



# Etude d'algorithmes de reconstruction ultrasonore dans le domaine de Fourier pour l'imagerie rapide 2D et 3D en contrôle non- destructif

Lucas Merabet

## ► To cite this version:

Lucas Merabet. Etude d'algorithmes de reconstruction ultrasonore dans le domaine de Fourier pour l'imagerie rapide 2D et 3D en contrôle non- destructif. Physique [physics]. Université Paris sciences et lettres, 2019. Français. NNT : 2019PSLET060 . tel-02965874

**HAL Id: tel-02965874**

**<https://pastel.hal.science/tel-02965874>**

Submitted on 13 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée à l'ESPCI Paris  
et au CEA List

**Etude d'algorithmes de reconstruction ultrasonore dans le  
domaine de Fourier pour l'imagerie rapide 2D et 3D en  
contrôle non-destructif**

Soutenue par

**Lucas MERABET**

Le 20 Mars 2019

École doctorale n°564

**Ecole Doctorale Physique  
en Ile-de-France**

Spécialité

**Physique**

**Composition du jury :**

Joseph MOYSAN  
Professeur des universités, Aix-Marseilles Université *Président du jury*

Claire PRADA  
Directrice de recherche, ESPCI Paris, CNRS *Directrice de thèse*

Odile ABRAHAM  
Ingénieure divisionnaire des travaux publics de l'Etat, IFSTTAR *Rapporteuse*

Hervé LIEBGOTT  
Professeur des universités, INSA Lyon *Rapporteur*

Mathieu PERNOT  
Directeur de recherche, ESPCI Paris, INSERM *Rapporteur*

Samuel RODRIGUEZ  
Maître de conférences, Université de Bordeaux *Examineur*

Sébastien ROBERT  
Ingénieur, CEA List *Examineur*



## Remerciements

J'ai réalisé ma thèse au CEA List au *Département Imagerie et Simulation pour le Contrôle* (DISC), au *Laboratoire Instrumentation et Capteurs* (LIC). J'adresse tout d'abord mes remerciements à François Cartier, chef du LIC, Pierre Calmon, directeur de recherche au DISC, et Clarisse Poitdevin, chef du DISC, pour m'avoir accueilli au département et pour avoir prolongé mon contrat de thèse de quelques mois supplémentaires. Ceci m'a permis de déposer un brevet en décembre 2018, de finaliser un article de revue, et de commencer à travailler sur l'implémentation des méthodes que j'ai développées durant ma thèse, en collaboration avec la société Eddyfi. Ces derniers mois ont été très importants pour moi.

Je remercie également Odile Abraham et Hervé Liebgott d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs remarques sur le manuscrit ont nourri des questionnements nouveaux pour la soutenance et ont donné lieu à une séance de questions enrichissante. Merci à Joseph Moysan ainsi que Samuel Rodriguez pour leurs rôles de président du jury et d'examineur. Merci à Mathieu Pernot, qui a également accepté d'être examinateur, et qui m'a permis de présenter mes travaux au laboratoire de Physique pour la Médecine, d'échanger avec ses collaborateurs, et de réaliser des mesures, bien que ces dernières n'aient finalement pas abouti.

Je tiens maintenant à remercier chaleureusement mes encadrants Sébastien Robert et Claire Prada. Leur accompagnement, leurs conseils avisés et leur rigueur bienveillante m'ont permis d'effectuer ma thèse dans de très bonnes conditions. Je vous remercie de m'avoir laissé beaucoup d'autonomie sur les sujets de développements et de m'avoir guidé pour restituer mon travail de manière claire et pédagogique. Votre investissement pendant les périodes de rédaction d'articles ou du manuscrit a été crucial et très apprécié. Pour tout cela, je vous en suis reconnaissant. Merci tout particulièrement à Sébastien pour la minutie avec laquelle tu as relu et corrigé mes communications.

Merci aux personnes qui m'ont fourni une aide précieuse, directement ou indirectement, durant ma thèse : Guillaume Daniel et Jean-Baptiste Boy pour leur patience sur les aspects expérimentaux ; Hamza Chouh et Vincent Bergeaud, avec qui j'ai eu l'occasion de travailler à partir de janvier 2019 sur l'implémentation parallèle des méthodes  $f-k$  ; Jérôme Laurent pour ses conseils précieux sur l'après-thèse, Alain Lhémery pour son rôle de parrain au département, et Arthur Chavignon du laboratoire de Physique pour la Médecine pour son expertise en graphisme. Enfin, merci aussi à tous mes collègues du LIC avec lesquels j'ai partagé de bons moments, aussi bien au CEA qu'à l'extérieur.

Vient maintenant le moment de remercier mes co-bureaux. Merci d'abord à Corentin Ménard, avec qui j'ai partagé mon bureau de janvier 2018 à la fin de ma thèse, pour son aide et sa réactivité sur les questions physiques, algorithmiques, ou musicales. Un merci tout particulier à Léonard Le Jeune et Eduardo Lopez Villaverde, qui étaient respectivement en fin de troisième et de deuxième année de thèse quand je suis arrivé au CEA. Ils m'ont accueilli à bras ouverts et m'ont aidé à apprivoiser le domaine d'étude dans lequel je me suis lancé. J'ai eu l'occasion de partager mon bureau avec Eduardo pendant un an, et il a toujours trouvé des réponses à mes questions ou des solutions à mes problèmes scientifiques et administratifs : un concurrent de taille à Google.

Enfin, un grand merci à mes parents pour leur soutien continu tout au long de ma scolarité et de ma thèse, et pour avoir fait la chasse aux dernières fautes d'orthographe dans mon manuscrit.



## Résumé

Ce travail de thèse s'intéresse à l'imagerie ultrasonore multi-éléments pour le Contrôle Non-Destructif (CND), et vise à accélérer l'imagerie échographique en 2D et 3D. Les méthodes étudiées s'inspirent des algorithmes de reconstruction dans le domaine de Fourier ( $f$ - $k$ ) en imagerie sismique. La littérature montre que ces méthodes offrent un avantage numérique par rapport à celles dans le domaine temporel basées sur un principe de focalisation en émission/réception. D'autre part, l'essor des transducteurs multi-éléments a permis d'explorer de nouveaux modes d'émission, comme les ondes planes en imagerie médicale ultra-rapide. Dans cette thèse, on se propose de combiner les algorithmes rapides du domaine  $f$ - $k$  avec des émissions planes pour calculer des images aussi rapidement que possible. Ces algorithmes sont adaptés pour traiter des configurations d'inspection usuelles en CND. Une analyse des complexités algorithmiques, des temps de calcul et de la qualité des reconstructions est menée en 2D. La comparaison avec la méthode temporelle Plane Wave Imaging (PWI) démontre un avantage certain pour l'imagerie  $f$ - $k$ . Ces avantages sont confirmés en 3D où l'on démontre que cette dernière améliore la qualité d'image tout en réduisant le temps de calcul d'un facteur allant jusqu'à 300 par rapport à PWI. Enfin, la méthode  $f$ - $k$  est généralisée à l'imagerie multimodale pour la caractérisation de fissures. La théorie est d'abord présentée, puis on montre qu'il est possible d'améliorer la qualité des reconstructions grâce à un fenêtrage des fréquences spatiales de l'image. Ce filtre spectral élimine des artefacts d'imagerie liés à des échos de géométrie, améliorant ainsi le contraste des images.

## Abstract

This research work deals with ultrasound imaging with transducer arrays for Non Destructive Testing (NDT), and aims at speeding up the formation of 2D and 3D images. The methods studied in this manuscript are inspired from reconstruction algorithms in the Fourier frequency-wavenumber ( $f$ - $k$ ) domain introduced in seismic imaging. The literature shows that  $f$ - $k$  methods offer a numerical advantage over the more conventional time-domain focusing algorithms. On the other hand, the rise of transducer arrays has allowed for the exploration of new emission modes, such as plane wave emissions in ultra-fast medical imaging. In this thesis, we propose to combine fast  $f$ - $k$  algorithms with plane wave emissions to form 2D and 3D images as fast as possible. These algorithms are adapted to deal with realistic NDT inspection configurations. Analyses of algorithmic complexities, computation times, and image qualities are carried out in 2D, and a comparison with the time-domain Plane Wave Imaging (PWI) shows a clear advantage for  $f$ - $k$  methods. This is confirmed in 3D, where we show that Fourier domain algorithms improve image quality while reducing computation times by a factor up to 300 compared to PWI. Finally, the  $f$ - $k$  methods are generalized to multi-modal imaging to characterize cracks. The theory, which accounts for mode conversions and reflections at the specimen interfaces, is first presented, and we then demonstrate that it is possible to improve the reconstruction quality thanks to spectral windowing in the image frequency-domain. This spectral filter cancels undesired artifacts caused by interface echoes, and improves the image contrast.

# Table des matières

|           |                                                                             |           |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>  | <b>État de l'art en imagerie multi-éléments</b>                             | <b>1</b>  |
| I.1       | Généralités . . . . .                                                       | 2         |
| I.1.1     | Capteurs multi-éléments et systèmes d'acquisition . . . . .                 | 2         |
| I.1.2     | Principe des méthodes d'imagerie "delay and sum" . . . . .                  | 4         |
| a)        | Imagerie B-Scan . . . . .                                                   | 4         |
| b)        | Imagerie S-Scan . . . . .                                                   | 5         |
| c)        | Émission d'ondes planes . . . . .                                           | 6         |
| d)        | Focalisation en tous points . . . . .                                       | 6         |
| I.1.3     | Paramètres importants en imagerie multi-éléments . . . . .                  | 7         |
| a)        | Influence du pas inter-éléments . . . . .                                   | 7         |
| b)        | Résolutions axiale et latérale . . . . .                                    | 8         |
| c)        | Profondeur de champ . . . . .                                               | 8         |
| I.2       | Imagerie dans le domaine temporel par focalisation en tous points . . . . . | 8         |
| I.2.1     | Imagerie mono-statique : Synthetic Aperture Focusing Technique . . . . .    | 9         |
| I.2.2     | Imagerie multi-statique : Total Focusing Method . . . . .                   | 10        |
| I.3       | Imagerie dans le domaine $f-k$ . . . . .                                    | 13        |
| I.3.1     | Rappels sur la transformée de Fourier et conventions adoptées . . . . .     | 13        |
| a)        | Transformée de Fourier et notations continues . . . . .                     | 13        |
| b)        | Notations discrètes . . . . .                                               | 14        |
| I.3.2     | Algorithmes de reconstruction en imagerie mono-statique . . . . .           | 14        |
| a)        | Méthode de Stolt . . . . .                                                  | 15        |
| b)        | Algorithme du nombre d'onde . . . . .                                       | 17        |
| c)        | Implémentation et complexité algorithmique . . . . .                        | 19        |
| I.3.3     | Algorithme du nombre d'onde en imagerie multi-statique . . . . .            | 22        |
| I.3.4     | Théorie de Lu en lien avec l'algorithme du nombre d'onde . . . . .          | 24        |
| I.4       | Inverse Wavefield Extrapolation (IWEX) . . . . .                            | 26        |
| a)        | Extrapolation de champ inverse en imagerie mono-statique . . . . .          | 27        |
| b)        | Extrapolation de champ inverse en imagerie multi-statique . . . . .         | 27        |
| I.5       | Bilan et comparaison des performances des méthodes d'imagerie . . . . .     | 28        |
| I.6       | Conclusion du chapitre . . . . .                                            | 32        |
| <b>II</b> | <b>Algorithmes <math>f-k</math> pour l'imagerie par ondes planes</b>        | <b>33</b> |
| II.1      | Théorie des méthodes $f-k$ pour l'imagerie 2D par ondes planes . . . . .    | 34        |
| II.1.1    | Rappels sur l'imagerie Plane Wave Imaging . . . . .                         | 34        |
| II.1.2    | Adaptation de la méthode de Stolt à des émissions planes . . . . .          | 37        |

|            |                                                                                                                        |           |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| a)         | Définition du milieu des réflecteurs explosifs pour des émissions planes . . . . .                                     | 37        |
| b)         | Reconstruction d'une image . . . . .                                                                                   | 40        |
| II.1.3     | Méthode de Lu appliquée à des émissions planes . . . . .                                                               | 42        |
| II.1.4     | Précautions concernant le repliement de spectre . . . . .                                                              | 46        |
| II.1.5     | Évaluation des trois méthodes : PWI, Stolt et Lu . . . . .                                                             | 48        |
| a)         | Comparaison des images et des temps de calcul . . . . .                                                                | 48        |
| b)         | Interprétation des résultats par des développements asymptotiques des équations d'imagerie . . . . .                   | 49        |
| II.2       | Imagerie sous une interface eau/acier . . . . .                                                                        | 51        |
| II.2.1     | PWI : algorithme de calcul des temps de vol à travers l'interface . . . . .                                            | 51        |
| II.2.2     | Méthodes fréquentielles : extrapolation du champ acoustique du réseau jusqu'à l'interface du milieu physique . . . . . | 52        |
| II.2.3     | Résultats avec des données simulées et aptitudes des méthodes à former des images très étendues . . . . .              | 55        |
| II.3       | Imagerie 3D dans le domaine $f-k$ avec des capteurs matriciels . . . . .                                               | 56        |
| II.3.1     | Émissions planes avec un réseau matriciel et reconstruction PWI en 3D . . . . .                                        | 58        |
| II.3.2     | Généralisation du principe des réflecteurs explosifs en 3D pour la méthode de Stolt . . . . .                          | 60        |
| II.3.3     | Extension de la méthode de Lu en 3D et complexités des algorithmes $f-k$ . . . . .                                     | 63        |
| a)         | Equations d'imagerie . . . . .                                                                                         | 63        |
| b)         | Complexités algorithmiques . . . . .                                                                                   | 66        |
| II.3.4     | Résultats en imagerie 3D . . . . .                                                                                     | 67        |
| a)         | Imagerie de porosités dans un petit volume centré sous le réseau . . . . .                                             | 67        |
| b)         | Imagerie d'entailles dans un volume de section horizontale $5D \times 5D$ . . . . .                                    | 71        |
| II.4       | Conclusion du chapitre . . . . .                                                                                       | 74        |
| <b>III</b> | <b>Généralisation à l'imagerie f-k multi-modes</b> . . . . .                                                           | <b>77</b> |
| III.1      | Rappels sur l'imagerie PWI multi-modes . . . . .                                                                       | 78        |
| III.2      | Généralisation de la méthode de Lu à l'imagerie multi-modes . . . . .                                                  | 80        |
| III.2.1    | Modèle direct de propagation et transformation spectrale pour un mode arbitraire $P_1P_2dP_3$ . . . . .                | 81        |
| a)         | Modèle direct en demi-bond . . . . .                                                                                   | 81        |
| b)         | Transformation spectrale . . . . .                                                                                     | 82        |
| III.2.2    | Résolution du problème inverse pour différents modes de reconstruction . . . . .                                       | 83        |
| a)         | Modes non convertis $P_1LdL$ et $P_1TdT$ . . . . .                                                                     | 84        |
| b)         | Modes convertis $P_1LdT$ . . . . .                                                                                     | 85        |
| c)         | Modes convertis $P_1TdL$ . . . . .                                                                                     | 86        |
| d)         | Modes bond complet $P_1P_2P_3dP_4P_5$ . . . . .                                                                        | 89        |
| III.3      | Résultats expérimentaux en imagerie 2D multi-modes . . . . .                                                           | 91        |
| III.3.1    | Comparaison des images PWI et de Lu pour différents modes de reconstruction . . . . .                                  | 92        |

|                                                                                               |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| III.3.2 Fenêtrage spectral et élimination des fréquences de l'image non pertinentes . . . . . | 95         |
| a) Application du fenêtrage spectral au mode $LLdT$ . . . . .                                 | 97         |
| b) Application du fenêtrage spectral au mode $TTdL$ . . . . .                                 | 99         |
| III.4 Application à l'imagerie multi-modes 3D . . . . .                                       | 101        |
| III.4.1 Equations d'imagerie et fenêtrage . . . . .                                           | 101        |
| III.4.2 Application à l'imagerie des trois entailles avec le mode $LLdL$ . . . . .            | 104        |
| a) Zones effectives spatiales et fréquentielles, et influence sur les images $f-k$ . . . . .  | 104        |
| b) Comparaison avec PWI . . . . .                                                             | 107        |
| III.5 Conclusion du chapitre . . . . .                                                        | 109        |
| <b>A Annexe</b> . . . . .                                                                     | <b>111</b> |
| A.1 Identité de Weyl . . . . .                                                                | 111        |
| A.2 Détermination du spectre image avec l'algorithme de Stolt . . . . .                       | 112        |
| A.3 Calcul des amplitudes asymptotiques des images $f-k$ en imagerie 2D . . . . .             | 115        |
| A.4 Calcul des amplitudes asymptotiques des images $f-k$ en imagerie 3D . . . . .             | 117        |
| A.5 Volume utile dans l'espace des fréquences image après fenêtrage spectral . . . . .        | 117        |
| <b>Bibliographie</b> . . . . .                                                                | <b>119</b> |



# Introduction générale

## Contexte et objectifs

Le Contrôle Non Destructif (CND) par ultrasons joue un rôle important dans de nombreux secteurs industriels tels que l'énergie, le transport (automobile, aéronautique) ou encore le génie civil. Il vise à inspecter et assurer la santé d'assemblages mécaniques sans altération de leurs propriétés physiques et mécaniques en détectant et en caractérisant des défauts surfaciques ou internes (porosités, fissures) pouvant mettre en péril l'intégrité de la structure. Les capteurs piézoélectriques multi-éléments sont désormais très répandus dans l'industrie pour améliorer la qualité de l'imagerie échographique et la précision/fiabilité des diagnostics. Cette technologie offre bien d'autres avantages par rapport aux sondes mono-élément, comme la réduction des coûts en CND en accélérant les cadences d'inspection, ou la possibilité de contrôler des structures de géométries complexes, par exemple.

L'usage le plus courant de la technologie multi-éléments est l'imagerie 2D en temps-réel, dont l'intérêt est de s'affranchir du procédé plus contraignant consistant à déplacer une sonde mono-élément avec un axe de translation pour former une image. Si l'imagerie 2D a longtemps été limitée à l'échographie de type B-scan ou S-scan, des méthodes récentes plus avancées ont été implémentées dans les systèmes temps-réel. La plus commune aujourd'hui est la Total Focusing Method (TFM), où les éléments sont excités un par un pour enregistrer la matrice des réponses impulsionnelles inter-éléments [1, 2]. Les signaux contenus dans cette matrice sont ensuite post-traités dans le domaine temporel pour focaliser en émission et réception en tous points de la zone d'intérêt [3, 4]. Comparé à l'imagerie conventionnelle B-scan ou S-scan basée sur des émissions focalisées, la TFM offre une focalisation et une résolution spatiale optimales dans toute la zone de reconstruction. Plus récemment, la méthode par émission d'ondes planes Plane Wave Imaging (PWI), issue de l'imagerie médicale [5], a été généralisée dans le cadre de la thèse de L. Le Jeune au List [6, 7] pour traiter des problématiques en CND, comme l'imagerie multi-modes de fissures, ou les reconstructions sous des interfaces complexes eau/acier. L'un des avantages des émissions Planes est qu'une image de bonne qualité peut être formée avec quelques émissions seulement. La cadence d'imagerie est accrue par rapport à TFM car cette dernière nécessite autant d'émissions que d'éléments du réseau. Aujourd'hui, les systèmes multi-voies en CND sont suffisamment rapides pour la plupart des applications temps-réel où les réseaux n'excèdent pas 64 éléments.

Contrairement au domaine médical où un nombre croissant d'échographes sont capables de réaliser des reconstructions 3D en temps-réel [8, 9, 10], cette fonctionnalité est aujourd'hui inexistante en CND. Cela s'explique principalement par certaines carac-

téristiques des dispositifs d'imagerie, comme leur portabilité pour les contrôles sur site, leur coût réduit par rapport aux échographes médicaux, et leur polyvalence pour pouvoir répondre à un maximum de besoins industriels exigeant des sondes et des méthodes d'imagerie très variées. Ces contraintes ne permettent pas une architecture électronique multi-cœur associée à des traitements parallélisés, comme au sein des dispositifs d'imagerie médicale. Pourtant, l'intérêt de l'imagerie 3D est réel en CND pour améliorer la caractérisation des défauts de morphologies complexes, telles que les fissures de corrosion sous contrainte dans les circuits primaires de réacteurs nucléaires, ou pour inspecter des structures complexes dont les géométries ne peuvent pas être considérées comme 2,5D. Un autre atout majeur de l'imagerie 3D est le fait de s'affranchir de scanners motorisés associés à des réseaux linéaires pour sonder un grand volume de la structure. L'imagerie 3D statique avec un positionnement manuel pourrait réduire significativement les durées et les coûts d'inspection, mais il est crucial que le calcul de l'image soit rapide et que la zone imagée soit beaucoup plus large que l'ouverture de la matrice.

Cette thèse étudie une famille d'algorithmes de reconstruction dont l'intérêt est de réduire au maximum le nombre d'opérations de calcul pour former des images 3D aussi rapidement que possible. Concernant l'acquisition des données, les signaux de la matrice des réponses impulsionnelles ne sont pas adaptés à l'imagerie 3D avec des capteurs matriciels [11] car les éléments sont excités individuellement, et le grand nombre de séquences d'émission/réception réduit considérablement la vitesse d'acquisition. En outre, le stockage de la matrice inter-éléments représente une autre difficulté pour les applications temps-réel. Par exemple, la formation d'images 3D avec une matrice  $16 \times 16$  nécessite d'enregistrer  $256 \times 256$  signaux comportant  $N_t$  échantillons temporels, et le volume global de données n'est pas toujours enregistrable par les systèmes CND en raison des limitations de transfert de données. Pour résoudre ces problèmes liés à l'acquisition des signaux, nous proposons de former des images 3D avec des ondes planes incidentes. Cette technique est bien connue en imagerie médicale pour réduire significativement le nombre de transmissions, et ainsi améliorer les taux d'acquisition, tout en diminuant la quantité de données à transférer et stocker.

En imagerie 3D dans le domaine temporel, l'acquisition par ondes planes n'est pas suffisante pour reconstruire rapidement des volumes dont le nombre de voxels est typiquement compris entre  $10^6$  et  $10^8$ . Le nombre d'opérations de calcul de la méthode PWI est en effet proportionnel au nombre de voxels. C'est la raison pour laquelle, plutôt que de calculer l'image dans le domaine temporel, nous proposons d'employer des algorithmes dans le domaine de Fourier qui sont connus dans la littérature pour leur efficacité en termes de temps de calcul. Les méthodes dites  $f$ - $k$  (nous utilisons en fait les lettres  $k_u$ - $\omega$  pour désigner la fréquence spatiale et la fréquence angulaire dans ce manuscrit) sont des algorithmes d'imagerie dans lesquels l'image est calculée dans le domaine de Fourier en résolvant un problème inverse, puis en ré-échantillonnant le spectre du domaine  $k_u$ - $\omega$  des fréquences signal vers le domaine  $k_x$ - $k_z$  des fréquences de l'image. Ce ré-échantillonnage est spécifique à la méthode et implique généralement une interpolation dans le domaine  $k_u$ - $\omega$ . Ces méthodes sont apparues dans le domaine sismique sous le nom de *migration*  $f$ - $k$  avec les travaux pionniers de Stolt en imagerie mono-statique [12, 13]. Le formalisme de Stolt décrit une méthode d'imagerie passive où les réflecteurs dans le milieu sont considérés comme des sources primaires explosives. Cette hypothèse est valable dans un milieu équivalent, appelé Exploding Reflector Model (ERM), où la vitesse de phase est divisée par deux pour tenir compte du temps du trajet aller-retour de l'onde dans le milieu

physique, entre le réseau de traducteurs et les réflecteurs. L'imagerie des réflecteurs dans la région d'intérêt revient donc à remonter au champ acoustique à l'instant  $t = 0$  de l'explosion, en résolvant l'équation de Helmholtz. Skjelvareid *et al.* ont ensuite généralisé la migration de Stolt à des milieux multicouches pour traiter les variations de vitesse le long de l'axe central du réseau [14]. Plus tard, Garcia *et al.* ont adapté le formalisme de Stolt à l'imagerie 2D par ondes planes avec un ERM modifié mettant en oeuvre une transformation spatiale entre le milieu physique et celui des réflecteurs explosifs [15].

La deuxième approche en imagerie dans le domaine  $f$ - $k$  est souvent appelée *algorithme du nombre d'onde*. Il a été introduit au début des années 1990 dans le domaine radar (SAR) dans des configurations mono-statiques [16, 17, 18], et a été adapté pour traiter des configurations multi-statiques par Callow *et al.* en 2002 [19]. Cette méthode repose sur un modèle direct exprimant les signaux dans le domaine fréquentiel comme la convolution d'une distribution de réflecteurs par la fonction de Green de l'équation de Helmholtz. Cette équation peut être inversée en exprimant la fonction de Green comme une somme d'ondes planes *via* l'identité de Weyl, et donne une représentation de la distribution de réflecteurs dans le domaine fréquentiel  $k_x$ - $k_z$  [20]. Plus récemment, en CND, Hunter *et al.* ont suivi la même approche que dans [19] pour appliquer l'algorithme du nombre d'onde à la matrice des réponses impulsionnelles inter-éléments [21]. Dans leur cas pratique où les images 2D sont calculées avec un capteur de 64 éléments, ils montrent que la résolution spatiale est améliorée par rapport à l'imagerie TFM dans le domaine temporel, et que le gain en nombre d'opérations est théoriquement de l'ordre du nombre d'éléments. En imagerie médicale, Moghimirad *et al.* ont montré que les sources virtuelles peuvent être combinées avec l'algorithme du nombre d'onde pour augmenter la profondeur de pénétration des ultrasons et ainsi améliorer le rapport signal/bruit par rapport à l'acquisition classique de la matrice inter-éléments [22]. D'autres méthodes basées sur des faisceaux limités en diffraction ont été introduites par Lu et Cheng, les ondes planes étant un cas particulier de faisceaux limités en diffraction [23, 24, 25]. Toutes les méthodes fréquentielles pré-citées restent à ce jour limitées à des configurations simples et proches de celles rencontrées en imagerie médicale où la zone image est limitée à l'ouverture du capteur.

L'objectif de cette thèse est d'accélérer significativement l'imagerie échographique dans des configurations de contrôle spécifiques au CND. Pour ce faire, la stratégie que nous adoptons consiste à combiner des acquisitions en ondes planes pour réduire le nombre de signaux à traiter, avec des algorithmes de reconstructions rapides dans le domaine de Fourier. Cette étude s'inscrit dans le prolongement des travaux de thèse de L. Le Jeune, et se fonde sur les théories  $f$ - $k$  qui sont généralisées à des contrôles sans contact (immersion) et à l'imagerie multi-modes de fissures. Les méthodes 2D et 3D exposées dans ce manuscrit sont étudiées en termes de complexités algorithmiques et de temps de calculs, et leurs performances graphiques sont évaluées à partir de signaux simulés et expérimentaux.

## Organisation du manuscrit

Le chapitre 1 présente un résumé de l'état de l'art en imagerie multi-éléments et compare les performances des algorithmes de reconstruction dans les domaines  $t$ - $x$  (temps-espace),  $f$ - $x$  (fréquence-espace) et  $f$ - $k$  (fréquence-nombre d'onde). Après quelques généralités sur les capteurs et systèmes d'acquisition utilisés pour le CND, la première section



rappelle le principe de l'imagerie multi-éléments dans le domaine  $t-x$  basée sur des faisceaux incidents formés. Ensuite, toujours dans le domaine  $t-x$ , la deuxième section résume le principe de l'imagerie par focalisation en tous points pour une acquisition mono-statique (méthode SAFT), puis multi-statique (méthode TFM). La troisième section expose en détail les principaux algorithmes dans le domaine  $f-k$ . En particulier, nous démontrons le lien entre la méthode de Stolt et l'algorithme du nombre d'onde, développés à quelques années d'intervalle dans les domaines sismique et radar, puis, le lien entre les algorithmes de Hunter et de Lu, introduits respectivement en CND et en imagerie médicale. La méthode IWEX est décrite dans la quatrième section car elle opère dans le domaine  $x-f$ , et est donc au croisement des méthodes dans les domaines  $t-x$  et  $f-k$ . Enfin, nous terminons le chapitre par une comparaison des images fournies par les différentes méthodes et des temps de calcul respectifs. Cette première étude montre l'intérêt des méthodes dans le domaine  $f-k$ , tant du point de vue de la qualité d'image que de la rapidité de reconstruction.

Dans le chapitre 2, les méthodes  $f-k$  sont adaptées à des émissions planes, puis généralisées pour prendre en compte une interface eau/acier et réaliser des reconstructions en 3D. Dans la première section, les théories de Stolt et de Lu sont présentées pour des émissions planes avec un réseau au contact. Pour la méthode de Lu, nous adoptons la même démarche que celle de Callow *et al.*, et démontrons que, pour des émissions planes, elle conduit à l'équation d'imagerie de Lu obtenue dans le cadre plus général de la théorie des faisceaux limités en diffraction. Nous présentons ensuite une étude détaillée des complexités algorithmiques, des spectres des images et de leurs supports dans le domaine  $k_x-k_z$ . Dans la deuxième section, les méthodes de Stolt et de Lu sont remaniées pour traiter le cas d'un contrôle sans contact en immersion. Les deux algorithmes de reconstruction dans le domaine  $f-k$  sont évalués en post-traitant des signaux simulés, et comparés avec la méthode temporelle PWI qui est prise pour référence. Dans la dernière section de ce chapitre, le modèle des réflecteurs explosifs de la méthode de Stolt est généralisé au cas 3D. La méthode Lu se généralise plus aisément via l'identité de Weyl formulée en 3D. On détaille ensuite les supports des spectres des images 3D, et les méthodes sont appliquées à deux configurations de contrôle en immersion avec des capteurs matriciels composés de  $16 \times 16$  éléments. Dans la première configuration, les signaux sont simulés et les résultats comparés sont des images 3D d'inclusions sphériques localisées sous l'ouverture de la matrice. Dans la seconde configuration, les signaux sont expérimentaux, et il s'agit d'imager plusieurs entailles comprises dans un même volume qui est beaucoup plus étendu que l'ouverture de la matrice.

Le chapitre 3 propose une nouvelle théorie des méthodes  $f-k$  pour l'imagerie multi-modes de fissures verticales. Cette théorie repose sur une adaptation du modèle direct de la méthode de Lu pour tenir compte des conversions de modes quand les ondes interagissent avec les interfaces de la pièce et/ou les discontinuités en présence. La première section du chapitre expose la théorie pour deux familles de modes : les modes *demi-bond* faisant intervenir une réflexion sur le fond de pièce avant l'interaction avec la fissure, et les modes *bond complet* incluant deux réflexions sur le fond de pièce et une autre sur la surface. Le mode demi-bond est utilisé pour imager des fissures débouchant au fond de pièce, alors que le mode bond complet est généralement employé pour caractériser des fissures à proximité de la surface lorsque la face opposée de la pièce est inaccessible. Dans la deuxième section, l'imagerie  $f-k$  multi-modes est comparée à la méthode PWI en post-traitant des acquisitions réalisées sur une maquette comportant des entailles de diverses orientations et positions. En outre, nous proposons un fenêtrage dans le domaine

de Fourier visant à réduire la quantité d'information utilisée lors de la reconstruction de l'image, et ayant pour seul a priori une zone effective englobant le réflecteur étudié. On démontre que ce fenêtrage permet de supprimer certains artefacts liés à des échos de géométrie, et ainsi d'améliorer le rapport signal/bruit sur l'image. Dans la dernière section, l'imagerie  $f$ - $k$  multi-modes est généralisée au cas 3D, puis évaluée expérimentalement sur la maquette avec entailles de la fin du chapitre 2. On démontre clairement l'apport du mode demi-bond pour la caractérisation de défauts de type fissure, et la réduction significative des temps de calcul lorsque les images sont calculées dans le domaine  $f$ - $k$  par rapport à la méthode PWI opérant dans le domaine  $t$ - $x$ .



# Chapitre I

## État de l'art en imagerie multi-éléments et comparaison des algorithmes de reconstruction

Ce premier chapitre présente un résumé de l'état de l'art en imagerie multi-éléments pour le CND, puis détaille les principaux algorithmes de reconstruction rencontrés dans la littérature pour des acquisitions en balayage électronique où les éléments du réseau sont excités individuellement et séquentiellement. Les complexités algorithmiques, les temps de calcul et la qualité des images sont analysés pour chacun des algorithmes, l'objectif étant d'identifier ceux qui offrent les meilleures performances en vue de les adapter à des émissions planes dans la suite de ce manuscrit.

Dans la première section, après quelques généralités sur les traducteurs et systèmes d'acquisition multi-voies, le principe des méthodes temporelles "Delay-And-Sum" (DAS) est rappelé. Ces méthodes sont les plus répandues en CND comme en imagerie médicale, et reposent sur la formation de faisceaux incidents (émissions focalisées ou planes) par application de lois de retards. Les images sont reconstruites "ligne par ligne" en sommant de façon cohérente les signaux enregistrés à chaque émission.

La deuxième section décrit en détail une autre méthode DAS basée sur un principe de balayage électronique où chaque émission correspond à l'excitation d'un seul élément du réseau. Cette méthode est connue sous le nom de SAFT (Synthetic Aperture Focusing Technique) ou TFM (Total Focusing Method). Ici, les ondes transmises sont divergentes, et la focalisation est réalisée *a posteriori* par sommation cohérente des signaux en tous points d'une grille de reconstruction. Ce principe de formation d'image est en plein essor en CND, et un certain nombre d'appareils proposent aujourd'hui cette fonctionnalité en temps-réel pour réaliser des contrôles *in situ*. Les cadences d'imagerie sont satisfaisantes en 2D et pour un nombre d'éléments n'excédant pas 64.

La troisième section de ce chapitre expose une autre catégorie de méthodes introduites dans les années 70 en imagerie sismique, puis largement étudiées dans les domaines radar et médical. Ces méthodes sont regroupées sous la dénomination "imagerie dans le domaine  $f-k$ ", et sont connues pour être particulièrement efficaces en termes de temps de calcul par rapport aux méthodes DAS. Dans le contexte du CND, l'imagerie dans le domaine  $f-k$  est pertinente lorsque le nombre de points de l'image et/ou le nombre d'éléments de la sonde

deviennent importants. C'est notamment le cas en imagerie 3D où les capteurs matriciels disposent au minimum de 256 éléments et les volumes à reconstruire peuvent comporter jusqu'à  $10^8$  voxels.

Ensuite, la quatrième section décrit une méthode de reconstruction dans le domaine  $f$ - $x$  qui est connue sous le nom de IWEX (Inverse Wavefield Extrapolation). Cette méthode est décrite dans l'état de l'art car elle est implémentée dans certains appareils pour l'imagerie temps-réel en 2D, et permet de faire le lien entre les méthodes DAS opérant sur des signaux du domaine  $t$ - $x$  et les méthodes  $f$ - $k$  opérant sur des spectres tout-fréquentiel.

## I.1 Généralités

Cette section donne une vue d'ensemble sur les traducteurs multi-éléments, les modalités d'inspection, les systèmes d'acquisitions utilisés lors de contrôles industriels, ainsi qu'un rappel sur le principe de l'imagerie conventionnelle dans le domaine temporel basée sur la formation de faisceaux incidents. Enfin, quelques fondamentaux en imagerie multi-éléments sont rappelés, comme l'influence du pas inter-éléments, les notions de résolutions axiale et latérale, et celle de profondeur de champ.

### I.1.1 Capteurs multi-éléments et systèmes d'acquisition

Le principal intérêt des capteurs multi-éléments en CND est de pouvoir former une image en position fixe en focalisant les faisceaux ultrasonores selon plusieurs directions par application de lois de retards. Cette technologie tend à remplacer aujourd'hui le procédé historique consistant à sonder une structure à l'aide de sondes mono-éléments montées sur un ou plusieurs axes de translation. L'autre atout de la technologie multi-éléments est d'éviter l'usage de plusieurs sondes mono-éléments lorsque l'on souhaite examiner toute l'épaisseur du composant, ou améliorer la détection de défauts en ajustant l'angle de réfraction du faisceau transmis. La géométrie et la disposition des éléments piezoélectriques dépendent de l'application visée. En imagerie 2D, les capteurs utilisés sont composés d'éléments rectangulaires disposés en ligne et périodiquement espacés : on parle de capteurs 1D ou linéaires (Figure I.1a). Ces derniers permettent de focaliser et d'anguler un faisceau ultrasonore dans le plan parallèle au réseau, souvent appelé *plan de contrôle*. Les traducteurs avec des découpages multi-éléments 2D permettent de dévier un faisceau selon l'angle polaire  $\theta$  et un azymut  $\varphi$  choisis. Le découpage 2D est souvent matriciel, c'est-à-dire composé d'un arrangement bi-périodique d'éléments rectangulaires. En CND, les capteurs matriciels sont souvent employés en imagerie 2D pour compenser les effets d'une variation de la surface du composant dans le plan perpendiculaire au plan de contrôle. Les éléments sont alors plus larges et moins nombreux dans le plan des déformations (Figure I.1b). Pour les applications en imagerie 3D, les réseaux matriciels sont constitués d'éléments carrés et espacés avec la même période dans les deux plans (Figure I.1c). Le nombre d'éléments doit être au minimum de  $16 \times 16$  éléments pour garantir une surface active suffisamment étendue. Ceci permet d'imager en une seule position de la sonde un volume de section suffisante pour détecter des défauts.

En fonction de l'application, le capteur peut être immergé dans l'eau (Figure I.2a), placé au contact d'un sabot rigide en plexiglas (Figure I.2b), ou alternativement, au contact d'un sabot souple rempli d'eau (Figure I.2c). Le contrôle en immersion en cuve ou

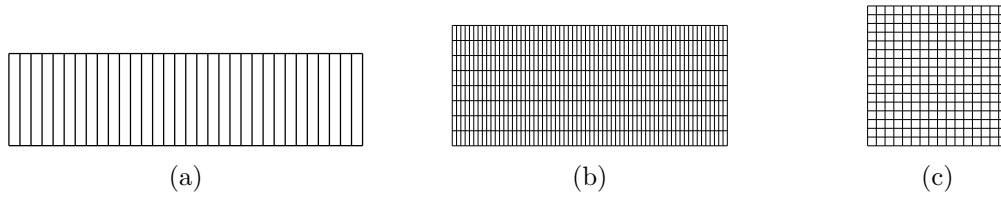


Fig. I.1 Exemple de trois traducteurs multi-éléments disponibles au CEA-List et fonctionnant à 5 MHz : (a) linéaire 32 éléments de section  $0.5\text{mm} \times 10\text{mm}$ , (b) matriciel avec  $32 \times 8$  éléments rectangulaires de section  $0.5\text{mm} \times 2\text{mm}$ , et (c) matriciel avec  $16 \times 16$  éléments carrés de section  $0.5\text{mm} \times 0.5\text{mm}$ .

par jet d'eau est principalement utilisé lorsque la surface du matériau n'est pas plane, ou présente des irrégularités. C'est aussi le mode d'inspection privilégié des grandes structures car il autorise des vitesses de déplacement beaucoup plus rapides que des capteurs au contact (ex. : structures aéronautiques en composite, tubes métalliques dans les domaines pétrolier et gazier). Si la surface du matériau inspecté présente une faible déformée, des capteurs flexibles instrumentés peuvent être employés (Figure I.2d).

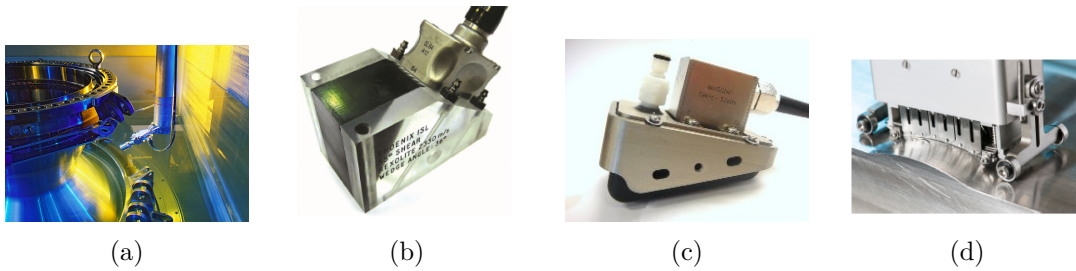


Fig. I.2 Modalités de contrôle avec : (a) un traducteur en immersion, (b) un sabot incliné en plexiglas, (c) un sabot conforme incliné et rempli d'eau, (d) un capteur flexible instrumenté.

Les contrôles ultrasons sur site peuvent être effectués en ligne avec des systèmes d'acquisition fixes, ou par un opérateur muni d'un système portable d'imagerie en temps-réel. Le [Tableau I.1](#) présente trois systèmes d'acquisition, les deux premiers étant portatifs et représentatifs des performances d'imageurs communément utilisés en CND. Ces derniers sont limités à de l'imagerie 2D avec au maximum 64 éléments pour des cadences d'imagerie atteignant une centaine de Hz. Ces systèmes exploitent l'algorithme de reconstruction TFM qui sera précisé dans la section I.2. Le système Topaz de Zetec, par exemple, peut réaliser des images comportant jusqu'à  $10^6$  pixels avec une cadence d'imagerie maximale de 110 Hz pour des images de taille 65 000, soit environ  $256 \times 256$  pixels (voir la [fiche technique du constructeur](#)). Pour l'imagerie 3D avec un capteur matriciel de 256 éléments et une image dont le nombre de voxel est typiquement  $10^6$ , le système Zetec fonctionnerait, toutes choses égales par ailleurs, et en supposant qu'une loi de proportionnalité au nombre d'éléments et de pixels/voxels s'applique, à une cadence d'imagerie inférieure à 2 Hz.

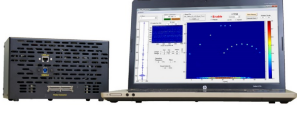
|                |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                     |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                |  |  |  |
| Système        | Topaz 64 (Zetec)                                                                  | Gekko (M2M) [27]                                                                  | OEM-PA 256/256 (AOS)                                                                |
| Portatif       | Oui                                                                               | Oui                                                                               | Non                                                                                 |
| Nb. éléments   | $\leq 64$                                                                         | $\leq 64$                                                                         | $\leq 256$                                                                          |
| Reconstruction | TFM                                                                               | TFM                                                                               | TFM                                                                                 |
| Cadence        | 110 Hz                                                                            | 80 Hz                                                                             | N/C                                                                                 |

TABLE I.1 – Spécifications de trois systèmes d'acquisitions dédiés CND, d'après les sites Web des constructeurs [Topaz 64](#), [m2m](#), et [AOS](#).

### I.1.2 Principe des méthodes d'imagerie "delay and sum"

Les méthodes d'imagerie le plus souvent mises en œuvre avec des capteurs multi-éléments sont basées sur la formation de faisceaux. Ce principe est appelé *beamforming* ou *formation de voies* en imagerie médicale. En excitant les éléments du réseau avec un signal électrique impulsionnel et une loi de retards appropriée, un faisceau ultrasonore, focalisé ou non, est transmis dans le solide. Les réflecteurs présents dans le milieu (porosités, fissures, etc) agissent lors de leur interaction avec le faisceau incident comme des sources acoustiques secondaires, et rétro-diffusent des ondes qui sont par la suite enregistrées par tout ou partie des éléments du capteur. Le processus de formation d'une ligne de l'image consiste à synchroniser les signaux reçus par l'application de retards de numérisation, puis, à les sommer pour produire un signal plus fort et avec un rapport signal/bruit (RSB) qui est généralement supérieur à celui des signaux élémentaires. Les méthodes d'imagerie consistant ainsi à focaliser les signaux en réception sont souvent appelées Delay-And-Sum (DAS) en échographie médicale [28, 29], et se distinguent les unes des autres par le mode d'acquisition des signaux (émissions focalisées ou planes, avec ou sans balayage électronique...) et le mode de reconstruction des images (reconstruction "ligne par ligne" ou "point par point"). Les schémas sur la figure I.3 rappellent les principes d'émission pour former une image DAS : émission focalisée avec balayage électronique (imagerie B-scan) ; émission focalisée associée à un balayage angulaire (imagerie S-scan) ; émissions d'ondes planes sous différents angles ; émissions focalisées en tous points de la zone d'intérêt.

A chaque type d'émission correspond une ou plusieurs méthodes de reconstruction DAS. Cette sous-section rappelle brièvement le principe de formation des images B-scan et S-scan, et l'imagerie par ondes planes telle qu'elle est appliquée en échographie médicale. L'imagerie s'appuyant sur une focalisation en tous points sera décrite plus en détail dans la prochaine section.

#### a) Imagerie B-Scan

L'émission d'une onde focalisée à une profondeur  $F$  et un angle  $\beta$  avec une sous-ouverture de quelques éléments permet de former une ligne de l'image centrée sous la

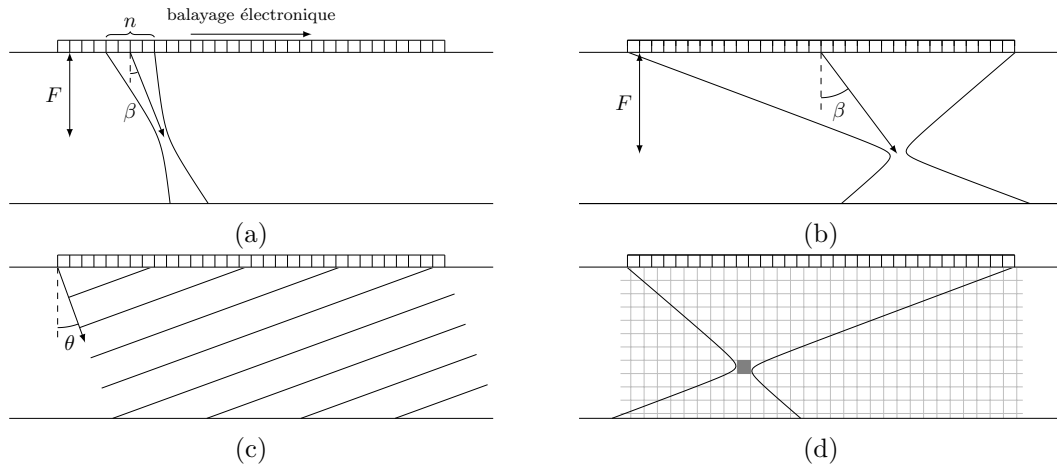


Fig. I.3 Principes d'émission pour former des images DAS : (a) focalisation à une profondeur et selon un angle constants pour l'imagerie B-Scan ; (b) focalisation à une profondeur constante et selon un angle variable pour l'imagerie S-Scan ; (c) émission d'ondes planes angulées, (d) focalisation en tous points d'une grille de reconstruction.

sous-ouverture et orientée selon l'axe de tir (cf. figure I.3a). Le nombre  $n$  d'éléments de la sous-ouverture doit être très inférieur au nombre  $N$  d'éléments du réseau. Une ligne du B-scan est le signal résultant de la somme cohérente de  $n$  signaux élémentaires, après application de retards en réception. Les lois de retards sont identiques pour focaliser en émission et réception en un point donné, et restent inchangées pendant tout le processus de formation de l'image. Si le nombre  $N$  d'éléments est petit, le capteur doit être translaté mécaniquement pour former autant de lignes que nécessaire dans la limite d'accessibilité de la pièce inspectée. Si au contraire il est suffisamment grand, typiquement supérieur à 32 éléments, la sous-ouverture peut être translatée par balayage électronique, et permet de former  $\lfloor \frac{N-n+1}{p} \rfloor$  lignes de l'image, où  $p$  est le nombre d'éléments correspondant au pas du balayage électronique. L'inconvénient du B-Scan par balayage électronique est que l'extension latérale de l'image est limitée par l'ouverture de la sonde qui, dans nombre de cas, est constituée de 64, voire 32 éléments.

### b) Imagerie S-Scan

L'imagerie S-Scan consiste à dévier un faisceau focalisé à une profondeur  $F$  dans une direction  $\beta$  variable (cf. figure I.3b). Par rapport au B-Scan électronique, tous les éléments sont généralement exploités en émission et réception pour focaliser en un point, et les lois de retards évoluent en fonction de la direction du tir. Une ligne de l'image est obtenue par sommation des signaux reçus avec tous les éléments, auxquels des retards en réception égaux aux retards en émission ont été appliqués. Une ligne de l'image S-scan est centrée sous l'ouverture et forme un angle  $\beta$  avec la verticale. L'image obtenue est une représentation sectorielle du milieu inspecté. L'avantage de cette méthode par rapport à la précédente est que l'extension de l'image n'est plus limitée par la largeur du réseau mais uniquement par la directivité des éléments. Plus le pas angulaire est fin, meilleure est la



résolution angulaire de l'image. En contrepartie, le nombre de tirs nécessaires pour couvrir un large secteur angulaire devient très important. L'imagerie S-Scan présente l'avantage de pouvoir former une image très étendue en une seule position de la sonde, propriété utile dans le cas où l'on rencontre des problèmes d'accessibilité en cours de contrôle où lorsque la sonde ne possède pas plus de 64 éléments. Si le capteur utilisé est matriciel, plusieurs plans d'émission peuvent être choisis pour former des images sectorielles dans le matériau, ce qui permet une visualisation 2,5D des défauts.

### c) Émission d'ondes planes

L'inconvénient des émissions focalisées est la nécessité de réaliser un grand nombre d'émissions focalisées pour imager tout le milieu. Il y a de plus une perte d'énergie acoustique en dehors de la zone focale. L'écho d'un défaut situé au-dessus ou au-dessous de cette zone aura une faible amplitude, et imager une pièce par les méthodes B-Scan ou Sscan suppose donc un *a priori* sur la profondeur des défauts. L'imagerie en ondes planes a été introduite par Montaldo *et al.* [5] en imagerie médicale et consiste à transmettre dans le milieu des ondes planes sous différents angles  $\theta$  (cf. figure I.3c). En l'absence d'atténuation, l'amplitude d'une onde plane reste quasi constante dans le champ proche du capteur, donnant lieu à une profondeur de champ étendue. En imagerie médicale, la reconstruction est réalisée ligne par ligne par un principe de focalisation en réception à différentes profondeurs avec une sous-ouverture glissante. L'intérêt principal par rapport aux méthodes précédentes est qu'une image de qualité peut être obtenue avec quelques tirs ultrasonores. En exploitant une parallélisation des algorithmes et une architecture électronique spécifique, l'émission d'ondes planes offre aujourd'hui des cadences d'imagerie extrêmement élevées. Cette cadence n'est alors limitée que par le temps de propagation de l'onde dans les tissus, et la cadence d'imagerie peut atteindre 10 000 images par seconde pour une seule onde plane [5]. L'adaptation de l'imagerie en ondes planes au CND sera présentée au chapitre 2 [7].

### d) Focalisation en tous points

Pour maximiser l'amplitude du champ incident dans toute la zone d'intérêt, une alternative aux émissions planes est de focaliser en émission en tous points de cette zone. En discrétisant la zone image en une grille rectangulaire comportant  $N_x$  points selon la direction horizontale et  $N_z$  points selon la direction verticale, le nombre de tirs doit être  $N_x \times N_z$ . Pour chaque point de la grille, il suffit ensuite de focaliser en réception, et d'extraire l'amplitude du signal-somme à un instant correspondant au temps de vol aller-retour le long de l'axe de tir. Par rapport aux précédentes méthodes DAS basées sur des reconstructions « ligne par ligne », l'image est donc calculée « point par point ». En pratique, le nombre de tirs est trop important pour pouvoir afficher une image du milieu en temps-réel. Néanmoins, il est possible de former une image équivalente en focalisant en tous points d'un domaine numérique les signaux de la matrice des réponses impulsionnelles inter-éléments  $\mathbf{K}(t)$ . La construction de cette matrice nécessite au maximum  $N \ll N_x \times N_z$  émissions et sera présentée plus en détail dans la section suivante.

### I.1.3 Paramètres importants en imagerie multi-éléments

Cette sous-section rappelle la condition à respecter sur le pas inter-éléments pour limiter les effets des lobes de réseau, puis donne quelques paramètres déterminant la qualité du système d'imagerie : les résolutions axiale et latérale, et la profondeur de champ. Pour simplifier le problème, les paramètres sont ici exprimés pour un réseau en immersion. On considère  $N$  éléments de largeur  $a$  rayonnant autour de la fréquence centrale  $f_c$ . Le pas inter-éléments, ou pitch, est défini comme la distance centre-à-centre entre deux éléments adjacents et est noté  $d$ . Enfin, la fréquence centrale du signal transmis par un élément est notée  $f_c$ . A titre d'exemple, un capteur couramment utilisé pour contrôler un acier ferritique de moyenne épaisseur (entre 20 et 50 mm) comporte 64 éléments opérant autour de 5 MHz, et le pas inter-éléments est 0,6 mm.

#### a) Influence du pas inter-éléments

En supposant que tous les éléments du réseaux sont excités par le même signal électrique  $e(t)$  avec des retards pour dévier le faisceau dans la direction  $\beta$ , l'amplitude du champ acoustique rayonné à l'infini peut s'écrire [30, 31] :

$$A(\theta, f) = \hat{e}(f)a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f a \sin \theta}{c}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi f N d (\sin \theta - \sin \beta)}{c}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f d (\sin \theta - \sin \beta)}{c}\right)},$$

où  $k = 2\pi f_c/c$  est le nombre d'onde à la fréquence centrale,  $\theta$  est l'angle d'observation par rapport à l'axe central du réseau, et  $\hat{e}(f)$  est le spectre du signal d'émission. Le facteur  $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f a \sin \theta}{c}\right)$  décrit la directivité d'un élément alors que le second, souvent appelé *facteur de réseau*, traduit la diffraction par un réseau de sources ponctuelles. Le facteur de réseau montre que les maxima d'amplitude sont localisés dans les directions  $\theta_l$  telles que  $\sin \theta_l = \sin \beta + \frac{c}{f_c d} l$ , avec  $l \in \mathbb{Z}$ . Les directions  $\theta_l$  pour  $l \neq 0$  correspondent aux lobes de réseau dont l'amplitude peut être supérieure à celle du lobe principal dans la direction  $\beta$ . En imagerie, pour éviter la formation d'artefacts liés aux lobes de réseaux, le pas inter-éléments doit vérifier

$$d < \frac{\lambda}{1 + \sin \beta}. \quad (\text{I.1})$$

La condition idéale est  $d < \lambda/2$ , car elle permet d'éviter les lobes de réseau quel que soit l'angle de déviation  $\beta$  du faisceau.

La plupart des capteurs multi-éléments utilisés en CND vérifient cette condition, où  $\lambda$  est la longueur d'onde longitudinale à la fréquence centrale du signal d'émission. Dans ce cas, la condition de périodicité idéale n'est pas vérifiée pour les ondes transversales, dont la vitesse est environ deux fois plus faible. Pour les sondes matricielles, le plus souvent constituées de  $16 \times 16$  éléments, le pas inter-éléments est souvent supérieur à  $\lambda/2$  pour augmenter l'ouverture  $D$  et conserver une surface active suffisante, ce qui permet d'accroître la profondeur d'inspection qui est limitée par la zone de champ proche  $Z_{proche}$  du capteur [32] :

$$Z_{proche} = \frac{D^2}{4\lambda}.$$

### b) Résolutions axiale et latérale

La résolution axiale, ou résolution temporelle, caractérise la capacité du système à distinguer deux réflecteurs ponctuels alignés dans l'axe de tir. Elle dépend uniquement de la longueur du signal émis. Plus l'impulsion ultrasonore est courte, plus le système est capable de séparer deux défauts proches, situés l'un en-dessous de l'autre. La résolution axiale est définie par

$$R_{ax} = \frac{n\lambda}{2},$$

où  $n$  est le nombre de cycles dans l'impulsion ultrasonore émise. En CND, la résolution temporelle détermine la précision avec laquelle un défaut est localisé verticalement. Une bonne résolution temporelle est nécessaire, par exemple, pour le contrôle de plaques minces par ondes de volume, ou pour détecter de petits défauts à proximité d'interfaces.

La résolution latérale est sans doute le paramètre le plus important en imagerie, notamment pour obtenir une bonne précision dans la localisation et le dimensionnement de défauts. Elle caractérise la capacité du système à séparer deux réflecteurs ponctuels alignés horizontalement à la profondeur de focalisation  $F$ . Elle dépend de la largeur à mi-hauteur du faisceau ultrasonore à la profondeur  $F$ , et s'écrit

$$R_{lat} = \frac{\lambda F}{D}.$$

Le rapport  $F/D$  est souvent appelé "F-number" et noté  $F_{\#}$  en imagerie médicale [5].

### c) Profondeur de champ

Un  $F_{\#}$  petit n'est pas nécessairement un gage de qualité en imagerie de type B-scan ou S-scan. Certes, la résolution spatiale est excellente à la profondeur de focalisation, mais l'amplitude du faisceau diminue très vite à mesure que l'on s'éloigne de cette profondeur, et l'élargissement du faisceau entraîne une dégradation rapide de la résolution spatiale. Par exemple, l'imagerie S-San avec un  $F_{\#}$  petit n'est pas appropriée pour imager une grande épaisseur du milieu. La zone où l'amplitude et la largeur du faisceau varient peu est appelée profondeur de champ, et est définie comme étant la longueur du faisceau à mi-hauteur [33]

$$Z_{champ} \approx 9,7\lambda \left( \frac{F}{D} \right)^2.$$

Un  $F_{\#}$  petit donne une bonne résolution latérale à la profondeur de focalisation mais une résolution dégradée en dehors de la zone focale, tandis qu'un grand  $F_{\#}$  donnera une résolution plus faible mais plus homogène. Les méthodes d'imagerie par émission d'ondes planes ou par focalisation en tous points s'affranchissent de ce compromis ; la résolution spatiale et l'amplitude de détection sont optimales en tous points de la zone d'intérêt.

## 1.2 Imagerie dans le domaine temporel par focalisation en tous points

Cette section présente plus en détail deux méthodes DAS basées sur un principe de focalisation en tous points, l'une reposant sur une acquisition dite mono-statique, l'autre

sur une acquisition multi-statique exploitant un maximum de signaux. On considère que la zone à imager a été subdivisée en une grille de pixels, chacun étant considéré comme un point focal. Le principe des méthodes présentées ici est de calculer l'image pixel par pixel en sommant de façon cohérente tous les signaux élémentaires de l'acquisition.

### I.2.1 Imagerie mono-statique : Synthetic Aperture Focusing Technique

La méthode Synthetic Aperture Focus Technique, ou SAFT, a été initiée en CND au début des années 80 [34] en s'inspirant de l'imagerie Synthetic Aperture Radar, ou SAR, développée dès les années 60. Contrairement aux méthodes de formation de voies (B-scan et S-scan) où les faisceaux transmis sont directifs, la méthode SAFT consiste à émettre une onde impulsionnelle divergente avec un traducteur mono-élément. Ce dernier est translaté pour créer une ouverture *synthétique* dont la taille peut être aussi grande que souhaitée. Alternativement, un capteur multi-éléments peut être employé. Dans ce cas, tous les éléments sont successivement activés en émission/réception, et l'ouverture synthétique coïncide avec l'ouverture réelle du capteur. La méthode SAFT est qualifiée de mono-statique car les émetteurs et les récepteurs sont confondus. Le premier système d'imagerie SAFT temps-réel a été développé par une équipe de l'université de Stanford [35], et pouvait former des images de taille  $256 \times 1024$  pixels à une fréquence de 60 images par seconde avec 32 éléments.

Afin de décrire mathématiquement l'imagerie SAFT, on considère un réseau linéaire composé de  $N$  éléments, de pitch  $d$  et de fréquence centrale  $f_c$ . L'acquisition multi-éléments associée à la méthode SAFT est un balayage électronique où les  $N$  éléments sont excités individuellement et séquentiellement, et le même élément est utilisé en tant qu'émetteur et récepteur (cf. figure I.4). Ce séquençage fournit donc un jeu de  $N$  signaux élémentaires  $s_i(t)$ , ( $1 \leq i \leq N$ ).

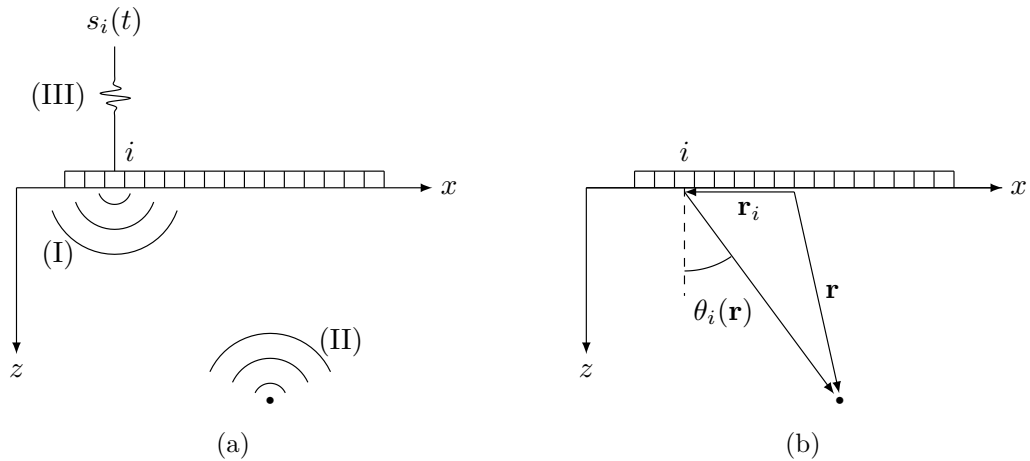


Fig. I.4 Imagerie SAFT avec une sonde multi-éléments. (a) Principe de l'acquisition : l'élément  $i$  émet une onde cylindrique impulsionnelle (I), qui est rétro-diffusée par les réflecteurs du milieu (II), et enregistre les échos (III); (b) Géométrie associée à l'imagerie SAFT.

L'amplitude  $I(\mathbf{r})$  de l'image SAFT en un point repéré par  $\mathbf{r}$  s'écrit comme :

$$I(\mathbf{r}) = \left| \sum_{i=1}^N w_i^2(\mathbf{r}) \tilde{s}_i \left( \frac{2\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|}{c} \right) \right|, \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathbf{r}_i$  est la position de l'élément d'indice  $i$ ,  $\tilde{s}_i(t) = s_i(t) + j\mathcal{H}\{s_i(t)\}$  sont les signaux analytiques, et  $w_i(\mathbf{r})$  est un coefficient de pondération. En imagerie SAFT, ce coefficient correspond au diagramme de rayonnement d'un élément (la puissance 2 provient de son utilisation en émission et en réception). Pour un élément de largeur  $a$  rayonnant dans un solide, les diagrammes de rayonnement  $D_L(\theta)$  et  $D_T(\theta)$  des ondes longitudinales (L) et transversales (T) s'écrivent [36] :

$$D_L(\theta) = \frac{k_L^4(\gamma^{-2} - 2\sin^2\theta)\cos^2\theta}{G(k_L\sin\theta)} \text{sinc}\left(k_L\frac{a}{2}\sin\theta\right) \quad (\text{I.3})$$

et

$$D_T(\theta) = \frac{ik_T^4\sqrt{\sin^2\theta - \gamma^{-2}}\sin 2\theta\cos\theta}{G(k_T\sin\theta)} \text{sinc}\left(k_T\frac{a}{2}\sin\theta\right), \quad (\text{I.4})$$

où  $k_L = \frac{2\pi f_c}{c_L}$ ,  $k_T = \frac{2\pi f_c}{c_T}$ ,  $\gamma = c_T/c_L$ , et  $G : x \mapsto (2x^2 - k_T^2)^2 - 4x^2\sqrt{x^2 - k_L^2}\sqrt{x^2 - k_T^2}$ . L'équation (I.2) décrit une focalisation en réception en un point. La quantité  $2\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|/c$  est le temps d'arrivée de l'onde rétro-diffusée par un réflecteur situé en  $\mathbf{r}$  quand l'élément  $i$  émet et reçoit. En notant  $N_x$  le nombre de pixels selon la direction horizontale et  $N_z$  le nombre de pixels selon la direction verticale, la complexité algorithmique de SAFT, i.e. le nombre d'opérations nécessaires pour reconstruire une image, est de l'ordre de

$$\mathcal{C}_{SAFT} = \mathcal{O}(NN_xN_z).$$

### I.2.2 Imagerie multi-statique : Total Focusing Method

La Total Focusing Method (TFM), désignée ainsi par Drinkwater *et al.* de l'université de Bristol [3, 4] ou Focalisation en Tous Points (FTP), aussi appelée Synthetic Transmit Aperture (STA) en imagerie médicale [37] est basée sur le même principe d'émission d'ondes cylindriques que celui employé dans le cadre de la méthode SAFT, mais cette fois-ci, les échos sont enregistrés par tous les éléments du capteur. Plus précisément, une onde cylindrique est émise avec chaque élément  $j$  et les réponses impulsionnelles interéléments  $K_{ij}(t)$  sont enregistrées avec tous les éléments  $i = 1, \dots, N$  du réseau.  $N$  tirs sont nécessaires à l'acquisition de la matrice  $\mathbf{K}(t) = (K_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$  de dimension  $N \times N$ , appelée *matrice des réponses impulsionnelles inter-éléments*. La procédure d'acquisition de cette matrice est souvent appelée Full Matrix Capture (FMC) [4]. La matrice  $\mathbf{K}(t)$  est à la base de nombre de méthodes d'imagerie. En particulier, la transformée de Fourier temporelle  $\mathbf{K}(\omega)$  de la matrice permet de synthétiser n'importe quel type d'émission. De plus, certains filtrages tels que la méthode DORT [38, 39] permettent de réduire le niveau de bruit rencontré dans les matériaux atténuants.

Comme précédemment, le calcul de l'image TFM est effectué pixel par pixel, en som-

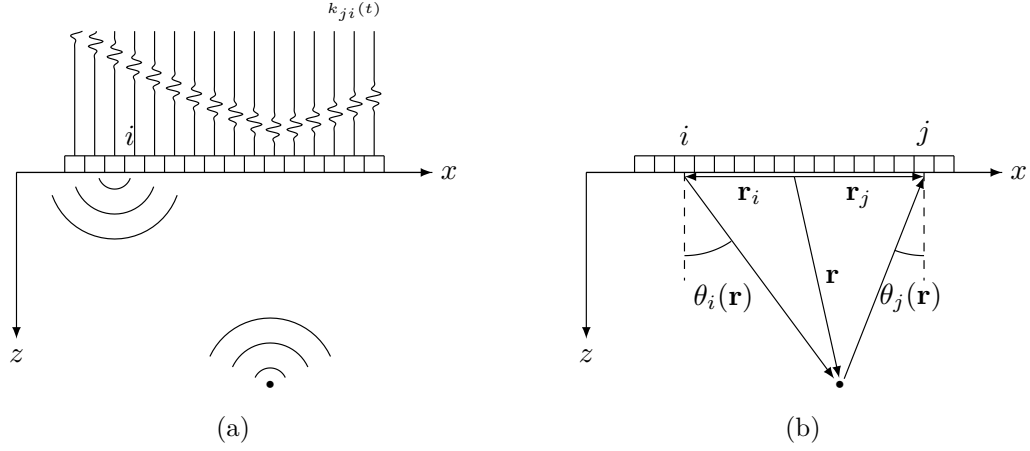


Fig. I.5 Imagerie TFM. (a) Principe de l'acquisition : l'élément  $i$  émet une onde cylindrique impulsionnelle dans le matériau, qui est rétrodiffusée par des réflecteurs dans le milieu. Les signaux inter-éléments  $k_{ij}(t)$  sont enregistrés avec tous les éléments ; (b) Géométrie associée à l'imagerie TFM.

mant les signaux inter-éléments de tous les couples émetteur/récepteur :

$$I(\mathbf{r}) = \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_j^e(\mathbf{r}) w_i^r(\mathbf{r}) \tilde{K}_{ij} \left( t_j^e(\mathbf{r}) + t_i^r(\mathbf{r}) \right) \right|, \quad (\text{I.5})$$

où,  $\tilde{K}_{ij}(t)$  sont les signaux analytiques,  $t_j^e(\mathbf{r})$  est le temps de propagation de l'onde de l'émetteur  $j$  jusqu'au point de l'image situé en  $\mathbf{r}$ , et  $t_i^r(\mathbf{r})$  le temps de propagation de l'onde rétro-diffusée de ce point jusqu'au récepteur  $i$ . Par rapport à SAFT, où les signaux sont focalisés uniquement en réception, l'équation (I.5) décrit une focalisation numérique en émission et en réception au point  $\mathbf{r}$ . D'autre part, les coefficients de pondération en émission  $w_j^e(\mathbf{r})$  et en réception  $w_i^r(\mathbf{r})$  peuvent différer, même pour  $i = j$ , l'un pouvant correspondre au diagramme de rayonnement des ondes L et l'autre à celui des ondes T. Il en est de même pour les temps de vol en émission  $t_j^e(\mathbf{r})$  et en réception  $t_i^r(\mathbf{r})$ , l'un et l'autre pouvant être calculés en considérant les ondes L ou T. C'est le cas lorsque l'image TFM est formée à partir d'échos correspondant à des conversions de modes. L'équation d'imagerie TFM, quant à elle, reste inchangée quelle que soit la nature des échos ; il suffit d'adapter le modèle direct de calcul des temps de vol et choisir les pondérations appropriées.

La possibilité de former des images de défauts à partir d'échos indirects a contribué au succès de la méthode TFM en CND. L'idée est d'exploiter les conversions de modes et les réflexions sur les interfaces de la pièce (surface et fond) pour améliorer l'image d'un réflecteur ne renvoyant pas suffisamment d'écho sous un éclairage direct. On parle d'imagerie TFM multi-modes [40, 41]. L'imagerie n'exploitant pas de réflexions sur les interfaces est appelée imagerie en *mode direct* (cf. figure I.6a) et a été présentée précédemment. Elle est notée  $XdX$ , où  $X$  est la polarisation de l'onde et " $d$ " désigne l'interaction avec le défaut. Si une interaction avec le fond de pièce est considérée, on parle de *mode demi-bond*  $XXdX$  ou  $XdXX$ , où  $XX$  désigne la réflexion de l'onde sur une interface (cf. figure I.6b et I.6c). Ce type de mode est particulièrement utile pour imager des fissures verticales ou quasi

verticales à proximité du fond de pièce. En mode direct, la caractérisation d'une fissure débouchant en fond de pièce consiste à mesurer la distance séparant l'écho de diffraction du sommet de l'entaille et l'écho de coin [42]. En présence de bruit ou d'atténuation, le sommet de l'entaille n'est pas toujours visible sur l'image. En utilisant un mode demi-bond toute la face de la fissure peut être imagée, facilitant ainsi l'identification et le dimensionnement. Enfin, notons que des conversions de modes lors des interactions de l'onde avec le défaut ou les interfaces de la pièce peuvent également être prises en compte pour améliorer la qualité des reconstructions. Il y a donc en pratique 8 modes de reconstruction TFM demi-bond possibles (LLdL, LLdT, LTdL, LTdT, etc).

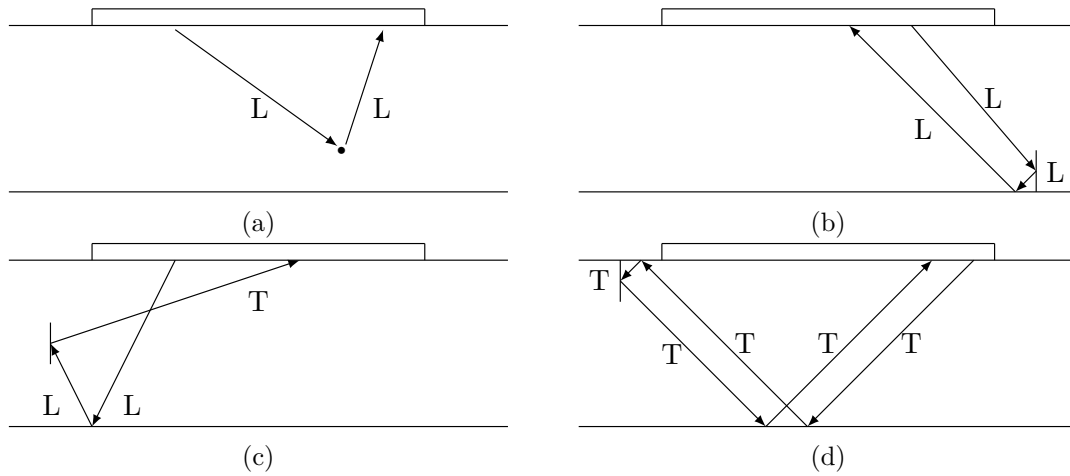


Fig. I.6 Trajets ultrasonores en imagerie TFM pour les modes : (a) direct LdL pour un réflecteur ponctuel, (b) demi-bond LdLrL pour une fissure droite débouchante, (c) demi-bond avec conversion de mode LrLdT pour une fissure à coeur, et (d) bond-complet TdTdTdT pour une fissure droite débouchante en surface.

Enfin, pour imager des défauts proches de la surface, des modes plus complexes prenant en compte des réflexions sur la surface et le fond de pièce sont parfois employés (cf figure I.6d). Ils permettent de détecter et caractériser des défauts proches de la surface lorsque la face opposée de la pièce n'est pas accessible, ce qui est le cas par exemple des tubes dont seule la face extérieure est accessible. Ces modes comprennent une réflexion sur le fond de pièce, suivie d'une réflexion sur la surface, d'une interaction spéculaire avec le défaut, puis d'une seconde réflexion sur le fond de pièce avant de se propager jusqu'à la sonde. Ce type de mode, appelé *bond complet*, est noté XXXdXX. On reviendra sur ces modes de reconstruction dans le chapitre 3, dédié à l'imagerie multi-modes dans le domaine  $f$ - $k$ .

Le calcul de l'amplitude en chaque pixel de l'image nécessitant une double somme sur les éléments du capteur, la complexité algorithmique de TFM est

$$\mathcal{C}_{TFM} = \mathcal{O}(N^2 N_x N_z).$$

### I.3 Imagerie dans le domaine $f$ - $k$

Comme nous l'avons décrit plus haut, les méthodes d'imagerie par focalisation synthétique reposent sur le principe suivant : la zone d'intérêt est subdivisée selon une grille de reconstruction  $x$ - $z$ , et en chaque pixel, l'amplitude de l'image est calculée par sommation cohérente des signaux temporels, éventuellement pondérés par des fonctions d'apodisation. Il existe d'autres approches où le processus de formation de l'image est réalisé dans l'espace fréquences-nombres d'onde. Ces méthodes sont souvent appelées "méthodes d'imagerie dans le domaine  $f$ - $k$ ", et procèdent de la résolution d'un problème inverse pour former une image du milieu inspecté. L'image est alors calculée dans l'espace des fréquences  $k_x$ - $k_z$  sur une grille d'échantillonnage fréquentiel prédéfinie. Cette image "fréquentielle" est ensuite transformée en image dans le domaine  $x$ - $z$  par transformée de Fourier inverse 2D. L'imagerie  $f$ - $k$  a émergé des travaux pionniers de Stolt en imagerie sismique à la fin des années 70 [13, 12]. La méthode éponyme repose sur une acquisition mono-statique comme celle employée dans l'algorithme SAFT, et est basée sur le principe des réflecteurs explosifs qui sera détaillé plus bas. Les méthodes  $f$ - $k$  mono-statiques font leur apparition dans le domaine de l'imagerie SAR (Synthetic Aperture Radar) dans les années 80 en tant qu'algorithme dit "du nombre d'onde" [16, 17, 18]. Ce dernier a ensuite été généralisé pour traiter des acquisitions bi-statiques en SAR [19] puis, plus récemment, des acquisitions de type FMC dans le domaine du CND[21]. D'autres méthodes basées sur des émissions de faisceaux limités en diffraction ont été proposées par Lu dans les années 2000 pour l'imagerie médicale [23, 24, 25]. Dans cette section, nous présentons les théories de Stolt et de l'algorithme du nombre d'onde en mono-statique, puis les théories de Lu et de Hunter *et al.* en multi-statique.

#### I.3.1 Rappels sur la transformée de Fourier et conventions adoptées

Les méthodes  $f$ - $k$  reposent sur la résolution d'un problème physique défini de manière continue dans le domaine  $x$ - $z$ . L'implémentation numérique porte, elle, sur des grandeurs discrètes. Cette sous-section donne les notations et conventions des transformées de Fourier continues et discrètes qui seront employées pour présenter la théorie, puis l'implémentation numérique des algorithmes.

##### a) Transformée de Fourier et notations continues

Dans cette section, le réseau est supposé être au contact d'un milieu homogène et isotrope. Les ondes de volume s'y propagent sans atténuation avec une célérité  $c$ , et interagissent avec une distribution de réflecteurs ponctuels représentée par la fonction de réflectivité  $g(x, z) \in \mathbb{C}$ . Le capteur est ici assimilé à une ligne continue et infinie de récepteurs dont les abscisses sont notées  $u$ . De plus, le champ acoustique mesuré par le récepteur à l'abscisse  $u$  et à l'instant  $t$  est notée  $s(u, t)$ . Le spectre de  $s(u, t)$  est la fonction obtenue par transformée de Fourier 2D et est défini pour les couples de fréquences spatio-temporelles  $(k_u, \omega) \in \mathbb{R}^2$  par

$$S(k_u, \omega) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u, t) e^{-i(k_u u + \omega t)} du dt.$$



Par propriété de la transformée de Fourier, le signal mesuré  $s(u, t)$  peut être obtenu par transformée de Fourier inverse de  $S(k_u, \omega)$  :

$$s(u, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k_u, \omega) e^{ik_u u + i\omega t} dk_u d\omega.$$

Le champ acoustique dans le milieu sera noté  $\phi(x, z, t)$ . Par convention et pour alléger l'écriture, les fonctions dépendant d'une fréquence temporelle ou spatiale seront notées en majuscule, tandis que toutes les autres seront notées en minuscules. On notera ainsi à titre d'exemple :  $s(u, t)$ ,  $S(u, \omega)$ ,  $S(k_u, \omega)$ ,  $g(x, z)$ ,  $G(k_x, k_z)$ ,  $\phi(x, z, t)$ ,  $\Phi(k_u, z, \omega)$ , etc.

### b) Notations discrètes

Considérons une grandeur  $f(x, t)$  fonction de l'espace et du temps, et deux ensembles  $X = [x_1, \dots, x_n]$  et  $T = [t_1, \dots, t_m]$ . On note  $\mathbf{f}[X \times T]$  la matrice rectangulaire représentant l'échantillonnage de  $f(x, t)$  sur la grille définie par le produit cartésien  $X \times T$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{f}[X \times T] = \begin{bmatrix} f(x_1, t_1) & \dots & f(x_n, t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1, t_m) & \dots & f(x_n, t_m) \end{bmatrix}.$$

Cette notation permet de distinguer une grandeur mathématique de sa mesure discrétisée en un nombre fini de points.

Si  $X$  et  $T$  sont uniformément échantillonnés, avec  $X = [0, d, \dots, (N-1)d]$  et  $T = [0, \dots, N_t - 1] \frac{1}{f_e}$ , où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage temporelle, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de  $\mathbf{f}[X \times T]$  est notée  $\mathbf{F}[K_x \times W]$ , avec  $K_x = \left[-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}\right] \cdot \frac{2\pi}{Nd}$  et  $W = \left[-\frac{N_t}{2} + 1, \dots, \frac{N_t}{2}\right] \cdot \frac{2\pi f_e}{N_t}$ , et est définie par

$$F(k_{x_k}, \omega_l) = \sum_{m=0}^{N_t-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n, t_m) e^{-2i\pi \left( \frac{ln}{N} + \frac{km}{N_t} \right)}.$$

Le signal peut être calculé à partir de son spectre grâce à une transformée de Fourier discrète inverse, définie par

$$f(x_n, t_m) = \frac{1}{NN_t} \sum_{l=0}^{N_t-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(k_{x_k}, \omega_l) e^{2i\pi \left( \frac{nl}{N_t} + \frac{km}{N} \right)}.$$

En exploitant les formules ci-dessus, il apparaît que la complexité d'une TFD de taille  $M \times N$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}(MN)^2$ . L'algorithme de transformée de Fourier rapide proposé par Cooley et Tukey [43], appelé FFT (Fast Fourier Transform), permet de réduire le nombre d'opérations à  $\mathcal{O}(MN \log_2(MN))$ , et est largement répandu dans la plupart des langages de programmation.

### 1.3.2 Algorithmes de reconstruction en imagerie mono-statique

La méthode précurseur dans le domaine  $f$ - $k$  a été proposée par Stolt à la fin des années 1970 pour l'imagerie sismique [13, 12]. Cette méthode a été introduite dans le cadre de

l'imagerie mono-statique où un seul traducteur joue le rôle d'émetteur et de récepteur et est déplacé pour acquérir un maximum de signaux. Le mode d'acquisition est donc le même que celui présenté en 1.2.1 en imagerie SAFT multi-éléments.

#### a) Méthode de Stolt

La méthode de Stolt est basée sur le modèle des réflecteurs explosifs (ERM : exploding reflector model). Celui-ci stipule que la propagation aller-retour d'ondes rétro-diffusées par des réflecteurs ponctuels dans un milieu de célérité  $c$  est, du point de vue des récepteurs, équivalente à considérer les réflecteurs comme des sources actives "explosant" simultanément à  $t = 0$  dans un milieu de célérité  $\hat{c} = c/2$  [12]. Autrement dit, le concept d'ERM ramène le problème d'imagerie active à un problème d'imagerie passive où toutes les sources acoustiques dans le milieu émettent au même instant.

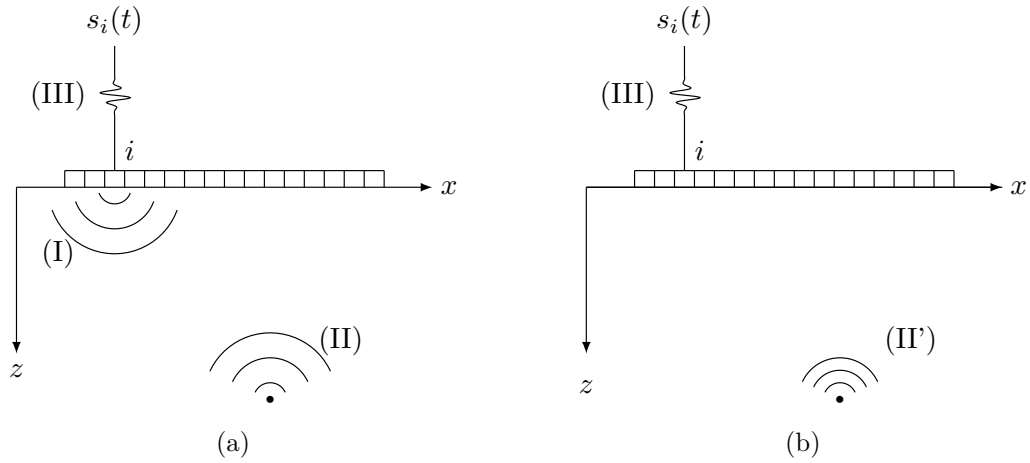


Fig. I.7 Principe des réflecteurs explosifs : (a) dans le milieu physique, l'élément  $i$  émet un signal impulsionnel (I), rétro-diffrusé par des réflecteurs dans le milieu (II), et enregistre les échos (III) ; (b) dans le milieu des réflecteurs explosifs, de célérité  $c/2$ , des sources primaires explosent à  $t = 0$  (II') et les échos sont mesurés par l'émetteur  $i$  (III).

En suivant cette analogie, un couple émetteur/récepteur opérant dans un milieu de célérité  $c$  dans lequel existent des réflecteurs ponctuels agissant comme des sources secondaires (voir figure I.6.a) et un récepteur opérant dans un milieu de célérité  $c/2$  dans lequel des sources "explosent" à  $t = 0$  (figure I.6.b) doivent enregistrer le même signal, ou du moins, mesurer deux ondes acoustiques dont les phases coïncident. Dans le milieu des réflecteurs explosifs, l'image est réalisée en calculant le champ acoustique  $\phi(x, z, t)$  à  $t = 0$ , correspondant à l'instant de l'explosion. Puisque  $\phi(x, z, t)$  vérifie l'équation de D'Alembert dans le matériau, son spectre  $\Phi(x, z, \omega)$  satisfait l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0$$

La transformée de Fourier spatiale par rapport à  $x$  de cette équation montre que  $\Phi(k_x, z, \omega)$

vérifie

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k_z^2 \Phi = 0 \quad (\text{I.6})$$

où

$$k_z^2 = \left( \frac{\omega}{\hat{c}} \right)^2 - k_x^2,$$

Le domaine des fréquences  $(k_x, k)$  (ou  $(k_x, \omega)$ ) associées aux ondes propagatives ( $k_z^2 \geq 0$ ) se propageant dans la pièce est la région  $\mathcal{H}$  définie par

$$\mathcal{H} = \left\{ |k_x| \leq \frac{\omega}{\hat{c}} \right\}.$$

On appelle *cône des ondes propagatives* l'ensemble des couples de fréquences  $(k_x, \omega)$  correspondant à des ondes se propageant à des fréquences appartenant à la bande passe  $[0, f_{\max}]$  du traducteur (cf. fig I.8.a).

D'après l'équation (I.6),  $\Phi(k_x, z, \omega)$  est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et s'écrit donc comme somme d'une onde se propageant selon les  $z$  croissants et d'une autre se propageant selon les  $z$  décroissants. Puisque tous les réflecteurs sont situés dans le demi-espace  $z > 0$ , seule la composante se propageant selon les  $z$  décroissants est non nulle, et le spectre en toute profondeur  $z > 0$  s'exprime en fonction du spectre mesuré en  $z = 0$  :

$$\begin{aligned} \Phi(k_x, z, \omega) &= \Phi(k_x, z = 0, \omega) \exp \left( i \sqrt{\left( \frac{\omega}{\hat{c}} \right)^2 - k_x^2} z \right) \\ &= S(k_x, \omega) e^{i \sqrt{4k^2 - k_x^2} z}. \end{aligned}$$

où  $4k^2 = \omega^2 / \hat{c}^2$  en vertu de  $\hat{c} = c/2$ .

**Remarque :** Plus généralement, le champ à une profondeur  $z + \Delta z > z$  peut être déduit du champ à une profondeur  $z$  par la formule dite d'extrapolation de champ selon les  $z$  croissants

$$\Phi(k_x, z + \Delta z, \omega) = \Phi(k_x, z, \omega) e^{i \sqrt{4k^2 - k_x^2} \Delta z}.$$

Finalement, l'image des réflecteurs dans le milieu physique est obtenue par transformée de Fourier 2D inverse de l'équation (I.22), puis exprimée à l'instant  $t = 0$ , ce qui s'écrit :

$$\phi(x, z, 0) = \iint S(k_x, \omega) e^{i k_x x + i \sqrt{4k^2 - k_x^2} z} dk_x d\omega. \quad (\text{I.7})$$

L'équation (I.7) fournit le champ acoustique à  $t = 0$ , interprété comme une image échographique du milieu, à partir de la mesure de celui-ci en  $z = 0$ . Néanmoins, elle fait apparaître une transformée de Fourier non uniforme, car l'argument dans l'exponentielle complexe n'est pas linéaire en  $\omega$ . Afin de recourir à la FFT, cette intégrale peut être reformulée comme une transformée de Fourier uniforme. En posant

$$\omega(k_x, k_z) = \hat{c} \operatorname{signe}(k_z) \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad (\text{I.8})$$

et en opérant un changement de variable dans l'intégrale (I.24), l'équation d'imagerie est exprimée sous forme d'une transformée de Fourier uniforme en  $k_x$  et  $k_z$  :

$$\phi(x, z, 0) = \iint \frac{\hat{c}k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} S(k_x, \omega(k_x, k_z)) e^{ik_x x + ik_z z} dk_x dk_z. \quad (\text{I.9})$$

La relation (I.8) décrit comment ré-échantillonner le spectre  $S(k_x, \omega)$  selon la dimension  $\omega$  pour former une image. L'intégrale (I.9) fait apparaître le jacobien  $J(k_x, k_z) = \frac{\hat{c}k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$ . L'intérêt de cette formulation est que l'argument de l'exponentielle complexe est linéaire en  $k_x$  et  $k_z$ , ce qui signifie que le calcul de cette intégrale peut se faire numériquement par utilisation d'une IFFT (IFFT : Inverse Fast Fourier Transform). En se souvenant que  $\phi(x, z, 0)$  donne l'image de la distribution de diffuseurs  $g(x, z)$ , l'équation d'imagerie peut s'écrire de manière équivalente

$$g(x, z) = \mathcal{F}_{x,z}^{-1} \left\{ \frac{\hat{c}k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} S(k_x, \omega(k_x, k_z)) \right\},$$

où  $\mathcal{F}_{x,z}^{-1}$  désigne une transformée de Fourier inverse bidimensionnelle. Cette dernière équation s'écrit de manière équivalente dans le domaine de Fourier :

$$G(k_x, k_z) = \frac{ck_z}{2\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} S(k_x, \omega(k_x, k_z)). \quad (\text{I.10})$$

### b) Algorithme du nombre d'onde

Le modèle proposé par Stolt décrit une méthode d'imagerie passive dans un milieu virtuel particulier où toutes les sources rayonnent au même instant. L'algorithme du nombre d'onde que l'on introduit ci-dessous utilise aussi un mode d'inspection monostatique, où émetteurs et récepteurs sont confondus, mais est basé sur autre un modèle direct de propagation aller-retour entre le réseau et une distribution de diffuseurs [19]. Plus précisément, il consiste à écrire le champ mesuré par le capteur comme la superposition d'ondes cylindriques rétro-diffusées par une distribution  $g(x, z)$  de diffuseurs ponctuels. En notant  $\mathbf{r}_u = (u, 0)$  le vecteur position d'un élément, le modèle direct simplifié s'écrit :

$$S(u, \omega) = \iint H_0^{(2)}(2k\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|) g(x, z) dx dz. \quad (\text{I.11})$$

Ici, la fonction de Hankel de deuxième espèce  $H_0^{(2)}(2k\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|)$  décrit la propagation aller-retour d'une onde cylindrique entre l'émetteur/récepteur et un réflecteur de coordonnées  $\mathbf{r} = (x, z)$ . Elle peut être approximée par une exponentielle complexe en ne tenant pas compte de la décroissance en  $1/\sqrt{\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|}$ , ce qui s'écrit

$$S(u, \omega) \approx \iint e^{2ik\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|} g(x, z) dx dz.$$

Il est alors possible d'inverser cette équation en utilisant la méthode de la phase stationnaire [44] pour exprimer le spectre de l'image en fonction du spectre du signal mesuré. Pour éviter l'approximation ci-dessus, une méthode plus rigoureuse consiste à exploiter l'identité de Weyl [20] qui exprime la fonction de Hankel en somme continue d'ondes

planes, puis à inverser l'équation (I.11), donnant une expression analytique exacte du spectre image en fonction du spectre signal. L'identité de Weyl s'écrit :

$$H_0^{(2)}(2k\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_u(x-u)+i\sqrt{4k^2-k_u^2}z}}{\sqrt{4k^2-k_u^2}} dk_u. \quad (\text{I.12})$$

En injectant (I.12) dans (I.11) et en appliquant une transformée de Fourier selon la direction  $u$ , le spectre  $S(k_u, \omega)$  s'écrit

$$S(k_u, \omega) = \iint g(x, z) \frac{e^{ik_u x + i\sqrt{4k^2-k_x^2}z}}{\sqrt{4k^2-k_x^2}} dx dz,$$

ou, de manière équivalente,

$$S(k_u, \omega) = \frac{G(k_u, \sqrt{4k^2-k_u^2})}{\sqrt{4k^2-k_u^2}}.$$

En posant  $\omega(k_x, k_z) = \frac{c\sqrt{k_x^2+k_z^2}}{2}$ , c'est-à-dire comme fait précédemment pour la méthode de Stolt, le spectre  $G(k_x, k_z)$  de l'image s'exprime comme un ré-échantillonnage en  $\omega$  de spectre du signal mesuré  $S(k_u, \omega)$  :

$$G(k_x, k_z) = k_z S(k_x, \omega(k_x, k_z)). \quad (\text{I.13})$$

La transformation du cône des ondes propagatives  $\mathcal{H} \cap \{0 \leq \omega \leq 2\pi f_{\max}\}$  par l'application  $(k_u, \omega) \mapsto (k_u, \sqrt{4k^2-k_u^2})$  est illustrée sur la Figure I.8. Ce ré-échantillonnage est commun à la méthode de Stolt et à l'algorithme du nombre d'onde pour des acquisitions mono-statiques.

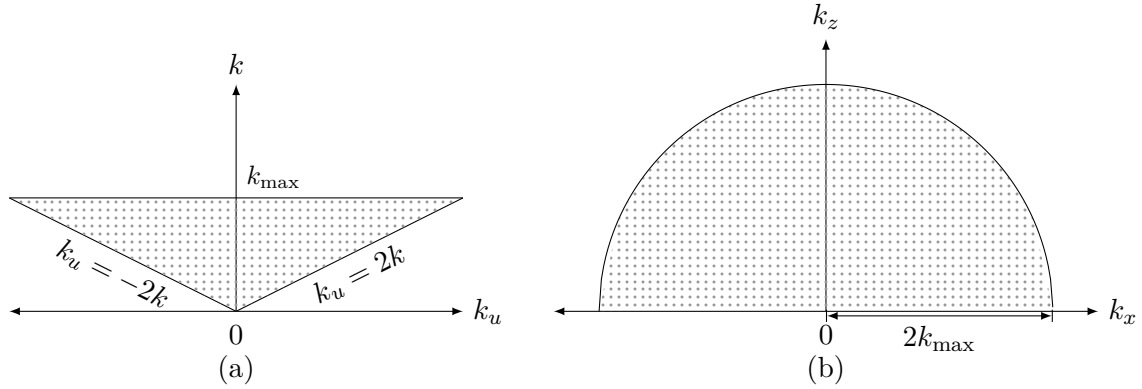


Fig. I.8 (a) Cône des ondes propagatives (support du spectre du signal mesuré  $S(k_u, \omega)$ ) tracé dans le plan  $k_u$ - $k$ . (b) support du spectre de l'image reconstruite par les méthodes  $f$ - $k$  mono-statiques dans le plan  $k_x$ - $k_z$ . Ce dernier est obtenu en appliquant la transformation  $(k_u, \omega) \mapsto (k_u, \sqrt{4k^2-k_u^2})$  au spectre signal.

Les expressions des spectres obtenus par les deux méthodes ne diffèrent que par les

termes multiplicatifs  $\frac{ck_z}{2\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$  (pour Stolt) et  $k_z$  (pour l'algorithme du nombre d'onde). L'étape clé dans le processus de reconstruction est l'étape de ré-échantillonnage spectral. Numériquement, cette étape consiste à interpoler le spectre reçu sur la grille de fréquences  $\omega$  selon l'équation (I.8). Le paragraphe ci-dessous décrit les étapes de l'implémentation numérique des deux méthodes, ainsi que le ré-échantillonnage spectral et les complexités algorithmiques.

### c) Implémentation et complexité algorithmique

Les méthodes présentées précédemment ont été décrites dans le contexte de fonctions continues. En pratique, leur implémentation requiert la discrétisation décrite en I.3.1.b. La mesure est donnée par  $\mathbf{s}(U \times T)$  avec  $U = [0, \dots, (N-1)d]$  et  $T = [0, \dots, N_t - 1] \frac{1}{f_e}$ , et sa transformée de Fourier discrète est  $\mathbf{S}(K_u \times W)$  avec

$$\begin{cases} K_u = \left[ -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \right] \cdot \frac{2\pi}{Nd} \\ W = \left[ -\frac{N_t}{2} + 1, \dots, \frac{N_t}{2} \right] \cdot \frac{2\pi f_e}{N_t} \end{cases}$$

De même, l'image du milieu de largeur  $L_x$ , de hauteur  $L_z$ , et subdivisée en  $N_x \times N_z$  pixels, est notée  $g(X \times Z)$  où  $X = \left[ -\frac{N_x}{2} + 1, \dots, \frac{N_x}{2} \right] \frac{L_x}{N_x}$  et  $Z = [0, \dots, N_z - 1] \frac{L_z}{N_z}$ . Sa transformée de Fourier discrète est notée  $\mathbf{G}(K_x \times K_z)$  avec

$$\begin{cases} K_x = \left[ -\frac{N_x}{2} + 1, \dots, \frac{N_x}{2} \right] \cdot \frac{2\pi}{L_x} \\ K_z = \left[ -\frac{N_z}{2} + 1, \dots, \frac{N_z}{2} \right] \cdot \frac{2\pi}{L_z} \end{cases}$$

La figure I.9 présente les schémas synoptiques des méthodes  $f$ - $k$  en distinguant la formulation analytique portant sur des fonctions continues (colonne (A)) de l'implémentation numérique (colonne (B)). En imagerie mono-statique, les étapes de calcul sont identiques pour la méthode de Stolt et l'algorithme du nombre d'onde car le processus de formation d'image ne diffère que par la nature du filtre en facteur du spectre du signal ré-échantillonné (cf. équations (I.10) et (I.13)). Pour éviter d'avoir à interpoler selon la direction horizontale, il est avantageux de reconstruire l'image sur une grille de nombres d'onde satisfaisant  $K_x = K_u$ , ou vérifiant  $N_x/L_x = 1/d$ . Ainsi, l'étape (b) d'interpolation consiste en une interpolation 1D du spectre selon la dimension  $\omega$ , à la place d'une interpolation 2D sur la grille  $k_u$ - $\omega$  qui est plus coûteuse en nombre d'opérations. La Figure I.10(a) donne la grille  $(K_u \times W) \cap \mathcal{H}$ , sur laquelle le spectre du signal mesuré est échantillonné, et la Figure I.10(b) représente la grille sur laquelle  $\mathbf{S}$  doit être interpolée pour former l'image.

Cette description des algorithmes permet de déduire la complexité algorithmique  $\mathcal{C}_{f-k}$

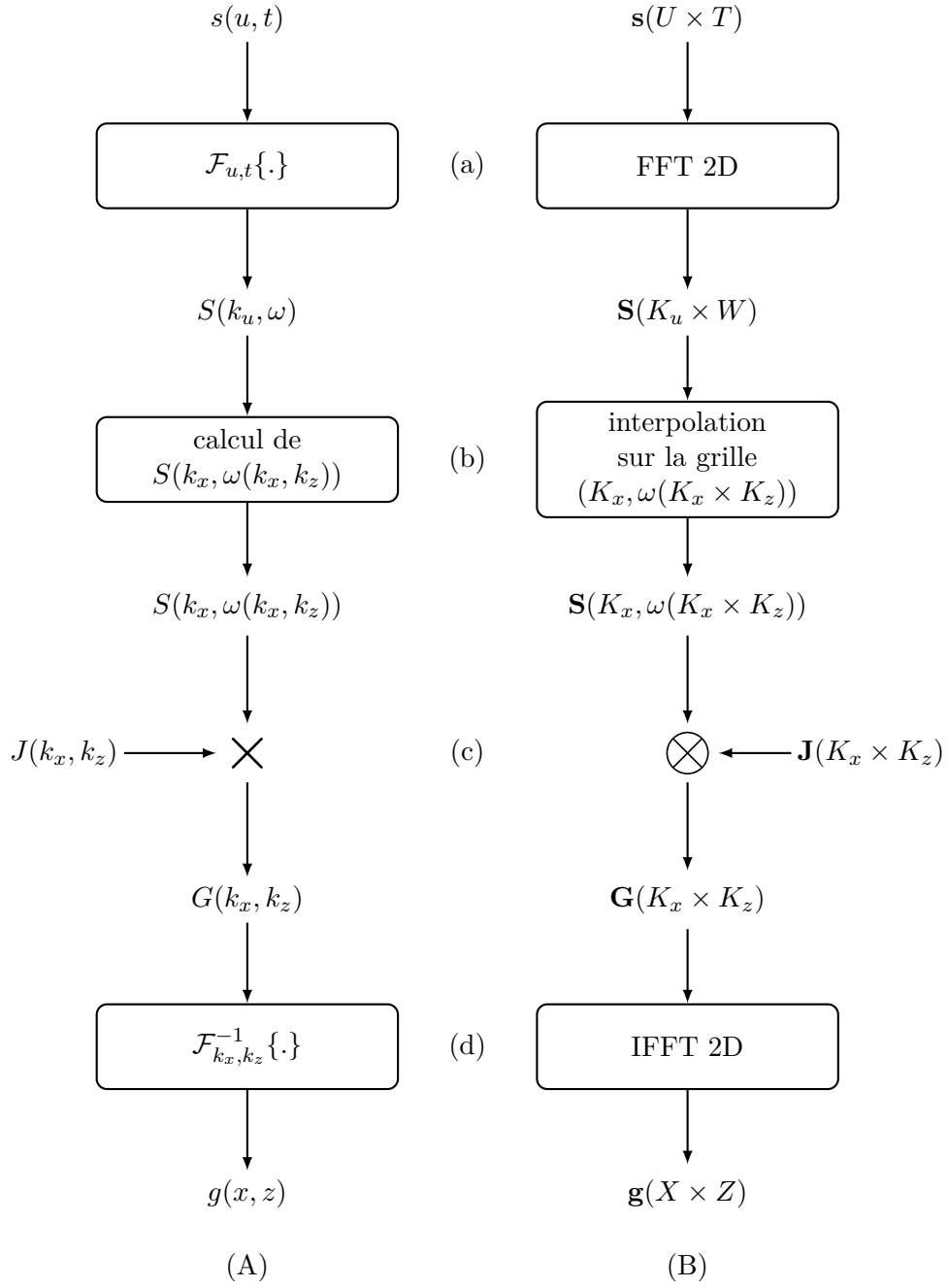


Fig. I.9 Étales de calcul (a) à (d) en imagerie mono-statique dans le domaine  $f$ - $k$ . Colonne (A) : décomposition de l'algorithme d'imagerie dans le cas de fonctions continues. Colonne (B) : étapes de la formation d'une image lors de l'implémentation numérique de l'algorithme.  $J(k_x, k_z) = \frac{\partial k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$  pour la méthode de Stolt, et  $J(k_x, k_z) = k_z$  pour l'algorithme du nombre d'onde.

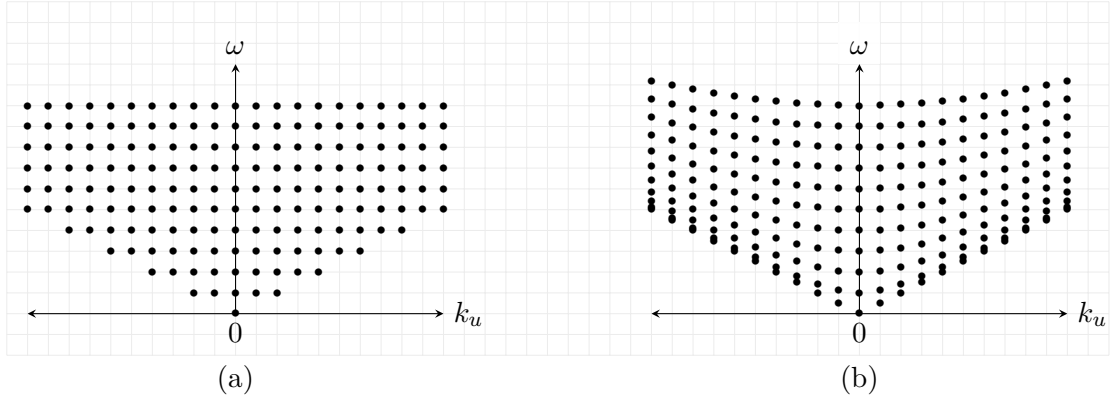


Fig. I.10 (a) Grille d'échantillonnage du spectre mesuré  $\mathbf{S}(K_u \times K)$  avec  $K_u = [-10, -9, \dots, 10]$  et  $W = [0, 1, \dots, 10]$ , dans le cas où  $c = 1$ . Seuls les nombres d'onde du maillage appartenant au cône des ondes propagatives  $\mathcal{H} = \{|k_u| \leq \frac{\omega}{2} \leq 5\}$  sont affichés. (b) Grille de ré-échantillonnage pour  $K_z = [0, \dots, 10]$  et  $K_x = K_u$ . Les valeurs de  $S$  sur cette nouvelle grille sont calculées par interpolation 1D des valeurs de  $\mathbf{S}[K_u \times W]$ .

| Etape                           | Nombre d'opérations<br>(additions ou multiplications) |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------|
| (a) FFT directe                 | $\mathcal{O}(NN_t \log_2(NN_t))$                      |
| (b) Rééchantillonnage spectral  | $\mathcal{O}(N_x N_z)$                                |
| (c) Pondération par le jacobien | $\mathcal{O}(N_x N_z)$                                |
| (d) FFT inverse                 | $\mathcal{O}(N_z N_z \log_2(N_x N_z))$                |

TABLE I.2 – Complexités algorithmiques des différentes étapes de calculs impliquées dans la formation d'une image par la méthode de Stolt ou l'algorithme du nombre d'onde

de la méthode de Stolt et de l'algorithme du nombre d'onde mono-statique :

$$\mathcal{C}_{f-k} = \mathcal{O}(NN_t \log_2(NN_t) + N_x N_z \log_2(N_x N_z)).$$

Les détails des complexités pour chaque étape sont donnés dans le tableau I.2. Dans le cas où  $N_x$  et  $N_z$  sont très supérieurs au nombre de points de mesure  $N$ , le rapport des complexités entre la méthode SAFT et l'imagerie  $f$ - $k$  prend la forme asymptotique

$$\frac{\mathcal{C}_{SAFT}}{\mathcal{C}_{f-k}} \approx \frac{N}{\log_2(N_x N_z)}.$$

Pour  $N = 64$  et un nombre de pixels  $N_x N_z = 1024^2$ , ce qui est la borne supérieure des tailles d'images considérées dans ce manuscrit en imagerie 2D, ce rapport est égal à 3,2.



### I.3.3 Algorithme du nombre d'onde en imagerie multi-statique

La démarche présentée dans le cadre de l'algorithme du nombre d'onde en imagerie mono-statique se généralise au cas où l'émetteur et le récepteur sont distincts. La méthode qui suit a été développée par Hunter *et al.* dans [21] et est l'équivalent fréquentiel de la méthode TFM car basée sur une acquisition FMC. On notera dans la suite  $S(u, v, \omega)$  le spectre du signal reçu par l'élément à la position  $\mathbf{r}_u = (u, 0)$  quand l'élément  $\mathbf{r}_v = (v, 0)$  est utilisé en émission. Le modèle direct de propagation dans le cas où l'émetteur est en  $\mathbf{r}_u$ , considéré comme une source ponctuelle, et le récepteur est en  $\mathbf{r}_v$ , prend alors la forme

$$S(u, v, \omega) = \iint H_0^{(2)}(k\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|)g(x, z)H_0^{(2)}(k\|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}\|)dxdz.$$

Cette formulation intégrale est un modèle décrivant une composante de la matrice  $\mathbf{K}(\omega)$  quand le réseau est considéré comme une ligne continue d'émetteurs-récepteurs. En remplaçant les fonctions de Hankel par leur décomposition de Weyl, la transformée de Fourier 3D du signal mesuré peut être exprimée en fonction du spectre  $G(k_x, k_z)$  de l'image [21]

$$S(k_u, k_v, \omega) = \frac{G\left(k_v + k_u, \sqrt{k^2 - k_u^2} + \sqrt{k^2 - k_v^2}\right)}{\sqrt{k^2 - k_u^2}\sqrt{k^2 - k_v^2}}. \quad (\text{I.14})$$

Par rapport à une acquisition mono-statique, le spectre 2D image est exprimé ici en fonction du spectre 3D du signal enregistré. Plus précisément, chaque triplet de fréquences  $(k_u, k_v, k)$  permet de calculer le spectre image  $G$  pour un couple  $(k_x, k_z)$  de fréquences de l'image défini par

$$\begin{cases} k_x &= k_u + k_v \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_u^2} + \sqrt{k^2 - k_v^2} \end{cases}$$

Pour une fréquences spatiale "en émission"  $k_v$  fixé, le ré-échantillonnage spectral peut être défini en introduisant l'application

$$\begin{aligned} \xi_{k_v} : \quad \mathcal{H}_{k_v} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ (k_u, k) &\longmapsto (k_u + k_v, \sqrt{k^2 - k_u^2} + \sqrt{k^2 - k_v^2}) \end{aligned}$$

où (voir Fig. I.11(a))

$$\mathcal{H}_{k_v} = \left\{ (k_u, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |k_v| \leq |k_u| \leq k \right\}.$$

La tranche spectrale  $\{S(k_u, k_v, k), (k_u, k) \in \mathcal{H}_{k_v}\}$  permet donc de calculer  $G(k_x, k_z)$  pour  $(k_x, k_z) \in \xi_{k_v}(\mathcal{H}_{k_v})$ . La figure I.11 présente une discrétisation du domaine  $\mathcal{H}_{k_v}$  et son image par l'application  $\xi_{k_v}$  (cf. Figure I.11(b)), qui donne la forme du spectre image élémentaire obtenu pour la fréquence spatiale  $k_v$ . Ainsi, l'application inverse de  $\xi_{k_v}$  est définie par

$$\begin{aligned} \xi_{k_v}^{-1} : \quad \xi_{k_v}(\mathcal{H}_{k_v}) &\longrightarrow \mathcal{H}_{k_v} \\ (k_x, k_z) &\longmapsto \left( k_x - k_v, \frac{\sqrt{(k_z^2 + k_v^2 - (k_x - k_v)^2)^2 + 4k_z^2(k_x - k_v)^2}}{2k_z} \right) \end{aligned}$$

Il est à noter que l'application  $\xi_{k_v}$ , pour un  $k_v$  fixé, n'est pas surjective. Une tranche  $S(\cdot, k_v, \cdot)$  permet donc de calculer le spectre  $G$  dans le domaine  $\xi_{k_v}(\mathcal{H}_{k_v})$ . En faisant varier  $k_v$ , un domaine étendu dans l'espace  $k_x$ - $k_z$  est couvert et une image de qualité de la distribution de réflecteurs est obtenue.

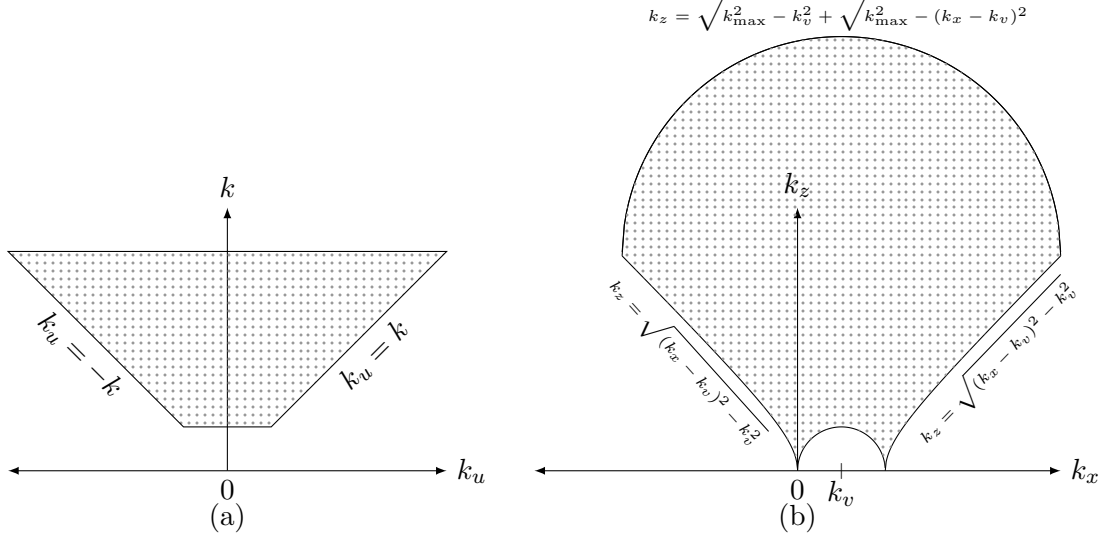


Fig. I.11 Transformation d'un nuage de points linéairement espacés dans le domaine  $\mathcal{H}_{k_v} = \{(k_u, k) \mid |k_v| \leq |k_u| \leq k\}$  (a) par l'application  $\xi_{k_v}$  (b).  $\xi_{k_v}$  transforme une ligne horizontale de  $\mathcal{H}_{k_v}$  en un demi-cercle dans l'espace  $k_x$ - $k_z$ .

L'implémentation de l'algorithme du nombre d'onde multi-statique consiste donc à :

- Effectuer la transformée de Fourier discrète 3D du signal mesuré  $\mathbf{s}(U \times V \times T)$  pour obtenir  $\mathbf{S}(K_u \times K_v \times W)$  (le même réseau étant utilisé en émission réception ici,  $V = U$  et  $K_v = K_u$ ).
- Ré-échantillonner la tranche  $\mathbf{S}(K_u \times \{k_v\} \times W)$  pour tous  $k_v \in K_u$  sur la grille de nombres d'onde  $\xi_{k_v}^{-1}(K_x \times K_z)$ .
- Multiplier terme à terme la matrice du signal ré-échantillonné par  $\sqrt{k^2 - k_u^2} \sqrt{k^2 - k_v^2}$ .
- Sommer les spectres élémentaires pour  $k_v \in K_u$ .
- Effectuer une transformée de Fourier discrète 2D inverse pour obtenir  $\mathbf{g}(X \times Z)$ .

Ceci permet de déduire la complexité de l'algorithme. La FFT directe initiale porte sur le tenseur  $\mathbf{s}(U \times V \times T)$  à 3 dimensions, donc sa complexité est  $\mathcal{O}(N^2 N_t \log_2(N^2 N_t))$ . L'étape d'interpolation doit être effectuée pour chaque  $k_v$  et représente en tout  $\mathcal{O}(N N_x N_z)$  opérations. Enfin, une seule IFFT 2D est utilisée pour obtenir l'image  $g(x, z)$  à partir de son spectre  $G(k_x, k_z)$ . La complexité algorithmique totale de la méthode est donc donnée par :

$$\mathcal{C}_{f-k} = \mathcal{O}(N^2 N_t \log_2(N^2 N_t) + N N_x N_z + N_z N_z \log_2(N_x N_z)).$$

En supposant que le nombre de pixels  $N_x N_z$  est grand devant  $N^2$ , l'étape d'interpolation prévaut sur la FFT 3D initiale et la FFT inverse 2D. La complexité algorithmique prend alors la forme simplifiée

$$\mathcal{C}_{f-k} = \mathcal{O}(N N_x N_z).$$

En conclusion, l'algorithme du nombre d'onde appliqué aux signaux de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  est théoriquement  $N$  fois plus rapide qu'une reconstruction TFM (cf. I.2.2).

Pour  $N = 64$ , le gain maximum attendu en complexité algorithmique est donc de 64. Il convient de souligner que le gain en complexité algorithmique peut être assez éloigné du gain effectif en temps de calcul car les performances dépendent de la plateforme d'implémentation, du langage de programmation, et des optimisations éventuelles du code de calcul. Dans ce manuscrit, pour rester général, nous nous attacherons à donner les gains en complexité algorithmique, qui indiquent une tendance sur les temps de calcul.

### I.3.4 Théorie de Lu en lien avec l'algorithme du nombre d'onde

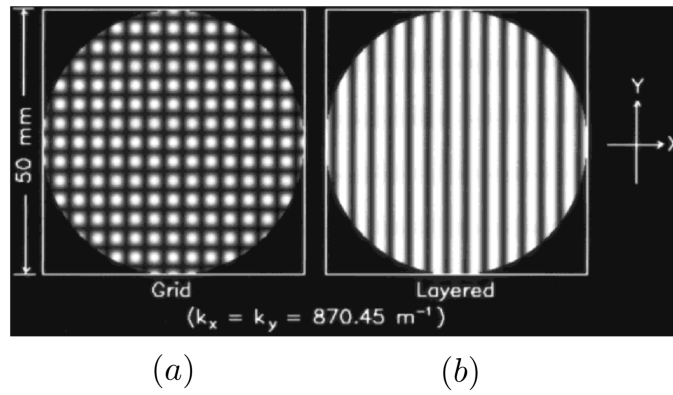


Fig. I.12 Exemples de faisceaux limités en diffraction générés par un capteur 2D circulaire [26] : coupes  $(x, y)$  des faisceaux dans le plan perpendiculaire à l'axe de propagation pour (a) un faisceau en grille ( $\Phi(x, y, z, t) = \cos(k_x z) \cos(k_y y) e^{ik_z z - i\omega t}$ ) et (b) un faisceau en réseau de fentes ( $\Phi(x, y, z, t) = \cos(k_y y) e^{ik_z z - i\omega t}$ ).

Dans cette sous-section, nous faisons le lien entre l'algorithme du nombre d'onde multi-statique, basé sur l'acquisition de la matrice inter-éléments, et la méthode de Lu, basée sur l'émission de *faisceaux limités en diffraction*. J. Lu a développé la théorie des faisceaux limités en diffraction dès le milieu des années 90 [23, 24, 25]. Un tel faisceau est caractérisé par un front d'onde dont la forme est indépendante de la distance à la source. L'intérêt en imagerie multi-éléments est que l'onde transmise ne subit pas d'atténuation par étalement spatial, et l'amplitude de détection reste relativement homogène à différentes profondeurs. D'autre part, comme ces faisceaux se caractérisent par une grande profondeur de champ (cf. I.1.3), il est possible de focaliser en réception le long de l'axe de tir avec une résolution spatiale quasi homogène. Par exemple, une onde plane (cf. I.1.2) est un cas particulier de faisceau limité en diffraction (FLD). En pratique, du fait de l'ouverture finie des capteurs, il n'est pas possible d'émettre une onde strictement non diffractante. Lu définit le champ acoustique correspondant à un FLD au point  $\mathbf{r} = (x, z)$  par [26] :

$$\Phi_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(k) e^{ik_v x + ik_z z - i\omega t} dk,$$

où  $k_v \in \mathbb{R}$  est une constante définissant la première composante du vecteur d'onde,  $k_z = \sqrt{k^2 - k_v^2}$ , et  $H(k)$  est la fonction de Heaviside. Pour former un FLD avec un traducteur linéaire, une loi d'apodisation exponentielle est appliquée. Le coefficient de pondération en émission pour un émetteur  $n \in \{1, \dots, N\}$  est alors défini par [23]

$$c(n) = e^{ik_v nd}.$$

en rappelant que  $d$  est le pas inter-éléments. D'un point de vue expérimental, cette pondération complexe du réseau en émission nécessite de procéder à deux tirs successifs avec les coefficients réels  $a(n) = \cos(k_v nd)$  et  $b(n) = \sin(k_v nd)$ . Les échos du milieu  $s_{a,m}(t)$  et  $s_{b,m}(t)$  correspondant à ces deux émissions sont ensuite enregistrés avec tous les récepteurs  $m$ , et les réponses du milieu à deux FLDs dont les nombres d'onde en émission sont  $k_v$  et  $-k_v$  sont synthétisées *a posteriori* en calculant les sommes  $s_{k_v,m}(t) = s_{a,m}(t) + is_{b,m}(t)$  et  $s_{-k_v,m}(t) = s_{a,m}(t) - is_{b,m}(t)$ . Notons que ces signaux peuvent être exprimés à partir de la matrice  $\mathbf{K}(t)$ . On a par exemple :

$$s_{k_v,m}(t) = \sum_{n=1}^N e^{ik_v nd} K_{mn}(t).$$

Ainsi, une autre manière d'obtenir la réponse du milieu à un FLD est d'apodiser le réseau en réception via une transformée de Fourier spatiale 1D de la matrice  $\mathbf{K}(t)$ .

Lu montre que le spectre  $S(k_u, \omega)$  mesuré pour un FLD émis avec un vecteur d'onde  $(k_v, \sqrt{k^2 - k_v^2})$  et le spectre  $G$  de la distribution de réflecteurs sont liés par la relation [23]

$$S(k_u, \omega) = H(k)G\left(k_v + k_u, \sqrt{k^2 - k_v^2} + \sqrt{k^2 - k_u^2}\right). \quad (\text{I.15})$$

Cette équation d'imagerie définissant la méthode de Lu est très proche de l'équation de l'algorithme du nombre d'onde (I.14) en imagerie multi-statique pour un nombre d'onde  $k_v$ . En fait, si  $N$  FLD sont émis en choisissant  $k_v = \frac{2\pi m}{D}$ ,  $m = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$ , alors la méthode de Lu et l'algorithme du nombre d'onde sont équivalents, au terme multiplicatif  $\sqrt{k^2 - k_u^2} \sqrt{k^2 - k_v^2}$  près. Bien que les équations d'imagerie de la méthode de Lu et de l'algorithme du nombre d'onde soient équivalentes, les deux méthodes diffèrent sur les points suivants : l'algorithme du nombre d'onde nécessite  $N$  tirs pour l'acquisition de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  et une FFT 3D de celle-ci. Pour un nombre de FLDs équivalent, la méthode de Lu nécessite la formation de  $N$  FLDs ( $N/2$  tirs avec une loi d'apodisation en sinus et  $N/2$  en cosinus), et la réponse du milieu à chaque FLD est passée dans le domaine de Fourier à l'aide d'une FFT 2D avant d'appliquer la formule d'imagerie (I.15). Il n'est pas toujours possible d'appliquer des lois de pondérations arbitraires avec les systèmes d'acquisition, auquel cas il est nécessaire de recourir à la matrice  $\mathbf{K}(t)$ . Si le système d'acquisition permet une telle pondération, l'imagerie basée sur des FLD a l'avantage de nécessiter  $N$  FFT 2D sur des matrices de taille  $N \times N_t$ , soit  $\mathcal{O}(N^2 \log_2(NN_t))$  opérations, plutôt qu'une FFT 3D sur la matrice  $\mathbf{K}(t)$  de dimension  $N \times N \times N_t$ , correspondant à  $\mathcal{O}(N^2 \log_2(N^2 N_t))$  opérations. La Figure I.13 décrit le support du spectre image obtenu à partir de ces deux FLD.

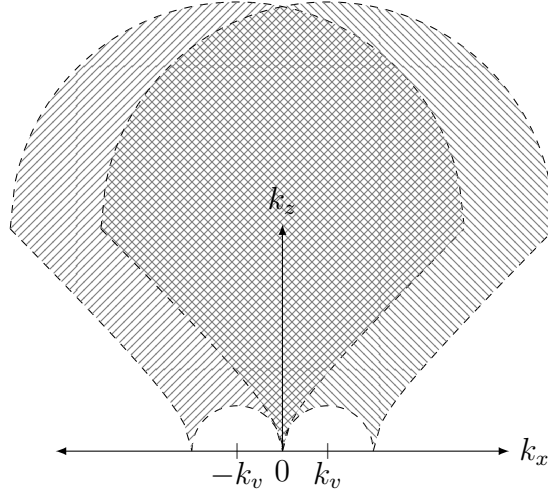


Fig. I.13 Couverture spectrale de deux FLDs de vecteurs d'onde  $(k_v, \sqrt{k^2 - k_v^2})$  et  $(-k_v, \sqrt{k^2 - k_v^2})$  dans l'espace  $k_x$ - $k_z$ . La zone plus foncée correspond aux couples  $(k_x, k_z)$  tels que le spectre  $G(k_x, k_z)$  peut être calculé grâce aux deux ondes émises.

## I.4 Inverse Wavefield Extrapolation (IWEX)

Cette section clôture l'état de l'art en imagerie multi-éléments avec la méthode IWEX (Inverse Wave Field Extrapolation) qui peut être vue comme une reconstruction dans le domaine  $f$ - $x$ , donc à mi-chemin entre les méthodes opérant les domaines  $t$ - $x$  et  $f$ - $k$ . Cette méthode a été retenue dans l'état de l'art car elle est actuellement implémentée dans l'appareil **Applus RTD IWEX 3D Imager** de Applus RTD. Bien que les images 3D ne soient pas affichées en temps-réel, il nous paraît important d'analyser les performances de cette méthode en termes de temps de reconstruction, et la comparer aux précédentes, pour justifier le bien-fondé d'une implémentation dans un appareil de contrôle.

La méthode repose sur une extrapolation du champ en tous points de la zone d'intérêt grâce à la mesure du champ en  $z = 0$ . En utilisant l'intégrale de Rayleigh II [45], le champ acoustique en n'importe quel point  $\mathbf{r}$  de coordonnées  $(x, z)$  peut s'écrire comme la somme des contributions du champ en  $z = 0$ , soit :

$$\Phi(x, z, \omega) \approx -z \sqrt{\frac{-ik}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u, z = 0, \omega) \frac{e^{ik\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|^{3/2}} du. \quad (\text{I.16})$$

Cette équation permet d'extrapoler le champ en profondeur à partir du spectre des signaux enregistrés par le réseau en  $z = 0$ . La décroissance en  $1/\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|^{3/2}$  découle d'une théorie plus générale en 3D où le champ rayonné par la surface émettrice est décrit comme la somme des contributions de sources sphériques. L'équation (I.16) s'obtient ensuite en supposant une invariance du champ rayonné le long de l'axe  $Oy$  perpendiculaire au plan de contrôle, et par une approximation en champ lointain de l'intégrale de Rayleigh en 2D [46]. Par suite, l'amplitude du champ acoustique à  $t = 0$  au point  $\mathbf{r}$  est simplement

donnée par :

$$\phi(\mathbf{r}, 0) = \int_0^{+\infty} \Phi(\mathbf{r}, \omega) d\omega.$$

#### a) Extrapolation de champ inverse en imagerie mono-statique

L'équation (I.16) peut être utilisée pour calculer une image avec une acquisition mono-statique où émetteurs et récepteurs sont confondus. En exploitant le paradigme des réflecteurs explosifs, le champ acoustique mesuré en  $z = 0$  provient de sources primaires dans le milieu de célérité  $c/2$  émettant à  $t = 0$ . En substituant  $2k$  à  $k$  dans (I.16), le spectre du champ en un point  $\mathbf{r}$  du milieu s'écrit

$$\Phi(x, z, \omega) \approx -z \sqrt{\frac{-ik}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u, 0, \omega) \frac{e^{2ik\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|^{3/2}} du,$$

et le champ acoustique à  $t = 0$  est

$$\phi(x, z, 0) \approx -z \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{-ik}{\pi}} \Phi(u, 0, \omega) \frac{e^{2ik\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|^{3/2}} du d\omega.$$

Il s'agit de la formulation intégrale de l'amplitude de l'image IWEX en un point repéré par le vecteur  $\mathbf{r}$ . Sous forme discrète, en notant  $S_m(\omega_l)$  l'amplitude du spectre à la fréquence  $\omega_l$  reçu par l'élément à la position  $\mathbf{r}_m = (u_m, 0)$ , l'amplitude de l'image est donnée par

$$I(\mathbf{r}) \approx -zd \sum_m \sum_l \sqrt{\frac{-i\omega_l}{\pi c}} S_m(\omega_l) \frac{e^{2i\frac{\omega_l}{c}\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\|^{3/2}}.$$

Pour former une image de  $N_x N_z$  pixels, une transformée de Fourier temporelle est appliquée aux  $N$  signaux élémentaires, et les termes  $\frac{e^{2i\frac{\omega_l}{c}\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\|^{3/2}}$  sont calculés pour chaque pixel, fréquence, et récepteur. Ces termes peuvent être calculés et stockés au préalable. La complexité algorithmique de la méthode IWEX en imagerie mono-statique est donc dominée par le calcul de  $N_x N_z$  doubles sommes pour chaque pixel, et vaut asymptotiquement

$$\mathcal{C}_{IWEX} = \mathcal{O}(NN_\omega N_x N_z),$$

où  $N_\omega$  est le nombre de fréquences considérées, dépendant de la fréquence d'échantillonnage et de la bande passante du capteur. Si le signal échantillonné à la fréquence  $f_e$  comporte  $N_t$  points, et si la bande-passante du signal est  $[f_{\min}, f_{\max}]$ , alors

$$N_\omega = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_e} N_t.$$

#### b) Extrapolation de champ inverse en imagerie multi-statique

On considère maintenant les  $N^2$  signaux de la matrice  $\mathbf{K}(\omega)$ , transformée de Fourier temporelle de  $\mathbf{K}(t)$ . En conservant des notations discrètes, une composante de cette matrice est notée  $K_{mn}(\omega_l)$  et désigne le spectre à la fréquence  $\omega_l$  du signal reçu pour l'élément à la position  $\mathbf{r}_m$  lorsqu'on émet avec celui à la position  $\mathbf{r}_n$ . D'après l'équation

(I.16), si on considère un seul couple émetteur/récepteur, le spectre du champ élémentaire qui résulte de l'extrapolation de  $K_{mn}(\omega_l)$  jusqu'au point  $\mathbf{r}$  s'écrit :

$$\tilde{\Phi}_{mn}(\mathbf{r}, \omega_l) \approx -zd \sqrt{\frac{-ik}{2\pi}} K_{mn}(\omega_l) \frac{e^{ik\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|^{3/2}}.$$

Ce champ doit être corrigé en phase et en amplitude pour prendre en compte la propagation de l'émetteur en  $\mathbf{r}_n$  jusqu'au point  $\mathbf{r}$ . En vertu du principe de réciprocité, le champ corrigé  $\Phi_{mn}(\mathbf{r}, \omega_l)$  est défini par :

$$\Phi_{mn}(\mathbf{r}, \omega_l) \approx -z^2 d^2 \frac{ik}{2\pi} K_{mn}(\omega_l) \frac{e^{ik\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|^{3/2}} \frac{e^{ik\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}\|^{3/2}}.$$

Finalement, le spectre du champ total en  $\mathbf{r}$  est la somme des  $N^2$  contributions élémentaires, soit

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega_l) = \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(\mathbf{r}, \omega_l),$$

et l'amplitude de l'image est le champ à  $t = 0$  après transformée de Fourier temporelle inverse [47] :

$$I(\mathbf{r}) \approx -\frac{z^2 d^2 i}{2\pi c} \sum_m \sum_n \sum_l \omega_l K_{mn}(\omega_l) \frac{e^{i\frac{\omega_l}{c}|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}| + i\frac{\omega_l}{c}|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}|^{3/2} |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}|^{3/2}}.$$

Comme précédemment,  $N^2$  FFT temporelles sont effectuées, et les termes en exponentielle sont précalculés. La complexité algorithmique asymptotique de la méthode IWEX pour une acquisition multi-statique est donc

$$\mathcal{C}_{IWEX} = \mathcal{O}(N^2 N_\omega N_x N_z),$$

## I.5 Bilan et comparaison des performances des méthodes d'imagerie

Cette section compare les images obtenues par les méthodes décrites précédemment dans une configuration de contrôle simple décrite sur la Figure I.14. Les signaux de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  correspondante ont été simulés à l'aide du logiciel CIVA développé au CEA List [48, 49, 50]. Les algorithmes d'imagerie mono-statique où émetteurs et récepteurs sont confondus prennent en entrée les signaux correspondant à la diagonale de  $\mathbf{K}(t)$ .

Un réseau de 64 éléments de pas  $d = 0,6$  mm est en contact avec un bloc en acier ferritique (acier 16MND5) dans lequel les ondes longitudinales se propagent avec la vitesse de phase  $c_L = 5,9$  mm  $\mu\text{s}^{-1}$ . Le matériau comporte trois paires de trous de diamètre 1 mm dont la distance centre-à-centre est 2 mm. Enfin, le signal d'émission est un signal gaussien de fréquence centrale  $f_c = 5$  MHz et de bande passante 80% à -6 dB.

La comparaison des performances porte sur six méthodes : SAFT, Stolt et IWEX en acquisition mono-statique ; et TFM, l'algorithme du nombre d'onde (abrégié en  $\omega$ - $k$  dans le tableau I.3) et IWEX en acquisition multi-statique. Comme l'algorithme du nombre d'onde mono-statique est identique à la méthode de Stolt, à un facteur près, cette mé-

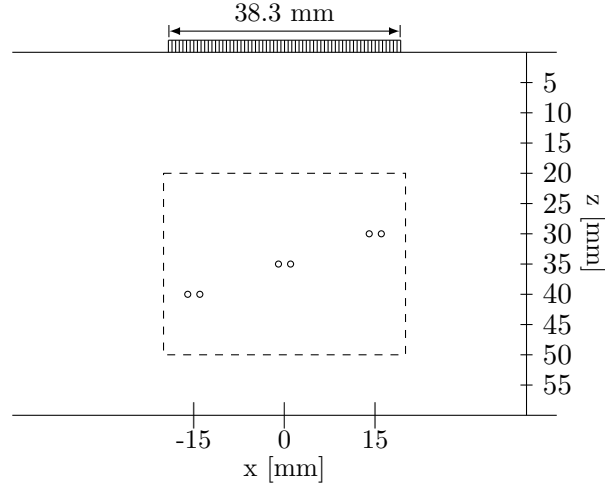


Fig. I.14 Configuration d'inspection définie en simulation pour la comparaison de méthodes avec un capteur au contact d'un bloc d'acier ferritique comportant trois paires de trous latéraux aux profondeurs 30, 35 et 40 mm. Diamètre des trous : 1 mm ; distance centre-à-centre : 2 mm. La zone imagée est représentée en ligne pointillée.

thode n'est pas testée ici dans un souci de concision. Les algorithmes de reconstruction ont tous été implémentés dans Matlab afin de comparer la qualité des images produites et les temps de reconstruction. Il est à noter que ces derniers sont à prendre avec précaution car ils dépendent fortement de l'implémentation. L'algorithme de la FFT est optimisé et particulièrement rapide dans Matlab, ainsi que les opérations matricielles, tandis que les boucles tendent à pénaliser les temps de calcul. Néanmoins, les temps d'exécution des programmes permettent de confirmer les tendances prédites par les complexités algorithmiques.

Les images SAFT, Stolt, et IWEX issues d'une acquisition mono-statique sont affichées dans la colonne de gauche sur la Figure I.15. La résolution spatiale et le bruit de reconstruction sont similaires pour les trois méthodes. Les images TFM, Lu et IWEX obtenues en exploitant tous les signaux de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  sont présentées dans la colonne de droite. Parmi celles-ci, la méthode de Lu offre la meilleure résolution latérale, suivie de la méthode IWEX puis de TFM. Les similarités entre images peuvent s'expliquer en réécrivant l'amplitude des images en un point  $\mathbf{r}$  sous une forme de type "delay and sum". Plus précisément, les équations d'imagerie sont exprimées sous forme d'une somme sur les récepteurs  $n$  et les fréquences  $\omega_l$ . Pour SAFT, l'amplitude de l'image en  $\mathbf{r}$  s'écrit simplement

$$I_{SAFT}(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_l K_{nn}(\omega_l) e^{2i \frac{\omega_l}{c} \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|},$$

où  $K_{nn}(\omega)$  est le spectre du signal reçu par l'élément  $n$  quand ce dernier émet. Pour la méthode IWEX en imagerie mono-statique, l'équation demeure

$$I_{IWEX}(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_l \frac{-zd\sqrt{-i\omega_l}}{\sqrt{\pi c} \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|^{3/2}} K_{nn}(\omega_l) e^{2i \frac{\omega_l}{c} \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|}.$$



| Acquisition                        | Algorithme     | Complexité                           | Temps de calcul |
|------------------------------------|----------------|--------------------------------------|-----------------|
| Mono-statique<br>( $N$ signaux)    | SAFT           | $\mathcal{O}(NN_xN_z)$               | 10 s            |
|                                    | Stolt          | $\mathcal{O}(N_xN_z \log_2(N_xN_z))$ | 0,5 s           |
|                                    | IWEX           | $\mathcal{O}(NN_\omega N_xN_z)$      | 125 s           |
| Multi-statique<br>( $N^2$ signaux) | TFM            | $\mathcal{O}(N^2N_xN_z)$             | 150 s           |
|                                    | $\omega$ - $k$ | $\mathcal{O}(NN_xN_z)$               | 8 s             |
|                                    | IWEX           | $\mathcal{O}(N^2N_\omega N_xN_z)$    | 450 s           |

TABLE I.3 – Complexités des algorithmes d'imagerie en fonction du nombre d'éléments  $N$  et du nombre de pixels  $N_xN_z$ ; temps d'exécution des codes Matlab pour  $N = 64$ , et  $N_xN_z = 1024^2$ .

Enfin, en effectuant un développement asymptotique, Gu *et al.* montrent également que l'amplitude de l'image formée avec l'algorithme de Stolt s'écrit [51]

$$I_{Stolt}(\mathbf{r}) \approx \sum_n \sum_l \frac{2\sqrt{i\pi\omega_l}}{\sqrt{c}\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|} K_{nn}(\omega_l) e^{2i\frac{\omega_l}{c}\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|}.$$

En faisant abstraction des constantes, il apparaît que les méthodes de Stolt et IWEX correspondent à des focalisations en tous points en réception et des pondérations par des filtres en fréquence et en espace. Les termes agissant comme des filtres spatio-fréquentiels sont  $H_n(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\sqrt{\omega_l}}{\sqrt{c}\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|}$  pour Stolt et  $H_n(\mathbf{r}, \omega) = \frac{z\sqrt{\omega_l}}{\sqrt{c}\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|^{3/2}}$  pour IWEX. Pour des réflecteurs placés à des angles faibles par rapport au réseau, et pour  $z \gg x$ , les deux filtres ci-dessus sont équivalents, ce qui explique pourquoi les images données par les deux méthodes sont presque identiques.

La principale différence entre les algorithmes de reconstruction réside dans les complexités algorithmiques et les temps de calcul, qui sont renseignés dans le [Tableau I.3](#) pour les acquisitions mono- et multi-statiques. Comme attendu, les méthodes IWEX sont les plus coûteuses en temps de calcul car, pour chaque pixel, une somme supplémentaire sur les fréquences doit être réalisée. En mode mono-statique, les méthodes  $f$ - $k$  nécessitent  $\mathcal{O}(1)$  opérations pour calculer la valeur du spectre en un couple de nombres d'onde  $(k_x, k_z)$  car la complexité est indépendante du nombre d'éléments  $N$ , tandis que la méthode SAFT requiert  $\mathcal{O}(N)$  opérations et IWEX en nécessite  $\mathcal{O}(NN_\omega)$ . Ceci donne un net avantage à la méthode de Stolt du point de vue du nombre d'opérations. Ces considérations restent vraies pour une acquisition multi-statique FMC puisqu'on voit que le nombre d'opérations pour la méthode de Lu est divisé par  $N$  par rapport à TFM, et IWEX est toujours la plus contraignante car une boucle additionnelle sur les fréquences est nécessaire. Les temps d'exécution des codes Matlab reflètent cette tendance, avec toutefois un gain d'un facteur 18,75 de l'algorithme du nombre d'onde comparé à TFM, inférieur au gain théorique de 64. En effet, les complexités algorithmiques asymptotiques des méthodes  $f$ - $k$  sont valides quand  $N_xN_z \gg NN_t$ , ce qui ne correspond pas tout à fait au cas présent. Dans les prochains chapitres où de plus grandes images seront calculées, notamment en 3D, nous verrons que les gains en temps de calcul reflètent bien mieux les tendances des complexités.

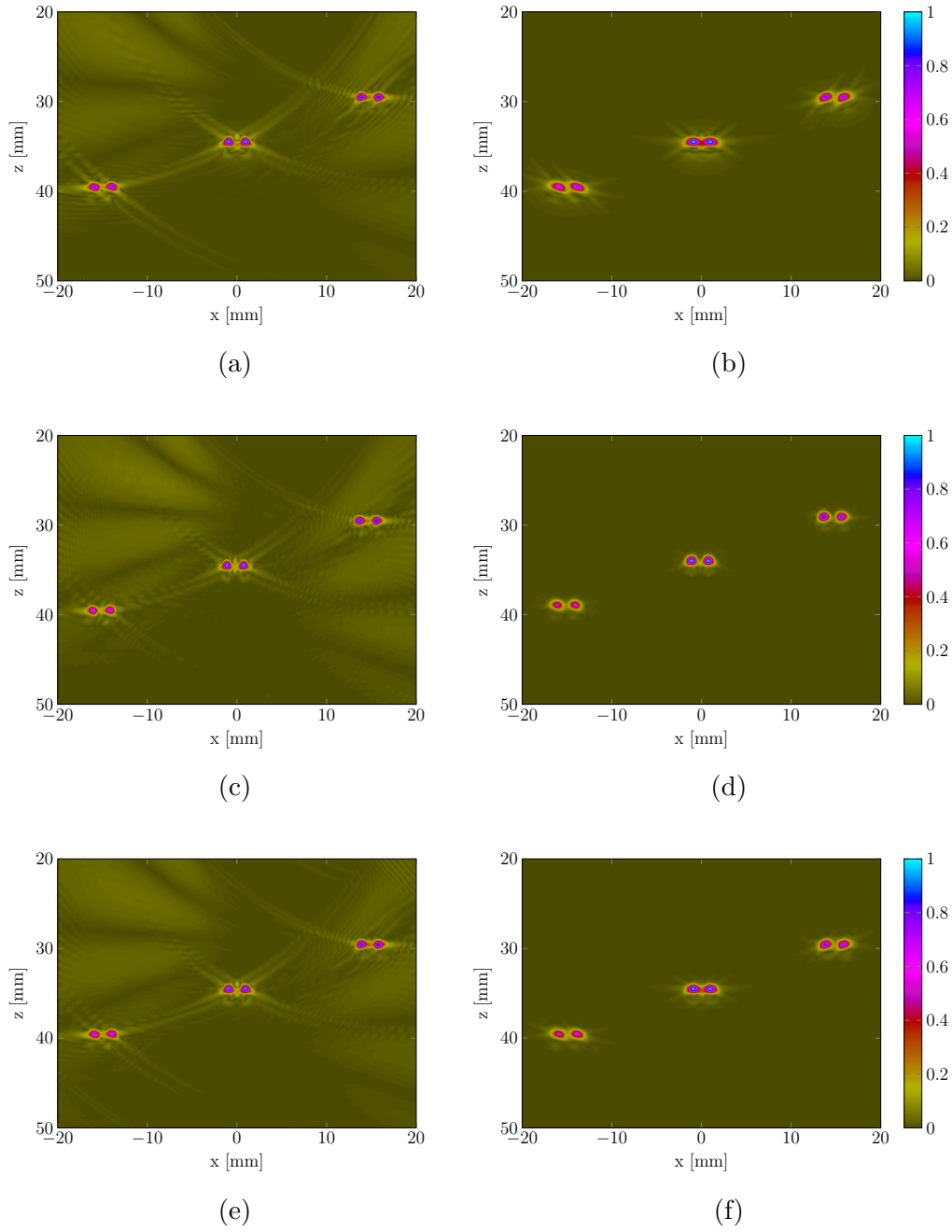


Fig. I.15 Images reconstruites à partir de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  des réponses impulsionnelles inter-éléments simulée avec le logiciel CIVA. Gauche : imagerie mono-statique (diagonale de  $\mathbf{K}(t)$ ) avec les méthodes SAFT (a), Stolt (c) et IWEX (e). Droite : imagerie multi-statique (matrice  $\mathbf{K}(t)$  complète) avec la méthode TFM (b), l'algorithme du nombre d'onde (d) et IWEX (f).

## I.6 Conclusion du chapitre

Dans ce premier chapitre, le principe de l'imagerie multi-éléments a été présenté dans le contexte du CND, ainsi que les modalités de contrôle les plus répandues dans l'industrie. Les méthodes d'imagerie Delay-And-Sum (DAS) utilisant la focalisation en tous points ont ensuite été introduites. Elles se basent sur des émissions divergentes et grâce à une focalisation synthétique en réception (pour SAFT) ou en émission-réception (pour TFM), elles améliorent notablement la qualité des images reconstruites par rapport aux méthodes plus conventionnelles. En se fondant sur les travaux issus des domaines de l'imagerie sismique, radar et médicale, les algorithmes de reconstruction dans le domaine  $f-k$  ont ensuite été détaillés. Par rapport aux méthodes DAS où les images sont directement formées dans le domaine  $t-x$ , le calcul de l'image est effectué dans le domaine de Fourier par interpolation du spectre du signal mesuré. Cette étape d'interpolation étant peu coûteuse, et le passage du domaine spatio-temporel au domaine des fréquences-nombres d'onde se faisant numériquement par le biais de l'algorithme rapide de la FFT, l'imagerie  $f-k$  présente *a priori* un avantage par rapport aux méthode DAS du point de vue du nombre d'opérations.

Enfin, le chapitre se termine par une synthèse des méthodes présentées, ainsi qu'une comparaison de leurs performances graphiques et numériques. Les images sont calculées dans les domaines  $t-x$ ,  $f-x$  et  $f-k$  en post-traitant le même jeu de signaux. Ces derniers sont simulés en considérant un réseau linéaire au contact d'un solide, et l'acquisition simulée correspond à un balayage électronique. Nous démontrons que, bien que différentes par leurs fondements et leur domaine d'origine, les méthodes présentées sont très similaires d'un point de vue graphique car elles reviennent à opérer une focalisation *a posteriori* en tous points pour former l'image. On montre également que les gains en complexité algorithmique et en temps de calcul fournis par les méthodes  $f-k$  les rendent les plus attractives pour des applications en imagerie rapide.

Dans le chapitre qui suit, l'imagerie par ondes planes dans le domaine  $f-k$  est présentée en 2D et 3D, et en traitant une configuration d'inspection plus représentative des cas industriels où le réseau n'est pas au contact direct de l'échantillon. L'idée est de combiner une méthode d'acquisition rapide par émission d'ondes planes et des algorithmes de reconstruction minimisant le nombre d'opérations pour former des images aussi rapidement que possible.

## Chapitre II

# Algorithmes de reconstruction dans le domaine $f$ - $k$ pour l'imagerie 2D et 3D par ondes planes

Dans le précédent chapitre, l'imagerie dans le domaine  $f$ - $k$  a été introduite pour des acquisitions mono- et multi-statiques dont le principe commun est d'exciter individuellement les éléments du réseau pour transmettre des ondes cylindriques divergentes. L'acquisition multi-statique offre de bien meilleures performances en termes de qualité d'image, mais la contrepartie est que le volume de données à transférer, stocker et traiter est important et croît comme le carré du nombre d'éléments. En imagerie 3D, les capteurs matriciels doivent comporter au minimum 256 éléments, et le transfert rapide d'un volume de  $256^2$  signaux représente aujourd'hui un réel frein technologique pour les applications temps-réel en CND. En outre, indépendamment des problèmes liés au transfert et au stockage des données, le nombre important d'opérations à réaliser pour calculer chaque voxel d'une image 3D rend les temps de reconstruction prohibitifs. C'est pourquoi ce chapitre s'intéresse à un mode d'acquisition plus efficace reposant sur l'émission d'ondes planes. Le principal avantage des émissions planes est le fait de pouvoir former une image de qualité satisfaisante avec peu de tirs ultrasonores, ce qui réduit le volume de signaux à collecter, et accélère significativement les traitements car chaque pixel/voxel d'une image nécessite moins d'opérations de calcul. En vue de calculer des images aussi rapidement que possible, on se propose d'adapter les algorithmes de reconstruction dans le domaine  $f$ - $k$  pour les appliquer à des émissions planes. La première section de ce chapitre rappelle le principe de l'imagerie PWI (Plane Wave Imaging) dans le domaine temporel, puis expose les théories de Stolt et de Lu dans le cas simple d'un réseau 1D directement au contact du solide. Les gains en temps de calcul et les différences observées sur les images sont justifiées théoriquement. La deuxième section étend les théories pour traiter des configurations d'inspection fréquentes dans l'industrie où le capteur n'est plus au contact de la pièce, mais placé dans l'eau à une certaine distance de celle-ci. De plus, les méthodes sont évaluées sur leur capacité à imager des réflecteurs situés au-delà de l'ouverture du capteur, ce qui est souvent le cas en CND en raison de contraintes d'accessibilité. Enfin, dans la troisième section, les algorithmes de reconstruction sont généralisés pour former des images 3D avec des capteurs matriciels. En particulier, on démontre expérimentale-

ment que la méthode de Lu fournit des images 3D beaucoup plus étendues que la surface de la matrice, comparables à celles de l'imagerie PWI, avec des temps de calcul réduits d'un facteur pouvant aller jusqu'à 300.

## II.1 Théorie des méthodes $f$ - $k$ pour l'imagerie 2D par ondes planes

Les traducteurs multi-éléments offrent la possibilité d'émettre une grande variété de formes d'ondes en excitant les éléments du réseau avec des retards électroniques appropriés. Comme cela a déjà été mentionné dans le premier chapitre, une forme d'onde particulièrement intéressante pour l'imagerie est l'onde plane car elle ne subit pas de décroissance par étalement cylindrique et, la profondeur de champ étant beaucoup plus importante que celle d'un faisceau focalisé, une image peut être formée avec une seule émission plane en focalisant en réception à toutes profondeurs. Cette section est dédiée à l'imagerie 2D avec un capteur au contact, et rappelle dans un premier temps le principe de l'imagerie PWI (Plane Wave Imaging) dans le domaine temporel. Ensuite, les théories de Stolt et de Lu sont adaptées pour former des images sur la base d'émissions planes. Enfin, cette section compare les complexités algorithmiques des trois méthodes, les temps de calcul, et justifie théoriquement les écarts observés sur les images en reformulant les équations d'imagerie sous forme asymptotique.

### II.1.1 Rappels sur l'imagerie Plane Wave Imaging

L'utilisation d'ondes planes pour l'imagerie ultrasonore a été initiée par Montaldo *et al.* en imagerie médicale [5]. Pour une émission plane, la reconstruction de l'image est réalisée ligne par ligne en focalisant en réception à 4 profondeurs, et l'opération est répétée pour différents angles d'incidence jusqu'à ce que la somme des images élémentaires fournisse une image avec un contraste élevé et une bonne résolution. Lorsque les angles d'incidence sont bien choisis, une dizaine de tirs suffit pour produire une image de qualité comparable à une focalisation en émission et réception à différentes profondeurs. Le Jeune *et al.* ont généralisé la méthode à une focalisation en tous points en réception pour la rendre compatible avec les modalités d'inspections rencontrées en CND (imagerie multimodale, prise en compte d'une interface eau/acier complexe) [7]. C'est cette version de l'imagerie PWI qui est détaillée ici et qui sera considérée tout au long du manuscrit. La Figure II.1 donne la configuration d'inspection en imagerie par ondes planes avec un capteur au contact transmettant une onde d'incidence  $\theta$  dans le matériau. Afin d'émettre une onde plane dans la direction  $\theta$ , les éléments  $n = 1, \dots, N$  du capteur sont excités avec des retards d'émission  $\tau_n(\theta)$  définis comme

$$\tau_n(\theta) = \frac{nd \sin \theta}{c} - \min_{1 \leq j \leq N} \left( \frac{jd \sin \theta}{c} \right).$$

Généralement, plusieurs émissions dans des directions  $\theta_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) sont nécessaires à la formation d'une image de qualité. Les échos provenant du milieu sont enregistrés après chaque tir et stockés sous forme d'une matrice  $\mathbf{S}(t)$  de taille  $N \times M$ . La matrice  $\mathbf{S}(t)$  peut également être synthétisée à partir de la matrice des réponses impulsionnelles inter-

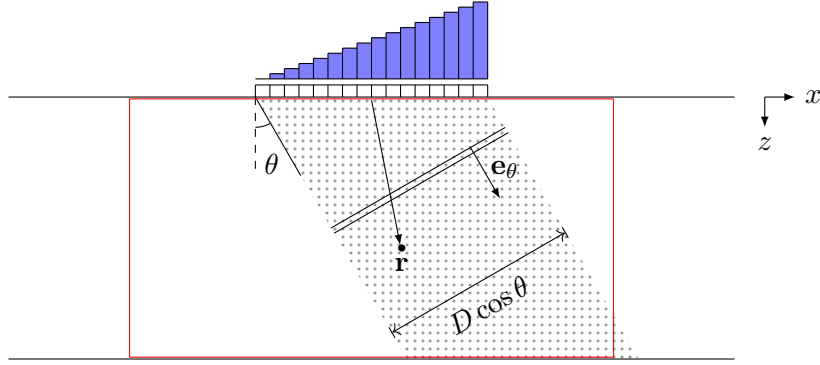


Fig. II.1 Émission d'une onde plane d'incidence  $\theta$  avec un réseau d'ouverture  $D$ . La zone insonnifiée par l'onde plane est représentée en pointillé et la zone de reconstruction est délimitée en rouge.

éléments  $\mathbf{K}(t)$ . En notant  $e(t)$  le signal d'excitation des éléments et  $\hat{e}(f)$  le spectre associé, les composantes de la matrice d'excitation du réseau, notée  $\mathbf{E}(f)$  et de taille  $M \times N$ , ont pour expression  $E_{mn} = \hat{e}(f) \exp(2i\pi\tau_n(\theta_m))$ . Ainsi, les signaux d'une acquisition par émissions planes s'expriment à partir de  $\mathbf{K}(t)$  à l'aide de la relation  $\mathbf{S}(f) = \mathbf{K}(f)\mathbf{E}(f)$  [52, 53]. Ce principe sera souvent mis en œuvre pour changer certains paramètres de l'imagerie PWI (nombre d'angles, pas angulaire, angles inférieur et supérieur) sans avoir besoin de refaire les acquisitions.

Dans toute cette section, l'origine du repère orthonormé  $xOz$  sera prise comme le point à la surface centré sous l'élément 1, c'est-à-dire le plus à gauche. Le temps de propagation du front d'onde plan jusqu'à un réflecteur situé en  $\mathbf{r} = (x, z)$  pour un angle d'incidence  $\theta_m$  est égal à

$$t_m^e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_{\theta_m} \cdot \mathbf{r}}{c} + \tau_1(\theta_m),$$

où  $\mathbf{e}_{\theta_m} = (\sin \theta_m, \cos \theta_m)$  est le vecteur unitaire normal au front d'onde pointant dans la direction de propagation. Le temps de propagation  $t_n^r(\mathbf{r})$  de l'onde rétro-diffusée par le réflecteur jusqu'à un récepteur localisé en  $\mathbf{r}_n = (0, (n-1)d)$  s'écrit

$$t_n^r(\mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}\|}{c}.$$

Pour  $M$  émissions planes avec les angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ , le calcul de l'image PWI en chaque point  $\mathbf{r} = (x, z)$  consiste à pondérer et à sommer de façon cohérente les  $M \times N$  composantes de la matrice  $\mathbf{S}(t)$ . Comme en imagerie TFM (cf. (I.5)), on préfère souvent afficher l'enveloppe de l'image en calculant le module de la somme des signaux analytiques  $\tilde{s}_{mn}(t)$ , soit :

$$I(\mathbf{r}) = \left| \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_m^e(\mathbf{r}) w_n^r(\mathbf{r}) \tilde{s}_{mn}(t_m^e(\mathbf{r}) + t_n^r(\mathbf{r})) \right|, \quad (\text{II.1})$$

où  $w_n^r$  est un coefficient de pondération en réception généralement égal à la directivité élémentaire (cf. (I.3) et (I.4)), et  $w_m^e(\mathbf{r})$  est une fonction de pondération spécifique à l'imagerie en ondes planes. La Figure II.1 représente la zone insonnifiée par une onde plane d'incidence  $\theta$  par un réseau d'ouverture  $D$ . Cette zone est dite effective, il est préférable

de ne pas calculer l'image en dehors de celle-ci afin de ne pas augmenter le temps de calcul et d'éviter les artefacts liés à la diffraction. La zone effective a pour extension  $D \cos \theta$  perpendiculairement à l'axe de tir, où  $D$  est l'ouverture du réseau. La fonction de pondération dans l'équation d'imagerie peut s'exprimer comme :

$$w_m^e(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \tan \theta_m - \frac{D}{2} \leq x \leq z \tan \theta_m + \frac{D}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La zone effective permet de réduire le nombre de pixels à calculer à chaque tir et donc d'accélérer la reconstruction quand la zone à imager est large par rapport à l'ouverture. En notant  $\alpha_m$  le rapport entre l'aire de la zone effective et l'aire de la zone image, la complexité de la méthode PWI prend la forme suivante :

$$\mathcal{C}_{pwi} \approx 4NN_xN_z \sum_{m=1}^M \alpha_m.$$

Le facteur 4 est le nombre d'opérations (2 additions et 2 multiplications) nécessaire pour interpoler linéairement chaque signal temporel et extraire l'amplitude à un temps de vol donné. La réduction du nombre de tirs permet également d'accélérer le processus d'imagerie. Aussi, le choix de la couverture et du pas angulaire est particulièrement important. Pour une couverture angulaire symétrique par rapport à l'axe central du réseau, Lu propose la couverture angulaire [25]

$$\beta_m = \arcsin\left(\frac{m\lambda_0}{D}\right), \quad (\text{II.2})$$

pour  $m = -\frac{M-1}{2}, \dots, \frac{M-1}{2}$ , où  $M$  est le plus petit entier impair strictement supérieur à  $\left\lfloor \frac{2D \sin \theta}{\lambda_0} \right\rfloor$ . Pour conserver des notations avec des indices compris entre 1 et  $M$ , il suffit d'écrire

$$\theta_m = \beta_{m - \frac{M+1}{2}},$$

pour  $m = 1 \dots M$ .

Le premier chapitre a montré que le pendant de la méthode TFM dans le domaine  $f$ - $k$  est la méthode de Lu (ou algorithme du nombre d'onde) quand les signaux sont ceux de la matrice des réponses impulsionnelles inter-éléments  $\mathbf{K}(t)$ . Il ressort de l'analyse de la méthode de Lu (cf. sous-section I.3.4) que l'imagerie TFM revient à émettre des faisceaux limités en diffraction de vecteurs d'onde  $(k_{x_m}, \sqrt{k^2 - k_{x_m}^2})$  où  $k_{x_m} = \frac{2\pi m}{D}$ . La définition des angles ci-dessus permet d'obtenir les mêmes vecteurs d'onde pour une onde plane et un faisceau limité en diffraction à la fréquence centrale  $f_c$ . On obtient ainsi l'image PWI la plus proche possible de l'image obtenue par la méthode TFM quand  $M = 64$ . Ceci est illustré sur la Figure II.2 où les images des paires de réflecteurs sont très similaires. Les signaux ont été simulés avec le logiciel CIVA en reprenant la configuration d'inspection décrite sur la Figure I.14. D'autre part, pour écarter tout biais lié à la simulation des signaux, les deux images ont été calculées en post-traitant la même matrice  $\mathbf{K}(t)$  et en exploitant la relation  $\mathbf{S}(f) = \mathbf{K}(f)\mathbf{E}(f)$  pour PWI.

Dans la suite de ce manuscrit, la méthode PWI sera la méthode de référence pour évaluer l'apport des méthodes  $f$ - $k$  en termes de qualité d'image et de temps de calcul.

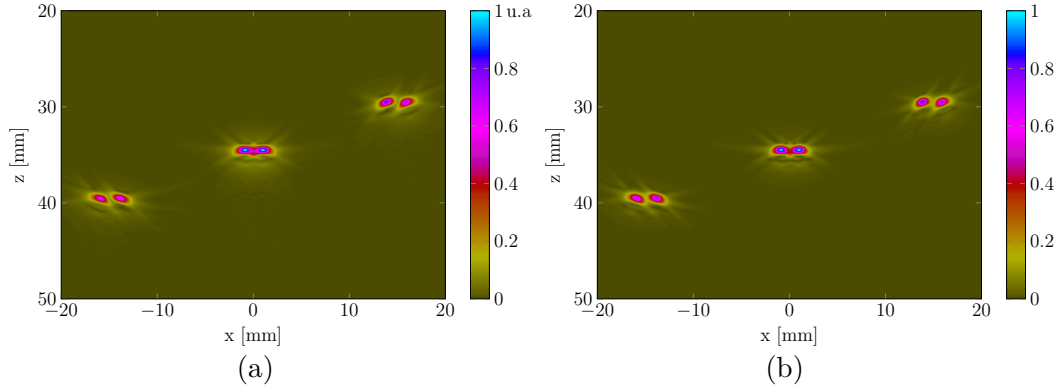


Fig. II.2 Images des paires de réflecteurs à partir de signaux simulés (cf. configuration de simulation sur la figure I.16) : (a) méthode PWI avec les angles d'émissions  $\theta_m$ ,  $m = 1, \dots, 64$  définis par (II.2), (b) méthode TFM.

Dans la sous-section ci-après, la méthode de Stolt est adaptée pour être compatible avec des données acquises par émissions planes.

### II.1.2 Adaptation de la méthode de Stolt à des émissions planes

Dans le chapitre 1, la méthode de Stolt a été présentée en imagerie mono-statique, telle qu'introduite initialement en géo-physique. Garcia *et al.* [15] ont adapté la méthode aux émissions planes dans le contexte de l'imagerie médicale en 2D. Cette sous-section présente leur théorie, ainsi que certains raffinements apportés à la méthode concernant l'implémentation.

#### a) Définition du milieu des réflecteurs explosifs pour des émissions planes

La vitesse de phase dans le milieu physique est notée  $c$ , et on suppose qu'une onde plane est transmise dans une direction  $\theta$  avec un réseau au contact direct du solide (cf. Figure II.1). L'onde plane interagit avec la distribution de réflecteurs ponctuels, représentée par la fonction de réflectivité  $g(x, z)$ . Ces réflecteurs agissent comme des sources secondaires rétro-diffusant des ondes cylindriques vers le capteur. Lorsque le capteur est utilisé en mode mono-statique où émetteurs et récepteurs sont confondus, le temps de vol aller-retour entre un élément et un réflecteur à la position  $\mathbf{r}$  dans le milieu de célérité  $c$  est égal au temps de propagation d'une onde cylindrique créée par l'explosion d'une source virtuelle située en  $\mathbf{r}$  à  $t = 0$  dans un milieu de célérité  $\hat{c} = c/2$ . Pour adapter le principe des réflecteurs explosifs aux émissions planes, le même raisonnement consistant à égaliser le temps de propagation aller-retour dans le milieu physique et le temps de propagation d'un front d'onde cylindrique d'une source fictive au capteur est utilisé. La célérité fictive  $c/2$  ne convient pas, dans le cas d'émissions planes, pour assurer l'égalité des temps d'arrivée pour tous les trajets de réflecteur à récepteur. Garcia *et al.* ont proposé d'introduire un milieu fictif pour chaque angle d'incidence  $\theta$ . Il associe à chaque réflecteur de coordonnées  $\mathbf{r} = (x, z)$  dans le milieu de célérité  $c$ , un réflecteur virtuel de coordonnées  $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{z})$  dans un milieu de célérité  $\hat{c}$  dépendant de l'angle d'incidence. La fonction de réflectivité



de la distribution de réflecteurs explosifs est notée  $\hat{g}(x, z)$  et vérifie  $\hat{g}(\hat{x}, \hat{z}) = g(x, z)$ . Par simplicité, les grandeurs  $x, z, c$  et  $\hat{x}, \hat{z}, \hat{c}$  sont liées par la relation linéaire [15]

$$\begin{cases} \hat{x} &= x + \gamma(\theta)z \\ \hat{z} &= \beta(\theta)z \\ \hat{c} &= \alpha(\theta)c \end{cases}$$

dont les coefficients  $\alpha(\theta), \beta(\theta)$  et  $\gamma(\theta)$  dépendent de l'angle d'incidence, et sont déterminés en égalisant les temps de propagation dans les deux milieux pour tous les points  $\mathbf{r} = (x, z)$ . Comme précédemment, l'origine du repère est placée au centre de l'élément le plus à gauche. Le temps d'arrivée d'une onde provenant d'un réflecteur en  $\mathbf{r}$  pour un élément récepteur à la position  $\mathbf{r}_u = (u, 0)$  s'écrit :

$$t'_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}) = \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c} + \frac{\sqrt{(x-u)^2 + z^2}}{c}.$$

La courbe  $\{t'_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}), u \in \mathbb{R}\}$  est appelée hyperbole de diffraction du réflecteur de coordonnées  $\mathbf{r}$  (voir Figure II.3b). D'après (II.9), le temps de vol entre un réflecteur virtuel en  $\hat{\mathbf{r}}$  et un récepteur en  $\mathbf{r}_u$  s'exprime par :

$$\hat{t}_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}) = \frac{\sqrt{(x + \gamma(\theta)z - u)^2 + \beta^2(\theta)z^2}}{\alpha(\theta)c}.$$

Comme précédemment, la courbe  $\{\hat{t}_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}), u \in \mathbb{R}\}$  est appelée hyperbole de diffraction du réflecteur virtuel de coordonnées  $\hat{\mathbf{r}}$  (voir Figure II.3d). Le principe des réflecteurs explosifs consiste à faire coïncider les deux hyperboles ci-dessus, pour toutes les positions possibles des réflecteurs du milieu. Il est clair que deux hyperboles correspondant à deux réflecteurs explosifs à la même profondeur dans le milieu virtuel Figure II.3a sont alignées horizontalement dans le plan  $(x, t)$  (voir Figure II.3d). Or, les hyperboles de diffraction des mêmes réflecteurs dans le milieu physique ne sont pas alignées horizontalement dans le plan  $(x, t)$  pour  $\theta \neq 0$  (cf. Figure II.3b), car ces deux réflecteurs ne deviennent pas des sources secondaires au même instant. Il est donc nécessaire, d'égaliser  $\hat{t}_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r})$  avec

$$t_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}) = \frac{(x-u) \sin \theta + z \cos \theta}{c} + \frac{\sqrt{(x-u)^2 + z^2}}{c}. \quad (\text{II.3})$$

$\{t_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}), u \in \mathbb{R}\}$  est appelée *hyperbole de diffraction corrigée* (cf. Figure II.3c), et les hyperboles corrigées correspondant à deux réflecteurs à la même profondeur dans le plan  $(x, z)$  sont maintenant alignées horizontalement dans le plan  $(x, t)$ .

En pratique, l'utilisation d'un retard en réception égal à  $\tau_m(\theta)$  pour un élément  $m$  permet de synchroniser les hyperboles de diffraction. De manière équivalente, cette opération peut être effectuée rapidement dans le domaine de Fourier en remplaçant le spectre du signal reçu  $S_m(u, \omega)$  par le *spectre corrigé*  $\tilde{S}_m(u, \omega) = S_m(u, \omega)e^{iku \sin \theta_m}$ . C'est ce qui sera réalisé par la suite. On a alors la relation  $\tilde{S}_m(k_x, \omega) = S_m(k_x - k \sin \theta, \omega)$ . Les coefficients  $\alpha_\theta, \beta_\theta, \gamma_\theta$  sont déterminés de sorte à satisfaire pour tout  $(x, z)$

$$\forall u \in \mathbb{R}, t_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}) = \hat{t}_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}).$$

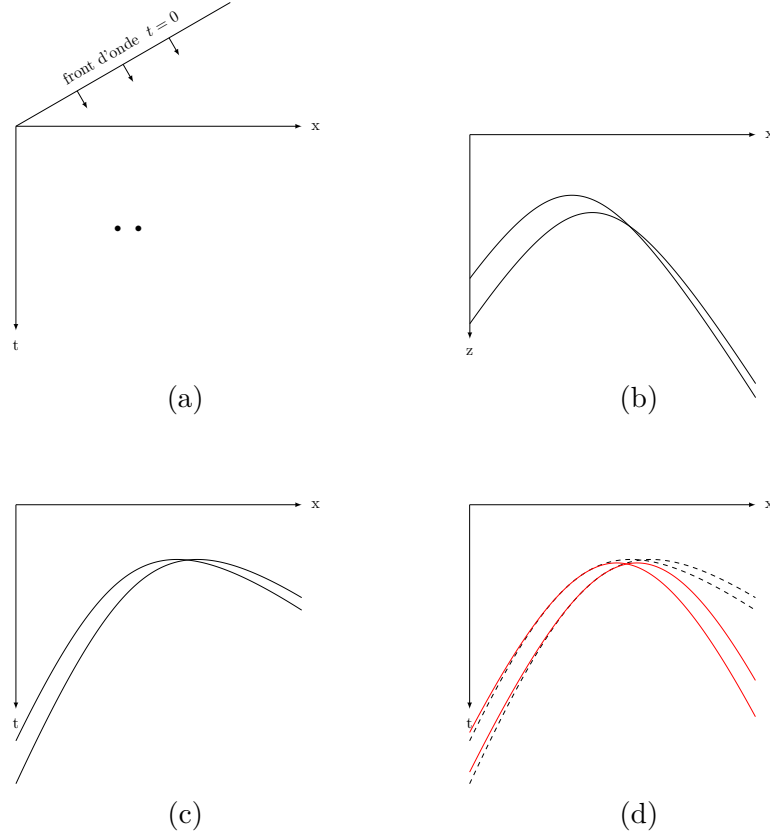


Fig. II.3 Comparaison des hyperboles de diffraction dans le milieu physique et dans le milieu des réflecteurs explosifs : (a) front d'onde plan à l'instant de l'émission en direction de deux réflecteurs situés à la même profondeur, (b) hyperboles de diffraction des deux réflecteurs, (c) hyperboles de diffraction corrigées (synchronisées), (d) (—) hyperboles de diffraction des réflecteurs explosifs, (...) hyperboles de diffraction synchronisées dans le milieu physique.

Étant donné la simplicité du modèle (linéaire) proposé, l'égalité ci-dessus ne peut être obtenue pour tout  $u$ . Compte tenu du fait que l'amplitude du champ acoustique mesurée par le capteur est maximale pour les récepteurs situés autour de  $u = x$ , Garcia *et al.* proposent d'égaliser  $t_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r})$  et  $t_\theta(\mathbf{r}_u, \hat{\mathbf{r}})$  à l'ordre le plus élevé en  $u$  autour de  $u = x$ . Cette démarche mène à la résolution du système de trois équations et trois inconnues :

$$\forall(x, z), \begin{cases} t_\theta(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}) &= \hat{t}_\theta(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial u} t_\theta(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial u} \hat{t}_\theta(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}) \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2} t_\theta(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} \hat{t}_\theta(\mathbf{r}_x, \mathbf{r}) \end{cases}$$

qui assure un ajustement des deux hyperboles au troisième ordre en  $u$  autour de  $u = x$  (cf. Figure II.3(d)). Les coefficients sont donnés par les expressions

$$\begin{cases} \alpha(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \theta + \sin^2 \theta}} \\ \beta(\theta) &= \frac{\sqrt{1 + \cos \theta}}{2 - \cos \theta} \\ \gamma(\theta) &= \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Ainsi, à chaque angle d'émission  $\theta_m$  correspond un milieu de réflecteurs explosifs défini par  $(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m) = (\alpha(\theta_m), \beta(\theta_m), \gamma(\theta_m))$ .

### b) Reconstruction d'une image

Comme pour la méthode de Stolt en mode mono-statique, la distribution de réflecteurs explosifs est assimilée au champ acoustique à  $t = 0$ . Pour une émission plane d'angle  $\theta_m$ , la distribution de réflecteurs explosifs  $\hat{g}_m$  est imagée, et une estimation  $g_m$  de la distribution physique  $g$  est obtenue. La distribution  $\hat{g}_m(x, z)$  est calculée en appliquant la transformation (I.7) à  $\tilde{S}_m(k_x, \omega)$  avec  $\hat{c} = \alpha_m c$ , c'est-à-dire

$$\hat{g}_m(x, z) = \iint \tilde{S}_m(k_x, \omega) e^{ik_x x + i\sqrt{\left(\frac{k}{\alpha_m}\right)^2 - k_x^2} z} dk_x d\omega.$$

L'estimation  $g_m(x, z)$  est ensuite déduite de  $\hat{g}_m$  par la relation  $g_m(x, z) = \hat{g}_m(x + \delta_m z, \beta_m z)$ , soit

$$g_m(x, z) = \iint \tilde{S}_m(k_x, \omega) e^{ik_x x + i\left[\beta_m \sqrt{\left(\frac{k}{\alpha_m}\right)^2 - k_x^2} + \gamma_m k_x\right] z} dk_x d\omega. \quad (\text{II.5})$$

L'implémentation proposée par Garcia *et al.* repose sur une écriture de l'équation précédente sous la forme :

$$g_m(x, z) = \int e^{ik_x \gamma_m z} \left\{ \int \tilde{S}_m(k_x, \omega) e^{ik_x x + i\left[\beta_m \sqrt{\left(\frac{k}{\alpha_m}\right)^2 - k_x^2} + \gamma_m k_x\right] z} d\omega \right\} dk_x. \quad (\text{II.6})$$

En effectuant un changement de variable dans l'intégrale (comme dans la section I.3.2 pour obtenir l'équation (I.9)), et en sommant sur tous les angles d'émission, l'estimation  $g(x, z)$  obtenue avec  $M$  tirs s'écrit

$$g(x, z) = \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^M e^{ik_x \gamma_m z} \mathcal{F}_z^{-1} \left[ \frac{\alpha_m c k_z}{\beta_m \sqrt{k_x^2 + \left(\frac{k_z}{\beta_m}\right)^2}} \tilde{S}_m \left( k_x, \omega_m \left( k_x, \frac{k_z}{\beta_m} \right) \right) \right] \right\}, \quad (\text{II.7})$$

avec

$$\omega_m(k_x, k_z) = \alpha_m \sqrt{k_x^2 + k_z^2}.$$

Cette implémentation met en œuvre une IFFT selon la direction  $z$  pour chaque angle d'émission. Pour simplifier la formulation (II.7), nous proposons d'écrire

$$g(x, z) = \mathcal{F}_{x,z}^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^M \frac{\alpha_m c(k_z - \gamma_m k_x)}{\beta_m \sqrt{k_x^2 + \left( \frac{k_z - \gamma_m k_x}{\beta_m} \right)^2}} \tilde{S}_m \left( k_x, \omega_m \left( k_x, \frac{k_z - \gamma_m k_x}{\beta_m} \right) \right) \right\}. \quad (\text{II.8})$$

L'implémentation qui résulte de cette écriture de l'équation d'imagerie présente l'avantage de ne nécessiter qu'une seule IFFT 2D pour obtenir l'image à partir de tous les spectres, au lieu de  $M$  IFFT selon la direction axiale et d'une IFFT selon la direction latérale.

Dans toute la suite, on appelle *cône des ondes propagatives* l'ensemble des fréquences  $(k_u, \omega)$  dans le spectre du signal mesuré correspondant à des ondes non-évanescents telles que  $\omega$  appartient à la bande passante  $[0, \omega_{max}]$  du signal transmis. En notant  $k_{max} = \omega_{max}/c$ , on a simplement

$$\mathcal{H} = \{|k_u| \leq k \leq k_{max}\}$$

Cette définition ne dépend pas de l'angle d'émission. Par ailleurs, pour un angle  $\theta_m$ , on appellera support  $\mathcal{H}_m$  du spectre corrigé  $\tilde{S}_m(k_x, \omega)$  la transformée du cône des ondes propagatives par l'application  $(k_x, k) \mapsto (k_x - k \sin \theta_m, k)$ . Le support de  $\tilde{S}_m$  est donc (cf. Figure I.8) :

$$\mathcal{H}_m = \left\{ \max \left( \frac{-k_u}{1 - \sin \theta_m}, \frac{k_u}{1 + \sin \theta_m} \right) \leq k \leq k_{max} \right\}$$

Les fréquences situées hors de  $\mathcal{H}_m$  ne seront pas prises en compte dans le calcul du spectre de l'image. De cette remarque découle la définition du support du spectre de l'image obtenue pour un tir  $m$ , et noté  $\text{supp}(G_m)$ , comme l'ensemble des couples  $(k_x, k_z)$  tels que  $G_m(k_x, k_z) \neq 0$ . Enfin, dans le milieu des réflecteurs explosifs, les ondes évanescentes sont telles que  $\alpha|k_x| \geq k$ . A la manière du milieu physique, on définit le cône des ondes propagatives dans le milieu des réflecteurs explosifs par

$$\hat{\mathcal{H}}_m = \{\alpha_m |k_u| \leq k \leq k_{max}\}.$$

Cette fois-ci, le cône dépend de l'angle  $\theta$  car la célérité du milieu virtuel en dépend. Afin de ne considérer que les ondes se propageant à la fois dans le milieu physique et le milieu virtuel, seules les fréquences appartenant à  $\mathcal{H}_m \cap \hat{\mathcal{H}}_m$  seront utilisées lors de la reconstruction des images. Cela permet de réduire les artéfacts d'imagerie mais aussi de réduire le nombre d'opérations effectuées lors de l'étape d'interpolation. Le support de  $G_m$  se déduit de l'équation (II.6) et la condition portant sur les cônes des ondes propagatives :

$$\text{supp}(G_m) = \left\{ \left( k_x, \gamma_m k_x + \beta_m \sqrt{\left( \frac{k}{\alpha_m} \right)^2 - k_x^2} \right), (k_x, k) \in \mathcal{H}_m \cap \hat{\mathcal{H}}_m \right\}.$$

Pour  $|\theta_m| \leq \arctan(1/2)$ ,  $\mathcal{H}_m$  est entièrement inclus dans  $\hat{\mathcal{H}}_m$ , ce qui signifie que toutes les ondes se propageant dans le milieu physique se propagent aussi dans le milieu des réflecteurs explosifs. Ceci n'est plus le cas quand  $|\theta_m| \geq \arctan(1/2)$ . Plus précisément, si

$|k_x|/k$  est assez grand, alors les ondes planes rétro-diffusées dans la direction  $\arcsin(k_x/k)$  se propagent dans le milieu physique mais pas dans le milieu virtuel, et l'information qu'elles portent sur la distribution de réflecteurs  $g(x, z)$  est perdue. Nous montrons dans l'annexe A.2 que  $\text{supp}(G_m)$  est un secteur angulaire d'une ellipse de centre  $(0, 0)$  et donnons les délimitations de la région  $\text{supp}(G_m)$ . De plus, on note  $A_m^s$  l'aire de  $\text{supp}(G_m)$  quand  $k_{\max} = 1$ , dont l'expression analytique est donnée dans l'annexe A.2. Le support de  $G_m$  dans l'espace  $k_x$ - $k_z$  est représenté sur la Figure II.4d. Pour une image de largeur  $L_x$  et de hauteur  $L_z$  et un signal de bande passante  $[0, \omega_{\max}]$ , le nombre de couples  $(k_x, k_z)$  dans  $\text{supp}(G_m)$  est de l'ordre de  $\mathcal{A}_m^s L_x L_z$ , ce nombre ne dépendant ni de  $N_x$ , ni de  $N_z$ .

Le schéma synoptique sur la Figure II.5 décrit les étapes de calcul de la méthode de Stolt pour des émissions planes (ces étapes étant identiques à celles de la méthode de Lu qui sera détaillée dans la prochaine sous-section). Pour chaque point  $(k_x, k_z)$  de  $\text{supp}(G_m)$ , le spectre corrigé est linéairement interpolé, ce qui nécessite quatre opérations élémentaires (deux multiplications et deux additions). La complexité algorithmique de la méthode est donc

$$\mathcal{C}_s = \mathcal{O} \left( M N N_t \log_2(N N_t) + 4 L_x L_z \sum_{m=1}^M A_m^s + N_x N_z \log_2(N_x N_z) \right).$$

### II.1.3 Méthode de Lu appliquée à des émissions planes

Dans cette section, nous adoptons une méthodologie proche de celle de Callow [19] pour une configuration bi-statique (un couple émetteur/récepteur séparés) dans le domaine radar, et de celle de Hunter *et al.* [21] en imagerie ultrasonore dans le cas plus général d'une acquisition multi-statique FMC. Pour cela, nous commençons par écrire le modèle direct de propagation d'une onde plane et sa rétro-diffusion par une distribution de réflecteurs ponctuels  $g(\mathbf{r})$ . En supposant qu'il n'y a pas d'atténuation dans le matériau et que la directivité d'un élément est omnidirectionnelle, le modèle direct pour une onde plane émise dans la direction  $\theta_m$  et un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\theta_m} = k \mathbf{e}_{\theta_m}$  permet d'exprimer le spectre  $S_m(u, \omega)$  mesuré par l'élément à l'abscisse  $u$  :

$$S_m(u, \omega) = \iint A(\omega) e^{-ikx \sin \theta_m - ikz \cos \theta_m} g(x, z) H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|) dx dz, \quad (\text{II.9})$$

où  $A(\omega)$  est le spectre d'émission. L'objectif est de résoudre le problème inverse consistant à déterminer  $g(x, z)$  à partir de la mesure  $S_m(u, \omega)$ . Pour ce faire, la fonction de Hankel de deuxième espèce est décomposée sous la forme d'une somme d'ondes planes, c'est-à-dire :

$$H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iku(u-x) - i\sqrt{k^2 - k_x^2}z}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} dk_u. \quad (\text{II.10})$$

En injectant (II.10) dans (II.9),  $S_m(u, \omega)$  devient

$$S_m(u, \omega) = \frac{-iA(\omega)}{4\pi} \int \frac{e^{iku u}}{\sqrt{k^2 - k_u^2}} \iint g(\mathbf{r}) e^{-i(k_u + k \sin \theta_m)x - iz(k \cos \theta_m + \sqrt{k^2 - k_u^2})} dx dz dk_u,$$

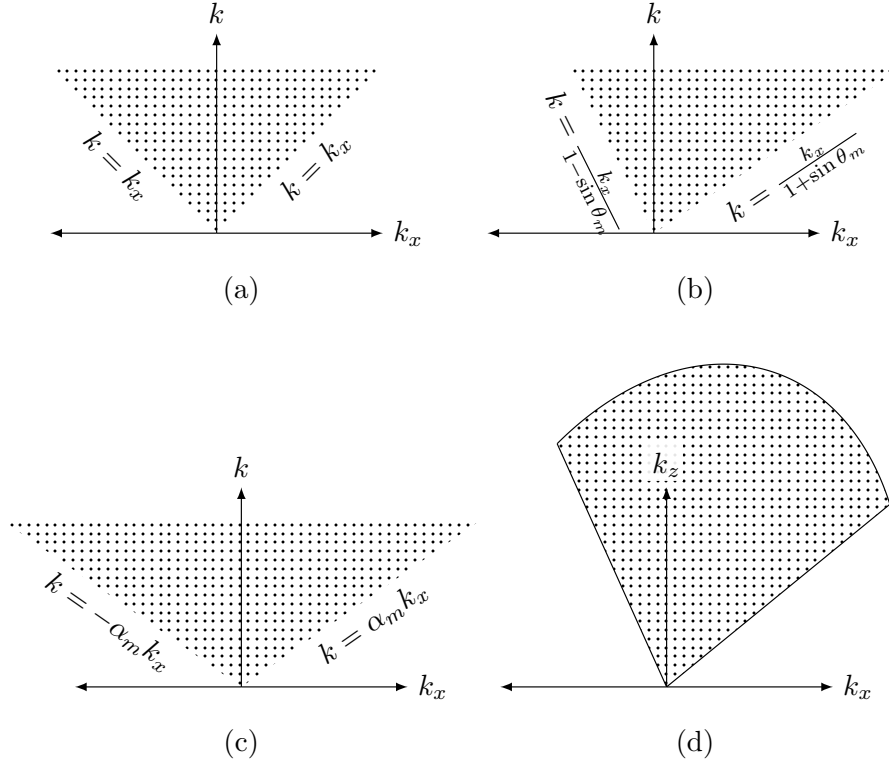


Fig. II.4 Supports des spectres des signaux et de l'image dans la méthode de Stolt : (a) support du spectre  $S_m(k_u, \omega)$  (cône des ondes propagatives indépendant de la direction d'émission), (b) support du spectre corrigé  $\tilde{S}_m(k_u, \omega) = S_m(k_u - k \sin \theta, \omega)$  pour un tir dans la direction  $\theta$ , (c) cône des ondes propagatives dans le milieu des réflecteurs explosifs ( $\theta = 30^\circ$ ) (d) support de l'image  $G_m(k_x, k_z)$  pour  $\theta = 30^\circ$ .

Par suite, en appliquant une transformée de Fourier selon la direction latérale, la transformée de Fourier 2D du signal mesuré prend la forme

$$S_m(k_u, \omega) = \frac{-iA(\omega)}{4\pi} \frac{G_m(k_u + k \sin \theta_m, \sqrt{k^2 - k_u^2} + k \cos \theta_m)}{\sqrt{k^2 - k_u^2}}.$$

Enfin, moyennant une condition sur les fréquences  $k_x$  et  $k_z$  dont on discutera par la suite, le spectre de l'image  $G_m(k_x, k_z)$  obtenue pour une émission s'exprime en fonction du spectre signal par la relation

$$G_m(k_x, k_z) = \frac{4i\pi\sqrt{k^2 - k_u^2}}{A(\omega)} S_m(k_u, \omega), \quad (\text{II.11})$$

avec

$$\begin{cases} k_u &= k_x - k \sin \theta_m \\ k &= \frac{k_x^2 + k_z^2}{2k_x \sin \theta_m + 2k_z \cos \theta_m} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

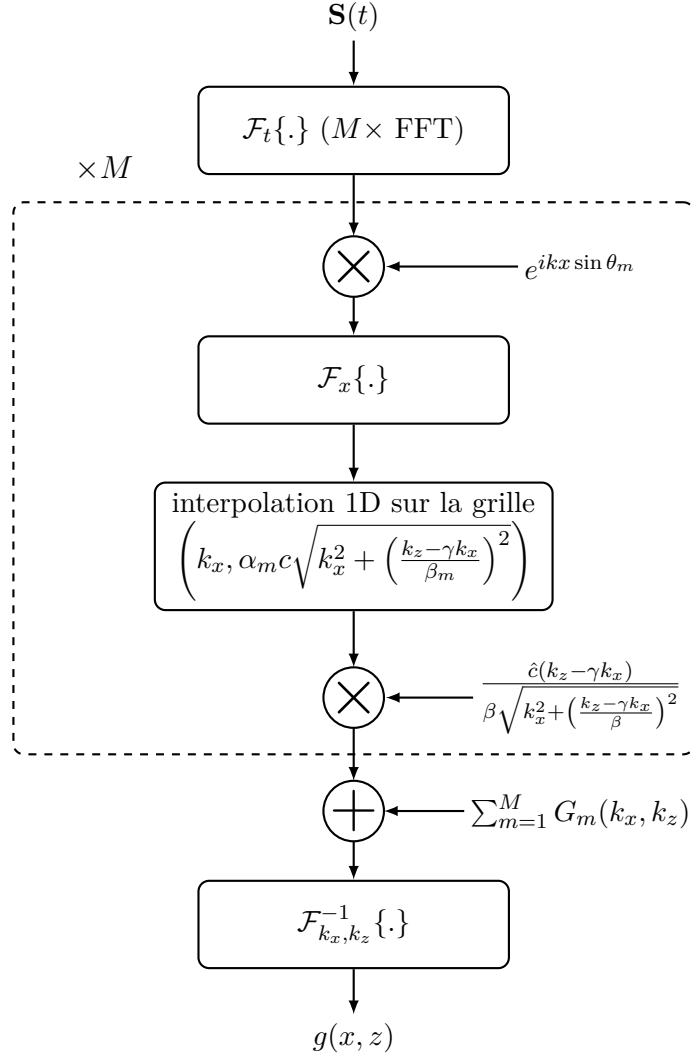


Fig. II.5 Étapes de reconstruction d'une image par la méthode de Stolt pour une acquisition avec des émissions planes

Notons que la distinction entre  $G$  et  $G_m$  vient du fait que l'image obtenue à partir d'un seul tir donne une estimation  $g_m(x, z)$  de la distribution de réflecteurs. Cette estimation dépend de l'angle car la zone effective donnant l'aire insonifiée par une onde plane est limitée, tandis que le modèle direct fait l'hypothèse d'un réseau infini. L'équation (II.11) donne une relation explicite entre le spectre  $G_m(k_x, k_z)$  de la réflectivité dans le milieu et le spectre  $S_m(k_u, \omega)$  mesuré. Pour l'implémentation de la méthode, la grille de reconstruction  $k_x$ - $k_z$  choisie est rectangulaire (c'est-à-dire obtenue à partir d'un produit cartésien) de sorte à pouvoir recourir à la FFT. Dans ce cas, la grille  $(k_u(k_x, k_z), \omega(k_x, k_z))$  définie par (II.12) n'est pas rectangulaire. Aussi, connaître la valeur de  $S$  sur cette grille nécessite d'interpoler

le signal  $\mathbf{S}[K_u \times K]$  selon les deux directions. Néanmoins, (II.12) implique [54, 55]

$$G_m(k_x, k_z) = \frac{4i\pi\sqrt{k^2 - (k_x - k \sin \theta_m)^2}}{A(\omega)} \tilde{S}_m \left( k_x, \frac{k_x^2 + k_z^2}{2k_x \sin \theta_m + 2k_z \cos \theta_m} \right), \quad (\text{II.13})$$

où  $\tilde{S}_m(k_u, \omega) = S_m(k_u - k \sin \theta_m, \omega)$  est le spectre corrigé introduit précédemment. L'équation ci-dessus montre qu'une simple interpolation uni-dimensionnelle de  $\tilde{S}_m(k_u, \omega)$  permet de calculer l'image, au lieu d'une interpolation 2D en considérant  $S_m(k_u, \omega)$ . L'image  $g(x, z)$  reconstruite à partir de  $M$  tirs dans les directions  $\theta_m$  se calcule en sommant les spectres élémentaires dans le domaine de Fourier et en appliquant une unique IFFT 2D finale :

$$g(x, z) = \mathcal{F}_{k_x, k_z}^{-1} \left\{ \sum_{m=1}^M G_m(k_x, k_z) \right\}.$$

Le support du spectre image  $G_m$  pour une émission d'angle  $\theta_m$  est défini par [25]

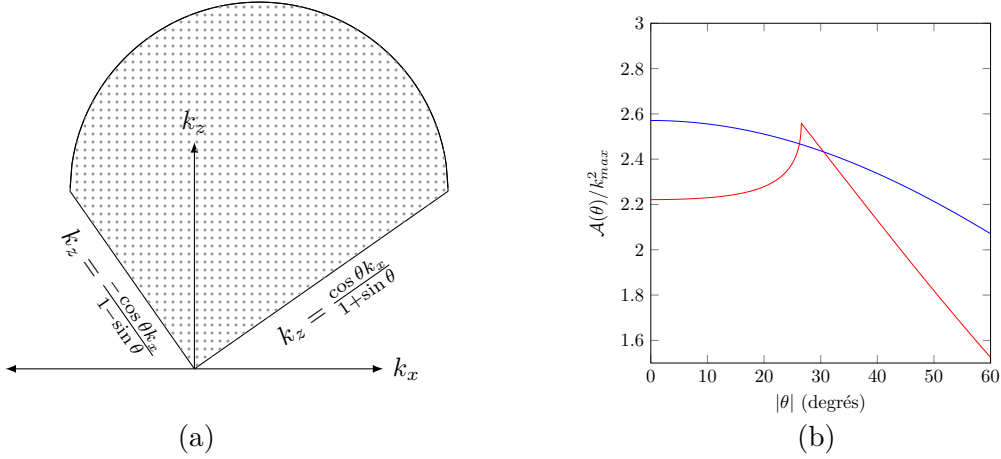


Fig. II.6 (a) Support de  $G_m(k_x, k_z)$  obtenu avec la méthode de Lu pour  $\theta_m = 20^\circ$ , (b) aires de  $\text{supp}(G_m)$  avec  $k_{\max} = 1$  pour (—) la méthode de Stolt et (—) la méthode de Lu.

$$\text{supp}(G_m) = \left\{ \max \left( \frac{\pm k_x \cos \theta_m}{1 \mp \sin \theta_m} \right) \leq k_z \leq k_{\max} \cos \theta_m + \sqrt{k_{\max}^2 - (k_x - k_{\max} \sin \theta_m)^2} \right\}$$

où  $k_{\max} = 2\pi f_{\max}/c$ , et  $f_{\max}$  est la fréquence maximale de la bande-passante du signal émis. Le support image est l'union du demi-disque supérieur de centre  $k_{\max}(\sin \theta_m, \cos \theta_m)$  et de rayon  $k_{\max}$ , et du triangle de sommet  $(0,0)$ ,  $k_{\max}(1 + \sin \theta_m, \cos \theta_m)$  et  $k_{\max}(-1 + \sin \theta_m, \cos \theta_m)$ . L'aire  $\mathcal{A}_m^l$  du support  $\text{supp}(G_m)$  s'exprime donc en fonction de  $\theta_m$  par la formule :

$$\mathcal{A}_m^l = \left( \frac{\pi}{2} + \cos \theta_m \right) k_{\max}^2.$$

L'implémentation de la méthode de Lu est similaire à celle de Stolt. Les trois différences entre les deux algorithmes sont le ré-échantillonnage selon la dimension  $\omega$ , le coefficient en facteur du spectre et agissant comme un filtre, et le support de l'image. On note que l'aire



du support de l'image pour la méthode de Stolt est inférieure à celle de la méthode de Lu, ce qui implique un plus faible nombre de fréquences  $(k_x, k_z)$  à interpoler. La complexité algorithmique  $\mathcal{C}_l$  de la méthode de Lu s'obtient de manière similaire à celle de la méthode de Stolt, et vaut

$$\mathcal{C}_l = \mathcal{O} \left( M N N_t \log_2(N N_t) + 4 L_x L_z \sum_{m=1}^M A_m^l + N_x N_z \log_2(N_x N_z) \right).$$

### II.1.4 Précautions concernant le repliement de spectre

Dans le premier chapitre (cf. sous-section I.1.3), nous avons vu que pour un réseau émettant un signal de bande passante  $[0, f_{max}]$ , le pas inter-éléments  $d$  doit vérifier l'inégalité  $d < \lambda/2$  où  $\lambda = c/f_{max}$ , afin d'éviter les lobes de réseau. Dans le domaine  $k_u$ - $\omega$  (ou  $k_u$ - $k$ ), cette condition évite les effets d'aliasing ou repliement de spectre. La Figure II.7a donne la transformée de Fourier discrète 2D de  $s(u, t)$  dans le plan  $k_u$ - $k$  pour un réseau vérifiant  $d < \lambda/2$ . La période du spectre dans la direction latérale est  $2\pi/d$ . Pour  $d < \lambda/2$ , le cône des ondes propagatives  $\{|k_x| \leq k \leq k_{max}\}$  est donc entièrement inclus dans le rectangle  $[-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}] \times [0, k_{max}]$ . Ainsi, pourvu que la fréquence d'échantillonnage temporel  $f_e$  soit supérieure à  $2f_{max}$ , le rectangle  $[-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}] \times [0, k_{max}]$  en pointillé représente le spectre obtenu par FFT 2D du signal  $\mathbf{s}(U \times T)$ , où  $U = [0, \dots, (N-1)d]$  et  $T = [0, \dots, (N_t-1)f_e]$ , et  $N_t$  est le nombre d'échantillons temporels.

Les équations d'imagerie de Stolt (II.8) et de Lu (II.13) considérées ici sont celles exprimant l'image à partir du spectre corrigé  $\tilde{S}(k_x, \omega) = S(k_x - k \sin \theta, \omega)$ . Le spectre  $\tilde{S}(k_x, \omega)$  est donné sur la Figure II.7b, et conserve la même période  $2\pi/d$  selon  $k_x$ . Le rectangle  $[-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}] \times [0, k_{max}]$  en pointillé représente le spectre corrigé  $\mathbf{S}[K_x \times W]$ . On constate que, bien que le spectre  $\mathbf{S}[K_x \times W]$  ne soit pas aliasé,  $\tilde{\mathbf{S}}[K_x \times W]$  présente un repliement. Ainsi,  $\mathbf{S}[K_x \times W]$  ne peut pas être interpolé tel quel, car la portion du spectre entre  $k_x = \frac{\pi}{d}$  et  $k_x = k_{max}(1 + \sin \theta)$  est déplacée aux abscisses  $[-\frac{\pi}{d}, k_{max}(1 + \sin \theta) - \frac{2\pi}{d}]$ . Pour remédier à ce problème, Donald Liu *et al.* [55] proposent d'élargir le support de  $\mathbf{S}[K_x \times W]$  en ajoutant des colonnes de zéros à la matrice (zero-padding), puis de replacer (étape qualifiée d'*unwrapping*, ou dépliage de spectre) le spectre aliasé dans la bonne gamme de fréquences (cf. Figure II.7c).

Une autre manière de procéder, celle que nous adoptons, est de profiter du format des matrices obtenues par FFT avec Matlab. Les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}[K_x \times W]$  correspondent de gauche à droite aux fréquences  $k_x$  positives, puis négatives. Il suffit alors de concaténer horizontalement  $\mathbf{S}[K_x \times W]$  avec elle-même pour déplier le spectre et élargir le support  $k_x$  de  $[-\pi/d, \pi/d]$  à  $[-2\pi/d, 2\pi/2]$  (cf. Figure II.7d). La première moitié des colonnes de la matrice ainsi obtenue est interprétée comme correspondant aux fréquences  $k_x \in [0, 2\pi/d]$ , et la deuxième moitié à  $k_x \in [-2\pi/d, 0]$ . Notons que les colonnes les plus à gauche et à droite de la matrice contiennent du signal superflu et ne sont pas considérées dans la reconstruction.

Cette procédure permet d'éviter l'aliasing induit par la transformation du spectre  $S$  en  $\tilde{S}$  pour des angles  $\theta$  vérifiant l'inégalité

$$(1 + \sin \theta) k_{max} \leq \frac{2\pi}{d}.$$

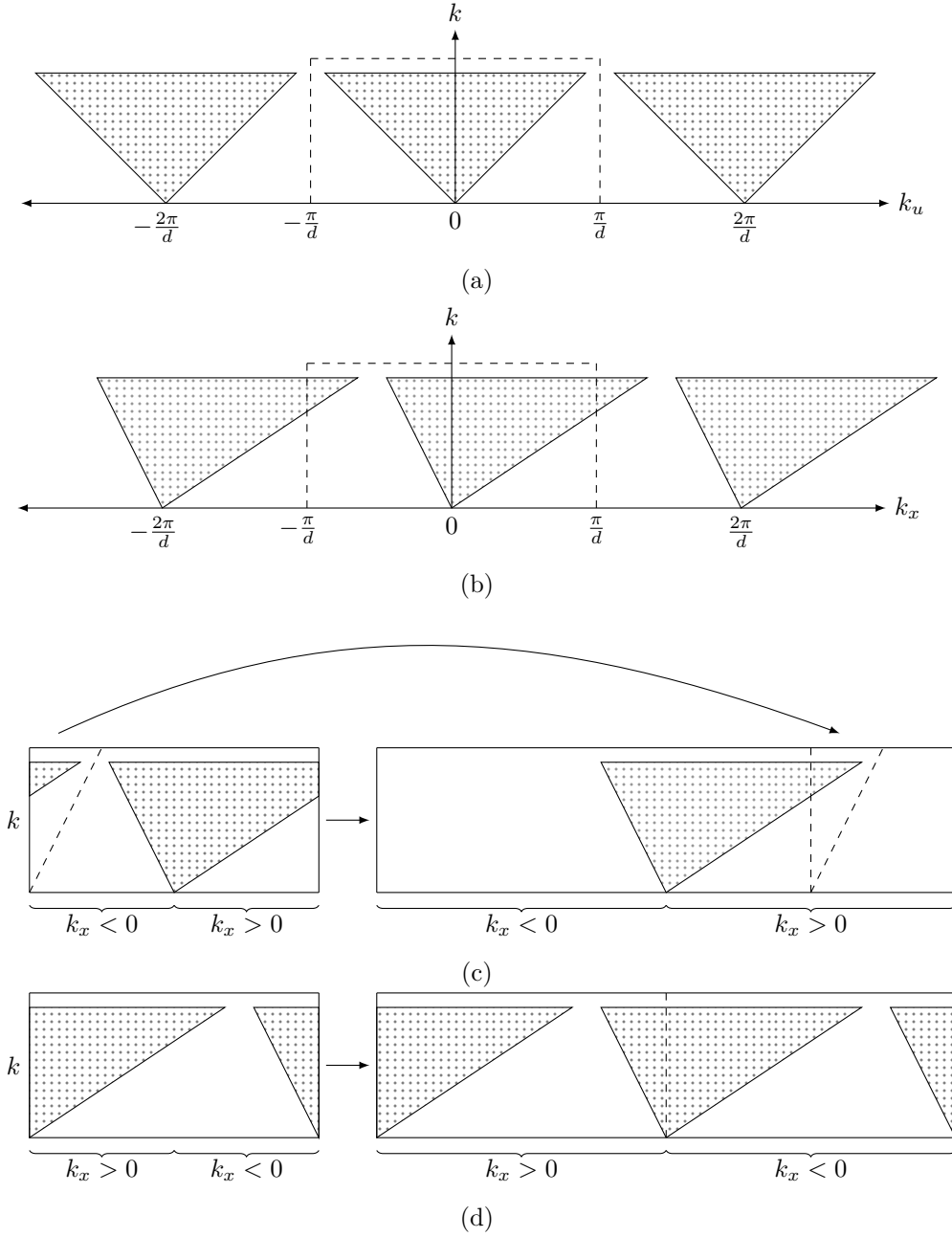


Fig. II.7 Procédure d'anti-aliasing dans le domaine  $k_x$ - $k$  illustré pour un réseau satisfaisant  $d < \lambda/2$  et pour un angle d'émission  $\theta > 0$  : (a) spectre  $S(k_x, \omega)$ ; (b) spectre corrigé  $\tilde{S}(k_x, \omega)$ ; (c) dépliage de  $\tilde{S}[K_x, W]$  pour  $K_x = [-\frac{N_x}{2} + 1, \dots, \frac{N_x}{2}] \frac{2\pi}{N_x d}$  par ajout de colonnes nulles à la matrice et "couper-coller" de la zone aliasée; (d) dépliage du spectre par concaténation de  $\tilde{S}[K_x, W]$  avec elle-même dans le cas où  $K_x = [0, \dots, \frac{N_x}{2}, -\frac{N_x}{2} + 1, \dots, -1] \frac{2\pi}{N_x d}$ . La plage de variation de  $k_x$  pour les spectres dépliés obtenus est  $[-2\pi/d, 2\pi/d]$ .

Cette méthode permet d'inclure la totalité du cône des ondes propagatives dans la fenêtre spectrale  $K_x \times W$ . Notons que si  $(1 + \sin \theta)k_{max} \leq \frac{2\pi}{d}$  mais  $k_{max} > \frac{\pi}{d}$ , le signal sera quand-même aliasé. Enfin, dans le cas où  $(1 + \sin \theta)k_{max} > \frac{2\pi}{d}$ , il est nécessaire d'élargir le support  $k_x$  au-delà de  $[-2\pi/d, 2\pi/d]$ , ce qui peut être effectué en élargissant à  $[-\frac{l\pi}{2d}, \frac{l\pi}{2d}]$ , où  $l$  est un entier strictement supérieur à 2.

### II.1.5 Évaluation des trois méthodes : PWI, Stolt et Lu

Pour conclure sur l'imagerie 2D en ondes planes avec un traducteur au contact, les méthodes PWI, de Lu et de Stolt sont comparées en reprenant la configuration de contrôle définie dans la section I.5 (cf. Figure I.14). La matrice  $\mathbf{S}(t)$  a été synthétisée à partir de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  pour les 64 angles suivants

$$\theta_m = \arcsin \left( \frac{(m - 32) \lambda_0}{D} \right), \quad m \in \{1, \dots, 64\}. \quad (\text{II.14})$$

Les images obtenues, ainsi que les temps d'exécution des programmes Matlab et le nombre d'opérations, sont affichés sur la Figure II.8. Le support sur lequel ont été reconstruites les images de Lu et de Stolt a été choisi de sorte à contenir tous les supports  $\text{supp}(G_m)$  des deux méthodes. Dans ce contexte, les temps de calcul des images de Lu et Stolt sont donc identiques et leurs complexités sont considérées identiques.

#### a) Comparaison des images et des temps de calcul

La Figure II.8d donne les temps de reconstruction pour les méthodes de Stolt et Lu en rouge et la méthode PWI en bleu pour un nombre de pixels  $N_x \times N_z$  allant de  $10^4$  à  $5.10^6$ .

Comme attendu, le temps de calcul PWI suit une tendance linéaire en fonction du nombre de pixels puisque  $\mathcal{C}_{pwi} \sim 4MNN_xN_z$  (cf. complexité définie par (II.6) avec  $\alpha_m \approx 1$  car la largeur de l'image n'excède pas l'ouverture du réseau dans le cas présent). Le temps de calcul des méthodes  $f-k$  présente en revanche une évolution sous-linéaire et est compris entre 1,15 s et 2,05 s sur toute la plage de variations. Pour  $N_xN_z = 10\,000$ , les temps de calcul des trois images sont identiques, mais l'écart se creuse à mesure que le nombre de pixels augmente. Pour  $N_xN_z = 5.10^6$ , le temps d'exécution du code PWI est de 614 s, soit plus de 300 fois plus long que celui des méthodes fréquentielles. Le graphe de la complexité des méthodes  $f-k$  a été calculé à partir de la formule

$$\mathcal{C}_{f-k} = \mathcal{O}(MNN_t \log_2(NN_t) + 4ML_xL_zA + N_xN_z \log_2(N_xN_z)),$$

où  $A$  est l'aire du domaine contenant les spectres des images de Lu et Stolt. Pour des petits nombres de pixels, la complexité algorithmique de ces dernières est donc dominée par le coût de la FFT 2D directe qui est répétée pour les 64 angles de tir. Comme l'interpolation porte sur un nombre de points indépendant de la taille de l'image, elle pèse peu dans le bilan des opérations effectuées pendant la reconstruction. De plus, la FFT 2D inverse est effectuée une seule fois et ne devient significative que lorsque le nombre de pixels devient supérieur à  $10^6$ . Finalement, le ratio des complexités entre PWI et les méthodes  $f-k$  vaut 285 pour  $5.10^6$  pixels, proche du rapport 300 des temps de calcul chronométrés dans

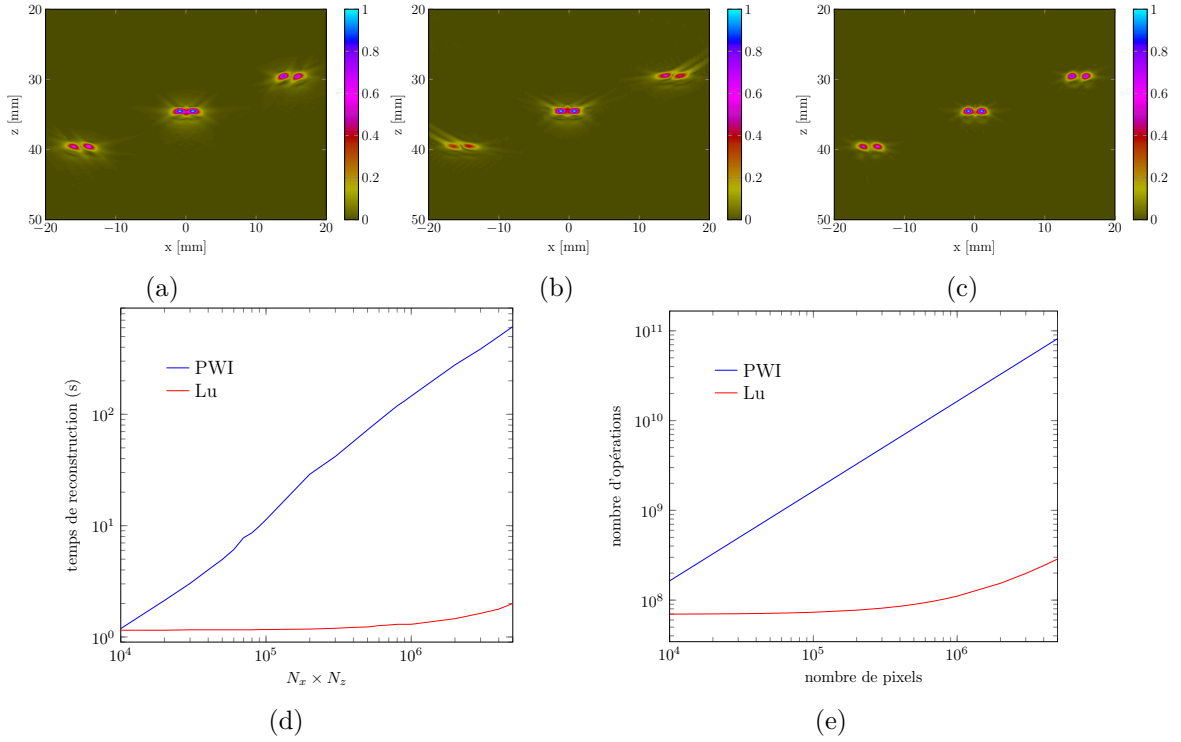


Fig. II.8 Images de paires de réflecteurs reconstruites à partir de signaux simulés en émettant 64 ondes planes avec les angles  $\theta_m$  définis selon (II.7) : images reconstruites avec les méthodes (a) PWI, (b) de Stolt, et (c) de Lu ; (d) évolution des temps de calcul en fonction du nombre de pixels pour les méthodes PWI (bleu) et f-k (rouge), et (e) évolution du nombre d'opérations de calcul pour PWI (bleu) et l'imagerie f-k (rouge).

Matlab pour ce même nombre de pixels. Cette étude montre que les méthodes f-k sont particulièrement avantageuses pour des grands nombres de pixels car elles dépendent peu de  $N_x N_z$ . Notons que les temps de calculs obtenus à partir de l'implémentation Matlab de la méthode de Stolt proposée par Garcia et mettant en œuvre une IFFT selon  $z$  pour chaque angle n'est que marginalement plus lente que notre interpolation, en raison de la rapidité de la FFT dans Matlab.

## b) Interprétation des résultats par des développements asymptotiques des équations d'imagerie

Pour interpréter les différences qualitatives entre les trois méthodes, nous proposons de reformuler les équations d'imagerie sous des formes asymptotiques en sommant sur les récepteurs et les fréquences. Ce type d'analyse a déjà été effectué dans [51] pour comparer l'imagerie SAFT avec la méthode de Stolt (acquisition mono-statique), et dans [56] pour comparer la méthode TFM avec l'algorithme du nombre d'onde. Par simplicité, cette comparaison porte sur l'image obtenue en considérant une seule onde plane d'incidence  $\theta$ . En notant  $K(\mathbf{r}, u, \omega) = S(u, \omega) e^{ik(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\theta + \|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|)}$ , l'amplitude  $g_P(\mathbf{r})$  de l'image PWI au

point de coordonnées  $\mathbf{r} = (x, z)$  est

$$g_P(\mathbf{r}) = \iint K(\mathbf{r}, u, \omega) du d\omega. \quad (\text{II.15})$$

(II.15) est la transposition exacte de PWI dans le domaine fréquentiel, et s'obtient à partir de (II.1) en écrivant

$$s\left(u, \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\theta + \|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|}{c}\right) = \int S(u, \omega) e^{ik(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\theta + \|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}\|)} d\omega.$$

Concernant les deux méthodes  $f$ - $k$ , il est démontré dans l'annexe A.3 que des expressions similaires à (II.15) peuvent être obtenues pourvu que  $kz$  soit suffisamment grand pour toutes les fréquences dans la bande passante du signal émis. Sous cette hypothèse, l'amplitude de l'image formée avec la méthode de Lu peut être approximée par

$$\frac{g_L(\mathbf{r})}{\sqrt{2i\pi}} \approx \iint \frac{k^{3/2} \cos^2 \beta(\mathbf{r}, u)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|^{1/2}} K(\mathbf{r}, u, \omega) du d\omega, \quad (\text{II.16})$$

où  $\beta(\mathbf{r}, u) = \arccos(z/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|)$  est l'angle sous lequel est vu le point  $\mathbf{r}$  depuis le récepteur à l'abscisse  $u$ . L'expression (II.16) fait apparaître le terme  $K(\mathbf{r}, u, \omega)$  qui est commun à PWI, mais multiplié ici par un autre terme dépendant de la fréquence et de l'espace. Ce terme s'interprète comme un filtre spatio-temporel dont l'analyse montre qu'il tend à réduire l'amplitude des défauts situés à de forts angles (terme en  $\cos^2 \beta(r, u)$ ) et à grandes profondeurs (terme en  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|^{-1/2}$ ) comparé à PWI. Le terme  $k^{3/2}$  agit comme un filtre temporel passe-haut et décale la fréquence centrale du signal vers les hautes fréquences, ce qui a pour effet d'améliorer légèrement la résolution latérale de l'image. Pour la méthode de Stolt, l'amplitude  $g_S(\mathbf{r})$  de l'image peut être exprimée par

$$\frac{g_S(\mathbf{r})}{\sqrt{2i\pi}} \approx \iint \frac{\hat{k}^{1/2} \cos \beta(\hat{\mathbf{r}}, u)}{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_u\|^{1/2}} e^{i\omega W_{\mathbf{r}}(u)} K(\mathbf{r}, u, \omega) du d\omega, \quad (\text{II.17})$$

où  $W_{\mathbf{r}}(u) = t_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}) - \hat{t}_\theta(\mathbf{r}_u, \mathbf{r})$  est l'écart entre le temps de vol dans le milieu physique (cf. équation (II.12)) et celui dans le milieu virtuel (cf. équation (II.11)) pour un récepteur en  $\mathbf{r}_u = (u, 0)$  et un réflecteur en  $\mathbf{r}$ . L'équation (II.14) fait apparaître un filtre spatio-fréquentiel similaire à celui de la méthode de Lu, mais dans ce cas,  $\mathbf{r}$  est remplacé par  $\hat{\mathbf{r}}$  car la reconstruction se fait dans le milieu des réflecteurs explosifs. On peut remarquer que la méthode de Stolt pénalise le spectre  $K(\mathbf{r}, u, \omega)$  par  $\cos \beta(\hat{\mathbf{r}}, u)$  au lieu de  $\cos^2 \beta(\mathbf{r}, u)$  pour la méthode de Lu. Le filtre temporel passe-haut est d'ordre 1/2 et a une influence plus faible sur la résolution latérale. Enfin, le terme  $e^{i\omega W_{\mathbf{r}}(u)}$  est proche de 1 quand  $u \sim x$  et oscille rapidement en fonction de  $\omega$  quand  $|x - u|$  croît. Pour un point de l'image proche de l'axe central du réseau, l'erreur  $W_{\mathbf{r}}(u)$  moyennée sur tous les récepteurs sera plus faible que pour un point plus excentré. C'est ce qui est observé sur la Figure II.8 où l'on peut relever une perte d'amplitude et un étalement des échos pour les réflecteurs situés les plus à gauche ou à droite de l'image, alors que les réflecteurs centrés sous le réseau sont aussi bien imagés qu'avec les méthodes PWI ou Lu. Cette dégradation de l'image de Stolt aux angles forts est liée à l'approximation du milieu des réflecteurs explosifs, ce qui sera plus flagrant dans la prochaine section où l'on cherchera à imager des zones nettement plus

larges que l'ouverture du réseau.

## II.2 Imagerie sous une interface eau/acier

Les méthodes d'imagerie introduites précédemment ont été décrites dans une configuration de contrôle simplifiée où le capteur est directement en contact avec le matériau inspecté. Or dans la plupart des contrôles industriels, le capteur est fixé sur un sabot en rexolite ou rempli d'eau, ou bien le contrôle est réalisé en immersion en cuve ou par jet d'eau (cf. Figure I.2). Dans cette section, nous adaptons successivement les algorithmes d'imagerie PWI, Lu et Stolt à la configuration de contrôle en immersion. Cela revient à considérer un milieu bi-couches tel que les ondes se propagent à la vitesse  $c'$  dans le milieu 1 compris entre  $z = -h$  et  $z = 0$ , et à la vitesse  $c$  dans le milieu 2 d'intérêt pour  $z < 0$ . Le capteur émet une onde plane d'incidence  $\theta'$  dans le milieu 1 qui est transmise dans le milieu 2 avec un angle de réfraction  $\theta$ . Ces deux angles ainsi que  $c$  et  $c'$  sont liés par la relation de Snell-Descartes  $\frac{\sin \theta'}{c'} = \frac{\sin \theta}{c}$ . La géométrie du problème d'imagerie sous une interface plane eau/acier est décrite sur la Figure II.9.

### II.2.1 PWI : algorithme de calcul des temps de vol à travers l'interface

La méthode PWI est basée sur un calcul de temps de vol. L'équation d'imagerie (II.1) reste valide en immersion à condition que les temps de vol en émission  $t_m^e(\mathbf{r})$  et en réception  $t_n^r(\mathbf{r})$  tiennent compte de la réfraction à l'interface. Pour une émission plane,  $t_m^e(\mathbf{r})$  se calcule par de simples considérations géométriques et vaut (cf. Figure II.9) :

$$t_m^e(\mathbf{r}) = \frac{h \cos \theta'}{c'} + \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c} + \bar{\tau}(\theta'),$$

en rappelant que  $\bar{\tau}(\theta')$  est le retard en émission de l'élément le plus à gauche du réseau. Comme la surface est plane,  $t_n^r(\mathbf{r})$  peut être calculé analytiquement en déterminant la valeur du point d'impact  $\bar{x}$  solution de l'équation  $\tau(\bar{x}) = 0$ , où

$$\tau(X) : X \mapsto \frac{x_n - X}{c' \sqrt{(x_n - X)^2 + h^2}} + \frac{x - X}{c \sqrt{(x - X)^2 + z^2}}.$$

L'équation  $\tau(x) = 0$  exprime la loi de la réfraction de Snell-Descartes pour une interface plane horizontale. La résolution analytique de cette équation fait intervenir un polynôme de degré 4, dont les racines peuvent être calculées à l'aide de la méthode de Ferrari. Cependant, pour rester générique et traiter le cas 3D par la suite, le calcul de  $t_n^r(\mathbf{r})$  sera fait de manière approchée en utilisant la méthode numérique de Newton-Raphson. Le but est de trouver un point  $X = \bar{x}$  tel que  $\tau(\bar{x}) = 0$ , la solution approchée est déterminée en posant

$$\begin{cases} X_0 &= x_n \\ X_{l+1} &= X_l - \frac{\tau(X_l)}{\tau'(X_l)} \text{ pour } l \geq 0 \end{cases}$$

La méthode de Newton converge rapidement, et un nombre d'itérations  $l = 1$  ou  $2$  est suffisant pour avoir une bonne approximation de  $\bar{x}$  et donc du temps de vol  $t_n^r(\mathbf{r})$ . Enfin, la fonction de pondération en émission  $w_m^e(\mathbf{r})$  est calculée en tenant compte de la zone

effective pour un contrôle en immersion :

$$w_m^e(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \tan \theta_m + h \tan \theta'_m - \frac{D}{2} \leq x \leq z \tan \theta_m + h \tan \theta'_m + \frac{D}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

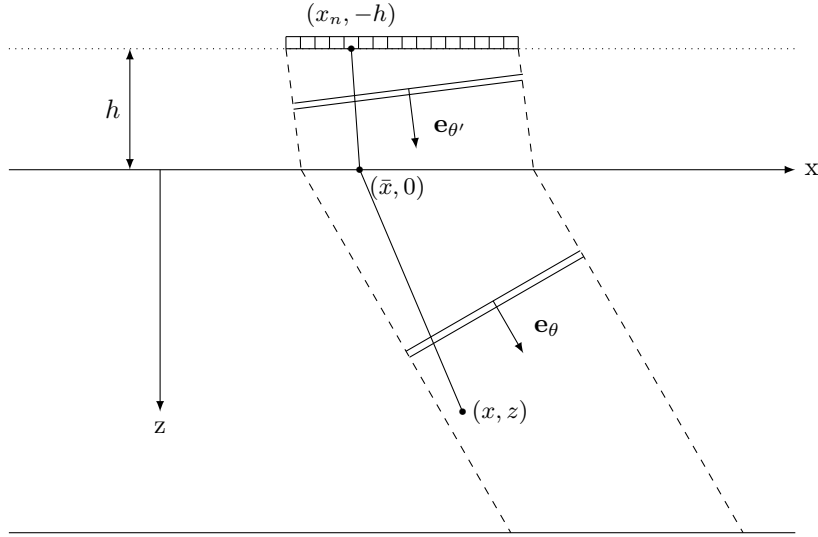


Fig. II.9 Configuration d'inspection avec un capteur en immersion : une onde plane d'incidence  $\theta'$  est émise dans le milieu 1 (eau ou rexolyte) de célérité  $c'$ , puis est réfractée dans le milieu 2 de célérité  $c$  sous un angle  $\theta$ .

### II.2.2 Méthodes fréquentielles : extrapolation du champ acoustique du réseau jusqu'à l'interface du milieu physique

Dans la section précédente, la méthode de Lu a été présentée dans le cadre d'un contrôle au contact. Pour imager sous une interface plane eau/acier, nous proposons d'extrapoler le champ acoustique du réseau jusqu'à l'interface et d'appliquer la méthode de Lu initiale en considérant un réseau virtuel en  $z = 0$ . En notant  $k = \omega/c$  et  $k' = \omega/c'$ , le spectre du champ acoustique mesuré par l'élément à l'abscisse  $u$  s'écrit :

$$S(u, \omega) = A(\omega) \iint t_{12}(\theta') e^{-ihk' \cos \theta' - ikx \sin \theta - ikz \cos \theta} g(x, z) \Gamma(\omega, x, z, u, -h) dx dz.$$

où  $t_{12}(\theta')$  est le coefficient de transmission entre les milieux 1 et 2 pour une onde incidente d'angle  $\theta'$ , et  $\Gamma(\omega, x, z, u, -h)$  est la fonction décrivant la propagation entre un réflecteur ponctuel à la position  $(x, z)$  dans le milieu 2, jusqu'à un récepteur placé en  $(u, -h)$  dans le milieu 1. On note  $S_0(k_u, \omega)$  le champ extrapolé à l'interface et on cherche à établir une relation entre le spectre mesuré  $S(k_u, \omega)$  et  $S_0(k_u, \omega)$ , ce dernier sera précisé par la suite. Pour ce faire, on commence par exprimer la transformée de Fourier latérale de l'équation

(II.52), qui s'écrit :

$$S(k_u, \omega) = A(\omega) \iint t_{12}(\theta') e^{ihk' \cos \theta' + ikx \sin \theta + ikz \cos \theta} g(x, z) \hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, -h) dx dz.$$

où,  $\hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, -h)$  est la transformée de Fourier de  $\Gamma(\omega, x, z, u, -h)$  selon la direction  $u$ . Nous calculons d'abord la valeur de la fonction de propagation à l'interface. On sait en effet que  $\Gamma(\omega, x, z, u, 0^+) = H_0^{(2)} \left( k \sqrt{(x-u)^2 + z^2} \right)$ . Ainsi, d'après l'identité de Weyl,  $\hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, 0^+)$  prend la forme

$$\hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, 0^+) = -\frac{i}{4\pi} \frac{e^{-ik_u x - i\sqrt{k^2 - k_x^2} z}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}}.$$

De plus,  $\hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, \cdot)$  vérifie la condition à l'interface

$$\Gamma(\omega, x, z, u, 0^-) = t_{21} \left( \arcsin \left( \frac{k_u}{k} \right) \right) \Gamma(\omega, x, z, u, 0^+)$$

En outre,  $(u, z') \mapsto \Gamma(\omega, x, z, u, z')$  vérifie l'équation de Helmholtz dans le milieu 1, donc

$$\frac{\partial^2 \hat{\Gamma}}{\partial z'^2} + (k'^2 - k_u^2) \hat{\Gamma} = 0.$$

Ainsi,  $\hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, z')$  est une combinaison d'une onde se propageant selon les  $z$  croissants et d'une onde se propageant selon les  $z$  décroissants. Étant donné que la source est située dans le milieu 2, seule la composante selon les  $z$  décroissants est non nulle, et

$$\hat{\Gamma}(\omega, x, z, k_u, -h) = -t_{21} \left( \arcsin \left( \frac{k_u}{k} \right) \right) \frac{i}{4\pi} \frac{e^{-ik_u x - i\sqrt{k^2 - k_x^2} z - ih\sqrt{k'^2 - k_u^2}}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}}.$$

En injectant (II.56) dans (II.53), on montre que le spectre  $S_0(k_u, \omega)$  en  $z = 0$  déduit de la mesure  $S(k_u, \omega)$  par la relation

$$S_0(k_u, \omega) = \frac{S(k_u, \omega) e^{ih(k' \cos \theta' + \sqrt{k'^2 - k_u^2})}}{t_{12}(\theta') t_{21} \left( \arcsin \left( \frac{k_u}{k} \right) \right)},$$

vérifie l'équation

$$S_0(k_u, \omega) = \frac{4i\pi A(\omega)}{\sqrt{k^2 - k_u^2}} \iint g(\mathbf{r}) e^{-i(k_u + k \sin \theta)x - iz(k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_u^2})} dxdz.$$

On reconnaît l'équation (II.30) du modèle direct pour un réseau au contact émettant une onde plane d'incidence  $\theta$  dans l'acier.  $S_0(k_u, \omega)$  représente donc le spectre mesuré par un capteur virtuel placé à l'interface eau/acier en  $z = 0$ . Il est extrapolé à partir du champ mesuré en  $z = -h$  par le capteur en immersion. Il en résulte qu'imager à travers une interface plane par la méthode de Lu revient à appliquer l'algorithme pour un capteur au contact au spectre extrapolé  $S_0$ . Dans la suite, les coefficients de transmissions sont



supposés constants par simplicité, et  $S_0$  prend la forme simplifiée

$$S_0(k_x, \omega) = \exp \left[ ih \left( k' \cos \theta' + \sqrt{k'^2 - k_u^2} \right) \right] S(k_u, \omega).$$

Enfin, le spectre corrigé  $\tilde{S}_0(k_x, \omega) = S_0(k_x - k \sin \theta, \omega)$  est obtenu par la relation

$$\tilde{S}_0(k_x, \omega) = \exp \left[ ih \left( k' \cos \theta' + \sqrt{k'^2 - (k_x - k' \sin \theta')^2} \right) \right] \tilde{S}(k_x, \omega).$$

Ainsi, le passage en immersion n'influe que très peu sur la complexité algorithmique.

Pour valider le principe d'extrapolation du champ, la Figure II.10 compare les 64 signaux enregistrés par traducteur au contact (Figure II.10(a)) avec ceux issus de l'extrapolation ((Figure II.10(c)) du champ mesuré par un traducteur en immersion selon la méthode Lu ((Figure II.10(b)). Les signaux ont été simulés avec la configuration d'inspection décrite sur la Figure I.16 (une simulation avec le réseau au contact, et une seconde avec le même réseau en immersion) pour un tir d'angle de réfraction  $20^\circ$  dans l'acier. La figure montre un bon accord entre le champ extrapolé (II.10c) et celui mesuré par une sonde au contact (II.10a). Du fait de l'extension finie du réseau, une perte d'intensité du signal est visible sur les bords du B-Scan.

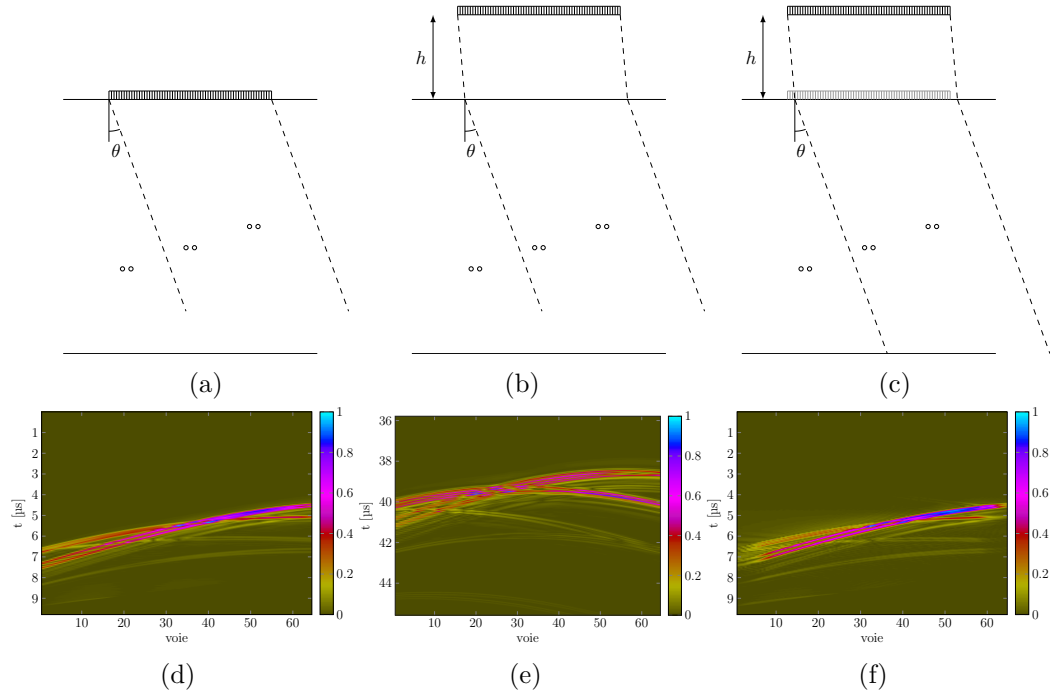


Fig. II.10 Principe d'extrapolation de champ pour les méthodes  $f$ - $k$  pour une onde plane réfractée à  $20^\circ$  dans l'acier avec une sonde immergée à 20 mm de la surface. B-Scans mesurés par un réseau au contact (a), le réseau en immersion (b), et B-Scan extrapolé de la sonde en immersion jusqu'à l'interface par la méthode définie par l'équation II.55 (c).

### II.2.3 Résultats avec des données simulées et aptitudes des méthodes à former des images très étendues

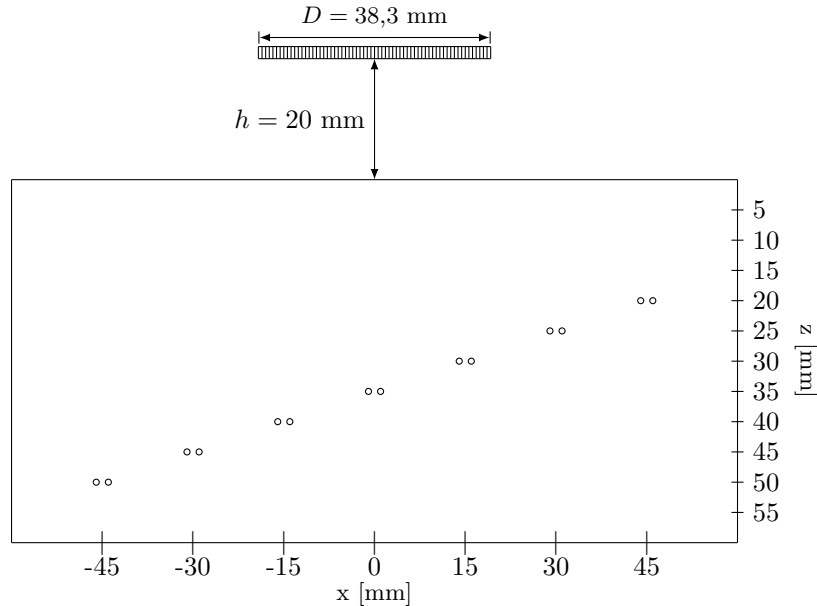


Fig. II.11 Configuration d'inspection en immersion : un capteur de 64 éléments de pitch 0,6 mm émet un signal de fréquence centrale 5 MHz à une distance  $h = 20$  mm d'un bloc d'acier ( $c_L = 5,9 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$ ) comportant des paires de trous aux profondeurs 30, 35 et 40 mm. Diamètre des trous : 1 mm ; distance centre-à-centre : 2 mm.

Pour conclure sur l'extension des algorithmes à un milieu bi-couches eau/acier, on se propose de comparer les images reconstruites avec les méthodes PWI, de Stolt et de Lu dans la configuration de contrôle définie sur la Figure II.11. Les signaux de la matrice  $\mathbf{K}(t)$  ont été simulés avec le logiciel CIVA, puis, par post-traitement, la matrice d'ondes planes  $\mathbf{S}(t)$  a été synthétisée pour 64 angles de réfraction définis par (II.14). Le bloc d'acier présente sept paires de trous latéraux de diamètre 1 mm, et la distance centre-à-centre entre deux trous d'une même paire est de 2 mm. Les ondes longitudinales se propagent dans le solide avec la célérité  $c = 5,9 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$ . Les ondes transversales ne sont pas prises en compte dans la simulation. Le réseau est constitué de 64 éléments avec un pas de 0,6 mm (ouverture  $D = 38,3$  mm), et est immergé au-dessus du bloc avec une hauteur d'eau  $h = 20$  mm. Les éléments sont excités par un signal gaussien de fréquence centrale  $f_c = 5$  MHz (de bande-passante 80% à -6 dB). La largeur de la zone de reconstruction est égale à trois fois l'ouverture  $D$  du capteur, soit 114,9 mm.

Les images obtenues avec les trois méthodes de reconstruction sont présentées sur la Figure II.12. Pour chaque image, l'amplitude de référence (0 dB) correspond à l'amplitude de détection maximale parmi toutes les paires de trous. Pour les trois résultats, il s'agit de la paire centrée sous le réseau en  $x = 0$ . L'amplitude de l'écho de fond est plus faible sur les images issues des algorithmes  $f$ - $k$  que sur l'image PWI, ce qui est en accord

avec l'analyse théorique en II.1.5 prédisant une diminution plus rapide de l'amplitude des échos en fonction de la profondeur. Qualitativement, la méthode de Lu offre une résolution latérale équivalente à celle de PWI, tandis que l'image formée par la méthode de Stolt n'est pas satisfaisante dans toute la région d'intérêt. Pour une analyse plus quantitative, les courbes échodynamiques ont été extraites des images, puis superposées sur la Figure II.13. Chacune d'elles donne l'évolution du maximum d'amplitude d'une colonne de l'image en fonction de  $x$  (l'écho de fond a été préalablement filtré par fenêtrage temporel). Comme prévu par l'analyse théorique des amplitudes, les méthodes  $f$ - $k$  améliorent la résolution latérale sous l'ouverture du capteur comparé à la méthode PWI. Par contre, au-delà de l'ouverture du capteur (pour  $|x| > 19,2$  mm), l'amplitude de détection est plus faible pour les méthodes  $f$ - $k$ . Plus précisément, ces dernières sont pénalisées quand les réflecteurs sont vus sous des angles forts, le cas extrême étant celui d'un réflecteur situé à une faible profondeur et au-delà de l'ouverture. C'est ce que l'on observe pour la paire de trous autour de  $x = 45$  mm où l'on relève un écart d'amplitude de 8 dB entre l'image PWI et celle calculée avec la méthode de Lu.

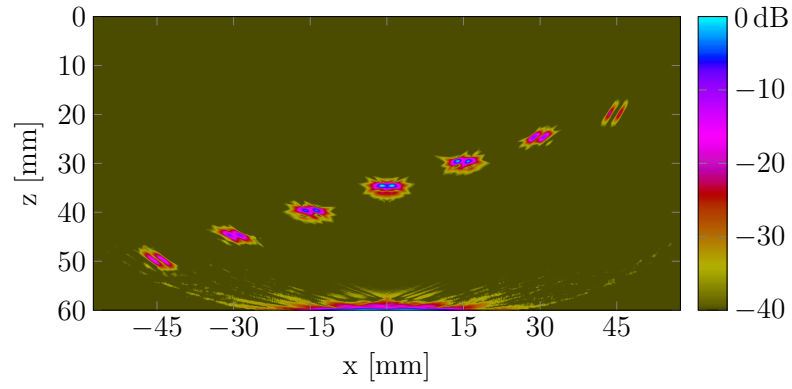
La méthode de Stolt est encore plus pénalisée aux forts angles. En effet, on constate que les échos des réflecteurs situés au delà de l'ouverture sont soit très étalés (paires en  $x = -45, -30$  et  $30$  mm), soit absents ( $x = 45$  mm). Ceci est dû à la définition du milieu équivalent des réflecteurs explosifs : d'après (II.17), la méthode de Stolt revient à sommer en chaque point  $\mathbf{r}$ , les amplitudes de l'hyperbole de diffraction  $\{\hat{t}_\theta(u, \mathbf{r}), u \in [-D/2, D/2]\}$  :

$$\frac{g_S(\mathbf{r})}{\sqrt{2i\pi}} \approx \iint \frac{\hat{k}^{1/2} \cos \beta(\hat{\mathbf{r}}, u)}{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_u\|^{1/2}} S(u, \omega) e^{2i\pi\omega\hat{t}_\theta(u, \hat{\mathbf{r}})} du d\omega.$$

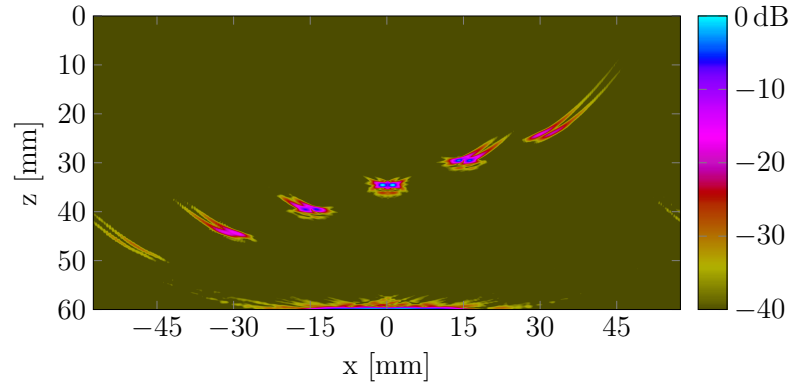
Or, par définition du milieu équivalent, l'hyperbole de diffraction ci-dessus ne coïncide avec l'hyperbole de diffraction physique  $\{t_\theta(u, \mathbf{r}), u \in [-D/2, D/2]\}$  qu'autour de  $u = x$ . Lorsqu'un réflecteur est en dehors de l'ouverture, excentré à droite par exemple, l'erreur de temps d'arrivée commise est donc minorée par  $|t_\theta(D/2, \mathbf{r}) - \hat{t}_\theta(D/2, \mathbf{r})| > 0$ , et la sommation réalisée n'est pas cohérente.

## II.3 Imagerie 3D dans le domaine $f$ - $k$ avec des capteurs matriciels

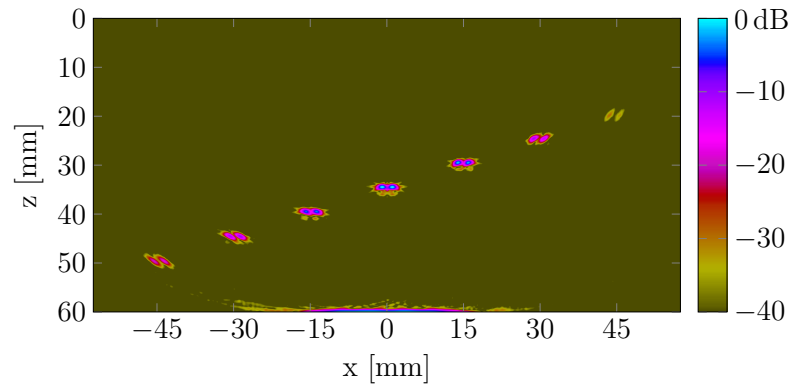
Les algorithmes d'imagerie 2D présentés dans la section précédente permettent de former une vue en coupe du milieu dans le plan de contrôle d'un capteur linéaire. Une façon d'obtenir une vue 3D de la région d'intérêt est de réaliser une acquisition en déplaçant le réseau selon l'axe perpendiculaire au plan de contrôle à l'aide d'un axe de translation encodé, et de juxtaposer les images 2D [57]. Les capteurs matriciels offrent l'avantage de pouvoir imager un large volume du matériau sans déplacer la sonde, et les images 3D sont améliorées car les ondes sont émises dans toutes les directions et un maximum de signaux sont exploités en réception. Cette section généralise l'imagerie par émission d'ondes planes aux traducteurs matriciels pour réaliser des reconstructions en 3D. Dans un premier temps, les notations et conventions adoptées en imagerie 3D sont introduites et utilisées pour écrire l'algorithme PWI en 3D. Ensuite, le milieu des réflecteurs explosifs est défini en 3D pour appliquer l'algorithme de Stolt, et la théorie de Lu est généralisée. Comme en 2D, les complexités algorithmiques des méthodes  $f$ - $k$  sont comparées à celle de PWI, et les contours 3D des spectres des images sont théoriquement définis. Pour gagner



(a)



(b)



(c)

Fig. II.12 Images de trous latéraux par la méthode (a) PWI, (b) Stolt, et (c) Lu, avec les angles d'émissions  $\theta_m$  pour  $1 \leq m \leq 64$  définis par (II.2).

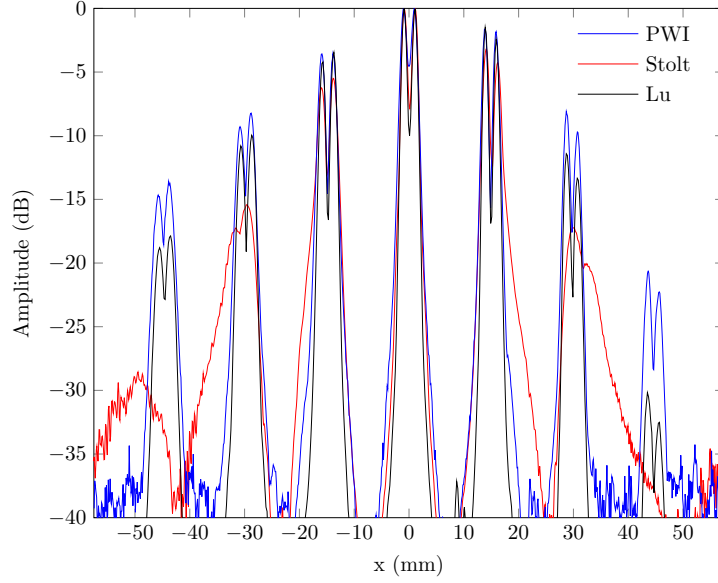


Fig. II.13 Courbes échodynamiques représentant l'amplitude maximale (en dB) en chaque colonne des images reconstruites par les méthodes (—) PWI, (—) de Stolt, et (—) de Lu.

en clarté, la théorie est exposée ci-après pour un capteur matriciel au contact du solide (les méthodes seront ensuite mises en application avec un réseau matriciel en immersion en suivant le même principe d'extrapolation de champ que dans la section II.2).

### II.3.1 Émissions planes avec un réseau matriciel et reconstruction PWI en 3D

On considère un réseau matriciel constitué de  $N = n^2$  éléments carrés de côté  $a$  au contact d'un solide caractérisé par une vitesse de phase  $c$ . Le pas inter-éléments est identique pour les lignes et les colonnes de la matrice, et est noté  $d$ . L'ouverture de la matrice ainsi définie est  $D = (n - 1)d + a$ . Le capteur transmet un front d'onde plan dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta,\varphi} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ , où la longitude  $\varphi \in [0, 2\pi]$  et la latitude  $\theta \in [0, \pi/2]$  (cf Figure II.14a). La numérotation des éléments suit la convention définie sur la Figure II.14b, c'est-à-dire un ordonnancement par colonnes, et le réseau est centré sur l'origine du repère Oxyz. Les coordonnées  $(x_j, y_j)$  du  $j^{\text{ième}}$  élément sont données par  $x_j = d(\text{quo}(j, n) - \frac{n-1}{2})$  et  $y_j = d(\text{res}(j, n) - 1 - \frac{n-1}{2})$ , où  $\text{quo}(j, n)$  (resp.  $\text{res}(j, n)$ ) est le quotient (resp. reste) de la division euclidienne de  $j$  par  $n$ .

Pour une émission dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta,\varphi}$ , les éléments  $j = 1 \dots N$  du capteurs sont excités de manière uni-séquentielle avec un signal impulsionnel et un jeu de retards  $\tau_j(\theta, \varphi)$

définis par :

$$\begin{cases} \tau_j(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{c} \left[ \left( x_j + \frac{(n-1)d}{2} \right) \cos \varphi + \left( y_j + \frac{(n-1)d}{2} \right) \sin \varphi \right] & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \tau_j(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{c} \left[ \left( x_j - \frac{(n-1)d}{2} \right) \cos \varphi + \left( y_j + \frac{(n-1)d}{2} \right) \sin \varphi \right] & \text{si } \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \\ \tau_j(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{c} \left[ \left( x_j - \frac{(n-1)d}{2} \right) \cos \varphi + \left( y_j - \frac{(n-1)d}{2} \right) \sin \varphi \right] & \text{si } \pi \leq \varphi \leq 3\pi/2 \\ \tau_j(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{c} \left[ \left( x_j + \frac{(n-1)d}{2} \right) \cos \varphi + \left( y_j - \frac{(n-1)d}{2} \right) \sin \varphi \right] & \text{si } 3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

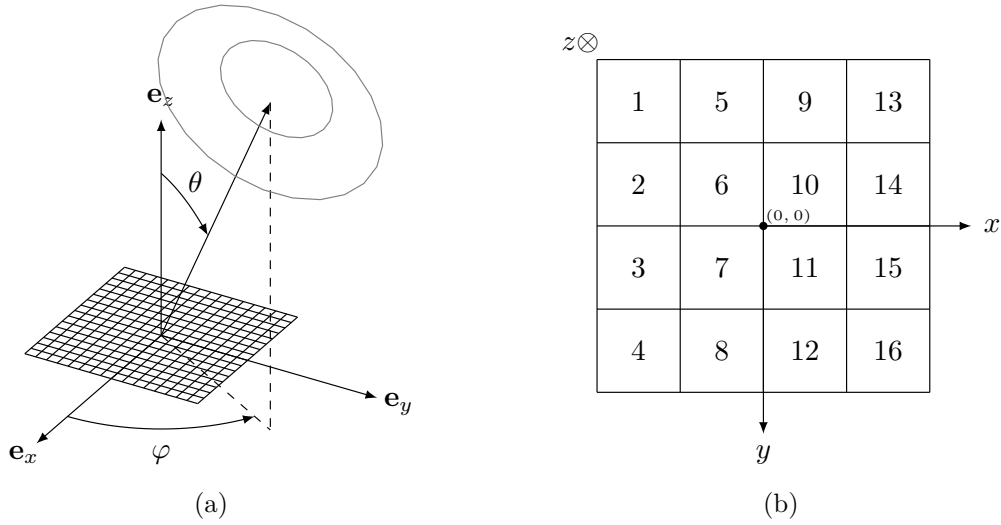


Fig. II.14 (a) Géométrie utilisée en imagerie 3D avec un capteur matriciel transmettant une onde plane dans la direction  $e_{\theta, \varphi} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ; (b) numérotation des éléments par colonne pour une matrice de  $4 \times 4$  éléments.

Les matrices carrées considérées dans la suite sont composées de  $16 \times 16$  éléments. A une fréquence de 5 MHz, si l'on souhaite respecter la condition sur la période du réseau dans l'acier (I.1) pour éviter les lobes de réseau, l'ouverture de la sonde matricielle doit être de l'ordre de  $1 \text{ cm}^2$ . Ceci se traduit par une zone de champ proche restreinte au delà de laquelle les ondes transmises ne sont plus planes. L'épaisseur des pièces contrôlées ne devra donc pas excéder quelques dizaines de millimètres. En CND, les systèmes d'acquisition étant le plus souvent limités à 256 voies, il est courant de rencontrer des matrices dont l'ouverture est artificiellement augmentée en doublant, voire en triplant le pas inter-éléments, au prix de forts effets d'aliasing. Un exemple sera traité en fin de chapitre.

L'imagerie par émission d'ondes planes est particulièrement avantageuse en 3D comparée à l'acquisition de la matrice des réponses inter-éléments  $\mathbf{K}(t)$ . En effet, cette dernière nécessite 256 émissions et le stockage de  $256^2$  signaux, ce qui est en pratique prohibitif avec les systèmes d'acquisition disponibles en CND. Dans la suite, environ 25 ondes planes seront suffisantes pour insonifier tous les réflecteurs. Cela correspond à un gain d'un facteur 10 en nombre d'émissions et en nombre de signaux à enregistrer par rapport à la méthode TFM. Il est à noter que des stratégies existent pour réduire le nombre

d'émissions en imagerie TFM, comme les acquisitions SMC (Sparse Matrix Capture) mais généralement la cadence est augmentée au détriment du rapport signal/bruit [58, 59].

Pour reconstruire une image PWI, il faut généraliser le modèle direct de calcul des temps de vol au cas 3D. En émission, le temps de propagation du front d'onde plan jusqu'à un réflecteur situé en  $\mathbf{r}$  pour une émission d'angles  $(\theta_m, \varphi_m)$  est égal à

$$t_m^e(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_{\theta_m, \varphi_m} \cdot \mathbf{r}}{c} + \bar{\tau}(\theta_m, \varphi_m),$$

où  $\bar{\tau}(\theta_m, \varphi_m)$  est le retard en émission d'un élément qui serait situé à l'origine du repère orthonormé Oxyz. Ce calcul géométrique du temps de vol est valable pour un point  $(x, y, z)$  situé dans la zone insonifiée par le front d'onde plan. Cette zone effective est définie comme l'ensemble des coordonnées  $(x, y, z)$  vérifiant  $w_m^e(x, y, z) = 1$  si

$$\begin{cases} -\frac{D}{2} \leq x - z \tan \theta_m \cos \varphi_m \leq \frac{D}{2} \\ -\frac{D}{2} \leq y - z \tan \theta_m \sin \varphi_m \leq \frac{D}{2} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

et  $w_m^e(x, y, z) = 0$  sinon. Le temps de propagation  $t_j^r(\mathbf{r})$  d'une onde sphérique rétro-diffusée par un réflecteur en  $\mathbf{r}$  jusqu'au récepteur  $j$  situé en  $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, 0)$  s'écrit

$$t_j^r(\mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}\|}{c}.$$

Pour un jeu de tirs dans les directions  $\mathbf{e}_{\theta_m, \varphi_m}$ ,  $m = 1 \dots M$ , l'amplitude de l'image PWI au point  $\mathbf{r} = (x, z)$  s'écrit comme en 2D, soit :

$$I(\mathbf{r}) = \left| \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N w_m^e(\mathbf{r}) w_j^r(\mathbf{r}) \tilde{s}_{mj} \left( t_m^e(\mathbf{r}) + t_j^r(\mathbf{r}) \right) \right|,$$

où  $w_n^r(\mathbf{r})$  est un coefficient d'apodisation en réception généralement égal à la directivité élémentaire, et  $w_m^e(\mathbf{r})$  définit la zone effective 3D (II.18).

### II.3.2 Généralisation du principe des réflecteurs explosifs en 3D pour la méthode de Stolt

Dans cette sous-section, nous proposons un modèle des réflecteurs explosifs à 3 dimensions. Le principe consiste à trouver, pour un réflecteur à la position  $(x, y, z)$  dans le milieu inspecté, une source primaire fictive équivalente à la position  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  dans un milieu dans lequel les ondes se propagent à la célérité  $\hat{c}$ . Le temps de propagation d'une onde sphérique générée par la source explosive dans le milieu fictif doit être égal au temps d'arrivée de l'onde rétro-diffusée à partir de l'onde plane incidente dans le milieu physique. En suivant l'approche adoptée en 2D, les deux milieux sont liés par une relation linéaire, avec  $\hat{c} = \alpha c$ , et la transformation spatiale est définie par  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \mathbf{T}$ , avec

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & \beta \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{T}$  décrit une transformation linéaire laissant le plan  $\{z = 0\}$  invariant. Étant donné l'orientation arbitraire du repère orthonormé  $xOy$  dans le plan  $\{z = 0\}$ , il apparaît que  $\alpha$  et  $\beta$  sont indépendants de  $\varphi$ .

Le temps d'arrivée de l'onde résultant de la rétro-diffusion de l'onde plane par un réflecteur ponctuel à la position  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  au récepteur de position  $\mathbf{r}_{u,v} = (u, v, 0)$  s'écrit

$$\tau_{\mathbf{r}}(u, v) = \frac{1}{c} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}) \cdot \mathbf{e}_{\theta, \varphi} + \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}\|).$$

Après soustraction du retard en émission appliqué au récepteur considéré (cf. (II.3)), le temps de vol correspondant entre la source explosive en  $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  et le récepteur en  $\mathbf{r}_{u,v}$  est

$$\hat{\tau}_{\mathbf{r}}(u, v) = \frac{1}{\hat{c}} \|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_{u,v}\|.$$

Par suite, la différence  $W_{\mathbf{r}}(u, v)$  entre les deux temps qui viennent d'être définis s'exprime en fonction des positions  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}_{u,v}$  :

$$W_{\mathbf{r}}(u, v) = \frac{1}{c} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}) \cdot \mathbf{e}_{\theta, \varphi} + \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}\|] - \frac{1}{\hat{c}} \|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v})\mathbf{T}\|. \quad (\text{II.19})$$

L'objectif est de choisir les 4 paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  de façon à ce que  $|W_{\mathbf{r}}(u, v)|$  soit aussi petit que possible pour tous les réflecteurs et tous les récepteurs. L'amplitude acoustique maximale étant mesurée par le récepteur à l'aplomb du réflecteur considéré, les coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont choisis de sorte à annuler le plus de termes possibles dans le développement de Taylor de  $W_{\mathbf{r}}(u, v)$  au voisinage de  $(u, v) = (x, y)$ , qui s'écrit

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{r}}(u, v) \underset{\substack{u \rightarrow x \\ v \rightarrow y}}{=} W_{\mathbf{r}}(x, y) &+ (u - x) \frac{\partial W_{\mathbf{r}}}{\partial u}(x, y) + (v - y) \frac{\partial W_{\mathbf{r}}}{\partial v}(x, y) \\ &+ \frac{1}{2} (u - x, v - y) d^2 W_{\mathbf{r}}(x, y) (u - x, v - y)^t \\ &+ \mathcal{O}(\|(x - u, y - v)\|^3) \end{aligned}$$

Les dérivées d'ordre 0 et 1 sont donc d'abord mises à zéro en  $(u, v) = (x, y)$ . Les trois équations correspondantes sont

$$\begin{cases} W_{\mathbf{r}}(x, y) &= 0 \\ \partial_u W_{\mathbf{r}}(x, y) &= 0 \\ \partial_v W_{\mathbf{r}}(x, y) &= 0 \end{cases}$$

et imposent des relations entre  $\beta, \gamma$  et  $\delta$ , qui peuvent être exprimés en fonction du paramètre  $\alpha$  :

$$\begin{cases} \beta &= \alpha(1 + \cos \theta) \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} \\ \gamma &= \alpha^2(1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \varphi \\ \delta &= \alpha^2(1 + \cos \theta) \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

Le choix de ces coefficients assure que

$$|W_{\mathbf{r}}(u, v)| \sim \left| \frac{1}{2} (u - x, v - y) d^2 W_{\mathbf{r}}(x, y) (u - x, v - y)^t \right|. \quad (\text{II.20})$$



quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . Contrairement au cas 2D où l'annulation des dérivées d'ordre 0, 1 et 2 permettait de déterminer les trois coefficients du modèle des réflecteurs explosifs, le cas tri-dimensionnel fait intervenir quatre coefficients et l'annulation des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 fournit six équations. Il n'est donc pas possible, en général, d'assurer la nullité de la matrice Hessienne  $d^2W_{\mathbf{r}}(x, y)$ . En revanche, cette matrice étant symétrique donc diagonalisable, minimiser (II.20) revient à minimiser  $\max(|\mu_1|, |\mu_2|)$ , où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les valeurs propres de la Hessienne en  $(x, y)$ . Puisque  $\alpha$  ne dépend pas de  $\varphi$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\varphi = 0$ . La hessienne prend alors la forme

$$d^2W_{\mathbf{r}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2(1 + \cos \theta) - 1}{cz(1 + \cos \theta)\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2(1 + \cos \theta + \sin^2 \theta) - 1}{cz(1 + \cos \theta)\alpha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

Il est clair que  $\mu_2 - \mu_1$  est indépendant de  $\alpha$ . Ainsi,  $\max(|\mu_1|, |\mu_2|)$  est minimal pour  $\mu_1 = -\mu_2$ , ce qui détermine la valeur de  $\alpha$ , et on obtient alors un équivalent de l'erreur commise sur les temps de vol au voisinage de  $(u, v) = (x, y)$  :

$$|W_{\mathbf{r}}(u, v)| \underset{\substack{u \rightarrow x \\ v \rightarrow y}}{\sim} \frac{\sin^2 \theta}{4cz(1 + \cos \theta)} \|(x - u, y - v)\|^2.$$

Dans le cas général où  $\varphi \neq 0$ , on peut montrer que les coefficients du modèle des réflecteurs explosifs en 3D sont donnés par les formules

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} \\ \beta &= \frac{2\sqrt{1 + \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}}{3 - \cos \theta} \\ \gamma &= \frac{2 \sin \theta \cos \varphi}{3 - \cos \theta} \\ \delta &= \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{3 - \cos \theta} \end{cases}$$

On observe que pour  $\theta \neq 0$ , les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  en 3D sont différents de ceux définis pour le modèle 2D. Le milieu virtuel étant entièrement décrit, la méthode de Stolt peut être appliquée comme dans le cas 2D. Le spectre de la réflectivité dans le milieu virtuel  $\hat{G}$  est donné par :

$$\hat{G}(k_x, k_y, k_z) = \frac{\hat{c}k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \tilde{S}(k_x, k_y, \omega(k_x, k_y, k_z)), \quad (\text{II.21})$$

où  $\omega$  est défini par la relation de dispersion

$$\omega(k_x, k_y, k_z) = \hat{c} \operatorname{sign}(k_z) \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Finalement, pour revenir dans le domaine physique, il suffit de calculer  $\hat{g}(x + \gamma z, y + \delta z, \beta z)$

par transformée de Fourier inverse 3D de (II.21). En notant  $\tilde{S}(k_x, k_y, \omega) = S(k_x - k \sin \theta \cos \varphi, k_y - k \sin \theta \sin \varphi, \omega)$  le spectre corrigé de la loi de retard en émission, la réflectivité du milieu s'écrit

$$g(x, y, z) = \iiint \tilde{S}(k_x, k_y, \omega) e^{ik_x x + ik_y y + i \left[ \beta \sqrt{\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2} + \gamma k_x + \delta k_y \right] z} dk_x dk_y d\omega.$$

Comme dans le cas bi-dimensionnel, la transformée de Fourier ci-dessus, non-uniforme en  $\omega$ , peut être écrite sous forme d'une transformée de Fourier 3D uniforme à l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale. Ce dernier permet d'exprimer la distribution  $g(x, y, z)$  comme la transformée de Fourier inverse 3D du spectre

$$G(k_x, k_y, k_z) = \frac{\alpha c(k_z - \gamma k_x - \delta k_y)}{\beta \sqrt{k_x^2 + \left(\frac{k_z - \gamma k_x - \delta k_y}{\beta}\right)^2}} \tilde{S}\left(k_x, k_y, \omega\left(k_x, \frac{k_z - \gamma k_x - \delta k_y}{\beta}\right)\right).$$

En étendant les définitions des cônes des ondes propagatives et des supports des spectres (cf. sous-section II.1.2(b)), on appellera cône des ondes propagatives dans l'espace  $(k_x, k_y, k)$ , le domaine (indépendant de  $\theta$  et  $\varphi$ ) défini par (cf. Figure II.15a)

$$\mathcal{H} = \left\{ (k_x, k_y, k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \right\}.$$

Le support du spectre corrigé  $\tilde{S}$  est défini comme (cf. Figure II.15b)

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ (k_x, k_y, k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (k_x - k \sin \theta \cos \varphi)^2 + (k_y - k \sin \theta \sin \varphi)^2 \leq k^2 \right\}.$$

Enfin, le cône des ondes propagatives pour le milieu des réflecteurs explosifs est quant à lui

$$\hat{\mathcal{H}} = \left\{ (k_x, k_y, k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \alpha^2 (k_x^2 + k_y^2) \leq k^2 \right\}.$$

Pour de faibles angles  $\theta$ ,  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \hat{\mathcal{H}}$ , c'est-à-dire que toutes les ondes se propageant dans le milieu physique se propagent aussi dans le milieu virtuel. Le support du spectre  $G$  pour  $\theta = 20^\circ$  est affiché sur la Figure II.15c. Pour  $\theta$  tel que  $\frac{\alpha}{2 \sin \theta} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \cos^2 \theta \right) < 1$ , c'est-à-dire pour  $\theta > 24,4^\circ$ , certaines ondes se propageant à de forts angles dans le milieu physique ne se propagent pas dans le milieu virtuel, et il en résulte une dégradation des échos de défauts situés aux forts angles. Le support du spectre  $G$  pour  $\theta = 30^\circ$  est affiché sur la Figure II.15d.

### II.3.3 Extension de la méthode de Lu en 3D et complexités des algorithmes f-k

#### a) Equations d'imagerie

Afin d'étendre la méthode de Lu en 3D, le modèle direct introduit dans la sous-section II.1.3 est généralisé à une onde plane émise dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta, \varphi}$  et rétro-diffusée sous la forme d'une somme d'ondes sphériques. Le signal mesuré par le récepteur à la position

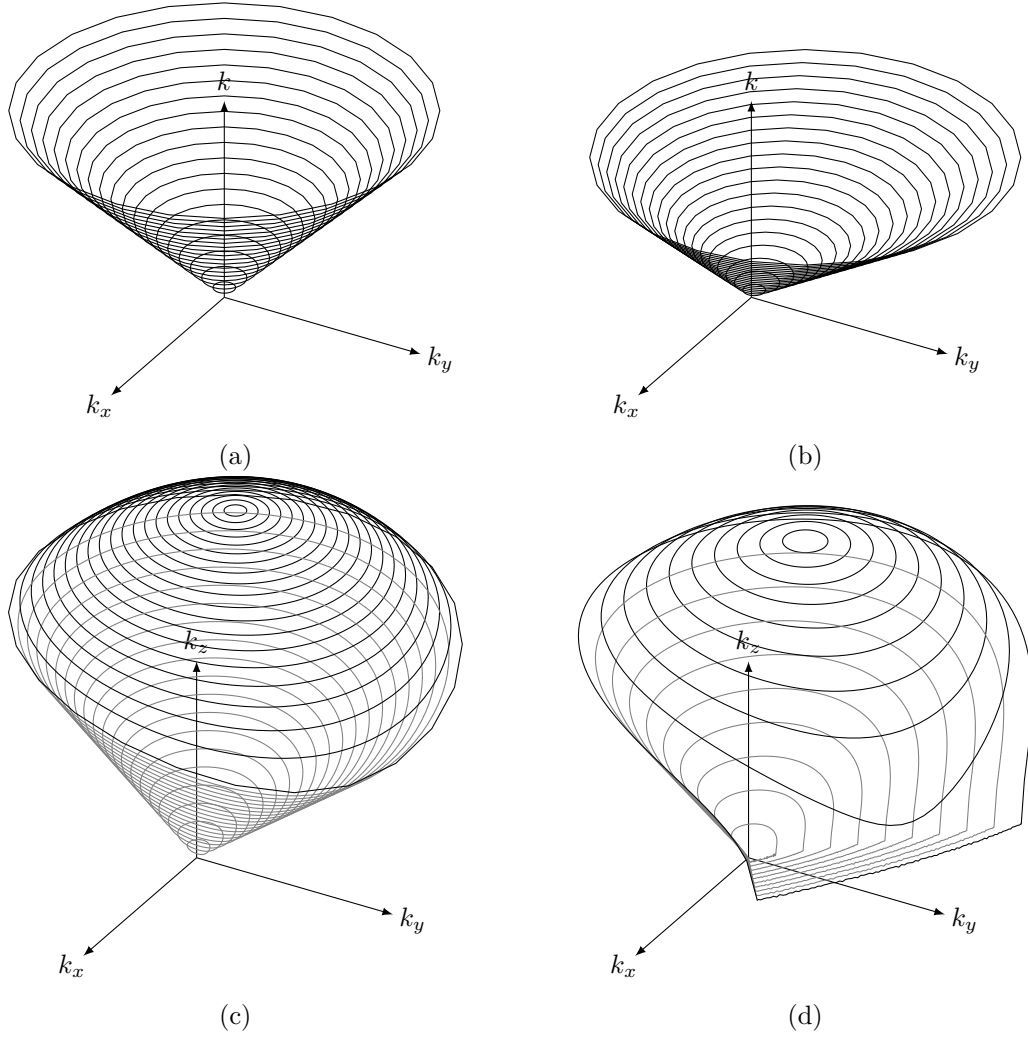


Fig. II.15 Supports des spectres signal et des spectres image relatifs à la méthode de Stolt. (a) Cône  $\mathcal{H}$  des ondes propagatives dans l'espace  $k_x$ - $k_y$ - $k$ ; (b) Cône  $\tilde{\mathcal{H}}$  des ondes propagatives dans le spectre corrigé  $\tilde{S}(k_x, k_y, k) = S(k_x - k \sin \theta \cos \varphi, k_y - k \sin \theta \sin \varphi, k)$ , (c) Support du spectre de l'image obtenue par la méthode de Stolt à partir d'une émission dans la direction  $\mathbf{e}_{20,60}$ ; (d) Support du spectre de l'image obtenue par la méthode de Stolt à partir d'une émission dans la direction  $\mathbf{e}_{30,60}$

$\mathbf{r}_{u,v} = (u, v, 0)$  s'écrit

$$S(u, v, \omega) = \iiint e^{-ikx \sin \theta \cos \varphi -iky \sin \theta \sin \varphi -ikz \cos \theta} g(x, y, z) \frac{e^{-ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{u,v}\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{u,v}\|} dx dy dz. \quad (\text{II.22})$$

L'identité de Weyl (annexe A1) donne

$$\frac{e^{-ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{u,v}\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{u,v}\|} = \iint \frac{e^{ik_u(x-u)+ik_v(y-v)-iz\sqrt{k^2-k_u^2-k_v^2}}}{\sqrt{k^2-k_u^2-k_v^2}} dk_u dk_v. \quad (\text{II.23})$$

Par suite, en injectant (II.23) dans (II.22) et en opérant une transformée de Fourier selon les directions,  $u$  et  $v$ , on obtient la relation liant le spectre du signal pour le triplet  $(k_u, k_v, k) \in \mathcal{H}$  au spectre de l'image pour le triplet  $(k_x, k_y, k_z) \in \text{supp}(G)$ , c'est-à-dire

$$S(k_u, k_v, \omega) = \sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2} G(k_x, k_y, k_z),$$

où

$$\begin{cases} k_x &= k_u + k \sin \theta \cos \varphi \\ k_y &= k_v + k \sin \theta \sin \varphi \\ k_z &= k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2} \end{cases}$$

La transformation donnant  $(k_u, k_v, k)$  en fonction d'un triplet de nombres d'onde  $(k_x, k_y, k_z)$  appartenant au spectre de l'image est définie par

$$\begin{cases} k_u &= k_x - k \sin \theta \cos \varphi \\ k_v &= k_y - k \sin \theta \sin \varphi \\ k &= \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{2k_x \sin \theta \cos \varphi + 2k_y \sin \theta \sin \varphi + 2k_z \cos \theta} \end{cases}$$

Le spectre de l'image obtenue pour un tir selon la direction  $\mathbf{e}_{30,60}$  est donné en [Figure II.16](#).

$$\text{supp}(G) = \left\{ k_z \geq 0, k_z^2 \geq \cos^2 \theta \left( (k_x - k_z \tan \theta \cos \varphi)^2 + (k_y - k_z \tan \theta \sin \varphi)^2 \right) \right\}$$

Le calcul d'une image en immersion par extrapolation du champ du réseau jusqu'à l'interface s'effectue de manière similaire au cas 2D. On montre que le spectre mesuré par un réseau virtuel au contact transmettant une onde plane dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta,\varphi}$  s'écrit

$$S_0(k_x, k_y, \omega) = \exp \left[ ih \left( k' \cos \theta' + \sqrt{k'^2 - k_x^2 - k_y^2} \right) \right] S(k_x, \omega).$$

Le spectre corrigé à l'interface  $\tilde{S}_0(k_x, k_y, \omega) = S_0(k_x - k \sin \theta \cos \varphi, k_y - k \sin \theta \sin \varphi, \omega)$  est donc donné par la relation

$$\tilde{S}_0(k_x, k_y, \omega) = \exp \left[ ih \left( k' \cos \theta' + \sqrt{k'^2 - (k_x - k' \sin \theta' \cos \varphi)^2 - (k_y - k' \sin \theta' \sin \varphi)^2} \right) \right] \tilde{S}(k_x, k_y, \omega).$$

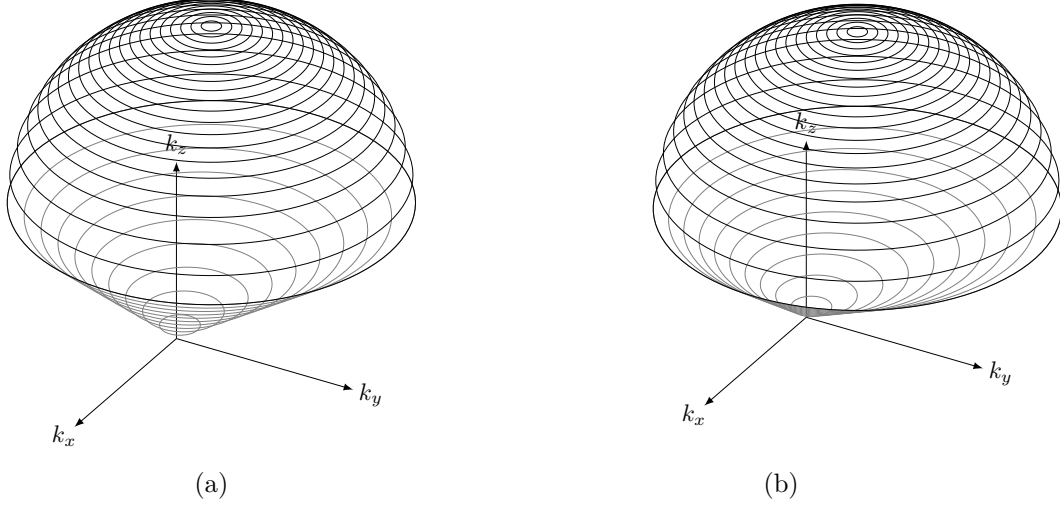


Fig. II.16 Support du spectre de l'image obtenue par la méthode de Lu à partir d'émissions dans les directions (a)  $\mathbf{e}_{20,60}$ , et (b)  $\mathbf{e}_{30,60}$ .

### b) Complexités algorithmiques

Du point de vue de l'implémentation en 3D, une FFT 3D est utilisée pour transformer les signaux avant d'appliquer une interpolation linéaire. La complexité des méthodes de Stolt et de Lu en 3D s'exprime d'une part à l'aide du nombre  $N_x N_y N_z$  de voxels composant l'image, du nombre  $N_t$  d'échantillons temporels, de nombre  $N$  d'éléments et du nombre  $M$  de tirs. D'autre part, elle fait intervenir les volumes  $\mathcal{V}_m$  (différents selon la méthode considérée) définissant les supports des spectres images :

$$\mathcal{C}_{f-k} = \mathcal{O} \left( M N N_t \log_2(N N_t) + 6 L_x L_y L_z k_{\max}^3 \sum_{m=1}^M \mathcal{V}_m + N_x N_y N_z \log_2(N_x N_y N_z) \right).$$

Pour la méthode de Lu,  $\mathcal{V}_m^l = \frac{\pi}{3} k_{\max}^3 (2 + \cos \theta_m)$ . Le rapport entre la complexité de l'imagerie PWI et des méthodes  $f-k$  est

$$\frac{\mathcal{C}_{PWI}}{\mathcal{C}_{f-k}} \sim \frac{4N}{\frac{N N_t \log_2(N N_t)}{N_x N_y N_z} + 6 \frac{L_x L_y L_z}{N_x N_y N_z} k_{\max}^3 \sum_{m=1}^M \mathcal{V}_m + \frac{\log_2(N_x N_y N_z)}{M}}$$

Pour des tailles d'images  $N_x N_y N_z \geq N N_t$  et un grand nombre d'ondes planes transmises ( $M \approx 30$ ), les deux premiers termes du dénominateur tendent vers 0 tandis que le troisième est de l'ordre de 1. Le gain en nombre d'opérations offert par l'imagerie  $f-k$  par rapport à PWI tend alors vers  $4N$ . Ces complexités ainsi que les temps de calcul sont comparés dans la sous-section suivante.

### II.3.4 Résultats en imagerie 3D

Cette sous-section présente deux exemples d'imagerie 3D avec un traducteur matriciel de  $16 \times 16$  éléments en immersion, et compare dans chaque cas les performances des méthodes  $f$ - $k$  avec celles de l'imagerie PWI. Le premier exemple est numérique, et l'objectif est d'imager des inclusions sphériques localisées dans un petit volume centré sous la matrice. Les images 3D sont reconstruites à partir de signaux simulés en émettant des ondes planes sous des angles assez faibles par rapport à l'incidence normale. Le deuxième exemple est expérimental, les ondes planes sont émises sous des angles plus forts pour imaginer un volume dont la section est beaucoup plus étendue que l'ouverture de la sonde. Le but est alors de caractériser plusieurs entailles verticales avec des orientations distinctes dans le plan horizontal et parallèle à la matrice.

#### a) Imagerie de porosités dans un petit volume centré sous le réseau

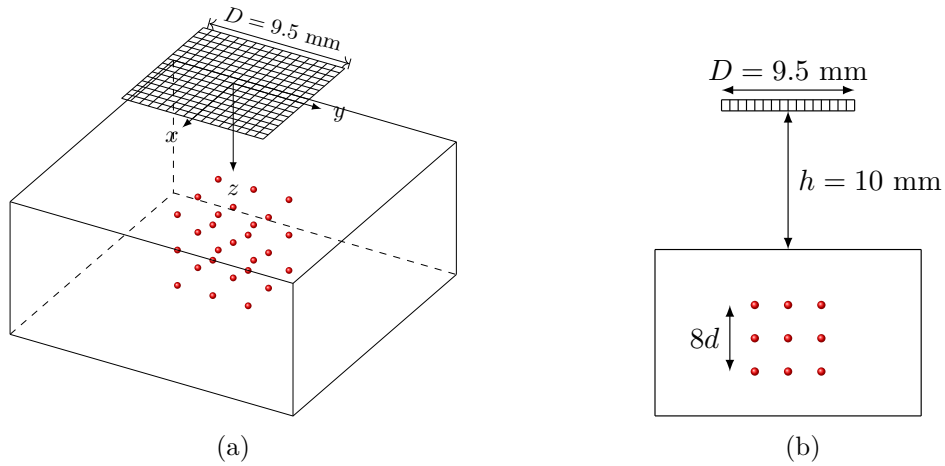


Fig. II.17 Configuration de contrôle définie en simulation avec un réseau d'inclusions sphériques dans un bloc d'acier, et une matrice de  $16 \times 16$  éléments en immersion située à une distance  $h = 20$  mm de la surface. a) Vue 3D ; b) vue de profil.

Pour évaluer les performances des méthodes  $f$ - $k$ , nous nous intéressons ici au premier cas d'étude où les échos ont été simulés avec le logiciel CIVA. Une matrice de  $16 \times 16$  éléments est immergée dans l'eau à 10 mm au-dessus de la surface d'un bloc d'acier comportant une réseau 3D de 27 inclusions sphériques (Figure II.17). La matrice est carrée de pas inter-éléments  $d = 0,6$  m et les éléments de surface  $0,5 \times 0,5$  mm<sup>2</sup> émettent un signal de fréquence centrale 5 MHz. L'épaisseur du matériau est de 12 mm et les ondes longitudinales s'y propagent avec la célérité  $c = 5.9$  mm  $\mu$ s<sup>-1</sup> (dans l'eau, la célérité est  $c' = 1,483$  mm  $\mu$ s<sup>-1</sup>).

Les 27 inclusions de diamètre  $d$  sont arrangées selon un réseau 3D de période  $4d$  dans les trois directions. Le réseau peut être séparé en trois étages de 9 porosités situées aux profondeurs 4, 6,4 et 8,8 mm dans l'acier. Les échos ont été simulés en transmettant 25 ondes planes dont les directions de propagation dans l'acier sont définies par les angles

suivants (en degrés) :

$$(\theta_k, \varphi_l) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } k = 0 \\ (10k, 45l) & \text{sinon, } k \in \{0, \dots, 3\} \text{ et } l \in \{0, \dots, 7\} \end{cases}$$

L'algorithme PWI et les deux méthodes  $f$ - $k$  ont été implémentés sous Matlab, et les codes exécutés avec le même ordinateur (Intel Xeon 3,30 GHz CPU et 16 GB de RAM). Les volumes 3D reconstruits sont présentés sur la Figure II.18 sous forme d'isosurfaces rouges. Ces surfaces lient les points de l'image dont les amplitudes sont égales à un certain pourcentage de l'amplitude maximale. Celui-ci a été fixé à 40% pour PWI et à 30% pour les méthodes  $f$ - $k$ , afin que toutes les porosités soient visibles sur chaque image (une seuil à 40% pour les méthodes  $f$ - $k$  ne permettrait pas de visualiser les inclusions les plus profondes). Nous expliquerons plus bas pourquoi les seuils en amplitude sont plus bas en imagerie  $f$ - $k$ . La section horizontale du volume imagé est un carré de côté  $D = 9,5$  mm, où  $D$  est

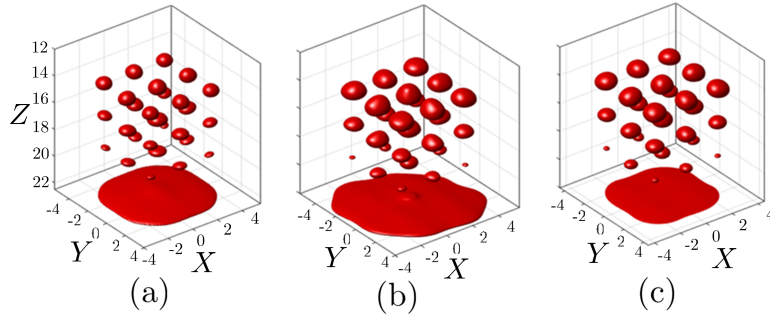


Fig. II.18 Images 3D des inclusions présentées sous forme d'isosurfaces : (a) PWI, (b) méthode de Stolt, (c) méthode de Lu

l'ouverture de la sonde, et le nombre de voxels composant l'image est  $N_x \times N_y \times N_z = 200 \times 200 \times 630$ . Pour les trois volumes représentés, les porosités apparaissent de plus en plus petites à mesure que l'on s'éloigne de la surface du fait de la décroissance des amplitudes des échos en fonction de la profondeur. Dans le cas présent où les signaux sont simulés sans inclure de loi d'atténuation (effets viscoélastiques ou de diffusion), l'atténuation est uniquement liée à la diffraction. Quand le niveau de bruit est faible, une correction en amplitude peut compenser ce phénomène, soit en utilisant un TCG (Time Compensation Gain) [60], soit en corrigeant directement l'image 3D ligne par ligne. Comme dans le cas 2D, une décroissance plus rapide des échos est observée pour les images calculées dans le domaine de Fourier. En procédant comme en II.1.5, une formulation asymptotique des amplitudes des images (cf. Annexe A.4) permet d'expliquer l'atténuation plus rapide pour les méthodes  $f$ - $k$ . En notant  $K(\mathbf{r}, u, v, \omega) = S(u, v, \omega) e^{ik(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{\theta, \varphi} + \|\mathbf{r}_{u,v} - \mathbf{r}\|)}$ , l'amplitude au point  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  pour une onde plane se propageant dans l'acier dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta, \varphi}$  s'écrit

$$g_P(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{r}, u, v, \omega) du dv d\omega.$$

Sous l'hypothèse que  $kz \gg 1$  pour toutes les fréquences dans la bande-passante du signal, on montre dans l'Annexe A.4 que les amplitudes des images obtenues par les méthodes

de Stolt ( $g_S$ ) et de Lu ( $g_L$ ) peuvent être écrites sous les formes :

$$\frac{g_L(\mathbf{r})}{2\pi\sqrt{i}} \approx \int_{\mathbb{R}^3} \frac{k^2 \cos^2 \beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{u,v})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}\|} K(\mathbf{r}, u, v, \omega) du dv d\omega$$

$$\frac{g_S(\mathbf{r})}{2\pi\sqrt{i}} \approx \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{k} \cos \beta(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{u,v})}{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_{u,v}\|} e^{i\omega W_{\mathbf{r}}(u,v)} K(\mathbf{r}, u, v, \omega) du dv d\omega,$$

où  $W_{\mathbf{r}}(u, v)$  est la différence des temps d'arrivée entre le milieu physique et celui des réflecteurs explosifs définie par (II.19), et les angles impliqués sont définis par  $\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{u,v}) = \arccos(z/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}\|)$  et  $\beta(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{u,v}) = \arccos(\hat{z}/\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_{u,v}\|)$ . Les coefficients de pondération en espace font intervenir  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u,v}\|$  et  $\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_{u,v}\|$  au dénominateur au lieu de  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|^{1/2}$  et  $\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_u\|^{1/2}$  en 2D, ce qui explique une décroissance plus rapide en fonction de la distance au réseau quand les algorithmes de Lu et de Stolt sont implémentés en 3D. En d'autres termes, les différences d'amplitude entre PWI et les méthodes  $f$ - $k$  sont toujours plus marquées en 3D qu'en 2D.

En ce qui concerne la résolution spatiale, la différence entre l'image PWI et les images  $f$ - $k$  réside dans les coefficients de pondération  $k^2$  et  $\hat{k}$ , qui filtrent les basses fréquences et ont pour effet de rehausser la fréquence centrale du signal transmis. La comparaison de ces coefficients avec ceux présentés en 2D (cf (II.16) et (II.17)) montre que les méthodes  $f$ - $k$  améliorent davantage la résolution latérale en 3D qu'en 2D. La dernière remarque est que la résolution latérale de la méthode de Lu est la meilleure du fait du coefficient  $k^2$  dans (II.24) agissant comme un filtre passe-haut d'ordre 2 (contre un filtre d'ordre 1 pour la méthode de Stolt et d'ordre 0 pour PWI). Ceci est confirmé par les coupes horizontales dans les plans  $\{z = 4 \text{ mm}\}$ ,  $\{z = 6,4 \text{ mm}\}$  et  $\{z = 8,8 \text{ mm}\}$  présentés sur la Figure II.19. Pour une comparaison quantitative des résolutions latérales, le tableau I présente la largeur à mi-hauteur des porosités centrées sous l'ouverture de la sonde et dénotées  $A_1(0; 0; 4)$ ,  $A_2(0; 0; 6,4)$  et  $A_3(0; 0; 8,8)$ . Pour  $A_3$ , l'inclusion la plus profonde, la méthode de Lu améliore la résolution latérale de 17% par rapport à PWI, ce qui n'est pas négligeable en imagerie 3D où l'ouverture réduite des sondes matricielles sont propices à des résolutions latérales plus dégradées qu'en imagerie 2D.

| Profondeur | Largeur (mm) |       |      | Différence<br>par rapport à PWI (%) |         |
|------------|--------------|-------|------|-------------------------------------|---------|
|            | PWI          | Stolt | Lu   | Stolt                               | Lu      |
| 4 mm       | 1,24         | 1,24  | 1,14 | 0%                                  | -7,69%  |
| 6,4 mm     | 1,48         | 1,33  | 1,24 | -9,78%                              | -16,13% |
| 8,8 mm     | 1,71         | 1,48  | 1,43 | -13,89%                             | -16,67% |

TABLE II.1 – Largeurs à -6 dB des échos des inclusions centrales aux profondeurs  $z_1 = 4$  mm ( $A_1$ ),  $z_2 = 6,4$  mm ( $A_2$ ) et  $z_3 = 8,8$  mm ( $A_3$ )

Enfin, les temps de reconstruction avec Matlab sont tracés sur la Figure II.20. Ces temps sont au très net avantage des méthodes  $f$ - $k$ . Ceci s'explique par le fait que le temps de reconstruction dépend peu du nombre de voxels de l'image lorsque celle-ci est calculée dans le domaine de Fourier. En effet, comme vu précédemment dans le cas 2D, le nombre



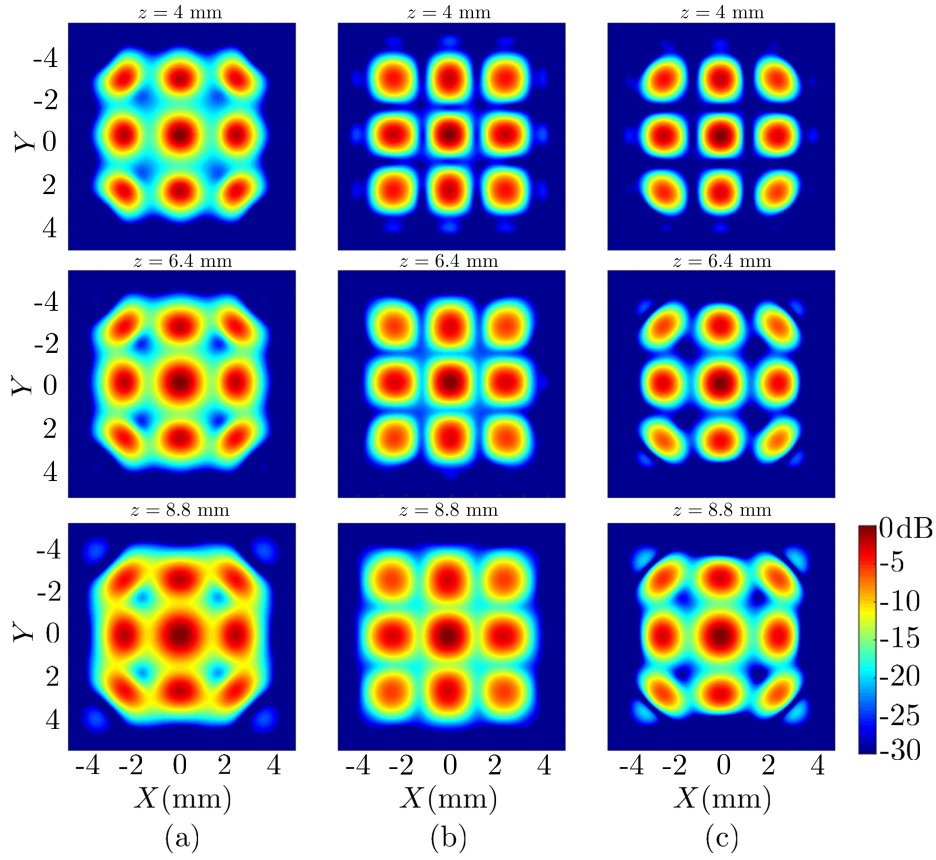


Fig. II.19 Coupes horizontales des volumes dans les plans  $\{z = 4 \text{ mm}\}$ ,  $\{z = 6.4 \text{ mm}\}$ , et  $\{z = 8.8 \text{ mm}\}$ . (a) imagerie PWI, (b) méthode de Stolt, et (c) méthode de Lu.

de voxels  $N_x N_y N_z$  n'intervient dans la complexité que par le biais de la transformée de Fourier inverse 3D, effectuée une seule fois à la fin de l'algorithme. La faible dépendance des temps d'exécution en le nombre de voxels permet de former des images très fines sans vraiment ralentir la reconstruction. On notera à cet égard que le temps de reconstruction d'une image est compris entre 2,5 et 8 s pour 25 émissions planes lorsque le nombre de voxels est compris entre  $32 \times 32 \times 48$  et  $512^3$  avec la méthode de Lu. Les temps de reconstruction avec PWI, quant à eux, augmentent proportionnellement au nombre de voxels et deviennent prohibitifs au delà de  $10^6$  voxels. Les méthodes  $f$ - $k$  permettent donc, à peu de frais, de former des images finement échantillonnées, et avec une résolution latérale équivalente voire meilleure que celles fournies par la méthode PWI.

La supériorité de la méthode de Stolt par rapport à PWI doit être nuancée car, comme en 2D, le principe des réflecteurs explosifs reste valable pour des réflecteurs situés sous l'ouverture de la matrice. Dans le paragraphe suivant, la méthode PWI et de Lu sont comparées expérimentalement avec des données acquises sur un bloc d'aluminium présentant 3 entailles débouchant en fond de pièce et éloignées de l'ouverture du capteur.

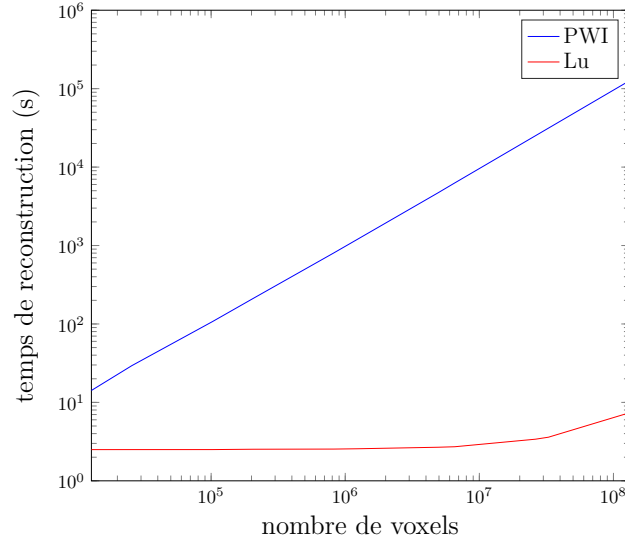


Fig. II.20 Temps de calcul relatifs à l'imagerie 3D des inclusions sphériques avec une matrice  $16 \times 16$  éléments en immersion émettant 25 ondes planes.

b) Imagerie d'entailles dans un volume de section horizontale  $5D \times 5D$

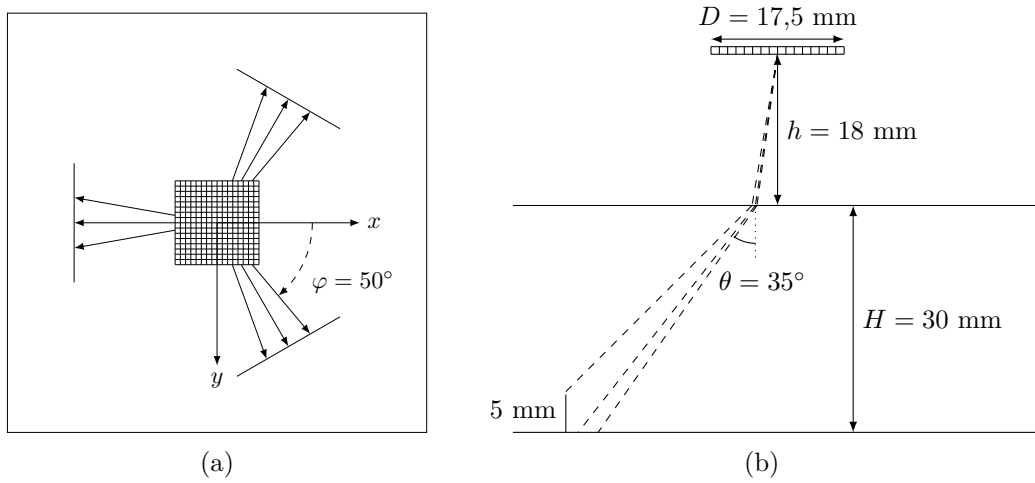


Fig. II.21 Configuration de contrôle expérimentale. (a) Vue de dessus de la zone image contenant les trois entailles verticales, du capteur matriciel et des angles d'émission  $\varphi$ . (b) Section verticale de la pièce dans le plan  $\{y = 0\}$ .

Dans cette deuxième application mettant en œuvre les méthodes  $f$ - $k$  avec des capteurs matriciels, la méthode de Lu et PWI sont appliquées à des signaux expérimentaux pour former des images volumiques de section horizontale  $5D \times 5D$ . La pièce inspectée est un bloc d'aluminium de dimensions  $130 \times 130 \times 30$  mm<sup>3</sup> ( $c = 6,3$  mm  $\mu$ s<sup>-1</sup>) comportant trois entailles identiques débouchant en fond de pièce, de hauteur 5 mm et de longueur 25 mm. Comme indiqué sur la Figure II.21, les entailles sont perpendiculaires au fond

et ont différentes orientations par rapport à l'axe Oz. Elles sont contenues dans trois plans verticaux décrivant un triangle équilatéral. L'expérience a été menée avec une sonde matricielle  $16 \times 16$  éléments de pitch  $d = 1,1$  mm dans les directions  $x$  et  $y$ , et transmettant un signal de fréquence centrale  $f_c = 5$  MHz (sonde commercialisée par Imasonic, Voray-sur-L'Ognon, France). L'ouverture du capteur est donc  $D = 17,5$  mm. La surface active d'un élément est  $1 \text{ mm}^2$ . Les signaux ont été acquis avec un système multi-voies MultiX++ (M2M, Les Ulis, France). La hauteur de la colonne d'eau a été fixée à 18 mm et 27 ondes planes ont été transmises dans l'aluminium avec les angles suivants :

$$\begin{cases} \theta & \in \{35^\circ, 38^\circ, 45^\circ\} \\ \varphi & \in \{-70^\circ, -60^\circ, -50^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 170^\circ, 180^\circ, 190^\circ\} \end{cases}$$

9 ondes planes sont transmises en direction de chaque entaille de sorte à garantir une insonification à peu près homogène de toute la face du défaut (hauteur 5 mm et largeur 25 mm). Une 28<sup>ième</sup> onde plane horizontale ( $\theta = 0$ ) a été transmise pour imager le fond de pièce, le gain de pré-amplification du système a été diminué de 20 dB pour ce tir horizontal.

D'après le critère de Nyquist, le pas inter-éléments  $d$  devrait vérifier

$$d \leq \frac{\lambda}{2} = 0,63 \text{ mm},$$

où  $\lambda = c/f_c$ , de sorte à éviter le repliement de spectre. Cette inégalité n'est pas vérifiée ici puisque  $d = 0,873\lambda$ . Des lobes de réseau sont donc émis à chaque tir en direction du fond de pièce (cf. paragraphe I.1.3b) et les échos engendrés perturbent les échos d'intérêt des entailles. Afin de remédier à ce problème, une fenêtre temporelle resserrée autour de l'écho d'intérêt a été appliquée pour ne pas enregistrer de signal parasite en provenance du fond.

Les dimensions de la zone image sont  $87,5 \times 87,5 \times 30 \text{ mm}^3$ , et le nombre de voxels est  $200 \times 200 \times 400 = 1,6 \times 10^7$ . L'image formée à partir des 28 tirs a été calculée en environ 100 s par la méthode de Lu, et a pris environ  $2 \cdot 10^4$  s avec PWI, soit un gain de temps d'un facteur 200.

Les représentations en isosurfaces en [Figure II.22](#) montrent que la méthode de Lu donne une image de qualité équivalente, sinon meilleure, à PWI. Pour les deux volumes, le même seuil en amplitude, fixé à 40% du maximum dans tout le volume, a été choisi, et l'écho du fond de pièce est d'un niveau similaire aux échos des entailles en raison du gain de pré-amplification plus faible pour le tir à  $0^\circ$ . La [Figure II.23](#) présente les maxima d'amplitude le long de l'axe  $z$  pour tous les couples  $(x, y)$  dans la zone de reconstruction. Ces deux images dans le plan horizontal, ainsi que les isosurfaces, permettent de caractériser l'orientation des 3 entailles. Néanmoins, la détermination de la hauteur des entailles est plus délicate, car les échos des sommets des entailles ne sont pas visibles sur les images volumiques. La longueur des entailles peut être estimée en mesurant la longueur des échos à -6 dB. Cette mesure fournit des longueurs égales à environ la moitié de la longueur réelle des défauts. Ceci est dû au fait que l'ouverture du réseau (17,5 mm) est inférieure à l'extension des entailles, et, bien que les défauts aient été insonifiés sous différents angles  $\varphi$ , il n'est pas possible d'obtenir des échos provenant de tous les points de l'entaille. Pour caractériser la longueur des entailles, une matrice multi-éléments de même

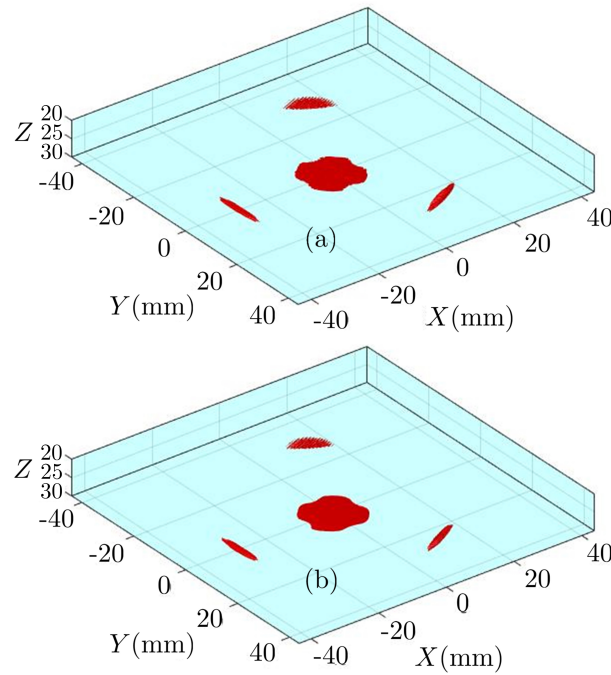


Fig. II.22 Représentation des volumes imagés par les méthodes (a) PWI et (b) de Lu, sous forme d'isosurfaces. Les contours rouges des échos correspondent à une amplitude égale à 30% de l'amplitude maximale.

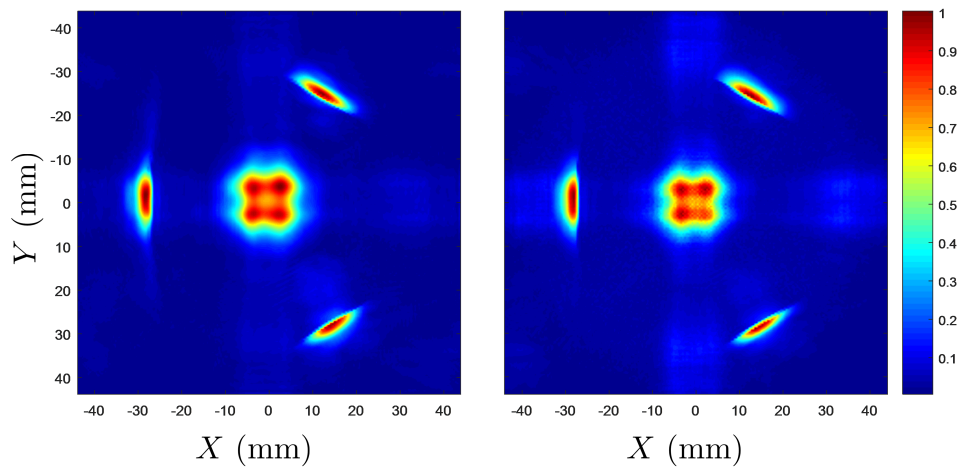


Fig. II.23 Maximum des images normalisées le long de la direction  $z$  projeté sur le plan  $\{z=0\}$  pour les volumes reconstruits par les méthodes (a) de Lu, et (b) PWI.

pitch mais comportant  $32 \times 32$  pourrait être utilisée pour bénéficier d'une plus grande ouverture. Enfin, pour caractériser la hauteur des entailles à partir de l'image volumique,

l'utilisation d'un mode de reconstruction mettant en œuvre un rebond sur le fond de pièce est nécessaire. Ceci fera l'objet du prochain chapitre où l'imagerie  $f$ - $k$  est généralisée aux reconstructions multi-modes.

## II.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les théories des méthodes PWI, de Stolt (telle qu'adaptée aux émissions planes par Garcia *et al.*), et de Lu en 2D avec des émissions planes. L'algorithme de Stolt a été reformulé de sorte à accélérer son implémentation numérique par rapport à celle de Garcia. En pratique, cette nouvelle formulation ne fournit un algorithme que très légèrement plus rapide. De plus, l'analyse du spectre image a permis de définir des limites de validité du modèle des réflecteurs explosifs. La méthode de Lu a, quant à elle, été dérivée du modèle direct de propagation utilisé dans le domaine radar par Callow, et en CND par Hunter *et al.* pour l'algorithme du nombre d'onde. Une analyse des complexités algorithmiques et des temps d'exécution des codes Matlab ont montré que les méthodes fréquentielles pouvaient accélérer les temps de reconstruction d'un facteur atteignant 300 pour des images comportant un grand nombre de pixels. Le temps de calcul le plus court pour une image 2D comportant 5 millions de pixels avec 64 émissions planes est de 2 s.

Dans un deuxième temps, les méthodes fréquentielles 2D ont été adaptées au contrôle en immersion. La prise en compte de la hauteur d'eau est réalisée en extrapolant le champ mesuré par le réseau en immersion jusqu'à la surface pour en déduire le champ que mesurerait un capteur au contact transmettant directement une onde plane dans le solide. Cette extrapolation de champ permet de former une image sous une interface plane eau/acier, sans affecter le temps de calcul. La capacité des méthodes à imager une zone large par rapport à l'ouverture de la sonde a ensuite été évaluée en immersion. Il ressort de cette étude que la méthode de Stolt fournit une bonne résolution latérale pour des réflecteurs situés sous l'ouverture, mais ne parvient pas à résoudre des défauts hors de l'ouverture, tandis que PWI et la méthode de Lu imagent des défauts même très éloignés de l'ouverture.

Enfin, les trois méthodes précédentes ont été généralisées à l'imagerie 3D. Nous avons étendu le principe des réflecteurs explosifs pour un milieu 3D, et implémenté la méthode de Stolt ainsi que la méthode de Lu, dérivée à partir du formalisme de Callow. Comme précédemment, les trois méthodes ont été évaluées sur la qualité des images et leurs temps de calcul. Une fois encore, nous avons montré que les méthodes  $f$ - $k$  fournissent des complexités et des temps de calcul très inférieurs à PWI, plus précisément jusqu'à 200 fois inférieur pour les méthodes fréquentielles sur des signaux expérimentaux. La dernière configuration expérimentale constitue un cas limite en imagerie avec un capteur matriciel puisqu'elle met en jeu une interface eau/acier, des entailles éloignées de l'ouverture comprises dans un volume de section horizontale  $5D \times 5D$ , et un réseau sous-échantillonné spatialement.

Des conditions similaires peuvent être rencontrées lors du contrôle de fissures pouvant se développer perpendiculairement aux interfaces dans des soudures. Le contrôle est alors généralement fait en considérant des réflexions sur les interfaces, avec une zone image excentrée par rapport au capteur. La reconstruction, appelée *imagerie multi-modes*, est

également souvent réalisée à partir d'ondes transversales, dont la vitesse est environ deux fois inférieure à celles des ondes longitudinales. Le critère d'échantillonnage du réseau n'est donc pas toujours satisfait pour les ondes transversales. A partir des développements réalisés dans ce chapitre, le chapitre suivant propose une généralisation de la méthode de Lu à l'imagerie multi-modes avec des sondes linéaires et matricielles, et une méthode de fenêtrage dans le domaine fréquentiel est proposée pour réduire la quantité d'information prise en compte pour la reconstruction de l'image, améliorer le rapport signal/bruit, et supprimer certains échos non désirés.



## Chapitre III

# Généralisation des algorithmes pour l'imagerie multi-modes de fissures

L'imagerie multi-modes a été introduite il y a une dizaine d'années [41, 61] afin d'améliorer la détection et la caractérisation de défauts de type fissure, l'application la plus fréquemment rencontrée étant le contrôle de fissures verticales ou quasi verticales à proximité du fond de pièce avec un capteur positionné au-dessus de la surface. Dans les procédés industriels utilisant la technologie multi-éléments, les algorithmes d'imagerie exploitent habituellement des trajets ultrasonores directs pour former l'image, et la zone d'intérêt autour du défaut est éclairée sous une incidence oblique de sorte à faire émerger deux échos caractéristiques : l'écho de diffraction du sommet de la fissure, et l'écho de coin à sa base [42]. Ces deux indications révèlent la nature du défaut, et la distance mesurée entre les deux échos donne une bonne estimation de la longueur de la fissure. Cependant, en présence de bruit de structure, la caractérisation d'une fissure est souvent une opération délicate en mode direct car l'écho de diffraction est nettement plus faible que l'écho de coin. L'imagerie multi-modes pallie cet inconvénient en exploitant des échos indirects provenant d'une double réflexion : l'une sur le fond de pièce et l'autre sur l'une des faces de la fissure. L'image résultante fait apparaître un écho vertical s'étendant sur toute la hauteur de la fissure, facilitant ainsi l'identification et le dimensionnement du défaut. Les modes de reconstruction incluant une seule réflexion sur le fond de pièce avant l'interaction avec le défaut sont appelés *modes demi-bond*, et ceux incluant une réflexion sur le fond et une autre sur la surface sont appelés *modes bond complet*. Ces derniers sont plus rarement utilisés, et l'application principalement visée est l'imagerie de fissures débouchant en surface quand les contraintes industrielles ne permettent pas de disposer le traducteur sur la face opposée.

Pour un défaut donné, le nombre potentiel de modes de reconstruction est important car une conversion de modes entre les ondes de polarisation longitudinale et celles de polarisation transversale peut être considérée à chaque interaction avec le défaut ou les interfaces. Cependant, les modes pertinents sont moins nombreux et dépendent de la localisation et de l'orientation de la fissure dans la structure, tandis que les autres, s'ils sont inappropriés, peuvent produire des artefacts d'imagerie ou des fausses alarmes. Certains outils sont proposés dans la littérature pour sélectionner le ou les modes pertinents en fonction des caractéristiques du défaut [62, 63] ou pour filtrer les artefacts d'imagerie



[40]. Ces outils ne font pas précisément l'objet de ce chapitre (le mode de reconstruction approprié pour un défaut donné sera supposé connu) même s'ils sont compatibles avec l'imagerie  $f$ - $k$ . L'objectif de ce chapitre est de proposer une théorie générale de l'imagerie multi-modes dans le domaine de Fourier pour réduire significativement les temps de calcul par rapport à la méthode temporelle PWI. La théorie est une généralisation de la méthode de Lu permettant de traiter les reconstructions en demi-bond et en bond complet, sans/avec conversions de modes aux interfaces, et reste valide en imagerie 3D avec un traducteur au contact ou en immersion. La méthode de Stolt n'est pas traitée dans ce chapitre car les fissures sont imagées sous incidence oblique en excentrant le capteur par rapport à la zone d'intérêt, et le modèle des réflecteurs explosifs n'est pas valable dans ces conditions.

La première section du chapitre rappelle le principe de l'imagerie PWI multi-modes [7]. Par rapport à la méthode TFM multi-modes (cf. sous-section I.2.2), l'approche par ondes planes permet de réduire le nombre de tirs, donc le volume de signaux à traiter, et limite également la formation de certains artefacts d'imagerie liés à des échos de géométrie [52]. Ensuite, la deuxième section développe la théorie de Lu pour l'imagerie multi-modes en 2D, et une validation expérimentale est proposée dans la troisième section en comparant les images PWI et de Lu pour quatre modes de reconstruction les plus représentatifs des applications en CND. En complément de cette théorie, la quatrième section introduit une méthode de fenêtrage spectral dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  pour accélérer les reconstructions par suppression des fréquences non pertinentes, ou pour éliminer de l'image des échos non désirés. Enfin, la dernière section généralise l'imagerie  $f$ - $k$  multi-modes au cas 3D, et valide expérimentalement le principe en reprenant le dispositif expérimental du chapitre 2 avec la maquette comportant trois entailles.

### III.1 Rappels sur l'imagerie PWI multi-modes

Cette section rappelle brièvement le principe de l'imagerie PWI multi-modes [7, 52]. Pour ce faire, on considère l'exemple donné sur la Figure III.1 représentant un réseau au contact d'un bloc d'épaisseur  $H$ , et un trajet en mode demi-bond incluant une réflexion sur le fond de pièce et une interaction avec une entaille droite débouchante. Pour rester général, le mode sera noté dans la suite  $P_1P_2dP_3$  où  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  désignent les trois sous-trajets composant le trajet aller-retour, respectivement entre le réseau et le fond ( $P_1$ ), entre le fond et le défaut ( $P_2$ ), et entre le défaut et le réseau ( $P_3$ ). Chaque sous-trajet  $P_i$  ( $i = \{1, 2, 3\}$ ) est associé à une onde longitudinale ( $P_i = L$ ) de célérité  $c_L$  ou transversale ( $P_i = T$ ) de célérité  $c_T$ . Le mode demi-bond permet donc de former  $2^3 = 8$  images différentes d'un même défaut (LLdL, TTdT, LTdT, TLdL, etc.). L'angle d'incidence  $\theta_1$  de l'onde plane transmise par le réseau est lié à l'angle de réflexion  $\theta_2$  sur le fond de pièce par la relation de Snell-Descartes  $\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$ .

Le temps de propagation d'une onde plane  $\theta_{1m}$  ( $m = 1, \dots, M$ ) entre le réseau et un point en  $\mathbf{r} = (x, z)$  après réflexion sur le fond s'écrit en fonction de l'épaisseur  $H$  de la pièce :

$$t_m^e(\mathbf{r}) = \frac{x \sin \theta_{1m} + H \cos \theta_{1m}}{c_1} + (H - z) \frac{\cos \theta_{2m}}{c_2} + \tau_1(\theta_{1m}),$$

où  $\tau_1(\theta_{1m})$  est le retard appliqué au premier élément pour le tir d'angle  $\theta_{1m}$ . Le temps

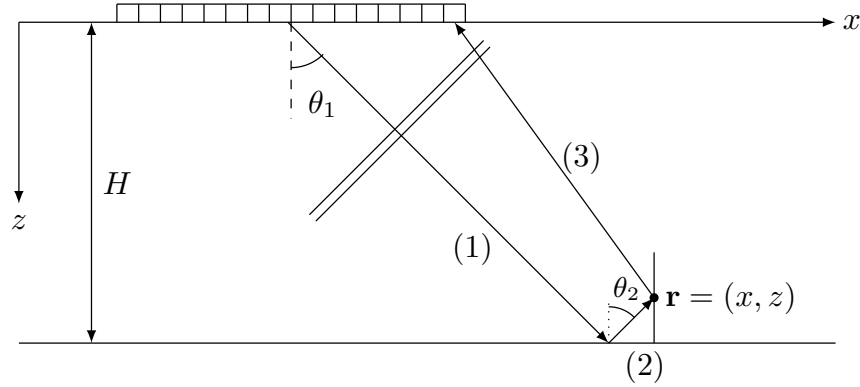


Fig. III.1 Trajet ultrasonore en demi-bond  $P_1P_2dP_3$  pour une onde plane émise sous un angle  $\theta_1$  en direction d'une entaille droite débouchant en fond de pièce.

de vol en réception du point  $\mathbf{r}$  jusqu'au réseau reste inchangé par rapport au mode de reconstruction direct. En effet, même si l'onde ré-émise par l'entaille est toujours plane (en omettant les effets de diffraction), le modèle direct de calcul des temps de vol considère une entaille comme une distribution linéaire de réflecteurs ponctuels diffusant des ondes cylindriques en direction du réseau. Ce modèle présente l'intérêt de ne pas requérir d'*a priori* sur l'orientation du défaut. Ainsi, le temps de vol en réception entre un réflecteur en  $\mathbf{r}$  et le récepteur en  $\mathbf{r}_n = (nd, 0)$  est :

$$t_n^r(\mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\|}{c_3}.$$

Pour  $M$  ondes planes transmises, l'équation d'imagerie PWI s'écrit toujours

$$I(\mathbf{r}) = \left| \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho_{12}(\theta_{1m}) w_n^r(\mathbf{r}) \tilde{s}_{mn} (t_m^e(\mathbf{r}) + t_n^r(\mathbf{r})) \right|,$$

où le coefficient de pondération en réception  $w_n^r(\mathbf{r})$  reste égal à la directivité d'un élément récepteur, tandis que celui en émission,  $\rho_{12}(\theta_{1m})$ , correspond au coefficient de réflexion à l'interface du fond de pièce. Dans la suite, on considère une interface acier/eau et les coefficients  $\rho_{12}(\theta_{1m})$  prennent les formes suivantes [64] :

$$\begin{cases} \rho_{LL}(\theta_L) &= \frac{\tau + \gamma^2 \sin 2\theta_L \sin 2\theta_T - \cos^2 2\theta_T}{\eta + \tau} \\ \rho_{LT}(\theta_L) &= \frac{2\gamma \sin 2\theta_L \cos 2\theta_T}{\eta + \tau} \\ \rho_{TL}(\theta_T) &= \frac{2\gamma \sin 2\theta_T \cos 2\theta_L}{\eta + \tau} \\ \rho_{TT}(\theta_T) &= \frac{\tau - \gamma^2 \sin 2\theta_L \sin 2\theta_T + \cos^2 2\theta_T}{\eta + \tau} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où  $\gamma = \frac{c_T}{c_L}$ , et  $\tau = \frac{Z_e \cos \theta_L}{Z_L \cos \theta_e}$ ,  $Z_L$   $Z_e$  étant les impédances acoustiques de l'acier et de l'eau, et  $\theta_e$  l'angle de transmission dans l'eau. De plus,

$$\eta = \gamma^2 \sin 2\theta_L \sin 2\theta_T + \cos^2 2\theta_T.$$

Pour illustrer l'imagerie multi-modes, la Figure III.2 affiche les images PWI d'une entaille droite débouchante avec les modes direct LdL, et demi-bond LLdL et TTdT. En mode direct, l'image présente deux échos : l'écho de diffraction au sommet de l'entaille et l'écho de coin à sa base. Les deux modes demi-bond permettent d'imager toute la face de l'entaille, le mode TTdT étant souvent privilégié pour ce type de défaut car il offre une meilleure précision dans le dimensionnement.

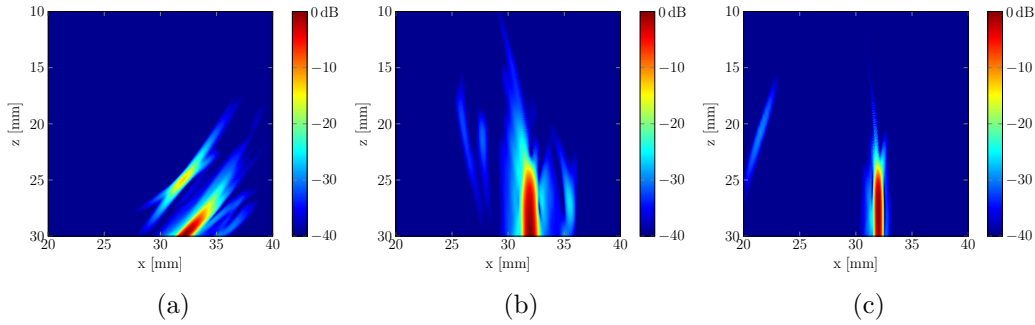


Fig. III.2 Exemples d'images multi-modes d'une entaille droite de hauteur 5 mm et débouchant au fond d'un bloc d'acier de hauteur 30 mm. Les signaux ont été simulés avec CIVA pour un traducteur de 64 éléments opérant à 5 MHz. Images PWI avec les modes (a) direct LdL, (b) demi-bond LLdL, et (c) demi-bond TTdT.

## III.2 Généralisation de la méthode de Lu à l'imagerie multi-modes

Cette section développe une théorie nouvelle généralisant le principe de l'imagerie  $f$ - $k$  aux reconstructions multi-modes. Cette théorie repose sur une adaptation du modèle direct de propagation tenant compte des réflexions éventuelles de l'onde sur les interfaces du spécimen, et des conversions de modes lors de son interaction avec un défaut ou une interface. Le modèle direct est établi dans un premier temps pour un mode demi-bond arbitraire  $P_1P_2dP_3$ . On montre ensuite que le type de conversion de modes lors de l'interaction de l'onde avec le défaut influe directement sur la transformation  $\xi$  liant les fréquences du signal  $(k_u, \omega)$  et les fréquences de l'image  $(k_x, k_z)$ , tandis que son "histoire" avant rétro-diffusion peut être factorisée dans un terme de phase. La transformation spectrale est au coeur du processus d'imagerie, puisqu'elle dicte comment les fréquences  $(k_u, \omega)$  du signal sont envoyées dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  des fréquences de l'image, et elle fournit le support du spectre image  $\text{supp}(G) = \xi(\mathcal{H})$ . Aussi est-elle étudiée à partir de considérations géométriques dans les trois cas exhaustifs suivants : l'onde n'est pas convertie au niveau du défaut (modes  $P_1LdL$  et  $P_1TdT$ ), une onde L est convertie en onde T

(mode  $P_1LdT$ ), une onde T est convertie en onde L (mode  $P_1TdL$ ). La méthode est enfin généralisée au mode bond complet en fin de section.

### III.2.1 Modèle direct de propagation et transformation spectrale pour un mode arbitraire $P_1P_2dP_3$

#### a) Modèle direct en demi-bond

On définit  $S(u, \omega)$  comme le spectre du champ acoustique mesuré par un récepteur à la position  $(u, 0)$ , et résultant de la rétro-diffusion de l'onde émise par un défaut assimilé à une distribution de réflecteurs ponctuels  $g(x, z)$ . Le spectre  $S(u, \omega)$  peut être modélisé par l'intégrale suivante :

$$S(u, \omega) = \iint \phi_2(x, z, \omega) g(x, z) H_0^{(2)}(k_3 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|) dx dz,$$

où, comme précédemment,  $H_0^{(2)}$  est la fonction de Hankel de deuxième espèce, et  $\phi_2(x, z, \omega)$  est le spectre résultant de la réflexion de l'onde plane incidente sur le fond de pièce, modélisé par la fonction

$$\phi_2(x, z, \omega) = \rho_{12}(\theta_1) A(\omega) e^{-ik_1 \cos \theta_1 H - ik_2 x \sin \theta_2 - ik_2 (H-z) \cos \theta_2}. \quad (\text{III.2})$$

$A(\omega)$  est le spectre d'émission du réseau, et l'argument de l'exponentielle est la phase de l'onde plane au point  $(x, z)$  après réflexion en  $z = H$ . Comme pour la méthode PWI, le champ est pondéré par le coefficient de réflexion  $\rho_{12}(\theta_1)$  à l'interface (cf. (III.1)). Le modèle direct ci-dessus suppose que le spectre  $S(u, \omega)$  ne contient que les échos du mode  $P_1P_2dP_3$  choisi, et donc qu'une fenêtre temporelle d'acquisition appropriée a été appliquée de sorte à sélectionner ces échos.

L'identité de Weyl est ensuite utilisée pour développer la fonction de Hankel sous forme d'ondes planes de polarisation  $P_3$  :

$$H_0^{(2)}(k_3 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|) = \int \frac{e^{ik_u(u-x) - iz\sqrt{k_3^2 - k_u^2}}}{\sqrt{k_3^2 - k_u^2}} dk_u. \quad (\text{III.3})$$

Enfin, comme réalisé dans la sous-section II.1.3, (III.3) est injectée dans (III.2), puis une transformée de Fourier selon la direction  $u$  est effectuée pour obtenir la relation entre le spectre image  $G(k_x, k_z)$  et le spectre mesuré  $S(k_u, \omega)$  :

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k_3^2 - k_u^2} e^{ik_1 H \cos \theta_1 + ik_2 H \cos \theta_2}}{\rho_{12}(\theta_1) A(\omega)} S(k_u, \omega) \quad (\text{III.4})$$

avec

$$\begin{cases} k_x &= k_u + k_2 \sin \theta_2 \\ k_z &= \sqrt{k_3^2 - k_u^2} - k_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.5) est la transformation spectrale de la méthode de Lu en mode demi-bond. Le point important à noter est que cette relation ne dépend que des polarisations  $P_2$  et  $P_3$  de l'onde réfléchie par le fond et de celles rétro-diffusées par  $g(x, z)$ , tandis

que la dépendance vis-à-vis de l'onde incidente est factorisée dans le terme de phase  $e^{ik_1 H \cos \theta_1 + ik_2 H \cos \theta_2}$ . Le paragraphe suivant détaille la transformation spectrale et son effet sur l'espace des nombres d'onde  $(k_u, \omega)$ .

### b) Transformation spectrale

L'équation (III.4) donne une relation point par point entre le spectre  $S(k_u, \omega)$  et le spectre de l'image pour le couple de fréquences spatiales  $(k_x, k_z) = (k_u + k_2 \sin \theta_2, \sqrt{k_3^2 - k_u^2} - k_2 \cos \theta_2)$ , où  $k_3 = \omega/c_3$ . Cette relation est valable pour toutes les fréquences dans le cône des ondes propagatives  $\mathcal{H} = \left\{ |k_u| \leq k_3 \leq \frac{\omega_{\max}}{c_3} \right\}$ . Celui-ci est représenté sur la Figure III.3 ci-dessous pour  $k_3 = k_L$  et  $k_3 = k_T$ .

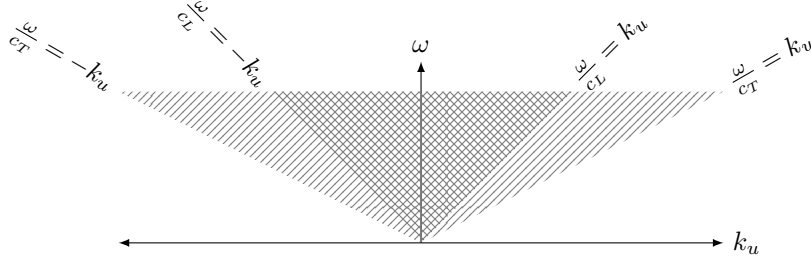


Fig. III.3 Cône des ondes propagatives pour les ondes longitudinales  $\mathcal{H}_L = \left\{ |k_u| \leq \frac{\omega}{c_L} \leq \frac{\omega_{\max}}{c_L} \right\}$  et pour les ondes transversales  $\mathcal{H}_T = \left\{ |k_u| \leq \frac{\omega}{c_T} \leq \frac{\omega_{\max}}{c_T} \right\}$  dans le plan des nombres d'onde  $(k_u, \omega)$ .

Pour une conversion de mode  $P_2 dP_3$  arbitraire, on peut définir la transformation spectrale  $\xi$  par

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (k_u, k_2) &\longmapsto (k_u + k_2 \sin \theta_2, \sqrt{k_3^2 - k_u^2} - k_2 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

Cette application dépend de la polarisation de l'onde réfléchie  $P_2$  considérée et de celle de l'onde rétro-diffusée  $P_3$ . L'analyse géométrique de  $\xi$  qui suit permet de mieux appréhender la transformation fréquentielle.

Afin de bien comprendre comment opère la transformation  $\xi$  sur l'espace  $(k_u, \omega)$ , remarquons que  $\mathcal{H}$  peut être décrit comme une union de segments horizontaux  $\{|k_u| \leq k_3\}$ , pour  $k_3 \in \left[0, \frac{\omega_{\max}}{c_3}\right]$ , et que pour  $k_3 > 0$  fixé,  $\{\xi(k_u, k_3), |k_u| \leq k_3\}$  est un demi-cercle. En effet, (III.5) donne

$$(k_x - k_2 \sin \theta_2)^2 + (k_z + k_2 \cos \theta_2)^2 = k_3^2.$$

Plus précisément, en notant  $\mathcal{C}_r(k_{x_0}, k_{z_0})$  le cercle de centre  $(k_{x_0}, k_{z_0})$  et de rayon  $r$ , pour  $r > 0$  avec  $(k_{x_0}, k_{z_0}) \in \mathbb{R}^2$ , et en définissant,

$$\mathcal{C}_r^+(k_{x_0}, k_{z_0}) = \{(k_x, k_z) \in \mathcal{C}_r(k_{x_0}, k_{z_0}), k_z \geq k_{z_0}\},$$

il est aisé de vérifier que

$$\{\xi(k_u, k_3), |k_u| \leq k_3\} = \mathcal{C}_{k_3}^+(k_3 \sin \theta_2, -k_3 \cos \theta_2).$$

La transformation d'un segment horizontal du spectre signal en demi-cercle dans le spectre image est illustrée sur la Figure III.4. Ainsi, l'image de  $\xi$  (en tant que fonction) est l'union de demi-cercles suivante :

$$\xi(\mathcal{H}) = \bigcup_{k_3=0}^{\omega_{\max}/c_3} \mathcal{C}_{k_3}^+(k_2 \sin \theta_2, -k_2 \cos \theta_2). \quad (\text{III.6})$$

Comme nous le verrons dans la prochaine sous-section, cette union de cercles permet de définir les frontières du support du spectre image pour chacun des modes.

Une autre manière pratique de décrire  $\mathcal{H}$  est de voir ce domaine comme l'union de droites issues de l'origine dans le demi-plan supérieur  $\mathcal{D}_\alpha = \{(k_3 \sin \alpha, k_3), 0 \leq k_3 \leq \frac{\omega_{\max}}{c_3}\}$  pour  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ . A chacune de ces lignes correspond un angle de rétro-diffusion dans la décomposition de Weyl, et  $S(\mathcal{D}_\alpha)$  est le spectre rétro-diffusé par la distribution de réflecteurs  $g(x, z)$  dans la direction  $\alpha$ . Il est également aisé de vérifier que  $\xi(\mathcal{D}_\alpha)$  est une demi-droite issue de l'origine (cf. Figure III.4). Cette seconde manière de définir les spectres images sera utilisée dans la section 3 pour filtrer le contenu spectral des images.

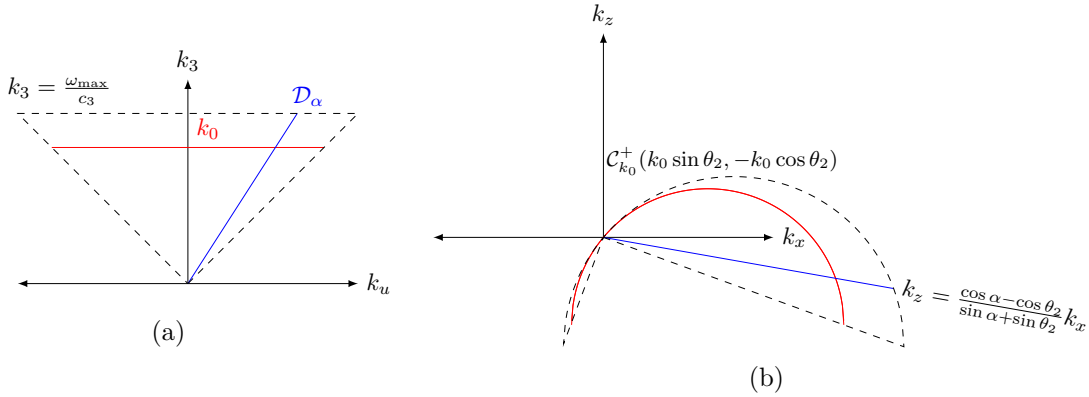


Fig. III.4 Exemple d'une transformation spectrale  $\xi$  sur le domaine  $k_u$ - $k_3$  dans le cas d'un mode non converti ( $P_1LdL$  ou  $P_1TdT$ ) pour un angle d'incidence  $\theta_1 > 0$ . (a) Segment horizontal (rouge) et segment  $\mathcal{D}_\alpha$  issu de l'origine (bleu) dans le cône des ondes propagatives  $\mathcal{H} = \{|k_u| \leq \frac{\omega}{c_3} \leq \frac{\omega_{\max}}{c_3}\}$  délimité en pointillés. (b) Images par  $\xi$  des deux segments avec les couleurs correspondantes, et frontière de  $\text{supp}(G)$  en pointillés.

### III.2.2 Résolution du problème inverse pour différents modes de reconstruction

L'implémentation de la méthode repose sur l'inversion de la transformation spectrale  $\xi$ . Pour tout couple  $(k_x, k_z)$  dans le plan des fréquences image, la valeur  $G(k_x, k_z)$  est obtenue à partir de  $S(k_u, \omega)$ , où  $(k_u, \omega)$  est l'antécédant de  $(k_x, k_z)$  par  $\xi$ . Dans cette sous-section, nous donnons les formes explicites des supports des spectres images, ainsi

que la transformation inverse de  $\xi$  pour l'implémentation de la méthode, en fonction du type de conversion  $P_2dP_3$  lors de l'interaction avec le défaut. Pour cela, l'étude est organisée en quatre familles de modes :

- les modes demi-bond non convertis de type  $P_1LdL$  et  $P_1TdT$  ;
- les modes demi-bond convertis de type  $P_1LdT$  ;
- les modes demi-bond convertis de type  $P_1TdL$  ;
- les modes bond complet non convertis  $LLLLdLL$  et  $TTTdTT$ .

Pour les modes bon complet, la théorie est présentée pour un mode arbitraire  $P_1P_2P_3dP_4P_5$ , puis les supports des spectres images sont présentés à titre indicatif pour les deux modes non convertis ci-dessus. Dans toute la suite, et pour alléger les notations,  $\theta_2$  sera simplement noté  $\theta$  et  $k_3$  sera noté  $k$ .

#### a) Modes non convertis $P_1LdL$ et $P_1TdT$

On s'intéresse ici au cas où il n'y a pas de conversion de mode lors de l'interaction avec le défaut, c'est-à-dire que  $k_2 = k_3 = k$ . Ce type de mode est principalement utilisé pour imager des fissures verticales débouchant en fond de pièce comme au sein de soudures du domaine nucléaire où les fissurations se propagent perpendiculairement aux interfaces. L'équation (III.4) prend alors la forme :

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k^2 - k_u^2} e^{ik_1 H \cos \theta_1 + ikH \cos \theta}}{\rho_{12}(\theta_1) A(\omega)} S(k_u, \omega), \quad (\text{III.7})$$

avec

$$\begin{cases} k_x &= k_u + k \sin \theta \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_u^2} - k \cos \theta \end{cases}$$

En fonction du type de réflexion au niveau du fond de pièce,  $\rho_{12}(\theta_1)$  est calculé à partir des formules (III.1). L'équation ci-dessus est très similaire à celle obtenue en mode direct, à l'exception du signe - devant le terme  $k \cos \theta$ .

La Figure III.5 présente le support du spectre image correspondant à un mode  $P_1LdL$  et un angle de tir  $\theta = 45^\circ$ , ainsi que la frontière du support image pour un mode  $P_1TdT$ . A  $\omega_{\max}$  et  $\theta$  fixés, l'aire du support obtenu en ondes T est plus grande d'un facteur  $(c_L/c_T)^2$  par rapport au support du spectre associé aux ondes L.

Le point  $(k_x, k_z) = (0, 0)$  est particulier car la droite  $\mathcal{D}_\theta$  (où  $\theta$  désigne toujours l'angle de tir) est envoyée sur  $(0, 0)$  par  $\xi$ . Néanmoins, comme  $G(0, 0) = 0$  d'après (III.4), il n'y a pas d'ambiguïté pour calculer le spectre en ce point. Si  $(k_x, k_z) \neq (0, 0)$ ,  $G(k_x, k_z)$  est calculé à partir de (III.4) avec

$$\begin{cases} k_u &= k_x - k \sin \theta \\ k &= \frac{k_x^2 + k_z^2}{2k_x \sin \theta - 2k_z \cos \theta} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

En conclusion, à partir d'une émission plane d'angle de réflexion  $\theta$ , le spectre image  $G(k_x, k_z)$  pour un mode choisi  $P_1LdL$  est obtenu par (III.7) et (III.8) pour tout couple  $(k_x, k_z)$  satisfaisant

$$\min \left( \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} k_x, \frac{-\cos \theta}{1 + \sin \theta} k_x \right) < k_z \leq -k_{\max} \cos \theta + \sqrt{k_{\max}^2 - (k_x - k_{\max} \sin \theta)^2},$$

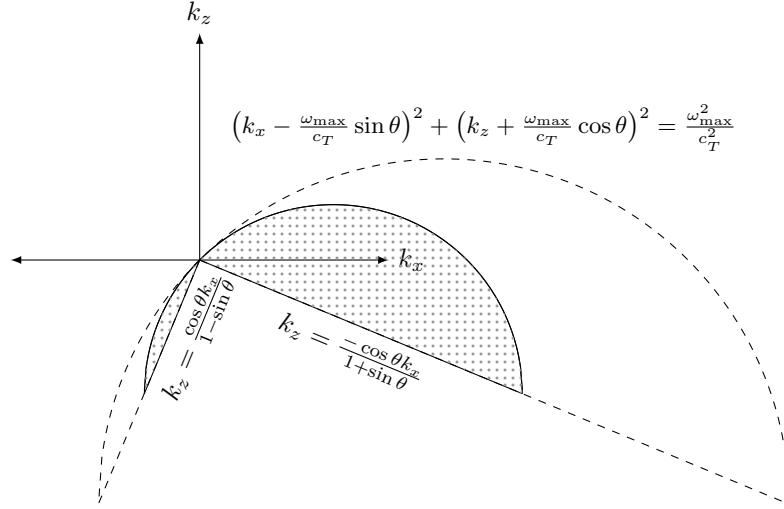


Fig. III.5 Support du spectre image pour un mode  $P_1LdL$  (zone grisée), et frontière du support du spectre image pour un mode  $P_1TdT$  avec  $\theta = 45^\circ$ .

avec  $k_{\max} = \omega_{\max}/c_3$  ( $c_3 = c_L$  ou  $c_T$  respectivement pour les modes  $P_1LdL$  et  $P_1TdT$ ). Dans certains cas, l'imagerie en mode demi-bond sans conversion de mode ne permet pas d'avoir une bonne représentation du défaut considéré. C'est le cas lorsque le défaut est incliné et/ou n'est pas débouchant au fond de pièce. Les deux modes qui suivent mettent en jeu des conversions de modes lors de l'interaction avec le défaut et permettent d'améliorer sensiblement la qualité des images dans ce type de situation.

### b) Modes convertis $P_1LdT$

Ce paragraphe traite le cas d'une onde réfléchie longitudinale convertie en une onde transversale lors de son interaction avec le défaut. On définit  $k = \frac{\omega}{c_T}$  et  $k_2 = \gamma k$ , où  $\gamma$  est toujours défini par  $\frac{c_T}{c_L}$  avec  $c_L = 5,9 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$  et  $c_T = 3,23 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$ .  $\rho_{1L}$  dénote le coefficient de réflexion entre l'acier et le milieu extérieur ( $\rho_{1L} = \rho_{LL}$  ou  $\rho_{TL}$ ). L'équation d'imagerie prend alors la forme suivante :

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k^2 - k_u^2} e^{ik_1 H \cos \theta_1 + ik \gamma H \cos \theta}}{\rho_{1L}(\theta_1) A(\omega)} S(k_u, \omega) \quad (\text{III.9})$$

avec

$$\begin{cases} k_x &= k_u + \gamma k \sin \theta \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_u^2} - \gamma k \cos \theta \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

pour  $(k_u, \omega) \in \mathcal{H}$ . Par suite, on montre que le support de  $G(k_x, k_z)$  (voir Figure III.6) est l'ensemble des couples  $(k_x, k_z)$  tels que

$$\min \left( \frac{\gamma \cos \theta}{1 - \gamma \sin \theta} k_x, \frac{-\gamma \cos \theta}{1 + \gamma \sin \theta} k_x \right) \leq k_z \leq \sqrt{k_{\max}^2 - (k_x - \gamma k_{\max} \sin \theta)^2} - \gamma k_{\max} \cos \theta.$$



Comme précédemment, la relation (III.10) doit être inversée afin de calculer le spectre  $G(k_x, k_z)$  sur une grille rectangulaire à partir des amplitudes  $S(k_u, \omega)$  du spectre mesuré. Soit donc  $(k_x, k_z) \in \text{supp}(G)$ . On recherche  $(k_u, \omega) \in \mathcal{H}$  vérifiant (III.9) et (III.10). Il est évident que  $(k_x, k_z)$  équivaut à  $(k_u, \omega) = 0$ . On suppose donc dans la suite que  $(k_x, k_z) \neq (0, 0)$ . L'équation (III.10) implique donc

$$(1 - \gamma^2)k^2 + (2k_x \sin \theta - 2k_z \cos \theta)\gamma k - (k_x^2 + k_z^2) = 0.$$

La relation ci-dessus est une équation algébrique d'ordre 2 en  $k$ . Son discriminant est strictement positif car  $(k_x, k_z) \neq 0$ . Elle admet donc deux solutions réelles et de signes opposés car leur produit vaut  $\frac{-(k_x^2 + k_z^2)}{1 - \gamma^2} < 0$ . Puisque par hypothèse  $k$  est positif, il vient

$$\begin{cases} k_u = k_x - k\gamma \sin \theta \\ k = \frac{(k_z \cos \theta - k_x \sin \theta)\gamma + \sqrt{(k_x \sin \theta - k_z \cos \theta)^2 \gamma^2 + (k_x^2 + k_z^2)(1 - \gamma^2)}}{1 - \gamma^2} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Ainsi, pour tout  $(k_x, k_z) \in \text{supp}(G)$ ,  $G(k_x, k_z)$  est fourni par (III.9) et (III.11). La Figure III.6 représente le support du spectre de l'image pour un mode  $P_1 LdT$  et un angle de réflexion sur le fond  $\theta = 40^\circ$ .

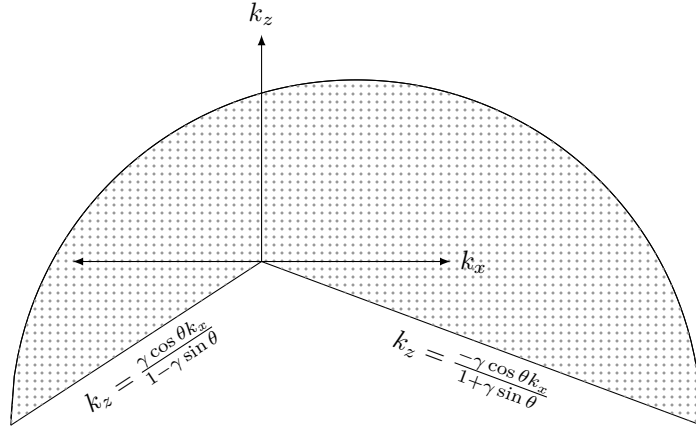


Fig. III.6 Support du spectre de l'image formée avec la méthode de Lu pour un mode  $P_1 LdT$  à partir d'une émission plane pour laquelle l'angle de réflexion sur le fond de pièce est  $\theta = 40^\circ$ .

### c) Modes convertis $P_1 TdL$

Le dernier cas de figure en mode demi-bond est celui d'une onde réfléchie transversale convertie en une onde longitudinale lors de son interaction avec le défaut. On note  $k = \frac{\omega}{c_L}$  et  $k_2 = k/\gamma$ . L'équation d'imagerie prend alors la forme suivante :

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k^2 - k_u^2} e^{ik_1 H \cos \theta_1 + ik H \cos(\theta)/\gamma}}{\rho_{1T}(\theta_1) A(\omega)} S(k_u, \omega),$$

où  $\rho_{1T} = \rho_{LT}$  ou  $\rho_{TT}$ , et

$$\xi : \begin{cases} k_x &= k_u + \gamma^{-1}k \sin \theta \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_u^2} - \gamma^{-1}k \cos \theta \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

D'après (III.6), le support du spectre image obtenu pour un angle de réflexion  $\theta$  est la réunion de demi-cercles, c'est-à-dire :

$$\text{supp}(G) = \bigcup_{k=0}^{\omega_{\max}/c_L} \mathcal{C}_k^+ \left( \gamma^{-1}k \sin \theta, -\gamma^{-1}k \cos \theta \right).$$

Les frontières des supports pour  $\theta < -\arcsin \gamma$ ,  $|\theta| \leq \arcsin \gamma$ , et  $\theta > \arcsin \gamma$  sont tracées sur la Figure III.7. Dans le cas de l'acier,  $\arcsin \gamma \approx 33,2^\circ$ . Aussi, comme la plupart des contrôles avec les modes demi-bond sont effectués sous des angles  $\theta > 40^\circ$ , nous nous concentrons sur le cas  $\theta > \arcsin(\gamma)$ , correspondant à la Figure III.7c. On définit les domaines disjoints

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\cos \theta \sin \theta - \gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma^2 - \sin^2 \theta} k_x \leq k_z \leq \frac{-\cos \theta}{\gamma + \sin \theta} k_x \right\},$$

et

$$\mathcal{D}' = \left\{ \frac{-\cos \theta}{\gamma + \sin \theta} k_x \leq k_z \leq \frac{-\cos \theta}{-\gamma + \sin \theta} k_x \right\}.$$

Sur la Figure III.7c,  $\text{supp}(G) \cap \mathcal{D}$  est représenté en hachures rouges et violettes, et  $\text{supp}(G) \cap \mathcal{D}'$  en hachures bleues. La construction du support sur la figure III.7d montre deux demi-cercles  $\mathcal{C}_k^+ (\gamma^{-1}k \sin \theta, -\gamma^{-1}k \cos \theta)$  et  $\mathcal{C}_{k'}^+ (\gamma^{-1}k' \sin \theta, -\gamma^{-1}k' \cos \theta)$  s'intersectant en un point  $(k_x, k_z) \in \mathcal{D}$ . Ceci montre qu'il existe deux couples  $(k_u, k) \neq (k'_u, k')$  appartenant à  $\mathcal{H}$  tels que

$$\begin{cases} k_x &= k_u + \gamma^{-1}k \sin \theta &= k'_u + \gamma^{-1}k' \sin \theta \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_u^2} - \gamma^{-1}k \cos \theta &= \sqrt{k'^2 - k'^2_u} - \gamma^{-1}k' \cos \theta \end{cases}$$

Contrairement aux modes présentés précédemment, ce mode est associé à une transformation spectrale  $\xi$  III.12 qui n'est pas injective. En conséquence, pour tout  $(k_x, k_z) \in \text{supp}(G) \cap \mathcal{D}$ ,  $G(k_x, k_z)$  peut être calculé de deux manières différentes à partir de deux couples  $(k_u, k) \neq (k'_u, k')$  de  $\mathcal{H}$ .

Pour inverser la relation de ré-échantillonnage (III.12), posons  $(k_u, k) \in \mathcal{H}$  et  $(k_x, k_z) \in \mathbb{R}^2$  satisfaisant (III.12).  $k$ ,  $k_x$  et  $k_z$  vérifient alors

$$(1 - \gamma^{-2}) k^2 + (2k_x \sin \theta - 2k_z \cos \theta) \gamma^{-1} k - (k_x^2 + k_z^2) = 0.$$

Cette équation admet deux solutions  $k$  et  $k'$ , à partir desquelles on pose

$$\begin{cases} k_u &= k_x - k \gamma^{-1} \sin \theta \\ k &= \frac{(k_z \cos \theta - k_x \sin \theta) \gamma^{-1} - \sqrt{(k_x \sin \theta - k_z \cos \theta)^2 \gamma^{-2} + (k_x^2 + k_z^2)(1 - \gamma^{-2})}}{1 - \gamma^{-2}}, \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

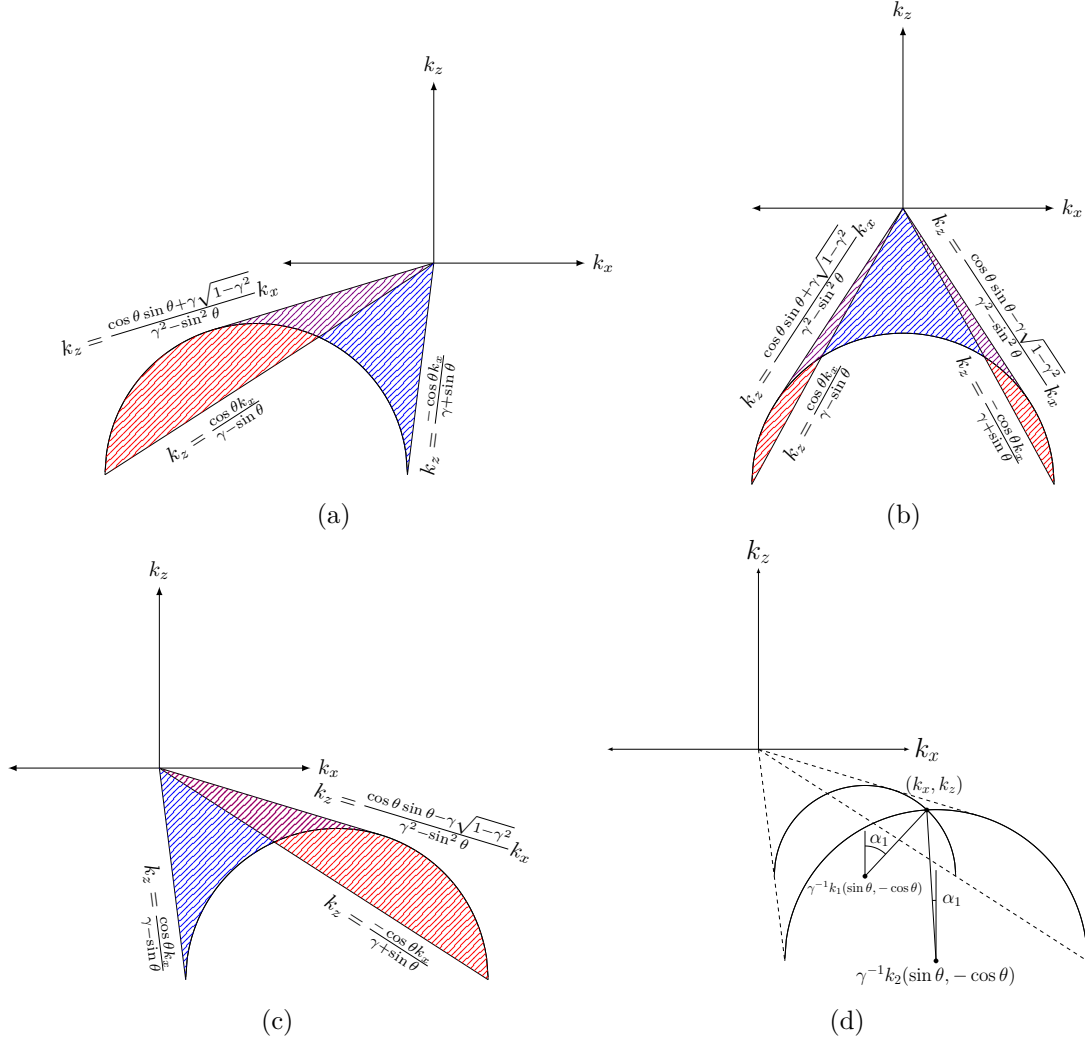


Fig. III.7 Supports des spectres  $G$  pour un mode de type  $P_1$ TdL avec (a)  $\theta = -40^\circ$ , (b)  $\theta = 0^\circ$ , (c)  $\theta = 40^\circ$ . Dans la zone rouge,  $G$  est calculé par la formule (III.15), et dans la zone bleue avec la relation (III.16). Dans la zone violette, ces deux équations peuvent théoriquement être utilisées. (d) Mise en évidence de la non-injectivité de la relation (III.12) : le couple  $(k_x, k_z)$  appartient aux deux demi-cercles  $\mathcal{C}_k^+$  ( $\gamma^{-1}k \sin \theta, -\gamma^{-1}k \cos \theta$ ) et  $\mathcal{C}_{k'}^+$  ( $\gamma^{-1}k' \sin \theta, -\gamma^{-1}k' \cos \theta$ ).

et

$$\begin{cases} k'_u = k_x - k'\gamma^{-1} \sin \theta \\ k' = \frac{(k_z \cos \theta - k_x \sin \theta)\gamma^{-1} + \sqrt{(k_x \sin \theta - k_z \cos \theta)^2 \gamma^{-2} + (k_x^2 + k_z^2)(1 - \gamma^{-2})}}{1 - \gamma^{-2}}. \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

On peut montrer que  $(k_u, k)$  est solution de (III.12) pour  $(k_x, k_z) \in \mathcal{D}$  et  $(k'_u, k')$  est solution de (III.12) pour  $(k_x, k_z) \in \mathcal{D}'$ .

Afin de calculer  $G(k_x, k_z)$  de manière univoque,  $(k_u, k)$  sera utilisé dans le domaine  $\mathcal{D}$ , et  $(k'_u, k')$  dans le domaine  $\mathcal{D}'$ . En somme,  $G(k_x, k_z)$  sera défini de manière non redondante comme

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k^2 - k_u^2} e^{ik_1 H \cos \theta_1 + ik H \cos(\theta)/\gamma}}{\rho_{1T} A(\omega)} S(k_u, \omega) \quad (\text{III.15})$$

sur  $\mathcal{D}$ , et par

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k'^2 - k_u'^2} e^{ik'_1 H \cos \theta_1 + ik' H \cos(\theta)/\gamma}}{\rho_{1T} A(\omega')} S(k'_u, \omega') \quad (\text{III.16})$$

sur  $\mathcal{D}'$ , où  $\omega = \frac{k}{c_L}$  et  $\omega' = \frac{k'}{c_L}$ . Ce choix sera justifié dans le paragraphe III.3.2b.

#### d) Modes bond complet $\mathbf{P_1 P_2 P_3 d P_4 P_5}$

Nous terminons cette section avec l'étude du mode *bond complet*, utilisé pour imager des fissures subsurfaciques. Comme décrit sur la Figure III.8, ce mode se décompose en cinq sous-trajets. Le trajet complet  $\mathbf{P_1 P_2 P_3 d P_4 P_5}$  décrit une onde qui est d'abord réfléchi sur le fond (conversion  $\mathbf{P_1 P_2}$ ), puis sur la surface (conversion  $\mathbf{P_2 P_3}$ ), qui interagit ensuite avec le défaut (conversion  $\mathbf{P_3 d P_4}$ ), et est finalement réfléchi sur le fond (conversion  $\mathbf{P_4 P_5}$ ) avant d'être enregistrée par le réseau. La vitesse de phase de l'onde sur chacun des cinq sous-trajets est notée  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), et on note  $k_i = \omega/c_i$  le nombre d'onde correspondant. Pour simplifier, nous considérons dans ce paragraphe que les coefficients de réflexion aux interfaces sont égaux à 1. En supposant que le système d'acquisition a été

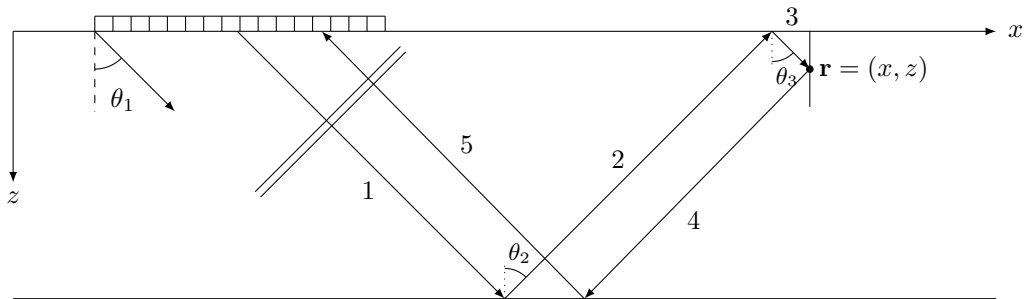


Fig. III.8 Description du trajet ultrasonore en mode *bond complet* pour l'imagerie de défauts étendus subsurfaciques. Le trajet comprend deux réflexions sur le fond et une réflexion sur la surface. A chacun des 5 sous-trajets correspond une onde de polarisation  $P_i = L$  ou  $T$ , ( $i = 1, \dots, 5$ ).

réglé de sorte à n'enregistrer que le signal associé au trajet considéré, le spectre  $S(u, \omega)$  mesuré en  $z = 0$  est décrit par le modèle direct

$$S(u, \omega) = \iint \phi_3(x, z, \omega) g(x, z) G_{4,5}(x, z, u, \omega) dx dz,$$

où

$$\phi_3(x, z, \omega) = A(\omega) e^{-ik_1 H \cos \theta_1 - ik_2 H \cos \theta_2 - ik_3 x \sin \theta_3 - ik_3 z \cos \theta_3}$$

est le champ incident sur le défaut après réflexions sur le fond et la surface, et  $G_{4,5}(x, z, u, \omega)$  décrit la propagation de l'onde rétro-diffusée, du défaut jusqu'au récepteur à l'abscisse  $u$ .  $G_{4,5}(x, z, u, \omega)$  est exprimé à partir de la décomposition de Weyl de l'onde rétro-diffusée (sous-trajet 4), en prenant en compte la réflexion de chaque onde plane élémentaire de vecteur d'onde  $(k_u, \sqrt{k_4^2 - k_u^2})$  sur le fond de pièce :

$$G_{4,5}(x, z, u, \omega) = \int \frac{e^{ik_u(u-x) - i(H-z)\sqrt{k_4^2 - k_u^2} - iH\sqrt{k_5^2 - k_u^2}}}{\sqrt{k_4^2 - k_u^2}} dk_u.$$

En injectant les expressions de  $\phi_3$  et  $G_{4,5}$  dans (III.36), on aboutit à la relation liant le spectre  $S(k_u, \omega)$  du signal au spectre  $G(k_x, k_z)$  de l'image, soit

$$S(k_u, \omega) = A(\omega) e^{-iH(k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2 + \sqrt{k_4^2 - k_u^2} + \sqrt{k_5^2 - k_u^2})} \frac{G\left(k_u + k_3 \sin \theta_3, \sqrt{k_4^2 - k_u^2} + k_3 \cos \theta_3\right)}{\sqrt{k_4^2 - k_u^2}}.$$

Dans le cas particulier où les échos d'intérêt ne sont pas issus de conversions de modes aux interfaces et sur le défaut, le mode bond complet est dit longitudinal (LLLdLL) ou transversal (TTTdTT). En notant  $c$  la célérité considérée et  $k = \omega/c$ , on montre, à la manière de la sous-section III.2.1, que le spectre  $G(k_x, k_z)$  s'écrit alors

$$G(k_x, k_z) = \frac{\sqrt{k^2 - k_u^2}}{A(\omega)} S(k_u, \omega) e^{2iH(k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_u^2})},$$

pour tout  $(k_u, k) \in \mathcal{H}$ , avec  $k \leq \omega_{\max}/c$  et

$$\begin{cases} k_x = k_u + k \sin \theta \\ k_z = -\sqrt{k^2 - k_u^2} + k \cos \theta \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Le support du spectre  $G(k_x, k_z)$  est donc le domaine

$$\text{supp}(G) = \left\{ -\sqrt{k_{\max}^2 - (k_x - k_{\max} \sin \theta)^2} + k_{\max} \cos \theta \leq k_z \leq \max \left( \frac{k_x \cos \theta}{1 + \sin \theta}, \frac{-k_x \cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right\}.$$

Ce domaine est tracé sur la [Figure III.9](#) pour  $\theta > 0$  en considérant le mode bon complet longitudinal. L'inversion du système (III.17), montre que si  $(k_x, k_z)$  appartient à  $\text{supp}(G)$ ,

$G(k_x, k_z)$  est calculé à partir de  $S(k_u, \omega)$ , avec

$$\begin{cases} k_u &= k_x - k \sin \theta \\ k &= \frac{k_x^2 + k_z^2}{2k_x \sin \theta + 2k_z \cos \theta} \end{cases}$$

Cette relation de ré-échantillonnage est donc la même que celle du mode direct (cf. équation (II.12), sous-section II.1.3). En revanche, les supports des spectres des images formées avec les modes LdL et LLLdLL sont complémentaires dans le disque de rayon  $k_{\max}$  et de centre  $k_{\max}(\sin \theta, \cos \theta)$ , comme indiqué sur la Figure III.9.

Par ailleurs, le support du spectre pour le mode bond complet est le symétrique par rapport à l'axe des  $k_x$  de celui associé au mode demi-bond. Ce constat reste valable pour les modes  $P_1P_2LdTP_5$  et  $P_1P_2TdLP_5$ . Ainsi, les supports des spectres pour les modes bond complet se déduisent aisément des spectres des modes demi-bond.

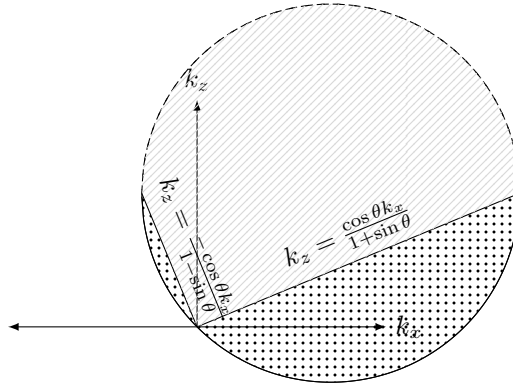


Fig. III.9 Supports des spectres des images calculées avec les modes bond complet LLLdLL (points) et direct LdL (hachures) pour une onde plane d'incidence  $\theta = 45^\circ$ . Le support du mode bond complet est le symétrique du support du mode demi-bond LLdL par rapport à l'axe des  $k_x$ , et le complémentaire du support du mode direct dans le disque de centre  $k_{\max}(\sin \theta, \cos \theta)$  et de rayon  $k_{\max}$ .

### III.3 Résultats expérimentaux en imagerie 2D multi-modes

Cette section compare les performances graphiques de la méthode de Lu et de l'imagerie PWI pour les modes demi-bond et bond complet. Pour ce faire, plusieurs acquisitions ont été réalisées sur une maquette comportant des entailles avec différentes caractéristiques (hauteur, orientation et localisation dans l'épaisseur) et nécessitant des modes de reconstruction distincts. Nous proposons ensuite un fenêtrage spectral dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  afin de réduire les artefacts d'imagerie liés aux échos des interfaces. Ce fenêtrage repose sur le constat que seul un nombre restreint de couples  $(k_u, \omega)$  sont porteurs d'information sur les défauts situés dans la zone d'intérêt. Le fenêtrage fréquentiel est ensuite appliqué à deux jeux de données expérimentales et l'on montre que les images des entailles sont de meilleure qualité en ne conservant qu'une fraction utile du spectre image dans le

domaine  $k_x$ - $k_z$ .

### III.3.1 Comparaison des images PWI et de Lu pour différents modes de reconstruction

Pour évaluer la capacité de la méthode de Lu à imager et caractériser des défauts de type fissure, des acquisitions en ondes planes ont été réalisées sur un bloc d'épaisseur  $H = 30$  mm en acier ferritique ( $c_L = 5,9$  mm  $\mu s^{-1}$  et  $c_T = 3,23$  mm  $\mu s^{-1}$ ). Comme indiqué sur la Figure III.10, la maquette comprend quatre entailles électro-érodées :

- une entaille (A) verticale, de longueur 5 mm, et débouchant en fond de pièce ;
- une entaille (B) inclinée de  $15^\circ$ , de longueur 5 mm débouchant en fond de pièce ;
- une entaille (C) verticale, de longueur 10 mm, et située entre  $z = 10$  et  $z = 20$  mm ;
- une entaille (D) verticale, de longueur 5 mm débouchant en surface.

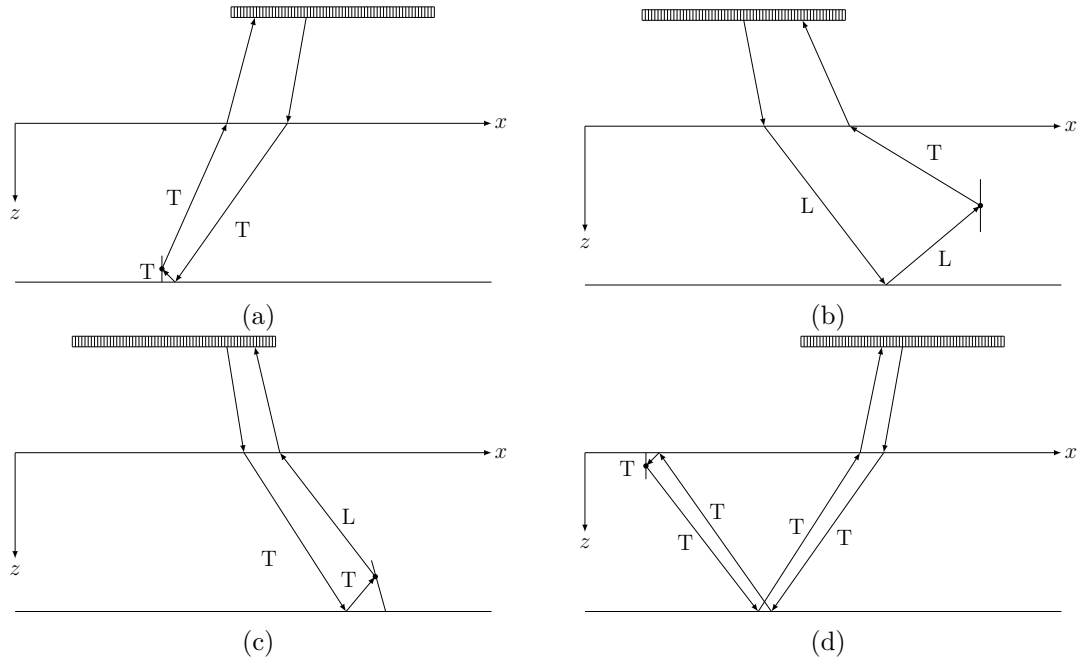


Fig. III.10 Traducteur linéaire en immersion au-dessus d'une maquette en acier comportant quatre entailles nécessitant des modes de reconstruction distincts, et représentation du trajet ultrasonore pour chacun des modes : modes (a) demi-bond TTdT, (b) demi-bond LLdT, (c) demi-bond TTdL et (c) bond complet transversal.

L'expérience a été menée en immersion dans une cuve en positionnant la sonde à une distance  $h = 20$  mm de la surface de la maquette. Les signaux ont été enregistrés avec un système MultiX++ (Eddyfi, Les Ulis, France), et la sonde multi-éléments (Imasonic, Voray-sur-l'Ognon, France) constituée de 64 éléments fonctionnant autour de 5 MHz avec une bande passante de 80%. Le pas inter-éléments est  $d = 0,6$  mm et la largeur des éléments est  $a = 0,5$  mm. Une acquisition en ondes planes a été réalisée à proximité de chaque entaille, et les signaux de l'acquisition ont été post-traités dans Matlab avec les

algorithmes de reconstruction PWI et de Lu. Les codes ont été compilés sur un ordinateur équipé d'un CPU Intel Xeon 3,30 GHz et de 16 GB de RAM. Enfin, pour chaque entaille, le mode de reconstruction pertinent a été préalablement déterminé par une étude paramétrique avec le logiciel CIVA à partir d'échos simulés [65]. Les modes de reconstruction et les plages angulaires des ondes planes incidentes (le pas angulaire est de  $1^\circ$ ) sont les suivants :

- A : mode TTdT avec les angles d'incidence  $-45^\circ \leq \theta_T \leq -35^\circ$  ;
- B : mode LLdT avec les angles d'incidence  $20^\circ \leq \theta_L \leq 30^\circ$  ;
- C : mode TTdL avec les angles d'incidence  $40^\circ \leq \theta_T \leq 55^\circ$  ;
- D : mode bond complet transversal avec les angles d'incidence  $-55^\circ \leq \theta_T \leq -40^\circ$ .

La Figure III.11 présente les images reconstruites avec les algorithmes PWI (gauche) et de Lu (droite). Comme pour les résultats en mode direct, on constate que les images obtenues sont très similaires. Les différences mineures concernent les artefacts de reconstruction autour des échos d'intérêt : on note la suppression d'un artefact au sommet de l'entaille à cœur (Figure III.11d) et d'un autre à droite de l'entaille D avec la méthode de Lu. Sur l'image de l'entaille B, l'artefact situé à droite de l'écho d'intérêt correspond probablement à un écho LTdT car les temps de vol correspondants sont proches de ceux du mode LLdT. Les longueurs  $l$  des échos ont été mesurées en détectant la chute de l'amplitude à -6 dB le long des entailles, et sont renseignées dans le Tableau III.1. Cette méthode empirique donne une bonne estimation de la longueur des défauts si le mode de reconstruction permet d'imager toute la hauteur du défaut. Pour mesurer l'inclinaison de l'entaille C, il suffit de mesurer la différence des abscisses  $x_1$  et  $x_2$  des deux extrémités de l'écho, et l'inclinaison se calcule simplement par la relation  $\alpha = \arccos\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right)$ . Les angles mesurés pour les méthodes PWI et de Lu sont respectivement  $\beta_{PWI} = -14,2^\circ$  et  $\beta_{Lu} = -14,9^\circ$ . Enfin, le rapport signal/bruit (RSB) des images est défini en dB par

$$\text{RSB}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{\text{max}}}{\sqrt{\langle A_{\text{bruit}}^2 \rangle}} \right),$$

où  $A_{\text{max}}$  est l'amplitude maximale de l'écho du défaut considéré, et  $\langle A_{\text{bruit}}^2 \rangle$  est la moyenne quadratique du bruit dans la zone de reconstruction après retrait de l'écho de défaut de l'image. Les mesures du RSB sur les huit images sont présentées dans le Tableau III.1. Deux modes fournissent des résultats légèrement différents pour les deux méthodes : sur l'image TTdT (entaille C), le RSB de l'image  $f$ - $k$  est de 4 dB supérieur à celui de l'image PWI, et pour le mode bond complet, un artefact est visible en bas à droite de l'image PWI et absent sur l'image  $f$ - $k$ . Ces différences restent néanmoins négligeables du point de vue des applications industrielles. Les images sont d'excellente qualité quels que soient la méthode et le mode de reconstruction (le RSB est dans tous les cas supérieur à 25 dB), alors que les modes exploitent des ondes transversales, plus rapidement atténuées que les ondes longitudinales, et que le nombre d'ondes planes émises est inférieur ou égal à 16. Ces résultats corroborent ceux de L. Le Jeune et al. [7, 52] qui démontreraient qu'une image satisfaisante d'un défaut plan pouvait être obtenue avec quelques émissions planes.

Dans la sous-section suivante, la méthode fréquentielle est optimisée en éliminant le



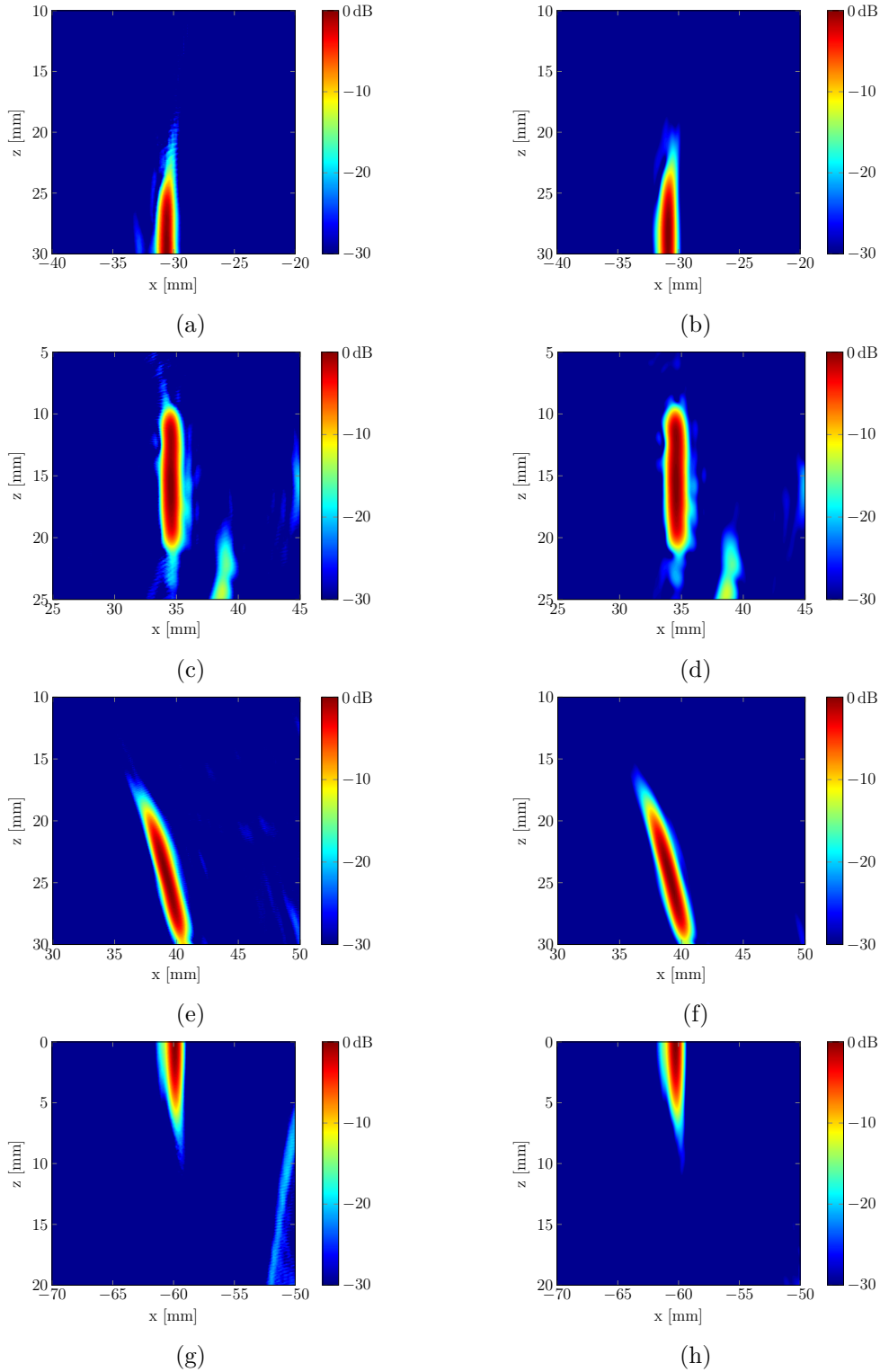


Fig. III.11 Images expérimentales des entailles formées avec les méthodes PWI (gauche) et de Lu (droite) : (a,b) images de l'entaille droite débouchante avec le mode TTdT; (c,d) images de l'entaille à cœur avec mode LLdT; (e,f) images de l'entaille inclinée débouchante avec le mode TTdL; (g,h) images de l'entaille débouchant en surface avec mode bond complet transversal.

|     | Entaille A |       | Entaille B |       | Entaille C |       | Entaille D |       |
|-----|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|
|     | $l$        | RSB   | $l$        | RSB   | $l$        | RSB   | $l$        | RSB   |
| PWI | 5,9 mm     | 32 dB | 9,8 mm     | 30 dB | 9,1 mm     | 29 dB | 4,3 mm     | 30 dB |
| Lu  | 6,0 mm     | 32 dB | 10 mm      | 30 dB | 8,9 mm     | 33 dB | 4,4 mm     | 31 dB |

TABLE III.1 – Comparaison des longueurs  $l$  des entailles (en mm) mesurées sur les images PWI et de Lu, et RSB des images correspondantes.

contenu spectral  $(k_x, k_z)$  qui n'est pas associé à une interaction spéculaire avec les entailles. L'objectif est de filtrer certains artefacts en imagerie multi-modes, et de réduire les temps de calcul.

### III.3.2 Fenêtrage spectral et élimination des fréquences de l'image non pertinentes

Cette sous-section s'attache à définir une zone dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  contenant l'information utile à la reconstruction d'un défaut situé dans la zone image définie. Le fenêtrage spectral qui en découle permet, outre le fait d'améliorer le RSB de l'image, d'accélérer l'étape d'interpolation par suppression des fréquences non pertinentes. Pour rester concis, la théorie est présentée ici en imagerie demi-bond, le raisonnement se généralisant facilement au mode bon complet.

Comme vu dans la section III.2.2, la transformation

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (k_u, k) &\mapsto \left( k_u + \gamma^\epsilon k \sin \theta, \sqrt{k^2 - k_u^2} - \gamma^\epsilon k \cos \theta \right) \end{aligned}$$

(où  $\epsilon = 0$  pour les modes non convertis  $P_1LdL$  et  $P_1TdL$ ,  $\epsilon = 1$  pour le mode  $P_1LdT$ , et  $\epsilon = -1$  pour  $P_1TdL$ ;  $\gamma^\epsilon k$  désigne donc  $k_2$ ) envoie le spectre du cône des ondes propagatives  $\mathcal{H}$  sur le support du spectre image  $G$ . En outre, comme indiqué sur la Figure III.4,  $\mathcal{H}$  peut être décrit comme l'union des segments issus de l'origine  $\mathcal{D}_\alpha = \{(k \sin \alpha, k), 0 \leq k \leq k_{\max}\}$  pour  $\alpha$  variant de  $-90$  à  $90^\circ$ . Pour un segment  $\mathcal{D}_\alpha$ , la transformation  $\xi$  s'écrit :

$$\xi(\mathcal{D}_\alpha) = \{k(\sin \alpha + \gamma^\epsilon k \sin \theta, \cos \alpha - \gamma^\epsilon k \cos \theta), 0 \leq k \leq k_{\max}\}.$$

La Figure III.12 donne un exemple de transformation pour un mode converti  $P_1LdT$  : le secteur  $\bigcup_{\alpha=20^\circ}^{80^\circ} \mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{H}$ , indiqué en rouge dans le cône des ondes propagatives (Figure III.12a), est transformé par  $\xi$  dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  (Figure III.12b).

En imagerie demi-bond ou bond complet, la zone d'intérêt est excentrée par rapport au réseau, et les images sont formées à partir d'échos spéculaires issus d'une réflexion sur l'une des faces du défaut plan. Contrairement à des défauts ponctuels rayonnant dans toutes les directions, les ondes ré-émises par un défaut plan se propagent dans un secteur angulaire étroit en direction du réseau. L'objectif est ici de sélectionner un secteur  $\bigcup_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \mathcal{D}_\alpha$  nettement plus restreint que  $\mathcal{H}$ , et contenant toute l'information provenant d'une zone effective entourant le réflecteur. Pour un mode arbitraire  $P_1P_2dP_3$ , l'équation d'imagerie (III.4) peut être mise sous la forme suivante pour exprimer l'amplitude  $g(x, z)$

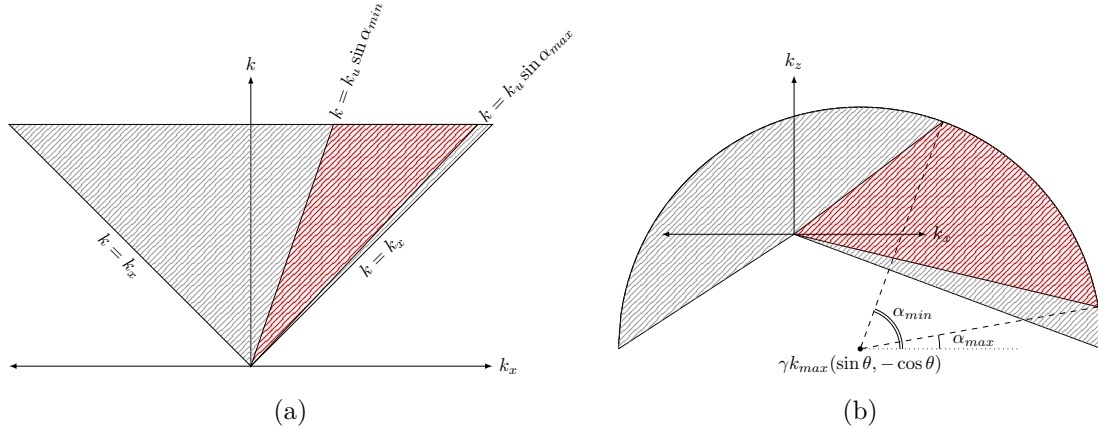


Fig. III.12 Exemple de fenêtrage spectral appliqué à un mode converti  $P_1LdT$ . (a) En hachures grises :  $\mathcal{H}$  ; en hachures rouges :  $\{\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]\}$ . (b) En gris :  $\xi(\mathcal{H})$  ; en rouge :  $\xi(\{\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]\})$ . Au fenêtrage dans le domaine  $k_u$ - $k$  correspond un fenêtrage dans le domaine  $k_x$ - $k_z$ .

de l'image :

$$g(x, z) = \iint \left( \int \sqrt{k^2 - k_x^2} e^{i(-\gamma^\epsilon k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_x^2})z + ik_x(x-u) + i\gamma^\epsilon k_x \sin \theta} dk_x \right) S'(u, \omega) du d\omega,$$

où  $S'(k_u, \omega) = e^{iH(k_1 \cos \theta_1 + \gamma^\epsilon k \cos \theta)} S(k_u, \omega)$ . Pour simplifier, le coefficient de réflexion  $\rho_{12}(\theta_1)$  à l'interface acier/eau et le spectre d'émission  $A(\omega)$  ont été pris égaux à 1. En appliquant la méthode de la phase stationnaire (comme réalisé dans l'annexe A.3), on montre que la contribution principale de l'intégrale simple dans l'équation ci-dessus est obtenue pour  $k_x = \frac{k(x-u)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|}$ , où  $u$  est l'abscisse de l'élément considéré. Ainsi, en posant  $\sin \alpha = \frac{x-u}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|}$ , les droites  $\mathcal{D}_\alpha$  porteuses d'information pour un point  $(x, z)$  sont :

$$\left\{ \mathcal{D}_\alpha, \alpha \in \left[ \arcsin \left( \frac{u_1 - x}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u_1}\|} \right), \arcsin \left( \frac{u_N - x}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{u_N}\|} \right) \right] \right\},$$

où  $u_1$  et  $u_N$  sont les abscisses des premier et dernier éléments, respectivement (cf. Figure III.13). L'origine du repère orthonormé est centrée sous le réseau. En considérant tous les points d'une zone effective centrée en  $(x_0, z_0)$ , de longueur  $l_z$  et de largeur  $l_x$ , le secteur angulaire portant de l'information sur un défaut de la zone effective est défini par  $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]\}$ , où

$$\alpha_{\min} = \arcsin \left( \frac{x_0 - \frac{l_x + D}{2}}{\sqrt{(x_0 - \frac{l_x + D}{2})^2 + (z_0 + \frac{l_z}{2})^2}} \right) \quad (\text{III.18})$$

et

$$\alpha_{\max} = \arcsin \left( \frac{x_0 + \frac{l_x + D}{2}}{\sqrt{(x_0 + \frac{l_x + D}{2})^2 + (z_0 - \frac{l_z}{2})^2}} \right). \quad (\text{III.19})$$

Enfin, la bande  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  peut encore être réduite en éliminant les angles situés en dehors du diagramme de directivité des éléments [40]. Une fois le secteur utile défini dans l'espace  $k_u$ - $\omega$ , le support utile du spectre image pour le mode choisi est défini comme  $\xi(\mathcal{D})$  (cf. Figure III.12b).

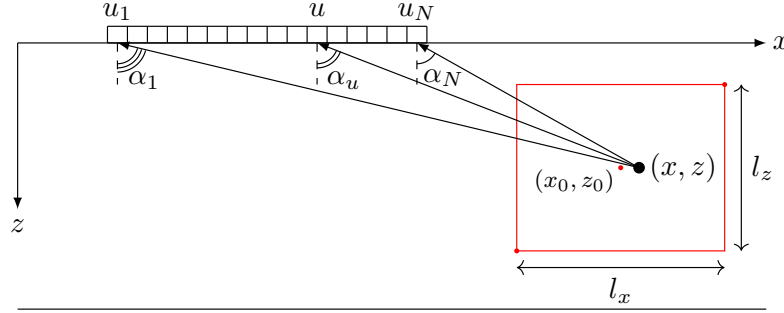


Fig. III.13 Cône de rétro-diffusion compris entre les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_N$  pour un point  $(x, z)$  d'une zone effective centrée en  $(x_0, z_0)$ , de largeur  $l_x$  et de hauteur  $l_z$ .

L'intérêt du fenêtrage spectral est multiple. Il permet de sélectionner les angles de rétro-diffusion pertinents pour imager des défauts plans, éliminant ainsi certains échos non désirés en imagerie multi-modes, comme les échos de géométrie à l'origine d'artefacts de reconstruction [40, 62]. Un autre intérêt, d'ordre numérique, est la réduction du support du spectre image (cf. Figure III.12b), car elle réduit la complexité algorithmique de l'étape d'interpolation.

Pour démontrer l'apport du fenêtrage spectral, celui-ci est mis en œuvre dans les deux paragraphes suivants pour optimiser les images des entailles B et C avec les modes LLdT et TTdL (cf. Figure III.10).

#### a) Application du fenêtrage spectral au mode LLdT

L'un des problèmes rencontrés en imagerie dans le domaine de Fourier est le fait que tous les échos mesurés et présents dans le spectre du signal se traduisent en indications sur l'image finale. Hunter *et al.* [21] ont en effet remarqué que la zone image doit être suffisamment large de sorte à contenir tous ces échos. Si tel n'est pas le cas, ils apparaîtront quand même sur l'image, mais à des positions erronées, par périodicité de la transformée de Fourier discrète.

Ce problème est illustré sur la Figure III.14a, où l'image a été calculée dans une zone de largeur  $D = 38,3$  mm. L'écho de fond associé aux ondes T (positionné autour de  $z = 30$  mm) et celui associé aux ondes L (positionné autour de  $z = 0$ ) sont présents sur l'image à des abscisses erronées, et induisent également du bruit autour du défaut. Une solution pour résoudre ce problème est d'élargir la zone de reconstruction. La Figure III.14b a été calculée en considérant une zone de largeur  $2 \times D$  et en affichant le résultat dans la région  $0 \leq x \leq 50$  mm. Les échos de fond sont alors correctement positionnés sous l'ouverture, et le niveau de bruit est réduit autour du défaut. Cependant, l'inconvénient de l'élargissement de la zone de reconstruction est l'augmentation des temps de calcul.

En effet, en multipliant par 2 la largeur de la zone, le nombre de fréquences impliquées dans l'étape d'interpolation est multiplié par 2, et du zero-padding latéral est nécessaire. D'après l'équation (II.37), on a donc la complexité suivante :

$$\mathcal{C}_{Lu} = \mathcal{O} \left( 2MNN_t \log_2(NN_t) + 2 \times 4L_xL_z \sum_{m=1}^M A_m^l + N_xN_z \log_2(N_xN_z) \right),$$

au lieu de

$$\mathcal{C}_{Lu} = \mathcal{O} \left( MNN_t \log_2(NN_t) + 4L_xL_z \sum_{m=1}^M A_m^l + N_xN_z \log_2(N_xN_z) \right).$$

En conséquence, le temps de calcul est ainsi multiplié par 2 environ.

Nous proposons une solution alternative exploitant le fenêtrage spectral pour conserver une zone de reconstruction de largeur égale à  $D$ , et supprimer les échos de fond associés aux ondes L et T. Pour ce faire, on définit une zone effective autour de l'écho d'intérêt, centrée en  $(x_0, z_0) = (35, 15)$  mm et de dimensions  $l_x = l_z = 20$  mm. Les formules (III.18) et (III.19) fournissent le secteur angulaire du domaine  $k_u$ - $k$  contenant l'information relative au défaut dans cette zone. Ce domaine est égal au cône

$$\mathcal{D}_{LLT} = \{\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in [22^\circ, 85^\circ]\}.$$

Pour visualiser le fenêtrage, les spectres images sont donnés sur la colonne de droite de la Figure III.14. La zone notée (F) sur la Figure III.14c contient le spectre des échos d'interface. En effet, la zone est centrée autour de  $k_x = 0$ , ce qui, d'après l'équation (III.10) est équivalent à  $k_u = -k \sin \theta_T = -k_L \sin \theta$  ( $\theta$  est l'angle de réfraction de l'onde L, et  $\theta_T$  est l'angle de l'onde T associée). La zone notée (E) est centrée autour de  $k_z = 0$ , ce qui, en écrivant  $\sqrt{k^2 - k_u^2} = k \cos \alpha$ , implique que  $\cos \alpha = \gamma \cos \theta$  d'après (III.10). Cette relation correspond à la loi de Descartes pour la réflexion spéculaire de l'onde L d'angle d'incidence  $\pi/2 - \theta$  sur l'entaille convertie en onde T avec un angle  $\pi/2 - \alpha$  par rapport à la normale à l'entaille. La zone (E) porte donc le spectre de l'écho de l'entaille.

La Figure III.14d affiche l'image formée en restreignant les fréquences  $(k_u, k)$  à la région  $\mathcal{D}_{LLT}$ . L'application du fenêtrage a pour effet de supprimer l'écho (F) sur les spectres, et donc les échos de fond sur les images. Il en est de même sur la Figure III.14e, où les échos d'interface sous le réseau ont complètement disparu.

Comme on peut l'observer sur la Figure III.14f, la fraction du spectre utile est réduite par rapport au support non fenêtré (Figure III.14c). Théoriquement, on peut montrer que pour un angle de transmission  $\theta$ , l'aire du support fenêtré s'écrit

$$\mathcal{A}_{LLT} = \frac{k_{\max}^2}{2} [\alpha_{\max} - \alpha_{\min} + \gamma(\sin(\theta - \alpha_{\max}) - \sin(\theta - \alpha_{\min}))].$$

Dans le cas présent où  $\alpha_{\min} = 22^\circ$  et  $\alpha_{\max} = 85^\circ$ , le fenêtrage supprime entre 71 et 73% des fréquences du support du spectre image pour chaque angle de tir  $\theta \in [20^\circ, 30^\circ]$ , et réduit en conséquence le temps d'interpolation liée au ré-échantillonnage.

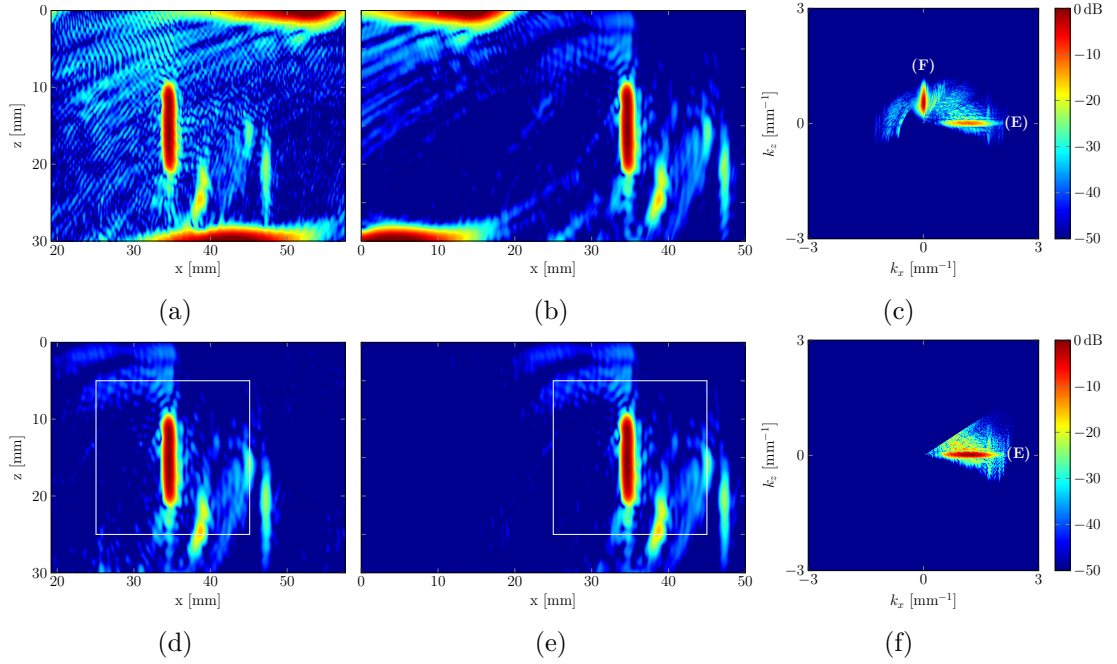


Fig. III.14 Application du fenêtrage spectral pour imager l'entaille à cœur avec le mode LLdT. Résultats sans fenêtrage (en haut) avec : (a) image de largeur  $D$  avec les échos d'interface mal positionnés ; (b) image calculée dans une zone de largeur  $2D$  et affichée pour  $0 \leq x \leq 50$  mm, dans laquelle tous les échos sont bien positionnés ; (c) spectre dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  associé. Résultats avec fenêtrage (en bas) avec : (d) image de largeur  $D$  avec suppression des échos d'interface ; (e) image calculée dans une zone de largeur  $2D$  et affichée pour  $0 \leq x \leq 50$  mm avec suppression des échos d'interface ; (f) spectre fenêtré dans le domaine  $k_x$ - $k_z$  associé à la zone effective représentée par le rectangle blanc autour de l'entaille. Sur les spectres, (E) et (F) indiquent respectivement les sous-domaines associés à l'entaille et au fond.

### b) Application du fenêtrage spectral au mode TTdL

Comme vu dans le paragraphe III.2.2c, le ré-échantillonnage spectral intervenant dans la construction d'une image en mode TTdL n'est pas injectif, ce qui signifie que certaines valeurs  $G(k_x, k_z)$  du spectre peuvent être calculées de deux manières possibles, à partir des deux transformations  $(k_u(k_x, k_z), k(k_x, k_z))$  ou  $(k'_u(k_x, k_z), k'(k_x, k_z))$  définies par (III.13) et (III.14). Théoriquement, ces deux valeurs prescrites pour  $G(k_x, k_z)$  sont identiques. Expérimentalement, nous avons constaté que ce n'est pas le cas. Nous proposons ici d'utiliser le fenêtrage spectral pour justifier le choix de  $G(k_x, k_z)$  quand deux valeurs sont possibles. Nous montrons ensuite que le fenêtrage permet d'améliorer visiblement le RSB de l'image.

La zone effective entourant l'entaille C est centrée en  $(x_0, z_0) = (40, 20)$  mm et ses dimensions sont  $l_x = l_z = 20$  mm. Par suite, les équations (III.18) et (III.19) définissent le sous-domaine de l'espace  $(k_u, k)$  contenant l'information relative au défaut plan contenu

dans la zone effective. Ce secteur est égal à

$$\mathcal{D}_{TTL} = \{\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in [20^\circ, 82^\circ]\}.$$

Pour déterminer si  $G$  doit être calculé ou non au couple  $(k_x, k_z) \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ , et le cas échéant, choisir la transformation spectrale pertinente, on calcule les angles de rétro-diffusion correspondant définis par

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{D} \setminus (0, 0) &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ (k_x, k_z) &\longmapsto \arcsin\left(\frac{k_u(k_x, k_z)}{k(k_x, k_z)}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha' : \mathcal{D} \cup \mathcal{D}' \setminus (0, 0) &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ (k_x, k_z) &\longmapsto \arcsin\left(\frac{k'_u(k_x, k_z)}{k'(k_x, k_z)}\right) \end{aligned}$$

Si  $\alpha(k_x, k_z)$  (resp.  $\alpha'(k_x, k_z)$ ) appartient à  $[20^\circ, 82^\circ]$ , alors la transformation  $(k_u, k)$  (resp.  $(k'_u, k')$ ) est utilisée. Si aucun des deux angles n'appartient à  $[20^\circ, 82^\circ]$ , on pose  $G(k_x, k_z) = 0$ . Pour un angle d'incidence  $\theta$  fixé, on montre que les angles de rétro-diffusion ci-dessus ont pour plages de variations  $\alpha(\mathcal{D}) = [\arccos(\gamma) - \theta, 90]$  et  $\alpha'(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = [-90, \arccos(\gamma) - \theta]$ . Les plages de variations  $\alpha(\mathcal{D})$ ,  $\alpha'(\mathcal{D}')$  et  $\alpha'(\mathcal{D})$  sont affichées sur la Figure III.15b : pour chaque angle d'incidence  $\theta$ , un point de coordonnées  $(\theta, \alpha)$  est coloré en rouge, bleu ou violet selon qu'il appartient à  $\alpha(\mathcal{D})$ ,  $\alpha'(\mathcal{D}')$  ou  $\alpha'(\mathcal{D})$ , respectivement. Les angles extrêmes définissant  $\mathcal{D}_{TTL}$  sont tracés en pointillés. Il apparaît que pour tout  $\theta \in [40^\circ, 55^\circ]$ ,  $[20^\circ, 82^\circ]$  est totalement inclus dans la plage de variation de  $\alpha$ . Ainsi, avec la zone effective définie ci-dessus, le support du spectre de l'image est totalement inclus dans  $\mathcal{D}$  et le spectre peut être calculé avec la transformation  $(k_u, k)$  uniquement.

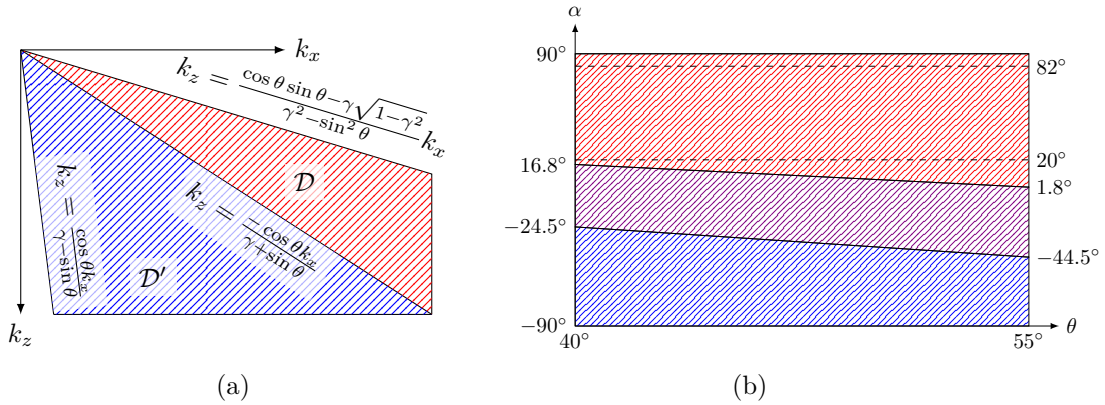


Fig. III.15 (a) Représentation des domaines  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , et leur frontière dans le domaine  $k_x$ - $k_z$ . (b) Angles  $\alpha$  rétro-diffusés en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ . Les points  $(\theta, \alpha)$  apparaissent en rouge, violet ou bleu selon qu'ils appartiennent aux plages de variations  $\alpha(\mathcal{D})$ ,  $\alpha'(\mathcal{D})$  ou  $\alpha'(\mathcal{D}')$ , respectivement.

C'est ce que confirme la [Figure III.16](#), qui présente les images à gauche et leur spectre à droite en fonction du support du spectre considéré et du choix du ré-échantillonnage fréquentiel :

- $(k_u, k)$  sur  $\mathcal{D}$  (figures [III.16a](#) et [III.16b](#)) ;
- $(k'_u, k')$  sur  $\mathcal{D}$  (figures [III.16c](#) et [III.16d](#)) ;
- $(k'_u, k')$  sur  $\mathcal{D}'$  (figures [III.16e](#) et [III.16f](#)) ;
- $(k_u, k)$  sur  $\mathcal{D}$  en limitant le cône des ondes propagatives à  $\mathcal{D}_{TTL}$  (figures [III.16g](#) et [III.16h](#)).

Les images sont normalisées par l'amplitude maximale mesurée sur la [Figure III.16a](#), et affichées en dB. La transformation  $(k'_u, k')$  ne produit qu'une image bruitée dans la zone de reconstruction, le niveau est inférieur à -25 dB quand le support image est restreint à  $\mathcal{D}$ , et inférieur à -60dB pour un support égal à  $\mathcal{D}'$ . Ceci s'explique par le fait que les angles  $\alpha$  rétro-diffusés sont tous hors de la plage angulaire  $[20^\circ, 82^\circ]$ , et ne portent donc pas d'information sur le défaut, l'existence de cette plage angulaire étant due à la finitude du réseau.

L'image reconstruite avec le fenêtrage  $\mathcal{D}_{TTL}$  présente un RSB de 38 dB, soit une amélioration de 5 dB par rapport à l'image sur la [Figure III.16a](#), et de 9 dB par rapport à l'image PWI (cf. [Figure III.11e](#)), ce qui montre l'utilité d'un tel fenêtrage pour diminuer le niveau de bruit.

## III.4 Application à l'imagerie multi-modes 3D

L'imagerie multi-modes se généralise au cas 3D en procédant comme en III.2. Nous restreignons ici l'étude au mode LLdL, car c'est celui qui sera employé pour imager les entailles verticales dans le bloc d'aluminium présenté à la fin du chapitre II. Dans un premier temps, nous donnons les équations d'imagerie et le principe du fenêtrage étendus en 3D, et, dans un second temps, nous présentons les résultats expérimentaux avec une comparaison des reconstructions et des temps de calcul obtenus avec les méthodes de Lu et PWI.

### III.4.1 Equations d'imagerie et fenêtrage

En suivant la démarche exposée dans le cas 2D, le spectre  $G(k_x, k_y, k_z)$  de l'image formée à partir d'une onde émise dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta, \varphi}$  en considérant une réflexion sur le fond du spécimen de hauteur  $H$  s'écrit :

$$G(k_x, k_y, k_z) = \frac{\sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2} e^{2ikH \cos \theta}}{\rho_{12} A(\omega)} S(k_u, k_v, \omega) \quad (\text{III.20})$$

avec  $k = \omega/c_L$  et

$$\begin{cases} k_x &= k_u + k \sin \theta \cos \varphi \\ k_y &= k_v + k \sin \theta \sin \varphi \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2} - k \cos \theta \end{cases}$$



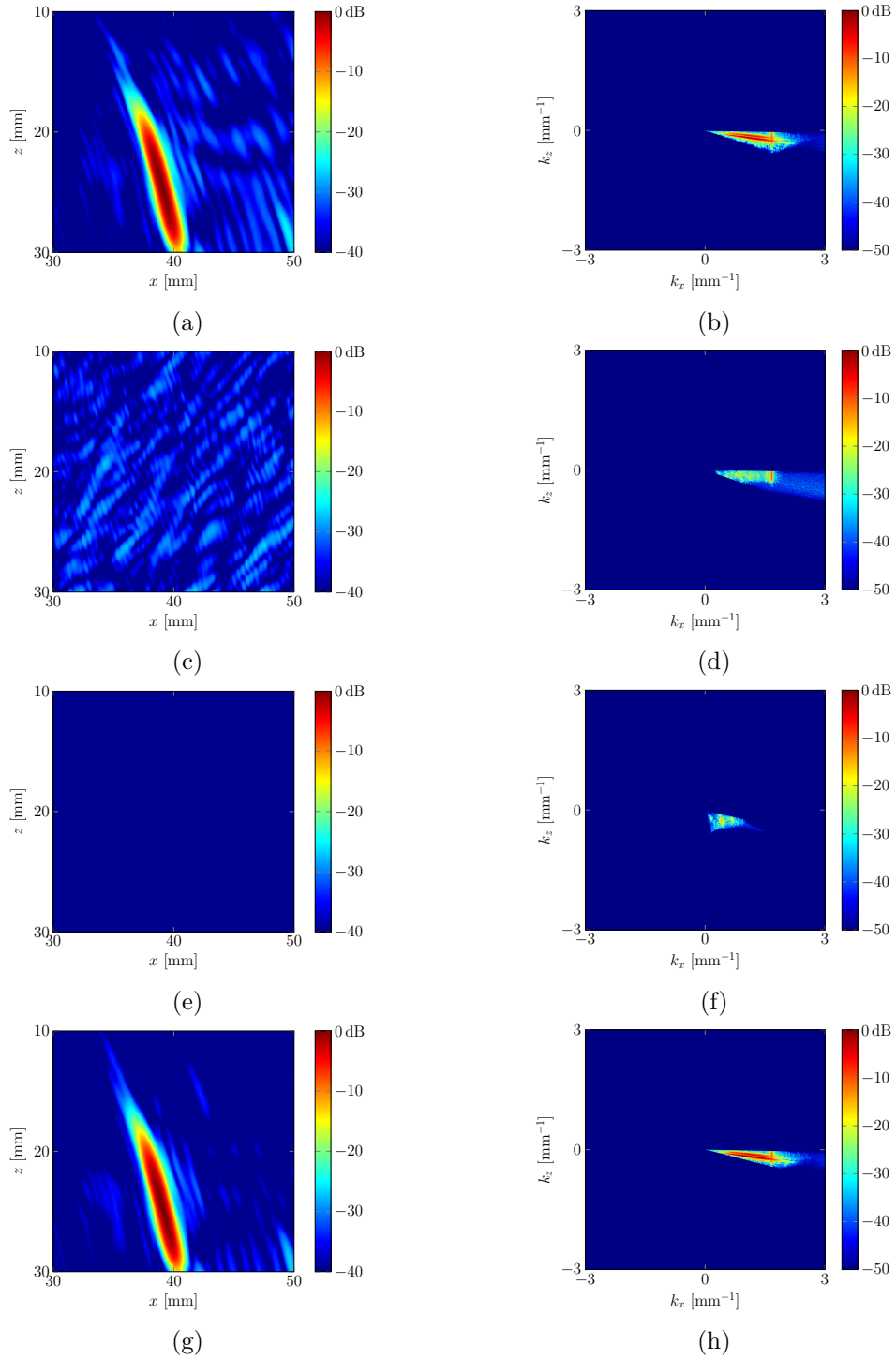


Fig. III.16 Images expérimentales d'une entaille inclinée avec le mode TTdL par la méthode de Lu. A gauches les images reconstruites, à droite les spectres correspondants obtenu pour différents supports. Reconstruction à l'aide des transformations (a,b) :  $(k_u, k)$  sur  $\mathcal{D}$  ; (c,d) :  $(k'_u, k')$  sur  $\mathcal{D}$ , (e,f) :  $(k'_u, k')$  sur  $\mathcal{D}'$ , et (g,h) :  $(k_u, k)$  sur  $\mathcal{D}$  avec la condition de fenêtrage  $(k_u(k_x, k_z), k(k_x, k_z)) \in \mathcal{D}_{TTL}$ .

Le support de  $G(k_x, k_y, k_z)$  est indiqué sur la figure III.17 et est égal à l'intersection :

$$\text{supp}(G) = \left\{ |k_z| < \cos \theta \sqrt{(k_x - k_z \tan \theta \cos \varphi)^2 + (k_y - k_z \tan \theta \sin \varphi)^2} \right\} \cap \mathcal{S},$$

où  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $k_{\max}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta)$  et de rayon  $k_{\max}$ . L'expression du support du spectre a été obtenue en étudiant comment la frontière du cône des ondes propagatives est transformée par la relation (III.59). Ainsi,  $\text{supp}(G)$  peut être vu comme la sphère  $\mathcal{S}$  privée d'un cône joignant  $(0, 0, 0)$  à son équateur. De plus, pour tout point  $(k_x, k_y, k_z)$  appartenant à  $\text{supp}(G)$ , le spectre est calculé par la formule (III.20) avec

$$\begin{cases} k_u &= k_x - k \sin \theta \cos \varphi \\ k_v &= k_y - k \sin \theta \sin \varphi \\ k &= \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{2k_x \sin \theta \cos \varphi + 2k_y \sin \theta \sin \varphi - 2k_z \cos \theta} \end{cases}$$

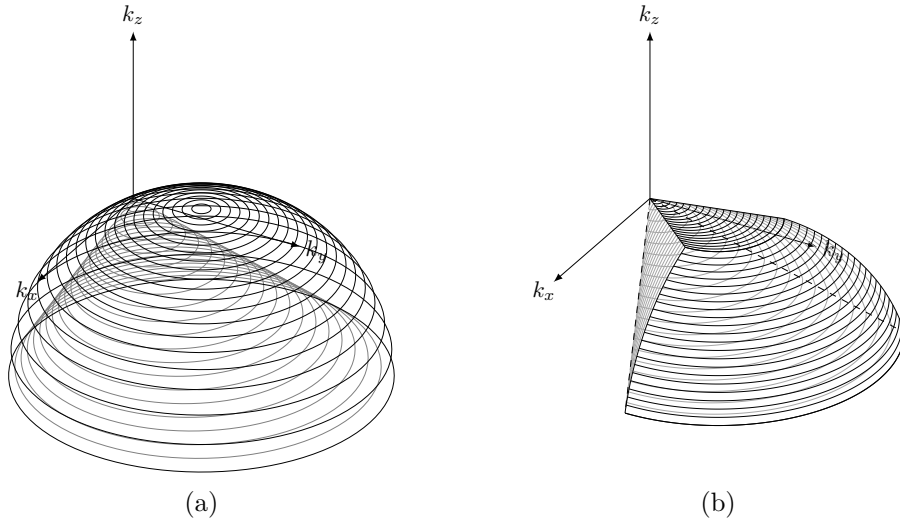


Fig. III.17 (a) Support du spectre de l'image  $G(k_x, k_y, k_z)$  formée à partir d'une émission plane dans la direction  $\mathbf{e}_{45,120}$ . (b) support du spectre de l'image quand le cône des ondes propagatives est restreint à  $\{(k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k \cos \alpha), 20^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ, 0^\circ \leq \beta \leq 120^\circ\}$ .

De manière similaire au cas bi-dimensionnel, en définissant une zone effective  $\mathcal{R}$ , le domaine  $k_u$ - $k_v$ - $k$  du spectre mesuré contenant l'information spectrale des défauts de la zone imagée peut être restreint à un sous-domaine  $\mathcal{R}'$ . Les vecteurs d'onde rétro-diffusés par des réflecteurs dans la zone effective sont paramétrés par  $(k_u, k_v, \sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2}) = (k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k \cos \alpha)$ . En exprimant l'amplitude de l'image en un point  $(x, y, z)$  par la formule (III.20) et en appliquant la méthode de la phase stationnaire, on montre (à la manière de III.3.2) que la contribution principale mesurée par le récepteur en  $(u, v, 0)$

est une onde plane se propageant avec un vecteur d'onde de composantes

$$\begin{cases} k_u = \frac{k(x-u)}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}} \\ k_v = \frac{k(y-v)}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}} \\ \sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2} = \frac{kz}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}}. \end{cases}$$

Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  de cette onde plane rétro-diffusée sont déduits des équations ci-dessus et exprimés en fonctions des coordonnées  $(x, y, z)$  du réflecteur et  $(u, v)$  du récepteur selon les relations :

$$\begin{cases} \alpha = \arctan\left(\frac{y-v}{x-u}\right) \\ \beta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}}\right) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

En définissant  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$ ,  $\beta_{\min}$  et  $\beta_{\max}$  comme les extrema de  $\alpha(x, y, z, u, v)$  et  $\beta(x, y, z, u, v)$  pour  $(x, y, z) \in \mathcal{R}$  et  $D/2 \leq u, v \leq D/2$ , la zone effective spectrale  $\mathcal{R}'$  du domaine  $k_u$ - $k_v$ - $k$  contenant le spectre des échos présents dans la zone de reconstruction  $\mathcal{R}$  est simplement donnée par le domaine :

$$\mathcal{R}' = \{(k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k), \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}\}.$$

### III.4.2 Application à l'imagerie des trois entailles avec le mode LLdL

Nous avons montré en 2D que seule une dizaine d'ondes planes suffisaient à imager des entailles sur toute leur longueur en mode demi-bond. Dans cette dernière section, le mode LLdL est généralisé en 3D pour imager les trois entailles du bloc d'aluminium introduit au chapitre II. On présente d'abord une application du fenêtrage spectral 3D pour supprimer des artefacts apparaissant hors de la zone effective définie autour de l'entaille considérée. Les images de Lu sont ensuite comparées à celles formées avec PWI, et l'on conclut sur les temps de reconstruction lorsque les deux méthodes tiennent compte de la zone effective. On montre dans ce cas limite que 9 tirs par entailles fournissent une bonne qualité d'image et qu'un seul tir suffit même à obtenir une visualisation acceptable d'une entaille.

#### a) Zones effectives spatiales et fréquentielles, et influence sur les images $f$ - $k$

La région d'intérêt comportant les 3 entailles est représentée sur la Figure III.18a, et trois zones effectives  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$  sont définies autour de chacune d'elles. La zone  $\mathcal{R}_1$  est définie comme le parallélépipède de centre  $(x_1, y_1, z_1) = (30, 0, 20)$  mm et de dimensions  $l_x = 15$  mm,  $l_y = 30$  mm, et  $l_z = 20$  mm. Elle est prise en compte pour les 9 tirs autour de  $\varphi = 180^\circ$ . Les régions  $\mathcal{R}_2$ , considérée pour  $-60^\circ \leq \varphi \leq -50^\circ$ , et  $\mathcal{R}_3$ , relative à  $50^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ$  sont obtenues par rotation d'angles  $120^\circ$  et  $-120^\circ$  de la zone  $\mathcal{R}_1$  autour de l'axe  $Oz$  et sont illustrées en couleur sur la Figure III.18a.

En considérant un réflecteur  $(x, y, z)$  dans une zone d'intérêt et un élément de coordonnées  $(u, v, 0)$ , les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont donnés par (III.21). Par suite, il est aisé de montrer que les extrema de  $\alpha$  et  $\beta$  sont atteints pour des réflecteurs placés sur les arêtes de  $\mathcal{R}_i$

et des éléments placés sur les arêtes du capteur. Les zones effectives spectrales sont ainsi définies par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'_1 &= \{(k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k), 20,5^\circ \leq \alpha \leq 74,5^\circ, -115^\circ \leq \beta \leq 115^\circ\} \\ \mathcal{R}'_2 &= \{(k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k), 15^\circ \leq \alpha \leq 74^\circ, -126^\circ \leq \beta \leq -2^\circ\} \\ \mathcal{R}'_3 &= \{(k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k), 15^\circ \leq \alpha \leq 74^\circ, 2^\circ \leq \beta \leq 126^\circ\}\end{aligned}$$

et sont affichées dans le domaine  $k_u$ - $k_v$  pour un  $k$  fixé sur la Figure III.18b.

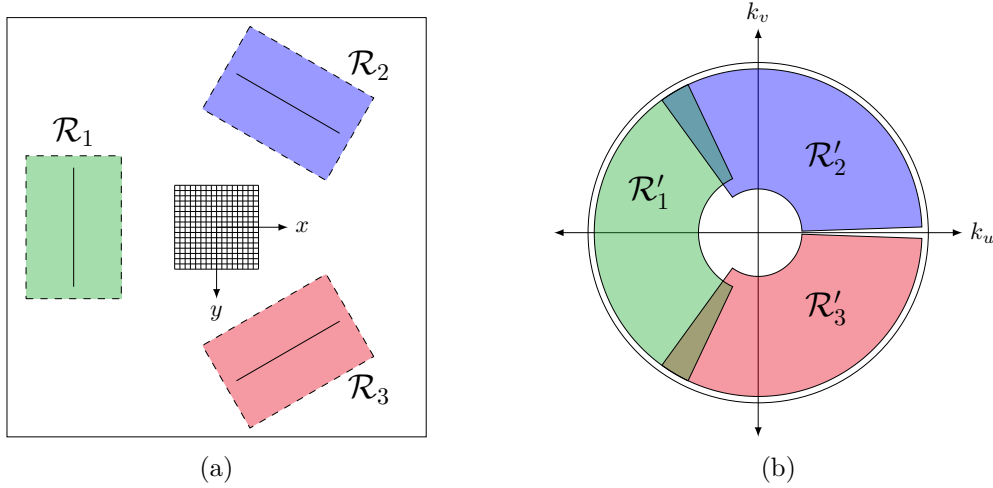


Fig. III.18 (a) Vue de dessus de la pièce d'aluminium comportant trois entailles verticales entourées des zones effectives  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ , et (b) régions  $\mathcal{R}'_i$  associées représentées dans une tranche du cône des ondes propagatives pour un  $k$  fixé.

L'effet du fenêtrage spectral sur l'image de l'entaille à  $x = -28$  mm est illustré sur la Figure III.19 pour un tir dans la direction  $\mathbf{e}_{180,45}$ . Les maxima d'amplitude de l'image selon  $z$  sont affichés sur la colonne de gauche, et les maxima des spectres images respectifs selon  $k_z$  sont donnés à droite. En l'absence de fenêtrage, du bruit apparaît sur l'image autour de  $(x, y) = (-10, -40)$  mm et  $(x, y) = (-10, 40)$  mm, et un artefact à  $x = -23$  mm est très visible devant l'entaille. Les signatures fréquentielles des artefacts aux bords de la région d'intérêt sont deux points lumineux autour de  $(k_x, k_y) = -(1, 1)$  mm<sup>-1</sup> et  $(k_x, k_y) = (-1, 1)$  mm<sup>-1</sup> dus à l'aliasing, car la sonde est mal échantillonnée. Après restriction de  $S(k_u, k_v, \omega)$  à  $\mathcal{R}'_1$ , ces points lumineux sont supprimés, ainsi que les artefacts correspondant sur l'image III.19c. La suppression de ces échos est due au fenêtrage en  $\beta$ . Le fenêtrage en  $\alpha$  est quant à lui responsable de la diminution d'amplitude de l'artefact et du bruit présent devant l'entaille. On vérifie également que les amplitudes significatives sont circonscrites dans la région  $\mathcal{R}_1$ , comme attendu. Il apparaît de plus sur les spectres que l'information sur l'entaille est concentrée dans une fine bande de fréquences autour de  $k_y = 0$ . Il serait donc possible de réduire encore davantage le support du spectre, mais ce fenêtrage suppose de connaître *a priori* l'orientation et la nature du défaut.

Le fenêtrage permet aussi de réduire le volume de données. Le rapport entre la zone utile  $\mathcal{R}'_i$  dans le domaine  $k_u$ - $k_v$ - $k$  et le volume total du cône des ondes propagatives est

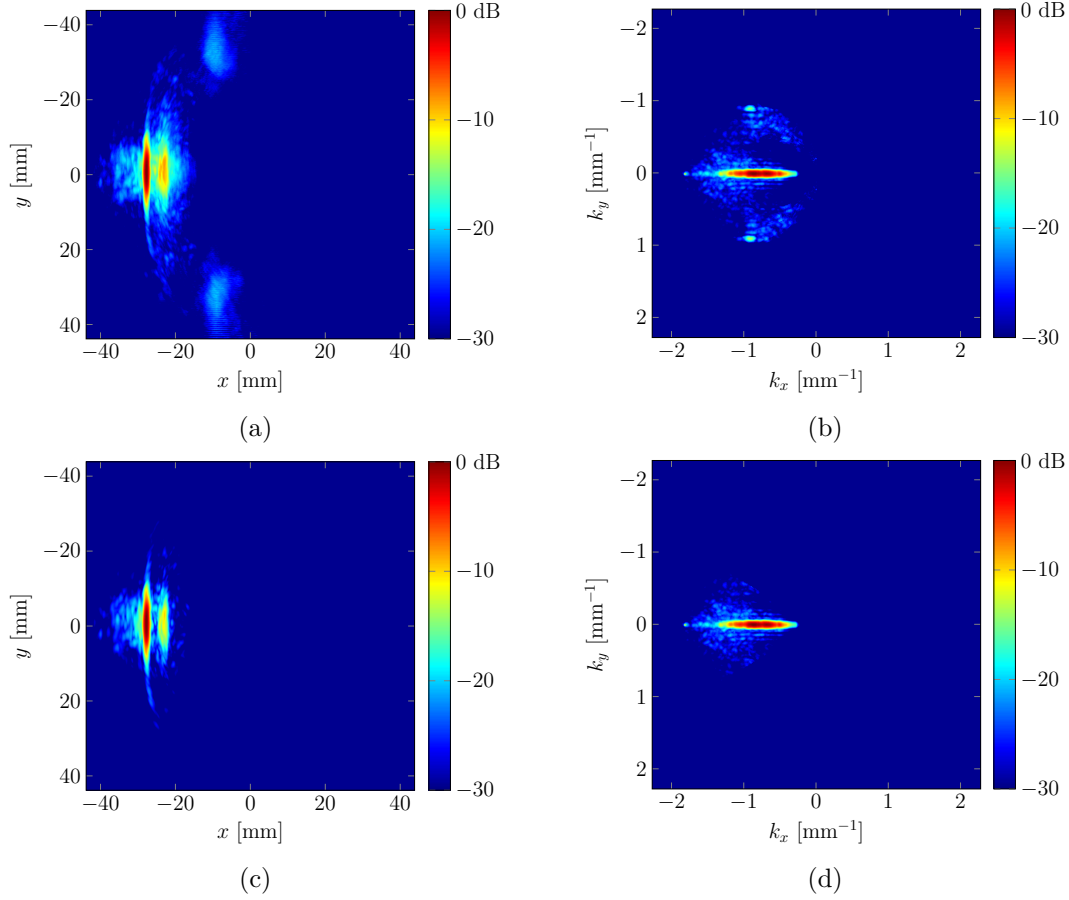


Fig. III.19 Images 2D (gauche) et spectres associés (droite) calculés à partir d'un seul tir dans la direction  $\mathbf{e}_{180,45}$ . (a,b) : image et spectre sans fenêtrage, (c,d) : image et spectre avec fenêtrage spectral défini par  $\mathcal{R}_1^I$ .

donné par la formule :

$$\rho(\alpha_{\min}, \alpha_{\max}, \beta_{\min}, \beta_{\max}) = \frac{1}{2\pi} (\sin^2 \beta_{\max} - \sin^2 \beta_{\min}) (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}).$$

Les rapports  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$  pour chacune des trois zones d'intérêt valent respectivement 28.9%, 29.6% et 29.6%, ce que l'on perçoit sur la Figure III.18b. Cela signifie que dans la configuration de contrôle choisie, moins d'un tiers du cône des ondes propagatives est utile à la reconstruction de l'image dans la zone d'intérêt.

Parallèlement à cela, le volume de la zone effective dans le domaine fréquentiel image  $k_x$ - $k_y$ - $k_z$  est (cf. annexe A.5)

$$\mathcal{V}(\alpha_{\min}, \alpha_{\max}, \beta_{\min}, \beta_{\max}) = \frac{k_{\max}^3}{6} \{ (\beta_{\max} - \beta_{\min}) [\sin(\alpha_{\max} - \varphi) - \sin(\alpha_{\min} - \varphi)] \sin \theta + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) (\cos \beta_{\min} - \cos \beta_{\max}) [2 - \cos \theta (\cos \beta_{\min} + \cos \beta_{\max})] \}$$

Le rapport entre  $\mathcal{V}(\alpha_{\min}, \alpha_{\max}, \beta_{\min}, \beta_{\max})$  et le volume de  $\text{supp}(G)$  vaut environ 30% pour chaque tir. Le fenêtrage spectral permet donc théoriquement de réduire l'étape

d'interpolation de 70% par rapport à une reconstruction sans fenêtrage. La prise en compte d'une zone effective divise ainsi par 3 la quantité d'information utile dans le spectre du signal et celui de l'image. Pour exploiter au maximum le principe de fenêtrage spectral, il pourrait être judicieux d'évaluer des algorithmes de FFT *pruning* (*élagage* en français). Ces algorithmes tiennent compte du caractère lacunaire des signaux ou des spectres pour n'utiliser dans le calcul des transformées de Fourier que les amplitudes non nulles, ou des points appartenant à des supports restreints. K.S. Knudsen et L.T. Bruton [66] ont montré que l'utilisation de FFT par élagage pouvait réduire le nombre d'opérations de quelques dizaines de % pour des signaux 2D. Ces algorithmes n'ont pas été exploités ici mais sont une piste d'optimisation pour l'imagerie dans le domaine de Fourier.

### b) Comparaison avec PWI

Pour terminer cette étude, nous comparons les images obtenues avec les méthodes  $f$ - $k$  et PWI, ainsi que les temps de calcul. Les résultats présentés ici sont basés sur les reconstructions tenant compte des zones effectives spatiales  $\mathcal{R}_i$  dans le cas de PWI, et spectrales  $\mathcal{R}'_i$  pour la méthode de Lu.

Les représentations des volumes images PWI et de Lu sous forme d'isosurfaces sont affichées sur les figures III.20a et III.20b. Le seuil d'affichage est fixé à 50% de l'amplitude maximale sur le volume reconstruit. Ces représentations permettent une bonne visualisation de l'orientation des entailles et de leur hauteur.

Pour les dimensionner, les hauteurs à -6 dB des trois échos ont été mesurées et sont reportées dans le Tableau III.2. Même si ces valeurs sont parfois relativement éloignées des valeurs réelles de 5 mm, on améliore la caractérisation des défauts, par rapport au mode direct LdL, où seul l'écho du coin était visible sur l'image 3D. Les maxima d'amplitude des

|     | Entaille 1 | Entaille 2 | Entaille 3 |
|-----|------------|------------|------------|
| PWI | 5,3 mm     | 6,2 mm     | 5,5 mm     |
| Lu  | 5,4 mm     | 5,3 mm     | 6,1 mm     |

TABLE III.2 – Estimations des hauteurs des entailles calculées à partir des images PWI et de Lu.

images selon  $z$  sont affichés sur les figures III.20c et III.20d. On note dans le cas présent que l'image PWI est légèrement moins bruitée que celle formée par la méthode de Lu. Les coupes dans le plan  $\{y = 0\}$  des images de Lu (Figure III.20e) et PWI (Figure III.20f) montrent néanmoins que les qualités des images sont similaires. A titre de comparaison, les coupes de l'entaille de gauche pour une seule émission  $\mathbf{e}_{180,45}$  sont affichées sur la Figure III.21. Malgré la présence d'un artefact devant l'écho d'intérêt, il est tout de même possible de visualiser clairement le défaut. Ce résultat suggère qu'on pourrait imager les 3 entailles avec 3 tirs (un par zone effective).

Enfin, les temps de reconstruction sont répertoriés dans le tableau III.3. Le temps de calcul d'une image PWI dans la zone contenant les 3 entailles et comportant  $200 \times 200 \times 400$  voxels est de 21 minutes environ pour une seule émission. Néanmoins, calculer l'amplitude de l'image en un voxel situé hors de la zone insonifiée par le front d'onde plan n'a pas de sens physique. En ne calculant que les amplitudes des points situés dans les zones  $\mathcal{R}_i$ , dont

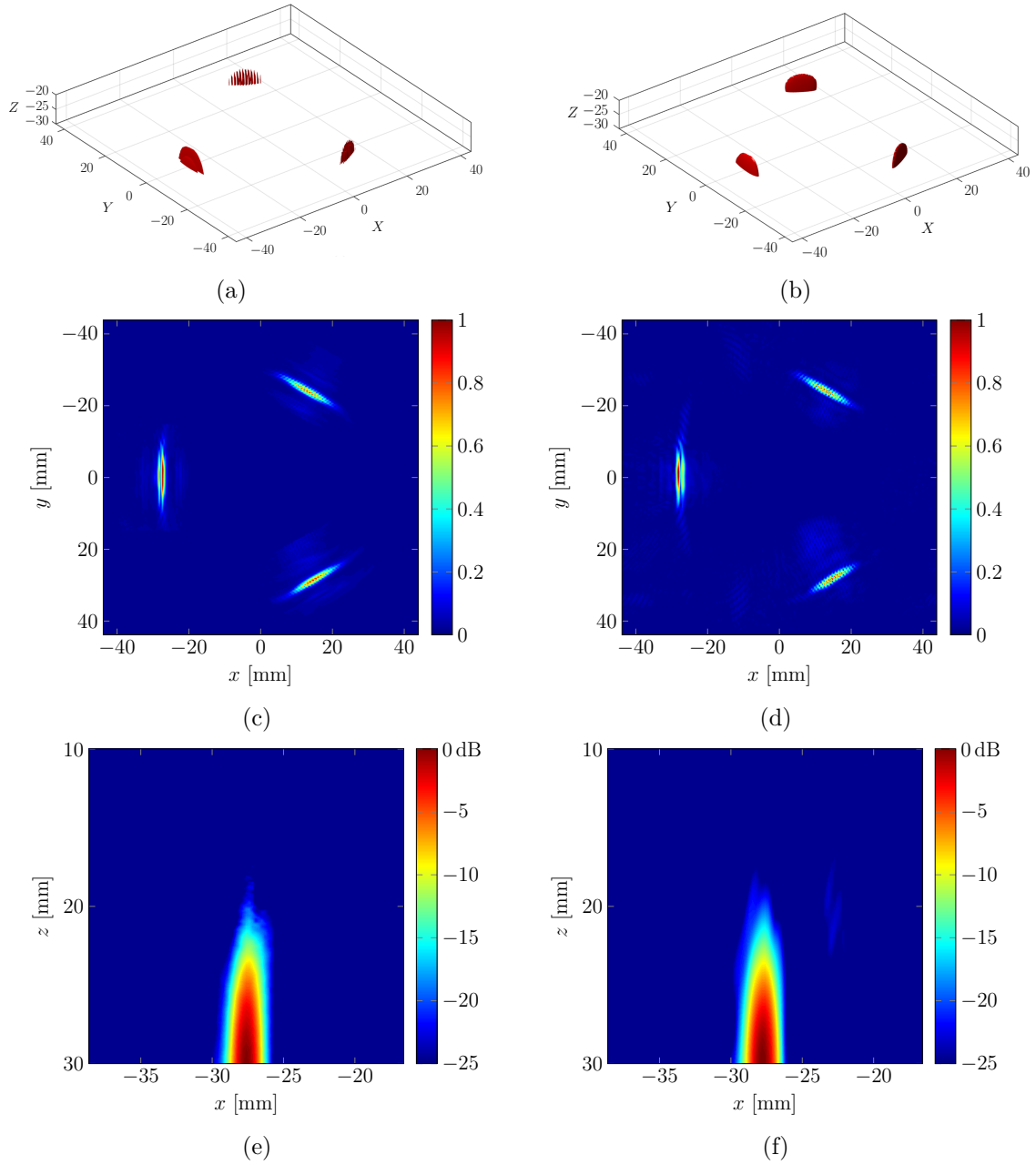


Fig. III.20 Résultats à partir des volumes reconstruits avec PWI (gauche) et la méthode de Lu (droite). (a,b) volume reconstruit présenté sous formes d'isosurfaces avec un seuil à -6 dB ; (c) maximum d'amplitude de l'image PWI selon la direction verticale en prenant en compte les zones effectives  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$ , et  $\mathcal{R}_3$ , (d) maximum d'amplitude de l'image de Lu selon la direction verticale en prenant en compte les zones effectives  $\mathcal{R}'_1$ ,  $\mathcal{R}'_2$ , et  $\mathcal{R}'_3$  ; (e,f) coupes de l'image dans le plan  $\{y = 0\}$ .

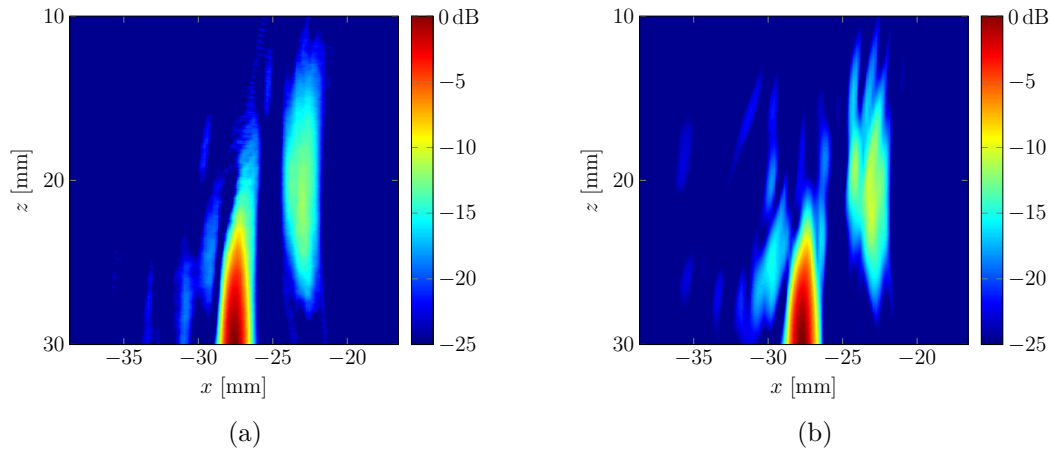


Fig. III.21 Coupe des images de l'entaille située à gauche de la sonde dans le plan  $\{y = 0\}$  formées avec une onde plane dans la direction  $\mathbf{e}_{180,45}$  avec les méthodes (a) PWI, et (b) de Lu.

le volume est 25,5 fois plus petit que celui de la zone d'intérêt, le temps de reconstruction pour un tir est réduit à 50 secondes. Pour imager les 3 entailles avec 27 tirs, le temps de reconstruction avec PWI s'élève ainsi à 22min30. En comparaison, le temps d'exécution de la méthode de Lu est de 5 secondes avec un seul tir, et de 90 secondes avec 27 tirs quand le fenêtrage spectral n'est pas appliqué. Ces temps sont réduits à 3,25 secondes pour un seul tir, et à 55 secondes pour le 27 émissions en tenant compte du fenêtrage, soit un gain de temps d'un rapport 27 comparé à la méthode temporelle. Ainsi, même en réduisant au maximum le nombre de voxels calculés avec PWI, la méthode de Lu reste bien plus rapide.

| nombre de tirs | PWI         |         | Lu          |         |
|----------------|-------------|---------|-------------|---------|
|                | non fenêtré | fenêtré | non fenêtré | fenêtré |
| 1              | 21min20     | 50 s    | 5 s         | 3,25 s  |
| 27             | 9h30        | 22min30 | 90 s        | 55 s    |

TABLE III.3 – Comparaison des temps de reconstruction des images 3D avec les méthodes PWI et de Lu selon qu'un fenêtrage spatial ou spectral est utilisé.

### III.5 Conclusion du chapitre

Dans ce dernier chapitre, nous avons généralisé la méthode de Lu à l'imagerie multi-modes. L'adaptation du modèle direct au cas où l'onde transmise dans le matériau subit une ou plusieurs réflexions sur les interfaces du matériau mène à trois transformations spectrales différentes, chacune d'elle dépendant du type de conversion de mode lors de l'interaction entre l'onde et le défaut : modes sans conversion  $P_1LdL$  et  $P_1TdT$ , modes avec conversion  $P_1LdT$  et  $P_1TdL$ . L'analyse des spectres images en fonction des conversions de modes considérés montre qu'il faut être plus vigilant lors de la reconstruction de l'image,



en particulier avec le mode  $P_1TdL$ , où la transformation spectrale n'est pas injective. En réalisant des acquisitions sur un bloc d'acier comprenant différentes entailles, nous avons démontré la capacité de la méthode de Lu à imager des défauts de type fissure localisés en fond de pièce, en surface ou à cœur. Les images obtenues sont de qualité similaire, voire meilleure que celles calculées avec l'algorithme PWI. Les gains de temps fournis dans le chapitre 2 sont ici conservés.

Une spécificité de l'imagerie multi-modes est la recherche de défauts situés en dehors de l'ouverture du capteur. Bien que cette remarque soit anodine pour l'imagerie PWI, elle a des implications importantes en imagerie  $f$ - $k$ . En définissant une zone effective autour d'une entaille, il est possible *a priori* de sélectionner les fréquences  $(k_u, k)$  du cône des ondes propagatives correspondant à des ondes planes se propageant du défaut vers le réseau, et de disqualifier les fréquences non pertinentes. La sous-section III.3.2 démontre que cette procédure de fenêtrage spectral permet de réduire le bruit sur l'image dans une certaine mesure, et de supprimer des échos de géométrie, tels que les échos de fond associés aux ondes L et aux ondes T, dont les amplitudes peuvent parfois excéder celle du défaut imagé.

En imagerie 3D, la théorie est présentée en considérant le mode  $LLdL$ . Ce mode est ensuite appliqué à l'imagerie des trois entailles dans la pièce d'aluminium précédemment inspectée en mode direct  $LdL$  à la fin chapitre 2. La reconstruction avec un mode demi-bond permet effectivement de caractériser l'orientation et la hauteur des entailles. Le fenêtrage fréquentiel est étendu à trois dimensions et, étant donné la taille de la zone image comparée à l'ouverture du capteur, la prise compte d'une zone effective fréquentielle permet de diviser par 3 la quantité de données utiles dans les domaines  $k_u$ - $k_v$ - $k$  et  $k_x$ - $k_y$ - $k_z$ . L'utilisation d'une zone effective a plus d'impact sur les temps de reconstruction PWI puisqu'elle divise par 25 le nombre d'opérations de calcul par rapport au même algorithme non optimisé. Toutes zones effectives prises en compte (spatiales pour PWI ou fréquentielles pour la méthode  $f$ - $k$ ), la méthode de Lu reste environ 27 fois plus rapide que PWI. Enfin, nous avons montré la possibilité d'imager une entaille à partir d'une seule émission plane, la qualité de l'image étant suffisante pour obtenir une bonne estimation de la hauteur de l'entaille. Pour un seul tir, la reconstruction 3D dans le domaine de Fourier ne nécessite que quelques secondes.

# Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était d'étudier de nouvelles approches en imagerie ultrasonore multi-éléments pour réduire les temps de calcul des images 2D et 3D. En imagerie 2D, ce travail de recherche répond à un réel besoin industriel en termes de rapidité d'inspection. C'est le cas, par exemple, du contrôle de billettes de titane ou de tubes d'extraction de pétrole et de gaz, où le capteur est fixe et la structure est mise en mouvement (translation et rotation) à grande vitesse pour détecter des défauts de fabrication. On peut également citer le contrôle des rails ou des structures en composite dans le domaine aéronautique, où les vitesses d'inspection sont généralement très élevées. L'autre application visée par ces travaux est l'imagerie 3D. En effet, le volume de signaux à traiter et le nombre de voxels à calculer constituent aujourd'hui un frein aux applications temps-réel, que ce soit en traitements embarqués dans des imageurs portatifs ou en post-traitements. Pour réduire les temps de calcul en 2D et 3D, deux choix ont été faits, l'un pour réduire le volume de signaux, et l'autre pour minimiser le nombre d'opérations de calcul dans l'étape de reconstruction. Pour l'acquisition des signaux, l'émission d'ondes planes a été préférée à l'émission d'ondes divergentes utilisée en imagerie TFM (Total Focusing Method). Ce type d'acquisition, de plus en plus répandue, fournit en effet des images de qualité avec une dizaine de tirs seulement. Pour les reconstructions, nous avons étudié des algorithmes dans le domaine de Fourier, car ils nécessitent moins d'opérations de calcul pour former une image par rapport aux algorithmes traditionnels TFM et PWI (Plane Wave Imaging) basés sur une focalisation en tous points par sommation cohérente des signaux mesurés.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les méthodes d'imagerie les plus répandues en CND, et avons comparé leurs performances (qualité des images et temps de calcul) en post-traitant des acquisitions basées sur un principe d'émission d'ondes divergentes. Ce chapitre a permis de conclure que les méthodes  $f-k$  fournissaient la meilleure résolution et des temps de reconstruction plus avantageux, c'est-à-dire plus de 10 fois plus rapides que leurs pendants dans le domaine temporel.

Dans le deuxième chapitre, les méthodes d'imagerie dans le domaine  $f-k$  ont été adaptées pour traiter des acquisitions par émissions planes. Ces méthodes, initialement développées par Lu et Garcia *et al.*, sont généralisées pour traiter des configurations de contrôle spécifiques au CND, où le réseau est en immersion et la zone de reconstruction est plus large que l'ouverture du capteur. Par rapport aux travaux de Lu et Garcia, notre étude analyse précisément les spectres des images, dont les supports sont intégrés aux calculs des complexités algorithmiques. Nous montrons ensuite, dans le cas de l'imagerie de réflecteurs ponctuels situés dans une zone trois fois plus large que l'ouverture du capteur, que les méthodes fréquentielles sont jusqu'à 300 plus rapides que l'imagerie PWI, ce qui confirme l'analyse des complexités algorithmiques menée en amont. Nous démon-

trons également que la méthode de Garcia, appelée méthode de Stolt dans ce chapitre, du nom de la méthode fondatrice, ne convient pas pour imager des défauts éloignés de l'ouverture. Ceci est dû aux approximations inhérentes au modèle des réflecteurs explosifs, qui tendent à dégrader l'image aux forts angles. Cette limite du principe des réflecteurs explosifs n'avait pas encore été mise en évidence car, dans le domaine médical, les images sont généralement restreintes à l'ouverture du capteur où la méthode est très satisfaisante. En imagerie 3D, nous avons généralisé, d'une part, le principe des réflecteurs explosifs et, d'autre part, le principe d'extrapolation du champ permettant de calculer une image sous une interface plane eau/acier avec les méthodes  $f$ - $k$ . En considérant un capteur matriciel carré, nous avons montré que les méthodes de Stolt et de Lu forment des images avec une meilleure résolution latérale par rapport à PWI en étant jusqu'à 400 fois plus rapides. La dernière configuration étudiée a pour objet l'imagerie de plusieurs entailles verticales comprises dans un même volume dont la base est 5 fois plus large que l'ouverture du capteur. Cette situation est représentative car les matrices multi-éléments employées en imagerie 3D ont une surface active très inférieure à celle de la zone inspectée. La méthode de Stolt ayant été disqualifiée étant donné que tous les défauts sont situés loin de l'ouverture, la comparaison avec PWI fait apparaître un gain en temps de calcul de l'ordre de 200. Le résultat clé de ce chapitre est que les temps de reconstruction des méthodes  $f$ - $k$  ne dépendent que très peu du nombre de pixels/voxels de la zone image. Ceci les rend particulièrement intéressantes pour former des images très étendues, et notamment en 3D, contrairement aux méthodes dans le domaine temporel, où les temps de calcul dépendent linéairement du nombre de pixels.

Dans le dernier chapitre, la méthode de Lu est généralisée à l'imagerie multi-modes, traditionnellement utilisée avec les méthodes TFM et PWI pour améliorer la caractérisation de fissures se développant verticalement dans des matériaux soudés. Le modèle direct sur lequel se fonde la méthode est adapté pour prendre en compte des réflexions de l'onde plane sur le fond et la surface de la pièce, et des conversions de modes lors de l'interaction avec ces deux interfaces ou le défaut. Nous avons démontré que la prise en compte de conversions de modes influe sur la transformation fréquentielle entre le spectre mesuré et le spectre de l'image, puis formulé les transformations spectrales dans tous les cas possibles (pas de conversion au niveau du défaut, conversion LT, conversion TL). A partir de signaux expérimentaux mesurés sur un bloc d'acier comportant 4 entailles de positions et d'orientations diverses, nous avons montré que la méthode fréquentielle donnait un rapport signal/bruit au moins équivalent à celui des images PWI en 2D, tout en accélérant la reconstruction. En remarquant que l'imagerie multi-modes permet de restreindre *a priori* les angles de rétro-diffusion provenant des défauts situés en dehors de l'ouverture, nous avons montré qu'un fenêtrage dans l'espace  $k_x$ - $k_z$  conduisait à une réduction significative du nombre de fréquences à calculer tout en éliminant les échos de géométrie indésirables. Enfin, la théorie a été développée en 3D en considérant un exemple de mode de reconstruction (demi-bond LLdL avec une réflexion sur le fond de pièce), puis évaluée expérimentalement sur la maquette avec entailles utilisée en fin de chapitre 2. Dans l'exemple étudié, le temps de calcul de l'image PWI a été optimisé en appliquant le principe de zone effective en 3D (pour chaque émission plane, seule la fraction du volume insonifiée par l'onde plane est reconstruite). L'application du fenêtrage spectral avec la méthode de Lu permet, quant à lui, de diviser par 3 le temps de calcul lié à l'interpolation, mais en pratique le temps de calcul total de l'image n'est réduit que de 40% dans le

cas présenté. Malgré cela, la méthode de Lu fenêtrée reste 27 fois plus rapide que l'imagerie PWI associée à une zone effective. Dans tous les cas présentés dans ce manuscrit, l'imagerie  $f$ - $k$  a donc permis d'accélérer considérablement les temps de reconstruction par rapport à PWI, et semble donc être une méthode prometteuse pour les applications en imagerie rapide pour le CND.

## Perspectives

Cette thèse montre que les méthodes de reconstruction dans le domaine de Fourier offrent une bonne alternative aux méthodes dans le domaine temporel. Le travail a consisté à améliorer la qualité des images et à réduire les temps de calcul en apportant des raffinements mathématiques aux algorithmes. Au cours de cette étude, les algorithmes ont tous été implémentés dans Matlab, sans soucis de parallélisation. Ainsi, les meilleurs temps de calcul obtenus pour de grandes images avec plusieurs dizaines d'angles sont de l'ordre de la seconde, ce qui est encore éloigné d'une cadence temps-réel. La question de la parallélisation de la méthode de Lu est actuellement abordée en 2D au List sur une architecture GPU avec CUDA, en collaboration avec la société Eddyfi (anciennement M2M), afin d'évaluer les performances de la méthode sur un système embarqué. Les premiers résultats confirment la supériorité des algorithmes fréquentiels quand le nombre de pixels devient grand. De plus, nous avons constaté que l'étape limitante était la FFT 2D initiale portant sur le nombre d'émissions planes. Il semble donc que l'optimisation des algorithmes pourrait être essentiellement réalisée en réduisant le nombre d'opérations de la FFT. Dans ce but, les algorithmes de FFT *pruning* seront étudiés afin de réduire au maximum la charge de calcul.

Enfin, les interfaces complexes, que l'on rencontre en CND n'ont pas été abordées dans cette thèse. Bien que les méthodes temporelles TFM ou PWI soient coûteuses en temps de calcul, leur simplicité d'implémentation et leur transparence vis-à-vis de la géométrie en font des méthodes privilégiées lorsque la surface du matériau est quelconque. L'imagerie adaptative TFM est déjà implémentée dans le système Gekko d'Eddyfi, et permet d'afficher en temps-réel des images sous une surface complexe non connue *a priori*. Nous pensons que l'imagerie adaptative est également possible dans le domaine de Fourier. Néanmoins, en raison de la géométrie quelconque de la surface, il n'est pas possible d'utiliser une extrapolation de champ pour se ramener à un réseau virtuel au contact. Une possibilité serait d'exploiter le principe des sources et récepteurs virtuels pour synthétiser le B-scan qui serait mesuré par un réseau virtuel plan sous la surface, et appliquer, par suite, les algorithmes de reconstruction comme s'il s'agissait d'un réseau sur une interface plane.



# Annexe A

## A.1 Identité de Weyl

Cette section constitue une démonstration de l'identité de Weyl pour les fonctions de Green des équations de Helmholtz 2D et 3D. Elle est au cœur du fonctionnement de la méthode de Lu.

On considère la fonction  $g(\mathbf{r})$  solution de l'équation

$$\nabla^2 g + k^2 g = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

où  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  et  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . En opérant une transformée de Fourier selon l'axe  $x$ , (A.1) devient

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(k_x, z) + (k^2 - k_x^2)G(k_x, z) = -\delta(z - z_0)e^{-ik_x x_0}.$$

Ainsi, en tout point différent de  $z_0$ ,  $G$  est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 en  $z$  suivante :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(k_x, z) + (k^2 - k_x^2)G(k_x, z) = 0.$$

$G(k_x, z)$  est donc de la forme

$$G(k_x, z) = A^+(k_x)e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2}(z - z_0)} + B^+(k_x)e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2}(z - z_0)} \quad \text{pour } z > z_0,$$

et

$$G(k_x, z) = A^-(k_x)e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2}(z - z_0)} + B^-(k_x)e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2}(z - z_0)} \quad \text{pour } z < z_0.$$

La condition de Sommerfeld impose que l'énergie acoustique ne peut provenir de l'infini. De plus,  $G$  est continue. On conclut que  $G$  est de la forme

$$G(k_x, z) = A(k_x)e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2}|z - z_0|}.$$

En intégrant l'équation (A.3) de  $z = z_0 - \varepsilon$  à  $z = z_0 + \varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial z}(k_x, z_0 + \varepsilon) - \frac{\partial G}{\partial z}(k_x, z_0 - \varepsilon) + (k^2 - k_x^2)A(k_x) \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2}|z - z_0|} dz = -e^{-ik_x x_0}.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et en utilisant la continuité de la dérivée de  $G(k_x, z)$  en  $z_0$ , puis en notant que la contribution de l'intégrale est égale à  $\frac{2}{i\sqrt{k^2 - k_x^2}}$ , on obtient l'expression de  $A(k_x)$

$$A(k_x) = \frac{-ie^{-ik_x x_0}}{2\sqrt{k^2 - k_x^2}}.$$

Finalement,  $G(k_x, z)$  s'écrit

$$\frac{-ie^{-ik_x x_0 - i\sqrt{k^2 - k_x^2}|z - z_0|}}{2\sqrt{k^2 - k_x^2}},$$

et l'expression de  $g(\mathbf{r})$  est obtenue par transformation de Fourier inverse selon l'axe  $x$  :

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_x(x-x_0) - i\sqrt{k^2 - k_x^2}|z - z_0|}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} dk_x.$$

En procédant de la même manière pour l'équation de Helmholtz en 3D, on peut montrer que

$$\frac{e^{-ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_x(x-x_0) + ik_y(y-y_0) - i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}|z - z_0|}}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y.$$

## A.2 Détermination du spectre image avec l'algorithme de Stolt

Ce paragraphe détaille l'obtention du support de l'image obtenue par la méthode de Stolt pour un angle  $\theta_m$ . D'après les équations I.22, I.23 et I.24, le support  $\mathcal{H}_m$  du spectre corrigé  $\tilde{S}_m(k_x, \omega)$  est

$$\mathcal{H}_m = \left\{ \max \left( \frac{-k_u}{1 - \sin \theta_m}, \frac{k_u}{1 + \sin \theta_m} \right) \leq k \leq k_{max} \right\},$$

et le cône des ondes propagatives dans le milieu des réflecteurs explosifs est

$$\hat{\mathcal{H}}_m = \{\alpha_m |k_u| \leq k \leq k_{max}\}.$$

Troisièmement, le support de  $G_m$  se déduit de l'équation (II.6) et la condition portant sur les cônes des ondes propagatives :

$$\text{supp}(G_m) = \left\{ \left( k_x, \gamma_m k_x + \beta_m \sqrt{\left( \frac{k}{\alpha_m} \right)^2 - k_x^2} \right), (k_x, k) \in \mathcal{H}_m \cap \hat{\mathcal{H}}_m \right\}.$$

A  $k \geq 0$  fixé,  $k_x \mapsto \left( k_x, \gamma_m k_x + \beta_m \sqrt{\left( \frac{k}{\alpha_m} \right)^2 - k_x^2} \right)$  décrit une portion d'ellipse. Nous notons  $\mathcal{E}_k$  cette ellipse (cf Figure A.2). Dans le cas où  $\mathcal{H}_m \subset \hat{\mathcal{H}}_m$ , c'est-à-dire tant que  $|\theta_m| \leq \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ ,

$$\text{supp}(G_m) = \left\{ \max \left[ \left( \pm \gamma_m + \beta_m \sqrt{\frac{1}{\alpha_m^2 (1 \pm \sin \theta_m)^2} - 1} \right) k_x \right] \leq k_z \right\} \cap \mathcal{E}_{k_{\max}}$$

Notons que si  $|\theta_m| \geq \arctan(1/2)$ , alors

$$\text{supp}(G_m) = \left\{ \max \left[ \left( -\gamma_m + \beta_m \sqrt{\frac{1}{\alpha_m^2 (1 - \sin \theta_m)^2} - 1} \right) k_x, \gamma_m k_x \right] \leq k_z \right\} \cap \mathcal{E}_{k_{\max}}$$

et si  $|\theta_m| \leq -\arctan(1/2)$ , alors

$$\text{supp}(G_m) = \left\{ \max \left[ \left( \gamma_m + \beta_m \sqrt{\frac{1}{\alpha_m^2 (1 + \sin \theta_m)^2} - 1} \right) k_x, -\gamma_m k_x \right] \leq k_z \right\} \cap \mathcal{E}_{k_{\max}}$$

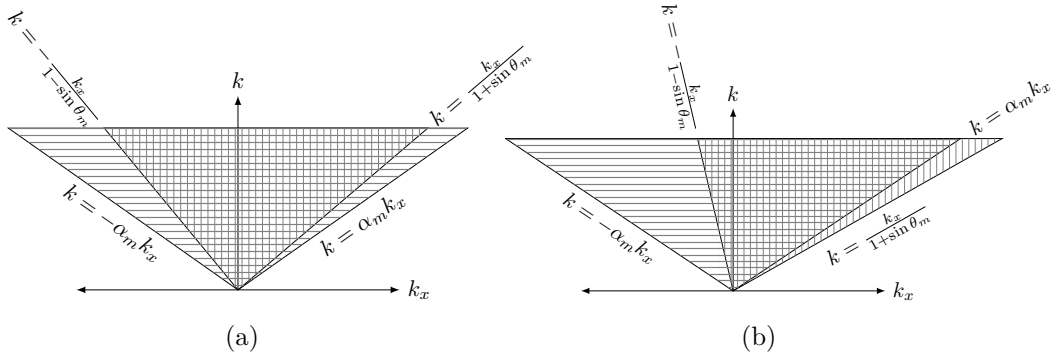


Fig. A.1 Cône des ondes propagatives du milieu des réflecteurs explosifs  $\hat{\mathcal{H}}_m$  (hachures horizontales), et support  $\mathcal{H}_m$  du spectre corrigé (hachures verticales), pour  $\theta = 10^\circ$  (a), et  $\theta = 40^\circ$  (b).

$\mathcal{E}_{k_{\max}}$  est une ellipse de centre  $(0,0)$  d'équation  $Q(k_x, k_z) = \left( \frac{\beta_m k_{\max}}{\alpha_m} \right)^2$ , où  $Q$  est la forme quadratique

$$Q : (k_x, k_z) \mapsto \beta^2 k_x^2 + (k_z - \gamma k_x)^2,$$

dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \beta^2 + \gamma^2 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Afin de déterminer les vecteurs directeurs du grand axe et du petit axe, la matrice  $\mathbf{Q}$  est diagonalisée dans une base orthonormée. Cette diagonalisation revient à trouver une matrice de rotation

$$\mathbf{R}(\bar{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta} & -\sin \bar{\theta} \\ \sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} \end{pmatrix}.$$



telle que  ${}^t\mathbf{R}(\hat{\theta})\mathbf{Q}\mathbf{R}(\hat{\theta})$  est une matrice diagonale. La résolution donne

$$\bar{\theta}_m = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\gamma_m}{\beta_m^2 + \gamma_m^2 - 1} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \sin \theta_m}{1 - 2 \cos \theta_m} \right).$$

et les valeurs propres de  $Q$  sont

$$\mu_1 = \frac{1 + \beta^2 + \gamma^2 + \sqrt{(1 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4\beta^2}}{2} \text{ et } \mu_2 = \frac{1 + \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{(1 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4\beta^2}}{2}$$

Le grand axe vaut  $a = \frac{\beta f_{max}}{\alpha \sqrt{\mu_2}}$  et le petit axe  $b = \frac{\beta f_{max}}{\alpha \sqrt{\mu_1}}$ . Enfin, le vecteur directeur de la droite définie par le grand axe est  $(\sin \hat{\theta}, \cos \hat{\theta})$ .

L'aire utile :

$$\mathcal{A}^l(\theta_m) = \frac{ab}{2} \left[ \arctan \left( \frac{a}{b} \tan(\theta_-) \right) + \arctan \left( \frac{a}{b} \tan(\theta_+) \right) \right].$$

où (cf figure ci-dessous)

$$\theta_+ = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta} - \arctan \left( \gamma_m + \beta_m \sqrt{\frac{1}{\alpha_m^2 (1 + \sin \theta_m)^2} - 1} \right) > 0$$

$$\theta_- = \bar{\theta} + \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \gamma_m - \beta_m \sqrt{\frac{1}{\alpha_m^2 (1 - \sin \theta_m)^2} - 1} \right) > 0$$

est tracé en fonction de  $\theta_m$  sur la [Figure I.8](#).

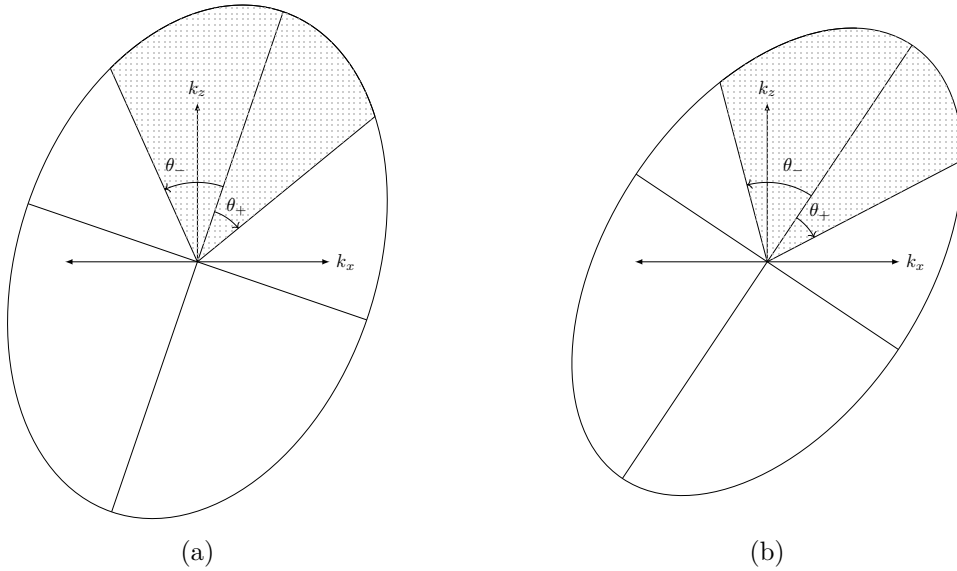


Fig. A.2 (a) Géométrie utilisée en imagerie 3D avec un capteur matriciel transmettant une onde plane dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta, \varphi} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ; (b) Numérotation des éléments par colonne sur une sonde matricielle.

### A.3 Calcul des amplitudes asymptotiques des images f-k en imagerie 2D

Dans la démonstration qui suit, les formules donnant la distribution de réflecteurs avec les méthodes de Stolt et de Lu sont ré-écrites sous forme d'intégrales sur les récepteurs et les fréquences. L'objectif est de comparer théoriquement les méthodes d'imagerie dans les domaines fréquentiel et temporel pour une seule émission. En utilisant l'équation (II.30), l'amplitude  $g_L(\mathbf{r})$  de l'image de Lu au point  $\mathbf{r} = (x, z)$  s'écrit

$$g_L(\mathbf{r}) = \iiint \sqrt{k^2 - k_x^2} S(u, \omega) e^{i(k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_x^2} z + i k_x (x - u) + i k x \sin \theta)} du dk_x d\omega$$

et l'image obtenue avec PWI s'écrit, en écrivant  $s(u, t) = \int S(u, \omega) e^{i\omega t} d\omega$  :

$$g_P(\mathbf{r}) = \iint S(u, \omega) e^{i k (z \cos \theta + x \sin \theta + \sqrt{(x-u)^2 + z^2})} du d\omega.$$

Pour comparer ces deux équations, il nous faut calculer

$$I(u, \omega) = \int \sqrt{k^2 - k_x^2} e^{i(k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_x^2} z + i k_x (x - u) + i k x \sin \theta)} dk_x.$$

Les intégrales de la forme

$$J_\alpha = \int f(s) e^{i\alpha h(s)} ds,$$

où  $f(s)$  et  $h(s)$  sont des fonctions d'une variable et  $\alpha$  tend vers l'infini, peuvent être exprimées grâce à la méthode de la phase stationnaire [67]

$$J_\alpha \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha |h''(s_0)|}} f(s_0) e^{i\alpha h(s_0) + i\mu \frac{\pi}{4}},$$

où  $s_0$  est un point stationnaire de  $h(s)$ , i.e. vérifiant  $h'(s_0) = 0$ , et  $\mu = \text{sign}(h''(s_0))$ . Ici, on pose  $\alpha = kz$  car  $z \gg \lambda$  pour des points situés suffisamment loin du réseau. L'équation ci-dessus se ré-arrange sous la forme

$$I(u, \omega) = \int e^{ikz \left[ \left( \cos \theta + \sqrt{1 - \left( \frac{k_x}{k} \right)^2} \right) + \frac{k_x(x-u) + kx \sin \theta}{kz} \right]} dk_x.$$

En comparant (A.28) avec (A.29), on pose  $\alpha = kz$ ,  $f(k_x) = \sqrt{k^2 - k_x^2}$  et l'on définit

$$h(k_x) = \cos \theta + \sqrt{1 - \left( \frac{k_x}{k} \right)^2} + \frac{k_x(x-u) + kx \sin \theta}{kz}.$$

La phase stationnaire  $k_{x_0}$  de  $h$  est donnée par

$$k_{x_0} = \frac{k(x-u)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|}.$$

Si  $kz \gg 1$ , (A.30) peut être appliqué à  $I(u, \omega)$ , ce qui mène à

$$I(u, \omega) \approx \frac{\sqrt{2i\pi}k^{3/2}z^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_u\|^{5/2}} e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta + \sqrt{(x-u)^2 + z^2})}.$$

En notant  $K(\mathbf{r}, u, \omega) = S(u, \omega) e^{ik(z \cos \theta + x \sin \theta + \sqrt{(x-u)^2 + z^2})}$ , on obtient les amplitudes suivantes pour les images calculées par les méthodes PWI et de Lu :

$$g_P(\mathbf{r}) = \iint K(\mathbf{r}, u, \omega) du d\omega$$

et

$$g_L(\mathbf{r}) \approx \iint \frac{\sqrt{2i\pi}k^{3/2}z^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{u}_2\|^{5/2}} K(\mathbf{r}, u, \omega) du d\omega$$

Pour ce qui est de la méthode de Stolt, nous partons de l'équation définie dans [51]

$$\hat{g}_S(\mathbf{r}) \approx \iint \frac{\sqrt{2i\pi\hat{k}}z}{\|\mathbf{r} - \mathbf{u}_2\|^{3/2}} \hat{S}(u, \omega) e^{i\hat{k}\|\mathbf{r} - \mathbf{u}_2\|} du d\omega$$

où  $\hat{S}(u, \omega)$  est le champ à  $z = 0$  généré par les réflecteurs explosifs, c'est-à-dire le spectre corrigé  $\hat{S}(u, \omega) = S(u, \omega) e^{iku \sin \theta}$ . En exploitant la relation entre les images des réflecteurs explosifs et l'image du milieu physique

$$g_S(\mathbf{r}) = \hat{g}_S(\hat{\mathbf{r}}),$$

on déduit

$$g_S(\mathbf{r}) \approx \iint \frac{\sqrt{2i\pi\hat{k}}\hat{z}}{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u}_2\|^{3/2}} S(u, \omega) e^{i\hat{k}\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u}_2\| + iku \sin \theta} du d\omega.$$

Par suite, d'après (II.4),  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$  ont été choisis de telle sorte que

$$\frac{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u}_2\|}{\hat{c}} = \frac{(x - u) \sin \theta + z \cos \theta + \|\mathbf{r} - \mathbf{u}_2\|}{c} + W_{\mathbf{r}}(u),$$

où  $W_{\mathbf{r}}(u) = \mathcal{O}(x - u)^3$ . Finalement, avec les notations introduites plus haut,

$$g_S(\mathbf{r}) \approx \iint \frac{\sqrt{2i\pi\hat{k}}\hat{z}}{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u}_2\|^{3/2}} e^{i\omega W_{\mathbf{r}}(u)} K(u, \omega) du d\omega.$$

Notons que  $W_{\mathbf{r}}(u)$  est nul si et seulement si  $u = x$ . Ainsi, les erreurs de temps d'arrivée dans le modèle des réflecteurs explosifs affectent tous les pixels de l'image, et particulièrement les points situés hors de l'ouverture du capteur, pour lesquels l'erreur  $W_{\mathbf{r}}(u)$  est strictement positive pour tous les récepteurs.

## A.4 Calcul des amplitudes asymptotiques des images $f$ - $k$ en imagerie 3D

En procédant comme dans le cas 2D, l'amplitude  $g_L(\mathbf{r})$  de l'image de Lu au point  $\mathbf{r}$  est donné par

$$g_L(\mathbf{r}) = \iiint I(u, v, \omega) S(u, v, \omega) du dv d\omega$$

où

$$I(u, v, \omega) = \iint \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} e^{i(k \cos \theta + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} \times e^{i(k_x(x-u) + k_x \sin \theta \cos \phi) + i(k_y(y-v) + k_y \sin \theta \sin \phi)} dk_u dk_v,$$

Les intégrales de la forme

$$J_\alpha = \int f(s, t) e^{i\alpha h(s, t)} ds dt$$

où  $f(s, t)$  et  $h(s, t)$  sont des fonctions de deux variables et  $\alpha \rightarrow \infty$ , peuvent être estimées à l'aide de la méthode de la phase stationnaire [68], i.e.

$$J_\alpha \approx \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{\det|H(s_0, t_0)|}} f(s_0, t_0) e^{i\alpha h(s_0, t_0) + i\mu \frac{\pi}{4}}$$

où  $(s_0, t_0)$  est un point stationnaire de  $h(s, t)$ , c'est-à-dire vérifiant  $\nabla h(s_0, t_0) = 0$  et  $H$  est la Hessienne de  $h$ . Ainsi, on définit  $f(k_u, k_v) = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$  et

$$h(k_u, k_v) = \cos \theta + \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} + \frac{k_x(x-u) + k_y(y-v) + k \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)}{kz}.$$

En appliquant (A.45) à  $I(u, v, \omega)$  on obtient

$$g_L(\mathbf{r}) \approx \iiint \frac{2\sqrt{i}\pi k^2 z^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{u}_3\|^3} K(\mathbf{r}, u, v, \omega) du dv d\omega.$$

De manière similaire, on montre que

$$g_S(\mathbf{r}) \approx \iiint \frac{2\sqrt{i}\pi \hat{k} \hat{z}}{\|\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u}_3\|^2} e^{i\omega W_{\mathbf{r}}(u, v)} K(\mathbf{r}, u, v, \omega) du dv d\omega.$$

## A.5 Volume utile dans l'espace des fréquences image après fenêtre spectral

Ici, nous démontrons en imagerie  $P_1 L d L$  ou  $P_1 T d T$  3D, que si l'espace  $k_u$ - $k_v$ - $k$  est restreint à

$$\mathcal{H}_{\alpha, \beta} = \{(k_u, k_v, k) = (k \sin \alpha \cos \beta, k \sin \alpha \sin \beta, k), 0 \leq k \leq k_{\max}, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2\},$$

alors le support de l'image a pour volume

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) &= \frac{k_{\max}^3}{6} \{ (\beta_2 - \beta_1) [\sin(\alpha_2 - \varphi) - \sin(\alpha_1 - \varphi)] \sin \theta \\ &+ (\alpha_2 - \alpha_1)(\cos \beta_1 - \cos \beta_2) [2 - \cos \theta (\cos \beta_1 + \cos \beta_2)] \} \end{aligned}$$

En notant  $D(k_u, k_v, k)$  la matrice de la différentielle de la transformation  $\xi : (k_u, k_v, k) \mapsto (k_u + k \sin \theta \cos \varphi, k_v + k \sin \theta \sin \varphi, \sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2} - k \cos \theta)$ , c'est-à-dire

$$D(k_u, k_v, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & 1 & \sin \theta \sin \varphi \\ -\frac{k_u}{\sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2}} & -\frac{k_v}{\sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2}} & \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2}} - \cos \theta \end{pmatrix},$$

Le volume  $\mathcal{V}$ , image de  $\mathcal{H}_{\alpha, \beta}$  par la transformation  $\xi$ , et contenant le support de l'image, vaut

$$\mathcal{V} = \int_{\xi(\mathcal{H}_{\alpha, \beta})} dk_x dk_y dk_z = \int_{\mathcal{H}_{\alpha, \beta}} |\det D(k_u, k_v, k)| dk_u dk_v dk,$$

d'après le théorème du changement de variable. Le déterminant ci-dessus vaut

$$\det D(k_u, k_v, k) = \frac{k + (k_u \cos \varphi + k_v \sin \varphi) \sin \theta}{\sqrt{k^2 - k_u^2 - k_v^2}} - \cos \theta,$$

et l'on vérifie aisément qu'il est toujours positif. Finalement, l'intégrale ci-dessus s'écrit à l'aide des coordonnées polaires  $k_u = r \cos \alpha$ ,  $k_v = r \sin \alpha$ , avec  $r \in [k \sin \beta_1, k \sin \beta_2]$ ,  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $k \in [0, k_{\max}]$  :

$$\mathcal{V} = \int_0^{k_{\max}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{k \sin \beta_1}^{k \sin \beta_2} \left( \frac{k + r \sin \theta \cos(\alpha - \varphi)}{\sqrt{k^2 - r^2}} - \cos \theta \right) r dr d\alpha dk,$$

# Bibliographie

- [1] M. Sutcliffe, M. Weston, B. Dutton, et P. Charlton, K. Donne, "Real-time full matrix capture for ultrasonic non-destructive testing with acceleration of post-processing through graphic hardware," *NDT&E Int.*, vol 51, pp. 16-23, 2012. [7](#)
- [2] F. Reverdy, G. Benoist, et L. Le Ber, "Advantages and Complementarity of Phased-Array Technology and Total Focusing Method," *19th World Conference on Non-Destructive Testing*, 2016. [7](#)
- [3] B. W. Drinkwater et P. D. Wilcox, "Ultrasonic arrays for nondestructive evaluation : A review," *NDT&E Int.*, vol. 39, no. 7, pp. 525-541, 2006. [7](#), [10](#)
- [4] C. Holmes, B. W. Drinkwater, et P. D. Wilcox, "Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit-receive array data for nondestructive evaluation," *NDT&E Int.*, vol. 38, pp. 701-711, 2005. [7](#), [10](#)
- [5] G. Montaldo, M. Tanter, J. Bercoff, N. Benech, et M. Fink, "Coherent plane-wave compounding for very high frame rate ultrasonography and transient elastography," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 56, no. 3, pp. 489-506, 2009. [7](#), [6](#), [8](#), [34](#)
- [6] L. Le Jeune, S. Robert, E. Lopez Villaverde, et C. Prada, "Multimodal Plane Wave Imaging for Non Destructive Testing," *2015 ICU International Congress on Ultrasonics*, pp. 570-573, 2015, Physics Procedia. [7](#)
- [7] L. Le Jeune, S. Robert, E. Lopez Villaverde, et C. Prada, "Plane Wave Imaging for ultrasonic non-destructive testing : Generalization to multimodal imaging," *Ultrasonics*, vol.64, pp. 128-138, 2016. [7](#), [6](#), [34](#), [78](#), [93](#)
- [8] J. Provost, C. Papadacci, J. E. Arango, M. Imbault, M. Fink, J.-L. Gennisson, M. Tanter, et M. Pernot, "3D ultrafast ultrasound imaging in vivo," *Phys. Med. Biol.*, vol. 59, no. 19, pp. L1-L13, 2014. [7](#)
- [9] J. Provost, C. Papadacci, C. Demene, J. L. Gennisson, M. Tanter, et M. Pernot, "3-D ultrafast doppler imaging applied to the noninvasive mapping of blood vessels in vivo," *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control*, vol. 62, no. 8, pp. 1467-1472, 2015. [7](#)
- [10] M. Yang, R. Sampson, S. Wei, T.F Wenisch, B. Fowlkes, O. Kripfgans, et C. Chakraborti, "High volume rate, high resolution 3D plane wave imaging," *IEEE International 2014 Ultrasonics Symposium*, pp. 1253-1256, 2014. [7](#)
- [11] M. Karaman, I. O. Wygant, Ö. Oralkan, et B. T. Khuri-Yakub, "Minimally Redundant 2-D Array Designs for 3-D Medical Ultrasound Imaging," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 28, no. 7, pp. 1051-1061, 2009. [8](#)

- [12] R. H. Stolt, "Migration by Fourier transform," *Geophysics*, vol. 43, no. 1, pp. 23-48, 1978. [8](#), [13](#), [14](#), [15](#)
- [13] A. J. Berkhout, "The seismic method in the search for oil and gas : Current techniques and future developments," *Proc. IEEE*, vol. 74, no. 8, pp. 1133-1159, 1986. [8](#), [13](#), [14](#)
- [14] M. H. Skjeltvareid, T. Olofsson, Y. Birkelund, et Y. Larsen, "Synthetic aperture focusing of ultrasonic data from multilayered media using an omega-k algorithm," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 58, no. 5, pp. 1037-1048, 2011. [9](#)
- [15] D. Garcia, L. Le Tarnec, S. Muth, E. Montagnon, J. Porée, et G. Cloutier, "Stolt's f-k migration for plane wave ultrasound imaging," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 60, no. 9, pp. 1853-1867, 2013. [9](#), [37](#), [38](#)
- [16] G. Franceschetti, et G. Schirinzi, "A SAR Processor Based on Two-Dimensional FFT Codes," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 356-366, 1990. [9](#), [13](#)
- [17] R. Bamler, "A Comparison of Range-Doppler and Wavenumber Domain SAR Focusing Algorithms," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 30, no. 4, pp. 706-713, 1992. [9](#), [13](#)
- [18] T. Stepinski, "An implementation of synthetic aperture focusing technique in frequency domain," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1399-1408, 2007. [9](#), [13](#)
- [19] H. J. Callow, M. P. Hayes, et P. T. Gough, "Wavenumber domain reconstruction of SAR/SAS imagery using a single transmitter and multiple receiver geometry," *IEEE J. Electron. Lett.*, vol. 38, no. 7, pp. 336-338, 2002. [9](#), [13](#), [17](#), [42](#)
- [20] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York : IEEE Press, 1995. [9](#), [17](#)
- [21] A. J. Hunter, B. W. Drinkwater, et P. D. Wilcox, "The wavenumber algorithm for full-matrix imaging using an ultrasonic array," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 55, no. 11, pp. 2450-2462, 2008. [9](#), [13](#), [22](#), [42](#), [97](#)
- [22] E. Moghimirad, C. A. Villagómez Hoyos, A. Mahloojifar, B. Mohammadzadeh Asl, and J. Arendt Jensen, "Synthetic Aperture Ultrasound Fourier Beamformation Using Virtual Sources," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 63, pp. 2018-2030, 2016. [9](#)
- [23] J. Y. Lu, "2D and 3D high frame rate imaging with limited diffraction beams," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 44, no. 4, pp. 839-856, 1997. [9](#), [13](#), [24](#), [25](#)
- [24] J. Y. Lu, "Experimental study of high frame rate imaging with limited diffraction beams," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 45, no. 1, pp. 84-97, 1998. [9](#), [13](#), [24](#)
- [25] J. Cheng et J. Y. Lu, "Extended high-frame rate imaging method with limited-diffraction beams," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 53, no. 5, pp. 880-899, 2006. [9](#), [13](#), [24](#), [36](#), [45](#)
- [26] J.-Y. Lu, "Limited diffraction array beams," *Int. J. Imaging Syst. Technol*, vol. 8, pp. 126-136, Jan. 1997. [24](#)

- [27] M. Njiki, A. Elouardi, S. Bouaziz, O. Casula, et O. Roy, "Total Focusing Method for Non Destructive Evaluation : Toward Real-Time Imaging Systems," *IEEE 56th International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol., no., pp. 1164-1167, 2013. [4](#)
- [28] K. E. Thomenius, "Evolution of ultrasound beamformers," *Proc. IEEE Int. Ultrason. Symp., San Antonia, TX*, 1996, pp. 1615-1622. [4](#)
- [29] M. Karaman, P.-C. Li, et M. O'Donnell, "Synthetic aperture imaging for small scal systems," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 42, no. 3, pp.429-442, 1995. [4](#)
- [30] L. Azar, Y. Shi, et S.-C. Wooh, "Beam focusing behavior of linear phased arrays," *NDT&E Int.*, vol 33, numéro 3, pp.189-198, 2000. [7](#)
- [31] S.-C Wooh, et Y. Shi, "Optimum beam steering of linear phased arrays," *Wave motion*, vol. 29, numéro 3, pp.245-265, 1999 [7](#)
- [32] E. A. Ginzel, A. Ekhlas, M. Matheson, P. Cyr et B. Brown, "Near field length compensation options", *NDT.net* 19 (2014) (cf. p. 20). [7](#)
- [33] J. Hunt, M. Arditi et F. Foster, "Ultrasound transducers for pulse-echo medical imaging," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* BME-30, 453–481 (1983) [8](#)
- [34] Y. Ozaki, H. Sumitani, T. Tomoda, et M. Tanaka, "A New system for real-time synthetic aperture ultrasonic imaging," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 35, no. 6, pp. 828-838, 1988. [9](#)
- [35] S. Bennet, D. K. Peterson, D. Corl, et G. S. Kino, "A real-time synthetic aperture digital acoustic imaging system," *Acoustical Imaging*, vol. 10v New York : Plenum, 1980, pp. 669-692. [9](#)
- [36] G. F. Miller et H. Pursey, "The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid", in *Proc. R. Soc. Lond. A*, t. A223, sous la dir. de T. R. Society (20 mai 1954), p. 521–541. [10](#)
- [37] J. A. Jensen, S. I. Nikolov, K. L. Gammelmark et M. H. Pedersen, "Synthetic aperture ultrasound imaging", *Ultrasonics*, vol. 44, pp. 5-15, 2006. [10](#)
- [38] E. Kerbrat, C. Prada, D. Cassereau, et M. Fink, "Ultrasonic nondestructive testing of scattering media using the decomposition of the time-reversal operator", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 42, no. 6, pp. 1087-1098, 1995. [10](#)
- [39] E. L. Villaverde, S. Robert, et C. Prada, "Ultrasonic imaging in highly attenuating materials with Hadamard codes and the decomposition of the time reversal operator", *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 64, no. 9, pp. 1336-1344, 2017. [10](#)
- [40] E. Iakovleva, S. Chatillon, P. Bredif, et S. Mahaut, "Multi-mode TFM imaging with artifacts filtering using CIVA UT forwards models," in : *AIP Conference Proceedings*, vol. 1581, 2014, pp. 72–79. [11](#), [78](#), [97](#)
- [41] J. Zhang, B. W. Drinkwater, P. D. Wilcox, et A. J. Hunter, "Defect detection using ultrasonic arrays : The multi-mode total focusing method," *NDT&E Int.*, vol. 43, no. 2, pp. 123-133, 2010. [11](#), [77](#)



- [42] B. Shakibi, F. Honavar, MDC. Moles, J. Caldwell, et AN. Sinclair, "Resolution enhancement of ultrasonic defect signals for crack sizing," *NDT&E Int.* 2012, 52, 37-50. [12](#), [77](#)
- [43] J. W. Cooley et J. W. Tukey, "An algorithm for machine calculation of complex Fourier series", *Math. Comp.* 19 (1965), 297–301. [14](#)
- [44] Callow, H. J. (2003). Signal Processing for Synthetic Aperture Sonar Image Enhancement. Ph.D. thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand. [17](#)
- [45] N. Pörtzgen et al, "Inverse Wave Field Extrapolation : A different NDI Approach to Imaging Defects," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 54, no. 1, 2007, pp.118-127. [26](#)
- [46] A.J. Berkhout, "Seismic Migration : Imaging of Acoustic Energy by Wave Field Extrapolation," vol.19, pp. 1-339, 1980. [26](#)
- [47] K. Chougrani, et N. Pörtzgen, "IWEX : a new ultrasonic array technology for direct imaging of subsurface defects," *17th World Conference on Nondestructive Testing*, 2008. [28](#)
- [48] M. Darmon, N. Leymarie, S. Chatillon, et S. Mahaut, "Modelling of scattering of ultrasounds by flaws for NDT," *Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media* (Springer Proceedings in Physics), vol. 128. 2013, pp. 61-71. [28](#)
- [49] M. Darmon, N. Leymarie, S. Chatillon, et S. Mahaut, "Modelling of scattering of ultrasounds by flaws for NDT," *Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media* (Springer Proceedings in Physics), vol. 128. 2013, pp. 61-71. [28](#)
- [50] M. Darmon, et S. Chatillon, "Main features of a complete ultrasonic measurement model : Formal aspects of modeling of both transducers radiation and ultrasonic flaws responses," *Open J. Acoust.*, vol. 3, no. 3A, pp. 43-53, 2013. [28](#)
- [51] K. Gu, G. Wang, et J. Li, "Migration based SAR imaging for ground penetrating radar systems," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 151, no. 5, pp. 317-325, 2004. [30](#), [49](#), [116](#)
- [52] L. Le Jeune, «Imagerie ultrasonore par émission d’ondes planes pour le contrôle de structures complexes en immersion», thèse de doct. (Paris 7 Denis Diderot, 2016) [35](#), [78](#), [93](#)
- [53] E. Lopez Villaverde, «Imagerie ultrasonore dans des matériaux complexes par focalisation en tous points : Développement d’une méthode de débruitage des images basée sur la décomposition de l’opérateur de retournement temporel», thèse de doct. (Paris 7 Denis Diderot, 2017) [35](#)
- [54] P. Kruizinga, F. Mastik, N. de Jong, A. F. W. van der Steen, et G. van Soest, "Plane-wave ultrasound beamforming using a nonuniform fast Fourier transform," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 59, no. 12, pp. 2684–2691, 2012. [45](#)
- [55] D.-L. Donald Liu, T.-L. Ji, "Plane wave image formation in spatial-temporal frequency domain," in *Proc. Int. Ultrason. Symposium*, 2016. [45](#), [46](#)
- [56] A. Velichko, et P. D. Wilcox, "An analytical comparison of ultrasonic array imaging algorithms", *J. Acoust. Soc. Am*, vol. 127, no. 4, pp. 2377-2384, 2010 [49](#)

- [57] J. Brizuelaa, J. Camachob, G. Cosarinskyc, J.M. Iriartec, et J.F. Cruzab, "Improving elevation resolution in phased-array inspections for NDT," *NDT&E Int.*, 101 (2019) 1–16. [56](#)
- [58] S. Bannouf, S. Robert, O. Casula, et C. Prada, "Data set reduction for ultrasonic TFM imaging using the effective aperture approach and virtual sources," *Journal of Physics : Conference Series*, vol. 457, no. 1, 012007. [60](#)
- [59] S. Bannouf, « Développement et optimisation de méthodes d'imagerie synthétique pour le contrôle non-destructif par ultrasons de composants industriels complexes », thèse de doct. (Paris 7 Denis Diderot, 2013) [60](#)
- [60] M. Tang et al., "Automatic time gain compensation in ultrasound imaging system," in *Proc. 3rd Int. Conf. Bioinfo. and Biomed. Eng.*, 2009. [68](#)
- [61] A. Fidahoussen, P. Calmon, M. Lambert, S. Paillard, et S. Chatillon, Sylvain, "Imaging of Defects in Several Complex Configurations by Simulation-Helped Processing of Ultrasonic Array Data," *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, New York : Plenum Press, 2010, 10.1063/1.3362502, [77](#)
- [62] K. Sy, P. Bredif, E. Iakovleva, O. Roy, et D. Lesselier 2018, "Development of methods for the analysis of multi-mode TFM images," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1017, 012005, 2018. [77](#), [97](#)
- [63] K. Sy, P. Brédif, E. Iakovleva, O. Roy, et D. Lesselier, "Development of the specular echoes estimator to predict relevant modes for Total Focusing Method imaging," *NDT&E Int.*, Volume 99, October 2018, pp. 134-140. [77](#)
- [64] D. Royer, et E. Dieulesaint, "Ondes élastiques dans les solides. tome 1., propagation libre et guidée," Enseignement de la Physique (Masson, 1996). [79](#)
- [65] S. Chatillon, S. Robert, P. Brédif, P. Calmon, G. Daniel et F. Cartier , "Results of the 2014 UT modeling benchmark obtained with models implemented in CIVA : Solution of the FMC-TFM ultrasonic benchmark problem using CIVA," *AIP Conference Proceedings* 1650, 1847 (2015). [93](#)
- [66] K. S. Knusden, et L. T. Bruton, "Recursive pruning of the 2D DFT with 3-D signal processing applications," *IEEE Trans. Signal Proc.*, pp. 1340-1356, vol 41, no. 3, 1993. [107](#)
- [67] N. Bleistein, et R. Handelsman, "*Asymptotic expansions of integrals*", (Holt, Rinehart and Winston, 1975) [115](#)
- [68] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980. [117](#)





## RÉSUMÉ

---

Ce travail de thèse s'intéresse à l'imagerie ultrasonore multi-éléments pour le Contrôle Non-Destructif (CND), et vise à accélérer l'imagerie échographique en 2D et 3D. Les méthodes étudiées s'inspirent des algorithmes de reconstruction dans le domaine de Fourier ( $f$ - $k$ ) en imagerie sismique. La littérature montre que ces méthodes offrent un avantage numérique par rapport à celles dans le domaine temporel basées sur un principe de focalisation en émission/réception. D'autre part, l'essor des traducteurs multi-éléments a permis d'explorer de nouveaux modes d'émission, comme les ondes planes en imagerie médicale ultra-rapide. Dans cette thèse, on se propose de combiner les algorithmes rapides du domaine  $f$ - $k$  avec des émissions planes pour calculer des images aussi rapidement que possible. Ces algorithmes sont adaptés pour traiter des configurations d'inspection usuelles en CND. Une analyse des complexités algorithmiques, des temps de calcul et de la qualité des reconstructions est menée en 2D. La comparaison avec la méthode temporelle Plane Wave Imaging (PWI) démontre un avantage certain pour l'imagerie  $f$ - $k$ . Ces avantages sont confirmés en 3D où l'on démontre que cette dernière améliore la qualité d'image tout en réduisant le temps de calcul d'un facteur allant jusqu'à 300 par rapport à PWI. Enfin, la méthode  $f$ - $k$  est généralisée à l'imagerie multimodale pour la caractérisation de fissures. La théorie est d'abord présentée, puis on montre qu'il est possible d'améliorer la qualité des reconstructions grâce à un fenêtrage des fréquences spatiales de l'image. Ce filtre spectral élimine des artefacts d'imagerie liés à des échos de géométrie, améliorant ainsi le contraste des images.

## MOTS CLÉS

---

ultrasons, imagerie 3D rapide, traducteurs multi-éléments, migration  $f$ - $k$ , contrôle non-destructif

## ABSTRACT

---

This research work deals with ultrasound imaging with transducer arrays for Non Destructive Testing (NDT), and aims at speeding up the formation of 2D and 3D images. The methods studied in this manuscript are inspired from reconstruction algorithms in the Fourier frequency-wavenumber ( $f$ - $k$ ) domain introduced in seismic imaging. The literature shows that  $f$ - $k$  methods offer a numerical advantage over the more conventional time-domain focusing algorithms. On the other hand, the rise of transducer arrays has allowed for the exploration of new emission modes, such as plane wave emissions in ultra-fast medical imaging. In this thesis, we propose to combine fast  $f$ - $k$  algorithms with plane wave emissions to form 2D and 3D images as fast as possible. These algorithms are adapted to deal with realistic NDT inspection configurations. Analyses of algorithmic complexities, computation times, and image qualities are carried out in 2D, and a comparison with the time-domain Plane Wave Imaging (PWI) shows a clear advantage for  $f$ - $k$  methods. This is confirmed in 3D, where we show that Fourier domain algorithms improve image quality while reducing computation times by a factor up to 300 compared to PWI. Finally, the  $f$ - $k$  methods are generalized to multi-modal imaging to characterize cracks. The theory, which accounts for mode conversions and reflections at the specimen interfaces, is first presented, and we then demonstrate that it is possible to improve the reconstruction quality thanks to spectral windowing in the image frequency-domain. This spectral filter cancels undesired artifacts caused by interface echoes, and improves the image contrast.

## KEYWORDS

---

ultrasound, fast 3D imaging, transducer arrays,  $f$ - $k$  migration, nondestructive testing