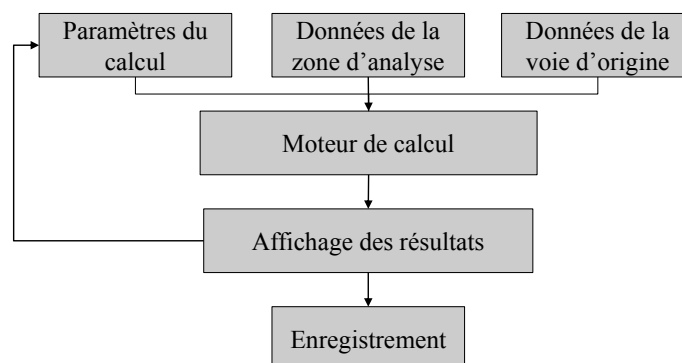


FIGURE 3.26 – Schéma d'EuroAnalyse

- Les paramètres de voie originelle : données du rail et des supports originaux (non-dégradés).
- Les paramètres de la zone d'analyse : données des supports en état réel qui sont obtenues par les campagnes de mesure.
- Les chargements et les paramètres du modèle.

Avec toutes ces données, **EuroAnalyse** permet de calculer rapidement les réponses dynamiques de la voie et d'analyser les réponses :

- Le déplacement et la force de réaction maximum de chaque support.
- Le graphique des réponses des supports (en déplacement et en force).

### 3.5.2 Utilisation du logiciel

La figure 3.27 montre l'interface graphique du logiciel EuroAnalyse qui contient trois zones : entrées du calcul, affichage de résultats et réglages d'affichage.

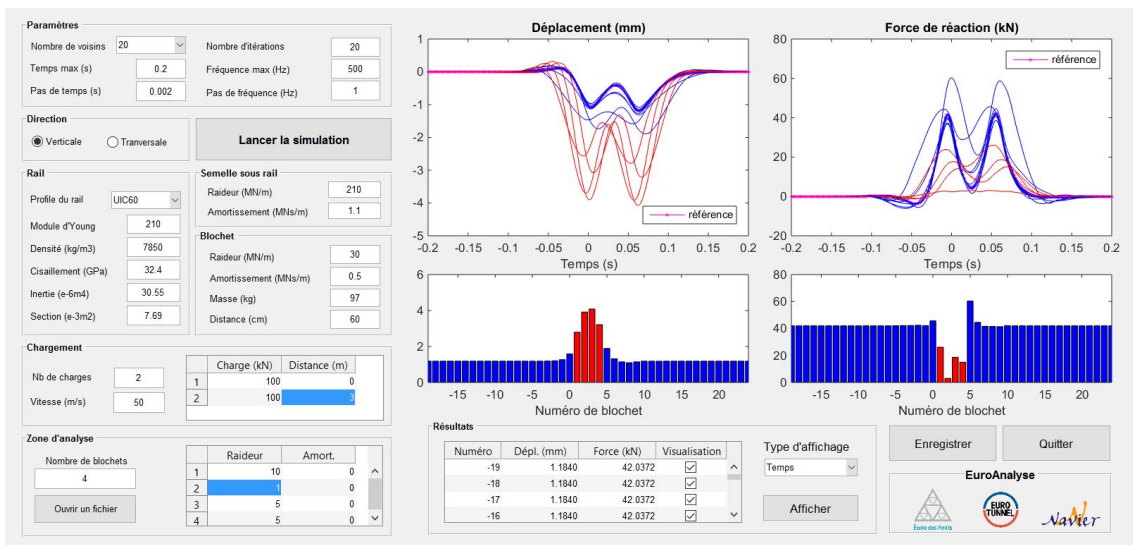


FIGURE 3.27 – Interface graphique d'EuroAnalyse

#### Les entrées

Les entrées se trouvent à gauche de l'interface avec sept groupes (voir la figure 3.28) :

- Paramètres : ce sont les paramètres du modèle.
- Direction : on peut choisir entre la direction verticale ou horizontale. Correspondant à la direction choisie, les paramètres des composants de la voie (le rail, le blochet et les semelles) dans cette direction sont donnés par défaut.
- Rail : le logiciel fournit les paramètres de défaut pour différents types de profil du rail. Il suffit de choisir le profil pour lancer le calcul. Si le profil n'est pas dans la base de données, on peut modifier les paramètres du rail manuellement.
- Semelle sous rail : elle est caractérisée par la raideur et le coefficient d'amortissement qui sont donnés dans le cahier des charges.
- Blochet : on considère que le comportement linéaire est caractérisé par 4 paramètres : la raideur, l'amortissement, la masse et la distance entre les blochets qui sont donnés dans le cahier des charges. Ce sont des paramètres des blochets sains qui se trouvent hors de la zone d'analyse.

- Chargement : dans cette version, les chargements sont des forces constantes mobiles. Il faut déclarer le nombre de charges ce qui correspond au nombre de roues et à la vitesse du train. Une fois le nombre de charge déclaré, la fenêtre située à droite permet d'entrer les valeurs des charges et la distance entre les charges.
- Zone d'analyse : ce sont les entrées relatives aux supports dans la zone d'analyse. Il y a deux façons de renseigner les paramètres.
  - + On déclare le nombre de supports et on indique les paramètres dans la fenêtre située à droite
  - + On peut aussi entrer des paramètres en ouvrant un fichier de données.

**Paramètres**

Nombre de voisins <input type="text" value="20"/>	Nombre d'itérations <input type="text" value="20"/>
Temps max (s) <input type="text" value="0.2"/>	Fréquence max (Hz) <input type="text" value="500"/>
Pas de temps (s) <input type="text" value="0.002"/>	Pas de fréquence (Hz) <input type="text" value="1"/>

**Direction**

Verticale  Transversale

**Lancer la simulation**

**Rail**

Profil du rail	<input type="text" value="UIC60"/>
Module d'Young	<input type="text" value="210"/>
Densité (kg/m3)	<input type="text" value="7850"/>
Cisaillement (GPa)	<input type="text" value="32.4"/>
Inertie (e-6m4)	<input type="text" value="30.55"/>
Section (e-3m2)	<input type="text" value="7.69"/>

**Semelle sous rail**

Raideur (MN/m)	<input type="text" value="210"/>
Amortissement (MNs/m)	<input type="text" value="1.1"/>

**Blochet**

Raideur (MN/m)	<input type="text" value="30"/>
Amortissement (MNs/m)	<input type="text" value="0.5"/>
Masse (kg)	<input type="text" value="97"/>
Distance (cm)	<input type="text" value="60"/>

**Chargement**

Nb de charges <input type="text" value="2"/>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 40%;">Charge (kN)</th> <th style="width: 50%;">Distance (m)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">100</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;">100</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> </tbody> </table>		Charge (kN)	Distance (m)	1	100	0	2	100	3
	Charge (kN)	Distance (m)								
1	100	0								
2	100	3								
Vitesse (m/s) <input type="text" value="50"/>										

**Zone d'analyse**

Nombre de blochets <input type="text" value="4"/> <input type="button" value="Ouvrir un fichier"/>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 40%;">Raideur</th> <th style="width: 50%;">Amort.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </tbody> </table>		Raideur	Amort.	1	10	0	2	1	0	3	5	0	4	5	0
	Raideur	Amort.														
1	10	0														
2	1	0														
3	5	0														
4	5	0														

FIGURE 3.28 – Paramètres d'entrée du logiciel EuroAnalyse

### Affichage des résultats

Les réponses de la voie sont affichées dans cette zone comme dans la figure 3.27. Pour chaque modélisation, les déplacements et les forces de réactions des supports sont affichés avec le graphique en temps réel et le diagramme des valeurs maximales. Les supports dans la zone d'analyse sont de couleur rouge et les supports voisins en bleu. Le résultat pour la voie d'origine est de couleur verte. Avec ces deux types de graphiques, on peut visualiser les surcharges et le nivellement de la voie dans la zone d'analyse et dans les supports voisins.

### Réglage de l'affichage

Les résultats sont présentés dans le tableau des valeurs maximales des réponses (déplacement et force). On peut changer la visualisation des réponses dans la zone d'affichage

en activant ou désactivant les supports dans ce tableau de résultat. Cette option est pratique lorsqu'il y a plusieurs supports dans la zone d'analyse. On peut aussi afficher les graphiques dans le domaine des fréquences lorsqu'on choisit le type d'affichage correspondant.

### 3.6 Conclusion

La voie non-homogène couvre différents problèmes dans la modélisation dynamique d'une voie ferrée comme le défaut des supports et de la fondation, les ponts ferroviaires, les zones de transition... Ce chapitre présente le modèle analytique développé pour ce type de voie. En particulier, ce modèle permet d'obtenir une relation entre les forces et les déplacements des supports dans un état stationnaire qui est valable pour tous les types de voie (linéaire ou non-linéaire). De plus, les deux méthodes de calcul (directe et itérative) permettent de déterminer rapidement les réponses de la voie. Les études paramétriques ont ensuite montré que si une voie est réparée dans le cadre d'un remplacement périodique des supports, la force appliquée aux supports remplacés peut augmenter avec un taux de surcharge important. Par conséquent, cette force fait augmenter des contraintes locales dans les supports et cette augmentation influence la durée de vie des supports. D'autre part, ces études ont permis d'expliquer le mécanisme de propagation des endommagements lorsqu'il y a une zone défectueuse dans la voie.

Ensuite, nous avons développé le logiciel "**EuroAnalyse**" qui permet de calculer les réponses d'une voie non-homogène. Ce logiciel est donc un outil qui permet d'évaluer les risques dûs à la dégradation des supports. Cette analyse de risque sera effectuée en trois étapes :

- Identification des endommagements des supports : par une méthode non-destructive, on va détecter les endommagements des supports ce qui peut influencer le comportement du support. Cette étape peut se faire avec le logiciel "**EuroDetection**" qui est présenté dans le chapitre 5.
- Utilisation d'**EuroAnalyse** pour calculer les réponses
- Classification des niveaux de risque de la zone : la modélisation avec le logiciel **EuroAnalyse** permet d'avoir les taux de surcharge et le nivellement de la voie dûs à l'endommagement des supports. Ces résultats sont une donnée importante pour définir le niveau de risque qui sera utilisé pour définir le plan de maintenance de la voie.

Deuxième partie

Dégradation d'un support de voie  
non-ballastée



## Chapitre 4

# Dégradation d'un système LVT pour voie non-ballastée

### 4.1 Introduction

Le système LVT pour voie ferrée sans ballast comprend des composants qui font l'objet de la maintenance périodique comme le rail ou la semelle sous rail. En revanche, il n'est théoriquement pas prévu de maintenance pour les autres composants de par la conception de ce système. Ce système LVT contient un blochet en béton armé qui est posé sur une semelle micro-cellulaire l'ensemble étant placé dans un réceptacle en caoutchouc (le chausson). La réalisation d'une voie sur dalle avec système LVT comprend d'abord l'installation du système LVT puis le coulage de la dalle en béton (non armé). Avec les deux couches élastiques (les semelles et le chausson), ce système répartit bien les contraintes générées par le passage des trains sur la dalle.

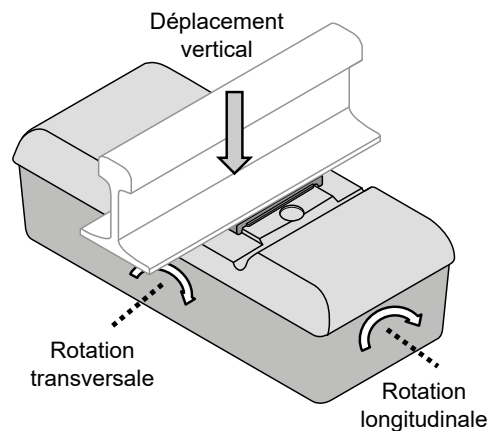


FIGURE 4.1 – Les mouvements d'un support d'une voie sur dalle

Cependant, comme pour toutes les structures mécaniques très sollicitées, les équipes de maintenance de la société Eurotunnel ont observé un vieillissement du système LVT lors des campagnes de surveillance réalisées en tunnel. D'autre part, des mesures réalisées in situ ont montré que les supports sont déformés suivant les trois mouvements principaux du rail : le déplacement vertical et les rotations selon deux axes horizontaux (voir la figure 4.1). Ce mouvement génère des zones de concentration de contrainte dans chaque composant du système qui sont responsables des endommagements observés. La dégradation de chaque



composant s'effectue de plus à différentes vitesses. Enfin, la surveillance de la dégradation s'avère difficile car le système est encastré dans la dalle en béton.

Dans ce chapitre, nous allons présenter dans un premier temps les phénomènes de dégradation des composants du système LVT. On présentera ensuite les essais qui ont été réalisés pour caractériser les matériaux constituant les composants du système support. Il s'agit d'essais de traction-compression pour les composants élastomères (les deux semelles et le chausson) et de la méthode par émission acoustique pour le blochet en béton. Nous avons réalisé ensuite un calcul éléments finis 3D du système qui permet de déterminer les champs de contrainte dans les composants du système, les données d'entrée de ce calcul étant les valeurs que nous avons déterminées expérimentalement. Les résultats de calcul nous permettent d'analyser les contraintes critiques dans chaque composant. Enfin, nous appliquons la théorie de la fatigue pour identifier les causes probables d'endommagement, cette analyse devant être validée par la suite dans le cadre d'essais en fatigue permettant d'expliquer le vieillissement du système LVT.

## 4.2 Dégradation d'un système LVT

### 4.2.1 Dégradation des composants élastomères

#### Semelle sous rail

La semelle sous rail est le premier étage élastique du système de support sous rail. C'est une simple plaque élastomère de forme rectangulaire d'une épaisseur d'environ 6mm. A l'origine, la semelle sous rail est fabriquée en matériau micro-cellulaire EVA comme la semelle sous blochet. Depuis une dizaine d'années, sa conception a été modifiée et cette nouvelle conception rentre toujours dans le cadre de la maintenance périodique de la voie.

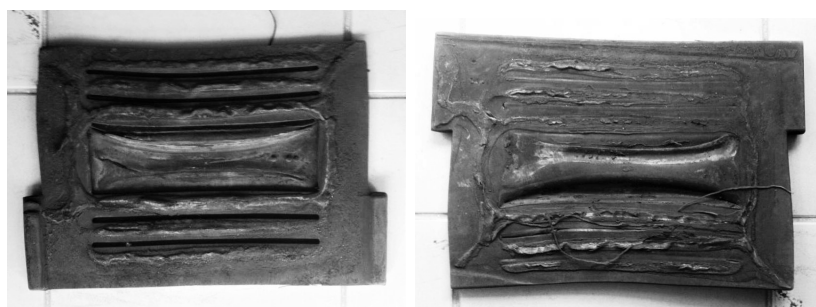


FIGURE 4.2 – Dégradation de la semelle sous rail : vue de dessous (à gauche) et vue de dessus (à droite)

La figure 4.2 montre la dégradation de la semelle due à l'usure. Dans cette figure, on voit que les deux surfaces présentent des endommagements différents. Sur la surface du dessus en contact avec le rail (photo à droite) apparaissent des couches fines détachées qui viennent du glissement entre le rail et la semelle. D'autre part, la surface en contact avec le blochet (photo à gauche) présente des gonflements qui traduisent une déformation plastique de la semelle.

Pour remplacer cette semelle, on procède au levage du rail de façon à l'enlever puis à la remplacer par une semelle neuve. La procédure est manuelle mais assez simple et elle ne fait pas l'objet de notre étude. Cependant, on peut utiliser l'étude paramétrique (présentée dans le chapitre 3) pour déterminer les paramètres optimaux qui permettent de définir les paramètres mécaniques de semelle optimaux pour une voie dans un état donné.

### Chausson en caoutchouc

Bien que le chausson soit encastré dans le béton entre la dalle et le blochet, ce composant est peu endommagé. Le retour des campagnes de surveillance montre que ce composant n'est dégradé que dans certains intervalles de la voie où les endommagements apparaissent sur les parois le long du chausson (voir la figure 4.3). Ces chaussons présentent des zones abimées



FIGURE 4.3 – Chausson dégradé (en haut) avec vue intérieure (à gauche) et vue extérieure (à droite)

avec de petits trous situés sur la partie basse des parois (amont ou aval) du chausson. Ce phénomène est la conséquence des impacts subis par la partie basse du blochet. La cause de cet impact est la rotation du blochet dans l'axe suivant la longueur du blochet. Cette rotation est la conséquence de différents phénomènes :

- Le défaut de l'installation du système qui génère des rotations du blochet lors de la circulation des trains ( l'inclinaison du blochet, du rail...)
- La présence de forces horizontales dans la zone (freinage, accélération...)

La conséquence de ce type d'endommagement est que le chausson ne protège plus le blochet contre les impacts avec la dalle. Par conséquent, ces impacts produisent des forces horizontales sur le blochet et la dalle. Ces forces peuvent endommager des blochets ou la dalle. Même si ce type d'endommagement est important, il n'y a pas de méthode pour les détecter sans retirer le système support de la dalle ce qui représente une opération lourde. D'autre part, il faut aussi procéder au remplacement du blochet car celui-ci sera aussi endommagé. Aujourd'hui, on le remplace donc seulement dans le cas où l'on veut changer le blochet.

### Semelle micro-cellulaire

Comme la raideur de la semelle sous blochet est la plus faible de toutes les raideurs des composants, ce composant joue un rôle important sur la réponse dynamique de la voie. La figure 4.4 montre une partie de la surface de trois semelles différentes (une neuve et deux usées). On voit qu'il n'y a pas d'endommagement clair, mais qu'il existe des modifications de la texture sur les surfaces et que l'épaisseur de la semelle n'est plus la même. Par conséquent,

ces changements peuvent causer un changement de la raideur et de l'amortissement de la semelle qui va modifier la réponse de la voie. Il faudra caractériser ces semelles pour identifier ces modifications.

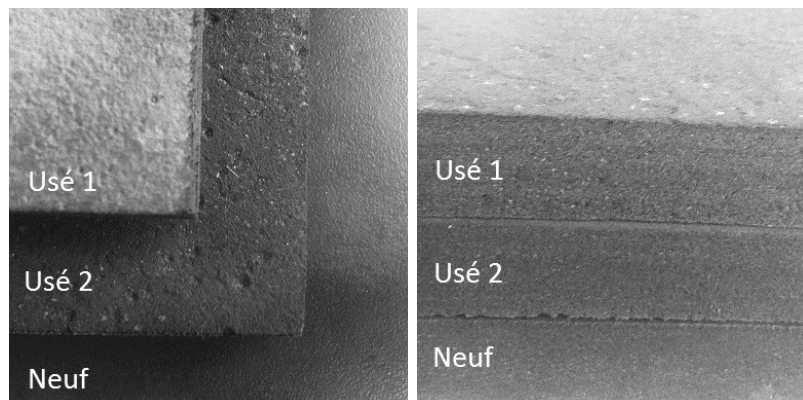


FIGURE 4.4 – Dégradation de la semelle micro-cellulaire en surface (à gauche) et en épaisseur (à droite)

Le remplacement de la semelle micro-cellulaire s'effectue lors du remplacement du blochet et du chausson.

#### 4.2.2 Dégradation du blochet

Le blochet est le composant le plus important dans le système LVT. Lorsqu'il est endommagé, le système ne supporte plus le rail. Par conséquent, la durée de vie du blochet représente aussi la durée de vie du système, malgré la dégradation des autres composants élastiques. L'étude de la dégradation d'un blochet est aussi l'objectif principal de la deuxième partie du mémoire.

Nous avons retenu deux types d'endommagement principaux pour le blochet (voir figure 4.5)

- La fissuration verticale qui agit soit au niveau de la face inférieure du blochet, soit au milieu de la surface de contact avec la semelle sous le rail (que l'on appelle aussi la table du blochet), dans le plan perpendiculaire à l'axe longitudinale du blochet. Les fissures peuvent aussi apparaître sur les deux côtés latéraux du blochet. Ces fissures peuvent se propager dans ce plan jusqu'à la rupture totale du blochet en deux morceaux.
- La fissuration horizontale avec la rupture d'une partie inférieure du blochet. Les fissures apparaissent souvent au niveau des renforts d'acier et se propagent dans le plan horizontal. Lorsqu'on enlève un blochet présentant ce type de rupture de la voie, la partie inférieure peut être désolidarisée du reste du blochet et rester avec le chausson dans la dalle. Ce type d'endommagement s'observe uniquement dans certaines zones de la voie.

Pour chaque type d'endommagement, la taille des fissures est très variable. La fissuration peut être à l'état d'initiation ou avoir propagé suivant l'épaisseur ou la longueur totale du blochet jusqu'à la rupture totale du blochet. Par conséquent, il y a trois problèmes majeurs à résoudre :

- Pourquoi les blochets sont-ils endommagés ? Quels sont les mécanismes d'endommagement et quels en sont leur cause ?
- Comment identifier les endommagements en voie ?

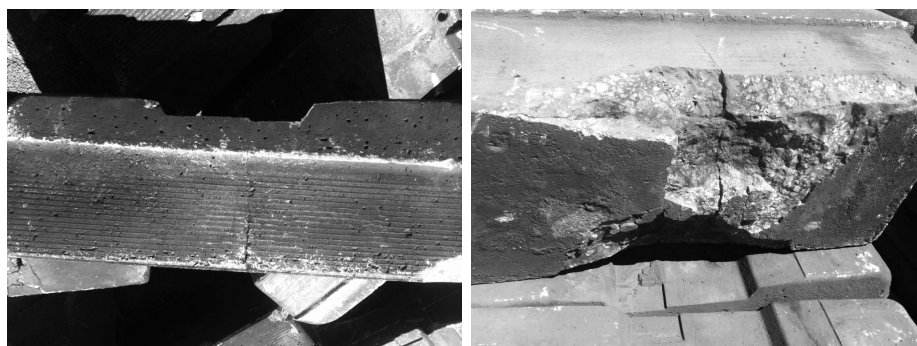


FIGURE 4.5 – Dégradation du blochet : fissuration verticale (à gauche) et fissuration horizontale avec la rupture d’une partie inférieure (à droite)

— Comment évaluer les risques associés ?

Dans les sections suivantes, nous allons tenter d’essayer de répondre à la première question en analysant les champs de contrainte qui pourraient causer les endommagements observés. On rappelle qu’un blochet en voie est soumis à des chargements cycliques dont le nombre de cycles correspond au nombre total d’essieux ayant circulé sur la voie. La résultante des chargements engendre trois mouvements principaux : le déplacement vertical et les rotations suivant les deux axes horizontaux (voir la figure 4.1). Pour analyser les conséquences de ces mouvements, nous allons d’abord mesurer les propriétés mécaniques des composants afin de faire une simulation numérique d’un blochet en trois dimensions. La finalité est d’identifier le niveau d’endommagement du blochet pour en déduire sa durée de vie dans le cadre de la maintenance périodique.

## 4.3 Caractérisation des matériaux du système

### 4.3.1 Essais de compression réalisés à Eurotunnel en 2005

Les mesures des raideurs statiques et dynamiques ont été présentées dans la section 1.3.1. Dans ces mesures, les semelles élastiques ont été mises entre deux plaques d’acier pour caractériser leurs propriétés en compression. Les résultats des mesures sont présentés dans les tableaux 1.1 et 1.2. On voit que les raideurs statiques des deux semelles dépendent de l’amplitude du chargement. Ceci indique que les matériaux ont des comportements non-linéaires. Pour obtenir les lois de comportement, il faut disposer de plus de résultats de mesures avec des chargements d’amplitudes différentes. Pour simplifier le problème, nous allons chercher à déterminer des paramètres de matériaux visco-élastiques linéaires équivalents à savoir le module d’Young, le coefficient de Poisson et le coefficient d’amortissement.

On calcule tout d’abord les raideurs linéarisées en cherchant la pente de la courbe de la force appliquée en fonction du déplacement des semelles. Le résultat pour les mesures statiques est présenté dans la figure 4.6. Dans ces figures, on voit que les courbes obtenues pour la semelle sous rail ne passent pas par l’origine. Ceci indique que la semelle a un comportement hyperélastique. Pour déterminer une raideur statique moyenne pour différents chargements, avons calculé la moyenne linéarisée de chaque semelle et la moyenne totale des trois semelles comme présenté dans le tableau 4.1.

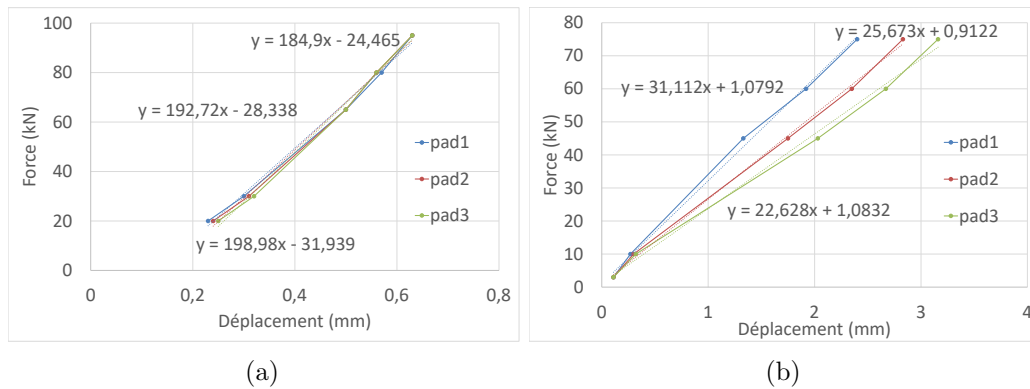


FIGURE 4.6 – Détermination des raideurs statiques moyennes de la semelle sous rail (a) et la semelle sous blochet (b)

Composants	Unité	A	B	C	Moyenne
Semelle sous rail	$\text{MNm}^{-1}$	185	193	199	192
Semelle sous blochet	$\text{MNm}^{-1}$	31.1	25.7	22.6	26.4

TABLE 4.1 – Raideur en compression

### Détermination du module d'Young

Nous analysons maintenant le résultat des essais effectués en 2005 pour déterminer les paramètres des matériaux de deux semelles. Si on considère que ces matériaux sont élastiques et isotropes, on peut écrire la loi de comportement comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1 + \nu} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \quad (4.1)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sont les champs de contrainte et de déformation des semelles. Quand la surface de la semelle est très grande, la semelle se déforme seulement dans la direction de chargement, on peut alors écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

En remplaçant la dernière équation dans l'équation 4.1, on en déduit donc l'expression suivante :

$$\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.3)$$

On appelle  $\sigma_{11}/\varepsilon_{11}$  le module d'onde en compression. Pour déterminer ce module, on calcule les valeurs de la contrainte  $\sigma_{11}$  et de la déformation  $\varepsilon_{11}$  à partir de la force surfacique et du déplacement. La figure 4.7 et le tableau 4.2 montrent le résultat obtenu à partir des essais statiques.

Pendant, la connaissance de ce module d'onde en compression ne suffit pas à déterminer le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  parce que l'équation (4.3) comprend deux variables. Le tableau 4.3 montre un exemple de modules d'Young des composants pour une valeur de coefficient de Poisson donnée. Par exemple, le coefficient de Poisson d'un matériau micro-cellulaire comme celui de la semelle sous blochet est, en général, égal à zéro. On détermine alors dans ce cas un module d'Young égal à 2.07MPa. En revanche,

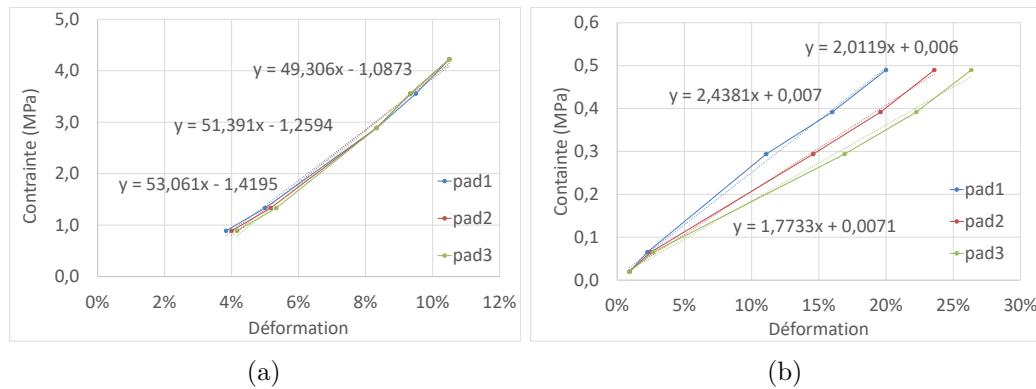


FIGURE 4.7 – Détermination de module d'onde en compression du matériau constituant la semelle sous rail (a) et la semelle sous blochet (b)

Composants	Unité	A	B	C	Moyenne
Semelle sous rail	MPa	49.3	51.4	53.1	51.3
Semelle sous blochet	MPa	2.44	2.01	1.77	2.07

TABLE 4.2 – Module d'onde de compression  $\sigma/\varepsilon$

le caoutchouc est un matériau incompressible et son coefficient de Poisson est de l'ordre de 0.4 ce qui donne un module d'Young de 20.5MPa.

Coefficient de Poisson ( $\nu$ )	0	0.2	0.3	0.4
Semelle sous rail	51.3	46.1	38.1	<b>20.5</b>
Semelle sous blochet	<b>2.07</b>	1.86	1.54	0.83

TABLE 4.3 – Calcul du module d'Young (MPa)

### Détermination des coefficients d'amortissement

Pour déterminer le coefficient d'amortissement d'un matériau, on se base sur le facteur d'amortissement. Ce facteur représente le taux d'énergie dissipée dans une boucle de chargement-déchargement d'un essai dynamique et se détermine comme suit :

$$Q = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Energie perdue}}{\text{Energie totale}} \quad (4.4)$$

Dans cette dernière équation, l'énergie perdue est l'aire de la boucle et l'énergie totale est calculée par l'amplitude du déplacement :

$$\text{Energie perdue} = \text{Aire de la boucle} \quad (4.5)$$

$$\text{Energie totale} = \frac{1}{2}k \left( \frac{D_{max} - D_{min}}{2} \right)^2 \quad (4.6)$$

où  $k$  est la raideur statique de matériau. Ensuite, le coefficient d'amortissement est calculé via le facteur d'amortissement :

$$\eta = \frac{Qk}{2\pi f}$$

où la fréquence  $f = 5Hz$  selon les essais dynamiques (c'est aussi la fréquence décrite par la norme EN 13481-2 annexe B).

Raideur MN/m	Changement kN	Dmax mm	Dmin mm	Aire J	Facteur $Q$ %	Coeff. $\eta$ MNsm <sup>-1</sup>
185	30-65	0.04	-0.05	0.44	37.4	2.20
	30-80	0.06	-0.07	0.86	35.0	2.06
	20-95	0.10	-0.11	2.23	34.8	2.05
193	30-65	0.05	-0.05	0.40	26.4	1.62
	30-80	0.06	-0.07	0.86	33.6	2.06
	20-95	0.10	-0.11	2.21	33.1	2.03
199	30-65	0.05	-0.05	0.42	26.9	1.70
	30-80	0.06	-0.07	0.85	32.2	2.04
	20-95	0.10	-0.11	2.14	31.0	1.97
<b>Moyenne</b>					<b>32.3</b>	<b>1.97</b>

TABLE 4.4 – Mesure dynamique - semelle sous rail

Raideur MN/m	Changement kN	Dmax mm	Dmin mm	Aire J	Facteur $Q$ %	Coeff. $\eta$ MNsm <sup>-1</sup>
31.1	10-45	0.38	-0.37	3.35	24.4	0.24
	10-60	0.61	-0.61	7.71	21.2	0.21
	3-75	0.99	-0.94	17.07	18.8	0.19
25.7	10-45	0.50	-0.50	4.21	20.9	0.17
	10-60	0.73	-0.76	8.60	19.2	0.16
	3-75	1.16	-1.13	18.72	17.7	0.14
22.6	10-45	0.59	-0.60	5.05	20.1	0.14
	10-60	0.85	-0.89	9.75	18.1	0.13
	3-75	1.30	-1.30	20.19	16.8	0.12
<b>Moyenne</b>					<b>19.7</b>	<b>0.17</b>

TABLE 4.5 – Mesure dynamique - semelle sous blochet

## Synthèse

Les essais de compression effectués en 2005 permettent de déterminer les raideurs statiques et dynamiques des semelles élastiques. Ces essais permettent aussi d'avoir des informations sur les matériaux mais ils ne sont pas suffisants pour déterminer les paramètres des matériaux (voir le tableau 4.6). Pour résoudre ce problème, des essais de compression et de traction ont été effectués en 2014 au laboratoire Navier.

	Semelle sous rail	Semelle sous blochet
Matériau	Hyperélastique	Élastique linéaire
Raideur	$k_1 = 192 \pm 10KN$	$k_2 = 26 \pm 5KN$
Facteur d'amortissement.	$Q_1 = 32 \pm 5\%$	$Q_2 = 20 \pm 5\%$
Coefficient d'amortissement	$\eta_1 = 2.0 \pm 0.2MNsm^{-1}$	$\eta_2 = 0.17 \pm 0.05MNsm^{-1}$

TABLE 4.6 – Résumé des résultats obtenus par les essais de compression en 2005

### 4.3.2 Essais de traction-compression réalisés en laboratoire

#### Essais de compression statique

Les essais de compression statique ont été effectués pour déterminer la raideur des semelles usées en raison du trafic important du tunnel. De plus, les résultats de ces essais seront comparés à ceux des essais réalisés en 2005. Les éprouvettes seront obtenus en découpant la semelle en petits échantillons qui seront testés à l'aide d'une presse électromécanique MTS de capacité 20kN. Les échantillons et le dispositif d'essais sont montrés dans la figure 4.8 et les données d'essais sont les suivantes :

- Vitesse de déplacement de la traverse lors de l'essai de compression : 2 mm/minute
- Nombre d'échantillons : 4 dont une semelle neuve, deux semelles usées et une semelle humide (il existe une zone humide en tunnel).
- Taille d'échantillon : 10cmx10cm

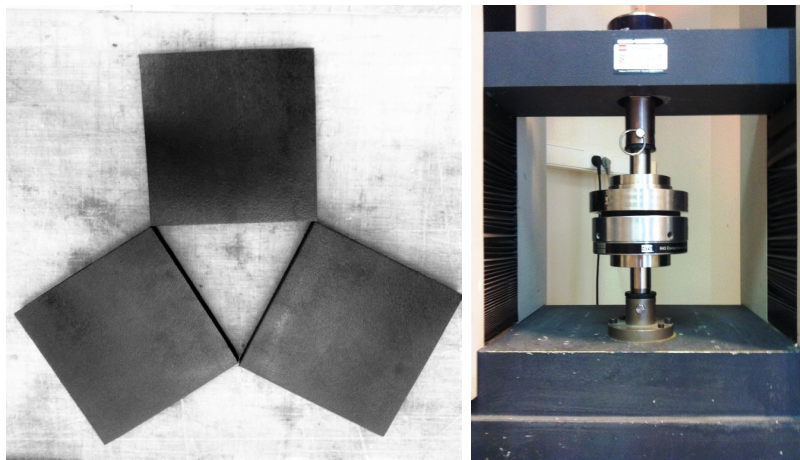


FIGURE 4.8 – Échantillons et dispositif des essais de compression

Pour chaque échantillon, on applique à l'éprouvette 10 cycles de chargement-déchargement entre 0.5 et 7kN. La figure 4.9 montre les courbes force/déplacement obtenues. On voit qu'il y a un déplacement des courbes après chaque cycle de chargement et déchargement. Ce déplacement vient de la déformation résiduelle après chaque cycle.

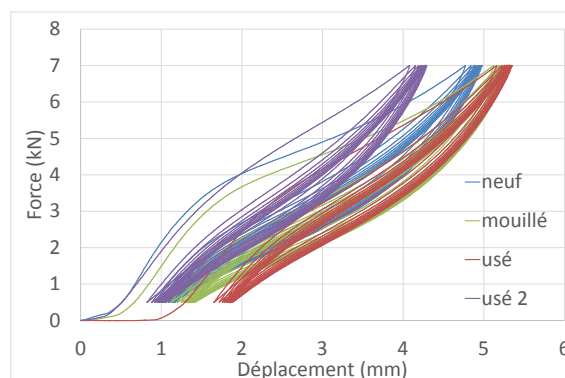


FIGURE 4.9 – Courbes de force - déplacement durant les essais de compression statique

Pour calculer les raideurs statiques des échantillons, on prend le dernier cycle et on trace la droite linéarisée obtenue pour chaque échantillon (voir la figure 4.10). On obtient donc les résultats présentés dans le tableau 4.7.



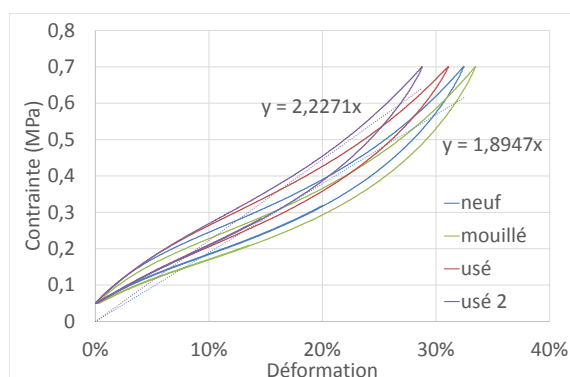


FIGURE 4.10 – Courbes de contrainte - déformation dans les essais statiques

Echantillon	Unité	Valeur
Blochet neuf	kN/mm	1.8947
Blochet usé 1	kN/mm	2.0829
Blochet usé 2	kN/mm	2.2271
Blochet mouillé	kN/mm	1.8096

TABLE 4.7 – Module d'onde de compression des semelles sous blochet

Pour estimer les erreurs de mesure liées à la procédure de mesure des déformations, on réalise un essai de compression sans échantillon de façon à déduire des déplacements obtenus par les déplacements résultant de la déformation du bâti d'essai. Le résultat du déplacement en fonction de la force appliquée est montré dans la figure 4.11. Dans cette figure, lorsque la force atteint 7kN, le déplacement peut atteindre 0.5mm ce qui représente l'équivalent d'une erreur de 10% sur les valeurs de déplacement obtenues pour les essais avec échantillons. Cette erreur est importante et il faut en tenir compte lorsque l'on réalise des essais de compression avec des échantillons minces.

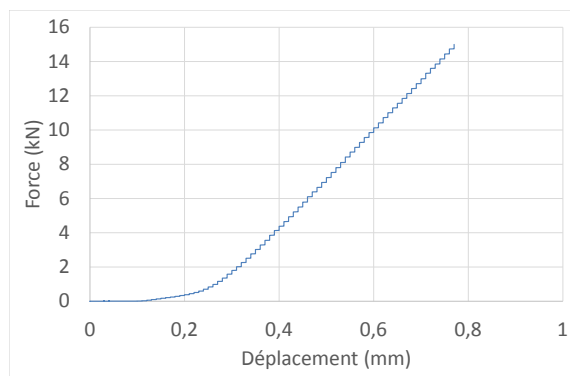


FIGURE 4.11 – Essai de compression statique sans échantillon

Pour conclure, le module d'onde en compression obtenu à l'aide des essais de compression varie entre 1,8 et 2,2 MPa (cohérent avec la mesure de 2005). Les semelles usées sont plus rigides que les semelles neuves. De plus, la différence entre les courbes est de 5% et c'est l'ordre de grandeur de l'erreur de mesure du déplacement.

### Essais de traction statique

Par définition, le coefficient de Poisson pour un matériau isotrope est déterminé en faisant le ratio entre les déformations transversales et longitudinales lorsque l'éprouvette est sollicitée dans la direction longitudinale. Dans les essais de compression, la déformation transversale n'a pas pu être mesurée car la géométrie de l'éprouvette rendait cette mesure difficile. Nous avons donc effectué, pour mesurer ce coefficient, des essais de traction à l'aide d'une presse électromécanique MTS M20 de capacité 100kN (figure 4.12).

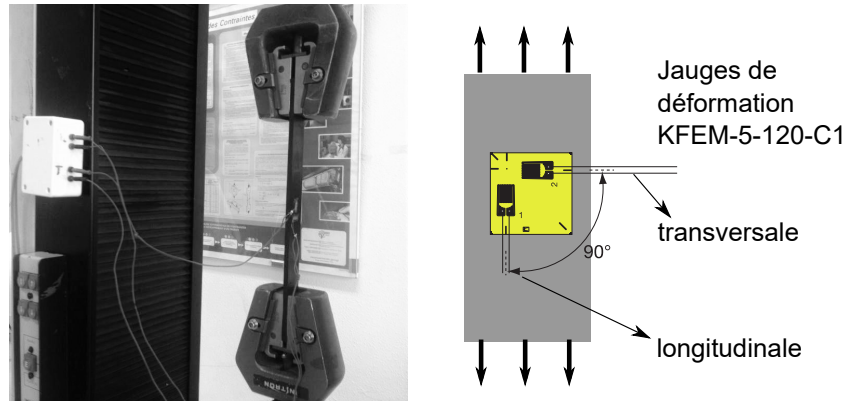


FIGURE 4.12 – Dispositif des essais de traction

La mesure des déformations longitudinales et transversales a été réalisée à l'aide de jauges de déformation KYOWA KFEM-5-120-C1 collées au centre de l'échantillon. Le chargement est contrôlé en déplacement à la vitesse de 3mm/minute. Les échantillons sont découpés à partir des composants élastiques du système LVT avec les dimensions suivantes (largeur-épaisseur-longueur) :

- Semelle sous rail : 12 x 06 x 18mm
- Semelle sous blochet : 25 x 12 x 18mm
- Chaussou : 25 x 05 x 18mm

Lorsque les essais sont effectués, on peut tracer la courbe de contrainte en fonction de la déformation pour obtenir le module d'Young et la courbe de déformation transversale en fonction de la déformation longitudinale pour déterminer le coefficient de Poisson. La figure 4.13 montre les résultats de l'essai en traction avec l'échantillon extrait du chaussou.

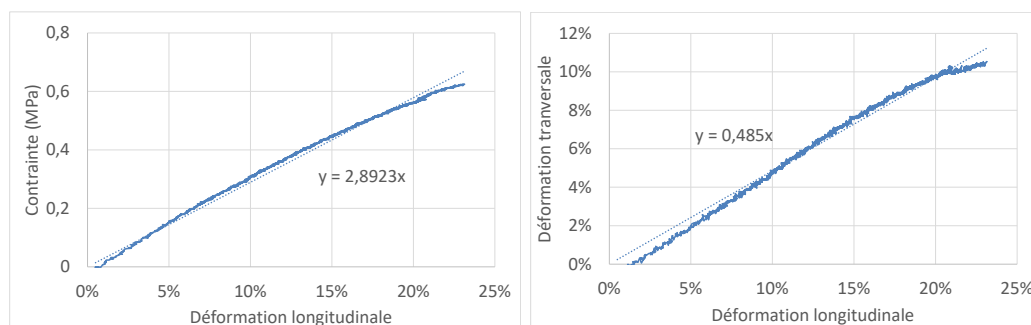


FIGURE 4.13 – Essai de traction - chaussou neuf

Le tableau 4.8 présente les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant le chaussou, la semelle sous rail et la semelle sous blochet.

Paramètre	Unité	Chausson	Semelle s.rail	Semelle s.blochet
Coeff. Poisson		0.485	0.009	0.004
Module Young	MPa	2.89	14.6	16.6

TABLE 4.8 – Résultats des essais de traction en petite déformation ( $\leq 2\%$ )

### 4.3.3 Mesure par émission acoustique

#### Méthode de mesure

Pour caractériser les matériaux du blochet et du rail, nous avons opté pour une méthode non-destructive en utilisant l'émission acoustique. Cette méthode est basée sur la mesure de la vitesse de propagation des ondes élastiques dans un milieu continu lorsqu'il y a une source de vibration en un point du milieu. En se basant sur la théorie de la mécanique des milieux continus [], il existe trois types d'onde : l'onde de compression, l'onde de cisaillement et l'onde surfacique qui se propagent dans le milieu avec différentes vitesses :

— Onde de compression :

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (4.7)$$

— Onde de cisaillement :

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1 + \nu)}} \quad (4.8)$$

— Onde surfacique :

$$V_s = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1 + \nu)}} \quad (4.9)$$

où  $E, \rho, \nu$  sont le module d'Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson du milieu. On voit que le ratio entre ces vitesses ne dépend que du coefficient de Poisson.

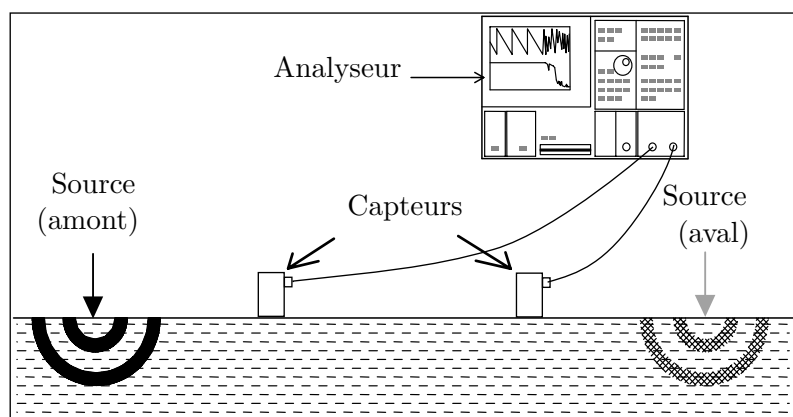


FIGURE 4.14 – Dispositif de la méthode d'émission acoustique

Pour déterminer les paramètres du matériau, on mesure la vitesse des ondes à l'aide de deux capteurs de vibration avec le dispositif montré dans la figure 4.14. Dans cette figure, une source de vibration est mise à l'extérieur de l'intervalle entre deux capteurs. Lorsqu'il y a une excitation, les ondes élastiques se propagent et passent au premier capteur et ensuite au deuxième capteur. Grâce aux signaux recueillis par les deux capteurs, on peut déterminer le temps mis par les ondes pour se propager entre les deux capteurs.

### Enregistrement et traitement des signaux

*Capteurs et enregistrement des signaux* : Les capteurs et l'analyseur sont présentés dans la figure 4.15. L'excitation de la structure se fait en appuyant la mine d'un crayon à papier sur celle-ci suffisamment fort pour que la mine se casse. Une photo est prise pour chaque



FIGURE 4.15 – Matériels pour la méthode d'émission acoustique

position du capteur pour mesurer la distance entre les deux capteurs.

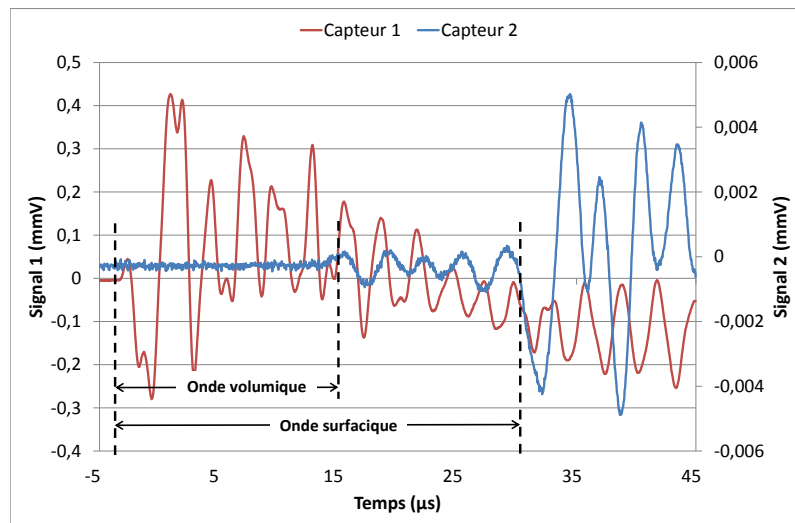


FIGURE 4.16 – Signaux enregistrés par 2 capteurs

*Traitement des signaux* : Lorsqu'on excite la structure en cassant la mine d'un crayon, on obtient les signaux des deux capteurs comme le montre la figure 4.16. Dans ce graphique, on voit qu'il y a deux instants où le signal du deuxième capteur change d'amplitude. Ils correspondent aux instants d'arrivée des deux ondes élastiques. On peut donc déterminer les instants d'arrivée des ondes directement sur la mesure de signal temporel. Lorsque le temps de parcours d'une onde est déterminé, on trace la courbe de la distance entre les deux capteurs en fonction du temps pour obtenir la vitesse d'onde.

### Caractérisation de l'acier

On applique la méthode d'émission acoustique pour mesurer le module d'Young du rail et vérifier que l'on trouve bien celui de l'acier. On utilisera la formule de vitesse d'onde surfacique  $V_R = \frac{0.87+1.12\nu}{1+\nu} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\nu)}}$  pour déterminer le module d'Young. Les

caractéristiques de l'essai sont les suivantes :

- Mesure sur la tête du morceau de rail UIC60.
- La distance entre les capteurs est comprise entre 3 et 33cm.
- Pour chaque position du capteur 2, les signaux générés par la rupture de la mine du crayon sont enregistrés par les deux capteurs. Une photo de la position du capteur 2 est prise pour mesurer la distance entre les deux capteurs.

Le résultat est présenté dans la figure 4.17. A partir de ce graphique, on obtient une valeur de la vitesse de l'onde surfacique égale à 2996m/s. Avec  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ , en utilisant la formule de la vitesse, on obtient une valeur de module d'Young de 212GPa, valeur cohérente avec le module d'Young de l'acier.

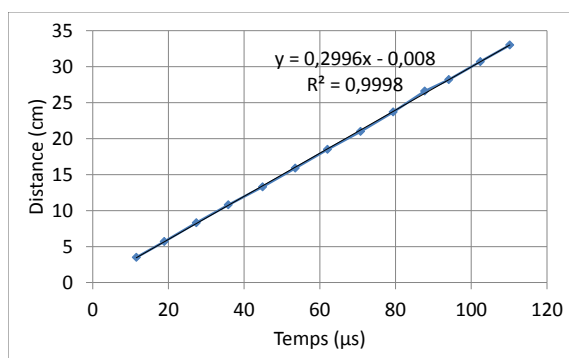


FIGURE 4.17 – Mesure de vitesse de l'onde surfacique dans l'acier

### Caractérisation du béton

On applique maintenant la méthode d'émission acoustique pour déterminer le module d'Young du béton d'un blochet neuf et d'un blochet usé. On dispose les deux capteurs sur la largeur du blochet pour mesurer la vitesse des ondes. La figure 4.18 montre le temps de propagation de l'onde surfacique entre deux capteur en fonction de la distance qui les sépare. Les vitesses des ondes mesurées pour les deux blochets sont

- Vitesse d'onde surfacique dans le béton du blochet neuf : 2709m/s
- Vitesse d'onde surfacique dans le béton du blochet usé : 2901m/s

Pour le béton  $\nu = 0.2$ , en appliquant la formule de vitesse d'onde surfacique, on a :  $V_R = 0,5885\sqrt{E/\rho}$ . On en déduit (pour  $\rho=2400\text{kg/m}^3$ ) ainsi les résultats suivants :

- Module d'Young du blochet neuf : 50,9 GPa
- Module d'Young du blochet usé : 58,3 GPa

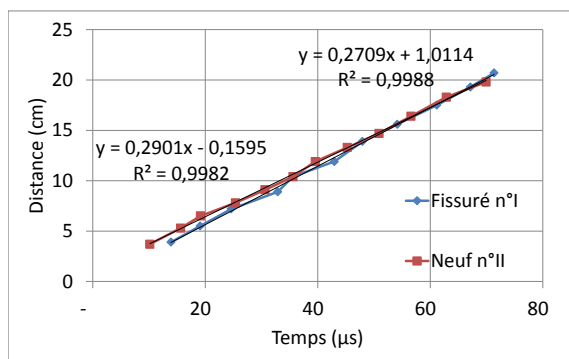


FIGURE 4.18 – Mesure de vitesse de l'onde surfacique dans le béton

Dans ces résultats, on voit que la vitesse et le module d'Young du blochet usé sont plus grands que ceux du blochet neuf. Ce phénomène peut être dû aux propriétés du matériau. Cependant, il faut remarquer aussi que s'il y a des micro-fissures dans le blochet usé, le parcours de l'onde peut-être perturbé entre les deux capteurs (parce que les ondes élastiques ne se propagent pas à travers les fissures). Aussi, dans les simulations, on utilisera le module d'Young du blochet neuf pour éviter ce phénomène.

## Synthèse

Paramètre	Unité	Acier du rail	Béton neuf	Béton usé
Densité	kg/m <sup>3</sup>	7800	2400	2400
Coefficient de Poisson		0,3	0,2	0,2
Vitesse d'onde	m/s	2 996	2 709	2901
Module d'Young	MPa	212	50,9	58,3

TABLE 4.9 – Paramètres des matériaux par l'émission acoustique

- L'essai sur l'acier permet de valider la méthode de mesure.
- La valeur du module d'Young du béton trouvée est très supérieure à la valeur attendue avec une erreur de mesure faible (coefficient de corrélation > 99%).

## 4.4 Calcul des contraintes

### 4.4.1 Modèle 3D du système LVT

#### Géométrie et matériaux

Pour calculer les contraintes dans un système LVT de voie sans ballast, on considère un modèle numérique 3D qui contient un support (solide, déformable) et un morceau de rail (rigide, non-déformable). Pour simplifier la simulation, on ne considère que le déplacement vertical du rail. Comme le système est symétrique par rapport au plan vertical coupant le blochet suivant sa largeur, il ne suffit alors de créer qu'une demie-structure avec la condition de symétrie indiquée dans la figure 4.19.

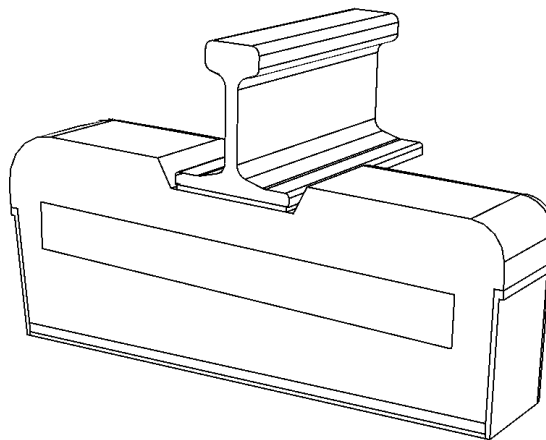


FIGURE 4.19 – Modèle numérique 3D d'un système LVT

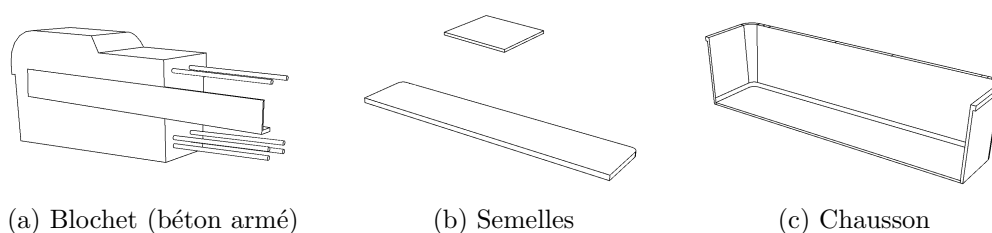


FIGURE 4.20 – Les composants déformables du modèle 3D

Les composants du modèle sont présentés dans la figure 4.20. Par rapport à la géométrie réelle du système, on ne tient pas compte des renforts acier dans le sens de la largeur du blochet ainsi que des ancrages du système d'attache. En effet, ces composants ont une incidence négligeable sur le comportement en flexion du blochet. De plus, on considère que les contacts entre les composants du système (le chausson, les semelles et le blochet) sont parfaits (pas de glissement et décollement).

Matériau	Densité	Module d'Young	Coeff. de Poisson
Acier	7800 kg/m <sup>3</sup>	210 GPa	0.3
Béton	2400 kg/m <sup>3</sup>	50.9 GPa	0.2
Caoutchouc	-	20.5 MPa	0.4
Micro-cellulaire	-	2.07 MPa	0.006
Polymère	-	20.5 MPa	0.4

TABLE 4.10 – Paramètres des matériaux du système LVT

On a créé cinq matériaux élastiques linéaires isotropes pour les cinq composants du système LVT avec les paramètres donnés dans le tableau 4.10.

- Acier : pour les renforts et la barre en forme de "T"
- Béton : pour la partie béton du blochet
- Caoutchouc : pour le chausson
- Micro-cellulaire : pour la semelle sous blochet
- Polymère : pour la semelle sous rail

### Conditions aux bords et maillage

Les conditions aux bords sont imposées sur le rail et à la base du chausson. Sur le rail, le déplacement est imposé sur le point de référence au milieu de la surface de contact avec la semelle sous rail. Le déplacement a une valeur de 1.7mm dans la direction verticale et est nul dans les autres directions. On impose des déplacements nuls aux niveaux de la surface inférieure du chausson pour traduire le fait que le chausson reste toujours au fond de l'alvéole. Sur le plan de symétrie, la condition de symétrie est appliquée.

Le maillage est créé avec trois différents types d'éléments hexagonaux : linéaire (C3D8R et C3D8) et quadratique (C3D20R). Le détail du maillage est donné sur la figure 4.21. On voit que ce maillage est bien régulier avec une concentration d'éléments autour des renforts en acier. Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Taille moyenne de maille : 7.5mm
- Nombre d'éléments : 103.013
- Nombre de nœuds : 110.043

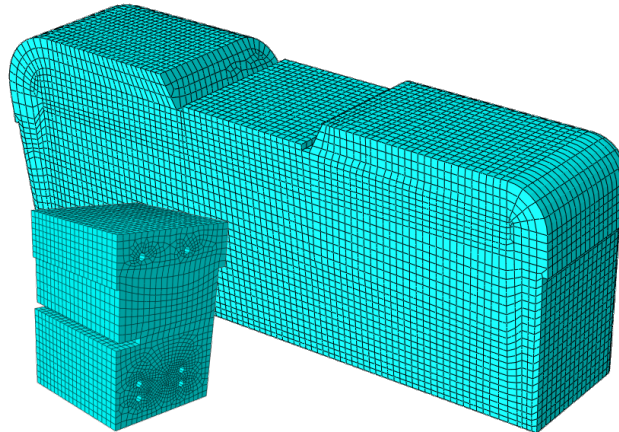


FIGURE 4.21 – Maillage du modèle 3D

#### 4.4.2 Résultats et analyses

Le calcul est fait en statique et comprend deux étapes : le premier concerne le contact rail - semelle sous rail et le deuxième pour le déplacement du rail. Dans le deuxième étape, l'incrément initial est fixé à 10% du temps total de l'étape. Le calcul est effectué avec le logiciel ABAQUS.

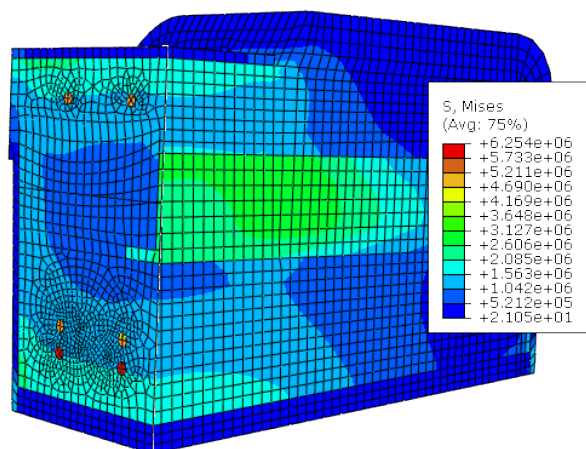


FIGURE 4.22 – Champs de contrainte Von-Mises du système LVT

#### Champs de contraintes

Le champ de contrainte de Von-Mises est présenté dans la figure 4.22. Dans cette figure, on constate des zones de concentration de contrainte au niveau des renforts acier du blochet mais pas sur la barre en forme de "T". Cependant, la valeur maximale de la contrainte de Von-Mises est 6.25MPa ce qui est faible par rapport à la résistance de l'acier (500MPa) et du béton (de 67.5MPa en compression pour le béton du blochet). Ce résultat indique que l'on ne peut pas mettre en évidence un endommagement du système en utilisant le critère de rupture de Von-Mises.

Les figures 4.23 et 4.24 montrent les champs de contraintes de Von-Mises dans chaque



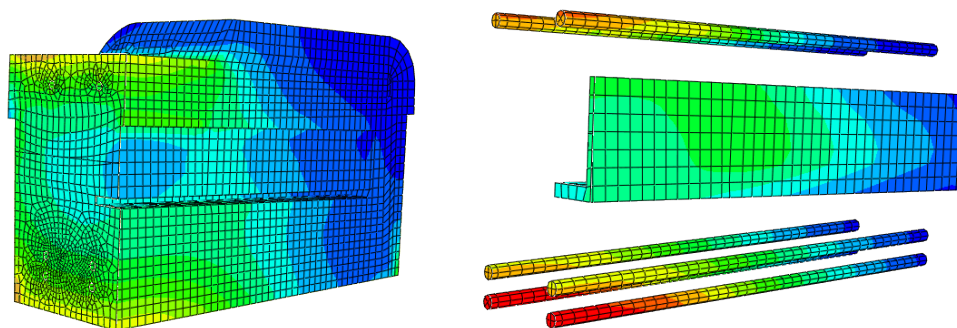


FIGURE 4.23 – Champs de contrainte de Von-Mises dans le blochet (la partie béton et les renforts)

composant du modèle. On voit que le blochet (avec la partie béton et les renforts) travaille en flexion et qu'il y a une zone de concentration de contraintes au milieu de la structure. Quant aux composants élastiques (les semelles et le chausson), ils travaillent en compression. De plus, les contraintes de compression sont assez faibles et ne pourront pas être la cause des endommagements. D'autre part, on voit que les contraintes dans la semelle sous blochet ne sont pas homogènes. Une partie de la semelle est en effet plus chargée. Ceci est dû au fait que la surface de contact du rail n'est pas horizontale mais est inclinée (pente égale à  $1/20$ ). Cette inclinaison va créer un moment de rotation lorsque le rail se déplace verticalement et un chargement non constant sur toute la semelle.

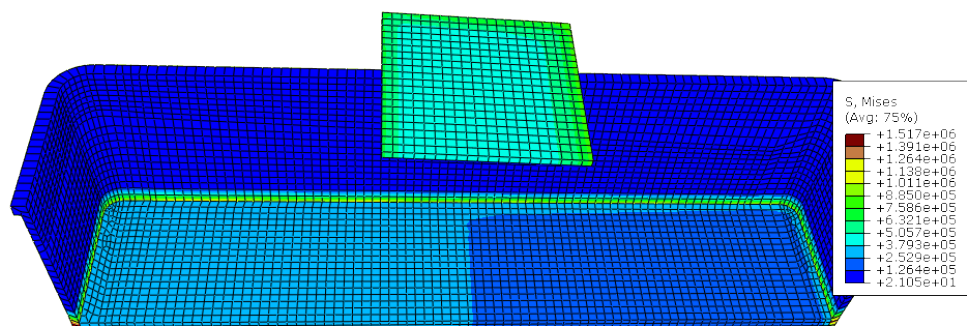


FIGURE 4.24 – Champs de contrainte de Von-Mises dans les composants élastomères

On s'intéresse maintenant aux champs de contrainte dans le blochet. La figure 4.25 montre la contrainte principale et la contrainte dans la direction longitudinale du blochet. On voit qu'il y a une concentration de contrainte importante (2.1MPa) à la base du blochet et au milieu de celui-ci. Ce phénomène vient du fait que le béton du blochet travaille en compression dans sa partie supérieure (2.4MPa) et en traction dans sa partie inférieure (2.1MPa). Ce résultat montre alors que les renforts acier en partie inférieure sont sous-dimensionnés.

### Contraintes maximum

Le tableau 4.11 présente les contraintes maximales dans les différents composants du système LVT. Rappelons que ces résultats ont été obtenus numériquement avec un élément solide, linéaire et l'intégration réduite (C8D8R).

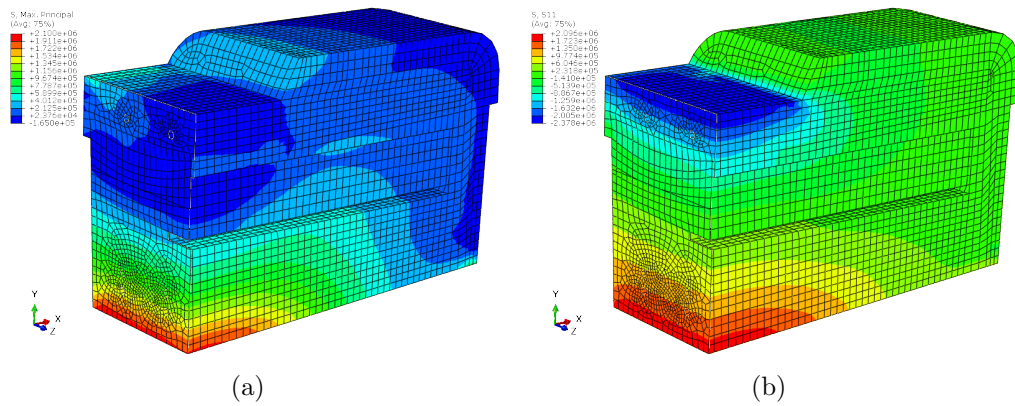


FIGURE 4.25 – Champs de contrainte principale (a) et dans la direction longitudinale (b) du blochet

Composants	Von-Mises	Compression	Traction
Béton du blochet	2.849	2.378	2.096
Renforts du blochet	6.254	6.422	6.203
Semelle sous rail	0.8178	1.475	
Semelle sous blochet	0.3508	0.2722	
Chausson	1.517	1.760	

TABLE 4.11 – Contraintes maximales dans le blochet

### Raideur statique

Pour calculer la raideur statique du système, on trace la courbe de la force de réaction en fonction du déplacement du rail. La pente de la courbe représente la raideur du système comme montré dans la figure 4.26. La valeur obtenue pour la raideur (32,4 kN/mm) est cohérente par rapport aux résultats obtenus lors des mesures réalisées en 2005 présentés dans la section 1.3.2 (la raideur avec bielles inclinées est de 30.58 kN/mm pour le chargement variant de 10 à 47.5 kN et de 32.61 kN/mm pour le chargement variant de 2.5 à 75 kN).

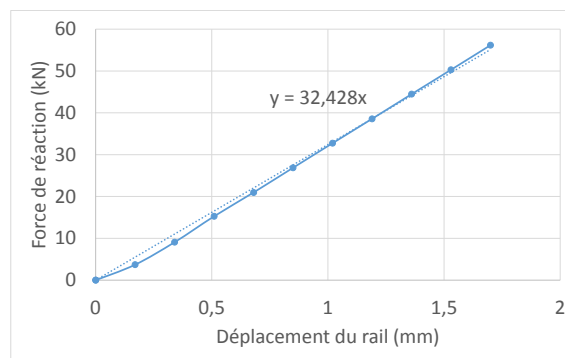


FIGURE 4.26 – Force de réaction en fonction du déplacement du rail

Pour conclure, la modélisation avec Abaqus permet d'obtenir les champs de contraintes dans un système LVT.

- Le blochet travaille en flexion et les composants élastiques travaillent en compression
- La partie béton du blochet travaille en flexion avec des contraintes en traction

- importantes ( 2MPa) par rapport à la résistance en traction du béton (4.7MPa)
- Cette traction vient du fait que la barre en forme de "T" n'est pas bien positionnée (la contrainte de traction est faible dans la barre) ou que les renforts acier dans la partie inférieure du blochet sont sous-dimensionnés.

## 4.5 Dégradation d'un blochet par la fatigue

Le tunnel sous la Manche présente un des trafics les plus élevés au monde avec 4 types de trains en circulation : Eurostar, passager, navette de camion et train de marchandise. Le nombre de trains circulant dans le tunnel chaque année est supérieur à cent mille trains (voir le détail dans le tableau 4.12). Avec ce nombre de trains, on peut estimer le nombre d'essieux empruntant le tunnel par année à environ sept millions, ce qui correspond à un même nombre de cycles de chargement-déchargement par an.

Année	2012	2013
Eurostar	18 419	18 561
Tmar	2 327	2 547
Camions	62 150	62 463
Passagers	30 403	30 8061
Total	113 299	114 337

TABLE 4.12 – Nombre de trains circulant dans le tunnel sous la Manche

Après vingt ans de service, on peut donc estimer que chaque système LVT a supporté environ une centaine de millions de cycles de chargement-déchargement. Les questions qui se posent sont alors :

- Quelle est la durée de vie d'un blochet ?
- Quel est le niveau d'endommagement du béton après une centaine de millions de cycles ?

Ces questions rentent dans le cadre de la fatigue mégacyclique du béton, un phénomène mal-maîtrisé encore aujourd'hui. De plus, la norme ne préconise qu'un test de 10 millions de cycles pour les structures ferroviaires. Pour réponse à ces questions, nous allons d'abord appliquer les lois empiriques de la fatigue du béton pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de la durée de vie des blochets en utilisant le résultat de la simulation précédente.

### 4.5.1 Application des lois empiriques de la fatigue du béton

La durée de vie du béton peut être très dispersée. Les applications ci-dessous sont juste une indication pour voir la problématique du phénomène parce que les lois empiriques existantes sont plutôt appliquées dans le cadre de la fatigue normale et pour un type de béton précis (voir la section 1.5.2 du chapitre I).

Résistance en traction	$\sigma_u$	MPa	4.7
Contrainte maximum en traction	$\sigma_{max}$	MPa	$2.0 \pm 0.1$
Contrainte minimum	$\sigma_{min}$	MPa	0

TABLE 4.13 – Paramètres pour appliquer les lois empiriques

Pour estimer la durée de vie, on utilise les paramètres du chargement et du matériau donnés dans le tableau 4.13. Avec ces paramètres, on peut calculer les paramètres du

chargement cyclique comme suit :

$$\begin{cases} S_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u} = 0.425 \pm 0.021 \\ R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $S_{max}$  est la contrainte maximale sans dimension (c'est-à-dire, la résistance est égale à 1). Ici, on a une variation de  $S_{max}$  ce qui correspond à la variation de la contrainte maximale (proposée de 0.1MPa).

### Modèle d'Aas-Jakobsen

Le modèle d'Aas-Jakobsen qui concerne la durée de vie en fatigue normale du béton propose l'équation suivante pour déterminer la durée de vie en fonction de  $S_{max}$  :

$$S_{max} = 1 - \beta(1 - R) \log N$$

avec  $\beta = 0.0684$ . Pour des chargements avec les paramètres donnés par l'équation (4.10), on obtient une durée de vie du béton du blochet qui varient entre 122 et 152 millions de cycles. On voit donc qu'une petite variation de la contrainte maximale (ici 0.1MPa) peut causer une grande variation de la durée de vie estimée du blochet. Ce résultat montre que si la loi empirique est applicable, il y aura une grande dispersion lors d'essais réalisés en laboratoire.

### Modèle de Thomas T.C.Hsu

Le modèle de Thomas T.C.Hsu propose pour la fatigue normale et mégacyclique l'expression suivante :

$$S_{max} = 1 - 0.0662(1 - 0.556R) \log N - 0.0294 \log T$$

où  $T$  est la période du chargement cyclique en seconde. Pour la norme française,  $f = 5\text{Hz}$  correspond à la période  $T = 0.2\text{s}$ . La durée de vie des blochets estimée à l'aide de ce modèle est comprise entre 464 et 2039 millions de cycles.

### Modèle de Cornelissen H.A.W

Le critère de Cornelissen a été établi pour un chargement en flexion ou en traction.

En flexion, il s'écrit :

$$\log N = 12.53 - 10.95 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^F}$$

On en déduit alors une durée de vie estimée comprise entre 34 et 126 millions de cycles.

En traction, il s'écrit :

$$\log N = \alpha - 14.52 \frac{\sigma_{max}}{\sigma_u^T} + 2.79 \frac{\sigma_{min}}{\sigma_u^T}$$

avec  $\alpha = 14.81$  pour le béton sec. On obtient la durée de vie estimée entre 210 et 871 millions de cycles.

Modèle	$N_{min}$	$N_{max}$
Aas-Jakobsen	122	512
Thomas	464	2.039
Cornelissen (flexion)	43	126
Cornelissen (traction)	210	871

TABLE 4.14 – Durée de vie du béton de blochet par les lois empiriques existantes

## Résumé

Le tableau 4.14 présente les résultats des calculs de durée de vie du béton du blochet avec les différents modèles empiriques de la littérature portant sur la fatigue du béton. Dans ce tableau, on voit que la variation de 0.1MPa (équivalent à 5% de la contrainte maximum) peut mener à une très large variation de la durée de vie estimée. Cette variation vient du fait que la durée de vie dépend de façon exponentielle de la contrainte maximale.

Pour les voies du tunnel sous la Manche, le chargement peut atteindre 7 millions de cycles par an. Après 20 ans de servie, le nombre de cycles est cohérent avec l'ordre de grandeur de la durée de vie donnée par ces modèles. De plus, les modèles empiriques ne prennent pas en compte des surcharges liées aux défauts de la voie (comme les défauts du blochet, des roues,...). Il est donc nécessaire de faire des essais de fatigue mégacyclique en laboratoire pour comprendre la durée de vie et la procédure de dégradation par la fatigue du béton.

## 4.6 Conclusion

Le trafic global (fret et passagers) du tunnel sous la Manche est l'un des trafics les plus importants au monde. Ce trafic important a donc un impact sur les composants des systèmes LVT installés sur la voie. Le nombre de cycles de chargement/déchargement que subit chaque support de rail est estimé à 7 millions cycles par an. Par conséquent, un vieillissement important a été observé sur tous les composants des systèmes de support rail des voies du tunnel. Pour analyser les conséquences des chargements cycliques, nous avons tout d'abord déterminé les champs de contrainte dans le système support à l'aide d'une modélisation par éléments finis. Le résultat montre que la contrainte la plus critique est la contrainte de traction dans la direction longitudinale du blochet car le blochet travaille en flexion. En appliquant des lois empiriques de la fatigue du béton, nous avons déterminé l'ordre de grandeur de la durée de vie du béton des blochets en tenant compte du trafic total dans le tunnel depuis son ouverture à la circulation. Ces résultats montrent que certains blochets peuvent avoir atteint leur durée de vie. Pour confirmer cette prévision, des essais de fatigue du blochet en flexion vont être menés à la suite de ce travail de thèse.

## Chapitre 5

# Détection de l'endommagement des blochets

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les composants d'un système LVT de voie sur dalle peuvent se dégrader sous l'effet d'un trafic très élevé. Parmi ces composants, le blochet joue un rôle très important parce qu'il supporte le rail. La durée de vie du blochet représente donc la durée de vie du système. D'autre part, la surveillance du système est assez complexe. Comme le blochet est intégré dans le chausson et lui même intégré dans la dalle béton, les fissures à l'intérieur ou sur les surfaces inférieures du blochet ne sont pas observables facilement. De plus, lorsqu'on enlève le système LVT de sa cavité dans la dalle, la remise en place du système s'avère très complexe si le blochet est endommagé (on doit souvent remplacer le système complet). Par conséquent, il faut pouvoir disposer d'une méthode non-destructive et simple pour rendre la surveillance des blochets plus facile et pouvoir effectuer une maintenance périodique.

Nous allons proposer dans ce chapitre une méthode de détection des endommagements en voie des blochets du système LVT. Cette méthode se base sur l'analyse modale. Pour cela, nous avons dans un premier temps effectué la mesure des réponses vibratoires des blochets afin d'identifier les fréquences et les amortissements des modes propres de blochets. Ces mesures permettent de mettre en évidence la variation de ces paramètres en fonction du niveau et du type d'endommagement des blochets. Nous avons de plus réalisé un travail de modélisation des modes propres des blochets à l'aide de la méthode des éléments finis afin de déterminer quantitativement les valeurs des fréquences des modes propres en corrélant ces valeurs avec les types et les niveaux d'endommagement. Pour appliquer ces résultats dans l'analyse des dégradations d'une voie réelle, nous avons étudié l'influence des conditions externes sur les réponses vibratoires d'un blochet. Cette étude a été menée en réalisant des essais sur une voie assemblée en laboratoire et en voie dans le tunnel sous la Manche. Enfin, nous avons développé le logiciel "**EuroDetection**" qui intègre la méthode de détection des endommagements et qui permet d'automatiser la méthode de détermination de ces endommagements en voie.

## 5.2 Mesure de la réponse vibratoire des blochets

### 5.2.1 Matériels et dispositif de mesure

Pour mesurer les réponses vibratoires d'une structure, nous avons utilisé : un capteur, un excitateur, et un analyseur.

- Le capteur permet de transformer une quantité dynamique (le déplacement, la vitesse ou l'accélération) en un signal analogique ou numérique. Dans un premier temps, on utilise les accéléromètres (mesure de l'accélération). Pour l'application dans le tunnel, nous utiliserons un vibromètre laser qui mesure la vitesse.
- L'excitateur permet de générer la vibration de la structure; cela peut être un objet solide (un marteau, une barre, une bille...). Le paramètre important de l'excitateur est la fréquence d'excitation. Par exemple, un marteau modal peut générer des forces avec différents signaux comme indiqué dans la figure 5.1. Pour les mesures dans le tunnel, on utilisera des billes en acier.
- L'analyseur fait l'analyse du signal provenant du capteur. Dans un premier temps, nous avons utilisé le logiciel PULSE qui permet de déterminer les fréquences et les amortissements d'un blochet. Ensuite, pour les essais dans le tunnel, nous avons développé le logiciel **EuroDetection** qui permet de traiter les signaux et d'analyser les endommagements de la structure dans le même temps.

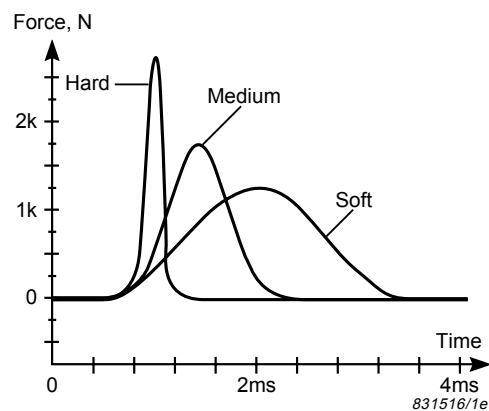


FIGURE 5.1 – Courbes de force du marteau modal avec différentes têtes

Dans cette section, les mesures ont été faites avec les appareils suivants (voir la figure 5.2)

- Accéléromètre BK-4507 qui peut enregistrer les réponses vibratoires jusqu'à 22kHz.
- Marteau BK-8202 qui peut exciter jusqu'à 7kHz avec une tête en acier.



FIGURE 5.2 – Matériel pour l'analyse modale : marteau BK-8202 et les accéléromètres BK-4507

Le dispositif de mesure est présenté dans la figure 5.3. L'accéléromètre est collé sur une extrémité de la face supérieure du blochet et le blochet est excité à l'aide du marteau en tapant avec celui-ci sur l'autre extrémité. Ces positions d'impact et de mesure permettent d'éliminer le cas où une fissure verticale traversante a séparé le blochet en deux morceaux.



FIGURE 5.3 – Dispositif de mesure modale d'un blochet en condition libre

### 5.2.2 Enregistrement et traitement des signaux

Lorsque le blochet est excité par le marteau, la réponse temporelle est capturée par l'accéléromètre et elle est transformée en fonction de réponse en fréquence (FRF). Les fréquences et les amortissements sont détectés par les maxima de la FRF (voir la figure 5.4). Dans ces mesures, on ignore les pics en dessous de 100Hz qui correspondent aux bruits et aux modes liés aux composants élastomères du système LVT.

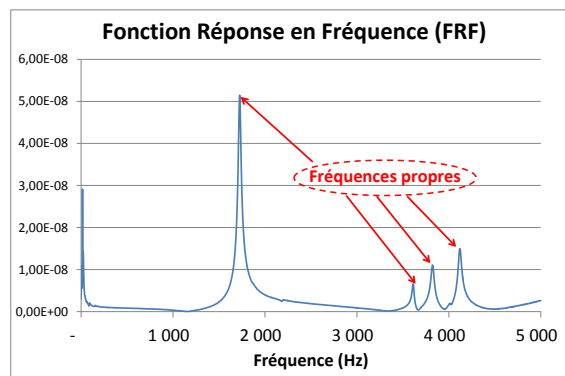


FIGURE 5.4 – Réponse vibratoire du blochet dans le domaine des fréquences

En fonction des positions de l'accéléromètre et/ou du point d'impact du marteau, on peut détecter les fréquences propres qui correspondent aux différents modes. Par exemple, dans le tableau 5.1, on voit que chaque position d'excitation peut donner une, deux ou trois fréquences propres pour la même position du capteur. De plus, ces fréquences ne correspondent pas toujours à l'ordre des modes propres. Par conséquent, une seule mesure n'est pas suffisante pour prédire les modes correspondants aux fréquences et aux amortissements détectés. Pour résoudre ce problème, on déplace l'accéléromètre et le point d'impact du marteau en différentes positions sur le blochet et on obtient différents résultats.



Position du marteau	1	2	3	4	5
Accéléromètre au milieu du blochet					
Amortissement 1 (%)	0.900	0.294	0.897		0.922
Fréquence 1 (Hz)	1 725	1 725	1 725	3 825	1 725
Fréquence 2 (Hz)	3 613	3 616	3 619		3 609
Fréquence 3 (Hz)			3 825		3 825
Accéléromètre à l'extrémité du blochet					
Amortissement 1 (%)	0.913	1.160		0.780	0.926
Fréquence 1 (Hz)	1 725	1 728	1 722	1 863	1 725
Fréquence 2 (Hz)	3 616	1 863	3 609	3 822	3 822
Fréquence 3 (Hz)	3 822	3 616	3 822		
Fréquence 4 (Hz)		3 825			

TABLE 5.1 – Exemple de mesure des fréquences et des amortissements des modes propres

Ensuite, on remet les fréquences en ordre de la plus petite à la plus grande (voir la figure 5.5). On voit sur cette figure que les modes propres apparaissent naturellement en ordre. La fréquence de chaque mode est déterminée par les différentes positions du capteur et du point d'excitation. Par exemple, sur ce graphique, la position du capteur située au milieu du blochet avec une excitation en position 5 (au milieu à l'extrémité gauche du blochet) donne les fréquences des modes I, IV et V du blochet. Enfin, l'erreur et la variance de mesure sont déterminées à partir de l'ensemble des résultats pour chaque mode détecté.

**Remarque :** Si deux modes propres ont la même fréquence (ou les deux fréquences sont très proches), cette méthode ne peut pas les distinguer.

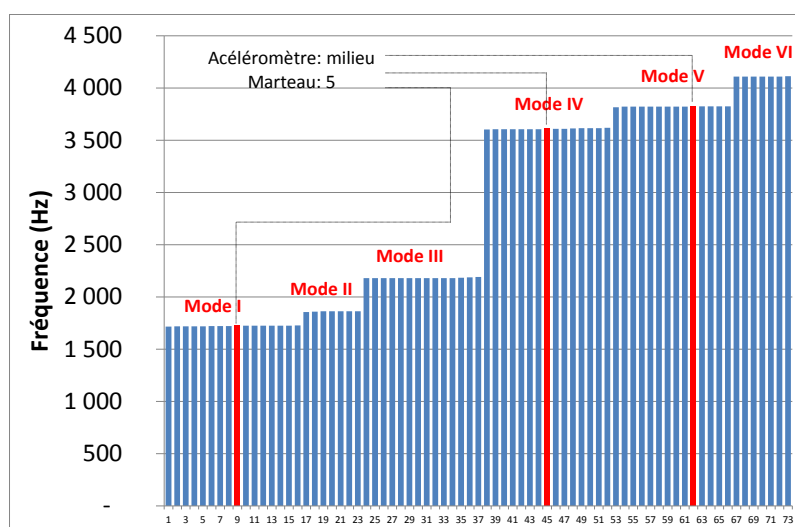


FIGURE 5.5 – Détermination des modes correspondant aux fréquences mesurées

### 5.2.3 Résultats des mesures en condition libre

#### Comparaison des modes propres des blochets neufs et usés

Nous avons d'abord comparé les fréquences et les amortissements de deux blochets dont un neuf et un usé (fissuré et cassé en partie inférieure) comme le montre la figure 5.6. Les

mesures ont été faites avec la procédure de mesure décrite précédemment. On détermine les modes propres avec des fréquences comprises entre 0 et 5kHz.



FIGURE 5.6 – Blochet neuf (à gauche) et blochet dégradé (à droite)

Nous avons déterminé les 6 premières fréquences qui correspondent aux 6 premiers modes propres. Les tableaux 5.2 et 5.3 présentent ces résultats avec la variance et l'erreur de chaque mode. On voit que les erreurs sont petites ( $< 1\%$  pour le blochet neuf et  $< 5\%$  pour le blochet endommagé) alors que les mesures sont réalisées dans différentes positions. De plus, les fréquences du blochet fissuré sont beaucoup plus petites que celles du blochet neuf.

Mode	Max (Hz)	Min (Hz)	Moyenne (Hz)	Variance	Erreur
I	1 728	1 716	1 723	11,1	0,6%
II	1 863	1 856	1 861	8,0	0,5%
III	2 191	2 181	2 182	10,0	0,4%
IV	3 619	3 603	3 610	24,6	0,4%
V	3 825	3 816	3 823	5,8	0,2%
VI	4 113	4 109	4 110	2,3	0,1%

TABLE 5.2 – Résultat des mesures de fréquences du blochet neuf

Mode	Max (Hz)	Min (Hz)	Moyenne (Hz)	Variance	Erreur
I	859	813	836	193	5,0%
II	1 222	1 163	1 187	180	3,4%
III	1 572	1 516	1 544	423	4,0%
IV	1 866	1 803	1 830	395	3,3%
V	2 644	2 594	2 620	317	2,0%
VI	2 919	2 906	2 914	31	0,6%

TABLE 5.3 – Résultat des mesures de fréquences du blochet dégradé

- Nous avons ensuite réalisé des mesures sur trois catégories de blochets comme suit :
- Blochet neuf ou sain d'origine : numéro II,VII (neuf) et VI (origine, usé, sans fissure)
  - Blochet avec béton fissuré : numéro III (fissuré en périphérie), IV (fissuré sur la surface supérieure) et VI (fissuré sur la surface inférieure)
  - Blochet cassé : numéro I (cassé partiellement en dessous et fissuré en surface supérieure), IX (rupture totale du béton et des aciers de renforcement dans l'épaisseur)

du blochet) et X (détachement de la partie inférieure avec fissuration totale de la partie supérieure).



FIGURE 5.7 – Photos de trois blochets dans trois catégories : origine sans fissure (à gauche), fissuré dans le béton (au milieu) et cassé (à droite)

Le résultat des mesures est présenté dans la figure 5.8. On voit que les trois catégories de blochets ont des fréquences différentes. En particulier, plus le blochet est endommagé, plus les fréquences sont basses. En revanche, on voit que les coefficients d'amortissement des trois catégories ne varient pas systématiquement de la même façon. Par contre, les blochets présentant des petits morceaux qui se détachent du blochet ont des amortissements plus importants. D'autre part, les signaux des blochets endommagés sont plus faibles et plus bruités que ceux des blochets sains. En particulier, le signal d'un blochet cassé en deux morceaux n'est pas utilisable car se limitant à un bruit.

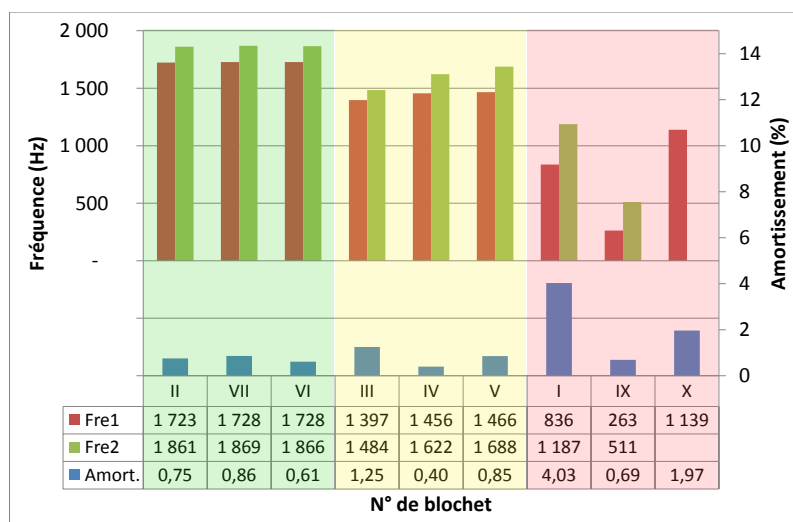


FIGURE 5.8 – Résultats de mesures sur 3 catégories de blochets

Ce résultat montre donc une forte corrélation entre les fréquences propres et le type et niveau d'endommagement des blochets. Cette correspondance doit être formalisée et nous allons utiliser pour cela la simulation numérique. C'est l'objet de la section 5.3. Notons d'abord que la mesure de plusieurs modes n'est pas nécessaire parce que les modes de grand ordre des blochets endommagés peuvent être confondus avec les premiers modes d'un blochet sain. C'est la raison pour laquelle nous n'étudierons que les deux premiers modes du blochet. Nous verrons aussi que les deux premiers modes sont suffisants pour déterminer les types et niveaux d'endommagement d'un blochet.

### Position optimale pour les deux premiers modes

Dans la procédure de mesure que nous avons présentées, nous avons besoin d'enregistrer les réponses vibratoires en plusieurs points du blochet avec différentes positions d'excitation. Même si cette procédure est simple en laboratoire, elle peut prendre du temps dans le tunnel lorsqu'on doit faire l'acquisition plusieurs fois. La question qui se pose est : quelle est la meilleure position du capteur et du point d'impact pour trouver les premières fréquences ? Pour répondre à cette question, nous avons placé le capteur et le point d'impact en différentes positions sur la surface supérieure du blochet en sachant qu'on ne peut pas utiliser la surface en contact avec le rail.

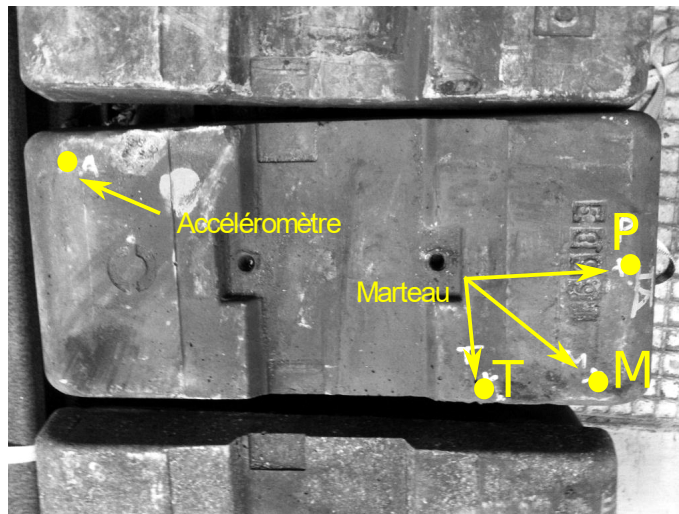


FIGURE 5.9 – Position optimale pour mesurer les premières fréquences

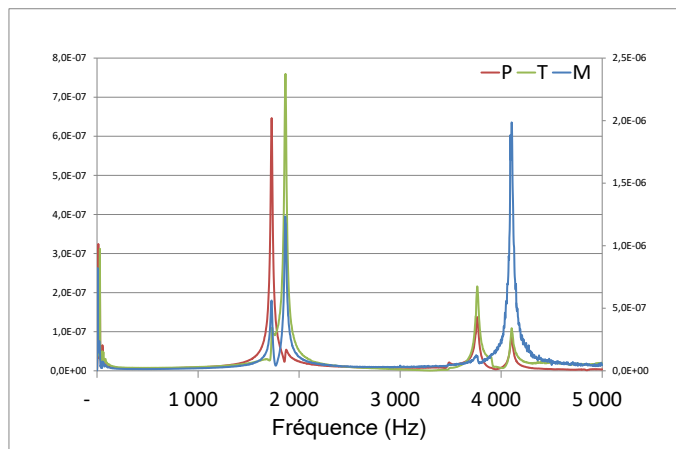


FIGURE 5.10 – Signaux capturés pour différents points d'impact

A l'aide de cette méthode, nous avons déterminé des positions optimales pour le capteur et pour le point d'impact comme le montre la figure 5.9. Quand le capteur est placé sur un coin du blochet, il y a trois positions pour exciter le blochet (voir les signaux dans la figure 5.10) :

- M : Position mixte pour exciter les deux premières fréquences en général.
- T : Position pour n'exciter que la deuxième fréquence qui correspond au mode de torsion

- P : Position pour n'exciter que la première fréquence qui correspond au mode de flexion

Dans la section 5.3, on verra que les positions T et P correspondent aux nœuds des deux premiers modes et c'est la raison pour laquelle on n'obtient qu'une seule fréquence.

Pour conclure, les fréquences propres dépendent du type et du niveau d'endommagement du blochet. En général, plus le blochet est endommagé, plus les fréquences sont basses. Les deux premières fréquences et amortissements peuvent être obtenus à l'aide d'une seule mesure en mettant le capteur et le point d'impact sur une diagonale du blochet.

## 5.3 Calcul des fréquences propres des blochets

### 5.3.1 Modèle 3D du blochet

#### Géométrie

Pour calculer les fréquences et les modes propres des blochets, on utilise la méthode des éléments finis. A partir des données géométriques du blochet, on a créé un modèle 3D du blochet à l'aide du logiciel ABAQUS comme le montre la figure 5.11. Ce modèle prend en compte tous les renforts en acier longitudinaux et le béton. Il ne contient pas les renforts latéraux du blochet et les zones arrondies du blochet. Cette petite modification n'a pas d'influence sur le résultat parce qu'elle ne modifie ni la rigidité, ni la masse du blochet de façon significative. Le modèle n'applique aucune condition aux bords (blochet libre).

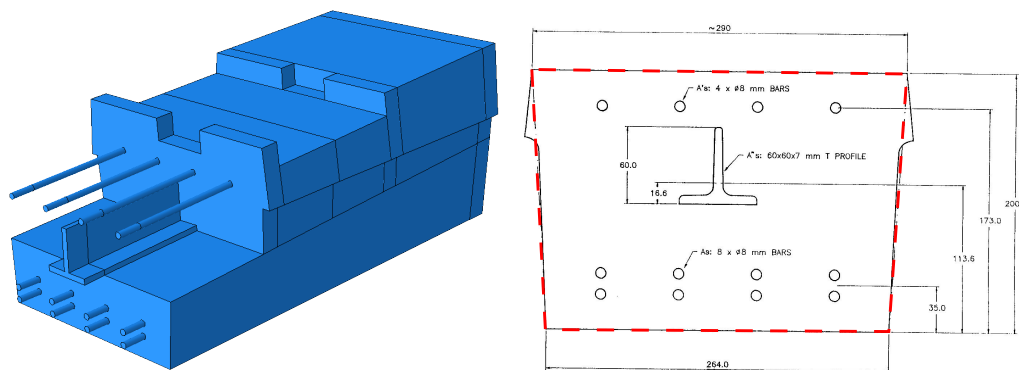


FIGURE 5.11 – Modèle 3D d'un blochet neuf

Par rapport au modèle du chapitre précédent, ce modèle contient la totalité du blochet au lieu de prendre uniquement la moitié car il y a des modes propres dissymétriques. Pour les blochets endommagés, on modifie la géométrie du blochet neuf en ajoutant des fissures dans la structure.

#### Matériaux

Le modèle contient deux matériaux élastiques et isotropes qui sont l'acier et le béton. Les paramètres des matériaux du modèle sont représentés par le module d'Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique comme indiqué dans le tableau 5.4. Ces paramètres sont issus des résultats de mesures d'émission acoustique présentées dans la section 4.3.3.

Paramètre	Unité	Béton	Acier
Module d'Young	GPa	50.9	200
Coefficient de Poisson		0,2	0,3
Densité	kg/m <sup>3</sup>	2 400	7 800

TABLE 5.4 – Paramètres des matériaux constituant du blochet

### Maillage et analyse

Nous utilisons les éléments solides linéaires avec l'intégration réduite C3D8R pour les deux parties acier et béton. Le maillage est montré dans la figure 5.12

- Nombre de nœuds : 130122
- Nombre d'éléments : 124519
- Type d'élément : linéaire hexaèdre C3D8R
- Masse totale : 98.7kg

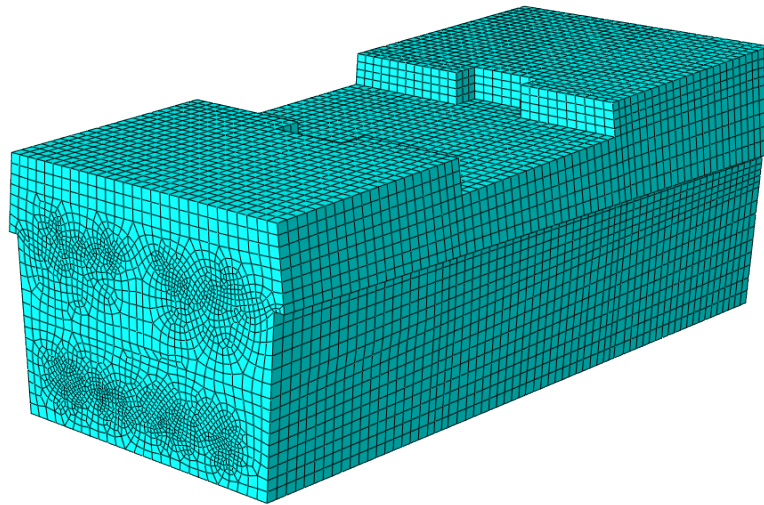


FIGURE 5.12 – Maillage du modèle 3D d'un blochet

Le calcul est fait en mode "perturbation linéaire/fréquence" en calculant les 15 premiers modes. En éliminant les 6 premiers modes qui correspondent aux mouvements libres du blochet, nous obtenons donc les 9 premiers modes propres du blochet.

### Modes propres d'un blochet neuf

La figure 5.13 présente les 9 premiers modes propres d'un blochet neuf. On voit que les six premiers modes correspondent à des modes de flexion ou de torsion. Les modes suivants sont des modes combinés. En particulier, on a :

- Le premier mode est un mode de flexion simple qui possède deux noeuds se trouvant en  $L/4$  et  $3L/4$ ,  $L$  étant la longueur du blochet. C'est la raison pour laquelle on ne perçoit pas ce mode lorsqu'on excite sur ces points (en position T) lors des mesures de fréquence.
- Le deuxième mode est un mode de torsion simple pour lequel l'axe de torsion est aussi l'axe longitudinal passant par le centre géométrique de la section transversale du blochet. C'est la raison pour laquelle on ne perçoit pas ce mode lorsqu'on excite sur ces points (position P de la figure 5.9) dans les mesures de fréquence.

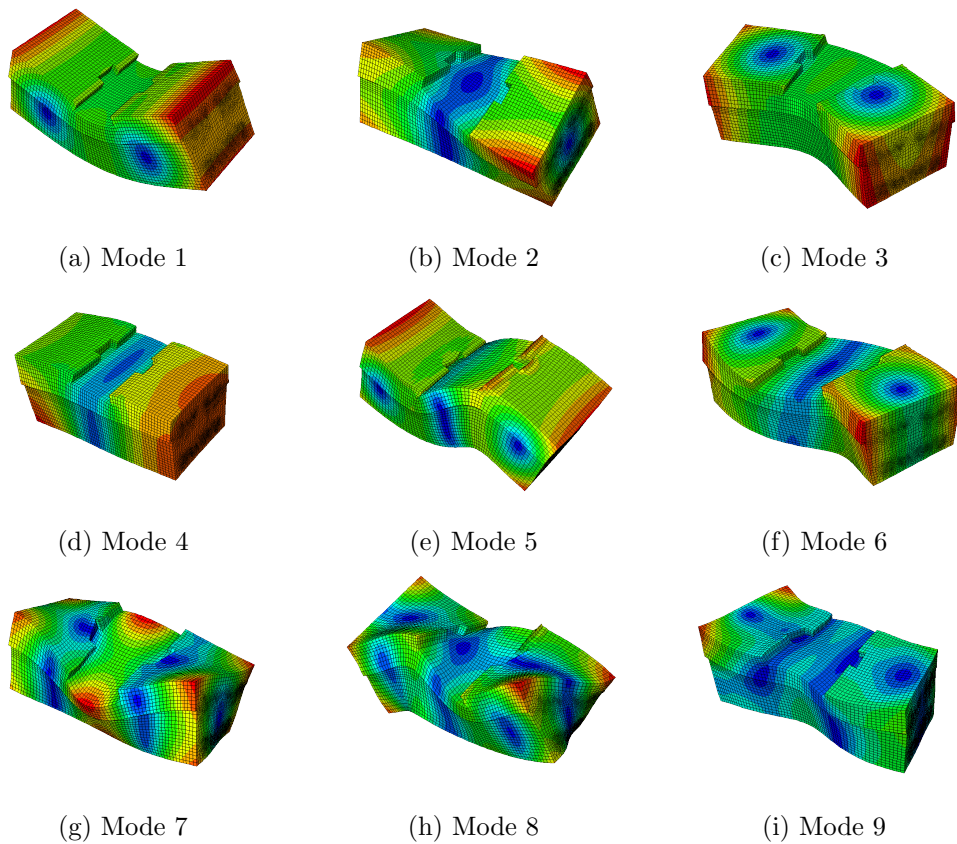


FIGURE 5.13 – Les modes propres d'un blochet neuf en condition libre

### Comparaison entre les mesures et la modélisation

Pour valider le modèle 3D, nous avons comparé les résultats des mesures présentés dans la section 5.2 et la modélisation précédente. La figure 5.14 présente les résultats

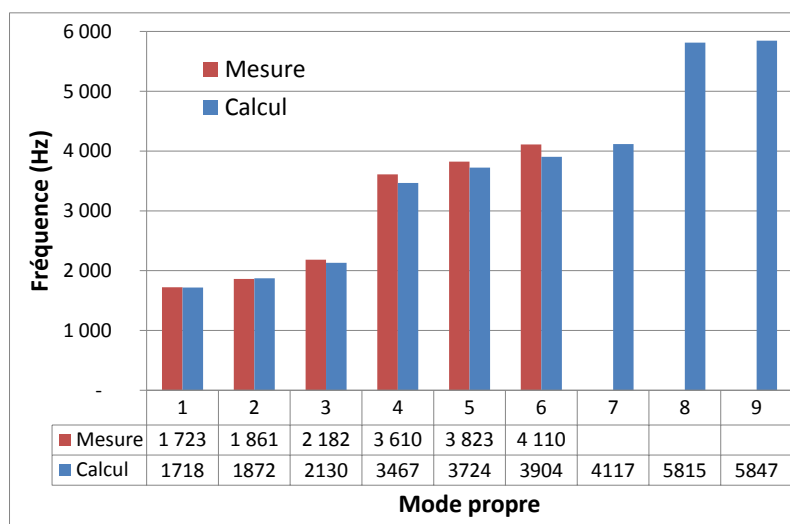


FIGURE 5.14 – Comparaison des résultats obtenus par la mesure (rouge) et la modélisation (bleu)

obtenus à l'aide des deux méthodes. On voit que les résultats sont cohérents car on constate une différence inférieure à 0.3% pour le premier mode et 5% pour le sixième mode. En fait, l'erreur est plus grande pour les modes de grand ordre. Cette différence vient de la modification géométrique et de l'erreur numérique (pour les hautes fréquences, il faut avoir un maillage plus fin). Malgré cette différence, on peut conclure que ce modèle est validé.

### 5.3.2 Fissuration d'un blochet

Dans le chapitre 4, nous avons vu que le blochet travaille en flexion et que les fissures apparaissent sur le plan au milieu du blochet ou au niveau de la barre en forme de "T" dans le cas du délaminage. On peut donc définir deux types de fissuration : fissure verticale et fissure horizontale (voir la figure 5.15).

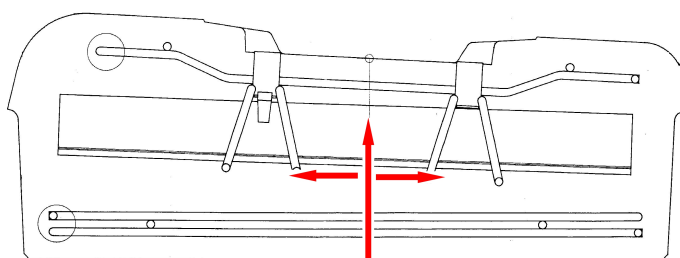


FIGURE 5.15 – Propagation des fissures dans le blochet

Pour la fissuration verticale, il y a deux possibilités :

- Le béton est fissuré totalement et les renforts sont ensuite rompus
- Le béton et les renforts sont simultanément fissurés et cassés

Pour la fissuration horizontale, il y a aussi deux possibilités :

- La fissure se propage sous la barre en T sans détachement de la partie inférieure du blochet
- La fissure se propage sous la barre en T avec le détachement d'une partie inférieure du blochet (le blochet a alors une perte de masse).

A partir de ces possibilités de fissuration, nous pouvons définir 7 types d'endommagement comme dans la figure 5.16. Pour chaque type d'endommagement, nous déterminons des niveaux d'endommagement en fonction de la taille des fissures.

### Modes propres des blochets endommagés

A partir du modèle d'un blochet neuf, nous pouvons modifier la géométrie en ajoutant des fissures dans la structure pour modéliser les blochets endommagés. Les calculs ont été effectués avec chaque type d'endommagement. La figure 5.17 présente les deux premiers modes propres des trois blochets endommagés. Dans cet exemple, le type 3 (figure 5.17a) correspond à un blochet présentant une fissure verticale dans le béton, le type 4 (figure 5.17b) correspond à un blochet avec une fissure horizontale dans le béton et le type 5 (figure 5.17c) contient une partie inférieure cassée. On voit que ces modes restent toujours des modes de flexion et de torsion. Cette caractéristique convient pour la mesure en voie réelle parce qu'elle ne nécessite pas de déplacer le capteur ou l'excitateur lorsque l'on réalise des mesures sur plusieurs blochets avec différents états d'endommagement.



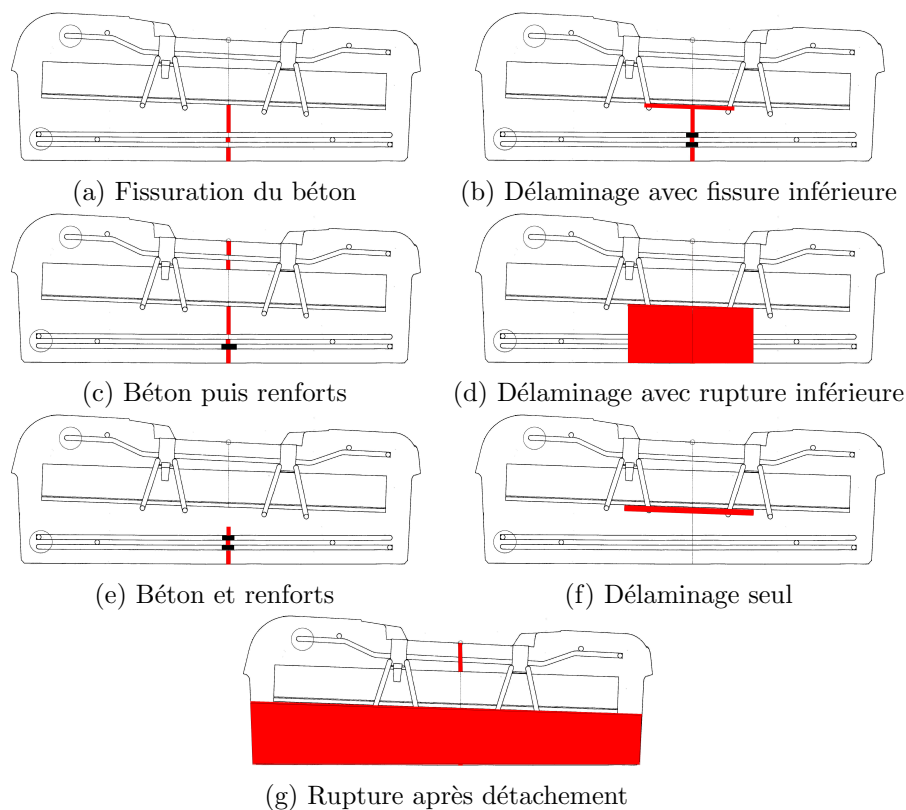


FIGURE 5.16 – Types d'endommagement d'un blochet

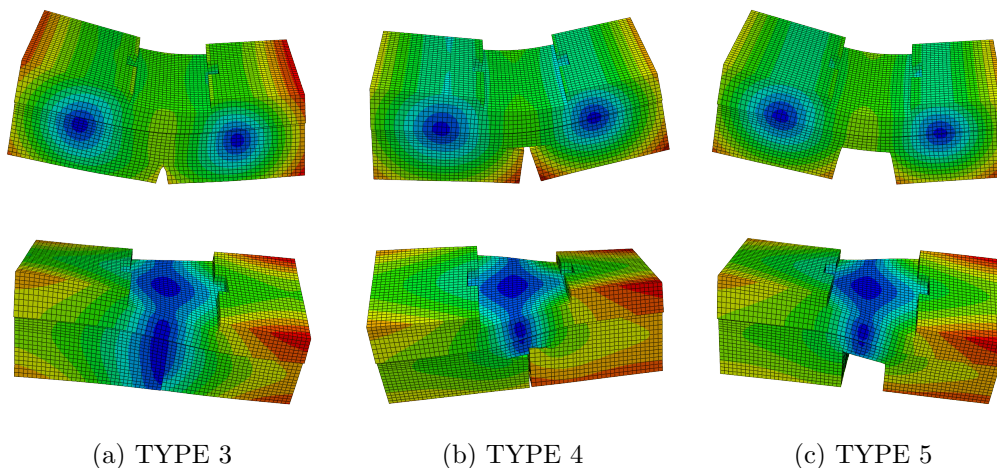


FIGURE 5.17 – Les modes propres des blochets endommagés

### 5.3.3 Classification de l'endommagement des blochets

Nous présentons dans cette section les types d'endommagement que nous avons intuité suite à l'observation des blochets endommagés qui ont été extraits de la voie.

#### Type 1. Fissuration du béton (figure 5.16a)

Étant donné que le blochet travaille en flexion, on fait l'hypothèse que la fissuration pour un type d'endommagement s'initie dans ce cas seulement dans le béton, au milieu de

la base du blochet. Elle se propage vers le haut dans le plan milieu du blochet jusqu'à la fissuration totale du béton. Les niveaux d'endommagement de ce type sont déterminés par la profondeur de la fissure :

- 1a : fissuration du béton au niveau des renforts (23mm)
- 1b : fissuration du béton en dessous de la barre T (97mm)
- 1c : le béton est fissuré sur toute l'épaisseur du blochet

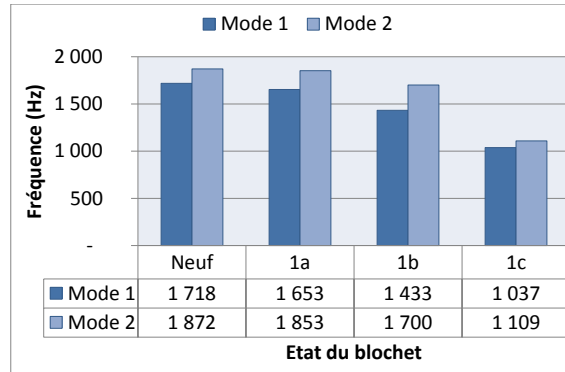


FIGURE 5.18 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 1

Le résultat est présenté dans la figure 5.18. On voit que plus la taille de fissure est grande, plus les fréquences sont basses.

### Type 2. Béton fissuré puis renforts cassés (figure 5.16c)

Le deuxième type d'endommagement est consécutif au type 1c. Pour ce type, les renforts sont cassés après la fissuration totale du béton. Les niveaux d'endommagement de ce type sont :

- 2a : fissuration du béton seul (c'est aussi le niveau 1c)
- 2b : fissuration du béton et des renforts inférieurs cassés (1er lit)
- 2c : fissuration du béton et des renforts inférieurs sous la barre en forme de "T" cassés
- 2d : rupture totale de la section du blochet dans l'épaisseur (sauf la barre en forme de "T")

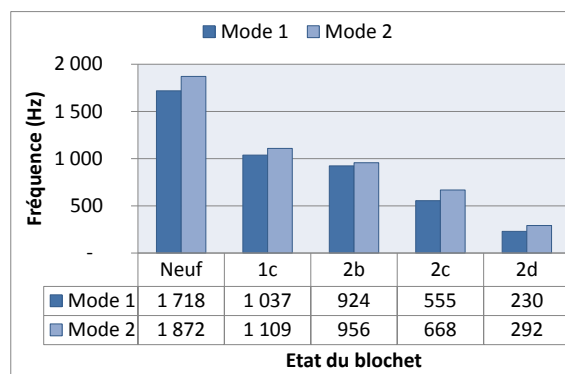


FIGURE 5.19 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 2

Les fréquences des modes propres correspondant aux niveaux d'endommagement de ce type sont présentées dans la figure 5.19. Comme pour le premier type, plus le blochet est endommagé, plus les fréquences sont basses.

### Type 3. Béton fissuré et renforts cassés (figure 5.16e)

Pour ce type, la fissure en avançant provoque la rupture simultanée du béton et des renforts. Ce type d'endommagement est différent du type 2 où le béton est fissuré totalement avant que les renforts ne soient cassés. En fonction de la taille de fissure, on distingue 4 niveaux :

- 3a : fissure en dessous des renforts inférieurs (23mm) (ce niveau est le même que 1a)
- 3b : fissure au dessus des renforts inférieurs (50mm)
- 3c : fissure jusqu'à la face inférieure de la barre T (97mm)
- 3d : fissuration totale dans l'épaisseur avec la barre en T préservée (ce niveau est le même niveau que 2d)

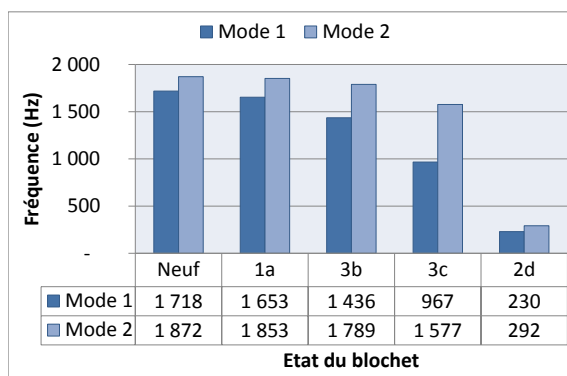


FIGURE 5.20 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 3

Le résultat est présenté dans la figure 5.20. On observe la même tendance que celle obtenue pour les types 1 et 2. D'autre part, les valeurs des fréquences des deux premiers modes sont bien différentes de celle obtenues pour le type 2. Ce phénomène vient du fait que le béton de la partie supérieure n'est pas fissuré et que la rigidité en torsion du blochet est alors plus grande.

### Type 4. Délaminage avec fissure inférieure (figure 5.16b)

Le type d'endommagement présente des fissures horizontales. Lorsque le béton et les renforts sont fissurés verticalement jusqu'à la barre en forme de "T", la fissure horizontale commence à se propager sur la surface située en dessous de la barre. Les niveaux d'endommagement de ce type sont déterminés par la taille du délaminage

- 3c : fissuration jusqu'à la barre en T mais pas de délaminage
- 4a à 4d : fissuration de la partie inférieure du blochet et délaminage au niveau de la barre en T avec différentes longueurs de délaminage : 50-100-220-360mm

Dans la figure 5.21, on voit que les fréquences diminuent lorsque la taille du délaminage augmente. De plus, la différence entre les valeurs des deux fréquences obtenues pour ce type et celles des types 1 et 2 est très grande. Cette caractéristique permet de distinguer un blochet qui présente un délaminage.

### Type 5. Délaminage avec rupture inférieure (figure 5.16d)

Ce type d'endommagement se rapproche du type 4 et il comporte en plus un détachement de la partie béton située sous la fissure horizontale. Les niveaux d'endommagement correspondent aussi à la taille de la partie cassée.

- 5a à 5d : détachement de la partie inférieure du blochet (longueur 50-100-220-360mm)

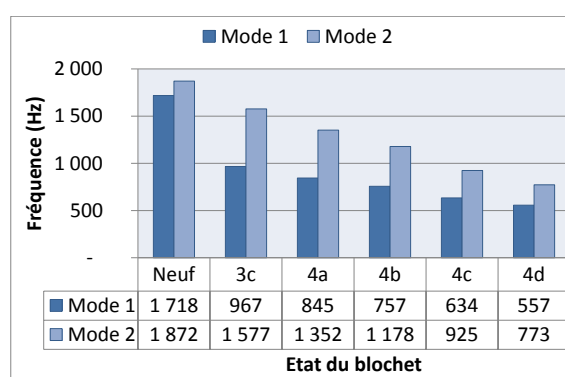


FIGURE 5.21 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 4

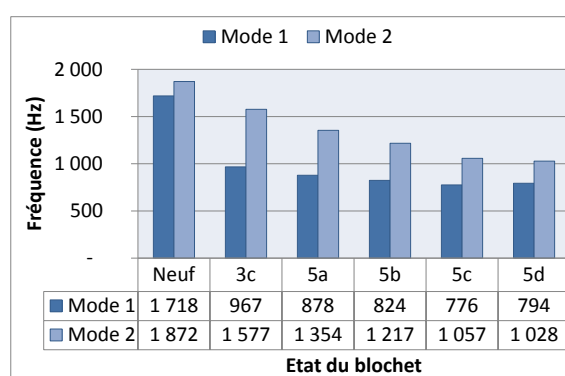


FIGURE 5.22 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 5

Dans la figure 5.22, on voit que les valeurs des fréquences varient comme celles du type 4 en étant cependant un peu plus élevées. Ce phénomène vient du fait que la perte de masse fait augmenter les fréquences.

### Type 6. Délaminage seul (figure 5.16f)

Ce type d'endommagement ne contient qu'une fissure horizontale au niveau de la barre en forme de "T". Les niveaux d'endommagement sont définis en fonction de la taille de la fissure.

- 6a à 6d : délaminage sous la barre en T (la taille de fissure correspond à des longueurs de 50, 100, 220 et 360mm)

La figure 5.23 montre que les fréquences varient très peu par rapport aux autres types d'endommagement. Par contre, les valeurs des fréquences des deux premiers modes sont pratiquement identiques et on pourrait utiliser cette caractéristique pour détecter les fissures horizontales (comme le type 4).

### Type 7. Rupture après délaminage (figure 5.16g)

Ce type d'endommagement arrive après les endommagements des types 4, 5 ou 6. On détermine les trois niveaux suivants :

- 7a : détachement de la partie inférieure du blochet
- 7b : détachement de la partie inférieure et fissuration du béton dans la partie supérieure.

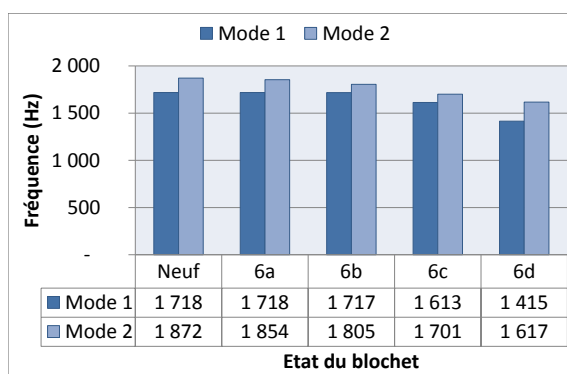


FIGURE 5.23 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 6

- 7c : détachement de la partie inférieure et rupture totale du béton et des aciers de renforcement.

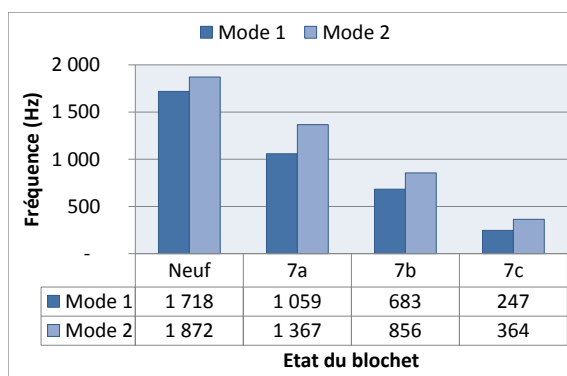


FIGURE 5.24 – Fréquences des niveaux d'endommagement de type 7

Dans la figure 5.24, on voit que les fréquences obtenues pour ce type d'endommagement sont très basses. Les blochets ayant cette signature fréquentielle sont très endommagés, voire quasiment cassés.

## Résumé

Nous avons mis en évidence dans ce travail que les fréquences des deux premiers modes propres des blochets dépendent du type de fissuration (horizontale et verticale) et de la taille des fissures et cela de différentes façons. Cependant, des caractéristiques communes sont observées :

- Les deux premières fréquences correspondent toujours respectivement aux modes de flexion et de torsion, avec ou sans fissure du blochet.
- En général, la fissuration fait diminuer les deux premières fréquences de façon systématique (lorsque la fissuration augmente, les valeurs des fréquences diminuent).
- Les blochets endommagés peuvent faire apparaître de nouveaux modes par rapport à ceux du blochet neuf. L'ordre des modes peut changer mais les deux premiers modes restent les mêmes (sauf pour les blochets quasiment cassés).
- Le détachement par délaminage de la partie inférieure du blochet s'accompagne d'une légère augmentation des valeurs des fréquences. Dans ce cas, le ratio de la deuxième fréquence sur la première est plus grand.

A partir de ces caractéristiques, on peut définir des niveaux généraux pour tous les types d'endommagement afin de simplifier la procédure de détection du niveau d'endommagement des blochets. Ces niveaux correspondent à l'état général du blochet. On peut définir le plan de maintenance en se basant sur ces niveaux d'endommagement.

Il y a aussi une autre façon d'exploiter ces résultats. On peut construire une base de données des fréquences propres en fonction de l'état d'endommagement du blochet comme représenté dans la figure 5.25. Cette base de données peut être utilisée lors des mesures réalisées en tunnel. En effet, en comparant les résultats de mesures effectuées avec les valeurs des fréquences enregistrées dans la base, on peut identifier le type et niveau d'endommagement des blochets testés.

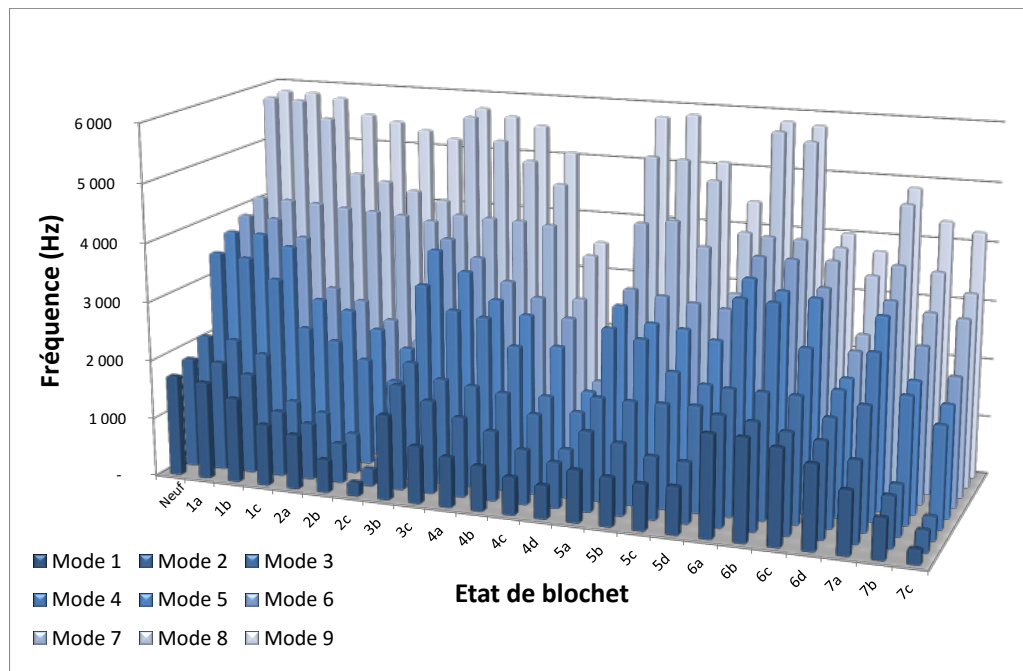


FIGURE 5.25 – Base de données numérique de l'état d'endommagement/fréquences propres

## 5.4 Base de données expérimentale des blochets usés

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence la relation existant entre les types d'endommagement des blochets et leur deux premières fréquences propres. Cependant, ces types d'endommagement ne couvrent pas toutes les possibilités d'endommagement des blochets en voie réelle (par exemple, les blochets avec plusieurs microfissures). Pour étudier la validité de ces types d'endommagement, nous allons mesurer les fréquences et les amortissements d'un ensemble de blochets usés afin de les classer à l'aide des deux méthodes : l'observation et l'utilisation des données numériques. La première consiste à observer les faces endommagées des blochets usés, la seconde à identifier la signature fréquentielle de chaque blochet usé. Ces mesures permettent aussi de construire une base de données expérimentale qui relie l'état d'un blochet et ses modes propres vibratoires en condition libre.

### 5.4.1 Méthode de mesure

Les mesures ont été réalisées sur les blochets entreposés sur le site d'Eurotunnel. Les blochets usés sont posés sur le sol (condition libre) comme le montre la figure 5.26. Pour chaque blochet, on mesure les fréquences et les amortissements des deux premiers modes propres en utilisant la méthode présentée dans la section 5.2. Les réponses vibratoires des blochets sont enregistrées à l'aide d'un vibromètre laser Polytec PDV-100 (Vibromètre Numérique Portable).



FIGURE 5.26 – Mesure des modes propres des blochets usés en condition libre

Pour déterminer l'état d'endommagement des blochets, on observe les surfaces extérieures (au dessus, au dessous et les deux cotés) et classe chaque surface suivant 5 niveaux de fissuration :

- 0 : pas de fissure ou difficile à observer
- 1 : initiation de la fissure
- 2 : fissure sur toute la surface
- 3 : ouverture de la fissure
- 4 : ouverture en grand de la fissure et rupture du blochet

De plus, on observe aussi les délaminages et les ruptures de la partie inférieure du blochet en classant aussi suivant 5 niveaux :

- Délaminage : de 0 à 4
- Rupture : de 0 à 4

Au total, nous avons 5 critères observables pour déterminer l'état d'un blochet usé. Pour enregistrer ces observations, des photos des surfaces des blochets sont prises pendant les mesures.

### 5.4.2 Traitement des données

Le résultat est obtenu sur 250 blochets avec les données suivantes :

- Les fréquences et les amortissements des deux premiers modes
- Les réponses vibratoires des blochets
- Les photos de la surface supérieure et latérale coté des blochets
- Les niveaux d'endommagement des surfaces observables (5 critères)

Pour chaque blochet, le niveau d'endommagement obtenu par l'observation est défini par la somme des niveaux sur les 5 critères. Ce niveau représente donc globalement l'endommagement observable du blochet mais il ne prend pas en compte des endommagements

à l'intérieur du blochet. Suivant cette procédure, les valeurs les plus grandes sont obtenues pour les blochets les plus dégradés. La valeur zéro correspond à un blochet sans fissure.

Les figures 5.27 et 5.28 représentent la variation de ce niveau respectivement en fonction de la première et de la deuxième fréquence propre du blochet. On voit que plus la fréquence est faible, plus le niveau d'endommagement est important.

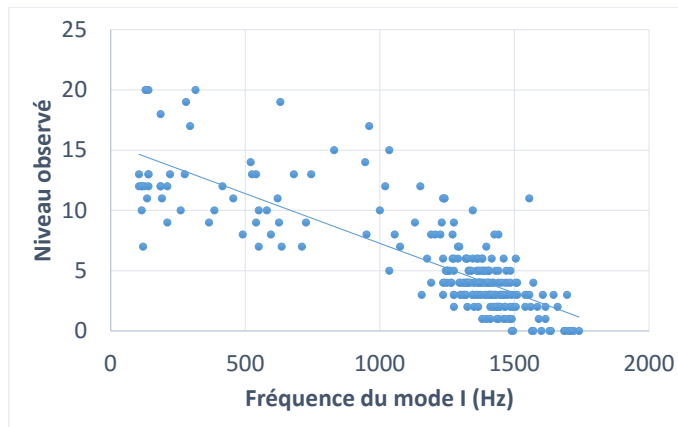


FIGURE 5.27 – État d'endommagement observé en fonction de la première fréquence propre

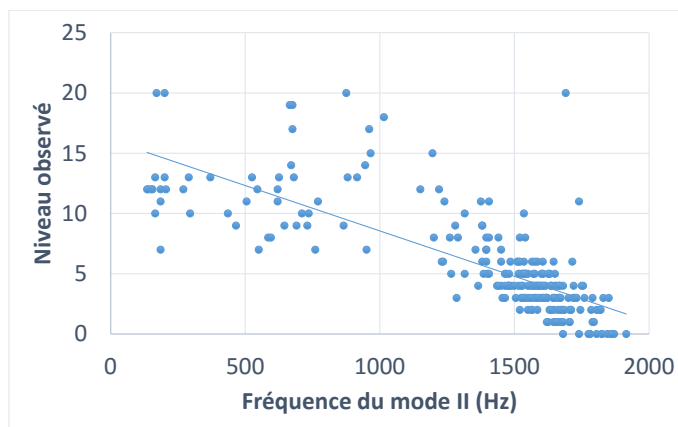


FIGURE 5.28 – Etat d'endommagement observé en fonction de la deuxième fréquence propre

### Observation - Simulation

En utilisant les résultats de la modélisation, on détermine le niveau d'endommagement général des blochets par la connaissance des fréquences des deux premiers modes propres (niveau détecté). On peut alors comparer ces niveaux avec le niveau déterminé par l'observation (niveau observé). Le graphique 5.29 montre qu'il existe une relation linéaire entre les niveaux d'endommagement détectés et observés et que ces deux approches semblent cohérentes.

Pour comparer en détail les niveaux par l'observation et par la simulation, on calcule l'histogramme des niveaux par l'observation pour un même niveau détecté numériquement. Le tableau 5.5 montre les fréquences d'apparition des endommagements observés pour chaque niveau. On voit que les fréquences maximum se trouvent sur la diagonale de la matrice ce qui assure la cohérence entre les deux résultats (voir la figure 5.30).



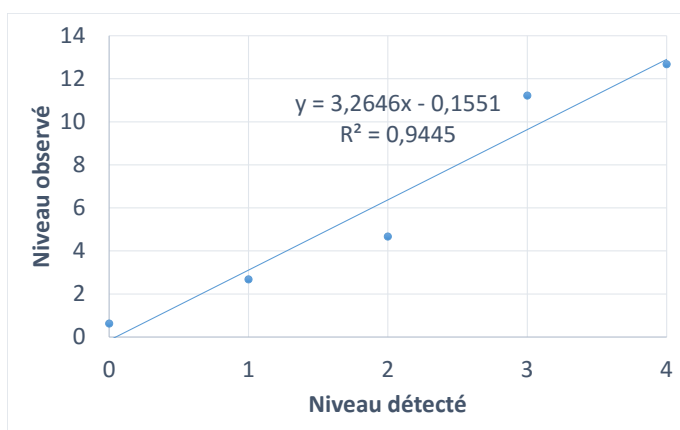


FIGURE 5.29 – Base de données numérique de l'état d'endommagement-fréquences propres

Niveau		par la simulation				
		0	1	2	3	4
par l'observation	0	<b>75%</b>	12%	-	-	-
	3	25%	<b>63%</b>	31%	-	-
	6	-	22%	<b>55%</b>	6%	-
	9	-	2%	10%	<b>33%</b>	16%
	12	-	2%	4%	22%	<b>43%</b>
	15	-	-	-	28%	22%
	18	-	-	-	6%	5%
21	-	-	-	6%	14%	

TABLE 5.5 – Covariance des niveaux d'endommagement par l'observation et par la simulation

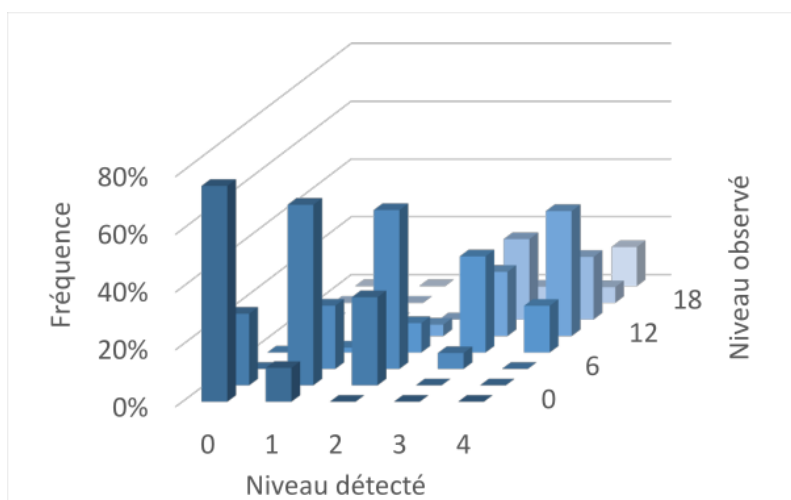


FIGURE 5.30 – Histogramme des états d'endommagement par l'observation et par la simulation

A partir des résultats de mesure, on peut alors construire une base de données expérimentale pour identifier les niveaux d'endommagement. L'identification du niveau d'endommagement des blochets en voie se fera alors en calculant l'écart-type entre les fréquences et les amortissements du blochet mesurés et les valeurs de fréquences et d'amortissement

enregistrées dans la base de données.

- Version complète : l'écart-type est calculé en basant sur les fréquences et les amortissements

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{f_1 - f_1^b}{f_1^b}\right)^2 + \left(\frac{f_2 - f_2^b}{f_2^b}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1 - \eta_1^b}{\eta_1^b}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2 - \eta_2^b}{\eta_2^b}\right)^2} \quad (5.1)$$

- Version réduite : l'écart-type est calculé en basant seulement sur les fréquences

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{f_1 - f_1^b}{f_1^b}\right)^2 + \left(\frac{f_2 - f_2^b}{f_2^b}\right)^2} \quad (5.2)$$

où  $f_1, f_2, \eta_1, \eta_2$  sont les fréquences et les amortissements du blochet mesurés et  $f_1^b, f_2^b, \eta_1^b, \eta_2^b$  sont les équivalences dans la base de données.

Cette méthode est statistique, simple et efficace lorsque l'on dispose d'une base de données suffisamment représentative. De plus, cette méthode est évolutive. On peut en effet enrichir la base de données lors des campagnes de surveillance qui permettent de sortir des blochets de la voie et de procéder à leur inspection visuelle.

## 5.5 Influence des conditions externes

Nous avons établi une relation entre les modes propres et l'état d'endommagement des blochets en conditions libres. En général, cette condition est plus facile à appliquer car les blochets ne sont pas influencés par d'autres éléments externes. Cependant, le blochet en voie est encastré dans le chausson élastomère qui est noyé dans la dalle béton. De plus, il est solidaire du rail via un système d'attache et une semelle. Tous ces éléments sont susceptibles d'influencer les modes propres du blochet en voie, et, nous devons appliquer la méthode de détection d'endommagement que nous avons proposé en voie pour étudier les effets de ces composants sur la réponse vibratoire des blochets. Dans cette section, nous allons donc d'abord étudier l'effet du rail, de la semelle sous rail et du système d'attache. Ensuite, nous utiliserons les essais in situ pour étudier l'effet de la dalle et des chaussons.

### 5.5.1 Mesure des fréquences d'une portion de voie



FIGURE 5.31 – Voie assemblée au laboratoire

Pour étudier les influences du rail, de la semelle sous rail et du système d'attache, nous avons monté une portion de voie d'essai qui contient trois blochets posés sur le sol du laboratoire. Les blochets sont attachés au rail via la semelle sous rail et le système

d'attache (voir la figure 5.31). La distance entre les blochets est de 60cm ce qui correspond à la distance en voie réelle. Les vis des systèmes d'attache ont été serrées avec un couple de serrage maximal de 200Nm.

Avec cette voie d'essai, nous pouvons étudier les couplages des systèmes dynamiques et aussi déterminer le rôle des différents composants sur la réponse vibratoire de la portion de voie.

### 5.5.2 Mesure et excitation directe

Dans cette partie, nous avons collé un accéléromètre sur le rail et sur le blochet et les avons excités directement à l'aide d'un marteau. Les essais ont été faits suivant 3 conditions : libre, serrage faible et serrage fort.

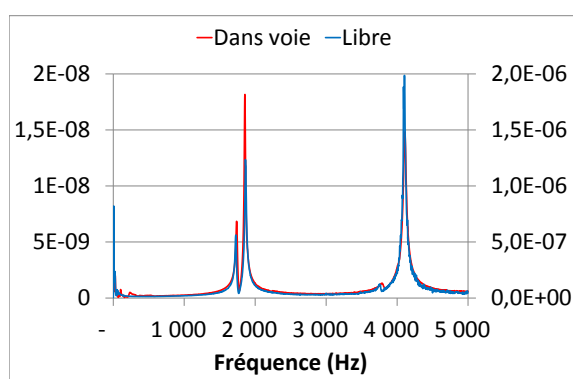


FIGURE 5.32 – Mesure des fréquences du blochet en condition libre et assemblé dans la voie d'essai

La figure 5.32 présente deux réponses vibratoires d'un blochet dans le domaine des fréquences obtenues par l'accéléromètre en excitant directement le blochet à l'aide d'un marteau. On observe que la voie ne fait pas apparaître de nouveau mode dans la réponse. Cependant, l'assemblage modifie légèrement les fréquences comme le montrent les résultats dans le tableau 5.6. Le blochet attaché au rail présente une première fréquence plus grande que celle obtenue en condition libre. Ce phénomène vient du fait que le rail avec les systèmes d'attache renforcent le blochet en flexion. Par conséquent, la rigidité en flexion est plus grande et la fréquence augmente.

Condition	Mode I (Hz)	Mode II (Hz)
Libre	1 728	1 869
Serrage faible	1 738	1 856
Serrage fort	1 756	1 863

TABLE 5.6 – Fréquence du blochet neuf

Sur la figure 5.33, nous avons tracé les réponses du rail lorsqu'on excite directement le rail suivant deux conditions : serrage fort et serrage faible. On observe que les deux réponses ne sont pas du tout cohérentes et que les valeurs des fréquences propres obtenues sont très différentes de celles obtenues en condition libre (calculées à l'aide d'un modèle des poutres). Ce résultat vient du fait que les blochets ajoutent leur poids sur le rail ce qui modifie les modes propres du rail.

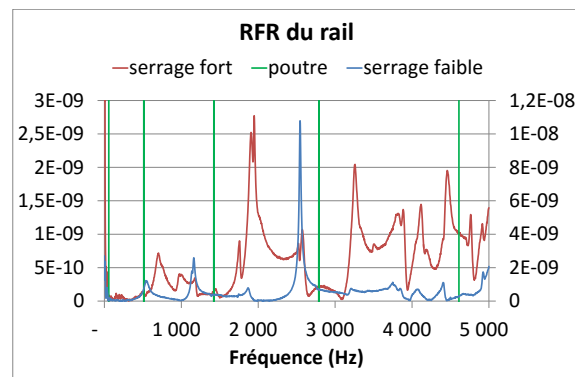


FIGURE 5.33 – Mesure des fréquences du rail dans la voie assemblée avec un couple de serrage fort (courbe rouge) et plus faible (courbe bleue)

En conclusion, le rail avec le système d'attache modifie très peu les fréquences propres du blochet alors que l'assemblage modifie de façon importante les fréquences propres du rail.

### Couplage rail - blochet

Le blochet étant attaché au rail, on peut se demander si la mesure des fréquences via le rail est possible ? Il y a alors deux possibilités : on peut mettre le capteur sur le rail et exciter le blochet, ou à l'inverse, mettre le capteur sur le blochet et exciter le rail.

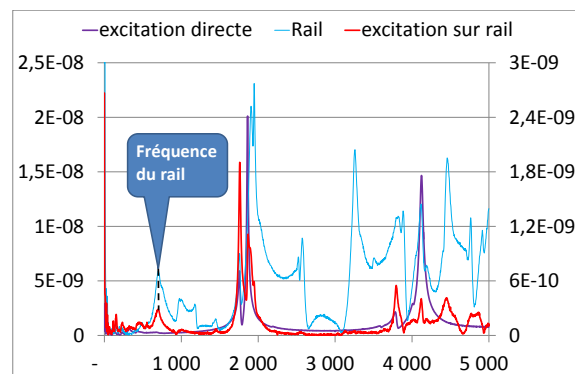


FIGURE 5.34 – Réponse du blochet par l'excitation sur le rail

*Couplage blochet - rail* : L'accéléromètre est collé au blochet et on excite le rail à l'aide du marteau. La figure 5.34 présente les réponses du blochet en excitant le rail (courbe rouge) ou le blochet lui-même (courbe bleu foncé) et la réponse du rail (courbe bleu clair). On voit que la réponse du blochet dans ce cas est constituée principalement des modes propres du blochet, à laquelle s'ajoutent aussi les modes du rail (avec des amplitudes assez faibles).

*Couplage rail - blochet* : Est-il possible de mesurer les fréquences des blochets en plaçant le capteur sur le rail ? La figure 5.35 montre la réponse du rail lorsqu'on excite un blochet (courbe rouge). Comme dans le cas précédent, on obtient les fréquences du blochet ainsi que celles de couplage sur la réponse.

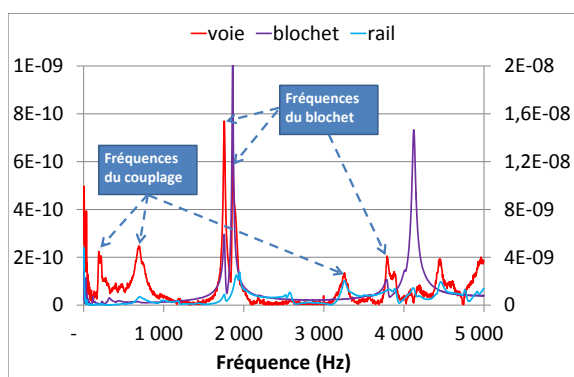


FIGURE 5.35 – Réponse du rail par l'excitation sur le blochet

### Couplage blochet - blochet

Pour déterminer l'influence des blochets voisins sur la réponse vibratoire d'un blochet en voie, l'accéléromètre est collé sur le blochet du milieu et on excite les blochets situés à droite et à gauche de ce blochet (figure 5.36).

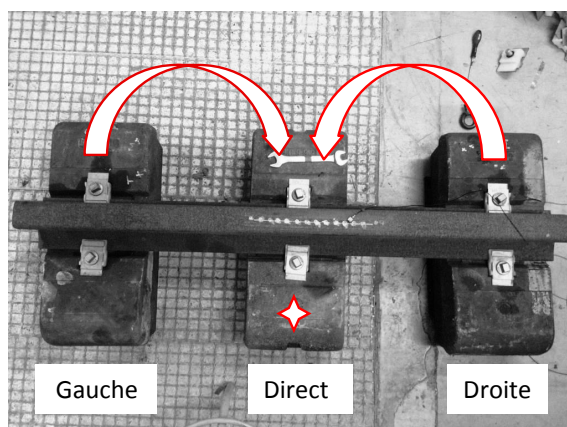


FIGURE 5.36 – Influence des blochets voisins sur la réponse vibratoire d'un blochet

Les réponses dans le domaine des fréquences sont présentées dans la figure 5.37. Dans cette figure, la réponse par excitation directe (courbe rouge) est beaucoup plus forte que les réponses par excitation des blochet voisins (courbes verte et jaune) qui sont tracés dans le repère de l'axe de droite. On récupère cependant les fréquences du blochet situé au milieu dans la réponse lorsqu'on excite ses blochets voisins, mais, les fréquences des voisins apparaissent aussi dans la réponse (pics obtenus pour la fréquence inférieure à 1000Hz dans la courbe jaune).

### Résumé sur le couplage

- Il n'y a pas de variation importante des valeurs des fréquences propres des blochets lorsqu'ils sont assemblés dans la voie
- On peut directement mesurer les fréquences d'un blochet en ignorant les couplages avec le rail et les blochets voisins.
- On pourrait mesurer les fréquences d'un blochet en mesurant les fréquences du rail mais il faut alors filtrer les fréquences de couplage rail/blochet.

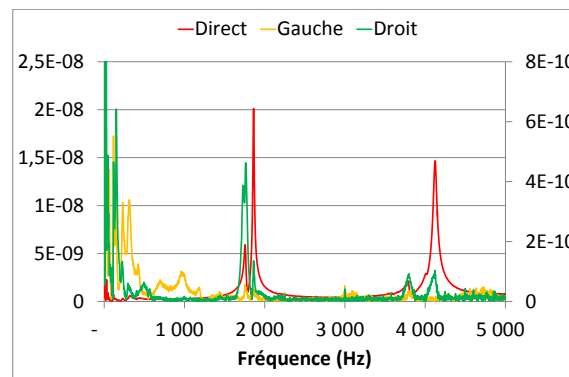


FIGURE 5.37 – Réponses en fréquence d'un blochet par l'excitation directe et sur ses voisins

En conclusion, pour mesurer les fréquences propres des blochets en voie, il faudra exciter directement le blochet contenant le capteur. De plus, l'excitation ne doit pas être trop forte pour que la réponse ne soit pas perturbée par la réponse des autres composants de la voie.

### 5.5.3 Validation par mesures in situ

Pour analyser l'influence des conditions réelles sur la réponse vibratoire d'un blochet, des mesures in situ ont été effectuées dans le tunnel sous la Manche dans deux conditions :

- Condition normale : les mesures ont été effectuées sur les blochets en voie.
- Rail déposé : le rail a été détaché du blochet. Cette opération permet d'éliminer les influences du rail et des autres composants attachés au rail. La réponse des blochets n'est alors influencée que par la dalle en béton et le chausson.

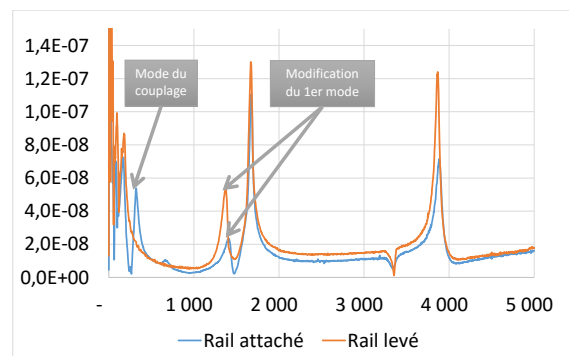


FIGURE 5.38 – Réponses en fréquence d'un blochet en voie avec rail attaché (courbe bleu) et rail levé (courbe orange)

La figure 5.38 montre un exemple de réponses vibratoires d'un blochet sous deux conditions. On voit que la réponse avec le rail attaché est plus perturbée pour les basses fréquences. De plus, la première fréquence du blochet augmente légèrement. Ce phénomène vient du fait que le rail et les systèmes d'attache renforcent le blochet en flexion. Par conséquent, la raideur en flexion est augmentée et la fréquence du mode de flexion est diminuée. Cependant, cette modification est faible et elle est la même pour tous les blochets (à condition que les systèmes d'attaches de tous les blochets soient identiques). Pour analyser cette modification sur un ensemble de blochets, nous avons effectué des mesures sur 9 blochets consécutifs en voie. Les figures 5.39 et 5.40 montrent les réponses des blochets en condition réelle et avec le rail déposé. En comparant ces deux figures, on voit que

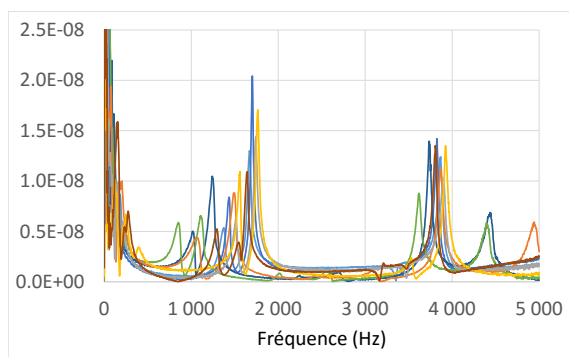


FIGURE 5.39 – Réponses en fréquence des 18 blochets consécutifs avec le rail levé

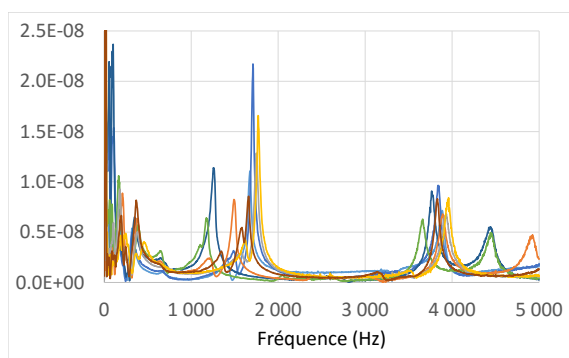


FIGURE 5.40 – Réponses en fréquence des 18 blochets consécutifs avec le rail attaché

l'amplitude des premiers pics (qui correspondent aux premiers modes) des blochets avec le rail levé est plus grande que celles obtenues pour le blochet en voie normale. Cependant, pour les deux figures on observe l'existence des fréquences plus basses que les autres. On pourra donc effectuer des mesures en voie pour détecter des endommagements sans avoir à détacher et lever le rail.

## 5.6 Système de surveillance des blochets

La méthode de détection des endommagements des blochets que nous proposons présente des avantages en termes d'exactitude et de temps de mesure. Cette méthode peut donc être appliquée pour la surveillance des blochets en tunnel. Cependant, il faut automatiser cette méthode, et disposer de trois systèmes :

- Système d'excitation : qui permet d'exciter les blochets en se déplaçant sur la voie pour pouvoir procéder à la mesure successive des blochets.
- Capteurs : qui permettent de capturer les réponses vibratoires des blochets suite à l'excitation des blochets.
- Analyseur : qui permet d'analyser les réponses et de donner le résultat en terme de niveau et type d'endommagement des blochets.

Nous avons pour cela réalisé un logiciel (logiciel "**EuroDetection**") qui sera utilisé lors des mesures en voie dans le tunnel sous la Manche.

### 5.6.1 Introduction au logiciel EuroDetection

Le logiciel **EuroDetection** permet d'analyser les réponses vibratoires de deux blochets en parallèle et ainsi déterminer leurs niveaux d'endommagement en utilisant le principe de l'analyse modale. Le schéma du principe d'EuroDetection est présenté dans la figure 5.41. Ce logiciel est programmé sous MATLAB et comprend une interface graphique présentée

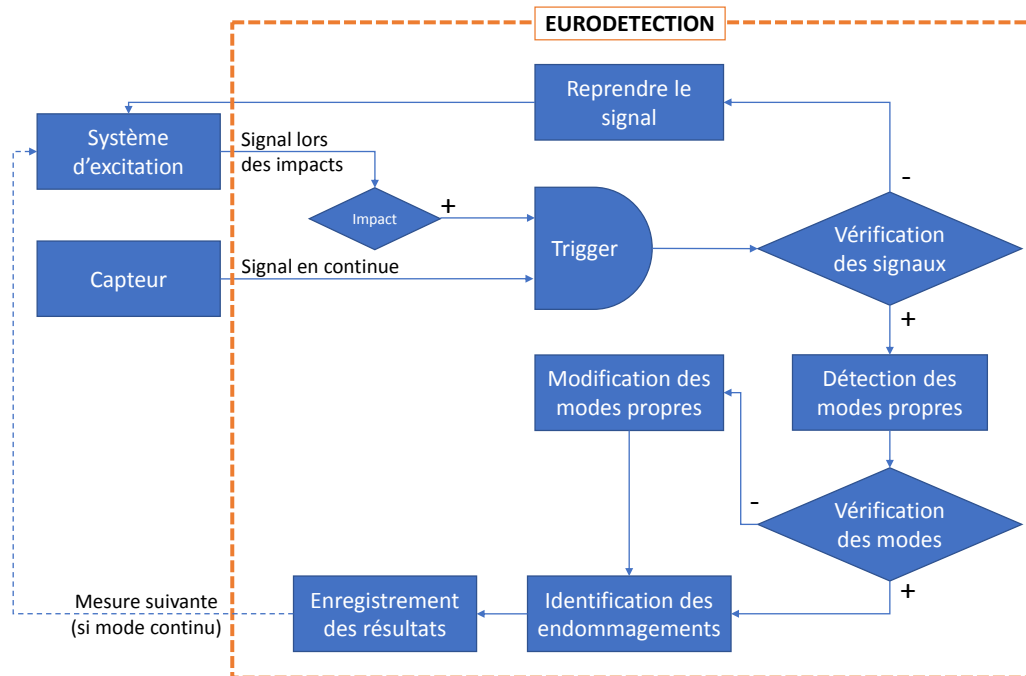


FIGURE 5.41 – Schéma du logiciel **EuroDetection**

dans la figure 5.42. Ce logiciel doit être couplé à un système d'excitation et à des capteurs enregistrant la réponse vibratoire (vibromètre laser) pour être opérationnel en tunnel. Les fonctions principales d'EuroDetection sont :

- L'enregistrement des signaux : lorsque le blochet est excité, la réponse vibratoire est capturée par le capteur laser. Le logiciel permet d'enregistrer le signal engendré par le capteur qui satisfait les conditions nécessaires.
- Le traitement des signaux : cette fonction permet d'effectuer l'analyse modale de façon automatique pour trouver les fréquences et les amortissements des blochets. Si nécessaire, des modifications manuelles peuvent être apportées.
- L'identification des niveaux d'endommagement : en utilisant les résultats modaux et les bases de données, cette fonction calcule le niveau d'endommagement du blochet.

Nous avons développé des options dans chaque fonction ce qui permet de faciliter la manipulation et de réaliser l'analyse instantanée des signaux. De plus, l'interaction entre les fonctions permet aussi de faire des corrections si nécessaire.

### 5.6.2 Fonctions principales

#### Enregistrement des signaux

Pour réaliser les mesures sur deux blochets sur les deux rails en parallèle, **EuroDetection** peut enregistrer les deux signaux qui correspondent aux entrées des deux capteurs. Différents choix sont possibles en donnée "d'entrée" du logiciel (voir la figure 5.43) :



FIGURE 5.42 – Interface graphique du logiciel **EuroDetection**

- Droite : pour enregistrer seulement la réponse du blochet attaché au rail de droite
- Gauche : pour enregistrer seulement la réponse du blochet attaché au rail de gauche
- Double : pour enregistrer les deux entrées en parallèle

Pour augmenter la vitesse d'analyse, le logiciel fournit deux modes d'enregistrement

- Mode séquentiel : réalise une seule mesure, l'acquisition s'arrête après la mesure
- Mode continu : réalise une série de mesures consécutives. En activant cette option, on peut mesurer plusieurs blochets sans manipuler le logiciel.

On peut changer les modes ou les entrées seulement lorsqu'on arrête l'acquisition des signaux en cours.

Paramètres du signal :

- Trigger : c'est le seuil à partir duquel le signal est enregistré
- Durée : temps d'enregistrement du signal à partir du moment où le trigger est activé
- Timeout : temps d'attente du signal entrant (ce temps doit être supérieur au temps d'excitation)
- Fréquence d'acquisition : la valeur est donnée automatiquement par le capteur
- Fréquence max/min : l'intervalle de fréquence à traiter pour le signal entrant

### Traitement des signaux

Lorsque le trigger est activé, les signaux provenant des capteurs sont enregistrés et affichés sur les deux graphiques (l'un dans le domaine temporel et l'autre dans le domaine des fréquences comme le montre la figure 5.42). Les quantités affichées sont :

- Vitesse de vibration (signal brut)
- Réponse en fréquence de l'accélération normalisée

Une fois que les signaux sont enregistrés, ils sont analysés automatiquement pour détecter les modes propres des réponses vibratoires.

- Les deux premiers modes propres sont affichés (valeurs de la fréquence et de l'amortissement) pour les deux blochets situés vis-à-vis.
- Les modes propres peuvent être modifiés manuellement en appuyant sur les fenêtres donnant la valeur des modes et ensuite valider (valider modification)

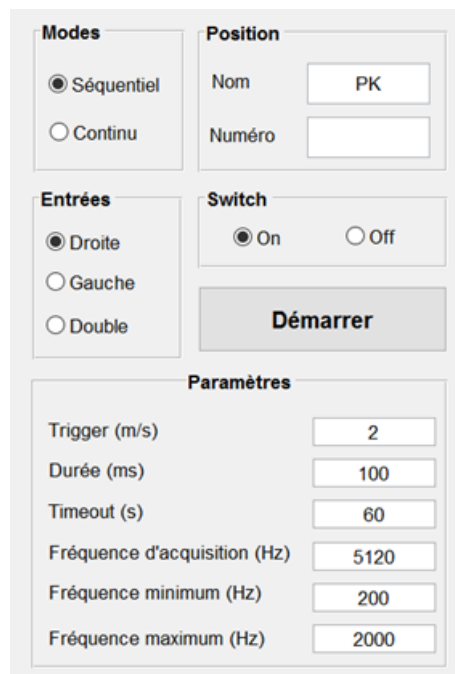


FIGURE 5.43 – Option d’enregistrement des signaux

- Lorsque le signal n’est pas exploitable, la mesure peut-être répétée. Il existe pour le faire un bouton qui permet de refaire la mesure sans arrêter l’enregistrement des résultats

### Identification de l’endommagement

En utilisant les bases de données expérimentales et numériques, cette fonction va détecter automatiquement le niveau d’endommagement du blochet ausculté. L’affichage des résultats d’identification d’endommagement sur les deux blochets consiste à afficher :

- Les niveaux d’endommagement : identifié par la base de données des modélisations. Ce résultat est présenté avec une image du type d’endommagement.
- La description de l’endommagement : lorsqu’il y a un délaminage ou la rupture d’une partie du blochet, le message va s’afficher dans cette zone.
- La détection par la base de données expérimentale : la fonction cherche le blochet dans la base de données le plus corrélé avec le blochet ausculté. Les niveaux d’endommagement du blochet corrélé sont affichés dans cette zone avec l’écart-type entre le blochet mesuré et le blochet corrélé.
- Affichage des images du blochet corrélé dans la base de données en appuyant sur le bouton de l’interface.

### Autres options

- Le switch : Il est connecté au système d’excitation pour enlever les bruits avant l’excitation. Le switch peut être activé ou désactivé.
- La position du blochet est déterminée par le nom du fichier (ou de l’intervalle) et son numéro
- Enregistrement des signaux : l’enregistrement des signaux est automatique en mode continu. Quant au mode séquentiel, le bouton ”enregistrer” permet d’enregistrer les



FIGURE 5.44 – Option de l'identification des niveaux d'endommagement

signaux et le résultat de détection du blochet.

- Ouvrir un fichier : visualisation rapide d'un résultat
- Noter/Changer le numéro de blochet : s'applique dans le mode continu

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode complète pour d'une part détecter les endommagements des blochets en voie et d'autre part, déterminer le niveau d'endommagement. Nous avons pour cela mis en évidence en analysant les réponses vibratoires des blochets neufs et usés, que les fréquences propres et les amortissements des blochets dépendent de l'état d'endommagement ce ceux-ci. Cette dépendance a ensuite été étudiée par la modélisation en utilisant la méthode des éléments finis. La comparaison des fréquences propres d'un blochet neuf obtenu numériquement et expérimentalement a montré une bonne cohérence entre ces deux approches. Pour les blochets fissurés et dégradés, nous avons effectué le calcul des fréquences en ajoutant des fissures au blochet dans le modèle éléments finis. Le résultat de simulation nous a permis d'obtenir les tendances de variation des fréquences pour chaque type de fissuration en fonction de la taille des fissures. Enfin, cette étude a permis de démontrer que le niveau d'endommagements des blochets conditionnent la réponse vibratoire de ceux-ci et que la détermination par la mesure de cette réponse permet de connaître le niveau et type d'endommagement du blochet.

Pour appliquer ces résultats en voie dans le tunnel, nous avons déterminé par la mesure les fréquences et amortissements sur un ensemble 284 blochets usés en condition libre. Les dégradations de ces blochets ont été classées par l'observation des surfaces extérieures des blochets suivant 5 critères. Ensuite, les résultats de l'observation et du calcul ont été comparés pour valider la méthode de détection des endommagements proposée. De plus, l'étude sur une voie assemblée en laboratoire et sur un intervalle de voie dans le tunnel a démontré que les influences des conditions externes au blochet ne sont pas importantes et que l'on peut effectuer les mesures sans avoir à modifier la voie. A partir de ce résultat, nous avons conclu que la méthode de détection d'endommagement proposée est opérationnelle pour la voie ferrée sur dalle. Pour automatiser la méthode, un système de surveillance des blochets a été développé qui se compose de trois composants : l'excitateur, le capteur et l'analyseur. L'analyseur fait appel au logiciel **EuroDetection** que nous avons conçu. Il permet d'analyser les réponses vibratoires des blochets pour déterminer le niveau et type d'endommagement des blochets en voie.

# Conclusions et perspectives

## Contexte industriel

Les voies ferroviaires du tunnel sous la Manche sont équipées d'un système de support de rail "low vibration track" (LVT) sans ballast. Le vieillissement de ces voies est dû au trafic important dans le tunnel et implique le changement de certains composants du système dans le cadre des opérations de maintenance. Cependant, il est nécessaire de maîtriser la durée de vie du système pour prévoir ces opérations. D'autre part les systèmes LVT sans ballast étant récents il n'existe pas d'étude sur ceux-ci et il est dans ce cas nécessaire d'étudier le comportement mécanique de la voie en intégrant les caractéristiques actuelles des voies en tunnel. Ces travaux de thèse rentrent dans le cadre de la chaire de recherche commune entre l'ENPC et la société Eurotunnel et ont pour objectifs d'étudier le comportement mécanique de ce type de voie et la dégradation du système support LVT.

## Contributions scientifiques

Dans la première partie, nous avons développé un modèle analytique pour calculer la réponse stationnaire d'une voie ferroviaire sans ballast soumise à des charges mobiles dans 3 directions : verticale, transversale et longitudinale. Les modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko supportées par des appuis périodiques ont été utilisés pour modéliser le rail. Cette étude a démontré qu'une poutre (quelque soit le modèle) périodiquement supportée est équivalente à un ressort dont la raideur et la pré-charge dépendent des paramètres de la poutre. Cette équivalence permet de calculer la réponse des supports linéaires et non-linéaires. De plus, cette étude a démontré que lorsque le cisaillement est négligeable, le modèle de poutre de Timoshenko devient la poutre d'Euler-Bernoulli, ce qui est bien en accord avec la théorie des poutres classiques. D'autre part, le système équivalent existe aussi pour la dynamique de la voie dans la direction longitudinale. Les applications numériques ont été faites pour une voie dans la zone saine d'origine dans le tunnel sous la Manche. La comparaison entre le modèle et les résultats de mesures effectuées montre que la modélisation est bien adaptée. Ensuite, différentes techniques ont été développées pour les supports non-linéaires. En se basant sur la procédure itérative, on peut utiliser la méthode de la balance harmonique ou une méthode numérique pour calculer les réponses dans le cas où la loi de comportement du support contient un ou deux degrés de liberté.

Pour analyser le comportement d'une voie qui contient des supports endommagés, nous avons développé ensuite un modèle de voie non-homogène. Ce type de voie couvre aussi différents problèmes dans la modélisation dynamique d'une voie ferrée comme le défaut des supports et de la fondation, les ponts ferroviaires, les zones de transition... Ce modèle permet d'obtenir une relation entre les forces et les déplacements des supports dans un état stationnaire qui est valable pour tous les types de voie (linéaire ou non-linéaire). De plus, les deux méthodes de calcul (directe et itérative) permettent de déterminer rapidement les

réponses de la voie. Les études paramétriques réalisées en utilisant ce modèle ont démontré les rôles des paramètres du support sur la réponse dynamique de la voie. Les phénomènes de surcharge et de déplacement excessif sont illustrés par les applications numériques pour voies qui ont des supports cassés. Ce résultat a mené d'une part ensuite à une explication du mécanisme de la propagation des endommagements. D'autre part, il met en évidence les conséquences de la procédure de maintenance par le remplacement d'un taux donné des supports de façon périodique. Enfin, nous avons développé le logiciel "**EuroAnalyse**" qui intègre ce modèle pour une utilisation facile dans le cadre de la maintenance d'Eurotunnel.

La deuxième partie de ce travail étudie la dégradation du système support LVT dû au trafic important dans le tunnel sous la Manche. Le nombre de cycles de chargement/déchargement que subit chaque support de rail est estimé à 7 millions de cycles par an. Par conséquent, un vieillissement important a été observé sur tous les composants des systèmes de support de rail des voies du tunnel. Pour analyser les conséquences des chargements cycliques, nous avons tout d'abord déterminé les champs de contrainte dans le système support à l'aide de la méthode des éléments finis. Le résultat montre que la contrainte la plus critique est la contrainte de traction dans la direction longitudinale du blochet. Cette contrainte vient du fait que le blochet travaille en flexion. En appliquant des lois empiriques de la fatigue du béton, nous avons déterminé l'ordre de grandeur de la durée de vie du béton des blochets en tenant compte du trafic total dans le tunnel depuis son ouverture à la circulation. Ces résultats montrent que certains blochets peuvent avoir atteint leur durée de vie. Pour confirmer cette prévision, des essais de fatigue de blochets en flexion vont être menés à la suite de ce travail de thèse.

Nous avons ensuite développé une méthode complète pour d'une part détecter les endommagements des blochets en voie et d'autre part, déterminer leur niveau d'endommagement. Nous avons pour cela mis en évidence en analysant les réponses vibratoires des blochets neufs et usés, que les fréquences propres et les amortissements des blochets dépendent de l'état d'endommagement de ceux-ci. Cette dépendance a ensuite été étudiée par la modélisation en utilisant la méthode des éléments finis. La comparaison des fréquences propres d'un blochet neuf obtenues numériquement et expérimentalement a montré une bonne cohérence entre ces deux approches. Pour les blochets fissurés et dégradés, nous avons effectué le calcul des fréquences en ajoutant des fissures au blochet dans le modèle éléments finis. Les résultats de simulation nous ont permis d'obtenir les tendances de variation des fréquences pour chaque type de fissuration en fonction de la taille des fissures. Enfin, cette étude a permis de démontrer que le niveau d'endommagements des blochets conditionne la réponse vibratoire de ceux-ci et que la détermination par la mesure de cette réponse permet de connaître le niveau et le type d'endommagement du blochet.

Pour appliquer ces résultats en voie dans le tunnel, nous avons déterminé par la mesure les fréquences et amortissements sur un ensemble de 284 blochets usés en condition libre. Les dégradations de ces blochets ont été classées par l'observation des surfaces extérieures des blochets suivant 5 critères. Ensuite, les résultats de l'observation et du calcul ont été comparés pour valider la méthode de détection des endommagements proposée. De plus, l'étude sur une voie assemblée en laboratoire et sur un intervalle de voie dans le tunnel a démontré que les influences des conditions externes au blochet ne sont pas importantes et que l'on peut effectuer les mesures sans avoir à modifier la voie. A partir de ce résultat, nous avons conclu que la méthode de détection d'endommagement proposée est opérationnelle pour la voie ferrée sur dalle. Pour automatiser la méthode, un système de surveillance des blochets a été développé qui se compose de trois composants : l'excitateur, le capteur et l'analyseur. L'analyseur fait appel au logiciel "**EuroDetection**" que nous avons conçu. Il permet d'analyser les réponses vibratoires des blochets pour déterminer le niveau et le type

d'endommagement des blochets en voie.

## Perspectives et discussions

### Sur les modèles de voie

**La liaison entre les défauts des supports et la géométrie de la voie :** Le modèle de voie non-homogène a mis en évidence un déplacement important dans les intervalles de voies qui contiennent des supports endommagés. Cependant, ce modèle ne considère qu'un seul rail et le chargement est constitué de forces ponctuelles mobiles. Pour modéliser la voie réelle avec des wagons (ou un train complet), il existe dans la littérature des modèles analytiques pour un wagon modélisé par un système mécanique avec des ressorts, masses et amortisseurs. Nous pouvons alors coupler ce modèle et le modèle de voie non-homogène développé. Le modèle obtenu permettra de calculer les réponses d'une voiture de mesure lorsqu'elle circule sur les voies. Cette réponse a une relation directe avec les résultats de mesure géométrique de la voie qui fait déjà partie de la maintenance périodique de toutes les voies ferrées en France. Ce modèle nous permet donc d'avoir deux approches :

- Approche directe : Lorsque l'on a déterminé les caractéristiques des supports de la voie, le modèle nous permet de calculer les réponses. Ce résultat permet ensuite d'analyser les risques liés à des endommagements des supports (s'ils existent)
- Approche inverse : Au cours des mesures de géométrie de la voie, la réponse du rail sous le chargement de la voiture de mesure pourrait être calculé via le résultat de mesure. On pourrait donc utiliser ce résultat pour déterminer les caractéristiques des supports en proposant le problème inverse.

**Le modèle de voie sur une fondation 3D :** Dans le régime stationnaire, les réponses du rail et des supports sont liées par une relation qui est une relation caractéristique de la poutre supportée par des appuis périodiques. Ce modèle est limité lorsque l'on modélise la voie avec la fondation en 3 dimensions ou en prenant en compte une largeur des supports non nulle. Deux perspectives sont possibles :

- On peut utiliser le modèle analytique pour le rail et les supports (ou la traverse) et la méthode d'éléments finis pour la fondation. En faisant le couplage de ces deux modèles, on peut construire un modèle complet de la voie ferrée qui peut-être ensuite intégré dans le logiciel **EuroAnalyse**.
- En considérant le modèle de poutre sur une fondation périodique, on peut analyser l'influence de la largeur des supports (ou des traverses) sur la réponse.

**Les autres modèles de voie :** Les modèles de voie développés considèrent que le rail (modélisé par une poutre) travaille en flexion. Cette modélisation est valable pour la dynamique de la voie dans les directions verticales et transversales où les forces appliquées sont perpendiculaires à la poutre. Un autre modèle de voie dans la direction longitudinale a été aussi développé dans le cadre de ces travaux. On peut par la suite étendre ces travaux pour modéliser la dynamique de la voie pour d'autres directions ou pour d'autres chargements. Par exemple, la dynamique de la voie dans la zone d'accélération ou de freinage.

### Sur la méthode d'identification

**La construction de la base de données :** La méthode d'identification des endommagements des blochets est basée sur les deux bases de données (numérique et expérimentale). Ces bases de données assurent la qualité du résultat d'identification. Lors des campagnes de mesures, la base de données expérimentale peut évoluer en ajoutant des nouveaux

résultats de mesures. De plus, on peut aussi élargir les champs de données dans cette base en ajoutant, par exemple, la rigidité des blochets. Cette amélioration nous permet d'avoir les propriétés mécaniques des systèmes supports lors des campagnes de mesure. Ces données peuvent être utilisées ensuite comme entrée dans le logiciel **EuroAnalyse**.

**L'automatisation des mesures** : Le logiciel **EuroDetection** permet de traiter automatiquement les signaux entrant à condition qu'ils soient exploitables. Dans le cas où les signaux sont mauvais, ce logiciel ne peut pas s'en rendre compte. Ce problème apparaît assez souvent dans le tunnel et est traité manuellement. D'un autre côté, la vitesse des mesures dans le tunnel devra être très importante pour que la méthode soit opérationnelle. L'amélioration de la méthode de traitement des signaux pourrait donc augmenter la vitesse des mesures.

**La modélisation de la dynamique d'endommagement des supports** : Le modèle dynamique de voie a montré que les supports voisins des supports endommagés étaient surchargés. Cette surcharge implique une réduction de la durée de vie de ces supports ce qui est expliquée dans le mécanisme de propagation des endommagements. Pour estimer quantitativement cette influence, il est nécessaire d'établir un modèle dynamique de l'endommagement. Ce modèle devra coupler le modèle de voie non-homogène réalisé dans le cadre de la thèse et le modèle de la durée de vie en fatigue d'un blochet qui sera étudié par la suite.

## Publications et communications

Des résultats concernant les modèles de voie obtenus dans le cadre de la thèse sont publiés dans des revues et des conférences internationales ci-dessous. Les autres résultats de la méthode d'identification sont en train d'être breveté et ne sont pas publiés.

### Articles

- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, H.-P. Yin, P. Joyez and R. Caby, "Calculation of force distribution for a periodically supported beam subjected to moving loads", *Journal of Sound and Vibration* (2016), DOI :10.1016/j.jsv.2016.10.031.
- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, H.-P. Yin and G. Cumunel, "Response of a periodically supported beam on a nonlinear foundation subjected to moving loads", *Nonlinear Dynamics* (2016), DOI : 10.1007/s11071-016-2936-5.
- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, H.-P. Yin and P. Argoul, "Frequency dependent iteration method for forced nonlinear oscillators", *Applied Mathematical Modelling* (2016), DOI : 10.1016/j.apm.2016.10.012.
- T. Hoang, D. Duhamel et G. Foret, Dynamical response of a Timoshenko beam on periodical nonlinear supports subjected to moving forces, *Engineering Structure*, En correction après révision.
- T. Hoang, D. Duhamel and G. Foret, Analytic method for the dynamics of nonuniform railway tracks, *Computer & Structures*, Soumis au journal.
- T. Hoang et al., "Dynamic Response of Infinite Beams on a Periodical Viscoelastic Foundation Subjected to Moving Loads", *Journal of Sound and Vibration*, En rédaction.
- T. Hoang et al., Frequency approach of harmonic balance method for nonlinear oscillators, *Nonlinear Dynamics*, En rédaction.

## Conférences

- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, H.-P. Yin, P. Joyez and R. Caby, "Dynamic response of railway tracks in tunnel", *Proceeding of 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, July 2014, Barcelona, Spain.
- Tien Hoang, Denis Duhamel, Gilles Foret, H.P. Yin, G. Cumunel, P. Joyez and R. Caby, "A fast semi-analytical method for computing the response of railway tracks on nonlinear foundations", *Proceeding of 5th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN 2015)*, May 2015, Hersonissos, Crete Island, Greece.
- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, H.-P. Yin, G. Cumunel, P. Joyez and R. Caby, "Response of a Periodically Supported Beam on a Non-Uniform Viscoelastic Foundation subject to Moving Loads", *Proceeding of the third international conference on railway technology : research, development and maintenance (RAILWAY 2016)*, April 2016, Cagliari, Italy.
- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, H.-P. Yin and P. Argoul, "A frequency dependent iteration method for forced nonlinear oscillators", *DYNOLYN 2015*, Lyon, France.
- T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, J-L. Pochet, P. Joyez and R. Caby, "Dynamics of Infinite Beams on a Periodical Foundation : an Analytical Approach", *2016 EMI International conference*, October 2016, Metz, France.





# Bibliographie

1. ABDELGHANY, S., EWIS, K., MAHMOUD, A. & NASSAR, M. Dynamic response of non-uniform beam subjected to moving load and resting on non-linear viscoelastic foundation. *Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences* **4**, 192–199. ISSN : 23148535 (2015).
2. AL SHAER, A., DUHAMEL, D., SAB, K., FORET, G. & SCHMITT, L. Experimental settlement and dynamic behavior of a portion of ballasted railway track under high speed trains. *Journal of Sound and Vibration* **316**, 211–233. ISSN : 0022460X (2008).
3. AL SHEAR, A. *Analyse des deformations permanentes des voies ferrées ballastées - approche dynamique* thèse de doct. (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005).
4. ALLAIRE, G. *Analyse numérique et optimisation* (Les édition de l'Ecole Polytechnique, 2004).
5. ALSAIF, K & FODA, M. Vibration suppression of a beam structure by intermediate masses and springs. *Journal of Sound and Vibration* **256**, 629–645 (2002).
6. ANDERSEN, L., NIELSEN, S. & KIRKEGAARD, P. Finite element modelling of Euler beams on Kelvin Foundations exposed to moving loads in convected co-ordinates. *Journal of Sound and Vibration* **241**, 587–604. ISSN : 0022460X (2001).
7. ANSARI, M., ESMAILZADEH, E. & YOUNESIAN, D. Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin–Voight foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration* **330**, 1455–1471. ISSN : 0022460X (2011).
8. AYOUB, A. Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements. *Computers & Structures* **81**, 411–421. ISSN : 00457949 (2003).
9. BAGGENS, O. & RYDEN, N. Systematic errors in Impact-Echo thickness estimation due to near field effects. *NDT & E International* **69**, 16–27. ISSN : 09638695 (2015).
10. BARKE, D. Structural Health Monitoring in the Railway Industry : A Review. *Structural Health Monitoring* **4**, 81–93. ISSN : 1475-9217 (2005).
11. BELOTSEKOVSKIY, P. On the oscillations of infinite periodic beams subjected to a moving concentrated force. *Journal of Sound and Vibration* **193**, 705–712. ISSN : 0022-460X (1996).
12. BODET, L., ABRAHAM, O. & CLORENNEC, D. Near-offset effects on Rayleigh-wave dispersion measurements : Physical modeling. *Journal of Applied Geophysics* **68**, 95–103. ISSN : 09269851 (2009).
13. BONNET, G & LASSOUED, R. *Response of a periodically supported beam to a moving load from the superposition of Bloch waves* in *EURODYN* (2008).
14. BRACEWELL, R. *The Fourier transform and its applications* ISBN : 9780073039381 (McGraw-Hill Higher Education, 2000).

15. ÇALIM, F. F. Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **28**, 469–476. ISSN : 09977538 (2009).
16. CARRER, J., FLEISCHFRESSER, S., GARCIA, L. & MANSUR, W. Dynamic analysis of Timoshenko beams by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **37**, 1602–1616. ISSN : 09557997 (2013).
17. CASTRO JORGE, P., SIMÕES, F. & PINTO DA COSTA, A. Dynamics of beams on non-uniform nonlinear foundations subjected to moving loads. *Computers & Structures* **148**, 26–34. ISSN : 00457949 (2015).
18. CHEBLI, H., CLOUTEAU, D. & SCHMITT, L. Dynamic response of high-speed ballasted railway tracks : 3D periodic model and in situ measurements. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **28**, 118–131. ISSN : 02677261 (2008).
19. CHEN, G. W. Experimental and analytical modal analysis of a multiple-span motorway bridge. *23rd Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials II*, 919–924 (2014).
20. CHEN, J.-S. & CHEN, Y.-K. Steady state and stability of a beam on a damped tensionless foundation under a moving load. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **46**, 180–185. ISSN : 00207462 (2011).
21. CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity* 2<sup>e</sup> éd. (éd. CHRISTENSEN, R. M.) chap. 1 (Dover Publication, 2003).
22. CHUPIN, O., MARTIN, a., PIAU, J.-M. & HICHER, P.-Y. Calculation of the dynamic response of a viscoelastic railway structure based on a quasi-stationary approach. *International Journal of Solids and Structures*. ISSN : 00207683 (2014).
23. CIGADA, A. *et al.* Numerical modeling and experimental modal analysis of a concrete grand-stand structure to structural health monitoring purposes .
24. COCHELIN, B. & VERGEZ, C. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration* **324**, 243–262. ISSN : 0022460X (2009).
25. CUNHA, A. & CAETANO, E. Experimental Modal Analysis of Civil Engineering Structures. *Sound and Vibration*, 12–20. ISSN : 1541-0161 (2006).
26. D., T. & Y., Z. Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration* **198**, 149–169. ISSN : 0022460X (1996).
27. DESSI, D. & CAMERLENGO, G. Damage identification techniques via modal curvature analysis : Overview and comparison. *Mechanical Systems and Signal Processing* **52-53**, 181–205. ISSN : 08883270 (2015).
28. DIEHL, R., NOWACK, R. & HÖLZL, G. Solutions for Acoustical Problems With Ballastless Track. *Journal of Sound and Vibration* **231**, 899–906. ISSN : 0022460X (2000).
29. DING, H., CHEN, L.-Q. & YANG, S.-P. Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load. *Journal of Sound and Vibration* **331**, 2426–2442. ISSN : 0022460X (2012).
30. DING, H., SHI, K. L., CHEN, L. Q. & YANG, S. P. Dynamic response of an infinite Timoshenko beam on a nonlinear viscoelastic foundation to a moving load. *Nonlinear Dynamics* **73**, 285–298. ISSN : 0924090X (2013).

31. DING, H., YANG, Y., CHEN, L.-Q. & YANG, S.-P. Vibration of vehicle–pavement coupled system based on a Timoshenko beam on a nonlinear foundation. *Journal of Sound and Vibration* **333**, 6623–6636. ISSN : 0022460X (2014).
32. DUGUSH, Y. & EISENBERGER, M. Vibrations of Non-Uniform Continuous Beams Under Moving Loads. *Journal of Sound and Vibration* **254**, 911–926. ISSN : 0022460X (2002).
33. EFTEKHAR AZAM, S., MOFID, M. & AFGHANI KHORASKANI, R. Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass. *Scientia Iranica* **20**, 50–56. ISSN : 10263098 (2012).
34. FARRAR, C. R. Experimental modal analysis of reinforced concrete structures. *Experimental Techniques* **13**, 27–31. ISSN : 07328818 (1989).
35. FARRAR, C. R. Experimental modal analysis of reinforced concrete structures. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering* **9**, 27–31. ISSN : 07328818 (2015).
36. FARRAR, C. R., DOEBLING, S. W., CORNWELL, P. J. & STRASER, E. G. Variability of modal parameters measured on the Alamosa Canyon Bridge. *IMAC XV - 15th International Modal Analysis Conference*, 8. ISSN : 10466770 (1997).
37. FODA, M. & ABDULJABBAR, Z. a Dynamic Green Function Formulation for the Response of a Beam Structure To a Moving Mass. *Journal of Sound and Vibration* **210**, 295–306. ISSN : 0022460X (1998).
38. FRYBA, L. *Vibration of solids and structures under moving loads* (Noordhoff International Publishing, 1972).
39. GAO, Q. *et al.* Exact solutions for dynamic response of a periodic spring and mass structure. *Journal of Sound and Vibration* **331**, 1183–1190. ISSN : 0022460X (2012).
40. GRASSIE, S. Dynamic Modelling of Concrete Railway Sleepers. *Journal of Sound and Vibration* **187**, 799–813. ISSN : 0022460X (1995).
41. GRY, L & GONTIER, C. Dynamic modelling of railway track : a periodic model based on a generalized beam formulation. *Journal of Sound and Vibration* **199**, 531–558 (1997).
42. GUERIN, N. *Approche numérique et expérimentale du comportement du ballast des voies ferrées* thèse de doct. (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996).
43. HAMET, J.-F. Railway Noise : Use of the Timoshenko Model in Rail Vibration Studies. *Acustica* **85**, 54–62 (1999).
44. HAMMOUD, M. *Modélisations discrètes et continues de la voie ferrée ballastée* thèse de doct. (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2009).
45. HARRIS, J. W. & STOCKER, H. *Hanbook of Mathematics and Computational Science* ISBN : 0387947469 (Springer, 1998).
46. HASSAN, A. & JONES, S. Non-destructive testing of ultra high performance fibre reinforced concrete (UHPFRC) : A feasibility study for using ultrasonic and resonant frequency testing techniques. *Construction and Building Materials* **35**, 361–367. ISSN : 09500618 (2012).
47. HECKL, M. A. Coupled waves on a periodically supported Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration* **252**, 849–882. ISSN : 0022460X (2002).

48. HU, Q. & LAM, H. F. *Identification of the degradation of railway ballast under a concrete sleeper* in *The 2013 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM13)* (2013), 2824–2832.
49. HUSSEIN, M. & HUNT, H. A numerical model for calculating vibration from a railway tunnel embedded in a full-space. *Journal of Sound and Vibration* **305**, 401–431. ISSN : 0022460X (2007).
50. HUSSEIN, M. & HUNT, H. A numerical model for calculating vibration due to a harmonic moving load on a floating-slab track with discontinuous slabs in an underground railway tunnel. *Journal of Sound and Vibration* **321**, 363–374. ISSN : 0022460X (2009).
51. ICHIKAWA, M., MIYAKAWA, Y. & MATSUDA, a. Vibration Analysis of the Continuous Beam Subjected To a Moving Mass. *Journal of Sound and Vibration* **230**, 493–506. ISSN : 0022460X (2000).
52. ISMAIL, Z, RAZAK, H. A., IBRAHIM, Z, RAHMAN, A. G. A. & HIN, P. A. Detection of defects in reinforced concrete beams using modal data. *Proceedings of the International Modal Analysis Conference-IMAC 2*, 1358–1362 (2001).
53. JENSEN, J. On the shear coefficient in Timoshenko’s beam theory. *Journal of Sound and Vibration* **87**, 621–635 (1983).
54. JU, P. & XUE, X. Global residue harmonic balance method to periodic solutions of a class of strongly nonlinear oscillators. *Applied Mathematical Modelling* **38**, 6144–6152. ISSN : 0307904X (2014).
55. JU, P. & XUE, X. Global residue harmonic balance method for large-amplitude oscillations of a nonlinear system. *Applied Mathematical Modelling* **39**, 449–454. ISSN : 0307904X (2015).
56. K., M. A., CHANDRA, S. & SINGH, A. B. Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load. *Journal of Sound and Vibration* **291**, 1148–1169. ISSN : 0022460X (2006).
57. KAEWUNRUEN, S. & REMENNIKOV, A. M. Sensitivity analysis of free vibration characteristics of an in situ railway concrete sleeper to variations of rail pad parameters. *Journal of Sound and Vibration* **298**, 453–461. ISSN : 10958568 (2006).
58. KAEWUNRUEN, S. & REMENNIKOV, A. M. Investigation of free vibrations of voided concrete sleepers in railway track system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of Rail and Rapid Transit* **221**, 495–507. ISSN : 0954-4097 (2007).
59. KARGARNOVIN, M. & YOUNESIAN, D. Dynamics of Timoshenko beams on Pasternak foundation under moving load. *Mechanics Research Communications* **31**, 713–723. ISSN : 00936413 (2004).
60. KARGARNOVIN, M., YOUNESIAN, D., THOMPSON, D. & JONES, C. Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads. *Computers & Structures* **83**, 1865–1877. ISSN : 00457949 (2005).
61. KARKAR, S., COCHELIN, B. & VERGEZ, C. A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration* **332**, 968–977. ISSN : 0022460X (2013).

62. KARKAR, S., COCHELIN, B. & VERGEZ, C. A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration* **333**, 2554–2567. ISSN : 0022460X (2014).
63. KARLSTRÖM, A. An analytical model for ground vibrations from accelerating trains. *Journal of Sound and Vibration* **293**, 587–598. ISSN : 0022460X (2006).
64. KELTIE, R. & CHENG, C. Vibration reduction of a mass-loaded beam. *Journal of sound and Vibration* **187**, 213–228 (1995).
65. KIM, D., SEO, W. & LEE, K. IE–SASW method for nondestructive evaluation of concrete structure. *NDT & E International* **39**, 143–154. ISSN : 09638695 (2006).
66. KIM, J.-T. & STUBBS, N. Improved damage identification method based on modal information. *Journal of Sound and Vibration* **252**, 223–238. ISSN : 0022460X (2002).
67. KODAI, M., TSUTOMU, W. & MASAMICHI, S. *Damage detection method for sleepers based on vibration in 6th International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures* **24** (2015). ISBN : 2015240500.
68. KUMARAN, G., MENON, D. & NAIR, K. K. Dynamic studies of railtrack sleepers in a track structure system. *Journal of Sound and Vibration* **268**, 485–501. ISSN : 0022460X (2003).
69. LABRYER, A. & ATTAR, P. A harmonic balance approach for large-scale problems in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures* **88**, 1002–1014. ISSN : 00457949 (2010).
70. LABUSCHAGNE, a., van RENSBURG, N. & a.J. van der MERWE. Comparison of linear beam theories. *Mathematical and Computer Modelling* **49**, 20–30. ISSN : 08957177 (2009).
71. LAM, H. F., HU, Q. & WONG, M. T. The Bayesian methodology for the detection of railway ballast damage under a concrete sleeper. *Engineering Structures* **81**, 289–301. ISSN : 01410296 (2014).
72. LAM, H., WONG, M. & YANG, Y. A feasibility study on railway ballast damage detection utilizing measured vibration of in situ concrete sleeper. *Engineering Structures* **45**, 284–298. ISSN : 01410296 (2012).
73. LE PETIT, T. T. H. *Contribution à la détection et à la localisation d'endommagements par des méthodes d'analyse dynamique des modifications structurales d'une poutre avec tension. Application au suivi des câbles du génie civil* thèse de doct. (Université Paris-Est, 2014).
74. LEE, H. P. Dynamic response of a beam with a moving mass. *Journal of Sound and Vibration* **21**, 549. ISSN : 1530-0374 (1996).
75. LEE, H. P. Transverse vibration of a Timoshenko beam acted on by an accelerating mass. *Applied Acoustics* **47**, 319–330 (1996).
76. LEE, H. The dynamic response of a timoshenko beam subjected to a moving mass. *Journal of Sound and Vibration* **28**, 748. ISSN : 1939-1676 (1996).
77. LIANG, R. Y., CHOY, F. K. & HU, J. Detection of cracks in beam structures using measurements of natural frequencies. *Journal of the Franklin Institute* **328**, 505–518. ISSN : 00160032 (1991).
78. LING, F. & WU, X. Fast galerkin method and its application to determine periodic solutions of non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **22**, 89–98. ISSN : 00207462 (1987).

79. LIU, L., THOMAS, J., DOWELL, E., ATTAR, P. & HALL, K. A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approaches for a Duffing oscillator. *Journal of Computational Physics* **215**, 298–320. ISSN : 00219991 (2006).
80. LIU, L., DOWELL, E. & THOMAS, J. A high dimensional harmonic balance approach for an aeroelastic airfoil with cubic restoring forces. *Journal of Fluids and Structures* **23**, 351–363. ISSN : 08899746 (2007).
81. LUESCHEN, G., BERGMAN, L. & MCFARLAND, D. Green's functions for uniform Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* **194**, 93–102 (1996).
82. MAI, S. H. *Étude de dégradation des voies ferrées urbaines* thèse de doct. (Université Paris-Est, 2011).
83. MAJKA, M. & HARTNETT, M. Effects of speed, load and damping on the dynamic response of railway bridges and vehicles. *Computers & Structures* **86**, 556–572. ISSN : 00457949 (2008).
84. MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing* ISBN : 0123743702 (Academic Press, 2009).
85. MAZILU, T., DUMITRIU, M. & TUDORACHE, C. On the dynamics of interaction between a moving mass and an infinite one-dimensional elastic structure at the stability limit. *Journal of Sound and Vibration* **330**, 3729–3743. ISSN : 0022460X (2011).
86. MAZILU, T., DUMITRIU, M., TUDORACHE, C. & SEBEŞAN, M. Using the Green's functions method to study wheelset/ballasted track vertical interaction. *Mathematical and Computer Modelling* **54**, 261–279. ISSN : 08957177 (2011).
87. MEAD, D. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *Journal of Sound and Vibration* **11**, 181–197 (1970).
88. MEAD, D. Space-harmonic analysis of periodically supported beam : reponse to convected loading. *Journal of Sound and Vibration* **14**, 525–541 (1971).
89. MEAD, D. A new method of analyzing wave propagation in periodic structures ; Applications to periodic timoshenko beams and stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration* **104**, 9–27. ISSN : 0022460X (1986).
90. MEAD, D. & YAMAN, Y. The response of infinite periodic beams to point harmonic forces : a flexural wave analysis. *Journal of Sound and Vibration* **141**, 465–484 (1991).
91. MEAD, D. Wave Propagation in Continuous Periodic Structures : Research Contributions From Southampton, 1964–1995. *Journal of Sound and Vibration* **190**, 495–524. ISSN : 0022460X (1996).
92. MEDINA, R. & BAYÓN, a. Elastic constants of a plate from impact-echo resonance and Rayleigh wave velocity. *Journal of Sound and Vibration* **329**, 2114–2126. ISSN : 0022460X (2010).
93. MEDINA, R. & GARRIDO, M. Improving impact-echo method by using cross-spectral density. *Journal of Sound and Vibration* **304**, 769–778. ISSN : 0022460X (2007).
94. MEHRI, B., DAVAR, A & RAHMANI, O. Dynamic Green function solution of beams under a moving load with different boundary conditions. *Scientia Iranica* **16**, 273–279 (2009).
95. MERCER, C. A. Response of a multi-supported beam to a random pressure field. *Journal of Sound and Vibration* **2** (1965).

96. METRIKINE, A. V. & POPP, K. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space. *European Journal of Mechanics - A/Solids* **18**, 679–701. ISSN : 09977538 (1999).
97. MIAO, S., VEERMAN, R., KOENDERS, E. & KNOBBE, A. Modal analysis of a concrete highway bridge : Structural calculations and vibration-based results. *Proceedings of the 6th International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure* (2013).
98. MICHALTSOS, G. Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of Sound and vibration* **258**, 359–372 (2002).
99. MICKENS, R. A generalization of the method of harmonic balance. *Journal of Sound and Vibration* **111**, 515–518. ISSN : 0022460X (1986).
100. MICKENS, R. Comments on “A generalized Galerkin’s method for non-linear oscillators”. *Journal of Sound and Vibration* **118**, 561–564. ISSN : 0022460X (1987).
101. MICKENS, R. Iteration procedure for determining approximate solutions to non-linear oscillator equations. *Journal of Sound and Vibration* **116**, 185–187. ISSN : 0022460X (1987).
102. MICKENS, R. A generalized iteration procedure for calculating approximations to periodic solutions of ”truly nonlinear oscillators”. *Journal of Sound and Vibration* **287**, 1045–1051. ISSN : 0022460X (2005).
103. MICKENS, R. E. Harmonic balance and iteration calculations of periodic solutions to  $\ddot{y} + y^{-1} = 0$ . *Journal of Sound and Vibration* **306**, 968–972. ISSN : 0022460X (2007).
104. MIRZABEIGY, A. & MADOLIAT, R. Large amplitude free vibration of axially loaded beams resting on variable elastic foundation. *Alexandria Engineering Journal*. ISSN : 11100168 (2016).
105. MUNJAL, M. L & HECKL, M. Vibrations of a periodic rail-sleeper system excited by an oscillating stationary transvers force. *Journal of Sound and Vibration* **81**, 491–500 (1982).
106. MUSCOLINO, G. & PALMERI, A. Response of beams resting on viscoelastically damped foundation to moving oscillators. *International Journal of Solids and Structures* **44**, 1317–1336. ISSN : 00207683 (2007).
107. NAYFEH, A. H. *Introduction to perturbation techniques* (éd. WILEY-VCH) (Wiley Classics Library Edition, 1993).
108. NAYFEH, A. H. & MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations* (éd. WILEY-VCH) (Wiley Classics Library Edition, 1995).
109. NDAMBI, J. *et al.* Comparison of techniques for modal analysis of concrete structures. *Engineering Structures* **22**, 1159–1166. ISSN : 01410296 (2000).
110. NGUYEN, V.-H. *Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles* thèse de doct. (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008).
111. NGUYEN, V.-H. & DUHAMEL, D. Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part II : Infinite beam under moving harmonic loads. *Computers & Structures* **86**, 2056–2063. ISSN : 00457949 (2008).
112. NORDBORG, A. Vertical Rail Vibrations : Parametric Excitation. *Acustica* **84**, 289–300. ISSN : 0001-7884 (1998).



113. NORDBORG, A. Vertical Rail Vibrations : Pointforce Excitation. *Acustica* **84**, 280–288 (1998).
114. OLIVEIRA, S., TOADER, A.-M. & VIEIRA, P. Damage identification in a concrete dam by fitting measured modal parameters. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* **13**, 2888–2899. ISSN : 14681218 (2012).
115. OREGUI, M., LI, Z. & DOLLEVOET, R. An investigation into the modeling of railway fastening. *International Journal of Mechanical Sciences* **92**, 1–11. ISSN : 00207403 (2015).
116. OREGUI, M., LI, Z. & DOLLEVOET, R. Identification of characteristic frequencies of damaged railway tracks using field hammer test measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing* **54**, 224–242. ISSN : 10961216 (2015).
117. PAIXÃO, A., FORTUNATO, E. & CALÇADA, R. Transition zones to railway bridges : Track measurements and numerical modelling. *Engineering Structures* **80**, 435–443. ISSN : 01410296 (2014).
118. PANDEY, A. & BISWAS, M. Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility. *Journal of Sound and Vibration* **169**, 3–17. ISSN : 0022460X (1994).
119. PANDEY, A., BISWAS, M. & SAMMAN, M. Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration* **145**, 321–332. ISSN : 0022460X (1991).
120. PEŠIĆ, N., ŽIVANOVIĆ, S., DENNIS, J. & HARGREAVES, J. Experimental and finite element dynamic analysis of incrementally loaded reinforced concrete structures. *Engineering Structures* **103**, 15–27. ISSN : 01410296 (2015).
121. PLACHÝ, T & POLÁK, M. Nondestructive Damage Detection Based on Modal Analysis. *Acta Polytechnica* **44** (2004).
122. PRASAD, D. R. & SESHU, D. R. Study on change in modal parameters of RC beams due to fatigue type damage. *Asian Journal of Civil Engineering* **11**, 521–532. ISSN : 15630854 (2010).
123. QUIVIGER, A. *et al.* Characterisation Ultrasonore de Fissures dans les Bétons Méthodes Linéaires et Non Linéaires. *10ème Congrès Français d'Acoustique*, – (2010).
124. RADZIEŃSKI, M., KRAWCZUK, M. & PALACZ, M. Improvement of damage detection methods based on experimental modal parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing* **25**, 2169–2190. ISSN : 08883270 (2011).
125. REINHARDT, H. & CORNELISSEN, H. Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading. *Cement and Concrete Research* **14**, 263–270. ISSN : 00088846 (1984).
126. REMENNIKOV, A. & KAEWUNRUEN, S. Experimental investigation on dynamic railway sleeper/ballast interaction. *Experimental Mechanics* **46**, 57–66. ISSN : 00144851 (2006).
127. RHAYMA, N., BRESSOLETTE, P., BREUL, P., FOGLI, M. & SAUSSINE, G. A probabilistic approach for estimating the behavior of railway tracks. *Engineering Structures* **33**, 2120–2133. ISSN : 01410296 (2011).
128. RHAYMA, N., BRESSOLETTE, P., BREUL, P., FOGLI, M. & SAUSSINE, G. Reliability analysis of maintenance operations for railway tracks. *Reliability Engineering & System Safety* **114**, 12–25. ISSN : 09518320 (2013).
129. RICCI, L. *Modélisations discrètes et continues de la voie ferrée ballastée* thèse de doct. (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006).

130. RUOTOLO, R. & SURACE, C. Damage assessment of multiple cracked beams : numerical results and experimental validation. *Journal of Sound and Vibration* **206**, 567–588. ISSN : 0022460X (1997).
131. SALAWU, O. Detection of structural damage through changes in frequency : a review. *Engineering Structures* **19**, 718–723. ISSN : 01410296 (1997).
132. SALENÇON, J. *Mécanique des milieux continus* (Les édition de l'Ecole Polytechnique, 2004).
133. SAPOUNTZAKIS, E. & KAMPITSIS, A. Nonlinear response of shear deformable beams on tensionless nonlinear viscoelastic foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration* **330**, 5410–5426. ISSN : 0022460X (2011).
134. SCHUBERT, F., WIGGENHAUSER, H. & LAUSCH, R. On the accuracy of thickness measurements in impact-echo testing of finite concrete specimens—numerical and experimental results. *Ultrasonics* **42**, 897–901. ISSN : 0041-624X (2004).
135. SHAHRAKI, M., WARNAKULASOORIYA, C. & WITT, K. J. Numerical study of transition zone between ballasted and ballastless railway track. *Transportation Geotechnics* **3**, 58–67. ISSN : 22143912 (2015).
136. SHENG, X. & LI, M. Propagation constants of railway tracks as a periodic structure. *Journal of Sound and Vibration* **299**, 1114–1123. ISSN : 0022460X (2007).
137. SHENG, X., JONES, C. & THOMPSON, D. Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads. *Journal of Sound and Vibration* **282**, 125–149. ISSN : 0022460X (2005).
138. SHENG, X., LI, M., JONES, C. & THOMPSON, D. Using the Fourier-series approach to study interactions between moving wheels and a periodically supported rail. *Journal of Sound and Vibration* **303**, 873–894. ISSN : 0022460X (2007).
139. SHI, Z. *Crack Analysis in Structural Concrete Theory and Applications* **9**, 1689–1699. ISBN : 9788578110796 (Elsevier, Oxford, UK, 2009).
140. SRINIVAS, V., SASMAL, S., RAMANJANEYULU, K. & JEYASEHAR, C. A. Influence of test conditions on modal characteristics of reinforced concrete structures under different damage scenarios. *Archives of Civil and Mechanical Engineering* **13**, 491–505. ISSN : 16449665 (2013).
141. STASZEWSKI, W. identification of damping in MDOF systems using time scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration* **203**, 283–305. ISSN : 0022460X (1997).
142. SUNG, S., JUNG, H. & JUNG, H. Damage detection for beam-like structures using the normalized curvature of a uniform load surface. *Journal of Sound and Vibration* **332**, 1501–1519. ISSN : 0022460X (2013).
143. THOMPSON, D., JONES, C., WATERS, T. & FARRINGTON, D. A tuned damping device for reducing noise from railway track. *Applied Acoustics* **68**, 43–57. ISSN : 0003682X (2007).
144. URABE, M. Periodic solutions of differential systems, Galerkin's procedure and the method of averaging. *Journal of Differential Equations* **2**, 265–280. ISSN : 00220396 (1966).
145. URABE, M. & REITER, A. Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **14**, 107–140. ISSN : 0022247X (1966).

146. VARANDAS, J. N., HÖLSCHER, P. & a.G. SILVA, M. Dynamic behaviour of railway tracks on transitions zones. *Computers & Structures* **89**, 1468–1479. ISSN : 00457949 (2011).
147. VOSTROUKHOV, A. V. & METRIKINE, A. V. Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track. *International Journal of Solids and Structures* **40**, 5723–5752. ISSN : 00207683 (2003).
148. WALTER, W. *Ordinary differential equations* ISBN : 0387984593 (Springer, 1998).
149. WANG, Z., LIN, R. & LIM, M. Structural damage detection using measured FRF data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **147**, 187–197. ISSN : 00457825 (1997).
150. XIA, H. & ZHANG, N. Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains. *Computers & Structures* **83**, 1891–1901. ISSN : 00457949 (2005).
151. YAN, G., DUAN, Z., OU, J. & DE STEFANO, A. Structural damage detection using residual forces based on wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing* **24**, 224–239. ISSN : 08883270 (2010).
152. YANG, J., LEI, Y, LIN, S & HUANG, N. Hilbert-Huang based approach for structural damage detection. *Journal of engineering mechanics* **130**, 85–95. ISSN : 0733-9399 (2004).
153. YAVARI, A., NOURI, M. & MOFID, M. Discrete element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass. *Advances in engineering software* **33**, 143–153 (2002).
154. YUNMIN, C. & CHANGJING, W. Steady-state response of a timoshenko beam on an elastic half-space under a moving load. *Acta Mechanica Solida Sinica* **19**, 26–39. ISSN : 08949166 (2006).
155. ZHANG, J., STANG, H. & LI, V. C. Fatigue life prediction of fiber reinforced concrete under flexural load. *International Journal of Fatigue* **21**, 1033–1049. ISSN : 01421123 (1999).
156. ZONG, Z.-H., JAISHI, B., GE, J.-P. & REN, W.-X. Dynamic analysis of a half-through concrete-filled steel tubular arch bridge. *Engineering Structures* **27**, 3–15. ISSN : 01410296 (2005).