



HAL
open science

Transport quantique d'atomes ultra-froids en milieu désordonné : Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales

Baptiste Lecoutre

► **To cite this version:**

Baptiste Lecoutre. Transport quantique d'atomes ultra-froids en milieu désordonné : Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales. Optique [physics.optics]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASP060 . tel-03141534

HAL Id: tel-03141534

<https://pastel.hal.science/tel-03141534>

Submitted on 15 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transport quantique d'atomes ultra-froids en milieu désordonné: Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 572, Ondes et Matière (EDOM)
Spécialité de doctorat: Physique
Unité de recherche: Université Paris-Saclay, Institut d'Optique
Graduate School, CNRS, Laboratoire Charles Fabry, 91127, Palaiseau,
France
Réfèrent: Institut d'Optique

**Thèse présentée et soutenue par visioconférence à Palaiseau,
le 30 Novembre 2020, par**

Baptiste LECOUTRE

Composition du jury:

| | |
|---|------------|
| Laurence PRUVOST Directrice de recherche, Laboratoire Aimé Cotton - Université Paris Saclay | Présidente |
| Dominique DELANDE Directeur de Recherche, Laboratoire Kastler Brossel - Sorbonne Université | Rapporteur |
| Robin KAISER Directeur de recherche, Institut de Physique de Nice - Université Côte d'Azur | Rapporteur |
| Jean-François CLEMENT Maître de conférences, Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules - Université de Lille | Examineur |
| Vincent JOSSE Maître de conférences, Laboratoire Charles Fabry - Institut d'Optique Graduate School - Université Paris Saclay | Directeur |
| Alain ASPECT Directeur de recherche émérite, Laboratoire Charles Fabry - Institut d'Optique Graduate School - Université Paris Saclay | Invité |



Remerciements

Difficile exercice que celui de dresser le bilan de ces quatre dernières années ! Je ne peux que me sentir privilégié d'avoir eu l'occasion, l'opportunité et la chance de vivre une telle expérience, tant sur le plan scientifique et professionnel que sur le plan personnel. La richesse de cette aventure est telle qu'il m'est impossible d'établir une liste de tout ce que j'ai pu apprendre, et j'espère pouvoir en transmettre une partie par le biais de ce document. Si vous décidez de vous limiter à ces quelques lignes, c'est très bien aussi !

Les rencontres réalisées au cours de ma thèse constituent selon moi une des plus grandes richesses de ces années. Ces nombreuses personnes qui m'ont fait profiter de leur talent, qui m'ont partagé leur expérience, qui m'ont témoigné leur soutien, qui m'ont accompagné, je me dois de les remercier.

Mes premières pensées sont pour mon directeur de thèse, Vincent JOSSE. Je ne connaissais que peu de choses à la physique expérimentale et aux atomes froids lors de mon arrivée à l'Institut d'Optique en 2017, mais Vincent m'a fait confiance pour me familiariser et travailler avec l'expérience PINCE. Ces quatre années sous son aile m'ont beaucoup apporté, autant en qualités scientifiques qu'en qualités humaines. Vincent a su me communiquer son goût pour la physique avec les mains, et a réussi à me sensibiliser à son extrême pédagogie par le biais de nombreuses présentations orales que j'ai eu l'occasion de faire. Somme toute, je tiens à remercier chaleureusement Vincent pour m'avoir fait tant grandir pendant ma thèse, et je ne peux qu'être fier et reconnaissant de l'avoir eu comme directeur de thèse.

Je tiens également à remercier Alain ASPECT pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour les nombreuses discussions passionnantes que nous avons pu avoir. Ça a été un véritable privilège de pouvoir profiter de son expérience et de son expertise lors de nos nombreuses réunions et pour la rédaction des articles. Quatre ans après notre première rencontre, je reste admiratif de sa capacité à expliquer de manière simple les choses, et d'établir des analogies avec l'optique, dont j'ai essayé de m'inspirer pour la rédaction de ce manuscrit.

Je souhaite remercier à nouveau les membres du jury d'avoir évalué les travaux que j'ai réalisés au cours de ces années. Un grand merci à Dominique DELANDE et Robin

KAISER pour leur lecture attentive de ce document et les commentaires très positifs qu'ils en ont formulé, mais aussi pour les échanges que nous avons pu avoir lors de nos différentes rencontres. Merci également à Laurence PRUVOST et Jean-François CLEMENT pour leurs commentaires et leurs questions stimulantes lors de la soutenance, dont je garderai un souvenir formidable.

Naturellement, le contenu de ce manuscrit n'est de mon seul fait, mais est le fruit du travail acharné de toute l'équipe Transport Quantique, a.k.a. PINCE. Je m'estime particulièrement chanceux d'avoir pu combiner différentes études menées par l'équipe, études qui ont commencé il y a maintenant plus de 10 ans ! Je souhaite donc remercier les nombreux membres de l'équipe qui ont contribué à ce projet, à commencer par les très vieux thésards, Fred JENDRZEJEWSKI, Kilian MÜLLER et Jérémie RICHARD avec lesquels j'ai eu l'occasion d'échanger. Je tiens à remercier chaleureusement Vincent DENECHAUD, pour tout le temps qu'il a passé à répondre à mes questions, aussi stupides furent-elles, pour son investissement incroyable sur la manip', mais aussi pour l'accueil qu'il m'a réservé lors de mon arrivée en 2017. J'espère avoir pu t'apprendre 2-3 choses en retour de tout ce que tu m'as apporté. Merci également à Musawwadah MUKHTAR, dont les rires résonnent encore dans les couloirs du laboratoire, pour m'avoir appris que Digimon, ce n'est pas que des créatures, mais aussi une bande son qui envoie. Un immense merci à Adrien SIGNOLES, post-doctorant arrivé peu après moi, qui m'a accompagné dans les moments difficiles de l'expérience et qui m'a beaucoup fait grandir, que ce soit personnellement ou professionnellement. Merci pour ta confiance, ta patience, et tout ce que tu as pu m'apprendre et m'apporter. Merci également à Vasiliki ANGELOPOULOU qui nous a rejoint pendant un an, pour son travail d'arrache-pied et pour ses choix musicaux très qualitatifs. Merci également aux nouveaux arrivants de 2019, Azer TRIMECHE en post-doc et Yukun GUO en thèse, pour leur travail acharné pendant mes derniers mois de contact avec l'expérience. Merci finalement à Xudong YU, arrivé en thèse en 2020. Je suis impressionné par la vitesse à laquelle cette nouvelle composition d'équipe a réussi à prendre en main l'expérience et à en tirer des résultats préliminaires très prometteurs. Je leur souhaite le meilleur pour la suite de leur thèse, qui sera éclatante, j'en suis persuadé.

Il me faut également remercier les permanents du groupe Gaz Quantiques, Denis BOIRON, Isabelle BOUCHOLE, Thomas BOURDEL, Marc CHENEAU, David CLÉMENT, Laurent SANCHEZ-PALENCIA et Chris WESTBROOK, avec lesquels j'ai interagité quasi-quotidiennement. Merci à vous pour ces nombreux échanges et pour cette atmosphère d'entraide. Je suis convaincu que cette bienveillance au sein du groupe est la clé qui nous permet de trouver des solutions aux problèmes que nous rencontrons.

Difficile de parler du groupe Gaz Quantiques sans mentionner les thésards, stagiaires et post-docs, acteurs majeurs de l'excellente ambiance du groupe. Dans le désordre (et avec quelques infiltrés), je remercie Alessandro (see you!), Alexandre, Antoine, Baptiste C, Cécile, Gaëtan (j'espère que tu te rappelles encore de mon coup de téléphone), Guillaume (Ponchoourrin!), Hugo, Julien, Léonard, Lucas, Marco, Maximilian, Maxou, Momo forever, Olivier, Piduss (tes sujets de discussion me manquent!), Stéphane et Vincent L. Mention spéciale au bureau du swagg, Anaïs, Romaric, et mes jumeaux de thèse Ziyad et Clémence (avec qui j'ai partagé cette ultime difficulté du doctorat qu'est l'écriture de ces lignes), qui m'ont accompagné, porté et supporté tous les jours. Merci à vous pour ces moments magiques qui resteront gravés dans ma mémoire.

La réalisation de ces travaux n'aurait pas été possible sans l'aide de nombreuses

personnes extérieures au groupe. Je tiens donc à remercier chaleureusement Patrick ROTH et Jean-René RULLIER de l'atelier mécanique pour leur travail et leur investissement sans lequel l'expérience n'aurait pas pu redémarrer. Similairement, un grand merci à Frédéric MORON de l'atelier d'électronique pour son aide à la réparation, l'entretien et l'amélioration de nos différents matériels. Merci également à Florence qui, même si nous n'avons pas travaillé ensemble, participe à la bonne ambiance du laboratoire. Le directeur du laboratoire, Patrick GEORGES mérite une haie d'honneur pour son suivi du laboratoire, de ses étudiants, pour sa gentillesse et son engagement auprès du personnel du laboratoire. Egalement pour leur suivi, je remercie Eric CHARRON et Alejandro GIACOMOTTI à la direction de l'Ecole Doctorale qui m'ont accordé une grande partie de leur temps à la résolution de problèmes administratifs. Enfin, je souhaite remercier les personnes les plus importantes du laboratoire, Hélène et Doussou de la cafet', pour tous ces moments hilarants ou bien de totale incompréhension.

Cette thèse au sein de l'Institut d'Optique a également été l'occasion de participer à la vie enseignante d'une école d'ingénieurs par le biais d'une mission d'enseignement qui m'a été confiée. À ce titre, je tiens à remercier Denis BOIRON et Franck DELMOTTE pour la confiance qu'ils ont placé en moi, et j'espère avoir été à la hauteur de leurs attentes. Je souhaite également remercier le responsable de l'enseignement d'optique physique, Henri BENISTY, pour sa gentillesse, son écoute et ses conseils. Merci aussi à Julien VILLEMEJANE et Fabienne BERNARD de m'avoir encadré pour les TPs et projets d'électronique embarquée, pour nos échanges passionnants, pour tous ces conseils, ces séances d'évaluation des livrables et ces bons moments. Enfin, merci à Cédric LEJEUNE et Thierry AVIGNON pour leur aide essentielle au bon déroulement de ces TPs.

Sur un plan plus personnel, de nombreuses personnes ont été à mes côtés ces quatre dernières années. Merci à tous les copains qui m'ont amené jusque ici, Guillaume et Laurine, Dydy, Alicia, les copains de grimpe. Un énorme merci à Kévin pour ces huit dernières années de musique qualitative, de bons moments, de tapas & sangria et j'en passe! Merci également aux colocs Copernic pour leur accueil extraordinaire et pour les moments de délire que l'on partage.

À ma plus jolie découverte, l'Eksta, je ne sais pas comment vous remercier. Mille mercis à Alexandre, Arthur, Auriane, Bertrand, Célestine, Charlie, Chloé, Laetitia, Pierre et Rémy pour tout, pour tout ce qui est marqué dans ce carnet.

Pour terminer, un grand merci à ma famille, que ce soient les cousins qui m'encouragent de loin ou encore mon frère Raphaël, et merci infiniment à mes parents, pour lesquels je suis très fier d'apposer le point final à cette thèse.

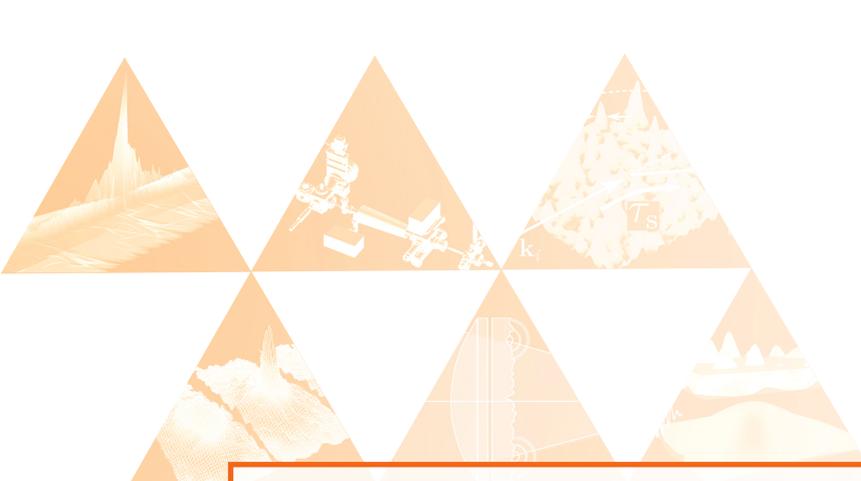


Table des matières

| | | |
|------------|---|-----------|
| | Remerciements | 1 |
| 1 | Introduction | 9 |
| 1.1 | Localisation d'atomes ultra-froids | 9 |
| 1.2 | Déroulement de la thèse | 11 |
| 1.2.1 | Contribution scientifique | 11 |
| 1.2.2 | Contexte expérimental et déroulement de ma thèse | 12 |
| 1.3 | Structure du manuscrit | 13 |
| 2 | Phénomène de localisation d'Anderson | 15 |
| 2.1 | Diffusion et interférences | 15 |
| 2.1.1 | Phénomène de diffusion | 15 |
| 2.1.2 | Localisation faible | 18 |
| 2.1.3 | Suppression du transport : Localisation d'Anderson | 20 |
| 2.2 | Localisation des atomes froids | 22 |
| 2.2.1 | Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson | 22 |
| 2.2.2 | L'approche des atomes froids | 24 |
| 2.3 | Vers l'étude du régime critique | 28 |
| 2.3.1 | Etat de l'art de l'étude de la transition d'Anderson avec des atomes ultra-froids | 29 |
| 2.3.2 | Nécessité d'une spectroscopie pour sonder le régime critique | 34 |
| 3 | Production d'ondes de matière | 37 |
| 3.1 | Condensation de Bose-Einstein | 37 |
| 3.1.1 | Statistique de Bose-Einstein | 38 |
| 3.1.2 | Propriétés d'un condensat de Bose-Einstein | 40 |
| 3.2 | Processus d'interaction lumière-matière | 42 |
| 3.2.1 | Le rubidium ^{87}Rb | 42 |
| 3.2.2 | Potentiel magnétique | 44 |
| 3.2.3 | Forces lumineuses | 44 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.2.4 | Couplage radio-fréquence | 46 |
| 3.3 | Description d'un cycle expérimental | 48 |
| 3.3.1 | Présentation générale du dispositif | 48 |
| 3.3.2 | Première chambre | 48 |
| 3.3.3 | Chambre de science | 53 |
| 3.3.4 | Imagerie | 58 |
| 4 | Mises à jour de l'expérience | 63 |
| 4.1 | Contributions au système informatique de l'expérience | 63 |
| 4.1.1 | Contrôle de l'expérience : passage à la suite Cicero | 64 |
| 4.1.2 | Développement d'une nouvelle interface d'acquisition et de traitement d'images | 65 |
| 4.2 | Calibration de la lévitation magnétique | 66 |
| 4.2.1 | Implémentation de la lévitation magnétique | 66 |
| 4.2.2 | Intervention sur le circuit de refroidissement | 68 |
| 4.2.3 | Calibration des champs par radio-fréquences | 69 |
| 4.2.4 | Étude du potentiel de lévitation | 70 |
| 4.3 | Changement du laser infrarouge et calibration du piège optique | 76 |
| 4.3.1 | Changement du laser infrarouge fibré Ytterbium | 76 |
| 4.3.2 | Calibration du piège optique | 78 |
| 4.4 | Optimisation de l'évaporation tout-optique | 80 |
| 4.4.1 | Lois d'échelle du refroidissement évaporatif | 80 |
| 4.4.2 | Résultats de l'optimisation de l'évaporation | 85 |
| 5 | Propriétés d'un désordre de type speckle | 91 |
| 5.1 | Génération d'un champ de speckle | 91 |
| 5.1.1 | Statistiques de l'intensité d'un speckle | 92 |
| 5.1.2 | Propriétés du diffuseur | 93 |
| 5.1.3 | Implémentation expérimentale | 95 |
| 5.2 | Propriétés spatiales d'un champ de speckle | 99 |
| 5.2.1 | Extension transverse du champ de speckle le long de l'axe optique | 99 |
| 5.2.2 | Longueur de corrélation transverse le long de l'axe optique | 101 |
| 5.2.3 | Longueur de corrélation longitudinale autour du plan de Fourier | 104 |
| 5.2.4 | Effets non-paraxiaux sur les corrélations du speckle | 105 |
| 5.3 | Propriétés du potentiel de type speckle | 107 |
| 5.3.1 | Propriétés du potentiel | 108 |
| 5.3.2 | Possibilité d'un potentiel dépendant de l'état interne | 109 |
| 5.4 | Potentiel composé d'un speckle bichromatique | 113 |
| 5.4.1 | S'éloigner de résonance | 114 |
| 5.4.2 | Étude de la similitude de deux speckles | 119 |
| 6 | Temps de diffusion élastique | 127 |
| 6.1 | Approximation de Born | 128 |
| 6.1.1 | Temps de diffusion élastique dans le régime de désordre faible | 128 |
| 6.1.2 | Diffusion isotrope et diffusion vers l'avant | 129 |
| 6.1.3 | Temps de diffusion élastique dans le régime de Born | 130 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 6.2 | Mesure du temps de diffusion élastique | 133 |
| 6.2.1 | Procédure expérimentale | 133 |
| 6.2.2 | Extraction du temps de diffusion élastique | 134 |
| 6.2.3 | Cartographie du temps de diffusion élastique | 135 |
| 6.3 | Comportement du temps de diffusion élastique | 136 |
| 6.3.1 | Régime de Born | 137 |
| 6.3.2 | Déviations au régime de Born | 137 |
| 6.3.3 | Déviations à la décroissance exponentielle | 139 |
| 6.4 | Conclusion | 141 |
| 7 | Approche spectrale | 143 |
| 7.1 | Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales | 143 |
| 7.1.1 | Généralités sur la fonction spectrale | 144 |
| 7.1.2 | Approximation de Born | 147 |
| 7.1.3 | Approximation de Born : second ordre | 147 |
| 7.1.4 | Approximation de Born auto-consistante | 149 |
| 7.2 | Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales pour un speckle | 151 |
| 7.2.1 | Limite de l'approche auto-consistante pour un désordre de type speckle | 151 |
| 7.2.2 | Fonctions spectrales d'un désordre speckle | 152 |
| 7.2.3 | Comparaison du temps de diffusion élastique avec les fonctions spectrales mesurées | 159 |
| 7.3 | Conclusion | 161 |
| 8 | Conclusion et perspectives | 163 |
| 8.1 | Vers l'étude du régime critique | 163 |
| 8.2 | Signatures de la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions | 165 |
| 8.2.1 | Rétro-diffusion cohérente | 165 |
| 8.2.2 | Diffusion cohérente vers l'avant | 165 |
| 8.3 | Générer un désordre sur mesure | 167 |
| A | Traitement des images expérimentales | 169 |
| A.1 | Détermination du profil de densité intégrée | 169 |
| A.1.1 | Analyse d'un nuage thermique | 169 |
| A.1.2 | Analyse d'un nuage partiellement condensé | 170 |
| A.2 | Estimation de la température | 170 |
| A.2.1 | Mesure de la température par temps de vol | 170 |
| A.2.2 | Estimation de la température d'un nuage lévité | 170 |
| B | Propriétés spatiales du speckle | 173 |
| B.1 | Application du théorème de Wick à un speckle | 173 |
| B.1.1 | Fonction de corrélation à deux corps des fluctuations d'intensité | 173 |
| B.1.2 | Fonction de corrélation à trois corps des fluctuations d'intensité | 174 |
| B.2 | Fonction de corrélation du diffuseur | 174 |
| B.3 | Amplitude rayonnée | 176 |
| B.4 | Calcul complet de la fonction de corrélation en amplitude à deux corps | 177 |
| B.5 | Expression du profil d'intensité moyenne du champ de tavelures le long de l'axe optique | 178 |

| | | |
|------------|---|------------|
| B.6 | Fonctions de corrélation d'un speckle monochromatique | 178 |
| B.6.1 | Corrélation transverse le long de l'axe optique | 178 |
| B.6.2 | Corrélation tridimensionnelle aux alentours du plan de Fourier | 179 |
| B.6.3 | Détermination de la fonction de corrélation à trois corps | 180 |
| B.7 | Fonction de corrélation d'un speckle bichromatique | 181 |
| B.7.1 | Cas d'un spectre bichromatique étroit | 181 |
| B.7.2 | Extension au cas d'un spectre arbitraire | 183 |
| C | Calculs du temps de diffusion élastique | 185 |
| C.1 | Éléments de calcul du temps de diffusion élastique à partir du développement de Born | 185 |
| C.2 | Calcul de la self-energy au premier ordre | 186 |
| C.2.1 | Expression du premier ordre de la self-energy | 186 |
| C.2.2 | Calcul du temps de diffusion élastique | 187 |
| C.3 | Calcul de la self-energy au second ordre | 187 |
| C.3.1 | Calcul à l'aide la représentation en impulsion | 188 |
| C.3.2 | Calcul à l'aide la représentation spatiale | 189 |
| D | Publications | 193 |
| | Bibliographie | 217 |

1. Introduction

Le désordre est omniprésent dans la nature, les systèmes parfaitement ordonnés étant extrêmement rares. Le désordre se manifeste sous de nombreuses formes, telles que des particules en suspension dans l'atmosphère, un agencement irrégulier des cellules dans les tissus biologiques, ou encore des impuretés dans des matériaux conducteurs. La problématique de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné est donc une thématique générale de la physique, commune à de nombreux domaines parmi lesquels on peut citer l'imagerie en milieu opaque, la sismologie, la physique de l'atmosphère ou encore la conduction électrique.

Que ces ondes soient de nature classique ou quantique, la description de leur propagation repose sur la notion de marche aléatoire. Au cours de leur propagation, ces ondes se heurtent à des obstacles qui changent leur trajectoire de manière aléatoire, exhibant ainsi une dynamique diffusive. La distance typique x parcourue pendant un temps t est alors donnée par

$$x \propto \sqrt{Dt} , \quad (1.1)$$

avec D le coefficient de diffusion. Cette description classique de la propagation repose sur le brouillage des effets d'interférence, lié à un moyennage sur un grand nombre de déphasages aléatoires. La propagation de l'onde est alors considérée comme incohérente.

En s'intéressant à la diffusion cohérente d'électrons dans les solides, *P.W. Anderson* a montré en 1958 que le phénomène de diffusion pouvait être annulé, $D = 0$, sous certaines conditions [4]. Anderson a ainsi révélé l'existence de conséquences macroscopiques des effets d'interférence survivant au moyennage sur les différentes réalisations du désordre. Ce phénomène commun à tout type d'onde, baptisé *Localisation d'Anderson*, a depuis fait l'objet de recherches intenses, aussi bien théoriques qu'expérimentales [57].

1.1 Localisation d'atomes ultra-froids

Les atomes ultra-froids constituent un outil très versatile permettant de simuler des hamiltoniens sur mesure. Ceux-ci promettent de nombreuses applications telles que les lasers à atomes [97], des interféromètres atomiques [17], des horloges atomiques sur réseaux

optiques [26] encore le domaine récent de l'atomtronique [28]. Ces systèmes présentent ainsi un degré de contrôle inédit des paramètres expérimentaux à l'aide de nombreux outils d'interaction matière-rayonnement [11]. Il est en effet possible de

- Générer des potentiels sur mesure. À l'aide d'ondes lasers, il est possible de réaliser des potentiels harmoniques, quartiques, sinusoïdaux, des potentiels désordonnés...
- Contrôler les interactions entre particules. De nombreuses espèces atomiques possèdent des résonances de Feshbach, qui permettent de contrôler les interactions inter-atomique à l'aide de champs magnétiques. Il est ainsi possible de générer des interactions attractives, répulsives, ou bien encore de les annuler [121].
- Imager la fonction d'onde d'un état quantique macroscopique. Il s'agit alors d'imagerie *in-situ*, souvent difficilement réalisable dans d'autres systèmes. Il est de plus possible d'obtenir une grande résolution, capable de détecter un unique atome [83].

L'observation directe de la localisation d'Anderson d'ondes de matière à une dimension en 2008 a marqué une étape importante dans l'étude de systèmes désordonnés à l'aide d'atomes ultra-froids [10, 96]. Rapidement, les efforts se sont tournés vers l'observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions, rapportée par trois expériences [47, 54, 107] au cours de la dernière décennie. Des signatures d'effets de localisation ont par la suite été recherchées dans l'espace des vitesses, menant à la mesure des paramètres microscopiques de la diffusion [94] ainsi qu'à l'observation du pic de rétro-diffusion cohérente [48], signature d'effets de localisation faible. La preuve de la cohérence des processus de localisation faible a ensuite été observée sur notre expérience en manipulant la symétrie par renversement du temps [77].

Les efforts expérimentaux sont à présent tournés vers l'étude du régime critique de la transition de phase quantique d'Anderson, qui reste un véritable défi expérimental. Si les comportements localisés et diffusifs ont pu être observés dans les expériences pionnières de la localisation d'Anderson à trois dimensions, aucune n'a pu sonder le régime critique, ni même déterminer précisément l'énergie critique de la transition, appelée *seuil de mobilité*. Cette étude représente l'objectif de l'équipe de recherche au sein de laquelle ma thèse s'est déroulée.

Mentionnons l'existence d'un autre système basé sur des atomes froids, le système de *rotateurs forcés*, s'intéressant à la localisation dynamique, équivalent de la localisation d'Anderson dans l'espace des vitesses. Ces systèmes témoignent de résultats impressionnants : l'expérience de Lille rapporte l'observation de la localisation à trois dimensions [19], l'étude du régime critique¹ et de l'universalité de la transition d'Anderson [62], ainsi que l'observation de l'analogie du pic de diffusion cohérente vers l'avant, signature de la localisation d'Anderson récemment découverte [40].

1. Il s'agit de la seule expérience réalisée rapportant une mesure des exposants critiques compatible avec les résultats des simulations numériques.

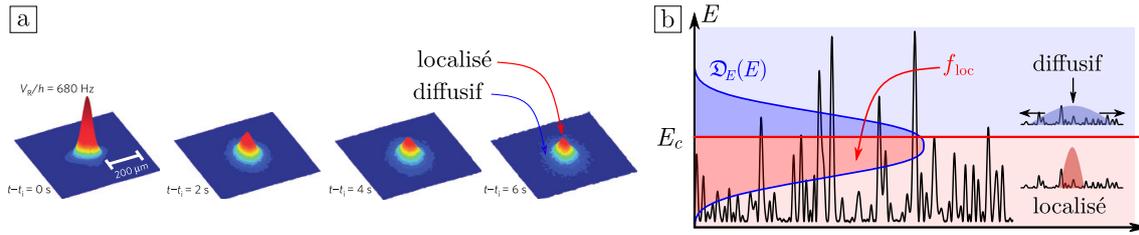


FIGURE 1.1 – **Observation de la localisation d’Anderson à trois dimensions. a :** images expérimentales de la localisation d’Anderson d’ondes de matière. Une partie des atomes reste localisée à temps long, tandis que le reste des atomes diffuse lentement. **b :** Illustration de la distribution d’énergie des atomes. La partie de basse énergie est localisée, tandis que la partie de haute énergie est diffusive. Ces comportements sont séparés par une transition de phase, d’énergie critique E_c appelée seuil de mobilité.

1.2 Déroulement de la thèse

1.2.1 Contribution scientifique

Les trois expériences témoignant de la localisation d’Anderson d’onde de matière à trois dimensions n’ont pas pu fournir une mesure directe du seuil de mobilité. Notamment, l’application du désordre sur l’état initial élargit significativement sa distribution d’énergie. De fait, une fraction des atomes pour lesquels $E < E_c$ reste localisée, tandis qu’une majorité d’énergie supérieure au seuil de mobilité a un comportement diffusif, comme illustré figure 1.1. Si l’estimation de la fraction localisée est mesurable expérimentalement, la détermination du seuil de mobilité demande une connaissance fine de la distribution d’énergie des atomes dans le désordre. En particulier, Pasek et al. ont montré de fortes déviations entre les différentes estimations expérimentales du seuil de mobilité et les estimations issues de simulations numériques [87].

Dans l’optique de sonder le régime critique de la transition d’Anderson, il s’avère nécessaire de mesurer la distribution d’énergie des atomes dans le désordre, liée à la fonction spectrale [87]. Pour cela, l’équipe a développé une approche spectroscopique pouvant adresser sélectivement les différentes énergies du désordre, et ayant mené à la mesure des fonctions spectrales [25, 120]. Cependant, différentes contraintes expérimentales associées à cette approche spectroscopique n’ont pas permis de procéder aux expériences d’expansion nécessaires à la mesure du seuil de mobilité.

L’objectif de cette thèse était donc de dépasser les limitations expérimentales précédentes, telle qu’une limitation forte du temps de vie des atomes plongés dans le désordre, pour étendre le procédé de mesure des fonctions spectrales à la détermination du seuil de mobilité. Cependant, deux avaries majeures de l’expérience (détaillées dans la section suivante) n’ont pas rendu cette mesure possible dans le temps imparti.

Ma contribution scientifique s’est alors focalisée sur l’exploitation des données expérimentales relatives au temps de diffusion élastique, obtenues lors de la thèse de Jérémie Richard [93, 94], et leur confrontation aux mesures des fonctions spectrales [111]. J’ai de plus réalisé des simulations numériques afin de compléter les mesures expérimentales, permettant de valider nos mesures du temps de diffusion élastique et de tester des modèles couramment utilisés pour la prédiction de ce dernier. Notamment, nous avons montré que

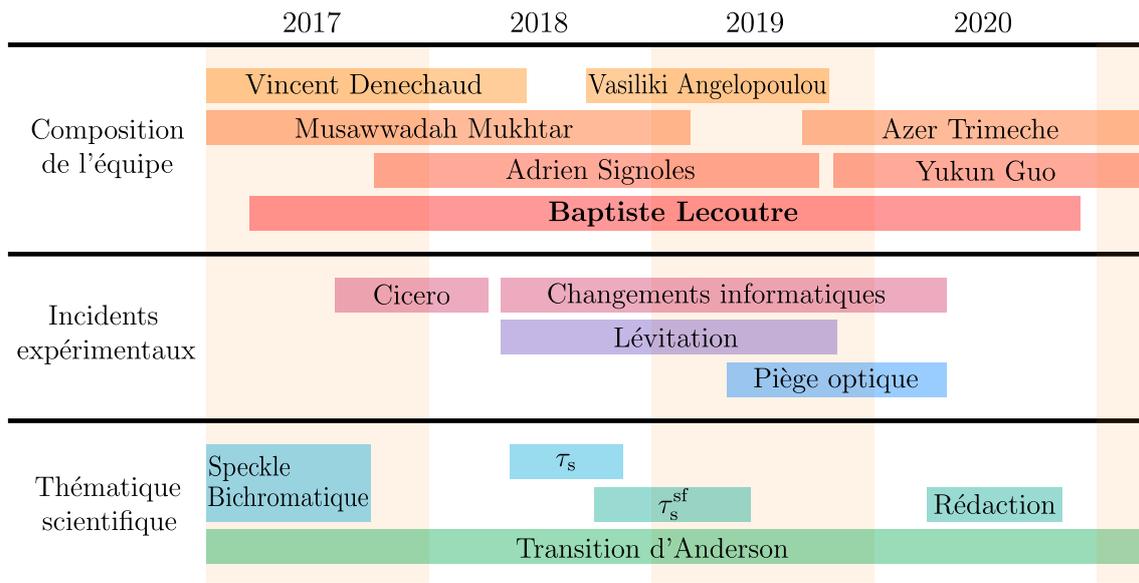


FIGURE 1.2 – **Chronologie du déroulement de ma thèse.** Les principales étapes de ma thèse sont représentées dans les deuxième et troisième lignes, en parallèle de la composition de l'équipe, représentée dans la première ligne. Vincent Denechaud, Musawwadah Mukhtar et Yukun Guo sont les doctorants avec lesquels j'ai travaillé au cours de mon stage de master et durant ma thèse. Adrien Signoles et Azer Trimeche sont les post-doctorants qui nous ont accompagné sur l'expérience, et Vasiliki Angelopoulou une stagiaire de master. Cicero : changement du système de contrôle de l'expérience. Lévitiation : intervention et recalibration du système de lévitation magnétique. Piège optique : Changement, calibration du piège dipolaire croisé et optimisation de l'évaporation optique. τ_s : Traitement et exploitation des données expérimentales sur le temps de diffusion élastique. τ_s^{sf} : Etude du temps de diffusion élastique à l'aide des fonctions spectrales.

l'approche des fonctions spectrales permet de décrire le comportement du temps de diffusion élastique sur la très large gamme de paramètres expérimentaux utilisée, permettant de sonder les régimes de désordre faible et de désordre fort. Cette étude nous a permis d'obtenir une vision très claire du processus de diffusion microscopique, qui constitue une brique élémentaire de la propagation d'ondes dans des milieux désordonnés.

1.2.2 Contexte expérimental et déroulement de ma thèse

La chronologie des principales étapes de ma thèse ainsi que l'évolution de la composition de l'équipe est illustrée sur la figure 1.2.

Peu après mon arrivée à l'*Institut d'Optique* en 2017, un dysfonctionnement du système informatique de contrôle de l'expérience, basé sur le logiciel *Matlab*, a fortement paralysé le reste de l'expérience. Ce système, développé par l'ingénieur électronicien du laboratoire *André Villing* parti à la retraite au cours de l'année 2017, a été remplacé par un système commercial *National Instruments* et la suite *Cicero Word Generator* développée au *MIT* dans le groupe de *Wolfgang Ketterle*. Ce remplacement, ainsi que la reconstruction de la séquence expérimentale, s'est déroulée de l'été 2017 jusqu'en mars 2018. Les changements informatiques associés ont été constants tout au long de ma thèse. De manière plus générale,

l'entièreté de l'expérience a été revue de fond en comble suite au remplacement de ce système.

Au printemps 2018, une seconde avarie a paralysé l'expérience jusqu'au mois de novembre 2018. Une défaillance du circuit de refroidissement à eau des bobines de lévitation magnétique ont conduit au démontage d'une partie de l'expérience autour de la chambre de science. Des composants de génération du désordre, l'imagerie de la seconde chambre, des bobines de compensation de champs magnétiques et de lévitation ont ainsi été retirés du dispositif, puis remontés peu à peu. La calibration des champs magnétiques de la seconde chambre s'est déroulée entre le printemps et l'été 2019. L'étude du temps de diffusion élastique a eu lieu en parallèle de ces travaux de réparation, et ont duré jusqu'au printemps 2019.

Le printemps 2019 a aussi été marqué par le remplacement du laser fibré Ytterbium source pour notre piège dipolaire. La calibration de ce nouveau piège ainsi que l'optimisation de l'étape d'évaporation optique menant à la condensation de Bose-Einstein s'est déroulée jusqu'au début de l'année 2020.

1.3 Structure du manuscrit

Ce manuscrit se décompose selon les six chapitres suivants :

- **Chapitre 2 : Phénomène de localisation d'Anderson.** Nous commencerons par présenter les grandes lignes du transport quantique en milieu désordonné pour introduire le phénomène de localisation d'Anderson, pour ensuite nous attarder sur la transition de phase d'Anderson entre états localisés et états diffusifs. Nous nous concentrerons particulièrement sur l'état de l'art de la transition d'Anderson à l'aide des expériences d'atomes ultra-froids. Nous ferons ainsi apparaître la quantité centrale de l'étude de la physique du désordre, la fonction spectrale.
- **Chapitre 3 : Production d'ondes de matière.** Dans un second temps, nous présenterons les grandes lignes de notre plateforme expérimentale. Nous rappellerons donc les principales propriétés d'un condensat de Bose-Einstein, ainsi que les différents processus d'interaction lumière-matière permettant de manipuler des atomes. Enfin, nous présenterons les différentes étapes d'un cycle expérimental nous permettant d'obtenir un gaz quantique dégénéré.
- **Chapitre 4 : Mises à jour de l'expérience.** Après avoir présenté les différents éléments de notre expérience, nous allons nous focaliser sur les modifications apportées à notre dispositif au cours de ma thèse. En particulier, nous discuterons des deux éléments principaux de la chambre de science, la lévitation magnétique et le piège optique. Nos travaux sur ces éléments nous ont ainsi permis d'obtenir des condensats de Bose-Einstein bien meilleurs que précédemment, et de calibrer finement notre lévitation magnétique dans le but d'exploiter pleinement la dynamique de notre système.
- **Chapitre 5 : Propriétés d'un désordre de type speckle.** Après avoir présenté le dispositif générant notre onde de matière, nous décrirons notre milieu désordonné. Celui-ci est issu d'un champ de tavelures laser, ou *speckle*, dont nous verrons les princi-

pales propriétés. Nous présenterons ainsi les différentes configurations de désordre que nous avons pu utiliser, et nous donnerons un aperçu de notre approche de désordre bichromatique visant à dépasser la contrainte du temps de vie limité des atomes dans le désordre à laquelle nous avons été confrontés.

- **Chapitre 6 : Temps de diffusion élastique.** Ce chapitre se focalise sur la mesure du temps de diffusion élastique d'une onde de matière dans un potentiel désordonné optique. En suivant son évolution sur un large régime de paramètres, nous pourrions identifier le régime de diffusion faible pour lequel le temps de diffusion élastique est correctement décrit par l'approximation perturbative de Born. De plus, nous étudierons de manière quantitative la pertinence du critère de désordre faible $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$, et nous verrons que celui-ci dépend fortement de la nature du désordre considéré.
- **Chapitre 7 : Approche spectrale.** Dans ce dernier chapitre, nous tâcherons de décrire le comportement du temps de diffusion élastique à l'aide des fonctions spectrales. Nous verrons ainsi qu'une extension de l'approche perturbative ne permet pas d'étendre le domaine de validité de l'approximation de Born. De plus, nous verrons que l'approximation auto-consistante de Born, couramment utilisée, échoue à reproduire le comportement du temps de diffusion élastique dans un désordre de type speckle. Nous verrons donc que la connaissance fine des détails de la fonction spectrale est nécessaire pour décrire la dynamique d'une onde de matière dans un désordre speckle.

2. Phénomène de localisation d'Anderson

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire comment, lors de la propagation cohérente d'une onde dans un milieu désordonné, les interférences peuvent altérer la diffusion classique et engendrer le phénomène spectaculaire de *Localisation d'Anderson* dont nous donnerons les principales propriétés. Dans un second temps, nous présenterons succinctement les principaux systèmes utilisés pour l'investigation de la localisation d'Anderson, pour s'attarder plus particulièrement sur les expériences d'atomes froids. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une discussion de nos enjeux actuels, l'étude du régime critique de la transition d'Anderson avec des atomes froids, dont nous présenterons l'état de l'art.

2.1 Diffusion et interférences

Cette première section a pour but de rappeler succinctement les mécanismes microscopiques à l'œuvre lors de l'étude de la propagation d'une onde dans un milieu désordonné, et comment le phénomène d'interférence peut modifier les grandeurs microscopiques associées. En particulier, nous nous focaliserons sur l'arrêt de la diffusion en conséquence de ces interférences, la localisation d'Anderson.

2.1.1 Phénomène de diffusion

Le phénomène de diffusion macroscopique est un des phénomènes de transport les plus connus de la physique classique. Celui-ci permet par exemple de décrire de manière simple et unifiée la propagation de la chaleur dans un matériau homogène, l'homogénéisation de la concentration de particules dans un liquide ou encore le phénomène de résistance électrique.

Le phénomène macroscopique de diffusion provient, de manière générale, de la marche aléatoire de particules au sein de leur environnement. Avec cette approche, Drude a par exemple été le premier à calculer la résistivité électrique des matériaux en introduisant

un temps de relaxation microscopique basé sur des collisions élastiques entre les électrons, vecteurs du courant électrique, et les impuretés du matériau dans lequel ceux-ci se déplacent [5].

Cet exemple historique illustre le fait que certaines propriétés macroscopiques des matériaux sont reliées aux grandeurs microscopiques de la marche aléatoire associée. Ces dernières grandeurs sont des briques élémentaires de la propagation en milieu désordonné, dont nous restreindrons l'étude au cas des collisions élastiques entre les particules et le désordre. Parmi ces briques élémentaires, que nous présenterons dans la suite, nous retrouvons le coefficient de diffusion, le temps de transport, ou encore le temps de diffusion élastique, auquel nous porterons une attention particulière.

Temps de diffusion élastique

La quantité la plus naturelle permettant de caractériser de manière microscopique le phénomène de diffusion est le *temps de diffusion élastique* τ_s , qui correspond à la durée typique entre deux événements successifs de *collision élastique* avec les impuretés du milieu. Ce temps est l'équivalent temporel du *libre parcours moyen* l_s correspondant à la distance moyenne entre deux événements de diffusion microscopiques successifs, illustrée figure 2.1.a. Dans le cas d'une particule de masse m se déplaçant à une vitesse v_i , ces deux grandeurs sont reliées par

$$\tau_s = \frac{l_s}{v_i} = \frac{m l_s}{\hbar k_i}, \quad (2.1)$$

où k_i est le nombre d'onde de l'onde quantique associée à la particule (celui-ci est inchangé après chaque événement de collision en raison du caractère élastique).

Comme nous le verrons plus en détails dans les chapitres 6 et 7, le temps de diffusion élastique est une quantité qui dépend des détails microscopiques du système et peut être interprété comme le temps de vie d'une onde plane dans le désordre.

Temps de transport

Si la norme du vecteur vitesse (ou de manière équivalente du vecteur d'onde) reste inchangée au cours de la propagation, sa direction est modifiée à chaque événement de collision élastique. Comme nous le verrons plus en détails dans le chapitre 6, lors de la collision avec un diffuseur de taille caractéristique σ , l'onde peut être diffusée selon un angle typique $\theta_{\text{typ}} \sim 1/k_i\sigma$. La diffusion peut donc être *anisotrope*, en analogie avec la diffusion de Mie ou la diffraction en optique.

En considérant que la trajectoire d'une particule est composée de multiples collisions successives, il apparaît alors une seconde échelle de temps caractéristique, le *temps de transport* ou temps de Boltzmann τ_B , décrivant la durée nécessaire pour que la particule perde l'information de la direction initiale de sa vitesse.

On peut ainsi montrer que le temps de transport (et son analogue spatial, la *longueur de transport*) s'expriment en fonction du temps de diffusion élastique de la manière suivante [2] :

$$\tau_B = \frac{\tau_s}{1 - \langle \cos \theta \rangle} \quad \text{et} \quad l_B = \frac{l_s}{1 - \langle \cos \theta \rangle}, \quad (2.2)$$

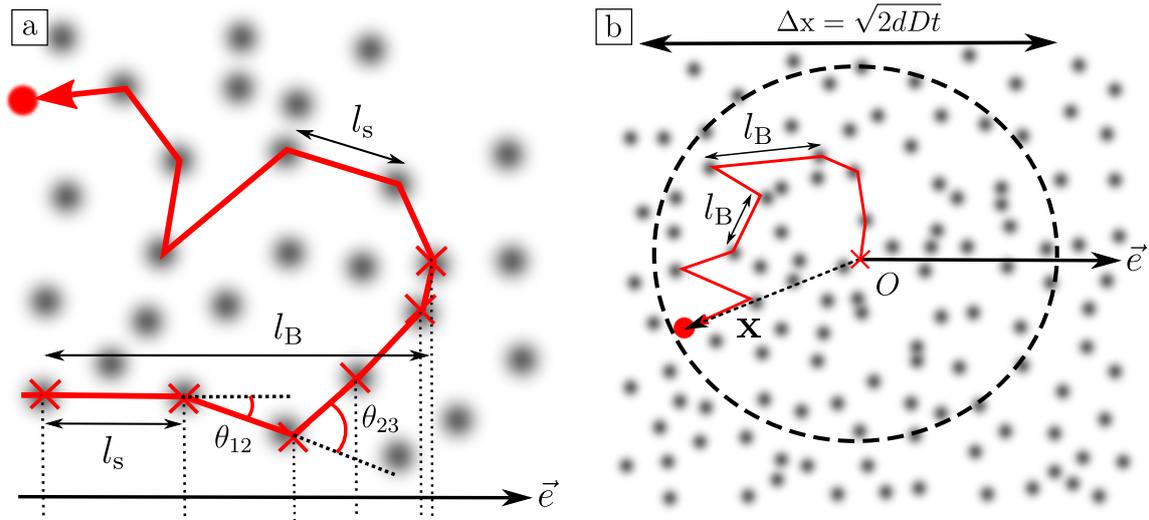


FIGURE 2.1 – **a** : Longueur de transport pour des collisions anisotropes. Dans le cas de diffusion fortement anisotrope vers l'avant, une unique collision élastique ne modifie que peu la direction de la vitesse d'une particule. Il faut donc un grand nombre de collisions successives pour que la direction de la vitesse d'une particule soit décorrélée de la direction initiale. En conséquence, le temps de transport est beaucoup plus grand que le temps de diffusion élastique. **b** : Mécanisme microscopique de la diffusion. Le mouvement d'une particule peut être considéré comme une marche aléatoire composée d'évènements de diffusion isotropes tous les τ_B entre lesquels la particule se déplace d'une distance $l_B = v\tau_B$ dans une direction aléatoire. L'étalement typique obtenu croît avec le temps selon $\Delta x = \sqrt{2dDt}$, avec D le coefficient de diffusion.

où $\langle \dots \rangle$ représente la valeur moyenne sur les différents évènements de diffusion, et θ l'angle de diffusion comme indiqué sur la figure 2.1.a.

On voit donc que dans le cas de collisions élastiques isotropes, $\tau_B = \tau_s$, montrant qu'une seule collision suffit à perdre l'information sur la direction initiale de la vitesse de la particule. En revanche, un grand nombre de collisions sont nécessaires pour obtenir une isotropisation de la direction des vitesses dans le cas d'évènements de diffusion anisotrope.

Coefficient de diffusion

Une fois que la particule a parcouru une distance l_B , on peut considérer qu'elle subit une diffusion isotrope. On assimile alors le mouvement des particules à une marche aléatoire pour laquelle les particules de vitesse v subissent des évènements de collision isotrope à chaque intervalle de temps τ_B pendant lesquels la particule parcourt une distance $l_B = v\tau_B$, comme illustré figure 2.1.b.

Ainsi, on peut déterminer l'étalement typique de la région explorée par la particule après N collisions¹,

$$\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle = 2Nl_B^2. \quad (2.3)$$

1. On peut montrer que la probabilité qu'une particule ne subisse pas de collision isotrope sur une distance x est donnée par $\mathcal{P}_x(x) = \frac{1}{l_B} e^{-x/l_B}$. La variance est alors obtenue par $\langle \Delta x^2 \rangle = \int_0^\infty dx x^2 \mathcal{P}_x(x) = 2l_B^2$. Les N collisions successives étant décorrélées, l'étalement typique de la région explorée est alors de $N\langle \Delta x^2 \rangle$.

En définissant le coefficient de diffusion par $\langle \Delta \mathbf{x}^2 \rangle = 2dDt$ et en faisant apparaître le temps $t = N\tau_B$, on montre ainsi que [2] :

$$D = \frac{vl_B}{d} = \frac{\hbar}{md}kl_B, \quad (2.4)$$

en faisant apparaître la quantité kl_B , qui sera essentielle dans la suite. Cette quantité peut être interprétée comme une mesure de la force du désordre comme nous aurons l'occasion de le voir dans la section 2.1.3 et dans le chapitre 6. Notamment, le régime de désordre faible est défini par la condition $kl_B \gg 1$, signifiant que la distance entre deux collisions isotropes successives est très grande devant la longueur d'onde.

Une conséquence de l'équation 2.4 est qu'une diminution de la longueur de transport entraîne une diminution du coefficient de diffusion. Ainsi, plus un système sera désordonné, plus le coefficient de diffusion sera petit.

2.1.2 Localisation faible

Si le mécanisme de marche aléatoire présenté permet de décrire un grand nombre de situations de diffusion classique, nous avons omis un ingrédient essentiel à la propagation d'ondes en milieu désordonné : la *cohérence*, ou encore la capacité qu'une onde a à interférer. En particulier, nous verrons que celle-ci peut avoir des conséquences dramatiques sur les propriétés de transport d'une onde en présence de désordre.

Mécanisme de localisation faible

Pour cela, intéressons-nous à la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ qu'une onde initialement à la position \mathbf{x} se retrouve à la position \mathbf{x}' après propagation dans le milieu désordonné. Dans la limite $kl_B \gg 1$, la trajectoire de l'onde peut être vue comme une marche aléatoire, où chaque trajectoire de diffusion est associée à une amplitude complexe de probabilité $|A_j|e^{i\phi_j}$, avec ϕ_j la phase de la trajectoire. Ainsi, la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est donnée par la somme de l'amplitude sur toutes les trajectoires possibles :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \overline{\left| \sum_j |A_j| e^{i\phi_j} \right|^2} = \overline{\sum_{j,l} |A_j| |A_l| e^{i(\phi_j - \phi_l)}} \\ &= \sum_j |A_j|^2 + \overline{\sum_{j \neq l} |A_j| |A_l| e^{i(\phi_j - \phi_l)}} , \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\overline{\dots}$ désigne la moyenne sur les différentes réalisations du désordre.

Le premier terme décrit le phénomène de diffusion classique, pour lequel la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est la somme des probabilités de chaque trajectoire.

Le second terme de l'équation 2.5 représente quant à lui les interférences dues aux différentes phases accumulées par les différents chemins de diffusion. Intuitivement, on peut considérer que la contribution de ce terme s'annule en moyennant sur les différentes réalisations du désordre, $\overline{e^{i(\phi_j - \phi_l)}} = 0$ ². Cependant, une étude attentive montre que certaines trajectoires résistent au moyennage sur les réalisations du désordre.

2. L'annulation de ce second terme est à l'origine du traitement classique de la propagation d'ondes dans le désordre tels que dans la théorie de Drude ou du transfert radiatif.

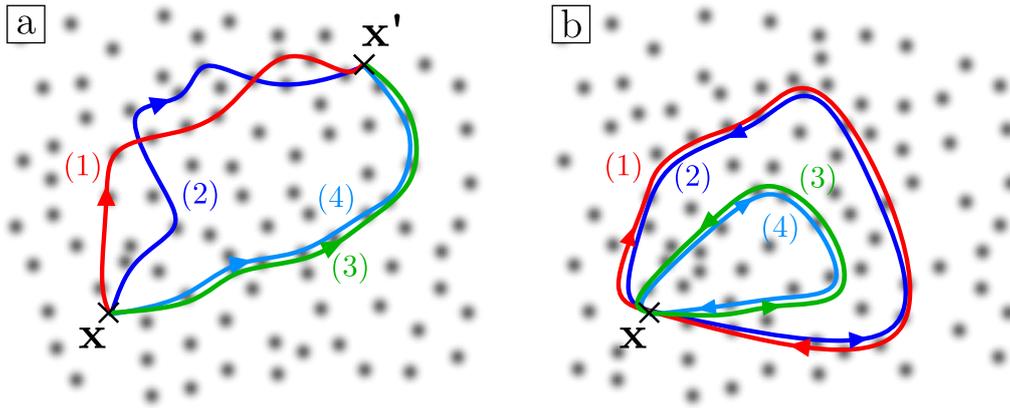


FIGURE 2.2 – **a : Participation des différents chemins de diffusion à la propagation de l'onde.** La probabilité d'arriver au point x' en partant du point x est donnée par l'ensemble des trajectoires les reliant. Dans le cas des chemins 1 et 2, la phase accumulée le long de ces trajectoires diffère, détruisant en moyenne le phénomène d'interférence entre ces chemins. **b : Mécanisme de localisation faible.** Les chemins de diffusion pour lesquels l'onde retourne à son point de départ se présentent sous forme de boucles qu'il est possible de parcourir dans les deux sens, comme illustré par les trajectoires 1 et 2, ou encore les trajectoires 3 et 4. Ces paires de trajectoires existent quelle que soit la réalisation du désordre.

En particulier, les trajectoires pour lesquelles l'onde se retrouve à son point de départ forment des boucles qu'il est possible de parcourir dans les deux sens, comme illustré figure 2.2. Par *symétrie par renversement du temps*, la phase accumulée le long de ces trajectoires est identique pour les deux sens de propagation. De plus, ces paires de trajectoires existent quelle que soit la réalisation du désordre, rendant ce processus d'interférences constructives robuste vis-à-vis du moyennage d'ensemble et $\overline{e^{i(\phi_j - \phi_i)}} = 1$. Ainsi, la probabilité qu'une onde retourne à son point de départ est le double de la prédiction classique :

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2 \sum_j \overline{|A_j|^2} . \quad (2.6)$$

Les interférences entre chemins de diffusion tendent alors à favoriser le retour de l'onde à son point d'origine, ralentissant ainsi la diffusion. Cet effet de *localisation faible*, commun à tout type d'onde, a été intensivement étudié aussi théoriquement que expérimentalement dans de nombreux domaines, tels qu'en physique des solides [2, 55], en optique [69, 126], avec des ondes sismiques [58] ou encore avec des atomes froids [48, 77].

Corrections de localisation faible

Comme le montre l'équation 2.6, le retour de l'onde à son point d'origine est favorisé à l'aide des interférences constructives qu'il existe entre des trajectoires symétriques par renversement du temps. Notamment, cet effet de localisation faible se traduit par la diminution du coefficient de diffusion par rapport à la prédiction classique 2.4, que l'on peut alors écrire sous la forme

$$D = D_0 - \delta D , \quad (2.7)$$

où D_0 est le coefficient de diffusion classique 2.4, et δD est la correction de localisation faible. Ces corrections de localisation faible dépendent des détails microscopiques du système, mais aussi de sa dimension d et de sa taille L . En estimant le poids des boucles de localisation faible, on peut montrer que [2] :

$$\delta D/D_0 = \begin{cases} \mathcal{O}(L/l_B) & \text{en 1D ,} \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{kl_B} \ln \frac{L}{l_B}\right) & \text{en 2D ,} \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{(kl_B)^2}\right) & \text{en 3D .} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ces relations témoignent ainsi de la forte influence de la dimension du système comme nous le verrons plus en détails dans la section suivante.

2.1.3 Suppression du transport : Localisation d'Anderson

Les corrections de localisation faible données par l'équation 2.8 font apparaître un comportement remarquable : sous certaines conditions, il est possible que la correction δD soit égale au coefficient de diffusion classique D_0 , entraînant ainsi la suppression du transport avec $D = 0$. Cet effet dit de *Localisation forte*, ou encore de *Localisation d'Anderson*, a été découvert en 1958³ par *Philip W. Anderson* s'intéressant alors à la diffusion d'une particule quantique dans un réseau désordonné dans le cadre de la physique de la matière condensée [4]. Cette inhibition du transport constitue la signature la plus spectaculaire de l'influence de la cohérence de l'onde lors de sa propagation dans un milieu désordonné. Ces travaux furent récompensés par le prix Nobel de physique en 1977, conjointement avec *Sir Nevill Francis Mott* et *John Hasbrouck van Vleck*.

Localisation d'Anderson et rôle de la dimension

Dans le régime *isolant*⁴ de localisation d'Anderson, la fonction d'onde reste localisée aux alentours du point d'origine et présente un profil exponentiel

$$|\psi(\mathbf{x})|^2 \propto e^{-x/\xi_{\text{loc}}} , \quad (2.9)$$

où ξ_{loc} correspond à la longueur typique sur laquelle l'onde s'étend, et est appelée *longueur de localisation*⁵.

Pour un système de taille suffisamment grande, les corrections de localisation faible δD de l'équation 2.8 en dimension 1 sont du même ordre que le coefficient de diffusion classique D_0 . On constate ainsi qu'en dimension 1, les processus de localisation faible sont très efficaces, rendant tous les états localisés. Il est possible d'estimer la longueur de localisation à l'aide des corrections de localisation faible en écrivant $\delta D(\xi_{\text{loc}}) \sim D_0$, d'où on déduit que $\xi_{\text{loc}} = 2l_B$ pour un système unidimensionnel. De fait, la localisation d'Anderson se manifeste même pour des désordres faibles, témoignant de son caractère spectaculaire.

3. Le phénomène de localisation d'Anderson a été découvert avant les processus de localisation faible.

4. Par opposition au régime *métallique* où le transport existe.

5. La longueur de localisation est définie comme la longueur caractéristique de décroissance des ailes de la fonction d'onde moyenne $\xi_{\text{loc}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{\ln |\psi(x)|^2}$.

De même, à deux dimensions, il apparaît des corrections de localisation faible 2.8 que tous les états sont localisés pour un système de taille suffisamment grande. En écrivant $\delta D(\xi_{\text{loc}}) \sim D_0$, on trouve ainsi que les états restent localisés mais sur des échelles de longueurs bien plus grandes que dans le cas unidimensionnel, de l'ordre de $\xi_{\text{loc}} \sim l_B \exp(kl_B)$. Pour des désordres faibles ($kl_B \gg 1$), la longueur de localisation excède généralement la taille du système. On parle ainsi de dimension *marginale* de la localisation d'Anderson.

Remarquablement, les corrections de localisation faible à trois dimensions ne dépendent pas de la taille du système, mais seulement de la force du désordre kl_B . Dans le cas d'un désordre faible ($kl_B \gg 1$), les boucles de localisation faible ne sont pas assez nombreuses pour changer de manière significative la dynamique diffusive de l'onde ($\delta D \ll D_0$). En revanche, la localisation d'Anderson persiste dans le cas d'un désordre fort où $kl_B \leq 1$, pour lequel la phase de l'onde varie peu entre deux événements successifs de diffusion.

Notons que l'analyse intuitive des propriétés de localisation en fonction de la dimension à l'aide des corrections de localisation faible présentée ici a été rigoureusement étudiée et validée dans le cadre de la *théorie d'échelle de la localisation d'Anderson*, développée à la fin des années 1970 [1].

Transition d'Anderson à trois dimensions

Il apparaît donc que le cas à trois dimensions présente un intérêt particulier. En effet, un même système peut, selon la force du désordre, présenter un comportement qui soit métallique ou isolant. Selon l'équation 2.8, on peut estimer que ce changement de comportement se manifeste lorsque

$$kl_B \sim 1, \quad (2.10)$$

condition connue sous le nom de *critère de Ioffe-Regel*.

Il est possible de donner une interprétation intuitive au critère de Ioffe-Regel en se focalisant sur la phase accumulée par l'onde entre deux événements successifs de diffusion. En effet, cette phase est de l'ordre de $\phi \sim kl_B$. Dans le régime de désordre fort, la phase de l'onde est donc similaire pour plusieurs événements de diffusion successifs, générant ainsi des interférences constructives entre les différentes ondes diffusées.

Plus particulièrement, il a été montré à l'aide la théorie d'échelle de la localisation d'Anderson qu'il existe une transition de phase du deuxième ordre entre états localisés et états diffusifs pour des systèmes à trois dimensions [1]. Le paramètre de contrôle de la transition étant l'énergie E de l'onde, la transition d'Anderson possède donc une énergie critique E_c appelée *seuil de mobilité*, comme illustré figure 2.3.a.

La transition d'Anderson est de plus caractérisée par deux exposants critiques ν et s , décrivant respectivement comment la longueur de localisation ξ_{loc} diverge pour des états localisés proches du seuil de mobilité et comment le coefficient de diffusion D s'approche de 0 pour des états diffusifs (voir figure 2.3.b) :

$$D \sim |E - E_c|^s \quad \text{et} \quad \xi_{\text{loc}} \sim |E - E_c|^{-\nu}. \quad (2.11)$$

Bien qu'aucune théorie ne puisse décrire exactement le régime critique de la transition d'Anderson à l'heure actuelle, plusieurs études numériques s'accordent sur les valeurs $s = \nu = 1.58$ des exposants critiques [30, 114, 115]. À ce jour, seule une expérience *indirecte* a été capable de mesurer ces exposants critiques (voir section 2.2.2) [62]

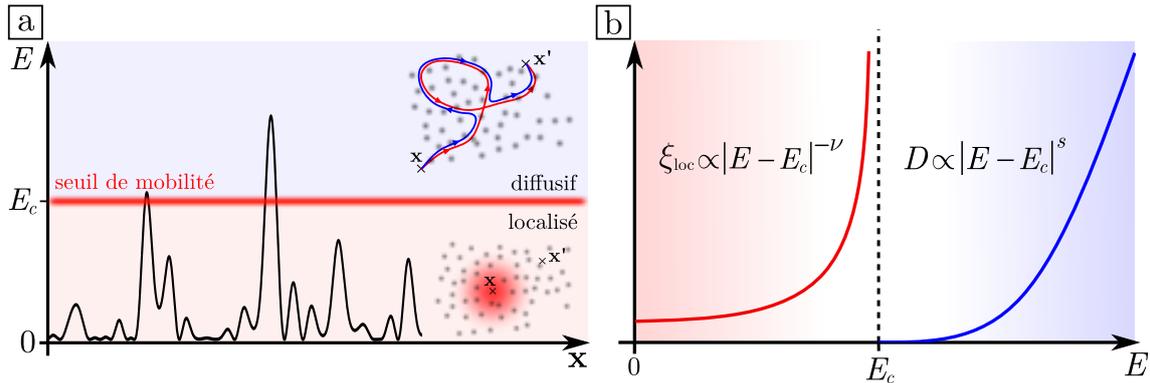


FIGURE 2.3 – **a : Transition d'Anderson.** À trois dimensions, il existe une transition de phase entre états diffusifs et états localisés. Pour une énergie supérieure à l'énergie critique de la transition, appelée seuil de mobilité, l'onde peut diffuser, tandis que pour une énergie inférieure au seuil de mobilité, l'onde est localisée. **b : Régime critique.** La transition d'Anderson est caractérisée par les exposants critiques s et ν , qui décrivent comment évoluent la longueur de localisation et le coefficient de diffusion aux alentours du seuil de mobilité. Dans le régime critique localisé, la longueur de localisation diverge en s'approchant du seuil de mobilité avec un exposant ν . Dans le régime critique diffusif, le coefficient de diffusion s'annule selon une loi de puissance d'exposant s .

2.2 Localisation des atomes froids

La localisation d'Anderson étant due au caractère ondulatoire du système étudié, celle-ci est donc commune à tout type d'onde, qu'elle soit classique (ondes lumineuses ou acoustiques) ou quantique (ondes électroniques, ondes de matière). Ce phénomène a donc été étudié expérimentalement à l'aide d'un grand nombre de systèmes dont nous allons brièvement présenter les principaux résultats ici, en mettant l'accent sur la transition métal-isolant.

2.2.1 Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson

L'étude expérimentale de la localisation d'Anderson constitue un domaine de recherche qui s'est énormément développé, débutant dans les années 70-80 avec des systèmes électroniques et faisant aujourd'hui encore l'objet de recherches intenses.

Localisation dans les systèmes électroniques

Les premières expériences furent menées à l'aide de systèmes électroniques, et purent démontrer des effets de localisation faible ainsi que des effets de localisation forte [73, 84]. Rapidement, les efforts se sont concentrés sur l'observation de la transition métal-isolant⁶ prédite par la théorie d'échelle de la localisation.

Cependant, une étude quantitative de la transition s'est révélée ardue en raison de la complexité de ces systèmes. En particulier, la présence d'interactions coulombiennes entre les

6. Cette dénomination prend tout son sens dans les systèmes électroniques : les expériences menées correspondent à des mesures de conductivité.

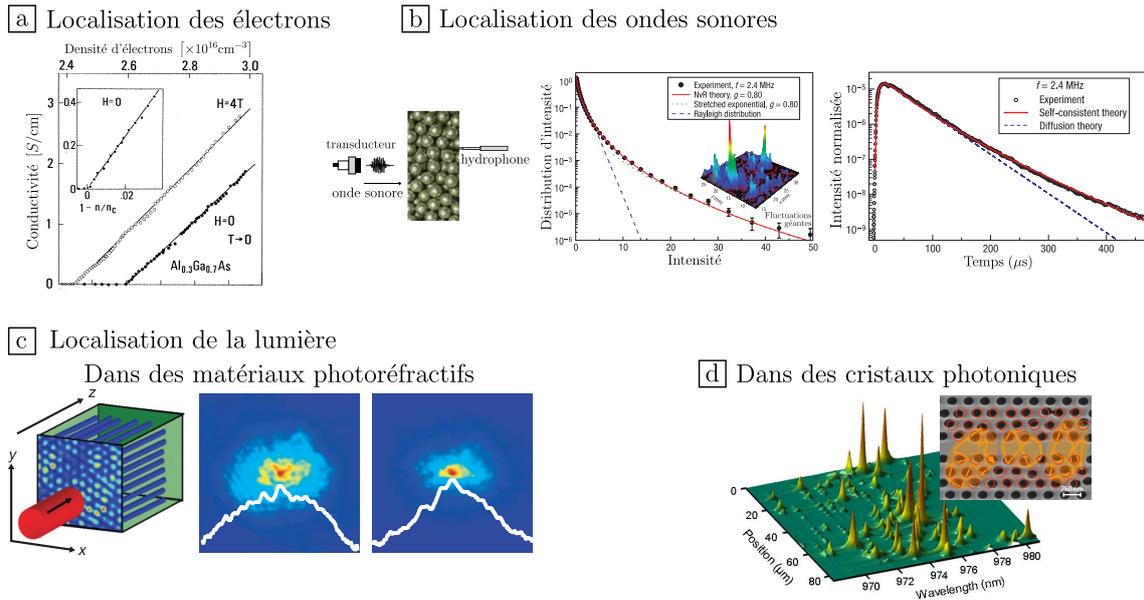


FIGURE 2.4 – **Etudes expérimentales de la localisation d'Anderson.** **a** : A basse température, un métal peut devenir isolant à cause du désordre, sa conductivité s'annulant alors. Cette transition peut être atteinte en diminuant la densité d'électrons. Figure tirée de [50]. **b** : La localisation d'Anderson d'ondes élastiques dans un réseau désordonné de billes d'aluminium peut être étudiée à l'aide d'un hydrophone après sa propagation. Il est possible de relever la distribution d'intensité de l'onde ainsi que son profil temporel qui présentent des signatures de la localisation d'Anderson. Figures tirées de [42]. **c** et **d** : La localisation de la lumière peut être étudiée à l'aide de plusieurs systèmes, tels que des matériaux photoréfractifs composés d'un réseau désordonné de guides d'ondes (**c**, figure tirée de [105]) ou encore dans des cristaux photoniques (**d**, figure tirée de [99]).

électrons modifie profondément les propriétés de localisation, et rend délicate la distinction expérimentale entre la transition métal-isolant liée au désordre (transition d'Anderson) et la transition métal-isolant liée aux interactions (transition de Mott). Ces effets sont particulièrement marqués par la comparaison entre les exposants critiques mesurés ($\nu \sim 1$ pour [109]) et ceux estimés à l'aide de simulations numériques ($\nu \sim 1.58$). Notons tout de même que de nouvelles expériences rapportent l'observation de la localisation d'Anderson à l'aide systèmes électroniques [110, 129].

Localisation dans les systèmes classiques

L'utilisation des ondes classiques s'est alors imposée comme étant un moyen de réaliser des systèmes mieux contrôlés que dans le cadre de la matière condensée. Les premières signatures de la localisation d'Anderson ont été obtenues dans les années 90 avec des ondes ultrasonores [122], des ondes mécaniques de flexion [127], des micro-ondes [34] ainsi que des ondes lumineuses [125].

Cependant, ces premières expériences s'appuyaient sur la décroissance exponentielle de l'intensité de l'onde pour analyser leurs résultats. Leur interprétation fut controversée en raison de l'existence d'autres phénomènes présentant la même signature, en particulier l'absorption qui présente aussi une décroissance exponentielle de l'intensité de l'onde comme

décrit par la loi de Beer-Lambert [104]. Depuis, d'autres signatures ont été exploitées telle que la dynamique de l'onde en régime pulsé [123] ou encore les fluctuations géantes de transmission [80] afin d'observer sans ambiguïté la localisation d'Anderson.

Aujourd'hui encore, la difficulté expérimentale s'accroît fortement en augmentant la dimension du système. En particulier, augmenter le pouvoir diffusant du milieu à trois dimensions afin d'atteindre le critère de Ioffe-Regel $kl_B \sim 1$ tout en s'affranchissant de l'absorption reste un tour de force expérimental. Ainsi, la seule observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions faisant consensus a été réalisée au Canada dans le groupe de J. Page à l'aide d'ondes acoustiques se propageant dans des billes d'aluminium [42].

Notons finalement que la localisation à trois dimensions d'ondes lumineuses fait l'objet de recherches intenses très débattues. Enfin, une récente étude numérique prédit l'absence de la localisation d'Anderson à trois dimensions dans le cas d'ondes lumineuses en raison de leur caractère vectoriel [112].

2.2.2 L'approche des atomes froids

Depuis le milieu des années 2000, une nouvelle plateforme participe à l'étude de la physique du désordre : les atomes ultra-froids. Ces systèmes, utilisés en interférométrie atomique et pour de la simulation quantique, sont bien connus pour leurs propriétés de cohérence sous forme de *condensats de Bose-Einstein*. Ceux-ci présentent un degré de contrôle inédit et offrent des possibilités expérimentales complexes qu'il est impossible d'obtenir à l'aide d'autres systèmes.

En effet, les expériences d'atomes ultra-froids présentent un grand nombre d'avantages : il est possible d'imager la fonction d'onde des atomes aussi bien dans l'espace réel grâce à une imagerie *in-situ* que dans l'espace des vitesses à l'aide d'une imagerie par *temps de vol*. De plus, les atomes ultra-froids ne présentent pas d'absorption, et dépassent ainsi les difficultés des expériences pionnières d'observation de la localisation d'Anderson. Enfin, de tels systèmes offrent un vaste contrôle des paramètres microscopiques, de l'onde comme du désordre en passant par la dimension. Les atomes ultra-froids apparaissent alors comme une plateforme idéale pour étudier la physique du désordre.

Atomes ultra-froids et désordre

Il existe différentes méthodes pour générer un désordre sur les atomes. Parmi les plus utilisées on retrouve les champs de tavelures optiques, ou *speckle*, et les réseaux bichromatiques pour lesquels un réseau de faible amplitude vient moduler de manière quasi-aléatoire le réseau principal (voir figure 2.5). Notons aussi le développement récent de désordres générés à l'aide de modulateurs spatiaux de lumière ou de matrices de micro-miroirs, permettant de réaliser des profils d'illumination arbitraires.

Toutes ces façons de réaliser un désordre pour les atomes possèdent un point commun : ils sont générés à l'aide de champs lumineux et possèdent donc une longueur typique de variation, ou *longueur de corrélation* σ , généralement de l'ordre du micromètre. L'existence de cette longueur typique impose une température critique pour le système présente un comportement quantique. En particulier, les effets quantiques associés au comportement ondulatoire de la matière sont attendus lorsque la longueur de *de Broglie* est plus grande

que la longueur de corrélation :

$$\lambda_{\text{dB}} \geq \sigma \quad \text{soit} \quad T_{\text{typ}} \leq \frac{\hbar^2}{k_{\text{B}} m \sigma^2} \sim \text{quelques nanokelvins.} \quad (2.12)$$

L'observation d'effets quantiques en présence de désordre nécessite donc des températures extraordinairement basses qui sont typiquement obtenues avec des *condensats de Bose-Einstein*.

Localisation d'Anderson d'ondes atomiques

C'est en 2008 qu'a été observée la localisation d'Anderson d'ondes de matière simultanément dans deux expériences illustrées sur la figure 2.5. L'expérience de Billy et al. [10], menée au Laboratoire Charles Fabry à Palaiseau, rapporte l'arrêt de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb dilué et plongé dans un guide d'onde optique unidimensionnel ainsi que dans un désordre de type speckle. De plus, la mesure du profil de densité atomique montre la décroissance exponentielle 2.9 de la fonction d'onde localisée, comme représenté figure 2.5.a.

La seconde expérience, réalisée par Roati et al. [96] au LENS à Florence, rapporte aussi l'arrêt de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein de ^{39}K placé dans un potentiel unidimensionnel composé d'un réseau bichromatique⁷ représenté figure 2.5.b. L'utilisation d'atomes de ^{39}K permet de contrôler les interactions inter-atomiques à l'aide d'une résonance de Feshbach et constitue la grande force de cette expérience.

Ces expériences ont ainsi démontré la pertinence des atomes ultra-froids pour l'étude des systèmes désordonnés. Ces résultats novateurs ont par suite déclenché de nombreux efforts expérimentaux pour l'étude de la localisation d'Anderson dans des systèmes de dimensions plus élevées, $d = 2$ et notamment en dimension $d = 3$ dans le but d'étudier la transition métal-isolant d'Anderson.

Localisation d'Anderson à deux dimensions

L'observation expérimentale de la localisation d'Anderson à deux dimensions constitue un véritable tour de force se heurtant à deux obstacles majeurs. Comme nous avons vu précédemment, la longueur de localisation ξ_{loc} dépend de manière exponentielle de la force du désordre $k l_{\text{B}}$, et requiert l'utilisation de systèmes particulièrement larges⁸. L'observation d'effets quantiques ($\lambda_{\text{dB}} > \sigma$) nécessite alors que les potentiels optiques désordonnés possèdent une grande résolution optique sur l'ensemble du système.

Une seconde contrainte expérimentale forte provient de la distinction entre localisation d'Anderson, d'origine quantique, et le piégeage classique. Si les désordres de type speckle sont adaptés pour des systèmes unidimensionnels et tridimensionnels [89], ceux-ci présentent un seuil de percolation classique particulièrement élevé en deux dimensions [72]. L'utilisation

7. L'arrêt de l'expansion du paquet d'onde rapporté par les auteurs ne correspond à proprement parler de localisation d'Anderson, le réseau bichromatique ne constituant pas un système réellement désordonné. Le modèle d'Aubry-André décrivant ce système n'appartient pas à la même classe d'universalité que le modèle d'Anderson, et présente notamment une transition de phase en dimension 1 [101].

8. Les dimensions nécessaires sont plus grandes que $100\mu\text{m} \times 100\mu\text{m}$, correspondant à des systèmes de grande taille pour des atomes ultra-froids [124].

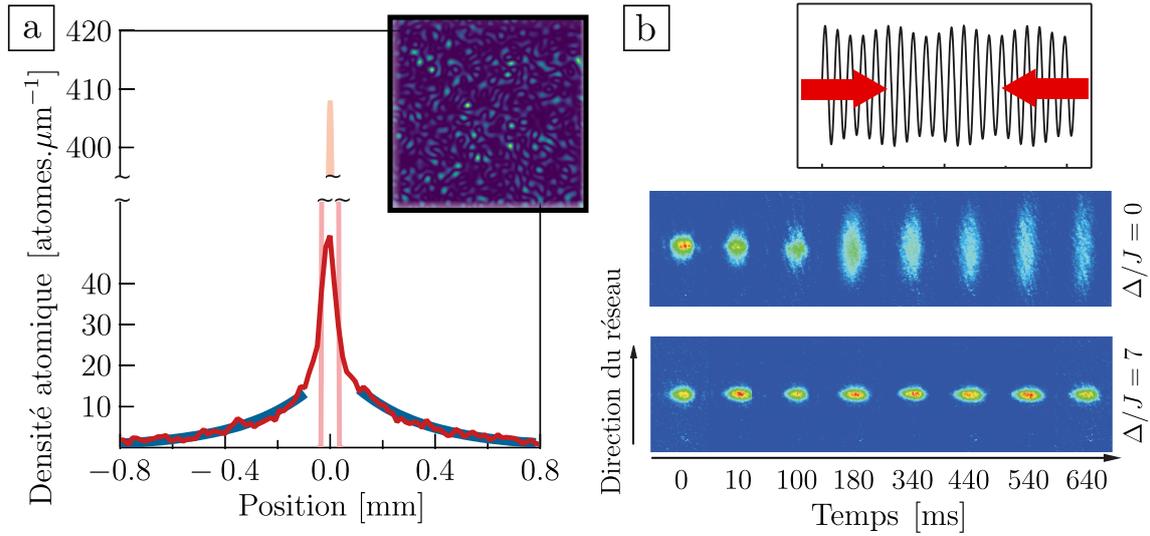


FIGURE 2.5 – **Premières expériences de localisation unidimensionnelle.** **a** : Localisation d'Anderson unidimensionnelle d'ondes de matière dans un speckle. La densité atomique est mesurée après une seconde d'expansion dans un guide d'onde unidimensionnel et dans un potentiel de type speckle. Les ailes du profil sont caractérisées par une décroissance exponentielle (traits bleus). Le profil rose correspond à la densité atomique initiale. Figure tirée de [10]. **b** : Localisation d'ondes atomiques dans un réseau bichromatique unidimensionnel. Un condensat de Bose-Einstein s'étend dans l'espace libre (image du haut), tandis que son expansion est arrêtée lorsque celui-ci est placé dans un potentiel quasi-périodique (image du bas). Figure tirée de [96].

d'un désordre fort, nécessaire pour l'observation de la localisation d'Anderson à deux dimensions, ne permet alors pas de distinguer cette dernière de la percolation classique.

Ce n'est que récemment (2020) que ces contraintes ont pu être contournées grâce à l'utilisation d'un désordre optique généré par un modulateur spatial de lumière, permettant de contrôler le seuil de percolation. White et al. [124] rapportent ainsi l'observation de la localisation d'Anderson en deux dimensions avec des atomes ultra-froids à l'aide d'une expérience de transmission entre deux réservoirs connectés par un canal désordonné. Les auteurs interprètent l'allure exponentielle de la fonction d'onde dans le canal désordonné comme une signature de la localisation d'Anderson, et étudient le comportement de la longueur de localisation associée en fonction de la densité de diffuseurs dans le canal, ainsi que pour plusieurs géométries de ce dernier.

Localisation d'Anderson en trois dimensions

C'est principalement vers l'étude de la localisation d'Anderson à trois dimensions et plus particulièrement vers l'étude de la transition de phase que ce se sont concentrés les efforts expérimentaux après l'observation de la localisation d'Anderson dans des systèmes unidimensionnels. Notamment, l'étude expérimentale du seuil de mobilité et plus généralement du régime critique de la transition d'Anderson reste un sujet de recherche d'actualité [87].

Trois expériences rapportent l'observation de la localisation d'Anderson à trois dimen-

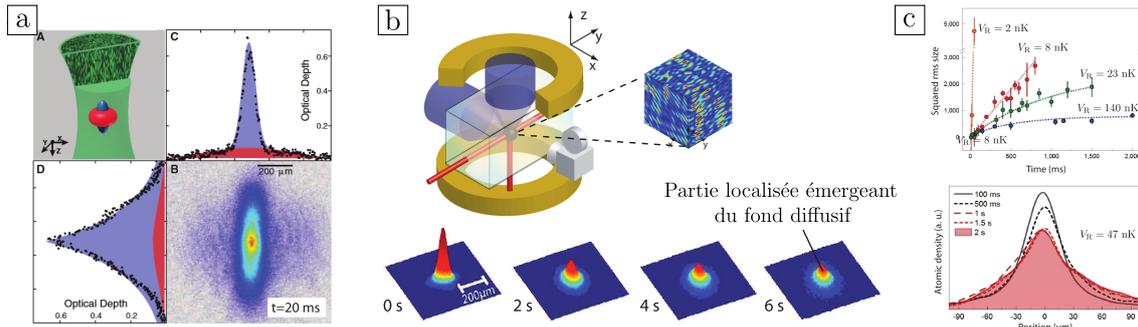


FIGURE 2.6 – Observation de la localisation d’Anderson à trois dimensions avec des atomes ultra-froids. **a** : Localisation d’une partie du nuage de ^{40}K à temps très court. Une partie localisée émerge du centre d’un fond balistique. Figure tirée de [54]. **b** : Observation à temps très long d’une partie localisée du nuage de ^{87}Rb qui se démarque d’un fond très peu diffusif dans un désordre quasi-isotrope. Figure tirée de [47]. **c** : Localisation d’un nuage de ^{39}K complet dont les interactions sont annulées à l’aide d’une résonance de Feshbach. Figure tirée de [107].

sions. Le groupe de B. de Marco à Urbana Champaign a ainsi utilisé un gaz fermionique de ^{40}K dans un potentiel speckle anisotrope [54]. Simultanément, l’équipe de Palaiseau a observé un arrêt de l’expansion d’une partie du nuage d’atomes de ^{87}Rb plongé dans un désordre isotrope généré par la superposition cohérente de deux speckles, pour des durées d’observation allant jusqu’à 6 s [47]. Enfin, une expérience récente menée au LENS dans l’équipe de G. Modugno rapporte l’observation de la localisation complète du nuage atomique de ^{39}K , dont les interactions ont été annulées à l’aide de résonances de Feshbach [107].

Ces trois expériences constituent une étape capitale de l’étude de la localisation d’Anderson avec des atomes froids. En dépit de ce premier succès, ces expériences n’ont cependant pas permis d’adresser l’étude du régime critique et définissent ainsi le contexte de cette thèse, comme nous le verrons plus en détails dans la section 2.3.1.

Localisation dynamique

Notons enfin l’existence d’un autre système permettant d’étudier la localisation d’Anderson à l’aide d’atomes froids, basé sur le phénomène de *localisation dynamique*. Développé expérimentalement dans les années 1990 [71], le système de *rotateurs forcés* (ou *kicked rotors* en anglais) repose sur un mapping entre un rotateur pulsé périodiquement et un modèle d’Anderson. Celui-ci se focalise sur l’apparition du phénomène de localisation dans l’espace des vitesses [59].

En effet, à l’aide d’une onde stationnaire pulsée périodiquement, équivalente à une transmission périodique d’impulsion aléatoire, on peut décrire le mouvement des atomes soumis à ces *kicks* comme une marche aléatoire dans l’espace des vitesses. Cependant, la richesse de ce système réside dans sa dynamique quantique, grâce à laquelle le phénomène de localisation apparaît de manière équivalente à celle dans l’espace réel et présente une localisation exponentielle de la distribution de vitesses des atomes illustrée figure 2.7.

L’extension du kicked rotor unidimensionnel à des dimensions supérieures a pu se faire

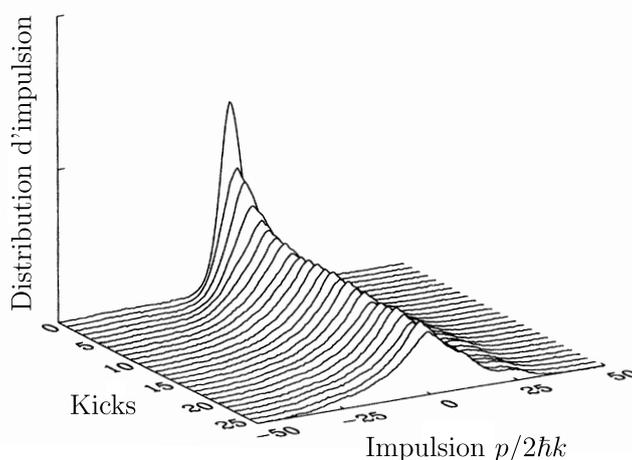


FIGURE 2.7 – **Localisation dynamique d’atomes froids.** Un nuage d’atomes de sodium est soumis à des kicks périodiques, induisant une marche aléatoire dans l’espace des impulsions. Après un certain nombre de kicks, la distribution d’impulsion se fige et présente une décroissance exponentielle. Figure tirée de [71].

à l’aide d’une modulation temporelle des kicks [18]. Le cas bidimensionnel $d = 2$ a fait l’objet d’une étude publiée en 2015 dans laquelle les auteurs témoignent de la dépendance exponentielle de la longueur de localisation en fonction de la force du désordre kl_B [66]. Le *kicked rotor quasi-périodique* tridimensionnel $d = 3$ possède une transition de phase métal-isolant d’Anderson, confortée par l’existence d’un mapping [60] ainsi que par des études numériques [61]. L’expérience de Chabé et al. [19] réalisée à Lille rapporte ainsi une valeur de $\nu = 1.63 \pm 0.05$ de l’exposant critique de la transition de phase associée, tout en vérifiant l’universalité de celle-ci [62]. Cette mesure constitue aujourd’hui encore la seule mesure expérimentale des exposants critiques de la transition d’Anderson compatible avec les estimations numériques [115].

2.3 Vers l’étude du régime critique

Nous avons vu dans la section précédente que la plateforme des atomes ultra-froids constitue un outil idéal pour étudier la problématique de la propagation cohérente d’ondes dans des milieux désordonnés. En revanche, malgré l’observation de la localisation d’Anderson dans des systèmes unidimensionnels et tridimensionnels, l’étude à énergie résolue de la transition d’Anderson reste un défi de taille auquel les trois expériences menées n’ont pas pu apporter de réponse.

Dans cette partie, nous allons donc décrire les limitations des différentes expériences afin de dresser un état de l’art de l’étude de la transition d’Anderson avec des atomes ultra-froids. Enfin, nous nous pencherons brièvement sur l’approche suivie par notre équipe pour tenter de dépasser ces limitations, approche qui sera plus amplement détaillée dans le chapitre 7.

2.3.1 Etat de l'art de l'étude de la transition d'Anderson avec des atomes ultra-froids

Comme nous allons le voir plus en détails, les trois expériences de localisation d'Anderson d'onde de matière à trois dimensions menées jusqu'à présent ont pour similarité d'estimer indirectement le seuil de mobilité E_c . Si la détermination précise du seuil de mobilité constitue une première étape cruciale vers l'étude du régime critique de la transition d'Anderson, celle-ci n'en reste pas moins un véritable défi expérimental. Il est donc important de présenter les résultats de ces premières expériences afin de contextualiser les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse.

Expérience d'Urbana Champaign

La première expérience à donner une estimation du seuil de mobilité à l'aide d'atomes ultra-froids a été menée en 2011 à Urbana Champaign aux États-Unis [54]. Celle-ci se base sur l'expansion d'un nuage thermique de fermions de ^{40}K polarisés⁹ dans un speckle répulsif anisotrope. L'analyse des auteurs repose sur l'observation d'une double structure du profil de densité atomique pour des temps de propagation $t \geq 20$ ms, interprétée comme la coexistence d'états localisés et d'états diffusifs. En définissant la fraction localisée comme le rapport entre le nombre d'atomes localisés et le nombre total d'atomes $f_{\text{loc}} = N_{\text{loc}}/(N_{\text{loc}} + N_{\text{D}})$, il est possible d'estimer le seuil de mobilité en remarquant que seuls les atomes d'énergie inférieure à E_c restent localisés :

$$f_{\text{loc}} = \int_{-\infty}^{E_c} dE \mathcal{D}_{\text{E}}(E) , \quad (2.13)$$

où $\mathcal{D}_{\text{E}}(E)$ est la distribution d'énergie des atomes dans le potentiel désordonné.

Afin de déterminer la distribution d'énergie $\mathcal{D}_{\text{E}}(E)$, les auteurs font l'hypothèse que l'allumage lent du désordre sur les atomes ne modifie pas le lien existant entre l'impulsion des atomes, donnée par la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann, et leur énergie. Ce lien peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{D}_{\text{E}}(E) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} A(\mathbf{k}, E) \mathcal{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) , \quad (2.14)$$

en introduisant la *fonction spectrale* $A(\mathbf{k}, E)$, représentant la probabilité qu'une particule d'impulsion \mathbf{k} ait une énergie E en présence de désordre. Cette quantité est d'une importance capitale pour l'étude de la localisation d'Anderson avec des atomes froids. Elle sera étudiée plus en détails dans le chapitre 7.

L'hypothèse des auteurs selon laquelle le désordre n'affecte pas la distribution d'énergie des atomes revient à assimiler la fonction spectrale à une distribution infiniment fine :

$$A(\mathbf{k}, E) = \delta \left(E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \right) . \quad (2.15)$$

De nombreuses critiques ont été formulées quant à l'interprétation des données expérimentales [75]. Notamment, les temps de propagation très courts dans le désordre ne

9. Le ^{40}K est une espèce fermionique dont les collisions dans l'onde s sont supprimées si les atomes se trouvent dans le même état de spin. On peut ainsi négliger les interactions entre atomes.

permettent pas de conclure quant à l'observation à proprement parler d'états localisés, indissociables d'états très lentement diffusifs. La fraction localisée extraite et le seuil de mobilité sont donc largement surestimés. De plus, l'observation de la localisation d'Anderson à trois dimensions requiert l'utilisation d'un désordre fort (comme spécifié par le critère de Ioffe-Regel $kl_B \sim 1$) pour lequel la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ est profondément modifiée par rapport au régime de désordre faible, comme nous le verrons dans le chapitre 7. Les résultats de cette étude ne permettent donc pas de conclure quant à la mesure du seuil de mobilité [87].

Expérience de Palaiseau

La seconde expérience, réalisée à Palaiseau en 2012, se focalise sur l'évolution temporelle de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb dilué dans la superposition cohérente de deux speckles croisés afin d'obtenir un désordre quasi-isotrope [47]. Le suivi de la densité atomique $n(\mathbf{x}, t)$ au cours de l'expansion jusqu'à 6 s témoigne d'une double structure pour les désordres les plus forts, identifiée à l'existence d'une partie localisée et d'un fond diffusif, comme illustré figure 2.8 :

$$n(\mathbf{x}, t) = f_{\text{loc}} n_i(\mathbf{x}) + n_{\text{D}}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.16)$$

L'estimation de la fraction localisée f_{loc} est réalisée en suivant la densité atomique au centre du nuage¹⁰, ajustée par l'asymptote $f_{\text{loc}} + \chi/t$, qui tient compte de la contribution de la partie diffusif aux temps longs¹¹, voir figure 2.8.c. L'utilisation d'une telle limite asymptotique permet ainsi de s'affranchir des temps de propagation finis.

Contrairement à l'expérience d'Urbana Champaign, le désordre est allumé brusquement, projetant ainsi l'état initial sur les différents états propres du désordre. Étant donnée l'énergie très faible des atomes après dilution devant l'amplitude du potentiel ($\mu \ll V_{\text{R}}$), l'onde de matière initiale peut être considérée comme une onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$ ¹², c'est-à-dire que la distribution d'impulsion des atomes peut s'écrire $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$. À l'aide de l'équation 2.14, on trouve que la distribution d'énergie des atomes dans le désordre est donnée par

$$\mathcal{D}_{\text{E}}(E) = A(\mathbf{k} = 0, E) , \quad (2.17)$$

c'est-à-dire la fonction spectrale pour des atomes d'impulsion nulle. Celle-ci est évaluée numériquement. Une fois la distribution d'énergie des atomes dans le désordre connue, il est possible d'estimer le seuil de mobilité à l'aide de l'équation 2.13 [90].

Si l'observation de l'arrêt de l'expansion d'une partie du nuage est directe dans cette expérience, la détermination du seuil de mobilité est quant à elle très indirecte. En effet, celle-ci repose sur deux calculs intermédiaires : le calcul numérique de la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ et la détermination expérimentale de f_{loc} .

10. Il s'agit en réalité de la densité atomique intégrée suivant la direction d'imagerie, voir section 3.3.4.

11. Le comportement $n_{\text{D}}(0, t) \propto 1/t$ de la densité de la partie diffusif au centre est due à l'intégration suivant l'axe d'imagerie.

12. L'impulsion maximale des atomes est de l'ordre de $k \sim \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$, la limite $\mu \ll V_{\text{R}}$ permet donc de négliger l'énergie cinétique des atomes devant l'énergie potentielle du désordre.

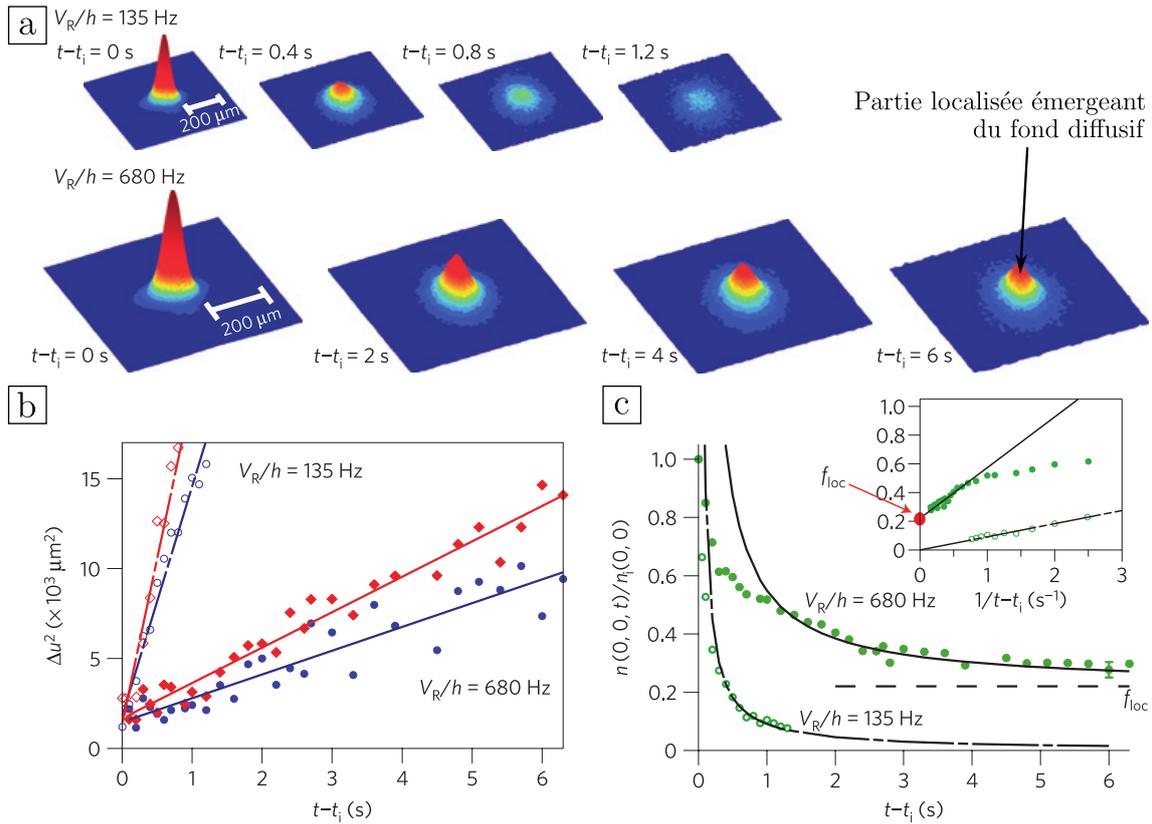


FIGURE 2.8 – **Expérience de Palaiseau.** **a** : Images expérimentales du nuage de ^{87}Rb après propagation dans le désordre. Pour un désordre de 135 Hz, le nuage a une dynamique de diffusion. Pour un désordre de 680 Hz, une partie localisée apparaît parmi un fond diffusif lent. **b** : Évolution temporelle de la taille rms du nuage selon deux axes. La dynamique temporelle linéaire permet de mettre en évidence la composante diffusive du nuage. L'augmentation de l'amplitude du désordre ralentit l'évolution de la composante diffusive du nuage. **c** : Évolution de la densité atomique au centre du nuage $n(0,t)$. Le régime asymptotique (aux temps longs) permet de déterminer la fraction localisée f_{loc} . Figure tirée de [47].

Expérience de Florence

La troisième expérience, réalisée en 2015 à Florence, est la dernière expérience en date cherchant à déterminer le seuil de mobilité avec des atomes ultra-froids [107]. Si celle-ci partage de nombreuses similarités avec les expériences précédentes, telles que l'utilisation d'un désordre de type speckle répulsif et l'estimation du seuil de mobilité à l'aide de la mesure de la fraction localisée, cette expérience présente des avantages considérables par rapport à ses prédécesseurs en accordant une attention particulière à la distribution d'énergie des atomes dans le désordre.

Notamment, un avantage de cette expérience est d'utiliser des atomes de ^{39}K , bosons dont les interactions sont contrôlables à l'aide d'une résonance de Feshbach. Ainsi, il est possible de charger "quasi-adiabatiquement" les atomes dans le désordre, rendant leur distribution d'énergie beaucoup plus fine que pour les expériences précédentes, utilisant des fermions ou un allumage rapide du désordre. Cette procédure permet de charger les atomes majoritairement dans des états de basses énergies du désordre, illustré figure 2.9.a.I.

En conséquence du processus de chargement quasi-adiabatique, le désordre est ici allumé progressivement et la distribution d'impulsion du nuage $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$ n'est plus associée à l'onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$. Ainsi, la distribution d'énergie des atomes après chargement dans le désordre est donnée par l'équation 2.14, où la distribution d'impulsion est mesurée expérimentalement par la méthode de temps de vol et la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ est calculée numériquement. La détermination de la distribution d'énergie nécessite donc de calculer la fonction spectrale pour toutes les impulsions du nuage, dont une représentation est donnée figure 2.9.b.

Une seconde originalité de l'expérience de Florence réside dans sa manière de contrôler l'énergie des atomes chargés dans le désordre. À l'aide d'une modulation de l'amplitude du potentiel pendant une durée $T = 500\text{ms}$, les auteurs transfèrent une partie contrôlée des atomes initialement dans un état de basse énergie E vers un état de plus haute énergie $E + \hbar\omega$, avec ω la fréquence de modulation. La distribution d'énergie des atomes après transfert peut alors s'exprimer

$$\mathcal{D}_{\text{E}}(E, \hbar\omega) = (1 - \alpha)\mathcal{D}_{\text{E}}(E) + \alpha\mathcal{D}_{\text{E}}(E - \hbar\omega) , \quad (2.18)$$

avec α la probabilité de transfert supposée indépendante de E et ω dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire. Le premier terme correspond à la distribution d'énergie des atomes non transférés, tandis que le second terme correspond à la contribution de la partie excitée. Une illustration d'une telle distribution d'énergie est proposée figure 2.9.c.

Avec ce procédé, certains atomes sont excités dans des états d'énergie E supérieure au seuil de mobilité E_c . La fraction localisée est alors obtenue en détectant les atomes restés localisés après 500 ms supplémentaires de propagation dans le désordre, voir figure 2.9. Enfin, le seuil de mobilité est déterminé à l'aide de la fraction localisée par le biais de l'équation 2.13 de manière identique aux expériences précédentes.

L'expérience de Florence se caractérise donc par une nouvelle approche à la mesure du seuil de mobilité. En particulier, l'attention portée à la sélection de l'énergie des atomes marque le début de l'étude de la transition d'Anderson à *énergie résolue*. Néanmoins, cette expérience comporte des limitations. Notamment, la détermination du seuil de mobilité reste indirecte : il est nécessaire de calculer numériquement la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ ainsi que la population transférée.

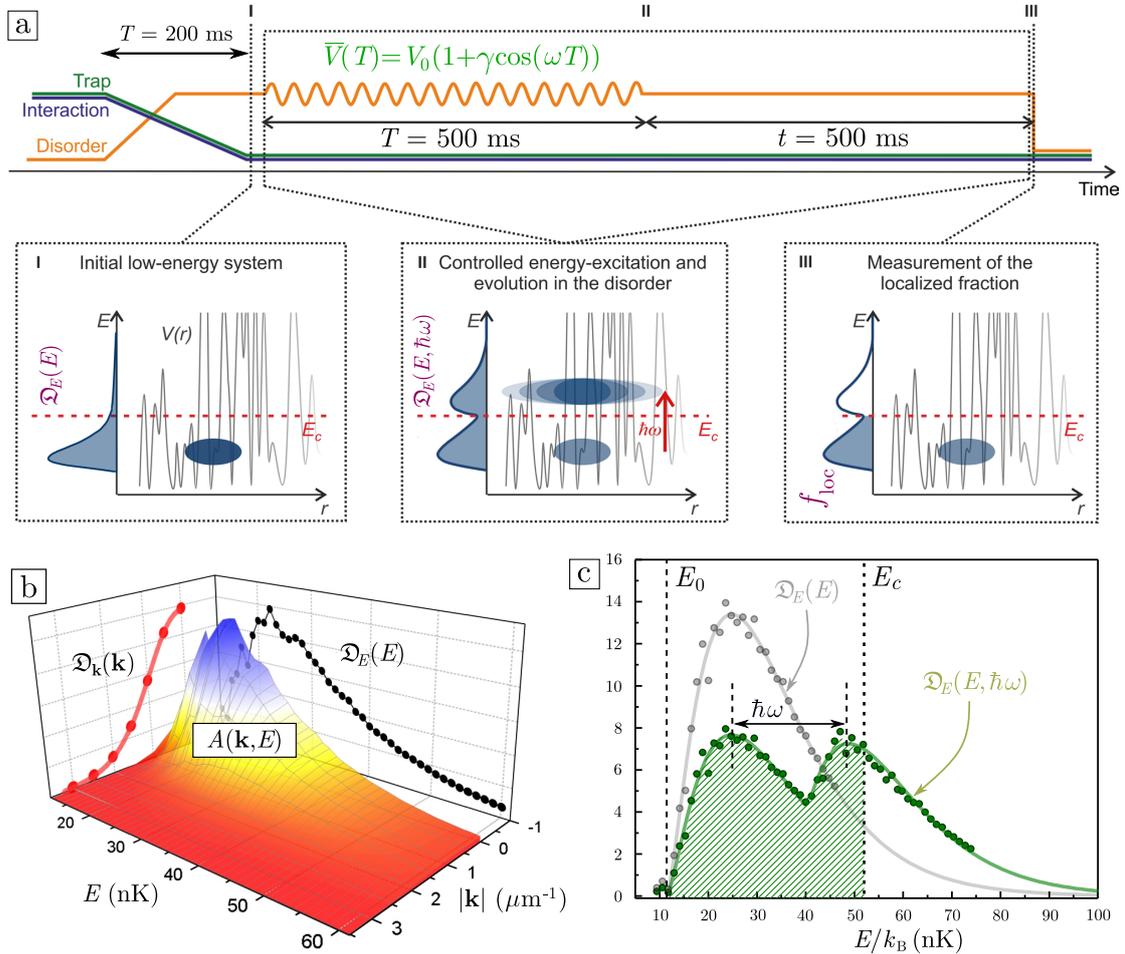


FIGURE 2.9 – **Expérience de Florence.** **a** : Procédure de mesure du seuil de mobilité. Un état de basse énergie est chargé dans le désordre. Une modulation de l'amplitude du désordre permet de transférer une énergie $\hbar\omega$ à certains atomes. La propagation dans le désordre permet d'éliminer la partie diffuse, révélant ainsi la fraction localisée. **b** : Fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ calculée numériquement. Celle-ci permet de calculer la distribution d'énergie $\mathcal{D}_E(E)$ des atomes dans le désordre à partir de la distribution d'impulsion $\mathcal{D}_k(\mathbf{k})$ des atomes mesurée après le chargement du désordre. **c** : Exemple de distribution d'énergie des atomes après chargement, modulation et propagation dans le désordre. La courbe grise correspond à la distribution d'énergie après chargement du désordre, la courbe verte correspond à la distribution d'énergie après modulation de l'amplitude du désordre et la surface verte correspond à la fraction des atomes qui sont localisés. Figure tirée de [25].

Comparaison aux résultats numériques

Les trois expériences présentées précédemment [47, 54, 107] ont toutes cherché à déterminer le seuil mobilité séparant les états localisés des états diffusifs. Comme nous l'avons décrit, celles-ci se sont basées sur la mesure de fractions localisées et sur des estimations de la distribution d'énergie des atomes dans le désordre par le biais de la fonction spectrale.

Un second point commun entre ces expériences réside dans la nature du désordre utilisé : toutes ont utilisé un speckle répulsif, généré à l'aide d'un unique faisceau pour l'expérience d'Urbana Champaign tandis que les expériences de Palaiseau et de Florence ont profité de l'interférence de deux speckles croisés pour générer un désordre quasi-isotrope.

Dans le cadre de l'étude de l'effet de l'anisotropie du potentiel sur la position du seuil de mobilité pour un potentiel de type speckle, Pasek et al. [87] ont montré qu'il existe une échelle d'énergie universelle, appelée *énergie de corrélation*, qui permet de renormaliser l'amplitude du désordre V_R et de rendre la prédiction du seuil de mobilité universelle pour un désordre de type speckle répulsif¹³. Cette énergie est définie par

$$E_\sigma = \frac{\hbar^2}{m\bar{\sigma}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = (\sigma_x\sigma_y\sigma_z)^{1/3}, \quad (2.19)$$

où les σ_i correspondent aux longueurs de corrélation selon chaque direction. À l'aide de cette définition, Pasek et al. ont pu comparer les résultats des différentes expériences à une unique courbe universelle $E_c/V_R = \mathcal{F}(V_R/E_\sigma)$ obtenue à l'aide de simulations numériques. La compilation de ces résultats est illustrée figure 2.10.

Les résultats de l'expérience d'Urbana Champaign, dont les interprétations sont fortement controversées, sont représentés en points verts dans l'encart et montrent un désaccord significatif avec les résultats numériques. En particulier, les résultats expérimentaux surestiment fortement le seuil de mobilité en raison du temps très court de propagation dans le désordre et de l'hypothèse 2.15 sur la fonction spectrale. L'expérience de Palaiseau, dont les résultats sont représentés en rouge, semblent en accord quantitatif avec les prédictions numériques mais sont limités au régime de désordre faible, ou encore de désordre quantique comme nous le décrirons dans les chapitres 6 et 7. Rappelons aussi que cette estimation du seuil de mobilité est très indirecte, car basée sur une mesure de la fraction localisée et une estimation numérique de la fonction spectrale. Les résultats de l'expérience de Florence sont représentés en bleu et semblent en accord qualitatif avec les résultats numériques. Néanmoins, les données expérimentales semblent légèrement surestimer le seuil de mobilité, probablement en raison d'un temps de propagation trop court dans le désordre ou du calcul de la distribution d'énergie. L'ensemble de ces résultats montre donc qu'il est fondamental d'avoir des temps de propagation dans le désordre de plusieurs secondes afin de ne pas surestimer le seuil de mobilité.

2.3.2 Nécessité d'une spectroscopie pour sonder le régime critique

Les trois expériences citées précédemment reposent sur une détermination indirecte du seuil de mobilité, et nécessitent une estimation numérique de la distribution d'énergie

13. L'aspect répulsif du speckle est primordial. Il a été montré que le seuil de mobilité se comporte très différemment pour un speckle attractif [24].

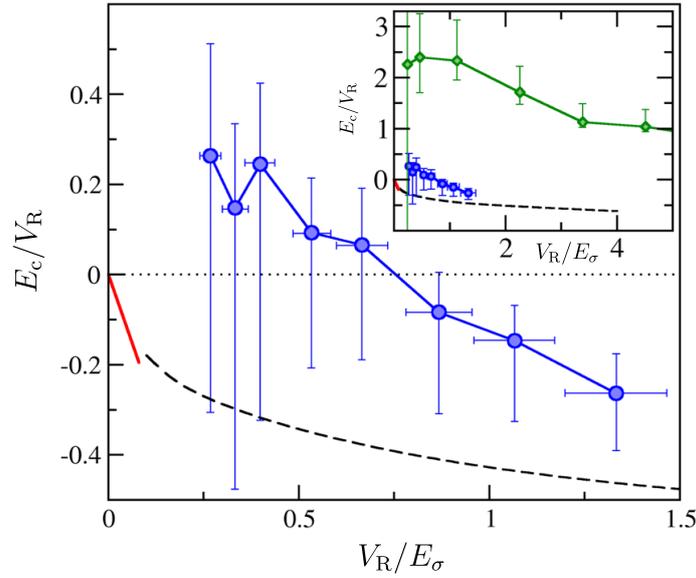


FIGURE 2.10 – **Comparaison des résultats expérimentaux à des simulations numériques.** Evolution du seuil de mobilité E_c en fonction de l'amplitude du désordre V_R . La ligne pointillée noire correspond à la prédiction universelle $E_c/V_R = \mathcal{F}(V_R/E_\sigma)$. Les résultats de l'expérience de Palaiseau sont représentés par la ligne rouge, tandis que les résultats de l'expérience de Florence sont reportés par des points bleus. Les résultats de l'expérience d'Urbana Champaign sont représentés par des points verts dans l'encart, représentant la même figure en échelle dilatée. Figure tirée de [87].

$\mathcal{D}_E(E)$, capitale pour calculer le seuil de mobilité. Comme nous l'avons vu, l'obtention de la distribution d'énergie passe par l'intermédiaire de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, qu'aucune de ces expériences n'a mesurée.

De plus, dans le cas d'une estimation fiable de la fonction spectrale, la coexistence d'une phase localisée et d'une phase diffusive témoigne d'une large distribution d'énergie, rendant l'étude du régime critique et plus particulièrement des exposants critiques de la transition impossible.

Il apparaît donc que, dans l'optique de sonder le régime critique, il est important de maîtriser le paramètre de contrôle de la transition d'Anderson, c'est-à-dire l'énergie E de l'onde. Pour cela, une nouvelle approche expérimentale résolue en énergie s'avère nécessaire, approche pour laquelle il serait possible de peupler sélectivement les états $|E\rangle$ d'énergie bien définie du désordre. La méthode proposée par notre équipe pour l'étude la transition d'Anderson consiste donc à réaliser une spectroscopie du désordre.

Un protocole expérimental de spectroscopie de la transition d'Anderson tel que celui envisagé par notre équipe serait proche de celui de l'expérience de Florence : un état initial $|i\rangle$ libre de faible énergie est transféré sélectivement dans un état propre $|E_\alpha\rangle$ du désordre dans un premier temps, puis une expansion de plusieurs secondes dans le désordre permet de caractériser cet état en terme de localisation ou de diffusion.

Depuis ces premiers résultats expérimentaux novateurs, une telle spectroscopie a pu être implémentée sur notre expérience en tant que preuve de principe. Cette méthode spectroscopique a pu être validée en s'intéressant au taux de transfert entre l'état initial

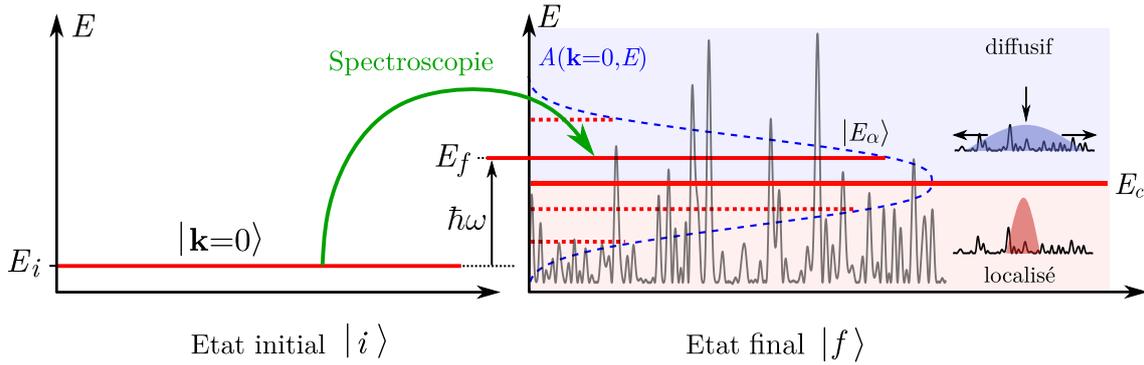


FIGURE 2.11 – **Approche spectroscopique de l'étude la transition d'Anderson.** Dans l'optique de sonder la transition d'Anderson, il est nécessaire de peupler sélectivement les différentes énergies du désordre. Pour cela, l'onde est préparée dans un état insensible au désordre, puis est transférée à une énergie bien définie dans le désordre à l'aide d'une spectroscopie. Enfin, l'expansion du nuage permet de caractériser l'énergie adressée en terme de localisation ou de diffusion.

libre et les états habillés par le désordre, qui s'avère être une mesure directe de la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ (le protocole de mesure sera explicité dans le chapitre 7) [120].

Cette méthode spectroscopique répond alors à deux problématiques essentielles : celle-ci démontre notre capacité à adresser des énergies bien définies dans le désordre, donc de contrôler la distribution d'énergie des atomes dans le désordre, et de mesurer les fonctions spectrales dont la connaissance est capitale pour l'étude de la transition d'Anderson.

Cependant, différentes limitations expérimentales ont empêché de procéder aux mesures d'expansion nécessaires à la caractérisation des différents états d'énergie en terme de localisation. Les deux principales sources de limitation identifiées seront discutées dans les chapitres 4 et 5.

3. Production d'ondes de matière

Dans la partie précédente, nous nous sommes concentrés sur la physique des atomes ultra-froids dans le désordre. En particulier, nous avons mis en évidence le fait que l'approche des atomes ultra-froids constitue une plateforme idéale pour l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné, plateforme déjà éprouvée par l'observation de la localisation d'Anderson d'ondes de matières dans un désordre optique.

À présent, concentrons-nous sur la description de l'un des deux éléments-clé de la propagation d'ondes dans le désordre : notre source d'ondes de matière. Le second élément, notre désordre optique, sera quant à lui présenté dans le chapitre 5.

Dans ce chapitre, nous nous attacherons donc à définir ce qu'est un condensat de Bose-Einstein puis nous décrirons ses principales propriétés. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux outils dont nous disposons pour manipuler les atomes, puis nous terminerons en présentant la manière dont ces outils sont implémentés sur notre dispositif expérimental.

3.1 Condensation de Bose-Einstein

Commençons par décrire ce qu'est un condensat de Bose-Einstein. Le phénomène de condensation a été prédit par Albert Einstein dans les années 1920 en s'appuyant sur les travaux de Satyendranath Bose traitant des statistiques quantiques pour des particules plus tard appelées *bosons*. Il a cependant fallu attendre les années 1960 et le développement des premiers lasers pour voir émerger les premières techniques de manipulation d'atomes. La mise au point de telles technologies a d'ailleurs valu le prix Nobel à ses principaux architectes Claude Cohen-Tannoudji, Steven Chu et William D. Phillips en 1997. Enfin, le premier condensat de Bose-Einstein gazeux de ^{87}Rb a été obtenu par l'équipe de Eric Cornell et Carl Wieman [3], rapidement suivi par un condensat de ^{23}Na obtenu par Wolfgang Ketterle [23]. Ces travaux ont été récompensés par le prix Nobel de 2001.

Depuis, des condensats de Bose-Einstein ont été produits pour un grand nombre

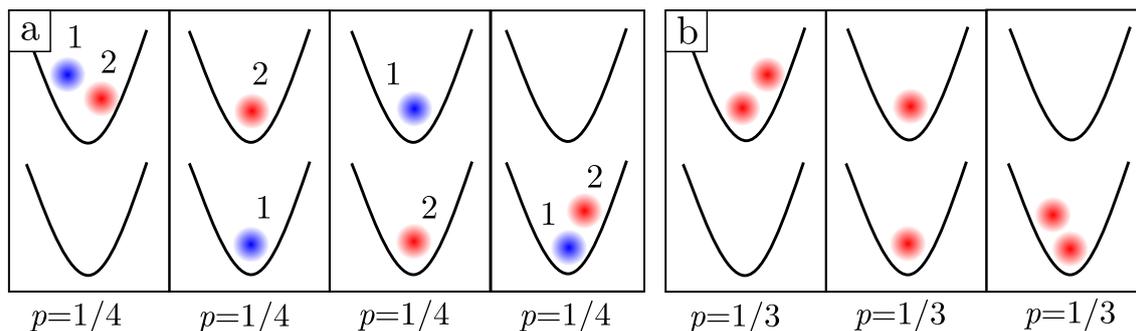


FIGURE 3.1 – **a** : Répartition de deux particules discernables numérotées 1 et 2 sur deux niveaux d'énergie. Quatre configurations sont possibles. **b** : Répartition de deux particules indiscernables sur deux niveaux d'énergie. Dans le cas où ces particules peuvent se trouver dans le même état (bosons), trois configurations sont alors possibles.

d'espèces chimique, pour des atomes comme pour des molécules. Aujourd'hui, les condensats sont couramment utilisés comme outils à des fins différentes, aussi leurs propriétés ont pu être abondamment étudiées par le passé et restent l'objet de l'investigation de plusieurs groupes dans le monde. Ainsi, nous n'en présenterons ici que les propriétés essentielles à la suite de ce manuscrit.

3.1.1 Statistique de Bose-Einstein

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein trouve son origine dans la statistique de Bose-Einstein. Celle-ci se différencie de la statistique classique de Boltzmann dans le formalisme grand-canonique donnée par :

$$N_{\mathbf{n}} = g_{\mathbf{n}} \exp(-(E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_{\text{B}}T) , \quad (3.1)$$

pour un gaz de N particules à l'équilibre thermique, avec $N_{\mathbf{n}}$ le nombre moyen d'atomes présents dans l'état d'énergie $E_{\mathbf{n}}$ et de dégénérescence $g_{\mathbf{n}}$, μ le potentiel chimique, T la température et k_{B} la constante de Boltzmann. L'origine de cette différence provient de l'indiscernabilité des particules : dans le cadre de la physique classique, les particules identiques sont discernables, c'est-à-dire qu'il est possible "d'étiqueter" les particules et de suivre leurs mouvements individuels. Dans le cadre de la mécanique quantique, une telle approche n'est pas possible car les particules sont décrites par des fonctions d'onde, étalées dans l'espace. Lors de collisions de particules identiques, le recouvrement de leur fonction d'onde fait qu'il est impossible de déterminer les trajectoires suivies par les particules. L'indiscernabilité des particules dans le cadre de la mécanique quantique est donc essentielle.

Considérons alors le cas simple de la répartition de deux particules sur deux niveaux d'énergie. Dans le cadre de la physique classique, il est possible d'attribuer un numéro à chaque particule, et il on peut placer chaque particule dans n'importe quel niveau d'énergie. Il existe alors quatre configurations que l'on supposera équiprobables, chacune de probabilité $p = 1/4$ (voir figure 3.1a). L'approche quantique, dans laquelle il n'est pas possible de discerner les particules, restreint le nombre de possibilités à trois et donc la probabilité de chacune des configurations est alors de $p = 1/3$ (voir figure 3.1b). Calculons

maintenant la probabilité que deux particules soient dans le même état. En physique classique, cette probabilité est de $p = 2/4 = 1/2$, tandis qu'en mécanique quantique, celle-ci est de $p = 2/3$. On s'attend alors à ce que l'indiscernabilité des particules en mécanique quantique modifie la statistique de Boltzmann en favorisant l'agrégation de particules dans le même état ¹.

Condensation de Bose-Einstein

Considérons alors le cas d'un gaz de N bosons identiques dans un piège harmonique :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2, \quad (3.2)$$

où m correspond à la masse des particules, et les ω_i correspondent aux fréquences de piégeage dans chaque direction de l'espace. Les énergies $E_{\mathbf{n}}$ sont donc celles des états liés

$$E_{\mathbf{n}} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}. \quad (3.3)$$

On peut alors montrer que le nombre moyen de particules est donné par la distribution de Bose-Einstein ² [27] :

$$N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_{\text{B}}T) - 1}. \quad (3.4)$$

Une condition de validité de cette équation est que le potentiel chimique μ soit plus petit que l'énergie E_0 du niveau de plus basse énergie, appelé niveau fondamental. Autrement, le nombre moyen de particules du niveau fondamental serait négatif (et cela impliquerait que la totalité du réservoir de particules vienne se déverser dans le niveau fondamental). Il est donc nécessaire que $\mu < E_0$. Une conséquence remarquable de cette condition est que la population totale des états excités est bornée par :

$$N_e(\mu, T) = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} N_{\mathbf{n}} \leq \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - E_0)/k_{\text{B}}T) - 1}. \quad (3.5)$$

Ainsi, chaque particule supplémentaire peuplera forcément l'état fondamental. On a donc ici le moyen d'accumuler un grand nombre de particules dans le même état quantique. La condensation de Bose-Einstein correspond, par définition, à cette accumulation d'un nombre macroscopique de particules dans l'état fondamental. C'est dans ce régime que les effets quantiques se manifestent, toutes ces particules partageant alors le même état quantique. Afin d'obtenir de tels effets, il est nécessaire que les fonctions d'onde des particules individuelles se recouvrent, c'est-à-dire que l'extension typique d'un paquet d'onde soit plus grande que la distance moyenne entre particules. Cette extension typique est donnée par la longueur d'onde thermique de de Broglie $\Delta x \sim \lambda_{\text{dB}}$, qui correspond à la taille typique d'un paquet d'onde quantique dont la largeur de la distribution en impulsion est donnée par la température. Elle s'exprime [27]

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\text{B}}T}}, \quad (3.6)$$

1. Ce raisonnement est valable pour des particules bosoniques, qui peuvent se retrouver dans le même état quantique. Pour des particules fermioniques, qui ne peuvent pas occuper le même état quantique, les statistiques en sont donc profondément changées. En guise d'illustration, la seule configuration possible de la figure 3.1b pour des fermions est la seconde configuration.

2. Pour un gaz de N fermions identiques, le nombre moyen de particules est donné par la distribution de Fermi-Dirac $N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\exp((E_{\mathbf{n}} - \mu)/k_{\text{B}}T) + 1}$.

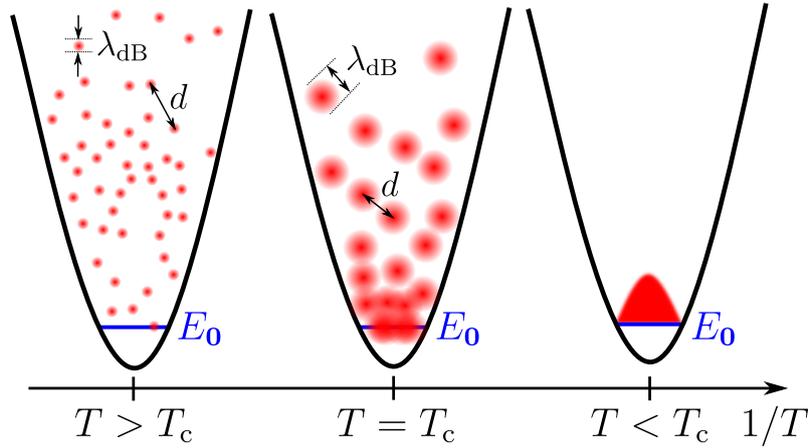


FIGURE 3.2 – **Critère phénoménologique de condensation de Bose-Einstein.** L'accumulation de particules dans le même état quantique nécessite que les paquets d'onde des particules individuelles se recouvrent, c'est-à-dire que les extensions typiques de ces paquets d'onde soient plus grandes que les distances entre particules. Ainsi, lorsque $\lambda_{\text{dB}} > d$, l'état fondamental d'énergie E_0 est peuplé macroscopiquement.

avec m la masse de la particule, un atome de ^{87}Rb dans le cas de notre expérience. La distance inter-particules dans un piège est estimée à partir de la densité de particules $d \sim n^{-1/3}$. On peut alors formuler le critère phénoménologique suivant :

$$n\lambda_{\text{dB}}^3 \gtrsim 1, \quad (3.7)$$

dont une illustration est proposée figure 3.2. La quantité $n\lambda_{\text{dB}}^3$ est appelée *densité dans l'espace des phases*. Tout l'enjeu des expériences d'atomes ultrafroids est d'arriver à augmenter la densité dans l'espace des phases afin de franchir le seuil donné par l'équation 3.7. Cette condition peut se réécrire en terme de température critique :

$$T_c \sim \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} N^{1/3}, \quad (3.8)$$

où $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ est la fréquence moyenne du piège. Cette température critique est de l'ordre de quelques centaines de nanokelvin pour les expériences typiques d'atomes ultra-froids.

3.1.2 Propriétés d'un condensat de Bose-Einstein

En dessous de la température critique 3.8, les atomes s'accumulent dans l'état fondamental du piège. Il en résulte une forte augmentation de la densité, si bien qu'on ne peut plus négliger les interactions entre particules. Dans le cas d'un gaz suffisamment dilué, ce que l'on considèrera dans la suite, les interactions entre atomes peuvent être traitées comme des collisions à basse énergie, c'est-à-dire des collisions uniquement dans l'onde s . Le potentiel d'interaction est alors celui de contact, donné par $U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = g\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Le paramètre g , qui caractérise la force des interactions, est donné par $g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_s$, avec a_s la longueur de diffusion, et ne dépend que de ce paramètre. Ce régime dilué est atteint lorsque $na_s^3 \ll 1$ ³. Pour le ^{87}Rb , cette longueur de diffusion vaut $100 a_0$, avec a_0 le rayon

3. Dans ce régime, la distance inter-atomique est plus grande que la portée des interactions. Ainsi, les atomes ne voient pas le détail du potentiel d'interaction avec leur voisin, et donc il est possible d'approximer

de Bohr. La longueur de diffusion étant positive, les interactions sont donc répulsives pour notre atome.

On peut écrire l'équation de Schrödinger pour l'état fondamental en tenant compte de ce terme d'interaction entre particules. La description en champ moyen du condensat est alors donnée par l'équation de Gross-Pitaevskii (aussi connue sous le nom d'*équation de Schrödinger non-linéaire*) :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) + g|\phi_0(\mathbf{x})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{x}) = \mu\phi_0(\mathbf{x}) , \quad (3.9)$$

où $\phi_0(\mathbf{x})$ est la fonction d'onde macroscopique du condensat et μ est le potentiel chimique. La densité d'atomes est donnée par $n(\mathbf{x}) = |\phi_0(\mathbf{x})|^2$. Ainsi, la fonction d'onde du condensat $\phi_0(\mathbf{x})$ est normalisée pour donner le nombre de particules dans le condensat $N_0 = \int d\mathbf{x} |\phi_0(\mathbf{x})|^2$.

Le premier terme de gauche décrit l'énergie cinétique, le second le terme d'énergie potentielle provenant du piège, et le dernier décrit l'énergie d'interaction entre particules. La somme de ces énergies donne le potentiel chimique μ , qui correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour rajouter une particule supplémentaire au système de N_0 particules.

Régime de Thomas-Fermi

Considérons le cas d'un condensat comportant un grand nombre de particules N_0 . L'énergie cinétique totale du condensat varie avec N_0 de manière linéaire : $\langle E_k \rangle \propto N_0$. L'énergie totale d'interaction varie quant à elle en $E_{\text{int}} \propto N_0^2$. Pour un nombre suffisamment grand de particules, il devient possible de négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire : il s'agit du régime de Thomas-Fermi. Dans ce cas, le profil de densité s'écrit

$$n(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mu - V(\mathbf{x}))/g & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{x}) , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Le profil de densité est donc une parabole inversée de rayons $R_{\text{TF},i} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}}$ en considérant le piège harmonique de l'équation 3.2. Ces rayons de Thomas-Fermi ont été déterminés par la condition $n(\mathbf{x}) = 0$. Il est intéressant de noter que le potentiel effectif vu par une particule $V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + gn(\mathbf{x})$ est constant sur l'ensemble du condensat :

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{x}) , \\ V(\mathbf{x}) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.11)$$

L'énergie d'un atome est donc constante sur l'ensemble du condensat et est donnée par le potentiel chimique. μ correspond alors à l'échelle d'énergie au-delà de laquelle le condensat est perturbé par le potentiel. Il est possible d'obtenir une expression pour le potentiel chimique [88] :

$$\mu = \frac{1}{2} \left(15aN_0\hbar^2\bar{\omega}^3 \right)^{2/5} m^{1/5} , \quad (3.12)$$

qui vaut environ $\mu/h \approx 40$ Hz pour notre expérience.

ce potentiel par un potentiel de contact.

4. En réalité, l'approximation de Thomas-Fermi décrit bien les zones à l'intérieur des condensats, cependant, il existe une petite région sur les bords du condensat où la densité est faible, et donc l'énergie

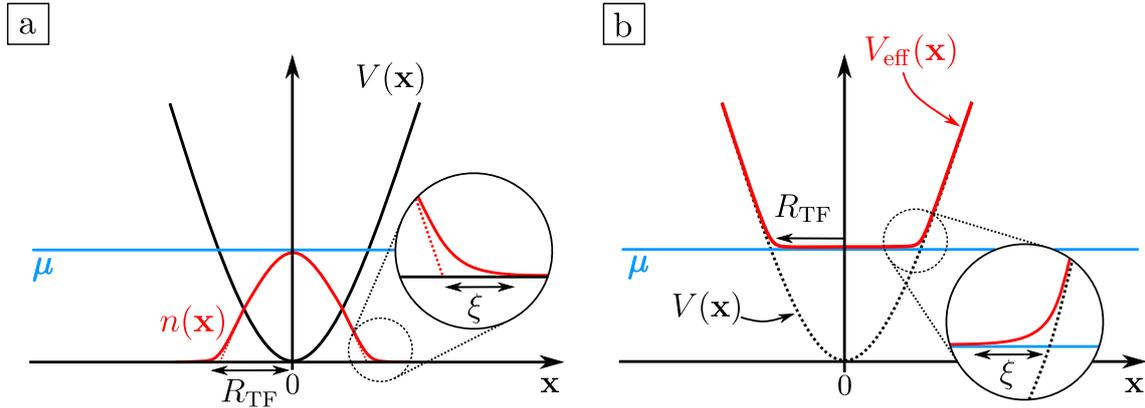


FIGURE 3.3 – a : Profil de densité dans le régime de Thomas-Fermi. La densité est une parabole inversée, liée à la forme parabolique du potentiel. Sur les bords du condensat, la densité s'écarte de la parabole sur une longueur typique appelée longueur de cicatrisation⁴. b : Potentiel effectif ressenti pour des particules individuelles. Ce potentiel effectif suit la forme du potentiel externe, et l'effet des interactions à l'intérieur du condensat écrante le potentiel externe par le potentiel chimique.

3.2 Processus d'interaction lumière-matière

Précédemment, nous avons brièvement présenté le phénomène de condensation de Bose-Einstein ainsi que les principales propriétés d'un condensat. En particulier, nous avons identifié $n\lambda_{dB}^3 \gtrsim 1$ comme un critère de condensation, impliquant l'obtention de nuages denses à très basse température. Il s'agit donc de la ligne à atteindre sur notre dispositif. Dans cette partie, nous allons présenter les différents outils de manipulation d'atomes dont nous disposons, tels que des champs magnétiques, des champs lasers ou encore des radio-fréquences, afin d'obtenir la condensation d'un nuage de rubidium ^{87}Rb .

3.2.1 Le rubidium ^{87}Rb

Comme déjà mentionné plusieurs fois, l'espèce atomique utilisée sur notre expérience est le rubidium ^{87}Rb , le second isotope le plus fréquent après le rubidium ^{85}Rb (l'abondance naturelle du ^{87}Rb est de 27.8%). Il s'agit d'un alcalin bosonique (il possède donc un seul électron de valence) avec un spin nucléaire $\mathbf{I} = 3/2$. Historiquement, le ^{87}Rb est l'atome ayant été condensé en premier [3] en raison du développement rapide des technologies laser à 780 nm, cet atome possédant une transition optique cyclante à cette longueur d'onde dans sa raie D .

La raie D est en réalité composée de deux transitions : la raie D_1 correspondant à la transition $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$ à 795 nm, et la raie D_2 correspondant à la transition $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ à 780 nm. Sauf mention contraire, nous n'utiliserons que la raie D_2 dans la suite de ce manuscrit, la plupart de nos fréquences optiques se trouvant autour de 780 nm. Le choix de l'atome de rubidium est aussi dû à ses bonnes propriétés. En particulier, sa longueur de diffusion $a_s = 5.3\text{nm}$ résulte en des taux de collisions relativement élevés,

cinétique ne peut plus être négligée devant l'énergie d'interaction. Cette échelle de longueur s'appelle la longueur de cicatrisation, et est donnée par $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{n_0 m g}}$ avec $n_0 = N_0/R_{TF}^3$ la densité moyenne du condensat. ξ représente donc la longueur sur laquelle le potentiel chimique n'écrante pas le potentiel externe.

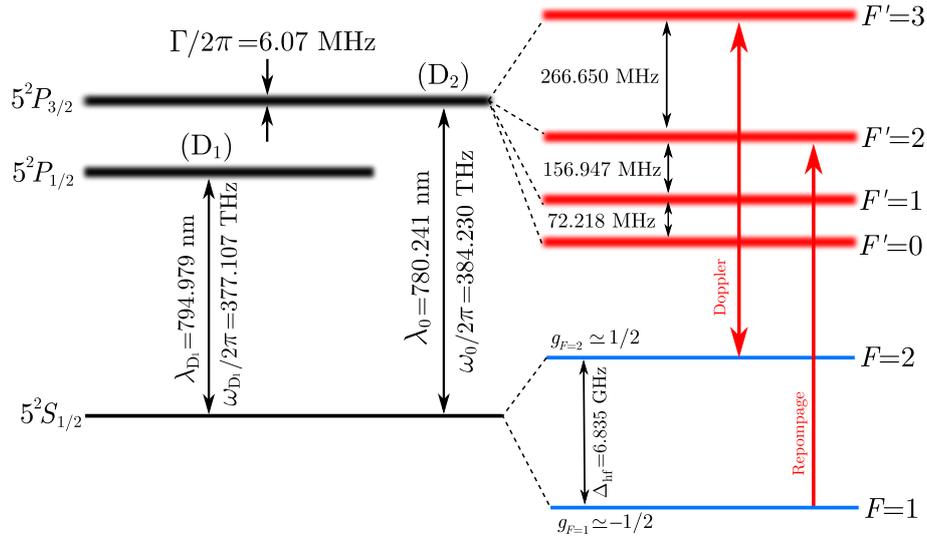


FIGURE 3.4 – **Structure de la raie D du rubidium ^{87}Rb .** Celle-ci est composée de deux transitions, la D_1 à 795 nm, et la transition D_2 à 780 nm que nous utilisons sur l'expérience. L'état fondamental $5^2S_{1/2}$ est dégénéré en deux sous-niveaux hyperfins séparés d'une énergie $h\Delta_{\text{hf}}$ avec $\Delta_{\text{hf}} = 6.835$ GHz.

permettant une thermalisation rapide du nuage.

La structure hyperfine de l'état fondamental $5^2S_{1/2}$ consiste en deux niveaux hyperfins dégénérés $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ séparés de $\Delta_{\text{hf}} = 6.835$ GHz. Chacun de ces états est composé de $2F+1$ sous-états Zeeman $|F, m_F\rangle$. Une vue simplifiée de cette structure est donnée figure 3.4, et un tableau récapitulatif des principales grandeurs du ^{87}Rb peut être trouvé table 3.1.

| Quantité physique | Symbole | Valeur |
|--|----------------------|-----------------------------|
| Masse | m | 1.44×10^{-25} kg |
| Fréquence de transition D_2 | ω_0 | $2\pi \times 384.230$ THz |
| Longueur d'onde dans le vide (D_2) | λ_0 | 780.241 nm |
| Largeur naturelle de la transition D_2 | Γ | $2\pi \times 6.07$ MHz |
| Fréquence de transition D_1 | ω_{D_1} | $2\pi \times 377.107$ THz |
| Longueur d'onde dans le vide (D_1) | λ_{D_1} | 794.979 nm |
| Largeur naturelle de la transition D_1 | Γ_{D_1} | $2\pi \times 5.75$ MHz |
| Séparation hyperfine | Δ_{hf} | 6.834682611 GHz |
| Moment cinétique nucléaire | \mathbf{I} | 3/2 |
| Facteur de Landé électronique | g_S | 2.002319 |
| Facteur de Landé orbital | g_L | 0.999993 |
| Facteur de Landé nucléaire | g_I | $-0.9951414 \times 10^{-3}$ |
| Intensité de saturation | I_{sat} | 1.67 mW/cm ² |
| Longueur de diffusion | a_s | 5.3 nm |

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif des grandeurs physiques du rubidium ^{87}Rb que nous utiliserons dans la suite. Ces valeurs sont tirées de [117].

3.2.2 Potentiel magnétique

Commençons par décrire l'interaction d'un atome de rubidium avec un champ magnétique statique. Ces champs magnétiques sont couramment utilisés dans les expériences d'atomes ultra-froids pour réaliser des pièges conservatifs à l'aide de champs inhomogènes (après un refroidissement laser par exemple). En particulier, l'expérience de Stern & Gerlach montre que la force appliquée aux atomes par un gradient de champ magnétique dépend de l'état interne de l'atome. Explicitons cela.

Le moment cinétique total $\hat{\mathbf{F}}$ est donné par la somme des moments cinétiques des composants de l'atome :

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} , \quad (3.13)$$

avec $\hat{\mathbf{I}}$ le spin total nucléaire, $\hat{\mathbf{L}}$ le moment cinétique orbital et $\hat{\mathbf{S}}$ le moment cinétique de spin électronique. On a alors un moment magnétique total $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_B(g_I\hat{\mathbf{I}} + g_L\hat{\mathbf{L}} + g_S\hat{\mathbf{S}})$ où les $g_{I,L,S}$ sont les facteurs de Landé et μ_B est le magnéton de Bohr⁵. L'énergie d'interaction de ce moment magnétique avec un champ magnétique \mathbf{B} est donnée par $\hat{V} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$. On obtient les énergies propres par la formule de Breit-Rabi, dont l'application aux états hyperfins $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ fournit :

$$\begin{aligned} E_{F=2} &= +\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2} \sqrt{1 + m_F\beta + \beta^2} \\ E_{F=1} &= -\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2} \sqrt{1 + m_F\beta + \beta^2} , \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec $\beta \simeq 2\mu_B B / h\Delta_{\text{hf}}$ et B est la norme du champ magnétique. À faible champ $B \ll h\Delta_{\text{hf}}/\mu_B$ (régime où $\beta \ll 1$), on retrouve l'effet Zeeman linéaire avec

$$U_{\text{mag}}(\mathbf{x}) = m_F g_F \mu_B B(\mathbf{x}) , \quad (3.15)$$

et $g_{F=2} = 1/2$ et $g_{F=1} = -1/2$. L'utilisation d'un champ magnétique non homogène génère donc un potentiel dépendant de la position, tel que dans l'expérience de Stern & Gerlach. L'utilisation de tels champs inhomogènes est très répandue dans le domaine des atomes ultra-froids, en particulier pour la génération de pièges magnétiques, l'accélération de particules, mais aussi pour réaliser une lévitation magnétique comme c'est le cas sur notre expérience.

3.2.3 Forces lumineuses

On se concentre à présent sur l'interaction entre un atome et un champ laser incident. Ce champ laser comporte un grand nombre de photons émis par seconde (typiquement 10^{12} photons par seconde pour une puissance de 1 μW), on peut donc décrire ce champ laser par une onde classique

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left(E(\mathbf{x}) e^{-i\omega t - i\phi(\mathbf{x})} \boldsymbol{\epsilon} \right) , \quad (3.16)$$

dont l'effet sur un atome est donné par le hamiltonien $H_{\text{AL}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, on introduit la polarisabilité atomique $\alpha(\omega)$ et on montre

5. L'interaction avec le spin du noyau donne une correction très faible car $g_I \propto 1/m_p$ avec m_p la masse du proton, et $g_{L,S} \propto 1/m_e$ avec m_e la masse de l'électron. Ainsi, $g_I \ll g_{L,S}$ (voir table 3.1), on pourra donc en général négliger l'effet du spin nucléaire lors de l'application d'un champ magnétique extérieur.

alors que la force moyenne exercée sur un atome est la somme de deux termes :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\text{Re}(\alpha(\omega))E(\mathbf{x})\nabla E(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\text{Im}(\alpha(\omega))E^2(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}) . \quad (3.17)$$

Un calcul pleinement quantique est nécessaire pour déterminer la polarisabilité $\alpha(\omega)$, et il est possible de montrer que pour un système à deux niveaux, on a [38] :

$$\alpha(\omega) = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} , \quad (3.18)$$

où ω_0 est la fréquence de résonance et Γ est la largeur de la transition.

Potentiel dipolaire

Le premier terme de l'équation 3.17 est proportionnel à la partie réelle de la polarisabilité atomique. Ce terme décrit donc comment un moment dipolaire électrique induit interagit avec le gradient d'intensité lumineuse. Cette force est conservative et dérive d'un potentiel qui est proportionnel à l'intensité lumineuse : on parle de *potentiel dipolaire*. Dans le cas d'un faisceau très désaccordé, ce potentiel s'écrit :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 I(\mathbf{x})}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right) , \quad (3.19)$$

avec $I(\mathbf{x})$ l'intensité lumineuse à la position \mathbf{x} . Cette expression est valable très loin de résonance : cela signifie que le laser ne voit pas le détail de la raie D du ^{87}Rb , c'est-à-dire que le désaccord $\omega - \omega_0$ doit être très grand devant la structure fine séparant les transitions D_1 et D_2 , et l'onde laser ne voit qu'un système à deux niveaux $\{5^2S, 5^2P\}$.

Un tel potentiel présente de nombreux avantages pour les expériences d'atomes ultrafroids. Suivant le signe de la quantité $\delta = \omega - \omega_0$, ce potentiel peut être soit attractif ($\delta < 0$, on parlera alors de potentiel désaccordé vers le *rouge*), soit répulsif ($\delta > 0$, potentiel désaccordé vers le *bleu*). Les atomes seront alors attirés par les maxima d'intensité lumineuse (pour un faisceau désaccordé vers le rouge) ou bien vers les zones d'ombre (pour les faisceaux désaccordés vers le bleu). Un faisceau gaussien focalisé et désaccordé vers le rouge permet ainsi de piéger les atomes en son foyer : la forme gaussienne du faisceau attire les atomes vers le centre du faisceau.

De plus dans cette limite des grands désaccords, ce potentiel est indépendant de l'état interne. Contrairement à un piège magnétique, un piège dipolaire n'est pas sélectif en état de spin et donc offre de nombreuses possibilités grâce à la disponibilité de degrés de liberté internes. Nous tirerons profit de cet avantage de différentes manières dans la suite.

Cependant, l'utilisation de tels désaccords (plusieurs centaines de nanomètres) nécessite de très fortes intensités lumineuses afin d'obtenir des potentiels suffisamment importants. Ainsi, il est courant que les expériences d'atomes ultrafroids utilisent des lasers possédant une puissance de plusieurs Watts⁶ focalisés sur de petites tailles, typiquement de l'ordre de 10 – 100 μm .

Insistons sur le fait que l'expression 3.19 a été obtenue dans le contexte d'un système à deux niveaux, et que cette approximation n'est valable que dans la limite des grands

6. À titre de comparaison, il ne suffit que de quelques mW pour endommager l'œil humain.

désaccords pour un atome de ^{87}Rb . Un laser faiblement désaccordé ($\sim 1\text{ nm}$) peut ainsi sonder la structure fine, voire la structure hyperfine de l'atome. Cela permet des approches originales telles que la réalisation d'un potentiel dépendant de l'état interne, que nous présenterons section 5.3.2.

Force de pression de radiation

Le second terme s'appelle *force de pression de radiation*. Il provient de la partie imaginaire de la polarisabilité atomique, qui caractérise l'absorption de photons par l'atome. Il s'agit donc d'une force inélastique qui résulte d'un grand nombre de cycles d'absorption de photons du faisceau laser et d'émission spontanée dans des directions aléatoires de l'espace⁷. L'impulsion totale cédée par émission spontanée s'annule donc, et en moyenne le transfert d'impulsion ne provient que de l'absorption de photons du faisceau laser. Ceci est illustré par le terme de droite de l'équation 3.17, faisant apparaître le gradient de la phase du laser $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$.

On montre que cette force s'exprime [22] :

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \hbar\mathbf{k}\Gamma_{\text{sp}} , \quad (3.20)$$

avec Γ_{sp} le taux d'émission spontanée en présence du champ laser, et \mathbf{k} le vecteur d'onde associé à l'onde laser. L'interprétation est directe : en moyenne, l'atome acquiert une impulsion $\hbar\mathbf{k}$ à un taux Γ_{sp} . Ce taux vaut :

$$\Gamma_{\text{sp}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad \text{avec} \quad s = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1+4\delta^2/\Gamma^2} , \quad (3.21)$$

où l'intensité de saturation $I_{\text{sat}} = \frac{\pi\hbar c\Gamma}{3\lambda_0^3} = 1.67\text{ mW/cm}^2$ est une constante de l'atome de ^{87}Rb . La grandeur s s'appelle le paramètre de saturation. Celui-ci dépend de l'intensité lumineuse incidente (et donc du nombre de photons incidents) ainsi que du désaccord du laser par rapport à la résonance atomique⁸ $\delta = \omega - \omega_0$. Le paramètre de saturation est maximal en $\delta = 0$, c'est-à-dire lorsque le laser est à résonance. Dans le cas d'un laser très saturant $s \gg 1$, la force de pression de radiation s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{PR}} = \frac{\hbar\mathbf{k}\Gamma}{2} , \quad (3.22)$$

où le facteur 2 indique que, à forte saturation, un atome a autant de chance d'être dans l'état excité que dans l'état fondamental. Enfin, mentionnons que pour un atome se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} dans le référentiel du laboratoire, le désaccord devient $\delta = \omega - \omega_0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ par effet Doppler. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous décrirons les mécanismes du refroidissement laser.

3.2.4 Couplage radio-fréquence

Les outils de manipulation des atomes présentés précédemment offrent la possibilité de créer des potentiels conservatifs (comme le potentiel dipolaire ou le potentiel magnétique)

7. Pour réaliser de tels cycles, il est nécessaire d'avoir une transition cyclante, c'est-à-dire de disposer d'un état excité dont la désexcitation renvoie forcément sur l'état d'origine.

8. L'expression 3.19 n'est valable que dans un régime de faible saturation. L'utilisation de grands désaccords autorise l'utilisation de grosses puissances optiques tout en gardant $s \ll 1$. Dans ce régime, on peut estimer le taux d'émission spontanée par $\Gamma_{\text{sp}}(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 I(\mathbf{x})}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega-\omega_0} - \frac{\Gamma}{\omega+\omega_0}\right)^2$.

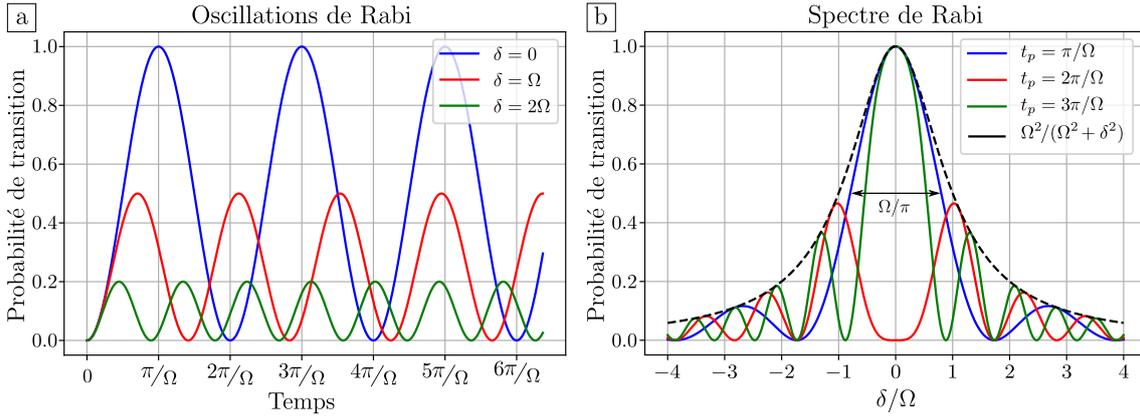


FIGURE 3.5 – **a** : **Oscillations de Rabi tracées pour différents désaccords.** Les populations oscillent à la pulsation $\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ avec une amplitude qui dépend du désaccord. L'amplitude est maximale et atteint 1 lorsque l'onde radio-fréquence est à résonance, et la population maximale transférée décroît avec l'augmentation du désaccord. **b** : **Spectres de Rabi pour différentes durées d'application t_p .** Le transfert de population est le plus efficace à résonance ($\delta = 0$), et l'utilisation d'un désaccord entraîne une diminution de l'efficacité de transfert. Les populations maximales transférées sont décrites par l'enveloppe lorentzienne de l'équation 3.25.

ou encore des forces dissipatives à l'aide la force de pression de radiation. De manière générale, certains de ces outils dépendent de l'état interne des atomes⁹, une dernière possibilité de manipulation des atomes consiste donc à contrôler leur état électronique.

Comme présenté section 3.2.1, la séparation entre les états fondamentaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ correspond à une fréquence Δ_{hf} de l'ordre du GHz, donc à une fréquence qui se trouve accessible électroniquement. Il apparaît alors possible de contrôler de l'état interne des atomes à l'aide d'un rayonnement radio-fréquence. L'effet de ce couplage sur les atomes peut être décrit par un système à deux niveaux dont le hamiltonien¹⁰ est donné dans la base $|F = 1\rangle, |F = 2\rangle$ par

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -2\pi\Delta_{\text{hf}} & \Omega e^{i\omega t} \\ \Omega e^{-i\omega t} & 2\pi\Delta_{\text{hf}} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

avec ω la pulsation de l'onde radio-fréquence, et Ω la pulsation de Rabi qui caractérise l'amplitude rayonnée sur les atomes. En se plaçant dans le référentiel tournant, le hamiltonien du système devient

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

avec $\delta = \omega - 2\pi\Delta_{\text{hf}}$. En supposant que le système est dans l'état $|F = 1\rangle$ à $t = 0$, la probabilité d'avoir l'atome dans l'état $|F = 2\rangle$ est donnée par la formule de Rabi [7] :

$$\mathcal{P}_{|F=2\rangle}(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2 \left(\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} \frac{t}{2} \right). \quad (3.25)$$

9. Le potentiel magnétique dépend bien évidemment de l'état interne, tandis que ce n'est pas de cas du potentiel dipolaire dans la limite des grands désaccords.

10. Le terme de couplage 3.23 est obtenu en appliquant l'approximation de l'onde tournante, c'est-à-dire que l'on néglige les termes en $\omega + 2\pi\Delta_{\text{hf}}$ devant les termes en $\omega - 2\pi\Delta_{\text{hf}}$ car on estime qu'ils évoluent rapidement, et donc qu'ils s'apparentent à leur valeur moyenne qui est nulle.

Cette formule met en évidence un caractère résonant des transitions radio-fréquences :

- Dans le cas d'un grand désaccord $\delta \gg \Omega$, la probabilité de transition est très faible à n'importe quel instant.
- À résonance $\delta = 0$, la probabilité de transition peut atteindre 1, même pour un couplage très faible (Ω petit).

La formule de Rabi 3.25 est tracée figure 3.5 en représentations temporelle et spectrale, et permet d'en illustrer les caractéristiques. Notamment, la figure 3.5.a témoigne des oscillations de la probabilité de transition avec une amplitude dépendant du désaccord δ . En particulier, l'enveloppe lorentzienne de la probabilité maximale de transition en fonction de δ est représentée en pointillés noirs figure 3.5.b. On montre ainsi que la probabilité maximale de transition ne peut être atteinte qu'à résonance ($\delta = 0$), et que celle-ci décroît en augmentant le désaccord.

3.3 Description d'un cycle expérimental

Dans la partie précédente, nous nous sommes familiarisés avec quelques outils couramment utilisés sur les expériences d'atomes ultra-froids pour piéger et manipuler les atomes. Dans cette nouvelle partie, nous nous pencherons sur l'implémentation de ces outils sur notre expérience afin d'obtenir un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb . La présentation qui en est donnée ici se verra minimale, nous nous contenterons d'illustrer brièvement les différentes étapes de refroidissement qui mènent à la condensation. De nombreux détails pourront être trouvés dans les thèses des doctorants qui ont contribué à faire de cette expérience ce qu'elle est aujourd'hui : [9, 25, 31, 46, 74, 76, 95].

3.3.1 Présentation générale du dispositif

Comme toutes les expériences d'atomes ultra-froids, la manipulation des atomes se déroule sous ultra-vide afin de s'affranchir des conditions extérieures. En particulier, on évite ainsi les collisions avec des particules extérieures à température ambiante, ce qui chaufferait notre gaz et détruirait la cohérence d'un nuage condensé. Une vue d'ensemble de l'enceinte à vide est donnée figure 3.6 qui montre aussi les pompes utilisées en continu pour maintenir le vide. Notre dispositif est composé d'un four chauffé à 120°C qui éjecte les atomes de rubidium, il s'agit de notre source d'atomes. Un doigt froid refroidi à -30°C sert de diaphragme et permet de filtrer le jet d'atomes tout en adsorbant les atomes qui sont bloqués afin de pas polluer le vide. Un obturateur mécanique permet de couper le jet lorsqu'on ne souhaite pas accumuler des atomes en cours de cycle. Les atomes sont décélérés dans le ralentisseur Zeeman et capturés dans la première cellule où ils subissent les premières étapes de refroidissement. Ils sont ensuite transportés dans la seconde cellule où ils sont refroidis jusqu'à la condensation. C'est dans cette seconde cellule que se déroulent les expériences de science, on l'appelle alors *Chambre de science*.

3.3.2 Première chambre

C'est dans la première chambre que se déroulent les premières étapes de refroidissement du gaz de rubidium. Celles-ci sont dans un premier temps basées sur le refroidissement

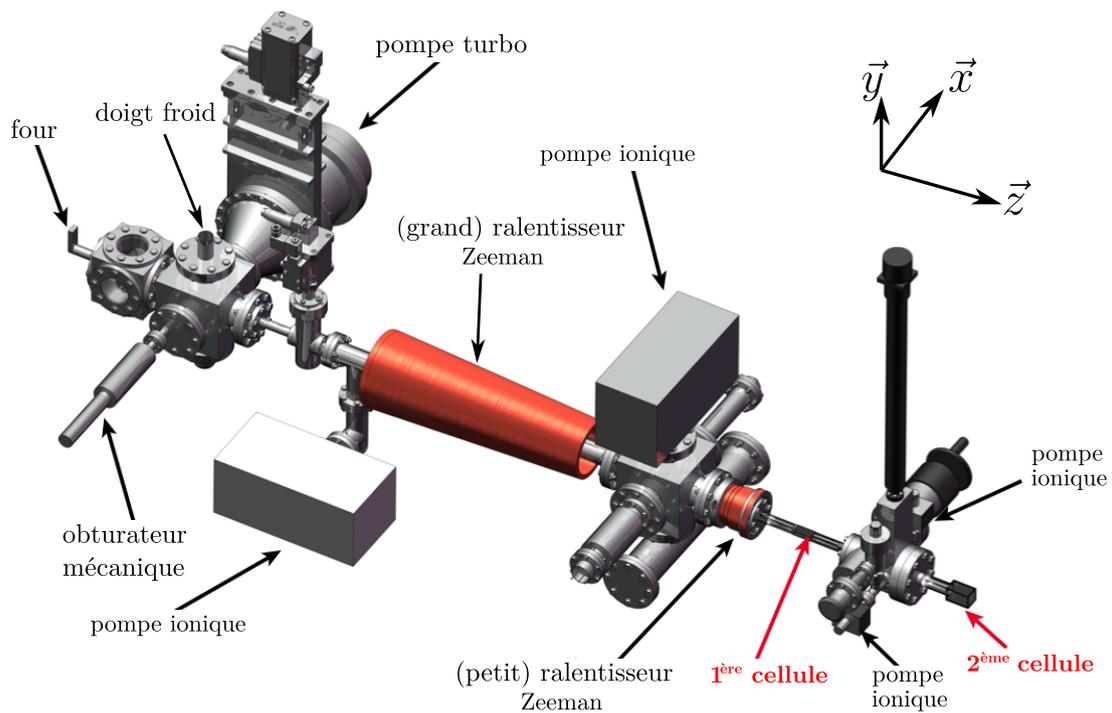


FIGURE 3.6 – **Vue d'ensemble du corps de l'expérience.** Les atomes se trouvent dans un montage sous ultra-vide, composé de deux chambres dans lesquelles les atomes sont manipulés.

laser, puis dans un second temps sur un piègeage magnétique et l'évaporation forcée à l'aide d'un couteau radio-fréquence.

Refroidissement laser

Le principe du refroidissement laser repose sur la force de pression de radiation, présentée section 3.2.3. Plus particulièrement, le refroidissement laser consiste à dissiper de l'énergie cinétique à l'aide de cycles d'absorption et d'émission spontanée de photons.

Considérons le cas d'un atome se déplaçant à vitesse \mathbf{v} dans le référentiel du laboratoire soumis à une onde laser contrapropageante de pulsation ω . Le désaccord du laser par rapport à la transition atomique s'exprime $\delta = \omega - \omega_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, où le décalage Doppler $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} < 0$. Dans le référentiel de l'atome, la condition de résonance $\delta = 0$ s'écrit $\omega_0 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. L'atome va alors absorber un photon laser d'énergie $\hbar\omega$ et en émettre un d'énergie supérieure $\hbar\omega_0$ par émission spontanée. Il y a donc eu un transfert d'énergie entre l'énergie cinétique et le désaccord. La répétition de tels cycles permet ainsi de transférer beaucoup d'énergie cinétique de l'atome vers le désaccord entre photons absorbés et photons rayonnés.

La possibilité de répéter ces cycles d'absorption de photons et d'émission spontanée repose sur l'existence d'une transition cyclante entre les états hyperfins $|F = 2\rangle$ et $|F' = 3\rangle$. La désexcitation de $|F' = 3\rangle$ renvoie forcément l'atome dans l'état $|F = 2\rangle$ car les règles de sélection imposent $F' - F = \{0, \pm 1\}$. En revanche, on peut accidentellement envoyer des atomes dans l'état excité $|F' = 2\rangle$ car la séparation avec l'état ciblé $|F' = 3\rangle$ n'est que de 266 MHz. Statistiquement, un atome visite cet état tous les 50 cycles environ, et sa

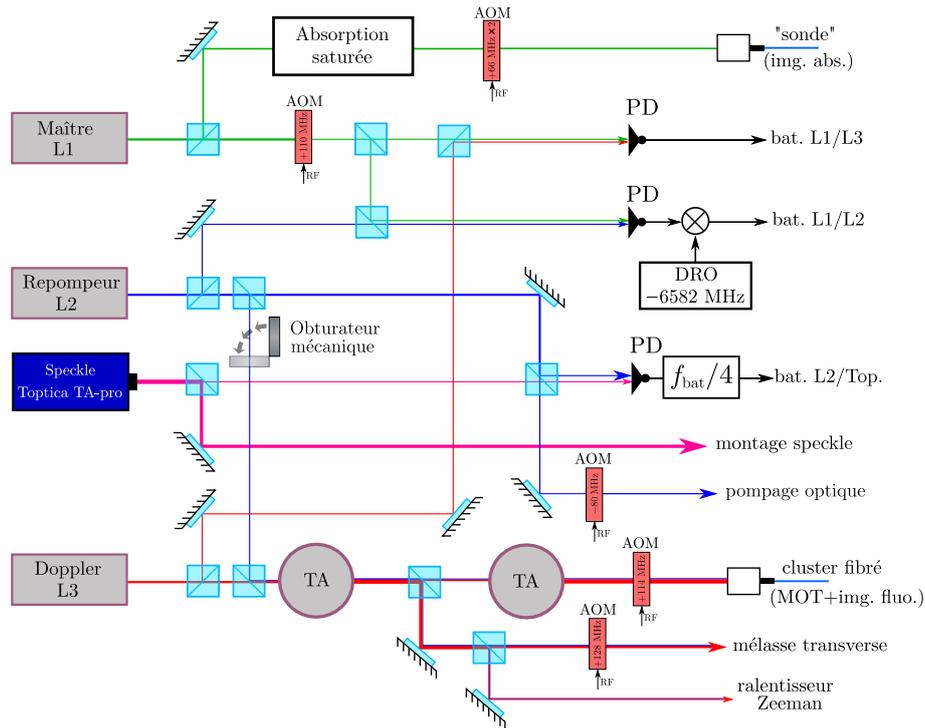


FIGURE 3.7 – **Représentation schématique de notre montage laser.** Le laser maître $L1$ sert de référence de fréquence en étant asservi par absorption saturée. Le laser de refroidissement Doppler $L3$ est asservi par battements avec $L1$. Le laser repompeur $L2$ est lui aussi asservi par battements avec $L2$ grâce à l'utilisation d'électronique rapide. Notons enfin que les faisceaux de $L2$ et $L3$ sont mélangés avant amplification (TA). Les faisceaux arrivant sur les atomes comporteront alors les fréquences provenant de ces deux lasers. Un obturateur mécanique permet de couper le faisceau de $L2$ allant vers les amplificateurs.

désexcitation peut faire tomber les atomes dans l'état $|F = 1\rangle$. Cet état étant un état noir, pour conserver les atomes, on doit alors utiliser un second laser appelé *repompeur* qui permet de recycler les atomes perdus vers la transition cyclante¹¹. Il est accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$.

Notre dispositif laser se compose alors d'un laser principal de refroidissement accordé sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Il est secondé d'un second laser *repompeur* accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Enfin un dernier laser sert de référence de fréquence pour les deux précédents en étant asservi par absorption saturée. Une représentation schématique de l'ensemble de ces lasers et de leur amplification peut être trouvée figure 3.7.

Le ralentisseur Zeeman

La première étape consiste à ralentir suffisamment le jet d'atomes pour pouvoir les capturer dans un premier piège. Un laser désaccordé vers le rouge par rapport à la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ permet de réaliser une décélération des atomes à l'aide de cycles d'absorption et d'émission spontanée de photons. Cependant, le ralentissement des

11. À titre d'illustration, le temps de vie du piège magnéto-optique a été mesuré à une dizaine de secondes. Sans le faisceau repompeur, les atomes tombent dans l'état noir $|F = 1\rangle$ en quelques micro-secondes seulement.

atomes désaccorde le faisceau laser de la résonance atomique par effet Doppler. Pour palier à ce problème, on applique un champ magnétique pour satisfaire localement la condition de résonance par effet Zeeman¹². Ce champ est appliqué à l'aide d'une bobine comportant un nombre de tours par unité de longueur variable, représentée figure 3.6 entre le four et la première chambre. Ainsi, on est capable de réduire la vitesse des atomes de 100 ms^{-1} à environ 20 ms^{-1} sur une distance de seulement 1 m.

Le piège magnéto-optique

Une fois les atomes suffisamment ralentis, ils sont capturés dans le piège magnéto-optique (abrégé en *MOT* pour l'anglais *Magneto-Optical Trap*). Celui-ci est composé de trois paires de faisceaux contra-propageants désaccordés vers le rouge d'environ $\delta = -16 \text{ MHz}$, de polarisations opposées σ^+ et σ^- . Chacun de ces faisceaux possède une puissance d'environ 12 mW. De plus, deux bobines en configuration anti-Helmholtz permettent de générer un champ quadrupolaire, donc un gradient magnétique dans les trois directions de l'espace, afin de créer une force de rappel. On charge environ 2×10^9 atomes en moins d'une seconde grâce à la mélasse transverse qui permet de collimater le jet d'atomes et donc d'améliorer le flux. Une fois le chargement saturé, on coupe le champ magnétique pendant quelques millisecondes afin de réduire fortement la température : c'est l'étape de mélasse optique qui permet de descendre la température à environ $50 \mu\text{K}$.

Piège magnétique et évaporation radio-fréquence

À l'issue de l'étape de mélasse, les atomes sont chargés dans un piège magnétique qui va permettre de se rapprocher considérablement du seuil de condensation. Afin d'augmenter le nombre d'atomes piégeables magnétiquement, il est nécessaire de manipuler l'état interne des atomes. On procède ainsi à une étape de dépompage en éteignant le faisceau de repompage et en accordant le faisceau de refroidissement sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$: en moins d'une milliseconde, les atomes se trouvent dans l'état $|F = 1\rangle$, dont seul le sous-état Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ peut être piégé^{13 14}. Afin de maximiser la population de ce sous-état, on allume un faisceau de pompage optique accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ et polarisé σ^- pendant $40 \mu\text{s}$. En parallèle, on allume le champ du *dipôle* afin de définir un axe de quantification.

Le piège magnétique que l'on utilise est un piège de type *Ioffe-Pritchard*. Il est composé essentiellement de deux éléments :

- Un champ de biais orienté dans la direction \vec{x} , généré par une paire de bobines (*dipôle*) de configuration légèrement plus éloignée que celle de Helmholtz : on a ainsi une courbure positive dans la direction longitudinale au centre des bobines. Une seconde paire de bobines (*anti-dipôle*) permet d'abaisser le champ constant au centre du piège sans changer significativement sa courbure. Cet abaissement du biais magnétique se

12. D'autres solutions furent envisagées lors des premiers développements des expériences d'atomes froids. Parmi celles-ci, mentionnons les faisceaux lasers *chirpés* [29] et les lasers spectralement larges [130].

13. Il est le seul des trois sous-états Zeeman de $|F = 1\rangle$ à avoir le produit $g_F m_F > 0$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un état *Low Field Seeker*, qui est attiré par les zones de faible champ magnétique. En effet, c'est à l'aide d'un minimum de champ magnétique que l'on réalise ce piège, le théorème de Wing interdisant les maxima de champ magnétique.

14. Des huit sous-états Zeeman fondamentaux, il s'agit de celui ayant la plus grande probabilité d'occupation tout en étant piégeable, justifiant son choix.

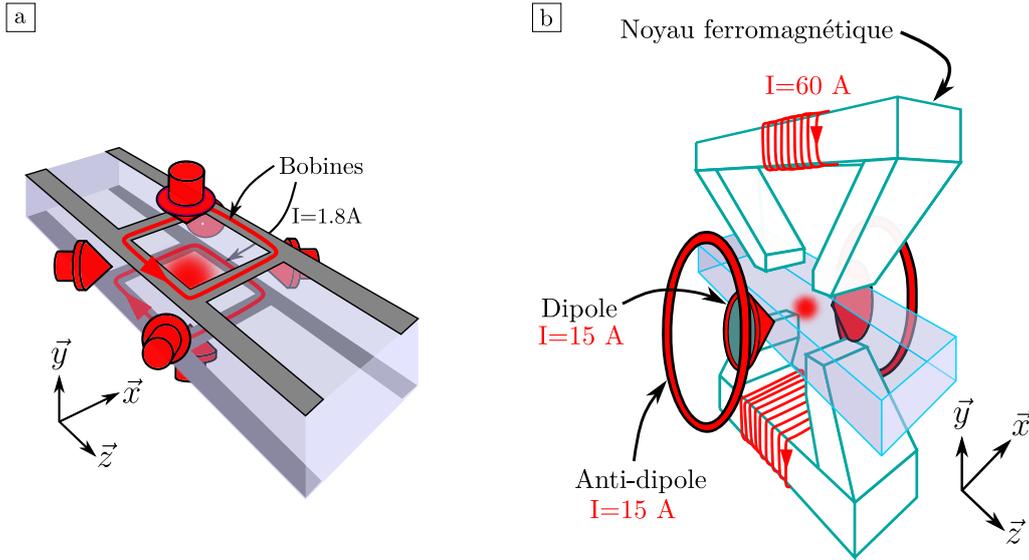


FIGURE 3.8 – **a : Éléments du piège magnéto-optique.** Il est réalisé à l'aide de trois paires de faisceaux contra-propageants et de deux bobines formant un champ quadrupolaire. Ces bobines sont faites à partir de circuits imprimés posés sur la cellule. **b : Géométrie du piège magnétique.** Un champ quadrupolaire intense est créé selon les directions \vec{y} et \vec{z} par un électroaimant. Un champ de biais est généré par deux paires de bobines suivant la direction \vec{x} . Ce champ possède une courbure longitudinale et est responsable du confinement suivant cette direction.

traduit par une compression du nuage [31].

- Un champ quadrupolaire dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) généré par un électroaimant ferromagnétique épais (*quadrupôle*) comportant deux entrefers et deux bobines excitatrices dans deux sens opposés. L'épaisseur importante du matériau magnétique minimise l'effet de l'électroaimant dans la direction \vec{x} .

Le confinement dans la direction \vec{x} est donc réalisée par le champ de *dipôle*¹⁵, tandis que le confinement dans les directions \vec{y} et \vec{z} est fait par le *quadrupôle*. On obtient ainsi un nuage piégé magnétiquement comportant environ 1×10^9 atomes tous dans le même sous-état zeeman à une température de $\sim 300\mu\text{K}$.

Une fois le nuage thermalisé, on procède à une étape de refroidissement évaporatif grâce à la méthode de *couteau radio-fréquence*. Une étude détaillée du refroidissement évaporatif est proposée section 4.4, mais on peut en résumer le principe, illustré figure 3.9, de la manière suivante :

- On tronque le piège de telle sorte que quelques atomes très énergétiques (la queue de la distribution de vitesses de Maxwell-Boltzmann) puissent s'en échapper, chaque atome emportant une énergie supérieure à l'énergie moyenne par atome.
- Les collisions entre les particules étant restées dans le piège permettent au système de thermaliser. Ce nouvel état d'équilibre thermique est caractérisé par une température plus basse, témoignant du refroidissement du système.

15. Notons que la présence du champ de dipôle permet aussi de s'affranchir des pertes par transition Majorana, le champ ne s'annulant à aucun endroit de l'espace.

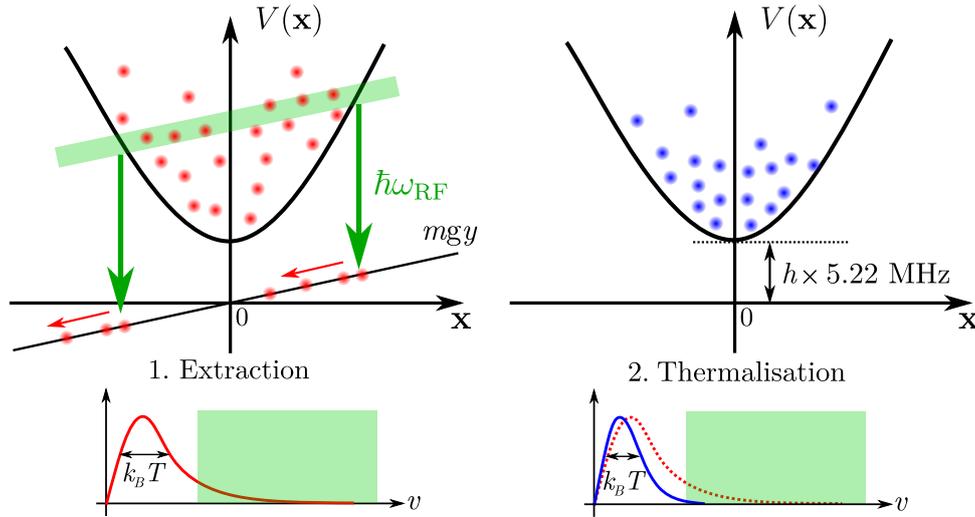


FIGURE 3.9 – **Principe de l'évaporation radio-fréquence.** L'application d'une radio-fréquence permet de tronquer le piège magnétique, et d'éliminer les atomes les plus énergétiques. L'énergie moyenne par particule étant plus basse, la température s'en retrouve abaissée après thermalisation.

La troncature du piège se fait à l'aide d'une onde radio-fréquence rayonnée par les bobines MOT. Celle-ci induit une transition de l'état piégé $|F = 1, m_F = -1\rangle$ à l'état non piégé $|F = 1, m_F = 0\rangle$ lorsque la condition de résonance $\hbar\omega_{\text{RF}} = m_F g_F \mu_B B(\mathbf{x})$ est vérifiée. En abaissant progressivement la fréquence rayonnée pendant une dizaine de secondes, on obtient finalement un nuage d'environ 70×10^6 atomes à une température de $10 \mu\text{K}$.

3.3.3 Chambre de science

Après ces premières étapes de refroidissement, les atomes sont transportés dans une seconde cellule où l'on procède à une évaporation tout-optique pour franchir le seuil de condensation. La raison d'être de cette seconde cellule est de profiter d'un maximum d'accès optiques tout en s'affranchissant de l'environnement magnétique de la première chambre, en particulier celui du ferromagnétique.

Nous nous contenterons ici de présenter les grandes lignes des éléments de cette seconde chambre, de nombreux détails pourront être trouvés dans la thèse d'Alain Bernard [9], dans la thèse de Fred Jendrzejewski [46] et de Kilian Muller [76]. Certains de ces éléments ont fait l'objet de modifications au cours de ma thèse, aussi une étude plus approfondie en sera présentée dans le chapitre 4.

Transport dans une pince optique et piège dipolaire croisé

Après évaporation radio-fréquence, on transfère le nuage dans une pince optique. Il s'agit d'un piège dipolaire créé par focalisation sur les atomes d'un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 1070 \text{ nm}$ et de puissance estimée d'environ 1.5 W . Dans le plan focal, ce faisceau a une taille $w_0 = 28 \mu\text{m}$ et la distance de Rayleigh vaut donc $z_R = \pi w_0^2 / \lambda = 2.3 \text{ mm}$. On obtient ainsi 10×10^6 atomes à une température de $10 \mu\text{K}$ aux alentours du foyer de la

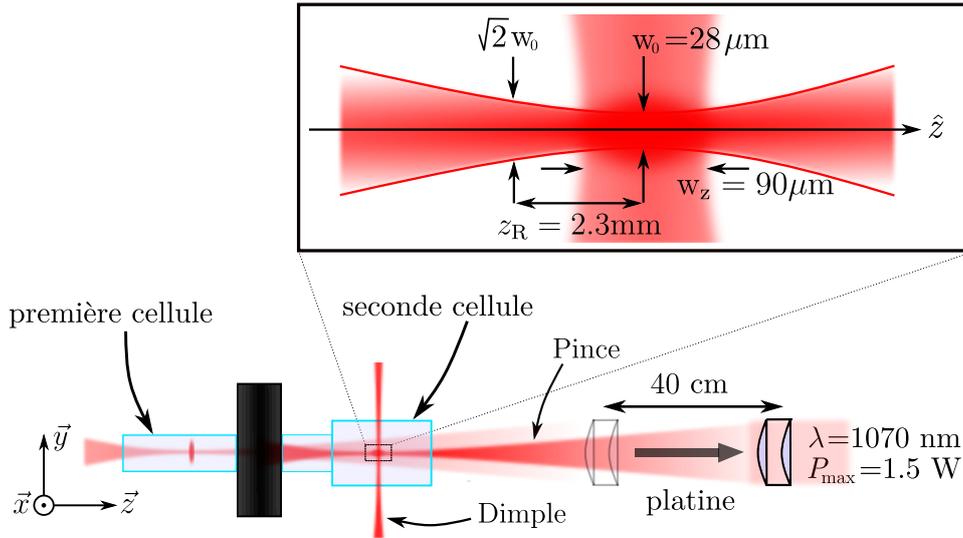


FIGURE 3.10 – **Illustration du transport et du piège optique.** Les atomes sont capturés autour du foyer de la pince dans la première chambre, et le point de focalisation est déplacé de 40 cm à l'aide d'une platine de translation. Une fois le transport terminé, on allume un second faisceau de piégeage vertical (*dimple*).

pince¹⁶.

Le transport dans la seconde chambre se fait à l'aide d'une platine de translation montée sur coussin d'air *Aerotech ABL80040*. Les optiques de focalisation de la pince se trouvant sur cette platine, on déplace ainsi les atomes de 40 cm en moins de 2 s, comme illustré figure 3.10. On estime l'efficacité de transfert à 75%.

Une fois les atomes arrivés dans la seconde chambre, un second faisceau de piégeage dipolaire de longueur d'onde 1070 nm et de puissance 7 W est allumé afin de comprimer le nuage suivant la direction \vec{z} qui correspond à la direction longitudinale de la pince. Ce faisceau *Dimple* est de forme elliptique, de tailles $180 \mu\text{m} \times 90 \mu\text{m}$ dans les directions \vec{x} et \vec{z} respectivement. Étant donnée sa grande longueur de Rayleigh (de l'ordre du centimètre), on suppose que le piégeage vertical induit est négligeable devant toutes les autres sources de piégeage. Ainsi, dans le piège dipolaire croisé, le confinement suivant les directions \vec{x} et \vec{y} est fait par la pince, tandis que le confinement suivant la direction \vec{z} est fait par le faisceau vertical¹⁷, comme illustré figure 3.10. À ce stade, on estime disposer de 3×10^6 atomes à une température de $10 \mu\text{K}$.

Enfin, une dernière étape d'évaporation est requise pour franchir le seuil de condensation. Succinctement, celle-ci consiste à diminuer la puissance des lasers afin de diminuer la profondeur des potentiels de piégeage de telle sorte que les atomes les plus énergétiques puissent s'échapper. La description et l'optimisation de cette étape feront l'objet de la partie 4.4.

16. Ce faible taux de transfert entre le piège magnétique et la pince provient du mauvais recouvrement spatial entre ces deux pièges. La pince est très allongée suivant la direction \vec{z} , tandis que le piège magnétique est étendu suivant la direction \vec{x} . Cette géométrie est un héritage des débuts de cette expérience, originellement utilisée pour étudier le laser à atomes.

17. La forme allongée du dimple dans la direction \vec{x} fait que le piégeage dans cette direction est très faible comparé à celui de la pince. De plus, cela rend le piège optique tolérant face à un léger défaut d'alignement.

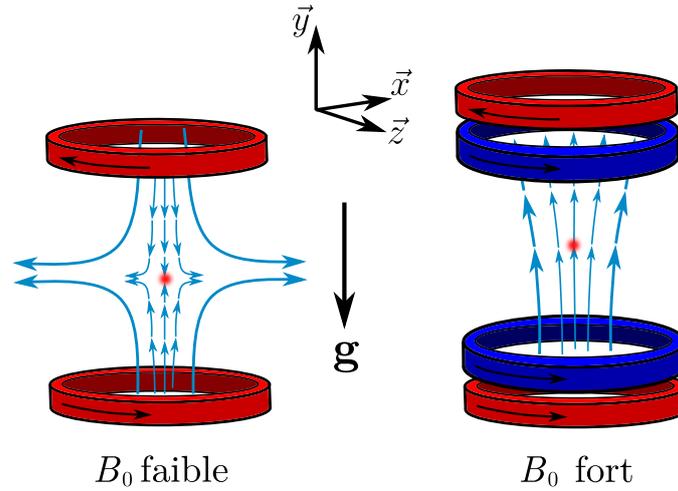


FIGURE 3.11 – **Design simplifié de la lévitation magnétique.** Un gradient magnétique est appliqué aux atomes grâce à une paire de bobines parcourues par des courants opposés (en rouge). La conservation du flux magnétique entraîne des gradients dans les autres directions de l'espace. L'application d'un fort champ de biais créé par d'autres bobines (en bleu) permet de minimiser l'impact de ces gradients et de diminuer les fréquences de piégeage (ou d'anti-piégeage) associées.

Lévitation magnétique

Une contrainte forte de l'étude la localisation d'Anderson réside dans les grands temps de propagation dans le désordre nécessaires pour pouvoir qualifier un état de localisé. Dans l'expérience visant à observer la localisation d'Anderson à trois dimensions, l'évolution du nuage dans le désordre a pu être suivie pendant plusieurs secondes [47], ce qui n'est possible qu'en compensant la gravité. En conséquence, notre expérience dispose d'une lévitation magnétique. Celle-ci a été mise en place durant la thèse d'Alain Bernard et de nombreux détails concernant ce système et ses performances se trouvent dans son manuscrit. Cependant, la lévitation magnétique a fait l'objet d'une attention particulière durant ma thèse, aussi une étude approfondie en sera donnée dans la partie 4.2. Donnons en tout de même quelques caractéristiques.

Le principe de la lévitation magnétique est de compenser la force de pesanteur à l'aide d'un gradient magnétique. Pour l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ qui est *Low Field Seeker*, il s'agit d'un gradient de 30 G cm^{-1} . Cependant, la conservation du flux magnétique $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ induit des gradients dans les autres directions. Ceci impose une valeur minimale aux fréquences de piégeage par le biais du théorème de Wing [98] :

$$\sum_{i=x,y,z} \omega_i^2 \geq \left| \frac{mg^2}{2m_F g_F \mu_B B_0} \right|, \quad (3.26)$$

avec g l'accélération de la pesanteur et B_0 la norme du champ magnétique à la position des atomes. Une stratégie de réduction de ces fréquences consiste alors à augmenter fortement le champ B_0 . On utilise donc des bobines supplémentaires pour générer un tel champ, qui peut monter jusqu'à 2000 G, permettant de réduire les fréquences de piégeage à environ $\omega_i/2\pi \sim 0.2 \text{ Hz}$. Une version simpliste du design de notre lévitation est donnée figure 3.11.

Une stratégie couramment utilisée par l'équipe consiste à placer les atomes dans l'état

$|F = 2, m_F = -2\rangle$ qui est *High Field Seeker*, il sera donc expulsé de la lévitation par les courbures résiduelles. Il s'agit pour nous d'un avantage puisque cela favorise le processus d'évaporation, de plus on ne pourra pas attribuer à la lévitation un éventuel arrêt de l'expansion du nuage dans l'étude de la localisation d'Anderson. Cet état présente des avantages supplémentaires que nous présenterons au cours du chapitre 4. Pour atteindre cet état, on applique une transition radio-fréquence dans le piège optique croisé avant évaporation.

Pour finir, citons un dernier avantage offert par la lévitation magnétique : la compensation de la gravité permet de ne pas "pencher" le potentiel de notre piège optique. Nous avons donc la possibilité de pousser l'évaporation optique jusque dans un domaine où la gravité aurait normalement dû tirer les atomes en dehors du piège, permettant ainsi d'évaporer beaucoup plus loin et d'atteindre des pièges optiques très peu profonds et très décomprimés.

Refroidir encore plus

L'assimilation d'un condensat de Bose-Einstein à une onde de matière monochromatique $|\mathbf{k} = 0\rangle$ nécessite de pouvoir négliger l'énergie des atomes devant l'amplitude du désordre (voir section 2.3.1), et implique donc d'obtenir des nuages extrêmement froids. Bien que la lévitation magnétique nous permette d'obtenir des nuages particulièrement décomprimés, le refroidissement peut être poussé encore plus loin.

Une première technique consiste en une décompression du nuage à l'aide de l'ouverture adiabatique du piège. Cette décompression se traduit par une diminution des fréquences de piégeage, que l'on obtient en changeant la taille des faisceaux de piégeage. En pratique, il nous suffit de reculer le plan de focalisation de la pince de 4.5 mm en 1 s à l'aide de la platine de translation comme illustré figure 3.13a. La température obtenue est alors donnée par le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$T' = \frac{\omega_r'}{\omega_r} T < T, \quad (3.27)$$

avec ω_r la fréquence de piégeage de la pince dans la direction radiale. L'abaissement de la température est donc obtenu par diminution de la densité du nuage, c'est-à-dire par dilution. Cette étape se déroule en même temps que l'évaporation optique.

À la fin du cycle d'évaporation et d'ouverture adiabatique, il reste environ 2×10^5 atomes dont environ 50% forment un condensat de Bose-Einstein. Le potentiel chimique de la partie condensée est estimée à $\mu/h = 40$ Hz, et la température de la fraction thermique est d'environ 5 nK. Une illustration expérimentale de la structure bimodale associée à ces contributions est présentée figure 3.12.

Après l'extinction du piège, l'énergie d'interaction du nuage est convertie en énergie cinétique, le nuage s'étend alors librement dans le champ de lévitation. L'évolution de la taille du nuage donne alors accès à la distribution de vitesse, en particulier à sa dispersion $\Delta k \simeq 0.5 \mu\text{m}^{-1}$.

Une seconde technique, basée sur le principe de focalisation atomique par un potentiel harmonique, permet de réduire davantage cette dispersion. Cette technique dite de *refroidissement par delta-kick* consiste à transférer l'énergie d'interaction en énergie cinétique

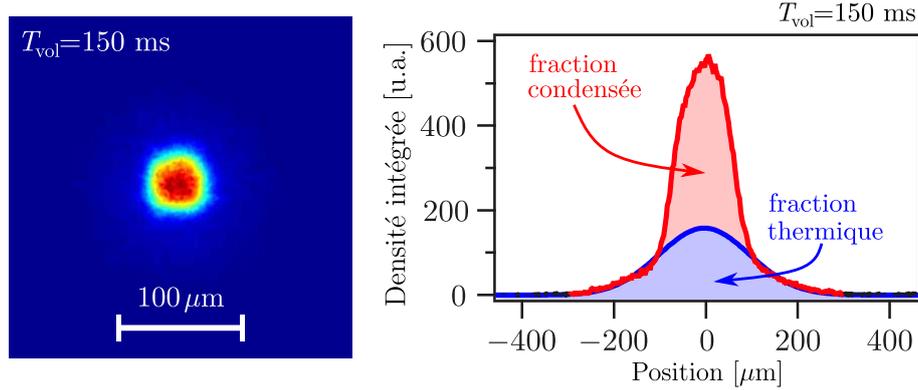


FIGURE 3.12 – **Image expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein.** Cette image correspond à celle d'un condensat après expansion pendant un temps de vol de 150 ms. L'image de droite correspond au profil de la densité intégrée suivant une direction, et montre la double structure témoignant d'une partie condensée. La partie condensée a un profil parabolique (en rouge), tandis que la partie thermique est de forme gaussienne (en bleu).

en éteignant le piège, puis à figer le mouvement des atomes en appliquant un potentiel harmonique pendant un bref instant. L'énergie cinétique est alors transformée en énergie potentielle. Une illustration de ce procédé est donnée figure 3.13b.

Une approche classique permet de justifier cela. En supposant que l'expansion des atomes est balistique, la position des atomes après un grand temps d'expansion t_{exp} est donnée par leur vitesse initiale¹⁸ :

$$\mathbf{x}(t_{\text{exp}}) = \mathbf{v}t_{\text{exp}} . \quad (3.28)$$

Appliquons un kick de potentiel harmonique pendant un temps Δt . La vitesse des atomes à la fin de ce kick est donnée par

$$\dot{\mathbf{x}}(\Delta t) = -\mathbf{x}\omega \sin(\omega\Delta t) + \mathbf{v} \cos(\omega\Delta t) , \quad (3.29)$$

avec ω la fréquence du piège. On peut trouver Δt tel que $\dot{\mathbf{x}}_i = 0$:

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{1}{t_{\text{exp}}\omega}\right) . \quad (3.30)$$

On remarque que Δt ne dépend pas de la vitesse initiale des atomes : on peut donc geler l'ensemble du nuage en appliquant un potentiel harmonique pendant la bonne durée de kick¹⁹. La mise en œuvre expérimentale de cette technique est détaillée dans le manuscrit de thèse de Kilian Muller [76] et témoigne de résultats impressionnants : la dispersion en vitesse s'est abaissée à $\Delta k \simeq 0.15 \mu\text{m}^{-1}$. La température effective associée est alors de $T \sim 150 \text{pK}$, et en tenant compte de la taille du nuage de l'ordre de $\Delta x \sim 30 \mu\text{m}$, on s'approche à un ordre de grandeur de la limite de Heisenberg $\Delta x \hbar \Delta k \simeq 10 \hbar/2$.

18. L'utilisation de temps d'expansion t_{exp} tels que le déplacement des atomes soit très grand devant la taille initiale du nuage permet de s'affranchir de cette dernière, voir annexe A.

19. Une approche équivalente consiste à dire que la force de rappel est proportionnelle à la distance parcourue par les atomes, qui est proportionnelle à la vitesse initiale. L'instant où les vitesses s'annulent ne dépend donc pas de la vitesse initiale des atomes.

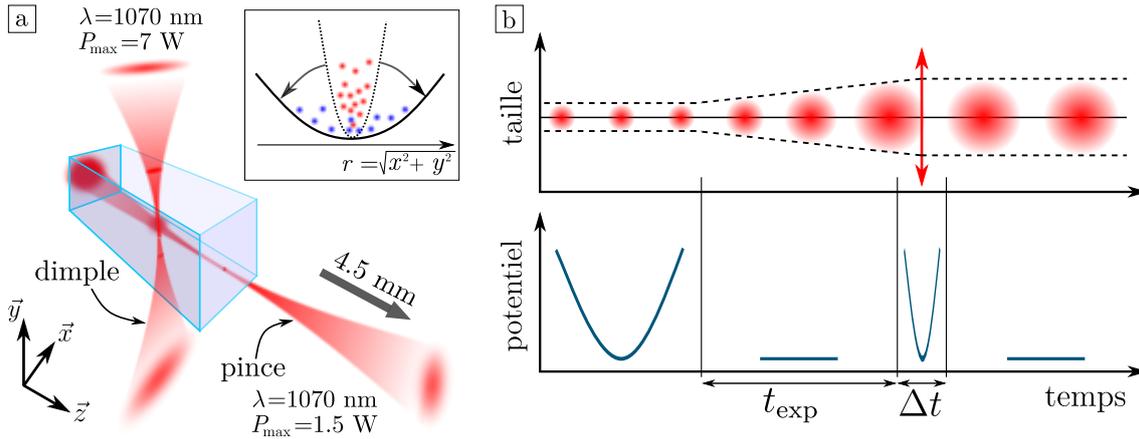


FIGURE 3.13 – **a : Principe de l'ouverture adiabatique.** Le déplacement du point de focalisation de la pince permet d'augmenter la taille du faisceau au niveau des atomes. La fréquence de piégeage en est alors diminuée, et on abaisse alors la température par dilution. **b : Illustration du refroidissement par *delta-kick*.** L'extinction du piège entraîne l'étalement du nuage, et le transfert de l'énergie d'interaction en énergie cinétique. On peut ensuite *focaliser* les atomes à l'aide d'un *kick* de potentiel, en transformant l'énergie cinétique en énergie potentielle, supprimée à l'extinction du piège.

3.3.4 Imagerie

Nos cycles expérimentaux se concluent par une étape de mesure, nous permettant d'obtenir des informations à propos de notre gaz d'atomes. Une grande partie de ces informations peut être extraite d'une image du nuage après extinction du piège (voir annexe A), image que l'on obtient à l'aide d'une caméra et l'utilisation de lasers à résonance avec les atomes²⁰.

Implémentation expérimentale de l'imagerie

L'expérience est équipée de trois caméras *EMCCD C9102* de *Hamamatsu*, chacune comportant une matrice de 1000×1000 pixels de taille $8 \mu\text{m} \times 8 \mu\text{m}$. Ces trois caméras sont contrôlées via l'outil d'acquisition d'images du logiciel *MATLAB*, qui permet aussi de récupérer et traiter les images obtenues. L'acquisition des images est déclenchée de manière externe par un second ordinateur pilotant l'ensemble de l'expérience.

Une première caméra acquiert des images des atomes dans la première chambre selon l'axe horizontal \vec{x} avec un grandissement de 1, la zone imageable est donc de $8 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$. Il est possible d'utiliser cette caméra pour de l'imagerie par absorption (représentée figure 3.14) ainsi que pour de l'imagerie par fluorescence grâce à un montage $4f$. Néanmoins, l'observation selon une direction induit forcément une intégration de la densité suivant cette direction : on ne peut mesurer qu'une densité intégrée

$$n_{2D}(y, z) = \int dx n(x, y, z) , \quad (3.31)$$

20. L'utilisation de lasers à résonance conduit inévitablement à la destruction du nuage sur notre expérience. Il est donc nécessaire de répéter l'ensemble du cycle expérimental pour obtenir une seconde image des atomes.

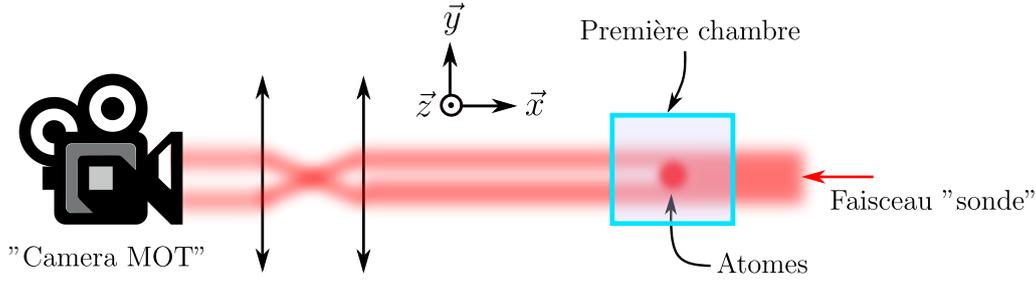


FIGURE 3.14 – **Imagerie par absorption.** Un faisceau collimaté est envoyé sur les atomes, qui absorbent une partie des photons qui traversent le nuage. Le signal détecté à la caméra correspond à "l'ombre" des atomes, et la comparaison avec une image du faisceau incident sans atomes permet de remonter à la densité atomique intégrée selon la direction longitudinale.

avec n la densité à trois dimensions.

Les deux dernières caméras sont disposées autour de la chambre de science selon l'axe horizontal \vec{x} et l'axe vertical \vec{y} . Toutes deux voient le nuage au travers d'un système optique de grandissement 3²¹, conduisant à une résolution de 2.7 μm pour une zone imageable de 2.7 mm \times 2.7 mm. Seule de l'imagerie par fluorescence est utilisable dans cette chambre, en revanche il est possible d'utiliser ces deux caméras simultanément pour obtenir les densités intégrés suivant deux directions $n_{2D}(y, z)$ et $n_{2D}(x, y)$ pour le même nuage.

Imagerie par absorption

Le principe de l'imagerie par absorption repose sur la loi de Beer-Lambert

$$I(y, z) = I_0(y, z) \times \exp(-\sigma n_{2D}(y, z)) , \quad (3.32)$$

avec σ la section efficace d'absorption des atomes. En effet, lorsque qu'un faisceau laser traverse un milieu, son absorption dépend directement de la densité du milieu en particules absorbantes (la densité atomique dans notre cas). Pour sonder cette densité atomique, on envoie donc un faisceau laser à résonance directement sur les atomes et la caméra comme illustré figure 3.14.

Dans un régime de très basse saturation $s \ll 1$, on peut montrer que la section efficace d'absorption des atomes σ est indépendante de l'intensité incidente $I_0(y, z)$ et $\sigma \approx 2.9 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$ [117]. En pratique, on s'assure d'être dans le régime de basse saturation en gardant la puissance du faisceau *sonde* inférieure à 100 μW . Le faisceau *sonde* correspond à une impulsion lumineuse d'une durée de 50 μs réalisée par un laser à résonance avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ²².

L'application de la loi de Beer-Lambert permet de déterminer la densité atomique

21. Ce grandissement a été mesuré en observant la chute libre du nuage en l'absence de la lévitation.

22. Puisque le faisceau sonde est à résonance avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, celui-ci ne permet de détecter que les atomes se trouvant dans l'état $|F = 2\rangle$. Afin de mesurer aussi les atomes qui sont dans l'état $|F = 1\rangle$, on procède à un transfert de population vers l'état $|F = 2\rangle$ à l'aide d'une impulsion du faisceau repompeur accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ pendant une durée de 40 μs . Ce transfert est réalisé 100 μs avant le déclenchement de la caméra.

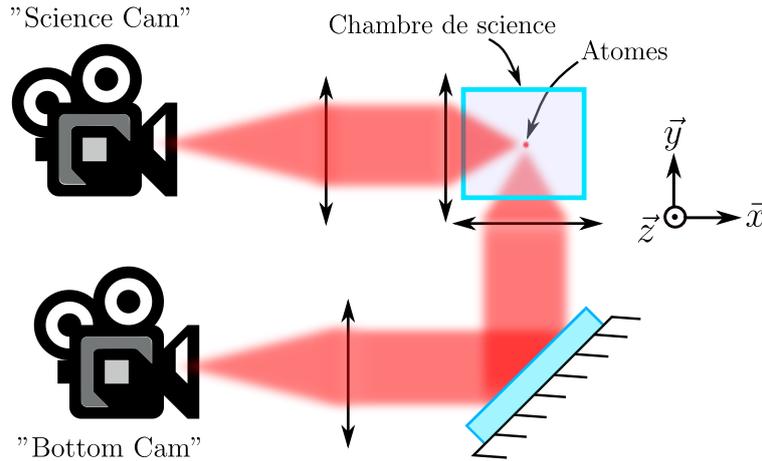


FIGURE 3.15 – Dispositif d'imagerie par fluorescence pour la chambre de science. Une caméra capte les photons de fluorescence émis par les atomes selon une direction horizontale (*Science Cam*), tandis qu'une autre capte ceux émis vers le bas avec un transport d'image (*Bottom Cam*). Les faisceaux de fluorescence ne sont pas représentés ici (selon l'axe \vec{z}).

intégrée suivant l'axe d'imagerie :

$$n_{2D}(y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{I_0(y, z)}{I(y, z)} \right). \quad (3.33)$$

L'opération de reconstruction du profil de densité atomique nécessite donc deux images : une première image des atomes absorbant une partie du faisceau *sonde*, puis une seconde image du même faisceau sans les atomes pour en déterminer le profil d'intensité $I_0(y, z)$. En pratique, une troisième image est utilisée afin de soustraire le bruit de fond.

Imagerie par fluorescence

Le principe de l'imagerie par fluorescence consiste à éclairer les atomes avec de la lumière à résonance, puis à détecter la lumière que les atomes diffusent à l'aide d'un système optique de grande ouverture numérique, comme illustré figure 3.15. Un avantage de cette technique par rapport à l'imagerie par absorption est sa capacité à détecter de très faibles nombres d'atomes, rendu possible grâce à l'amplification des caméras. Un deuxième avantage réside dans la simplicité de sa mise en œuvre : dans la première chambre, l'imagerie par fluorescence est réalisée à l'aide des faisceaux MOT. L'imagerie de la seconde chambre est quant à elle réalisée à l'aide de deux autres faisceaux dédiés. Les faisceaux d'imagerie consistent en une impulsion lumineuse d'une durée de $50 \mu\text{s}$, fortement saturante $s \gg 1$ et accordée sur la résonance de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ²³ afin de maximiser le taux de diffusion de photons²⁴.

23. De même que pour l'imagerie par absorption, les faisceaux d'imagerie ne sondent que les atomes se trouvant dans l'état $|F = 2\rangle$. Il est aussi possible d'adresser les atomes qui sont dans l'état $|F = 1\rangle$ en superposant le faisceau repompeur aux faisceaux de fluorescence. En pratique, le mélange des faisceaux se fait avant les amplificateurs optiques, et il est possible de couper la partie repompeur à l'aide d'un obturateur mécanique, voir figure 3.7.

24. Notons qu'à forte saturation le taux d'émission spontanée ne dépend plus de l'intensité du faisceau incident et sature à $\Gamma_{\text{sp}} = \Gamma/2$, voir section 3.2.3.

L'intensité diffusée captée dans le plan d'imagerie est alors donnée par :

$$I_{\text{fluo}}(y, z) \approx \frac{\Omega}{4\pi} \Gamma_{\text{sp}} \hbar \omega_0 n_{2\text{D}}(y, z) , \quad (3.34)$$

avec $\Omega \simeq \pi \text{ON}^2$ l'angle solide dans lequel les photons de fluorescence sont captés par le système d'imagerie d'ouverture numérique $\text{ON} \sim 0.4$.

Théoriquement, une unique image suffit à obtenir le profil de densité atomique. Cependant, une seconde image capturée avec les faisceaux de fluorescence allumés est utilisée afin de soustraire un éventuel bruit dû à ceux-ci.

4. Mises à jour de l'expérience

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment nous pouvons générer un condensat de Bose-Einstein, notre source d'onde de matière. Nous avons de plus présenté les principaux mécanismes d'interaction lumière-matière dont nous disposons pour manipuler les atomes, ainsi que la manière dont ces outils sont implémentés sur notre expérience. Une telle plateforme requiert une quantité importante de matériels qu'il est nécessaire d'entretenir, de réparer, voire de remplacer.

Dans ce nouveau chapitre, nous nous pencherons sur les modifications apportées à l'expérience au cours de ma thèse. Dans la première partie, nous décrirons le nouveau système informatique de contrôle de l'expérience. Dans un second temps, nous caractériserons la lévitation magnétique suite à une avarie sur le circuit de refroidissement à eau. Ensuite, nous nous concentrerons sur le piège dipolaire dont le laser source a été changé. Pour terminer, nous discuterons de l'amélioration de l'évaporation optique permise par les changements précédents.

4.1 Contributions au système informatique de l'expérience

Souvent absente des présentations des expériences, l'informatique occupe pourtant une place primordiale dans les dispositifs d'atomes ultra-froids. Le contrôle simultané et de manière séquentielle des différents équipements de l'expérience, souvent précis à la micro-seconde, n'est possible qu'à l'aide d'un ordinateur disposant de sorties de tension contrôlables. Cet ordinateur, appelé *séquenceur*, constitue le cerveau de l'ensemble du dispositif et contrôle tous les éléments nécessaires à la manipulation des atomes.

Le second aspect où l'informatique se rend indispensable réside dans l'acquisition et le traitement d'images. Le contrôle des caméras et l'extraction des quantités physiques à partir d'images expérimentales nécessite l'utilisation d'un ordinateur et d'au moins un logiciel adapté.

4.1.1 Contrôle de l'expérience : passage à la suite Cicero

Une modification majeure a été le changement du système informatique de contrôle de l'expérience. Le précédent système développé par *André Villing*, ingénieur électronicien du laboratoire maintenant retraité, était piloté de manière programmatique depuis le logiciel Matlab. À des fins de maintenance ainsi que de meilleures performances, le nouveau séquenceur est d'origine commerciale et est basé sur du matériel *National Instruments* :

- Un ordinateur *PXIe-8840* dans un châssis *PXIe-1078* qui alimente aussi les cartes de génération de signaux.
- Deux cartes numériques *PXIe-6535* de 32 voies chacune.
- Deux cartes analogiques *PXIe-6738* de 32 voies $\pm 10V$ chacune et codées sur 16 bits.

En addition, un circuit logique programmable (*FPGA*) *XEM3001* provenant de *Opal-Kelly* permet de générer une horloge de fréquence variable pour le matériel *National Instruments*. La justification de cette horloge de fréquence variable réside dans la grande variabilité de la durée des différentes étapes d'une expérience d'atomes ultra-froids : l'expérience peut rester dans le même état plusieurs secondes (pendant le chargement d'un MOT par exemple) tout comme elle doit pouvoir changer d'état pendant quelques microsecondes seulement (pendant l'imagerie par exemple). Une séquence durant typiquement 30 s discrétisée toutes les microsecondes pour un minimum d'une cinquantaine de voies saturerait alors la mémoire de l'ordinateur.

L'écriture de la séquence se fait à présent grâce à la suite *Cicero Word Generator*, développée au *MIT* dans le groupe de Wolfgang Ketterle [52]. Cette suite comporte deux logiciels qui fonctionnent selon une architecture client/serveur. Le client *Cicero* est une interface graphique dans laquelle l'utilisateur écrit une séquence sous la forme d'une suite d'étapes comme illustré figure 4.1. Au lancement d'un cycle expérimental, *Cicero* envoie les données de séquence au serveur *Atticus* qui calcule alors les consignes des cartes ainsi que l'horloge variable à appliquer [51].

Grâce à cette architecture client/serveur, il est possible de connecter une interface *Cicero* à plusieurs serveurs. Nous avons ainsi développé un serveur supplémentaire¹ afin de faciliter notre traitement de données. Celui-ci enregistre les principales données de séquence² à chaque cycle.

Ce changement de séquenceur ouvre de nouvelles perspectives en augmentant le nombre de voies utilisables (16 voies analogiques codées sur 12 bits et 48 voies numériques avec le précédent système) tout en permettant la génération de signaux arbitraires (auparavant limités à des morceaux de rampes).

1. Une attention particulière a été accordée à n'apporter aucune modification au code source de la suite *Cicero* excepté dans l'environnement de ce serveur. Les environnements de *Cicero*, *Atticus* et les environnements communs n'ont subi aucun changement pour s'assurer de la compatibilité avec la version compilée 1.64rev7 de la suite.

2. Il s'agit du nom de séquence, de l'heure de lancement, de l'ensemble des variables, des étapes, des groupes d'étapes et de la dernière consigne du piège dipolaire avant le temps de vol.

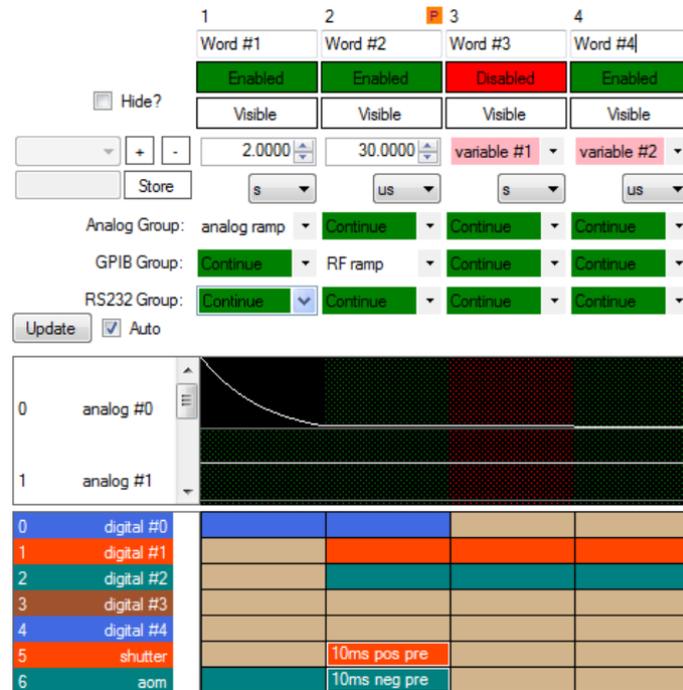


FIGURE 4.1 – **Capture d'écran de Cicero.** Une séquence est une suite d'étapes (des colonnes dans l'interface) pendant lesquelles on peut faire des motifs avec les voies analogiques. Les voies numériques changent d'état en général entre deux étapes. Il est possible de désactiver certaines étapes et d'utiliser des variables. Figure tirée de [52].

4.1.2 Développement d'une nouvelle interface d'acquisition et de traitement d'images

Comme présenté dans la partie 3.3.4, les caméras que l'on utilise sur l'expérience sont configurées et contrôlées via le logiciel Matlab. En particulier, l'acquisition et le traitement des images se faisait à l'aide d'une interface commune avec l'ancien séquenceur. Son remplacement a donc eu un impact important sur le fonctionnement de la partie imagerie.

En conséquence, nous avons développé une nouvelle interface graphique permettant de configurer les caméras, d'acquérir et de traiter les images, d'enregistrer les données et de contrôler tout les éléments non adressables depuis Cicero. Le cahier des charges de cette nouvelle interface est donc le suivant :

- Gestion des trois caméras, avec possibilité de faire l'acquisition simultanée sur les deux caméras de la chambre de science.
- Imagerie par absorption et par fluorescence.
- Calcul en direct des grandeurs physiques pour chaque image.
- Lecture des données de Cicero récupérées grâce au serveur que nous avons développé.
- Programmation en début de cycle des sources radio-fréquence utilisées pour l'évaporation radio-fréquence et la manipulation de l'état de spin dans la chambre de science³.

3. Cette programmation en début de cycle est rendue possible grâce à l'utilisation d'un *FileSystemWatcher* provenant d'une bibliothèque .NET utilisable dans le logiciel Matlab. Un fichier texte contenant les données du cycle en cours est généré en début de séquence par le serveur que nous avons développé. Le *FileSystemWatcher* déclenche alors automatiquement la lecture du fichier texte par l'interface, permettant à celle-ci de disposer des données de séquence dès le début de celle-ci.

- Enregistrement de l'ensemble des données et des paramètres du cycle pour un futur traitement.

L'utilisation de cette nouvelle interface a donc permis de centraliser les données générées par l'acquisition d'images. De plus, ce changement a permis de s'affranchir de plusieurs canaux de communication, les libérant ainsi pour le contrôle d'instruments. Enfin, l'utilisation et le fonctionnement de cette nouvelle interface Matlab sont simplifiés, permettant d'opérer avec une plus grande facilité les changements à venir sur l'expérience.

4.2 Calibration de la lévitation magnétique

Comme présenté partie 3.3.3, la lévitation magnétique est un élément essentiel de notre expérience. En plus d'être un pré-requis pour l'étude de la localisation d'Anderson à trois dimensions, celle-ci nous permet de manière plus générale d'obtenir des échantillons particulièrement froids. Son bon fonctionnement est donc crucial pour notre expérience.

Notons également que dans le cadre de l'étude la transition d'Anderson à énergie résolue, il s'avère nécessaire d'avoir une connaissance fine du potentiel magnétique dans lequel les atomes évoluent. En effet, l'approche spectroscopique mentionnée dans le chapitre 2 repose sur l'existence d'un *champ magnétique magique* B_0^* précis et à bas champ, pour lequel les inhomogénéités du potentiel de lévitation peuvent affecter un piège optique très décomprimé. De plus, il est nécessaire de caractériser le potentiel de lévitation à fort champ dans lequel les atomes vont évoluer en présence de désordre.

Malheureusement, la formation d'un bouchon à base de précipités métalliques dans le circuit de refroidissement de la lévitation a conduit au démontage d'une partie importante du système de lévitation magnétique. Les modifications apportées avant remontage ayant pu conduire à une modification du comportement magnétique du système, une nouvelle calibration attentive des champs magnétiques a été menée.

Dans cette partie, nous présenterons dans un premier temps notre système de lévitation ainsi que les modifications qui y ont été apportées. Ensuite, nous nous pencherons sur les méthodes utilisées pour calibrer le système après sa réinstallation sur l'expérience, en commençant par une spectroscopie radio-fréquence permettant de calibrer très précisément les champs magnétiques, puis à l'aide d'expériences d'oscillations afin de caractériser le potentiel de lévitation.

4.2.1 Implémentation de la lévitation magnétique

L'ensemble du système de la lévitation magnétique a été développé alors que l'équipe se dirigeait vers les expériences de localisation d'Anderson à trois dimensions. De nombreux détails de conception pourront être retrouvés dans le manuscrit de thèse d'Alain Bernard [9], mais rappelons les éléments nécessaires à la suite.

La lévitation magnétique est composée d'un grand nombre de paires de bobines, illustrées figure 4.2. Les deux paires de bobines les plus proches de la cellule, en bleu et en vert, permettent de créer un champ de biais selon la direction verticale \vec{y} au niveau des atomes. Les bobines de *Biais A*, en bleu, se trouvent dans une configuration légèrement

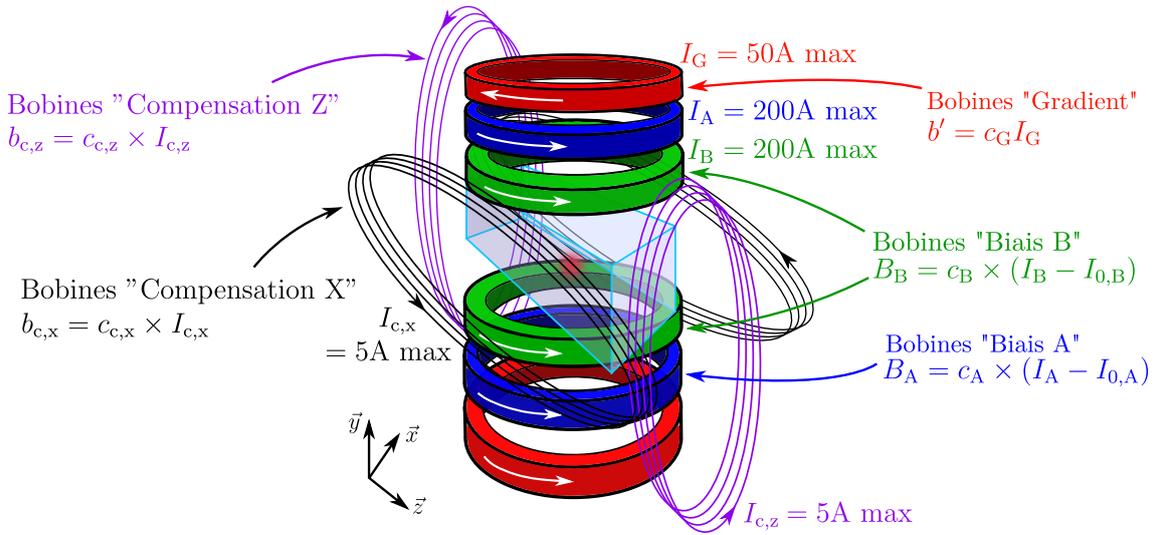


FIGURE 4.2 – **Géométrie de la lévitation magnétique.** Le système de lévitation magnétique se compose d'un grand nombre de bobines. Les bobines représentées en rouge génèrent un gradient magnétique b' suivant la direction verticale \vec{y} afin de lutter contre la gravité. Les bobines en bleu et en vert permettent de générer de forts champs magnétiques de biais dans la direction verticale. Les bobines violettes et noires permettent quant à elles de générer de petits champs horizontaux dans les directions \vec{z} et \vec{x} respectivement.

plus éloignée que la configuration de Helmholtz, tandis que les bobines de *Biais B*, en vert, sont légèrement rapprochées par rapport à la configuration de Helmholtz. La paire la plus éloignée, en rouge, permet de créer un gradient magnétique afin de suspendre les atomes contre la gravité.

Le champ magnétique au niveau des atomes peut alors être écrit

$$\mathbf{B} = \left[B_0 - b'y + b'' \left(y^2 - \frac{x^2 + z^2}{2} \right) \right] \vec{y} + \left(\frac{b'}{2} x \right) \vec{x} + \left(\frac{b'}{2} z \right) \vec{z}, \quad (4.1)$$

où b' correspond au gradient magnétique généré par les bobines de *Gradient*. Le paramètre b'' est la courbure du champ généré par l'écart des bobines de biais à la configuration de Helmholtz. La valeur du champ au centre est donnée par B_0 . Le potentiel magnétique étant proportionnel à la norme du champ, celle-ci est donnée à l'ordre deux par

$$B = B_0 - b'y + b''y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{b'^2}{4B_0} - b'' \right) (x^2 + z^2), \quad (4.2)$$

où le terme linéaire est celui qui permet de compenser la gravité.

Les gradients dans les directions horizontales \vec{x} et \vec{z} proviennent de la conservation du flux magnétique, et rendent le potentiel de lévitation très sensible aux biais horizontaux. Il est donc important de contrôler finement le champ transverse. À ces fins, plusieurs bobines supplémentaires sont utilisées pour générer de faibles champs de compensation dans les directions \vec{x} (bobines représentées en noir sur la figure 4.2) et \vec{z} (en violet).

Les courants parcourant les bobines de lévitations sont générés à l'aide d'alimentations ultra-stables⁴ permettant de délivrer jusqu'à 200 A pour les bobines de biais, et jusqu'à

4. Ces alimentations sont stables au mA près.

50 A pour les bobines de gradient. Les bobines sont reliées aux alimentations au travers de boîtiers d'isolement à commutation rapide ne laissant passer que les courants positifs à l'aide de diodes. Les alimentations *TTi QL355T* des bobines de compensation sont quant à elles limitées à 5 A.

L'objectif de la calibration de la lévitation magnétique est donc de déterminer les propriétés du potentiel de lévitation, et donc les grandeurs caractéristiques des champs magnétiques apparaissant dans l'équation 4.1, en fonction des courants parcourant les bobines générant ces champs. En particulier, nous chercherons à établir des relations linéaires entre les différents champs et les courants :

$$B_A = c_A \times (I_A - I_{0,A}) \quad \text{et} \quad B_B = c_B \times (I_B - I_{0,B}) , \quad (4.3)$$

$$b''_A = c''_A \times (I_A - I_{0,A}) \quad \text{et} \quad b''_B = c''_B \times (I_B - I_{0,B}) , \quad (4.4)$$

$$b_{c,x} = c_{c,x} \times I_{c,x} \quad \text{et} \quad b_{c,z} = c_{c,z} \times I_{c,z} , \quad (4.5)$$

$$b' = c_G \times I_G , \quad (4.6)$$

où les grandeurs c_i correspondent aux facteurs de calibration et les courants $I_{0,i}$ correspondent aux courants seuils liés aux boîtiers d'isolement contenant des diodes. La calibration précise des champs de biais se fera à l'aide d'une spectroscopie radio-fréquence des déplacements des sous-niveaux Zeeman, tandis que la détermination des courbures et du gradient se feront à l'aide de la mesure des caractéristiques du potentiel de lévitation, plus particulièrement de la fréquence de piégeage.

4.2.2 Intervention sur le circuit de refroidissement

En raison des très gros courants pouvant circuler dans les bobines de lévitation, celles-ci sont refroidies par l'intermédiaire de leur support à l'aide d'une circulation d'eau. En effet, ces supports en aluminium, disposés de part et d'autre de la cellule, comportent chacun trois bobines scellées à l'aide d'une résine. Ces supports agissent alors comme un réservoir thermique pour les bobines.

Cependant, la formation d'un précipité métallique à l'intérieur de ces supports a privé les bobines de lévitation de refroidissement, indispensable pour un fonctionnement à haut courant⁵. Le retrait de ce bouchon a nécessité le démontage d'une partie du système de lévitation ainsi qu'une intervention lourde sur les supports en aluminium. Initialement, l'eau circulait dans des trous borgnes percés dans le support en aluminium (représentés en rouge figure 4.3.a), dont l'étanchéité était assurée par des vis montées serrées et scellées à l'aide d'une colle anaérobie. Le débouchage a entraîné la destruction de ces vis.

Après de nombreux travaux de débouchage et d'étanchéité, ce refroidissement est à présent effectué par le contact entre le support en aluminium et la circulation d'eau dans deux tubes en cuivre encastrés⁶, visibles figure 4.3.a. On comprend aisément que ce nouveau refroidissement sera moins efficace que précédemment, celui-ci se faisant par le biais de deux contacts thermiques et la surface de contact étant diminuée. Néanmoins, on observe une réelle efficacité de refroidissement comme en témoigne la figure 4.3.b.

5. Les bobines de chaque support absorbent une puissance de plusieurs kW lors d'une lévitation très décomprimée, c'est-à-dire à haut courant [9].

6. Le débouchage des trous leur a fait perdre leur étanchéité, et après plusieurs essais infructueux, nous avons retenu la solution de deux tubes de cuivre encastrés et débouchants. De nombreux tests électriques ont été menés sur les bobines tout au long de leur maintenance pour s'assurer de l'absence de dégradation.

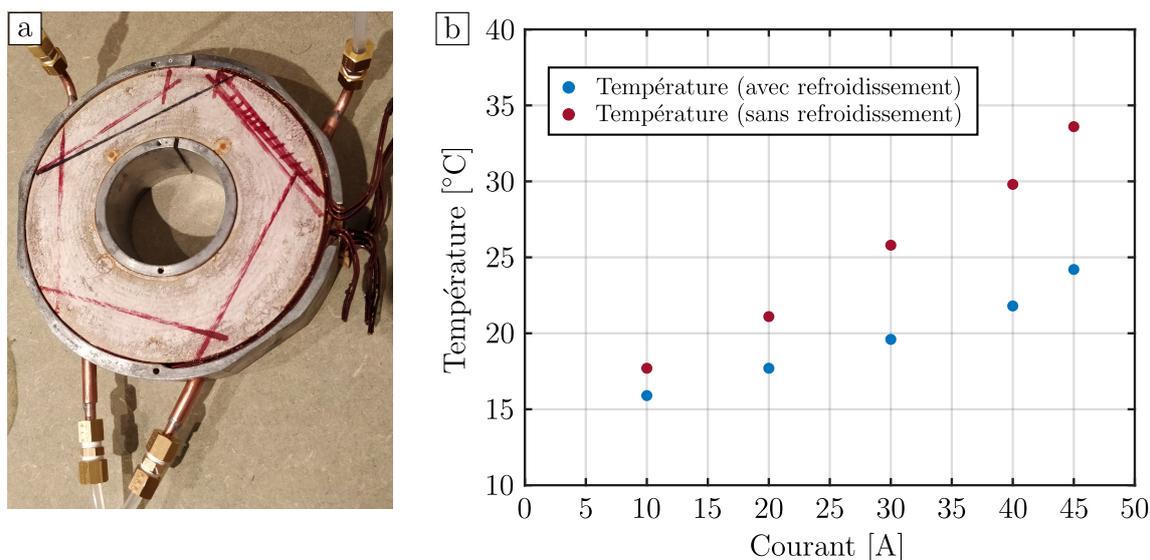


FIGURE 4.3 – **a : Refroidissement de la lévitation magnétique.** L'un des supports des bobines de la lévitation est maintenant refroidi à l'aide de deux tubes en cuivre le traversant. Auparavant, l'eau circulait directement dans le support dans un circuit percé illustré par les traits rouges. Les tubes en cuivre ont pu être installés en rendant une partie de ce circuit débouchant. **b : Efficacité de refroidissement.** Ces mesures ont été réalisées dans des conditions proches de véritables cycles expérimentaux. Le même courant a été appliqué pendant 10 s sur toutes les bobines à la fin de séquences habituelles. La température a été mesurée après la répétition d'au moins 30 cycles et en s'assurant de sa stabilisation.

4.2.3 Calibration des champs par radio-fréquences

Afin de déterminer très précisément le champ magnétique généré par les bobines de biais, la mesure de ces champs a été effectuée par spectroscopie radio-fréquence. Son principe repose sur le transfert de population entre l'état d'origine $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et les états $|F = 2, m_F = \{-2, -1, 0\}\rangle$ accessibles⁷, dont la séparation en énergie avec l'état d'origine dépend du champ magnétique en vertu de la formule de Breit-Rabi 3.14. Ainsi, lorsque la radio-fréquence satisfait la condition de résonance $\nu_{\text{RF}} = \Delta_{\text{hf}} + \delta\nu(B)$ avec $\delta\nu(B)$ le décalage dû au champ magnétique, une partie des atomes sera transférée dans l'un des sous-états de $|F = 2\rangle$. Le principe de cette spectroscopie est illustré figure 4.4.a.

En relevant le spectre des transitions radio-fréquences⁸ en balayant la fréquence rayonnée ν_{RF} comme illustré figure 4.4.b, on accède ainsi à la valeur du champ magnétique au niveau des atomes en déterminant $\delta\nu(B)$, qu'il est possible d'approximer par le décalage par effet

7. Au cours de cette étude, nous nous sommes rendus compte que le nuage subissait une dépolarisation peuplant les trois sous états Zeeman $|F = 1, m_F = \{-1, 0, 1\}\rangle$, faisant alors apparaître sept résonances visibles sur la figure 4.4. Cette dépolarisation a été confirmée par une analyse Stern-Gerlach. Depuis, cette dépolarisation a pu être évitée.

8. Cette mesure a été effectuée dans le piège dipolaire croisé, et étant donné le très grand désaccord du faisceau de piégeage, on peut considérer que les déplacements lumineux induits sur les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ sont identiques. La séparation entre les états considérés n'en sera donc pas affectée. Il est ensuite possible d'imager sélectivement les atomes transférés dans l'état $|F = 2\rangle$ par fluorescence en coupant la partie du faisceau d'imagerie provenant du laser repompeur.

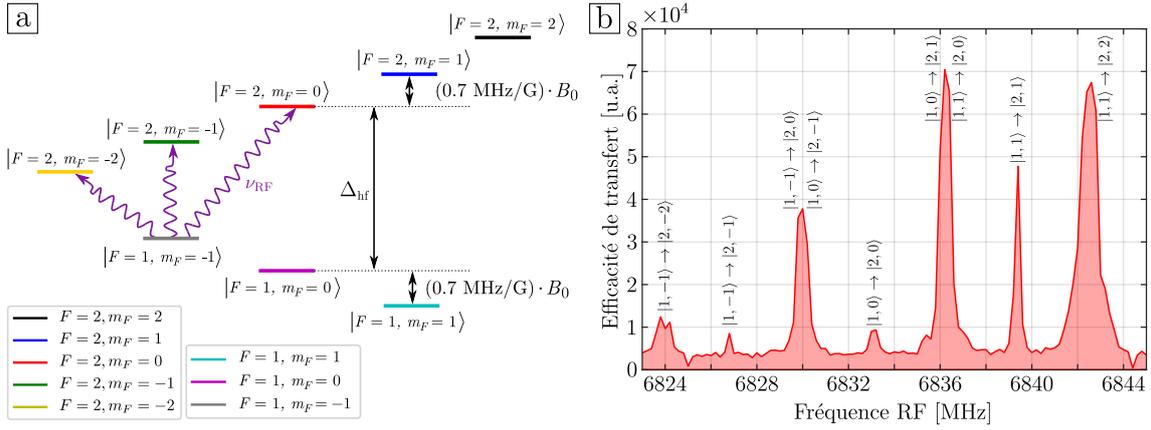


FIGURE 4.4 – **a** : Principe de la spectroscopie radio-fréquences. En balayant la fréquence de l'onde radio-fréquence appliquée, on adresse les différentes transitions entre sous-états Zeeman de $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ dont la séparation dépend du champ magnétique. **b** : Spectre radio-fréquence. Lorsque l'onde radio-fréquence est à résonance, on transfère des atomes initialement dans l'état $|F = 1\rangle$ vers l'état $|F = 2\rangle$. La présence de sept résonances équidistantes indique une dépolérisation du nuage, les règles de sélection imposant $\Delta m_F = \{\pm 1, 0\}$. Les trois premières résonances correspondent à celles illustrées sur la figure **a**. Le champ magnétique extrait de ce spectre est d'environ 4.4 G.

Zeeman linéaire dans un régime de bas champ :

$$\delta\nu(B) \simeq -(m_{F_2} - m_{F_1}) \times 0.7 \text{ MHz G}^{-1} \times B, \quad (4.7)$$

où le champ B correspond à la norme du champ magnétique total, c'est-à-dire le champ de biais étudié et les champs naturellement présents \mathbf{b}_0 :

$$B = \sqrt{(b_{c,x} + b_{0x})^2 + (B_A + B_B + b_{0y})^2 + (b_{c,z} + b_{0z})^2}. \quad (4.8)$$

En réalisant cette opération pour différents courants pour chacune des bobines de biais, il nous est possible de déterminer les calibrations des champs magnétiques 4.3 et 4.5. En particulier, le comportement à très bas champ nous permet de déterminer les différentes composantes b_{0i} du champ rémanent, souvent négligeable devant le champ rayonné pour des courants usuels. L'ensemble des calibrations des champs de biais est alors donné table 4.1.

4.2.4 Étude du potentiel de lévitation

Nous l'avons mentionné précédemment, il est important de maîtriser le potentiel de lévitation en fonction des différents champs magnétiques. Cette considération est d'autant plus importante dans la mesure où nous envisageons de réaliser un passage adiabatique d'une lévitation au champ magnétique magique, à bas champ, à une lévitation très décomprimée à fort champ.

Dans cette section, nous allons donc caractériser le potentiel de lévitation en terme de fréquence de piégeage et de centre du potentiel. Nous pourrons ainsi calibrer le gradient magnétique généré par les bobines de gradient ainsi que les courbures des champs

| Grandeur | Valeur |
|----------------------------------|----------------------------------|
| Calibration Biais A c_A | $4.70 \pm 0.05 \text{ G A}^{-1}$ |
| Calibration Biais B c_B | $6.18 \pm 0.06 \text{ G A}^{-1}$ |
| Calibration Compensation X c_x | $4.90 \pm 0.05 \text{ G A}^{-1}$ |
| Calibration Compensation Z c_z | $4.97 \pm 0.05 \text{ G A}^{-1}$ |
| Courant seuil Biais A $I_{0,A}$ | $< 1 \text{ mA}$ |
| Courant seuil Biais B $I_{0,B}$ | $0.345 \pm 0.003 \text{ A}$ |
| Champ rémanent b_{0x} | $0.089 \pm 0.002 \text{ G}$ |
| Champ rémanent b_{0y} | $0.426 \pm 0.002 \text{ G}$ |
| Champ rémanent b_{0z} | $-0.416 \pm 0.002 \text{ G}$ |

TABLE 4.1 – **Calibration des champs de biais dans la chambre de science.** Les champs rémanents b_{0i} correspondent aux champs extérieurs dans la direction \vec{i} . Le champ magnétique généré dans la cellule est proportionnel au courant parcourant les bobines $B_i = c_i \times (I_i - I_{0,i})$ avec $I_{0,i}$ le courant seuil, qui correspond à la consigne minimale à appliquer pour que le courant circule dans les bobines.

magnétiques générés par les bobines de biais. Nous soulignerons ensuite leur effet sur la position du centre du potentiel de lévitation et témoignerons ainsi de l'importance capitale des champs de compensation.

Potentiel de lévitation

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, il existe une limite pour les fréquences de piégeage (formule 3.26) qui décroît avec la norme du champ magnétique. Une stratégie usuelle est donc de créer un champ aussi fort que possible, qui est d'environ 2000 G avec notre système (correspondant à un courant maximal de 200 A). Pour de tels champs, le potentiel magnétique n'est plus décrit par l'effet Zeeman linéaire, mais par la formule de Breit-Rabi 3.14. En revanche, pour une petite zone autour du centre du potentiel de lévitation, on peut simplifier l'étude en supposant que le champ change peu $B \simeq B_0$. On peut ainsi définir un facteur de Landé local :

$$\tilde{g}_{F,m_F}(B_0) = \frac{1}{m_F \mu_B} \frac{dE}{dB}(B_0), \quad (4.9)$$

obtenu à l'aide d'un développement limité de la formule de Breit-Rabi 3.14 autour du champ B_0 . La physique derrière cette approche est de considérer l'effet Zeeman linéaire sur un état dont la susceptibilité magnétique dépend du champ de Biais B_0 . Cela se traduit par une correction du potentiel magnétique 3.15 qu'il est possible de réécrire sous la forme :

$$U_{\text{mag}}(\mathbf{x}) = m_F \tilde{g}_{F,m_F}(B_0) \mu_B B(\mathbf{x}), \quad (4.10)$$

dans une zone proche autour du centre du potentiel de lévitation.

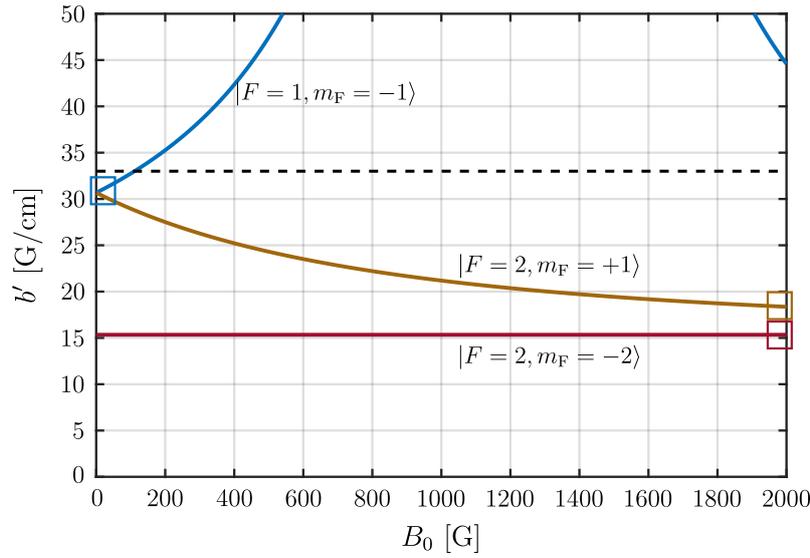


FIGURE 4.5 – **Gradient nécessaire pour compenser la gravité en fonction du biais magnétique.** La valeur du gradient magnétique à appliquer pour léviter dépend de l'état électronique, mais aussi du biais magnétique B_0 par la formule de Breit-Rabi. L'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ne peut être lévité qu'à bas champ (courbe bleue), l'alimentation des bobines de gradient ne pouvant délivrer plus de 50 A (limite tracée en pointillés). Les états $|F = 2, m_F = +1\rangle$ (courbe marron) et $|F = 2, m_F = -2\rangle$ (courbe bordeaux) peuvent être lévités pour n'importe quelle valeur du biais. Les carrés correspondent aux différentes configurations expérimentales d'intérêt pour cette thèse.

Gradient de lévitation

À l'aide du potentiel 4.10, il nous est possible de déterminer la valeur du gradient magnétique nécessaire pour compenser la gravité :

$$b' = \frac{mg}{m_F \tilde{g}_{F, m_F}(B_0) \mu_B}, \quad (4.11)$$

qui, de manière générale, dépend donc du biais magnétique au niveau des atomes. Cette dépendance est illustrée figure 4.5 pour les différents états internes d'intérêt dans cette thèse : $|F = 1, m_F = -1\rangle$, $|F = 2, m_F = +1\rangle$ et $|F = 2, m_F = -2\rangle$.

Notons trois résultats remarquables de la figure 4.5 :

- L'état $|F = 2, m_F = -2\rangle$ nécessite un gradient indépendant du biais magnétique pour être lévité.
- Les états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = +1\rangle$ sont lévités pour le même gradient à bas champ. Plus précisément, la susceptibilité magnétique de ces états est égale uniquement pour un *champ magnétique magique* $B_0^* = 3.229 \text{ G}$ ⁹, impliquant que ces états *d'horloge* ont le même comportement magnétique [100]. Cela se traduit notamment par une lévitation simultanée de ces états.
- L'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ne peut être lévité que pour des champs inférieurs à environ 150 G en raison de la limitation de courant (50 A) de l'alimentation des bobines de

9. Ce champ magique est dû au spin nucléaire. Une dérivation de ce champ peut être trouvée dans la référence [25].

gradient. En effet, le gradient nécessaire pour contrer la gravité augmente avec le champ magnétique.

Plusieurs stratégies expérimentales de lévitation s'offrent alors. La première provient de l'état $|F = 2, m_F = -2\rangle$ qui peut être lévité à l'aide du bon gradient magnétique tout en gardant la valeur du champ de biais comme un degré de liberté. On peut alors fortement augmenter le champ de biais afin de réaliser des lévitations très décomprimées (carré bordeaux de la figure 4.5). Il s'agit de l'approche utilisée pour la mesure du temps de diffusion élastique, présentée chapitre 6. Une autre possibilité est que les états d'horloge $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = +1\rangle$ peuvent coexister dans le champ de lévitation, on peut ainsi utiliser l'état interne de l'atome comme degré de liberté tout en étant lévité (carré bleu). Cette stratégie a par exemple été utilisée pour la mesure des fonctions spectrales [120].

Enfin, il est possible de déduire une calibration des bobines de gradient de la relation 4.11 entre le gradient magnétique et le biais B_0 . En identifiant des couples $\{I_{\text{Gradient}}, I_{\text{Biais}}\}$ permettant de compenser précisément la gravité, on parcourt ainsi la courbe de la figure 4.5 pour l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$. On détermine alors le facteur de calibration $c_G = 0.66 \pm 0.01 \text{ G cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$.

Fréquences de la lévitation

De manière générale, nous avons besoin de caractériser le piégeage résiduel de la lévitation, celui-ci pouvant influencer un piège optique fortement décomprimé dans une configuration à bas champ, et il est nécessaire d'estimer le potentiel résiduel des atomes en expansion dans le désordre dans le cas d'une configuration à fort champ.

Pour l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ en particulier, état d'horloge dans lequel nous créons notre condensat de Bose-Einstein¹⁰, le centre de masse du nuage décrit des oscillations autour du centre du potentiel de lévitation dont les fréquences peuvent être trouvées à l'aide de la norme du champ magnétique 4.2 et du potentiel magnétique 4.10 :

$$\omega_x^2 = \omega_z^2 = \left| \frac{m_F \tilde{g}_{F, m_F} \mu_B}{m} \left(\frac{b'^2}{4B_0} - b'' \right) \right| \quad \text{et} \quad \omega_y^2 = \left| \frac{2m_F \tilde{g}_{F, m_F} \mu_B}{m} b'' \right|. \quad (4.12)$$

Nous allons donc utiliser ces oscillations naturelles du nuage (une fois relâché après extinction du piège dipolaire) dans le piège de la lévitation magnétique pour caractériser le potentiel de lévitation en terme de centre et de courbure.

En particulier, la mesure des fréquences du potentiel de lévitation permet de déterminer la courbure des champs générés par les bobines de biais A et de biais B. L'influence de ces courbures est représentée figure 4.6 pour les champs de biais A et de biais B. Pour un courant suffisamment grand, le terme de courbure $b''_i = c''_i \times (I_i - I_{0,i})$ n'est plus négligeable devant celui de gradient, atténué par le biais. En effet, la comparaison des fréquences expérimentales aux fréquences 4.12 à courbure nulle $b'' = 0$ montre un désaccord significatif dans la zone des courants les plus hauts, tandis qu'un modèle tenant compte d'une courbure proportionnelle au courant décrit correctement cette zone (voir figure 4.6.b). On peut alors extraire le facteur de conversion courbure/courant c''_i , dont les valeurs sont données dans la table 4.2.

10. L'étude des oscillations est ici menée avec l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$, mais peut être étendue aux autres états.

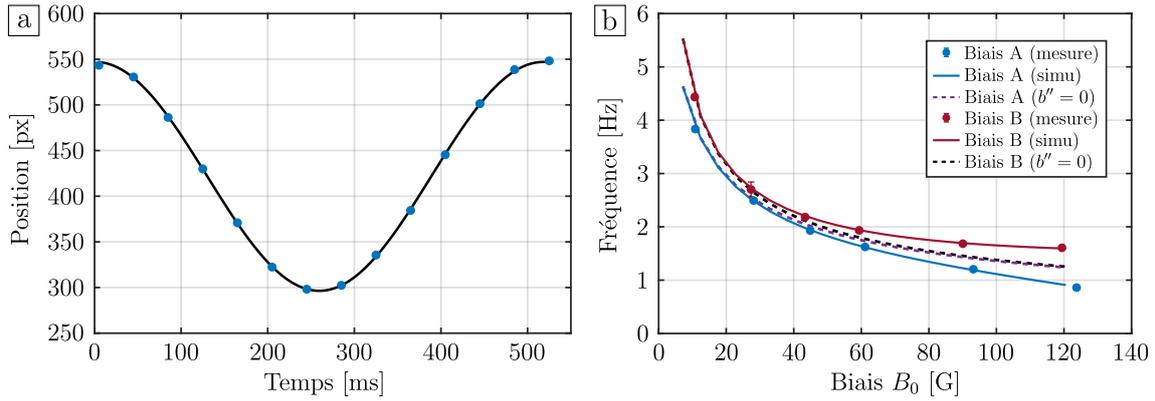


FIGURE 4.6 – **a : Oscillation du nuage dans la lévitation magnétique.** Le nuage, initialement dans le piège optique, est relâché décentré par rapport au potentiel de la lévitation. Il acquiert alors un mouvement oscillatoire autour du centre de la lévitation pendant le temps où la gravité est compensée. **b : Évolution des fréquences de piégeage de la lévitation.** Les fréquences mesurées (points) diminuent avec l'augmentation de B_0 et sont comparées à des simulations du potentiel (lignes continues) afin de calibrer le champ créé par les bobines. L'influence des courbures est visible pour les plus champs les plus intenses, les simulations en absence de courbure (courbes tiretées) montrant alors une déviation par rapport aux données.

Courbure Valeur

| | |
|-----------------|---|
| Gradient c_G | $0.66 \pm 0.01 \text{ G cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$ |
| Biais A c_A'' | $4 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-2} \text{ G cm}^{-2} \text{ A}^{-1}$ |
| Biais B c_B'' | $-7 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-2} \text{ G cm}^{-2} \text{ A}^{-1}$ |

TABLE 4.2 – **Calibration du potentiel de lévitation magnétique.** Les bobines de gradient créent un champ quadrupolaire, dont le gradient vertical permet de faire léviter les atomes. Celui-ci est relié au courant parcourant les bobines selon $b' = c_G \times I_G$. Les bobines de lévitation générant les champs de biais n'étant pas en configuration de Helmholtz, elles créent donc une courbure de champ magnétique au niveau des atomes. Cette courbure dépend de la géométrie des bobines ainsi que du courant les parcourant $b_i'' = c_i'' \times (I_i - I_{0,i})$.

On peut alors estimer les fréquences du potentiel de lévitation dans les configurations expérimentales d'intérêt, identifiées par des carrés sur la figure 4.5. Pour la configuration à bas champ (carré bleu), c'est-à-dire au champ magique B_0^* , les états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = +1\rangle$ sont soumis à un piégeage de fréquence d'environ 5 Hz par les bobines de biais A. Dans le régime de champ fort, nécessaire pour obtenir les décompressions maximales qu'offre notre système, la fréquence de piégeage de l'état $|F = 2, m_F = +1\rangle$ est diminuée jusqu'à 0.20 Hz sous un champ de 2000 G (carré marron), tandis que la fréquence d'anti-piégeage de l'état $|F = 2, m_F = -2\rangle$ atteint 0.18 Hz (carré bordeaux) [9].

Centre de la lévitation

Dans le cas d'un système idéal, le centre du potentiel magnétique correspond au centre géométrique des bobines. Cependant, on comprend aisément qu'en raison du gradient magnétique de lévitation, la position horizontale du centre du potentiel magnétique sera

très sensible aux perturbations extérieures ainsi qu'aux défauts de positionnement des bobines¹¹. En particulier, on peut s'attendre à ce qu'un champ horizontal b_z entraîne un déplacement $\Delta z = -2b_z/b'$ du centre du potentiel. Afin d'éviter de mettre le nuage en mouvement après relâchement du piège optique, on utilise alors des champs de compensation générés à l'aide de bobines supplémentaires, représentées en violet et en noir figure 4.2, dont le rôle est de repositionner le centre du potentiel magnétique sur le nuage.

Le champ permettant de déplacer le potentiel est donc la somme d'un champ naturellement présent et du champ de compensation :

$$b_i = b_{0,i} + c_{c,i} \times I_{c,i} \quad \text{avec} \quad i = \{x, z\} . \quad (4.13)$$

Les mesures des différents termes de ce champ ont été effectuées à l'aide de radio-fréquences, comme décrit section 4.2.3.

Il est alors possible de généraliser l'expression 4.1 du champ magnétique total sous l'effet d'une petite composante suivant l'axe horizontal \vec{z} ¹² :

$$\mathbf{B} = \left(\frac{b'}{2}x\right)\vec{x} + \left[B_0 - b'y + b''\left(y^2 - \frac{x^2 + z^2}{2}\right)\right]\vec{y} + \left(\frac{b'}{2}z + b_z\right)\vec{z} . \quad (4.14)$$

En calculant la norme de ce champ, on détermine alors que la présence d'un champ de biais b_z dans le plan horizontal mène à un déplacement du centre du potentiel

$$\Delta z = -\frac{2b_z}{b'} \left(\frac{1}{1 - 4B_0b''/b'^2}\right) \quad (4.15)$$

pour un champ $b_z \ll B_0$. Dans le régime de bas champ B_0 , on retrouve ainsi le résultat intuitif annoncé précédemment : l'effet d'un biais horizontal est de déplacer le centre de la lévitation à l'aide d'un gradient $b'/2$, résultant en un déplacement du potentiel magnétique de $\Delta z = -2b_z/b'$.

Une conséquence importante de ce résultat est que le déplacement du centre de la lévitation par un biais de positionnement dépend du biais de lévitation, ainsi que du gradient et de la courbure du champ. La décompression adiabatique de la lévitation magnétique peut alors entraîner un déplacement du centre du potentiel de lévitation. La connaissance du déplacement du centre du potentiel en fonction des différents paramètres nous permettra alors de contrôler la position de ce dernier à l'aide des champs de compensation.

L'étude du système de lévitation magnétique nous a non seulement permis de calibrer les champs magnétiques générés par nos bobines dont la position, l'orientation et le comportement magnétique ont été légèrement modifiés suite à un démontage et de lourds travaux de réparation, mais elle nous a de plus permis de caractériser le potentiel de lévitation, dont la connaissance fine est cruciale à bas champ comme à fort champ. Les conclusions de cette étude nous ont mené à faire l'acquisition d'alimentations *Toellner TOE 8851-40* pour les champs de compensation. En effet, il nous sera nécessaire de pouvoir contrôler de manière arbitraire les courants des bobines de compensation en cours de séquence, ce que les alimentations précédentes ne permettaient pas.

11. Le champ de biais généré par les bobines de lévitation n'est pas orienté parfaitement selon l'axe du gradient vertical. L'effet d'un angle θ avec la direction verticale se manifeste via la présence d'un champ horizontal $B_0 \sin\theta$, qui participe à déplacer le centre du potentiel.

12. Nous illustrons ici l'effet d'un champ horizontal dirigé uniquement suivant la direction \vec{z} , la démarche étant identique dans le cas d'un champ orienté suivant la direction \vec{x} .

4.3 Changement du laser infrarouge et calibration du piège optique

Uniquement deux éléments participent à la manipulation d'atomes dans la chambre de science avant condensation. Le premier élément, la lévitation magnétique, a fait l'objet de l'étude présentée dans la partie précédente.

Cette partie se concentrera sur le second élément, le piège optique. Nous commencerons par présenter le système optique et décrire les changements opérés, puis nous décrirons la calibration de ce piège sur les atomes.

4.3.1 Changement du laser infrarouge fibré Ytterbium

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le piège dipolaire était composé de deux faisceaux se croisant dans la chambre de science. Ces deux faisceaux, la pince et le dimple, sont orientés suivant les directions \vec{z} et \vec{y} respectivement et permettent de franchir le seuil de condensation. Il s'agit donc du piège donnant au condensat ses propriétés. De plus, c'est avec ce même piège que l'on met en œuvre les techniques de refroidissement extrêmes que sont l'ouverture adiabatique du piège ou encore le refroidissement par delta-kick. Il est donc primordial d'avoir une connaissance complète des caractéristiques de ce piège.

Les deux faisceaux du piège dipolaire croisé proviennent d'une source laser commune avant d'être mis en forme séparément. Cette source, un laser fibré Ytterbium de *Keopsys* émettant une puissance initiale de 20 W en continu à une longueur d'onde $\lambda = 1070$ nm, a été remplacée au cours de ma thèse. Ce laser a été sujet à un grand nombre d'opérations de maintenance, et, dans les mois précédant son changement, il ne pouvait plus émettre que 14 W lors de son allumage et seulement 12.5 W en fin de journée.

Cette source a été remplacée par un laser fibré Ytterbium *YLR-50-LP-A-Y12* de *IPG*, opérant à la même longueur d'onde $\lambda = 1070$ nm, et avec une puissance maximale mesurée à 55 W. La taille du faisceau en sortie de fibre est de 0.8 mm (contre 1.4 mm pour le laser *Keopsys*), il a donc fallu adapter un télescope afin de conserver les mêmes tailles de faisceaux au niveau des atomes. Le montage de mise en forme des faisceaux est présenté figure 4.7. Celui-ci est majoritairement mis dans des tubes¹³ contenant un grand nombre de diaphragmes, facilitant ainsi la procédure d'alignement.

Estimation de la taille du faisceau dimple au niveau des atomes

L'utilisation d'une fibre optique pour la mise en forme du faisceau de la pince permet de s'assurer que le mode envoyé sur les atomes n'a pas changé. Pour le faisceau dimple en revanche, le trajet jusqu'à la cellule se fait en espace libre. Celui-ci est rendu elliptique à l'aide d'un second télescope, comportant quatre lentilles dont deux cylindriques, comme illustré figure 4.7. Le rapport d'aspect du faisceau est alors de 2.

L'estimation de la taille du faisceau au niveau des atomes est réalisée en étudiant l'évolution de son profil d'intensité lumineuse après le passage au travers de la cellule. Cette estimation est aisée pour des faisceaux gaussiens : la taille du faisceau $w_i(y)$ dans la

13. Seule la zone du montage dédiée à l'asservissement de puissance n'est pas mise sous tube. La zone sous tube s'arrête au niveau du modulateur acousto-optique, puis reprend au niveau du second télescope, voir figure 4.7.

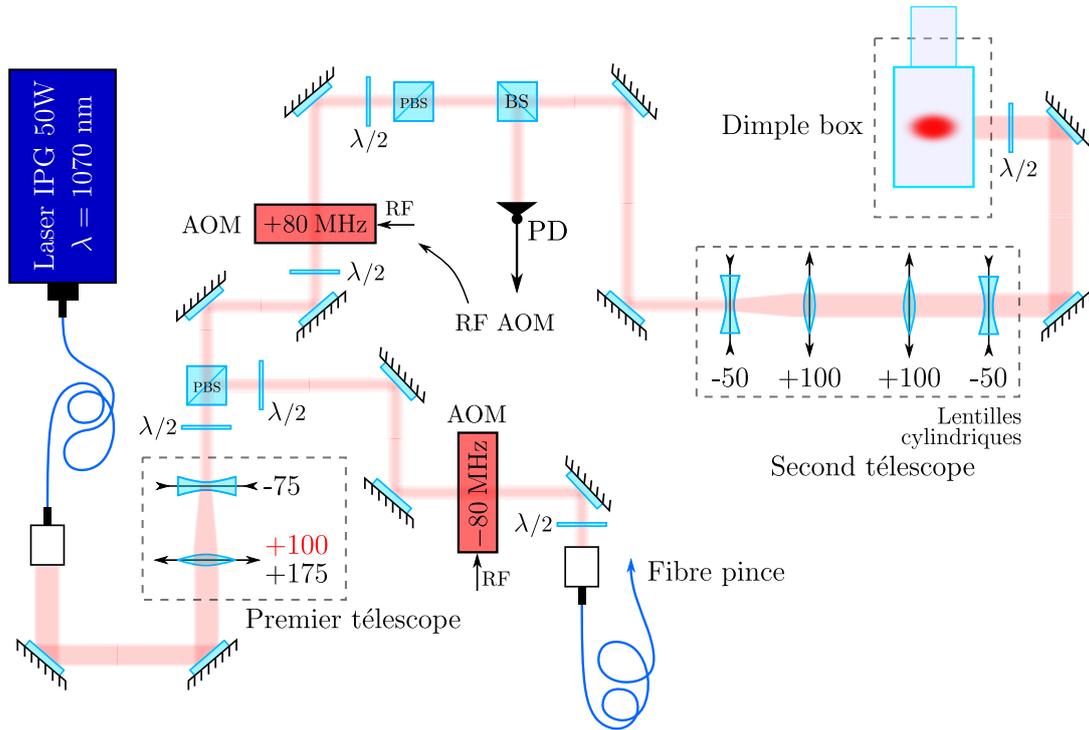


FIGURE 4.7 – **Schéma du montage optique pour le piège dipolaire.** Le faisceau issu du laser source passe dans un premier télescope avant d'être séparé en deux parties. La partie déviée passe dans une fibre optique pour devenir le faisceau de la pince. La partie transmise passe ensuite dans un second télescope pour devenir elliptique et arrive dans la *Dimple box*, qui transmet le faisceau jusqu'aux atomes et contient les optiques d'imagerie [76]. Afin de garder les mêmes tailles de faisceaux, la première lentille du premier télescope, de focale $+175$ mm, a été remplacée par une lentille de focale $+100$ mm.

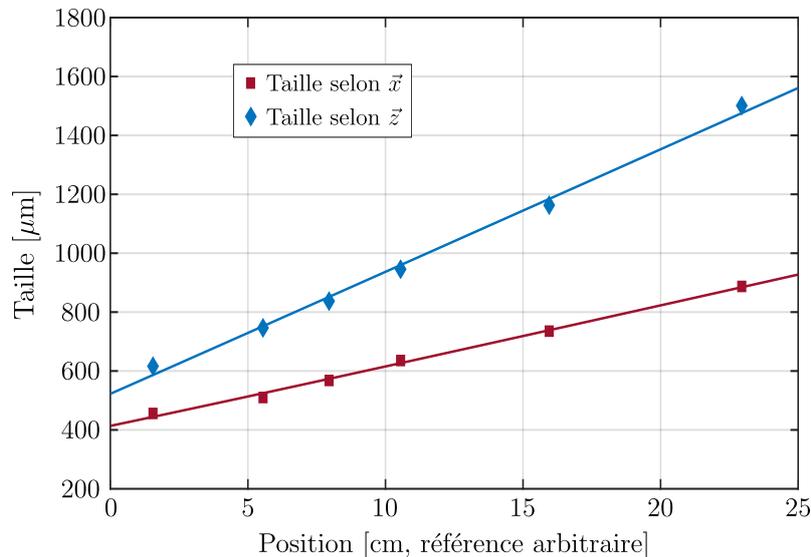


FIGURE 4.8 – **Évolution des tailles du faisceau dimple après la cellule.** Les tailles du faisceau dimple sont représentées en fonction de la position de la caméra (points). La divergence du faisceau permet de remonter aux waists du faisceau et d'en estimer la position. Les waists extraits par ajustement (lignes continues) sont de $w_z \simeq 82 \mu\text{m}$ et de $w_x \simeq 160 \mu\text{m}$ et leur position est compatible avec celle des atomes.

direction \vec{i} ($i = \{\vec{x}, \vec{z}\}$) est donnée par :

$$w_i(y) = w_i \sqrt{1 + \left(\frac{y - y_0}{y_{\text{Ri}}} \right)^2}, \quad (4.16)$$

où y_0 correspond à la position pour laquelle la taille du faisceau $w_i(y_0) = w_i$ est minimale et w_i est le waist du faisceau. La distance de Rayleigh associée s'exprime $y_{\text{Ri}} = \pi w_i^2 / \lambda$ et correspond à la distance sur laquelle la taille du faisceau suivant la direction \vec{i} change peu. Dans le régime de champ lointain $y - y_0 \gg y_{\text{Ri}}$, le faisceau diverge selon un angle $\tan \theta_i \simeq \lambda / \pi w_i$.

La mesure des tailles du faisceau a été réalisée à l'aide d'une caméra *IDS Ueye* disposant d'une matrice de 1024×1280 pixels de $5.2 \mu\text{m}$ de côté. Les tailles ont été extraites par ajustement gaussien d'un profil unidimensionnel d'intensité lumineuse obtenu par intégration suivant une direction. Enfin, l'évolution de la taille en fonction de la position a été ajustée par la formule 4.16, illustrée figure 4.8.

On estime alors les waists du faisceau dimple à $w_z = 81.6 \pm 7.8 \mu\text{m}$ et $w_x = 160 \pm 13 \mu\text{m}$, proches des valeurs de la configuration précédant le changement du laser source. La position y_0 de ces waists est compatible avec la position des atomes, et la longueur de Rayleigh du faisceau est de l'ordre de $y_{\text{Rz}} \simeq 2 \text{cm}$.

4.3.2 Calibration du piège optique

La caractérisation finale du piège dipolaire croisé se fait à l'aide des fréquences de piégeage, qui fixent les propriétés physiques du nuage.

Calibration des fréquences de piégeage

Le fonctionnement du piège optique repose sur le potentiel dipolaire. Celui-ci s'écrit :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0}. \quad (4.17)$$

Les faisceaux utilisés étant de forme gaussienne, on peut ainsi exprimer la profondeur de piégeage de chaque faisceau :

$$U_{\text{pince}} = \frac{3c^2 \Gamma}{\omega_0^3 \Delta} \frac{P_{\text{pince}}}{w_0^2} \quad \text{et} \quad U_{\text{dimple}} = \frac{3c^2 \Gamma}{\omega_0^3 \Delta} \frac{P_{\text{dimple}}}{w_x w_z}. \quad (4.18)$$

En supposant que les atomes restent proches du centre du piège, on peut de plus faire l'approximation que le profil d'intensité des faisceaux est de forme harmonique. On définit ainsi les fréquences de piégeage $\omega_{x,y,z}$ par analogie avec un oscillateur harmonique. Rappelons que le confinement dans les directions \vec{x} et \vec{y} est fait par la pince, et que celui dans la direction \vec{z} est fait par le dimple, les fréquences de piégeage du piège dipolaire croisé s'expriment alors :

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{-\frac{4U_{\text{pince}}}{m w_0^2}} \quad \text{et} \quad \omega_z = \sqrt{-\frac{4U_{\text{dimple}}}{m w_z^2}}. \quad (4.19)$$

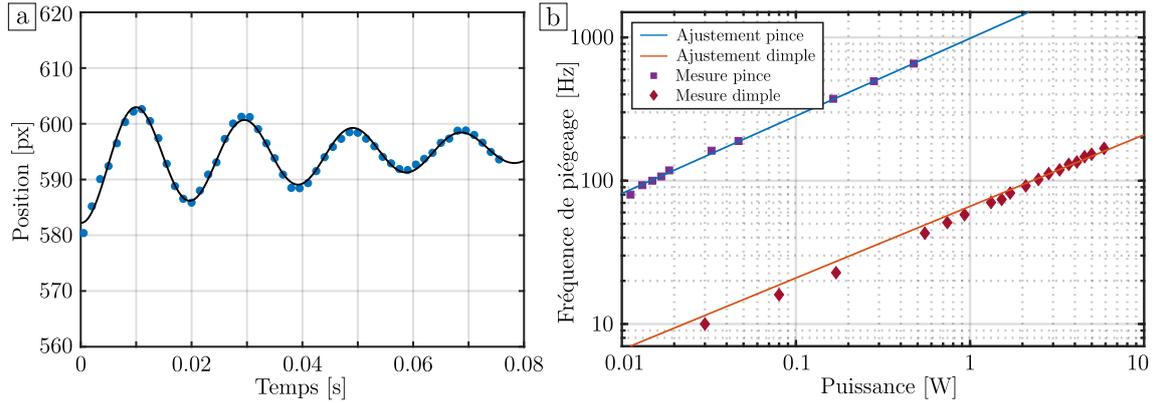


FIGURE 4.9 – **a : Exemple d’oscillation dans le piège optique.** Le nuage oscille dans la direction \vec{z} pour une puissance du faisceau dimple de 0.70 W après avoir été poussé par un gradient magnétique (points bleus). La fréquence d’oscillation est alors de $\omega_z/2\pi \simeq 51$ Hz, extraite par ajustement (courbe noire). **b : Fréquences d’oscillations du piège optique.** Les fréquences mesurées par oscillations du nuage (points) sont tracées en fonction de la puissance du faisceau associé. Les valeurs des calibrations A_{pince} et A_{dimple} sont ensuite extraites par ajustement de ces données (lignes continues).

Afin de mesurer ces fréquences, nous avons fait le choix¹⁴ d’induire de petites oscillations du centre de masse du nuage à l’intérieur du piège à l’aide d’une force extérieure, et de suivre ces oscillations en fonction du temps d’évolution dans le piège de manière équivalente à celle présentée pour la lévitation magnétique section 4.2.4. En relevant la position des atomes en fonction de la durée d’évolution dans le piège après excitation, on extrait alors la fréquence associée à l’aide d’un ajustement illustré figure 4.9.a.

La fréquence de piègeage dans les directions \vec{x} et \vec{y} , liée à la pince optique, a pu être mesurée à l’aide de la lévitation magnétique. En commutant rapidement le courant des bobines de gradient, on dispose d’un bouton pour allumer et éteindre la gravité, et donc générer une force pendant un bref instant pour donner un mouvement aux atomes dans le piège. La mesure de la fréquence de piègeage dans la direction \vec{z} a été effectuée selon deux méthodes en fonction de la puissance du faisceau dimple :

- À haute puissance, les atomes sont poussés à l’aide d’un gradient magnétique suivant la direction \vec{z} provenant de bobines de compensation branchées en configuration anti-Helmholtz. Celles-ci peuvent exercer une force sur les atomes pendant de courts instants à l’aide d’un commutateur rapide.
- À plus basse puissance, le piège optique est très décomprimé et peu profond. Cependant, le piègeage de la lévitation peut arracher les atomes du piège optique, il est donc nécessaire de déplacer le centre de la lévitation magnétique à l’aide de champs de compensation suivant la direction \vec{z} . Pour pousser les atomes, on utilise alors les bobines de compensation dans leur configuration normale, et leur brève extinction conduit à accélérer les atomes en déplaçant le centre de la lévitation magnétique.

L’évolution des fréquences de piègeage de chaque faisceau en fonction de la puissance optique est représentée figure 4.9.b en échelle logarithmique. La variation des fréquences

14. Nous avons retenu la méthode de mesure des fréquences de piègeage à l’aide d’excitations dipolaires. Il est aussi possible de mesurer ces fréquences par excitations paramétriques à l’aide de petites modulations de la profondeur du piège [102].

s'est faite en abaissant la puissance du laser au cours de l'évaporation optique, celle-ci conduisant à une décompression du piège de comportement $\omega/2\pi = A\sqrt{P}$ comme le témoignent les formules 4.18 et 4.19. Les fréquences mesurées expérimentalement (carrés pour la pince optique, losanges pour le faisceau dimple) sont ajustées par une loi de puissance (lignes continues). La calibration de la pince est alors déterminée à $A_{\text{pince}} = 980 \pm 20 \text{ Hz/W}^{1/2}$, et celle du dimple à $A_{\text{dimple}} = 60.5 \pm 1.0 \text{ Hz/W}^{1/2}$, proche de la valeur précédant le remplacement du laser source¹⁵.

4.4 Optimisation de l'évaporation tout-optique

Vingt-cinq ans après l'obtention du premier condensat de Bose-Einstein, l'étape de refroidissement par évaporation forcée reste un passage obligatoire pour l'obtention d'un gaz dégénéré, à l'exception de quelques développements récents se basant sur des techniques novatrices de refroidissement laser [43, 118].

Comme brièvement présenté dans le chapitre précédent, le principe du refroidissement évaporatif repose sur l'extraction de particules très énergétiques, suivie par la thermalisation des particules restantes moins énergétiques en moyenne, se traduisant donc par une diminution de la température. Néanmoins, l'efficacité de ce processus dépend fortement de la configuration expérimentale. Les modifications apportées à notre piège optique nécessitent donc d'adapter les consignes d'évaporation à notre nouvelle géométrie.

Dans cette partie, nous commencerons par présenter le fonctionnement du refroidissement par évaporation forcée, puis nous détaillerons les résultats de l'optimisation de notre évaporation optique dans un second temps.

4.4.1 Lois d'échelle du refroidissement évaporatif

Le but de l'étape de refroidissement évaporatif étant d'augmenter la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = n\lambda_{\text{dB}}^3$, aussi appelée *paramètre de dégénérescence*, il est donc nécessaire que notre système présente de la dissipation afin de franchir le seuil de condensation [68]. L'origine de cette dissipation repose sur la profondeur finie des pièges utilisés.

Évaporation naturelle dans un piège de profondeur finie

Une conséquence de cette profondeur finie est que la fonction de partition $f(E)$ est tronquée à l'énergie U correspondant à la profondeur du piège. Plus précisément, il a été montré que la fonction de partition est très proche d'une distribution de Boltzmann tronquée [64] :

$$f(E) \propto e^{-\frac{E}{k_{\text{B}}T}} \Theta(U - E) . \quad (4.20)$$

Le temps de convergence vers cette distribution, c'est-à-dire le temps de thermalisation τ_{th} , est de l'ordre de quelques collisions entre les particules du gaz, dont le taux s'exprime $\Gamma_{\text{c}} = n\sigma\bar{v}$, avec n la densité du gaz, σ la section efficace de diffusion et \bar{v} la vitesse moyenne relative entre deux atomes [121].

¹⁵. La dernière calibration date de la mise en place de la *dimple box* lors de la thèse de Kilian Muller [76]. Celle du dimple était alors de $A_{\text{dimple}} = 64.5 \pm 1.2 \text{ Hz/W}^{1/2}$.

En effet, la collision de deux particules permet de transférer de l'énergie d'une particule à la seconde. En particulier, une particule est susceptible d'acquérir par collision une énergie mécanique totale supérieure à la profondeur de piège, celle-ci est donc extraite du piège et emporte une énergie $U + \kappa k_B T$ ($\kappa > 0$) supérieure à l'énergie moyenne par particule.

Ce processus étant le plus probable pour des particules de grandes énergies, celui-ci favorise l'accumulation des particules dans les états de basse énergie tandis qu'il dépeuple les états de grande énergie. Ce raisonnement permet d'expliquer de manière qualitative la forme de la fonction de partition 4.20, qui favorise les états de basse énergie.

Ce phénomène d'*évaporation naturelle* conduit donc à une diminution de la température, dont l'efficacité décroît avec le refroidissement du nuage. En effet, l'énergie moyenne par particule diminuant, la probabilité que des particules acquièrent suffisamment d'énergie pour s'échapper du piège décroît exponentiellement [121]. Ainsi, le processus d'évaporation naturelle est fortement ralenti et le taux d'évaporation, c'est-à-dire le nombre de particules expulsées du piège par évaporation naturelle par unité de temps, peut être estimé par

$$\Gamma_{\text{ev}} \sim e^{-U/k_B T} \Gamma_c, \quad (4.21)$$

avec Γ_c le taux de collisions. Le taux d'évaporation devient ainsi exponentiellement petit, l'évaporation est alors figée.

Afin de dépasser cette limitation et de garder une évaporation efficace, la technique expérimentale développée afin d'obtenir les premiers condensats de Bose-Einstein consiste à abaisser progressivement la profondeur du piège U . On parle alors d'*évaporation forcée*.

Lois d'échelle de l'évaporation forcée

Comme mentionné précédemment, la mise en œuvre pratique du refroidissement évaporatif se fait par le biais de la diminution de la profondeur du piège, forçant ainsi le processus d'évaporation. Cette opération est réalisée en continu, et à une vitesse suffisamment lente devant le temps de thermalisation τ_{th} afin que le système soit constamment à l'équilibre thermodynamique¹⁶.

On pressent à l'aide de l'équation 4.21 que le rapport entre la profondeur du piège et la température du gaz piégé joue un rôle fondamental dans l'évaporation. On définit alors le paramètre de troncature η :

$$\eta = \frac{U}{k_B T}. \quad (4.22)$$

Dans le cas d'un abaissement lent et continu de la profondeur du piège, le paramètre de troncature est approximativement constant¹⁷ et sa valeur est de l'ordre de $\eta \approx 10$ dans le cas d'un piège optique.

16. Dans ce cas, les seules pertes d'atomes considérées sont celles liées à l'évaporation par collisions. Cela revient à négliger la dynamique de thermalisation de l'évaporation, qui fait apparaître les pertes par déversement[21]. Celles-ci correspondent aux atomes ayant une énergie de $U - \delta E$ qui ne sont plus piégés lors de l'abaissement de la profondeur du piège de U à $U - dU$, avec $dU > \delta E$. Dans le cas d'un gaz à l'équilibre thermodynamique, seule une infime partie des atomes se trouve dans cet intervalle d'énergie que l'on peut négliger devant les autres sources de pertes.

17. Étant donné la dépendance exponentielle du taux d'évaporation en η , le processus d'évaporation sera très fortement ralenti dans le cas d'un nuage très froid (η grand), et rapide dans le cas d'un nuage chaud (η petit). Lors de l'abaissement progressif de la profondeur du piège, la température va donc varier avec la profondeur du piège.

Le potentiel de piégeage $U(\mathbf{x}, t)$ étant modifié au cours de l'évaporation, les atomes sont soumis à un potentiel variant dans le temps. Dans le cas d'un piège harmonique, les fréquences de piégeage associées peuvent changer au cours de l'évaporation en fonction de l'implémentation expérimentale du refroidissement évaporatif. Les variations de la géométrie du piège sont alors caractérisées par le paramètre ν défini par

$$\nu = \frac{\dot{\bar{\omega}}/\bar{\omega}}{\dot{U}/U} \quad (4.23)$$

où $\bar{\omega}$ est la moyenne géométrique des fréquences du piège. Comme explicité formule 4.19, les fréquences de piégeage du piège optique évoluent en $\bar{\omega} \propto \sqrt{U}$, impliquant donc $\nu = 0.5$ [82]. L'abaissement de la profondeur du piège sera donc forcément accompagnée d'une décompression de celui-ci.

Dressons alors un bilan d'énergie afin de déterminer la manière dont varient les principales quantités thermodynamiques au cours de l'évaporation. L'énergie totale du gaz dans un piège harmonique est donnée par

$$E = 3Nk_{\text{B}}T \quad (4.24)$$

avec N le nombre total d'atomes. La variation temporelle de l'énergie totale du gaz est alors donnée par

$$\dot{E} = 3\dot{N}k_{\text{B}}T + 3Nk_{\text{B}}\dot{T} , \quad (4.25)$$

exprimée en fonction des variations temporelles du nombre d'atomes et de la température.

En identifiant les différentes sources de variations de l'énergie totale, on montre que la variation de l'énergie totale du système est donnée par [21]

$$\dot{E} = \dot{N}(U + \kappa k_{\text{B}}T) + \nu \frac{\dot{U}}{U} E , \quad (4.26)$$

où le premier terme décrit la perte d'énergie liée à l'évaporation des atomes énergétiques et le second terme représente le changement d'énergie potentielle des particules restées dans le piège, traduisant la décompression de ce dernier. Dans le cas d'une évaporation 3D, $\kappa = 3/2$ [53].

En combinant les équations 4.25 et 4.26, on montre alors que la variation du nombre d'atomes en fonction de la profondeur de piégeage est donnée par [82] :

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{3(1-\nu)\dot{U}}{\eta' - 3} \frac{1}{U} , \quad (4.27)$$

avec $\eta' = \eta + \kappa$. Il est alors possible de déterminer les lois d'échelle des différentes grandeurs thermodynamiques d'un gaz classique.

En particulier, dans le cas d'un piège harmonique, la densité dans l'espace des phases s'exprime :

$$\mathcal{D} = N \left(\frac{\hbar\bar{\omega}}{k_{\text{B}}T} \right)^3 . \quad (4.28)$$

On peut alors déterminer les variations du paramètre de dégénérescence en fonction des variations du nombre d'atomes :

$$\frac{\dot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} = -\gamma \frac{\dot{N}}{N} . \quad (4.29)$$

Le paramètre $\gamma = \eta' - 4$ correspond à l'efficacité du processus d'évaporation : la perte d'atomes engendre un gain de densité dans l'espace des phases d'autant plus élevé que ce paramètre est grand. L'enjeu de l'optimisation du refroidissement évaporatif consiste donc à augmenter cette efficacité autant que possible.

Une conséquence remarquable de l'équation 4.29 est que l'efficacité du processus d'évaporation ne dépend pas du paramètre ν témoignant du changement de forme du piège. Ceci s'explique par le fait que pour une évaporation à η constant, le paramètre ν traduit une ouverture adiabatique du piège, la décompression du nuage étant accompagnée d'une diminution de la température, voir section 3.3.3.

Taux de collisions et régime d'emballlement

Si l'équation 4.29 ne fait pas apparaître l'influence du paramètre ν , celui-ci joue cependant un rôle primordial quant à la cinétique de l'évaporation. En effet, la vitesse maximale d'évaporation est limitée par la vitesse à laquelle le gaz atteint un état d'équilibre thermique, c'est-à-dire le taux de thermalisation $1/\tau_{\text{th}}$. Celui-ci est de l'ordre du taux de collisions Γ_c , qui varie au cours de l'évaporation avec le nombre d'atomes, la température et la forme du piège.

Dans le cas d'un piège harmonique, on montre que la loi de variation du taux de collisions peut s'écrire [82]

$$\frac{\dot{\Gamma}_c}{\Gamma_c} = \left[1 - (\eta' - 3) \left(\frac{1 - 3\nu}{3(1 - \nu)} \right) \right] \frac{\dot{N}}{N}, \quad (4.30)$$

où le facteur entre crochets peut changer de signe suivant la valeur de ν . Ainsi, il est possible que le taux de collisions augmente au cours de l'évaporation malgré la perte d'atomes, rendant ainsi l'évaporation de plus en plus rapide. Dans ce régime d'*emballlement*, la diminution du nombre d'atomes et de leur vitesse relative moyenne est plus que compensée par une forte augmentation de la densité au centre du piège, augmentant ainsi le taux de collisions. Ce régime peut être atteint pour de faibles valeurs de ν , en particulier pour l'évaporation radio-fréquence dans notre piège magnétique où $\nu = 0$.

En revanche, l'évaporation optique est réalisée en abaissant la puissance des faisceaux laser dont la taille est gardée fixe, processus pour lequel $\nu = 0.5$. Dans ce régime, le taux de collisions diminue au cours de l'évaporation, la rendant de plus en plus lente contrairement au régime d'emballlement. Il est donc primordial qu'une évaporation optique commence avec un grand taux de collisions pour permettre une thermalisation rapide. De manière générale, une évaporation optique possède une première phase pendant laquelle la puissance des faisceaux laser est abaissée rapidement, la thermalisation du nuage étant immédiate grâce au grand taux initial de collisions, puis une seconde phase plus lente où la thermalisation du nuage nécessite plus de temps.

Consigne d'évaporation

Les lois d'échelle présentées dans la section précédente montrent comment évoluent les différentes grandeurs thermodynamiques du nuage en fonction de la profondeur du piège, sans pour autant spécifier la dépendance temporelle de celle-ci. Afin de déterminer le profil optimal de la consigne d'évaporation, il est possible d'établir un bilan du nombre

d'atomes présents dans le piège¹⁸. En considérant que les atomes sont uniquement perdus par évaporation, on peut écrire les variations du nombre d'atomes à l'aide d'une équation de taux [64, 82]

$$\dot{N} = -\Gamma_{\text{ev}}N \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\text{ev}} = 2(\eta - 4)e^{-\eta}\Gamma_c . \quad (4.31)$$

On peut alors déterminer que le profil optimal de la consigne d'évaporation est aussi donné par une loi de puissance [82] :

$$U(t) = U_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-\beta} , \quad (4.32)$$

avec $U_0 = U(t=0)$ la profondeur initiale du piège au début de l'étape d'évaporation. Les paramètres τ et β dépendent du paramètre de troncature η , de la géométrie du piège et du taux de collisions initial $\Gamma_c(t=0)$.

On remarque que la consigne d'évaporation 4.32 possède deux dynamiques distinctes. Comme annoncé dans le paragraphe précédent, l'évaporation est dans un premier temps rapide afin de profiter du grand taux de collisions, puis dans un second temps, la consigne est lentement abaissée en raison de l'augmentation du temps de thermalisation.

Effet des collisions inélastiques

En pratique, l'évaporation par collisions n'est pas la seule source de perte des particules. L'expérience se déroulant à l'intérieur d'une enceinte sous ultra-vide pompée en continu, les collisions avec les particules du gaz résiduel à température ambiante sont responsables de pertes indépendantes de l'énergie des atomes piégés. Cela se traduit par un temps de vie $1/\Gamma_{\text{bg}}$ fini des atomes dans le piège.

On peut alors écrire les pertes d'atomes liées au gaz résiduel sous la forme d'équations de taux

$$\dot{N}_{\text{bg}} = -\Gamma_{\text{bg}}N \quad (4.33)$$

$$\dot{E}_{\text{bg}} = -\Gamma_{\text{bg}}E , \quad (4.34)$$

où le temps de vie $1/\Gamma_{\text{bg}}$ est de l'ordre de 10 s.

Deux régimes limites se présentent alors. Dans le cas d'une évaporation rapide telle que $\Gamma_{\text{ev}} \gg \Gamma_{\text{bg}}$, l'essentiel des pertes d'atomes est dû au processus d'évaporation. La présence du gaz résiduel n'a donc que peu d'effet sur le nuage, l'évaporation pouvant se dérouler sur une durée petite devant le temps de vie des atomes dans le piège.

Au contraire, les pertes dues au gaz résiduel peuvent fortement entraver le processus d'évaporation dans le cas d'un petit temps de vie, dans le régime où $\Gamma_{\text{ev}} \ll \Gamma_{\text{bg}}$. Dans ces conditions, les atomes ne peuvent rester assez longtemps dans le piège pour que certains aient le temps d'acquiescer une énergie suffisante pour être évaporés.

Les collisions avec le gaz résiduel ne sont pas la seule source néfaste de perte d'atomes. Des processus complexes liés à la nature métastable des expériences d'atomes froids peuvent

18. Les lois d'échelle présentées dans les paragraphes précédents ont été obtenues à l'aide d'un bilan d'énergie.

conduire à la perte de plusieurs atomes. Aux températures atteintes par les nuages piégés, la majorité des éléments devraient se trouver à l'état solide, mais le caractère élastique des collisions binaires permet au système de rester sous forme gazeuse. Cependant, il est possible que lors d'une collision tertiaire, deux atomes établissent une liaison moléculaire, dont la grande énergie est évacuée par le biais d'un troisième atome. Ce processus de pertes à trois corps conduit alors à la perte des trois atomes.

Puisque ce mécanisme nécessite la collision de trois atomes, on peut décrire la variation de densité due aux pertes à trois corps ainsi que la variation de l'énergie totale à l'aide d'une loi de puissance :

$$\dot{n}_{3b}(\mathbf{x}) = -K_{3b}n^3(\mathbf{x}) \quad (4.35)$$

$$\dot{E}_{3b} = \frac{3}{2}\dot{N}_{3b}k_B T + \int d\mathbf{x} U(\mathbf{x})\dot{n}_{3b}(\mathbf{x}) , \quad (4.36)$$

où le coefficient K_{3b} est une constante du ^{87}Rb et vaut $1.8 \times 10^{-29} \text{ cm}^6\text{s}^{-1}$ [16, 116].

Comme illustré par l'équation 4.35, le mécanisme de pertes à trois corps devient important dans des régions de fortes densités. Les pièges optiques étant fortement comprimés afin d'avoir un taux de collisions suffisant pour pouvoir évaporer, ceux-ci sont particulièrement susceptibles de générer des pertes à trois corps.

En présence de ces pertes, il est possible de modifier les lois d'échelles présentées précédemment [14, 64]. En particulier, on peut montrer que dans le cas d'un piège harmonique profond, l'équation 4.27 régissant l'évolution du nombre d'atomes se généralise en

$$\frac{\dot{N}}{N} = \left(\frac{\eta' - 3}{3(1 - \nu)} + R \frac{2 - \eta'}{3(1 - \nu)} \right)^{-1} \frac{\dot{U}}{U} , \quad (4.37)$$

où la quantité $R = \dot{N}_{3b}/\dot{N}$ est la fraction d'atomes perdus par collisions à trois corps. De même, l'équation 4.29 devient

$$\frac{\dot{D}}{D} = -\gamma \frac{\dot{N}}{N} \quad \text{avec} \quad \gamma = \eta' - 4 + R(2 - \eta') , \quad (4.38)$$

témoignant ainsi de la réduction de l'efficacité de l'évaporation par les pertes à trois corps.

4.4.2 Résultats de l'optimisation de l'évaporation

Nous allons à présent détailler la manière dont cette étape d'évaporation est implémentée sur notre dispositif. Les résultats présentés ici sont le fruit d'une optimisation de l'efficacité de l'évaporation, où nous avons maximisé le gain de densité dans l'espace des phases vis-à-vis de la perte d'atomes.

Consigne d'évaporation

L'implémentation de la formule 4.32 comme consigne de puissance¹⁹ sur les deux faisceaux du piège dipolaire est rendue possible grâce à l'utilisation des nouvelles cartes

19. La pesanteur a pour effet de *pencher* le potentiel, pouvant changer la dimensionnalité de l'évaporation [13], mais aussi limiter la profondeur du piège optique à environ $U/k_B \sim 2.5 \mu\text{K}$ pour laquelle le gradient maximal d'intensité lumineuse ne permet plus de compenser le poids des atomes. L'utilisation de la lévitation magnétique au cours de l'évaporation permet alors de dépasser cette limitation, et de rendre la profondeur du piège directement donnée par la puissance des faisceaux en s'affranchissant de la gravité.

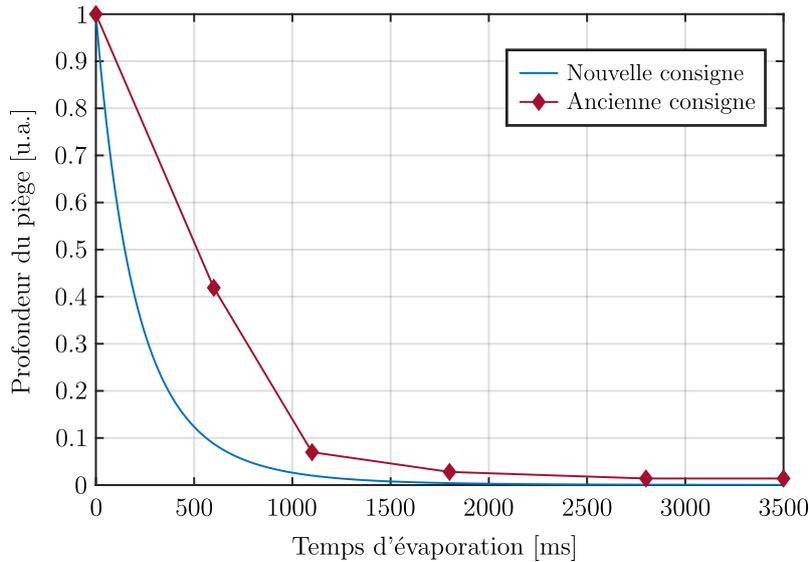


FIGURE 4.10 – **Comparaison de la nouvelle et de l'ancienne consigne d'évaporation du faisceau pince.** L'ancienne consigne, composée de cinq morceaux de rampe linéaire, est représentée en bordeaux. La nouvelle consigne, donnée par l'équation 4.32 est représentée en bleu, possède une décroissance plus rapide que dans le cas de l'ancienne consigne. Elle permet de plus d'obtenir un condensat de Bose-Einstein plus rapidement.

analogiques *National Instruments* et de la suite *Cicero Word Generator*. L'optimisation de l'étape d'évaporation nous a permis de déterminer les paramètres $\beta_{\text{pince}} = \beta_{\text{dimple}} = 6$, $\tau_{\text{pince}} = 1.2\text{s}$ et $\tau_{\text{dimple}} = 1.3\text{s}$. La nouvelle consigne d'évaporation est alors tracée figure 4.10, et est comparée à la consigne composée de morceaux de rampes linéaires²⁰ de notre configuration précédente.

Par construction, la formule 4.32 permet de mieux tirer parti du processus d'évaporation naturelle. Il est alors possible d'effectuer une évaporation plus rapide, réduisant l'impact de la durée de vie finie des atomes par collisions avec le gaz résiduel.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur les premières 700 ms de l'évaporation, qui correspondent à la durée nécessaire pour atteindre le seuil $\mathcal{D} \approx 1$, pour lequel une partie condensée apparaît. Au delà de ce seuil, l'approche classique pour laquelle les lois d'échelle ont été déterminées précédemment n'est plus valide.

Évolution de la température

L'évolution de la température du nuage²¹ au cours de l'évaporation est représentée figure 4.11, et témoigne d'un refroidissement important au cours de l'évaporation, comme attendu. Nous avons superposé à ces mesures la profondeur estimée²² de la pince divisée par 10, sans paramètre ajustable. L'accord entre ces courbes est remarquable, validant ainsi l'approche d'une évaporation à $\eta = 10$ constant. Ceci constitue une preuve du caractère

20. Les cartes analogiques du précédent système informatique de contrôle de l'expérience ne permettait d'utiliser que des profils de consignes composées de morceaux de rampes linéaires.

21. La détermination expérimentale de la température en présence du champ de lévitation, basée sur le principe de focalisation atomique, est détaillée dans l'annexe A.

22. Cette estimation provient de la calibration du piège optique présentée section 4.3.2.

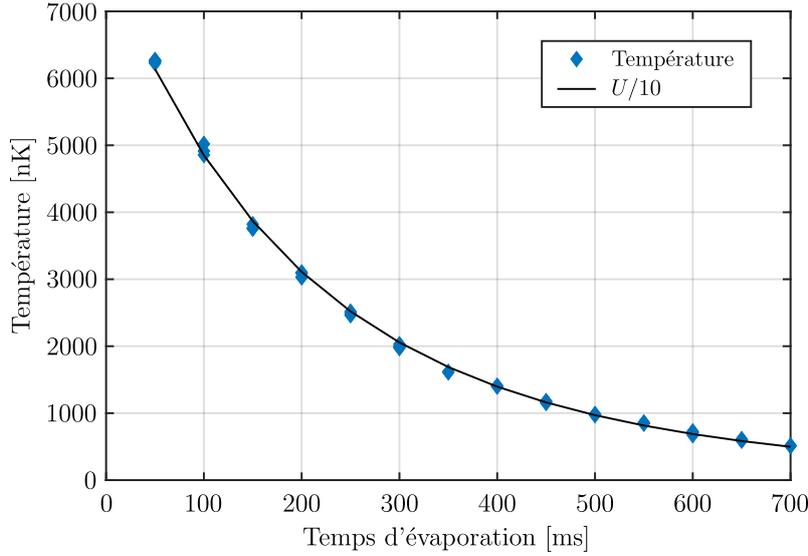


FIGURE 4.11 – **Évolution de la température au cours de l'évaporation.** La température (points bleus) est mesurée après différentes durées d'évaporation et comparée à la profondeur de piégeage du faisceau pince divisée par 10 (courbe noire). Sans paramètre ajustable, les deux courbes se superposent remarquablement.

adiabatique de notre évaporation, le nuage étant constamment dans un état de quasi-équilibre thermodynamique.

Évolution du nombre d'atomes

L'évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation présente un intérêt particulier car celle-ci contient les informations liées aux processus de pertes inélastiques. Notamment, nous pouvons estimer le taux de pertes à trois corps à l'aide d'une mesure de la densité atomique et de la formule 4.35. En comparant ces pertes aux variations mesurées du nombre d'atomes, on détermine que le rapport $R = \dot{N}_{3b}/\dot{N}$ de l'ordre de 0.1, approximativement constant tout au long de l'évaporation. Il apparaît donc que les pertes à trois corps ont un effet marqué sur l'évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation, mais que celles-ci ne constituent pas une limite pour notre système.

De plus, il est possible de négliger l'effet des pertes dues aux collisions avec le gaz résiduel, limitant le temps de vie des atomes dans le piège à $1/\Gamma_{bg} \approx 10$ s. En effet, l'optimisation de notre évaporation se concentre sur les premières 700 ms d'abaissement de la profondeur du piège²³ comme illustré sur les figures 4.11 et 4.12, et la durée totale de notre évaporation est de 3.5 s, courte comparée au temps de vie permis par le gaz résiduel.

L'évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation est représentée figure 4.12 et est comparée à la prédiction de la loi d'échelle 4.37, tracée avec les paramètres $\eta = 10$ (déterminé précédemment grâce à l'évolution de la température au cours de l'évaporation) et $R = 0.1$ (déterminé en estimant le taux de pertes à trois corps et rapporté aux pertes totales mesurées expérimentalement). Il apparaît donc que la théorie d'échelle permet de décrire correctement l'évolution du nombre d'atomes.

²³. Cette durée correspond au temps nécessaire pour franchir le seuil de condensation $\mathcal{D} \approx 1$ et l'obtention d'un gaz dégénéré. Celle-ci était d'environ 1.2 s avec l'ancienne consigne.

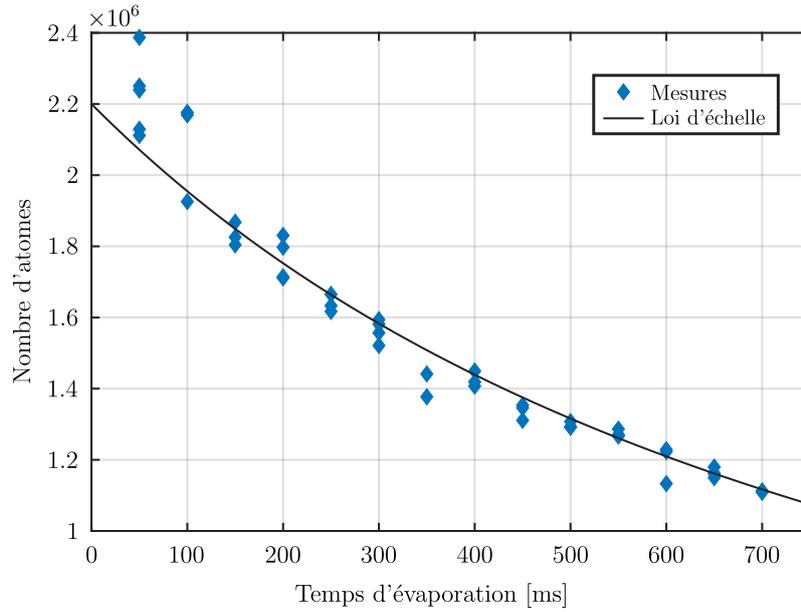


FIGURE 4.12 – **Évolution du nombre d'atomes au cours de l'évaporation.** Les points bleus correspondent aux mesures expérimentales du nombre d'atomes, chaque point étant issu d'un unique cycle expérimental. La ligne continue noire correspond à la prédiction de la loi d'échelle 4.37 sans paramètre ajustable, avec les grandeurs $\eta = 10$ et $R = 0.1$ déterminées indépendamment. Il apparaît alors un très bon accord entre les données et le modèle.

Évolution de la densité dans l'espace des phases

Enfin, rappelons que l'optimisation de l'évaporation est réalisée en maximisant le gain de densité dans l'espace des phases par atome perdu, encodé par le paramètre γ .

L'évolution de la densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes est représentée figure 4.13 en échelle logarithmique pour dans le cas de notre nouvelle consigne (en bleu) ainsi que pour notre ancienne consigne (en bordeaux). La comparaison est immédiate : la nouvelle consigne permet d'atteindre le seuil de condensation $\mathcal{D} \approx 1$ pour une perte d'atomes bien moindre que l'ancienne.

Plus quantitativement, l'efficacité mesurée pour la nouvelle consigne est de $\gamma \approx 4.5$ tandis que l'ancienne présente une efficacité d'environ 2.3²⁴, témoignant de la nette amélioration de notre évaporation. Notons que la loi d'échelle 4.38 en présence de pertes à trois corps prédit une valeur $\gamma \approx 6.5$, bien supérieure à notre valeur mesurée. Une étude approfondie de l'origine de cette différence n'a pas été menée compte-tenu de l'obtention récente de ces résultats et de l'excellente efficacité obtenue. En effet, la valeur de $\gamma \approx 3$ représente déjà une très bonne efficacité pour la plupart des expériences d'atomes ultra-froids [6][44].

Finalement, la consigne retenue à l'issue de l'optimisation de l'évaporation permet d'obtenir un condensat de Bose-Einstein d'environ 1.2×10^6 atomes avec une température d'environ 500 nK en 700 ms. Après 3.5 s d'évaporation, notre nuage contient environ 2×10^5 atomes à une température de 10 nK sans utiliser la technique d'ouverture adiabatique

24. Cette mesure a été réalisée après le changement du laser source du piège optique. Avant changement, l'efficacité était plutôt estimée à 2.8 [46].

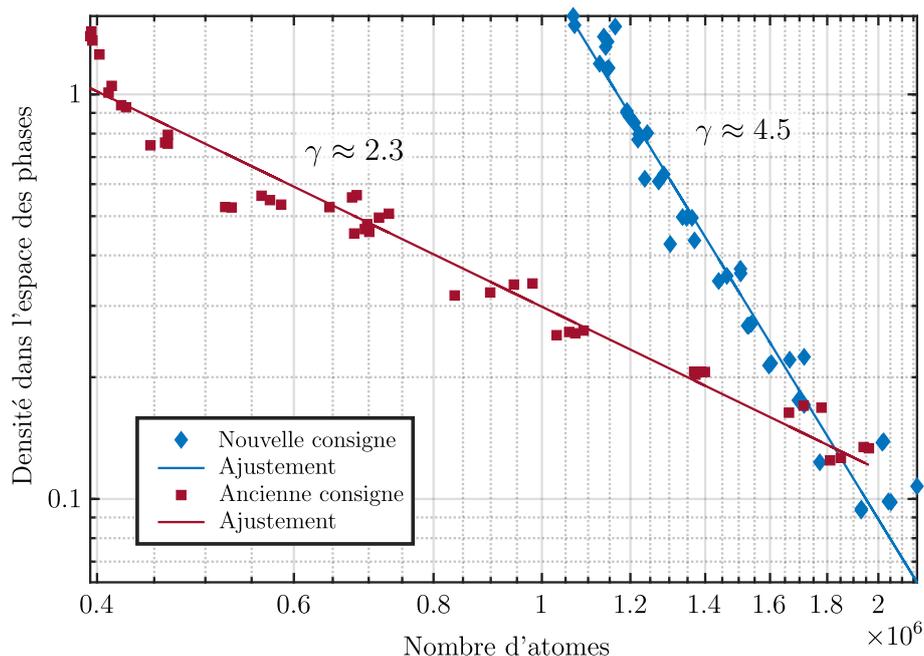
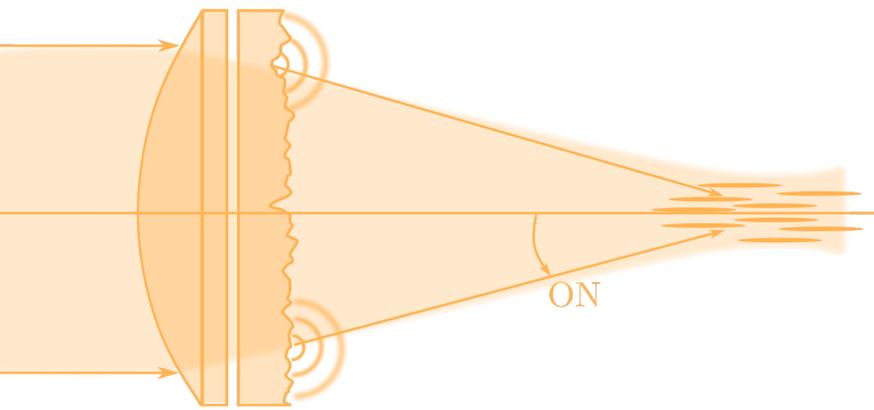


FIGURE 4.13 – **Efficacité de l'évaporation optique.** En traçant la densité dans l'espace des phases du nuage en fonction du nombre d'atomes, on peut évaluer l'efficacité du refroidissement évaporatif. La nouvelle consigne d'évaporation permet d'obtenir les points bleus pour différents temps d'évaporation (jusqu'à 700 ms), tandis que l'ancienne consigne est représentée en bordeaux²⁵ (jusqu'à 1.2 s). Les lignes continues sont des ajustements des données expérimentales par des lois de puissance 4.29, qui permettent ainsi d'extraire le paramètre γ quantifiant l'efficacité de l'évaporation.

pour refroidir davantage. À l'heure de l'écriture de ces lignes, l'implémentation de cette technique avec la nouvelle consigne n'a pas encore été réalisée.

25. Les données relatives à l'ancienne consigne ont été prises dans exactement les mêmes conditions expérimentales que celles relatives à la nouvelle : seule la consigne d'évaporation a été changée et ces données ont été obtenues les unes à la suite des autres.



5. Propriétés d'un désordre de type speckle

Le chapitre 3 nous a renseigné quant aux propriétés de notre onde de matière ainsi que sa production. En particulier, on a vu qu'il était possible d'appliquer des potentiels externes conservatifs aux atomes par le biais du potentiel dipolaire. Ce potentiel étant proportionnel à l'intensité lumineuse I , on peut alors appliquer un désordre à nos atomes, pourvu que l'on soit capable de créer un désordre optique. En effet, une originalité de notre expérience est "d'inverser" les rôles habituels de la matière et de la lumière.

Ainsi, dans ce chapitre, nous allons nous attacher à décrire le second élément clé de la localisation d'Anderson : le désordre. Nous montrerons que la génération d'un tel désordre est aisée : la diffraction d'un faisceau laser au travers d'une lame de verre rugueuse produit un motif d'intensité lumineuse aléatoire et à fort contraste, appelé champs de tavelures optiques, ou encore *Speckle* (anglicisme communément admis). Citons deux énormes avantages d'un tel désordre : on en connaît toutes les propriétés, régies par la diffraction, et on contrôle ce désordre.

La première partie se concentrera sur la génération d'un champ de speckle, en particulier sur le diffuseur qui donne au speckle toutes ses propriétés. Dans un second temps, nous décrirons les propriétés spatiales d'un speckle, en particulier la taille des grains de lumière dans les directions transverses et longitudinale. Dans une troisième partie nous parlerons du potentiel ressenti par les atomes ainsi que des possibilités offertes par la structure multi-niveaux du ^{87}Rb et l'excellent contrôle du désordre dont nous disposons, puis dans une ultime partie nous étudierons une approche à deux longueurs d'onde pour dépasser les limitations d'un speckle monochromatique pour l'étude de la transition d'Anderson à énergie résolue.

5.1 Génération d'un champ de speckle

C'est avec le développement des premiers lasers qu'a été observée la structure granulaire de la lumière réfléchiée par certaines surfaces rugueuses. Rapidement, il a été compris que ce motif provenait de la diffraction aléatoire et cohérente par une surface rugueuse.

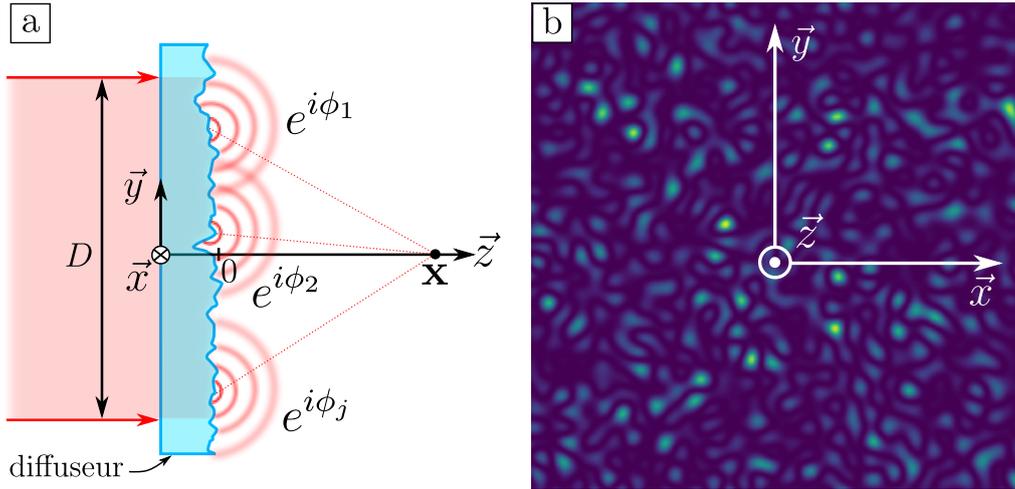


FIGURE 5.1 – **a** : **Génération d'une figure de speckle.** La diffraction d'une onde cohérente par une surface rugueuse appelée diffuseur résulte en l'interférence multiple d'un grand nombre d'ondes à déphasage aléatoire. La phase de chacune de ces ondes est déterminée par l'épaisseur de verre traversée en chaque point. **b** : **Motif de speckle.** Un tel motif est composé de grains lumineux entourés de zones d'ombre, où l'intensité est quasiment nulle.

Cette surface rugueuse peut-être considérée comme un ensemble d'émetteurs cohérents de déphasages aléatoires, et le profil d'intensité obtenu est le résultat de l'interférence multiple de l'ensemble de la surface. Un profil typique est montré figure 5.1. Celui-ci comporte un ensemble de grains lumineux séparés par des zones d'obscurité. Souvent considéré néfaste dans le domaine de l'imagerie, le speckle est pour nous une source pratique de désordre optique.

5.1.1 Statistiques de l'intensité d'un speckle

Le phénomène de speckle apparaît lorsque l'amplitude $E(\mathbf{x})$ au point d'observation \mathbf{x} résulte de la somme d'un grand nombre N d'ondes indépendantes d'amplitude E_0 et de phases aléatoires ϕ_j comme illustré figure 5.1.a. Cette amplitude peut alors s'écrire

$$E(\mathbf{x}) = \sum_j^N E_0 e^{i\phi_j} . \quad (5.1)$$

En supposant qu'un grand nombre de grains du diffuseur participent à l'interférence au point d'observation ($r_{\text{diff}} \ll D$ avec r_{diff} la taille typique d'un grain du diffuseur et D la taille de l'éclairement incident), on peut appliquer le théorème central limite à l'amplitude rayonnée. En supposant de plus que les phases aléatoires ϕ_j sont réparties de manière homogène sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, les distributions de probabilités des parties réelle et imaginaire de l'amplitude sont données par la loi normale

$$\mathcal{P}(E_{\mathcal{R}, \mathcal{I}}) = \frac{1}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{E_{\mathcal{R}, \mathcal{I}}^2}{2\sigma_E^2}\right) , \quad (5.2)$$

avec $E_{\mathcal{R}}$ et $E_{\mathcal{I}}$ les parties réelle et imaginaire du champ complexe $E = E_{\mathcal{R}} + iE_{\mathcal{I}}$ respectivement. Étant donné que les atomes ne sont sensibles qu'à l'intensité lumineuse $I = |E|^2$,

on montre alors que la distribution de probabilité de l'intensité lumineuse suit une loi exponentielle [37]

$$\mathcal{P}(I) = \frac{1}{\bar{I}} \exp\left(-I/\bar{I}\right). \quad (5.3)$$

De manière générale, on appellera *speckle pleinement développé* tout speckle vérifiant cette loi de probabilité. Deux conséquences importantes de cette loi sont à noter :

- L'écart-type σ_I de la loi 5.3 est égal à sa valeur moyenne \bar{I} , et donc le contraste σ_I/\bar{I} d'une figure de speckle pleinement développé est de 1. Une telle figure comportera alors des zones de forte intensité tout comme des zones d'intensité quasi-nulle.
- La probabilité d'obtenir une forte intensité lumineuse est exponentiellement petite, tandis que les zones de faible intensité sont beaucoup plus probables. Ainsi, une figure typique de speckle (représentée figure 5.1.b) est composée de maxima d'intensité lumineuse (*grains de speckle*) entourés de larges zones d'ombre.

5.1.2 Propriétés du diffuseur

L'analyse précédente décrivant la statistique de l'intensité lumineuse d'un speckle pleinement développé repose sur deux hypothèses :

- Il faut qu'un grand nombre d'émetteurs participe à l'interférence au point d'observation. Notamment, cela signifie que le diffuseur comporte un nombre suffisamment grand de *grains* ($r_{\text{diff}} \ll D$) et que ceux-ci rayonnent au point d'observation. Ce dernier point sera illustré section 5.2.
- Pour que la distribution de probabilité de l'amplitude soit centrée en 0, propriété essentielle pour un speckle pleinement développé, il faut que la distribution de phases soit suffisamment large de telle sorte que celle-ci puisse être considérée homogène sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Cette condition de diffuseur fort se traduit en terme d'écart-type de la distribution de phases $\sigma_\phi \gg 2\pi$.

Les deux grandeurs apparaissant dans ces hypothèses, r_{diff} et σ_ϕ , sont fixées par les propriétés du diffuseur, que nous nous attacherons à décrire dans cette partie.

Dans le cadre de notre expérience, la génération du speckle se fait par transmission d'une onde laser au travers d'une lame de verre dépolie, d'épaisseur locale $e(\mathbf{x}_0)$ aléatoire et répartie selon une distribution gaussienne de largeur σ_e et de valeur moyenne \bar{e} , où $\bar{\cdot}$ représente la moyenne sur les différentes réalisations de l'épaisseur aléatoire. On supposera que cette lame a été dépolie de manière homogène, ainsi, la statistique de l'épaisseur ne dépend pas de la position considérée sur la surface du diffuseur. On assimilera donc la distribution de l'épaisseur à un processus stationnaire.

La phase localement accumulée par le faisceau laser incident lors de la traversée du diffuseur est proportionnelle à l'épaisseur traversée et donnée par

$$\phi(\mathbf{x}_0) = 2\pi(n-1)\frac{e(\mathbf{x}_0)}{\lambda}, \quad (5.4)$$

avec n l'indice du verre et $\lambda \approx 780\text{nm}$ la longueur d'onde de l'onde laser. L'influence de cette phase sur l'amplitude du champ laser se traduit via la transmission locale du diffuseur

$$t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) = e^{i\phi(\mathbf{x}_0)} \quad (5.5)$$

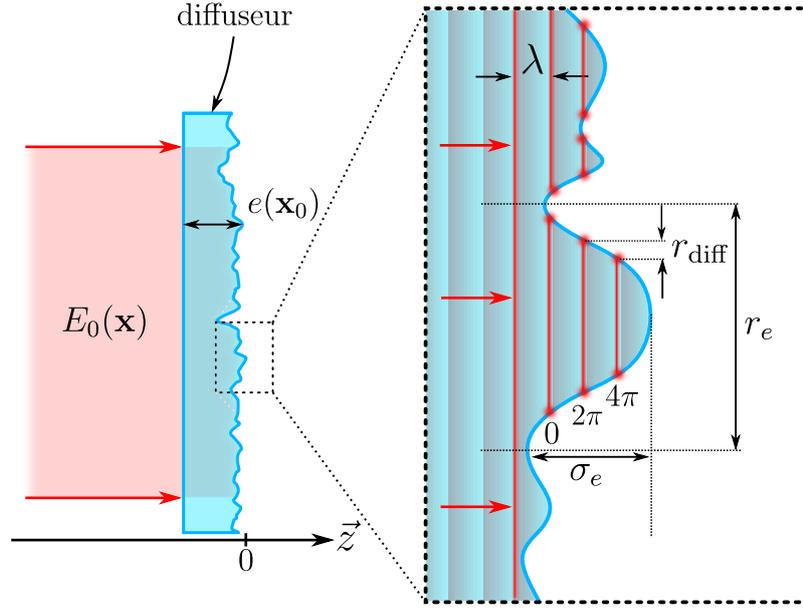


FIGURE 5.2 – **Caractéristiques du diffuseur.** L'épaisseur aléatoire est caractérisée par une hauteur typique σ_e et une granularité de taille r_e . Pour $\sigma_e \gg \lambda$, on a plusieurs oscillations de l'onde incidente dans le même grain, et donc t_{diff} qui est une fonction 2π -périodique, voit sa corrélation réduite.

dont la valeur moyenne $\overline{t_{\text{diff}}}$ caractérise le pouvoir diffusant. Pour une lame peu rugueuse, le faisceau est en moyenne peu affecté lors de sa traversée et l'on a $\overline{t_{\text{diff}}} \approx 1$, tandis que dans le cas d'un diffuseur fort $\overline{t_{\text{diff}}} \approx 0$. En fixant la phase moyenne $\overline{\phi} = 0$, on montre annexe B que [25]

$$\overline{t_{\text{diff}}} = e^{-\frac{\sigma_\phi^2}{2}} \quad \text{avec} \quad \sigma_\phi = 2\pi(n-1)\frac{\sigma_e}{\lambda}. \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un diffuseur de grande rugosité, dont l'épaisseur typique des grains σ_e est de l'ordre de plusieurs λ , on a $\sigma_\phi \gg 2\pi$ et cela permet donc de considérer que la distribution de phases est constante sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, essentiel pour un speckle pleinement développé.

Les grains du diffuseur sont de plus caractérisés par une certaine extension spatiale typique r_e correspondant à une largeur de corrélation de l'épaisseur. Celle-ci induit donc une corrélation spatiale de la transmission, décrite à l'aide la fonction de corrélation

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0)} = \overline{e^{i(\phi(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}'_0))}}. \quad (5.7)$$

Puisque l'épaisseur et la phase sont proportionnelles, ces deux grandeurs sont corrélées sur la même taille r_e correspondant à la granularité de la surface du verre. En revanche, dans le cas où $\sigma_e \gg \lambda$ (ce qui est le cas sur notre expérience), l'onde oscille plusieurs fois dans le même grain du diffuseur. La transmission étant une fonction 2π -périodique de la phase, celle-ci perd alors sa corrélation sur une taille $r_{\text{diff}} \ll r_e$, voir figure 5.2. On montre alors annexe B que la corrélation de la transmission à courte portée¹ est de forme gaussienne :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0) \approx \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0|^2}{2r_{\text{diff}}^2}\right) \quad \text{avec} \quad r_{\text{diff}} = r_e/\sigma_\phi. \quad (5.8)$$

1. La corrélation de la transmission tend suffisamment vite vers 0 pour que l'on puisse considérer que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0| \ll r_e$ dans le cas où $\sigma_\phi \gg 2\pi$.

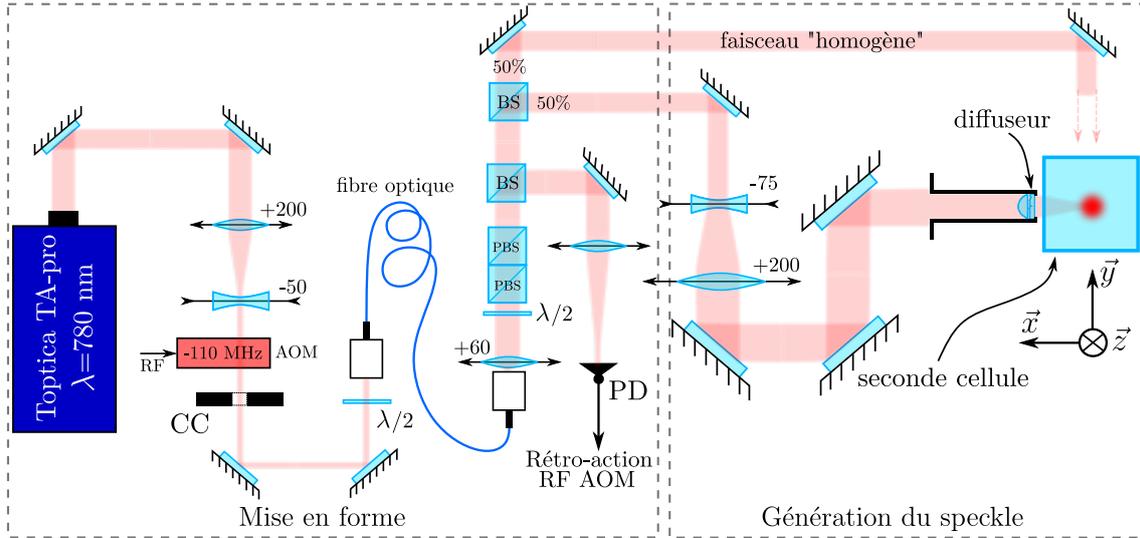


FIGURE 5.3 – **Montage de génération du désordre optique.** Ce montage se décompose en deux parties, la première étant dédiée à la mise en forme du faisceau (cadre de gauche). Celui-ci est émis d'un laser Toptica TA-Pro, dont le mode et la polarisation sont filtrés, et la puissance est stabilisée. Dans un second temps, ce faisceau est focalisé sur les atomes et passe au travers du diffuseur générant le speckle (cadre de droite).

r_{diff} joue alors le rôle de la taille effective d'un émetteur indépendant tel que considéré dans la section 5.1.1. La condition d'un grand nombre d'émetteurs s'écrit alors $r_{\text{diff}} \ll D$.

Enfin, il est possible de définir l'angle de diffusion $\theta_{\text{diff}} = \lambda/\pi r_{\text{diff}} = 2(n-1)\sigma_e/r_e$, qui est indépendant de la longueur d'onde de l'onde laser incidente. θ_{diff} est donc une constante du diffuseur, fixée par les paramètres géométriques de celui-ci.

5.1.3 Implémentation expérimentale

Les expériences menées sur notre dispositif jusqu'en 2014 utilisaient un speckle réalisé à la longueur d'onde de 532 nm. Ce grand désaccord vers le bleu par rapport à la transition D_2 du ^{87}Rb permet ainsi de s'affranchir de l'émission spontanée, même pour les très longs temps de propagation nécessaires à l'étude de la localisation d'Anderson. Depuis 2015 en revanche, l'équipe utilise un speckle accordable autour de 780 nm offrant ainsi la possibilité de réaliser un désordre attractif ou répulsif. Nous verrons section 5.3 que cette accordabilité autour de la transition D_2 offre un grand nombre de possibilités expérimentales, telles que la génération d'un désordre dépendant du spin.

Mise en forme du faisceau speckle

Par vœu de concision, seules les grandes lignes du montage de génération du speckle à 780 nm seront données ici, de nombreux détails à propos de ce montage pouvant être retrouvés dans les thèses de Jérémie Richard, Vincent Denechaud et Musawwadah Mukhtar [25, 74, 93]. De plus, les détails des éléments du montage dépendent fortement de la mesure souhaitée comme nous le verrons dans la suite de chapitre, néanmoins la philosophie en reste inchangée.

Ce montage se décompose en deux parties, la première permettant de mettre en forme les propriétés du faisceau laser, et la seconde génère le désordre sur les atomes.

Le faisceau source du speckle est émis par un laser industriel *Toptica TA-Pro 2W* accordable autour de 780 nm. Étant donné la proximité de la transition atomique, ce laser peut être asservi par battements sur le laser repompeur $L2^2$, ce qui permet alors d'en fixer la fréquence avec une précision de 1 MHz. Le mode spatial et la polarisation du faisceau sont filtrés à l'aide d'une fibre optique à maintien de polarisation et de cubes séparateurs de polarisation.

Une partie de la puissance du faisceau est ensuite prélevée et mesurée à l'aide d'une photodiode, et la rétroaction sur le faisceau à l'aide d'un modulateur acousto-optique (AOM pour l'anglais *Acousto-Optic Modulator*) permet alors d'en stabiliser la puissance. La photodiode étant placée après la fibre optique et les cubes séparateurs de polarisation, la boucle d'asservissement de puissance permet de plus de s'affranchir des fluctuations de puissance dues à la polarisation et aux fluctuations du couplage.

Enfin, le faisceau est séparé en deux parties par une séparatrice 50/50, chacune de ces parties pouvant être envoyée sur les atomes. La partie réfléchie est ensuite agrandie à l'aide d'un télescope avant d'être focalisée sur les atomes et diffraction par le diffuseur, dont la géométrie sera présentée dans le paragraphe suivant. À ce stade, on dispose d'un faisceau de waist 14.6 mm (rayon à $1/e^2$), de polarisation π et dont la puissance est stabilisée et contrôlable.

Historiquement, la partie transmise était utilisée afin de réaliser une superposition cohérente de deux faisceaux speckle, permettant d'obtenir un désordre isotrope³ [46]. Aujourd'hui, ce faisceau est utilisé sans diffuseur et permet de réaliser un potentiel homogène servant à calibrer l'amplitude du potentiel.

Génération du speckle

La génération du speckle se fait selon le montage représenté figure 5.4. Un faisceau gaussien collimaté de waist 14.6 mm et de longueur d'onde $\lambda = 780$ nm, dont la mise en forme a été présentée dans le paragraphe précédent, est tronqué par un diaphragme de diamètre 22.9 mm. Ce faisceau passe ensuite au travers d'une lentille asphérique épaisse (*Thorlabs ACL2520-B*) de focale 16.0 mm (et de frontale 15.7 mm) montée dans ce même diaphragme. Le rôle de celle-ci est de focaliser la lumière sur les atomes⁴. Accolé à cette lentille se trouve un diffuseur *Newport FSD10-3* possédant une épaisseur de 0.5 mm⁵ et un angle de diffusion $\theta_{\text{diff}} \approx 5^\circ$.

Enfin, ce faisceau convergent traverse la paroi de la cellule en verre sous ultra-vide

2. Le choix d'asservir ou non ce laser dépend du désaccord utilisé. Ainsi, nous verrons que le laser speckle n'était pas asservi en fréquence pour la mesure du temps de diffusion élastique ($|\Delta|/2\pi \sim 1$ THz), tandis que ce fut le cas lors de la mesure des fonctions spectrales ($|\Delta|/2\pi \sim 70$ MHz).

3. Comme nous le verrons section 5.2.3, les grains d'un speckle unique sont étendus suivant la direction longitudinale. L'interférence entre deux speckles croisés permet de fortement réduire cette anisotropie [90].

4. Nous verrons dans la section suivante que cela permet d'obtenir des grains de speckle les plus petits possibles. En effet, on attend la manifestation d'effets quantiques sur la propagation d'une onde de matière dans un speckle pour des longueurs d'onde de de Broglie plus grandes que la taille des grains de speckle.

5. Cette épaisseur était initialement de 3 mm avant d'être réduite à 0.5 mm par l'atelier d'optique de l'IOGS.

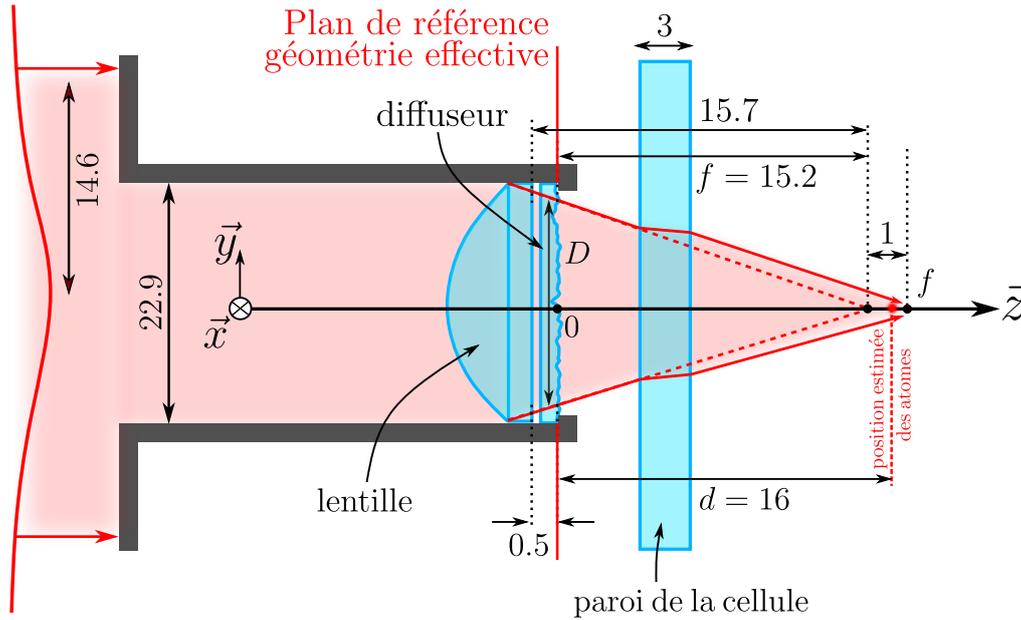


FIGURE 5.4 – **Géométrie du montage de génération du speckle.** Un faisceau gaussien incident de waist 14.6 mm est tronqué dans un diaphragme de diamètre 22.9 mm qui supporte le diffuseur. Ce faisceau est ensuite focalisé par une lentille asphérique épaisse de focale 16 mm et traverse le diffuseur d'épaisseur 0.5 mm. Le plan de focalisation est déplacé d'environ 1 mm à cause de la paroi de la cellule à vide, d'épaisseur 3 mm. Le plan repéré en rouge, correspondant à la surface moyenne du diffuseur, servira de plan de référence dans le cadre d'une géométrie effective illustrée figure 5.5.

d'épaisseur $e = 3.0$ mm et située à 0.5 mm de la monture du diffuseur. Le matériau de cette cellule est du Vycor, d'indice optique $n = 1.46$. L'épaisseur de cette cellule, considérée comme une lame à faces parallèles, induit un décalage des rayons lumineux par réfraction, décalage représenté figure 5.4 montrant la trajectoire des rayons lumineux en absence de la paroi par des traits pointillés. La présence de la paroi entraîne donc un déplacement du plan de focalisation donné par $\Delta d = e(1 - 1/n) \approx 1$ mm. La distance focale en présence de la paroi de la cellule est alors de 17.0 mm.

En choisissant pour origine de l'axe \vec{z}^6 la surface du diffuseur, la position du plan de focalisation se trouve à $f = 16.2$ mm. Dans ce repère, la position des atomes dans le piège optique est estimée quant à elle à $d = 16 \pm 0.5$ mm, dont la valeur est proche de celle de la position du plan de focalisation. Néanmoins, l'incertitude liée à la position des atomes est cruciale, celle-ci pouvant conduire à un écart de 0.7 mm du plan de focalisation. Il est ainsi primordial de connaître les propriétés du speckle autour du plan de focalisation.

Géométrie effective du montage du diffuseur

La lentille asphérique utilisée pour la focalisation du faisceau sur les atomes étant épaisse⁷, le faisceau est donc fortement affecté par sa traversée. L'éclairement dans le

6. L'axe \vec{z} utilisé dans ce chapitre correspond à la direction de propagation du faisceau speckle. Dans le repère de l'expérience, il s'agit en réalité de l'axe \vec{x} , perpendiculaire au plan formé par les faisceaux du piège optique.

7. L'épaisseur au centre est de 12 mm pour une frontale de 15.7 mm.

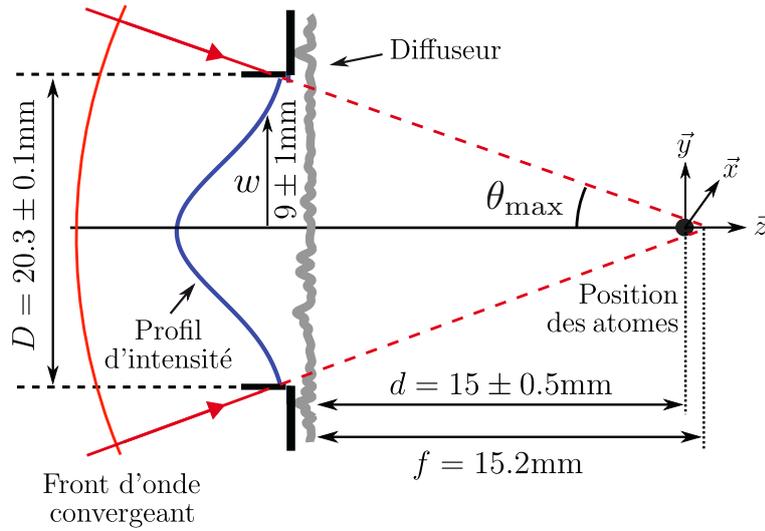


FIGURE 5.5 – **Géométrie effective du montage du diffuseur.** L'épaisseur de la lentille n'étant pas négligeable, l'éclairement au niveau du diffuseur a déjà subi un effet de focalisation comparé à celui au niveau de la lentille. Cela se traduit par un front d'onde au niveau du diffuseur qui est convergent, avec un profil gaussien de largeur $w \approx 9$ mm tronqué à un diamètre $D \approx 20.3$ mm.

plan du diffuseur correspond donc à l'éclairement incident gaussien de waist 14.6 mm (rayon à $1/e^2$) tronqué par une pupille de diamètre 22.9 mm et ayant déjà subi un effet de focalisation. Il a été déterminé par photographie que le profil de l'éclairement dans le plan du diffuseur est aussi de forme gaussienne tronquée, avec un waist $w_0 = 9 \pm 1$ mm et une pupille de diamètre $D = 20.3 \pm 0.1$ mm.

Il est alors possible de décrire le montage du diffuseur et le champ incident à l'aide d'une géométrie effective simplifiée illustrée figure 5.5. On considèrera ainsi que le profil d'intensité au niveau du diffuseur est donné par une forme gaussienne de largeur $w = 9 \pm 1$ mm tronquée par une diaphragme de diamètre $D = 20.3 \pm 0.1$ mm et convergent à la distance $f = 15.2$ mm⁸. Ceci entraîne une ouverture numérique maximale $ON = \sin(\theta_{\max}) = 0.55 \pm 0.02$. Dans le cadre de cette géométrie effective, la position des atomes est estimée à $d = 15 \pm 0.5$ mm.

Amplitude rayonnée

L'utilisation de ce modèle à géométrie effective permet de décrire simplement les propriétés du champ de speckle. En particulier, l'amplitude rayonnée $E(\mathbf{x}_d)$ est simplement donnée par le principe de Huygens-Fresnel⁹ :

$$E(\mathbf{x}_d) \propto \int d\mathbf{x}_0 E_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) \exp\left(ik \frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}\right) \exp\left(-ik \frac{\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0}{d}\right), \quad (5.9)$$

8. Si la présence de la paroi de la cellule entraîne un déplacement du plan focalisation, celle-ci ne modifie pas l'ouverture numérique du système, c'est-à-dire l'angle des rayons avec l'axe optique. Comme nous le verrons dans la suite, il s'agit de la quantité qui décrit, avec la longueur d'onde, les propriétés spatiales d'un champ de speckle.

9. Nous utilisons ici l'approximation paraxiale (voir annexe B), dont la pertinence sera discutée à postériori.

où l'ensemble des points $\{\mathbf{x}_d\}$ correspond au plan $\{x, y, z = d\}$ situé à une distance d de la surface du diffuseur. L'ensemble des points $\{\mathbf{x}_0\}$ décrit le plan du diffuseur $\{x, y, z = 0\}$, $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et d_{eff} correspond à une distance effective donnée par $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f$.

$E_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ correspond à l'amplitude dans le plan de référence du diffuseur, qu'il est possible de décomposer sous la forme

$$E_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) = E_0(\mathbf{x}_0)t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) \quad \text{avec} \quad E_0(\mathbf{x}_0) = E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)m(\mathbf{x}_0), \quad (5.10)$$

où $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ est la transmission du diffuseur, $E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)$ est le champ incident¹⁰, et $m(\mathbf{x}_0) = \Theta(|\mathbf{x}_0| - D/2)$ avec Θ la fonction de Heaviside est un masque représentant le diaphragme de diamètre D . $E_0(\mathbf{x}_0)$ correspond alors au champ au niveau du diffuseur, de forme gaussienne tronquée et convergente.

5.2 Propriétés spatiales d'un champ de speckle

Le speckle résultant de la propagation d'un faisceau transmis par le diffuseur, il est donc régi par les lois de la diffraction. Il est donc possible de déduire les propriétés spatiales du speckle de celles du diffuseur ainsi que de celles de l'éclairement incident. Notamment, les variations spatiales du champ de speckle sont décrites quantitativement par sa fonction de corrélation, dont l'étude permet de déterminer toutes les tailles caractéristiques d'intérêt pour notre expérience. Parmi celles-ci, nous nous concentrerons sur l'extension du champ de speckle ainsi que sur les tailles moyennes des grains de lumière.

Dans cette section, nous allons nous attacher à décrire ces échelles de longueur caractéristiques autour du plan de focalisation à l'aide de la fonction de corrélation du champ de speckle et de son intensité moyenne, dont le détail des calculs est donné en annexe B.

De plus, lors de la conception de ce système, l'extension du champ de speckle ainsi que les tailles des grains de speckle ont été mesurées expérimentalement sur un montage reproduisant exactement les conditions réelles en présence de la cellule à vide, celle-ci empêchant de faire des mesures in-situ. La description de ces mesures et de leur traitement sont référencées dans la thèse de Jérémie Richard [93].

5.2.1 Extension transverse du champ de speckle le long le l'axe optique

Afin de déterminer l'extension transverse du champ de speckle, il est nécessaire de calculer le profil d'intensité moyenne $\bar{I}(\mathbf{x}_d)$ à partir de l'expression de l'amplitude rayonnée 5.9. En remarquant que le champ $E_0(\mathbf{x}_0)$ varie lentement à l'échelle des variations de $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$, on peut écrire que $E_0(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0) \approx E_0(\mathbf{x}_0)$ avec $\delta\mathbf{x}_0$ de l'ordre de r_{diff} .

On montre alors (voir annexe B) que le profil d'intensité moyenne à la distance d peut s'écrire [33]

$$\begin{aligned} \bar{I}(\mathbf{x}_d) &= \overline{E(\mathbf{x}_d)E^*(\mathbf{x}_d)} \\ &\propto I_0 \left(\frac{d_{\text{eff}}}{d} \mathbf{x}_d \right) * \widetilde{C}_{\text{diff}} \left(\frac{\mathbf{x}_d}{\lambda d} \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

10. Il s'agit du faisceau gaussien de waist 9 mm dans notre géométrie effective.

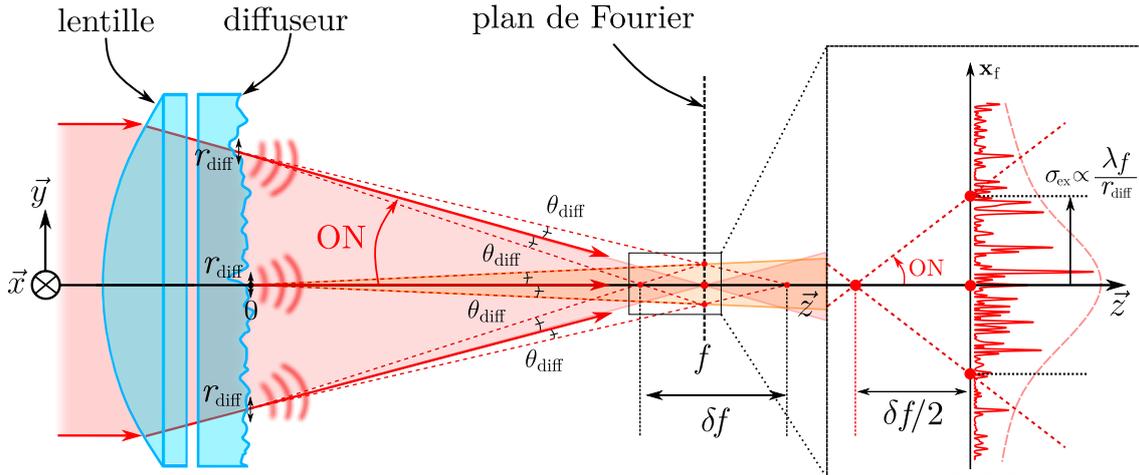


FIGURE 5.6 – **Extension du champ de speckle.** L'extension du faisceau de speckle est due à deux effets distincts, la focalisation du faisceau incident et la diffraction du faisceau par le diffuseur suivant un angle θ_{diff} . La contribution de la focalisation à l'extension du faisceau est illustrée par des flèches rouges et un remplissage rose, tandis que celle de la diffraction correspond à un remplissage orange. La région aux alentours du plan focal est particulièrement intéressante car il s'agit de celle où l'ensemble des émetteurs contribuent à l'éclairage, chaque émetteur diffractant dans un cône d'angle θ_{diff} illustré par des pointillés rouges. Dans le cas où l'angle de diffusion est petit devant l'ouverture numérique $\theta_{\text{diff}} \ll \text{ON}$, on peut estimer par trigonométrie l'étendue de cette région à $\delta f/2 = \sigma_{\text{ex}}/\text{ON}$ (encart).

où le symbole $*$ dénote le produit de convolution. L'évolution du profil d'intensité moyenne en fonction de la distance d est alors dû à deux contributions dont l'interprétation physique est la suivante :

- Le premier terme correspond à l'effet de la lentille dans le cadre de l'optique géométrique, et focalise donc le profil d'intensité initiale $I_0(\mathbf{x}_0) = |E_0(\mathbf{x}_0)|^2$ dans le plan focal $\{x, y, z = f\}$. Cette focalisation se traduit au travers d'un changement d'échelle de l'intensité par le facteur $d/d_{\text{eff}} = |d - f|/f$. Ainsi, la taille de ce faisceau focalisé décroît avec la distance jusqu'à s'annuler dans le plan focal, comme prédit par l'optique géométrique.
- Le second terme est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du diffuseur $C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$. Ce terme traduit la diffraction de l'onde incidente par les grains du diffuseur de taille r_{diff} . À partir de l'expression 5.8 de $C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$, on trouve que ce terme correspond à une gaussienne dont la largeur est donnée par $\lambda d/\pi r_{\text{diff}}$, qui croît linéairement avec la distance d .

Ces dépendances sont illustrées figure 5.6, où le fond rose correspond au premier terme de focalisation, tandis le fond orange illustre le second terme de diffraction issu du centre du diffuseur. On identifie alors deux régimes pour lesquels un terme est prépondérant.

Dans une première région, loin du plan focal de la lentille, la taille du faisceau est donnée par l'effet de focalisation de la lentille. Une seconde région, proche du plan focal de la lentille, est dominée par l'effet de diffraction des émetteurs du diffuseur, la taille de l'éclairage incident étant fortement réduite par focalisation. Ainsi, pour une zone très

proche du plan focal de la lentille, on peut décrire le profil d'intensité lumineuse par

$$\bar{I} \propto \text{TF}[C_{\text{diff}}](\mathbf{x}_f/\lambda f) \quad (5.12)$$

où l'ensemble des points $\{\mathbf{x}_f\}$ correspond au plan de Fourier¹¹ $\{x, y, z = f\}$, et C_{diff} est la fonction de corrélation du diffuseur, de forme de gaussienne avec une largeur r_{diff} . Le profil d'intensité lumineuse dans le plan de Fourier est alors donné par

$$\bar{I}(\mathbf{x}_f) \propto \exp\left(-\frac{2|\mathbf{x}_f|^2}{\sigma_{\text{ex}}}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{ex}} = \frac{\lambda f}{\pi r_{\text{diff}}} . \quad (5.13)$$

σ_{ex} correspond donc au waist du profil d'intensité moyenne, dont l'expression peut se réécrire à l'aide de l'angle du diffusion $\sigma_{\text{ex}} = \theta_{\text{diff}} f = 1.5 \pm 0.1 \text{ mm}$. Donc, dans le plan de Fourier, l'extension du champ de speckle ne provient que de l'effet de la diffraction des émetteurs individuels dont les faisceaux se recouvrent tous, comme illustré figure 5.6 par la zone orange.

Cette condition de recouvrement des faisceaux provenant de l'ensemble des émetteurs du diffuseur permet de considérer que dans cette région le speckle est entièrement développé. Afin d'en déterminer l'étendue longitudinale, on s'intéresse aux positions de l'espace où l'ensemble des faisceaux provenant du diffuseur participent. Dans la limite $\theta_{\text{diff}} \ll \text{ON}$, on détermine par trigonométrie que cette zone s'étend de part et d'autre du plan de Fourier sur une distance $\delta f/2 \approx \sigma_{\text{ex}}/\text{ON} = 2.5 \pm 0.1 \text{ mm}$ (voir figure 5.6), délimitant ainsi les régions décrites précédemment. Par analogie avec un faisceau gaussien, on appellera δf la *distance de Rayleigh* du champ de speckle, et sa valeur nous assure que les atomes se trouveront dans la zone où le speckle est pleinement développé, celle-ci étant un ordre de grandeur plus grande que l'incertitude de positionnement des atomes.

5.2.2 Longueur de corrélation transverse le long de l'axe optique

La seconde taille caractéristique du speckle, la taille des grains de lumière, est une grandeur d'une importance capitale pour la physique du désordre. Si l'extension du faisceau de speckle est une grandeur d'intérêt pratique (celle-ci donne une borne supérieure sur les tailles de nuages et détermine le potentiel maximal accessible en fonction de la puissance du faisceau laser), nous verrons chapitre 6 que la taille des grains de speckle influe sur la dynamique de la propagation d'une onde en milieu désordonné.

Le potentiel ressenti par les atomes étant proportionnel à l'intensité lumineuse, on peut définir la taille des grains du potentiel à l'aide de la fonction de corrélation en intensité du speckle. En utilisant le théorème de Wick pour les variables aléatoires gaussiennes, il est possible de relier la fonction de corrélation en intensité à la fonction de corrélation en amplitude du speckle :

$$\overline{I(\mathbf{x}_d)I(\mathbf{x}'_d)} = \overline{I(\mathbf{x}_d)} \overline{I(\mathbf{x}'_d)} + \left| \overline{E(\mathbf{x}_d)E^*(\mathbf{x}'_d)} \right|^2 , \quad (5.14)$$

où les positions \mathbf{x}_d et \mathbf{x}'_d correspondent à deux points dans le plan $\{x, y, z = d\}$ transverse à l'axe optique.

11. Dans le plan focal $\{x, y, z = f\}$, le champ rayonné est alors la transformée de Fourier du champ incident comme illustré par la formule 5.9. Il s'agit d'une propriété bien connue des lentilles de pouvoir ramener l'infini de la diffraction de Fraunhofer à distance finie.

Dans les conditions expérimentales usuelles, il est possible de négliger l'effet de l'extension spatiale finie du speckle, celle-ci étant très grande à l'échelle des grains de speckle. Dans ce régime, on peut alors considérer que le premier terme de l'équation 5.14 est constant et égal à \bar{I}^2 . On définit alors la taille des grains du potentiel à l'aide la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité :

$$\overline{\delta I(\mathbf{x}_d)\delta I(\mathbf{x}'_d)} = \left| \overline{E(\mathbf{x}_d)E^*(\mathbf{x}'_d)} \right|^2, \quad (5.15)$$

où $\delta I(\mathbf{x}_d) = I(\mathbf{x}_d) - \bar{I}(\mathbf{x}_d)$ correspond aux fluctuations statistiques d'intensité.

À l'échelle des grains de speckle, on peut considérer que la fonction de corrélation en amplitude ne dépend uniquement que de la différence des positions considérées. On montre annexe B que la fonction de corrélation transverse en amplitude le long de l'axe optique peut s'écrire [33] :

$$\begin{aligned} C_E(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}'_d) &= \overline{E(\mathbf{x}_d)E^*(\mathbf{x}'_d)} \\ &\propto \tilde{I}_0 \left(\frac{\delta \mathbf{x}_d}{\lambda d} \right) * C_{\text{diff}} \left(\frac{d_{\text{eff}}}{d} \delta \mathbf{x}_d \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

où $\delta \mathbf{x}_d = \mathbf{x}'_d - \mathbf{x}_d$. De même que pour l'extension spatiale du champ de speckle, la fonction de corrélation transverse résulte de deux contributions, dont les interprétations physiques sont les suivantes :

- Le premier terme correspond à la transformée de Fourier de l'intensité lumineuse dans le plan du diffuseur. Il s'agit ici du motif de diffraction à l'infini en l'absence du diffuseur, dont la taille est proportionnelle à la distance. Ce facteur d'échelle s'interprète comme une diminution de l'ouverture numérique au fur et à mesure de l'éloignement avec le diffuseur, comme indiqué par la relation $\text{ON}'(d) = D/2d$ en considérant les rayons les plus inclinés, avec D la taille du diaphragme de l'éclairage au niveau du diffuseur. Ce terme conduit donc à largeur de l'ordre de $\sim \lambda/\pi \text{ON}'(d)$, qui croît linéairement avec la distance d .
- Le second terme décrit quant à lui le fait que les grains du diffuseur ne diffractent que selon un angle θ_{diff} . De fait, ce terme décrit les régions de l'espace dans lesquelles l'ensemble du diffuseur ne participe pas à l'interférence au point \mathbf{x}_d , comme illustré par la zone orange figure 5.7. Ce terme joue ainsi le rôle d'ouverture numérique effective, dont l'expression $\text{ON}_{\text{eff}}(d) = \theta_{\text{diff}} f / |d - f|$ peut être obtenue par trigonométrie [93]. L'écriture de ce terme donnée équation 5.16 permet néanmoins d'obtenir une expression simple de la largeur induite pour la fonction de corrélation transverse : $\sim \lambda/\pi \text{ON}_{\text{eff}}(d)$.

La largeur de la fonction de corrélation apparaît alors comme la plus petite taille permise par les lois de la diffraction : il s'agit de la limite de diffraction. L'étude de la taille transverse des grains de speckle se résume alors à l'évolution de l'ouverture numérique le long de l'axe de propagation du faisceau.

À l'instar de l'extension du champ de speckle, il est possible d'identifier deux régions dans lesquelles le comportement de la largeur de la fonction de corrélation transverse en amplitude du speckle est majoritairement dû à l'un des effets mentionnés ci-dessus. La frontière entre ces deux régions est donnée, comme pour l'extension du speckle, par la distance de Rayleigh δf du champ lumineux qui caractérise, rappelons-le, l'étendue sur laquelle l'ensemble de diffuseur participe à l'amplitude rayonnée.

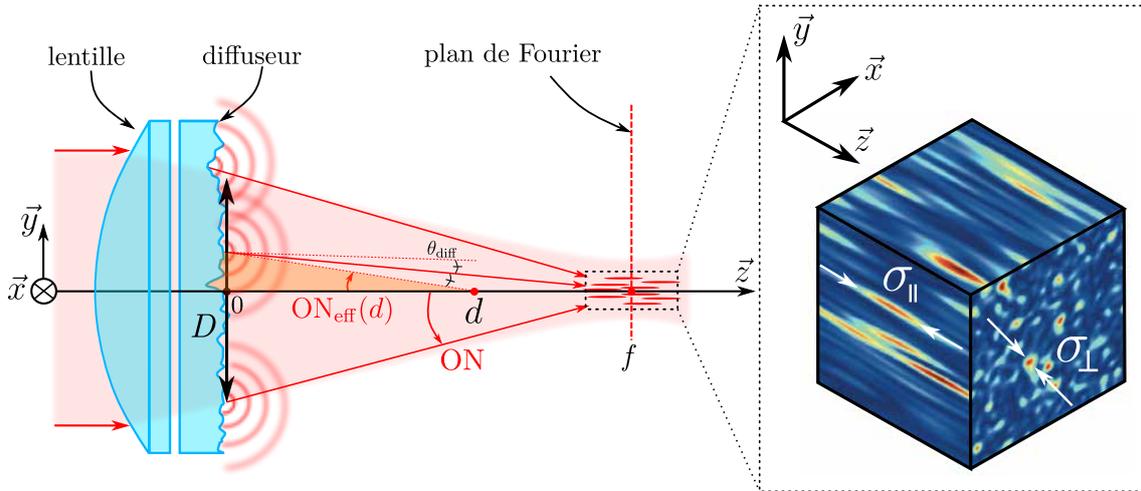


FIGURE 5.7 – **Tailles des grains de speckle.** La taille transverse σ_{\perp} des grains de speckle est donnée par la limite de diffraction, et dépend donc de l'ouverture numérique à la position d'observation d . Loin du plan de Fourier, seule une zone réduite du diffuseur participe à l'interférence, réduisant donc l'ouverture numérique (zone orangée). **Encart :** Simulation tridimensionnelle d'un champ de speckle. Celle-ci fait apparaître une forme très allongée des grains selon la direction longitudinale. La taille longitudinale σ_{\parallel} des grains est de l'ordre de la distance de Rayleigh associée à la taille transverse σ_{\perp} comme on le verra section 5.2.3.

Nous considérerons donc dans la suite que les atomes se trouvent à proximité du plan de Fourier, et la fonction de corrélation sera dominée par le régime de diffraction à l'infini, où l'ouverture numérique y est maximale. La fonction de corrélation des fluctuations d'intensité s'écrit alors simplement

$$\overline{\delta I(\mathbf{x}_f)\delta I(\mathbf{x}_f + \delta \mathbf{x}_f)} \propto |\text{TF}[I_0](\delta \mathbf{x}_f/\lambda f)|^2, \quad (5.17)$$

qui n'est autre que le théorème de Van Cittert-Zernike en remarquant que la fonction de corrélation $\overline{\delta I(\mathbf{x}_f)\delta I(\mathbf{x}_f + \delta \mathbf{x}_f)}$ correspond au degré de cohérence spatiale. Dans la suite, nous assimilerons la forme de cette fonction de corrélation à une gaussienne (voir section 5.2.4), cependant, la forme exacte de la fonction de corrélation aux alentours du plan de Fourier nécessite tout de même une connaissance fine du profil d'intensité dans le plan du diffuseur¹².

Nous retiendrons ici que la taille transverse des grains de lumière est donnée par la limite de diffraction du système, $\sigma_{\perp} \sim \lambda/\pi \text{ON}$ de l'ordre de $0.5 \mu\text{m}$, bien inférieure à l'extension du faisceau de speckle $\sigma_{\perp} \ll \sigma_{\text{ex}}$. Une calibration précise de la taille transverse des grains de speckle est présentée section 5.2.4.

12. L'assimilation à une forme gaussienne revient à considérer que l'effet du diaphragme sur l'éclairement incident est négligeable. Cette simplification n'est valable que dans le cas de la corrélation transverse, l'effet du diaphragme étant bien plus marqué dans le cas de la corrélation longitudinale (voir sections 5.2.3 et 5.2.4).

5.2.3 Longueur de corrélation longitudinale autour du plan de Fourier

Comme représenté figure 5.7, les grains de speckle possèdent une extension longitudinale finie. De même que dans le cas de l'extension transverse des grains, la taille longitudinale des grains de speckle est donnée par la largeur de la fonction de corrélation longitudinale des fluctuations des grains de speckle aux alentours du plan de Fourier :

$$\overline{\delta I(f)\delta I(f+\delta z)} = \left| \overline{E(f)E^*(f+\delta z)} \right|^2, \quad (5.18)$$

évaluée aux positions $\{0,0,z=f\}$ et $\{0,0,z=f+\delta z\}$ sur l'axe optique.

En supposant que l'extension longitudinale δf du champ de speckle soit très grande devant la taille longitudinale des grains, on peut se limiter à des petits déplacements $\delta z \ll \delta f$. On montre alors que la corrélation longitudinale en amplitude aux alentours du plan de Fourier peut s'écrire [65] :

$$\overline{E(f)E^*(f+\delta z)} \propto \int d\mathbf{x}_0 I_0(\mathbf{x}_0) e^{i\pi \mathbf{x}_0^2 \delta z / \lambda f^2}. \quad (5.19)$$

On retrouve ainsi un comportement similaire à celui de la corrélation transverse aux alentours du plan de Fourier : la fonction de corrélation ne dépend que de l'éclairement incident. Cependant, la détermination de la fonction de corrélation longitudinale est plus compliquée que celle de la corrélation transverse, celle-ci ne se résumant pas qu'à une simple transformation de Fourier. Avant de donner une expression analytique dans un cas précis, il est possible de donner une estimation de la longueur de corrélation à l'aide de la *méthode du col*. En effet, les valeurs de \mathbf{x}_0 qui contribuent significativement à l'intégrale sont celles pour lesquelles la phase $\pi \mathbf{x}_0^2 \delta z / \lambda f^2$ est très petite devant 1. On peut alors obtenir une estimation de la longueur de corrélation longitudinale :

$$\sigma_{\parallel} \sim \frac{\lambda}{\pi \text{ON}^2}. \quad (5.20)$$

La taille longitudinale des grains apparaît alors comme étant la longueur de Rayleigh associée à la taille transverse des grains, ceux deux grandeurs étant reliées par $\sigma_{\parallel} \sim \sigma_{\perp} / \text{ON}$.

Forme de la fonction de corrélation longitudinale

Il est possible d'obtenir des expressions analytiques de la fonction de corrélation longitudinales pour certains profils d'intensité. Notamment, on peut montrer que dans le cas d'un éclairage purement gaussien, la fonction de corrélation 5.18 est de forme lorentzienne [37] :

$$\overline{\delta I(f)\delta I(f+\delta z)} \propto \frac{1}{1 + 4\delta z^2 / \sigma_{\parallel}^2} \quad (5.21)$$

avec $\sigma_{\parallel} = 4\lambda f^2 / \pi w^2$ et w le waist du faisceau incident. On retrouve ainsi, à un facteur numérique près, la prédiction de la formule 5.20. Un second cas d'intérêt correspond à celui d'un faisceau homogène tronqué par un diaphragme de diamètre D . Dans cette situation, la fonction de corrélation longitudinale 5.18 possède une forme en sinus cardinal au carré.

Dans le cas de notre éclairage à la fois gaussien et tronqué par un diaphragme, la fonction de corrélation possède donc une forme complexe proche d'une fonction lorentzienne

et d'un sinus cardinal au carré, voir figure 5.8. Une calibration expérimentale de la longueur de corrélation longitudinale, donnée par la largeur de cette fonction de forme complexe, est présentée dans la section suivante.

5.2.4 Effets non-paraxiaux sur les corrélations du speckle

La forme des fonctions de corrélations étant directement donnée par celle de l'intensité $I_0(\mathbf{x}_0)$, la détermination précise des longueurs de corrélation du speckle demande une connaissance fine de l'éclairement dans le plan du diffuseur. Cependant, les considérations sur l'éclairement au niveau du diffuseur présentées section 5.1.3 ne suffisent pas à reproduire les fonctions de corrélations expérimentales (voir figure 5.8, courbes oranges), mesurées par le biais de corrélations d'images de speckle obtenues à l'aide d'un objectif de microscope à haute résolution placé sur une platine de translation contrôlée électroniquement. Le procédé de mesure est décrit dans la thèse de Jérémie Richard [93].

Cette différence observée s'explique par le fait que les expressions des fonctions de corrélation des fluctuations d'intensité ont été obtenues dans le cadre de l'approximation paraxiale. Si l'utilisation d'un système de grande ouverture numérique permet certes d'obtenir les tailles de grains les plus petites possible, cela remet en cause l'approximation paraxiale utilisée pour décrire les caractéristiques spatiales de notre champ de tavelures. En particulier, notre système permet d'obtenir une grande ouverture numérique $ON = \sin \theta_{\max} = 0.55 \pm 0.02$ et cela implique que certains rayons lumineux sont inclinés d'un angle de plus de 30° par rapport à l'axe optique, pour lesquels l'approximation $\sin \theta = \theta$ n'est plus suffisante.

Notons tout de même que la forme de la fonction de corrélation transverse est très bien décrite par une fonction gaussienne, comme représenté figure 5.8. En particulier, dans le cas d'un désordre 2D¹³ tel qu'utilisé pour les mesures du temps de diffusion élastique, seule la corrélation transverse participe à la dynamique du transport de l'onde de matière. On définit alors la fonction de corrélation normalisée à deux dimensions par

$$c_{2D}(\Delta \mathbf{r}_\perp) = e^{-\Delta \mathbf{r}_\perp^2 / \sigma_\perp^2} \quad (5.22)$$

dont l'ajustement sur les données expérimentales donne $\sigma_\perp = 0.50 \pm 0.01 \mu\text{m}$. Il s'agit de la valeur de la longueur de corrélation transverse que l'on retiendra dans la suite.

Modèle numérique non paraxial

Afin de reproduire le désordre utilisé sur notre expérience, M. Pasek et D. Delande ont proposé une approche numérique reposant sur le principe de Huygens-Fresnel [120]. En se basant sur la géométrie de notre dispositif expérimental, ils ont développé un modèle discret dans le but est de reproduire la fonction de corrélation expérimentale

$$c_{\text{exp}}(\Delta \mathbf{x}) = \frac{\overline{\delta I(\mathbf{x}) \delta I(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})}}{\overline{\delta I^2}}, \quad (5.23)$$

essentielle à la simulation du comportement d'ondes de matière dans notre désordre optique.

13. Cette notion sera discutée dans le chapitre 6.

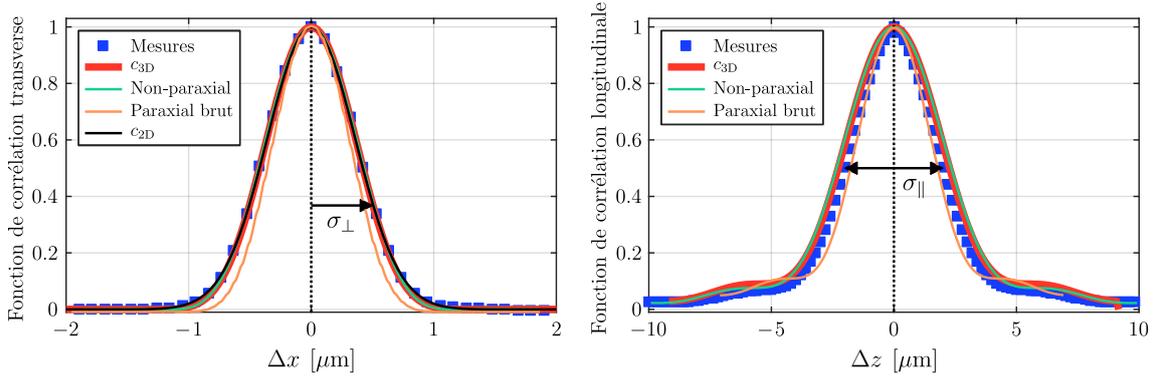


FIGURE 5.8 – **Corrélations spatiales du speckle.** Les données expérimentales (carrés bleus) sont comparés aux différents modèles. Le modèle non-paraxial (courbes vertes) développé par l'équipe de Dominique Delande permet de correctement décrire les corrélations expérimentales. Le modèle paraxial à ouverture numérique effective (courbes rouges) permet lui aussi de décrire correctement les corrélations mesurées, contrairement au modèle paraxial sans correction (courbes oranges). La fonction de corrélation transverse est similaire à une gaussienne (courbe noire), dont l'ajustement permet d'extraire la longueur de corrélation transverse $\sigma_{\perp} = 0.50 \pm 0.01 \mu\text{m}$ définie par le rayon à $1/e$. On définit la longueur de corrélation longitudinale $\sigma_{\parallel} = 4.1 \pm 0.1 \mu\text{m}$ par la largeur totale à mi-hauteur des données expérimentales.

Pour cela, le modèle se base sur la génération numérique d'un masque de phase représentant la forme de l'éclairage :

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \delta(|\mathbf{k}| - k_L) \exp\left(-\frac{\tan^2 \theta}{(w_0/f)^2}\right) \Theta\left(\frac{D}{2f} - \tan|\theta|\right), \quad (5.24)$$

où $k_L = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde du faisceau laser, et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ est l'angle entre le vecteur d'onde \mathbf{k} et l'axe optique. d correspond à la distance entre le plan du diffuseur et le plan de focalisation. Le second facteur traduit le profil gaussien du faisceau laser incident, tandis que le troisième facteur décrit quant à lui la présence du diaphragme. Notamment, ce modèle doit décrire l'effet du diaphragme sur les fonctions de corrélation dont le comportement dévie des formes gaussienne et lorentzienne pour les directions transverses et longitudinale respectivement.

Le champ rayonné s'écrit alors comme la somme des champs émis modulés par le masque 5.24 :

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} E_u(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (5.25)$$

où les E_u sont des champs complexes décorrelés¹⁴ dont les parties réelles et imaginaires sont des variables gaussiennes centrées. En utilisant les paramètres de l'expérience, on reproduit ainsi les bonnes propriétés statistiques du champ de tavelures, et la fonction de corrélation normalisée c_{num} simulée permet de reproduire de manière fidèle les fonctions de corrélation mesurées expérimentalement, comme illustré figure 5.8.

14. Le fait que ces champs soient décorrelés induit une extension infinie du champ de speckle. Ceci n'est pas en contradiction avec l'expérience dans la limite où l'extension du champ de speckle reste très grande devant les tailles de nos nuages, ceux-ci se trouvant aux alentours du plan de Fourier.

Modèle à ouverture numérique effective

Cependant, la mise en œuvre du modèle décrit par les équations 5.24 et 5.25 est une procédure complexe autant numériquement qu'analytiquement, en particulier pour la détermination du spectre des fréquences spatiales du désordre $\tilde{C}(\mathbf{k})$, déterminant pour décrire la dynamique du système. Ainsi, l'équipe a récemment développé un modèle plus simple, basé sur l'approximation paraxiale et faisant usage d'un facteur d'échelle géométrique x_{scale} permettant de décrire une *ouverture numérique effective* [94].

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, on montre alors que la fonction de corrélation 5.23 aux alentours du plan de Fourier s'écrit

$$c_{3D}(\Delta\mathbf{x}_{\perp}, \Delta z) \propto \left| \text{TF} \left[I'_0(\mathbf{x}_0) e^{-i\pi\mathbf{x}_0^2\Delta z/\lambda f^2} \right]_{\frac{\Delta\mathbf{x}_{\perp}}{\lambda f}} \right|^2, \quad (5.26)$$

où le profil $I'_0(\mathbf{x}_0)$ d'intensité dans le plan du diffuseur vu sous l'ouverture numérique effective ON_{eff} est donné par

$$I'_0(\mathbf{x}_0) = \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{w_{\text{eff}}^2}\right) \Theta\left(|\mathbf{x}_0| - \frac{D_{\text{eff}}}{2}\right) \quad (5.27)$$

avec $\Theta(x)$ la fonction de Heaviside, et $D_{\text{eff}} = x_{\text{scale}}D$ et $w_{\text{eff}} = x_{\text{scale}}w$ les tailles caractéristiques effectives du faisceau.

L'optimisation de la fonction de corrélation c_{3D} sur les données expérimentales permet de reproduire de manière fidèle les détails de notre désordre. De cette manière, on détermine que $x_{\text{scale}} = 0.875 \pm 0.005$, donnant une ouverture numérique effective de $\text{ON}_{\text{eff}} = 0.48 \pm 0.02$ ¹⁵.

Le champ de speckle étant très étendu, la fonction de corrélation est très allongée selon la direction longitudinale comme décrit section 5.2.3. La forme de la fonction de corrélation étant compliquée, la longueur de corrélation longitudinale est définie par la largeur totale à mi-hauteur¹⁶ $\sigma_{\parallel} = 4.1 \pm 0.1 \mu\text{m}$. Cette définition entraîne alors un rapport d'aspect d'environ 8, témoignant de la forme très allongée des grains de speckle.

Pour terminer, précisons que les définitions des longueurs de corrélation utilisées dans ce manuscrit ne sont pas uniques. Notre présent choix est motivé pour des raisons de simplicité lors de l'étude du temps de diffusion élastique (voir chapitre 6).

5.3 Propriétés du potentiel de type speckle

Jusqu'à ce point, nous nous sommes attachés à décrire le champ lumineux d'un speckle. En particulier, nous avons montré le caractère granulaire de celui-ci, granularité dont la taille est donnée par la limite de diffraction.

À présent, nous allons décrire comment l'intensité du champ de speckle se traduit en terme de potentiel pour les atomes.

15. Cette réduction de l'ouverture numérique provient des termes d'ordres supérieurs du développement limité de $\sin\theta$. Puisque $|\sin\theta| < |\theta|$, il convient d'utiliser un nouvel angle $\theta' < \theta$ de telle sorte que l'on retrouve la véritable valeur de l'ouverture numérique lorsque l'on utilise à nouveau l'approximation paraxiale $\sin\theta' \approx \theta'$

16. Le choix de cette définition a été fait par consistance avec le cas d'une illumination purement gaussienne, résultant en une fonction de corrélation longitudinale de forme lorentzienne.

5.3.1 Propriétés du potentiel

Comme annoncé en introduction de ce chapitre, le désordre nécessaire à l'étude de la propagation d'ondes de matière en milieux désordonnés est réalisé à l'aide du champ de speckle décrit précédemment, dont l'effet sur les atomes est décrit par le potentiel dipolaire présenté section 3.2.3. En effet, l'effet d'un champ laser de pulsation ω et d'intensité $I(\mathbf{x})$ sur un atome à deux niveaux séparés par $\hbar\omega_0$ est donné par 3.19, que l'on peut écrire plus simplement

$$V(\mathbf{x}) \propto I(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right). \quad (5.28)$$

Comme décrit précédemment, le laser utilisé pour créer ce champ de speckle est accordable autour de 780 nm, c'est-à-dire proche de la résonance de la raie D_2 du ^{87}Rb . Dans ces conditions, il est possible d'appliquer l'approximation de l'onde tournante et de négliger le terme en $1/(\omega + \omega_0)$ devant le terme co-rotatif en $1/(\omega - \omega_0)$, le potentiel ressenti par les atomes s'exprimant alors

$$V(\mathbf{x}) \propto \frac{I(\mathbf{x})}{\delta}, \quad (5.29)$$

où $\delta = \omega - \omega_0$ est le désaccord du faisceau par rapport à la transition.

Le potentiel désordonné ressenti par les atomes étant proportionnel à l'intensité lumineuse, il apparaît alors que les propriétés statistiques spatiales du potentiel sont exactement celles de l'intensité lumineuse du speckle. Notamment, le potentiel généré par un speckle est anisotrope et la taille typique des fluctuations de potentiel aux alentours du plan de Fourier est donnée par $\sigma_{\perp} = 0.5 \mu\text{m}$ dans le plan transverse et $\sigma_{\parallel} = 4.1 \mu\text{m}$ dans la direction longitudinale, les fonctions de corrélations du potentiel et de l'intensité lumineuse étant identiques.

De plus, il a été montré dans la section précédente que le champ de speckle n'est pas homogène, mais qu'il possède une extension finie. En particulier, l'équation 5.13 stipule que le profil d'intensité moyenne est une gaussienne de waist $\sigma_{\text{ex}} \approx 1.5 \text{ mm}$, dont l'intensité au centre du faisceau dépend la puissance du laser P selon

$$\bar{I}(\mathbf{x}_f = 0) = \frac{2P}{\pi\sigma_{\text{ex}}^2}, \quad (5.30)$$

d'après les lois de l'optique gaussienne. Les tailles typiques des nuages utilisés étant au maximum de quelques dizaines de μm , on peut supposer qu'à cette échelle, le potentiel moyen ressenti par les atomes est homogène et que sa valeur est fixée par l'intensité lumineuse au centre de la figure de speckle : $V_{\text{R}} = \bar{V} \propto \bar{I}(\mathbf{x}_f = 0)/\delta$.

Une autre conséquence de l'expression 5.29 est qu'il est possible de créer un potentiel désordonné sur les atomes qui soit répulsif ($\delta > 0$) ou bien attractif ($\delta < 0$) selon le signe du désaccord δ . Cette dernière possibilité nous permet d'avoir un degré de liberté expérimental supplémentaire, celui de la distribution de potentiel, dont l'importance sera illustrée dans les chapitres 6 et 7. En effet, si la distribution de la norme du potentiel est fixée par celle de l'intensité lumineuse 5.3, ces deux quantités étant proportionnelles, le signe du désaccord nous permet de retourner la distribution de potentiel par rapport au potentiel nul $V = 0$ (voir figure 5.9)

$$\mathcal{P}(V) = \frac{1}{|V_{\text{R}}|} e^{-V/V_{\text{R}}} \cdot \Theta(V/V_{\text{R}}), \quad (5.31)$$

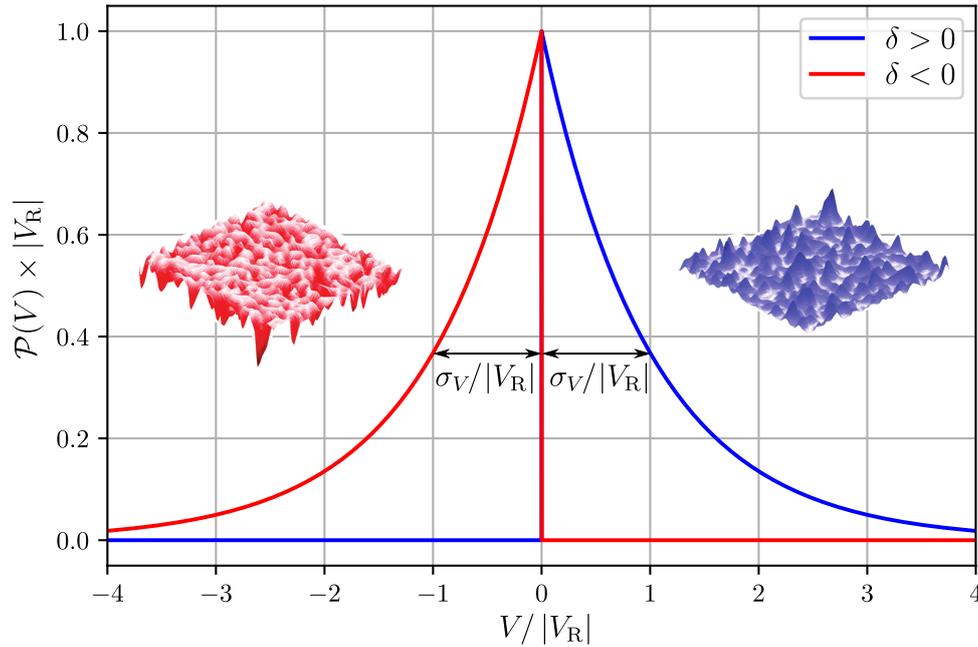


FIGURE 5.9 – **Distributions de potentiel pour un désordre optique de type speckle.** La distribution de potentiel suit celle de l'intensité lumineuse. Pour des désaccords positifs $\delta > 0$, le potentiel créé est positif (illustration bleue) et sa distribution est une exponentielle décroissante (courbe bleue). Pour des désaccords négatifs $\delta < 0$, le potentiel est alors attractif et ne peut dépasser 0 (illustration rouge). La distribution de potentiel est alors une exponentielle croissante (courbe en rouge).

où Θ est la fonction de Heaviside valant 1 pour $V/V_R > 0$, et 0 sinon. V_R est le potentiel moyen, proportionnel à l'intensité lumineuse moyenne et dont le signe peut changer suivant celui du désaccord. L'amplitude du désordre est quant à elle donnée par l'écart-type de la distribution de potentiel $\sigma_V = (\overline{V^2} - \overline{V}^2)^{1/2} = |V_R| > 0$ et sera toujours positive. Ainsi, sur notre dispositif, changer l'amplitude du désordre revient simplement à faire varier la puissance du faisceau speckle rayonné sur les atomes.

5.3.2 Possibilité d'un potentiel dépendant de l'état interne

Comme nous l'avons au cours du chapitre 2, l'étude du régime critique de la transition d'Anderson nécessite de pouvoir adresser sélectivement les différents niveaux d'énergie du désordre. Il s'agit donc de procéder à une spectroscopie du désordre. Pour cela, nous devons disposer d'un état libre dans lequel nous préparons notre condensat de Bose-Einstein, c'est-à-dire insensible au potentiel désordonné, et d'un second état couplé au désordre. Dans cette section, on s'attachera donc à décrire la notion de potentiel dépendant de l'état interne des atomes.

Principe du désordre dépendant de l'état interne

Comme explicité section 3.2.3, la formule 3.19 décrivant le potentiel dipolaire a été obtenue dans la limite des grands désaccords pour un système à deux niveaux, ne tenant donc compte ni de la structure fine, ni de la structure hyperfine du ^{87}Rb . En particulier, la

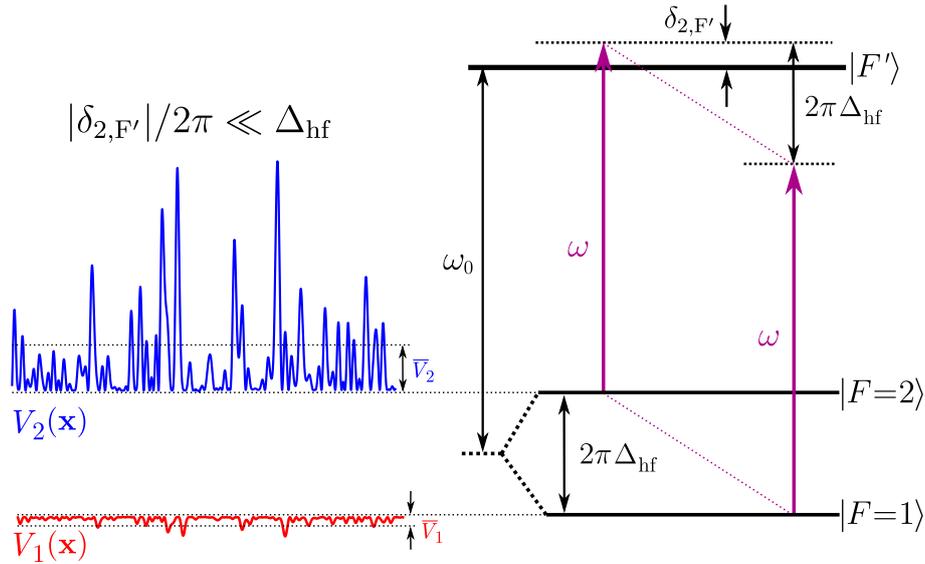


FIGURE 5.10 – **Réalisation d'un potentiel dépendant de l'état interne.** Le choix d'un désaccord $\delta_{2,F'}$ par rapport à la transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'\rangle$ qui soit petit devant la séparation hyperfine $2\pi\Delta_{\text{hf}}$ des états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ permet de soumettre un potentiel aux atomes dans l'état $|F=2\rangle$ tout en rendant celui ressenti par les atomes dans l'état $|F=1\rangle$ négligeable. Le choix du signe du désaccord $\delta_{2,F'}$ permet de plus de contrôler le caractère attractif ($\delta_{2,F'} < 0$) ou répulsif ($\delta_{2,F'} > 0$) du potentiel.

structure hyperfine de l'état fondamental $5^2S_{1/2}$ possède deux niveaux $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ séparés de $\Delta_{\text{hf}} = 6.83\text{GHz}$ très grande devant la largeur de la transition $\Gamma/2\pi = 6.07\text{MHz}$.

En fixant le désaccord $\delta_{2,F'}$ par rapport à la transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'\rangle$ de telle sorte que celui-ci soit très petit devant la séparation hyperfine des états fondamentaux $|\delta_{2,F'}|/2\pi \ll \Delta_{\text{hf}}$, on peut réaliser un potentiel dont la valeur moyenne dépend de l'état interne :

$$\bar{V}_2 \propto \frac{\bar{I}}{\delta_{2,F'}/2\pi} \quad \text{et} \quad \bar{V}_1 \propto \frac{\bar{I}}{\delta_{2,F'}/2\pi + \Delta_{\text{hf}}} . \quad (5.32)$$

Avec la condition d'un petit désaccord, on obtient alors $|\bar{V}_1| \ll |\bar{V}_2|$, comme illustré figure 5.10. On dispose donc d'un moyen de réaliser un potentiel conséquent sur l'état $|F=2\rangle$ tout en rendant celui ressenti par l'état $|F=1\rangle$ négligeable, état dans lequel nous préparons notre condensat de Bose-Einstein.

Détails du potentiel dipolaire

À l'échelle des désaccords typiques recherchés dans une telle situation (de l'ordre de 100MHz), il est aussi nécessaire de tenir compte de la structure hyperfine de l'état excité $5^2P_{3/2}$ du ^{87}Rb , qui se décompose en quatre états hyperfins $|F' = \{0, 1, 2, 3\}\rangle$. On peut alors montrer que le potentiel dipolaire ressenti par les états fondamentaux $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ est la somme des contributions de chacune des transitions vers un état excité [38].

De plus, le faisceau speckle étant polarisé linéairement suivant l'axe du champ magnétique \vec{y} , les contributions au potentiel dipolaire se restreignent aux transitions π ($\Delta m_F = 0$) et on peut alors montrer à l'aide d'un calcul attentif de la polarisabilité atomique que le

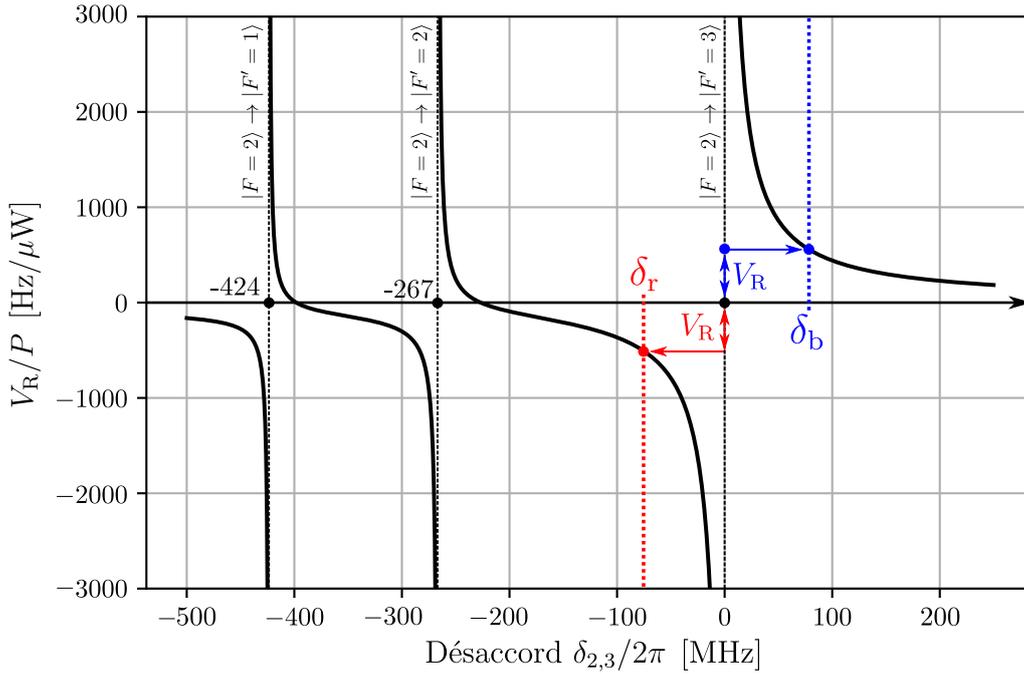


FIGURE 5.11 – **Potentiel dipolaire** \bar{V}_2 dû à la structure hyperfine du ^{87}Rb . En fixant la puissance du faisceau speckle dont l'extension est donnée par σ_{ex} , le potentiel moyen $V_R = \bar{V}_2$ ressenti par l'état $|F = 2\rangle$ évolue avec le désaccord $\delta_{2,3}$ par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Les trois divergences de potentiel observées correspondent aux trois transitions π possibles.

potentiel dipolaire ressenti par les états fondamentaux hyperfins est donné par [25, 38, 117] :

$$V_2(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma I(\mathbf{x})}{\omega_0^3} \left(\frac{1}{40 \delta_{2,1}} + \frac{1}{24 \delta_{2,2}} + \frac{4}{15 \delta_{2,3}} \right) \quad (5.33)$$

et

$$V_1(\mathbf{x}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma I(\mathbf{x})}{\omega_0^3} \left(\frac{5}{24 \delta_{1,1}} + \frac{1}{8 \delta_{1,2}} \right), \quad (5.34)$$

où les quantités $\delta_{F,F'}$ correspondent aux désaccords en rads^{-1} associés à chacune des transitions $|F, m_F\rangle \rightarrow |F', m'_F = m_F\rangle$. En prenant la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ comme référence, on peut tracer l'évolution du potentiel dipolaire pour l'état $|F = 2\rangle$ en fonction du désaccord $\delta_{2,3}$, les autres désaccords étant déductibles de la structure hyperfine des états excités. Cette évolution est représentée figure 5.11, qui comporte trois divergences du potentiel correspondant aux trois transitions π possibles $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = \{1, 2, 3\}$.

À l'instar du cas d'un potentiel réalisé à l'aide d'un désaccord suffisamment grand devant la structure hyperfine du ^{87}Rb présenté dans la section 5.3.1 précédente, la figure 5.11 illustre la possibilité de réaliser des potentiels qui soient attractifs ou répulsifs en sélectionnant soigneusement le désaccord du laser par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ¹⁷. Dans cet exemple, les désaccords $\delta_{2,3} = \delta_r = -2\pi \times 73 \text{ MHz}$ et $\delta_{2,3} = \delta_b = 2\pi \times 81 \text{ MHz}$

17. La sélection de cette transition comme référence s'explique par sa forte contribution au potentiel ressenti par l'état $|F = 2\rangle$ comme explicité équation 5.33. Ceci est aussi visible sur la figure 5.11 où l'effet de cette transition apparaît sur une bande d'environ $\pm 200 \text{ MHz}$, bien plus large que pour les deux autres transitions.

à celui présenté section 5.1.3 où l'accent a été mis sur la contrainte de l'utilisation de très faibles puissances optiques, voir figure 5.12. La lame séparatrice utilisée pour la stabilisation de puissance permet de dévier 90% de la puissance vers la photodiode, permettant ainsi d'obtenir une grande sensibilité aux fluctuations de puissance. Les 10% transmis sont ensuite atténués à l'aide d'une densité optique *Thorlabs NE30A-B* permettant de diviser la puissance d'un facteur 1000. Les puissances alors obtenues sont stabilisées et contrôlables entre typiquement 30 nW et 15 μ W.

Limitation du potentiel résiduel sur l'état $|F = 1\rangle$

Une conséquence de l'équation 5.35 est la suivante. Bien que le potentiel moyen \overline{V}_1 ressenti par l'état $|F = 1\rangle$ soit faible, celui-ci ne s'annule pas exactement. Quelle limite peut-on alors donner à la force du désordre V_R ? Pour cela intéressons-nous à la limite que l'on peut donner au potentiel résiduel V_1 .

Nous avons vu section 3.1.2 que pour un condensat de Bose-Einstein dans le régime de Thomas-Fermi, les interactions entre particules écrantent le potentiel externe soumis aux atomes. Il en résulte que sur l'ensemble du condensat, l'énergie des atomes est constante et égale au potentiel chimique μ . Ainsi, pour un potentiel désordonné résiduel d'amplitude faible $\overline{V}_1 \ll \mu$, une petite modulation de densité du condensat permet de compenser l'effet de ce potentiel. Ainsi, l'énergie potentielle de chaque atome reste constante et égale au potentiel chimique. Dans ces conditions, le potentiel résiduel \overline{V}_1 ne perturbe pas l'état libre $|F = 1\rangle$.

Augmentons alors la force du désordre : le potentiel résiduel augmente jusqu'à ce que celui-ci dépasse par endroits le potentiel chimique. À ces endroits, l'énergie d'interaction n'est plus suffisante pour écranter l'énergie potentielle du désordre et on crée un trou dans le condensat. Notons de plus que localement l'énergie ne sera plus égale au potentiel chimique. La conséquence la plus néfaste est l'apparition de nouvelles énergies dans la distribution d'énergie de l'état libre, dégradant ainsi la spectroscopie recherchée.

Le caractère limitant du désordre résiduel apparaît donc lorsque celui-ci est de l'ordre du potentiel chimique $\overline{V}_1 \lesssim \mu \approx h \times 40 \text{ Hz}$ ²⁰. En utilisant le rapport 5.35, on estime alors que le désordre maximal applicable à l'aide de cette technique est de l'ordre de quelques $h \times \text{kHz}$ ²¹.

5.4 Potentiel composé d'un speckle bichromatique

Comme nous avons pu le voir dans la section 2.3.2, le protocole expérimental envisagé pour l'étude la transition d'Anderson comporte deux étapes : une première étape de chargement d'états du désordre à énergie résolue est suivie de la caractérisation de ces états en terme de localisation.

Si l'approche décrite dans la section précédente permet de réaliser une spectroscopie

20. La détermination exacte de la limite applicable fait aussi intervenir la longueur de cicatrisation du condensat ainsi que la longueur de corrélation du potentiel. Le raisonnement présenté ici permet de tout même d'expliquer qualitativement l'origine de cette limitation.

21. Cet effet a été observé lors de la mesure des fonctions spectrales [25, 120].

du potentiel désordonné appliqué aux atomes, celle-ci ne permet pas d'étudier la transition d'Anderson dans la mesure où celle-ci nécessite de réaliser des expériences d'expansion du nuage suite à la spectroscopie.

La principale limitation de cette approche provient du faible désaccord du faisceau speckle. En effet, les désaccords utilisés étant de l'ordre de $|\delta| \approx 12\Gamma$, le taux d'émission spontanée est relativement grand. Cela conduit à un temps de vie maximal des atomes habillés par le désordre d'une centaine de millisecondes, très insuffisant pour les temps d'expansions visés de plus d'une seconde.

Il est donc nécessaire de trouver une nouvelle façon de créer un désordre dépendant de l'état interne avec une durée de vie suffisante pour pouvoir procéder à des expériences d'expansion.

5.4.1 S'éloigner de résonance

L'approche intuitive pour diminuer le taux d'émission spontanée consiste à s'éloigner de la transition atomique, et donc à augmenter le désaccord. En effet, il est possible d'obtenir une estimation du taux d'émission spontanée Γ_2 de l'état $|F = 2\rangle$ à l'aide de

$$\Gamma_2 \approx \frac{1}{\hbar} [V_R] \frac{\Gamma}{|\delta|}, \quad (5.36)$$

où $\Gamma = 2\pi \times 6.07\text{MHz}$ correspond à la largeur de la transition D_2 du ^{87}Rb et δ est le désaccord.

Afin d'obtenir un temps de vie Γ_2^{-1} de l'ordre de la seconde pour un désordre d'environ 500 Hz typiquement utilisé sur l'expérience, il est nécessaire d'utiliser un désaccord de plusieurs GHz. Cette condition est donc incompatible avec celle de désordre dépendant de l'état interne dans la mesure où les potentiels $\overline{V}_1 \sim \overline{V}_2$ deviennent comparables pour de tels désaccords.

La question est alors la suivante : est-il possible de réaliser un désordre dépendant de l'état interne tout en ayant un taux d'émission spontanée suffisamment faible pour permettre l'étude de la localisation d'Anderson ?

Speckle bichromatique

La réponse apportée par l'équipe pour augmenter le temps de vie des atomes vis-à-vis de l'émission spontanée consiste à utiliser des désaccords plus importants, de l'ordre de 100 GHz. L'idée est alors de compenser le potentiel ressenti par l'état $|F = 1\rangle$ à l'aide d'une seconde fréquence optique, comme l'illustre la figure 5.13. Une étude quantitative et détaillée de cette approche peut être retrouvée dans le manuscrit de thèse de Musawwadah Mukhtar [74], aussi nous nous contenterons de décrire les grandes lignes de cette approche.

Le désordre soumis aux atomes résulte alors de la superposition de deux figures de speckle, générées par deux lasers. Un laser *principal* grandement désaccordé crée un potentiel comparable sur les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$. Un laser de *compensation* crée un second potentiel de telle sorte que son effet sur l'état $|F = 1\rangle$ soit de compenser le potentiel du laser principal (voir figure 5.13).

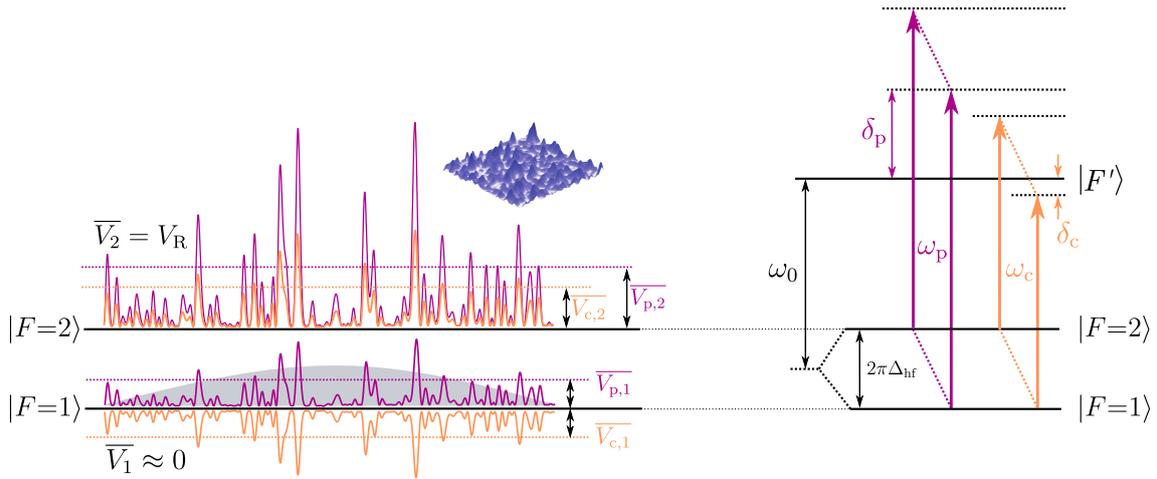


FIGURE 5.13 – **Illustration du principe de speckle bichromatique dans le cas d'un désordre répulsif.** Un laser principal de désaccord δ_p important soumet les deux états fondamentaux à un potentiel similaire (lignes bordeaux). Afin d'obtenir un potentiel dépendant de l'état interne, on utilise une seconde fréquence optique générée par un laser de compensation de désaccord δ_c (lignes oranges) dans le but de compenser le potentiel créé par le laser principal sur l'état $|F=1\rangle$ dans lequel est créé le condensat (zone grisée). Dans le cas d'un désordre répulsif comme illustré ici (voir miniature bleue), il est de plus possible d'ajouter les effets répulsifs des potentiels créés par ces deux lasers sur l'état $|F=2\rangle$.

Dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, on montre à l'aide de la partie réelle de la polarisabilité atomique que le potentiel moyen total ressenti par chaque état est la somme des potentiels générés par chaque laser. Ces potentiels sont alors donnés par :

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_{p,1} + \overline{V}_{c,1} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{V}_2 = \overline{V}_{p,2} + \overline{V}_{c,2} = V_R, \quad (5.37)$$

avec $\overline{V}_{p,i}$ ($\overline{V}_{c,i}$) le potentiel moyen créé par le laser principal (de compensation) sur l'état $|F=i\rangle$. Nous avons de plus fait apparaître la contrainte que le potentiel moyen total appliqué à l'état $|F=1\rangle$ soit nul. De même, les taux d'émission spontanée s'additionnent, ceux-ci étant issus de la partie imaginaire de la polarisabilité atomique :

$$\Gamma_{sp,1} = \Gamma_{sp,p,1} + \Gamma_{sp,c,1} \quad \text{et} \quad \Gamma_{sp,2} = \Gamma_{sp,p,2} + \Gamma_{sp,c,2}, \quad (5.38)$$

avec $\Gamma_{sp,i}$ le taux d'émission spontanée pour l'état $|F=i\rangle$.

Afin de pouvoir étudier la dynamique des atomes dans le désordre pendant de très longs temps d'expansions, il est nécessaire de maximiser le temps de vie de l'état $|F=2\rangle$. Cependant, cette procédure tend à diminuer le temps de vie de l'état $|F=1\rangle$, qui doit être suffisamment long pour pouvoir réaliser l'étape de *chargement* du désordre. Le but de cette étude est alors d'optimiser les temps de vie 5.38 des deux états pour un désordre V_R fixé, tout en respectant les contraintes 5.37 du potentiel. Expérimentalement, nous disposons de quatre degrés de liberté (la puissance et le désaccord de chaque speckle) pour atteindre la configuration optimale.

Potentiel répulsif

Considérons tout d'abord le cas d'un désordre répulsif sur l'état $|F = 2\rangle$, qui correspond à celui illustré sur la figure 5.13. Le laser principal étant grandement désaccordé, le potentiel moyen que celui-ci induit sur les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ est similaire. En prenant comme référence la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F'\rangle$ ²², le désaccord du laser principal satisfait alors la condition $\delta_p > 0$ ²³, pour laquelle le potentiel généré sur les deux états hyperfins est répulsif.

Afin de compenser le potentiel répulsif induit par le laser principal sur l'état $|F = 1\rangle$, il est nécessaire que le laser de compensation réalise un potentiel attractif, impliquant alors que le désaccord soit négatif $\delta_c < 0$ ²⁴. Notons de plus que le choix d'un désaccord inférieur à la séparation hyperfine des états fondamentaux permet de générer un potentiel répulsif sur l'état $|F = 2\rangle$. On retiendra alors :

$$\delta_p > 0 \quad \text{et} \quad -\Delta_{\text{hf}} < \delta_c/2\pi < 0 \quad (5.39)$$

comme configuration pour un désordre bichromatique répulsif.

Potentiel attractif

Considérons à présent le cas d'un potentiel attractif pour l'état $|F = 2\rangle$, dont la configuration est présentée figure 5.14. De même que dans le cas répulsif, le laser principal est très désaccordé, excepté que son désaccord doit être négatif pour les deux états fondamentaux $\delta_p/2\pi < -\Delta_{\text{hf}}$ en prenant la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F'\rangle$ comme référence.

La principale différence provient ici du laser de compensation, qui ne peut pas générer à la fois un potentiel attractif pour l'état $|F = 2\rangle$ et un potentiel répulsif qui pourrait compenser le potentiel attractif du laser principal sur l'état $|F = 1\rangle$. La contrainte d'annulation du potentiel sur l'état initial impose alors le choix d'un désaccord positif $\delta_c > 0$ du laser de compensation par rapport à la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F'\rangle$. Le choix d'un potentiel total attractif sur l'état $|F = 2\rangle$ impose donc :

$$\delta_p/2\pi < -\Delta_{\text{hf}} \quad \text{et} \quad \delta_c > 0 . \quad (5.40)$$

Contrairement au cas répulsif, la sélectivité en état interne dans le cas attractif provient donc d'un déséquilibre des potentiels sur l'état $|F = 2\rangle$, voir figure 5.14.

Performances d'un désordre bichromatique

Si l'optimisation de la durée de vie Γ_2^{-1} est d'importance capitale pour procéder aux mesures d'expansion des atomes chargés dans le désordre, il est tout de même nécessaire que les atomes dans l'état $|F = 1\rangle$ possèdent un temps de vie Γ_1^{-1} suffisamment grand devant la durée du transfert spectroscopique. Nous verrons section 7.2.2 que pour les désordres utilisés les plus forts, les temps de couplage radio-fréquence entre les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ sont de l'ordre de 10 ms. Ceci impose donc :

$$\Gamma_1^{-1} \geq 10 \text{ ms} . \quad (5.41)$$

22. En choisissant un désaccord de 100 GHz, on peut négliger la structure hyperfine de l'état excité.

23. En prenant comme référence la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F'\rangle$, cette condition devient $\delta_p/2\pi > \Delta_{\text{hf}}$.

24. Pour les désaccords supérieurs au GHz considérés, nous pourrions négliger le détail de la structure hyperfine de l'état excité, large de 229 MHz pour les états accessibles.

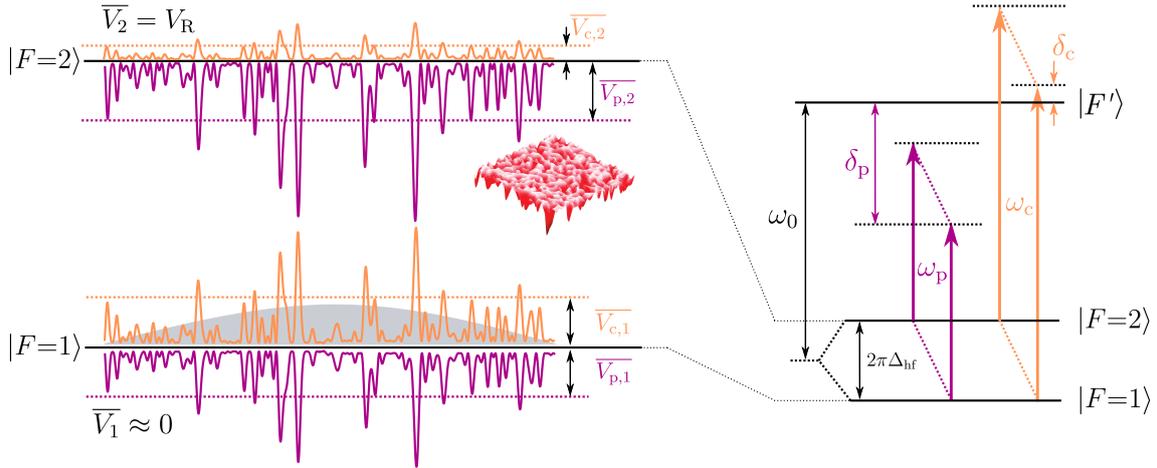


FIGURE 5.14 – **Configuration du speckle bichromatique dans le cas d'un désordre attractif.** Un laser principal de désaccord δ_p important soumet les deux états fondamentaux à un potentiel similaire attractif (lignes bordeaux). Afin d'obtenir un potentiel dépendant de l'état interne, on utilise une seconde fréquence optique générée par un laser de compensation de désaccord $\delta_c > 0$ (lignes oranges) dans le but de compenser le potentiel créé par le laser principal sur l'état $|F=1\rangle$. Dans le cas d'un désordre attractif comme illustré ici (voir miniature rouge), la sélectivité de l'état interne ne se fait que par déséquilibre des potentiels sur l'état $|F=2\rangle$.

Aussi, nous choisissons de fixer le désaccord du laser principal à $\delta_p = \pm 2\pi \times 100$ GHz. Ce choix permet de réduire la complexité de la détermination des trois autres degrés de liberté expérimentaux δ_c , P_p et P_c .

Désordre attractif Désordre répulsif

| Paramètres fixés | | |
|---|-------------------------|--------------------------|
| Amplitude du désordre V_R | $-h \times 4$ kHz | $h \times 4$ kHz |
| Désaccord du laser principal δ_p | $-2\pi \times 100$ GHz | $2\pi \times 100$ GHz |
| Temps de vie Γ_1^{-1} | 10 ms | 10 ms |
| Paramètres déterminés | | |
| Désaccord du laser de compensation δ_c | $2\pi \times 1.354$ GHz | $-2\pi \times 1.622$ GHz |
| Puissance du laser principal P_p | 8.14 mW | 5.16 mW |
| Puissance du laser de compensation P_c | 130.2 μ W | 69.6 μ W |
| Temps de vie Γ_2^{-1} | 165 ms | 149 ms |

TABLE 5.1 – **Paramètres expérimentaux optimisés pour un désordre de 4 kHz.** La détermination de ces paramètres est détaillée dans la thèse Musawwadah Mukhtar [74]. Cette étude est menée pour le désordre le plus extrême utilisé pour la mesure des fonctions spectrales [120] pour lequel le temps de vie Γ_2^{-1} n'était que 0.4 ms. On remarque que les conditions 5.39 et 5.40 sont vérifiées.

La table 5.1 présente les résultats de la détermination des paramètres optimisant le temps de vie Γ_2^{-1} de l'état $|F=2\rangle$. Cette étude a été menée pour un désordre d'amplitude $V_R/h = 4$ kHz, correspondant au désordre le plus extrême utilisé lors de la mesure des

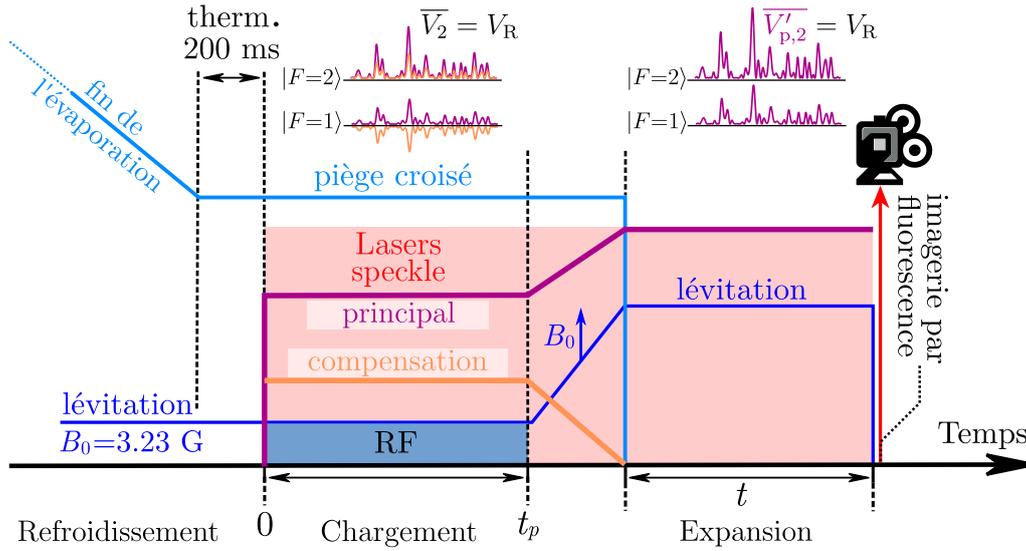


FIGURE 5.15 – **Séquence expérimentale d'étude de la transition d'Anderson.** Après refroidissement et obtention d'un condensat de Bose-Einstein, une étape de chargement du désordre bichromatique (ici représenté répulsif) à énergie résolue est réalisée à l'aide d'un transfert radio-fréquence. Une fois le transfert réalisé, le laser de compensation est éteint afin de maximiser le temps de vie des atomes dans l'état $|F = 2\rangle$. Simultanément, la puissance du laser principal est modifiée afin de garder l'amplitude du potentiel \overline{V}_2 constante. Enfin, le piège optique croisé est relâché afin de procéder à l'expansion du nuage dans le désordre, ce qui constitue l'expérience de localisation d'Anderson à proprement parler.

fonctions spectrales. L'optimisation des paramètres expérimentaux permet alors d'obtenir un temps de vie Γ_2^{-1} de l'ordre de 150 ms. Comparé au temps de vie de 0.4 ms obtenu avec un speckle monochromatique, ceci représente une amélioration de près de trois ordres de grandeur.

Augmenter encore plus le temps de vie

Si les potentiels générés par les deux faisceaux sur l'état $|F = 1\rangle$ sont d'amplitudes semblables (l'annulation du potentiel total sur $|F = 1\rangle$ ne serait pas possible autrement), on comprend aisément que le laser de compensation contribue fortement à la dissipation par émission spontanée compte-tenu de son petit désaccord en comparaison de celui du laser principal.

Cependant, après l'étape de chargement, une fois les atomes transférés dans l'état $|F = 2\rangle$ habillé par le désordre, il n'est plus nécessaire de compenser le potentiel vu par l'état $|F = 1\rangle$. Il est alors possible de s'affranchir du laser de compensation. Un moyen simple d'augmenter le temps de vie Γ_2^{-1} consiste alors à diminuer progressivement la puissance du laser de compensation tout en modifiant celle du laser principal de manière à garder V_R constant, comme illustré figure 5.15. Dans le cas d'un désordre répulsif, cela se traduit par l'augmentation de la puissance du laser principal P'_p tel que :

$$P'_p = P_p \times V_R / \overline{V}_{p,2} \quad (5.42)$$

On montre alors que le nouveau temps de vie $\Gamma_2'^{-1}$ de l'état $|F = 2\rangle$ après extinction du laser de compensation est donné par [74] :

$$\Gamma_2'^{-1} = \Gamma_2^{-1} \frac{\overline{V_{p,2}}/V_R}{\Gamma_{p,2}/\Gamma_2} . \quad (5.43)$$

L'application à un désordre d'amplitude $|V_R|/h = 4\text{kHz}$ fournit alors un temps de vie de 0.68s pour un désordre attractif et de 0.69s pour un désordre répulsif, soit un gain d'un facteur ~ 5 en comparaison à la configuration statique²⁵.

Notons de plus que cette étude a été menée pour le cas le plus défavorable d'un désordre d'amplitude $h \times 4\text{kHz}$, l'utilisation de désordres plus modérés conduisant à des temps de vie bien plus grands. Un désordre d'amplitude $h \times 400\text{Hz}$ possède ainsi un temps de vie supérieur à 6s, permettant donc des temps de propagation extrêmement longs.

5.4.2 Étude de la similitude de deux speckles

Nous avons ainsi montré que l'utilisation d'un speckle bichromatique permettait d'étendre l'applicabilité du désordre dépendant de l'état interne à l'étude de la transition d'Anderson grâce à l'augmentation du temps de vie des atomes dans le désordre de plus de trois ordres de grandeurs.

Cependant, cette approche repose sur une hypothèse cruciale jusqu'à présent passée sous silence. L'approche de l'utilisation d'une seconde fréquence optique afin de compenser le potentiel ressenti par l'état $|F = 1\rangle$ n'est valable que si nous pouvons compenser le potentiel du laser principal en chaque point de l'espace. Il est donc nécessaire que les variations spatiales du profil d'intensité lumineuse du speckle de compensation soient exactement celles du speckle principal (voir figure 5.16) :

$$V_{c,1}(\mathbf{x}) = -V_{p,1}(\mathbf{x}) . \quad (5.44)$$

L'étude de la similitude de deux figures de speckle présentée dans cette section représente ma contribution au développement du désordre bichromatique, entamé par Vincent Denechaud et Musawwadah Mukhtar avec le calcul de la polarisabilité atomique.

Statistique du potentiel total sur $|F = 1\rangle$

Étant donné que les degrés de libertés expérimentaux sont déterminés par la condition 5.37, le potentiel total $V_1(\mathbf{x}) = V_{p,1}(\mathbf{x}) + V_{c,1}(\mathbf{x})$ est de moyenne nulle $\overline{V_1(\mathbf{x})} = 0$ par construction. Cependant, sa variance $\sigma_{V_1}^2(\mathbf{x})$, caractérisant les fluctuations statistiques du potentiel total autour de sa valeur moyenne en un point donné, ne s'annule pas forcément.

Simplifions l'étude en remplaçant les potentiels $V_{p,1}(\mathbf{x})$ et $V_{c,1}(\mathbf{x})$ par leurs intensités respectives $I_p(\mathbf{x})$ et $I_c(\mathbf{x})$ de telle sorte que

$$V_1(\mathbf{x}) \propto I_p(\mathbf{x}) - I_c(\mathbf{x}) , \quad (5.45)$$

²⁵. Ceci représente un gain de plus de trois ordres de grandeur par rapport au cas d'un speckle monochromatique.

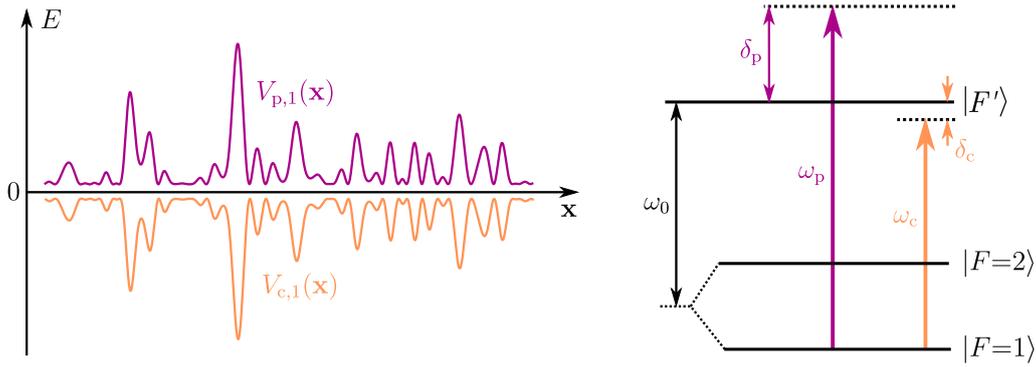


FIGURE 5.16 – **Similitude des potentiels générés par chaque laser sur l'état $|F = 1\rangle$.** Afin que le potentiel total ressenti par l'état $|F = 1\rangle$ soit nul en tout point de l'espace, il est nécessaire que les potentiels générés par les lasers principal et de compensation soit opposés, c'est-à-dire $V_{c,1}(\mathbf{x}) = -V_{p,1}(\mathbf{x})$. Cela implique que le speckle de compensation doit être identique au speckle principal.

et que $\overline{I_p(\mathbf{x})} = \overline{I_c(\mathbf{x})} = I_0(\mathbf{x})$ ²⁶. En définissant la différence de ces intensités par la variable $I = I_p - I_c$, l'étude de la variance du potentiel revient à étudier la quantité

$$\sigma_I^2(\mathbf{x}, \lambda_p, \lambda_c) = 2I_0^2(\mathbf{x})(1 - c_{2\lambda}(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad c_{2\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\delta I_p(\mathbf{x})\delta I_c(\mathbf{x})}}{I_0^2(\mathbf{x})}, \quad (5.46)$$

en faisant apparaître la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité. L'interprétation de cette équation est directe : si les deux intensités sont parfaitement corrélées, celles-ci se compensent exactement et $\sigma_I = 0$. Dans le cas où celles-ci sont totalement décorrélées, la variance totale est alors la somme des variances de chaque intensité, comme attendu dans le cas de variables aléatoires indépendantes.

Cohérence temporelle d'une figure de speckle bichromatique

De manière générale, un champ de speckle résulte de phénomènes d'interférence, et dépend donc fortement de la longueur d'onde du champ incident. Plus particulièrement, nous avons vu dans les sections 5.2.2 et 5.2.3 que la taille des grains de speckle est donnée par la limite de diffraction du système et dépend donc linéairement de la longueur d'onde.

On comprend donc que si deux profils d'intensité lumineuse sont semblables au point de focalisation des faisceaux, la superposition des grains de lumière se dégrade en s'éloignant de ce point, comme illustré figure 5.17. Cette question de superposition des figures d'interférences de plusieurs fréquences optiques est un problème bien connu en optique : il s'agit ici d'étudier l'influence de la cohérence temporelle sur notre désordre bichromatique. Cette influence est quantifiée par la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité que nous avons identifiée équation 5.46, que l'on peut réécrire

$$\overline{\delta I_p(\mathbf{x})\delta I_c(\mathbf{x})} = \left| \overline{E_p(\mathbf{x})E_c^*(\mathbf{x})} \right|^2, \quad (5.47)$$

à l'aide du théorème de Wick. Il est alors possible d'interpréter cette dernière comme étant le degré de cohérence temporelle en faisant apparaître la fonction de corrélation en

²⁶. En réalité, les intensités des deux speckles ne sont pas de mêmes valeurs moyennes, cependant il est possible de se ramener formellement à cette situation en tenant compte du fait que les différents désaccords des faisceaux équilibrent les potentiels associés.

amplitude entre les deux champs évalués au même point. En effet, l'objet de notre étude est de quantifier la mesure dans laquelle les deux motifs de speckle sont similaires en un point donné.

Supposons à présent que les modes de chacun des lasers soient identiques et parfaitement superposés²⁷, de telle sorte que tous deux soient décrits par le même profil d'intensité $I_0'(\mathbf{x}_0)$ de l'équation 5.27. De même que dans le cas d'un speckle monochromatique, l'expression de la fonction de corrélation en amplitude $\overline{E_p(\mathbf{x})E_c^*(\mathbf{x})}$ fait apparaître la fonction de corrélation du diffuseur, définie à l'aide de sa transmission :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda_p, \lambda_c) = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda_p)t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0, \lambda_c)}, \quad (5.48)$$

dont l'expression a été généralisée au cas bichromatique qui nous intéresse à présent.

On montre que dans le cas d'un mélange bichromatique, la fonction de corrélation du diffuseur peut s'écrire (voir annexe B) :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda_p, \lambda_c) = \exp\left(-\frac{\delta\phi^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2\theta_{\text{diff}}^2(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{2\lambda_p\lambda_c}\right), \quad (5.49)$$

où la quantité $\delta\phi = |\sigma_{\phi,p} - \sigma_{\phi,c}|$ correspond à la différence des largeurs des distributions de phases induites par le diffuseur aux deux longueurs d'onde d'intérêt λ_p et λ_c . Cette quantité dépend des paramètres géométriques du diffuseur et vaut $\delta\phi \approx 2\pi(n-1)\sigma_e/\lambda_p\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F} = \lambda_p/\delta\lambda$ une quantité que l'on appellera *finesse* par la suite, par analogie avec le domaine de l'interférométrie.

À l'aide de calculs semblables à ceux utilisés section 5.2 pour déterminer les propriétés spatiales d'un speckle monochromatique, on détermine que la fonction de corrélation $c_{2\lambda}(\mathbf{x})$ des fluctuations d'intensité à trois dimensions entre les deux speckles générés par le même diffuseur s'exprime aux alentours du plan de Fourier selon (voir annexe B) :

$$\begin{aligned} c_{2\lambda}(\mathbf{x}_\perp, \delta z) &= \frac{\overline{\delta I_p(\mathbf{x}_\perp, \delta z)\delta I_c(\mathbf{x}_\perp, \delta z)}}{I_0^2(\mathbf{x}_\perp, \delta z)} \\ &= \exp(-\delta\phi^2) \times c_{3D}\left(\frac{\mathbf{x}_\perp}{\mathcal{F}}, \frac{\delta z}{\mathcal{F}}\right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

où c_{3D} correspond à la fonction de corrélation 5.26 des fluctuations d'intensité d'un speckle unique aux alentours du plan de Fourier.

La décorrélation des deux champs vis-à-vis de la cohérence temporelle est donc due à deux contributions :

- Le premier terme en $\exp(-\delta\phi^2)$ décrit l'effet de la propagation dans le diffuseur. Le déphasage accumulé localement dépendant de la longueur d'onde, la distribution de phases diffère entre le laser principal et celui de compensation. Le diffuseur ne se comportant pas exactement de la même manière en fonction de la fréquence de l'onde laser (la transmission $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda)$ dépend de la longueur d'onde), il en résulte une décorrélation générale entre les profils d'intensité de deux speckles.
- Le second terme traduit le déphasage accumulé lors de la propagation du laser, et décrit l'effet de la longueur d'onde du laser sur la taille des grains. Celle-ci étant

²⁷. On satisfait expérimentalement cette hypothèse en injectant les deux faisceaux dans la même fibre optique, voir figure 5.18.

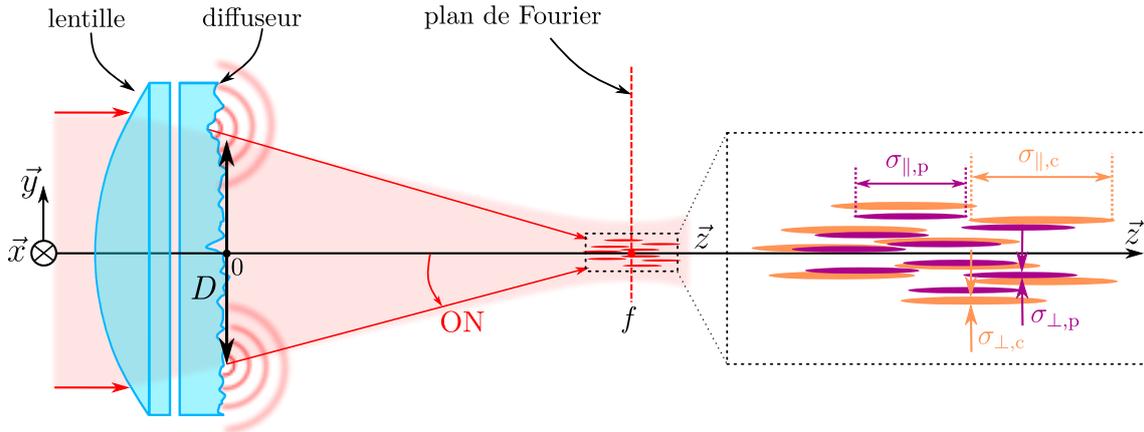


FIGURE 5.17 – Illustration de la cohérence temporelle d'une figure de speckle. La taille des grains de speckle dépendant linéairement de la longueur d'onde, ceux-ci ne pourront se superposer que sur une zone restreinte de l'espace. La distance l_c sur laquelle les grains sont corrélés est obtenue à l'aide du degré de cohérence temporelle, et peut être estimée à quelques millimètres.

proportionnelle à la longueur d'onde, les grains des deux figures de speckle seront donc de tailles différentes et ne pourront se superposer que dans une zone réduite de l'espace autour du point de focalisation, comme illustré figure 5.17.

Une conséquence remarquable de l'équation 5.50 est que la forme de cette fonction, donnée par le degré de cohérence temporelle, est identique à celle de la corrélation spatiale d'un unique speckle, donnée par le degré de cohérence spatiale.

La présence du facteur d'échelle $\mathcal{F} = \lambda_p / \delta\lambda$ s'interprète néanmoins aisément. En effet, la taille σ ²⁸ d'un grain de speckle est donnée par la largeur de la fonction de corrélation c_{3D} , et est proportionnelle à la longueur d'onde du laser. La largeur de la fonction de corrélation $c_{2\lambda}$ est donc donnée par la *longueur de cohérence* $l_c = \sigma\mathcal{F}$ et correspond à la distance pour laquelle les grains des deux speckles ne se superposent plus²⁹.

Estimons alors l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence l_c dans la configuration présentée section 5.4.1, pour laquelle la différence de fréquence entre les deux lasers est de l'ordre de 100 GHz pour une longueur d'onde proche de 780 nm. La finesse associée est donc d'environ $\mathcal{F} \approx 4000$. On en déduit que la longueur de cohérence du potentiel bichromatique est de l'ordre de quelques millimètres, c'est-à-dire bien supérieure à la taille de nos nuages. La décorrélation du potentiel par non-superposition des grains ne sera donc pas un facteur limitant pour notre expérience³⁰.

28. Il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'anisotropie des grains de speckle pour ce raisonnement, les longueurs de corrélation transverse et longitudinale étant toutes deux proportionnelles à la longueur d'onde.

29. Déterminons la distance L sur laquelle deux grains de speckle ne se superposent plus. On définit cette distance comme correspondant à un nombre N de grains du speckle du laser principal $L = N\sigma_p$, et un nombre $N + 1$ de grains du laser de compensation $L = (N + 1)\sigma_c$. Alors $N = \sigma_c / (\sigma_p - \sigma_c) \approx \lambda_p / \delta\lambda = \mathcal{F}$.

30. À l'aide d'un banc de test similaire à celui présenté dans la thèse de Jérémie Richard [93], aucune décorrélation n'a pu être observée expérimentalement dans la limite de résolution du système optique dans une zone de 100 μm autour du centre de la figure de speckle.

Estimation du potentiel résiduel sur $|F = 1\rangle$

Si les profils d'intensité des speckles varient de manières similaires à l'échelle des atomes, ceux-ci ne sont pas totalement corrélés, comme le montre le facteur $\exp(-\delta\phi^2)$ de l'équation 5.50. Ainsi, cela signifie que le potentiel généré par le laser de compensation ne peut annuler le potentiel généré par le laser principal *qu'en moyenne*. Le potentiel total $V_1(\mathbf{x}) = V_{p,1}(\mathbf{x}) + V_{c,1}(\mathbf{x})$ est donc de moyenne nulle $\overline{V_1(\mathbf{x})} = 0$ et possède une variance σ_V^2 non nulle.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la variance du potentiel possède une dépendance spatiale correspondant à celle de la fonction de corrélation 5.50, dont l'échelle de variation est donnée par la longueur de cohérence l_c très grande devant la taille de nos nuages. Il est possible de déterminer la variance du potentiel à l'aide de la valeur au centre de la fonction de corrélation, $c_{2\lambda}(0) = \exp(-\delta\phi^2)$. On peut alors estimer les variations statistiques du potentiel ressenti par les atomes à $|\sigma_V/\overline{V_{p,1}}| = \sqrt{\sigma_V^2/I_0^2}$, soit

$$\sigma_V \sim \sqrt{2} \left| \overline{V_{p,1}} \delta\phi \right|. \quad (5.51)$$

Il apparaît donc que l'ordre de grandeur des fluctuations du potentiel bichromatique ne sont qu'une fraction du potentiel généré par chaque laser.

En supposant que l'épaisseur typique de la granularité du diffuseur σ_e est de l'ordre de quelques longueurs d'onde λ_p ³¹, on estime ainsi que les fluctuations du potentiel résiduel sont de l'ordre de

$$\sigma_V \sim 0.01 \overline{V_{p,1}}, \quad (5.52)$$

avec les paramètres de la configuration précédemment présentée.

De même que dans la section 5.3.2, le désordre résiduel que ressent l'état $|F = 1\rangle$ possède une borne supérieure pour laquelle le condensat devient perturbé, finalement du même ordre de grandeur que pour la configuration monochromatique (désordre résiduel de l'ordre de 1% du potentiel appliqué). Ainsi, si les fluctuations du potentiel résiduel sont de l'ordre du potentiel chimique $\mu = 40\text{Hz}$, les modulations de densité ne pourront plus écranter le potentiel désordonné. La condition $\sigma_V \lesssim \mu$ se traduit donc en terme de potentiel maximal applicable aux atomes³²

$$V_R \lesssim 4\text{kHz}, \quad (5.53)$$

semblable à la limite observée dans le cas d'un potentiel dépendant de l'état interne réalisé à l'aide d'une unique fréquence optique. Insistons sur le fait que si la limite du désordre applicable est comparable à celle dans le cas d'un potentiel monochromatique, ce nouveau désordre bichromatique permet l'amélioration du temps de vie dans le désordre de trois ordres de grandeurs, et ouvre donc la voie aux expériences d'expansion et à l'étude de la transition d'Anderson.

31. Nous ne possédons malheureusement pas données précises relatives à l'état de surface du diffuseur, il ne s'agit donc que d'une estimation dont l'ordre semble raisonnable. En effet, l'utilisation d'un diffuseur avec $\sigma_e \approx 5\lambda_p$ suffit à générer un speckle pleinement développé, la partie déterministe étant très fortement atténuée ($t_{\text{diff}} \sim e^{-100}$).

32. V_R et $\overline{V_{p,1}}$ ne sont pas identiques, mais sont du même ordre de grandeur. La limite que nous présentons ne se veut pas quantitative étant donné que nous ne donnons qu'une estimation de σ_e et que la condition $\sigma_V \lesssim \mu$ reste phénoménologique.

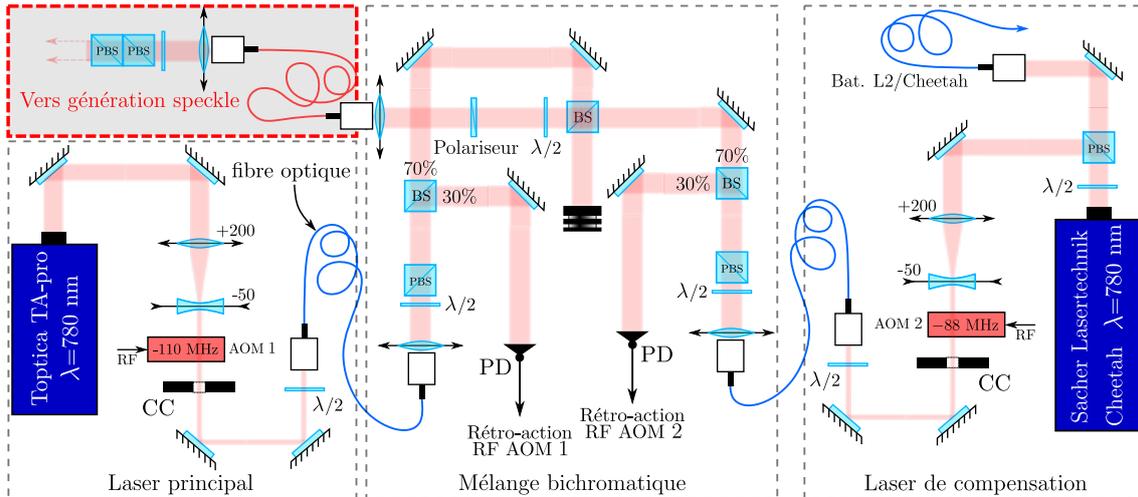


FIGURE 5.18 – **Montage optique du speckle bichromatique.** De même que pour les montages précédents, le montage optique consiste en une partie de manipulation des faisceaux avant de générer le speckle. À présent, un étage supplémentaire de mélange des faisceaux est nécessaire, et la présence d'une fibre optique commune assure la parfaite superposition des faisceaux sur le diffuseur.

Implémentation expérimentale préliminaire

Comme annoncé section 5.1.3, la structure du montage optique du speckle bichromatique suit la même philosophie que les montages présentés précédemment. Dans sa version préliminaire³³, celui-ci est composé d'un premier étage de mise en forme du faisceau, suivi de la partie générant le speckle rayonné sur les atomes.

Dans le cas de notre nouveau potentiel bichromatique, une étape supplémentaire de superposition des faisceaux est nécessaire afin d'obtenir les mêmes modes laser au niveau du diffuseur. L'ensemble de la partie *mise en forme* est représentée figure 5.18, et comporte trois zones relatives aux différentes étapes de la mise en forme du faisceau :

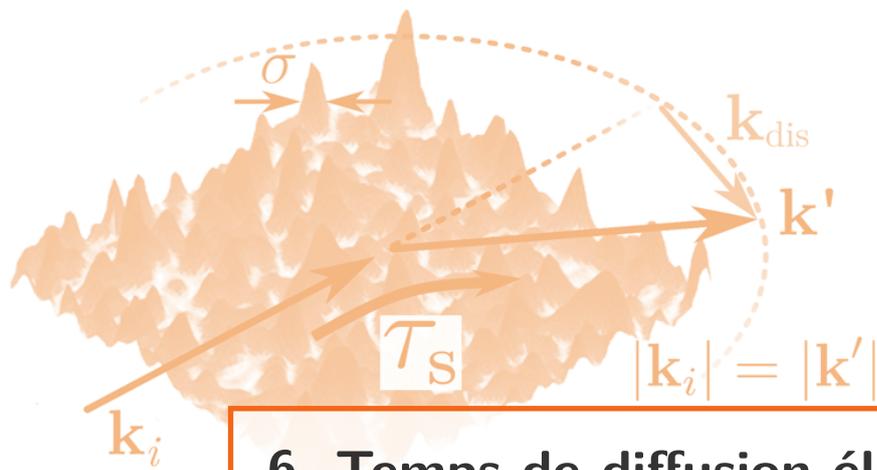
- Une première zone est dédiée à la mise en forme du laser principal et est similaire aux montages précédents. Le faisceau du laser principal est généré par le laser Toptica TA-Pro, et son mode et sa polarisation sont filtrés à l'aide d'une fibre optique à maintien de polarisation et d'un cube séparateur de polarisation. Sa puissance est stabilisée à l'aide d'une boucle de rétroaction réalisée à l'aide d'un modulateur acousto-optique et d'une photodiode, et permet de plus de s'affranchir des fluctuations de puissance liées aux fluctuations de polarisation du laser, comme précédemment. Ce laser étant désaccordé d'environ 100 GHz, il n'est pas nécessaire d'en asservir la fréquence.
- Une seconde zone, similaire à la première, permet de mettre en forme le faisceau du laser de compensation. Celui-ci est émis par un laser *Sacher Lasertechnik Cheetah* d'une puissance maximale d'environ 100 mW, et subit le même traitement que le faisceau principal. Cependant, la fréquence de ce laser est stabilisée par battement sur le laser repompeur *L2* étant donné son désaccord modéré, de l'ordre de 1.5 GHz.
- Enfin, une troisième zone permet de combiner dans le même mode spatial les lasers.

33. À l'heure de l'écriture de ces lignes, seuls des tests préliminaires de stabilité ont pu être effectués. Bien que ceux-ci soient encourageants, il n'est pas exclu que ce montage soit modifié après essai en présence des atomes.

Pour cela, les faisceaux sont superposés à l'aide d'une lame séparatrice 50/50, et un polariseur permet de superposer les polarisations des deux lasers. Ceux-ci sont ensuite injectés dans la même fibre optique à maintien de polarisation, garantissant une superposition parfaite des modes pour la génération du speckle.

La partie de génération du speckle est très similaire à celle présentée figure 5.12. La puissance nécessaire sur les atomes étant environ trois ordres de grandeur plus grande que celle utilisée pour la mesure des fonctions spectrales (voir section 5.3.2 et table 5.1), la densité optique de transmission 1/1000 n'est plus nécessaire. Le reste du montage optique est inchangé³⁴.

34. La photodiode précédemment utilisée pour l'asservissement de puissance d'un unique faisceau ne sert plus qu'à titre d'information. En effet, les deux faisceaux étant superposés, il est difficile de les contrôler indépendamment.



6. Temps de diffusion élastique

Dans les chapitres précédents, nous avons détaillé comment était produite notre onde de matière, et plus particulièrement l'utilisation de techniques de refroidissement à l'extrême nous permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein assimilable à une onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$. Nous avons aussi discuté comment est généré notre désordre optique et nous nous sommes focalisés sur ses propriétés statistiques et spatiales.

À présent, nous allons nous concentrer sur la mesure directe du temps de diffusion élastique τ_s , lié au déphasage de l'onde lors d'une collision dans le désordre. Cette mesure directe demande des efforts expérimentaux conséquents dans le domaine de la matière condensée (les propriétés de transport découlent du temps de transport τ_B), mais celle-ci reste aisée en optique (décroissance balistique d'un faisceau laser) ainsi qu'à l'aide d'atomes ultra-froids (suivi de l'état initial). De nombreuses méthodes ont ainsi été développées, telles que des techniques de microscopie [45, 67], des mesures de corrélation pour des ondes classiques [41, 81, 106], des transmissions balistiques [85, 103] ou encore des oscillations de Shubnikov-de Haas de la magnéto-conductivité dans des systèmes électroniques [12, 70, 79]. Cependant, des comparaisons quantitatives à des théories ou des simulations restent rares.

La détermination expérimentale du temps de diffusion élastique a été réalisée en 2015 lors de la thèse de Jérémie Richard [93]. Cependant, le traitement et l'exploitation de ces données expérimentales, leur comparaison à des simulations numériques, et l'orientation que nous avons donnée à ce projet constituent des travaux réalisés au cours de ma thèse. Le temps de diffusion élastique τ_s a ainsi été étudié en fonction de l'amplitude du désordre V_R et de l'énergie de l'onde (énergie cinétique, ou de manière équivalente son impulsion k_i), permettant ainsi de suivre τ_s sur plus de trois ordres de grandeur. Nous avons ainsi pu explorer les régimes de diffusion faible et de diffusion forte, ainsi que la transition entre ces régimes que nous avons pu étudier quantitativement. Cela nous a plus particulièrement permis de discuter la pertinence du critère de Ioffe-Regel $k_i l_s \sim 1$ pour décrire cette transition. Les résultats de cette étude ont donné lieu à une publication dans la revue *Physical Review Letters* [94].

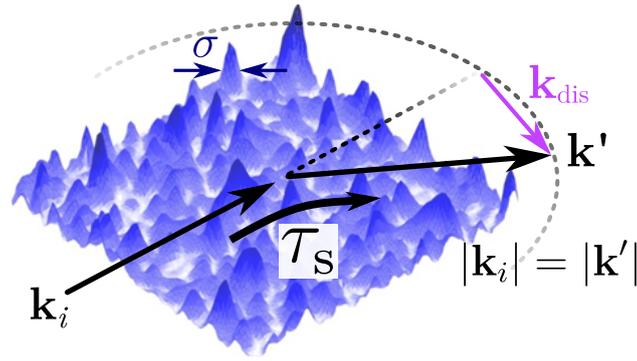


FIGURE 6.1 – Illustration du temps de diffusion élastique dans l'approximation de Born. L'onde plane initiale $|\mathbf{k}_i\rangle$ subit une collision dans le désordre et change d'impulsion $|\mathbf{k}'\rangle$. Les collisions avec le désordre étant élastiques, la conservation de l'énergie impose $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$. L'impulsion transférée $\mathbf{k}_{\text{dis}} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_i$ possède une borne supérieure en raison de la taille finie σ des grains de speckle.

6.1 Approximation de Born

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur la description du temps de diffusion élastique dans le régime de désordre faible. Ce régime perturbatif, appelé *régime de Born*, fournit une image intuitive de la physique du désordre et reste le seul régime permettant d'obtenir des résultats quantitatifs. Cette notion de régime perturbatif sera précisée formellement à l'aide d'un développement de la *Self-energy* au cours du chapitre 7.

6.1.1 Temps de diffusion élastique dans le régime de désordre faible

L'approximation de Born consiste à traiter l'effet du désordre $V(\mathbf{x})$ de manière perturbative¹. Dans cette vision de désordre faible, on peut considérer la propagation dans le désordre comme une succession d'événements de diffusion simple pour lesquels l'onde diffuse sur un diffuseur unique. L'étude du temps de diffusion élastique se concentre donc sur la dynamique d'un unique événement de diffusion.

Dans le régime désordre faible, on peut considérer l'effet du désordre comme un couplage de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ à un continuum d'états d'impulsion $|\mathbf{k}'\rangle$ pour lesquels $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$ afin de satisfaire la conservation de l'énergie, les collisions étant élastiques. Cette situation est illustrée figure 6.1.

Dans cette image, l'évolution temporelle de l'état initial est donnée par une décroissance exponentielle

$$n(\mathbf{k}_i, t) = n(\mathbf{k}_i, 0)e^{-t/\tau_s}, \quad (6.1)$$

où t est le temps de propagation dans le désordre et le taux de décroissance $1/\tau_s$ est donné par la règle d'or de Fermi

$$\frac{\hbar}{\tau_s^{\text{Born}}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \overline{|\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle|^2} \delta(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}_i}), \quad (6.2)$$

1. Une définition plus précise de l'approximation de Born basée sur le concept de *Self-Energy* sera donnée dans le chapitre 7.

où $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ est l'énergie de l'onde plane $|\mathbf{k}\rangle$ de masse atomique m . L'interprétation de cette équation est aisée : la déplétion de l'état initial fait intervenir tous les états finaux permis par le potentiel qui respectent la conservation de l'énergie ainsi que la conservation de l'impulsion, c'est-à-dire la condition de Bragg.

Dans le cas d'un potentiel stationnaire, on peut montrer que le terme de couplage $|\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle|^2$ est relié à la fonction de corrélation du potentiel de telle sorte que [9]

$$\frac{\hbar}{\tau_s^{\text{Born}}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta(E_{k'} - E_{k_i}), \quad (6.3)$$

où le spectre des fréquences spatiales du désordre $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du désordre $C(\Delta\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})V(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ d'après le théorème de Wiener-Khintchine.

6.1.2 Diffusion isotrope et diffusion vers l'avant

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 5, le désordre illuminé sur les atomes est corrélé. En particulier, celui-ci possède une longueur de corrélation σ , définissant ainsi une fréquence spatiale caractéristique σ^{-1} à la frontière entre des deux régimes de diffusion brièvement présentés dans la section 2.1.1.

En effet, la diffusion de l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ vers un état $|\mathbf{k}'\rangle$ n'est possible que si la fréquence spatiale $\mathbf{k}_{\text{dis}} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_i$ est contenue dans le spectre du désordre (voir par exemple la figure 6.1 et les miniatures de la figure 6.3). La présence de la distribution des fréquences spatiales du désordre dans la règle d'or de Fermi traduit donc la conservation de l'impulsion. Pour des impulsions initiales faibles telles que $k_i \ll \sigma^{-1}$, le désordre contient toutes les fréquences spatiales nécessaires pour diffuser l'onde dans toutes les directions (voir figure 6.2.a). Dans le cas contraire, où $k_i \gg \sigma^{-1}$, les fréquences spatiales du désordre sont trop faibles pour satisfaire la condition de rétro-diffusion $\mathbf{k}_{\text{dis}} = -2\mathbf{k}_i$. Dans cette situation, l'essentiel de la diffusion se déroule aux alentours de la direction initiale de l'onde², on parle alors de régime de diffusion vers l'avant (voir figure 6.2.b).

Plus précisément, nous avons vu au cours du chapitre 5 que les grains de speckle ne sont pas isotropes et possèdent deux tailles caractéristiques σ_{\perp} suivant les directions transverses et σ_{\parallel} selon la direction longitudinale. Il est donc possible de se placer dans une situation où la diffusion est isotrope dans le plan transverse ($k_i \sigma_{\perp} < 1$) tandis que celle-ci se déroule majoritairement vers l'avant selon l'axe optique ($k_i \sigma_{\parallel} > 1$). Pour des temps de propagation dans le désordre de l'ordre de quelques collisions élastiques, la dynamique de la diffusion sera essentiellement bidimensionnelle³, sans devoir confiner le mouvement des atomes.

2. Ce phénomène est analogue à la diffraction en optique. En effet, l'angle typique de diffraction d'une onde de nombre d'onde k par un obstacle de taille σ est donné par $\theta \sim 1/k\sigma$. Pour de grands nombres d'onde, la diffraction se fait dans un petit angle autour de la direction initiale de l'onde, tandis que pour de petits nombres d'onde la tâche de diffraction est étendue.

3. Avec nos paramètres expérimentaux usuels $k_i \sim 1 \mu\text{m}^{-1}$ et $\sigma_{\parallel}/2 \sim 2 \mu\text{m}$, il faut environ $N = (\pi k_i \sigma_{\parallel})^2 \sim 150$ collisions pour que la diffusion devienne isotrope [25].

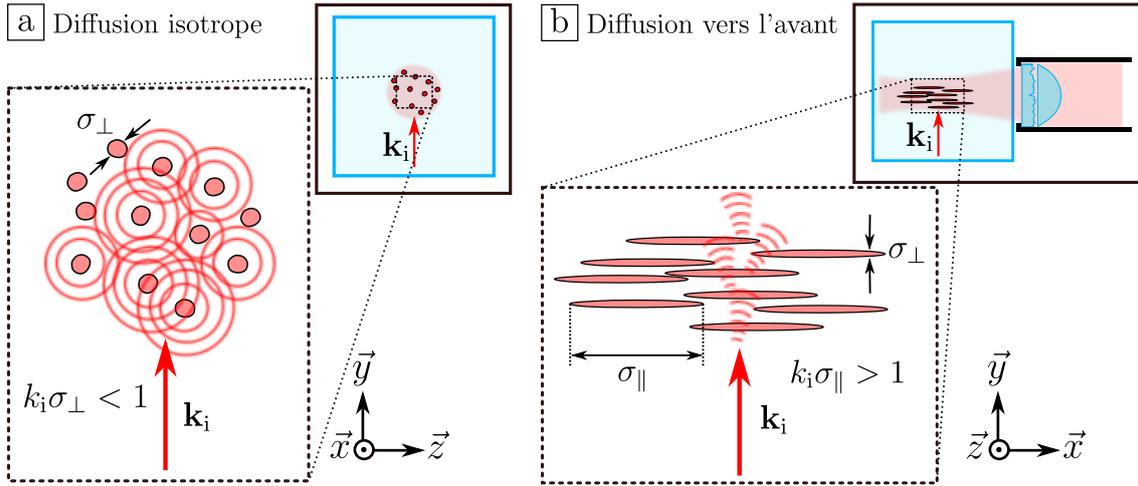


FIGURE 6.2 – **Dynamique quasi-2D dans un speckle.** Les grains de speckle étant étendus selon la direction longitudinale, on peut trouver une configuration pour laquelle $k_i \sigma_{\parallel} > 1$, impliquant que la diffusion selon la direction \vec{x} se fera essentiellement vers l'avant, et que $k_i \sigma_{\perp} < 1$, impliquant une diffusion isotrope suivant les directions \vec{y} et \vec{z} . De cette manière, on obtient une dynamique de diffusion quasi-2D, sans confiner le mouvement des atomes.

6.1.3 Temps de diffusion élastique dans le régime de Born

Dans le régime de diffusion quasi-2D, on peut calculer τ_s^{Born} à l'aide de la fonction de corrélation bidimensionnelle 5.22 que l'on peut réécrire sous la forme

$$C(\Delta \mathbf{r}_{\perp}) = V_R^2 e^{-\Delta \mathbf{r}_{\perp}^2 / \sigma_{\perp}^2} \quad (6.4)$$

afin de tenir compte de l'amplitude du désordre. Le passage à la limite continue de la règle d'or de Fermi 6.3 permet de transformer la somme discrète sur les états finaux $|\mathbf{k}'\rangle$ en une intégrale :

$$\frac{1}{\tau_s^{\text{Born}}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}\right). \quad (6.5)$$

En injectant l'équation 6.4 dans la règle d'or de Fermi 6.5, on peut ainsi obtenir une expression analytique dans le régime de diffusion quasi-2D [108] :

$$\frac{1}{\tau_s^{\text{Born}}} = \frac{\pi V_R^2}{\hbar E_{\sigma}} e^{-k_i^2 \sigma_{\perp}^2 / 2} I_0(k_i^2 \sigma_{\perp}^2 / 2), \quad (6.6)$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. Nous avons de plus fait apparaître l'énergie de corrélation E_{σ} dont l'expression se réduit à $E_{\sigma} = \hbar^2 / m \sigma_{\perp}^2 \sim 466 \text{ Hz}$ dans le cas d'un désordre bidimensionnel.

Il apparaît donc que le temps de diffusion élastique dépend d'une manière simple de l'amplitude du désordre V_R : $\tau_s^{\text{Born}} \propto 1/V_R^2$. De manière plus générale, on peut définir un temps de diffusion élastique renormalisé $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}$ tel que

$$\tau_s^{\text{Born}}(k_i, V_R) = \frac{\hbar E_{\sigma}}{\pi V_R^2} \tilde{\tau}_s^{\text{Born}}(k_i), \quad (6.7)$$

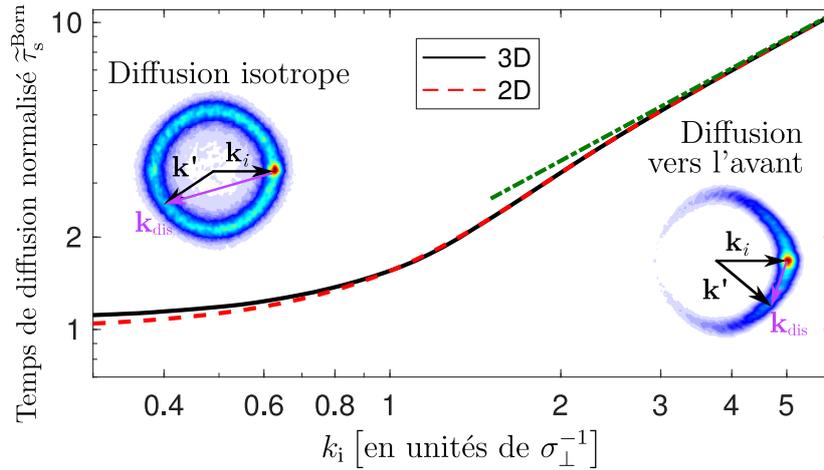


FIGURE 6.3 – **Prédiction de l’approximation de Born.** Le temps de diffusion élastique renormalisé $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}$ prédit par l’approximation de Born 6.6 est tracé en fonction de l’impulsion initiale de l’onde en pointillés rouges pour une configuration bidimensionnelle représentée par la fonction de corrélation 6.4. Cette prédiction en configuration 2D est très proche de la configuration 3D représentée en noir calculée à l’aide la fonction de corrélation 5.26. La limite asymptotique $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}} \sim \sqrt{\pi}k_i\sigma_{\perp}$ est représentée en vert. Les illustrations des distributions de vitesses pour la diffusion isotrope ($k_i\sigma_{\perp} < 1$) et la diffusion vers l’avant ($k_i\sigma_{\perp} > 1$) correspondent à des images expérimentales.

qui est indépendant de V_R , dont le comportement est illustré en rouge sur la figure 6.3.

La formule 6.6 permet d’obtenir une expression approchée dans la limite de diffusion isotrope $k_i\sigma_{\perp} \ll 1$. On montre ainsi que le temps de diffusion devient indépendant de l’énergie initiale de l’onde et tend vers une constante [93] :

$$\tau_s^{\text{Born}} = \frac{\hbar E_{\sigma}}{\pi V_R^2} \quad \text{soit} \quad \tilde{\tau}_s^{\text{Born}} = 1 . \quad (6.8)$$

De même, il est possible d’obtenir une expression simple du temps de diffusion élastique dans le régime de diffusion vers l’avant, pour lequel une dépendance en k_i est attendue étant donné que la diffusion se passe essentiellement dans la direction initiale de l’onde. On montre ainsi que dans le régime $k_i\sigma_{\perp} \gg 1$, le temps de diffusion élastique dépend linéairement de l’impulsion initiale $\tau_s \propto k_i\sigma_{\perp}$ [93] :

$$\tau_s^{\text{Born}} = \frac{\hbar E_{\sigma}}{V_R^2 \sqrt{\pi}} k_i\sigma_{\perp} \quad \text{soit} \quad \tilde{\tau}_s^{\text{Born}} = \sqrt{\pi}k_i\sigma_{\perp} , \quad (6.9)$$

représenté en vert sur la figure 6.3.

Notons que d’éventuels effets tridimensionnels sont susceptibles de se manifester dans la limite de diffusion isotrope $k_i\sigma_{\perp} \ll 1$ ⁴. Il est possible d’estimer le temps de diffusion élastique dans une configuration 3D à l’aide de la fonction de corrélation 5.26 du modèle paraxial effectif. La prédiction de Born de notre configuration tridimensionnelle est représentée en

4. Dans le cas à trois dimensions, τ_s^{Born} tend aussi vers une constante pour de faibles impulsions initiales en raison de l’absence de limite de bruit blanc pour un speckle. En effet, un speckle possède une corrélation de portée infinie selon la direction longitudinale en raison de la propagation de la lumière [37]. Dans le cas d’une limite de bruit blanc et donc de corrélation de portée finie, le temps de diffusion élastique diverge en $1/k_i$ dans la limite des faibles impulsions, que l’on peut reformuler comme $l_s \rightarrow \text{cste}$.

noir sur la figure 6.3 et ne montre qu'une légère déviation par rapport au cas bidimensionnel 6.6 pour les faibles impulsions initiales. Dans la suite, nous nous contenterons donc de décrire nos résultats à l'aide de la prédiction de l'équation 6.6.

Le domaine de validité de l'approximation de Born peut être estimée d'une manière intuitive. En effet, le fait que l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ possède un temps de vie τ_s^{Born} fini se traduit par un élargissement de la distribution d'énergie de cet état dans le désordre de l'ordre de

$$\Delta E = \hbar/\tau_s^{\text{Born}} \propto \frac{V_R^2}{E_\sigma}. \quad (6.10)$$

Pour valider l'approche perturbative, cette largeur doit être petite devant l'énergie initiale de l'onde $E_{k_i} = \hbar^2 k_i^2 / 2m$. La condition de désordre perturbatif s'écrit alors [56]

$$E_{k_i} \gg \frac{V_R^2}{E_\sigma}. \quad (6.11)$$

En comparant l'amplitude du désordre à son énergie de corrélation, il est possible de satisfaire la condition de désordre perturbatif tout en faisant apparaître deux régimes de désordre :

- Supposons que l'amplitude du désordre soit supérieure à l'énergie de corrélation $V_R \gg E_\sigma$. La condition de désordre perturbatif impose que l'énergie de l'onde soit très grande devant l'amplitude du désordre, et donc que celle-ci ne soit que faiblement perturbée par le désordre. Ainsi, la trajectoire de la particule est essentiellement classique⁵. Dans cette limite, on parle de *désordre classique*.
- Supposons que l'énergie de corrélation du désordre soit supérieure à son amplitude $E_\sigma \gg V_R$. Il est possible de satisfaire la condition de désordre perturbatif en ayant $E_{k_i} < V_R$, c'est-à-dire que la propagation de la particule se fait par effet tunnel au travers des fluctuations de potentiel. Plus particulièrement, l'amplitude du potentiel est renormalisée par l'effet tunnel, l'amplitude effective du potentiel étant V_R^2/E_σ . On parle alors de *désordre quantique*.

Le rapport entre l'amplitude du désordre et son énergie de corrélation joue donc un rôle fondamental dans la description de la physique du désordre⁶.

Notons qu'il est aussi possible d'écrire la condition de désordre faible sous la forme $k_i \tau_s^{\text{Born}} \gg 1$, identifiable au critère de Ioffe-Regel⁷. Une analyse du temps de diffusion élastique en fonction des paramètres expérimentaux V_R et k_i nous permet alors de tester la validité de ce critère en étudiant la transition entre les régimes de diffusion faible et de diffusion forte, que l'on pourra confronter à celle du critère 6.11 utilisé par [56].

5. Pour $V_R \gg E_\sigma$, les fluctuations du potentiel peuvent supporter des états liés. Dans la limite $V_R/E_\sigma \rightarrow \infty$, ces états liés forment un continuum pour lequel le mouvement des particules est classique.

6. Il s'agit de la raison pour laquelle la figure 2.10 décrivant l'évolution du seuil de mobilité avec l'amplitude du potentiel est tracée en fonction de cette quantité. En particulier, la physique de la localisation peut être assimilée à un piégeage classique dans la limite $V_R/E_\sigma \rightarrow \infty$ (le seuil de mobilité converge vers le seuil de percolation classique), tandis que la localisation d'Anderson d'ondes de matière est de nature purement quantique lorsque $V_R < E_\sigma$.

7. Notons que ce critère coïncide avec celui $E_k \gg V_R^2/E_\sigma$ utilisé par [56] dans le régime de diffusion isotrope. Dans le régime de diffusion vers l'avant, ces deux critères dévient de manière significative.

6.2 Mesure du temps de diffusion élastique

Les différentes étapes expérimentales menant à l'obtention d'une onde de matière plane ainsi que les différentes configurations magnétiques utilisables ont pu être présentées dans les chapitres 3 et 4.

Dans cette partie, nous allons présenter le protocole expérimental utilisé pour mesurer le temps de diffusion élastique ainsi que la manière dont celui-ci a été extrait des données expérimentales. Rappelons que ces données ont été obtenues en 2015 lors de la thèse de Jérémie Richard [93], mais que celles-ci ont été entièrement retraitées au cours de ma thèse.

6.2.1 Procédure expérimentale

La séquence de génération d'un condensat de Bose-Einstein correspond à celle décrite au cours du chapitre 3. On obtient ainsi un nuage dégénéré d'environ 10^5 atomes de ^{87}Rb interagissant faiblement dans un piège optique fortement décomprimé après évaporation. Ce nuage est polarisé dans le sous-état Zeeman $|F=2, m_F=-2\rangle$ et suspendu contre la gravité à l'aide de la lévitation magnétique qui est anti-piégeante et fortement décomprimées.

Dans un second temps, le nuage est refroidi davantage à l'aide du refroidissement par delta-kick présenté en section 3.3.3, permettant d'obtenir en dispersion en impulsion de $\Delta k = 0.15 \mu\text{m}^{-1}$, soit une température équivalente de $T \sim 150 \text{ pK}$. Enfin, une impulsion initiale \mathbf{k}_i selon la direction \vec{y} est conférée au nuage à l'aide d'un gradient magnétique. Cette impulsion initiale varie ainsi de $1 \mu\text{m}^{-1}$ à $20 \mu\text{m}^{-1}$ en modifiant la durée d'application du gradient magnétique. Le nuage peut ainsi être assimilé à une onde plane $|\mathbf{k}_i\rangle$ d'impulsion et d'énergie bien définies.

Le désordre est ensuite brusquement⁸ allumé sur les atomes à $t = 0 \text{ s}$. Ce désordre est réalisé à l'aide du champ de speckle décrit au cours du chapitre 5, dont la différence entre les longueurs de corrélation σ_\perp et σ_\parallel permet de considérer le speckle comme un désordre quasi-2D dans le plan $(y-z)$ du repère de l'expérience. Le faisceau speckle est accordable autour de la transition D_2 du ^{87}Rb à 780 nm, permettant de réaliser un désordre qui soit attractif ou répulsif, comme expliqué dans la section 5.3.1. Le désaccord utilisé $|\delta|/2\pi \sim 1 \text{ THz}$ est suffisamment faible pour que les propriétés du potentiel soient identiques entre les configurations attractive et répulsive, mais il est de plus suffisamment grand pour que le potentiel soit conservatif⁹. L'amplitude du désordre $|V_R|$ est fixée en contrôlant la puissance du faisceau speckle, $|V_R|/h$ pouvant ainsi aller de 39 Hz à 3.88 kHz.

Le temps de diffusion élastique pouvant être extrait de la déplétion de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ d'après l'équation 6.1, l'approche naturelle à son étude consiste donc à suivre l'évolution de la distribution d'impulsion du nuage en fonction du temps de propagation t dans le désordre. Celle-ci est obtenue à l'aide d'un très grand temps de vol après extinction du désordre : après une longue expansion balistique, la position des atomes ne dépend plus de la taille initiale du nuage et n'est due qu'à leur vitesse. Ainsi, des temps de vol allant jusqu'à 300 ms peuvent être utilisés grâce à la lévitation magnétique, permettant d'obtenir

8. Le temps d'allumage du faisceau speckle est d'environ 50 μs , limité par la bande-passante de l'atténuateur variable de la radio-fréquence envoyée dans le modulateur acousto-optique utilisé pour l'asservissement de puissance.

9. Le taux d'émission spontanée est au plus de 0.1 s^{-1} .

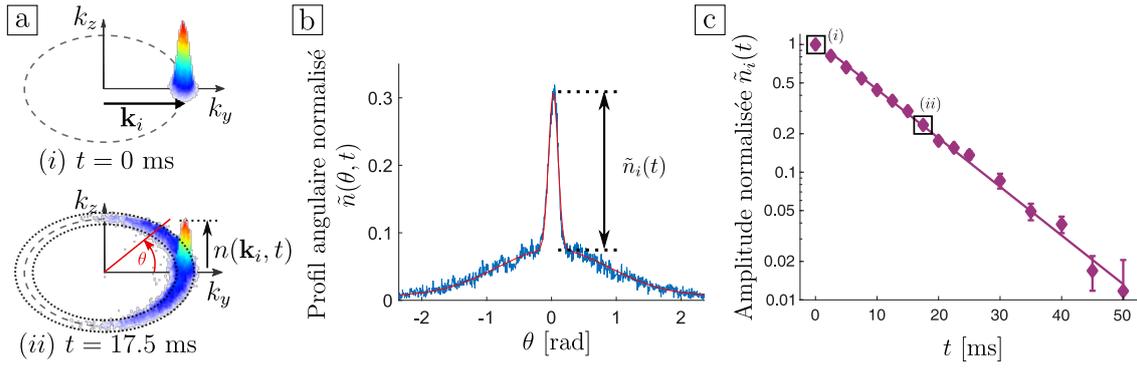


FIGURE 6.4 – **Extraction du temps de diffusion élastique.** La procédure d'extraction du temps de diffusion élastique est illustrée pour les paramètres expérimentaux $V_R/h = -104$ Hz et $k_i = 2.31\sigma_\perp^{-1}$. **a** : Distributions expérimentales d'impulsion $n(\mathbf{k}, t)$ de l'état initial ($t = 0$ ms) et après propagation dans le désordre ($t = 17.5$ ms). Une intégration radiale (suivant la ligne rouge et délimitée par les lignes pointillées noires) permet d'obtenir le profil angulaire. **b** : Profil angulaire normalisé $\tilde{n}(\theta, t)$ (en bleu), ajusté par une structure bimodale (en rouge). L'amplitude de l'état initial est extraite de la partie gaussienne fine, tandis que la partie gaussienne large représente le peuplement d'autres états par des atomes diffusés. **c** : Décroissance de l'amplitude normalisée $\tilde{n}_i(t)$, tracée en échelle semi-logarithmique. Celle-ci est ajustée par une exponentielle, permettant d'extraire $\tau_s = 12.0 \pm 0.3$ ms. Les points encadrés (i) et (ii) sont issus des distributions expérimentales d'impulsion présentées figure a.

une résolution d'impulsion de $\Delta k_{\text{res}} = 0.2 \mu\text{m}^{-1}$ ¹⁰. Enfin, la densité atomique est mesurée dans le plan $(\mathbf{k}_y - \mathbf{k}_z)$ (le plan $(y - z)$ du repère de l'expérience) à l'aide d'une imagerie par fluorescence.

6.2.2 Extraction du temps de diffusion élastique

L'évolution temporelle de la population de l'état initial $n(\mathbf{k}_i, t)$ est obtenue à l'aide des images expérimentales de la distribution dans l'espace des impulsions. La figure 6.4.a représente la distribution expérimentale d'impulsion $n(\mathbf{k}, t)$ pour les paramètres $k_i = 2.31\sigma_\perp^{-1}$ et $V_R/h = -104$ Hz, pour des temps de propagation dans le désordre $t = 0$ ms (état initial) et $t = 17.5$ ms.

Après propagation dans le désordre, les atomes initialement dans l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ sont diffusés dans les états $|\mathbf{k}'\rangle$. On remarque que les atomes diffusés se répartissent selon un anneau tel que $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$, témoignant du caractère élastique de la diffusion dans le désordre. Néanmoins, cet anneau admet une largeur finie Δk_{incoh} en raison de l'élargissement en énergie lié au temps de vie fini de l'onde plane initiale dans le désordre. On peut ainsi montrer que $\Delta k_{\text{incoh}} \sim 2/l_s$ [20].

La détermination de τ_s repose sur la succession de trois étapes de traitement de données illustrées figure 6.4. Dans un premier temps, la densité atomique $n(\mathbf{k}, t)$ dans le plan $(\mathbf{k}_y - \mathbf{k}_z)$ est intégrée radialement afin d'obtenir le profil angulaire $n(\theta, t)$. Les bornes d'intégration

10. Cette résolution est supérieure à la dispersion initiale d'impulsion en raison de la taille du nuage, d'environ $30 \mu\text{m}$, et du temps fini d'expansion.

correspondent à deux fois la demi-largeur de la distribution d'impulsion initiale $n(\mathbf{k}, 0)$ (figure 6.4.a). Le profil angulaire est ensuite normalisé par sa valeur à l'origine $\theta = 0$ et $t = 0$, $\tilde{n}(\theta, t) = n(\theta, t)/n(0, 0)$. Le profil angulaire normalisé obtenu est le résultat de la somme de deux contributions, une distribution fine correspondant à la distribution initiale non diffusée $\tilde{n}_i(\theta, t)$, et une seconde structure $\tilde{n}_b(\theta, t)$ plus large identifiée aux atomes diffusés dans les états $|\mathbf{k}'\rangle$ (figure 6.4.b).

Dans un second temps, le profil angulaire normalisé est ajusté à l'aide de la somme d'une gaussienne large, représentant le fond diffusé $\tilde{n}_b(\theta, t)$, et d'une gaussienne étroite décrivant la distribution initiale $\tilde{n}_i(\theta, t)$ ¹¹. On obtient ainsi l'amplitude normalisée $\tilde{n}_i(t) = \tilde{n}_i(0, t)$, dont les barres d'erreur sont estimées à l'aide des incertitudes expérimentales et des déviations de l'ajustement bimodal.

Enfin, l'évolution temporelle de l'amplitude du pic initial $\tilde{n}_i(t)$, suivie sur deux décades, est ajustée par une décroissance exponentielle¹² 6.1 de temps de vie τ_s , valant 12.0 ± 0.3 ms dans le cas de la figure 6.4.c. Les incertitudes associées sont estimées à partir des barres d'erreurs de l'amplitude du pic de la distribution initiale et de la déviation de l'ajustement exponentiel.

6.2.3 Cartographie du temps de diffusion élastique

La procédure de mesure du temps de diffusion élastique décrite dans les deux sections précédentes est répétée pour une large gamme de paramètres expérimentaux $|V_R|$ et k_i , ainsi que pour des désordres désaccordés vers le rouge (désordres attractifs) et vers le bleu (désordres répulsifs) décrits dans le chapitre 5. En balayant l'impulsion initiale k_i sur un ordre de grandeur et l'amplitude du désordre $|V_R|$ sur deux ordres de grandeur, nous avons pu observer des variations de τ_s allant de 40 μ s à 100 ms, représentant près de quatre ordres de grandeur.

L'ensemble des valeurs mesurées peut être retrouvé figure 6.5, dans laquelle le temps mesuré τ_s est tracé en fonction de l'impulsion initiale k_i en échelle logarithmique. Les différentes couleurs correspondent aux différentes amplitudes de désordre utilisées. Les données expérimentales (points) sont comparées à la prédiction de Born 6.6 (lignes pointillées) ainsi qu'à des simulations numériques (lignes continues).

Ces simulations correspondent à la résolution numérique en deux dimensions de l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution d'un paquet d'onde gaussien dans un désordre dont les propriétés vérifient la distribution de potentiel 5.31 ainsi que la fonction de corrélation 6.4. La résolution numérique s'appuie sur une méthode de différences finies ainsi que l'utilisation de conditions aux limites absorbantes. La distribution d'impulsion est obtenue par transformation de Fourier de la fonction d'onde avant d'être moyennée sur 14 réalisations du désordre¹³. La détermination du temps de diffusion élastique est finalement

11. Le profil du paquet d'onde ne correspond plus à un profil de Thomas-Fermi en raison de l'étape de refroidissement par delta-kick. Il a été observé que celui-ci était mieux décrit à l'aide d'une fonction gaussienne.

12. Comme nous le verrons dans le chapitre 7, il est attendu que dans un régime de très fort désordre la décroissance de l'état initial ne soit plus exponentielle [119], cependant nous n'avons pas observé de déviation expérimentale importante à la décroissance exponentielle.

13. Nous avons déterminé que moyennner la distribution d'impulsion sur 14 réalisations du désordre permettait d'atteindre la convergence vers la distribution moyenne d'impulsion.

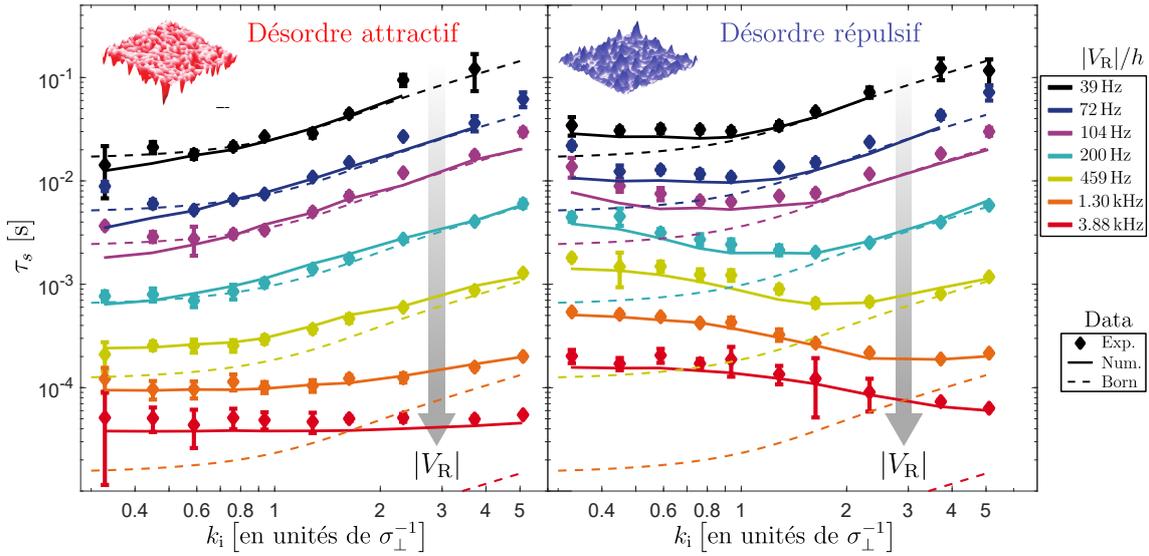


FIGURE 6.5 – **Cartographie du temps de diffusion élastique en fonction des paramètres expérimentaux.** Le temps de diffusion élastique est tracé en fonction de l'impulsion initiale pour différentes amplitudes du désordre (différentes couleurs) ainsi que pour des désordres attractifs (cadre de gauche) et des désordres répulsifs (cadre de droite). Les données expérimentales (points) sont comparées à des données numériques *ab-initio* (lignes continues) ainsi qu'à la prédiction bidimensionnelle de Born 6.6 (lignes pointillées).

réalisée de la même manière que pour les données expérimentales, explicitée section 6.2.2.

La figure 6.5 témoigne d'un accord remarquable entre les données expérimentales et les données numériques sur l'ensemble des paramètres expérimentaux et confirme ainsi le caractère quasi-2D de notre système. Néanmoins, des petites déviations sont observées dans la région d'impulsions et de désordres faibles (région en haut à gauche), que l'on peut attribuer à deux contributions. En effet, la zone d'impulsions faibles est susceptible de témoigner d'effets tridimensionnels. De plus, la résolution finie de la distribution d'impulsion Δk_{res} engendre des difficultés expérimentales pour déterminer précisément τ_s .

L'excellent accord entre les données expérimentales et les données numériques nous permet de calibrer l'amplitude du désordre V_R utilisé expérimentalement. Notamment, celle-ci est estimée à l'aide de mesures photométriques de la puissance du faisceau utilisé, sujettes à des erreurs systématiques de quelques dizaines de pourcents, qu'il est possible de corriger à l'aide d'un facteur de calibration α . En minimisant les différences entre les données numériques et expérimentales pour l'impulsion $k_i = 0.74\sigma_{\perp}^{-1}$, on détermine ainsi le facteur de calibration $\alpha = 1.29 \pm 0.02$.

6.3 Comportement du temps de diffusion élastique

Nous avons vu dans la section précédente comment nous avons mesuré le temps de diffusion élastique pour de larges gammes de paramètres k_i et V_R . À présent, nous allons voir comment ces données se comparent à la théorie de Born. Plus précisément, c'est la comparaison à la prédiction de Born qui nous permettra de différencier les régimes de diffusion faible et de diffusion forte. En particulier, nous allons illustrer l'influence de la

distribution de potentiel sur la transition entre ces régimes, que nous confronterons au critère de désordre faible $k_i l_s^{\text{Born}} \sim 1$.

6.3.1 Régime de Born

Comme nous l'avons dit ci-dessus, les données expérimentales et numériques sont comparées aux prédictions du régime de Born dans la figure 6.5. Remarquons que la prédiction théorique du régime de Born, représentée par les lignes pointillées, est simplement translatée verticalement en changeant l'amplitude du désordre $|V_R|$ en vertu de la loi d'échelle $\tau_s^{\text{Born}} \propto 1/|V_R|^2$. De plus, celle-ci est identique pour les désordres attractif et répulsif étant donné que la prédiction 6.3 ne dépend pas de la distribution de potentiel, mais uniquement du spectre des fréquences spatiales du désordre $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$.

De manière générale, τ_s^{Born} montre un bon accord avec les données dans le régime de diffusion faible, c'est-à-dire la région de désordre faible (petits $|V_R|$) et d'impulsion importante (grands k_i). On observe ainsi les comportements de diffusion isotrope ($k_i \sigma_{\perp} < 1$) et de diffusion vers l'avant ($k_i \sigma_{\perp} > 1$), notamment pour la courbe noire de plus faible désordre $|V_R|/h = 39 \text{ Hz}$.

Cependant, l'augmentation de l'amplitude du désordre ou la diminution de l'impulsion initiale mènent à de fortes déviations à la prédiction de théorie de Born, obtenue dans le cadre de la théorie des perturbations.

6.3.2 Déviations au régime de Born

En dehors du régime dans lequel l'approximation de Born permet de décrire quantitativement nos données, nous observons de larges déviations entre les désordres attractifs et répulsifs. Cette signature de l'influence de la distribution de potentiel $\mathcal{P}(V)$ montre l'insuffisance de l'approximation de Born pour décrire le régime de diffusion forte.

Une représentation visuelle des déviations observées à l'approximation de Born est proposée figure 6.6, où le rapport $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}}$ est tracé en échelle logarithmique en fausses couleurs en fonction des paramètres expérimentaux k_i et $|V_R|$ pour les différents désordres considérés. Afin d'exposer le rôle fondamental de la distribution de potentiel, cette étude est de plus étendue au cas d'un désordre gaussien¹⁴ dont la distribution de potentiel est donnée par

$$\mathcal{P}(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}V_R} e^{-V^2/2V_R^2} . \quad (6.12)$$

Les parties bleues des cartes du temps de diffusion élastique de la figure 6.6 représentent le régime pour lequel $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}} \sim 1$. On observe que ces régions où l'estimation de Born est quantitativement correcte se trouvent dans la zone de désordres faibles et d'impulsions importantes, comme attendu. La région de fort désordre et d'impulsion faible témoigne en revanche de déviations extrêmes, où des déviations de deux ordres de grandeurs ont pu être observées.

14. L'extension de l'étude au potentiel gaussien n'a pu être réalisée que numériquement. Celui-ci possède la même fonction de corrélation 6.4 que les potentiels de type speckle. La génération expérimentale d'un tel potentiel peut être envisagée en réalisant l'interférence entre un speckle et une onde plane intense, ou encore à l'aide d'un modulateur spatial de lumière.

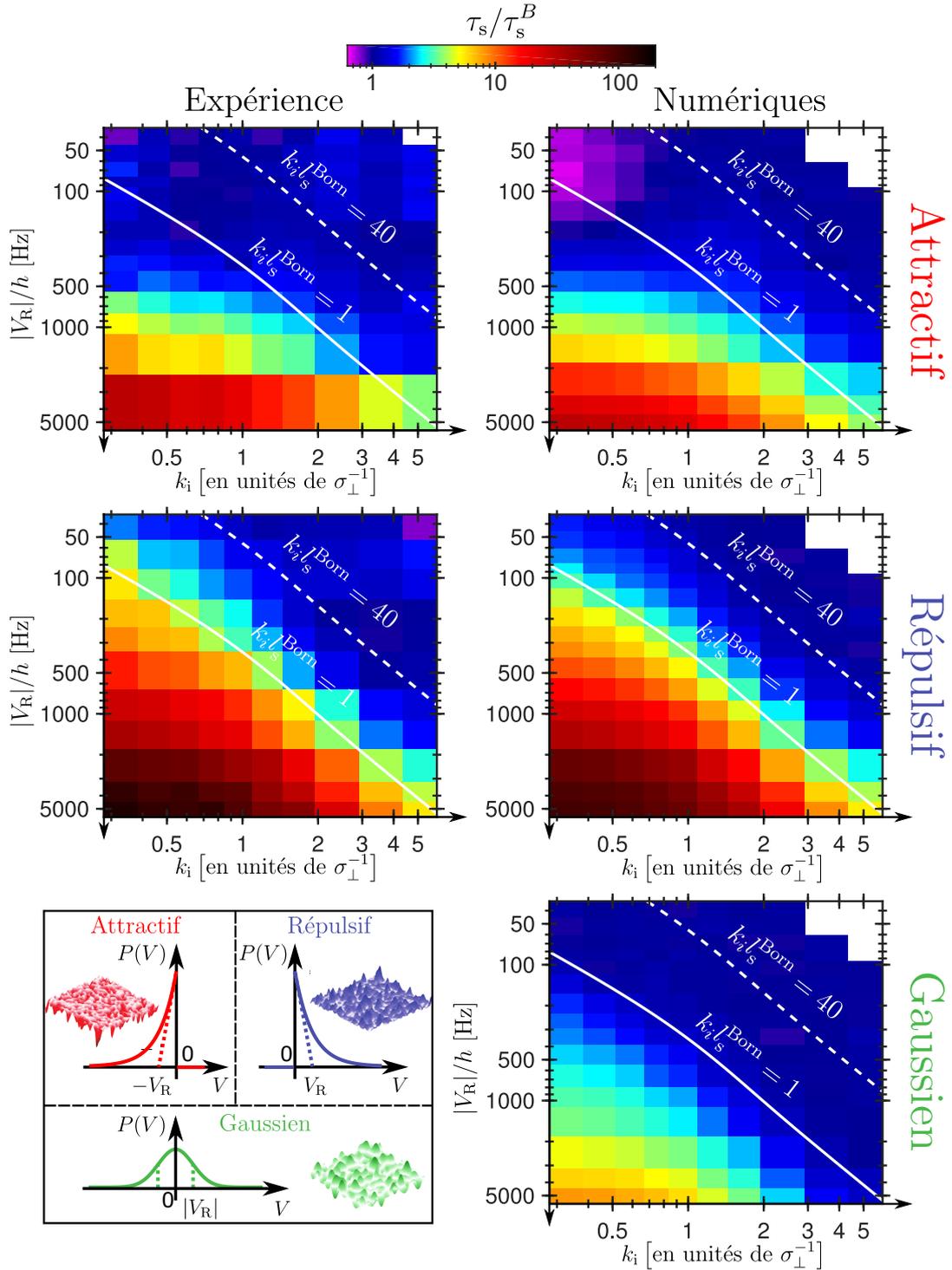


FIGURE 6.6 – Cartographie des déviations au régime de Born. Le rapport $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}}$ est tracé en échelle logarithmique en fausses couleurs en fonction des paramètres expérimentaux k_i et $|V_R|$. Les données expérimentales (colonne de gauche) et numériques (colonne de droite) sont tracées pour les désordres attractifs (première ligne), répulsifs (deuxième ligne) ainsi que pour un désordre gaussien (figure en bas à droite) ayant la même fonction de corrélation 6.4 que les désordres speckle. Les distributions $\mathcal{P}(V)$ des potentiels sont représentées dans la figure en bas à gauche. Les courbes blanches correspondent aux critères phénoménologiques de désordre faible $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ (ligne continue) et $k_i l_s^{\text{Born}} = 40$ (ligne pointillée).

Les déviations mesurées à l'approximation perturbative permettent ainsi de révéler la forte influence de la distribution de potentiel sur le régime de diffusion forte, ainsi que sur la transition entre le régime de Born et le régime de diffusion forte. Notamment, le critère de validité de l'approximation de Born communément utilisé $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ est tracé en ligne blanche continue et semble reproduire remarquablement la zone de transition entre le régime de Born et le régime de diffusion forte. Plus particulièrement, nous avons observé que la ligne $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ correspondait à une iso-déviations de 25% dans le cas du désordre gaussien¹⁵. On vérifie ainsi la pertinence de ce critère pour localiser la transition entre régimes de diffusion faible et forte pour un désordre gaussien, largement utilisé.

Néanmoins, les déviations observées sont beaucoup plus marquées pour les désordres de type speckle, montrant la désadaptation de ce critère à ce type de désordre. En effet, la ligne $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ témoigne de déviations atteignant 250% pour un speckle attractif, et 400% pour un speckle répulsif. Il apparaît donc que la transition entre les régimes de diffusion faible et forte est déplacée vers des valeurs plus importantes de la quantité $k_i l_s^{\text{Born}}$, notamment, des déviations de 25% mentionnées précédemment apparaissent dès $k_i l_s^{\text{Born}} = 40$ (lignes blanches pointillées). La pertinence du critère communément utilisé $k_i l_s^{\text{Born}} \sim 1$ dépend donc de la nature du désordre utilisé.

La description du comportement du temps de diffusion élastique hors du régime de Born fait l'objet du chapitre 7, mais nous pouvons néanmoins décrire brièvement la nature des déviations au régime de Born. La région des faibles désordres correspond à celle où l'approximation de Born est susceptible d'être valide. Cependant, pour des impulsions faibles, l'énergie de l'onde initiale n'est pas suffisamment grande pour que seul le premier ordre de la théorie des perturbations puisse décrire correctement le temps de diffusion élastique. Notamment, l'ordre suivant de la théorie des perturbations, en $1/V_R^3$, permet d'expliquer l'asymétrie du comportement entre les trois désordres considérés dans la région de faibles désordres et impulsion.

La région de fort désordre sort naturellement du cadre de la théorie perturbative de Born. Il s'agit de la région pour laquelle la distribution de potentiel joue un rôle capital, comme cela est illustré par la différence significative des déviations que l'on peut observer dans cette région pour les différents désordres. Nous verrons dans le chapitre suivant que dans ce régime, l'évolution temporelle de l'état initial est directement reliée à sa distribution d'énergie, donnée par la fonction spectrale $A(\mathbf{k}_i, E)$ et dont le profil est intimement relié à la distribution de potentiel.

6.3.3 Déviation à la décroissance exponentielle

La décroissance exponentielle de la population de l'état initial étant une prédiction du régime perturbatif de Born, des déviations à ce comportement exponentiel sont attendues dans le régime de diffusion forte. Si celles-ci n'ont pas pu être observées avec nos données expérimentales¹⁶, nos simulations révèlent de telles déviations à la décroissance exponentielle de l'état initial.

En particulier, un comportement *universel* à temps court a pu être observé à l'aide de

15. Il s'agit de la ligne de niveau $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}} = 1.25$ dans le cas du désordre gaussien.

16. La précision de nos mesures n'a permis de démontrer des déviations significatives au comportement exponentiel.

nos données numériques

$$\tilde{n}_i(t) = 1 - \frac{V_R^2 t^2}{\hbar^2}, \quad (6.13)$$

valide pour les temps courts $t < \hbar/E_\sigma$. Si ce départ quadratique est attendu dans le régime classique¹⁷, celui-ci est aussi observé dans le régime de Born, que nous allons à présent détailler à l'aide d'un modèle simple.

L'application de la règle d'or de Fermi 6.2 repose non seulement sur l'hypothèse de désordre perturbatif, mais aussi sur la considération de temps de couplage t suffisamment longs pour résoudre les niveaux d'énergie du système. Notamment, le terme de conservation de l'énergie $\delta(E_{k'} - E_{k_i})$ correspond à la limite aux temps longs d'une fonction donnant la résolution en énergie du couplage [39] :

$$g_t(E_{k'} - E_{k_i}) = \frac{\sin^2((E_{k'} - E_{k_i})t/2\hbar)}{((E_{k'} - E_{k_i})t/2\hbar)^2} t^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta(E_{k'} - E_{k_i}), \quad (6.14)$$

dans le cas d'une perturbation constante.

Plus particulièrement, cette approximation de temps longs est valable lorsque le temps de couplage est grand devant le temps caractéristique donné par la largeur en énergie du continuum, $t \gg \hbar/E_\sigma$. En effet, le désordre possédant une fréquence spatiale de coupure σ_\perp^{-1} , il s'ensuit un transfert d'énergie maximal de E_σ dans le cas de collisions inélastiques.

Néanmoins, dans la limite de temps courts $t < \hbar/E_\sigma$, la fonction de résolution en énergie du couplage précédente possède une largeur plus grande que celle du continuum adressé. De fait, ce dernier peut être considéré comme un état unique. Le couplage induit donc une oscillation de Rabi entre l'état initial et l'*unique état* final, caractérisé par un départ quadratique de l'oscillation.

La décroissance de l'état initial est donc composée de deux régimes comme illustré sur la figure 6.7 pour les paramètres $V_R = -104\text{Hz}$ et $k_i = 0.59\sigma_\perp^{-1}$. Un premier régime à temps court est caractérisé par une décroissance quadratique liée au début d'une oscillation de Rabi entre l'état initial et le continuum de largeur finie lui-même. Cet effet de temps très court est observé à l'aide de nos simulations numériques, cependant il est difficile à identifier expérimentalement. Dans un second temps, le couplage est suffisamment long pour que la conservation de l'énergie soit satisfaite, la décroissance est alors exponentielle avec un temps de vie donné par la règle d'or de Fermi.

Ainsi, il est possible d'obtenir une expression heuristique de la décroissance à l'aide d'un modèle simple de continuum de largeur finie dans le régime de désordre faible [39] permettant de décrire à la fois le départ quadratique observé et la décroissance exponentielle de l'état initial :

$$\tilde{n}_i(t) = \left| e^{-t/\tau_s^{\text{Born}}/2} \left(1 + \frac{\hbar}{2E_\sigma \tau_s^{\text{Born}}} \right) - \frac{\hbar}{2E_\sigma \tau_s^{\text{Born}}} e^{-E_\sigma t/\hbar} \right|^2, \quad (6.15)$$

dont le développement limité permet de retrouver le départ quadratique 6.13. Cette forme est utilisée pour ajuster la décroissance numérique, et est représentée en pointillés rouges sur la figure 6.7. On remarque que celle-ci décrit correctement l'ensemble de la décroissance là où une décroissance exponentielle pure ne permet pas d'en reproduire le début. Si

17. Celui-ci trouve son origine dans le comportement des fonctions spectrales dans le régime classique. Nous aborderons ce point dans le chapitre 7.

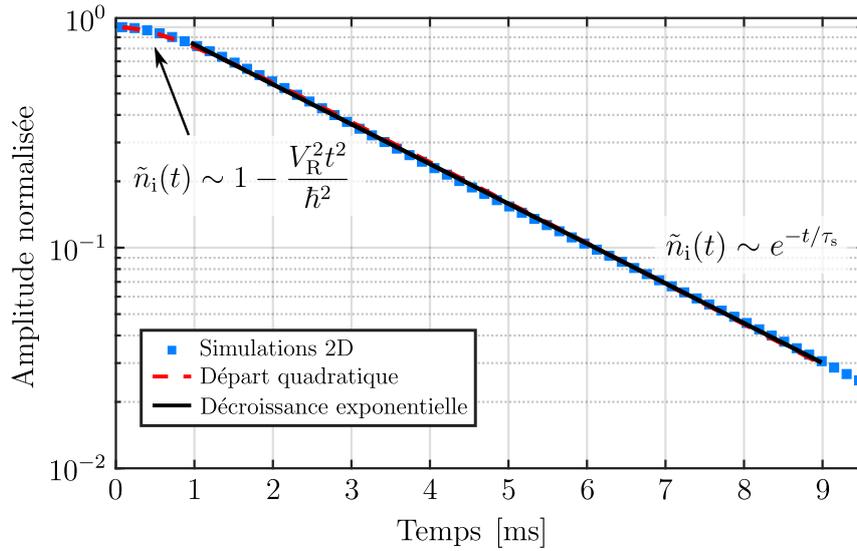


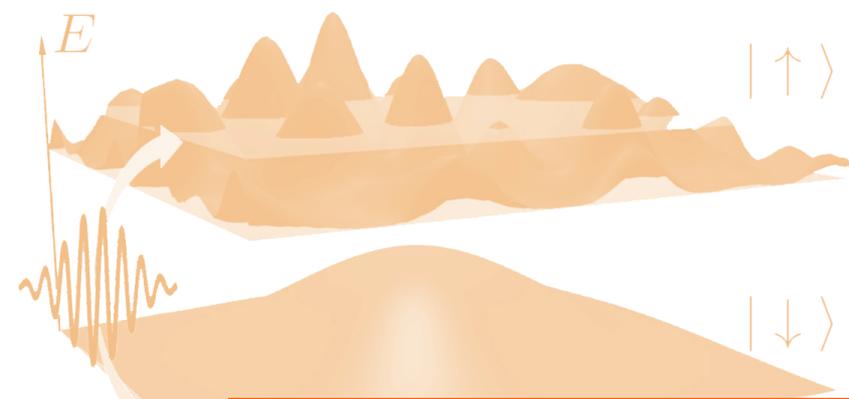
FIGURE 6.7 – **Départ quadratique de la décroissance de l'état initial.** Cette décroissance est issue de simulations numériques pour un désordre de type speckle avec comme paramètres $V_R = -104\text{Hz}$ et $k_i = 0.59\sigma_{\perp}^{-1}$. Celle-ci fait apparaître le régime de temps courts pour lequel la décroissance est quadratique, suivi du régime de décroissance exponentielle. Les points bleus correspondent aux données, la ligne noire continue correspond à l'ajustement par une exponentielle, et la ligne pointillée rouge correspond à un ajustement donné par l'équation 6.15.

l'accord est remarquable sur toute une plage de données dans le régime de désordre faible, ce modèle ne permet pas d'étendre le domaine de validité de l'approche perturbative. Cette approche de désordre faible reste donc inadaptée à la description du régime de désordre fort, dont l'étude sera l'objet du chapitre suivant.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés sur la mesure du temps de diffusion élastique τ_s d'ondes de matière dans des potentiels de type speckle. Celui-ci a été étudié expérimentalement et numériquement dans une large gamme de paramètres, permettant de sonder les régimes de diffusion faible et de diffusion forte.

En particulier, la comparaison à la prédiction du régime perturbatif de Born nous a permis d'étudier quantitativement la position de la transition entre ces régimes, et de la comparer au critère de désordre faible communément utilisé $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$. Si ce critère est pertinent pour un désordre gaussien, celui-ci n'est pas adapté à la description des désordres de type speckle, témoignant ainsi de l'importance capitale des propriétés statistiques du potentiel.



7. Approche spectrale

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes concentrés sur la mesure du temps de diffusion élastique, que nous avons comparé à la théorie perturbative de Born. En particulier, nous avons montré que celle-ci fournit une prédiction quantitative du temps de diffusion élastique dans le régime de diffusion faible, mais que de fortes déviations apparaissent lorsque l'amplitude du désordre $|V_R|$ augmente et que l'impulsion initiale k_i diminue. La comparaison de nos données à la prédiction de Born nous a de plus permis d'étudier quantitativement la pertinence du critère $k_i l_s^{\text{Born}} \sim 1$ pour décrire la position de la transition entre les régimes de diffusion faible et de diffusion forte. Nous avons ainsi révélé la forte influence de la distribution du potentiel sur la position de cette transition [94].

Néanmoins, l'approximation de Born échoue naturellement à décrire le régime de diffusion forte. Dans ce chapitre, nous décrirons le comportement du temps de diffusion élastique dans le régime de désordre fort à l'aide des fonctions spectrales mentionnées au chapitre 2 et au formalisme de la fonction de Green. Nous pourrons ainsi présenter la diffusion d'une manière générale, sans se limiter à la décroissance exponentielle de l'état initial.

Plus particulièrement, nous estimerons les fonctions spectrales à l'aide du développement de Born et à l'aide d'une approche auto-consistante. Enfin, nous comparerons nos valeurs expérimentales du temps de diffusion élastique à des valeurs extraites de la mesure expérimentales des fonctions spectrales. L'étude présentée ici permet ainsi de relier les mesures réalisées dans le domaine temporel à celles réalisées dans le domaine des énergies, et a fait l'objet d'une publication dans la revue *New Journal of Physics* [111].

7.1 Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales

Dans un premier temps, nous allons présenter le lien entre le temps de diffusion élastique $\tau_s(V_R, \mathbf{k}_i)$ et la fonction spectrale $A(\mathbf{k}_i, E)$. Nous décrirons ensuite les approximations couramment utilisées pour la détermination de cette dernière, dont nous allons extraire un temps de vie τ_s^{sf} que nous confronterons à nos mesures.

7.1.1 Généralités sur la fonction spectrale

Le hamiltonien \hat{H} d'une particule quantique soumise à un potentiel peut être décomposé sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} , \quad (7.1)$$

avec \hat{H}_0 le hamiltonien non perturbé, dont nous supposons connaître les états propres, et \hat{V} le potentiel venant perturber la particule. Dans le cadre de la propagation d'ondes dans un milieu désordonné, nous pouvons identifier \hat{H}_0 à l'énergie cinétique $\hat{p}^2/2m$ dont les états propres correspondent aux ondes planes $\{|\mathbf{k}\rangle\}$ et \hat{V} au désordre ressenti par les atomes.

Fonction de Green

Un outil couramment utilisé pour décrire l'évolution de ce système quantique est la fonction de Green, qui correspond à la réponse impulsionnelle de l'équation de Schrödinger. La fonction de Green peut s'écrire

$$\hat{G}(E) = \frac{1}{E - \hat{H} + i0^+} \quad (7.2)$$

dans la base des énergies [2, 56]. En remplaçant le hamiltonien \hat{H} par son expression, on montre ainsi que la fonction de Green est solution de l'équation de Dyson

$$\hat{G}(E) = \hat{G}_0(E) + \hat{G}_0(E)\hat{V}\hat{G}(E) , \quad (7.3)$$

où $\hat{G}_0(E)$ est la *fonction de Green libre*, qui correspond à la fonction de Green en absence de désordre, régissant donc la dynamique des ondes planes $\{|\mathbf{k}\rangle\}$ états propres du hamiltonien non perturbé \hat{H}_0 . Exprimée dans la base des ondes planes où la fonction de Green libre est diagonale, celle-ci s'écrit

$$G_0(E, \mathbf{k}_i) = \langle \mathbf{k}_i | \hat{G}_0(E) | \mathbf{k}_i \rangle = \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}_i} + i0^+} , \quad (7.4)$$

avec $E_{\mathbf{k}_i}$ l'énergie cinétique de la particule.

À l'aide de l'équation de Dyson 7.3 et en identifiant les processus irréductibles¹, on peut montrer la fonction de Green moyenne se met sous la forme

$$\overline{G}(E, \mathbf{k}_i) = \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}_i} - \overline{V} - \Sigma(E, \mathbf{k}_i)} , \quad (7.5)$$

où $\overline{\dots}$ représente la moyenne sur les différentes réalisations du désordre [2, 56]. La quantité complexe $\Sigma(E, \mathbf{k}_i)$, la *Self-Energy*, est homogène à une énergie et encode l'effet des fluctuations du potentiel désordonné \hat{V} ². Si l'expression de la fonction de Green moyenne 7.5 est exacte, sa détermination reste ardue et demande l'utilisation d'approximations pour déterminer la self-energy, telles que l'expansion de Born [56, 63], l'approche auto-consistante de Born [113, 128], ou encore des approximations semi-classiques [92, 119].

1. Un processus irréductible correspond à un processus de diffusion qui ne peut pas se *factoriser* comme une succession d'événements élémentaires indépendants de diffusion. Cette notion prend tout son sens dans le cadre de l'approche diagrammatique à la détermination de la fonction de Green, au-delà de la portée de cette thèse.

2. Seules les fluctuations du potentiel sont contenues dans la self-energy telle qu'écrite ici puisque nous avons fait apparaître explicitement la valeur moyenne du potentiel.

La fonction spectrale

La fonction spectrale est définie à l'aide de la fonction de Green moyenne par

$$A(\mathbf{k}_i, E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\overline{G}(E, \mathbf{k}_i)] . \quad (7.6)$$

Le calcul des fonctions spectrales, essentielle à la bonne description de la dynamique de l'onde dans le désordre (voir section 2.3.1), repose donc directement sur la détermination de la fonction de Green moyenne.

Étant donné que la fonction de Green moyenne est entièrement déterminée par la self-energy, il est aussi possible d'exprimer la fonction spectrale à l'aide de la self-energy :

$$A(\mathbf{k}_i, E) = -\frac{1}{\pi} \frac{\text{Im}[\Sigma(E, \mathbf{k}_i)]}{(E - E_{\mathbf{k}_i} - \overline{V} - \text{Re}[\Sigma(E, \mathbf{k}_i)])^2 + \text{Im}[\Sigma(E, \mathbf{k}_i)]^2} . \quad (7.7)$$

Un intérêt particulier de cette expression est de fournir une idée intuitive de la forme de la fonction spectrale dans les différents régimes de diffusion, résumés figure 7.1.

En effet, il est possible de montrer que dans la limite des désordres très faibles, la self-energy varie très lentement autour de l'énergie cinétique $E_{\mathbf{k}_i}$ [56]. La forme de la fonction spectrale sera donc très proche d'une lorentzienne, dont le centre est déplacé par la valeur moyenne du potentiel et la partie réelle de la self-energy, et de largeur liée à la partie imaginaire de la self-energy³, comme illustré figure 7.1.a.

Il est aussi possible de deviner la forme de la fonction spectrale dans la limite de désordres très forts $|V_R| \gg E_\sigma$, c'est-à-dire dans la limite de désordres classiques. Dans ce régime, la fonction spectrale, qui est la probabilité qu'une particule d'impulsion \mathbf{k}_i ait une énergie E , converge vers la distribution du potentiel. En effet dans cette limite classique aussi notée $\hbar \rightarrow 0$, l'énergie de la particule est la somme de l'énergie cinétique $E_{\mathbf{k}_i}$ et de l'énergie potentielle V . La probabilité d'avoir une énergie E est donc simplement donnée par la probabilité d'avoir une énergie potentielle V , c'est-à-dire $\mathcal{P}(V)$. Dans cette limite, la fonction spectrale est donc donnée par [119]

$$A^{\text{cl}}(\mathbf{k}_i, E) \approx \mathcal{P}(E - E_{\mathbf{k}_i}) , \quad (7.8)$$

comme représenté dans le dernier cadre de la figure 7.1.

Lien entre la fonction spectrale et la décroissance de l'état initial

Il est possible de déterminer d'autres expressions de la fonction spectrale en revenant à la définition de la fonction de Green 7.2. Notamment, on peut montrer que

$$A(\mathbf{k}_i, E) = -\frac{1}{\pi} \overline{\langle \mathbf{k}_i | \text{Im} [\hat{G}(E)] | \mathbf{k}_i \rangle} = \overline{\langle \mathbf{k}_i | \delta(E - \hat{H}) | \mathbf{k}_i \rangle} , \quad (7.9)$$

en utilisant la relation $1/(x + i0^+) = \text{vp}(1/x) - i\pi\delta(x)$.

En utilisant la représentation exponentielle de la distribution de Dirac, on peut alors montrer que l'opérateur évolution moyen $\overline{U}_{\mathbf{k}_i}$ de l'état initial est simplement donné par la

3. Dans le cas d'une particule libre, la fonction spectrale est donnée par une distribution de Dirac centrée sur l'énergie cinétique $A(\mathbf{k}_i, E) = \delta(E - E_{\mathbf{k}_i})$. On retrouve la relation de dispersion d'une particule libre.

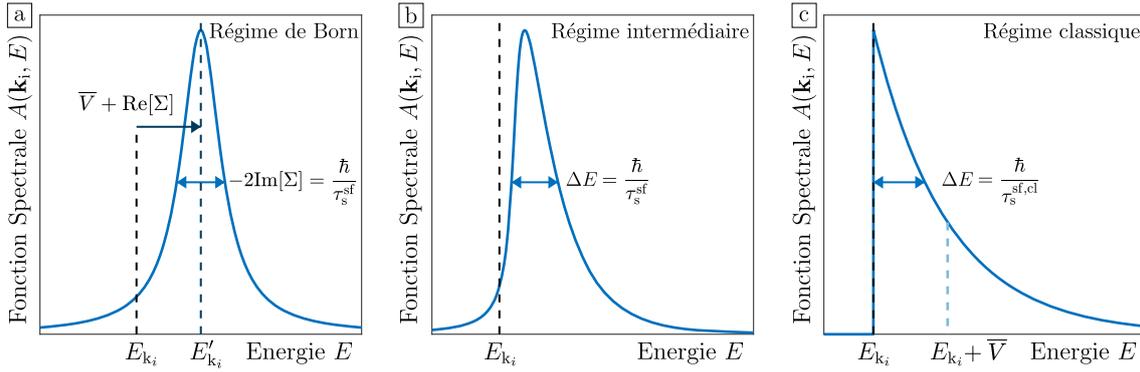


FIGURE 7.1 – Illustration du profil de la fonction spectrale dans les différents régimes de diffusion. **a** : Dans la limite d'un désordre faible, la self-energy est approximativement constante autour de l'énergie cinétique. La forme de la fonction spectrale est alors lorentzienne, dont la largeur est donnée par la partie imaginaire de la self-energy, inversement proportionnelle au temps de diffusion élastique τ_s^{sf} . **b** : Fonction spectrale dans le régime intermédiaire, pour lequel aucune prédiction générale n'existe. On peut néanmoins définir un temps de diffusion élastique effectif τ_s^{sf} à l'aide de la largeur de la fonction spectrale. **c** : Dans la limite classique d'un désordre très fort, la fonction spectrale converge vers la distribution de potentiel décalée de l'énergie cinétique initiale. Cette situation est illustrée ici pour un speckle répulsif.

transformée de Fourier de la fonction spectrale

$$\bar{U}_{\mathbf{k}_i}(t) = \langle \mathbf{k}_i | \overline{\exp(-it\hat{H}/\hbar)} | \mathbf{k}_i \rangle = \int dE e^{-iEt/\hbar} A(\mathbf{k}_i, E). \quad (7.10)$$

Un tel résultat n'a rien de surprenant. En effet, l'allumage brusque du désordre sur les atomes projette l'état initial sur les états d'énergie propre du désordre, dont la distribution d'énergie est donnée par la fonction spectrale en vertu de la formule 2.14. L'évolution temporelle de l'état initial est donc naturellement donnée par la transformée de Fourier de cette distribution d'énergie, c'est-à-dire la fonction spectrale.

Notons ici qu'il est ainsi possible d'expliquer l'origine du départ quadratique de la décroissance de l'état initial dans le régime classique. En effet, la distribution de potentiel étant exponentielle pour un désordre speckle (et gaussienne pour un désordre gaussien), la décroissance de l'état initial est lorentzienne (gaussienne pour un désordre gaussien). La dynamique à temps court dans le régime classique est donc caractérisée par un départ quadratique, de la forme $1 - V_R^2 t^2 / \hbar^2$ ⁴.

Dans la continuité de l'image physique selon laquelle le temps de diffusion élastique correspond au temps de vie de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ dans le désordre, il est possible de définir un temps caractéristique τ_s^{sf} basé sur la largeur de la distribution d'énergie. On définit ainsi $\Delta E = \hbar / \tau_s^{\text{sf}}$ avec ΔE la largeur totale à mi-hauteur de la fonction spectrale tel qu'illustré dans la figure 7.1.

4. Ce résultat est plus général que les cas étudiés ici. On peut montrer que dans le développement en série entière de l'opérateur évolution $\bar{U}_{\mathbf{k}_i}(t)$ dans le régime classique, les trois premiers termes sont entièrement déterminés par la limite classique de la fonction spectrale $A^{\text{cl}}(\mathbf{k}_i, E)$ [119]. Le comportement quadratique à temps court est donc valable quel que soit le désordre utilisé, et ne dépend que de la valeur rms de celui-ci.

7.1.2 Approximation de Born

Afin d'estimer quantitativement la self-energy, une méthode couramment utilisée consiste à décomposer cette dernière sous la forme d'une série

$$\hat{\Sigma}(E) = \hat{\Sigma}^{(1)}(E) + \hat{\Sigma}^{(2)}(E) + \dots, \quad (7.11)$$

connue sous le nom de développement de Born. La self-energy est alors donnée par une somme infinie de termes $\hat{\Sigma}^{(i)}$, où chaque terme est composé de $i + 1$ occurrences du potentiel \hat{V} [56]. Notamment, les premiers termes du développement de Born s'expriment $\hat{\Sigma}^{(1)}(E) = \hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}$ et $\hat{\Sigma}^{(2)}(E) = \hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}$.

Dans la limite de désordre faible, il apparaît de l'équation 7.11 que seul le premier terme $\hat{\Sigma}^{(1)}$ contribue à la self-energy, chaque occurrence supplémentaire du potentiel atténuant le poids du terme $\hat{\Sigma}^{(i)}$ correspondant. L'approximation de Born consiste donc à tronquer l'expression de la self-energy à son premier terme :

$$\Sigma(E, \mathbf{k}_i) \approx \Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i) = \left\langle \mathbf{k}_i \left| \overline{\hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}} \right| \mathbf{k}_i \right\rangle. \quad (7.12)$$

On montre dans l'annexe C que le premier terme du développement de Born $\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i)$ peut se réécrire comme la convolution du spectre des fréquences spatiales du désordre avec la fonction de Green libre 7.4 :

$$\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') G_0(E, \mathbf{k}') \quad (7.13)$$

On peut montrer que le premier terme du développement $\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i)$ varie peu autour de l'énergie cinétique, ce qui permet de remplacer la self-energy par sa valeur en couche $E = E_{\mathbf{k}_i}$ [56]. La fonction spectrale obtenue à l'aide de l'équation 7.7 présente alors un profil lorentzien :

$$A(\mathbf{k}_i, E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta E/2}{(E - E'_{\mathbf{k}_i})^2 + \Delta E^2/4}, \quad (7.14)$$

où la largeur totale à mi-hauteur ΔE s'exprime $\Delta E = -2\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i)]$ et le centre $E'_{\mathbf{k}_i} = E_{\mathbf{k}_i} + \bar{V} + \text{Re}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i)]$.

En vertu du lien entre la fonction spectrale et la décroissance de l'état initial, on extrait ainsi un temps de décroissance typique τ_s^{sf} :

$$\frac{\hbar}{\tau_s^{\text{sf}}} = -2\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i)] = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta(E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}_i}). \quad (7.15)$$

On retrouve ainsi le temps de vie de l'état initial prédit par la règle d'or de Fermi dans le cadre du couplage à un continuum, tracé en lignes tiretées dans la figure 7.2.

7.1.3 Approximation de Born : second ordre

La comparaison de nos données expérimentales à l'approximation de Born, issue du premier ordre du développement de Born, a été traitée dans la section 6.3 du chapitre précédent. En particulier, nous avons montré que le domaine de désordre faible et d'impulsion

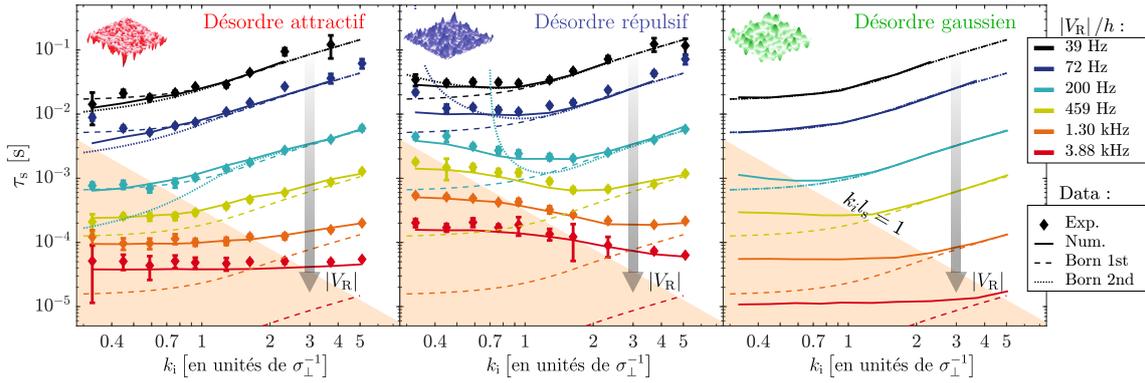


FIGURE 7.2 – **Données expérimentales et numériques du temps de diffusion élastique.** Les données expérimentales (points) et numériques (lignes continues) sont celles présentées dans le chapitre précédent, que nous avons complétées de simulations numériques pour un désordre gaussien. L’approximation de Born est tracée en lignes tiretées, et s’accorde sur un plus grand domaine de paramètres dans le cas d’un désordre gaussien que pour les désordres speckle. La zone orangée représente le domaine où $k_i l_s^{\text{Born}} < 1$. La correction de l’approximation de Born au second ordre est représentée en lignes pointillées pour les désordres les plus faibles, et montre un accord particulièrement bon pour les désordres d’amplitude $|V_R|/h = 39\text{ Hz}$. L’augmentation de l’amplitude du désordre mène néanmoins à de fortes déviations vis-à-vis de nos données.

importante permettait de décrire correctement nos données expérimentales et numériques. Cependant, des déviations à la prédiction de Born dépendantes de la distribution de potentiel apparaissent pour des impulsions faibles.

Afin de décrire le domaine d’impulsions et désordres faibles, nous pouvons étendre l’approximation de Born en calculant le terme de second ordre de la self-energy $\hat{\Sigma}^{(2)} = \hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}$, introduisant ainsi une correction $-2\text{Im}[\Sigma^{(2)}]$ à la largeur ΔE de la fonction spectrale. De fait, le second terme du développement de la self-energy étant lié à la fonction de corrélation à trois corps $C_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \overline{V(\mathbf{x}_1)V(\mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_3)}$ du désordre, celui-ci révèle l’effet de l’asymétrie de la distribution de potentiel. Notons qu’une telle correction n’existe pas pour un potentiel gaussien, dont la distribution est symétrique.

On montre dans l’annexe C que le second terme du développement de Born peut s’écrire sous une forme semblable à celle du premier terme $\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i)$:

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \tilde{C}_3(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}', \mathbf{k}_i - \mathbf{k}'') G_0(E, \mathbf{k}') G_0(E, \mathbf{k}'') , \quad (7.16)$$

que nous pouvons évaluer numériquement afin de déterminer la correction au temps de diffusion élastique au second ordre (voir l’annexe C pour les détails). Le temps de diffusion élastique ainsi obtenu est tracé en lignes pointillées pour les trois amplitudes de désordre les plus petites sur la figure 7.2.

Dans le cas d’un désordre de type speckle, les corrections sont de signe opposé selon que le désordre soit attractif ($V_R^3 < 0$) ou répulsif ($V_R^3 > 0$). Dans le cas d’un désordre attractif, les corrections $-2\text{Im}[\Sigma^{(2)}]$ sont positives, résultant en une diminution du temps de vie associé. Ces corrections du second ordre sont en excellent accord avec nos données dans le cas du désordre le plus faible $V_R/h = -39\text{ Hz}$. En revanche, l’augmentation de l’amplitude

du désordre mène à de fortes déviations, nécessitant la prise en compte d'ordres supérieurs dans la série 7.11.

Dans le cas d'un désordre répulsif, les corrections du second ordre sont négatives et entraînent l'augmentation de τ_s . De même que dans le cas attractif, l'accord est remarquable pour notre désordre le plus faible, d'amplitude $V_R/h = 39\text{Hz}$. Néanmoins, l'augmentation de l'amplitude du désordre rend rapidement la correction du second ordre de la self-energy comparable au premier ordre. Le temps de vie associé diverge alors, comme illustré sur la figure 7.2. Pour régulariser ce comportement, il est à nouveau nécessaire de tenir compte des ordres supérieurs.

L'extension de l'approximation de Born à la description du régime de désordre fort demande donc la prise en compte de nombreux ordres supplémentaires. Cependant, la série 7.11 est connue pour diverger [56]. Il en résulte que le développement en série de la self-energy ne permet d'étendre le régime de validité de l'approximation de Born qu'au domaine des impulsions faibles, et ne permet pas de décrire le régime de désordre fort.

7.1.4 Approximation de Born auto-consistante

Dans l'approche perturbative de Born, on peut considérer que le potentiel réalise un couplage de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ aux états libres $|\mathbf{k}'\rangle$ peu perturbés par le potentiel. On comprend aisément que cette considération échoue à décrire le régime de désordre fort, les états finaux $|\mathbf{k}'\rangle$ étant fortement affectés par le désordre.

Une approche communément utilisée pour décrire le régime de désordre fort consiste à considérer que le potentiel couple l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ aux états habillés par le désordre, on parle alors d'approximation de Born auto-consistante (*SCBA* pour l'anglais *Self-Consistent Born Approximation*). Pour tenir compte du temps de vie et des déplacements d'énergie de ces états habillés, on remplace la fonction de Green libre $G_0(E, \mathbf{k}_i)$ par la fonction de Green moyennée $\bar{G}(E, \mathbf{k}_i)$ dans l'expression du premier terme de la self-energy $\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k}_i)$. Le système d'équations de l'approximation auto-consistante de Born est donc

$$\Sigma_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') \bar{G}_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}') \quad (7.17)$$

$$\bar{G}_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}_i) = \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}_i} - \bar{V} - \Sigma_{\text{scba}}(E, \mathbf{k}_i)}, \quad (7.18)$$

dont la résolution se fait numériquement de manière itérative.

Il apparaît immédiatement dans le système d'équations 7.17 que l'approximation auto-consistante de Born ne peut pas prédire la forme exacte des fonctions spectrales. En effet, celle-ci ne tient compte que de la fonction de corrélation à deux points du désordre, sans tenir compte de la distribution de potentiel $\mathcal{P}(V)$ [86]. Cependant, nous allons voir que pour un désordre gaussien, celle-ci fournit une estimation convaincante de la largeur ΔE^{scba} de la fonction spectrale, et donne donc une bonne estimation du temps de diffusion élastique $\tau_s^{\text{scba}} = \hbar/\Delta E^{\text{scba}}$.

Nous avons ainsi résolu le système 7.17 par itérations numériques jusqu'à ce que la self-energy obtenue converge. La fonction spectrale extraite est tracée figure 7.3.a pour les paramètres $k_i = 0.93\sigma_{\perp}^{-1}$ et $|V_R|/h = \{39\text{Hz}, 458\text{Hz}, 3.88\text{kHz}\}$. Dans le cas de désordre

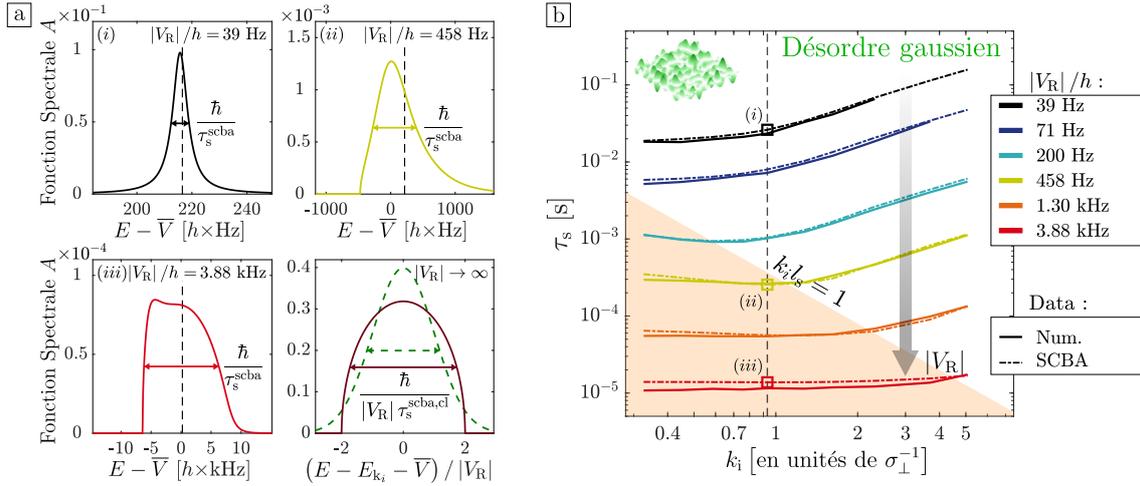


FIGURE 7.3 – **Comparaison du temps de diffusion élastique d’un désordre gaussien à l’approximation auto-consistante de Born.** **a** : Exemples de fonctions spectrales obtenues en résolvant les équations de l’approximation auto-consistante de Born. Pour un désordre faible, on retrouve la forme lorentzienne attendue par l’approximation de Born au premier ordre. L’augmentation de l’amplitude du désordre se manifeste par une déviation à la forme lorentzienne et un élargissement de la fonction spectrale. Les lignes tiretées verticales indiquent la position de l’énergie cinétique. Dans la limite classique, l’approximation auto-consistante de Born prédit la forme d’un demi-cercle, tandis que la forme attendue correspond à la distribution de potentiel $\mathcal{P}(V)$, de forme gaussienne pour un désordre gaussien. **b** : Comparaison de la prédiction de l’approximation auto-consistante de Born (lignes tiretées) à nos données numériques pour un désordre gaussien (lignes continues). L’approximation auto-consistante de Born présente un accord remarquable avec nos données sur l’ensemble des paramètres, y compris au delà de la limite $k_i l_s = 1$. On remarque tout de même l’apparition de déviations pour notre désordre le plus fort $|V_R|/h = 3.88 \text{ kHz}$.

faible (figure en haut à gauche), la fonction spectrale obtenue par l’approximation auto-consistante de Born reproduit la forme lorentzienne attendue par l’approximation de Born au premier ordre, avec $\hbar/\tau_s^{\text{scba}} = \hbar/\tau_s^{\text{Born}}$. L’augmentation de l’amplitude du désordre $|V_R|$ montre la déviation à la forme lorentzienne attendue pour un désordre faible, et témoigne de l’élargissement de la fonction spectrale (figure en haut à droite pour un désordre d’amplitude intermédiaire $|V_R| \sim E_\sigma$, et figure en bas à gauche pour un désordre fort $|V_R| \gg E_\sigma$).

Il est possible de déterminer analytiquement la limite asymptotique dans le régime classique $|V_R|/E_\sigma \rightarrow \infty$ de l’approximation auto-consistante de Born. Trappe et al. montrent ainsi que la fonction spectrale $A^{\text{scba,cl}}$ est décrite par un demi-cercle de rayon $2|V_R|$ [119] :

$$A^{\text{scba,cl}}(\mathbf{k}_i, E) = \frac{1}{2\pi V_R^2} \sqrt{4V_R^2 - (E - E_{k_i} - \bar{V})^2}, \quad (7.19)$$

indépendamment de la distribution de potentiel. Si la forme de la fonction spectrale est incorrecte dans cette limite, on peut tout de même estimer le temps de diffusion élastique, lié à la largeur de la fonction spectrale et donné par $\tau_s^{\text{scba,cl}} = \hbar/(2\sqrt{3}|V_R|)$.

La figure 7.3.b montre la comparaison entre nos données numériques du temps de diffusion élastique τ_s (lignes continues) et la prédiction de l’approximation auto-consistance

de Born τ_s^{scba} (lignes tiretées). Il apparaît alors que l'approximation auto-consistante de Born, communément utilisée en matière condensée, reproduit fidèlement nos données pour un désordre gaussien, lui aussi largement utilisé en matière condensée. L'accord est d'autant plus marquant que celui-ci s'étend au delà de la limite $k_i l_s = 1$, alors que l'approximation auto-consistante de Born ne permet pas de reproduire la forme gaussienne de la fonction spectrale dans le régime classique. Néanmoins, les largeurs à mi-hauteur des fonctions spectrales sont semblables, celles-ci ne différant que d'un facteur $\sqrt{3/(2\ln 2)} \approx 1.5$, expliquant les déviations obtenues pour le désordre le plus important de $|V_R|/h = 3.88 \text{ kHz}$.

7.2 Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales pour un speckle

Dans la section précédente, nous avons pu voir que l'extension de l'approximation de Born au deuxième ordre de la self-energy permet de décrire le régime d'impulsion faible pour des désordres faibles dans le cadre d'une théorie perturbative. Afin de décrire le régime de désordre fort, nous avons comparé la prédiction de l'approximation de auto-consistante de Born communément utilisée à nos données numériques pour un désordre gaussien, témoignant d'un bon accord sur l'ensemble de nos paramètres expérimentaux. Ces deux résultats indiquent donc que l'approche de la fonction spectrale est pertinente pour décrire la décroissance temporelle de l'état initial.

Dans cette section, nous allons décrire en quoi l'approximation auto-consistante de Born n'est pas suffisante pour décrire le régime classique dans le cas de désordres de type speckle. Nous expliquerons ensuite comment les fonctions spectrales de désordre speckle ont été mesurées expérimentalement, et nous tacherons de décrire leur comportement. Enfin, nous terminerons sur la comparaison entre les mesures du temps de diffusion élastique et le temps de vie que l'on peut extraire de la mesure des fonctions spectrales.

7.2.1 Limite de l'approche auto-consistante pour un désordre de type speckle

Si l'approximation auto-consistante de Born permet de décrire correctement l'ensemble de nos données pour un désordre gaussien, ce n'est pas le cas pour un désordre de type speckle. En effet, l'approche auto-consistante ne repose que sur la fonction de corrélation à deux corps du potentiel, et ne tient pas compte des fonctions de corrélation d'ordres supérieurs. De manière plus générale, un ingrédient essentiel manque à la description d'un désordre arbitraire : la distribution de potentiel.

L'approche auto-consistante de Born ne contenant que des puissances paires du potentiel [119], celle-ci ne peut pas décrire les asymétries du potentiel. L'approche auto-consistante ne peut donc pas prétendre à une meilleure description du régime de désordre faible que l'approximation de Born au second ordre pour des désordres speckle.

Comme nous le verrons plus en détails dans la section 7.2.3 et sur les figures 7.8 et 7.9, la SCBA fournit une meilleure prédiction du temps τ_s^{scba} que l'approximation de Born au premier ordre. Néanmoins, cette prédiction reste identique pour les speckles attractif et répulsif, en désaccord avec le comportement de nos données expérimentales, particulièrement dans le régime classique où de fortes déviations entre désordres attractif et répulsif apparaissent (voir la discussion des fonctions spectrales dans la section 7.2.2).

Cet effet montre clairement le manquement de la *SCBA* à décrire le régime classique pour lequel la distribution de potentiel est capitale. Il apparaît donc nécessaire d'analyser les détails de la fonction spectrale pour un désordre de type speckle.

7.2.2 Fonctions spectrales d'un désordre speckle

Nous avons pu voir au cours du chapitre 2 l'importance de la détermination précise des fonctions spectrales. Cette idée n'en a été que renforcée par l'étude détaillée du comportement du temps de diffusion élastique. Dans la perspective d'adresser spécifiquement les niveaux d'énergie du désordre, l'équipe a mis en place un chargement spectroscopique du désordre, permettant la détermination expérimentale des fonctions spectrales pour un désordre de type speckle. Ces mesures ont fait l'objet de la thèse de Vincent Denechaud, où de nombreux détails expérimentaux et théoriques pourront être retrouvés [25].

Mesure des fonctions spectrales

Le protocole de mesure des fonctions spectrales est schématisé sur la figure 7.4. Celui-ci combine de nombreuses astuces expérimentales que nous avons présentées dans les chapitres précédents, notamment l'approche de désordre dépendant de l'état interne (voir section 5.3.2), et l'utilisation d'un champ magnétique magique (voir section 4.2.1).

L'utilisation de l'approche de potentiel dépendant de l'état interne nécessite d'utiliser un sous-état Zeeman dans chacun des états hyperfins $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$. On note ainsi les états correspondants $|1\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|2\rangle = |F = 2, m_F = +1\rangle$, pour lesquels il existe un biais magnétique magique $B_0^* = 3.2\text{ G}$ où les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ possèdent la même susceptibilité magnétique. Le choix de ces états *d'horloge* permet donc d'affranchir la séparation en énergie de ces niveaux des fluctuations de champ magnétique en plus d'être lévités simultanément.

Le chargement du désordre à une énergie bien définie nécessite de coupler les états $|1\rangle$ $|2\rangle$ afin de pouvoir transférer les atomes initialement dans l'état libre vers l'état habillé par le désordre. Compte-tenu de la séparation entre ces états, le choix d'un transfert radio-fréquences est retenu, appuyé par l'excellent contrôle des fréquences qu'il est possible d'obtenir. En raison de la séparation en spin de $\Delta m_F = 2$, il s'agira donc d'une transition à deux photons.

La séquence commence par la création d'un condensat de Bose-Einstein très décomprimé d'environ 2×10^5 atomes de ^{87}Rb dans l'état $|1\rangle$. Le désordre est allumé brusquement à $t = 0$, et simultanément le transfert radio-fréquences a lieu pendant une durée t_0 . Le taux de transfert est ensuite mesuré en imageant par fluorescence sélectivement les atomes dans l'état $|2\rangle$

$$n_2(t_0) = n_1(0) \times \Gamma t_0 . \quad (7.20)$$

Les atomes transférés possèdent une énergie finale $E_f = E_i + \hbar\omega$, avec ω la pulsation de la radio-fréquence rayonnée. Il est possible d'assimiler l'état initial à une onde plane d'impulsion nulle $|\mathbf{k} = 0\rangle$ ⁵ dans la mesure où $\mu \ll V_R$, et son énergie E_i correspond alors à

5. On peut en effet négliger l'énergie cinétique de l'état initial en raison du recul négligeable des photons radio-fréquence absorbés. Une extension de ce protocole à une vitesse initiale donnée peut être réalisée à l'aide d'une transition Raman stimulée où l'angle entre deux faisceaux lasers permet un transfert d'impulsion.

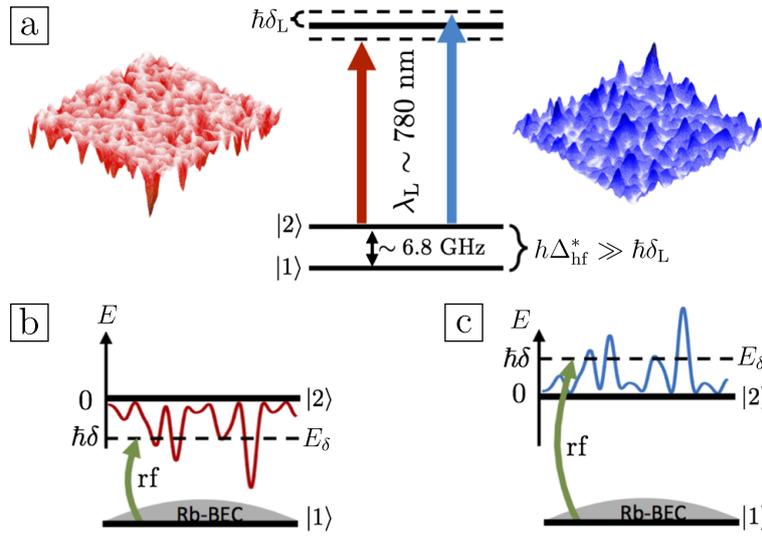


FIGURE 7.4 – **Illustration du protocole spectroscopique de mesure des fonctions spectrales.** **a** : Illustration du protocole de génération de speckle dépendant de l'état interne. Un laser quasi-résonant sur l'état $|2\rangle$ génère un potentiel attractif (pour $\delta_L < 0$) ou bien répulsif (pour $\delta_L > 0$). Ce potentiel est négligeable pour l'état $|1\rangle$ en raison du grand désaccord $2\pi\Delta_{\text{hf}}^* + \delta_L$ lié à la séparation hyperfine. **b et c** : Illustration du protocole de spectroscopie. L'état $|1\rangle$ libre est transféré vers l'état $|2\rangle$ habillé par le désordre à l'aide de radio-fréquences. Le choix d'un désaccord δ par rapport à la résonance $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ en absence de désordre permet d'adresser une énergie bien définie dans le désordre.

l'énergie interne $E_{|1\rangle}$. On montre alors que les atomes transférés dans le désordre possèdent une énergie externe $E = \hbar\delta$, où $\delta = \omega - 2\pi\Delta_{\text{hf}}^*$ correspond au désaccord par rapport à la résonance au biais magique en absence de désordre donnée par $\Delta_{\text{hf}}^* = E_{|2\rangle} - E_{|1\rangle} \approx 6.8\text{GHz}$, c'est-à-dire la différence d'énergie interne. Cette situation est schématisée dans la partie basse de la figure 7.4. Étant donné le temps fini de transfert radio-fréquence, l'énergie adressée dans le désordre possède une résolution $\Delta E \sim \hbar/t_0$ mesurée à l'aide d'un spectre de Rabi à deux photons en absence de désordre. Il a ainsi été montré que pour un temps de transfert de 100 ms, la résolution en énergie obtenue était d'environ $h \times 10\text{Hz}$, correspondant à la limite de Fourier⁶.

Correspondance entre fonction spectrale et taux de transfert

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment nous pouvons mesurer le taux de transfert des atomes dans le désordre à une énergie ciblée. Celui-ci est relié à la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$, que nous pouvons réécrire

$$A(\mathbf{k} = 0, E) = \overline{\langle \mathbf{k} = 0 | \delta(E - \hat{H}) | \mathbf{k} = 0 \rangle} \quad (7.21)$$

$$= \overline{\sum_{\alpha} |\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_{\alpha} \rangle|^2 \cdot \delta(E - E_{\alpha})} \quad (7.22)$$

en introduisant les états propres $|\psi_{\alpha}\rangle$ du désordre et d'énergie E_{α} . Les fluctuations du terme de recouvrement $|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_{\alpha} \rangle|^2$ disparaissent avec le moyennage sur les différentes

6. Nous avons récemment pu obtenir une résolution de $h \times 5\text{Hz}$ grâce à l'étude détaillée des champs magnétiques dans la chambre de science.

réalisations du désordre. On peut alors sortir sa valeur moyenne $\overline{|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_E \rangle|^2}$ à l'énergie E de la somme :

$$A(\mathbf{k} = 0, E) \approx \overline{|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_\alpha \rangle|^2} \cdot \overline{\sum_\alpha \delta(E - E_\alpha)} \quad (7.23)$$

$$\approx \overline{|\langle \mathbf{k} = 0 | \psi_E \rangle|^2} \cdot \overline{\rho(E)} . \quad (7.24)$$

La fonction spectrale apparaît alors comme correspondant au recouvrement moyen entre l'état initial et les états d'énergie E du désordre.

Cette dernière expression présente un intérêt expérimental particulier. En effet, on peut montrer à l'aide de la règle d'or de Fermi que

$$\Gamma(\delta) = 2\pi\hbar\Omega^2 \overline{|\langle \psi_\delta | \mathbf{k} = 0 \rangle|^2} \cdot \rho(\hbar\delta) \propto A(\mathbf{k} = 0, \hbar\delta) , \quad (7.25)$$

où $\Gamma(\delta)$ correspond au taux de transfert entre l'état initial du condensat de Bose-Einstein $|\mathbf{k} = 0\rangle$ et les états $|\psi_\delta\rangle$ d'énergie externe $E = \hbar\delta$ du désordre réalisé à l'aide d'un couplage de pulsation de Rabi Ω . La mesure de la fonction spectrale peut donc être faite en déterminant le taux de transfert d'une spectroscopie du désordre.

De nombreuses hypothèses sont nécessaires pour obtenir ce résultat, dont une discussion détaillée est donnée dans les références [25, 120]. Notamment, cette correspondance entre fonction spectrale et taux de transfert n'est valide que pour un couplage faible (Ω petit devant les autres échelles d'énergie) et des temps t courts tels que $\Gamma t \ll 1$. Une conséquence forte de ces contraintes est que seulement quelques pourcents des atomes sont transférés dans le désordre.

Résultats

L'ensemble des mesures des fonctions spectrales $A(\mathbf{k} = 0, E = \hbar\delta)$ est représenté figures 7.5 et 7.6 en points bleus. Sur ces mêmes figures sont tracées en rouge des simulations numériques réalisées par Michael Pasek et Dominique Delande du Laboratoire Kastler Brossel, dont les détails peuvent être retrouvés dans la référence [120]. Afin de comparer les données expérimentales et les simulations, l'amplitude du désordre expérimental est calibrée à l'aide de la fonction spectrale numérique pour $V_R/h = -121$ Hz, permettant de corriger la mesure photométrique de l'amplitude du désordre.

L'accord entre les données expérimentales et numériques est remarquable : les données expérimentales se superposent aux simulations sur l'ensemble des paramètres expérimentaux, sans paramètre ajustable. De plus, chaque point correspond à un unique cycle expérimental : il n'y a pas de moyennage sur les réalisations du désordre pour les données expérimentales. La validation de l'hypothèse ergodique repose notamment sur le fait que notre condensat de Bose-Einstein est très grand devant la taille des grains du désordre⁷, chaque atome ressentant une réalisation du désordre différente.

Il est possible de distinguer deux régimes dans les figures 7.5 et 7.6, régimes que nous avons brièvement présentés dans la section 6.1.3. La fonction spectrale possède une forme étroite dans le régime de désordre faible (régime de désordre quantique), tandis que celle-ci s'élargit fortement dans le régime de désordre fort (régime de désordre classique). Ces

7. Le rayon de Thomas-Fermi de notre condensat est d'environ $30\ \mu\text{m}$, bien plus grand que les tailles des grains de speckle $\sigma_\perp = 0.5\ \mu\text{m}$ et $\sigma_\parallel \approx 4.1\ \mu\text{m}$.

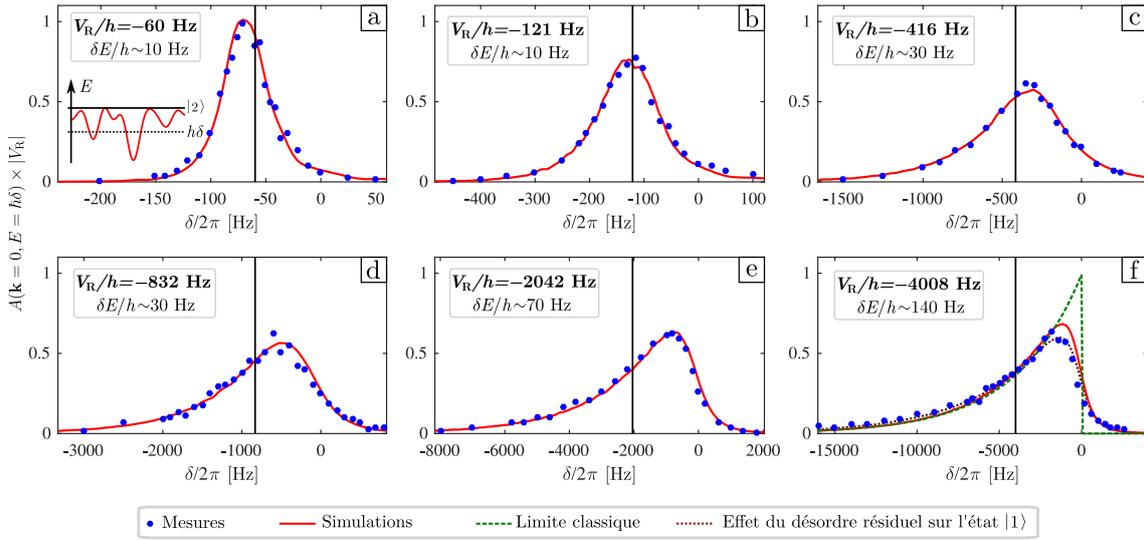


FIGURE 7.5 – Mesures des fonctions spectrales pour un désordre attractif. La fonction spectrale normalisée est tracée en fonction de $\delta/2\pi$, correspondant à l'énergie externe qu'ont les atomes transférés dans le désordre. Les points bleus correspondent aux données expérimentales, qui sont comparées à des simulations numériques tracées en lignes rouges. Dans le panneau de plus fort désordre, les données sont comparées à la limite classique donnée par la distribution de potentiel, tracée en vert. La prise en compte de l'effet du désordre résiduel sur l'état libre $|1\rangle$ est représentée par la courbe marron. Figure adaptée de [25].

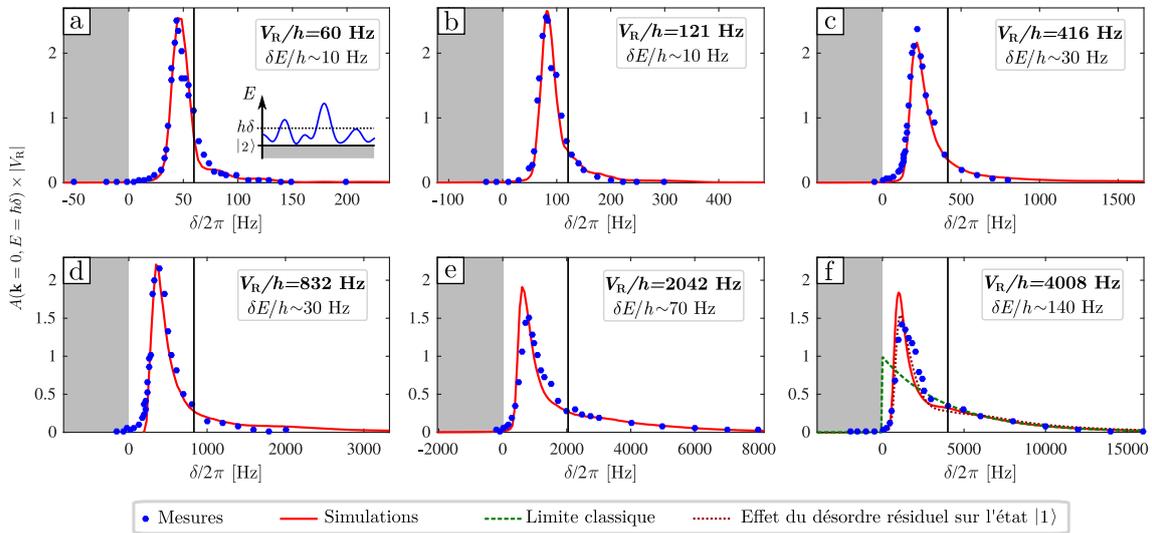


FIGURE 7.6 – Mesure des fonctions spectrales pour un désordre répulsif. La fonction spectrale normalisée est tracée en fonction de $\delta/2\pi$, correspondant à l'énergie externe qu'ont les atomes transférés dans le désordre. Les points bleus correspondent aux données expérimentales, qui sont comparées à des simulations numériques tracées en lignes rouges. Dans le panneau de plus fort désordre, les données sont comparées à la limite classique donnée par la distribution de potentiel, tracée en vert. La prise en compte de l'effet du désordre résiduel sur l'état libre $|1\rangle$ est représentée par la courbe marron. La zone grise correspond aux énergies qu'il est impossible de peupler étant donné que $V(\mathbf{x}) > 0$. Figure adaptée de [25].

régimes se distinguent en comparant l'amplitude du désordre à l'énergie de corrélation $E_\sigma \sim 440\text{Hz}$ ⁸.

Régime de désordre quantique

Le régime de désordre quantique est obtenu lorsque $|V_R| \ll E_\sigma$. Dans ce régime, l'amplitude du désordre est trop faible pour que celui-ci puisse supporter des états liés sur une taille typique des grains de speckle. Les atomes, dont l'énergie est de l'ordre de $|V_R|$, ont alors une longueur d'onde de de Broglie plus grande que les grains de speckle.

De fait, la fonction d'onde s'étale sur plusieurs granularités du potentiel et *lisse* le potentiel vu par la fonction d'onde par effet tunnel. On peut alors montrer que le potentiel effectif issu de ce lissage possède une amplitude $\sim V_R^2/E_\sigma$ assimilable à la largeur de la fonction spectrale, indépendante du caractère attractif ou répulsif du potentiel [11, 87]. Les fonctions spectrales des figures 7.5 et 7.6 mesurées pour les désordres les plus faibles présentent donc des similarités (pour $|V_R|/h = 60\text{Hz}$ et $|V_R|/h = 121\text{Hz}$).

Dans la continuité de la correspondance entre largeur de la fonction spectrale et temps de vie de l'état initial développée en début de chapitre, le temps de vie τ_s^{sf} se comporte selon $\hbar E_\sigma/V_R^2$, comme attendu dans le régime de désordre faible (voir section 6.1.3). La forme de la fonction spectrale serait alors de forme lorentzienne dans ce régime [56].

En réalité, la condition de désordre perturbatif $E_k \gg V_R^2/E_\sigma$ n'est pas validée. Au contraire, l'état initial étant assimilé à une onde plane d'impulsion nulle ($\mathbf{k} = 0$), l'énergie cinétique des atomes est quasi-nulle $E_k \sim 0$. Il s'agit donc d'un régime très non-perturbatif $E_k \ll V_R^2/E_\sigma$. La forme lorentzienne ne correspond donc pas forcément à celle attendue pour la fonction spectrale dans ce régime.

Régime de désordre classique

Dans le cas contraire d'une amplitude de désordre grande devant l'énergie de corrélation $|V_R| \gg E_\sigma$, les fonctions spectrales mesurées témoignent de profils spécifiques aux distributions de potentiels associées. Cet effet du régime de désordre classique est particulièrement marqué pour les amplitudes de désordre de $|V_R|/h = 4008\text{Hz}$, illustrées figure 7.7.

Les distributions des potentiels attractifs et répulsifs sont tracées en vert sur la figure 7.7 et représentent la limite vers laquelle les fonctions spectrales convergent pour $|V_R|/E_\sigma \rightarrow \infty$. On observe que cette convergence est atteinte pour la partie des hautes énergies de la fonction spectrale, aussi bien attractive que répulsive. Cependant, on peut observer un lissage de celle-ci pour les basses énergies $\delta \sim 0$ d'un désordre attractif en comparaison à la discontinuité attendue par la distribution de potentiel. De même, la zone de basse énergie d'un potentiel répulsif témoigne de déviations significatives à la prédiction de la distribution de potentiel. Les fonctions spectrales témoignent donc de deux comportements selon l'énergie adressée.

Étant donné que l'amplitude du désordre est grande devant l'énergie de corrélation, la longueur d'onde de de Broglie des atomes à haute énergie est petite devant la taille

8. Étant donné que l'état couplé au désordre est assimilé à l'onde plane ($\mathbf{k} = 0$), il est nécessaire de tenir compte de la longueur de corrélation longitudinale des grains de speckle.

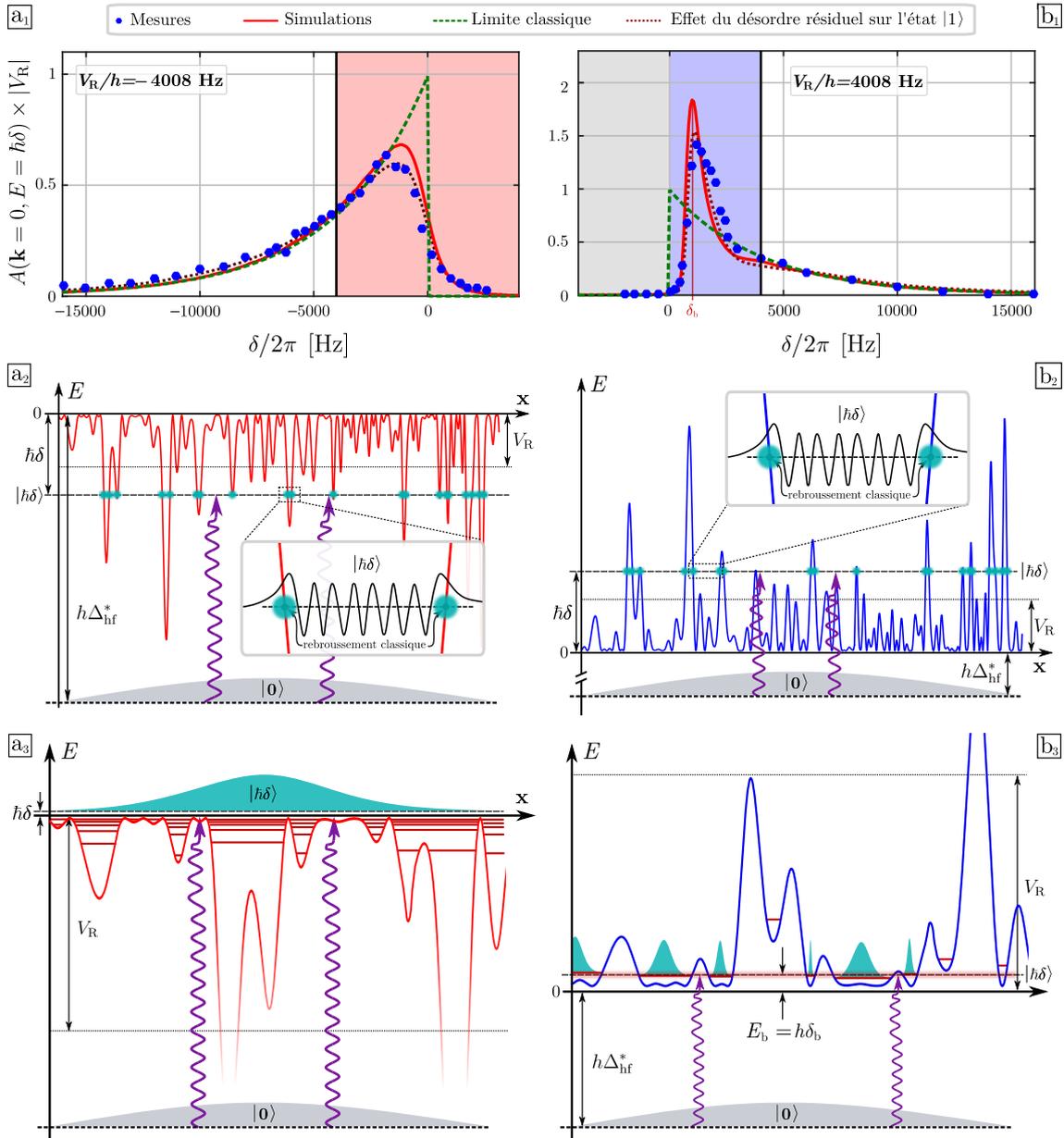


FIGURE 7.7 – **Fonctions spectrales dans le régime classique.** Dans le régime classique, la forme des fonctions spectrales dépend fortement de la distribution de potentiel. Ces spectres convergent vers la distribution de potentiel pour les hautes énergies, mais montrent un comportement très différent spécifique à la distribution de potentiel pour les basses énergies (zones colorées). La partie grisée correspond au domaines des énergies inaccessibles dans le cas d'un désordre répulsif (**a₁** et **b₁**). Dans la partie de haute énergie, seules les zones de potentiel vérifiant la condition de résonance $V(\mathbf{x}) = \hbar\delta$ sont adressées. La spectroscopie sonde ainsi la distribution de potentiel (**a₂** et **b₂**). Dans la zone de basse énergie pour un potentiel attractif, la fonction d'onde des états $|\hbar\delta\rangle$ s'étale sur plusieurs fluctuations de potentiel, engendrant un lissage analogue au régime de désordre quantique (**a₃**). La discontinuité de la distribution de potentiel en devient adoucie (**a₁**). La zone de basse énergie d'un speckle répulsif sonde l'accumulation des minima locaux de potentiel à $V = 0$ (**b₃**). Ceux-ci supportent un premier état lié d'énergie typique $E_b = \sqrt{V_R E_\sigma}$, traduit par un pic étroit du spectre (**b₁**).

des grains de speckle, et l'onde peut être piégée classiquement. Les fonctions d'onde piégées exhibent des oscillations spatiales courtes, dont le recouvrement avec l'état initial $|\mathbf{k} = 0\rangle$ est très mauvais, excepté pour les points de rebroussement classique qui satisfont la condition de résonance $V(\mathbf{x}) = \hbar\delta$ ⁹. Le transfert radio-fréquence sonde donc la distribution de potentiel, comme illustré sur la ligne du milieu de la figure 7.7.

Néanmoins, cette considération ne permet pas décrire les parties de basse énergie des fonctions spectrales, qui montrent des déviations à la prédiction classique. En particulier, celles-ci ne se comportent pas de manière identique à basse énergie, révélant une influence forte supplémentaire de la distribution de potentiel sur la nature des états de basse énergie.

Dans le cas d'un speckle attractif $V_R < 0$ il est possible d'approximer le profil du potentiel proche de 0 comme étant composé d'oscillateurs harmoniques inversés, donc expulsants. Les fonctions d'onde couplées s'étalent ainsi sur plusieurs grains du potentiel, il en résulte ainsi un lissage du potentiel aux alentours du potentiel nul, de manière analogue au régime de désordre quantique comme illustrée sur la figure 7.7 (figure en bas à gauche). La discontinuité de la distribution de potentiel pour le potentiel nul s'en retrouve donc régularisée sur un domaine d'énergie dont la largeur peut être estimée à l'aide des fréquences des oscillateurs harmoniques inversés [92].

La fonction spectrale d'un speckle répulsif est beaucoup plus spectaculaire. En plus d'être nulle pour les énergies négatives, elle exhibe un pic étroit à basse énergie. L'origine de cette résonance provient de l'accumulation de minimas de potentiel pour $V = 0$, supportant des états liés d'énergie similaire[92]. En particulier, il est possible de décrire ces minimas locaux comme un oscillateur harmonique de la taille typique d'un grain de speckle et de profondeur V_R (voir figure 7.7, en bas à droite). L'énergie de l'état fondamental de ces oscillateurs harmoniques est alors donnée par

$$E_b = \sqrt{V_R E_\sigma} , \quad (7.26)$$

pour laquelle un grand nombre d'états participent. L'accumulation de ces états autour de la même énergie se traduit donc par un pic de résonance dans la fonction spectrale.

Les fonctions spectrales des désordres de type speckle présentent donc des spécificités importantes, pouvant se manifester sous la forme d'une structure bimodale qu'il convient de déterminer précisément pour étudier l'effet du désordre sur l'état initial.

Les spectres tracés sur la figure 7.7 permettent de plus d'illustrer la limite de l'approche de potentiel dépendant de l'état interne. Comme discuté dans la section 5.3.2, les désordres utilisés ne doivent pas avoir une amplitude trop élevée afin de conserver un caractère sélectif en spin. En effet, l'approche de désordre dépendant de l'état interne n'est valide que lorsque le potentiel résiduel sur l'état $|1\rangle$ peut être négligé devant le potentiel chimique, le potentiel étant écranté par des modulation de densité du condensat. Dans le cas des spectres à $|V_R|/\hbar = 4008\text{Hz}$, le potentiel résiduel est de l'ordre du potentiel chimique μ et commence à perturber l'état initial. Cet effet a pu être modélisé numériquement, et est tracé sur la figure 7.7 en lignes marron. Cette correction permet de reproduire remarquablement les données expérimentales.

9. Ce principe est connu sous le nom de *principe de Franck-Condon*.

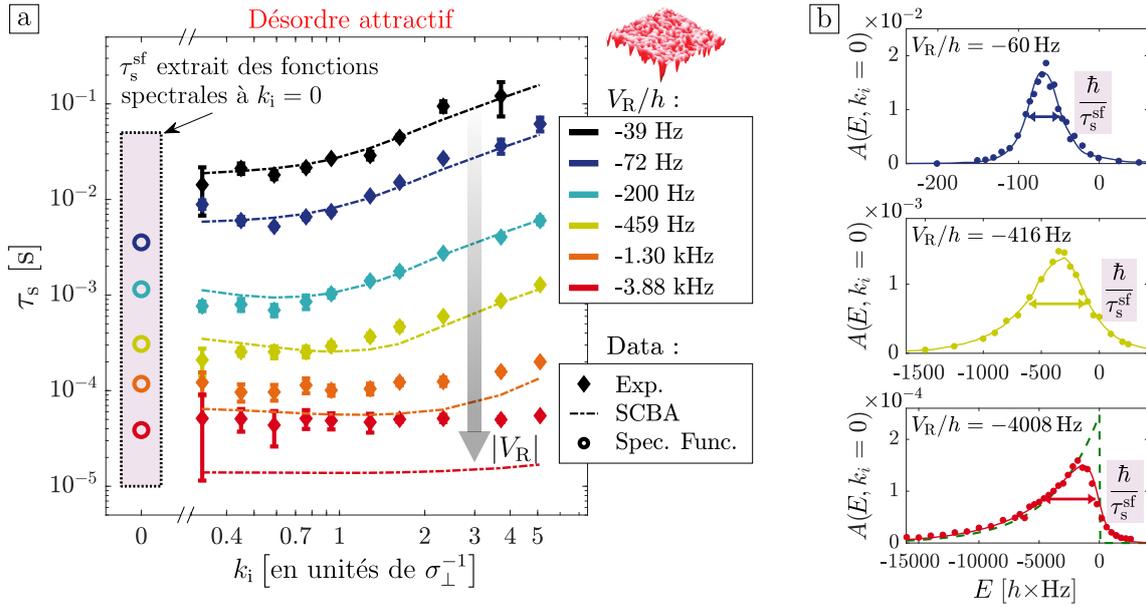


FIGURE 7.8 – **Comparaison des fonctions spectrales mesurées au temps de diffusion élastique pour un speckle attractif.** **a** : Le temps de diffusion élastique est comparé à la prédiction de l’approximation auto-consistante de Born. Cette dernière est proche des données expérimentales dans le régime de désordre faible, mais ne permet pas de décrire le régime de désordre fort. La SCBA échoue de plus à décrire les asymétries du potentiel. Néanmoins, cette dernière fournit une meilleure prédiction que celle issue de l’approximation de Born au premier ordre. Les temps de vie τ_s^{sf} extraits des fonctions spectrales mesurées pour $|\mathbf{k} = 0\rangle$ sont compatibles avec les mesures de τ_s de basse impulsion ($k_i = 0.33\sigma_{\perp}^{-1}$). **b** : Illustration de l’extraction du temps de vie τ_s^{sf} . Le temps de vie est extrait en déterminant la largeur à mi-hauteur d’une fonction d’ajustement des données expérimentales. Ces données sont celles de la figure 7.5.

7.2.3 Comparaison du temps de diffusion élastique avec les fonctions spectrales mesurées

Comme nous l’avons vu précédemment, il est possible de donner une estimation du temps de vie de l’état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ dans le désordre à l’aide de la largeur à mi-hauteur de la fonction spectrale. Nous pouvons alors extraire un temps τ_s^{sf} des fonctions spectrales mesurées $A(\mathbf{k} = 0, E)$ mesurées pour différentes amplitudes de désordre V_R .

Dans le cas d’un désordre attractif, la largeur à mi-hauteur de la fonction spectrale mesurée est obtenue à l’aide d’un ajustement des données expérimentales par la convolution d’une lorentzienne avec une fonction exponentielle 5.31, qui permet de reproduire fidèlement la forme de fonctions spectrales pour toutes les amplitudes de désordre. La largeur à mi-hauteur ΔE est ensuite extraite à l’aide d’un algorithme, permettant de déterminer un temps de vie $\tau_s^{\text{sf}} = \hbar/\Delta E$ pour chaque amplitude de désordre considérée. Le temps de vie pour n’importe quelle amplitude de désordre est ensuite obtenue par interpolation.

Les valeurs de τ_s^{sf} sont donc déterminées pour les amplitudes de désordres considérées dans le chapitre 6. Celles-ci sont tracées aux côtés des mesures de τ_s dans la figure 7.8 et montrent un bon accord avec les mesures à impulsion faible, notamment dans le domaine de désordre fort. Cet accord entre données temporelles et données dans le domaine des

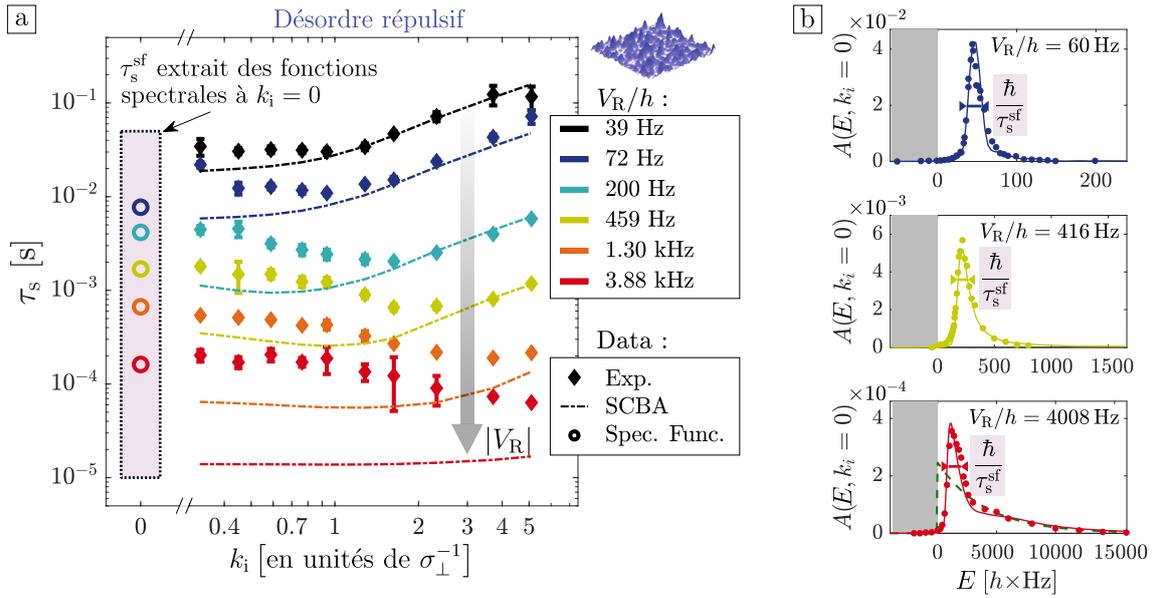


FIGURE 7.9 – **Comparaion des fonctions spectrales mesurées au temps de diffusion élastique pour un speckle répulsif.** **a** : Les données expérimentales du temps de diffusion élastique sont comparées à la prédiction de l’approximation auto-consistante de Born. Celle-ci ne permet de rendre compte que du régime de désordre faible, et de grande impulsion, et échoue encore à décrire les asymétries du potentiel. La prédiction de la SCBA reste néanmoins meilleure que l’approximation de Born au premier ordre. Les temps de vie τ_s^{sf} estimés à partir du pic de résonance des fonctions spectrales mesurées sont tout à fait compatibles avec les mesures du temps de diffusion élastique à faible impulsion. **b** : Illustration de l’extraction du temps de vie τ_s^{sf} . Le temps de vie est extrait en déterminant la largeur à mi-hauteur d’une fonction d’ajustement bimodale des données expérimentales. Plus particulièrement, le temps de vie est extrait de la largeur à mi-hauteur de la structure étroite associée à la résonance des premiers états liés du désordre. Ces données sont celles de la figure 7.6.

énergies indique que nos mesures de τ_s sont entièrement compatibles avec le profil des fonctions spectrales pour un désordre speckle attractif.

Comme nous avons vu dans la section précédente, un désordre speckle répulsif présente un comportement pathologique en raison de la présence d’une résonance sur les premiers états liés du désordre. Cette pathologie se manifeste sous la forme d’un pic de résonance dans la fonction spectrale. On s’attend alors à ce que l’évolution temporelle de l’état initial présente deux échelles de temps différentes en raison de la double structure de la fonction spectrale. Un premier temps court est associé à la structure large de la distribution de potentiel, tandis qu’un second temps, plus long, est dû à la structure étroite de la résonance à basse énergie. Expérimentalement, nous n’avons pu dissocier le premier temps court.

Comme précédemment, le temps de vie estimé de l’état initial est obtenu en déterminant la largeur de la fonction spectrale mesurée expérimentalement par un ajustement. Afin de tenir compte de la double structure, la fonction heuristique d’ajustement est donnée par la somme de la convolution d’une lorentzienne et d’une exponentielle 5.31, comme précédemment, et d’une gaussienne étroite pour décrire le pic de résonance. On reproduit ainsi la forme des fonctions spectrales mesurées de manière fidèle. Le temps de vie τ_s^{sf}

est extrait de la largeur à mi-hauteur de cette gaussienne, et une interpolation permet de l'estimer pour différentes amplitudes de désordre.

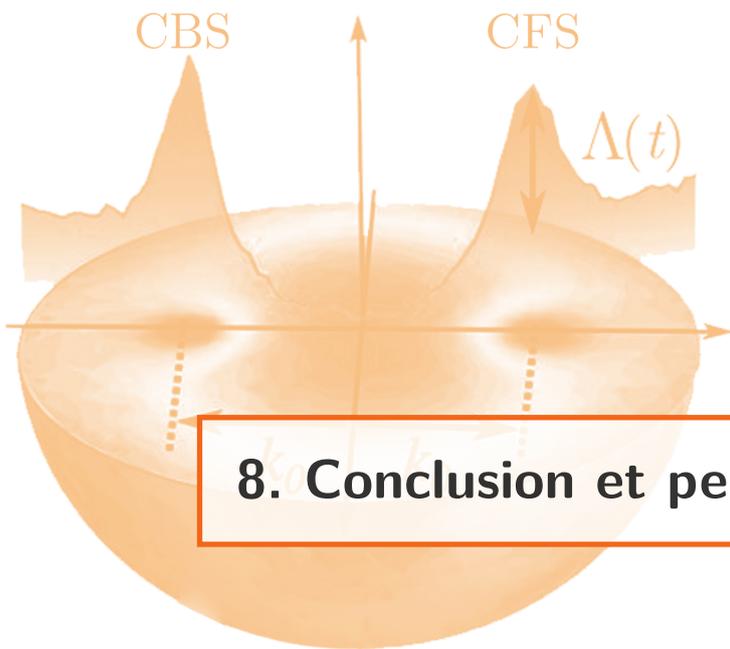
Ces mesures de τ_s^{sf} sont confrontées aux mesures de τ_s sur la figure 7.9 et témoignent d'un très bon accord avec les données à basse impulsion, particulièrement dans le régime classique. De même que pour un speckle attractif, cette comparaison entre données temporelles et données spectrales montre qu'il est capital de connaître précisément les détails de la fonction spectrale pour étudier la dynamique de l'état initial.

7.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur la description du temps de diffusion élastique dans le régime de désordre fort à l'aide du concept général des fonctions spectrales. En particulier, nous avons démontré la cohérence de nos deux approches :

- L'approche temporelle qui consiste à suivre l'évolution temporelle du l'état initial afin de déterminer un temps caractéristique τ_s .
- L'approche spectrale décrivant la distribution d'énergie de l'état initial plongé dans le désordre, de laquelle il est possible d'extraire un temps de vie caractéristique τ_s^{sf} .

Cette étude heuristique, reposant sur l'identification d'un temps caractéristique, illustre donc notre très bonne connaissance des propriétés de diffusion élémentaire en vertu de l'accord entre nos données expérimentales, basées sur des protocoles de mesures indépendants. Cette étude constitue alors un premier vers l'étude des propriétés de transport.



8. Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit, nous avons rapporté la mesure expérimentale du temps de diffusion élastique faisant suite aux travaux de Jérémie Richard [93], dont nous avons étudié le comportement sur une large gamme de paramètres, sondant les régimes de diffusion faible et de diffusion forte. En complétant notre étude basée sur des potentiels speckle par la simulation d'un potentiel gaussien, nous avons pu examiner quantitativement la pertinence du critère $k_i l_s \sim 1$ de validité de l'approximation de Born. Nous avons ainsi montré la forte influence de la distribution du potentiel sur la position de la transition entre les régimes de diffusion faible et de diffusion forte.

Dans le but de décrire le comportement du temps de diffusion élastique dans le régime de désordre fort, nous avons utilisé le formalisme des fonctions spectrales pour estimer un temps de vie caractéristique τ_s^{sf} . En comparant le temps de diffusion élastique au temps caractéristique extrait des fonctions spectrales mesurées $A(\mathbf{k} = 0, E = \hbar\delta)$, nous avons montré que la connaissance fine des détails de la fonction spectrale est capitale pour décrire correctement la dynamique du système. L'excellent accord entre nos différentes données expérimentales illustre donc la cohérence de nos deux approches, temporelle et dans le domaine des énergies.

Ces études ont montré le cruel besoin de prédictions quantitatives de la fonction spectrale pour la compréhension de phénomènes de transport plus complexes, tels que la localisation d'Anderson. Plus particulièrement, les désaccords observés entre les différentes expériences, les simulations et les théories s'attachant à décrire la transition de phase d'Anderson à trois dimensions trouvent leur origine dans la difficulté à déterminer expérimentalement et numériquement la distribution d'énergie de l'onde dans le désordre [87].

8.1 Vers l'étude du régime critique

L'étude spectroscopique du régime critique de la transition d'Anderson apparaît naturellement comme prochaine étape expérimentale de l'équipe. En effet, on peut aisément imaginer le protocole de mesure du régime critique comme une extension de la spectroscopie

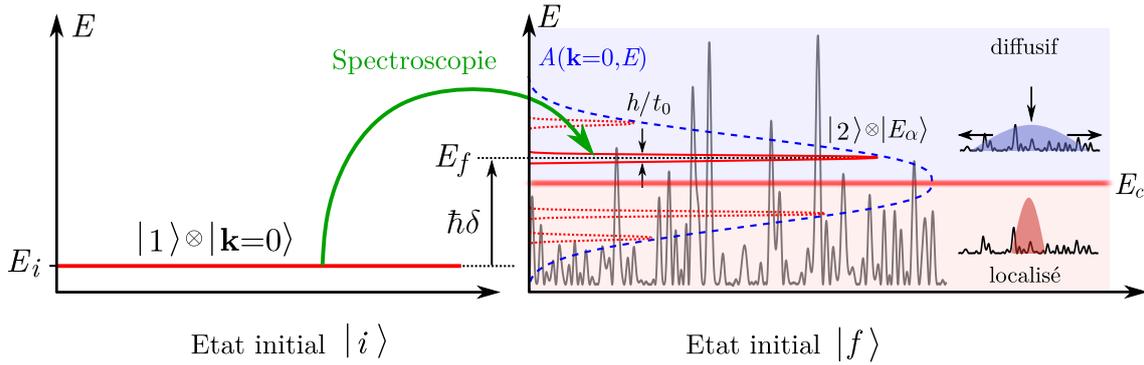


FIGURE 8.1 – **Étude spectroscopique de la transition d’Anderson.** Une approche spectroscopique de la transition d’Anderson se décomposerait selon deux étapes. Une première étape de chargement du désordre consisterait à transférer une partie du nuage à une énergie $\hbar\delta$ dans le désordre à l’aide d’un couplage radio-fréquence. La résolution en énergie alors obtenue serait limitée par le temps de couplage t_0 , donnant $\Delta E \sim h/t_0$. La seconde étape permettrait de caractériser l’énergie adressée en terme de localisation ou de diffusion en procédant à l’expansion de la partie transférée du nuage.

radio-fréquence représentée figure 8.1 :

- Une première étape consiste à charger le désordre dans un état d’énergie bien définie à l’aide d’un transfert spectroscopique. Les atomes sont ainsi transférés dans le désordre à une énergie $\hbar\delta$ fixée par le désaccord de la transition de à deux-photons, avec une résolution d’énergie ΔE limitée par le temps de couplage.
- Une seconde étape d’expansion de la partie transférée du nuage. En suivant l’évolution temporelle du nuage dans le désordre, il est possible de caractériser l’énergie $\hbar\delta$ adressée en terme de localisation ou de diffusion à l’aide d’un arrêt de l’expansion ou de saturation de la densité centrale [10, 47].

Cette mesure du régime critique n’a pas pu être réalisée lors de la mesure des fonctions spectrales en raison de deux limitations expérimentales. Une première limitation provient du temps de vie très limité des atomes en présence de désordre en raison du faible désaccord nécessaire à l’approche de désordre dépendant de l’état interne. Le temps de vie ainsi obtenu est de plusieurs ordres de grandeur inférieur aux temps nécessaires pour pouvoir qualifier un état comme localisé. Une nouvelle approche de désordre bichromatique détaillée au chapitre 5 devrait ainsi dépasser cette limitation en permettant de s’éloigner de la résonance atomique tout en conservant le caractère sélectif en état de spin.

Une seconde limitation provient de l’utilisation du bas champ magnétique *magique* B_0^* , empêchant de procéder à des expansions dans le désordre pour des durées de l’ordre de la seconde. La calibration fine du potentiel magnétique présentée au chapitre 4 nous permettra de décompresser le piégeage magnétique tout en conservant la résolution d’énergie obtenue par spectroscopie.

Ces deux limitations ont ainsi fait l’objet d’investigations expérimentales poussées suite à nos travaux autour de la chambre de science au cours de ma thèse. Ceux-ci ont d’ailleurs permis d’obtenir de meilleurs condensats grâce à l’amélioration de notre évaporation optique, ainsi qu’un meilleur contrôle des champs magnétiques. Suite à ces travaux, l’équipe a récemment pu obtenir une résolution en énergie de $\Delta E/h \sim 5\text{Hz}$ pour une durée de

transfert de $t_0 = 200$ ms, améliorée d'un facteur 2 par rapport à la résolution obtenue lors de la mesure des fonctions spectrales tout en restant limitée par transformée de Fourier.

8.2 Signatures de la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions

Comme nous avons pu voir dans le chapitre 6, l'évolution temporelle de la fonction d'onde dans l'espace des impulsions révèle de nombreuses quantités microscopiques de la propagation d'onde en milieu désordonné, telles que le temps de diffusion élastique [94], le temps de transport donné par l'isotropisation de la distribution de vitesses [91], mais aussi des signatures d'effets de localisation [20].

8.2.1 Rétro-diffusion cohérente

Le pic de rétro-diffusion cohérente (*CBS* pour l'anglais *Coherent BackScattering*) est une signature d'effets de localisation faible dans l'espace des vitesses. Celui-ci résulte d'interférences constructives dans la direction $|\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i\rangle$ entre chemins de diffusions symétriques par renversement du temps lorsqu'une onde plane initiale $|\mathbf{k}_i\rangle$ est plongée dans un milieu désordonné (voire figure 8.2a₁). Le CBS a pu être observé à l'aide d'un protocole similaire à celui utilisé pour étudier le temps de diffusion élastique [48] sous la forme d'un pic émergent de l'anneau de diffusion élastique dans la direction $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$ (voir figure 8.2a₂), et la manipulation de la symétrie par renversement du temps a mis en évidence le caractère cohérent de celui-ci [77].

Dans de récents travaux, l'équipe de Dominique Delande a montré que l'évolution temporelle de la largeur du pic CBS pouvait être une signature de la localisation d'Anderson [35]. En particulier, ils ont montré que

$$k_i \Delta\theta_{\text{CBS}}(t) \sim \begin{cases} 1/\sqrt{D(E)t} & \text{pour } E > E_c, \\ 1/t^{1/3} & \text{pour } E = E_c, \\ 1/\xi(E) & \text{pour } E < E_c, \end{cases} \quad (8.1)$$

que l'on peut aisément interpréter à l'aide de l'évolution temporelle de la taille du paquet d'onde dans l'espace réel $\Delta x \sim (k_i \Delta\theta_{\text{CBS}})^{-1}$.

Cependant, l'observation de tels effets de localisation forte sur la dynamique du CBS nécessite une résolution dans l'espace des impulsions Δk_{res} d'environ un ordre de grandeur inférieure à la résolution expérimentale actuelle. L'observation de cette signature serait un véritable tour de force expérimental.

8.2.2 Diffusion cohérente vers l'avant

Il est possible d'interpréter les états localisés comme des états liés au désordre. Pour ces états $|\psi\rangle$, l'impulsion moyenne est nulle, ce qui se traduit par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk k |\psi(k)|^2 = 0. \quad (8.2)$$

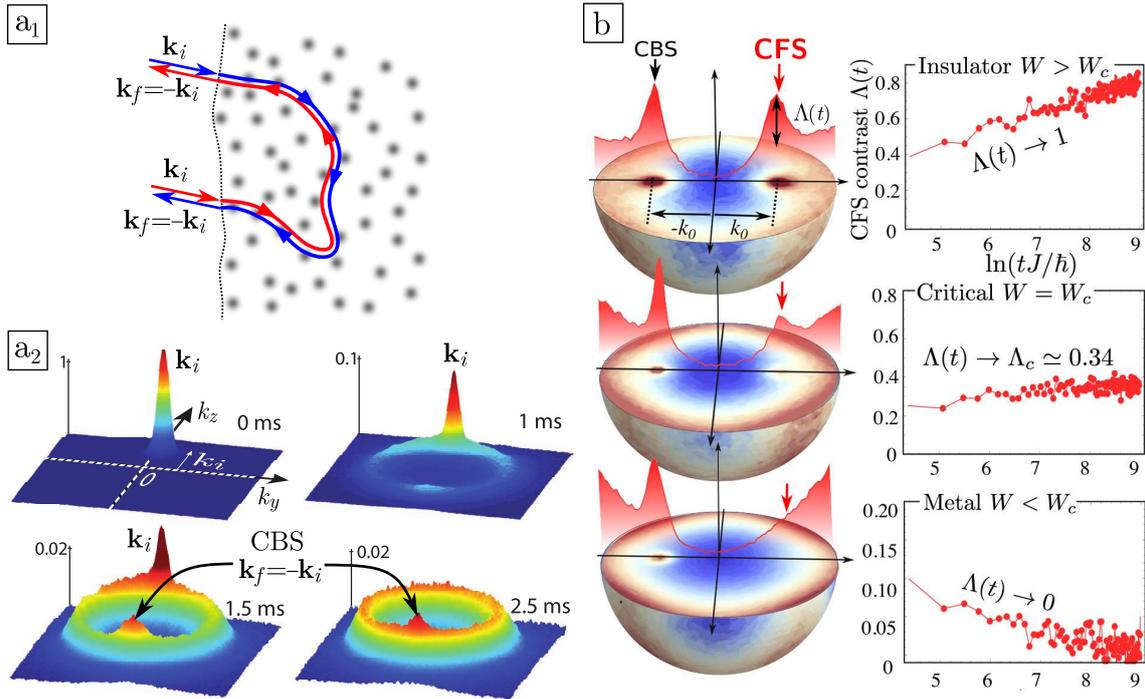


FIGURE 8.2 – **Signatures dans l'espace des vitesses.** **a₁** et **a₂** : Rétro-diffusion cohérente. Les effets de localisation faible conduisent à des interférences constructives dans la direction de rétro-diffusion, qui se manifeste sous la forme d'un pic émergent de l'anneau de diffusion élastique dans la direction opposée à la direction initiale. **b** : Diffusion cohérente vers l'avant. Dans le régime de localisation d'Anderson, la symétrie de la distribution d'impulsion se manifeste par l'apparition d'un pic de diffusion cohérente vers l'avant aux temps longs. Il a été montré que le contraste de ce pic pouvait être considéré comme un paramètre d'ordre de la transition d'Anderson. Dans le régime diffusif, ce pic n'est pas visible et son contraste est nul. Dans le régime localisé, le contraste de ce pic tend vers 1, par symétrie avec le CBS. Dans le régime critique, il a été montré que le contraste du CFS tend vers une valeur intermédiaire de 0.34.

Cette condition peut se réécrire

$$|\psi(k)|^2 = |\psi(-k)|^2, \quad (8.3)$$

montrant que la distribution d'impulsion de ces états est symétrique. Cette symétrie est notamment décrite par l'apparition d'un pic de diffusion cohérente vers l'avant $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i$, découvert récemment par Karpiuk et al. [49] à l'aide de simulations numériques. Ce pic n'existant que pour des états localisés, il s'agit d'une signature dans l'espace des impulsions de la localisation d'Anderson.

L'évolution temporelle de la distribution d'impulsion dans le désordre peut alors se décomposer selon trois étapes :

- L'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ décroît avec un temps caractéristique τ_s et est déplété vers les autres états d'impulsion $|\mathbf{k}'\rangle$ avec $k = k_i$.
- Après de multiples diffusions, la distribution d'impulsion devient isotrope sur une durée typique τ_B et le pic CBS émerge de la distribution isotrope.
- Aux temps longs, la localisation d'Anderson se manifeste dans l'espace des impulsions

sous la forme du pic de diffusion cohérente vers l'avant.

Il a depuis été montré que le contraste Λ de ce pic de diffusion cohérente vers l'avant (*CFS* pour l'anglais *Coherent Forward Scattering*) pouvait être utilisé comme paramètre d'ordre de la transition d'Anderson [36]. En effet, il a été montré que

$$\Lambda(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{pour } E > E_c , \\ \Lambda_c \approx 0.34 & \text{pour } E = E_c , \\ 1 & \text{pour } E < E_c , \end{cases} \quad (8.4)$$

illustré figure 8.2b.

L'observation expérimentale du pic de diffusion cohérente vers l'avant consiste un formidable défi expérimental et n'a pas encore été réalisée, excepté dans les systèmes de *kicked rotor* pour lesquels l'analogie est observé dans l'espace des positions [40]. Son observation en dimensions réduites nécessite une amélioration de la résolution d'impulsion Δk_{res} , tandis que son observation en trois dimensions nécessite de plus une reconstruction tridimensionnelle de la fonction d'onde, avec une tomographie optique par exemple [15].

8.3 Générer un désordre sur mesure

Au cours de ce manuscrit, nous nous sommes attachés à démontrer l'importance capitale de la distribution de potentiel sur les propriétés de transport. Si l'amplitude du désordre $|V_R|$ est aisément contrôlable sur notre expérience, la distribution de potentiel reste déterminée par l'équation 5.31. L'implémentation d'un modulateur spatial de lumière en remplacement du diffuseur, ou d'une matrice de micro-miroirs, permet de générer un désordre entièrement déterminé. Celui-ci permet non seulement de modifier les corrélations spatiales du désordre, mais aussi sa distribution [8]. Une telle implémentation ouvre de nombreuses applications expérimentales, parmi lesquelles figurent un test de l'universalité de la transition d'Anderson et l'étude la transition entre localisation d'Anderson et percolation classique.

Plus particulièrement, l'utilisation d'un modulateur spatial de lumière nous permettrait d'étudier expérimentalement la théorie de *Landscape*, récemment développée par Marcel Filoche et Svitlana Mayboroda [32]. Dans le cadre de leur théorie, les phénomènes de localisation faible et de localisation d'Anderson sont la manifestation d'un seul mécanisme universel encodé par la fonction de landscape u , solution de l'équation¹

$$(-\Delta + V)u = 1 . \quad (8.5)$$

Les auteurs ont ainsi montré que la fonction d'onde d'un mode est fortement atténuée le long des minimas de la fonction de landscape, séparant l'espace en sous-régions délimitées par un réseau de vallées de la fonction de landscape (voir figure 8.3, milieu). Finalement, les auteurs ont remarqué que ce réseau de vallées reproduisait les domaines dans lesquels les modes propres du système étaient localisés (voir figure 8.3, droite). Ils interprètent ainsi le phénomène de localisation comme de la percolation dans un potentiel caché $W = 1/u$.

La théorie de landscape prédit ainsi les régions de localisation et les énergies propres associées avec une précision remarquable. De plus, cette théorie ouvre la voie au *problème*

1. Avec ces unités, l'équation de Schrödinger s'écrit $(-\Delta + V)\psi = E\psi$.

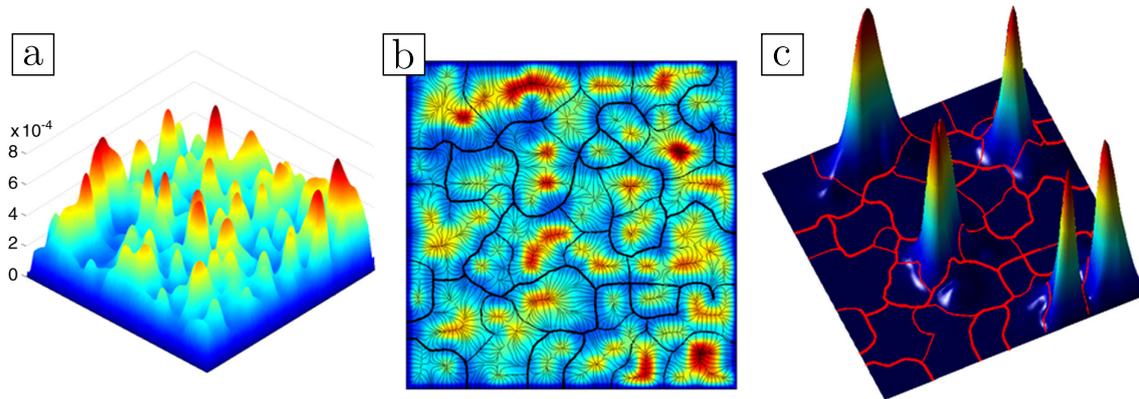


FIGURE 8.3 – **Illustration de la théorie de Landscape.** **a** : Fonction de landscape pour une réalisation du désordre calculée par l'équation 8.5. **b** : Représentation de la même fonction de landscape avec son réseau de vallées pour une énergie donnée. Ce réseau de vallées délimite des sous-régions entre lesquelles la fonction d'onde est fortement atténuée. **c** : Représentation du réseau de vallées où sont superposés les premiers modes propres du système. Les vallées semblent définir les sous-régions qui supportent les modes propres associés.

inverse, c'est-à-dire créer un désordre afin d'obtenir des propriétés souhaitées de localisation. Le développement récent de cette théorie suscite une très grosse activité de recherche dans le monde, dont la mise en place d'une collaboration entre les auteurs et notre équipe dans le cadre du projet *SIMONS* afin de reproduire les fonctions spectrales mesurées à l'aide de la théorie de landscape.

A. Traitement des images expérimentales

A.1 Détermination du profil de densité intégrée

Les images expérimentales obtenues correspondent à des profils de densité bidimensionnels $n_{2D}(y, z)$ intégrés suivant l'axe d'imagerie \vec{x} :

$$n_{2D}(y, z) = \int dx n(x, y, z) . \quad (\text{A.1})$$

Afin de faciliter le traitement des images expérimentales, on détermine un profil unidimensionnel à l'aide d'une intégration suivant une seconde direction. On obtient ainsi :

$$n_{1D}(z) = \int dy n_{2D}(y, z) , \quad (\text{A.2})$$

profil sur lequel nous effectuons nos opérations de détermination des grandeurs thermodynamiques à l'aide d'ajustements.

A.1.1 Analyse d'un nuage thermique

Dans le cas de nuages thermiques, les distributions d'impulsion et densité sont connues pour être de forme gaussienne. Les profils unidimensionnels expérimentaux sont alors ajustés par des fonctions gaussiennes, dont nous tirons trois informations : l'amplitude, la largeur et le centre.

Il est alors possible de déterminer le nombre d'atomes N , donné par l'intégration du profil ajusté :

$$N = \int dz n_{1D}(z) , \quad (\text{A.3})$$

ainsi que la taille σ_z du nuage et la position du centre de masse suivant l'axe \vec{z} . Les autres grandeurs thermodynamiques sont déduites des précédentes à l'aide d'informations supplémentaires telles que le temps de vol et les fréquences de piégeage.

A.1.2 Analyse d'un nuage partiellement condensé

Le profil de densité d'un nuage partiellement condensé est caractérisé par une structure bimodale, composée d'une structure gaussienne thermique de laquelle émerge un profil parabolique de Thomas-Fermi 3.10, comme illustré figure 3.12.

La procédure d'ajustement se décompose selon quatre étapes :

- Un premier ajustement gaussien est réalisé sur l'ensemble du profil pour en déterminer la position et une largeur.
- À l'aide de l'ajustement précédent, la partie centrale du profil expérimental est ignorée et les ailes sont ajustées par une gaussienne thermique.
- La partie condensée du centre du profil, obtenue en soustrayant la partie thermique déterminée à l'étape précédente, est ajustée par une parabole inversée.
- Les profils obtenus précédemment sont utilisés comme paramètres initiaux d'un ajustement du profil complet par la fonction d'ajustement bimodale.

Les paramètres thermodynamiques sont ensuite déduits des largeurs et amplitudes des composantes thermique et condensée de manière similaire au nuage thermique.

A.2 Estimation de la température

A.2.1 Mesure de la température par temps de vol

De manière générale, la température du gaz est estimée à l'aide d'une imagerie par *temps de vol*. Son principe repose sur l'expansion libre du nuage après extinction du piège, expansion dont l'origine provient de la distribution des vitesses des atomes. Dans le cas d'un nuage thermique, la température est donnée par la largeur de la distribution des vitesses du gaz, qui est directement donnée par la taille du nuage après un temps d'expansion suffisamment long.

La taille d'un nuage thermique évolue suivant la direction \vec{i} selon

$$\sigma_i^2(t) = \sigma_{i,0}^2 + t^2 k_B T / m, \quad (\text{A.4})$$

avec T la température du nuage, m la masse des atomes, t le temps d'expansion après extinction du piège, et $\sigma_{i,0} = \sigma_i(t=0)$ la taille initiale du nuage piégé. Notons que cette expression n'est valable que dans le cas d'un nuage dilué, pour lequel les interactions peuvent être négligées.

Pour des temps d'expansion t suffisamment grands, tels que le déplacement des atomes durant la phase d'expansion soit très grand devant la taille initiale du nuage, il est ainsi possible de négliger cette dernière. La taille mesurée du nuage donne alors directement accès à sa température.

A.2.2 Estimation de la température d'un nuage lévité

Cependant, pour des nuages particulièrement froids, les temps d'expansion requis pour estimer correctement la température du nuage peuvent dépasser le temps d'observation

possible des atomes alors en mouvement de chute libre. L'utilisation de la lévitation magnétique pendant cette phase d'expansion permet de dépasser cette limite en compensant la gravité, permettant aux atomes de rester plus longtemps dans la zone d'imagerie. Néanmoins, comme nous l'avons détaillé dans la section 4.2.4, l'utilisation de la lévitation magnétique conduit à un piégeage résiduel de l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ dans lequel nous préparons notre condensat de Bose-Einstein.

L'estimation correcte de la température du nuage levité repose alors sur deux contraintes que le temps d'expansion du nuage doit satisfaire :

- Celui-ci doit être suffisamment grand pour pouvoir négliger la taille initiale du nuage devant celle mesurée.
- Le temps d'expansion doit être suffisamment petit devant la période d'oscillation de la taille du nuage, liée au piégeage de la lévitation magnétique. De cette manière, l'expansion peut être considérée balistique.

Dans la configuration à bas champ de la lévitation magnétique, proche du biais magique $B_0^* = 3.2\text{G}$, les fréquences de piégeage sont particulièrement grandes et il n'est pas possible de satisfaire ces deux contraintes simultanément.

La méthode retenue par l'équipe pour obtenir une mesure correcte de la température du nuage repose sur la technique de *focalisation atomique*. Celle-ci permet d'imager dans l'espace réel la distribution de vitesses à l'aide d'un potentiel harmonique, à l'instar d'une lentille en optique [78]. Pour illustrer ces propos, considérons un ensemble d'atomes dont la distribution initiale des positions est de largeur $\Delta x_{i,0}$ dans la direction \vec{i} et la distribution de vitesses est de largeur $\Delta v_{i,0} = \hbar \Delta k_{i,0} / m$. Sous l'effet du potentiel harmonique, l'évolution temporelle de la largeur de la distribution de positions est donnée par

$$\Delta x_i^2(t) = \Delta x_{i,0}^2 \cos^2(\omega_i t) + \frac{\hbar^2 \Delta k_{i,0}^2}{m^2 \omega_i^2} \sin^2(\omega_i t), \quad (\text{A.5})$$

tel qu'illustré schématiquement figure A.1.

En coupant le potentiel harmonique après un quart d'oscillation à $t = T_{\text{osc}}/4$ avec $T_{\text{osc}} = 2\pi/\omega_i$ la période d'oscillation, la distribution de positions des atomes a une largeur donnée par

$$\Delta x_i(T_{\text{osc}}/4) = \left| \frac{\hbar \Delta k_{i,0}}{m \omega_i} \right|, \quad (\text{A.6})$$

qui ne dépend que de la distribution initiale d'impulsion des atomes. À l'aide de la distribution thermique des vitesses, on déduit finalement que la température s'exprime

$$T = \frac{m \omega_i^2 \Delta x_i^2(T_{\text{osc}}/4)}{k_B}. \quad (\text{A.7})$$

Cette mesure de la température est donc indépendante de la taille initiale du nuage, contrairement à la mesure par temps de vol qui nécessite une longue expansion pour s'affranchir de l'influence de la taille initiale. Une seconde différence entre ces méthodes réside dans le fait que le temps d'expansion par focalisation atomique n'est plus ajustable, celui-ci étant fixé par la fréquence du piégeage harmonique de la lévitation magnétique.

De plus, notons que dans la configuration de faible champ magnétique choisie, le piégeage vertical est négligeable devant celui des directions horizontales. En considérant

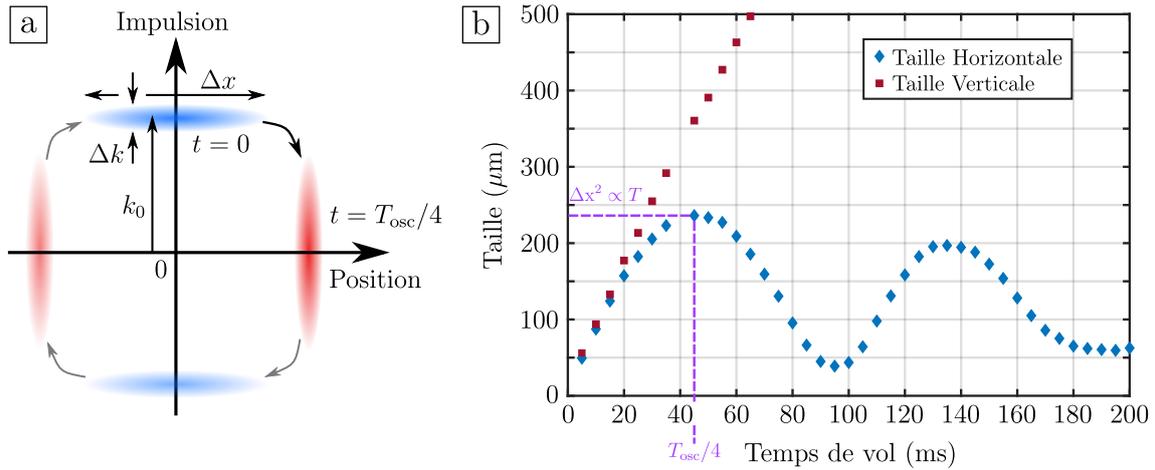
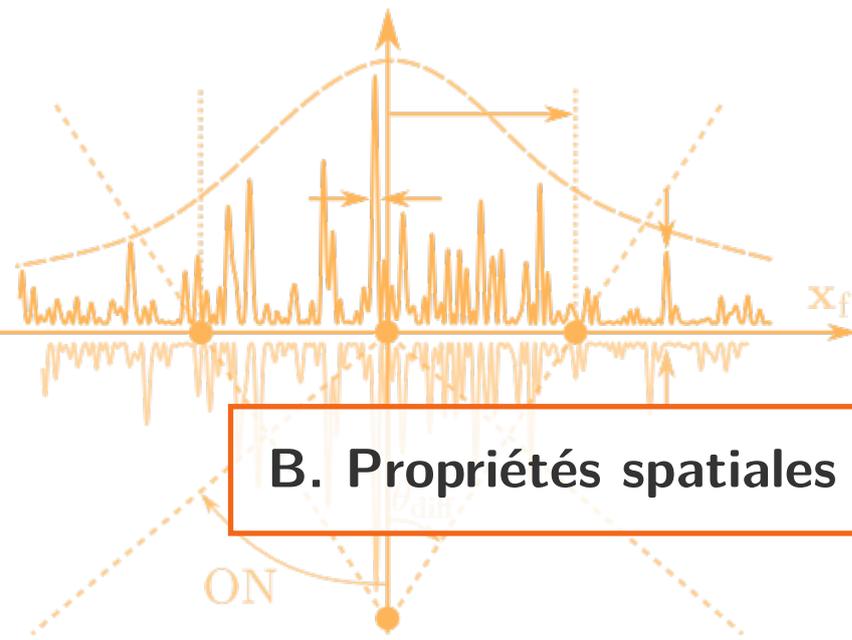


FIGURE A.1 – **a : Principe de la focalisation atomique.** L'évolution temporelle d'un nuage dans l'espace des phases est une rotation autour de l'origine. À $t = T_{\text{osc}}/4$, la distribution du nuage dans l'espace des phases a subi une rotation de $-\pi/2$. On peut ainsi mesurer la distribution initiale d'impulsion par une mesure de densité atomique dans l'espace réel. **b : Évolution temporelle de la taille du nuage dans la champ de lévitation.** Le piégeage étant quasi-nul dans la direction verticale, le nuage s'étend de manière balistique (points bordeaux). Dans la direction horizontale, le nuage subit l'effet de piégeage harmonique de la lévitation magnétique et sa taille oscille à une fréquence correspondant au double de la fréquence de piégeage (points bleus). Pour un temps de vol d'environ 45 ms, le nuage atteint sa taille maximale représentative de la distribution initiale d'impulsion. Cette valeur est en accord avec la fréquence de piégeage estimée à environ 5 Hz. On remarque de plus que l'expansion du nuage est isotrope à temps court. La température du nuage, estimée suivant les deux directions, est ici d'environ 620 nK.

que l'expansion du nuage est balistique suivant la direction verticale, l'estimation de la température obtenue par temps de vol est en accord avec les valeurs extraites par focalisation atomique suivant les deux directions horizontales, comme illustré figure A.1.b.



Annexe

B. Propriétés spatiales du speckle

B.1 Application du théorème de Wick à un speckle

Le théorème de Wick est un théorème particulièrement utile lors de l'étude des corrélations d'un champ de speckle, celui-ci permettant de relier les fonctions de corrélation en intensité aux fonctions de corrélation en amplitude lorsque l'amplitude constitue une variable aléatoire complexe, gaussienne et centrée.

L'amplitude des fluctuations d'intensité est la grandeur caractérisant l'amplitude d'un désordre speckle, et ces dernières sont définies par $\delta I = I - \bar{I}$, où $\overline{\dots}$ représente la valeur moyenne statistique.

B.1.1 Fonction de corrélation à deux corps des fluctuations d'intensité

Par vœu de concision, notons $I_1 = I(\mathbf{x}, \lambda)$ l'intensité d'un speckle à la longueur d'onde λ et au point $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Notons également $I_2 = I(\mathbf{x}', \lambda')$.

La fonction de corrélation des fluctuations d'intensité est alors :

$$\overline{\delta I_1 \delta I_2} = \overline{(I_1 - \bar{I}_1)(I_2 - \bar{I}_2)} \quad (\text{B.1})$$

$$= \overline{I_1 I_2 - I_1 \bar{I}_2 - \bar{I}_1 I_2 + \bar{I}_1 \bar{I}_2} \quad (\text{B.2})$$

$$= \bar{I}_1 \bar{I}_2 - \bar{I}_1 \bar{I}_2 . \quad (\text{B.3})$$

Appliquons alors le théorème de Wick au terme $\bar{I}_1 \bar{I}_2$ en faisant apparaître l'amplitude du champ :

$$\bar{I}_1 \bar{I}_2 = \overline{E_1 E_1^* E_2 E_2^*} \quad (\text{B.4})$$

$$= \overline{E_1 E_1^* E_2 E_2^*} + \overline{E_1 E_2^* E_2 E_1^*} \quad (\text{B.5})$$

$$= \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \left| \overline{E_1 E_2^*} \right|^2 . \quad (\text{B.6})$$

On détermine alors que la fonction de corrélation à deux corps des fluctuations d'intensité s'écrit sous la forme :

$$\overline{\delta I_1 \delta I_2} = \left| \overline{E_1 E_2^*} \right|^2 . \quad (\text{B.7})$$

B.1.2 Fonction de corrélation à trois corps des fluctuations d'intensité

Reprenons les notations précédentes et notons de plus $I_3 = I(\mathbf{x}'', \lambda'')$. La fonction de corrélation à trois corps des fluctuations d'intensité s'écrit :

$$\overline{\delta I_1 \delta I_2 \delta I_3} = \overline{(I_1 - \overline{I_1})(I_2 - \overline{I_2})(I_3 - \overline{I_3})} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} &= \overline{I_1 I_2 I_3} - \overline{I_1} \overline{I_2} \overline{I_3} + \overline{I_1 I_2} \overline{I_3} + \overline{I_1 I_2 I_3} + \overline{I_1} \overline{I_2} \overline{I_3} \\ &- \overline{I_1 I_2} \overline{I_3} - \overline{I_2 I_3} \overline{I_1} - \overline{I_3 I_1} \overline{I_2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$= \overline{I_1 I_2 I_3} + 2 \overline{I_1} \overline{I_2} \overline{I_3} - \overline{I_1 I_2} \overline{I_3} - \overline{I_2 I_3} \overline{I_1} - \overline{I_3 I_1} \overline{I_2} . \quad (\text{B.10})$$

De même que dans la section précédente, appliquons le théorème de Wick au premier terme $\overline{I_1 I_2 I_3}$ de l'équation précédente :

$$\overline{I_1 I_2 I_3} = \overline{E_1 E_1^* E_2 E_2^* E_3 E_3^*} \quad (\text{B.11})$$

$$= \overline{E_1 E_1^* E_2 E_2^* E_3 E_3^*} + \overline{E_1 E_2^* E_2 E_3^* E_3 E_1^*} + \overline{E_1 E_3^* E_2 E_1^* E_3 E_2^*} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} &+ \overline{E_1 E_1^* E_2 E_3^* E_3 E_2^*} + \overline{E_1 E_3^* E_2 E_2^* E_3 E_1^*} + \overline{E_1 E_2^* E_2 E_1^* E_3 E_3^*} \\ &= \overline{I_1} \overline{I_2} \overline{I_3} + \overline{I_1} \left| \overline{E_2 E_3^*} \right|^2 + \overline{I_2} \left| \overline{E_3 E_1^*} \right|^2 + \overline{I_3} \left| \overline{E_1 E_2^*} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$+ 2 \text{Re} \left[\overline{E_1 E_2^* E_2 E_3^* E_3 E_1^*} \right] .$$

La fonction de corrélation des fluctuations d'intensité se simplifie alors en :

$$\overline{\delta I_1 \delta I_2 \delta I_3} = 3 \overline{I_1} \overline{I_2} \overline{I_3} + 2 \text{Re} \left[\overline{E_1 E_2^* E_2 E_3^* E_3 E_1^*} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} &+ \overline{I_1} \left(\left| \overline{E_2 E_3^*} \right|^2 - \overline{I_2} \overline{I_3} \right) + \overline{I_2} \left(\left| \overline{E_3 E_1^*} \right|^2 - \overline{I_1} \overline{I_3} \right) + \overline{I_3} \left(\left| \overline{E_1 E_2^*} \right|^2 - \overline{I_1} \overline{I_2} \right) \\ &= 2 \text{Re} \left[\overline{E_1 E_2^* E_2 E_3^* E_3 E_1^*} \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

en appliquant le théorème de Wick à la fonction de corrélation à deux corps de l'intensité.

B.2 Fonction de corrélation du diffuseur

On s'attache ici à donner l'expression de la fonction de corrélation du diffuseur et à introduire les différents paramètres nécessaires. La géométrie du diffuseur est détaillée dans la section 5.1.2.

La phase localement accumulée par l'onde laser s'écrit :

$$\phi(\mathbf{x}_0) = 2\pi(n-1) \frac{e(\mathbf{x}_0)}{\lambda} , \quad (\text{B.16})$$

où les points $\mathbf{x}_0 = \{x_0, y_0, z = 0\}$ sont dans le plan du diffuseur. $e(\mathbf{x}_0)$ correspond à l'épaisseur localement traversée, λ est la longueur d'onde du laser et n l'indice du verre. La transmission

du diffuseur est aussi une grandeur aléatoire (car reliée à l'épaisseur aléatoire traversée) donnée par :

$$t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda) = e^{i\phi(\mathbf{x}_0)} . \quad (\text{B.17})$$

En considérant une distribution de phase (et donc d'épaisseur) gaussienne, on peut alors obtenir une expression pour la transmission moyenne (on note $\overline{\dots}$ la valeur moyenne sur l'ensemble des réalisations du diffuseur) :

$$\overline{t_{\text{diff}}} = \overline{e^{i\phi}} = \int d\phi e^{i\phi} \mathcal{P}(\phi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-(\phi - \overline{\phi})^2 / 2\sigma_\phi^2} , \quad (\text{B.18})$$

où σ_ϕ^2 est la variance de la distribution de phase. Il apparaît que la transmission moyenne correspond à la transformée de Fourier de la distribution de phase. On a ainsi

$$\overline{t_{\text{diff}}} = e^{-\overline{\phi^2}/2} = e^{-\sigma_\phi^2/2} \quad (\text{B.19})$$

en choisissant $\overline{\phi} = 0$.

Dans le cas général de l'étude de la corrélation entre deux speckles générés par la même réalisation du diffuseur et le même mode spatial à deux longueurs d'onde légèrement différentes, la fonction de corrélation du diffuseur est définie par la corrélation des transmissions des deux champs :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda, \lambda') = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0, \lambda')} . \quad (\text{B.20})$$

Avec cette définition, l'étude de la fonction de corrélation d'un unique speckle revient à prendre $\lambda' = \lambda$.

Dans le cadre de l'hypothèse où les phases individuelles sont des variables aléatoires gaussiennes, la différence de phases $\phi(\mathbf{x}_0) - \phi'(\mathbf{x}'_0)$ constitue également une variable aléatoire gaussienne [37] :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda, \lambda') = \overline{e^{i(\phi(\mathbf{x}_0) - \phi'(\mathbf{x}'_0))}} \quad (\text{B.21})$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \overline{(\phi(\mathbf{x}_0) - \phi'(\mathbf{x}'_0))^2} \right] \quad (\text{B.22})$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \overline{(\phi(\mathbf{x}_0)^2 + \phi'(\mathbf{x}'_0)^2 - 2\phi(\mathbf{x}_0)\phi'(\mathbf{x}'_0))} \right] \quad (\text{B.23})$$

$$= \exp \left[-2\pi^2 (n-1)^2 \sigma_e^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \overline{\frac{e(\mathbf{x}_0)e(\mathbf{x}'_0)}{\sigma_e^2}} \right) \right] , \quad (\text{B.24})$$

en faisant apparaître la fonction de corrélation de l'épaisseur et l'écart-type de la distribution d'épaisseur σ_e , reliée à la largeur de la distribution de phase par $\sigma_\phi = 2\pi(n-1)\sigma_e/\lambda$. La largeur r_e de la fonction de corrélation de l'épaisseur décrit la taille de la granularité transverse de la surface du diffuseur. Comme décrit section 5.1.2, pour une large de distribution de phases $\sigma_\phi \gg 2\pi$ (ou $\sigma_e \gg \lambda$), on peut restreindre l'étude de la corrélation du diffuseur sur une zone petite devant r_e . Ainsi, on peut approximer la fonction de corrélation de la granularité du diffuseur, supposée être une courbe en cloche, par :

$$\frac{\overline{e(\mathbf{x}_0)e(\mathbf{x}'_0)}}{\sigma_e^2} \approx 1 - \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{2r_e^2} \quad \text{pour} \quad |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0| \ll r_e . \quad (\text{B.25})$$

On obtient donc, pour la fonction de corrélation du diffuseur :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \lambda, \lambda') = \exp \left(-2\pi^2(n-1)^2\sigma_e^2 \left[\frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{\lambda\lambda'r_e^2} + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 \right] \right) \quad (\text{B.26})$$

$$= \exp \left(-\frac{\delta\phi^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{\pi^2\theta_{\text{diff}}^2}{2} \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{\lambda\lambda'} \right) \quad (\text{B.27})$$

$$= \exp \left(-\frac{\delta\phi^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)^2}{2r_{\text{diff}}r'_{\text{diff}}} \right), \quad (\text{B.28})$$

avec $\delta\phi = |\sigma_\phi - \sigma_{\phi'}|$ et en faisant apparaître l'angle de diffusion $\theta_{\text{diff}} = \lambda/\pi r_{\text{diff}}$. On retrouve ainsi la formule 5.8 de la section 5.1.2 en prenant $\lambda = \lambda'$: la fonction de corrélation du diffuseur est une gaussienne de largeur $r_{\text{diff}} = r_e/\sigma_\phi$ et de maximum 1 pour $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0$.

B.3 Amplitude rayonnée

Notons $\mathbf{x}_d \equiv \{x, y, d\}$ et $\mathbf{x}_0 \equiv \{x_0, y_0, 0\}$. Pour calculer le champ rayonné au point \mathbf{x}_d , on utilise le principe de Huygens-Fresnel :

$$E(\mathbf{x}_d) = \frac{1}{i\lambda} \int d\mathbf{x}_0 t(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) \frac{e^{ik|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0|}, \quad (\text{B.29})$$

avec $t(\mathbf{x}_0)$ la transmission du montage optique au point \mathbf{x}_0 du diffuseur, comportant l'effet du diffuseur et de la lentille. $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde.

Appliquons alors l'approximation paraxiale :

$$|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + d^2} \quad (\text{B.30})$$

$$= d \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{d^2}} \quad (\text{B.31})$$

$$\approx d + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2d} \quad (\text{B.32})$$

au premier ordre. Reportons B.32 dans B.29 :

$$E(\mathbf{x}_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \int d\mathbf{x}_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) e^{-ik\frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}} e^{ik\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2d}}, \quad (\text{B.33})$$

où nous avons utilisé le premier ordre pour approximer l'exponentielle et l'ordre 0 pour le dénominateur. $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ correspond à la transmission du diffuseur. Développons alors la dernière exponentielle complexe de cette expression :

$$E(\mathbf{x}_d) = \frac{e^{ik\left(d + \frac{x^2 + y^2}{2d}\right)}}{i\lambda d} \int d\mathbf{x}_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) E_0(\mathbf{x}_0) e^{ik\frac{x_0^2}{2d_{\text{eff}}}} e^{-ik\frac{\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0}{d}}, \quad (\text{B.34})$$

avec $1/d_{\text{eff}} = 1/d - 1/f$.

B.4 Calcul complet de la fonction de corrélation en amplitude à deux corps

Notons $\mathbf{x}_d = \{x, y, z = d\}$ et $\mathbf{x}'_d = \{x', y', z = d'\}$. L'outil de base permettant de décrire les propriétés spatiales d'un champ de speckle est la fonction de corrélation à deux corps de l'amplitude rayonnée. Celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{x}'_d, \lambda')} &= \frac{e^{ik\left(d + \frac{x^2+y^2}{2d}\right)} e^{-ik'\left(d' + \frac{x'^2+y'^2}{2d'}\right)}}{\lambda d \lambda' d'} \\ &\times \int d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}'_0 t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \lambda) t_{\text{diff}}^*(\mathbf{x}'_0, \lambda') E_0(\mathbf{x}_0, \lambda) E_0^*(\mathbf{x}'_0, \lambda') \\ &\times e^{ik\frac{\mathbf{x}_0^2}{2d_{\text{eff}}}} e^{-ik'\frac{\mathbf{x}'_0{}^2}{2d'_{\text{eff}}}} e^{-ik\frac{\mathbf{x}_d \cdot \mathbf{x}_0}{d}} e^{ik'\frac{\mathbf{x}'_d \cdot \mathbf{x}'_0}{d'}} , \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

dans le cas général d'un éclairage polychromatique, et où le moyennage d'ensemble $\overline{\dots}$ n'agit que sur les transmissions t_{diff} .

Effectuons alors le changement de variables $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0\} \rightarrow \{\mathbf{x}_c = (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'_0)/2, \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\}$. En réarrangeant les termes de phase, on peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{x}'_d, \lambda')} &= \frac{e^{ik\left(d + \frac{x^2+y^2}{2d}\right)} e^{-ik'\left(d' + \frac{x'^2+y'^2}{2d'}\right)}}{\lambda \lambda' d d'} \\ &\times \int d\mathbf{x}_c d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}, \lambda, \lambda') E_0(\mathbf{x}_c - \Delta\mathbf{x}/2, \lambda) E_0^*(\mathbf{x}_c + \Delta\mathbf{x}/2, \lambda') \\ &\times e^{i\frac{\mathbf{x}_c^2}{2}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} - \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} e^{-i\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c}{2}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} + \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} e^{i\frac{\Delta\mathbf{x}^2}{8}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} - \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} \\ &\times e^{i\mathbf{x}_c \cdot \left(\frac{k'\mathbf{x}'_d}{d'} - \frac{k\mathbf{x}_d}{d}\right)} e^{i\frac{\Delta\mathbf{x}}{2} \cdot \left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d} + \frac{k'\mathbf{x}'_d}{d'}\right)} . \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Supposons à présent que la taille des grains du diffuseur est très petite devant la taille typique de l'éclairage incident, c'est-à-dire qu'à l'échelle de variation de C_{diff} , l'éclairage incident est constant : $E_0(\mathbf{x}_c - \Delta\mathbf{x}/2, \lambda) E_0^*(\mathbf{x}_c + \Delta\mathbf{x}/2, \lambda') \approx E_0(\mathbf{x}_c, \lambda) E_0^*(\mathbf{x}_c, \lambda') = I_0(\mathbf{x}_c)$ en supposant également que les champs sont de même intensité. En supprimant le terme de phase en $\Delta\mathbf{x}^2$ supposé petit devant toutes les autres échelles de longueur, on obtient finalement l'expression :

$$\begin{aligned} \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{x}'_d, \lambda')} &= \frac{e^{ik\left(d + \frac{x^2+y^2}{2d}\right)} e^{-ik'\left(d' + \frac{x'^2+y'^2}{2d'}\right)}}{\lambda \lambda' d d'} \\ &\times \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{i\frac{\mathbf{x}_c^2}{2}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} - \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} e^{i\mathbf{x}_c \cdot \left(\frac{k'\mathbf{x}'_d}{d'} - \frac{k\mathbf{x}_d}{d}\right)} \\ &\times \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}, \lambda, \lambda') e^{-i\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c}{2}\left(\frac{k}{d_{\text{eff}}} + \frac{k'}{d'_{\text{eff}}}\right)} e^{i\frac{\Delta\mathbf{x}}{2} \cdot \left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d} + \frac{k'\mathbf{x}'_d}{d'}\right)} . \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

B.5 Expression du profil d'intensité moyenne du champ de tavelures le long de l'axe optique

L'intensité moyenne d'un champ de tavelures monochromatique est donnée par le module carré de l'amplitude rayonnée, qu'il est possible d'exprimer à l'aide de la fonction de corrélation en amplitude calculée précédemment :

$$\overline{I(\mathbf{x}_d)} = \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{x}_d, \lambda)} \quad (\text{B.38})$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 d^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{-i\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c \frac{k}{d_{\text{eff}}}} e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \frac{k\mathbf{x}_d}{d}} \quad (\text{B.39})$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 d^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) \widetilde{C}_{\text{diff}} \left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d} - \frac{k\mathbf{x}_c}{d_{\text{eff}}} \right), \quad (\text{B.40})$$

en faisant apparaître $\widetilde{C}_{\text{diff}}(\boldsymbol{\xi}) = \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{i\Delta\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}}$ la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de la transmission du diffuseur.

Procédons maintenant au changement de variable $\mathbf{p}_c = \mathbf{x}_c d/d_{\text{eff}}$:

$$\overline{I(\mathbf{x}_d)} = \frac{1}{\lambda^2 d^2} \int d\mathbf{p}_c \frac{d_{\text{eff}}^2}{d^2} I_0 \left(\mathbf{p}_c \frac{d_{\text{eff}}}{d} \right) \widetilde{C}_{\text{diff}} \left(\frac{k}{d} [\mathbf{x}_d - \mathbf{p}_c] \right) \quad (\text{B.41})$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 d^2} \frac{d_{\text{eff}}^2}{d^2} I_0 \left(\mathbf{x}_d \frac{d_{\text{eff}}}{d} \right) * \widetilde{C}_{\text{diff}} \left(\frac{k\mathbf{x}_d}{d} \right), \quad (\text{B.42})$$

où le symbole $*$ dénote le produit de convolution. On retrouve ainsi le résultat 5.11 annoncé au chapitre 5.

Aux alentours du plan de Fourier, $d_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ et il est alors possible d'assimiler la contribution de l'intensité incidente $I_0(\mathbf{x}_f d_{\text{eff}}/d) \times d_{\text{eff}}^2/d^2$ à une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x}_f)$ de telle sorte que l'intensité moyenne soit donnée par

$$\overline{I(\mathbf{x}_f)} \propto \widetilde{C}_{\text{diff}} \left(\frac{k\mathbf{x}_f}{f} \right). \quad (\text{B.43})$$

B.6 Fonctions de corrélation d'un speckle monochromatique

B.6.1 Corrélation transverse le long de l'axe optique

Intéressons-nous à présent à la forme de la fonction de corrélation transverse d'un speckle monochromatique en fonction de la distance d au diffuseur. Cette fonction décrit la corrélation entre deux points situés dans le même plan orthogonal à l'axe optique et proches de ce dernier. Notons $\mathbf{x}_d = \{x, y, z = d\}$ et $\mathbf{0}_d = \{0, 0, d\}$, la fonction de corrélation en amplitude recherchée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{0}_d, \lambda)} &= \frac{e^{ik(x^2+y^2)/2d}}{\lambda^2 d^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c \cdot \mathbf{x}_d}{d}} \\ &\quad \times \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}) e^{-ik \frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c}{d_{\text{eff}}}} e^{ik \frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_d}{2d}}, \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

d'après l'équation B.38.

En supposant que les grains du diffuseur sont petits devant la taille typique de l'éclairement incident, il est possible de négliger la dernière exponentielle complexe et on obtient :

$$\overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{0}_d, \lambda)} = \frac{e^{ik(x^2+y^2)/2d}}{\lambda^2 d^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c \cdot \mathbf{x}_d}{d}} \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}) e^{-ik \frac{\Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c}{d_{\text{eff}}}}, \quad (\text{B.45})$$

puis intervertissons les intégrales :

$$\overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{0}_d, \lambda)} = \frac{e^{ik(x^2+y^2)/2d}}{\lambda^2 d^2} \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}) \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-i \frac{k \mathbf{x}_c}{d} \left(\mathbf{x}_d + \frac{\Delta \mathbf{x} d}{d_{\text{eff}}} \right)} \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{e^{ik(x^2+y^2)/2d}}{\lambda^2 d^2} \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}) \tilde{I}_0 \left(\frac{k}{d} \left[\mathbf{x}_d + \frac{\Delta \mathbf{x} d}{d_{\text{eff}}} \right] \right), \quad (\text{B.47})$$

en faisant apparaître $\tilde{I}_0(\boldsymbol{\xi}) = \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{i\mathbf{x}_c \cdot \boldsymbol{\xi}}$ la transformée de Fourier de l'éclairement incident grâce au changement de variable $\mathbf{x}_c \rightarrow -\mathbf{x}_c$.

Procédons maintenant à un nouveau changement de variable $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{x} d / d_{\text{eff}}$. La fonction de corrélation se réécrit :

$$\overline{E(\mathbf{x}_d, \lambda) E^*(\mathbf{0}_d, \lambda)} = \frac{e^{ik(x^2+y^2)/2d}}{\lambda^2 d^2} \int d\Delta \mathbf{p} \frac{d_{\text{eff}}^2}{d^2} \tilde{I}_0 \left(\frac{k}{d} [\mathbf{x}_d + \Delta \mathbf{p}] \right) C_{\text{diff}} \left(\Delta \mathbf{p} \frac{d_{\text{eff}}}{d} \right) \quad (\text{B.48})$$

$$= \frac{e^{ik(x^2+y^2)/2d}}{\lambda^2 d^2} \frac{d_{\text{eff}}^2}{d^2} \tilde{I}_0 \left(\mathbf{x}_d \frac{d_{\text{eff}}}{d} \right) * C_{\text{diff}} \left(\frac{k \mathbf{x}_d}{d} \right), \quad (\text{B.49})$$

où le symbole $*$ dénote le produit de convolution. On retrouve ainsi le résultat 5.16 annoncé au chapitre 5.

Aux alentours du plan de Fourier, $d_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ et on peut donc assimiler la contribution de la corrélation du diffuseur $C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_f d_{\text{eff}} / d) \times d_{\text{eff}}^2 / d^2$ à une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x}_f)$. On détermine alors que la fonction de corrélation transverse en amplitude aux alentours du plan de Fourier est déterminée par la transformée de Fourier de l'éclairement incident :

$$\overline{E(\mathbf{x}_f, \lambda) E^*(\mathbf{0}_f, \lambda)} \propto \tilde{I}_0 \left(\frac{k \mathbf{x}_f}{f} \right). \quad (\text{B.50})$$

B.6.2 Corrélation tridimensionnelle aux alentours du plan de Fourier

Notons $\mathbf{x}_\perp = \{x, y\}$, $\Delta \mathbf{x}_\perp = \{\Delta x, \Delta y\}$ et $\mathbf{0} = \{0, 0\}$ dans le plan transverse $\{x, y\}$. La fonction de corrélation à deux corps normalisée décrivant les propriétés spatiales d'un speckle monochromatique de longueur d'onde λ à trois dimensions est définie par

$$c_{3D}(\Delta \mathbf{x}_\perp, \delta z) = \frac{\overline{\delta I(\mathbf{x}_\perp + \Delta \mathbf{x}_\perp, d + \delta z) \delta I(\mathbf{x}_\perp, d)}}{\overline{\delta I^2}}, \quad (\text{B.51})$$

Aux alentours du plan de Fourier ($d \approx f$ et $\delta z \ll \delta f$) et proche de l'axe optique ($|\mathbf{x}_\perp| \ll \sigma_{\text{ex}}$), le numérateur de cette fonction de corrélation s'écrit $\overline{\delta I(\Delta \mathbf{x}_\perp, f + \delta z) \delta I(\mathbf{0}, f)}$ et peut être calculé à l'aide du théorème de Wick B.7. Cette nouvelle fonction de corrélation vaut :

$$\overline{\delta I(\Delta \mathbf{x}_\perp, f + \delta z) \delta I(\mathbf{0}, f)} = \left| \overline{E(\Delta \mathbf{x}_\perp, f + \delta z) E^*(\mathbf{0}, f)} \right|^2 \quad (\text{B.52})$$

$$= \left| \frac{1}{\lambda^2 f^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-i \frac{\mathbf{x}_c^2 k \delta z}{2f^2}} e^{-i \frac{k \mathbf{x}_c \cdot \Delta \mathbf{x}_\perp}{f}} \right. \quad (\text{B.53})$$

$$\left. \times \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}) e^{i \frac{\Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c k \delta z}{2f^2}} e^{i \frac{k \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x}_\perp}{2f}} \right|^2.$$

Comparons alors les différents termes de phase. Toujours en supposant que la taille des grains du diffuseur est très petite devant la taille typique de l'éclairement incident, c'est-à-dire $\Delta \mathbf{x} \ll \mathbf{x}_c$, il est possible de négliger la contribution des exponentielles complexes de la seconde intégrale. L'expression de la fonction de corrélation se réduit alors à

$$\left| \overline{E(\Delta \mathbf{x}_\perp, f + \delta z) E^*(\mathbf{0}, f)} \right|^2 = \left| \frac{1}{\lambda^2 f^2} \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}) \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-i \frac{\mathbf{x}_c^2 k \delta z}{2f^2}} e^{-i \frac{k \mathbf{x}_c \cdot \Delta \mathbf{x}_\perp}{f}} \right|^2 \quad (\text{B.54})$$

$$= \frac{1}{\lambda^4 d^4} \left| \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}) \right|^2 \left| \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-i \frac{\mathbf{x}_c^2 k \delta z}{2f^2}} e^{-i \frac{k \mathbf{x}_c \cdot \Delta \mathbf{x}_\perp}{f}} \right|^2. \quad (\text{B.55})$$

Il est à présent possible de déterminer la fonction de corrélation tridimensionnelle $c_{3D}(\Delta \mathbf{x}_\perp, \delta z)$ en normalisant l'expression précédente par $|\overline{E(\mathbf{0}, f) E^*(\mathbf{0}, f)}|^2$. On obtient finalement

$$c_{3D}(\Delta \mathbf{x}_\perp, \delta z) = \frac{\left| \text{TF} \left[I_0(\mathbf{x}_c) e^{-i \frac{\mathbf{x}_c^2 k \delta z}{2f^2}} \right]_{\frac{k \Delta \mathbf{x}_\perp}{f}} \right|^2}{\left| \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) \right|^2}, \quad (\text{B.56})$$

correspondant à l'équation 5.26 du chapitre 5.

Corrélation longitudinale aux alentours du plan de Fourier

La fonction de corrélation longitudinale aux alentours du plan de Fourier présentée dans la section 5.2.3 apparaît donc comme un cas particulier de la fonction de corrélation tridimensionnelle calculée dans la section précédente.

En se plaçant sur l'axe optique et aux alentours du plan de Fourier dans le cas d'un speckle monochromatique, on tire directement de l'équation B.38 que :

$$\overline{E(f + \delta z) E^*(f)} \propto \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c^2 \delta z}{2f^2}}, \quad (\text{B.57})$$

ce qui constitue le résultat 5.19 du chapitre 5.

B.6.3 Détermination de la fonction de corrélation à trois corps

La fonction de corrélation à trois corps des fluctuations d'intensité peut être exprimée à l'aide d'une permutation de fonctions de corrélation à deux corps de l'amplitude rayonnée à l'aide du théorème de Wick selon l'équation B.15. Dans cette section, nous nous attachons à déterminer cette fonction de corrélation à trois corps dans le plan de Fourier.

Comme explicité dans la section 5.2.4, la fonction de corrélation transverse à deux corps des fluctuations d'intensité c_{2D} est très bien décrite par une gaussienne dont la demi-largeur à $1/e$ est donnée par $\sigma_\perp = 0.5 \mu\text{m}$. Il est donc possible d'écrire que

$$\left| \overline{E(\mathbf{x}_f, \lambda) E^*(\mathbf{0}_f, \lambda)} \right| = \left| \overline{E(\mathbf{0}_f, \lambda) E^*(\mathbf{0}_f, \lambda)} \right| \times e^{-\mathbf{x}_f^2 / 2\sigma_\perp^2}. \quad (\text{B.58})$$

De plus, les calculs de fonction de corrélation à deux corps en amplitude menés dans la section précédente montrent que la phase de la fonction de corrélation à trois corps s'annule par circularité. On trouve alors que la fonction de corrélation à trois corps normalisée s'exprime :

$$c_{3I}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{\overline{\delta I(\mathbf{x}_1)\delta I(\mathbf{x}_2)\delta I(\mathbf{x}_3)}}{\bar{I}^3} \quad (\text{B.59})$$

$$= 2e^{-\frac{(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)^2}{2\sigma_\perp^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2)^2}{2\sigma_\perp^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3)^2}{2\sigma_\perp^2}}. \quad (\text{B.60})$$

B.7 Fonction de corrélation d'un speckle bichromatique

B.7.1 Cas d'un spectre bichromatique étroit

Intéressons-nous à présent à la corrélation entre deux champs de speckle générés par le même diffuseur, à deux longueurs d'onde λ et λ' légèrement différentes, et observés à la même position physique $\{\mathbf{x}_\perp, d = f + \delta z\}$.

La fonction de corrélation normalisée décrivant les similitudes entre deux champs de tavelures réalisés par le même diffuseur à deux longueurs d'onde est définie par

$$c_{2\lambda}(\mathbf{x}_\perp, d, \lambda, \lambda') = \frac{\overline{\delta I(\mathbf{x}_\perp, d, \lambda)\delta I(\mathbf{x}_\perp, d, \lambda')}}{\overline{I(\mathbf{x}_\perp, d, \lambda)I(\mathbf{x}_\perp, d, \lambda')}} \quad (\text{B.61})$$

La fonction de corrélation des fluctuations d'intensité apparaissant au numérateur peut être obtenue à l'aide du théorème de Wick et vaut :

$$\begin{aligned} \left| \overline{E(\mathbf{x}_\perp, f + \delta z, \lambda)E^*(\mathbf{x}_\perp, f + \delta z, \lambda')} \right|^2 &= \left| \frac{1}{\lambda\lambda'd^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-i\frac{\mathbf{x}_c^2 \delta z}{2f^2}(k-k')} e^{i\frac{\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{x}_c}{f}(k'-k)} \right. \\ &\quad \left. \times \int d\Delta\mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta\mathbf{x}, \lambda, \lambda') e^{i\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_c \delta z}{f^2} \frac{k+k'}{2}} e^{i\frac{\Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_\perp}{f} \frac{k+k'}{2}} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Posons $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$, avec $\delta\lambda \ll \lambda$. Nous avons alors

$$\frac{k+k'}{2} \approx \frac{2\pi}{\lambda} = k \quad \text{et} \quad (\text{B.63})$$

$$k-k' \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta\lambda}{\lambda} = k \frac{\delta\lambda}{\lambda} \quad (\text{B.64})$$

au premier ordre.

Restreignons à présent l'étude à un domaine proche du centre de la figure de speckle, de telle sorte que $\mathbf{x}_\perp \ll \sigma_{\text{ex}}$ et $\delta z = d - f \ll \delta f$. Ces conditions se traduisent par

$$|\mathbf{x}_\perp| \ll \frac{f}{k|\Delta\mathbf{x}|} \quad \text{et} \quad (\text{B.65})$$

$$\delta z \ll \frac{f^2}{k|\mathbf{x}_c||\Delta\mathbf{x}|}, \quad (\text{B.66})$$

qui permettent alors de négliger les exponentielles complexes de la seconde intégrale.

La fonction de corrélation bichromatique se simplifie alors en :

$$\left| \overline{E(\mathbf{x}_\perp, f + \delta z, \lambda) E^*(\mathbf{x}_\perp, f + \delta z, \lambda')} \right|^2 = \left| \frac{1}{\lambda \lambda' f^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c^2 \delta z}{2f^2} \frac{\delta \lambda}{\lambda}} e^{ik \frac{\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{x}_c}{f} \frac{\delta \lambda}{\lambda}} \right|^2 \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} & \times \left| \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda, \lambda') \right|^2 \\ & = \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2 f^4} \left| \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda, \lambda') \right|^2 \\ & \times \left| \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c^2 \delta z}{2f^2} \frac{\delta \lambda}{\lambda}} e^{ik \frac{\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{x}_c}{f} \frac{\delta \lambda}{\lambda}} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Rappelons à présent que l'intensité moyenne proche peut être déterminée et son expression aux alentours du centre du champ de speckle est donnée par :

$$\bar{I}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda), \quad (\text{B.69})$$

que nous pouvons utiliser afin de calculer la fonction de corrélation bichromatique normalisée. Cette dernière devient donc :

$$\begin{aligned} c_{2\lambda}(\mathbf{x}_\perp, \delta z, \lambda, \lambda') & = \frac{\left| \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda, \lambda') \right|^2}{\int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda) \int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda')} \\ & \times \frac{\left| \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c^2 \delta z}{2f^2} \frac{\delta \lambda}{\lambda}} e^{ik \frac{\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{x}_c}{f} \frac{\delta \lambda}{\lambda}} \right|^2}{\left| \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) \right|^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

et fait apparaître deux termes, le premier caractérisant une décorrélation liée à la propagation dans le diffuseur, et le second lié à un déphasage différent lors de la propagation en espace libre après diffraction.

Le premier terme peut être calculé en utilisant le fait que :

$$\int d\Delta \mathbf{x} C_{\text{diff}}(\Delta \mathbf{x}, \lambda) = \int d\Delta \mathbf{x} e^{-\Delta \mathbf{x}^2 / 2r_{\text{diff}}^2} \quad (\text{B.71})$$

$$= 2\pi r_{\text{diff}}^2, \quad (\text{B.72})$$

dans le cas d'un speckle monochromatique.

On peut finalement déterminer complètement la fonction de corrélation bichromatique, dont l'écriture devient :

$$c_{2\lambda}(\mathbf{x}_\perp, \delta z, \lambda, \delta \lambda) = C_{\text{diff}}(\mathbf{0}, \lambda, \delta \lambda) \frac{\left| \text{TF} \left[I_0(\mathbf{x}_c) e^{-ik \frac{\mathbf{x}_c^2 \delta z}{2f^2}} \right] \right|_{\frac{k\mathbf{x}_\perp}{f} \frac{\delta \lambda}{\lambda}}}{\left| \int d\mathbf{x}_c I_0(\mathbf{x}_c) \right|^2} \quad (\text{B.73})$$

$$= e^{-\delta \phi^2} c_{3D} \left(\mathbf{x}_\perp \frac{\delta \lambda}{\lambda}, \delta z \frac{\delta \lambda}{\lambda} \right), \quad (\text{B.74})$$

en reconnaissant l'expression de la fonction de corrélation tridimensionnelle d'un speckle monochromatique. On retrouve ainsi le résultat 5.50 annoncé dans le chapitre 5.

B.7.2 Extension au cas d'un spectre arbitraire

Il est possible d'étendre l'étude menée précédemment au cas d'un spectre de forme arbitraire. L'intensité totale I résulte alors de l'ensemble des rayonnements émis à toutes les fréquences :

$$I = \int d\nu I_\nu , \quad (\text{B.75})$$

où I_ν est la densité spectrale d'intensité, reliée à la densité spectrale d'amplitude par $I_\nu = E_\nu E_\nu^*$.

L'intensité totale moyenne est obtenue de manière directe en moyennant les densités spectrales d'intensité :

$$\bar{I} = \int d\nu \bar{I}_\nu . \quad (\text{B.76})$$

La variance est obtenue en calculant le moment d'ordre 2 de l'intensité totale, qui s'écrit :

$$\bar{I}^2 = \overline{\int d\nu d\nu' I_\nu I_{\nu'}} \quad (\text{B.77})$$

$$= \int d\nu d\nu' \overline{\bar{I}_\nu \bar{I}_{\nu'}} \quad (\text{B.78})$$

$$= \int d\nu d\nu' \left(\overline{E_\nu E_\nu^* E_{\nu'} E_{\nu'}^*} + \overline{E_\nu E_{\nu'}^* E_{\nu'} E_\nu^*} \right) \quad (\text{B.79})$$

$$= \bar{I}^2 + \int d\nu d\nu' \overline{E_\nu E_{\nu'}^* E_{\nu'} E_\nu^*} , \quad (\text{B.80})$$

à l'aide du théorème de Wick appliqué aux densités spectrales d'amplitude. On fait ainsi apparaître la fonction de corrélation $\overline{E_\nu E_{\nu'}^*}$ des densités spectrales d'amplitude.

On détermine finalement que la variance de l'intensité du champ de speckle est donnée par :

$$\sigma_I^2 = \bar{I}^2 - \bar{I}^2 \quad (\text{B.81})$$

$$= \int d\nu d\nu' \left| \overline{E_\nu E_{\nu'}^*} \right|^2 , \quad (\text{B.82})$$

et est donc directement reliée à la fonction de corrélation à deux corps bichromatique identifiée précédemment.

C. Calculs du temps de diffusion élastique

C.1 Éléments de calcul du temps de diffusion élastique à partir du développement de Born

La fonction de Green de la particule libre est donnée par :

$$G_0(E, \mathbf{k}) = \frac{1}{E - k^2/2 + i0^+} = \frac{1}{E - k^2/2} - i\pi\delta(E - k^2/2) \quad (\text{C.1})$$

en utilisant la relation $1/(x + i0^+) = \text{vp}(1/x) - i\pi\delta(x)$.

En présence de désordre, la fonction de Green moyennée sur les différentes réalisations du désordre est donnée par :

$$\overline{G}(E, \mathbf{k}) = \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}} - \overline{V} - \Sigma(E, \mathbf{k})}, \quad (\text{C.2})$$

en faisant apparaître l'énergie cinétique $E_{\mathbf{k}} = k^2/2$, la valeur moyenne du potentiel \overline{V} et la self-energy $\Sigma(E, \mathbf{k}) = \langle \mathbf{k} | \hat{\Sigma}(E) | \mathbf{k} \rangle$. Cette dernière peut être décomposée sous la forme d'une série :

$$\hat{\Sigma}(E) = \hat{\Sigma}^{(1)}(E) + \hat{\Sigma}^{(2)}(E) + \dots, \quad (\text{C.3})$$

où l'on identifie les deux premiers termes $\hat{\Sigma}^{(1)}(E) = \overline{\hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}}$ et $\hat{\Sigma}^{(2)} = \overline{\hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}\hat{G}_0(E)\hat{V}}$ à l'aide du développement de Born 7.11.

Ces deux premiers termes de la self-energy font apparaître les fonctions de corrélation à deux et trois corps du potentiel, que l'on écrit sous la forme :

$$\overline{V(\mathbf{x}_1)V(\mathbf{x}_2)} = C(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{C.4})$$

$$= V_{\text{R}}^2 e^{-\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}{\sigma^2}}, \quad (\text{C.5})$$

et dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{C}(\mathbf{k}) = (\pi\sigma^2)^{d/2} V_{\text{R}}^2 e^{-k^2\sigma^2/4} \quad (\text{C.6})$$

en dimension d .

La fonction de corrélation à trois corps est déterminée par

$$\overline{V(\mathbf{x}_1)V(\mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_3)} = 2V_R^3 e^{-\frac{(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{C.7})$$

$$= 2V_R^3 \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \gamma(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3), \quad (\text{C.8})$$

en définissant

$$\gamma(\mathbf{x}) = e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{C.9})$$

dont la transformée de Fourier est

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{k}) = (2\pi\sigma^2)^{d/2} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \quad (\text{C.10})$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{d/2} V(\mathbf{k}) \quad (\text{C.11})$$

en dimension d quelconque et en définissant $V(\mathbf{k})$.

C.2 Calcul de la self-energy au premier ordre

C.2.1 Expression du premier ordre de la self-energy

Partons de l'expression du premier terme de la self-energy et évaluons-le entre deux états $|\mathbf{k}\rangle$ et $|\mathbf{k}'\rangle$:

$$\langle \mathbf{k} | \hat{\Sigma}^{(1)}(E) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | \overline{\hat{V} \hat{G}_0(E) \hat{V}} | \mathbf{k}' \rangle \quad (\text{C.12})$$

$$= \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \overline{V(\mathbf{x}_1) \langle \mathbf{x}_1 | \hat{G}_0(E) | \mathbf{x}_2 \rangle V(\mathbf{x}_2) \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{k}' \rangle} \quad (\text{C.13})$$

$$= \sum_{\mathbf{k}_1} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{k}_1 \rangle \langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle G_0(E, \mathbf{k}_1) \overline{V(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_2)} \quad (\text{C.14})$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\sum_{\mathbf{k}_1} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 C(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) G_0(E, \mathbf{k}_1) \frac{1}{L^{2d}} e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{x}_2 \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{x}_1 \mathbf{k}} \right) \quad (\text{C.15})$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int d\mathbf{k}_1 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^d G_0(E, \mathbf{k}_1) \int d\Delta \mathbf{x} C(\Delta \mathbf{x}) \frac{e^{i\Delta \mathbf{x}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)}}{L^d} \int d\mathbf{x}_1 \frac{e^{i\mathbf{x}_1(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}}{L^d} \right) \quad (\text{C.16})$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^d} G_0(E, \mathbf{k}_1) \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int d\Delta \mathbf{x} C(\Delta \mathbf{x}) e^{i\Delta \mathbf{x}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)} \int d\mathbf{x}_1 \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{k}' \rangle \right) \quad (\text{C.17})$$

$$= \langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^d} G_0(E, \mathbf{k}_1) \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1), \quad (\text{C.18})$$

où nous avons utilisé les relations de fermeture, ainsi que les ondes planes $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = 1/L^{d/2} \times e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ dans une boîte de taille L et de dimension d . Nous avons de plus utilisé la correspondance $\sum_{\mathbf{k}} \leftrightarrow \int d\mathbf{k} (L/2\pi)^d$. Le résultat ne dépend pas de la taille de ces boîtes, dont il faut tenir

compte afin que les ondes planes $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle$ aient la bonne normalisation. Nous ne tiendrons plus compte de cette considération dans la suite, les résultats étant identiques.

On retrouve ainsi que la self-energy est diagonale dans l'espace des $|\mathbf{k}\rangle$, témoignant de l'invariance par translation du système, et que celle-ci est donnée par la convolution de la fonction de Green libre avec le spectre des fréquences spatiales du désordre.

C.2.2 Calcul du temps de diffusion élastique

Calculons à présent le temps de diffusion élastique en dimension $d = 2$, relié à la partie imaginaire de la self-energy :

$$\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E, \mathbf{k})] = \text{Im} \left[\int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} G_0(E, \mathbf{k}_1) \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right] \quad (\text{C.19})$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \text{Im}[G_0(E, \mathbf{k}_1)] \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (\text{C.20})$$

$$= -\pi \int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (\text{C.21})$$

$$= -\pi V_{\text{R}}^2 \int \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \pi \sigma^2 e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \sigma^2 / 4} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \quad (\text{C.22})$$

$$= -\frac{V_{\text{R}}^2 \sigma^2}{4} \int d\mathbf{k}_1 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} e^{k \mathbf{k}_1 \sigma^2 / 4} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \quad (\text{C.23})$$

$$= -\frac{V_{\text{R}}^2 \sigma^2}{4} \int dk_1 k_1 d\theta_1 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} e^{k k_1 \cos \theta_1} \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) \quad (\text{C.24})$$

$$= -\frac{\pi}{2} V_{\text{R}}^2 \sigma^2 \int dk_1 k_1 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} I_0(k k_1 \sigma^2 / 2) \delta(E - E_{\mathbf{k}_1}) , \quad (\text{C.25})$$

où $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0, donnée par

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{x \cos \theta} = 2\pi I_0(x) \quad \text{pour } x > 0 . \quad (\text{C.26})$$

On fait maintenant l'approximation en couche $E = E_{\mathbf{k}}$, et on fait apparaître le temps de diffusion élastique en restaurant les unités :

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{s}}^{\text{sf}}} = -2\text{Im}[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})] \quad (\text{C.27})$$

$$= \pi \frac{V_{\text{R}}^2}{E_{\sigma}} \int dk_1^2 e^{-k^2 \sigma^2 / 4} e^{-k_1^2 \sigma^2 / 4} I_0(k k_1 \sigma^2 / 2) \delta(k^2 - k_1^2) \quad (\text{C.28})$$

$$= \pi \frac{V_{\text{R}}^2}{E_{\sigma}} e^{-k^2 \sigma^2 / 2} I_0(k^2 \sigma^2 / 2) . \quad (\text{C.29})$$

On retrouve ainsi l'expression de $\tau_{\text{s}}^{\text{Born}}$ en deux dimensions annoncée dans le chapitre 6.

C.3 Calcul de la self-energy au second ordre

Il est possible de déterminer différentes expressions du second ordre de la self-energy. En particulier, nous montrons deux de ces expressions, dont l'évaluation numérique donne le même résultat avec une erreur inférieure au pourcent.

C.3.1 Calcul à l'aide la représentation en impulsion

Commençons par évaluer le deuxième ordre de la self-energy dans l'espace des impulsions, entre les états $|\mathbf{k}\rangle$ et $|\mathbf{k}'\rangle$:

$$\langle \mathbf{k} | \hat{\Sigma}^{(2)}(E) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | \overline{\hat{V} \hat{G}_0(E) \hat{V} \hat{G}_0(E) \hat{V}} | \mathbf{k}' \rangle \quad (\text{C.30})$$

$$= \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \quad (\text{C.31})$$

$$\times \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}_1 \rangle \overline{V(\mathbf{x}_1) \langle \mathbf{x}_1 | \hat{G}_0(E) | \mathbf{x}_2 \rangle V(\mathbf{x}_2) \langle \mathbf{x}_2 | \hat{G}_0(E) | \mathbf{x}_3 \rangle V(\mathbf{x}_3) \langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{k}' \rangle}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \quad (\text{C.32})$$

$$\times \overline{V(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_3)} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}_1} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{x}_2} e^{-i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}_3}$$

$$= 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 \quad (\text{C.33})$$

$$\times \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \gamma(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}_1} e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{x}_2} e^{-i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}_3}$$

$$= 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 d\mathbf{x}'_3 \gamma(\mathbf{x}'_1) \gamma(\mathbf{x}'_2) \gamma(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \quad (\text{C.34})$$

$$\times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}'_1} e^{-i(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}'_2} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}'_3}$$

$$= \langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle \times 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \quad (\text{C.35})$$

$$\times \gamma(\mathbf{x}'_1) \gamma(\mathbf{x}'_2) \gamma(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}'_1} e^{-i(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}')\mathbf{x}'_2} ,$$

en réalisant le changement de variables $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \rightarrow \{\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_2\}$. On fait une nouvelle fois apparaître le fait que la self-energy est diagonale dans l'espace des $|\mathbf{k}\rangle$, traduisant l'invariance par translation du système.

On peut alors donner une expression simple du deuxième ordre de la self-energy :

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}) = 2V_R^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \gamma(\mathbf{x}'_1) \gamma(\mathbf{x}'_2) \gamma(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \quad (\text{C.36})$$

$$\times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x}'_1} e^{-i(\mathbf{k}_2-\mathbf{k})\mathbf{x}'_2}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{C}^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) , \quad (\text{C.37})$$

qui correspond à la formule mentionnée dans le chapitre 7. Cette formule peut s'interpréter dans le cadre de la théorie des perturbations comme l'action multiple du potentiel sur l'état initial, propagé librement entre ces actions.

C.3.2 Calcul à l'aide la représentation spatiale

Il est possible d'obtenir une expression plus simple à évaluer numériquement en partant de la représentation spatiale du second ordre de la self-energy [2] :

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{x} G_0(E, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) G_0(E, \mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \overline{V(\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}_2)} \quad (\text{C.38})$$

$$= 2V_R^3 \int d\mathbf{x} G_0(E, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) G_0(E, \mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \gamma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{C.39})$$

$$= 2V_R^3 \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5}{(2\pi)^{5d}} G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{C.40})$$

$$\times e^{-i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})} e^{-i\mathbf{k}_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)} e^{-i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})} e^{-i\mathbf{k}_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)} e^{-i\mathbf{k}_5(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \\ = \frac{2V_R^2}{(2\pi)^{5d}} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{C.41})$$

$$\times e^{-i\mathbf{x}_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_5)} e^{-i\mathbf{x}_2(\mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)} \\ = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{4d}} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_1) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{C.42})$$

$$\times e^{-i\mathbf{x}_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_5)} e^{-i\mathbf{x}_2(\mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)} \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \\ = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{4d}} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \quad (\text{C.43})$$

$$\times e^{-i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \\ = \Sigma^{(2)}(E, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) . \quad (\text{C.44})$$

Cette dernière expression prouve à nouveau l'invariance par translation de la self-energy.

L'expression de la self-energy dans l'espace des impulsions est alors obtenue par transformée de Fourier :

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Sigma^{(2)}(E, \mathbf{x}) \quad (\text{C.45})$$

$$= \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{4d}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \\ \times e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5 - \mathbf{k})} \quad (\text{C.46})$$

$$= \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k}_2) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \\ \times \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}) \quad (\text{C.47})$$

$$= \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 d\mathbf{k}_5 G_0(E, \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_3) G_0(E, \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) , \quad (\text{C.48})$$

et faisons le changement de variables $\mathbf{k}'_3 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}'_4 = \mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_4$:

$$\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k}) = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}_5 \left(\int d\mathbf{k}'_3 G_0(E, \mathbf{k}'_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}'_3) \right) \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int d\mathbf{k}'_4 G_0(E, \mathbf{k}'_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_5 - \mathbf{k}'_4) \right) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}_5) \\ & = \frac{2V_R^3}{(2\pi)^{3d}} \int d\mathbf{k}'_5 \left(\int d\mathbf{k}'_3 G_0(E, \mathbf{k}'_3) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3) \right) \quad (\text{C.50}) \\ & \times \left(\int d\mathbf{k}'_4 G_0(E, \mathbf{k}'_4) \tilde{\gamma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \right) \tilde{\gamma}(\mathbf{k}'_5) , \end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $\mathbf{k}'_5 = -\mathbf{k}_5$ et en remarquant que $\tilde{\gamma}(\mathbf{k})$ est une fonction paire.

Plaçons-nous à présent en dimension $d = 2$.

$$\text{Im}[\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k})] = \frac{2V_R^3(2\pi\sigma^2)^3}{(2\pi)^6} \quad (\text{C.51})$$

$$\begin{aligned} & \times \int d\mathbf{k}'_5 \left(\int d\mathbf{k}'_3 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)}{E - k_3'^2/2} (-\pi) \int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k_4'^2/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \right. \\ & \left. - \pi \int d\mathbf{k}'_3 \delta(E - k_3'^2/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3) \int d\mathbf{k}'_4 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4)}{E - k_4'^2/2} \right) V(\mathbf{k}'_5) \\ & = \frac{2V_R^3(2\pi\sigma^2)^3}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}'_5 (-2\pi) V(\mathbf{k}'_5) \quad (\text{C.52}) \\ & \times \underbrace{\left(\int d\mathbf{k}'_3 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)}{E - k_3'^2/2} \right)}_{(a)} \times \underbrace{\left(\int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k_4'^2/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \right)}_{(b)} . \end{aligned}$$

Calculons à présent le premier terme :

$$(a) = \int d\mathbf{k}'_2 \frac{V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)}{E - k_3'^2/2} \quad (\text{C.53})$$

$$= \int d\mathbf{k}'_3 \frac{1}{E - k_3'^2/2} e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_3)^2 \sigma^2 / 2} \quad (\text{C.54})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} dk'_3 k'_3 \int_0^\pi d\theta'_3 \frac{1}{E - k_3'^2/2} e^{-\sigma^2/2 \times (k_3'^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 - 2k'_3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \cos \theta'_3)} , \quad (\text{C.55})$$

et en utilisant l'expression de la fonction de Bessel $\int_0^{2\pi} d\theta \exp(x \cos \theta) = 2\pi I_0(x)$ pour $x > 0$,

$$(a) = \int_{\mathbb{R}^+} dk'_3 k'_3 e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2 / 2} \frac{e^{-k_3'^2 \sigma^2 / 2}}{E - k_3'^2/2} 2\pi I_0(k'_3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma^2) \quad (\text{C.56})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) , \quad (\text{C.57})$$

en faisant apparaître les énergies adimensionnées $\epsilon = E/E_\sigma = E\sigma^2$. Avec ces unités naturelles, l'énergie cinétique s'écrit $\epsilon' = E_k/E_\sigma = k_3'^2 \sigma^2 / 2$.

Calculons le second terme :

$$(b) = \int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k'^2_4/2) V(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4) \quad (\text{C.58})$$

$$= \int d\mathbf{k}'_4 \delta(E - k'^2_4/2) e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5 - \mathbf{k}'_4)^2 \sigma^2 / 2} \quad (\text{C.59})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} dk'_4 k'_4 \int_0^{2\pi} d\theta'_4 \delta(E - k'^2_4/2) e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2 / 2} e^{-\sigma^2 k'^2_4 / 2} e^{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| k'_4 \cos \theta'_4} \quad (\text{C.60})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} dk'_4 k'_4 \delta(E - k'^2_4/2) e^{-\sigma^2 k'^2_4 / 2} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma^2 k'_4) \quad (\text{C.61})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \delta(\epsilon - \epsilon') e^{-\epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \quad (\text{C.62})$$

$$= 2\pi e^{-\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2}{2}} e^{-\epsilon} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon}) , \quad (\text{C.63})$$

avec $\epsilon' = k'^2_4 \sigma^2 / 2$ l'énergie cinétique adimensionnée.

La partie imaginaire de la self-energy vaut alors :

$$\text{Im}[\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k})] = \frac{2V_R^3 (2\pi\sigma^2)^3}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}'_5 (-2\pi) 2\pi e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2 / 2} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \quad (\text{C.64})$$

$$\begin{aligned} & \times 2\pi e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2 / 2} e^{-\epsilon} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon}) e^{-k'^2_5 \sigma^2 / 2} \\ & = -2V_R^3 \sigma^6 \int d\mathbf{k}'_5 e^{-\epsilon} e^{-|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5|^2 \sigma^2} e^{-k'^2_5 \sigma^2 / 2} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{C.65}) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'_5| \sigma \sqrt{2\epsilon'}) . \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $\mathbf{k}''_5 = \mathbf{k} - \mathbf{k}'_5$:

$$\text{Im}[\Sigma^{(2)}(E, \mathbf{k})] = -2V_R^3 \sigma^6 \int d\mathbf{k}''_5 e^{-\epsilon} e^{-k''^2_5 \sigma^2} e^{|\mathbf{k} - \mathbf{k}''_5|^2 \sigma^2 / 2} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{C.66})$$

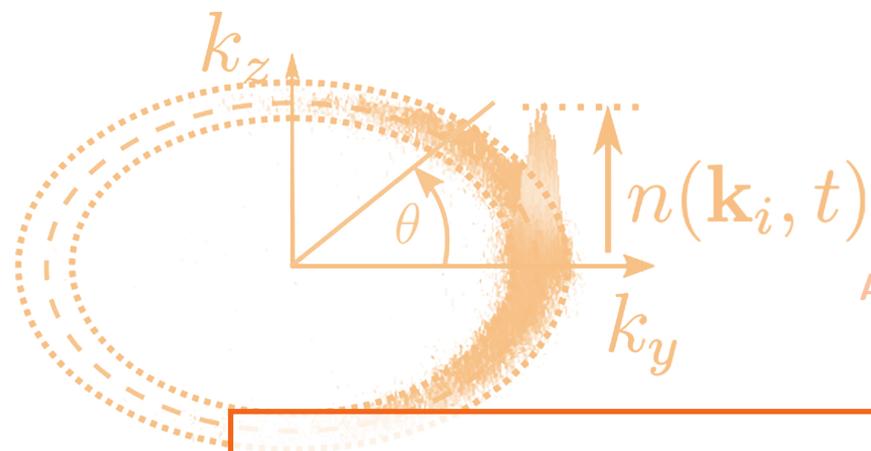
$$\begin{aligned} & \times \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \\ & = -4\pi V_R^3 \sigma^6 e^{-\epsilon} e^{-k^2 \sigma^2 / 2} \int_{\mathbb{R}^+} dk''_5 k''_5 e^{-\frac{3}{2} k''^2_5 \sigma^2} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon}) \quad (\text{C.67}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{2\pi} d\theta''_5 e^{\sigma^2 k k''_5 \cos \theta''_5} \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \\ & = -4\pi V_R^3 \sigma^6 e^{-\epsilon} e^{-k^2 \sigma^2 / 2} \quad (\text{C.68}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\mathbb{R}^+} dk''_5 k''_5 e^{-\frac{3}{2} k''^2_5 \sigma^2} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon})^2 \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{\epsilon - \epsilon'} I_0(k''_5 \sigma \sqrt{2\epsilon'}) \\ & = -4\pi \frac{V_R^3}{E_\sigma^2} e^{-k^2 \sigma^2} \int_{\mathbb{R}^+} dk' k' e^{-\frac{3}{2} k'^2} I_0(k' k \sigma)^2 \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon' \frac{e^{-\epsilon'}}{k^2 \sigma^2 / 2 - \epsilon'} I_0(k' \sqrt{2\epsilon'}) , \quad (\text{C.69}) \end{aligned}$$

en posant $k' = k''_5 \sigma$ et en faisant l'approximation en couche $E = \hbar^2 k^2 / 2m \rightarrow \epsilon = k^2 \sigma^2 / 2$. Cette dernière expression est celle que nous avons évaluée numériquement à l'aide du principe de Cauchy pour déterminer les corrections au second ordre de τ_s^{sf} dans le chapitre 7, par :

$$\frac{\hbar}{\tau_s^{\text{sf}}} = -2\text{Im} \left[\Sigma^{(1)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) + \Sigma^{(2)}(E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \right] . \quad (\text{C.70})$$



Annexe



D. Publications

- *Elastic Scattering Time of Matter Waves in Disordered Potentials*, publié en 2019 dans la revue *Physical Review Letters* et utilisé dans ce manuscrit comme référence [94].
- *Supplemental Material : Elastic Scattering Time of Matter Waves in Disordered Potentials*, associé à la référence précédente [94].
- *Ultracold atoms in disordered potentials : elastic scattering time in the strong scattering regime*, publié en 2019 dans la revue *New Journal of Physics* et utilisé dans ce manuscrit comme référence [111].

Elastic Scattering Time of Matter Waves in Disordered Potentials

Jérémie Richard,¹ Lih-King Lim,^{2,1} Vincent Denechaud,^{1,3} Valentin V. Volchkov,^{1,4} Baptiste Lecoutre,¹
Musawwadah Mukhtar,¹ Fred Jendrzejewski,^{1,5} Alain Aspect,¹ Adrien Signoles,¹
Laurent Sanchez-Palencia,⁶ and Vincent Josse^{1,*}

¹Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Saclay, 91127 Palaiseau cedex, France

²Zhejiang Institute of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, People's Republic of China

³SAFRAN Sensing Solutions, Safran Tech, Rue des Jeunes Bois, Châteaufort CS 80112, 78772 Magny-les-Hameaux, France

⁴Max-Planck-Institute for Intelligent Systems, Max-Planck-Ring, 4, 72076 Tübingen, Germany

⁵Heidelberg University, Kirchhoff-Institut für Physik, Im Neuenheimer Feld 227, 69120 Heidelberg, Germany

⁶CPHT, Ecole Polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, Route de Saclay, 91128 Palaiseau, France



(Received 17 October 2018; published 13 March 2019)

We report on an extensive study of the elastic scattering time τ_s of matter waves in optical disordered potentials. Using direct experimental measurements, numerical simulations, and comparison with the first-order Born approximation based on the knowledge of the disorder properties, we explore the behavior of τ_s over more than 3 orders of magnitude, ranging from the weak to the strong scattering regime. We study in detail the location of the crossover and, as a main result, we reveal the strong influence of the disorder statistics, especially on the relevance of the widely used Ioffe-Regel-like criterion $kl_s \sim 1$. While it is found to be relevant for Gaussian-distributed disordered potentials, we observe significant deviations for laser speckle disorders that are commonly used with ultracold atoms. Our results are crucial for connecting experimental investigation of complex transport phenomena, such as Anderson localization, to microscopic theories.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.100403

Introduction.—The elastic scattering time τ_s , i.e., the mean time between two successive scattering events, is a fundamental timescale to describe wave propagation in disorder, and is thus at the heart of theoretical descriptions of a wide class of physical systems, from light in the atmosphere or in biological tissues to electrons in solid-state systems [1,2]. Furthermore, τ_s is routinely used to characterize the scattering strength via the dimensionless quantity kl_s (k : wave number; $l_s = v\tau_s$: mean free path, with v the group velocity), which quantifies the number of oscillations of the wave between two scattering events. In this respect, the criterion $kl_s \sim 1$ is widely accepted to set the limit between the weak scattering regime, where perturbative treatments apply, and the strong scattering regime. It coincides with the Ioffe-Regel criterion associated with Anderson localization for pointlike scatterers [3].

Since τ_s is related to dephasing and not directly to transport properties, its direct determination is rather demanding [4]. So far various measurement methods have been developed, from Shubnikov–de Haas oscillations of the magnetoconductivity in electronics systems [5–8], to ballistic transmission [9,10], microscopy techniques [11–13], and intensity or phase correlations [14–19] for classical waves. However, the direct comparison between experimental determinations and *ab initio* calculations have been scarce (see, e.g., Ref. [9]) and, to our knowledge, a quantitative investigation of the relevance of the criterion

$kl_s \sim 1$ is still lacking. Atomic matter waves in optical disordered potentials offer a controllable platform to investigate the behavior of τ_s with respect to the microscopic details of the disorder. Numerous theoretical predictions exist [20–30], leading in particular to the derivation of an alternative condition to the $kl_s \sim 1$ criterion [31] in Ref. [21], rendering a precise investigation highly desirable.

In this Letter, we report direct measurements of the elastic scattering time τ_s for ultracold atoms propagating in quasi two-dimensional laser speckle disordered potential. The scattering time is directly measured by monitoring the time evolution of the momentum distribution for a wave packet having a well-defined initial momentum, and the results are compared to numerical simulations, yielding an excellent agreement. The simulations are also used to extend our investigation to the case of a Gaussian disorder, a model widely considered in condensed matter physics. Most importantly, we study the evolution of τ_s over a large range of parameters (τ_s varies by more than 3 orders of magnitude), allowing us to explore the crossover from the weak to the strong scattering regime. Comparing our results to analytical 1st order Born calculations, we reveal the strong influence of disorder statistics on the crossover and discuss the relevance of the Ioffe-Regel-like criterion $kl_s \sim 1$.

First-order Born approximation.—For weak disorder, we can develop an intuitive, physical picture of the

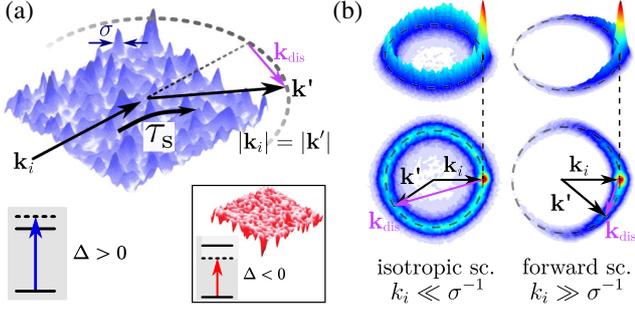


FIG. 1. Elastic scattering and Born approximation. (a) Scattering of a matter wave by a laser speckle disordered potential of typical correlation length σ . During a scattering event, which happens on the characteristic time τ_s , a momentum \mathbf{k}_{dis} is transferred to the initial momentum \mathbf{k}_i . In the Born approximation, the final momentum $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_{\text{dis}}$ lies on the elastic scattering ring (dotted circle). For positive atom-light detuning $\Delta > 0$, the laser speckle potential is repulsive. Inset: for $\Delta < 0$, it is attractive, having identical spatial properties but opposite amplitude distribution. (b) Illustrations of the 2D-momentum distributions $n(\mathbf{k}, t)$ after a typical time τ_s (1st row: side view, 2nd row: top view) for the isotropic ($k_i \ll \sigma^{-1}$) and forward ($k_i \gg \sigma^{-1}$) scattering regimes.

scattering time based on the 1st-order Born approximation (referred to as Born approximation in the following) [1,2]. In this perturbative treatment, τ_s can be interpreted as the finite lifetime of the incoming free state $|\mathbf{k}_i\rangle$, as it is scattered towards a continuum of final momenta $|\mathbf{k}'\rangle$ with $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$. The initial momentum distribution therefore decays exponentially in this regime, with the characteristic time τ_s :

$$n(\mathbf{k}_i, t) = n(\mathbf{k}_i, 0)e^{-t/\tau_s}, \quad (1)$$

where t is the propagation time in the disorder. The scattering is only allowed if there exists a spatial frequency component \mathbf{k}_{dis} in the disordered potential that matches the elastic scattering condition $\mathbf{k}_{\text{dis}} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_i$ [Fig. 1(a)]. The weight of scattering in this direction relies uniquely on the spatial frequency distribution of the disorder $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$, i.e., the Fourier transform of the two-point correlation function $C(\Delta\mathbf{r}) = \overline{V(\mathbf{r})V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})}$ (where $\overline{\dots}$ refers to disorder averaging). Using the Fermi golden rule, the Born elastic scattering time τ_s^{Born} is obtained by summing the contributions coming from the scattering in all directions, yielding

$$\frac{\hbar}{\tau_s^{\text{Born}}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i) \delta[\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}_i}], \quad (2)$$

where $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ is the free-state energy, with m the atomic mass.

The correlation length σ of the disorder, i.e., the typical width of $C(\Delta\mathbf{r})$, introduces a characteristic spatial frequency σ^{-1} that defines two scattering regimes. For low initial momentum $k_i \ll \sigma^{-1}$, the disorder contains the spatial

frequencies that are necessary to scatter the atoms in all directions and the scattering is isotropic [see Fig. 1(b)]. In the opposite case of large momentum $k_i \gg \sigma^{-1}$, the disorder's spatial frequencies are too small for satisfying the backward scattering condition ($\mathbf{k}_{\text{dis}} = -2\mathbf{k}_i$) and the scattering is essentially concentrated in the forward direction. As discussed in Refs. [21,26,27,29], the Born prediction (2) yields different behaviors in the two regimes: τ_s^{Born} is essentially constant for isotropic scattering while it increases linearly with momentum in the forward case (see dashed lines in Fig. 2 and Ref. [32] for further details).

Note that the validity of the Born approximation can be estimated in an intuitive manner. Because of its finite lifetime τ_s^{Born} , the matter wave acquires a finite energy width $\Delta\epsilon = \hbar/\tau_s^{\text{Born}}$ [responsible for the ring's width seen in Fig. 1(b)]. By consistency, $\Delta\epsilon$ should be much smaller than the initial energy $\epsilon_{k_i} \propto k_i^2$, yielding the usual weak scattering criterion $k_i l_s^{\text{Born}} \gg 1$ introduced above (with $l_s^{\text{Born}} \propto k_i \tau_s^{\text{Born}}$). In the following we study experimentally and numerically the validity of this criterion by analyzing scattering times for various potential disorders $V(\mathbf{r})$ and over a large range of initial momentum \mathbf{k}_i , allowing us to investigate the crossover between weak and strong scattering.

Experiment.—Based on Eq. (1), we directly measure τ_s by monitoring the decay of the initial momentum distribution of atoms launched with a well defined initial momentum \mathbf{k}_i into a disordered potential $V(\mathbf{r})$ [25]. The experimental setup is similar to the one described in Refs. [33,34]. It relies on the production of a quasi-non-interacting cloud of 10^5 ^{87}Rb atoms in a $F = 2$, $m_F = -2$ Zeeman sublevel, suspended against gravity by a magnetic field gradient. A delta-kick cooling sequence leads to an ultra-narrow momentum spread $\Delta k = 0.15 \mu\text{m}^{-1}$ ($T \sim 150$ pK). A mean initial momentum \mathbf{k}_i , ranging from $k_i = 1$ to $k_i = 20 \mu\text{m}^{-1}$ along the y axis, is then given to the atoms by pulsing an external magnetic gradient for a tunable duration.

A quasi-2D disordered potential in the $(y-z)$ plane is created by a laser speckle field [35,36], realized by passing a laser beam along the x axis through a rough plate and focusing it on the atoms [32]. The wavelength of the laser is red- or blue-detuned with respect to the atomic transition (D_2 line of ^{87}Rb around 780 nm) in order to create either an attractive or a repulsive disordered potential [see Fig. 1(a)]. The detuning being small enough ($\Delta \sim 1$ THz), both disorders have the same spatial correlation function, with a measured correlation length $\sigma = 0.50(1) \mu\text{m}$ (radius at $1/e$). However, they differ by their probability distribution $P(V)$, both exhibiting the asymmetrical exponential distribution of laser speckle fields [36], but with opposite signs (see inset of Fig. 3): $P(V) = |V_R|^{-1} e^{-V/V_R} \Theta(V/V_R)$, with Θ the step function. Here V_R is the averaged amplitude (negative for attractive and positive for repulsive laser speckle), while the rms disorder amplitude, i.e., the quantity that characterizes the disorder strength, is the

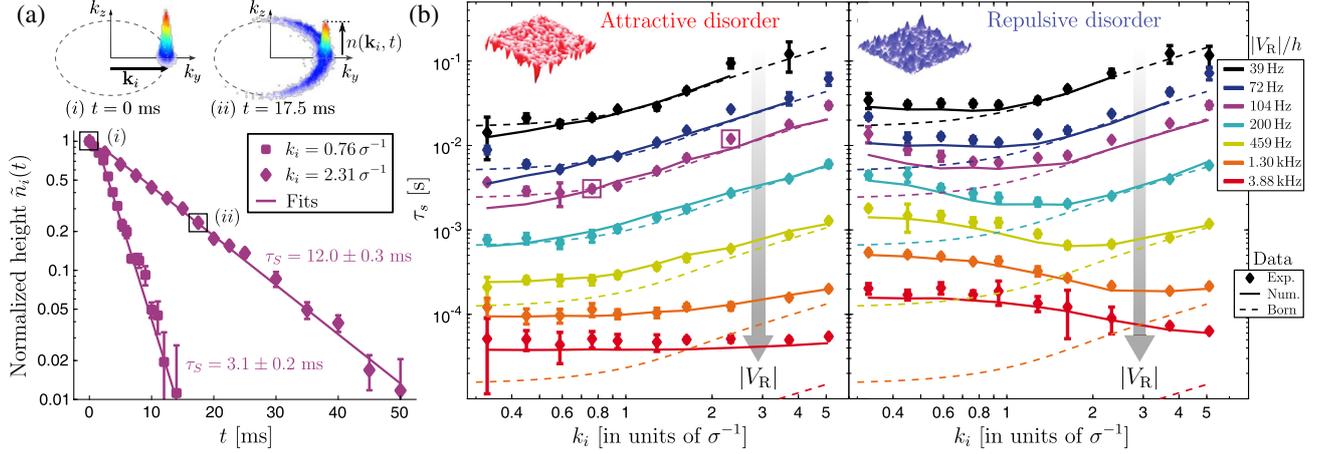


FIG. 2. Measurements of the elastic scattering time τ_s . (a) Measurement procedure. The momentum distributions $n(\mathbf{k}, t)$ are observed for different propagation times t in the disorder, here shown for the parameters $V_R/h = -104$ Hz (attractive case) and $k_i = 2.31\sigma^{-1}$. The normalized height $\tilde{n}_i(t)$ is determined from $n(\mathbf{k}, t)$ by a Gaussian fit of the radially integrated angular profile [32]. When plotted as a function of the time t , it shows an exponential decay from which we extract τ_s , as illustrated for two different initial momenta $k_i = 0.76\sigma^{-1}$ and $k_i = 2.31\sigma^{-1}$, still at $V_R/h = -104$ Hz. (b) Experimental (points) and numerical (solid lines) values of τ_s as a function of the initial momentum k_i for different values of the disorder amplitude $|V_R|$, for attractive disorder (left panel) and repulsive disorder (right panel). The initial momenta are shown in units of the characteristic frequency σ^{-1} of the disorder. Born predictions τ_s^{Born} are indicated by dashed lines. Note that the Born curves are simply shifted down for the various disorder amplitudes due to the scaling $\tau_s^{\text{Born}} \propto 1/|V_R|^2$ (see text).

absolute value $|V_R|$. When varying the laser power and detuning, $|V_R|/h$ ranges from 39 Hz to 3.88 kHz.

The experimental sequence starts with the preparation of an atomic cloud with momentum \mathbf{k}_i . At $t = 0$ we rapidly switch on the disorder potential $V(\mathbf{r})$, performing a quantum quench of the system. After a time evolution t , the disorder is switched off and we record the momentum distribution $n(\mathbf{k}, t)$ by fluorescence imaging after a long time of flight. Thanks to gravity compensation, up to 300 ms can be achieved, corresponding to a momentum resolution $\Delta k_{\text{res}} = 0.2 \mu\text{m}^{-1}$ [37]. From these images we extract the evolution of the initial momentum population $n(\mathbf{k}_i, t)$, as shown in Fig. 2(a) [32]. At low disorder strength $|V_R|$, an exponential decay is observed for almost two orders of magnitude and a fit yields the experimental value of τ_s [refer to Eq. (1)]. Such exponential decay is expected to persist at larger disorder amplitudes, except if one drives the system to the very strong scattering regime (see, e.g., Ref. [38]). However, no significant departure from an exponential decay was observed in our experiment and all the recorded decays could be fitted by an exponential function.

General results.—Figure 2(b) shows the measured values of the elastic scattering time τ_s for both the attractive and repulsive laser speckle disorder cases. The large set of disorder amplitude and initial momenta allows us to observe variations of τ_s from 40 μs to 100 ms. These observations are compared to 2D numerical calculations (solid lines) [32], with a remarkable agreement over almost the whole data range, confirming the quasi-2D character of

our configuration. Deviations are nevertheless observed in a small zone (very low momenta and disorder amplitudes, upper left part on the graphs) and may be attributed to technical difficulties to precisely measure τ_s in this regime due to the finite momentum resolution Δk_{res} .

The Born prediction (2) is also shown in Fig. 2(b) (dashed lines) [39]. Note that τ_s^{Born} scales with the rms value $|V_R|$ as $1/|V_R|^2$ [32], but does not depend on the specific form of the disorder amplitude distribution $P(V)$. As a consequence, the prediction is strictly identical for both attractive and repulsive speckles, since they possess the same frequency distribution $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$. In general, τ_s^{Born} shows a very good agreement with the data at low scattering strength, i.e., weak $|V_R|$ and large k_i [upper right part on Fig. 2(b)], as expected for this first order perturbative approach. However significant deviations appear at the lowest disorder amplitude ($|V_R|/h = 39$ Hz, black dots) when considering the low initial momentum range $k_i \lesssim \sigma^{-1}$. As the disorder strength $|V_R|$ increases, the deviations become more pronounced and extend to larger momenta. In strong scattering conditions, the two regimes previously identified (isotropic and forward scattering) are then not relevant anymore. Moreover, large differences are observed between attractive and repulsive disorders, another signature of the complete failure of the Born approximation.

In order to visualize these deviations, we show in Fig. 3 maps of the ratio $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}}$ as a function of the parameters k_i and $|V_R|$. The important role of the disorder statistics is further emphasized by numerically extending our analysis to the case of a disorder with a Gaussian amplitude

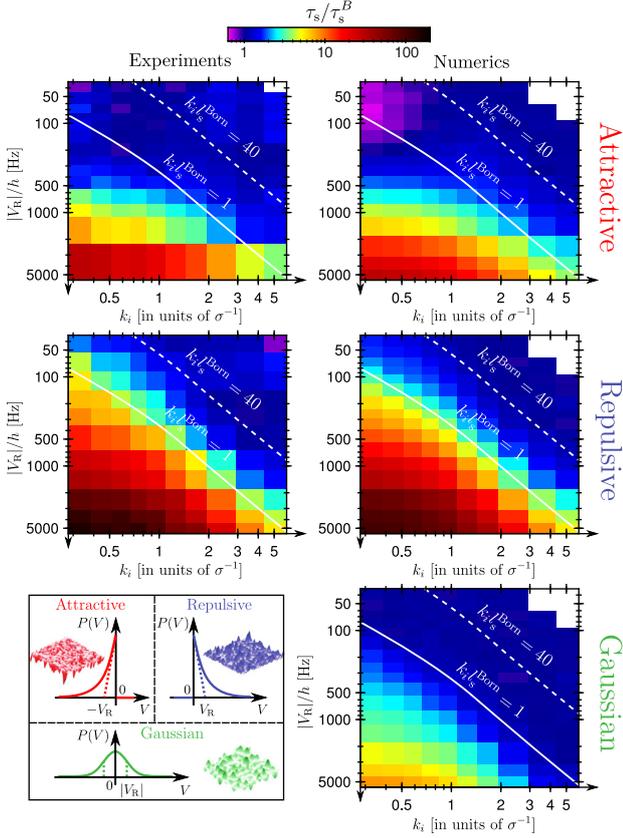


FIG. 3. Deviations from the Born predictions for different disorder amplitude distributions. 2D representation (logarithmic color scale) of the ratio $\tau_s/\tau_s^{\text{Born}}$ as a function of $|V_R|$ and k_i for attractive (1st row) and repulsive (2nd row) disordered potentials. Both experimental (left column) and numerical (right column) data are shown. 3rd row: same representation for a Gaussian-distributed disorder (numerical study). The amplitude probability distributions $P(V)$ for the three types of disorders are plotted in the inset.

probability distribution $P(V) = (\sqrt{2\pi}V_R)^{-1}e^{-V^2/2V_R^2}$ (inset of Fig. 3), $|V_R|$ being still the rms value. For consistency, we have chosen the same two-point correlation function $C(\Delta\mathbf{r})$ as the one of the laser speckles considered so far [32].

Weak to strong scattering crossover.—The maps shown in Fig. 3 allow us to investigate the crossover between the weak (Born regime) and strong scattering regimes. Considering first the case of a Gaussian-distributed disorder (3rd row), we observe a striking coincidence between the isodeviation lines and the dimensionless parameter $k_i l_s^{\text{Born}}$. In particular, the $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ line, i.e., the usual criterion introduced earlier, corresponds to a typical deviation of 25%. Importantly enough, this observation confirms, in a quantitative manner, the relevance of the criterion $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ to differentiate the weak and strong scattering regimes for this commonly used type of disorder.

In contrast, this criterion does not hold for laser speckle disorders, for which the deviations to the Born prediction are much more pronounced. For instance, the $k_i l_s^{\text{Born}} = 1$ line corresponds now to deviations up to 250% for the attractive case (1st row) and to 400% for the repulsive case (2nd row). As a result, the crossover is significantly shifted towards larger $k_i l_s^{\text{Born}}$ values, i.e., larger momenta and lower disorder amplitudes. More precisely, the same 25% deviation as considered above corresponds to an effective criterion $k_i l_s^{\text{Born}} = 40$ (white dashed lines).

Beyond the 1st order Born approximation.—An exhaustive description of the deviations from the Born prediction is beyond the scope of the present Letter [40]. However, it is possible to get some physical insight by considering two different regimes. First, in the intermediate scattering regime of low momenta and low disorder amplitude (upper left part of the maps in Fig. 3), the deviations can still be understood within perturbative theory [1,2], going to higher-order corrections [21,41,42]. Since the next higher-order term scales as $1/V_R^3$, it is negative for attractive speckle disorder, positive for the repulsive one, but vanishes for Gaussian disorder due to the symmetry of the probability distribution. This explains the important difference between the three types of disorder in this parameter range.

When going to the very strong scattering regime (lower left part of the maps), the perturbative approach completely breaks down. To interpret the data, it is then fruitful to invoke the general concept of spectral functions $A_{\mathbf{k}_i}(E)$, which give the energy probability distribution of the initial state $|\mathbf{k}_i\rangle$ once the disorder is suddenly switched on. Their width is indeed inversely proportional to the measured scattering time τ_s [43]. In the strong disorder limit, the spectral functions are known to converge towards the disorder amplitude distribution $P(V)$ [38,44,45]. As a result τ_s essentially scales as $1/|V_R|$ in this limit, yielding values well above the Born prediction (scaling as $1/|V_R|^2$, see above). That general trend explains the large positive deviations observed in Fig. 3. In this regime, the specific shape of the spectral functions associated to each type of disorder leads however to discrepancies for the measured scattering times [38,44,45]. In particular the spectral functions for the repulsive speckle disorder exhibit a narrow peak at low energy [46], which is responsible for the striking increase of the scattering time (almost 2 orders of magnitude from the Born prediction). In order to support this analysis, we have verified the very good agreement between the present measurements and the width of the spectral functions recently measured for laser speckle disorders in Ref. [45].

Conclusion.—Combining direct experimental measurements, numerical simulations, and comparison with *ab initio* Born calculations, we have provided an extensive analysis of the elastic scattering time τ_s for ultracold atoms in disordered potential. Using the large accessible range of parameters, we have demonstrated the strong influence of

the disorder statistics on the relevance of the commonly accepted $kl_s \sim 1$ criterion to identify the crossover from the weak to strong scattering regime: while it is relevant for Gaussian disorder, large deviations are reported for laser speckle disorder.

Our results open various prospects. On the theory side, a natural follow-up would be to go beyond the Born approximation and compare our data to higher order perturbative treatments [21,30,41,42], self-consistent Born approximation [22,24,47], the recently developed Schwinger-Ward-Dyson theory [48], or semiclassical approaches [38,44]. On the experimental side, the precise knowledge of the elastic scattering time for laser speckle reported here is of particular importance in view, for instance, to investigate Anderson localization [49,50]. This work then paves the way for further experimental investigation in strong connection with microscopic theories, either using the spectroscopic scheme proposed in Ref. [45], or searching for direct signatures in momentum space [25,33,34,51–53].

We would like to thank D. Delande, T. Giamarchi, G. Montambaux, C. Müller, and S. Skipetrov for fruitful discussions and comments. This work has been supported by ERC (Advanced Grant “Quantatop”), Institut Universitaire de France, the French Ministry of Research and Technology (ANRT, through a DGA grant for J. R. and CIFRE/DGA grant for V. D.), the EU-H2020 research and innovation program (Grant No. 641122-QUIC and Marie Skłodowska-Curie Grant No. 655933), Region Ile-de-France in the framework of DIM SIRTEQ and the Simons Foundation (Grant No. 563916: Localization of waves).

*Corresponding author.

vincent.josse@institutoptique.fr

- [1] J. Rammer, Quantum Transport Theory, Frontiers in Physics (Avalon Publishing, Boca Raton, 2004).
- [2] E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2007).
- [3] A. Lagendijk, B. van Tiggelen, and D. S. Wiersma, Fifty years of Anderson localization, *Phys. Today* **62**, No. 8, 24 (2009).
- [4] The transport properties are linked to the transport time τ^* , which is related to the isotropization of the momentum distribution [1,2].
- [5] H. H. J. M. Niederer, Magneto oscillatory conductance in n -type inverted silicon surfaces, *Jpn. J. Appl. Phys.* **13**, 339 (1974).
- [6] T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, Electronic properties of two-dimensional systems, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
- [7] U. Bockelmann, G. Abstreiter, G. Weimann, and W. Schlapp, Single-particle and transport scattering times in narrow GaAs/Al_xGa_{1-x} quantum wells, *Phys. Rev. B* **41**, 7864 (1990).
- [8] M. Monteverde, C. Ojeda-Aristizabal, R. Weil, K. Bennaceur, M. Ferrier, S. Guéron, C. Glattli, H. Bouchiat, J. N. Fuchs, and D. L. Maslov, Transport and Elastic Scattering Times as Probes of the Nature of Impurity Scattering in Single-Layer and Bilayer Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 126801 (2010).
- [9] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, X. Jing, and D. A. Weitz, Group velocity in strongly scattering media, *Science* **271**, 634 (1996).
- [10] R. Savo, R. Pierrat, U. Najar, R. Carminati, S. Rotter, and S. Gigan, Observation of mean path length invariance in light-scattering media, *Science* **358**, 765 (2017).
- [11] S. L. Jacques, B. Wang, and R. Samatham, Reectance confocal microscopy of optical phantoms, *Biomed. Opt. Express* **3**, 1162 (2012).
- [12] D. Sevrain, M. Dubreuil, A. Leray, C. Odin, and Y. L. Grand, Measuring the scattering coefficient of turbid media from two-photon microscopy, *Opt. Express* **21**, 25221 (2013).
- [13] C. Martin and A. Ben-Yakar, Determination of scattering properties and damage thresholds in tissue using ultrafast laser ablation, *J. Biomed. Opt.* **21**, 115004 (2016).
- [14] B. Shapiro, Large Intensity Fluctuations for Wave Propagation in Random Media, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2168 (1986).
- [15] P. Sebbah, B. Hu, A. Z. Genack, R. Pnini, and B. Shapiro, Spatial-Field Correlation: The Building Block of Mesoscopic Fluctuations, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 123901 (2002).
- [16] V. Emiliani, F. Intonti, M. Cazayous, D. S. Wiersma, M. Colocci, F. Aliev, and A. Lagendijk, Near-Field Short Range Correlation in Optical Waves Transmitted through Random Media, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 250801 (2003).
- [17] D. Anache-Ménier, B. A. van Tiggelen, and L. Margerin, Phase Statistics of Seismic Coda Waves, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 248501 (2009).
- [18] A. Obermann, E. Larose, L. Margerin, and V. Rossetto, Measuring the scattering mean free path of Rayleigh waves on a volcano from spatial phase decoherence, *Geophys. J. Int.* **197**, 435 (2014).
- [19] W. K. Hildebrand, A. Strybulevych, S. E. Skipetrov, B. A. van Tiggelen, and J. H. Page, Observation of Innite-Range Intensity Correlations above, at, and below the Mobility Edges of the 3D Anderson Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 073902 (2014).
- [20] R. C. Kuhn, C. Miniatura, D. Delande, O. Sigwarth, and C. A. Müller, Localization of Matter Waves in Two-Dimensional Disordered Optical Potentials, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 250403 (2005).
- [21] R. Kuhn, O. Sigwarth, C. Miniatura, D. Delande, and C. Müller, Coherent matter wave transport in speckle potentials, *New J. Phys.* **9**, 161 (2007).
- [22] S. E. Skipetrov, A. Minguzzi, B. A. van Tiggelen, and B. Shapiro, Anderson Localization of a Bose-Einstein Condensate in a 3D Random Potential, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 165301 (2008).
- [23] M. Hartung, T. Wellens, C. A. Müller, K. Richter, and P. Schlagheck, Coherent Backscattering of Bose-Einstein Condensates in Two-Dimensional Disorder Potentials, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 020603 (2008).
- [24] A. Yedjour and B. A. van Tiggelen, Diffusion and localization of cold atoms in 3D optical speckle, *Eur. Phys. J. D* **59**, 249 (2010).

- [25] N. Cherroret, T. Karpiuk, C. A. Müller, B. Grémaud, and C. Miniatura, Coherent backscattering of ultracold matter waves: Momentum space signatures, *Phys. Rev. A* **85**, 011604(R) (2012).
- [26] M. Piraud, L. Pezzé, and L. Sanchez-Palencia, Matter wave transport and Anderson localization in anisotropic three-dimensional disorder, *Europhys. Lett.* **99**, 50003 (2012).
- [27] B. Shapiro, Cold atoms in the presence of disorder, *J. Phys. A* **45**, 143001 (2012).
- [28] T. Plisson, T. Bourdel, and C. Müller, Momentum isotropisation in random potentials, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **217**, 79 (2013).
- [29] M. Piraud, L. Pezzé, and L. Sanchez-Palencia, Quantum transport of atomic matter waves in anisotropic two-dimensional and three-dimensional disorder, *New J. Phys.* **15**, 075007 (2013).
- [30] M. Piraud, L. Sanchez-Palencia, and B. van Tiggelen, Anderson localization of matter waves in three-dimensional anisotropic disordered potentials, *Phys. Rev. A* **90**, 063639 (2014).
- [31] $kl_s \sim 1$ deviates significantly, in the forward scattering regime, from the criterion $\epsilon_k \sim V_R^2/E_\sigma$ (with $E_\sigma = \hbar^2/m\sigma^2$ the correlation energy and σ the correlation length of the disorder).
- [32] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.122.100403> for details on the measurement of the scattering time, the generation and characterization of laser speckle disordered potential, the calculation of the Born predictions, and the numerical simulations.
- [33] F. Jendrzejewski, K. Müller, J. Richard, A. Date, T. Plisson, P. Bouyer, A. Aspect, and V. Josse, Coherent Backscattering of Ultracold Atoms, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 195302 (2012).
- [34] K. Müller, J. Richard, V. V. Volchkov, V. Denechaud, P. Bouyer, A. Aspect, and V. Josse, Suppression and Revival of Weak Localization through Control of Time-Reversal Symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 205301 (2015).
- [35] D. Clément, A. F. Varón, J. A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, Experimental study of the transport of coherent interacting matter-waves in a 1D random potential induced by laser speckle, *New J. Phys.* **8**, 165 (2006).
- [36] J. W. Goodman, *Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications* (Roberts and Company, Englewood, 2007).
- [37] It includes the initial momentum spread Δk and the initial size of the cloud of $30 \mu\text{m}$.
- [38] M. I. Trappe, D. Delande, and C. A. Müller, Semiclassical spectral function for matter waves in random potentials, *J. Phys. A* **48**, 245102 (2015).
- [39] It corresponds to 2D calculations, which are found in excellent agreement with full 3D calculations [32].
- [40] A detailed analysis is in preparation.
- [41] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura, One-dimensional Anderson localization in certain correlated random potentials, *Phys. Rev. A* **80**, 023605 (2009).
- [42] E. Gurevich and O. Kenneth, Lyapunov exponent for the laser speckle potential: A weak disorder expansion, *Phys. Rev. A* **79**, 063617 (2009).
- [43] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics* (Oxford University Press, Oxford, England, 2004).
- [44] T. Prat, N. Cherroret, and D. Delande, Semiclassical spectral function and density of states in speckle potentials, *Phys. Rev. A* **94**, 022114 (2016).
- [45] V. V. Volchkov, M. Pasek, V. Denechaud, M. Mukhtar, A. Aspect, D. Delande, and V. Josse, Measurement of Spectral Functions of Ultracold Atoms in Disordered Potentials, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 060404 (2018).
- [46] This peak can be traced to the presence of many bound states, with similar energies, that are supported by the valleys formed around local minima of the potential [38,44,45].
- [47] D. Vollhardt and P. Wölfle, Anderson Localization in $d < \sim 2$ Dimensions: A Self-Consistent Diagrammatic Theory, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 842 (1980).
- [48] B. Sbierski and C. Fräßdorf, Strong disorder in nodal semimetals: Schwinger-Dyson-Ward approach, *Phys. Rev. B* **99**, 020201 (2019).
- [49] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Müller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential, *Nat. Phys.* **8**, 398 (2012).
- [50] G. Semeghini, M. Landini, P. Castilho, S. Roy, G. Spagnolli, A. Trenkwalder, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno, Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization, *Nat. Phys.* **11**, 554 (2015).
- [51] T. Karpiuk, N. Cherroret, K. L. Lee, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura, Coherent Forward Scattering Peak Induced by Anderson Localization, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 190601 (2012).
- [52] S. Ghosh, C. Miniatura, N. Cherroret, and D. Delande, Coherent forward scattering as a signature of Anderson metal-insulator transitions, *Phys. Rev. A* **95**, 041602 (2017).
- [53] C. Hainaut, I. Manai, J.-F. Clément, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, G. Lemarié, N. Cherroret, D. Delande, and R. Chicireanu, Controlling symmetry and localization with an artificial gauge field in a disordered quantum system, *Nat. Commun.* **9**, 1382 (2018).

Supplemental Material: Elastic Scattering Time of Matter-Waves in Disordered Potentials

J eremie Richard,¹ Lih-King Lim,^{2,1} Vincent Denechaud,^{1,3} Valentin V. Volchkov,^{1,4}
 Baptiste Lecoutre,¹ Musawwadah Mukhtar,¹ Fred Jendrzejewski,^{1,5} Alain
 Aspect,¹ Adrien Signoles,¹ Laurent Sanchez-Palencia,⁶ and Vincent Josse^{1,*}

¹Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS,
 Université Paris-Saclay, 91127 Palaiseau cedex, France

²Zhejiang Institute of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China

³SAFRAN Sensing Solutions, Safran Tech, Rue des Jeunes Bois,
 Chateaufort CS 80112, 78772 Magny-les-Hameaux, France

⁴Max-Planck-Institute for Intelligent Systems, Max-Planck-Ring, 4, 72076 Tübingen, Germany

⁵Heidelberg University, Kirchhoff-Institut für Physik,
 Im Neuenheimer Feld 227, 69120 Heidelberg, Germany

⁶CPHT, Ecole Polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, Route de Saclay, 91128 Palaiseau, France

We describe here the methods (i) to extract the scattering time from the measurement, (ii) to generate and characterize the laser speckle field, (iii) to calculate the Born prediction adapted to our configuration and (iv) to perform the numerical simulations to estimate the scattering times.

EXTRACTION OF THE SCATTERING TIME τ_s

The measurement of the elastic scattering time τ_s is based on the decay of the initial momentum distribution $n(\mathbf{k}_i, t)$, as illustrated in Fig. ?? for the parameters $k_i = 2.31\sigma^{-1}$ and $V_R/h = -104$ Hz (same as in Fig.2(a) on the main text).

The determination of τ_s is performed in three steps. First, we determine the angular profile $n(\theta, t)$ by radially integrating the momentum distribution $n(\mathbf{k}, t)$ in the (k_y, k_z) plane, $\theta = 0$ corresponding to the initial direction [Fig. ??(a)]. The lower and upper integration limits correspond to twice the radial width of the initial momentum distribution. The reduced angular profile $\tilde{n}(\theta, t) = n(\theta, t)/n(0, 0)$ is obtained by normalizing this profile by its initial value at time $t = 0$ and $\theta = 0$. A typical angular profile $\tilde{n}(\theta, t)$ for $t = 17.5$ ms is plotted on Fig.??(b) (blue line). The general shape results from the sum of two contributions: a narrow peak $\tilde{n}_i(\theta, t)$ that corresponds to the unscattered initial distribution and a broad background $\tilde{n}_b(\theta, t)$. The latter corresponds to the scattered atoms to direction \mathbf{k}' and builds up progressively on time.

In a second step, the normalized height $\tilde{n}_i(t) = \tilde{n}_i(0, t)$ of the initial distribution is extracted by adjusting the bi-modal distribution by the sum of a narrow Gaussian peak accounting for $\tilde{n}_i(\theta, t)$ [?] and a broad Gaussian peak accounting for the background $\tilde{n}_b(\theta, t)$ [red solid line in Fig.??(b)]. Error bars of $\tilde{n}_i(t)$ represent one standard deviations and are estimated from the noise on the experimental data and the deviation of the model.

To finally extract τ_s , the decay of $\tilde{n}_i(t)$ is plotted in a semi-logarithmic scale [dots in Fig. ??(c)] and then adjusted by a pure exponential law of typical time τ_s .

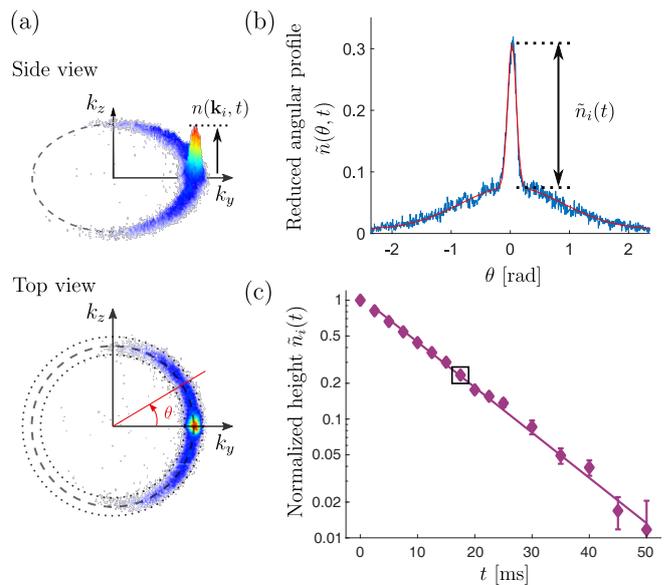


FIG. 1. **Measurement protocol of the scattering time τ_s .** The procedure is illustrated for the same parameters than in Fig. 2(a) of the main text, i.e., $k_i = 2.31\sigma^{-1}$ and $V_R = -104$ Hz. (a) Observed momentum distribution $n(\mathbf{k}, t)$ after a propagation time $t = 17.5$ ms in the disorder (top: side view; bottom: top view). The angular profile is obtained by radially integrating around the initial peak (between the two dotted lines). (b) The reduced angular profile $\tilde{n}(\theta, t)$ (blue line) is adjusted by the sum of a narrow and a broad Gaussian peak, both centered around $\theta = 0$ (red line). The amplitude of the narrow peak is used to extract the normalized height $\tilde{n}_i(t)$. (c) The normalized height $\tilde{n}_i(t)$ is plotted as a function of the propagation time t . The experimental points are fitted by an exponential function of the form e^{-t/τ_s} . Here we find $\tau_s = 12.0(3)$ ms.

LASER SPECKLE DISORDERED POTENTIAL

Quasi-2D laser speckle field generation

The laser speckle field is created by passing a laser beam of wavelength $\lambda \sim 780$ nm through a diffusive plate, the configuration being identical as the one described in Ref. [?]. As illustrated in Fig. ??(a), the incoming wave that illuminates the diffusive plate is converging at the position $d = 15.2(5)$ mm that coincides with the position of the atoms. The intensity profile of the illumination on the diffusive plate is a Gaussian shape, of waist $w = 9(1)$ mm (radius at $1/e^2$), truncated by a circular diaphragm of diameter $D = 20.3(1)$ mm. This diaphragm sets the maximal numerical aperture to $\text{NA} = \sin(\theta_{\max}) = 0.55(2)$.

In this configuration a so-called Fourier speckle pattern is formed around the position of the atoms. In order to characterize it, the random intensity pattern was recorded at the position of the atoms with an high-resolution optical microscope, see Fig. ??(b). As can be seen, the laser speckle field is very elongated along the propagation axis (x direction), resulting in a quasi-2D potential.

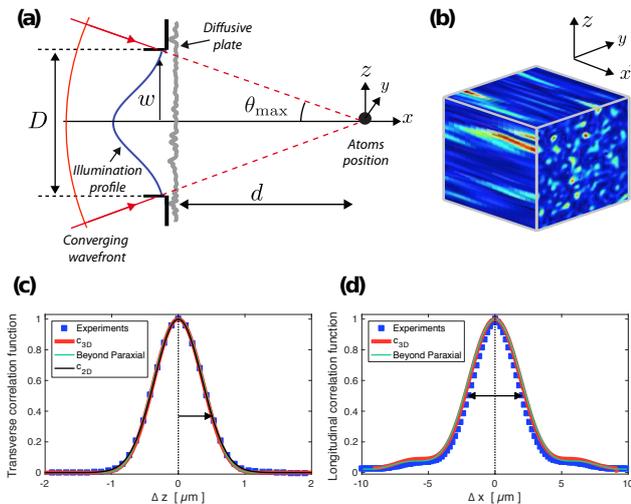


FIG. 2. **Laser speckle characterization.** (a) Schematic representation of the experimental configuration used for the speckle generation, with $\text{NA} = \sin(\theta_{\max}) = 0.55(2)$. (b) 3D representation of the experimental laser speckle field. (c) Transverse correlation function along the z direction (same along y). Blue squares: experimental measurement c_{exp} from the recorded intensity pattern. Black solid line: transverse Gaussian fit $c_{2\text{D}}$, yielding $\sigma = 0.50(1)$ μm ($1/e$ radius). Red solid line: effective paraxial calculations $c_{3\text{D}}$ (see text). Green solid line: beyond paraxial calculations, as done in Ref. [?]. This line is barely visible due to superposition with the effective paraxial model. (d) Longitudinal correlation functions with the same legend as in (c). The measured width is $\sigma_{\parallel} = 4.1(1)$ μm (FWHM).

Spatial statistical properties: measurement of the auto-correlation function

The normalized two-point correlation function of the laser speckle field,

$$c_{\text{exp}}(\Delta\mathbf{r}) = \frac{\langle \delta I(\mathbf{r}) \delta I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \rangle}{\langle \delta I^2 \rangle} \quad \text{with } \delta I = I - \langle I \rangle, \quad (1)$$

is directly calculated from the recorded spatial pattern shown in Fig. ??(b). The resulting transverse and longitudinal correlation functions are respectively shown as blue squares in Fig. ??(c) and (d).

In the transverse plane, the shape is found to be very close to a Gaussian. A fit of the form (solid black line):

$$c_{2\text{D}}(\Delta\mathbf{r}_{\perp}) = e^{-\Delta\mathbf{r}_{\perp}^2/\sigma^2}, \quad (2)$$

realized either along the y or z axis, yields $\sigma = 0.50(1)$ μm ($1/e$ radius).

The laser speckle field being very elongated, the correlation function has a much larger width in the longitudinal direction x . It is characterized by the FWHM $\sigma_{\parallel} = 4.1(1)$ μm [see Fig. ??(d)].

Modeling the laser speckle field

Due to the large numerical aperture $\text{NA} = \sin(\theta_{\max}) = 0.55(2)$, the precise modeling of the speckle field requires in principle to go beyond the paraxial approximation. A theoretical model (not detailed here) was thus used in Ref. [?] to reproduce the measured correlation functions, see green solid lines in Fig. ??(c) and (d).

However this theoretical model is quite heavy to handle, especially in view of the determination of the 3D spatial frequency distribution $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$, a key quantity to calculate the Born prediction. Thus, we developed a simpler model, based on the paraxial approximation but including a global geometrical factor x_{scale} to tune the numerical aperture. In this effective paraxial model, the correlation function can be calculated using Fourier Transform (FT) [?]:

$$c_{3\text{D}}(\Delta\mathbf{r}_{\perp}, \Delta x) \propto \left| \text{FT} \left[t(\mathbf{R}_{\perp}) I_{\text{inc}}(\mathbf{R}_{\perp}) e^{-i\pi \frac{R_{\perp}^2 \Delta x}{\lambda d}} \right]_{\frac{\Delta\mathbf{r}_{\perp}}{\lambda d}} \right|^2, \quad (3)$$

where $\text{FT} [f(x)]_u = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-2i\pi ux}$. Here $t = \text{disc}[R_{\perp}/(D_{\text{eff}})]$ represent the transmission of a circular diaphragm of diameter $D_{\text{eff}} = x_{\text{scale}} D$, and $I_{\text{inc}} = e^{-2R_{\perp}^2/(w_{\text{eff}})^2}$ is the Gaussian illumination profile on the diffuser, with effective waist $w_{\text{eff}} = x_{\text{scale}} w$.

Setting $x_{\text{scale}} = 0.875(5)$ (resulting in an effective maximal numerical aperture $\text{NA}_{\text{eff}} = 0.5$), the calculated correlation function $c_{3\text{D}}(\Delta\mathbf{r})$ matches also very well with the measurements, both on the transverse and longitudinal directions [see red solid lines in Fig. ??(c) and (d)].

Thus, we used this effective paraxial model to calculate the Born prediction for our specific disorder configuration (see below).

Calibration of the disorder amplitude V_R

In practice, the disorder amplitude V_R can be calibrated by combining photometric measurements and calculation of the atomic polarizability [?]. However it is known that such method leads to systematic uncertainties, typically around a few tens of percents (see e.g. Refs. ? ?).

Here, we used the excellent agreement between the experimental determination of τ_s and the numerical simulations [see Fig. 2(b) of the main text] to precisely determine the disorder amplitude by applying an overall correction α on the photometric measurement. In practice, the correction factor is calculated by minimizing the differences between the experiments and numerics for the particular momenta $k_i = 0.74 \sigma^{-1}$, leading to $\alpha = 1.29(2)$. We mainly attribute this correction to the difficulty to estimate precisely the extension of the speckle field at the position of the atoms.

FIRST ORDER BORN APPROXIMATION

Rescaled scattering times $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}$

An important feature of the Born prediction is the simple scaling $\tau_s^{\text{Born}} \propto 1/|V_R|^2$ with the disorder amplitude. Indeed, the spatial frequency distribution of the disorder can be written in the form $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}}) = |V_R|^2 \tilde{c}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$, where $\tilde{c}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$ is the Fourier transform of the normalized correlation function $c(\Delta\mathbf{r})$ [as in Eq. (??) above]. The Born prediction [see Eq. (2) of the main text] can then be rewritten in the form:

$$\tau_s^{\text{Born}}(\mathbf{k}_i, V_R) = \frac{\hbar E_R}{\pi V_R^2} \cdot \tilde{\tau}_s^{\text{Born}}(\mathbf{k}_i) \quad (4)$$

where $E_R = \hbar^2/m\sigma^2$ is the so-called correlation energy and $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}$ is the rescaled scattering time that gives the dependence with the momentum \mathbf{k}_i . Its expression relies on the integration of the normalized spatial frequency distribution $\tilde{c}(\mathbf{k}_{\text{dis}}) = \tilde{c}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i)$ over the elastic scattering sphere ($|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$) [? ?]:

$$\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}(\mathbf{k}_i) = \frac{4\pi^3\sigma^2}{|k_i| \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \tilde{c}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_i)}, \quad (5)$$

3D Born prediction $\tilde{\tau}_{s,3D}^{\text{Born}}$

The rescaled Born prediction $\tilde{\tau}_{s,3D}^{\text{Born}}$ corresponding to our experimental configuration is shown in Fig. ?? . As

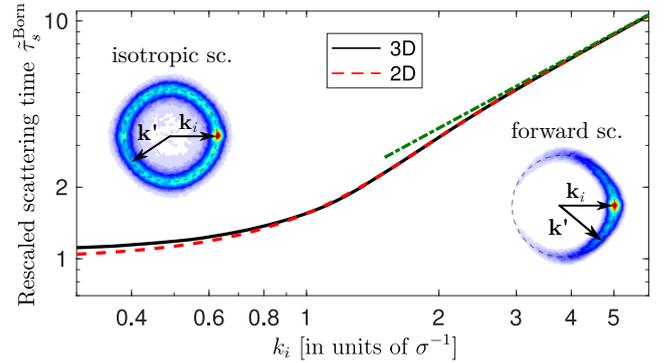


FIG. 3. **Rescaled Born prediction $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}}$** . Black solid line: 3D Born prediction $\tilde{\tau}_{s,3D}^{\text{Born}}$ using the correlation $c_{3D}(\Delta\mathbf{r})$ given by Eq. (??) (effective paraxial model). Red dashed line: 2D Born prediction $\tilde{\tau}_{s,2D}^{\text{Born}}$ for a transverse Gaussian correlation of size σ ($1/e$ radius). Green dash-dotted line: asymptotic behavior at large momentum $\tilde{\tau}_s^{\text{Born}} \sim \sqrt{\pi}k_i\sigma$. Illustrations of the momentum distribution in the isotropic ($k_i \ll \sigma^{-1}$) and forward scattering ($k_i \gg \sigma^{-1}$) regimes are the same as in Fig. (1) of the main text.

said above, this calculation uses the effective paraxial model c_{3D} given by Eq. (??) to reproduce the measured two-point correlation function.

Although the configuration is slightly different, the results discussed in Refs. ? ? for the case of a pure Gaussian illumination still hold for our case [?]. First, $\tilde{\tau}_{s,3D}^{\text{Born}}$ increases linearly with the momentum as $\sqrt{\pi}k_i\sigma$ in the large momentum limit ($k_i \gg \sigma^{-1}$), see dash-dotted green line in Fig. ?? . This behavior is generic for matter wave and does not depend on the dimension. Second, $\tilde{\tau}_{s,3D}^{\text{Born}}$ tends towards a constant in the low momentum limit ($k_i \ll \sigma^{-1}$). This behavior is specific to the laser speckle disordered potential [?]: it results from the absence of white noise limit due to the infinite correlation range in the longitudinal direction [?].

Comparison with 2D prediction $\tilde{\tau}_{s,2D}^{\text{Born}}$

The very elongated nature of the laser speckle field, having an infinite correlation range along the longitudinal direction, strongly suggests that our experiment can be described by a pure two-dimensional system. This is confirmed by the excellent agreement between the full 3D calculation $\tilde{\tau}_{s,3D}^{\text{Born}}$ and the Born prediction $\tilde{\tau}_{s,2D}^{\text{Born}}$ for a 2D disordered potential having a Gaussian correlation of size σ ($1/e$ radius). In the latter case, one has [? ?]:

$$\tilde{\tau}_{s,2D}^{\text{Born}}(\mathbf{k}_i) = e^{k_i^2\sigma^2/2}/I_0(k_i^2\sigma^2/2), \quad (6)$$

where I_0 is the zero-order modified Bessel function. $\tilde{\tau}_{s,2D}^{\text{Born}}$ tends towards 1 for low initial momentum ($k_i \ll \sigma^{-1}$) and, as expected, increases in the same way as the 3D case at large momentum ($\tau_s^{\text{Born}} \sim \sqrt{\pi}k_i\sigma$ for $k_i \gg \sigma^{-1}$).

NUMERICAL SIMULATIONS

The numerical calculations are performed by solving the Schrödinger equation for a particle of mass m in a 2D disordered potential $V(\mathbf{r})$. The initial state is a Gaussian wave packet of central momentum k_i and negligible momentum spread Δk [?]. The scattering time τ_s is extracted from the decay of the initial momentum distribution in the same way than for the experimental data (see Fig. ??). The simulations are averaged over 14 different disorder realizations, which is found sufficient to achieve convergence.

To generate the disordered potential, we first calculate the field resulting from the convolution of a spatially uncorrelated complex random field, whose real and imaginary parts are independent Gaussian random variables, with a Gaussian profile accounting for the spatial correlations. The Gaussian-distributed potential is obtained by considering the real part of this field, leading to a Gaussian amplitude probability distribution. Instead, the laser speckle disordered potentials are obtained by considering the intensity (modulus square) of the result-

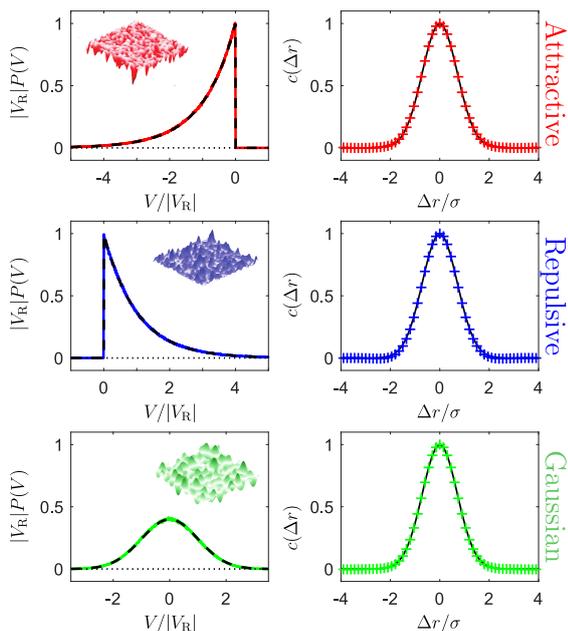


FIG. 4. **Numerically generated disorders.** The amplitude probability distribution $P(V)$ (left column) and the normalized correlation function $c(\Delta r)$ (right column) are shown for attractive (first row), repulsive (second row) and Gaussian-distributed (third row) disordered potentials. The amplitude probability distributions are in perfect agreement with the theoretical functions (black dashed lines), namely an exponential function for the attractive and repulsive disorders and a Gaussian function for the Gaussian disorder. The three disorders exhibit the same correlation function, which corresponds to a Gaussian function of size σ ($1/e$ radius).

ing field [?], with a negative (resp. positive) sign for the attractive (resp. repulsive) disorder.

In each case, we adjust the amplitude of the complex random field for the rms value of the probability distribution to be V_R . It yields $P(V) = |V_R|^{-1} e^{-V/V_R} \cdot \Theta(V/V_R)$, with Θ the step function, for the attractive and repulsive laser speckle fields (first and second rows in Fig.??), and $P(V) = (\sqrt{2\pi}V_R)^{-1} e^{-V^2/2V_R^2}$ for the Gaussian-distributed disorder (3rd row). In the same way, the spatial width of the Gaussian profile is adjusted in each case for the two-point correlation function of the disorder to be a Gaussian of size σ ($1/e$ radius), i.e., $c(\Delta r) = e^{-\Delta r^2/\sigma^2}$.

-
- * Corresponding author: vincent.josse@institutoptique.fr
- The initial momentum is not an inverted parabola — which is expected for a Bose Einstein condensate in the Thomas Fermi regime — but merely resembles to a Gaussian once the delta-kick cooling technique has been applied.
 - V. V. Volchkov, M. Pasek, V. Denechaud, M. Mukhtar, A. Aspect, D. Delande, and V. Josse, Phys. Rev. Lett. **120**, 060404 (2018).
 - J. W. Goodman, *Speckle phenomena in optics: theory and applications* (Roberts and Company, 2007).
 - D. Clément, A. F. Varón, J. A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, New Journal of Physics **8**, 1 (2006).
 - G. Semeghini, M. Landini, P. Castilho, S. Roy, G. Spagnolli, A. Trenkwalder, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno, Nat. Phys. **11**, 554 (2015).
 - J. Rammer, *Quantum Transport Theory*, Frontiers in Physics (Avalon Publishing, 2004).
 - E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic physics of electrons and photons* (Cambridge University Press, 2007).
 - M. Piraud, L. Pezze, and L. Sanchez-Palencia, EPL (Europhysics Letters) **99**, 1 (2012).
 - M. Piraud, L. Pezzé, and L. Sanchez-Palencia, New Journal of Physics **15** (2013), 10.1088/1367-2630/15/7/075007.
 - In the case of a pure Gaussian illumination, i.e., for $D \rightarrow \infty$, the longitudinal correlation has a pure Lorentzian shape, and the 3D two-point correlation function reads:

$$c_{3D, \text{Gauss}} = \frac{1}{1 + 4\Delta x^2/\sigma_{\parallel, \text{Gauss}}^2} e^{-\frac{\Delta r^2/\sigma^2}{1 + 4\Delta x^2/\sigma_{\parallel, \text{Gauss}}^2}}. \quad (7)$$

with $\sigma_{\parallel, \text{Gauss}} = 4\pi\sigma^2/\lambda$.

- In the case of a white noise limit, i.e., finite correlation range, the scattering time increases as $\propto 1/|k_i|$ in the low momentum limit.
- B. Shapiro, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **45**, 143001 (2012).
- We have checked that this momentum spread has no influence on the extracted scattering time.



PAPER

Ultracold atoms in disordered potentials: elastic scattering time in the strong scattering regime

OPEN ACCESS

RECEIVED

31 May 2019

REVISED

5 September 2019

ACCEPTED FOR PUBLICATION

20 September 2019

PUBLISHED

7 October 2019

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](#).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.



Adrien Signoles¹ , Baptiste Lecoutre¹, Jérémie Richard¹, Lih-King Lim^{1,2}, Vincent Denechaud^{1,3}, Valentin V Volchkov^{1,4}, Vasiliki Angelopoulou¹, Fred Jendrzejewski^{1,5}, Alain Aspect¹, Laurent Sanchez-Palencia⁶ and Vincent Josse¹

¹ Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91127 Palaiseau, France

² Zhejiang Institute of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, People's Republic of China

³ SAFRAN Sensing Solutions, Safran Tech, Rue des Jeunes Bois, Châteaufort CS 80112, F-78772 Magny-les-Hameaux, France

⁴ Max-Planck-Institute for Intelligent Systems, Max-Planck-Ring, 4, D-72076 Tübingen, Germany

⁵ Heidelberg University, Kirchhoff-Institut für Physik, Im Neuenheimer Feld 227, D-69120 Heidelberg, Germany

⁶ CPHT, CNRS, Ecole Polytechnique, Institut Polytechnique de Paris, Route de Saclay, 91128 Palaiseau, France

E-mail: vincent.josse@institutoptique.fr

Keywords: quantum gases, disordered systems, Anderson localization

Abstract

We study the elastic scattering time τ_s of ultracold atoms propagating in optical disordered potentials in the strong scattering regime, going beyond the recent work of Richard *et al* (2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 100403). There, we identified the crossover between the weak and the strong scattering regimes by comparing direct measurements and numerical simulations to the first order Born approximation. Here we focus specifically on the strong scattering regime, where the first order Born approximation is not valid anymore and the scattering time is strongly influenced by the nature of the disorder. To interpret our observations, we connect the scattering time τ_s to the profiles of the spectral functions that we estimate using higher order Born perturbation theory or self-consistent Born approximation. The comparison reveals that self-consistent methods are well suited to describe τ_s for Gaussian-distributed disorder, but fails for laser speckle disorder. For the latter, we show that the peculiar profiles of the spectral functions, as measured independently in Volchkov *et al* (2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 060404), must be taken into account. Altogether our study characterizes the validity range of usual theoretical methods to predict the elastic scattering time of matter waves, which is essential for future close comparison between theory and experiments, for instance regarding the ongoing studies on Anderson localization.

1. Introduction

Ultracold atoms propagating in disordered potentials offer controllable platforms to study a large variety of quantum transport phenomena [1, 2], from the celebrated Anderson localization at the single particle level [3–6], to the study of superfluid to insulator transitions [7–9] or the concept of many-body localization [10–12] for interacting atoms. One of the major interest of these systems is the ability to confront directly experiments and theory for a wide range of parameters. In this context, the precise knowledge of the elastic scattering time τ_s , which corresponds to the mean time between two scattering events, is essential. This fundamental time scale is indeed at the heart of our basic understanding of wave propagation in disordered media, and it is used by theoreticians as an elementary building block in order to elaborate quantitative descriptions of these complex systems [13–23].

However, while the elastic scattering time can be predicted with a rather good confidence in the weak scattering regime using perturbative approaches, much less is known in the strong scattering regime [24–27]. One enters this regime, which is the one of interest for Anderson localization, when the mean free path becomes smaller than the (de Broglie) wavelength, i.e. when passing the well-known Ioffe–Regel like criterion $kl_s \sim 1$

(k : wave number, $l_s = v\tau_s$: mean free path, v being the group velocity). Despite a large amount of work, either with electronic waves [28–31] or classical waves [32–42], a complete description of τ_s relying on a close comparison between theory and experiments is still lacking.

In a recent paper [43], we made an important step into that direction. There, the elastic scattering time of ultracold atoms in laser speckle disordered potential was directly measured over a very broad range of experimental parameters, and found to be in excellent agreement with numerical simulations. By comparing the deviations of τ_s to first order Born calculations [22, 23], we have identified the crossover between the weak and the strong scattering regime, revealing that its location is strongly influenced by the disorder statistics. This was done by using both attractive or repulsive laser speckle disordered potentials, whose amplitude probability distributions follow exponential laws, and by complementing our study by a numerical investigation of a Gaussian-distributed random potential, as usually considered in condensed matter [24, 25].

Here we focus on the description of the mean scattering time in the strong scattering regime, where the first order Born approximation is not valid anymore. To do so, we relate our measurements of τ_s to the width of the spectral functions. These functions give the energy-momentum relation for one particle excitation [44]. They are estimated for our specific system via two different approaches: either by extending the perturbative Born expansion to higher order terms [14, 25, 45] or by the use of the self consistent Born approximation (SCBA) [16, 17]. While we find that the perturbative approach allows us to extend the quantitative prediction of τ_s only in a limited range, a first important result is the striking agreement obtained between the SCBA predictions and the mean scattering time for the Gaussian-distributed disorder case. However this method cannot cope with the specific statistics of the laser speckle potentials, for which large deviations are observed. To get further insight, we show in a second step that these deviations can be traced to the peculiar behavior of the spectral functions for such disordered potentials [46, 47]. Indeed, we recover full consistency between our measurements of τ_s and the width of the spectral functions when considering the real profiles that have been measured independently using an radio-frequency spectroscopic method, see [48].

The manuscript is organized as follows. In section 2, we review the measurements of the elastic scattering time and the comparison with the 1st order Born approximation as presented in Richard *et al* [43]. Section 3 provides the adequate framework, based on the direct connection between time properties and spectral functions, to further describe elastic scattering time beyond the first order Born approximation. Finally, we link in section 4 our observations of elastic scattering time with experimentally obtained profiles of the spectral functions, both for attractive and repulsive laser speckle disorders.

2. Elastic scattering time along the crossover from weak to strong scattering

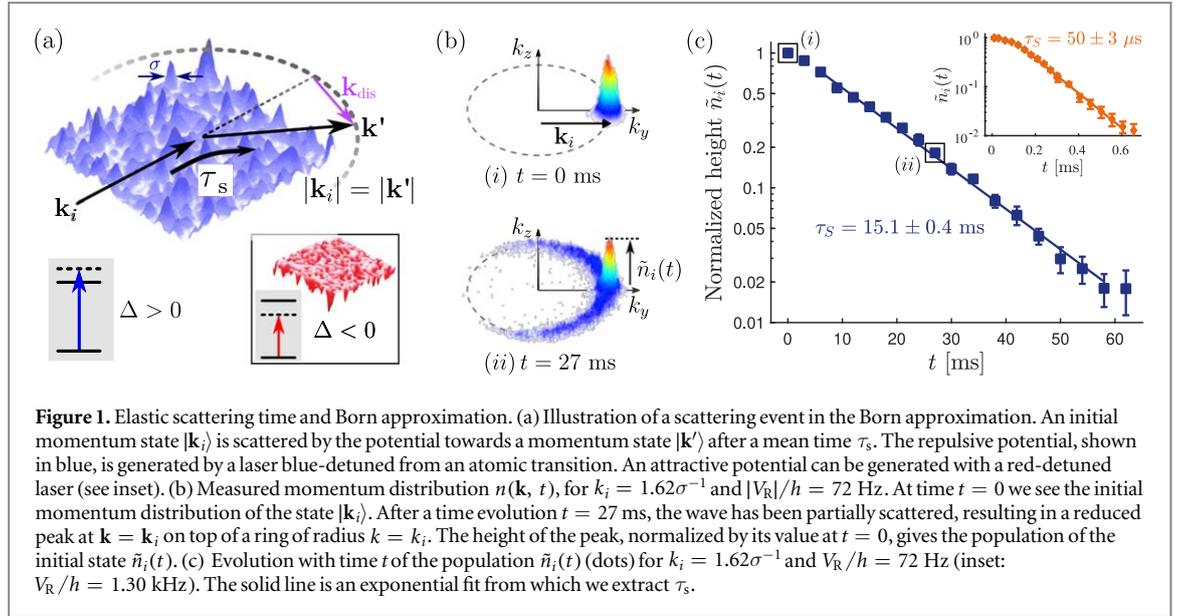
Using ultracold atoms propagating in optical disordered potentials, we experimentally and numerically determined in [43] the scattering time τ_s of a matter wave launched in a disordered potential $V(\mathbf{r})$ with a well-defined momentum \mathbf{k}_i . By exploring a broad range of microscopic parameters, we collected an extensive set of data that we use all along this study as a support to explore the behavior of τ_s in the strong scattering regime. This section reviews the main results of [43], especially the comparison with the first order Born predictions, providing all the details relevant to the remainder of this work.

2.1. Lifetime of excitation in disorder: the first order Born approximation

In the weak scattering regime, the propagation of a wave can be described as a succession of independent scattering events that are separated on average by a time τ_s , and between which the wave freely propagates. This approximation is known as the first order Born approximation, since it can be obtained by restricting the Born perturbative series to its first order (see section 3 for more details) [24, 25]. In this simple picture, each event results in a transfer from the initial momentum state $|\mathbf{k}_i\rangle$ toward a continuum of final momentum states $|\mathbf{k}'\rangle$, with $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}_i|$, see figure 1(a). The elastic scattering time τ_s can be then interpreted as the lifetime of the initial state $|\mathbf{k}_i\rangle$, this time being inversely proportional to the transfer rate to the continuum. The population $\tilde{n}_i(t)$ of $|\mathbf{k}_i\rangle$ is thus expected to decay exponentially with time t , with a characteristic time τ_s :

$$\tilde{n}_i(t) = \tilde{n}_i(0)e^{-t/\tau_s}. \quad (1)$$

The scattering time τ_s can be calculated using Fermi golden rule. The coupling rate $|\overline{\langle \mathbf{k}_i | V | \mathbf{k}' \rangle}|^2$ (where $\overline{\quad}$ refers to disorder averaging) to each state $|\mathbf{k}'\rangle$ is given by the spatial frequency distribution of the disorder $\tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}')$. Here, \tilde{C} refers to the Fourier transform of the two-point correlation function $C(\Delta\mathbf{r}) = \overline{\delta V(\mathbf{r})\delta V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})}$, with $\delta V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) - \overline{V(\mathbf{r})}$ the fluctuations of the disordered potential. It leads to an estimate of the elastic scattering time in the Born approximation



$$\frac{\hbar}{\tau_s^{\text{Born}}} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') \delta(\mathcal{E}_{k_i} - \mathcal{E}_{k'}), \quad (2)$$

where $\mathcal{E}_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ is the free-state energy, with m the atomic mass and $\hbar = h/2\pi$ the reduced Plank constant. Hence τ_s^{Born} depends only on the spatial correlations of the potential given by $C(\Delta\mathbf{r})$. Since its amplitude is proportional to $|V_R|^2$, with $|V_R|$ the rms value of the disorder potential, an important feature of (2) is the simple $1/|V_R|^2$ scaling. As a direct consequence, the Born prediction τ_s^{Born} is not sensitive to the specific form of the amplitude probability distribution $P(V)$.

2.2. Measurements of the elastic scattering time

As discussed in [43], we experimentally measure τ_s by monitoring the decay of the population in the initial momentum state $|\mathbf{k}_i\rangle$ given by (1). The experimental setup relies on an ultracold, non-interacting Bose–Einstein condensate of ^{87}Rb that expands in a quasi-2D laser speckle field [49, 50]. We prepare the atoms with an initial momentum \mathbf{k}_i along the y direction, the norm k_i ranging from 1 to $20 \mu\text{m}^{-1}$, by pulsing an external magnetic gradient for a tunable duration. The laser wavelength for the speckle can be either red- or blue-detuned with respect to the atomic transition, yielding attractive or repulsive disordered potentials (see figure 1(a)). They exhibit inverted amplitude probability distributions that follow the asymmetrical exponential laws $P_{\text{sp}}(V) = |V_R|^{-1} e^{-V/V_R} \cdot \Theta(V/V_R)$, with Θ the step function. While the averaged amplitude is given by V_R (negative for attractive and positive for repulsive laser speckle), the disorder strength is characterized by the rms disorder amplitude $|V_R|$. It can be tuned from $|V_R|/h = 39$ Hz to 3.88 kHz by varying the laser power and detuning. The laser speckle is shine on the atoms along the x axis, resulting in a very elongated speckle pattern in this direction. This yields to a quasi-2D disorder geometry in the $(y - z)$ plane, whose transverse two-point correlation function $C(\Delta\mathbf{r})$ is found to have a Gaussian shape of size $\sigma = 0.50(1) \mu\text{m}$ ($1/e$ radius), see supplemental material of [43].

To extract τ_s , we record the momentum distribution $n(\mathbf{k}, t)$ at different time t by performing fluorescence imaging after a long time-of-flight (see figure 1(b)). The overall momentum resolution is $\Delta k = 0.2 \mu\text{m}^{-1}$, limited by the finite temperature of the initial state and imaging resolution. From those images we monitor the decay of the population in the initial momentum state $\tilde{n}_i(t)$ (see figure 1(c)) [43]. For weak scattering, we observe an exponential decay over typically two orders of magnitude, which we fit with (1) to extract the value of τ_s . Although the exponential decay is not expected to persist beyond the Born approximation (see e.g. [27]), at strong scattering we do not observe significant deviations from such a decay within the experimental error bars (see inset in figure 1(c)). The extraction procedure is thus kept the same over the whole range of parameters.

The experimentally measured τ_s are plotted in figure 2 for both attractive (left panel) and repulsive (middle panel) laser speckle disorder. The broad range of parameters k_i and V_R we explore allows us to observe variations of τ_s over more than three orders of magnitude. We compare the measurements with numerical simulations, performed by propagating in time a wave packet of initial momentum \mathbf{k}_i in a purely 2D disordered potential (solid lines). The agreement is in general very good and confirms the excellent control over the experimental

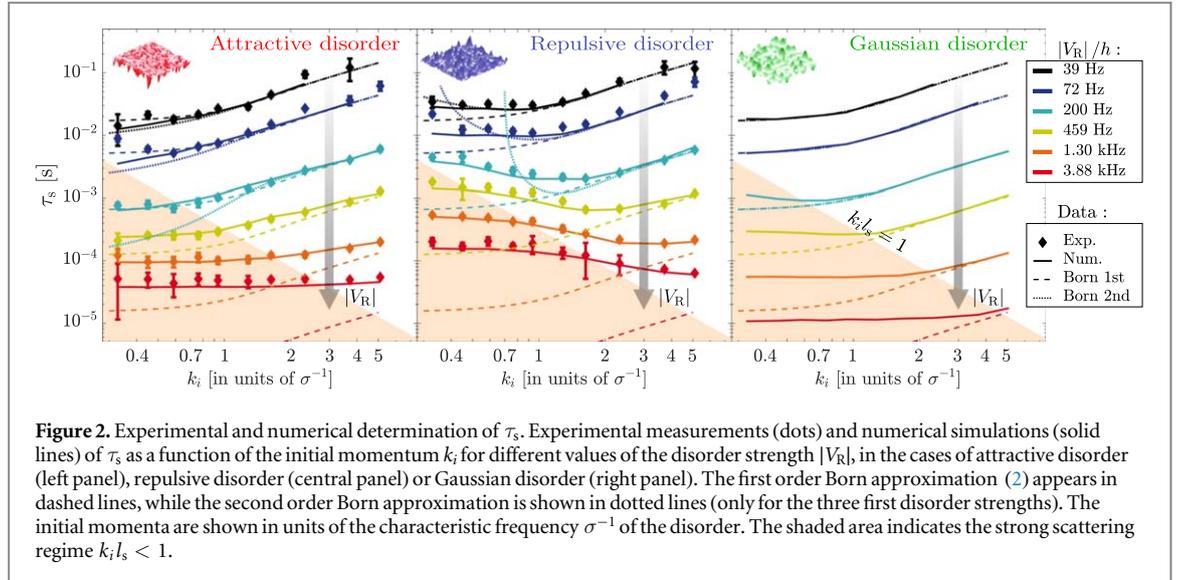


Figure 2. Experimental and numerical determination of τ_s . Experimental measurements (dots) and numerical simulations (solid lines) of τ_s as a function of the initial momentum k_i for different values of the disorder strength $|V_R|$, in the cases of attractive disorder (left panel), repulsive disorder (central panel) or Gaussian disorder (right panel). The first order Born approximation (2) appears in dashed lines, while the second order Born approximation is shown in dotted lines (only for the three first disorder strengths). The initial momenta are shown in units of the characteristic frequency σ^{-1} of the disorder. The shaded area indicates the strong scattering regime $k_i l_s < 1$.

parameters. It also highlights the quasi-2D nature of our geometry. For simplicity, we thus only compare in the following our measurements to purely 2D theoretical predictions⁷.

Numerically, we have also explored disordered potential with Gaussian amplitude probability distribution $P_g(V) = (\sqrt{2\pi} V_R)^{-1} e^{-V^2/(2V_R^2)}$ (right panel in figure 2). The two-point correlation function $C(\Delta\mathbf{r})$ is chosen to have a Gaussian shape of size σ , i.e. to be the same as for the laser speckle [43]. It is indeed of primordial interest to further explore the role of disorder statistics, in particular because Gaussian-distributed disorder is the model usually considered in condensed matter [24, 25]. Such potential could be also implemented in our experiment using spatial light modulators (see e.g. [12]).

2.3. Comparison to Born prediction

We compare the experimental and numerical data to the prediction of the first order Born approximation τ_s^{Born} given by (2) (dashed lines in figure 2). As already mentioned, the prediction is identical for the three types of disorder since they have the same two-point correlation function $C(\Delta\mathbf{r})$. Note that when changing the disorder strength $|V_R|$, the curves in the vertical logarithmic scale are simply shifted down according to the scaling $\tau_s^{\text{Born}} \propto 1/|V_R|^2$.

As expected, the agreement is very good for all three types of disorder in weak scattering regime $k_i l_s \gg 1$, corresponding to low disorder strength $|V_R|$ and large initial momentum k_i . For increasing scattering strength, distinct behaviors are observed between Gaussian-distributed and laser speckle disorders. For Gaussian-distributed disorder, the good agreement persists up to $k_i l_s \sim 1$ (indicated by the limit of the shaded area in figure 2). It validates the latter as an accurate criterion to estimate the position of the crossover between weak and strong scattering regimes [43]. For laser speckle disorders, however, the Born approximation fails at much lower scattering strength. A quantitative analysis of the deviations performed in Richard *et al* shows that the position of the crossover is shifted up to $k_i l_s \sim 40$ [43]. In addition, we note substantial differences between attractive and repulsive laser speckle disorder. The latter, commonly used in the experimental studies of Anderson localization [3, 5, 6], leads to much larger deviations from the Born prediction in the strong scattering regime.

The emergence of differences between the three types of potential indicates the break down of the first order Born approximation, revealing that the elastic scattering time becomes sensitive to higher-order correlation functions [25]. To push further theoretical investigation of the elastic scattering time, we develop the connection between time evolution of the system and spectral properties, which requires introducing the concept of spectral functions [44].

3. Scattering time and spectral functions of matter waves in disordered potentials

The spectral function $A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)$ gives the probability distribution for an excitation of momentum \mathbf{k}_i to have a certain energy \mathcal{E} , thereby generalizing the concept of dispersion relation. It is for instance used to describe quasi-particles in many-body physics [44, 51–56] or in disordered systems [14, 16, 17, 46–48]. Of particular

⁷ As detailed in the supplemental material of [43], no significant deviations were found between 3D and 2D calculations for our configuration.

interest for the latter is the width of the spectral function, which is related to the time scale of the scattering processes.

In order to get a intuitive understanding of this fundamental link, it is worth to consider once again the weak disorder picture. In the absence of disorder, an excitation of well-defined momentum $|\mathbf{k}_i\rangle$ is an eigenstate of the Hamiltonian with infinite lifetime: it has a well-defined energy and the spectral function is a Dirac distribution centered on the kinetic energy \mathcal{E}_{k_i} . When propagating into a weak disordered potential, the excitation $|\mathbf{k}_i\rangle$ is no longer an eigenstate: it acquires a finite lifetime τ_s^{Born} , given by the Fermi golden rule (2), which translates in energy space into a Lorentzian spectral function $A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)$ of finite width $\hbar/\tau_s^{\text{Born}}$. This link between energy width and time scale remains formally relevant even for strong scattering regimes. Provided that the spectral function has no apparent substructures⁸, it is indeed always possible to define a characteristic time

$$\tau_s^{\text{sf}} = \hbar / \Delta\mathcal{E} \quad (3)$$

based on the full-width at half-maximum (FWHM) $\Delta\mathcal{E}$ of $A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)$, regardless of its exact profile. In the following, our approach consists in confronting different theoretical estimates of this timescale to the scattering time τ_s that we extracted from the decay of time evolution (see section 2).

To do so, we first present (section 3.1) some basic features of the spectral functions and we discuss the expected profiles associated to the various scattering regimes. We then investigate how relevant are perturbative treatments (sections 3.2 and 3.3) and self-consistent Born theory (section 3.4) in describing, within this framework, the scattering time τ_s beyond the weak scattering regime.

3.1. Generalities about spectral functions

For disordered systems, the spectral function is generally defined from the averaged Green function \bar{G} as

$$A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\bar{G}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)]. \quad (4)$$

The calculation of the spectral functions is thus directly related to the one of $\bar{G}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)$ and we briefly review below the main steps of the derivation.

In the absence of disorder, the system is characterized by the free Green function $G_0(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k_i} + i0^+)^{-1}$, and the spectral function is indeed a Dirac function with infinitely small width. When taking into account the presence of a disordered potential, the averaged Green function \bar{G} cannot be easily determined. In a general way, the effect of the disordered potential on \bar{G} is encoded into a complex self-energy Σ , defined by the relation

$$\bar{G}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k_i} - \bar{V} - \Sigma(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i))^{-1}, \quad (5)$$

where we have explicitly isolated the energy shift \bar{V} associated to the mean energy of the potential, such that Σ is only associated to the disorder fluctuations [17]. Determining the self energy is a complex task and it is in general not possible to have an exact expression. Various theoretical approaches render possible its estimate in certain regimes, such as perturbative treatments using a Born expansion [14, 45], self-consistent approximations [16, 17] or semi-classical considerations [46, 47].

Without going further on the derivation of the self-energy (see below for the perturbative treatment and the self-consistent approach), it is nevertheless possible to gain some physical insight on the expected profiles of the spectral function in the different regimes of scattering. Indeed, equations (4) and (5) allow us to express the spectral function as

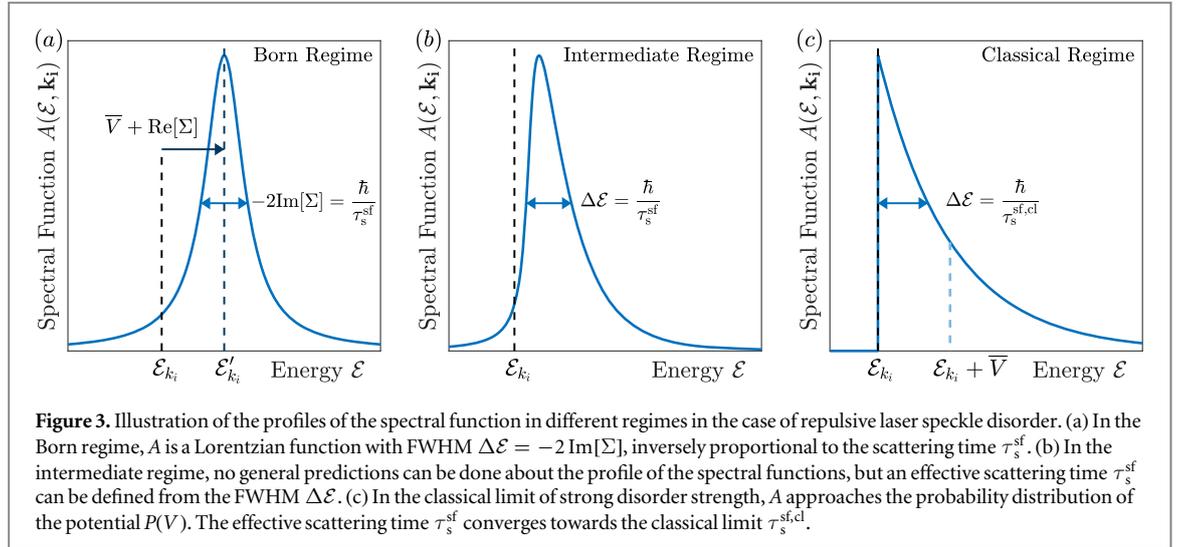
$$A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{\pi} \frac{\text{Im}[\Sigma(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)]}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k_i} - \bar{V} - \text{Re}[\Sigma(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)])^2 + (\text{Im}[\Sigma(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)])^2}. \quad (6)$$

When the scattering strength is weak, one can show that the self-energy is almost constant around the energy \mathcal{E}_{k_i} and $A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)$ can be approximated by a Lorentzian function (see figure 3(a)) [14, 22]. As we will see in section 3.2, this case corresponds to the Born regime. In a more general case, the energy dependence of the self-energy must be considered and the spectral function exhibits a different profile (see figure 3(b)) that depends on the details of the disordered potential.

When approaching infinitely large disorder strength $|V_R|$, the so-called ‘classical disorder regime’⁹, it is again possible to predict the profile of the spectral function. Since quantum effects become negligible, the energy distribution converges towards the amplitude probability distribution $P(V)$ of the potential shifted by the kinetic energy \mathcal{E}_{k_i} , i.e. $A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) \simeq P(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k_i})$ (see figure 3(c) for the specific case of a repulsive laser speckle

⁸ In the case of multiple substructures, the scattering processes are characterized by various timescales, as seen in section 4 for repulsive laser speckle disorder.

⁹ This regime refers to the limiting case $|V_R| \gg E_\sigma = \frac{\hbar^2}{m\sigma^2}$, with E_σ the correlation energy associated to the spatial correlation σ (see, e.g. [57] and references therein). For our parameters, one has $E_\sigma/h \sim 460$ Hz.



disorder) [46, 47]. In that case, the FWHM $\Delta\mathcal{E}$ of the spectral function is always proportional to $|V_R|$, with a factor that depends on the specific profile of $P(V)$, yielding the limit $\tau_s^{\text{sf,cl}} \propto 1/|V_R|$ at large disorder. We therefore expect the scattering time τ_s to be larger than the Born prediction ($\tau_s^{\text{Born}} \propto 1/|V_R|^2$) when approaching the classical disorder regime, in accordance with the observations in figure 2.

3.2. Perturbation theory: first order Born approximation

To quantitatively estimate the self-energy, a standard method is to decompose it as an infinite sum of terms known as the Born series

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots, \quad (7)$$

each term Σ_n involving $n + 1$ occurrences of the disordered potential, as for instance $\Sigma_1 = \overline{\delta V G_0 \delta V}$ or $\Sigma_2 = \overline{\delta V G_0 \delta V G_0 \delta V}$. Formally each term yields a contribution that corresponds to specific scattering processes, which can be illustrated using the so-called ‘irreducible diagrams’ [24, 25]. For instance the first term Σ_1 only describes independent scattering events, while interference between successive scattering events is taken into account starting from the next term. Giving a detailed description of each term is beyond the scope of this paper, and we refer for instance to [14] for a pedagogical derivation.

As a first step, we consider in this section the first order term of the Born series (7). This approximation, known as the first order Born approximation, yields $\Sigma \simeq \Sigma_1 = \overline{\delta V G_0 \delta V}$. This expression can be written in terms of the convolution product of the two-point correlation function $\tilde{C}(\mathbf{k}_{\text{dis}})$ and the free Green function as

$$\Sigma_1(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = \tilde{C}(\mathbf{k}_i) * G_0(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k'} + i0^+}. \quad (8)$$

An important feature of Σ_1 is that it varies slowly around the energy \mathcal{E}_{k_i} , such that $\Sigma_1(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) \simeq \Sigma_1(\mathcal{E}_{k_i}, \mathbf{k}_i)$ (see e.g. [14, 22]). As shown in figure 3(a), it results in that weak disorder case in a quasi Lorentzian profile

$$A(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) \simeq \frac{1}{\pi} \frac{\Delta\mathcal{E}/2}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}'_{k_i})^2 + \Delta\mathcal{E}^2/4}. \quad (9)$$

This function is centered around the energy $\mathcal{E}'_{k_i} \simeq \mathcal{E}_{k_i} + \overline{V} + \text{Re}[\Sigma_1(\mathcal{E}_{k_i}, \mathbf{k}_i)]$ and has a FWHM $\Delta\mathcal{E} \simeq -2\text{Im}[\Sigma_1(\mathcal{E}_{k_i}, \mathbf{k}_i)]$. The real part of the self-energy can then be directly interpreted as a light-shift induced by the disorder, while the imaginary part is responsible for the finite lifetime $\tau_s^{\text{sf}} = \hbar/\Delta\mathcal{E}$, with

$$\hbar/\tau_s^{\text{sf}} = -2\text{Im}[\Sigma_1(\mathcal{E}_{k_i}, \mathbf{k}_i)] = 2\pi \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{C}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}') \delta(\mathcal{E}_{k_i} - \mathcal{E}_{k'}). \quad (10)$$

As announced before, we recover the prediction (2) of τ_s^{Born} based on the Fermi golden rule. It is expected since the first order term Σ_1 is obtained by considering that the successive scattering events are independent from each other, neglecting all possible interference between them [24, 25]. It provides then a clear physical picture of the Ioffe–Regel like criterion $kl_s \sim 1$: when the mean free path $l_s = v\tau_s$ is much larger than the de Broglie wavelength ($kl_s \gg 1$), the phase accumulated between two successive scattering events is random and the interference is washed out.

3.3. Second order Born approximation

The comparison between our measurements and the first order Born approximation has been extensively discussed in section 2. To go beyond, we calculate now the correction to the self-energy at the second order of perturbation Σ_2 , from which we deduce the correction to the width of the spectral function $-2 \text{Im}[\Sigma_2]$. Since it involves third-order cumulants of the potential $V(\mathbf{r})$, this term vanishes for Gaussian-distributed disorder due to the symmetry of its probability distribution $P(V)$.

In contrast, it is relevant for laser speckle disorder, being of opposite signs for attractive ($V_R^3 < 0$) or repulsive ($V_R^3 > 0$) potential. The calculation in the current case of 2D laser speckle potential is detailed in appendix A. The results are shown in figure 2 (dotted lines), only for the three lowest disorder strengths for clarity. For attractive disorder, the correction $-2 \text{Im}[\Sigma_2]$ is positive, of same sign as the first order term $-2 \text{Im}[\Sigma_1]$, leading to a reduction of the estimated scattering time. For the lowest disorder strength $|V_R|/h = 39$ Hz, it yields closer prediction to the numerics than the first order Born approximation τ_s^{Born} (dashed lines). However, the corrected scattering time remains always smaller than τ_s^{Born} , while the observed τ_s lies below τ_s^{Born} at low $|V_R|$ but above at high $|V_R|$. Very rapidly, second order prediction deviates as well and higher order corrections must be included.

For repulsive disorder, the second order correction $-2 \text{Im}[\Sigma_2]$ is negative and thus of opposite sign to the first order term $-2 \text{Im}[\Sigma_1]$, yielding larger prediction for the scattering time. At very low disorder strength $|V_R|/h = 39$ Hz, it is also in very good agreement with measurements of τ_s . However, already for relatively small disorder strength, the second order correction becomes comparable to the first order term, leading to the annulation of $\text{Im}[\Sigma]$ and a diverging prediction for τ_s . To restore the convergence, higher orders must be included as well.

In summary, the second order Born approximation expands the range of validity of the model only to the limited regime of low initial momenta k_i and low disorder strength $|V_R|$. Qualitatively, it is expected since only first and second order terms, which scale respectively as $|V_R|^2$ and $|V_R|^3$, cannot reproduce the expected $\tau_s^{\text{sf,cl}} \propto 1/|V_R|$ scaling when approaching the strong scattering regime. Increasing the predictability range would then demand to extend the Born series to many orders. However, it is an asymptotic series that is known to diverge (see, e.g. [14]). There is thus an intrinsic limitation for the perturbative approach to describe τ_s far beyond the weak scattering regime.

3.4. Self-consistent Born approximation

Rather than developing a perturbative treatment, the self-energy and thus the spectral function can be estimated using a self-consistent approach. In the first order Born approximation, the initial momentum state $|\mathbf{k}_i\rangle$ is coupled to the free states $|\mathbf{k}'\rangle$ (see figure 1 (a)). Instead, the self-consistent Born approximation (SCBA) considers couplings to states dressed by the disorder. In order to account for the energy shift and the lifetime of those states, the self-energy is calculated by replacing the free Green function G_0 in (8) with the averaged Green function \bar{G} , leading to the system of equations

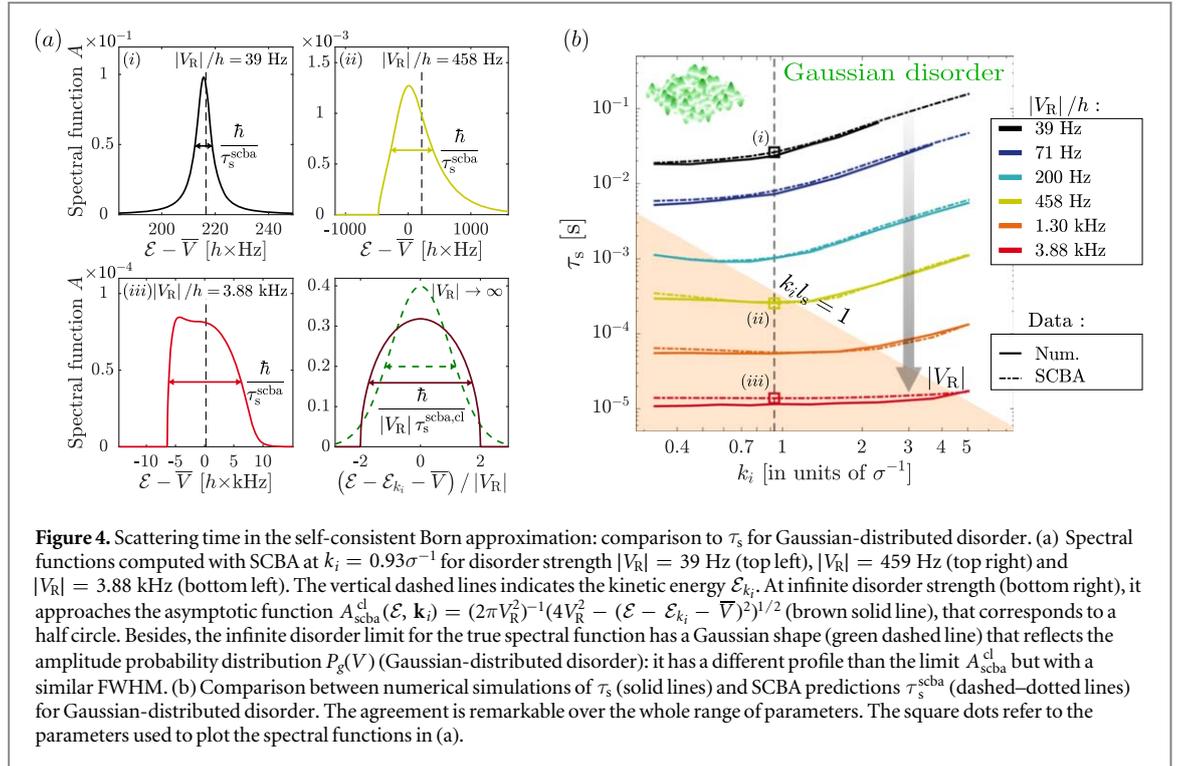
$$\Sigma_{\text{scba}}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = \tilde{C}(\mathbf{k}_i) * \bar{G}_{\text{scba}}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i), \quad (11)$$

$$\bar{G}_{\text{scba}}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k_i} - \bar{V} - \Sigma_{\text{scba}}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i))^{-1} \quad (12)$$

that must be solved self-consistently.

It is known that SCBA cannot predict the exact form of the spectral function, since, by construction, it takes only into account the two-point correlation function of the disorder C , regardless of the amplitude probability distribution $P(V)$ [46, 58]. Nonetheless, it is an open question whether SCBA provides a good estimate of the width of spectral function, and therefore can predict τ_s better than the Born approximation. To address this question, we compute the spectral function A_{scba} in the SCBA, from which we deduce the FWHM $\Delta\mathcal{E}_{\text{scba}}$ and its corresponding scattering time $\tau_s^{\text{scba}} = \hbar/\Delta\mathcal{E}_{\text{scba}}$. We perform the calculation for a disorder with a Gaussian-shaped correlation function, as considered so far, to allow for comparison of τ_s^{scba} with the extracted scattering time τ_s .

We solve (11) and (12) by iteration, up to reaching convergence (see appendix B). From the solution Σ_{scba} , we compute the spectral function using (6). Figure 4(a) shows examples of such spectral functions, at fixed k_i and for different disorder strength $|V_R|$. At low disorder strength (top left), the spectral function almost coincides with a Lorentzian function of FWHM $\hbar/\tau_s^{\text{scba}} \simeq \hbar/\tau_s^{\text{Born}}$, reproducing the expected result of the Born approximation, see (9). For intermediate (top right) and strong (bottom left) disorder strength, the spectral function is broadened and its profile deviates largely from a Lorentzian distribution. In the classical limit of infinite disorder strength (bottom right), it approaches an asymptotic function $A_{\text{scba}}^{\text{cl}}$ corresponding to a semi-circle of radius $2V_R$ centered around the energy $\mathcal{E}_{k_i} + \bar{V}$ [46]. This profile sets an analytical limit for the scattering time $\tau_s^{\text{scba,cl}} = (2\sqrt{3}V_R)^{-1}$.



To benchmark the method, we compare in figure 4(b) the resulting time τ_s^{scba} (dashed–dotted lines) to the numerically estimated τ_s in the case of Gaussian-distributed disorder (solid lines). We find that SCBA provides an excellent estimate of the scattering time over the whole range of parameters, even in the strong scattering regime $k_i l_s < 1$ (shaded area). It is particularly remarkable considering that SCBA does not reproduce spectral function in the classical limit, as illustrated in figure 4(a) by comparing $A_{\text{scba}}^{\text{cl}}$ with the actual limit P_g (bottom right, dashed line). Nonetheless, the FWHMs of those two distributions are roughly similar, justifying the good agreement observed between τ_s^{scba} and τ_s . This is also confirmed by analytical calculation of the FWHMs, which indicates that they only differ by a close-to-unity factor $\sqrt{3/(2 \ln 2)} \simeq 1.5$.

In this section, we have compared the scattering times, as extracted from the exponential decay of the initial momentum distribution, to the widths of the spectral functions computed by different methods. We found that, as expected, the first order Born approximation gives a good estimate for low disorder. Considering the second order term of the Born series accounts for deviations but only on a limited range of parameters. In contrast, for Gaussian disorder, the SCBA yields fair estimates for τ_s while not reproducing correctly the complete spectral function.

However, since the SCBA prediction depends only on the two-point correlation function, it cannot be sufficient to describe the behavior of τ_s for arbitrary probability distribution of disordered potentials [46]. This is especially the case for laser speckle disorders that are further discussed in next section.

4. Elastic scattering time and real spectral functions for laser speckle disorders

We investigate here the limitations of the SCBA in describing τ_s for both attractive and repulsive laser speckle potentials. A full understanding requires to explore in detail the features of the real spectral functions, which can in those cases exhibit complicated profiles. We perform such an analysis on the basis of the spectral functions measured in [48] in the specific case of $k_i = 0$. We show that the differences reported between attractive and repulsive laser speckle disorder are at the root of the distinct behaviors that we observe on the scattering time τ_s .

4.1. Limitations of SCBA prediction for laser speckle disorder

In figure 5(a) we compare the SCBA prediction τ_s^{scba} to the experimental determination of τ_s for attractive laser speckle disorder. Already at low initial momentum k_i and low disorder strength $|V_R|$, SCBA does not perform better than the first order Born approximation. Since it only contains even powers of the fluctuations of the disorder, it does not include the second order corrections modeled by Σ_2 and is thus less reliable than second order perturbation theory.

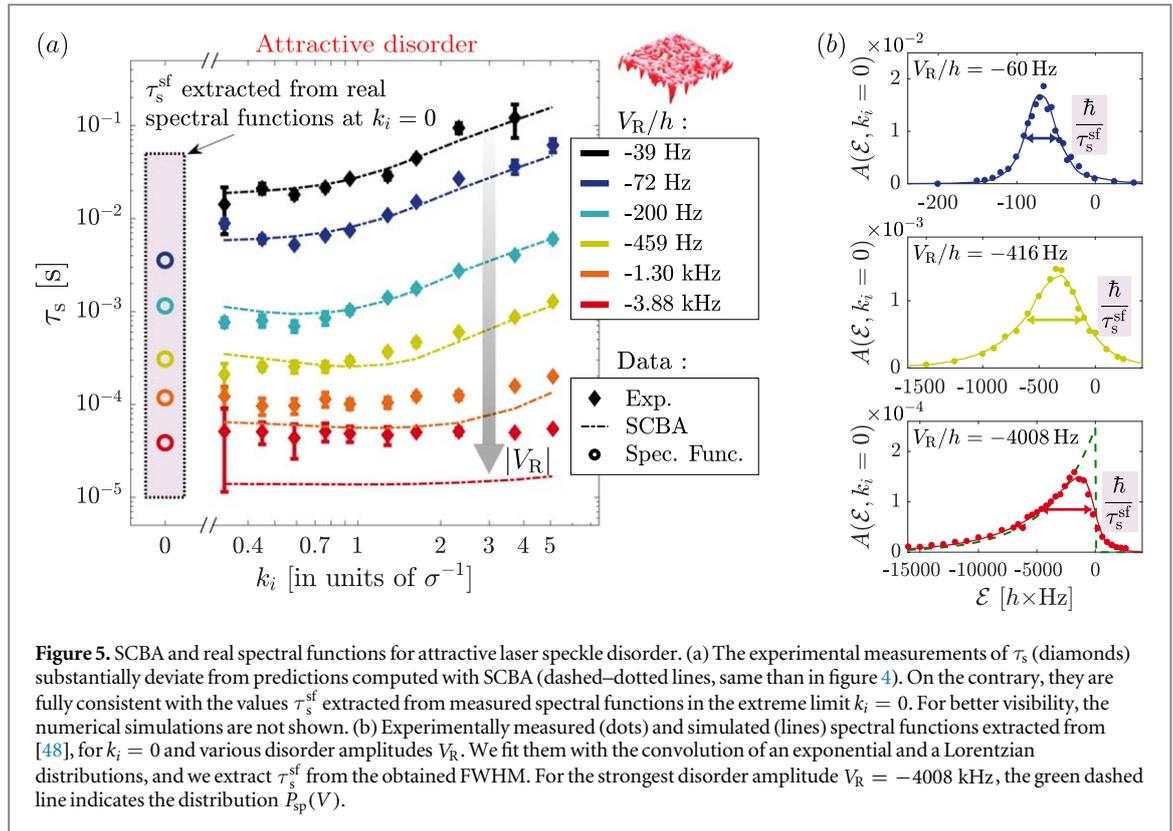


Figure 5. SCBA and real spectral functions for attractive laser speckle disorder. (a) The experimental measurements of τ_s (diamonds) substantially deviate from predictions computed with SCBA (dashed–dotted lines, same than in figure 4). On the contrary, they are fully consistent with the values τ_s^{sf} extracted from measured spectral functions in the extreme limit $k_i = 0$. For better visibility, the numerical simulations are not shown. (b) Experimentally measured (dots) and simulated (lines) spectral functions extracted from [48], for $k_i = 0$ and various disorder amplitudes V_R . We fit them with the convolution of an exponential and a Lorentzian distributions, and we extract τ_s^{sf} from the obtained FWHM. For the strongest disorder amplitude $V_R = -4008$ kHz, the green dashed line indicates the distribution $P_{\text{sp}}(V)$.

For intermediate disorder strength $|V_R|$, SCBA yields apparently closer predictions to the experimental data than the 1st order Born approximation, but it deviates again when approaching the classical limit of strong disorder strength $|V_R|$. Although both τ_s and τ_s^{scba} scale as $1/|V_R|$ in this regime, a quantitative mismatch is observed that can be attributed to the singular profile of the amplitude probability distribution $P_{\text{sp}}^{\text{cl}}(V)$ of the attractive laser speckle field. Indeed, the latter is much more peaked than $A_{\text{scba}}^{\text{cl}}$, resulting in a substantially smaller FWHM and thus larger elastic scattering time. Based on these asymptotic profiles, we calculate a ratio between $\tau_s^{\text{sf,cl}}$ and $\tau_s^{\text{scba,cl}}$ of 5, which is consistent with the value of 3.2(5) that we measure at the lowest k_i .

The case of repulsive laser speckle disorder is shown in figure 6(a). At low initial momentum k_i , low disorder strength $|V_R|$, deviations of similar magnitude compared to an attractive laser speckle are observed, originating from the same absence of odd order correction terms. For increasing disorder strength $|V_R|$, however, deviations become much more pronounced, reaching more than 1 order of magnitude at the largest disorder strength. This cannot be simply justified by the profile of the amplitude probability distribution and therefore requires deeper analysis of the profile of the spectral functions.

4.2. Comparison with measured spectral functions

To further investigate the different behaviors of τ_s , a comparison to the real spectral functions is needed. Experimentally, spectral functions of matter-waves in laser speckle disorder have been measured in the specific case $k_i = 0$ and for a large set of disorder strength $|V_R|/h$ ranging from 60 Hz to 4 kHz [48]. Three examples are shown in figure 5(b) in the case of attractive speckle potential. At weak disorder strength $|V_R|/h = 60$ Hz (top panel), the spectral function exhibits an approximately Lorentzian profile, consistent with the Born interpretation. The profile changes at intermediate disorder strength (central panel) to approach for strong disorder the classical limit $P_{\text{sp}}(V)$ (green dashed line in the bottom panel), although deviations due to quantum corrections still persist around $\mathcal{E} \sim 0$ [48]. For those measured spectral functions, we extract the FWHM from a fit and we deduce the elastic scattering time τ_s^{sf} in the limit $k_i = 0$ as a function of $|V_R|$ (appendix C). The results, plotted in figure 5(a) (circle dots) for the same values of $|V_R|$ than considered so far. They are in good agreement with the low momentum limit of τ_s , especially at strong disorder. This shows that our measurements of τ_s are fully consistent with the specific profiles of the spectral functions for the attractive laser speckle case.

For repulsive laser speckle, the spectral functions at $k_i = 0$ are plotted in figure 6(b). Since negative energies are strictly forbidden in repulsive potential (depicted by the gray area), the profiles are intrinsically different in comparison to the previous case. At weak disorder strength, spectral functions still follow Lorentzian-like profile typical of the Born regime. In the strong disorder regime, they exhibit a narrow resonance peak on top of the broad distribution that would have been expected from the classical limit P_{sp} (green dashed line). The presence

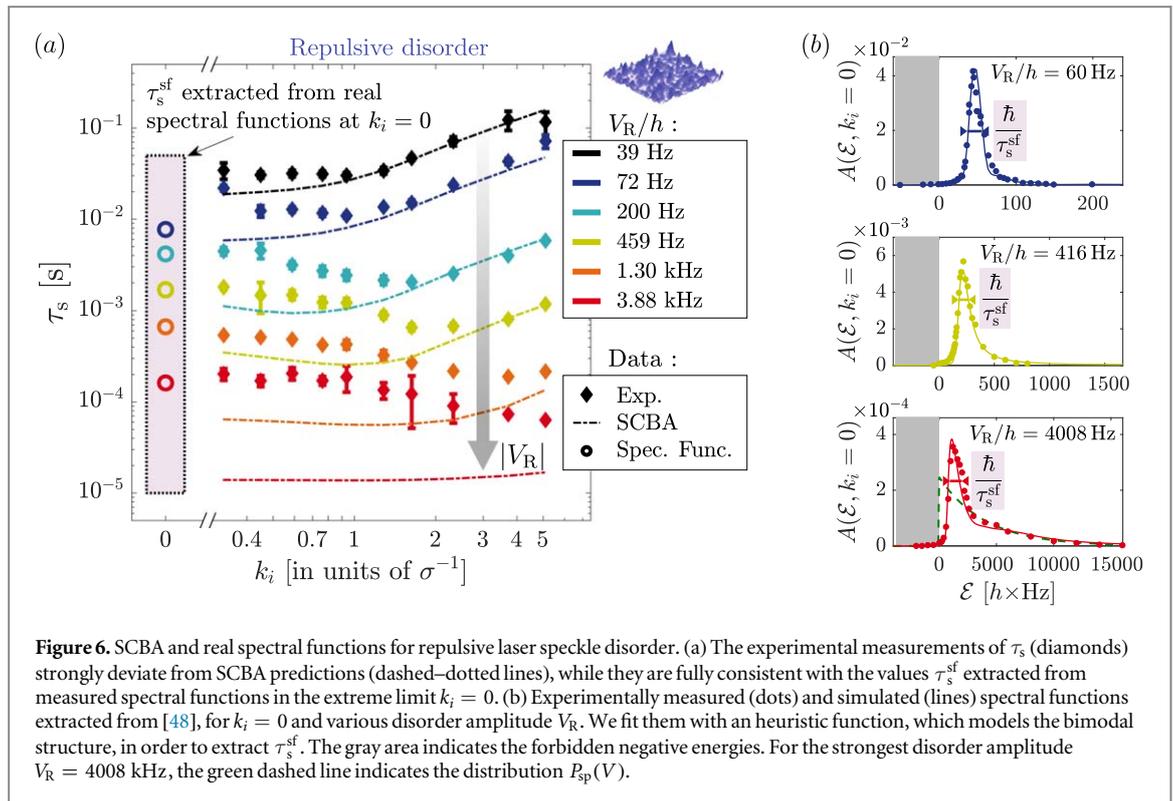


Figure 6. SCBA and real spectral functions for repulsive laser speckle disorder. (a) The experimental measurements of τ_s (diamonds) strongly deviate from SCBA predictions (dashed-dotted lines), while they are fully consistent with the values τ_s^{sf} extracted from measured spectral functions in the extreme limit $k_i = 0$. (b) Experimentally measured (dots) and simulated (lines) spectral functions extracted from [48], for $k_i = 0$ and various disorder amplitude V_R . We fit them with an heuristic function, which models the bimodal structure, in order to extract τ_s^{sf} . The gray area indicates the forbidden negative energies. For the strongest disorder amplitude $V_R = 4008$ kHz, the green dashed line indicates the distribution $P_{\text{sp}}(V)$.

of this peak is related to an accumulation of bound states around the averaged ground state harmonic oscillator energy [46–48].

As a consequence of this double structure, the time evolution is expected to show two different timescales: a short one associated to the broad part of the spectral function and a long one associated to the narrow peak. Experimentally, the measured time evolution is dominated by the slowest decay. The characteristic time we have extracted when measuring τ_s is thus related to the long timescale, and should be compared to the FWHM of the narrow peak. To perform the comparison, we fit the spectral functions by an heuristic function accounting for the bimodal structure (see appendix C), and we extract τ_s^{sf} from the FWHM of the peaked function. As shown in figure 6(a), it agrees once again very well with the low momentum limit of τ_s .

In conclusion, analyzing the profiles of the real spectral functions allows us to interpret the observed differences in the scattering time τ_s between attractive and repulsive laser speckle disorder. The striking agreement between time domain and energy domain measurements validates our method to extract τ_s in a broad range of scattering regimes. It also highlights the key issue here, which is to find theoretical models that reproduce the specific features of the spectral functions [46, 47].

5. Summary and outlook

We have investigated in this paper the behavior of the elastic scattering time τ_s of ultracold atoms in disordered potentials in the strong scattering regime. A first important result is the remarkable agreement between the observed behavior of τ_s and predictions based on the SCBA, in the case of Gaussian-distributed disordered potentials. However, this method, which inherently does not take into account the specific form of the disorder amplitude distribution, is not accurate for laser speckle disorder. Instead, we have shown that the calculation of the second order term in the Born series, which is sensitive to the distribution skewness, is able to explain the differences reported between the attractive and the repulsive speckle disorders when entering the strong scattering regime. The validity of this perturbative approach is nevertheless limited to a narrow range of parameters. As a second main result, we show that one has then to rely on the real shape of the spectral functions, as measured in [48], in order to interpret our data.

Altogether, our study clarifies the validity range of common theoretical methods to predict the elastic scattering time of matter waves in disordered potential. It highlights the need for developing adequate formalisms in order to cope with the full statistics of the disorder, especially in the case of laser speckle disorder that are commonly used with ultracold atoms. Beside semiclassical approaches, dedicated to the asymptotic classical regime [46, 47], or the coherent potential approximation [58–60], a very interesting follow up would be to confront our measurements to the recent theoretical framework of the hidden landscape [61, 62]. Such

development of quantitative predictions is essential for the understanding of complex transport phenomena, such as the Anderson localization where discrepancies remain between experiments, numerics and available theories (see e.g. [63]).

Acknowledgments

We would like to thank D Delande, T Giamarchi, G Montambaux, C Müller and S Skipetrov for fruitful discussions. This work has been supported by ERC (Advanced Grant ‘Quantatop’), Institut Universitaire de France, the French Ministry of Research and Technology (ANRT, through a DGA grant for JR and CIFRE/DGA grant for VD), the EU-H2020 research and innovation program (Grant No. 641122-QUIC and Marie Skłodowska-Curie Grant No. 655933), Region Ile-de-France in the framework of DIM SIRTEQ and the Simons foundation (Grant No. 563916: Localization of waves).

Appendix A. Second order Born approximation for laser speckle disorder

We show here how to calculate the second order correction $\Sigma_2 = \overline{\delta V G_0 \delta V G_0 \delta V}$ of the Born expansion. It involves the three-point correlation function $C_3(\Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}') = \overline{\delta V(\mathbf{r})\delta V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})\delta V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}')}$, which is strictly null for Gaussian-distributed disorder and equals to

$$C_3(\Delta\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}') = 2V_R^3 e^{-[\Delta r^2 + \Delta r'^2 + (\Delta\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}')^2]/(2\sigma^2)} \quad (\text{A.1})$$

for a 2D laser speckle disordered potential.

The operator Σ_2 is diagonal in the $|\mathbf{k}\rangle$ basis, with matrix elements $\Sigma_2(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = \langle \mathbf{k}_i | \Sigma_2 | \mathbf{k}_i \rangle$ given by

$$\Sigma_2(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \tilde{C}_3(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}', \mathbf{k}_i - \mathbf{k}'') G_0(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{k'}) G_0(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{k''}), \quad (\text{A.2})$$

where $\tilde{C}_3(\mathbf{k}_{\text{dis}}, \mathbf{k}'_{\text{dis}})$ is the Fourier transform of the three-point correlation function (A.1). When taking the imaginary part of (A.2), we obtain

$$\text{Im}[\Sigma_2(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)] = -\frac{8\pi^3 V_R^3}{3} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} e^{-[(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}')^2 + (\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')^2 + (\mathbf{k}'' - \mathbf{k}_i)^2]\sigma^2/6} [\delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k'}) \text{p.v.}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k''}) + \text{p.v.}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k''}) \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k'})], \quad (\text{A.3})$$

where p.v. refers to the Cauchy principal value. The two terms revealed by (A.3) are related to the two possible third-order processes, corresponding either to a single scattering event for the wavefunction and two scattering events for the conjugated wavefunction, or to the other way around.

The second order Born correction is finally obtained by numerically calculating (A.3) at the energy $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{k_i}$.

Appendix B. Calculation of the self-energy in the SCBA

We present in this section the main stages in the calculation of the self-energy $\Sigma_{\text{scba}}(\mathcal{E}, \mathbf{k}_i)$ in the self-consistent Born approximation. The procedure is detailed for a given set of disorder strength $|V_R|$ and initial momentum \mathbf{k}_i , the overall process being repeated for all the sets of parameters we have explored.

At first we define an energy range $[\mathcal{E}_{\text{min}}, \mathcal{E}_{\text{max}}]$ relevant for the calculation of the spectral function. It is chosen to be centered on the kinetic energy \mathcal{E}_{k_i} , with a width large enough to ensure that the spectral function area is close to unity. For each energy \mathcal{E} of this interval, the self-consistent equations are then solved. To do so, we calculate in parallel the self-energy $\Sigma_{\text{scba}}(\mathcal{E}, \mathbf{k})$ for all the momenta \mathbf{k} whose kinetic energies are contained in the range $[\mathcal{E}_{\text{min}}, \mathcal{E}_{\text{max}}]$. We proceed by iteration, initializing the solution with the first order Born solution $\Sigma_{\text{scba}}^{(0)} = \Sigma_1$. Using (11) and (12), the self-energy $\Sigma_{\text{scba}}^{(n+1)}$ after $n + 1$ iteration steps is given by

$$\Sigma_{\text{scba}}^{(n+1)}(\mathcal{E}, \mathbf{k}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{4\pi^2} \tilde{C}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{k'} - \Sigma_{\text{scba}}^{(n)}(\mathcal{E}, \mathbf{k}')}. \quad (\text{B.1})$$

The iteration loop is pursued until the convergence criterion

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \left| \frac{\Sigma_{\text{scba}}^{(n+1)}(\mathcal{E}, \mathbf{k}) - \Sigma_{\text{scba}}^{(n)}(\mathcal{E}, \mathbf{k})}{\Sigma_{\text{scba}}^{(n+1)}(\mathcal{E}, \mathbf{k})} \right| < 10^{-3} \quad (\text{B.2})$$

is reached.

Once the self-energy is known for each energy \mathcal{E} , the spectral function can be computed using (6). Its normalization is verified to make sure the energy interval was correctly chosen.

Appendix C. Extracting the widths of real spectral functions

We present here the procedure to extract the widths $\Delta\mathcal{E}$ of the spectral functions experimentally measured in [48], in order to estimate the scattering time τ_s^{sf} . Since the spectral functions are noticeably different between attractive and repulsive laser speckle potential, we distinguish the two cases on the following.

For attractive laser speckle disorder, we use as fit function the convolution of a Lorentzian distribution L with an exponential distribution R :

$$A_{\text{fit}}^{\text{att}}(\mathcal{E}) = L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_c, \delta\mathcal{E}) * R(\mathcal{E}, \delta\mathcal{E}'). \quad (\text{C.1})$$

The Lorentzian distribution

$$L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_c, \delta\mathcal{E}) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta\mathcal{E}/2}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_c)^2 + \delta\mathcal{E}^2/4} \quad (\text{C.2})$$

has a central energy \mathcal{E}_c and a FWHM $\delta\mathcal{E}$. The exponential distribution is defined as

$$R(\mathcal{E}, \delta\mathcal{E}') = \frac{1}{|\delta\mathcal{E}'|} e^{-\mathcal{E}/\delta\mathcal{E}'} \Theta(\mathcal{E}/\delta\mathcal{E}'), \quad (\text{C.3})$$

such that it converges towards the amplitude distribution of the attractive disorder P_{sp} when its width $\delta\mathcal{E}'$ approaches $V_{\text{R}} < 0$.

At low disorder strength $|V_{\text{R}}|$, the width $\delta\mathcal{E}'$ goes to 0 and $A_{\text{fit}}^{\text{att}}$ approaches a Lorentzian profile, as experimentally observed (see top panel in figure 5(b)). At high disorder strength, $\delta\mathcal{E}'$ goes to V_{R} for $R(\mathcal{E}, \delta\mathcal{E}')$ to converge towards the classical limit P_{sp} (green dashed line in figure 5(b)). The convolution with L guarantees that the fit function is smoothed around $\mathcal{E} = 0$, with $\delta\mathcal{E}$ corresponding almost to the energy region where quantum effects are relevant. In between these two extreme cases, $A_{\text{fit}}^{\text{att}}$ reproduces well all the profiles of the measured spectral functions.

For each disorder strength $|V_{\text{R}}|$ for which the spectral function has been measured, we extract the FWHM $\Delta\mathcal{E}$ of $A_{\text{fit}}^{\text{att}}$ and we deduce the scattering time $\tau_s^{\text{sf}} = \hbar/\Delta\mathcal{E}$. The value of τ_s^{sf} for any disorder strength is then deduced by interpolation.

The case of repulsive disorder is more complicated. The profiles of the spectral functions are bimodal, made of a narrow peak at low energy on top of a broad energy distribution. We fit those profiles by the sum of a convoluted distribution $L * R$ accounting for the broad part of the spectrum, and a Gaussian distribution G accounting for the narrow peak. It yields for the fit function

$$A_{\text{fit}}^{\text{rep}}(\mathcal{E}) = \alpha L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_c, \delta\mathcal{E}) * R(\mathcal{E}, \delta\mathcal{E}') + (1 - \alpha)G(\mathcal{E}, \mathcal{E}_c, \delta\mathcal{E}), \quad (\text{C.4})$$

with α the relative weight of the first contribution. The Gaussian distribution is defined as

$$G(E, E_c, \delta E) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta E} e^{-\left(\frac{E-E_c}{\delta E}\right)^2}, \quad (\text{C.5})$$

where the central energy \mathcal{E}_c and the full width $\delta\mathcal{E}$ are chosen to be the same as the ones of L . It results in total in only one more free parameter- α -compared to the case of attractive disorder. Since the bimodal profile are more pronounced in the numerical simulations, α is extracted on the numerical data and kept fixed when fitting the experimental data.

At low $|V_{\text{R}}|$, the spectral function is dominated by a narrow peak that is fitted by G , while $L * R$ accounts for the small, broad background. When increasing $|V_{\text{R}}|$, the peak amplitude decreases and the spectral function approaches closer to its classical limit. At high $|V_{\text{R}}|$, the broad part of the spectrum resembles the one of the attractive case, whose features are captured by $L * R$, while the narrow peak resulting from the accumulation of bound levels is fitted by G . Overall, the fit function (C.4) shows remarkable agreement with the measured spectral functions at any disorder strength. Since we are experimentally sensitive to the longer timescale when measuring τ_s , the relevant energy scale $\Delta\mathcal{E}$ is given by the width of the narrower structure $\delta\mathcal{E}$.

Similarly to the attractive laser speckle case, the value of τ_s^{sf} for any disorder strength is extracted by interpolation of those measurements.

ORCID iDs

Adrien Signoles  <https://orcid.org/0000-0001-7822-9444>

Vincent Josse  <https://orcid.org/0000-0003-1461-9747>

References

- [1] Sanchez-Palencia L and Lewenstein M 2010 *Nat. Phys.* **6** 87

- [2] Lewenstein M, Sanpera A and Ahufinger V 2012 *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-Body Systems* (Oxford: Oxford University press)
- [3] Billy J et al 2008 *Nature* **453** 891
- [4] Roati G et al 2008 *Nature* **453** 895
- [5] Jendrzejewski F et al 2012 *Nat. Phys.* **8** 398
- [6] Semeghini G et al 2015 *Nat. Phys.* **11** 554
- [7] D'Errico C et al 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 095301
- [8] Brantut J-P, Meineke J, Stadler D, Krinner S and Esslinger T 2012 *Science* **337** 1069
- [9] Krinner S, Stadler D, Meineke J, Brantut J-P and Esslinger T 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 100601
- [10] Schreiber M et al 2015 *Science* **349** 842
- [11] Nandkishore R and Huse D A 2015 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6** 15
- [12] Choi J-Y et al 2016 *Science* **352** 1547
- [13] Kuhn R C, Miniatura C, Delande D, Sigwarth O and Müller C A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 250403
- [14] Kuhn R, Sigwarth O, Miniatura C, Delande D and Müller C 2007 *New J. Phys.* **9** 161
- [15] Hartung M, Wellens T, Müller C A, Richter K and Schlagheck P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 020603
- [16] Skipetrov S E, Minguzzi A, van Tiggelen B A and Shapiro B 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 165301
- [17] Yedjour A and van Tiggelen B A 2010 *Eur. Phys. J. D* **59** 249
- [18] Cherroret N, Karpiuk T, Müller C A, Grémaud B and Miniatura C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 011604
- [19] Piraud M, Pezze L and Sanchez-Palencia L 2012 *Europhys. Lett.* **99** 50003
- [20] Shapiro B 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 143001
- [21] Plisson T, Bourdel T and Müller C 2013 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **217** 79
- [22] Piraud M, Pezzé L and Sanchez-Palencia L 2013 *New J. Phys.* **15** 075007
- [23] Piraud M, Sanchez-Palencia L and van Tiggelen B 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063639
- [24] Rammer J 2004 *Quantum Transport Theory, Frontiers in Physics* (Boca Raton, FL: Avalon)
- [25] Akkermans E and Montambaux G 2007 *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [26] Lagendijk A and Van Tiggelen B A 1996 *Phys. Rep.* **270** 143
- [27] Skipetrov S E and Sokolov I M 2018 *Phys. Rev. B* **98** 064207
- [28] Niederer H H J M 1974 *Japan. J. Appl. Phys.* **13** 339
- [29] Ando T, Fowler A B and Stern F 1982 *Rev. Mod. Phys.* **54** 437
- [30] Bockelmann U, Abstreiter G, Weimann G and Schlapp W 1990 *Phys. Rev. B* **41** 7864
- [31] Monteverde M et al 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 126801
- [32] Shapiro B 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2168
- [33] Page J H et al 1996 *Science* **271** 634
- [34] Sebbah P, Hu B, Genack A Z, Pnini R and Shapiro B 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 123901
- [35] Emiliani V et al 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 250801
- [36] Anache-Ménier D, van Tiggelen B A and Margerin L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 248501
- [37] Jacques S L, Wang B and Samatham R 2012 *Biomed. Opt. Express* **3** 1162
- [38] Sevrain D, Dubreuil M, Leray A, Odin C and Grand Y L 2013 *Opt. Express* **21** 25221
- [39] Obermann A, Larose E, Margerin L and Rossetto V 2014 *Geophys. J. Int.* **197** 435
- [40] Hildebrand W K, Strybulevych A, Skipetrov S E, van Tiggelen B A and Page J H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 073902
- [41] Savo R et al 2017 *Science* **358** 765
- [42] Martin C and Ben-Yakar A 2016 *J. Biomed. Opt.* **21** 115004
- [43] Richard J et al 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 100403
- [44] Bruus H and Flensberg K 2004 *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics* (Oxford: Oxford University Press)
- [45] Lukan P et al 2009 *Phys. Rev. A* **80** 023605
- [46] Trappe M I, Delande D and Müller C A 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 245102
- [47] Prat T, Cherroret N and Delande D 2016 *Phys. Rev. A* **94** 022114
- [48] Volchkov V V et al 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 060404
- [49] Clément D et al 2006 *New J. Phys.* **8** 165
- [50] Goodman J W 2007 *Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications* (Englewood, CO: Roberts and Company)
- [51] Damascelli A 2004 *Phys. Scr.* **T109** 61
- [52] Stewart J, Gaebler J and Jin D 2008 *Nature* **454** 744
- [53] Clément D, Fabbri N, Fallani L, Fort C and Inguscio M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 155301
- [54] Gaebler J et al 2010 *Nat. Phys.* **6** 569
- [55] Ernst P T et al 2010 *Nat. Phys.* **6** 56
- [56] Feld M, Fröhlich B, Vogt E, Koschorreck M and Köhl M 2011 *Nature* **480** 75
- [57] Pilati S, Giorgini S, Modugno M and Prokofev N 2010 *New J. Phys.* **12** 073003
- [58] Pasek M, Zhao Z, Delande D and Orso G 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053618
- [59] Maier T, Jarrell M, Pruschke T and Hettler M H 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 1027
- [60] Zimmermann R and Schindler C 2009 *Phys. Rev. B* **80** 144202
- [61] Filoche M and Mayboroda S 2012 *Proc. Natl Acad. Sci.* **109** 14761
- [62] Arnold D N, David G, Jerison D, Mayboroda S and Filoche M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 056602
- [63] Pasek M, Orso G and Delande D 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 170403



Bibliographie

- [1] E. Abrahams, P. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan. Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters*, 42(10) :673, 1979.
- [2] E. Akkermans and G. Montambaux. *Mesoscopic physics of electrons and photons*. Cambridge university press, 2007.
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, pages 198–201, 1995.
- [4] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5) :1492, 1958.
- [5] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. Solid state physics (saunders college, philadelphia, 1976). *Appendix N*, 166, 2010.
- [6] M. Barrett, J. Sauer, and M. Chapman. All-optical formation of an atomic bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 87(1) :010404, 2001.
- [7] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, and M. Joffre. *Mécanique quantique*. Editions Ecole Polytechnique, 2002.
- [8] N. Bender, H. Yilmaz, Y. Bromberg, and H. Cao. Customizing speckle intensity statistics. *Optica*, 5(5) :595–600, 2018.
- [9] A. Bernard. *Transport quantique d’ondes atomiques ultrafroides : localisation d’Anderson et laser à atomes guidé*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [10] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, 453 :891–894, 2008.
- [11] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene. Quantum simulations with ultracold quantum gases. *Nature Physics*, 8(4) :267–276, 2012.

- [12] U. Bockelmann, G. Abstreiter, G. Weimann, and W. Schlapp. Single-particle and transport scattering times in narrow gaas/al x ga 1- x as quantum wells. *Physical Review B*, 41(11) :7864, 1990.
- [13] V. Boyer. *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans des champs magnétiques intenses*. PhD thesis, Paris 11, 2000.
- [14] J.-P. Brantut. *Manipulation d'atomes froids dans des potentiels lumineux*. PhD thesis, Paris 11, 2009.
- [15] J.-P. Brantut, J.-F. Clément, M. R. de Saint Vincent, G. Varoquaux, R. A. Nyman, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer. Light-shift tomography in an optical-dipole trap for neutral atoms. *Physical Review A*, 78(3) :031401, 2008.
- [16] E. Burt, R. Ghrist, C. Myatt, M. Holland, E. A. Cornell, and C. Wieman. Coherence, correlations, and collisions : What one learns about bose-einstein condensates from their decay. *Physical Review Letters*, 79(3) :337, 1997.
- [17] B. Canuel, L. Amand, A. Bertoldi, W. Chaibi, R. Geiger, J. Gillot, A. Landragin, M. Merzougui, I. Riou, S. Schmid, et al. The matter-wave laser interferometer gravitation antenna (miga) : New perspectives for fundamental physics and geosciences. In *E3S Web of Conferences*, volume 4, page 01004. EDP Sciences, 2014.
- [18] G. Casati, I. Guarneri, and D. Shepelyansky. Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurate frequencies. *Physical review letters*, 62(4) :345, 1989.
- [19] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau. Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves. *Physical review letters*, 101(25) :255702, 2008.
- [20] N. Cherroret, T. Karpiuk, C. A. Müller, B. Grémaud, and C. Miniatura. Coherent backscattering of ultracold matter waves : Momentum space signatures. *Physical Review A*, 85(1) :011604, 2012.
- [21] C. Cohen-Tannoudji. Atomes ultrafroids : Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif. *Cours au College de France*, 1997, 1996.
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. EDP Sciences, 2012.
- [23] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical review letters*, 75(22) :3969, 1995.
- [24] D. Delande and G. Orso. Mobility edge for cold atoms in laser speckle potentials. *Physical review letters*, 113(6) :060601, 2014.
- [25] V. Denechaud. *Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson*. PhD thesis, Université Paris Saclay, 2018.
- [26] A. Derevianko and H. Katori. Colloquium : Physics of optical lattice clocks. *Reviews of Modern Physics*, 83(2) :331, 2011.

- [27] B. Diu, B. Roulet, C. Guthmann, and D. Lederer. *Eléments de physique statistique*. Hermann, 1989.
- [28] S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski, N. Murray, C. W. Clark, C. J. Lobb, W. D. Phillips, M. Edwards, and G. K. Campbell. Hysteresis in a quantized superfluid ‘atomtronic’ circuit. *Nature*, 506(7487) :200–203, 2014.
- [29] W. Ertmer, R. Blatt, J. Hall, and M. Zhu. Laser manipulation of atomic beam velocities : demonstration of stopped atoms and velocity reversal. *Physical review letters*, 54(10) :996, 1985.
- [30] F. Evers and A. D. Mirlin. Anderson transitions. *Reviews of Modern Physics*, 80(4) : 1355, 2008.
- [31] M. Fauquembergue. *Réalisation d’un dispositif de condensation de Bose-Einstein et de transport d’un échantillon cohérent d’atomes*. PhD thesis, Paris 11, 2004.
- [32] M. Filoche and S. Mayboroda. Universal mechanism for anderson and weak localization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(37) :14761–14766, 2012.
- [33] A. Gatti, D. Magatti, and F. Ferri. Three-dimensional coherence of light speckles : theory. *Physical Review A*, 78(6) :063806, 2008.
- [34] A. Genack and N. Garcia. Observation of photon localization in a three-dimensional disordered system. *Physical review letters*, 66(16) :2064, 1991.
- [35] S. Ghosh, D. Delande, C. Miniatura, and N. Cherroret. Coherent backscattering reveals the anderson transition. *Physical Review Letters*, 115(20) :200602, 2015.
- [36] S. Ghosh, C. Miniatura, N. Cherroret, and D. Delande. Coherent forward scattering as a signature of anderson metal-insulator transitions. *Physical Review A*, 95(4) : 041602, 2017.
- [37] J. W. Goodman. *Speckle phenomena in optics : theory and applications*. Roberts and Company Publishers, 2007.
- [38] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. In *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, volume 42, pages 95–170. Elsevier, 2000.
- [39] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre. *Introduction to quantum optics : from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press, 2010.
- [40] C. Hainaut, I. Manai, J.-F. Clément, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, G. Lemarié, N. Cherroret, D. Delande, and R. Chicireanu. Controlling symmetry and localization with an artificial gauge field in a disordered quantum system. *Nature communications*, 9(1) :1–9, 2018.
- [41] W. Hildebrand, A. Strybulevych, S. Skipetrov, B. Van Tiggelen, and J. Page. Observation of infinite-range intensity correlations above, at, and below the mobility edges of the 3d anderson localization transition. *Physical Review Letters*, 112(7) :073902, 2014.

- [42] H. Hu, A. Strybulevych, J. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*, 4(12) :945–948, 2008.
- [43] J. Hu, A. Urvoy, Z. Vendeiro, V. Crépel, W. Chen, and V. Vuletić. Creation of a bose-condensed gas of 87rb by laser cooling. *Science*, 358(6366) :1078–1080, 2017.
- [44] C.-L. Hung, X. Zhang, N. Gemelke, and C. Chin. Accelerating evaporative cooling of atoms into bose-einstein condensation in optical traps. *Physical Review A*, 78(1) : 011604, 2008.
- [45] S. L. Jacques, B. Wang, and R. Samatham. Reflectance confocal microscopy of optical phantoms. *Biomedical optics express*, 3(6) :1162–1172, 2012.
- [46] F. Jendrzejewski. *Quantum transport of ultracold atoms in disordered potentials*. PhD thesis, Paris 11, 2012.
- [47] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Mueller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezzé, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer. Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics*, 8(5) :398–403, 2012.
- [48] F. Jendrzejewski, K. Müller, J. Richard, A. Date, T. Plisson, P. Bouyer, A. Aspect, and V. Josse. Coherent backscattering of ultracold atoms. *Physical Review Letters*, 109(19) :195302, 2012.
- [49] T. Karpiuk, N. Cherroret, K. Lee, B. Grémaud, C. Müller, and C. Miniatura. Coherent forward scattering peak induced by anderson localization. *Physical review letters*, 109(19) :190601, 2012.
- [50] S. Katsumoto, F. Komori, N. Sano, and S.-i. Kobayashi. Fine tuning of metal-insulator transition in al_{0.3}ga_{0.7}as using persistent photoconductivity. *Journal of the Physical Society of Japan*, 56(7) :2259–2262, 1987.
- [51] A. Keshet. Cicero word generator technical and user manual, 2008. URL <http://akeshet.github.io/Cicero-Word-Generator/>.
- [52] A. Keshet and W. Ketterle. A distributed, graphical user interface based, computer control system for atomic physics experiments. *Review of Scientific Instruments*, 84(1) :015105, 2013.
- [53] W. Ketterle and N. Van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. In *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, volume 37, pages 181–236. Elsevier, 1996.
- [54] S. Kondov, W. McGehee, J. Zirbel, and B. DeMarco. Three-dimensional anderson localization of ultracold matter. *Science*, 334(6052) :66–68, 2011.
- [55] B. Kramer and A. MacKinnon. Localization : theory and experiment. *Reports on Progress in Physics*, 56(12) :1469, 1993.
- [56] R. Kuhn, O. Sigwarth, C. Miniatura, D. Delande, and C. Müller. Coherent matter wave transport in speckle potentials. *New Journal of Physics*, 9(6) :161, 2007.
- [57] A. Lagendijk, B. Van Tiggelen, and D. S. Wiersma. Fifty years of anderson localization. *Phys. Today*, 62(8) :24–29, 2009.

- [58] E. Larose, L. Margerin, B. Van Tiggelen, and M. Campillo. Weak localization of seismic waves. *Physical review letters*, 93(4) :048501, 2004.
- [59] G. Lemarié. *The Anderson transition with atomic matter waves*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Sept. 2009. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424399>.
- [60] G. Lemarié, J. Chabé, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, B. Grémaud, and D. Delande. Observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment. *Physical Review A*, 80(4) :043626, 2009.
- [61] G. Lemarié, B. Grémaud, and D. Delande. Universality of the anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(3) :37007, 2009.
- [62] M. Lopez, J.-F. Clément, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande. Experimental test of universality of the anderson transition. *Physical Review Letters*, 108(9) : 095701, 2012.
- [63] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura. One-dimensional anderson localization in certain correlated random potentials. *Physical Review A*, 80(2) :023605, 2009.
- [64] O. Luiten, M. Reynolds, and J. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Physical Review A*, 53(1) :381, 1996.
- [65] D. Magatti, A. Gatti, and F. Ferri. Three-dimensional coherence of light speckles : experiment. *Physical Review A*, 79(5) :053831, 2009.
- [66] J.-F. Manai, Isam ans Clément, R. Chicireanu, C. Hainaut, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande. Experimental observation of two-dimensional anderson localization with the atomic kicked rotor. *Physical review letters*, 115 :240603, 2015.
- [67] C. Martin and A. Ben-Yakar. Determination of scattering properties and damage thresholds in tissue using ultrafast laser ablation. *Journal of biomedical optics*, 21 (11) :115004, 2016.
- [68] H. J. Metcalf and P. Van der Straten. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *The Optics Encyclopedia : Basic Foundations and Practical Applications*, 2007.
- [69] M. I. Mishchenko. On the nature of the polarization opposition effect exhibited by saturn’s rings. *The Astrophysical Journal*, 411 :351–361, 1993.
- [70] M. Monteverde, C. Ojeda-Aristizabal, R. Weil, K. Bennaceur, M. Ferrier, S. Guéron, C. Glattli, H. Bouchiat, J. Fuchs, and D. Maslov. Transport and elastic scattering times as probes of the nature of impurity scattering in single-layer and bilayer graphene. *Physical review letters*, 104(12) :126801, 2010.
- [71] F. Moore, J. Robinson, C. Bharucha, B. Sundaram, and M. Raizen. Atom optics realization of the quantum δ -kicked rotor. *Physical Review Letters*, 75(25) :4598, 1995.
- [72] W. Morong and B. DeMarco. Simulation of anderson localization in two-dimensional ultracold gases for pointlike disorder. *Physical Review A*, 92(2) :023625, 2015.
- [73] N. Mott and E. Davis. *Electronic processes in non-crystalline solids*, clarendon, 1979.

- [74] M. Mukhtar. *State-dependent disordered potential for studies of Anderson transition with ultracold atoms*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2019.
- [75] C. A. Müller and B. Shapiro. Comment on “three-dimensional anderson localization in variable scale disorder”. *Physical review letters*, 113(9) :099601, 2014.
- [76] K. Müller. *Coherent transport of ultracold atoms in disordered potentials : Manipulation of time-reversal symmetry in weak localization experiments*. PhD thesis, Paris 11, 2015.
- [77] K. Müller, J. Richard, V. V. Volchkov, V. Denechaud, P. Bouyer, A. Aspect, and V. Josse. Suppression and revival of weak localization through control of time-reversal symmetry. *Physical Review Letters*, 114(20) :205301, 2015.
- [78] P. Murthy, D. Kedar, T. Lompe, M. Neidig, M. Ries, A. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim. Matter-wave fourier optics with a strongly interacting two-dimensional fermi gas. *Physical Review A*, 90(4) :043611, 2014.
- [79] H. Niederer. Magneto oscillatory conductance in n-type inverted silicon surfaces. *Japanese Journal of Applied Physics*, 13(S2) :339, 1974.
- [80] T. M. Nieuwenhuizen and M. Van Rossum. Intensity distributions of waves transmitted through a multiple scattering medium. *Physical review letters*, 74(14) :2674, 1995.
- [81] A. Obermann, E. Larose, L. Margerin, and V. Rossetto. Measuring the scattering mean free path of rayleigh waves on a volcano from spatial phase decoherence. *Geophysical Journal International*, 197(1) :435–442, 2014.
- [82] K. O’hara, M. E. Gehm, S. Granade, and J. Thomas. Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps. *Physical Review A*, 64(5) :051403, 2001.
- [83] H. Ott. Single atom detection in ultracold quantum gases : a review of current progress. *Reports on Progress in Physics*, 79(5) :054401, 2016.
- [84] M. Paalanen, T. Rosenbaum, G. Thomas, and R. Bhatt. Critical scaling of the conductance in a disordered insulator. *Physical review letters*, 51(20) :1896, 1983.
- [85] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, X. Jing, and D. A. Weitz. Group velocity in strongly scattering media. *Science*, 271(5249) :634–637, 1996.
- [86] M. Pasek, Z. Zhao, D. Delande, and G. Orso. Phase diagram of the three-dimensional anderson model for short-range speckle potentials. *Physical Review A*, 92(5) :053618, 2015.
- [87] M. Pasek, G. Orso, and D. Delande. Anderson localization of ultracold atoms : Where is the mobility edge? *Physical review letters*, 118(17) :170403, 2017.
- [88] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2008.
- [89] S. Pilati, S. Giorgini, M. Modugno, and N. Prokof’ev. Dilute bose gas with correlated disorder : a path integral monte carlo study. *New Journal of Physics*, 12(7) :073003, 2010.

- [90] M. Piraud. *Localisation d'Anderson d'ondes de matière dans un désordre corrélé : de 1D à 3D*. PhD thesis, Paris 11, 2012.
- [91] T. Plisson, T. Bourdel, and C. A. Müller. Momentum isotropisation in random potentials. *The European Physical Journal Special Topics*, 217(1) :79–84, 2013.
- [92] T. Prat, N. Cherroret, and D. Delande. Semiclassical spectral function and density of states in speckle potentials. *Physical Review A*, 94(2) :022114, 2016.
- [93] J. Richard. *Propagation d'atomes ultra-froids en milieu désordonné—Étude dans l'espace des impulsions de phénomènes de diffusion et de localisation*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2015.
- [94] J. Richard, L.-K. Lim, V. Denechaud, V. V. Volchkov, B. Lecoutre, M. Mukhtar, F. Jendrzejewski, A. Aspect, A. Signoles, L. Sanchez-Palencia, et al. Elastic scattering time of matter waves in disordered potentials. *Physical review letters*, 122(10) :100403, 2019.
- [95] J.-F. Riou. *Etude des propriétés de propagation d'un laser à atomes*. PhD thesis, Paris 11, 2006.
- [96] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio. Anderson localization of a non-interacting bose–einstein condensate. *Nature*, 453(7197) :895–898, 2008.
- [97] N. Robins, P. Altin, J. Debs, and J. Close. Atom lasers : Production, properties and prospects for precision inertial measurement. *Physics Reports*, 529(3) :265–296, 2013.
- [98] C. Sackett. Limits on weak magnetic confinement of neutral atoms. *Physical Review A*, 73(1) :013626, 2006.
- [99] L. Sapienza, H. Thyrestrup, S. Stobbe, P. D. Garcia, S. Smolka, and P. Lodahl. Cavity quantum electrodynamics with anderson-localized modes. *Science*, 327(5971) :1352–1355, 2010.
- [100] L. Sárkány, P. Weiss, H. Hattermann, and J. Fortágh. Controlling the magnetic-field sensitivity of atomic-clock states by microwave dressing. *Physical Review A*, 90(5) :053416, 2014.
- [101] S. D. Sarma, S. He, and X. Xie. Mobility edge in a model one-dimensional potential. *Physical review letters*, 61(18) :2144, 1988.
- [102] T. Savard, K. O'hara, and J. Thomas. Laser-noise-induced heating in far-off resonance optical traps. *Physical Review A*, 56(2) :R1095, 1997.
- [103] R. Savo, R. Pierrat, U. Najar, R. Carminati, S. Rotter, and S. Gigan. Observation of mean path length invariance in light-scattering media. *Science*, 358(6364) :765–768, 2017.
- [104] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweert, and G. Maret. Localization or classical diffusion of light? *Nature*, 398(6724) :206–207, 1999.
- [105] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131) :52–55, 2007.

- [106] P. Sebbah, B. Hu, A. Genack, R. Pnini, and B. Shapiro. Spatial-field correlation : the building block of mesoscopic fluctuations. *Physical review letters*, 88(12) :123901, 2002.
- [107] G. Semeghini, M. Landini, P. Castilho, S. Roy, G. Spagnolli, A. Trenkwalder, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno. Measurement of the mobility edge for 3d anderson localization. *Nature Physics*, 11(7) :554–559, 2015.
- [108] B. Shapiro. Cold atoms in the presence of disorder. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(14) :143001, 2012.
- [109] I. Shlimak, M. Kaveh, R. Ussyshkin, V. Ginodman, and L. Resnick. Determination of the critical conductivity exponent for the metal-insulator transition at nonzero temperatures : universality of the transition. *Physical review letters*, 77(6) :1103, 1996.
- [110] T. Siegrist, P. Jost, H. Volker, M. Woda, P. Merkelbach, C. Schlockermann, and M. Wuttig. Disorder-induced localization in crystalline phase-change materials. *Nature materials*, 10(3) :202–208, 2011.
- [111] A. Signoles, B. Lecoutre, J. Richard, L.-K. Lim, V. Denechaud, V. V. Volchkov, V. Angelopoulou, F. Jendrzejewski, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, et al. Ultracold atoms in disordered potentials : elastic scattering time in the strong scattering regime. *New Journal of Physics*, 21(10) :105002, 2019.
- [112] S. E. Skipetrov and I. M. Sokolov. Absence of anderson localization of light in a random ensemble of point scatterers. *Physical review letters*, 112(2) :023905, 2014.
- [113] S. E. Skipetrov, A. Minguzzi, B. A. van Tiggelen, and B. Shapiro. Anderson localization of a bose-einstein condensate in a 3d random potential. *Physical review letters*, 100(16) :165301, 2008.
- [114] K. Slevin and T. Ohtsuki. Corrections to scaling at the anderson transition. *Physical review letters*, 82(2) :382, 1999.
- [115] K. Slevin and T. Ohtsuki. Critical exponent for the anderson transition in the three-dimensional orthogonal universality class. *New Journal of Physics*, 16(1) :015012, 2014.
- [116] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, and J. Dalibard. Three-body decay of a rubidium bose–einstein condensate. *Applied physics B*, 69(4) :257–261, 1999.
- [117] D. A. Steck. Rubidium 87 d line data, 2001.
- [118] S. Stellmer, B. Pasquiou, R. Grimm, and F. Schreck. Laser cooling to quantum degeneracy. *Physical review letters*, 110(26) :263003, 2013.
- [119] M. I. Trappe, D. Delande, and C. A. Müller. Semiclassical spectral function for matter waves in random potentials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 48(24) :245102, 2015.
- [120] V. V. Volchkov, M. Pasek, V. Denechaud, M. Mukhtar, A. Aspect, D. Delande, and V. Josse. Measurement of spectral functions of ultracold atoms in disordered potentials. *Physical review letters*, 120(6) :060404, 2018.

- [121] J. Walraven. Elements of quantum gases : Thermodynamic and collisional properties of trapped atomic gases. *Les Houches-predoc lectures*, 2010 :207, 2010.
- [122] R. L. Weaver. Anderson localization of ultrasound. *Wave motion*, 12(2) :129–142, 1990.
- [123] R. L. Weaver. Anomalous diffusivity and localization of classical waves in disordered media : the effect of dissipation. *Physical Review B*, 47(2) :1077, 1993.
- [124] D. H. White, T. A. Haase, D. J. Brown, M. D. Hoogerland, M. S. Najafabadi, J. L. Helm, C. Gies, D. Schumayer, and D. A. Hutchinson. Observation of two-dimensional anderson localisation of ultracold atoms. *Nature Communications*, 11(1) :1–8, 2020.
- [125] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini. Localization of light in a disordered medium. *Nature*, 390(6661) :671–673, 1997.
- [126] P.-E. Wolf and G. Maret. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Physical review letters*, 55(24) :2696, 1985.
- [127] L. Ye, G. Cody, M. Zhou, P. Sheng, and A. N. Norris. Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions. *Physical review letters*, 69(21) :3080, 1992.
- [128] A. Yedjour and B. Van Tiggelen. Diffusion and localization of cold atoms in 3d optical speckle. *The European Physical Journal D*, 59(2) :249–255, 2010.
- [129] T. Ying, Y. Gu, X. Chen, X. Wang, S. Jin, L. Zhao, W. Zhang, and X. Chen. Anderson localization of electrons in single crystals : Lixfe7se8. *Science advances*, 2(2) :e1501283, 2016.
- [130] M. Zhu, C. W. Oates, and J. L. Hall. Continuous high-flux monovelocity atomic beam based on a broadband laser-cooling technique. *Physical review letters*, 67(1) :46, 1991.

Titre: Transport quantique d'atomes ultra-froids en milieu désordonné: Temps de diffusion élastique et fonctions spectrales

Mots clés: Localisation d'Anderson - Transition de phase - Condensation de Bose-Einstein - Speckle - Temps de diffusion élastique - Fonction spectrale

Résumé: Ce manuscrit présente les travaux de thèse traitant du transport quantique d'onde de matière dans des potentiels optiques désordonnés. Le contexte de cette thèse s'inscrit dans la quête de l'étude expérimentale du régime critique de la transition d'Anderson, séparant les états liés d'une particule quantique localisée dans un potentiel désordonné des états diffusifs. Dans un premier temps, nous présenterons les concepts fondamentaux de la propagation d'ondes en milieu désordonné pour introduire le phénomène de localisation d'Anderson, dont nous dresserons un état de l'art de l'étude avec des atomes ultra-froids. Nous présenterons ensuite notre plateforme expérimentale, permettant de générer des condensats de Bose-Einstein servant de

source d'onde de matière ainsi que notre dispositif de génération de désordre optique dépendant de l'état de spin. Nous nous attacherons ainsi à décrire les modifications apportées à notre expérience afin de dépasser les limitations expérimentales précédemment rencontrées. Après la présentation de ces concepts, nous nous concentrerons sur la mesure du temps de diffusion élastique, un des paramètres élémentaires de la propagation d'ondes dans le désordre. Nous terminerons par relier ces mesures à la notion de fonction spectrale, précédemment mesurée sur notre expérience. L'ensemble de ces travaux ouvre la voie à l'étude spectroscopique de la transition d'Anderson avec des atomes ultra-froids.

Title: Quantum transport of ultracold atoms in disordered media: Elastic scattering time and spectral functions

Keywords: Anderson Localization - Phase transition - Bose-Einstein condensation - Speckle - Elastic scattering time - Spectral function

Abstract: This manuscript presents the work of a thesis dealing with the quantum transport of matter-waves in optical disordered potentials. This thesis lies in the context of the experimental study of the critical regime of the Anderson transition separating the localized states of a quantum particle in a disordered potential from its diffusive states. We will first present the fundamental concepts of wave propagation in disordered media to introduce the phenomenon of Anderson localization, for which we will establish the state of the art of its study with ultracold atoms. We will then present our apparatus, generating Bose-Einstein condensates as sources of

matter-waves as well as our setup generating a spin-dependant optical disorder. We will focus on the upgrades we brought to our experiment to overcome the limitations previously encountered. After the introduction of these concepts, we will focus on the measurement of the elastic scattering time which is one the elementary parameters of wave propagation in disorder. We will finish by connecting those measurements to the concept of spectral function, previously measured with our experiment. All those works pave the way to the spectroscopic study of the Anderson transition with ultracold atoms.

