



**HAL**  
open science

# Optimisation de la propagation lumineuse en milieux désordonnés : temps de séjour, dispersion temporelle, et focalisation

Mathieu Durand

► **To cite this version:**

Mathieu Durand. Optimisation de la propagation lumineuse en milieux désordonnés : temps de séjour, dispersion temporelle, et focalisation. Physique [physics]. Université Paris sciences et lettres, 2020. Français. NNT : 2020UPSL023 . tel-03150119

**HAL Id: tel-03150119**

**<https://pastel.hal.science/tel-03150119>**

Submitted on 23 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée à l'Institut Langevin, ESPCI Paris

**Optimisation de la propagation lumineuse en milieux désordonnés : temps de séjour, dispersion temporelle, et focalisation.**

Soutenue par

**Mathieu Durand**

Le 15 Décembre 2020

Directeur de thèse :

**Rémi Carminati**

Encadrants de thèse :

**Arthur Goetschy**

**Sébastien Popoff**

École doctorale n°564

**Physique en Île-de-France**

Spécialité

**Physique**

Composition du jury :

Sophie Brasselet Directrice de recherche, Institut Fresnel	<i>Présidente du jury</i>
Bart van Tiggelen Directeur de recherche, LPMMC	<i>Rapporteur</i>
Ulrich Kuhl Professeur des universités, INPHYNI	<i>Rapporteur</i>
Vincent Pagneux Directeur de recherche, LAUM	<i>Examineur</i>
Rémi Carminati Professeur, Institut Langevin	<i>Directeur de thèse</i>
Arthur Goetschy Maître de conférences, Institut Langevin	<i>Invité</i>
Sébastien Popoff Chargé de recherche, Institut Langevin	<i>Invité</i>



*À mes parents, Sylvère et Catherine*



# Remerciements

Le sujet de thèse qui m'a été proposé comportait un volet théorique/numérique et un volet expérimental. Par ces lignes, je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à mon encadrant côté théorique, Arthur Goetschy, et à mon encadrant côté expérimental, Sébastien Popoff, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse, et pour m'avoir accompagné durant ces années de recherche à l'Institut Langevin. Ce sont deux jeunes physiciens avec qui il est très agréable de travailler. Arthur, outre tout l'apport en théorie, m'a poussé à creuser le plus loin possible les idées physiques explorées, et à mettre en valeur les résultats obtenus. Je retiendrai également toutes les conversations (voir confrontations) de physique enrichissantes que nous avons pu avoir. Alors que je pensais savoir coder en arrivant en thèse, Sébastien m'a montré que ce n'était clairement pas le cas, et j'ai ainsi pu découvrir comment coder de façon pythonesque. Il m'a également donné de nombreuses idées et conseils sur la plan expérimental ou concernant la physique des ondes et l'informatique, mais je n'ai malheureusement pas un crâne suffisamment rapide pour avoir profité de la totalité de ces informations.

Je remercie grandement Rémi Carminati pour m'avoir donné envie de faire de l'optique en tant que professeur d'optique à l'ESPCI, puis pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse. C'est d'ailleurs suite à un examen d'onde en milieux complexes proposé par Rémi portant sur les lasers aléatoires que je me suis intéressé aux travaux réalisés à l'Institut Langevin, et que j'ai songé à faire une thèse en lien avec ce sujet. Bien qu'ayant un emploi du temps chargé, Rémi a toujours été à l'écoute dans les moments de doute, et a notamment su apporté son expérience au bon déroulement de cette thèse. Je remercie par ailleurs Bart van Tiggelen et Ulrich Kuhl pour l'évaluation de ce manuscrit et leurs commentaires, ainsi que Sophie Brasselet et Vincent Pagneux pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. J'ai eu la chance d'avoir un jury prestigieux composé d'un théoricien, d'une opticienne, d'un chercheur de la communauté micro-onde et d'un acousticien. Cette diversité est à l'image des recherches menées à l'Institut Langevin.

Je tiens ensuite à remercier chaleureusement Romain Pierrat pour son aide, tant sur le plan physique que sur le plan numérique. Romain, de par ses connaissances et compétences, est très demandé par les doctorants et post-docs du laboratoire, mais c'est toujours avec calme et gentillesse qu'il m'a consacré du temps, parfois pour des idioties ou des choses déjà évoquées. Merci également à François Ramaz pour m'avoir prêté son laser accordable lorsque le nôtre nous faisait défaut, à Sébastien Bidault qui m'a permis d'accéder à sa salle de chimie, et aussi à Bart, Jeanne, et Camilo pour leur aide lors de la fabrication et caractérisation des échantillons de milieux diffusants.

Un grand merci également à Clément Robert-Ralison qui a démarré le projet expéri-

mental. Clément est un très bon compagnon qui peut facilement vous distraire. Je me souviendrai des commandes de doublets de lentilles avec le mauvais coating (« Ah, bah mince alors »), de méthodes d'alignement parfois douteuses, mais surtout d'un ami. Merci aussi à Nikos Fayard dont les travaux de thèse ont motivé les travaux expérimentaux présentés dans ce manuscrit. Nikos est une source d'inspiration car il est vraiment passionné par la physique et toujours souriant et de bonne humeur. Il a su me donner un peu de son temps quand il était en post-doc pour discuter des résultats expérimentaux obtenus.

La réussite de cette thèse est non-seulement due à l'apport technique de nombreuses personnes, mais également au soutien logistique mis en place au laboratoire. Merci donc au service informatique (Romain, David), à l'équipe de gestion (Christelle, Catherine, Nathalie, Anne-Sophie), mais aussi à Jean-Marie, Emmanuel et Christian. Je tiens aussi à saluer l'équipe de direction qui a eu du pain sur la planche durant cette année 2020, et qui a tout mis en place pour maintenir une dynamique au laboratoire, en particulier pour les doctorants et post-docs.

J'ai eu de plus une super expérience d'enseignement grâce à Fabrice Lemoult qui m'a accepté comme encadrant de travaux pratiques d'acoustique à l'ESPCI pendant 2 ans. Merci Fabrice.

L'Institut Langevin est un endroit vraiment agréable où réaliser ses années de doctorat. La bonne ambiance dans les bureaux des thésards y est pour beaucoup. J'envoie une salve de remerciements aux doctorants et post-docs avec qui j'ai pu discuter de physique et autres tout en pratiquant la mécanique du levé de coude le vendredi soir aux QG « Les Arènes ». Je tiens en particulier à remercier les jeunes du groupe méthéo (Romain, Sacha, Jean-Philippe) avec lesquels j'ai beaucoup échangé durant les réunions du vendredi matin, ainsi que les autres thésards de la team wavefrontshaping (ce diable de Maxime Matthes, Louis, Guillaume, Clément). Nous nous sommes découverts avec Guillaume et Clément un goût commun pour la musique des années 80 en salle de manip. À ceux qui en ont pâti, en particulier Samuel, j'en suis désolé. Mention spéciale également aux gens du bureau R32 (Simon, Samuel, Margaux, Romain, Claire, Vincent, Kassandra, Clément, Loubnan, Max et j'en oublie sans doute), et à ses membres aquatiques (Pti Fish, Sushi). Les perdants des escape game seront confondus.

Je remercie tout mon entourage qui m'a accompagné de la classe de maternelle à aujourd'hui : les amis de l'ESPCI, le groupe 3 de travaux pratiques, mon binôme et partenaire de crime Maxime Gacoïn dit « Le Président », la famille de l'ESPCI avec une pensée particulière pour Théo, les amis de la Meuse, de Poinca, du master LOM, du bar de PC, de la Colocale Racing, du foot, du rugby et d'ailleurs. Que de bons souvenirs (et parfois de moins bons) qui m'ont conduit de l'enfance à la vie active.

Toute ma gratitude à Margherita pour m'avoir supporté et encouragé lorsque j'ai douté au cours de ces années en thèse.

Du plus profond du coeur, je remercie ma famille, et plus particulièrement mes parents, à qui je dois tout.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Propagation et contrôle de la lumière en milieux complexes</b>	<b>3</b>
I.1 Optique dans les milieux diffusants . . . . .	3
I.1.1 Diffusion de la lumière par une particule . . . . .	3
I.1.2 De la diffusion simple à la diffusion multiple : grandeurs mésoscopiques	4
I.1.3 Transport diffusif . . . . .	5
I.2 Contrôle de la propagation de la lumière dans les milieux diffusants . . . . .	7
I.2.1 Modulateurs spatiaux de lumière . . . . .	7
I.2.2 Focalisation par optimisation itérative . . . . .	8
I.2.3 Approche matricielle . . . . .	10
I.2.4 Valeurs propres de transmission . . . . .	11
I.2.5 Exploitation du désordre en optique . . . . .	12
<b>II Énergie et temps de séjour de la lumière dans des milieux fortement diffusants</b>	<b>15</b>
II.1 État de l’art et objectifs . . . . .	15
II.2 Densité d’énergie électromagnétique dans un diélectrique . . . . .	18
II.2.1 Densité d’énergie électromagnétique dans le vide . . . . .	18
II.2.2 Densité d’énergie électromagnétique dans un diélectrique non-dispersif et sans perte . . . . .	19
II.2.3 Densité d’énergie électromagnétique dans un diélectrique dispersif sans perte . . . . .	21
II.2.4 Milieu avec pertes . . . . .	23
II.2.5 Équation de conservation alternative . . . . .	23
II.3 Opérateurs temps de séjour et énergie . . . . .	25
II.3.1 Intégrale de surface pour l’énergie . . . . .	25
II.3.2 Propagation dans un guide d’onde . . . . .	26
II.3.3 Opérateurs temps de séjour et énergie . . . . .	26
II.3.4 Opérateur $Q_d$ pour un milieu avec pertes . . . . .	29
II.4 Prédiction théorique pour la distribution des temps propres . . . . .	31
II.4.1 Théorie des matrices aléatoires . . . . .	31
II.4.2 Approche DMPK . . . . .	32
II.5 Comparaison des prédictions avec les résultats de simulations ab initio . . . . .	38
II.5.1 Distribution numérique des valeurs propres de $Q_d$ . . . . .	38
II.5.2 Stockage d’énergie maximal dans un milieu désordonné en régime de diffusion multiple . . . . .	38

II.5.3	États prélocalisés et queue de la distribution des valeurs propres de $Q_d$ . . . . .	41
II.6	Contribution de $Q_i$ et $Q_e$ . . . . .	43
II.6.1	Matrices $D$ et $D_e$ . . . . .	43
II.6.2	Contributions de $Q_i$ et $Q_e$ au temps de séjour . . . . .	43
II.7	Focalisation sur un résonateur . . . . .	46
II.8	Conclusion . . . . .	49
<b>III</b>	<b>Caractérisation matricielle de la dispersion temporelle</b>	<b>51</b>
III.1	État de l'art et objectifs . . . . .	51
III.1.1	Dispersion temporelle à travers un milieu diffusant . . . . .	51
III.1.2	Manipulation spatio-temporelle par contrôle du front d'onde . . . . .	52
III.1.3	Objectifs du chapitre . . . . .	53
III.2	Expression matricielle du temps moyen et de la variance . . . . .	55
III.2.1	Expression matricielle du temps moyen du signal de sortie . . . . .	55
III.2.2	Expression matricielle de la variance centrée réduite . . . . .	58
III.3	Temps moyen en régime stationnaire et temps de retard . . . . .	59
III.3.1	Temps moyen de réflexion et transmission des vecteurs propres de $Q_R$ et $Q_T$ . . . . .	62
III.3.2	Problème aux valeurs propres généralisées et temps moyen de sortie . . . . .	63
III.4	Temps moyen de transmission de fronts d'onde particuliers . . . . .	65
III.4.1	Étude numérique du temps moyen de transmission des vecteurs propres de $T$ et $Q_T$ . . . . .	67
III.4.2	Vecteurs propres généralisés du couple $(Q_T, T)$ . . . . .	68
III.4.3	Optimisation du temps moyen de transmission . . . . .	70
III.5	Minimisation de la dispersion temporelle par modulation spatiale du front d'onde . . . . .	72
III.5.1	Écart-type temporel pour les vecteurs propres de $L_T$ et $\hat{L}_T$ . . . . .	74
III.5.2	Optimisation de la variance . . . . .	76
III.5.3	Comparaison avec les performances de la TRTM . . . . .	77
III.6	Conclusion . . . . .	79
<b>IV</b>	<b>Contrôle de flux locaux en transmission par optimisation du flux réfléchi</b>	<b>81</b>
IV.1	État de l'art et objectifs . . . . .	81
IV.1.1	Méthode de focalisation non-invasive à travers et à l'intérieur d'un milieu diffusant . . . . .	81
IV.1.2	Intensité transmise conditionnelle . . . . .	82
IV.1.3	Objectifs du chapitre . . . . .	83
IV.2	Corrélations R/T . . . . .	84
IV.2.1	Corrélation gaussiennes . . . . .	84
IV.2.2	Approche diagrammatique . . . . .	85
IV.2.3	Corrélations non-gaussiennes . . . . .	85
IV.3	Statistique conditionnelle de l'intensité transmise . . . . .	86
IV.3.1	Statistique conditionnelle avec un point en réflexion et un point en transmission . . . . .	86
IV.3.2	Statistique conditionnelle avec plusieurs grains de speckle en réflexion . . . . .	89
IV.3.3	Faible réflexion sur l'ensemble de la zone $\mathcal{D}$ . . . . .	90

IV.4	Expérience numérique de minimisation de la réflexion . . . . .	92
IV.5	Étude expérimentale de la minimisation de la réflexion par contrôle du front d'onde . . . . .	96
IV.5.1	Montage expérimental . . . . .	96
IV.5.2	Algorithme d'optimisation . . . . .	98
IV.5.3	Minimisation de l'intensité réfléchie . . . . .	100
IV.5.4	Expérience d'optimisation pour différentes valeurs de $D$ . . . . .	105
IV.6	Conclusion . . . . .	107
<b>Conclusion</b>		<b>109</b>
<b>A Méthodes numériques</b>		<b>113</b>
A.1	Algorithme de construction récursif de la fonction de Green . . . . .	113
A.2	Dérivée fréquentielle . . . . .	115
A.3	Carte de champ . . . . .	115
<b>B Opérateur temps de séjour</b>		<b>119</b>
B.1	Flux incident et base des modes propres normalisés . . . . .	119
B.2	Notations . . . . .	120
B.3	Opérateur temps de séjour . . . . .	121
<b>C Distribution marginale des temps propres</b>		<b>125</b>
C.1	Distribution marginale des temps propres pour un milieu semi-infini . . . .	125
C.2	Distribution marginale des temps propres pour un milieu de taille finie . .	126
<b>D Préparation et caractérisation des échantillons</b>		<b>129</b>
D.1	Préparation des échantillons . . . . .	129
D.2	Caractérisation des échantillons . . . . .	130
D.2.1	Caractérisation de l'épaisseur . . . . .	130
D.2.2	Caractérisation du libre parcours moyen de transport . . . . .	131
<b>Bibliographie</b>		<b>133</b>



# Introduction

Lorsqu'on éclaire un milieu désordonné, comme une couche de peinture, avec une source stationnaire quasi-monochromatique, la lumière est multiplement diffusée par les particules qui composent le milieu. Il en résulte un champ d'interférence complexe d'apparence aléatoire appelé speckle. De même, lorsqu'un milieu diffusant est éclairé par une impulsion, un speckle spatio-temporel est observé en sortie du milieu. Il y a encore une quinzaine d'années, la communauté des physiciens étudiant la propagation de la lumière dans les milieux désordonnés s'intéressait aux propriétés statistiques de tels speckles, générés par la propagation de front d'ondes simples, tels que des ondes planes. On a ainsi notamment pu caractériser l'évolution spatio-temporelle de la lumière au moyen d'un processus de diffusion, et analyser les corrélations spatiales, angulaires ou spectrales des figures de speckle.

Le champ d'étude a évolué ces dernières années, avec l'utilisation des modulateurs spatiaux de lumière (SLM) pour le contrôle du transport optique en milieux complexes. Ces derniers permettent de moduler arbitrairement en phase et/ou en amplitude le front d'onde d'un laser. La première expérience ayant démontré l'intérêt du contrôle de front d'onde en milieu désordonné a été réalisée en 2007 par I. Vellekoop et A. Mosk à l'université de Twente aux Pays-Bas. À l'aide d'un SLM, ces chercheurs ont réussi à augmenter localement l'intensité en transmission par un facteur mille à travers un milieu opaque. En 2011, il a été montré expérimentalement qu'il est possible de focaliser spatio-temporellement à travers un milieu diffusant en modifiant uniquement le front d'onde spatial d'une impulsion. Les modulateurs spatiaux de lumière permettent donc de modifier considérablement les propriétés de transport optique dans les milieux diffusants obtenues avec un éclairage non structuré.

Cette thèse, à cheval entre théorie et expérience, traite de l'optimisation de diverses propriétés liées à la propagation de la lumière en milieux complexes via un contrôle des degrés de liberté spatiaux en amont du milieu. Dans un premier chapitre introductif, nous décrivons brièvement comment se propage la lumière dans les milieux diffusants, et nous introduisons les grandeurs mésoscopiques liées au transport de la lumière dans de tels milieux et utiles dans la suite du manuscrit. Nous montrons ensuite à travers l'étude de travaux théoriques et expérimentaux que les modulateurs spatiaux de lumière permettent de façonner des fronts d'onde ayant des propriétés très différentes d'une onde plane en terme de profil de l'intensité transmise ou du flux total transmis.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à l'énergie électromagnétique stockée dans un milieu diffusant en régime monochromatique. L'énergie électromagnétique stockée dans un milieu sans perte peut être associée à un temps, appelé temps de séjour, défini comme le

rapport entre l'énergie stockée dans le milieu et la puissance électromagnétique incidente. Nous montrons qu'il existe un opérateur permettant de connaître le temps de séjour pour un front d'onde incident arbitraire. La distribution des valeurs propres de cet opérateur est étudiée théoriquement et numériquement, révélant entre autres l'existence d'un temps de séjour minimal et d'un temps de séjour maximal. Pour des milieux de grande épaisseur optique, le temps de séjour minimal varie comme le temps moyen de diffusion, alors que le temps de séjour maximal varie comme le temps de Thouless du milieu. Nous montrons par ailleurs comment utiliser cet opérateur pour apprendre à concentrer la lumière sur des cibles résonantes cachées dans un milieu diffusant.

Dans le chapitre 3, nous nous penchons sur le problème du contrôle temporel du flux transmis à travers un milieu diffusant éclairé par une impulsion. Nous établissons une expression matricielle du temps moyen et de la variance du signal correspondant au flux sortant dans un ensemble arbitraire de canaux de sortie, permettant de connaître le temps moyen et la variance du signal de sortie pour un front d'onde arbitraire. Nous étudions ensuite numériquement quelques propriétés statistiques du temps moyen du signal correspondant au flux total réfléchi et au flux total transmis dans la limite où la largeur temporelle de l'impulsion tend vers l'infini, et comparons les résultats à des prédictions théoriques existantes. Enfin, nous étudions le profil temporel, construit numériquement, du flux sortant à travers l'ensemble des canaux de transmission d'un milieu diffusant. L'approche matricielle nous permet d'obtenir de façon déterministe des fronts d'onde incidents produisant un signal transmis ayant un temps moyen et une variance très différents de ceux obtenus avec une onde plane. Il est possible en particulier de trouver des fronts d'onde conduisant à un signal transmis moins dispersé temporellement que celui produit par une onde plane.

Dans le chapitre 4, en grande partie expérimental, nous étudions la possibilité d'utiliser l'information portée par l'intensité réfléchie afin d'augmenter localement l'intensité transmise à travers un milieu diffusant. Dans un premier temps, nous discutons la statistique de l'intensité transmise sous contrainte, connaissant l'intensité réfléchie sur une zone de taille finie. Une augmentation locale de l'intensité transmise est ainsi prédite lorsque l'intensité réfléchie est inférieure au niveau de réflexion moyen dans une zone donnée. Nous montrons ensuite comment exalter cet effet au moyen d'une modulation du front d'onde incident visant à minimiser la réflexion locale. Nous présentons enfin nos résultats expérimentaux de minimisation de l'intensité réfléchie par contrôle du front d'onde. L'intensité transmise obtenue après optimisation est bien augmentée localement par rapport au profil obtenu avant optimisation, dans une zone en vis-à-vis de celle où la réflexion est minimisée. Ces résultats expérimentaux sont comparés à des simulations numériques de la propagation de fronts d'onde optimisés.

# Chapitre I

## Propagation et contrôle de la lumière en milieux complexes

Nous introduisons succinctement dans ce chapitre les grandeurs mésoscopiques utiles pour décrire la propagation de la lumière dans des milieux diffusants, puis nous montrons comment les modulateurs spatiaux de lumière ont modifié notre façon d'étudier et de contrôler l'interaction de la lumière avec ces milieux.

### I.1 Optique dans les milieux diffusants

#### I.1.1 Diffusion de la lumière par une particule

La propagation d'une onde plane dans le vide est perturbée lorsque cette dernière rencontre une inhomogénéité telle que, par exemple, une particule diélectrique. Les atomes de la particule sont excités par l'onde plane incidente et la particule se comporte comme une source qui rayonne de l'énergie. Ce mécanisme est à l'origine du phénomène de diffusion. Pour mesurer l'efficacité de la diffusion, une grandeur pertinente est la puissance diffusée par la particule en champ lointain normalisée par la puissance par unité de surface véhiculée par l'onde plane incidente. Ce ratio, qui est homogène à une surface, est appelé section efficace de diffusion, notée  $\sigma_s$ . Pour une particule sphérique de rayon  $a$ , le régime diffusion dépend du rapport entre le rayon  $a$  et la longueur d'onde  $\lambda$  :

- Pour une particule petite devant la longueur d'onde ( $a \ll \lambda$ ), la particule se comporte comme un dipôle électrique, l'énergie est diffusée de manière isotrope, c'est le régime de diffusion de Rayleigh. Pour un atome à résonance, la section efficace de diffusion est plus grande que la section géométrique de l'atome de plusieurs ordres de grandeur ( $\sigma_s \sim \lambda^2$ ).
- Pour une particule sphérique dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde ( $a \sim \lambda$ ), la théorie de Mie permet de calculer exactement la section efficace de diffusion. Dans le régime de diffusion de Mie, il y a asymétrie entre l'avant et l'arrière, la diffusion se fait préférentiellement vers l'avant. La diffusion de Rayleigh et la diffusion dans le régime de Mie sont schématisées sur la Fig. I.1.
- Pour une particule grande devant la longueur d'onde ( $a \gg \lambda$ ), les lois de l'optique

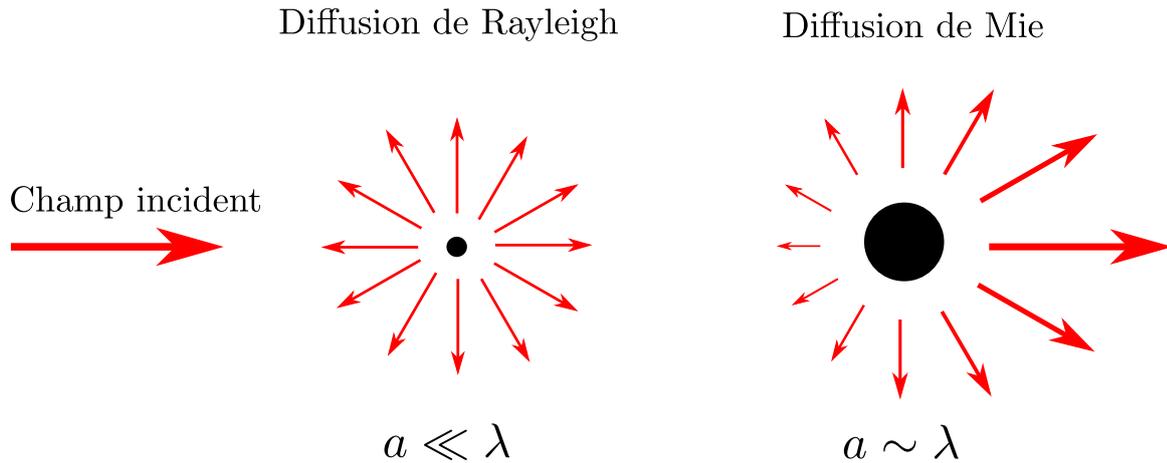


FIGURE I.1 – Diffusion de Rayleigh (gauche) et de Mie (droite).

géométrique s'appliquent. La particule est un obstacle de surface  $\pi a^2$ , et la section efficace de diffusion, lorsqu'il n'y pas d'absorption, vaut  $2\pi a^2$  (le facteur 2 provient d'un effet ondulatoire non pris en compte par l'optique géométrique).

### I.1.2 De la diffusion simple à la diffusion multiple : grandeurs mésoscopiques

Dans un milieu diélectrique dense, constitué de diffuseurs séparés par des distances bien plus petites que la longueur d'onde, l'onde lumineuse n'est pas sensible aux inhomogénéités de la matière. La diffusion par chacun des constituants se traduit simplement par une modification de la vitesse de propagation balistique de la lumière, caractérisée par l'indice optique  $n$  du matériau. En revanche, lorsqu'un milieu est composé d'un ensemble de particules diélectriques séparés par des distances comparables ou supérieures à la longueur d'onde, on obtient un milieu où la lumière peut être potentiellement diffusée plusieurs fois. Une grandeur mésoscopique importante pour décrire la propagation d'une onde dans un tel milieu est le libre parcours moyen de diffusion  $\ell_s$ . C'est la distance moyenne entre deux événements de diffusion. Cette longueur est usuellement très différente de la distance moyenne entre diffuseurs car elle dépend de la section efficace de diffusion  $\sigma_s$  de chaque particule. Dans un milieu désordonné sans corrélation spatiale,  $\ell_s = 1/\rho\sigma_s$ , où  $\rho$  est la densité de particules. On distingue les régimes de propagation suivants en fonction du rapport entre l'épaisseur du milieu  $L$  dans lequel se propage l'onde et  $\ell_s$  :

- $L \ll \ell_s$  : régime de propagation balistique.
- $L \sim \ell_s$  : régime de diffusion simple, l'onde est diffusée en moyenne une seule fois avant de sortir du milieu.
- $L \gg \ell_s$  : régime de diffusion multiple, l'onde est diffusée de nombreuses fois avant de sortir du milieu.

La Fig. I.2 illustre ces différents régimes. En régime de diffusion multiple, l'information spatiale portée par la lumière est brouillée. L'intensité de l'onde balistique s'amortit exponentiellement suivant la loi de Beer-Lambert  $I = I_0 e^{-L/\ell_s}$  en l'absence d'absorption, si



FIGURE I.2 – Photographie d’un champ dans le brouillard (source site [1]). On ne distingue pas la forme des objets au loin.

bien qu’il n’est pas possible de distinguer les détails au loin sur la photographie I.2. Le rapport  $b = L/\ell_s$  est appelé épaisseur optique du milieu.

Le libre parcours moyen de diffusion ne caractérise pas entièrement le régime de propagation de la lumière, car la diffusion par une particule peut se faire essentiellement vers l’avant, comme c’est le cas pour la diffusion par une particule de taille supérieure à la longueur d’onde. On introduit alors le libre parcours moyen de transport  $\ell$ , qui est la distance typique sur laquelle la direction de l’onde reste corrélée avec la direction incidente. Dans le régime de diffusion de Rayleigh, le libre parcours moyen de transport et le libre parcours moyen de diffusion sont égaux. Plus généralement, ces deux quantités sont reliées par le facteur d’anisotropie  $g$  :

$$\ell = \frac{\ell_s}{1 - g}. \quad (\text{I.1})$$

Le facteur  $g$  est formellement défini comme la moyenne angulaire du cosinus de l’angle de diffusion par une particule. Pour une diffusion isotrope,  $g$  est nul, et pour une diffusion essentiellement vers l’avant,  $g$  se rapproche de l’unité. Les milieux étudiés dans le cadre de cette thèse sont des milieux optiquement épais ( $b \gg 1$ ) pour lesquels la diffusion est isotrope ( $g \sim 0$ ). Dans ce cas, le transport de l’intensité lumineuse moyenne peut se décrire par une équation de diffusion. Ici, la moyenne est à comprendre comme une moyenne sur un ensemble de réalisations statistiques du milieu désordonné

### I.1.3 Transport diffusif

Pour décrire la propagation d’une onde dans un milieu diffusant à l’échelle de la longueur d’onde, il faut résoudre les équations de Maxwell dans la matière diélectrique. Cela nécessite de connaître le tenseur diélectrique  $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$  en chaque point et pour chaque fréquence. Si en revanche on s’intéresse au transport sur des échelles grandes devant la longueur d’onde et le libre parcours moyen de transport, la modélisation du transport de l’énergie peut être grandement simplifiée. Pour un système dilué ( $\ell_s \gg \lambda$ ) et non-absorbant, le transport de la densité d’énergie moyenne  $u_d$ , où moyenne signifie moyenne sur les

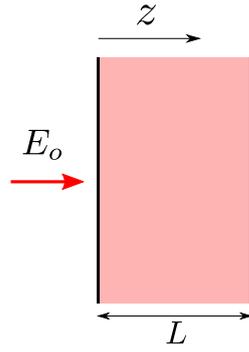


FIGURE I.3 – Configuration d’une couche de milieu diffusant éclairée par une onde plane.

réalisations du désordre, est pilotée par l’équation de diffusion [2] :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - D_B \nabla^2 \right] u_d(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.2})$$

où  $S(\mathbf{r}, t)$  est un terme source, représentant par exemple l’éclairement par une onde externe, et  $D_B$  le coefficient de diffusion.  $D_B = v_E \ell / 3$  pour un système 3D et  $D_B = v_E \ell / 2$  pour un système 2D, avec  $v_E$  la vitesse de transport de l’énergie (pour un milieu non-résonant,  $v_E = c/n$ ,  $n$  étant l’indice effectif du milieu).

Un cas important est celui d’un milieu éclairé sous incidence normale par une onde plane. À partir de l’équation de diffusion (I.2) et des conditions aux limites (imposées par l’annulation de la luminance diffuse aux interfaces), on obtient le profil de l’énergie dans le milieu, ainsi que la transmission, en régime stationnaire. Pour une profondeur  $z$  supérieure à  $\ell$ , l’énergie diffusée s’écrit [3, 4] :

$$u_d(z) \propto \frac{L + z_o - z}{L + 2z_o}, \quad (\text{I.3})$$

où  $z_o$  est la longueur d’extrapolation. Cette dernière vaut  $z_o = 2\ell/3$  pour un système 3D et  $z_o = \pi\ell/4$  pour un système 2D. L’énergie diffusée décroît linéairement dans le milieu. Pour calculer l’énergie totale stockée dans le milieu, il faut intégrer sur l’épaisseur du milieu. Pour un milieu de grande épaisseur optique, on obtient :

$$U \propto P_{in} \frac{L}{c}, \quad (\text{I.4})$$

où  $P_{in}$  est la puissance incidente. L’énergie déposée ne dépend pas de la force du désordre mais seulement de l’épaisseur du milieu, comme dans le cas d’un milieu homogène. On analysera en détail ce résultat dans le chapitre 2. La fraction de puissance transmise à travers le milieu est quant à elle égale à [4] :

$$T \propto \frac{\ell}{L}. \quad (\text{I.5})$$

On retrouve une loi d’échelle typique d’un transport diffusif.

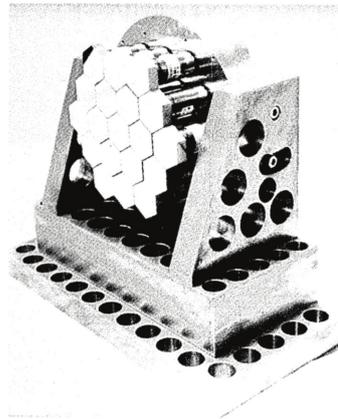


FIGURE I.4 – Miroir actif à 19 segments.

## I.2 Contrôle de la propagation de la lumière dans les milieux diffusants

Dans cette section, nous présentons de manière succincte divers types de modulateurs spatiaux de lumière, puis nous illustrons de manière non exhaustive leurs applications au contrôle du transport de la lumière dans les milieux complexes.

### I.2.1 Modulateurs spatiaux de lumière

En raison des variations spatiales de l'indice optique de l'atmosphère, le front d'onde de la lumière émise par les étoiles n'est pas plan lorsqu'il arrive sur un télescope. De la présence d'aberrations résulte une dégradation de la résolution des images. C'est pour remédier à ce problème qu'est née l'optique adaptative, conceptualisée dans les années 50 [5–7], et implémentée expérimentalement dans les années 80 [8, 9]. Des miroirs constitués de quelques dizaines de segments actifs, comme illustré sur la Fig. I.4, étaient alors utilisés. L'idée était de moduler la phase, en déplaçant chacun des segments contrôlés par des systèmes piézoélectriques, afin de compenser les perturbations du front d'onde induites par l'atmosphère, comme schématisé sur la Fig. I.5.

On dispose aujourd'hui de technologies diverses pour moduler spatialement la lumière. On peut citer comme technologies largement utilisées :

- Les modulateurs à cristaux liquides nématiques, couramment appelés SLM (pour *Spatial Light Modulator* bien qu'ils ne soient pas les seuls modulateurs spatiaux de lumière). Chaque pixel est une cellule de quelques microns contenant des cristaux liquides. En modulant indépendamment la tension appliquée sur chaque pixel, il est possible de contrôler la biréfringence locale du matériau et donc de modifier localement la phase pour une polarisation donnée. Le principe de fonctionnement est décrit sur la Fig. I.6 (b). Il existe des SLM fonctionnant en réflexion ou transmission.
- Les DMD (pour *Digital Micromirror Device*), constitués de micro-miroirs d'une taille typique de 10 micromètres pouvant adopter deux positions, permettant une modulation d'amplitude de la lumière. Un DMD est représenté sur la Fig. I.6 (c).

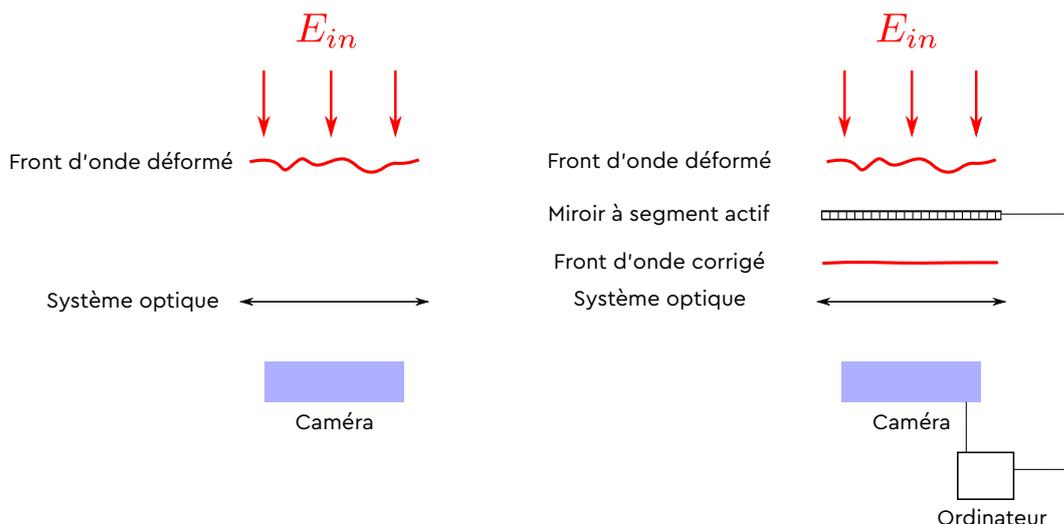


FIGURE I.5 – Principe de l’optique adaptative : la position des segments actifs du miroir est optimisée afin d’obtenir l’image avec le meilleur contraste sur la caméra. L’expérience est ici schématisée avec un modulateur en transmission.

- Les micro-miroirs déformables, couramment appelés DM (pour *Deformable Mirror*), constitués d’une surface continue déformable ou d’une surface segmentée, attachée à une membrane actuatrice pouvant être déformée sous l’action du potentiel appliqué aux électrodes placées sous la membrane, comme représenté sur la Fig. I.6 (d).

Les DMD et DM permettent une modulation plus rapide ( $\sim$  kHz) que les SLM car ces derniers sont limités par la dynamique des cristaux liquides ( $\sim$  10 - 100 Hz). Cependant, une fraction importante de la lumière est perdue avec les DMD, et les DM ont un nombre de pixels moindre que les SLM et DMD et sont beaucoup plus chers [10]. Aujourd’hui le nombre de degrés de liberté contrôlables est de l’ordre du million pour une surface de l’ordre du  $\text{cm}^2$  pour les SLM et DMD. Le site [11] recense des articles et présentations orales en lien avec les modulateurs spatiaux de lumières, et proposent des tutoriels pour caractériser et utiliser des SLM et DMD.

## I.2.2 Focalisation par optimisation itérative

### Focalisation spatiale

En contrôlant quelques milliers de pixels d’un SLM, I. Vellekoop et A. Mosk ont pu démontrer la focalisation de la lumière à travers une couche de peinture d’épaisseur optique  $b = 20$ , obtenant une intensité au point de focalisation 1000 fois supérieure à l’intensité transmise diffuse [15]. L’expérience implique un rétro-contrôle entre la zone de la caméra où l’on souhaite optimiser l’intensité et le modulateur. Il est intéressant de noter que l’ensemble constitué du miroir à cristaux liquides et du milieu diffusant se comporte comme une lentille, ce comportement a été mis en avant par la suite [16]. Il est également possible de s’intéresser à d’autres observables. Ainsi, dans la Réf. [17], S. M. Popoff et ses collaborateurs ont optimisé la transmission totale à travers une couche de dioxyde de titane.

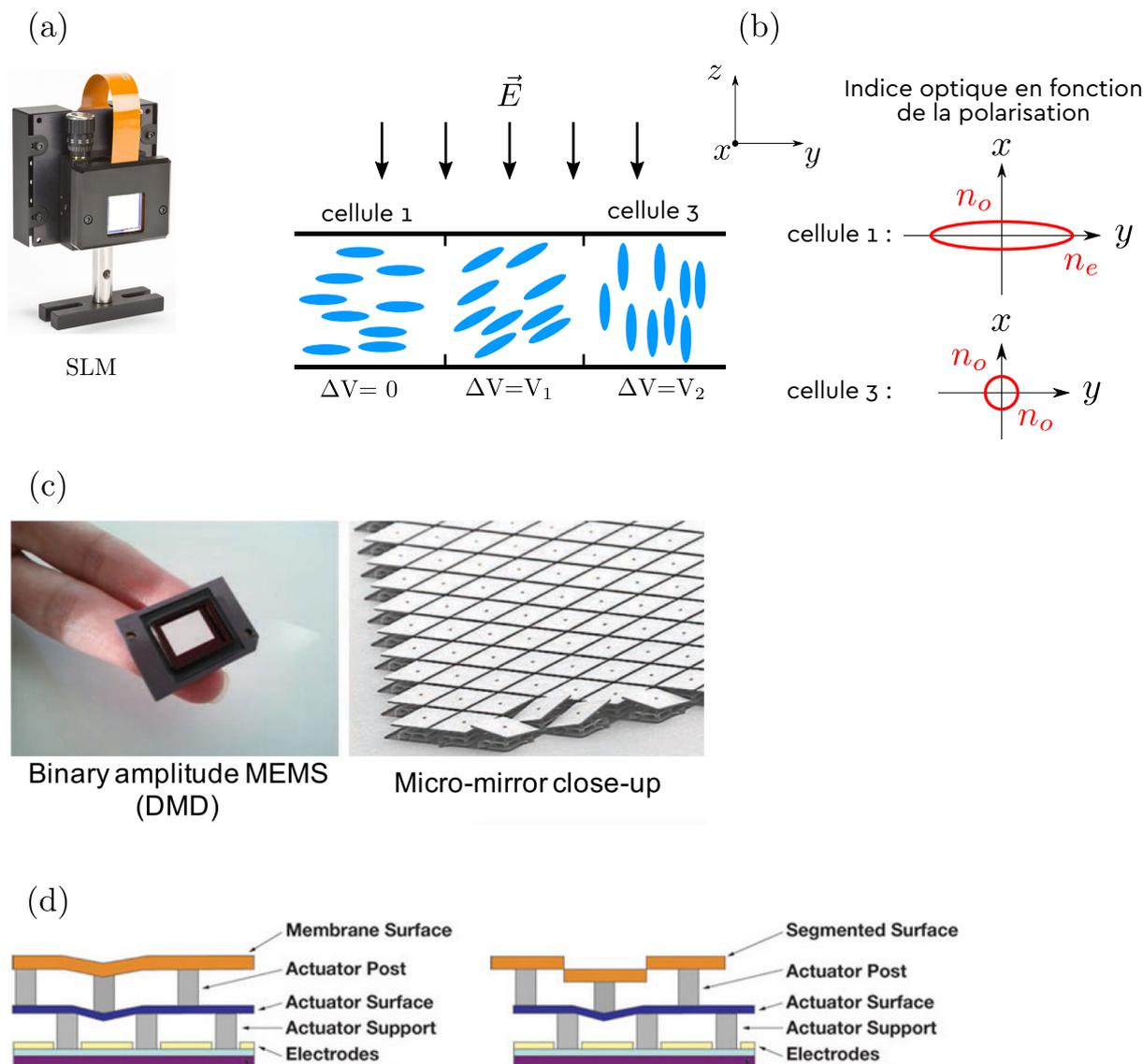


FIGURE I.6 – (a) Image d'un SLM en réflexion provenant du site de Meadowlark Optics [12]. (b) Schéma de principe d'un SLM : Des cristaux liquides (ovoïdes bleus) en forme de bâtonnet sont compris entre deux électrodes. En fonction de la différence de potentiel entre les électrodes, les cristaux liquides changent d'orientation. Lorsque les cristaux sont au repos (différence de potentiel nulle), le milieu se comporte comme un milieu biréfringent pour une onde incidente normale aux électrodes. La polarisation selon  $x$  est sensible à l'indice extraordinaire  $n_e$ , et la polarisation selon  $y$  est sensible à l'indice ordinaire  $n_o$ . Lorsque les cristaux sont perpendiculaires aux plans des électrodes, les deux polarisations de la lumière incidente sont sensibles au même indice optique  $n_o$ . La polarisation selon  $x$  est donc sensible à un indice qui varie en fonction de la direction des cristaux, et donc du voltage appliqué. (c) Image d'un DMD provenant de la revue [13]. (d) Schéma provenant du site de Thorlabs de deux types de DM : un DM à surface continue et un DM à surface segmentée [14].

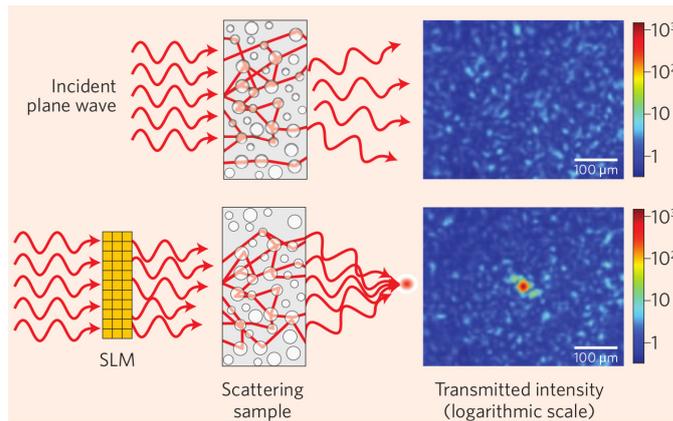


FIGURE I.7 – Figure issue de la Réf. [18] représentant la focalisation de la lumière à travers un milieu diffusant à l’aide d’un SLM.

### Focalisation spatio-temporelle

Il est possible de focaliser par optimisation, non seulement spatialement, mais également temporellement pour une impulsion lumineuse incidente [19–21]. La modulation spatiale de la lumière permet une focalisation spatio-temporelle car les degrés de liberté spatiaux en entrée influent à la fois sur les degrés de liberté spatiaux et temporels en sortie [18, 22]. Le chapitre 3 de ce manuscrit porte en partie sur la recompression du signal en transmission d’un milieu diffusant par contrôle du front d’onde incident, et reprend plus en détail le principe de ces expériences.

### I.2.3 Approche matricielle

Les modulateurs spatiaux de lumière ont permis d’adopter en optique expérimentale une approche développée au préalable pour le contrôle des ondes acoustiques [23, 24] : l’approche matricielle. Bien que la propagation d’une onde à travers un milieu désordonné soit complexe, le champ en entrée et le champ en sortie sont reliés en régime linéaire par la matrice de diffusion  $S$  [13]. Cette dernière peut se mesurer en excitant au moyen d’un SLM chacun des vecteurs d’une base complète de l’espace libre, et en mesurant le champ diffusé dans tous les canaux de sortie par une méthode interférométrique.

### Focalisation spatiale

En optique, la géométrie des milieux étudiés permet souvent de définir une face d’entrée et une face de sortie. C’est le cas par exemple pour une couche de peinture ou une fibre optique. Il est alors naturel d’introduire les matrices de transmission  $t$ , et de réflexion  $r$ , qui lient respectivement le champ incident au champ sortant en transmission et réflexion. La première mesure de la matrice de transmission optique a été réalisée à l’institut Langevin par S. M. Popoff et ses collaborateurs [25]. Cette matrice, notée  $t_{obs}$ , peut alors être utilisée pour focaliser spatialement la lumière en sortie du milieu diffusant. En raison du bruit expérimental, cette focalisation se réalise avec l’opérateur adjoint de la matrice de transmission mesurée,  $t_{obs}^\dagger$ , plutôt qu’avec  $t_{obs}^{-1}$  [25], ce qui revient à effectuer une opération de conjugaison de phase. Contrairement à l’approche par optimisation, l’approche matricielle permet en une mesure de  $t_{obs}$  d’obtenir toute l’information nécessaire pour

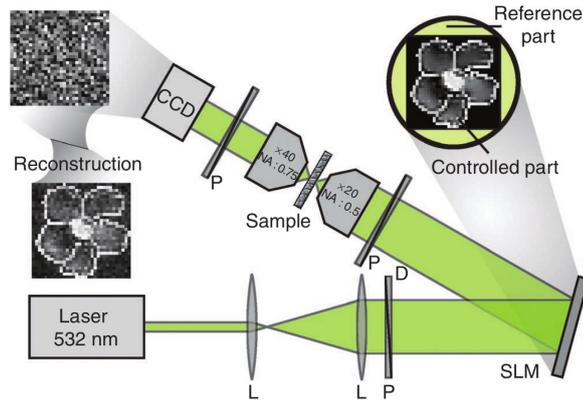


FIGURE I.8 – Schéma du montage permettant la mesure de la matrice de transmission et la reconstruction d'image à partir d'un speckle. Le schéma est issu de la Réf. [26].

focaliser en n'importe quel point de sortie. Un tel avantage a un coût évident : le milieu dont on évalue la matrice de transmission doit être stable pendant le temps de mesure et d'utilisation de la matrice.

### Reconstruction d'image

La transmission d'une image à travers un milieu fortement diffusant se traduit par un speckle où l'information initiale est spatialement mélangée. La connaissance de la matrice de transmission permet de remonter à l'image en amont du milieu diffusant [26], comme cela est représenté sur la Fig. I.8. Pour remonter à l'image exacte à partir du champ de speckle, il faut idéalement utiliser  $t_{obs}^{-1}$  comme opérateur de reconstruction. En raison du bruit expérimental, ce choix ne constitue pas la solution optimale pour la reconstruction d'image. Dans la Réf. [26], les auteurs utilisent l'opérateur  $W = [t_{obs}^\dagger t_{obs} + \sigma I]^{-1} t_{obs}^\dagger$ , avec  $t_{obs}$  l'opérateur de transmission mesuré et  $\sigma$  le niveau de bruit sur les pixels de la caméra, qui a été démontré dans le cadre des télécommunications comme étant l'opérateur optimal en présence de bruit [27, 28].

### I.2.4 Valeurs propres de transmission

La matrice de transmission a été largement étudiée à la fois expérimentalement et théoriquement. En particulier, la connaissance de la matrice de transmission permet de construire l'opérateur  $t^\dagger t$ , ce dernier donnant accès au flux transmis pour un front d'onde incident arbitraire. Ses valeurs propres sont appelées valeurs propres de transmission. La distribution des valeurs propres de transmission pour un milieu désordonné a tout d'abord été prédite par O. Dorokhov au début des années 80 [29], dans le cadre de l'étude du transport électronique dans des fils métalliques désordonnés. La distribution théorique des valeurs propres de transmission en régime diffusif est la suivante :

$$p(T) = \frac{\langle T \rangle}{2T\sqrt{1-T}}, \quad (\text{I.6})$$

où  $\langle T \rangle$  est le coefficient de transmission total moyen du milieu. Il peut se calculer en prenant la moyenne des coefficients de transmission d'ondes planes sous différentes inci-

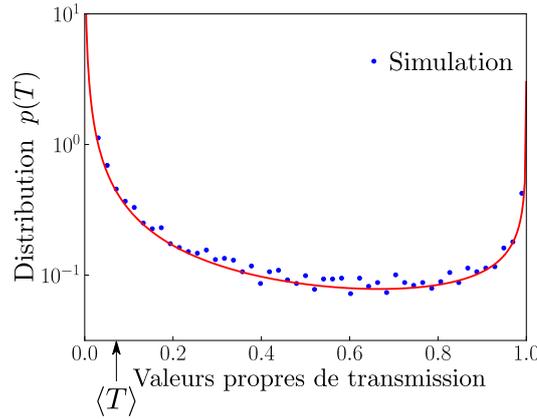


FIGURE I.9 – Distribution numérique et théorique des valeurs propres de transmission pour un milieu d’épaisseur  $kL = 600$  imbriqué dans un guide d’onde de largeur  $kW = 600$ . La transmission moyenne est  $\langle T \rangle = 0.07$ . La distribution a été générée en utilisant 128 réalisations du désordre.

dences. On obtient :

$$\langle T \rangle = c_d \frac{\ell}{L}, \quad (\text{I.7})$$

où  $c_d$  est un coefficient qui vaut  $c_3 = 4/3$  dans le cas 3D et  $c_2 = \pi/2$  en 2D. La distribution des valeurs propres de transmission est appelée distribution bimodale, car la majeure partie des vecteurs propres ont un coefficient de transmission nulle ou proche de l’unité. Cette distribution est représentée sur la Fig. I.9. Ces travaux théoriques, pensés dans le cadre du transport quantique où il n’est pas possible de moduler le front d’onde électronique incident, ont trouvé un écho bien des années après en acoustique puis en optique. La distribution bimodale a notamment été observée pour des ondes élastiques se propageant dans un guide désordonné [30]. Ainsi, il est possible grâce aux techniques de manipulation du front d’onde de générer un état propre associé à une forte valeur propre, et d’obtenir un facteur de transmission bien supérieur au facteur de transmission moyen. Dans la Réf. [17], les auteurs ont façonné en optique des fronts d’onde avec un niveau de transmission totale environ quatre fois supérieur au facteur de transmission d’une onde plane. Néanmoins, la loi bimodale n’a jamais été observée expérimentalement en optique dans un milieu ouvert, tel qu’une couche désordonnée, pour lequel tous les degrés de liberté ne peuvent être excités optiquement. Il a été montré théoriquement qu’un contrôle incomplet des degrés de liberté du champ en entrée ou en sortie résulte en une modification de la distribution des valeurs propres de transmission, faisant disparaître le caractère bimodal de la distribution [31].

### I.2.5 Exploitation du désordre en optique

En imagerie optique, le désordre prohibe la reconstruction d’images en profondeur des tissus biologiques. Dans les applications utilisant des fibres optiques, le couplage intermodal au sein des fibres multimodes auquel s’ajoute la dispersion limitent la reconstruction du signal en imagerie endoscopique ou dans le domaine des télécommunications. Le désordre est par conséquent souvent perçu comme une nuisance. Cependant, il peut être exploité à profit dans certains cas. Les auteurs de la Réf. [32] ont par exemple montré qu’un milieu

diffusant permet de réduire le nombre de capteurs nécessaires à la reconstruction d'image en utilisant les techniques d'acquisition comprimée. Couplé à un modulateur spatial de lumière, on a vu qu'un milieu désordonné peut également se comporter comme une lentille dont la focale et la résolution peuvent être contrôlées [16, 33, 34]. Plus généralement, l'ensemble constitué d'un modulateur spatial de lumière, d'un milieu désordonné et d'un système de détection est représenté par un opérateur. Cet opérateur change pour chaque masque que l'on impose sur le modulateur spatial de lumière. Il est également possible de moduler l'opérateur en changeant numériquement la détection sur la caméra. S'inspirant de travaux réalisés à l'Institut Langevin en électromagnétisme [35], M. W. Matthès et ses collaborateurs ont montré qu'un milieu diffusant, ou une fibre multimode, peuvent être exploités pour réaliser optiquement des calculs [36]. En utilisant une source de photon unique, il est également envisageable de faire du calcul quantique à l'aide d'un milieu complexe [37, 38]. Comme dernier exemple, citons le développement par la startup LightOn, créée en 2016, de processeurs optiques constitués d'un DMD, un milieu désordonné et une caméra. Ces derniers permettent d'effectuer de manière analogique des projections aléatoires de très grandes tailles (au moyen de  $\sim 10^6$  pixels) très rapidement ( $\sim$  kHz). Ce genre d'opérations permet d'implémenter des techniques d'apprentissage basées sur le *reservoir computing*, technique proche des réseaux de neurones, utilisées par exemple pour effectuer la classification de sons ou d'images.



# Chapitre II

## Énergie et temps de séjour de la lumière dans des milieux fortement diffusants

### II.1 État de l'art et objectifs

Historiquement, la question du temps de diffusion d'une onde rencontrant un potentiel diffusant a d'abord été posée dans le cadre de la mécanique quantique. Différentes définitions du temps de diffusion ont été proposées tout au long du XX<sup>e</sup> siècle. En régime stationnaire, deux définitions sont couramment utilisées. La première est le temps de retard (*time delay* ou *group delay*), introduit suite aux travaux de E. Wigner et de son étudiant L. Eisenbud [39, 40]. Dans la Réf. [40], E. Wigner considère la diffusion à une dimension d'un paquet d'onde quasi-monochromatique centré à la fréquence  $\Omega_o$  sur une particule. Après diffusion, chaque composante spectrale possède une phase supplémentaire  $\eta(\omega)$  par rapport à la propagation dans l'espace sans particule et le sommet du paquet d'onde est décalé spatialement de  $\partial_k \eta(\Omega_o)$ , où  $k$  est la norme du vecteur d'onde, et temporellement de  $\partial_\omega \eta(\Omega_o)$ . C'est ce dernier temps que Wigner nomme temps de retard, noté  $\tau_g$  dans la suite. La relation entre temps de retard et la dérivée spectrale de la phase est étudiée de façon approfondie dans la Réf. [41]. La deuxième définition couramment utilisée est celle du temps de séjour (*dwell time*), noté  $\tau_d$ , introduit par F. Smith dans la Réf. [42]. Pour une particule quantique et une région de l'espace de volume  $V$ , le temps de séjour correspond au ratio entre la probabilité de trouver la particule dans le volume  $V$  et le courant de probabilité  $J_{in}$  entrant dans ce volume :

$$\tau_d = \frac{\int_V d\mathbf{r} |\Psi(\mathbf{r}, \omega)|^2}{J_{in}}, \quad (\text{II.1})$$

où  $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$  est la fonction d'onde de la particule. Pour rendre cette définition intuitive, nous pouvons raisonner par analogie avec le comportement d'un fluide. En hydrodynamique, en régime stationnaire, le quotient entre la masse d'eau stockée dans un volume et le flux massique d'eau entrant dans ce volume donne le temps moyen que passe une particule fluide dans ce volume. Cette description est valable ici aussi mais avec la densité de probabilité qui est la quantité conservée en mécanique quantique. Les revues [43, 44]

présentent et détaillent les concepts de temps de retard et de temps de séjour ainsi que leurs applications. Dans la Réf. [42], F. Smith a montré que le temps de séjour d'une onde quantique dans une région de l'espace avec un potentiel arbitraire peut s'exprimer au moyen de l'opérateur  $Q = -iS^\dagger \partial_\omega S$ , où  $S$  est la matrice de diffusion (*scattering matrix*). Ce résultat a été obtenu peu de temps avant par J. Friedel en 1D dans le contexte de l'étude des impuretés dans les métaux [45]. L'opérateur  $Q$  est aujourd'hui appelé opérateur de Wigner-Smith. En 1D, le temps donné par l'opérateur de Wigner-Smith se confond avec le temps de retard. L'opérateur de Wigner-Smith permet donc la généralisation du temps de retard au cas multicanal. Dans la Réf. [42], F. Smith a ainsi montré que temps de séjour et temps de retard sont approximativement égaux. En réalité, ce n'est vrai que lorsque l'on peut négliger certaines contributions. Dans le cas d'une simple barrière de potentiel unidimensionnelle, la relation entre  $\tau_g$  et  $\tau_d$  peut s'écrire sous la forme [46] :

$$\tau_g = \tau_d + \tau_i, \quad (\text{II.2})$$

où  $\tau_i$  est un temps d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchi :

$$\tau_i = \text{Im}(R) \frac{\hbar}{k} \partial_E k, \quad (\text{II.3})$$

où  $R$  est le coefficient de réflexion sur la barrière. H. Winful a utilisé ces formules dans le cadre de l'effet tunnel pour clarifier le débat sur l'effet Hartman et le problème de vitesse supraluminique [47–51].

En électromagnétisme dans un milieu non absorbant, la quantité conservée est, non pas la densité de probabilité, mais l'énergie. C'est le ratio entre cette dernière et le flux électromagnétique qui permet de définir le temps de séjour. Dans la Réf. [52], H. Winful établit une formule analogue à (II.2) en électromagnétisme dans le cas d'un guide d'onde contenant un obstacle représenté par une barrière diélectrique uniforme et supportant un seul mode propagatif. L'expression de  $\tau_i$  diffère alors légèrement de son expression pour une onde quantique. Cependant, il n'existe pas de résultat pour un milieu complexe quelconque possédant un nombre arbitraire de canaux de diffusion.

Le premier objectif de ce chapitre est d'établir l'expression d'un opérateur pour le temps de séjour d'un front d'onde arbitraire se propageant dans un milieu diélectrique quelconque. Cet opérateur, noté  $Q_d$ , est la somme de trois termes incluant l'opérateur de Wigner-Smith  $Q$ , un opérateur, noté  $Q_i$ , fournissant le temps interférentiel  $\tau_i$  dans le cas multicanal et un opérateur, noté  $Q_e$ , quantifiant la diffusion dans les canaux évanescents à la surface du milieu considéré. Ces opérateurs sont construits numériquement pour des systèmes désordonnés en résolvant l'équation d'onde et leurs propriétés statistiques seront analysées en détail. Pour une grande majorité de fronts d'onde, l'opérateur de Wigner-Smith fournit la contribution dominante au temps de séjour. Des écarts notables à ce résultat peuvent s'observer pour des fronts d'onde qui pénètrent très peu dans le milieu ou pour certaines valeurs discrètes de la fréquence de l'onde.

Jusqu'au milieu des années 90, la majorité des physiciens qui s'intéressaient au temps de retard ou temps de séjour étaient issus de la communauté de la matière condensée. Ces derniers s'intéressaient à certaines quantités globales, comme la conductance sommée sur l'ensemble des canaux de sortie du milieu, ou le temps de Wigner,  $\tau_W = \text{Tr}(Q)/2N$  avec  $N$  la taille de la matrice de transmission, qui correspond au temps de retard moyen

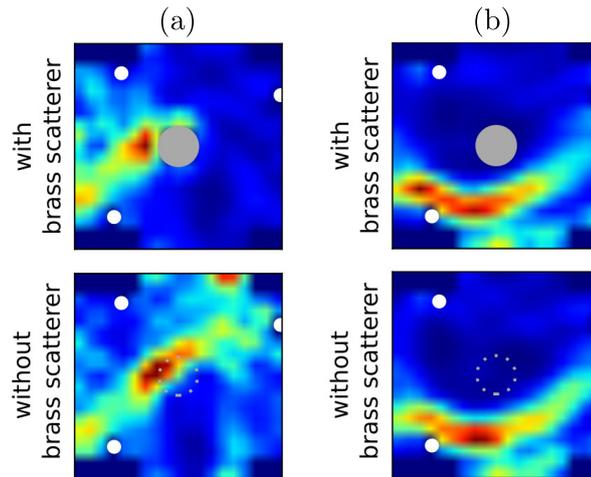


FIGURE II.1 – Cartes d'intensité micro-onde issues de la Réf. [64]. À gauche, on peut voir la propagation du front d'onde maximisant l'impulsion sur la cible (grisée) et à droite le front d'onde minimisant l'impulsion sur la cible. On peut voir en bas la propagation de ces mêmes états en l'absence de la cible.

sur l'ensemble des canaux d'entrée et de sortie du milieu. Ce temps est particulièrement important en physique mésoscopique car il est proportionnel à la densité d'état du milieu [53, 54]. En acoustique, électromagnétisme ou optique, il est en revanche possible de mesurer le champ dans les canaux pris séparément. Dans les Réfs. [55, 56], une prédiction en bon accord avec des mesures en électromagnétisme a été faite concernant la distribution du temps  $\partial_\omega \phi_{nm}$ , où  $\phi_{nm}$  est la phase de l'élément de matrice  $S_{nm} = |S_{nm}|e^{i\phi_{nm}}$  qui lie le champ incident dans le canal  $m$  à celui sortant dans le canal  $n$ . Cependant, que ce soit en acoustique avec une matrice de transducteurs, en électromagnétisme avec un réseau d'antennes, ou en optique suite au développement des techniques de contrôle du front d'onde, il est aujourd'hui possible de façonner une onde avec un front d'onde arbitraire. Il est alors pertinent d'un point de vue théorique de s'intéresser non seulement à des quantités moyennes comme le temps de Wigner mais également à l'ensemble des valeurs propres de  $Q$ , appelées temps propres. La distribution des temps propres a été largement étudiée d'un point de vue théorique pour des systèmes chaotiques [57–60]. Il existe notamment une prédiction de la distribution des temps propres pour des systèmes chaotiques avec couplage idéal ou non [61, 62]. En ce qui concerne les milieux désordonnés, les propriétés statistiques du temps de Wigner ont été étudiées en régime balistique, diffusif et localisé [53, 63], mais il n'existait pas de prédiction pour la distribution des temps propres au début de cette thèse. Dans ce chapitre, nous établissons une prédiction pour la distribution des temps propres et nous la comparons à nos résultats numériques obtenus par résolution de l'équation d'onde.

L'avènement des techniques de contrôle du front d'onde en optique permet d'envisager la mesure de l'opérateur de Wigner-Smith, ce dernier pouvant amener à des applications concrètes. Outre le fait de pouvoir maximiser ou minimiser le temps de séjour, nous montrons à la fin de ce chapitre que les opérateurs  $Q_d$  et  $Q$  permettent d'apprendre à focaliser la lumière sur une structure résonante immergée dans un milieu opaque. Par ailleurs, P. Ambichl et ses collaborateurs ont utilisé dans la Réf. [64] une généralisation de l'opérateur

de Wigner-Smith en dérivant la matrice de diffusion  $S$  par un paramètre  $\alpha$  autre que la fréquence  $-iS^\dagger \partial_\alpha S$  pour focaliser des micro-ondes dans un milieu désordonné. Ils ont pris comme paramètre  $\alpha$  la position selon  $y$  d'un diffuseur. Ce n'est plus un paramètre global, comme la fréquence de l'onde, mais un paramètre local. L'opérateur donne alors l'impulsion selon  $y$  de l'onde sur le diffuseur qui se déplace pour un front d'onde incident. En considérant l'état propre associé à la plus grande valeur propre de l'opérateur de Wigner-Smith généralisé, il est possible de maximiser l'impulsion des micro-ondes sur un diffuseur spécifique imbriqué dans un milieu désordonné, comme cela est représenté sur la Fig. II.1. Dans la Réf. [65], M. Horodyski et ses collaborateurs ont considéré différents opérateurs de Wigner-Smith généralisés, avec  $\alpha$  représentant divers paramètres locaux comme la variation d'indice d'un diffuseur (la quantité conjuguée est alors l'intensité au niveau du diffuseur) ou l'angle d'une cible asymétrique (la quantité conjuguée est le moment angulaire sur la cible). L'opérateur de Wigner-Smith généralisé permet la micro-manipulation de cibles spécifiques dans un milieu désordonné, avec toutefois la contrainte d'avoir accès à la cible pour la déplacer, la tourner ou changer son indice, ce qui peut compliquer le développement d'applications. Auparavant, les propriétés statistiques de l'opérateur de Wigner-Smith généralisé avaient été considérées formellement [57, 61, 66].

## II.2 Densité d'énergie électromagnétique dans un diélectrique

### II.2.1 Densité d'énergie électromagnétique dans le vide

Lorsque les ondes se propagent, elles transportent de l'énergie électromagnétique. Dans le vide, il n'y a pas de dissipation d'énergie électromagnétique (il n'y a pas de matière avec laquelle interagir), ce qui signifie qu'il y a conservation de l'énergie de l'onde. Cette conservation se traduit par une équation de conservation locale du type :

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \partial_t u_{em} = 0, \quad (\text{II.4})$$

où  $u_{em}$  est la densité d'énergie électromagnétique, et  $\mathbf{\Pi}$  le vecteur flux d'énergie par unité de surface, aussi appelé vecteur de Poynting en électromagnétisme. La variation de la densité d'énergie électromagnétique en un point est l'opposée de la divergence du vecteur de Poynting en ce point. Pour obtenir cette équation de conservation dans le vide, on part de l'identité vectorielle  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H})$  (le champ  $\mathbf{H}$  est égal pour un milieu non-magnétique à  $\mathbf{B}/\mu_o$ ). On obtient ainsi :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_o}, \quad (\text{II.5})$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B}^2 + \epsilon_o \mathbf{E}^2 \right). \quad (\text{II.6})$$

L'expression du vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_o}$ , et de façon plus générale pour un milieu magnétique  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ , est valable non seulement dans le vide mais également en présence de matière (voir chapitre 9 de la Réf. [67]).

En régime quasi-monochromatique, où le spectre des champs est contenu dans un intervalle de fréquence  $\Delta\omega$  bien plus petit que la fréquence centrale  $\Omega_o$  de cet intervalle,

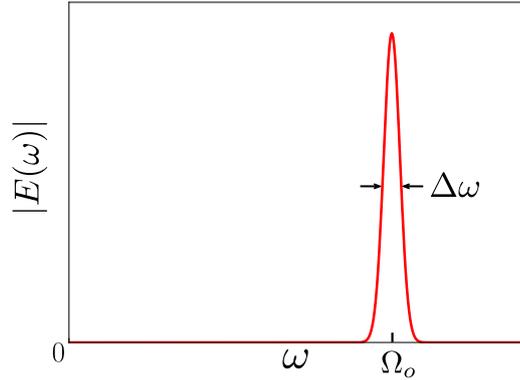


FIGURE II.2 – Allure d'un spectre quasi-monochromatique. La largeur du spectre  $\Delta\omega$  est bien plus petite que la fréquence centrale  $\Omega_o$  du spectre.

comme représenté sur la Fig. II.2, il est pertinent de considérer la densité d'énergie moyennée sur une période  $T_o = \frac{2\pi}{\Omega_o}$  du champ  $\overline{u_{em}}$ . On peut alors écrire le champ électrique et magnétique comme  $\mathbf{E}(t) = \text{Re} [\mathbf{E}_o(t)e^{-i\Omega_o t}]$  et  $\mathbf{B}(t) = \text{Re} [\mathbf{B}_o(t)e^{-i\Omega_o t}]$  avec  $\mathbf{E}_o$  et  $\mathbf{B}_o$  complexes qui ne varient que très peu sur une période d'oscillation  $T_o = 2\pi/\omega_o$ . La densité d'énergie moyenne s'écrit alors :

$$\overline{u_{em}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\mu_o} |\mathbf{B}_o|^2 + \epsilon_o |\mathbf{E}_o|^2 \right). \quad (\text{II.7})$$

### II.2.2 Densité d'énergie électromagnétique dans un diélectrique non-dispersif et sans perte

On considère maintenant un milieu diélectrique sans perte et non dispersif caractérisé par une constante diélectrique  $\epsilon_r$  indépendante de  $\omega$ . Dans ce cas,  $\mathbf{D}$  est simplement proportionnel à  $\mathbf{E}$  à tout instant. Avec le même raisonnement que pour le cas du vide, on trouve que la densité d'énergie électromagnétique s'écrit  $u_{em} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B}^2 + \epsilon_o \epsilon_r \mathbf{E}^2 \right)$ . La partie magnétique est formellement inchangée, seule la partie électrique est multipliée par le facteur  $\epsilon_r$ . On peut réécrire la densité d'énergie comme :

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B}^2 + \epsilon_o \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{2} \epsilon_o \chi \mathbf{E}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B}^2 + \epsilon_o \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

où  $\chi = \epsilon_r - 1$  est la susceptibilité du matériau, et  $\mathbf{P}$  la polarisation macroscopique. La densité d'énergie dans le diélectrique s'écrit comme la somme de la densité d'énergie dans le vide et d'un terme supplémentaire  $\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ . Ce terme est le travail par unité de volume fourni par le champ à la matière pour amener la matière d'un état de polarisation nulle à un état de polarisation  $\mathbf{P}$ . En régime quasi-monochromatique, la densité d'énergie moyennée sur une période d'oscillation s'écrit :

$$\overline{u_{em}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\mu_o} |\mathbf{B}_o|^2 + \epsilon_o \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2 \right). \quad (\text{II.9})$$

### Système transverse électrique

Nous allons ici réexprimer la densité d'énergie électromagnétique en régime lentement variable dans le cas particulier d'un système transverse électrique (noté TE). On appelle système TE un système composé d'un milieu invariant selon  $\mathbf{e}_z$  avec un champ électrique incident polarisé selon  $\mathbf{e}_z$ . Le champ électrique pour un tel système ne dépend pas de  $z$  et ne possède qu'une composante  $E_z$ . Le champ électrique complexe s'écrit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{-i\Omega_o t}$ , où  $\mathbf{E}_o$  est l'enveloppe lentement variable du champ électrique et  $\Omega_o$  la pulsation centrale du spectre du champ. Le champ magnétique complexe s'écrit  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_o e^{-i\Omega_o t}$ , où  $\mathbf{B}_o$  est l'enveloppe lentement variable du champ magnétique. La densité d'énergie magnétique s'écrit :

$$\overline{u_m} = \frac{\epsilon_o c^2}{4} |\mathbf{B}_o|^2. \quad (\text{II.10})$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_o = i\Omega_o \mathbf{B}_o - \partial_t \mathbf{B}_o. \quad (\text{II.11})$$

En régime lentement variable, on a  $\Omega_o \mathbf{B}_o \gg \partial_t \mathbf{B}_o$ , on peut donc réécrire l'énergie magnétique sous la forme :

$$\overline{u_m} = \frac{\epsilon_o c^2}{4\Omega_o^2} |\nabla \wedge \mathbf{E}_o|^2. \quad (\text{II.12})$$

Pour un système transverse électrique,  $|\nabla \wedge \mathbf{E}_o|^2 = \nabla E_{o,z}^* \nabla E_{o,z}$ , où  $E_{o,z}$  est la composante de  $\mathbf{E}_o$  selon  $\mathbf{e}_z$ . On utilise ensuite la formule d'analyse vectorielle  $\nabla^2(U.V) = U\nabla^2V + 2\nabla U \cdot \nabla V + V\nabla^2U$  pour réexprimer la densité d'énergie magnétique comme :

$$\overline{u_m} = \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \left[ \nabla^2(E_{o,z}^* E_{o,z}) - E_{o,z}^* \nabla^2 E_{o,z} - E_{o,z} \nabla^2 E_{o,z}^* \right]. \quad (\text{II.13})$$

On va maintenant chercher à réexprimer  $\nabla^2 E_{o,z}$  et son conjugué. Puisque le milieu est non-dispersif, la composante  $E_z$  du champ  $\mathbf{E}$  obéit à l'équation de propagation :

$$\nabla^2 E_z - \frac{\epsilon_r}{c^2} \partial_t^2 E_z = 0. \quad (\text{II.14})$$

En remplaçant  $E_z$  par  $E_{o,z} e^{-i\Omega_o t}$ , (II.14) se réécrit :

$$\nabla^2 E_{o,z} + \epsilon_r \frac{\Omega_o^2}{c^2} E_{o,z} + i2\epsilon_r \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_t E_{o,z} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \partial_t^2 E_{o,z} = 0. \quad (\text{II.15})$$

En régime lentement variable,  $\Omega_o^2 E_{o,z} \gg \Omega_o \partial_t E_{o,z} \gg \partial_t^2 E_{o,z}$ . Il reste donc :

$$\nabla^2 E_{o,z} + \epsilon_r \frac{\Omega_o^2}{c^2} E_{o,z} = 0. \quad (\text{II.16})$$

La densité d'énergie magnétique se réécrit donc :

$$\overline{u_m} = \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4} \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2. \quad (\text{II.17})$$

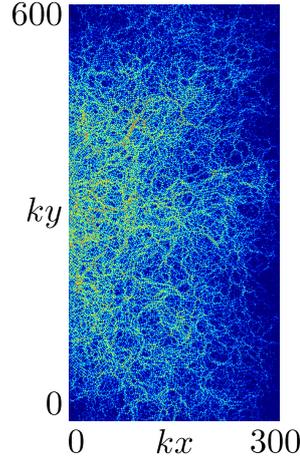


FIGURE II.3 – Carte d'intensité dans un milieu diffusant d'épaisseur optique  $b \approx 14$ . Le milieu est imbriqué dans un guide, le front d'onde incident correspond au premier mode du guide, similaire à une onde plane normale à la surface du milieu quand la taille transverse du guide est grande devant la longueur d'onde. L'échelle d'intensité est logarithmique.

Le terme  $\frac{\epsilon_o c^2}{\omega^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2$  représente la différence entre la densité d'énergie magnétique et électrique. La densité d'énergie électromagnétique s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{u_{em}} &= \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 (|\mathbf{E}_o|^2) + \frac{\epsilon_o}{4} \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4} \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2 \\ &= \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 (|\mathbf{E}_o|^2) + \frac{\epsilon_o}{2} \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Le rapport entre le premier et le deuxième terme du membre de droite de l'Eq. (II.18) s'écrit  $\nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2 / (4k^2 \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2)$ . Pour un milieu diffusant, la longueur de variation de l'intensité dans le milieu est de l'ordre de la longueur d'onde. On s'attend donc à ce que localement, le rapport  $\nabla^2 (|\mathbf{E}_o|^2) / (4k^2 \epsilon_r |\mathbf{E}_o|^2)$  soit de l'ordre de l'unité. La Fig. II.3 montre l'intensité dans un milieu diffusant d'épaisseur optique  $b = 14$  éclairé par une onde plane normale à la surface du milieu. Pour la carte d'intensité représentée, le rapport local entre le premier et le deuxième terme de (II.18) est de l'ordre de 2. Les deux termes sont du même ordre de grandeur. En revanche, on remarque que le deuxième terme ne peut être que positif alors que le premier présente des valeurs positives et négatives dans un speckle. Une fois intégré sur une zone dont la taille vaut quelques longueurs d'onde, le premier terme devient négligeable devant le deuxième. Ainsi, si le milieu que l'on considère est bien plus grand que la longueur d'onde, le terme  $\frac{\epsilon_o c^2}{8\omega^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2$  peut être négligé si on s'intéresse à l'énergie totale.

### II.2.3 Densité d'énergie électromagnétique dans un diélectrique dispersif sans perte

On va maintenant considérer un milieu diélectrique tel que  $\epsilon_r$  dépende de la fréquence. Le milieu est dit dispersif.  $\mathbf{D}$  n'est plus simplement proportionnel à  $\mathbf{E}$  à tout instant mais dépend de  $\mathbf{E}$  aux instants antérieurs. De plus, les relations de Kramers-Krönig impliquent que  $\epsilon_r$  a une partie imaginaire non-nulle [67, 68]. Cependant, si on se trouve loin de toute

résonance, on peut négliger la partie imaginaire et considérer que la constante diélectrique est réelle. Ainsi, pour des champs dont le spectre est quasi-monochromatique autour d'une fréquence centrale  $\Omega_o$ , de sorte que  $\omega\epsilon_r$  est bien approximé par un développement à l'ordre 1 sur l'étendue du spectre, et en négligeant les pertes, la densité d'énergie s'écrit [67] :

$$\overline{u_{em}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\epsilon_o}{c^2} |\mathbf{B}_o|^2 + \epsilon_o \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) |\mathbf{E}_o|^2 \right). \quad (\text{II.19})$$

### Système transverse électrique

On peut encore une fois chercher à exprimer la contribution magnétique à la densité d'énergie en fonction du champ électrique pour un système TE. En régime lentement variable, on a vu que la contribution magnétique peut être réécrite :

$$\overline{u_m} = \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \left[ \nabla^2 (E_{o,z}^* E_{o,z}) - E_{o,z}^* \nabla^2 E_{o,z} - E_{o,z} \nabla^2 E_{o,z}^* \right]. \quad (\text{II.20})$$

Pour exprimer  $\nabla^2 E_{o,z}$ , nous partons de l'équation de Helmholtz vérifiée par la transformée de Fourier de  $E_z = E_{o,z} e^{-i\Omega_o t}$  que l'on note  $\tilde{E}_z$  :

$$\nabla^2 \tilde{E}_z(\omega) + \epsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}_z(\omega) = 0. \quad (\text{II.21})$$

Pour obtenir les expressions de la densité d'énergie (II.19), l'hypothèse a été faite dans la Réf. [67] que  $\omega\epsilon_r$  peut être développé à l'ordre 1 sur l'étendue du spectre du champ. En développant  $\omega\epsilon_r$  dans l'équation de Helmholtz (II.21), on obtient :

$$\nabla^2 \tilde{E}_z(\omega) + \epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o \omega}{c^2} \tilde{E}_z(\omega) + (\omega - \Omega_o) \frac{\omega}{c^2} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) \tilde{E}_z(\omega) = 0. \quad (\text{II.22})$$

On a la relation  $\tilde{E}_z(\omega) = \tilde{E}_{o,z}(\omega - \Omega_o)$  entre les transformés de Fourier. En notant  $\bar{\omega} = \omega - \Omega_o$  (II.22) se réécrit :

$$\nabla^2 \tilde{E}_{o,z}(\bar{\omega}) + \epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c^2} (\Omega_o + \bar{\omega}) \tilde{E}_{o,z}(\bar{\omega}) + \bar{\omega} \frac{\Omega_o + \bar{\omega}}{c^2} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) \tilde{E}_{o,z}(\bar{\omega}) = 0. \quad (\text{II.23})$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de (II.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_{o,z} + \epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o^2}{c^2} E_{o,z} + i\epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_t E_{o,z} + i \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) \partial_t E_{o,z} \\ - \frac{1}{c^2} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) \partial_t^2 E_{o,z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

On a peut ainsi exprimer la densité d'énergie électromagnétique comme :

$$\begin{aligned} \overline{u_{em}} = \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 (|E_{o,z}|^2) + \frac{\epsilon_o}{4} \epsilon_r(\Omega_o) |E_{o,z}|^2 + \frac{i\epsilon_o}{8\Omega_o} \epsilon_r(\Omega_o) \left[ E_{o,z}^* \partial_t E_{o,z} - E_{o,z} \partial_t E_{o,z}^* \right] \\ + \frac{i\epsilon_o}{8\Omega_o} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) \left[ E_{o,z}^* \partial_t E_{o,z} - E_{o,z} \partial_t E_{o,z}^* \right] \\ - \frac{\epsilon_o}{8\Omega_o^2} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) \left[ E_{o,z}^* \partial_t^2 E_{o,z} + E_{o,z} \partial_t^2 E_{o,z}^* \right] + \frac{\epsilon_o}{4} \partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o) |E_{o,z}|^2. \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

En régime lentement variable, nous négligeons le terme  $\frac{i\epsilon_o}{8\Omega_o}\epsilon_r(\Omega_o)\left[E_{o,z}^*\partial_t E_{o,z} - E_{o,z}\partial_t E_{o,z}^*\right]$  devant  $\frac{\epsilon_o}{4}\epsilon_r(\Omega_o)|E_{o,z}|^2$ . De même, nous négligeons les termes  $\frac{i\epsilon_o}{8\Omega_o}\partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o)\left[E_{o,z}^*\partial_t E_{o,z} - E_{o,z}\partial_t E_{o,z}^*\right]$  et  $\frac{\epsilon_o}{8\Omega_o^2}\partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o)\left[E_{o,z}^*\partial_t^2 E_{o,z} + E_{o,z}\partial_t^2 E_{o,z}^*\right]$  devant la densité d'énergie électrique  $\frac{\epsilon_o}{4}\partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o)|E_{o,z}|^2$ . On obtient finalement pour l'expression de la densité d'énergie :

$$\begin{aligned}\overline{u_{em}} &= \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2}\nabla^2|\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4}\epsilon_r(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4}\partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2 \\ &= \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2}\nabla^2|\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4\Omega_o}\partial_\omega(\omega^2\epsilon_r)(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2.\end{aligned}\quad (\text{II.26})$$

On retrouve bien l'expression de la densité d'énergie (II.18) dans le cas d'un milieu non-dispersif.

### II.2.4 Milieu avec pertes

Dans la dernière section de ce chapitre, nous étudions le cas d'une structure résonante où les pertes sont non-négligeables. Il est donc nécessaire de s'attarder sur la densité d'énergie dans un diélectrique présentant des pertes. Dans la Réf. [68], J. Jackson établit en régime lentement variable l'équation de conservation suivante dans un diélectrique dispersif avec pertes :

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{\Pi}} + \partial_t\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\epsilon_o}{c^2}|\mathbf{B}_o|^2 + \epsilon_o\partial_\omega(\omega\epsilon_r)(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2\right)\right] + \frac{1}{2}\epsilon_o\Omega_o\text{Im}(\epsilon_r)(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2 = 0. \quad (\text{II.27})$$

En régime stationnaire, il reste :

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{\Pi}} + \frac{1}{2}\epsilon_o\Omega_o\text{Im}(\epsilon_r)(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2 = 0. \quad (\text{II.28})$$

Le terme  $\frac{1}{2}\epsilon_o\Omega_o\text{Im}(\epsilon_r)(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2$  s'identifie alors à la densité de puissance dissipée. Il est donc tentant en régime quasi-monochromatique de considérer ce dernier terme comme la densité de puissance dissipée et  $\frac{1}{4}\left(\frac{\epsilon_o}{c^2}|\mathbf{B}_o|^2 + \epsilon_o\partial_\omega(\omega\text{Re}(\epsilon_r))(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2\right)$  comme la densité d'énergie. Dans la Réf. [69], Y. Barash et V. Ginzburg explique que la quantité  $\frac{1}{4}\left(\frac{\epsilon_o}{c^2}|\mathbf{B}_o|^2 + \epsilon_o\partial_\omega(\omega\text{Re}(\epsilon_r))(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2\right)$  dans l'Eq. (II.27) ne peut être assimilée à l'énergie stockée, contrairement à ce qu'on pourrait penser naïvement. On remarque en particulier que le terme  $\epsilon_o\partial_\omega(\omega\text{Re}(\epsilon_r))(\Omega_o)|\mathbf{E}_o|^2$  peut être négatif si la dérivée spectrale de  $\text{Re}(\epsilon_r)$  est négative. Dans la Réf. [68], J. Jackson nomme la quantité  $\frac{\epsilon_o c^2}{4}|\mathbf{B}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4}\partial_\omega(\omega\text{Re}(\epsilon_r))|\mathbf{E}_o|^2$  énergie effective. Nous adoptons cette notation pour la suite et la notons  $\overline{u_{eff}}$ .

### II.2.5 Équation de conservation alternative

Plus haut, nous sommes partis de l'expression du vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}$  établie dans le vide, en la supposant vraie dans un diélectrique, puis avons obtenu à l'aide des équations de Maxwell une expression de la densité d'énergie électromagnétique. Dans cette sous-section, nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une équation de conservation de l'énergie avec une expression pour le vecteur de Poynting et de la densité d'énergie qui

différent légèrement des expressions précédentes. On considère le vecteur moyenné sur les oscillations rapides du champ :

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{\epsilon_o c^2}{4i\Omega_o} \left( E_{o,z}^* \nabla E_{o,z} - E_{o,z} \nabla E_{o,z}^* \right). \quad (\text{II.29})$$

Ce vecteur est bien homogène à une puissance par unité de surface. Nous allons montrer qu'il obéit à l'équation de conservation :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{\Pi}} + \partial_t \bar{u} = 0, \quad (\text{II.30})$$

où la densité d'énergie  $\bar{u}$  prend la forme :

$$\bar{u} = \frac{\epsilon_o}{4\Omega_o} \partial_\omega (\omega^2 \text{Re}(\epsilon_r)) (\Omega_o) |\mathbf{E}_o|^2. \quad (\text{II.31})$$

L'expression de  $\bar{u}$  est identique à celle obtenue précédemment sans le terme  $\frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2$ . Pour aboutir à cette équation de conservation, nous partons de l'équation de Helmholtz (II.24) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_{o,z} + \epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o^2}{c^2} E_{o,z} + i\epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_t E_{o,z} + i \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) \partial_t E_{o,z} \\ - \frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) \partial_t^2 E_{o,z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Nous multiplions (II.32) par  $E_{o,z}^*$  puis nous retranchons l'équation conjuguée. Il reste :

$$\begin{aligned} E_{o,z}^* \nabla^2 E_{o,z} - E_{o,z} \nabla^2 E_{o,z}^* + i\epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_t |E_{o,z}|^2 + i \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) \partial_t |E_{o,z}|^2 \\ - \frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) \left[ E_{o,z}^* \partial_t^2 E_{o,z} - E_{o,z} \partial_t^2 E_{o,z}^* \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

En régime lentement variable, on peut négliger les termes  $-\frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) E_{o,z}^* \partial_t^2 E_{o,z}$  et  $\frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) E_{o,z} \partial_t^2 E_{o,z}^*$  devant  $i \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) \partial_t |E_{o,z}|^2$ . On a ainsi :

$$E_o^* \nabla^2 E_{o,z} - E_{o,z} \nabla^2 E_o^* + i\epsilon_r(\Omega_o) \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_t |E_{o,z}|^2 + i \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_\omega (\omega \epsilon_r) (\Omega_o) \partial_t |E_{o,z}|^2 = 0, \quad (\text{II.34})$$

soit encore :

$$E_o^* \nabla^2 E_{o,z} - E_{o,z} \nabla^2 E_o^* + i \frac{\Omega_o}{c^2} \partial_\omega (\omega^2 \epsilon_r) (\Omega_o) \partial_t |\mathbf{E}_o|^2 = 0. \quad (\text{II.35})$$

À l'aide de l'identité vectorielle,  $U \nabla^2 V - V \nabla^2 U = \nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U)$ , on peut réécrire :

$$E_o^* \nabla^2 E_{o,z} - E_{o,z} \nabla^2 E_o^* = \nabla \cdot \left( E_o^* \nabla E_{o,z} - E_{o,z} \nabla E_o^* \right). \quad (\text{II.36})$$

En multipliant (II.35) par  $\epsilon_o c^2 / (4i\Omega_o)$ , on aboutit à l'équation de conservation (II.30). Nous avons uniquement utilisé l'équation de Helmholtz pour l'obtenir. Ainsi, un champ scalaire obéissant à l'équation de Helmholtz vérifie également (II.30).

## II.3 Opérateurs temps de séjour et énergie

Le but de cette section est d'établir l'expression d'un opérateur temps de séjour, noté  $Q_d$ , en régime monochromatique pour un système TE. Cet opérateur est tel que  $\langle \psi | Q_d | \psi \rangle$  représente le temps de séjour dans le milieu pour un front d'onde incident  $|\psi\rangle$ , de la même manière que le flux transmis est donné par  $\langle \psi | t^\dagger t | \psi \rangle$ , où  $t$  est la matrice de transmission. Ceci est possible car l'intégrale de volume de  $\overline{u_{em}}$  apparaissant dans l'Eq. (II.26) peut se mettre sous la forme d'une intégrale de surface en régime monochromatique. Il est ensuite possible d'exprimer cette intégrale à l'aide des matrices de transmission et de réflexion connaissant le champ incident.

### II.3.1 Intégrale de surface pour l'énergie

On va chercher à exprimer l'intégrale de volume de la densité d'énergie (II.26) pour un milieu constitué de matériaux diélectriques sans perte ( $\epsilon_r$  est réel) comme une intégrale de surface. Nous rappelons son expression :

$$\overline{u_{em}} = \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4\Omega_o} \partial_\omega (\omega^2 \epsilon_r) |\mathbf{E}_o|^2. \quad (\text{II.37})$$

La première partie de  $\overline{u_{em}}$  s'exprime directement comme la divergence d'un gradient (définition du laplacien). Pour exprimer la deuxième partie sous forme de la divergence d'un vecteur, on part de la dérivée fréquentielle de l'équation de Helmholtz pour le champ complexe  $\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z$  :

$$\nabla^2 \partial_\omega E_z + \frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega^2 \epsilon_r) E_z + \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \partial_\omega E_z = 0. \quad (\text{II.38})$$

On multiplie ensuite cette équation par  $E_z^*$ . On obtient :

$$\frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega^2 \epsilon_r) |E_z|^2 = -E_z^* \nabla^2 \partial_\omega E_z - \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} E_z^* \partial_\omega E_z. \quad (\text{II.39})$$

De l'équation de Helmholtz pour  $E_z^*$ , on déduit  $\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} E_z^* = -\nabla^2 E_z^*$  ( $\epsilon_r$  est réel). En remplaçant  $E_z^*$  par cette expression dans le dernier membre de (II.39), puis en utilisant l'identité vectorielle  $\nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$ , on a :

$$\frac{1}{c^2} \partial_\omega (\omega^2 \epsilon_r) |E_z|^2 = \nabla \cdot (\partial_\omega E_z \nabla E_z^* - E_z^* \nabla \partial_\omega E_z). \quad (\text{II.40})$$

Finalement on peut exprimer la densité d'énergie comme la divergence d'un vecteur :

$$\overline{u_{em}} = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon_o c^2}{8\omega^2} \nabla (|E_z|^2) + \frac{\epsilon_o c^2}{4\omega} (\partial_\omega E_z \nabla E_z^* - E_z^* \nabla \partial_\omega E_z) \right). \quad (\text{II.41})$$

Le théorème de flux-divergence permet d'écrire l'énergie électromagnétique contenue dans le milieu comme une intégrale de surface :

$$\int_V d\mathbf{r} \overline{u_{em}}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_o c^2}{4\omega} \oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \left[ \frac{1}{2\omega} \nabla (E_z^*(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r})) + (\partial_\omega E_z(\mathbf{r}) \nabla E_z^*(\mathbf{r}) - E_z^*(\mathbf{r}) \nabla \partial_\omega E_z(\mathbf{r})) \right]. \quad (\text{II.42})$$

Grâce aux matrices de réflexion et de transmission, on va exprimer le champ  $E_z$  à la surface du milieu en fonction du champ incident.

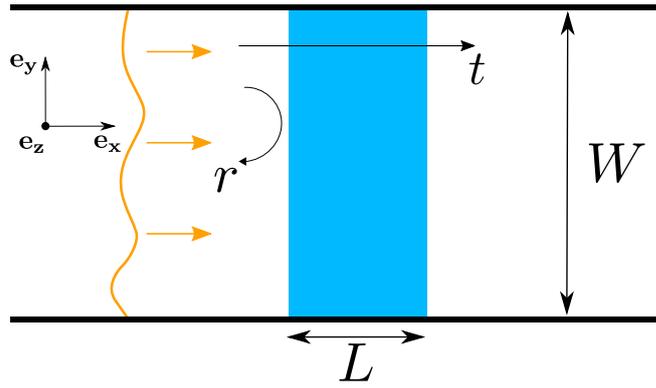


FIGURE II.4 – Représentation du système étudié. Le front d’onde incident est représenté en orange, le milieu considéré est en bleu et a une épaisseur  $L$ . La taille transverse du guide est  $W$ .

### II.3.2 Propagation dans un guide d’onde

Dans la suite, nous considérons un milieu contenu dans un guide d’onde parfait. En dehors du guide, le champ est nul. Le système est représenté sur la Fig. II.4. Un front d’onde incident arrive par la gauche sur un milieu diélectrique sans perte. Les solutions de l’équation de Helmholtz dans le guide avec des conditions de Dirichlet sur les parois du guide sont les modes propres du guides. Ces solutions s’écrivent :

$$\chi_n(x, y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) e^{ik_n x}, \quad (\text{II.43})$$

où  $W$  est la largeur du guide,  $n \geq 1$  un entier indexant les modes, et  $k_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2}$  la projection de vecteur d’onde selon  $x$ ,  $k$  étant la norme du vecteur d’onde dans le guide ( $k = n_g k_{vide}$  avec  $n_g$  l’indice du guide et  $k_{vide}$  la norme du vecteur d’onde dans le vide). Tout champ électrique peut se décomposer sur la base discrète des modes  $\chi_n$ , d’où l’intérêt théorique et numérique de placer le milieu dans un guide. Les modes propagatifs sont les modes pour lesquels  $k_n$  est réel. Ces modes transportent de l’énergie. On remarque qu’il y a un nombre fini  $N$  de modes propagatifs. Ce nombre est donné par la partie entière de  $\frac{n_g \omega W}{c\pi}$ . Les modes évanescents sont les modes pour lesquels  $k_n$  devient imaginaire pur. Ces modes présentent une atténuation exponentielle de la forme  $e^{-\kappa_n x}$ ,  $1/\kappa_n$  étant la longueur d’atténuation du mode. Ces modes ne transportent pas d’énergie.

### II.3.3 Opérateurs temps de séjour et énergie

Le milieu considéré est caractérisé par sa matrice de réflexion  $r$  et sa matrice de transmission  $t$ . Ces matrices relient le champ incident entrant aux champs réfléchis et transmis. Ces matrices ne prennent en compte que les modes propagatifs du guide d’onde. La taille des matrices  $r$  et  $t$  est donc  $N \times N$ . Cependant, le champ sur la surface du milieu se décompose également sur les modes évanescents du guide d’onde. C’est pourquoi on introduit également les matrices  $r_e$  et  $t_e$ , les matrices de réflexion et transmission des modes propagatifs vers les modes évanescents [70]. Nous verrons plus tard que seul le premier mode évanescent contribue de manière significative à l’énergie stockée. Grâce aux matrices  $r$ ,

$t$ ,  $r_e$  et  $t_e$ , il est possible d'exprimer le champ à la surface de l'échantillon en fonction du front d'onde incident. On peut donc exprimer l'intégrale de surface de l'énergie (II.42) à l'aide de ces matrices. Le calcul détaillé est fourni en annexe B. L'intégrale de l'énergie s'exprime sous la forme suivante :

$$\int_V d\mathbf{r} \overline{u_{em}}(\mathbf{r}) = \phi_{in} \langle \psi | Q_d | \psi \rangle, \quad (\text{II.44})$$

où  $\phi_{in}$  est le flux incident et  $|\psi\rangle$  le vecteur dont les coefficients correspondent aux amplitudes du champ incident dans la base des modes propres du guide normalisée de sorte que chaque mode porte un flux unité (voir détails en annexe B).

**Équivalence temps-énergie en régime monochromatique :** l'énergie contenue dans le milieu est le produit du flux entrant et du terme  $\langle \psi | Q_d | \psi \rangle$ . L'opérateur  $Q_d$  est homogène à un temps. Le terme  $\langle \psi | Q_d | \psi \rangle$  représente le temps de séjour de la lumière dans le milieu pour un front d'onde incident qui correspond au vecteur  $|\psi\rangle$ . L'opérateur énergie est ainsi le produit du flux entrant multiplié par l'opérateur temps de séjour.

**Décomposition de  $Q_d$  :** dans l'annexe B, nous démontrons que l'opérateur temps de séjour  $Q_d$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$Q_d = Q + Q_i + Q_e. \quad (\text{II.45})$$

Le premier terme est :

$$Q = -iS^\dagger \partial_\omega S. \quad (\text{II.46})$$

C'est l'opérateur de Wigner-Smith présenté dans la section II.1 avec  $S$  correspondant à la matrice de diffusion lorsqu'on excite les modes venant uniquement de la gauche du guide :

$$S = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}. \quad (\text{II.47})$$

Dans le cas où il n'y a pas de perte dans le milieu,  $Q$  est hermitien. En effet, la relation de conservation du flux  $r^\dagger r + t^\dagger t = 1$  donne de manière immédiate  $i\partial_\omega r^\dagger r + i\partial_\omega t^\dagger t = -ir^\dagger \partial_\omega r - it^\dagger \partial_\omega t$ . Rappelons que dans le cas où il n'y a qu'un seul canal en entrée et un seul en sortie, et aucune perte dans le milieu, la matrice de diffusion est de taille  $1 \times 1$  et son élément est un nombre complexe unitaire  $e^{i\theta}$ . Le temps associé à la matrice de Wigner-Smith  $Q$  est alors la dérivée de la phase par rapport à la fréquence de l'élément de la matrice de diffusion  $S$  :  $\partial_\omega \theta$ . Ce temps est communément appelé temps de retard de l'onde. Pour un milieu non-dispersif, en imaginant un parcours d'un point A à un point B effectué par l'onde, la dérivée de la phase accumulée par l'onde le long de ce parcours par rapport à la fréquence est bien la longueur divisée par la célérité de l'onde  $c/n$  en ces différents points  $\int_A^B n(\vec{r})/c d\vec{l}$ . La matrice  $Q$  donne la généralisation du temps de retard au cas multicanal.

Le deuxième terme est :

$$Q_i = \frac{i}{2} (r^\dagger D - D r), \quad (\text{II.48})$$

où :

$$D = \mu^{-1} \partial_\omega \mu, \quad (\text{II.49})$$

avec  $\mu$  la matrice diagonale dont les éléments sont  $\mu(n, n) = k_n/k$ . Ce terme résulte de l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Il n'y a pas d'équivalent en transmission. L'impact de ce terme sur le temps de séjour a été récemment discuté par H. Winful dans le cas de l'effet tunnel 1D en mécanique quantique [46, 51]. Il a montré que ce temps d'interférence, qu'il note  $\tau_i$ , devient du même ordre de grandeur que le temps de retard à basse énergie. Il a également étudié l'analogie de ce temps dans une situation voisine à l'effet tunnel en électromagnétisme [52]. Notre approche permet de traiter le cas d'un milieu arbitraire (le temps noté  $\tau_i$  dans les articles de H. Winful est en réalité l'opposé du temps associé à  $Q_i$ ). Nous verrons dans la section II.6 que le temps associé à  $Q_i$  pour un milieu diffusant est non-négligeable pour une onde fortement rétrodiffusée ou lorsque la fréquence de l'onde se situe juste au-dessus de la fréquence de coupure d'un mode du guide.

Le troisième terme de (II.45) est

$$Q_e = \frac{1}{2} \left( r_e^\dagger D_e r_e + t_e^\dagger D_e t_e \right), \quad (\text{II.50})$$

où :

$$D_e = |\mu_e|^{-1} \partial_\omega (|\mu_e|), \quad (\text{II.51})$$

avec  $\mu_e$  la matrice diagonale dont les éléments sont  $\mu_e(n, n) = i\kappa_n/k$ . Ce terme est associé aux modes évanescents et n'avait encore jamais été mis en avant. On peut noter que  $Q_e$  est définie négative et le temps associé est forcément négatif. Nous verrons que le temps associé à  $Q_e$  est non-négligeable lorsque la fréquence de l'onde se situe juste en-dessous de la fréquence de coupure d'un mode du guide.

Nous allons voir dans la section II.6 que pour la plupart des fronts d'onde, les opérateurs  $Q_i$  et  $Q_e$  sont négligeables devant l'opérateur de Wigner-Smith  $Q$ . Il est alors intéressant de voir qu'on a ici deux approches physiques différentes du temps : le temps de séjour fourni par le rapport entre la quantité d'énergie dans le milieu et le flux d'énergie incident (ou sortant), et le temps de retard généralisé au cas multicanal par l'opérateur de Wigner-Smith.

### Impact du terme $\frac{\epsilon_o c^2}{8\omega^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2$ dans l'expression de $Q_d$

Nous avons vu que le terme du laplacien de l'intensité  $\frac{\epsilon_o c^2}{8\omega^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2$  dans l'expression de la densité d'énergie pour un système 2D TE peut être négligé si on cherche à calculer l'énergie totale stockée dans un milieu diffusant. Nous avons également établi une équation de conservation alternative pour l'énergie où ce terme du laplacien de l'intensité n'apparaît pas. Sans ce terme, l'opérateur  $Q_d$  garde la même forme, seuls les éléments diagonaux de la matrice  $\mu$  qui intervient dans l'expression de  $D$  sont remplacés par  $\mu(n, n) = k_n$  et les éléments diagonaux de la matrice  $\mu_e$  qui intervient dans l'expression de  $D_e$  sont remplacés par  $\mu_e(n, n) = i\kappa_n$ .

### Analogie en physique quantique

En physique quantique, pour une particule de masse  $m$  représentée par une fonction d'onde  $\Psi$ , la quantité conservée n'est pas l'énergie mais la densité de probabilité de l'onde  $|\Psi|^2$ . Elle obéit à l'équation de conservation :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t |\Psi|^2 = 0, \quad (\text{II.52})$$

où  $\mathbf{J}$  est la densité de courant de probabilité :

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi). \quad (\text{II.53})$$

De manière analogue à ce que nous avons fait pour transformer l'intégrale de volume du champ en une intégrale de surface, on peut exprimer l'intégrale de volume de la densité de probabilité en une intégrale de surface à l'aide de la dérivée fréquentielle de l'équation de Schrödinger monochromatique. Ce travail a été effectué par F. Smith dans la Réf. [42]. En ne négligeant pas l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie et en prenant en compte les modes évanescents, l'opérateur temps de séjour  $Q_d$  prend la même forme que (II.45). Néanmoins, les éléments diagonaux de la matrice  $\mu$  qui intervient dans l'expression de  $Q_i$  s'écrivent  $\mu(n, n) = k_n$  et les éléments diagonaux de la matrice  $\mu_e$  qui intervient dans l'expression de  $Q_e$  s'écrivent  $\mu_e(n, n) = \kappa_n$ .

### II.3.4 Opérateur $Q_d$ pour un milieu avec pertes

Dans la dernière section de ce chapitre, on s'intéresse à l'opérateur  $Q_d$  pour des milieux dispersifs avec pertes. En présence de pertes, nous avons toujours :

$$\frac{\epsilon_o c^2}{4\omega} \oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \left[ \frac{1}{2\omega} \nabla (E_z^*(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r})) + (\partial_\omega E_z(\mathbf{r}) \nabla E_z^*(\mathbf{r}) - E_z^*(\mathbf{r}) \nabla \partial_\omega E_z(\mathbf{r})) \right] = \phi_{in} \langle \psi | Q_d | \psi \rangle. \quad (\text{II.54})$$

Mais  $Q_d$  se décompose maintenant de la façon suivante :

$$Q_d = Q + Q_i + Q_e + Q_a, \quad (\text{II.55})$$

avec  $Q$ ,  $Q_i$ , et  $Q_e$  les opérateurs présentés précédemment et  $Q_a$  :

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{i}{2\omega} (1 - t^\dagger t - r^\dagger r) \\ &= \frac{i}{2\omega} A, \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

où  $A$  est l'opérateur absorption.  $Q_d$  n'est maintenant plus hermitien car  $Q$  n'est plus hermitien en présence de pertes et  $Q_a$  est, par construction, antihermitien. Avec  $\epsilon_r$  complexe, le calcul effectué à la sous-section II.3.1 en dérivant l'équation de Helmholtz conduit cette fois à :

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon_o c^2}{4\omega} \oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \left[ \frac{1}{2\omega} \nabla (E_z^*(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r})) + (\partial_\omega E_z(\mathbf{r}) \nabla E_z^*(\mathbf{r}) - E_z^*(\mathbf{r}) \nabla \partial_\omega E_z(\mathbf{r})) \right] \\ &= \int_V d\mathbf{r} (\overline{u_{eff}}(\mathbf{r}) - \overline{P_d}(\mathbf{r}) \partial_\omega \theta(\mathbf{r})) + \frac{i}{2} \int_V d\mathbf{r} \left( \frac{\overline{P_d}(\mathbf{r})}{\omega} + \partial_\omega \overline{P_d}(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

où  $\theta$  est la phase du champ,  $\overline{P_d} = \epsilon_o \frac{\Omega \text{Im}(\epsilon_r)(\Omega)}{2} |\mathbf{E}_o|^2$  la densité de puissance dissipée et  $\overline{u_{eff}}$  la densité d'énergie effective :

$$\overline{u_{eff}} = \frac{\epsilon_o c^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 (|\mathbf{E}_o|^2) + \frac{\epsilon_o}{4\Omega_o} \partial_\omega (\omega^2 \text{Re}(\epsilon_r)) (\Omega_o) |\mathbf{E}_o|^2. \quad (\text{II.58})$$

L'intégrale de volume dans (II.57) n'est pas réelle du fait de la partie imaginaire de la permittivité. C'est pourquoi  $Q_d$  n'est plus hermitien.

### Partie hermitienne et anti-hermitienne de $Q_d$

La partie hermitienne  $Q_d^H$  et la partie anti-hermitienne  $Q_d^A$  de  $Q_d$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} Q_d^H &= -\frac{i}{2} (r^\dagger \partial_\omega r - r \partial_\omega r^\dagger + t^\dagger \partial_\omega t - t \partial_\omega t^\dagger) + Q_i + Q_e \\ &= Q^H + Q_i + Q_e, \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

$$\begin{aligned} Q_d^A &= \frac{1}{2} (r^\dagger \partial_\omega r + r \partial_\omega r^\dagger + t^\dagger \partial_\omega t + t \partial_\omega t^\dagger) + \frac{A}{(2\omega)} \\ &= \frac{1}{2} \left( Q^A + \frac{A}{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\omega A + \frac{A}{\omega} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

où  $Q^H$  et  $Q^A$  sont respectivement la partie hermitienne et antihermitienne de  $Q$ . D'après (II.57), les parties hermitienne et anti-hermitienne de  $Q_d$  correspondent aux quantités :

$$\langle \psi | Q_d^H | \psi \rangle \phi_{in} = \int_V d\mathbf{r} (\overline{u_{eff}}(\mathbf{r}) - \overline{P_d}(\mathbf{r}) \partial_\omega \theta(\mathbf{r})), \quad (\text{II.61})$$

$$\langle \psi | Q_d^A | \psi \rangle \phi_{in} = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \left( \partial_\omega \overline{P_d}(\mathbf{r}) + \frac{\overline{P_d}(\mathbf{r})}{\omega} \right). \quad (\text{II.62})$$

L'Eq. (II.62) est triviale car l'intégrale sur le volume de la densité de puissance dissipée est fournie par l'opérateur absorption. Pour interpréter l'Eq. (II.61), il est préférable de la réécrire comme suit :

$$\langle \psi | Q_d^H | \psi \rangle \phi_{in} + \int_V d\mathbf{r} \overline{P_d}(\mathbf{r}) \partial_\omega \theta(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{r} \overline{u_{eff}}(\mathbf{r}). \quad (\text{II.63})$$

Dans l'intégrale du membre de gauche se trouve le produit  $\overline{P_d}(\mathbf{r}) \partial_\omega \theta(\mathbf{r})$ .  $\partial_\omega \theta(\mathbf{r})$  peut être vu comme le temps de retard de l'onde au point  $\mathbf{r}$ . Pour une interprétation plus facile de ce terme, supposons que l'on peut négliger  $Q_i$  et  $Q_e$  dans  $Q_d^H$ . Supposons également que les matrices  $r$  et  $t$  sont de dimensions 1 (le guide supporte un seul mode propagatif) et que de la dissipation a lieu en un unique point  $\mathbf{r}_o$  dans le milieu. On peut donc écrire  $r = |r|e^{i\theta_R}$  et  $t = |t|e^{i\theta_T}$ . (II.63) s'écrit alors :

$$\left( |r|^2 \partial_\omega \theta_R + |t|^2 \partial_\omega \theta_T \right) \phi_{in} + \phi_{perte} \partial_\omega \theta(\mathbf{r}_o) = \int_V d\mathbf{r} \overline{u_{eff}}(\mathbf{r}), \quad (\text{II.64})$$

où  $\phi_{perte}$  représente le flux perdu par dissipation au point  $\mathbf{r}_o$  dans le milieu. Les flux réfléchi et transmis s'écrivant  $\phi_R = |r|^2 \phi_{in}$  et  $\phi_T = |t|^2 \phi_{in}$ , on peut réécrire l'équation précédente :

$$\phi_R \partial_\omega \theta_R + \phi_T \partial_\omega \theta_T + \phi_{perte} \partial_\omega \theta(\mathbf{r}_o) = \int_V d\mathbf{r} \overline{u_{eff}}(\mathbf{r}). \quad (\text{II.65})$$

Appelons le temps de retard au point  $\mathbf{r}_o$  le temps de retard de dissipation. L'Eq. (II.65) montre que l'énergie effective totale dans le milieu est la somme des temps de retard en réflexion, transmission, et de dissipation pondérés par les flux correspondants. Définissons le temps de séjour effectif comme l'analogie du temps de séjour mais en remplaçant la densité d'énergie par la densité d'énergie effective. L'Eq. (II.61) indique alors que le temps fourni par  $Q_d^H$  donne accès au temps de séjour effectif moins le temps de retard de dissipation auquel on n'a pas accès, car la mesure de ce dernier demanderait de connaître le champ dans le milieu.

## II.4 Prédiction théorique pour la distribution des temps propres

On a désormais établi l'expression d'un opérateur donnant accès au temps de séjour, et par conséquent à l'énergie, pour un front d'onde arbitraire pour des milieux sans perte. Afin de savoir quelle est l'énergie électromagnétique moyenne, maximale ou minimale, que l'on peut stocker dans un tel milieu, il faut étudier la distribution des valeurs propres de cet opérateur. Cette section se propose d'étudier la distribution des valeurs propres de l'opérateur temps de séjour  $Q_d$  pour un milieu fortement diffusant. On va voir dans la section II.6 que la distribution des valeurs propres de  $Q$  diffère peu de la distribution des valeurs propres de  $Q_d$ . Il est donc pertinent dans un premier temps de se limiter à l'étude des valeurs propres de  $Q$ , qui sont également appelées temps propres (*proper delay times* en anglais).

### II.4.1 Théorie des matrices aléatoires

Le but de la théorie des matrices aléatoires est de calculer des quantités statistiques en lien avec les valeurs propres et les vecteurs propres de matrices aléatoires de grandes tailles. Elle a été introduite par Wishart [71] et utilisée pour la première fois en physique par Wigner dans les années 1950 [72]. Au lieu de chercher à connaître précisément toutes les valeurs propres d'un hamiltonien modélisant un noyau possédant de nombreux niveaux d'énergie, Wigner a cherché à caractériser leur distribution statistique. Il a modélisé le hamiltonien par une matrice aléatoire de grande taille respectant les mêmes symétries que le problème physique. La distribution des valeurs propres de cette matrice aléatoire correspondait bien à la distribution mesurée expérimentalement. La théorie des matrices aléatoires est devenue un domaine d'étude à part entière en physique statistique. Dans ce cadre, P. Brouwer, K. Frahm et C. Beenakker ont obtenu la distribution jointe des temps propres pour un système chaotique [61]. Cette distribution exprimée en terme d'inverse des temps propres  $x_n = 1/\tau_n$  s'écrit :

$$P(x_1, \dots, x_N) \propto \prod_{i < j} |x_i - x_j| \prod_{k=1}^N x_k^{\beta N/2} e^{-\beta \tau_H x_k/2}, \quad (\text{II.66})$$

où  $\beta$  vaut 1 pour des systèmes invariants par renversement temporel, qui sont les systèmes étudiés dans le cadre de cette thèse, et 2 pour des systèmes qui ne le sont pas, et  $\tau_H$  est le temps de Heisenberg. Il s'exprime formellement comme  $\tau_H = 2\pi/\Delta$ ,  $\Delta$  étant la pulsation moyenne entre les états propres du système fermé. Il est le seul temps pilote de la

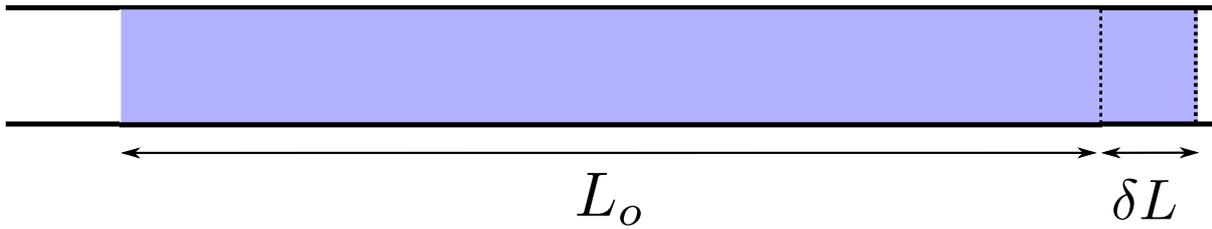


FIGURE II.5 – Système désordonné de longueur  $L_o$  imbriqué dans un guide auquel on ajoute une portion de milieu de longueur  $\delta L$ .

distribution (II.66). Le terme  $\prod_{i<j} |x_i - x_j|$  fait apparaître une répulsion entre les valeurs propres. Cette répulsion est typique en théorie des matrices aléatoires. La distribution (II.66) définit l'ensemble de Laguerre. Il est intéressant de remarquer que la matrice  $Q^{-1}$ , dont les valeurs propres sont les  $x_i$ , se comporte comme une matrice aléatoire de Wishart  $HH^\dagger$ , où  $H$  est une matrice aléatoire gaussienne de taille  $N \times (2N + 1)$  [73]. La théorie des matrices aléatoires a également permis d'obtenir la distribution des valeurs propres de transmission pour un système chaotique. Cependant, elle échoue à prédire la distribution des valeurs propres de transmission ou des temps propres pour des systèmes désordonnés.

## II.4.2 Approche DMPK

### Valeurs propres de transmission d'un système désordonné

Pour des systèmes désordonnés, l'approche dite DMPK (en l'honneur de O. Dorokhov, P. Mello, P. Pereyra et N. Kumar) permet de faire des prédictions très précises concernant les propriétés statistiques de la matrice de diffusion. Cette approche consiste à établir une équation différentielle de type Fökker-Planck pour la distribution jointe des valeurs propres de l'opérateur considéré. Ainsi, la distribution des valeurs propres de transmission (valeurs propres de la matrice  $t^\dagger t$ ) d'un système désordonné imbriqué dans un guide a été prédite dans les années 80 par Dorokhov [29] puis par P. Mello, P. Pereyra et N. Kumar [74]. La revue de C. Beenakker [75] explique le schéma directeur pour obtenir l'équation DMPK pour la distribution jointe des valeurs propres de transmission d'un système désordonné. La démarche consiste à considérer un système désordonné d'épaisseur  $L_o$  caractérisé par une matrice de transmission  $t_o$  dans un guide auquel on ajoute une tranche d'épaisseur  $\delta L$  comme représenté sur la Fig. II.5. Les différents moments des valeurs propres de transmission pour le milieu d'épaisseur  $L_o + \delta L$  sont calculés de façon perturbatives à l'ordre 1 en  $\delta L$ . Ce calcul se fait en supposant que la matrice de transmission de la tranche possède des vecteurs singuliers statistiquement équivalents (*isotropy assumption*) et des valeurs propres telles que la transmission moyenne de la tranche vaut  $1 - \delta L / \ell^{RMT}$ , où  $\ell^{RMT}$  est le libre parcours moyen défini dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires. Il est relié au libre parcours moyen de transport microscopique  $\ell$  par  $\ell^{RMT} = \frac{\pi}{2} \ell$  pour un système 2D [75] (dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires, le libre parcours moyen de transport  $\ell$  s'identifie au libre parcours moyen de diffusion  $\ell_s$ ). Seuls les deux premiers moments  $\langle \delta T_n \rangle$  et  $\langle \delta T_n \delta T_m \rangle$  sont non-nuls à l'ordre 1 en  $\delta L$ . Il s'ensuit de la théorie du mouvement brownien que la distribution des valeurs propres de

transmission obéit à l'équation de Fokker-Planck [76] :

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{1}{\delta L} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial T_n} \left[ -\langle \delta T_n \rangle P + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial T_m} \langle \delta T_n \delta T_m \rangle P \right]. \quad (\text{II.67})$$

Pour des systèmes invariants par retournement temporel, l'Eq. DMPK (II.67) s'écrit avec les variables  $\lambda_n = (1 - T_n)/T_n$  :

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{1}{\ell^{RMT}} \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left[ \lambda_n (1 + \lambda_n) \left( -\sum_{j \neq n} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_j} P + \frac{\partial P}{\partial \lambda_n} \right) \right]. \quad (\text{II.68})$$

La résolution de cette équation donne accès à la distribution jointe des valeurs propres de transmission, que l'on soit en régime diffusif (dans ce cas, la longueur de localisation  $(N+1)\ell$  est grande devant l'épaisseur du système) ou localisé (la longueur de localisation est alors petite devant l'épaisseur du système), et ce pour un nombre arbitraire de modes propagatifs. Le passage du régime diffusif au régime localisé s'accompagne d'une cristallisation des valeurs propres [75]. Expérimentalement, on a uniquement accès à la distribution marginale (ou densité). Pour obtenir une équation pour la densité, on peut intégrer l'Eq. (II.68) sur  $N-1$  variables ou multiplier l'Eq. (II.68) par  $\sum_{n=1}^N \delta(\lambda - \lambda_n)$  puis intégrer sur les  $N$  variables  $\lambda_n$  [75]. La résolution de ce calcul en régime diffusif conduit pour  $\beta = 1$  à la distribution bimodale illustrée au chapitre 1.

### Équation DMPK pour les valeurs propres de réflexion avec absorption

Une équation type DMPK pour les valeurs propres de réflexion d'un milieu avec de l'absorption a été établie dans les Réfs. [77, 78]. Lorsqu'il n'y a pas d'absorption, les valeurs propres de réflexion sont liées aux valeurs propres de transmission par la relation  $R_n = 1 - T_n$ . Puisque  $dR_n = -dT_n$ , la probabilité jointe des valeurs propres de réflexion vérifie l'Eq. (II.68) avec  $\lambda_n = \frac{1-T_n}{T_n} = \frac{R_n}{1-R_n}$ . En présence d'absorption, l'équation DMPK pour la distribution jointe des valeurs propres de réflexion a été établie dans les Réfs. [77] et [78] pour des systèmes invariants par renversement temporel (cas  $\beta = 1$ ). L'équation type DMPK obtenue dans [78] avec les variables  $\lambda_i$  est :

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{1}{\ell^{RMT}} \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left[ \lambda_n (1 + \lambda_n) \left( \left( -2a(N+1) + \sum_{j \neq n} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_j} \right) P + \frac{\partial P}{\partial \lambda_n} \right) \right], \quad (\text{II.69})$$

où  $a = \ell^{RMT}/\ell_a$  avec  $\ell_a$  la longueur d'absorption. Lorsqu'il n'y a pas d'absorption ( $a = 0$ ), l'Eq. (II.69) est identique à l'Eq. (II.68), on retrouve bien l'équation DMPK sans absorption pour des systèmes invariants par retournement temporel.

### Distribution jointe des valeurs propres de réflexion dans un milieu semi-infini avec absorption

Dans la limite d'un milieu semi-infini, la distribution jointe des valeurs propres de réflexion tend vers une distribution stationnaire définie par la relation :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left[ \lambda_n (1 + \lambda_n) \left( \left( -2a(N+1) - \sum_{j \neq n} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_j} \right) P + \frac{\partial P}{\partial \lambda_n} \right) \right] = 0. \quad (\text{II.70})$$

En cherchant une distribution qui annule chaque terme de la somme de (II.70), on trouve une solution de (II.70) qui s'écrit :

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N, L \rightarrow +\infty) \propto \prod_{i=1}^N e^{-2a(N+1)\lambda_i} \prod_{k>i} |\lambda_i - \lambda_k|. \quad (\text{II.71})$$

### Distribution jointe des temps propres pour un milieu semi-infini

Il est difficile de reproduire pour la matrice  $Q$  le schéma menant à une équation de type Fökker-Planck. Ceci a récemment été réalisé par A. Ossipov dans la Réf. [79] pour le cas où d'une onde quantique injectée des deux côtés du milieu. Une autre approche pour obtenir la distribution des temps propres lorsque l'onde n'est injectée que d'un seul côté repose sur une correspondance entre valeurs propres de réflexion d'un milieu avec de l'absorption et temps propres de ce milieu sans absorption. Pour obtenir cette correspondance, on part de l'égalité entre la matrice de diffusion d'un milieu avec un temps d'absorption  $\tau_a = \ell_a/v$  à la fréquence  $\omega$ ,  $S_a(\omega)$ , et la matrice de diffusion de ce même milieu sans absorption à la fréquence complexe  $\omega + \frac{i}{2\tau_a}$ ,  $S(\omega + \frac{i}{2\tau_a})$ , [80]. Ceci permet d'écrire dans la limite de faible absorption  $\omega\tau_a \gg 1$  :

$$\begin{aligned} S_a^\dagger(\omega)S_a(\omega) &= S^\dagger\left(\omega + \frac{i}{2\tau_a}\right)S\left(\omega + \frac{i}{2\tau_a}\right) \\ &\approx S^\dagger(\omega)S(\omega) + \frac{i}{2\tau_a}S^\dagger\partial_\omega S(\omega) - \frac{i}{2\tau_a}\partial_\omega S^\dagger S(\omega) \\ &\approx 1 + \frac{i}{\tau_a}S^\dagger\partial_\omega S(\omega) \\ &\approx 1 - \frac{1}{\tau_a}Q(\omega). \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

Les vecteurs propres de la matrices  $S_a^\dagger S_a$  pour un milieu avec absorption sont au premier ordre vecteurs propres de  $Q$  de ce même milieu mais sans absorption. Dans le cas d'un milieu avec absorption tel qu'il n'y a aucune transmission, la matrice de diffusion se réduit alors à la matrice de réflexion, si bien que  $r_a^\dagger(\omega)r_a(\omega) = S_a^\dagger(\omega)S_a(\omega)$ . Pour négliger toute transmission, l'épaisseur  $L$  du milieu doit vérifier la condition  $L \gg \sqrt{\ell_a \ell}$ . Les valeurs propres de réflexion avec absorption sont alors reliées aux temps propres  $\tau_n$  par la relation  $R_n^a = 1 - \frac{\tau_n}{\tau_a}$ . Plus l'onde va passer de temps dans le milieu, plus la valeur propre de réflexion va être faible. Cette correspondance n'a évidemment de sens que si  $\tau_n < \tau_a$ . De  $R_{a,n} = 1 - \frac{\tau_n}{\tau_a}$ , on a  $\lambda_n = \frac{\tau_a}{\tau_n} - 1$ . On vérifie aisément à partir de l'Eq. (II.71) que l'inverse des temps propres  $x_n = \tau_s/\tau_n$  est également distribué selon (II.71) :

$$P(x_1, \dots, x_N, L \rightarrow +\infty) \propto \prod_{i=1}^N e^{-2(N+1)x_i} \prod_{k>i} |x_i - x_k|. \quad (\text{II.73})$$

Ici  $\tau_s$  est le temps de diffusion défini dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires :  $\tau_s = \ell^{RMT}/v = (\pi/2)\ell/v$  où  $v = c/n$ ,  $n$  étant l'indice effectif du milieu. La matrice  $Q^{-1}$  se comporte comme une matrice de Whishart  $HH^\dagger$ , mais cette fois  $H$  est une matrice gaussienne de taille  $N \times N$ .

### Distribution marginale des temps propres pour un milieu semi-infini

La distribution (II.73) peut être réécrite :

$$P(x_1, \dots, x_N, L \rightarrow +\infty) \propto e^{-H}, \quad (\text{II.74})$$

avec

$$H = 2(N+1) \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{k>j} \ln |x_j - x_k|. \quad (\text{II.75})$$

La quantité  $H$  peut être vue comme le hamiltonien d'un gaz 1D de  $N$  particules fictives chargées dans un potentiel linéaire et en interaction répulsive dont les positions sont repérées par les  $x_i$  [81–84]. On va maintenant supposer que le nombre de particules est suffisamment grand pour réécrire le hamiltonien du gaz de particules à l'aide de la densité de particules  $p(x)$  à la position  $x$  :

$$H = 2(N+1)N \int_{x=0}^{+\infty} dx p(x)x - \frac{N(N-1)}{2} \int_{x_1=0}^{+\infty} dx_1 \int_{x_2=0}^{+\infty} dx_2 \ln |x_2 - x_1| p(x_1)p(x_2). \quad (\text{II.76})$$

La distribution marginale  $p(x)$  que l'on recherche est la distribution qui minimise l'énergie du gaz de particules avec la contrainte  $\int dx p(x) = 1$ . La démonstration de l'expression de  $p$  est donnée en annexe C. On trouve alors une distribution de Marchenko-Pastur, comme cela est attendue pour une matrice de Wishart [85]. La distribution des temps propres  $\tau = \tau_s/x$  pour un milieu semi-infini est :

$$p(\tau) = \frac{2\tau_s}{\pi\tau^2} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_s} - 1}. \quad (\text{II.77})$$

Cette distribution, uniquement pilotée par  $\tau_s$ , est représentée sur la Fig. II.6. Un temps minimal apparaît. Ce temps minimal est  $\tau_s$ , ce qui est intuitif : le temps de séjour minimal dans un milieu diffusant est le temps entre deux événements de diffusion. Le temps le plus probable est  $4/3\tau_s$ . La distribution présente une queue algébrique en  $\tau^{-3/2}$ . Ce résultat avait déjà été mis en avant numériquement avec le modèle du rotateur forcé (*kicked rotor* en anglais) en 2D [63, 86, 87]. Le modèle du rotateur forcé le plus simple consiste à étudier un pendule soumis un forçage bref dans le temps (pic de Dirac) répété périodiquement [88]. L'étude du modèle du rotateur forcé montre, lorsque le forçage est suffisamment élevé, que l'impulsion quadratique moyenne du pendule croît linéairement avec le temps et adopte donc un comportement diffusif. À partir du hamiltonien du système, il est possible de construire les matrices  $S$  et  $Q$ , et donc d'étudier les temps propres d'un système diffusif dans l'espace des impulsions. Néanmoins, ce modèle ne se base pas sur la résolution de l'équation d'onde, comme c'est le cas dans cette thèse.

### Distribution marginale des temps propres pour un milieu de taille finie en régime quasi-balistique et en régime de diffusion multiple

Le temps moyen de la distribution (II.77) est infini. Ce n'est pas le cas pour un milieu de taille fini. Le temps moyen  $\langle \tau \rangle$ , également noté  $\langle \tau_W \rangle$ , où  $\tau_W = \text{Tr}(Q)/N$  est appelé temps de Wigner, est donné par [54, 89] :

$$\langle \tau \rangle = \frac{\pi \langle \rho(\omega) \rangle}{N}, \quad (\text{II.78})$$

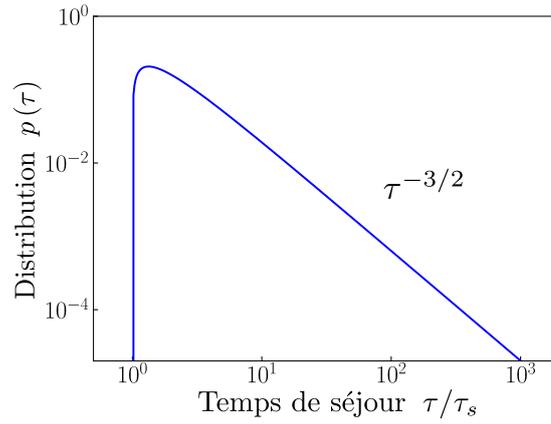


FIGURE II.6 – Distribution théorique des temps propres renormalisés par le temps de transport pour un milieu diffusant semi-infini.

où  $\langle \rho(\omega) \rangle$  est la densité moyenne d'états du système. La densité moyenne d'états est reliée à la fonction de Green de l'équation d'onde  $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Cette dernière est la solution de l'équation d'onde pour une source ponctuelle située en  $\mathbf{r}'$  :

$$\nabla^2 G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \epsilon_r(\omega, \mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (\text{II.79})$$

et vérifiant une condition d'onde sortante. La densité moyenne d'états s'exprime à l'aide de la fonction de Green par [4] :

$$\langle \rho(\omega) \rangle = -\frac{2\omega}{\pi c^2} \int_V d\mathbf{r} \langle \text{Im} (G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r})) \rangle. \quad (\text{II.80})$$

Dans le cas d'un milieu 2D d'épaisseur  $L$  et de largeur  $W$ ,  $\int_V d\mathbf{r} \langle \text{Im}(G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r})) \rangle \simeq -LW/4$ . Le nombre de modes propagatifs  $N$  dans le guide est  $N \simeq \omega W/\pi c$ . Pour un milieu non-résonant d'indice effectif  $n$ ,  $c$  doit être remplacé par  $v = c/n$ . Le temps moyen dépend uniquement de l'épaisseur du milieu et de l'indice effectif  $n$ , et non de la force du désordre :  $\langle \tau \rangle = \pi L/2v$ . Ce temps tend vers l'infini quand l'épaisseur du milieu tend vers l'infini. Il a été démontré récemment que ce résultat restait valide dans un milieu désordonné résonant à condition de remplacer  $v$  par la vitesse de transport de l'énergie [90]. Cette propriété d'invariance de la longueur de chemin prise par une onde a été démontrée expérimentalement récemment [91]. Dans nos simulations numériques (où le libre parcours moyen de diffusion est égal au libre parcours moyen de transport), l'indice effectif et le libre parcours moyen de transport microscopiques sont obtenus en excitant le premier mode du guide d'onde et en ajustant le champ moyen  $E^{coh}(x) = \left\langle \int_{y=0}^W dy \text{Re}(E)(x, y) \right\rangle$ , où  $\langle \rangle$  représente la moyenne sur le désordre et  $E$  le champ complexe dans le milieu, par la formule  $E^{coh}(x) \sim \cos(\omega x/v)e^{-x/2\ell}$ . La Fig. II.7 (a) illustre le champ moyen obtenu pour un milieu d'épaisseur  $kL = 300$  imbriqué dans un guide de largeur  $kW = 600$ . La Fig. II.7 (b) montre le temps moyen obtenu en fonction de  $L/v$ . Celui-ci est bien indépendant de  $\ell$ .

En supposant que le hamiltonien (II.76) est encore valable pour un système de taille fini en régime diffusif (large conductance), on obtient la distribution marginale en minimisant

le hamiltonien (II.76) avec la contrainte :

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{p(x)}{x} = \langle \tau \rangle = \frac{\pi L}{2v}. \quad (\text{II.81})$$

Ce problème est identique à celui rencontré dans [92]. La distribution obtenue pour les temps propres s'écrit [93] :

$$p(\tau) = \frac{2\tau_s}{\pi\tau^2} \left(1 + \gamma \frac{\tau}{\tau_s}\right) \sqrt{1 - \frac{\beta\tau}{\tau_s}} \sqrt{\frac{\alpha\tau}{\tau_s} - 1}, \quad (\text{II.82})$$

où les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont solutions de (voir annexe C) :

$$\frac{(1\sqrt{\beta/\alpha})^2 (3 + 2\sqrt{\beta/\alpha} + 3\beta/\alpha)}{2\sqrt{\beta/\alpha} (1 + \beta/\alpha)} = \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s}, \quad (\text{II.83})$$

$$\alpha = \frac{1 + \beta/\alpha}{(1 - \beta/\alpha)^2}, \quad (\text{II.84})$$

$$\gamma = \frac{2\beta/\alpha}{(1 - \beta/\alpha)^2}. \quad (\text{II.85})$$

Les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dépendent du rapport  $\langle \tau \rangle / \tau_s$ . La densité de valeurs propres est maintenant pilotée par deux temps indépendants  $\tau_s$  et  $\langle \tau \rangle$ . La distribution présente un temps minimal,  $\tau^{\min} = \tau_s / \alpha$ , et un temps maximal,  $\tau^{\max} = \tau_s / \beta$ . Il est intéressant de noter que la distribution pour la variable  $\tilde{\tau} = \tau / \langle \tau \rangle$  s'écrit :

$$p(\tilde{\tau}) = \frac{2\tau_s}{\pi\tilde{\tau}^2 \langle \tau \rangle} \left(1 + \gamma \frac{\tilde{\tau} \langle \tau \rangle}{\tau_s}\right) \sqrt{1 - \beta \frac{\tilde{\tau} \langle \tau \rangle}{\tau_s}} \sqrt{\frac{\alpha \tilde{\tau} \langle \tau \rangle}{\tau_s} - 1}, \quad (\text{II.86})$$

et ne dépend que du rapport  $\langle \tau \rangle / \tau_s$  qui est proportionnel à l'épaisseur optique du milieu. La distribution (II.82) se trouve être notablement différente de la distribution du temps de retard  $\partial_\omega \phi_{a,b}$ , où  $\phi_{a,b}$  est la phase associée au coefficient de transmission  $t_{a,b} = |t_{a,b}| e^{i\phi_{a,b}}$ , présentée dans la Réf. [55]. Cette dernière présente notamment des valeurs négatives alors que la distribution (II.82) ne présente que des valeurs positives.

### Régime de grande épaisseur optique

En régime de grande épaisseur optique, le rapport  $\langle \tau \rangle / \tau_s$  est grand devant 1. Le temps maximal et le temps minimal s'écrivent alors :

$$\tau^{\min} \simeq \tau_s, \quad (\text{II.87})$$

$$\tau^{\max} \simeq \frac{4}{9} \langle \tau \rangle \left( \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s} - 4 \right) \sim \frac{4}{9} \frac{\langle \tau \rangle^2}{\tau_s}. \quad (\text{II.88})$$

Le temps maximal  $\tau^{\max}$  varie comme le temps de Thouless  $\tau_{\text{Th}} = \langle \tau \rangle^2 / \tau_s$ . On retrouve en régime de diffusion multiple que le temps minimal  $\tau^{\min}$  est égal à  $\tau_s$ . Il apparaît également que le temps le plus probable est également  $4/3\tau_s$ . Il est intéressant de noter que le temps le plus probable ne correspond pas au temps  $\tau_s$  lorsque le milieu est éclairé par un front d'onde quelconque comme une onde plane. En effet, la majorité du flux incident pour une onde plane est rétrodiffusée après un temps  $\tau_s$ , mais une partie de la lumière va pénétrer plus en profondeur dans le milieu.

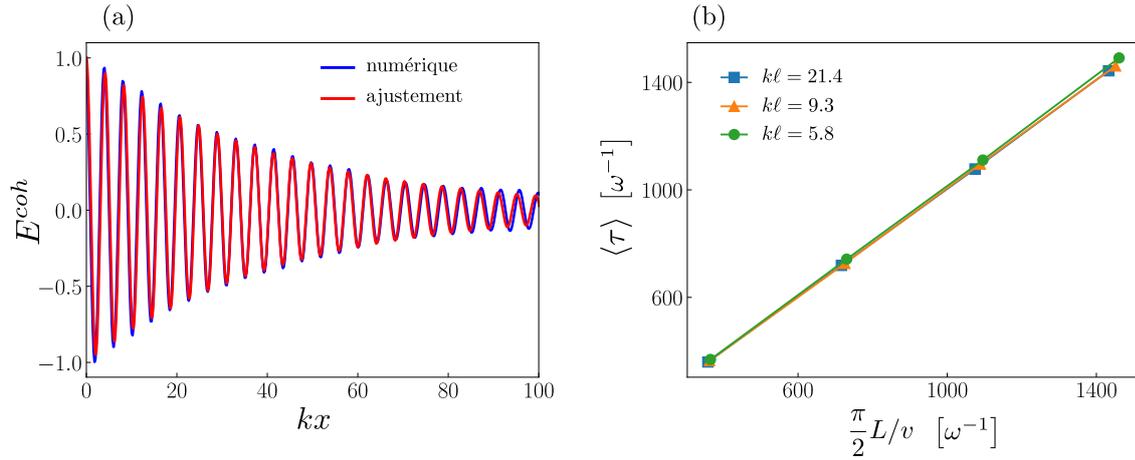


FIGURE II.7 – (a) Champ moyen obtenu numériquement en moyennant sur 8 réalisations du désordre en fonction de la profondeur  $kx$  dans le milieu lorsque le front d’onde incident correspond au premier mode du guide d’onde. La courbe en rouge correspond à l’ajustement par la fonction  $\cos(\omega x/v)e^{-x/2\ell}$ , où  $\ell$  et  $v$  sont les paramètres à optimiser. (b) Temps moyen  $\langle \text{Tr}(Q_d)/N \rangle$  obtenu numériquement en fonction de l’épaisseur du milieu pour trois forces du désordre différentes.

## II.5 Comparaison des prédictions avec les résultats de simulations ab initio

### II.5.1 Distribution numérique des valeurs propres de $Q_d$

La distribution des temps propres pour des milieux non-dispersifs a été obtenue numériquement par un algorithme récursif de construction de la fonction de Green de l’équation d’onde. La méthode est décrite en annexe A et permet d’obtenir les matrices de réflexion et transmission d’un milieu imbriqué dans un guide d’onde à des fréquences arbitraires. La Fig. II.8 représente la distribution numérique des temps propres ainsi que la prédiction théorique (II.82) pour des milieux d’épaisseurs optiques différentes ( $b \approx 14, 32, 52$ ). On remarque que les distributions numériques et les prédictions théoriques sont en très bon accord. On retrouve graphiquement une décroissance en  $\tau^{-3/2}$  pour  $\langle \tau \rangle < \tau < \tau^{\max}$ .

### II.5.2 Stockage d’énergie maximal dans un milieu désordonné en régime de diffusion multiple

Que ce soit pour exciter des particules fluorescentes dans un milieu opaque [94], ou pour pomper avec efficacité le milieu à gain d’un laser aléatoire [95, 96], il existe de multiples raisons pour chercher à maximiser l’énergie stockée dans un milieu désordonné. Dans la sous-section II.2.2, nous avons vu que l’on peut approximer l’énergie contenue dans un milieu diffusant dont les dimensions sont grandes devant la longueur d’onde par :

$$U = \frac{\epsilon_o}{2} \int_V d\mathbf{r} \epsilon_r(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}), \quad (\text{II.89})$$

où  $I(\mathbf{r})$  est l’intensité dans le milieu générée par un front d’onde donné. Nous allons maintenant comparer cette quantité pour quatre fronts d’ondes correspondant aux quatre

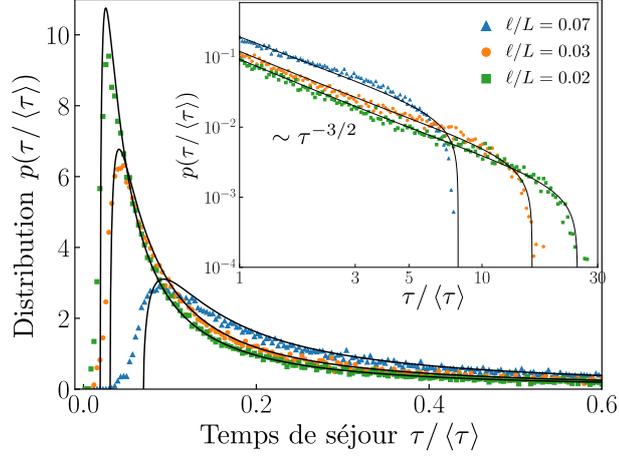


FIGURE II.8 – Distributions des valeurs propres de l’opérateur  $Q_d$  évaluées pour un milieu d’épaisseur  $kL = 300$  imbriqué dans un guide d’onde supportant un nombre de modes propagatifs  $N = 287$ . La distribution est représentée pour 3 forces du désordre correspondant à  $k\ell = 21.4$ ,  $k\ell = 9.3$  et  $k\ell = 5.8$ . La queue des distributions est représentée dans l’encart en échelle log-log. Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre.

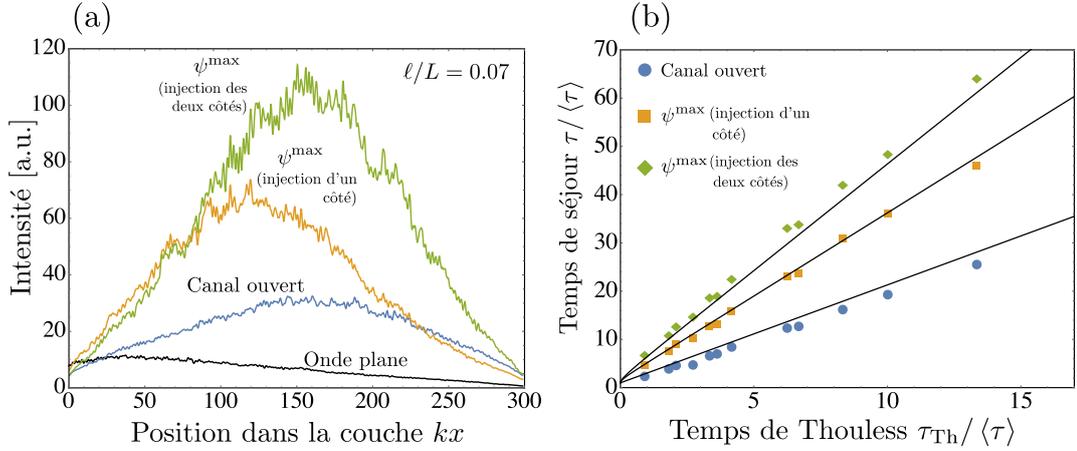


FIGURE II.9 – (a) Profils d’intensité, moyennés sur 8 réalisations du désordre, dans un milieu désordonné dans un guide d’onde (intégré sur la largeur du guide) résultant de la propagation pour différents fronts d’onde incidents : le premier mode du guide qui s’apparente à une onde plane normale à la surface du milieu lorsque la largeur du guide est grande devant la longueur d’onde, au canal ouvert de plus grande transmission, au vecteur propre de  $Q_d$  de plus grand temps de séjour et au vecteur propre de  $Q$ , construit avec la matrice de diffusion  $S$  lorsque la lumière est injectée des deux côtés, de plus grand temps propre. (b) Temps de séjour  $\tau = \langle \psi | Q_d | \psi \rangle$  moyenné sur 128 réalisations du désordre pour des états correspondants aux états mentionnés en (a) en fonction du temps de Thouless du milieu  $\tau_{\text{Th}} = L^2 / \pi^2 D_B = 2L^2 / \pi^2 \ell v$ . Tous les temps sont renormalisés par  $\langle \tau \rangle = \pi L / 2v$ . Les lignes en trait plein correspondent aux prédictions analytiques.

profils d'intensité représentés sur la Fig. II.9. Considérons tout d'abord l'énergie stockée par une onde plane. Le profil d'intensité  $I^{pw}(x)$  dans un milieu diffusant éclairé par une onde plane décroît linéairement [3] (où  $x$  désigne la profondeur dans le milieu) :

$$I^{pw}(x) = \int_{y=0}^W dy |E(x, y)|^2 \propto \frac{L-x}{kL}. \quad (\text{II.90})$$

En considérant que l'on peut approximer l'énergie par le produit de l'intensité et de la constante diélectrique effective du milieu, on trouve que l'énergie stockée par une onde plane est  $U^{pw} = \phi_{in} \tau^{pw}$ , où  $\tau^{pw}$  est le temps de séjour associé à une onde plane :

$$\tau^{pw} = \langle \tau \rangle. \quad (\text{II.91})$$

C'est également le temps de séjour pour un milieu transparent, quelque soit le front d'onde incident. Comparons maintenant ce temps avec le temps de séjour des canaux ouverts d'un milieu opaque. Ces derniers étant des fronts d'onde avec une transmission proche de 1, ils voyagent en profondeur dans des milieux mêmes opaques et semblent donc des bons candidats si on souhaite stocker plus d'énergie dans le milieu par rapport à une onde plane [97, 98]. Dans l'article [99], les auteurs ont étudié théoriquement et numériquement le profil d'intensité dans un milieu diffusant en 2D éclairé par un front d'onde correspondant à un canal ouvert et obtenu une formule analytique pour le profil d'intensité  $I^{oc}(x)$  :

$$I^{oc}(x) \propto \frac{\pi}{2k} \left[ 1 + \frac{\pi L}{2 \ell} \frac{x(L-x)}{L^2} \right]. \quad (\text{II.92})$$

$I^{oc}(x)$  présente un profil parabolique symétrique par rapport au centre du milieu en  $x = L/2$ . Par réciprocité, il y a symétrie entre les deux faces du milieu diffusant pour un canal ouvert de transmission 1, il en résulte que le profil est symétrique par rapport au centre du milieu. En considérant que l'on peut approximer l'énergie par le produit de l'intensité et de la constante diélectrique effective du milieu, l'énergie stockée pour un canal ouvert est  $U^{oc} = \phi_{in} \tau^{oc}$  avec  $\tau^{oc}$  [93] :

$$\tau^{oc} \simeq \frac{\pi}{12} \langle \tau \rangle \left( \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s} + \frac{12}{\pi} \right). \quad (\text{II.93})$$

Pour un milieu de grande épaisseur optique,  $\langle \tau \rangle / \tau_s \gg 1$ , on peut négliger  $12/\pi$  devant  $\langle \tau \rangle / \tau_s$  dans (II.93). Le temps de séjour pour un canal ouvert est alors proportionnel au temps de Thouless. On peut donc stocker de l'ordre de  $b$  fois plus d'énergie avec un canal ouvert qu'avec une onde plane,  $b = L/\ell$  étant l'épaisseur optique du milieu.

D'après l'Eq. (II.44), l'énergie stockée est maximale quand le front d'onde incident correspond au vecteur propre de  $Q_d$  avec la plus grande valeur propre. Cette énergie s'écrit  $U^{max} = \phi_{in} \tau^{max}$ .  $\tau^{max}$  est également proportionnel au temps de Thouless et est donné par l'Eq. (II.88). Le rapport entre l'énergie stockée par le vecteur propre de  $Q_d$  de plus grande valeur propre et l'énergie stockée par un canal ouvert est d'environ 1.7. On voit effectivement sur la Fig. II.9 (a) que le vecteur propre de  $Q_d$  de valeur propre maximal permet de stocker plus d'énergie que le canal le plus ouvert. Est également représenté le profil d'intensité pour le vecteur propre maximal (vecteur de plus grand temps) de  $Q$

correspondant à la matrice de diffusion lorsqu'on injecte de la lumière de la gauche et de la droite :

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (\text{II.94})$$

où  $r'$  et  $t'$  sont les matrices de réflexion et de transmission lorsque l'onde vient de la droite du milieu. En se basant sur l'article [79], une expression de la limite supérieure de la distribution de  $Q$  est établie en annexe de notre publication [93]. Le temps propre maximal, que l'on assimile au temps de séjour maximal, est :

$$\tau^{max} \simeq \tau_s \left[ \zeta \left( \frac{\langle \tau \rangle^2}{\tau_s^2} + 4 \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s} - 4 \right) - 1 \right], \quad (\text{II.95})$$

où  $\zeta$  est la solution d'une équation transcendentale et vaut  $\zeta \simeq 0,57$ . On peut donc augmenter le stockage d'énergie maximal d'un facteur 1.3 en injectant l'onde des deux côtés du milieu au lieu d'un seul. Les prédictions théoriques pour ces différents temps sont en bon accord avec les résultats numériques, comme cela est montré sur la Fig. II.9 (b).

### II.5.3 États prélocalisés et queue de la distribution des valeurs propres de $Q_d$

Selon la prédiction théorique (II.82), la distribution des valeurs propres de  $Q$  présente une limite supérieure  $\tau^{max} = \tau_s/\beta$ . Cependant, une étude minutieuse des distributions numériques semble montrer la présence d'une queue de la distribution pour des temps supérieurs à  $\tau^{max} = \tau_s/\beta$  qui décroît selon une loi log-normale :

$$p(\tau) \sim e^{-\alpha \ln^2(\tau)}. \quad (\text{II.96})$$

Cette décroissance est représentée sur la Fig. II.10 pour des milieux avec quatre épaisseurs différentes ( $kL = 150, 300, 450$  et  $600$ ) et trois forces du désordre différentes. Cette décroissance pour la queue a déjà été observée numériquement pour des simulations avec le modèle du rotateur forcé [63, 86]. Elle serait due à la présence rare d'états prélocalisés, ou encore états anormalement localisés (ici on entend par état des modes propres de l'équation d'onde du système ouvert et non un vecteur propre de l'opérateur  $Q_d$ ). Ces états sont largement discutés dans la revue [100]. Ils sont appelés états prélocalisés car bien que l'épaisseur du milieu  $L$  soit plus petite que la longueur de localisation  $\xi$ , ces états se caractérisent par une concentration de l'intensité sur une longueur de localisation effective plus petite que l'épaisseur du milieu, puis par une décroissance algébrique au-delà de cette longueur. Ces états ont une largeur de résonance très faible, c'est-à-dire un temps de vie très long. La queue de la distribution observée sur la Fig. II.10 serait due aux fronts d'onde incident qui se couplent aux états prélocalisés situés en bord d'échantillon.

On remarque également sur la Fig. II.10 que la pente  $\alpha$  de la queue de la distribution diminue lorsque l'épaisseur optique du milieu augmente. Dans la revue [63], un raisonnement perturbatif permet d'établir que le coefficient  $\alpha$  est proportionnel à la conductance de Thouless. Le coefficient  $\alpha$  obtenue par ajustement pour différents milieux est représenté en fonction de la conductance du milieu  $g = N\ell/L$  sur la Fig. II.11. Un ajustement linéaire est également représenté. Le coefficient  $\alpha$  semble bien dépendre linéairement de  $g$ . Plus la conductance est grande, moins il est probable de trouver des états prélocalisés.

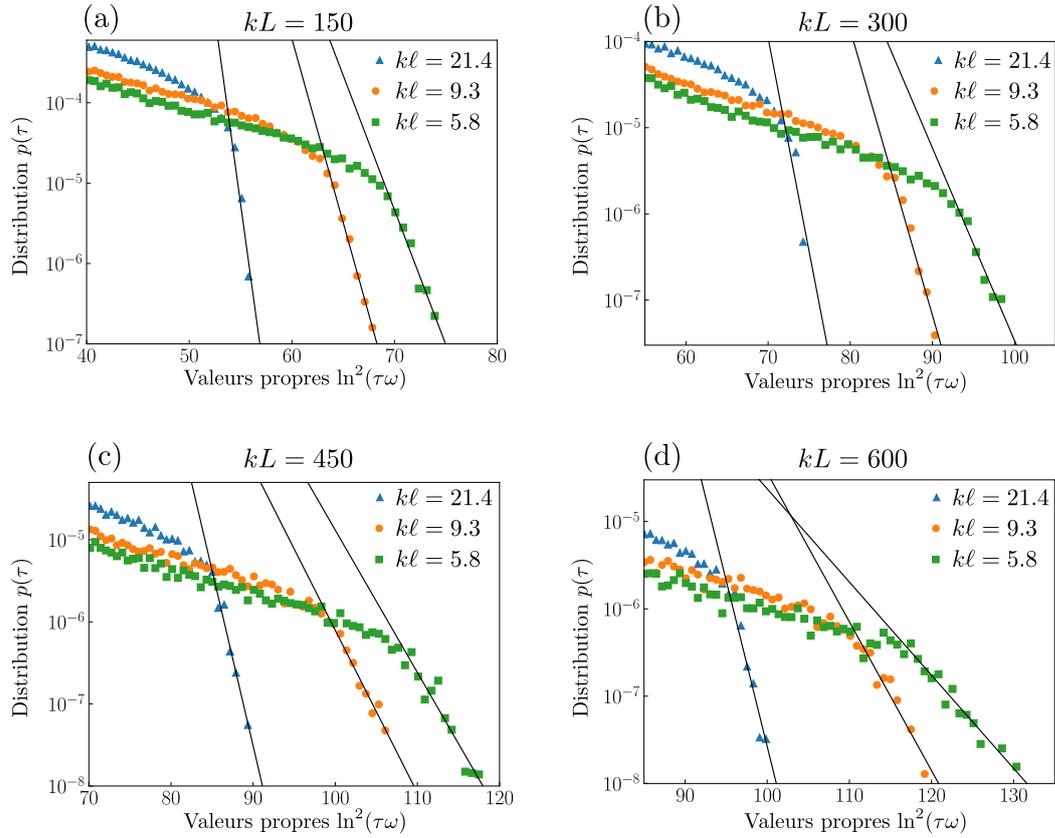


FIGURE II.10 – (a,b,c,d) Queue de la distribution des valeurs propres de  $Q_d$  obtenues avec 128 réalisations du désordre pour un milieu de différentes épaisseurs ( $kL = 150, 300, 450$  et  $600$ ) dans un guide avec  $N = 287$  modes et trois forces du désordre correspondant à  $kl = 21.4, kl = 9.3$  et  $kl = 5.8$ . Les traits pleins correspondent à des ajustements avec la fonction  $10^\beta e^{-\alpha \ln^2(t)}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant les paramètres à optimiser.

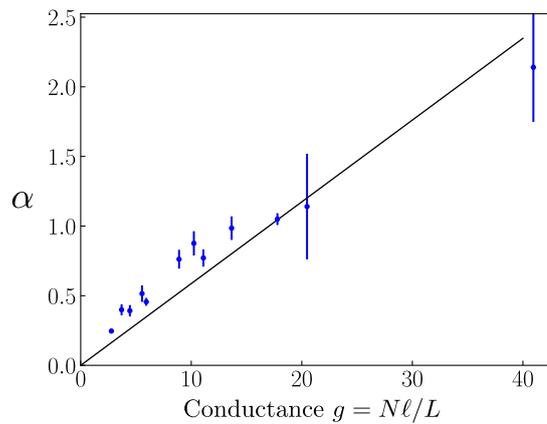


FIGURE II.11 – Coefficient  $\alpha$  obtenu sur la figure II.10 par ajustement en fonction de la conductance du milieu. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart-type obtenu pour les coefficients  $\alpha$ . La courbe en trait plein est un ajustement linéaire des données.

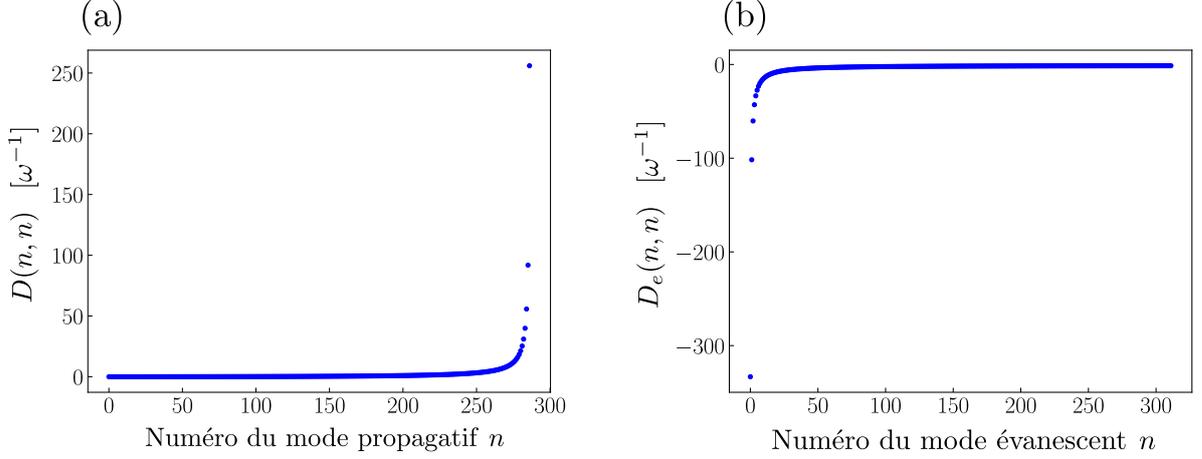


FIGURE II.12 – Éléments diagonaux de la matrice  $D$  (a) et  $D_e$  (b) en fonction du mode propagatif (a) et mode évanescent (b) pour un guide d'onde de largeur  $kW = 600$  et d'indice  $n_g = 1.5$ .

## II.6 Contribution de $Q_i$ et $Q_e$

La matrice  $Q_i = \frac{i}{2}(r^\dagger D - Dr)$  et la matrice  $Q_e = \frac{1}{2}(r^\dagger D_e r_r + t_e^\dagger D_e t_e)$  font intervenir les matrices diagonales  $D$  et  $D_e$  qui sont homogènes à des temps et ne dépendent pas du désordre. Dans cette section, nous étudions dans un premier temps les matrices  $D$  et  $D_e$  puis comparons la contribution des matrices  $Q_i$  et  $Q_e$  à  $Q$  dans l'évaluation de  $Q_d$ .

### II.6.1 Matrices $D$ et $D_e$

Les éléments de la matrice diagonale  $D$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} D(n, n) &= k_n^{-1} \partial_\omega k_n - 1/\omega \\ &= \frac{2\omega_{c,n}^2/\omega^3}{1 - \omega_{c,n}^2/\omega^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

où  $\omega_{c,n} = n\pi c/n_g W$  est la pulsation de coupure du  $n^{\text{ème}}$  mode propagatif. Si  $\omega_{c,n}/\omega \ll 1$ , alors  $D(n, n) \sim \omega_{c,n}^2/\omega^3 \ll \lambda/c$ . On a vu précédemment que le temps minimal théorique associé à  $Q$  est de l'ordre de  $\ell/c$ . Pour des expériences optiques,  $\ell$  est au moins aussi grand que  $\lambda$ , donc le temps associé à  $D(n, n)$  est faible devant ceux de  $Q$ . En revanche si  $\omega \sim \omega_{c,n}$ , alors  $D(n, n) \sim 1/(\omega - \omega_{c,n})$ . Ainsi, à une fréquence donnée, le temps  $D(n, n)$  pour le dernier mode propagatif tend à diverger si la fréquence est très proche par valeur supérieure de la fréquence de coupure de ce mode. De la même manière, le temps  $D_e(1, 1)$  tend à diverger si la fréquence s'approche par valeur inférieure de la fréquence de coupure de ce mode. Ceci est illustré sur la Fig. II.12.

### II.6.2 Contributions de $Q_i$ et $Q_e$ au temps de séjour

Pour apprécier les contributions des matrices  $Q$ ,  $Q_i$  et  $Q_e$  sur la distribution des valeurs propres de  $Q_d$ , nous avons évalué numériquement les contributions relatives de ces diffé-

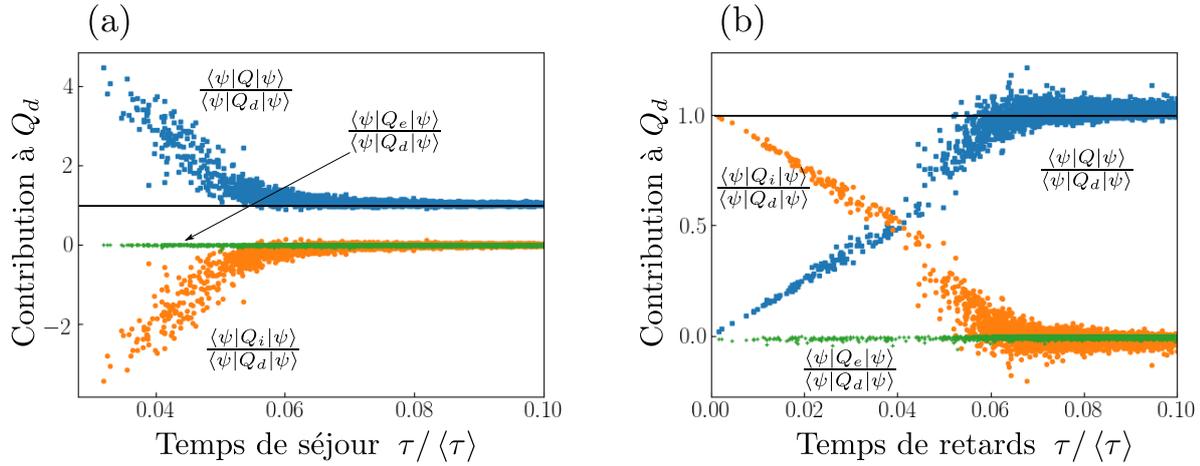


FIGURE II.13 – Contributions relatives des termes  $Q$ ,  $Q_i$  et  $Q_e$  pour un milieu d'épaisseur  $kL = 300$  avec un libre parcours moyen  $k\ell = 21.4$  en fonction des valeurs propres de (a)  $Q_d$  et (b) de celles de  $Q$ . Les lignes horizontales noires correspondent à  $y = 1$ .

rents termes, d'une part lorsqu'on injecte en entrée les différents vecteurs propres de  $Q_d$ , d'autre part lorsqu'on injecte en entrée les différents vecteurs propres de  $Q$ . Les résultats sont représentés sur la Fig. II.13 pour un milieu d'épaisseur optique 14. Seuls les temps de séjour et temps de retard petits devant le temps de séjour moyen sont représentés. Pour les vecteurs dont les temps ne sont pas représentés, la contribution de  $Q_i$  et  $Q_e$  sont négligeables. On remarque que la contribution de  $Q_e$  est dans les deux cas négligeable. La contribution de  $Q_i$  devient appréciable pour les vecteurs dont les temps de séjours ou temps propres sont les plus faibles.

### Contribution de $Q_i$ à la distribution des valeurs propres de $Q_d$

On s'attend donc à ce que les vecteurs propres de  $Q$  se comportent comme les vecteurs propres de  $Q_d$ . En particulier, on s'attend à ce que la distribution des valeurs propres de  $Q$  soit similaire à celle de  $Q_d$ . Comme indiqué sur la Fig. II.13,  $Q_i$  va surtout impacter les temps de retard les plus petits. Ceci est illustré sur la Fig. II.14, où sont représentées les distributions numériques des valeurs propres de  $Q$ ,  $Q + Q_e$  et  $Q_d = Q + Q_e + Q_i$  pour un milieu d'épaisseur optique  $b = 14$  en (a-b) et un milieu d'épaisseur optique  $b = 48$  en (c-d). L'ajout de  $Q_e$  ne change pas qualitativement la distribution de  $Q$ . En revanche, les distributions de  $Q$  et  $Q_d$  diffèrent pour les temps faibles. On voit sur la distribution de  $Q$  un petit paquet de valeurs propres qui se détache du corps de la distribution. Il y a même des valeurs propres de  $Q$  négatives pour le milieu de plus grande épaisseur optique. L'ajout de  $Q_i$  permet de ramener ce paquet de valeurs propres détaché dans le corps de la distribution et d'obtenir pour  $Q_d$  uniquement des valeurs propres positives comme attendu. L'ajout de  $Q_i$  est d'autant plus important que l'épaisseur optique du milieu est élevée. En effet, plus le milieu a une épaisseur optique élevée, plus la réflexion du milieu est grande. Or  $Q_i$  est un terme résultant de l'interférence entre les ondes ondes incidente et réfléchie, cette interférence est d'autant plus grande que la réflexion est élevée. Les queues des distributions ne montrent aucune différence.

On a également vu qu'en choisissant précisément la fréquence ou la largeur du guide,

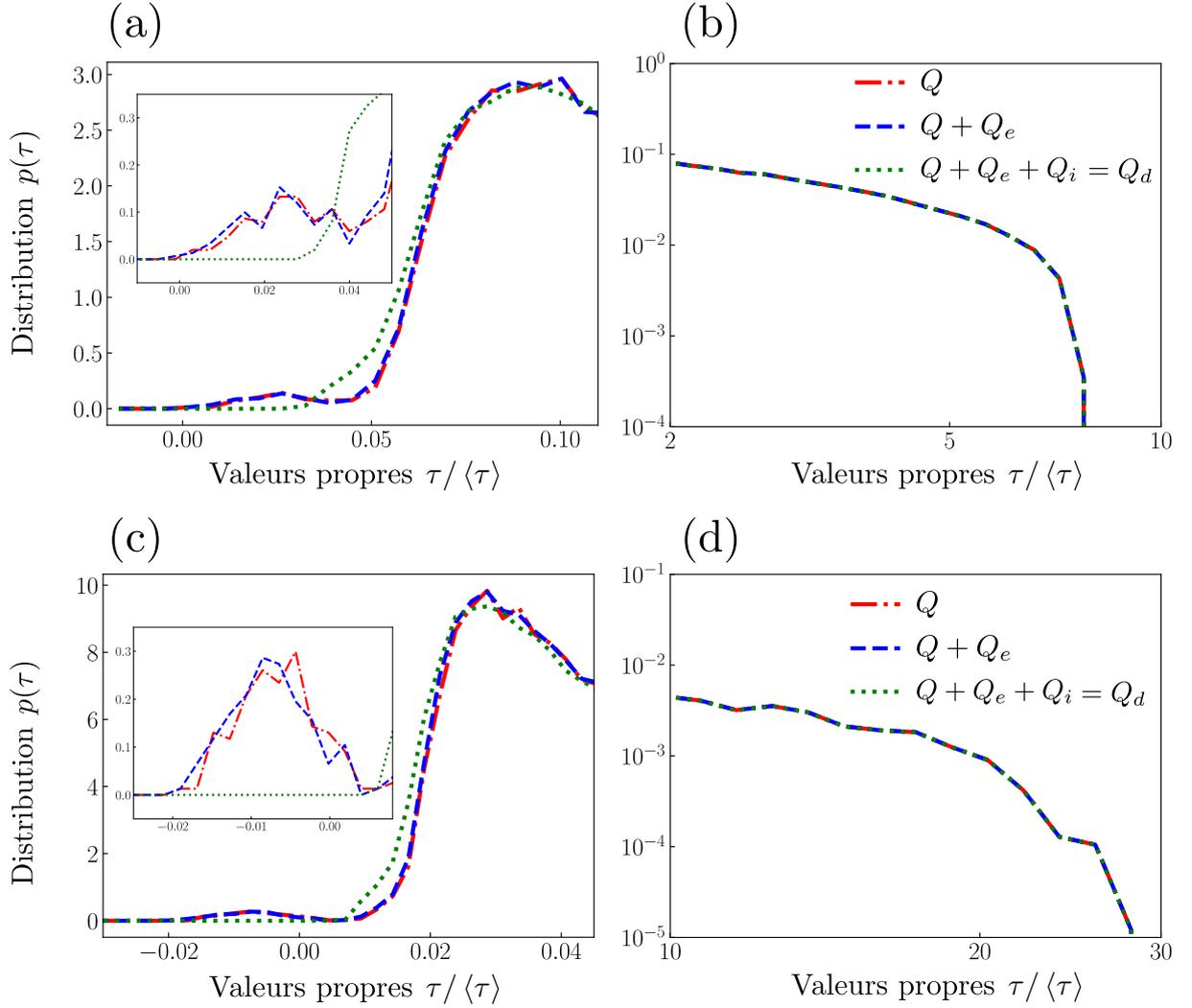


FIGURE II.14 – Distributions numériques des valeurs propres de  $Q$ ,  $Q+Q_e$  et  $Q+Q_e+Q_i = Q_d$  pour un milieu d'épaisseur  $kL = 300$  et de libre parcours moyen  $kl = 21.4$  (a-b) et un milieu d'épaisseur  $kL = 450$  et de libre parcours moyen  $kl = 9.3$  (c-d). La partie gauche représente le début de la distribution et la partie droite la fin de la distribution en échelle log-log. Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre.

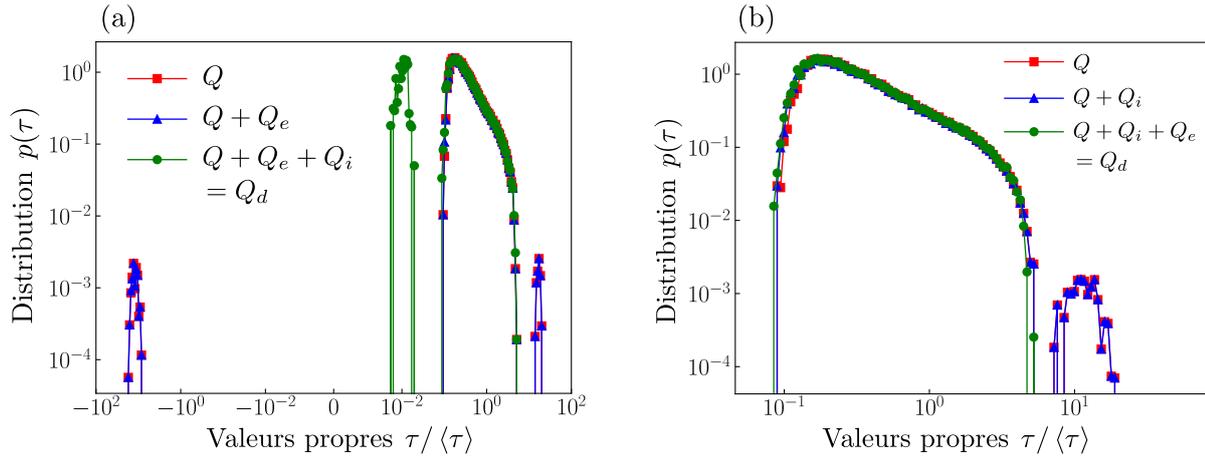


FIGURE II.15 – (a) Distributions numériques des valeurs propres de  $Q$ ,  $Q + Q_i$  et  $Q + Q_i + Q_e = Q_d$  évaluées pour un milieu d'épaisseur  $kL = 150$  imbriqué dans un guide de largeur  $kW = 233.69$ . Le libre parcours moyen vaut  $k\ell = 21.4$ . Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre. L'échelle des abscisses est logarithmique entre  $-10^2$  et  $-10^{-2.5}$  ainsi qu'entre  $10^{-2.5}$  et  $10^2$ . La largeur du guide est choisie de telle sorte que la fréquence se situe juste au-dessus de la fréquence de coupure d'un mode. (b) Distribution numériques des valeurs propres de  $Q$ ,  $Q + Q_i$  et  $Q + Q_i + Q_e = Q_d$  évaluées pour un milieu d'épaisseur  $kL = 150$  imbriqué dans un guide de largeur  $kW = 231.6$ . Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre. Le libre parcours moyen vaut  $k\ell = 21.4$ . La largeur du guide est choisie de telle sorte que la fréquence se situe juste en-dessous de la fréquence de coupure d'un mode.

$D(N, N)$  peut être arbitrairement grand, la contribution de  $Q_i$  est alors non-négligeable. Ceci apparaît sur la Fig. II.15 (a). On observe que les distributions des valeurs propres de  $Q$  et  $Q + Q_e$  présentent deux paquet de valeurs propres qui se détachent du corps de la distribution, un de ces paquets étant positif et l'autre négatif. L'ajout de  $Q_i$  permet de supprimer les valeurs propres négatives et de ramener le paquet de valeurs propres négatives dans le positif.

### Contribution de $Q_e$ à la distribution des valeurs propres de $Q_d$

En choisissant précisément la fréquence de sorte à se situer juste en dessous de la fréquence de coupure d'un mode,  $D_e(1, 1)$  peut être arbitrairement grand et la contribution de  $Q_e$  pour certains états devient non-négligeable comme représenté sur la Fig. II.15 (b). L'ajout de  $Q_e$  ramène le paquet de valeurs propres isolé dans le corps de la distribution.

## II.7 Focalisation sur un résonateur

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des milieux diffusants dont la permittivité ne dépendait pas de la fréquence, et caractérisé la distribution des valeurs propres de  $Q$  et  $Q_d$  pour ces milieux. Nous avons vu que l'on peut obtenir, avec leurs états propres, une énergie stockée deux fois supérieure à celle obtenue en utilisant les canaux ouverts. Toutefois le temps de séjour maximal et le temps de séjour du canal le plus ouvert varient

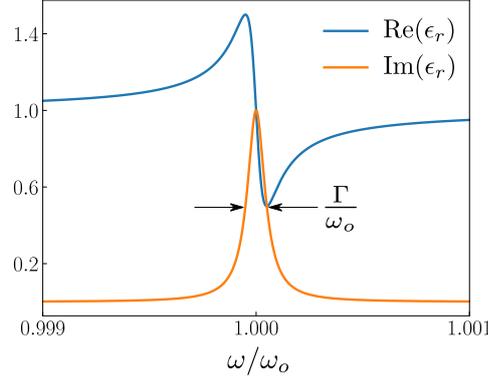


FIGURE II.16 – Partie réelle et imaginaire de la constante diélectrique de la structure résonante.

tous les deux comme le temps de Thouless. Nous allons jouer ici sur le fait que l'opérateur de Wigner-Smith et l'opérateur temps de séjour sont par construction sensibles aux effets dispersifs. Dans cette section, nous allons voir comment l'opérateur  $Q_d$  permet de focaliser la lumière dans des structures résonantes immergées au sein d'un milieu opaque. Pour l'illustrer, nous avons placé dans un milieu diffusant une particule diélectrique dont la permittivité dépend de la fréquence. Le modèle utilisé pour la dépendance fréquentielle de la permittivité est un modèle Lorentzien :

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_o^2 \mathcal{F}}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}, \quad (\text{II.98})$$

où  $\omega_o$  est la fréquence de résonance,  $\Gamma$  la fréquence d'amortissement et  $\mathcal{F}$  un paramètre qui décrit la force d'interaction avec le résonateur. Le rapport  $\omega_o/\Gamma = Q$  est le facteur de qualité de la résonance. La dépendance fréquentielle est la même que celle obtenue avec le modèle de l'électron élastiquement lié. Nous avons pris  $\mathcal{F} = 10^{-4}$  et  $Q = 10^4$ . Les parties réelle et imaginaire de la permittivité relative sont représentées sur la Fig. II.16. La fréquence de l'onde incidente est choisie égale à la fréquence de résonance de la particule. Nous avons établi à la sous-section II.3.4 que la partie hermitienne de  $Q_d$ , notée  $Q_d^H$ , évaluée pour un front d'onde  $|\psi\rangle$ , s'exprime sous la forme :

$$\langle \psi | Q_d^H | \psi \rangle \phi_{in} = \int_V d\mathbf{r} \left( \overline{u_{eff}}(\mathbf{r}) - \partial_\omega \theta(\mathbf{r}) \overline{P_d}(\mathbf{r}) \right), \quad (\text{II.99})$$

où  $\theta$  est la phase du champ,  $\overline{P_d}$  la densité de puissance dissipée moyenne et  $\overline{u_{eff}} = \frac{\epsilon_o \epsilon^2}{8\Omega_o^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_o|^2 + \frac{\epsilon_o}{4\Omega_o} \partial_\omega (\omega^2 \text{Re}(\epsilon_r)) (\Omega_o) |\mathbf{E}_o|^2$  l'énergie effective.  $Q_d^H$  ne donne plus le rapport entre l'énergie stockée dans le milieu et le flux incident mais est sensible à la structure résonante car l'énergie effective, de part la forte dépendance fréquentielle de la partie réelle de la constante diélectrique, y est grande, tout du moins en valeur absolue. Comme le résonateur dissipe de l'énergie, il est également possible de focaliser sur ce résonateur avec l'opérateur absorption,  $A = 1 - r^\dagger r - t^\dagger t$ . Pour montrer que l'opérateur  $Q_d^H$  permet de distinguer les effets dispersifs des effets purement dissipatifs, nous avons également placé dans le milieu deux particules absorbantes mais non-dispersives. Le milieu diffusant dans lequel sont placés le résonateur et les particules absorbantes a une épaisseur  $kL = 150$  et un libre parcours moyen  $k\ell = 21.4$ . La distribution des valeurs propres de l'opérateur

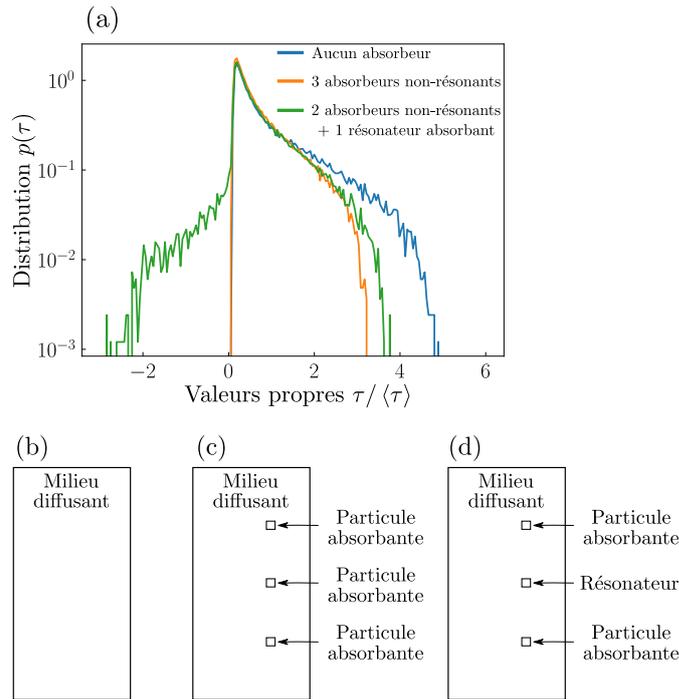


FIGURE II.17 – (a) Distributions des valeurs propres de  $Q_d^H$  pour un milieu diffusant sans absorbeur, avec 3 absorbeurs et avec 2 absorbeurs et un résonateur absorbant. Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre. (b), (c) et (d) Configurations correspondant aux distributions sur la figure (a).

$Q_d^H$  est représentée sur la Fig. II.17 (a) ainsi que les distributions du milieu diffusant avec et sans absorbeur non résonant. La distribution en présence de la structure résonante présente des valeurs propres négatives. Ces valeurs propres négatives sont dues à la dérivée négative de la partie réelle de la constante diélectrique à la résonance.

Nous envoyons ensuite le vecteur propre de  $Q_d^H$  de valeur négative extrême et le vecteur propre de l'opérateur absorption  $A$  de plus grande absorption. Les cartes d'intensités correspondantes sont représentées sur la Fig. II.18 en (a) pour le vecteur propre d'absorption et (b) pour le vecteur propre de  $Q_d^H$ . L'opérateur  $Q_d^H$  permet de focaliser spécifiquement sur le résonateur alors que  $A$  n'arrive pas à discriminer les deux types de particule et maximise l'absorption en focalisant sur tous les endroits présentant de l'absorption.

Nous nous sommes limités dans cette étude à une résonance de la constante diélectrique. Mais il est également possible de focaliser et d'augmenter grandement l'énergie stockée en utilisant des résonateurs géométriques. Très récemment, M. Davy et ses collaborateurs ont utilisé les opérateurs  $Q_r = -r^{-1}\partial_{\omega}r$  et  $Q_t = -it^{-1}\partial_{\omega}t$  pour focaliser une onde sur un diélectrique de grande permittivité ainsi que sur une cavité placée dans un milieu désordonné [101]. L'expérience a été réalisée dans le domaine micro-onde pour un système 2D. Les opérateurs  $Q_r$  et  $Q_t$  sont des analogues de l'opérateur de Wigner-Smith en réflexion et transmission.

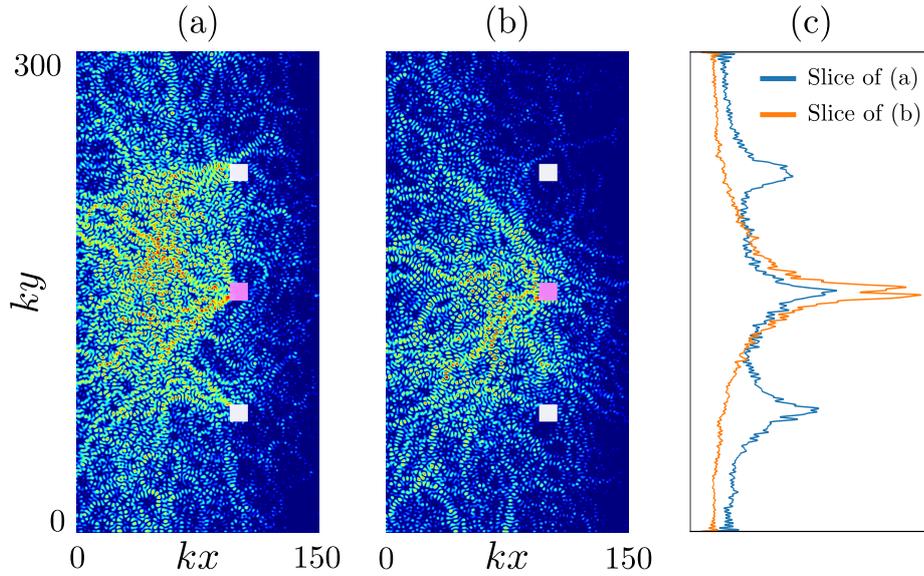


FIGURE II.18 – (a), (b) Carte d'intensité  $I(x, y)$  typique correspondant au vecteur propre de plus grande absorption (a) et au vecteur propre de  $Q_d^H$  de valeur propre négative extrême. Le résonateur est représenté par le carré rose et les particules purement absorbantes par des carrés blancs. (c) Intensité intégrée sur une tranche suivant  $x$  autour de la position des particules,  $I(y) = \int_{80/k}^{95/k} I(x, y) dx$ , moyennée sur 32 réalisations du désordre.

## II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi l'expression d'un opérateur pour le temps de séjour de la lumière dans un milieu composé de matériaux diélectriques sans perte. L'opérateur  $Q_d$  obtenu permet d'évaluer le temps de séjour et l'énergie stockée pour un front d'onde arbitraire. Il s'exprime comme la somme des trois opérateurs  $Q$ ,  $Q_i$  et  $Q_e$ . Concernant la distribution des valeurs propres de  $Q_d$  d'un milieu fortement diffusant, nous avons vu que les matrices  $Q_i$  et  $Q_e$  peuvent être négligées devant l'opérateur de Wigner-Smith, à condition que la fréquence de travail soit éloignée des fréquences d'apparition ou de disparition de nouveaux modes propagatifs. Nous avons établi une prédiction théorique basée sur l'approche DMPK pour la distribution des valeurs propres de  $Q_d$  pour des milieux fortement diffusants. Cette prédiction est en bon accord avec les résultats numériques obtenus en résolvant l'équation d'onde. Il en ressort que la distribution possède un temps minimal et un temps maximal. Pour un milieu de grande épaisseur optique, le temps de séjour minimal et le temps de séjour le plus probable varient tous les deux comme le temps de diffusion  $\tau_s$ , le temps maximal varie quant à lui comme le temps de Thouless  $\tau_{Th}$  du milieu. Toutefois, l'approche DMPK ne permet pas de prédire la décroissance log-normale de la distribution des valeurs propres de  $Q_d$  observée à conductance modérée. Cette décroissance serait due au couplage en bord d'échantillon de l'onde à des modes de volume appelés états pré-localisés. Enfin nous avons montré que les opérateurs  $Q_d$  et  $Q$ , par définition sensibles aux effets dispersifs, permettent de focaliser sélectivement la lumière sur une structure résonante immergée dans un milieu opaque.



# Chapitre III

## Caractérisation matricielle de la dispersion temporelle

### III.1 État de l'art et objectifs

#### III.1.1 Dispersion temporelle à travers un milieu diffusant

Lorsqu'une impulsion se propage à travers un milieu complexe, le front d'onde en sortie du milieu est déformé et le signal est dispersé temporellement, résultant en un speckle spatio-temporel, largement étudié théoriquement et expérimentalement [102–107]. Nous avons vu au chapitre introductif que la densité d'énergie  $u_d$  dans un milieu diffusant sans perte, moyennée sur le désordre, obéit à l'équation de diffusion [3, 4] :

$$\left[ \partial_t - D_B(\omega) \nabla^2 \right] u_d(\mathbf{r}, t, \omega) = S(\mathbf{r}, t, \omega), \quad (\text{III.1})$$

où  $D_B = v\ell/2$  est le coefficient de diffusion dans un milieu bidimensionnel, avec  $\ell$  le libre parcours moyen de transport,  $v$  la vitesse de transport de l'énergie (dans un milieu non-résonant celle-ci coïncide avec la vitesse de phase  $c/n$ ,  $n$  étant l'indice effectif du milieu), et  $S(\mathbf{r}, t, \omega)$  le terme source. De l'équation de diffusion (III.1), on obtient le flux transmis aux temps longs lorsque le milieu est éclairé par une brève impulsion [4] :

$$T(t) \propto e^{-\frac{\pi^2 D_B}{(L+z_o)^2} t}, \quad (\text{III.2})$$

où  $L$  l'épaisseur du milieu, et  $z_o$  la longueur d'extrapolation qui vaut  $z_o = \pi\ell/4$  en 2D (ce qui correspond aux simulations réalisées dans ce chapitre). Si l'épaisseur du milieu est bien supérieure au libre parcours moyen de transport, alors :

$$T(t) \propto e^{-t/\tau_{\text{Th}}}, \quad (\text{III.3})$$

où  $\tau_{\text{Th}} = 2L^2/\pi^2\ell v$  est le temps de Thouless du milieu. On en déduit que pour un paquet d'onde gaussien, tel que le spectre du champ s'écrit  $A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\sigma^2}}$ , le profil du flux transmis va dépendre du rapport entre la largeur spectrale  $\sigma$  et la pulsation de Thouless  $\omega_{\text{Th}} = 2\pi/\tau_{\text{Th}}$ . Si  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \gg 1$ , le flux transmis, après une montée rapide décroît exponentiellement, comme c'est le cas pour une excitation impulsionnelle. En revanche,

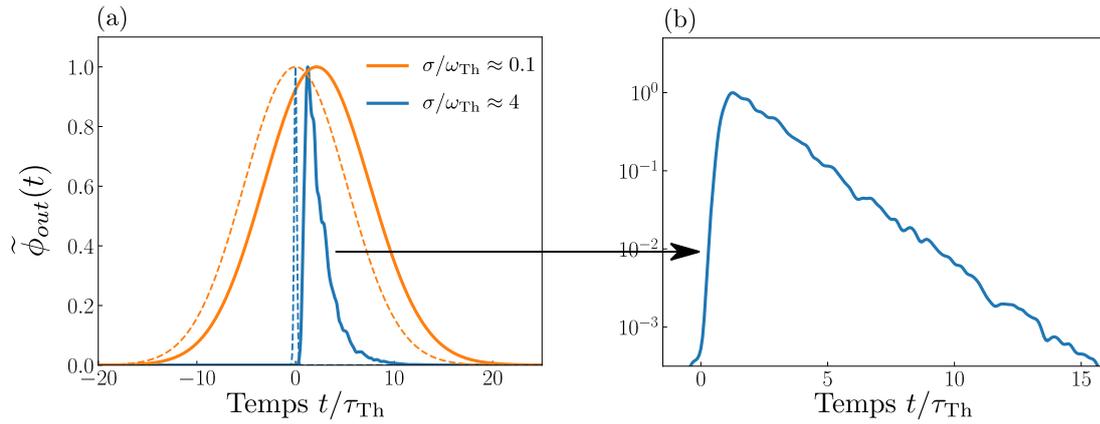


FIGURE III.1 – (a) Flux transmis à travers un milieu diffusant éclairé par une impulsion gaussienne avec un front d’onde plan (trait plein) et flux entrant (trait pointillé) pour deux largeurs du paquet d’onde gaussien :  $\sigma/\omega_{Th} \approx 0.1$  et  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$ . Les flux entrant et sortant sont renormalisés par leur maximum. Le milieu est imbriqué dans un guide d’onde de largeur  $kW = 300$  supportant  $N = 160$  modes propagatifs à la fréquence centrale  $\omega_o$  de l’impulsion. Le milieu a une épaisseur  $kL = 150$ , le libre parcours moyen de transport vaut  $k\ell \approx 8.2$ . (b) Signal transmis correspondant à  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$  en échelle logarithmique pour l’axe des ordonnées.

si  $\sigma/\omega_{Th} \ll 1$ , le signal transmis reste gaussien. Ceci est illustré sur la Fig. III.1 (a) qui représente les résultats de simulations montrant le flux transmis à travers l’ensemble des canaux de transmission d’un milieu diffusant imbriqué dans un guide d’onde éclairé par un paquet d’onde gaussien avec un front d’onde correspondant au premier mode du guide (similaire à une onde plane incidente normale à la surface du milieu). Pour  $\sigma/\omega_{Th} \approx 0.1$ , le signal transmis est toujours gaussien et l’écart-type de ce dernier est le même que pour le signal entrant. En revanche, pour  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$ , le signal transmis présente une décroissance exponentielle comme représentée sur la Fig. III.1 (b).

### III.1.2 Manipulation spatio-temporelle par contrôle du front d’onde

En acoustique et en électromagnétisme, où les fréquences sont suffisamment basses pour pouvoir mesurer l’amplitude et la phase du champ, une opération de retournement temporel permet de faire de la focalisation spatio-temporelle à travers un milieu diffusant [108, 109]. En optique, cette technique n’est pas pareillement envisageable. Cependant, les degrés de liberté temporels (ou spectraux) en entrée d’un milieu complexe influent sur les degrés de libertés spatiaux et temporels en sortie de celui-ci [22]. De même, les degrés de liberté spatiaux en entrée d’un milieu complexe influent sur les degrés de libertés spatiaux et temporels en sortie de ce dernier. Ainsi, en 2011, J. Aulbach et ses collaborateurs ont montré qu’il est possible à l’aide d’un SLM de contrôler temporellement l’amplitude du champ en un point de l’espace arbitraire situé après un milieu diffusant pour une excitation impulsionnelle [19]. Pour cela, ils ont optimisé le signal hétérodyne provenant de la corrélation du signal d’intérêt et d’un signal de référence. D’autres travaux ont montré la possibilité d’utiliser un SLM pour faire de la focalisation spatio-temporelle en optique,

utilisant divers signaux de retour pour optimiser le front d'onde incident [20,21]. On peut noter que dans la Réf. [110], D. McCabe et ses collaborateurs ont utilisé les degrés de libertés spectraux pour réaliser de la focalisation spatio-temporelle à travers un milieu diffusant.

Les travaux mentionnés précédemment reposent sur l'utilisation d'un signal de retour pour optimiser le front d'onde incident. En 2016, M. Mounaix et ses collaborateurs ont utilisé la matrice de transmission multi-spectrale (*multispectral transmission matrix* en anglais, notée MSTM) pour focaliser spatio-temporellement après un milieu diffusant [111]. La MSTM a été introduite et utilisée dans la Réf. [112] pour focaliser spatialement à travers un milieu diffusant à diverses fréquences séparées de  $\delta\omega_c$ , où  $\delta\omega_c$  est la largeur de corrélation spectrale du milieu, comme cela est illustré sur la Fig. III.2. La MSTM est la concaténation des matrices de transmission aux diverses fréquences qui constituent l'impulsion incidente. Elle renseigne à la fois sur la réponse spatiale et spectrale du milieu. Une coupe de la MSTM à une position de sortie arbitraire est une matrice  $H$  qui renseigne sur le champ en un point de sortie en fonction du front d'onde incident à différentes fréquences. Elle est également illustrée sur la Fig. III.2. Cette matrice  $H$  permet de connaître le masque à appliquer pour que les différentes composantes spectrales sortent en phase au point désiré, et donc d'obtenir une focalisation temporelle en ce point.

Si la MSTM ne nécessite pas de signal de retour pour focaliser spatio-temporellement, elle nécessite la mesure de la matrice de transmission à plusieurs fréquences, ce qui est contraignant expérimentalement. C'est pourquoi M. Mounaix et ses collaborateurs ont montré qu'il est possible d'utiliser la matrice de transmission résolue temporellement (*time-resolved transmission matrix* ou TRTM) pour focaliser spatio-temporellement après un milieu diffusant [113]. La TRTM correspond à la matrice de transmission mesurée à un instant arbitraire  $t_o$  lorsque le milieu est éclairé par une impulsion. L'instant  $t_o$  à laquelle la matrice de transmission est mesurée est contrôlé par le retard du signal de référence impliqué dans la détection interférométrique. Dans les Réfs. [114, 115], les auteurs ont montré que la TRTM permet également de focaliser temporellement le signal transmis sur l'ensemble de la surface de sortie d'une fibre multimode, ce que ne permet pas la méthode avec la MSTM proposée dans la Réf. [111]. Si la TRTM s'est montrée efficace pour focaliser temporellement le signal mesuré en un point ou sur la surface entière de sortie d'un milieu complexe, elle ne permet en théorie que de maximiser la transmission à l'instant  $t_o$  auquel est mesuré la TRTM, mais ne garantit pas une focalisation temporelle, car il y a absence de contrôle du signal aux temps autres que  $t_o$ .

### III.1.3 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous exprimons dans un premier temps le temps moyen et la variance centrée réduite du signal mesuré dans un ensemble arbitraire de canaux de sortie d'un milieu linéaire quelconque éclairé par une impulsion en fonction du front d'onde incident. Contrairement à l'énergie, le temps moyen  $\tau$  ne s'exprime pas à l'aide d'un opérateur unique, mais s'écrit sous la forme :

$$\tau = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | B | \psi \rangle}, \quad (\text{III.4})$$

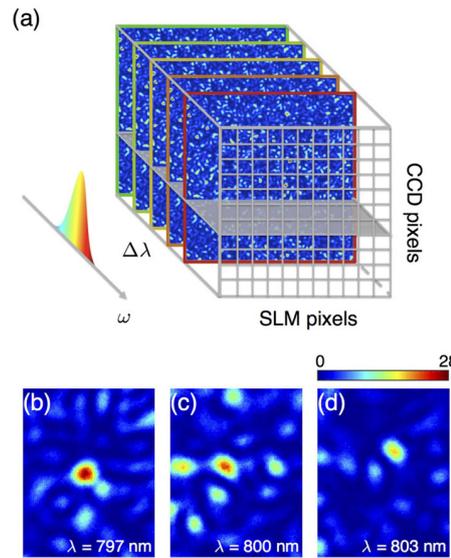


FIGURE III.2 – Focalisation spatiale à différentes fréquences avec un front d’onde unique. (a) Coupe transverse de la MSTM en un point. (b,c,d) Figure d’intensité sur la caméra autour du point d’intérêt à différentes longueurs d’ondes. Le contraste de la focalisation diminue avec le nombre de degrés de liberté spectraux sur lesquels on souhaite focaliser. Cette figure est issue de [112].

où  $|\psi\rangle$  représente le front d’onde incident et  $A$  et  $B$  sont des opérateurs polychromatiques dont les expressions sont explicitées dans la section III.2. De même, la variance centrée réduite  $V$  s’exprime sous la forme :

$$V = \frac{\langle \psi | C | \psi \rangle}{\langle \psi | B | \psi \rangle} - \left( \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | B | \psi \rangle} \right)^2, \quad (\text{III.5})$$

où  $C$  est un opérateur polychromatique qui sera également explicité dans la section III.2.

Les différents opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont ensuite construits numériquement par résolution de l’équation de Helmholtz à différentes fréquences pour un milieu fortement diffusant. Le temps moyen se confond avec le temps de retard dans la limite d’une onde incidente monochromatique. Quelques propriétés statistiques du temps moyen dans la limite stationnaire sont étudiées d’un point de vue numérique et confrontées à des prédictions théoriques existantes.

Enfin, nous cherchons à optimiser le profil temporel correspondant au signal mesuré à travers l’ensemble des canaux de transmission en utilisant les formules (III.4) et (III.5) pour le temps moyen et la variance. Le profil temporel correspondant à des fronts d’onde particuliers vis-à-vis du temps moyen et de la variance sont construits numériquement. Nous allons voir que l’approche matricielle développée dans ce chapitre permet de trouver des fronts d’onde permettant d’obtenir des signaux transmis avec un temps moyen de propagation ou un écart-type très différent de celui d’une onde plane. Il est en particulier possible de diminuer fortement la dispersion temporelle induite par la propagation dans le milieu diffusant.

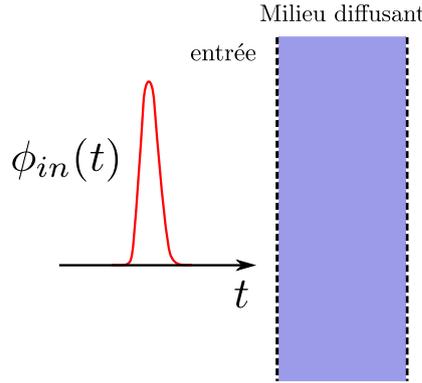


FIGURE III.3 – Configuration étudiée.

## III.2 Expression matricielle du temps moyen et de la variance

Dans cette section, nous considérons une impulsion avec un front d'onde arbitraire incidente sur un milieu diélectrique linéaire quelconque, comme représenté sur la Fig. III.3, et nous nous intéressons au signal correspondant au flux sortant dans un ensemble arbitraire de canaux de sortie. Les champs dans les canaux d'entrée et de sortie sont reliés par une sous-partie de la matrice de diffusion  $S$  que l'on note  $\tilde{s}$ . Si on considère par exemple l'ensemble des modes de sortie en réflexion et transmission, alors  $\tilde{s} = S$ .

### III.2.1 Expression matricielle du temps moyen du signal de sortie

De façon analogue à la définition adoptée dans la Réf. [90], nous définissons le temps moyen du signal de sortie  $\tau$  comme :

$$\tau = \frac{\int dt \phi_{out}(t)t}{\int dt \phi_{out}(t)} - \frac{\int dt \phi_{in}(t)t}{\int dt \phi_{in}(t)}, \quad (\text{III.6})$$

où  $\phi_{in}$  est le flux entrant et  $\phi_{out}$  le flux sortant dans un ensemble arbitraire de canaux de sortie. L'Eq. (III.6) peut se réexprimer à l'aide des transformées de Fourier de  $\phi_{out}$  et  $\phi_{in}$  :

$$\tau = -i \frac{\partial_{\omega} \tilde{\phi}_{out}(\omega=0)}{\tilde{\phi}_{out}(\omega=0)} + i \frac{\partial_{\omega} \tilde{\phi}_{in}(\omega=0)}{\tilde{\phi}_{in}(\omega=0)}. \quad (\text{III.7})$$

Nous pouvons considérer, sans perdre en généralité, que le flux incident est normalisé à 1 et que le temps moyen du signal incident est nul.

#### Transformée de Fourier du signal mesuré

Nous allons dans un premier temps exprimer le flux sortant  $\phi_{out}(t)$  en fonction du front d'onde incident  $|\psi\rangle$ . Le front d'onde sortant s'écrit :

$$|\psi\rangle_{out}(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} A(\omega) \tilde{s}(\omega) |\psi\rangle, \quad (\text{III.8})$$

où  $A(\omega)$  est l'amplitude complexe du champ entrant. L'hypothèse faite plus haut d'un flux entrant unitaire signifie que  $\int d\omega |A(\omega)|^2 = 1$ . Le flux sortant quant à lui s'écrit :

$$\phi_{out}(t) = \int d\omega_1 \int d\omega_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} A^*(\omega_1) A(\omega_2) \langle \psi | \tilde{s}^\dagger(\omega_1) \tilde{s}(\omega_2) | \psi \rangle. \quad (\text{III.9})$$

Pour obtenir la transformée de Fourier du signal, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (\text{III.10})$$

$$\omega = \omega_2 - \omega_1. \quad (\text{III.11})$$

On peut alors réécrire (III.9) sous la forme :

$$\phi_{out}(t) = \int d\omega \int d\Omega e^{-i\omega t} A^* \left( \Omega - \frac{\omega}{2} \right) A \left( \Omega + \frac{\omega}{2} \right) \langle \psi | \tilde{s}^\dagger \left( \Omega - \frac{\omega}{2} \right) \tilde{s} \left( \Omega + \frac{\omega}{2} \right) | \psi \rangle. \quad (\text{III.12})$$

Il vient de (III.12) que la transformée de Fourier de  $\phi_{out}(t)$  s'écrit :

$$\tilde{\phi}_{out}(\omega) = \int d\Omega A^* \left( \Omega - \frac{\omega}{2} \right) A \left( \Omega + \frac{\omega}{2} \right) \langle \psi | \tilde{s}^\dagger \left( \Omega - \frac{\omega}{2} \right) \tilde{s} \left( \Omega + \frac{\omega}{2} \right) | \psi \rangle. \quad (\text{III.13})$$

### Flux moyen sortant

De l'expression de  $\tilde{\phi}_{out}(\omega)$  en fonction du champ incident, on peut calculer ses dérivées successives en  $\omega = 0$ . À l'ordre 0, on obtient le flux moyen sortant :

$$\tilde{\phi}_{out}(\omega = 0) = \langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle, \quad (\text{III.14})$$

où  $\tilde{S}$  est l'opérateur polychromatique :

$$\tilde{S} = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \tilde{s}^\dagger(\Omega) \tilde{s}(\Omega). \quad (\text{III.15})$$

### Temps moyen

Pour obtenir le temps moyen, on doit calculer  $\partial_\omega \tilde{\phi}_{out}(\omega = 0)$ . À partir de l'Eq. (III.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\omega \phi_{out}(\omega = 0) &= \frac{1}{2} \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \langle \psi | -\partial_\Omega \tilde{s}^\dagger(\Omega) \tilde{s}(\Omega) + \tilde{s}^\dagger(\Omega) \partial_\Omega \tilde{s}(\Omega) | \psi \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\Omega [-\partial_\Omega A^*(\Omega) A(\Omega) + A^*(\Omega) \partial_\Omega A(\Omega)] \langle \psi | \tilde{s}^\dagger(\Omega) \tilde{s}(\Omega) | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Nous considérons par la suite que l'amplitude complexe  $A(\omega)$  est réelle (la phase spectrale est plate). Cela implique que le flux entrant est symétrique par rapport au temps  $t = 0$ , et que le temps moyen du signal entrant est nul, en accord avec l'hypothèse faite plus haut. Le temps moyen s'exprime alors comme :

$$\tau = \frac{\langle \psi | Q_{\tilde{s}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle}, \quad (\text{III.17})$$

où l'opérateur  $Q_{\tilde{s}}$  est défini comme :

$$Q_{\tilde{s}} = \frac{1}{2} \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ -i\tilde{s}^\dagger(\Omega)\partial_\Omega\tilde{s}(\Omega) + i\partial_\Omega\tilde{s}^\dagger(\Omega)\tilde{s}(\Omega) \right]. \quad (\text{III.18})$$

Contrairement au temps de séjour rencontré au chapitre précédent, l'expression du temps moyen ne fait pas intervenir un unique opérateur mais le rapport entre deux observables. Il en découle que le temps moyen évalué sur une base orthonormée n'est pas nécessairement égal au temps moyen évalué sur une autre base orthonormée.

### Phase spectrale linéaire

Lorsque le spectre du champ incident présente une phase spectrale linéaire  $A(\omega) = |A(\omega)|e^{i\omega\tau_r}$ , l'impulsion incidente a un retard de  $\tau_r$  par rapport à une amplitude réelle. Cependant le temps moyen, suivant la définition (III.6), ne doit pas être affecté par ce retard. Le calcul du temps moyen à partir de l'Eq. (III.16) conduit à :

$$\begin{aligned} \tau &= -i \frac{\partial_\omega \tilde{\phi}_{out}(\omega=0)}{\tilde{\phi}_{out}(\omega=0)} - \tau_r \\ &= \frac{\langle \psi | Q_{\tilde{s}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

On obtient pour le temps moyen le même résultat que pour une amplitude  $A(\omega)$  réelle.

### Temps moyen du signal sortant à travers l'ensemble des canaux de sortie

Si l'on considère le flux sortant à travers l'ensemble des canaux en réflexion et transmission, alors  $\tilde{s} = S$ . Le temps moyen du signal sortant s'écrit :

$$\tau = \frac{\frac{1}{2} \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \langle \psi | -iS^\dagger(\Omega)\partial_\Omega S(\Omega) + i\partial_\Omega S^\dagger(\Omega)S(\Omega) | \psi \rangle}{\int d\Omega |A(\Omega)|^2 \langle \psi | S^\dagger(\Omega)S(\Omega) | \psi \rangle}. \quad (\text{III.20})$$

Pour un milieu sans perte,  $S^\dagger(\omega)S(\omega) = 1$ , et donc  $-iS^\dagger\partial_\omega S = i\partial_\omega S^\dagger S$ . Le temps moyen du signal sortant s'écrit dans ce cas :

$$\tau = \langle \psi | Q | \psi \rangle, \quad (\text{III.21})$$

où  $Q$  est l'opérateur de Wigner-Smith polychromatique :

$$Q = -i \int d\Omega |A(\Omega)|^2 S^\dagger \partial_\omega S(\Omega). \quad (\text{III.22})$$

### Temps moyen du signal sortant en transmission et réflexion

Le temps moyen du signal sortant à travers l'ensemble des canaux de sortie en transmission s'écrit :

$$\tau_T = \frac{\langle \psi | Q_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle}, \quad (\text{III.23})$$

où  $T$  est l'opérateur de transmission polychromatique dont la distribution des valeurs propres a été étudiée dans la Réf. [116] :

$$T = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 t^\dagger(\Omega)t(\Omega), \quad (\text{III.24})$$

et  $Q_T$  est analogue à l'opérateur de Wigner-Smith polychromatique pour la transmission :

$$Q_T = \frac{1}{2} \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ -it^\dagger(\Omega) \partial_\Omega t(\Omega) + i \partial_\Omega t^\dagger(\Omega) t(\Omega) \right]. \quad (\text{III.25})$$

De même, on a pour le temps moyen du signal en réflexion :

$$\tau_R = \frac{\langle \psi | Q_R | \psi \rangle}{\langle \psi | R | \psi \rangle}, \quad (\text{III.26})$$

où  $R$  est l'opérateur de réflexion polychromatique :

$$R = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 r^\dagger(\Omega) r(\Omega), \quad (\text{III.27})$$

et  $Q_R$  est analogue à l'opérateur de Wigner-Smith polychromatique pour la réflexion :

$$Q_R = \frac{1}{2} \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ -ir^\dagger(\Omega) \partial_\Omega r(\Omega) + i \partial_\Omega r^\dagger(\Omega) r(\Omega) \right]. \quad (\text{III.28})$$

Ce seront essentiellement ces deux temps, et plus particulièrement le temps moyen du signal sortant à travers l'ensemble des canaux de transmission, que nous allons étudier dans la suite. Nous appelons à partir de maintenant temps moyen de transmission (respectivement réflexion) le temps moyen du signal sortant à travers l'ensemble des canaux en transmission (respectivement réflexion).

### III.2.2 Expression matricielle de la variance centrée réduite

Nous allons maintenant, comme pour le temps moyen, exprimer la variance centrée réduite du signal de sortie en fonction du front d'onde incident. La variance centrée réduite  $V$  du signal sortant s'écrit :

$$V = \frac{\int dt \phi_{out}(t) t^2}{\int dt \phi_{out}(t)} - \left( \frac{\int dt \phi_{out}(t) t}{\int dt \phi_{out}(t)} \right)^2. \quad (\text{III.29})$$

Comme pour le temps moyen, la variance se réexprime à l'aide de la transformée de Fourier de  $\phi_{out}$  :

$$V = -\frac{\partial_\omega^2 \tilde{\phi}_{out}(\omega = 0)}{\tilde{\phi}_{out}(\omega = 0)} + \left( \frac{\partial_\omega \tilde{\phi}_{out}(\omega = 0)}{\tilde{\phi}_{out}(\omega = 0)} \right)^2. \quad (\text{III.30})$$

Une partie de l'expression de la variance fait intervenir le temps moyen que nous avons déjà exprimé dans la sous-section précédente. Pour obtenir la variance du signal sortant, nous avons besoin de l'expression de  $\partial_\omega^2 \tilde{\phi}_{out}(\omega = 0)$ . En supposant encore une fois que  $A(\omega)$  est réelle, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \partial_\omega^2 \tilde{\phi}_{out}(\omega = 0) &= \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \langle \psi | \frac{1}{4} \left[ \partial_\Omega^2 \tilde{s}^\dagger(\Omega) \tilde{s}(\Omega) + \tilde{s}^\dagger(\Omega) \partial_\Omega^2 \tilde{s}(\Omega) \right] - \frac{1}{2} \partial_\Omega \tilde{s}^\dagger(\Omega) \partial_\Omega \tilde{s}(\Omega) | \psi \rangle \\ &+ \int d\Omega \partial_\omega^2 (A(\Omega - \omega/2) A(\Omega + \omega/2)) (\omega = 0) \langle \psi | \tilde{s}^\dagger(\Omega) \tilde{s}(\Omega) | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Dans le cas particulier d'une amplitude gaussienne (qui sera utilisée dans nos simulations par la suite) avec  $A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}}$ , il vient :

$$\partial_\omega^2 (A(\Omega - \omega/2)A(\Omega + \omega/2)) (\omega = 0) = -\frac{1}{4\sigma^2} |A(\Omega)|^2. \quad (\text{III.32})$$

La variance s'écrit :

$$V = \frac{\langle \psi | L_{\tilde{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle} - \left( \frac{\langle \psi | Q_{\tilde{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle} \right)^2, \quad (\text{III.33})$$

avec l'opérateur  $L_{\tilde{S}}$  défini comme :

$$L_{\tilde{S}} = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ \frac{1}{4\sigma^2} \tilde{s}^\dagger \tilde{s} + \frac{1}{2} \partial_\Omega \tilde{s}^\dagger \partial_\Omega \tilde{s} - \frac{1}{4} \left( \partial_\Omega^2 \tilde{s}^\dagger \tilde{s} + \tilde{s}^\dagger \partial_\Omega^2 \tilde{s} \right) \right]. \quad (\text{III.34})$$

On voit que la variance peut également se réécrire :

$$V = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{\langle \psi | \hat{L}_{\tilde{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle} - \left( \frac{\langle \psi | Q_{\tilde{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle} \right)^2, \quad (\text{III.35})$$

avec :

$$\hat{L}_{\tilde{S}} = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ \frac{1}{4\sigma^2} \tilde{s}^\dagger \tilde{s} + \frac{1}{2} \partial_\Omega \tilde{s}^\dagger \partial_\Omega \tilde{s} - \frac{1}{4} \left( \partial_\Omega^2 \tilde{s}^\dagger \tilde{s} + \tilde{s}^\dagger \partial_\Omega^2 \tilde{s} \right) \right]. \quad (\text{III.36})$$

Dans la dernière section de ce chapitre, nous allons nous intéresser à la variance du signal sortant à travers l'ensemble des canaux de transmission. Nous nous intéresserons aux opérateurs :

$$L_T = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ \frac{1}{4\sigma^2} t^\dagger t + \frac{1}{2} \partial_\Omega t^\dagger \partial_\Omega t - \frac{1}{4} \left( \partial_\Omega^2 t^\dagger t + t^\dagger \partial_\Omega^2 t \right) \right], \quad (\text{III.37})$$

$$\hat{L}_T = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ \frac{1}{2} \partial_\Omega t^\dagger \partial_\Omega t - \frac{1}{4} \left( \partial_\Omega^2 t^\dagger t + t^\dagger \partial_\Omega^2 t \right) \right]. \quad (\text{III.38})$$

Pour montrer que l'Eq. (III.35) a du sens, prenons le cas  $\tilde{s} = t$  et considérons que le milieu est d'épaisseur nulle. La matrice  $t$  est alors égale à la matrice identité à toutes les fréquences, donc  $\partial_\Omega t = 0$  et  $\partial_\Omega^2 t = 0$ . Il en résulte que  $\hat{L}_{\tilde{S}}$  est nul, et la variance s'écrit :

$$V = \frac{1}{4\sigma^2}. \quad (\text{III.39})$$

On retombe bien sur la variance du signal gaussien incident.

### III.3 Temps moyen en régime stationnaire et temps de retard

Dans la limite d'une onde incidente monochromatique, le temps moyen de sortie est donné par :

$$\tau = \frac{\langle \psi | Q_{\tilde{S}} | \psi \rangle}{\langle \psi | \tilde{S} | \psi \rangle}, \quad (\text{III.40})$$

où les opérateurs  $\tilde{S}$  et  $Q_{\tilde{s}}$  prennent la forme :

$$\tilde{S} = \tilde{s}^\dagger(\Omega)\tilde{s}(\Omega), \quad (\text{III.41})$$

$$Q_{\tilde{s}} = -i\tilde{s}^\dagger(\Omega)\partial_\Omega\tilde{s}(\Omega) + i\partial_\Omega\tilde{s}^\dagger(\Omega)\tilde{s}(\Omega). \quad (\text{III.42})$$

Cette situation correspond à un signal incident infiniment large temporellement. Dans le cas où  $\tilde{s} = S_{ab} = |S_{ab}|e^{i\phi_{ab}}$ , correspondant à une onde entrant dans le canal  $a$  et sortant dans le canal  $b$ , le temps moyen de sortie s'écrit :

$$\tau = \partial_\omega\phi_{ab}. \quad (\text{III.43})$$

Le temps moyen de sortie est donné par le temps de retard  $\partial_\omega\phi_{ab}$ . Ce résultat avait déjà été énoncé dans les Réfs. [55, 117, 118]. Si l'on considère maintenant le cas  $\tilde{s} = S$ , le temps moyen, pour un milieu sans perte et un front d'onde  $|\psi\rangle$ , est donné par :

$$\tau = \langle\psi|Q(\Omega)|\psi\rangle. \quad (\text{III.44})$$

Il y a égalité entre le temps moyen de sortie et le temps de retard fourni par l'opérateur de Wigner-Smith. L'Eq. (III.44) peut se réécrire :

$$\tau = R_\psi\tau_R + T_\psi\tau_T, \quad (\text{III.45})$$

où  $R_\psi$  et  $T_\psi$  sont les coefficients de réflexion et transmission du front d'onde  $|\psi\rangle$  :

$$R_\psi = \langle\psi|R|\psi\rangle, \quad (\text{III.46})$$

$$T_\psi = \langle\psi|T|\psi\rangle. \quad (\text{III.47})$$

et  $\tau_R$  et  $\tau_T$  les temps moyens de réflexion et transmission :

$$\tau_R = \frac{\langle\psi|Q_R|\psi\rangle}{\langle\psi|R|\psi\rangle}, \quad (\text{III.48})$$

$$\tau_T = \frac{\langle\psi|Q_T|\psi\rangle}{\langle\psi|T|\psi\rangle}. \quad (\text{III.49})$$

L'Eq. (III.45) fait le lien entre le temps moyen de sortie à travers l'ensemble des canaux et les temps moyen de réflexion et transmission. En effectuant une moyenne sur les configurations du désordre, l'Eq. (III.45) devient :

$$\langle\tau\rangle = \langle R_\psi\tau_R\rangle + \langle T_\psi\tau_T\rangle. \quad (\text{III.50})$$

Nous avons vu au chapitre 2 qu'en régime diffusif et en géométrie 2D,  $\langle\tau\rangle = \pi L/2v$ , où  $L$  est l'épaisseur du milieu et  $v = c/n$  la vitesse de l'onde, avec  $n$  l'indice effectif du milieu. Les Figs. III.4 (a) et (b) montrent  $\langle R_\psi\tau_R\rangle = \langle\text{Tr}(Q_R)\rangle/N$  et  $\langle T_\psi\tau_T\rangle = \langle\text{Tr}(Q_T)\rangle/N$  obtenus numériquement en résolvant l'équation de Helmholtz pour des milieux diffusants de différentes épaisseurs et différentes forces du désordre.  $\langle R_\psi\tau_R\rangle$  et  $\langle T_\psi\tau_T\rangle$  varient linéairement en fonction de  $\pi L/2v = \langle\tau\rangle$ . Plus précisément :

$$\langle R_\psi\tau_R\rangle \approx \frac{2\langle\tau\rangle}{3}, \quad (\text{III.51})$$

$$\langle T_\psi\tau_T\rangle \approx \frac{\langle\tau\rangle}{3}. \quad (\text{III.52})$$

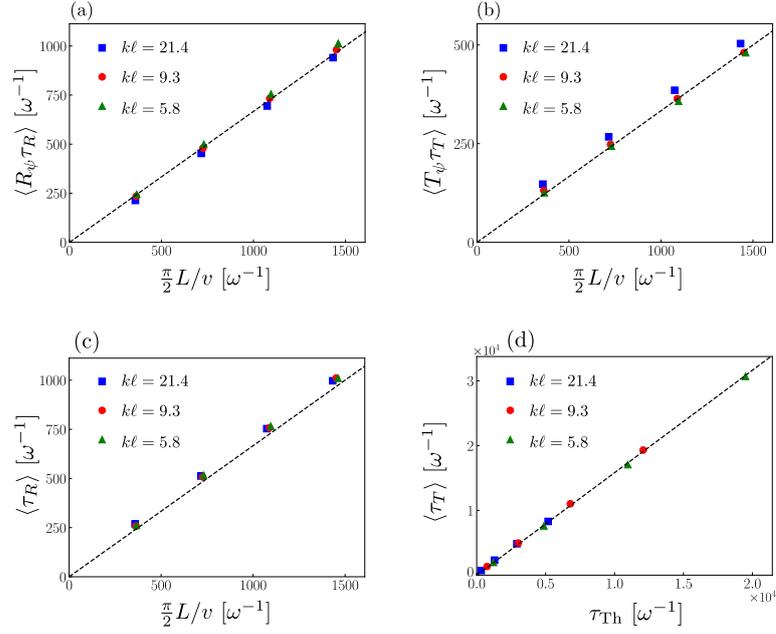


FIGURE III.4 – (a)  $\langle R_\psi \tau_R \rangle$  en fonction de  $\pi L/2v$  pour différentes forces du désordre. La courbe en trait pointillé correspond à  $y = 2x/3$ . (b)  $\langle T_\psi \tau_T \rangle$  en fonction de  $\pi L/2v$ . La courbe en trait pointillé correspond à  $y = x/3$ . (c)  $\langle \tau_R \rangle$  en fonction de  $\pi L/2v$ . La courbe en trait pointillé correspond à  $y = 2x/3$ . (d)  $\langle \tau_T \rangle$  en fonction du temps de Thouless du milieu  $\tau_{Th} = L^2/\pi^2 D_B = 2L^2/\pi^2 \ell v$ . La courbe en trait pointillé correspond à l’ajustement linéaire  $y = \alpha x$ , avec  $\alpha \approx 1.58$ .

Ces résultats numériques sont en accord avec les prédictions en régime diffusif faites par B. van Tiggelen et ses collaborateurs dans la Réf. [119].

De plus, les coefficients de réflexion et transmission moyens d’une onde plane sont donnés par :

$$\langle R \rangle \sim 1 - \frac{\ell}{L}, \quad (\text{III.53})$$

$$\langle T \rangle \sim \frac{\ell}{L}. \quad (\text{III.54})$$

Suivant les résultats précédents, on peut donc s’attendre à obtenir pour le temps moyen de réflexion et le temps moyen de transmission :

$$\langle \tau_R \rangle \sim \frac{L}{v \left(1 - \frac{\ell}{L}\right)} \sim \frac{L}{v}, \quad (\text{III.55})$$

$$\langle \tau_T \rangle \sim \frac{L^2}{\ell v} \sim \tau_{Th}. \quad (\text{III.56})$$

La figure (c) montre que le temps moyen de réflexion  $\langle \tau_R \rangle$ , où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne sur les fronts d’onde incidents correspondant aux différents modes propres du guide d’onde et sur le désordre, varie linéairement en fonction de  $\pi L/2v$ . Le temps  $\langle \tau_R \rangle$  est relativement proche de  $2 \langle \tau \rangle / 3$ . La figure (d) montre que le temps moyen de réflexion  $\langle \tau_T \rangle$  varie linéairement en fonction de  $\tau_{Th}$ .

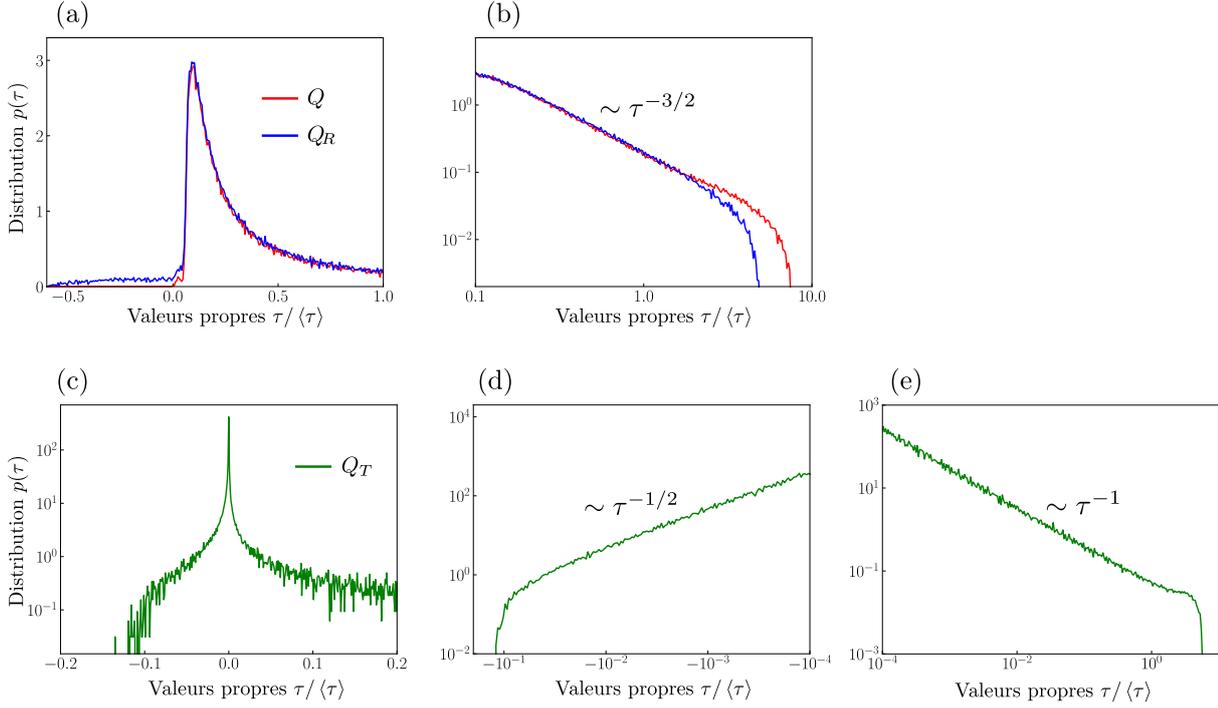


FIGURE III.5 – (a-e) Distributions numériques des valeurs propres de  $Q$ ,  $Q_R$  et  $Q_T$  pour un milieu diffusant d'épaisseur  $kL = 300$  imbriqué dans un guide d'onde supportant  $N = 287$  modes propagatifs. Le libre parcours moyen vaut  $k\ell = 21.4$ . Les valeurs propres sont normalisées par le temps moyen  $\langle\tau\rangle = \langle\text{Tr}(Q)\rangle/N$ . (a) Distribution des valeurs propres de  $Q$  et  $Q_R$ . (b) Queue des distributions de  $Q$  et  $Q_R$  en échelle log-log. (c) Distribution des valeurs propres de  $Q_T$  autour de 0 en échelle normale-log. (d) Représente les valeurs propres négatives en échelle log-log et (e) les valeurs propres positives en échelle log-log. Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre.

### III.3.1 Temps moyen de réflexion et transmission des vecteurs propres de $Q_R$ et $Q_T$

#### Description qualitative des distribution des valeurs propres de $Q_R$ et $Q_T$

Nous venons de voir que :

$$\langle R_{\mathcal{T}R} \rangle = \langle \text{Tr}(Q_R) \rangle / N \approx 2 \langle \tau \rangle / 3 = 2 \langle \text{Tr}(Q) \rangle / 3N, \quad (\text{III.57})$$

$$\langle T_{\mathcal{T}T} \rangle = \langle \text{Tr}(Q_T) \rangle / N \approx \langle \tau \rangle / 3 = \langle \text{Tr}(Q) \rangle / 3N. \quad (\text{III.58})$$

Ainsi, le premier moment de la distribution des valeurs propres de  $Q_R$  et  $Q_T$  est proportionnel au premier moment de la distribution des valeurs propres de  $Q$ . Cette dernière a été largement étudiée au chapitre 2. Les Fig. III.5 (a) et (b) montrent les distributions numériques des valeurs propres de  $Q$  et  $Q_R$  pour un milieu fortement diffusant. On observe que les deux distributions sont similaires. Il y a toutefois deux différences : premièrement, la queue de la distribution présente une borne supérieure plus grande pour  $Q$  que  $Q_R$ , deuxièmement,  $Q_R$  possède un nombre non-négligeable de valeurs propres négatives. Les Figs. III.5 (c), (d) et (e) montrent la distribution des valeurs propres de  $Q_T$ . Cette distribution est qualitativement très différente de celle de  $Q$  et  $Q_R$ . Environ la moitié

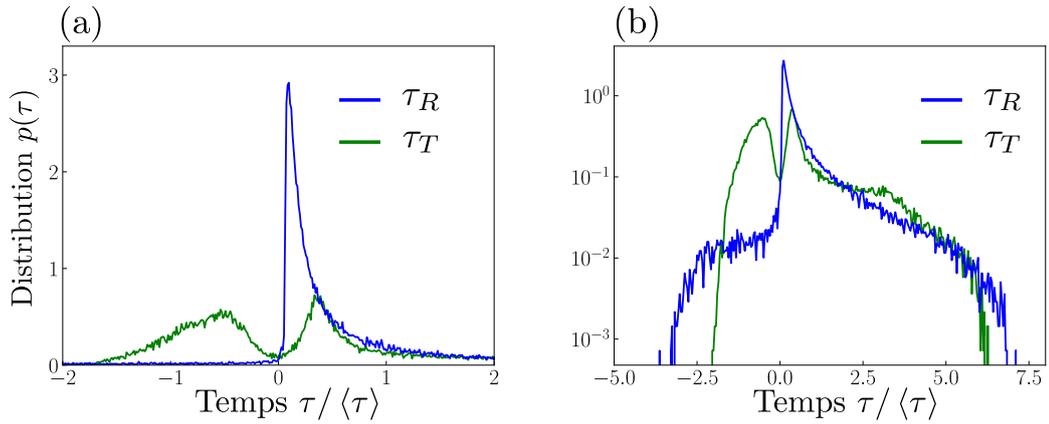


FIGURE III.6 – (a) Distributions numériques des temps  $\tau_R$  et  $\tau_T$  lorsqu'on injecte en entrée les vecteurs propres de  $Q_R$  et  $Q_T$  pour un milieu diffusant d'épaisseur  $kL = 300$  imbriqué dans un guide d'onde supportant  $N = 287$  modes propagatifs. Le libre parcours moyen vaut  $k\ell = 21.4$ . (b) Même distribution que (a) en échelle normal-log. Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre.

des valeurs propres sont négatives. On observe de plus que le temps le plus probable est proche de 0. La distribution présente une décroissance algébrique en  $\tau^{-1/2}$  aux temps longs négatifs et une décroissance en  $\tau^{-1}$  aux temps longs positifs.

### Distribution des temps moyen de réflexion et transmission des vecteurs propres de $Q_R$ et $Q_T$

Pour obtenir les temps moyen du signal sortant en réflexion et transmission des vecteurs propres de  $Q_R$  et  $Q_T$ , il faut renormaliser les valeurs propres de ces deux opérateurs par les coefficients de réflexion et transmission associés à chaque vecteur propre, comme explicité par les Eqs. (III.48, III.49). Les Figs. III.6 (a) et (b) montrent la distribution des temps moyen de sortie en réflexion et transmission dans la limite stationnaire lorsqu'on injecte en entrée les vecteurs propres de  $Q_R$  et  $Q_T$ . La Fig. III.6 (a) montre que la distribution des temps moyen de réflexion des vecteurs propres de  $Q_R$  est qualitativement similaire à celle des valeurs propres de  $Q_R$  pour des temps compris entre 0 et  $2\tau_{Th}$ . La distribution des temps moyen de transmission présente quant à elle un paquet de valeurs négatives et un paquet de valeurs positives. Ainsi, après renormalisation par le coefficient de transmission, la distribution des valeurs propres de  $Q_T$ , qui présente un pic dominant proche de 0, se scinde en un paquet négatif et un paquet positif.

### III.3.2 Problème aux valeurs propres généralisées et temps moyen de sortie

En raison de la normalisation par le flux transmis, les vecteurs propres de  $Q_{\tilde{S}}$  ne sont pas forcément ceux qui permettent de maximiser ou minimiser le temps moyen de sortie. Nous introduisons ici une classe de vecteurs particuliers pour le temps moyen : les vecteurs propres généralisés du couple  $(Q_{\tilde{S}}, \tilde{S})$ . Dans un premier temps, nous allons rappeler les notions de valeurs propres et vecteurs propres généralisés [120–122].

### Problème aux valeurs propres généralisées

Soit  $R$  et  $M$  deux matrices carrées complexes de taille  $N \times N$ . Le problème aux valeurs propres généralisé consiste à trouver les couples  $(\lambda, |v\rangle)$  de  $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^N - \{0\})$  tels que :

$$R|v\rangle = \lambda M|v\rangle. \quad (\text{III.59})$$

On dit alors que  $\lambda$  et  $|v\rangle$  sont valeur propre et vecteur propre généralisés du couple  $(R, M)$ . On dit que  $R$  est  $M$ -diagonalisable si et seulement si il existe  $N$  couples de valeurs propres-vecteurs propres généralisés  $(\lambda_i, |e_i\rangle)$  tels que  $(|e_i\rangle)_{i=1, \dots, N}$  est une base de  $\mathbb{C}^N$ .

**Théorème :** Si  $R$  est une matrice hermitienne et  $M$  une matrice hermitienne définie positive, alors il existe une base  $(|e_i\rangle)_{i=1, \dots, N}$  de  $\mathbb{C}^N$  telle que :

$$\forall i, j = 1, \dots, N \quad R|e_i\rangle = \lambda_i M|e_i\rangle \quad \text{et} \quad \langle e_j|M|e_i\rangle = \delta_{i,j}, \quad (\text{III.60})$$

où les  $\lambda_i$  sont réels. C'est-à-dire que  $R$  est  $M$ -diagonalisable dans une base de vecteurs propres généralisés qui est une base orthonormée pour le produit scalaire :

$$(y, x)_M = \langle y|M|x\rangle, \quad (\text{III.61})$$

mais pas pour le produit scalaire usuel.

### Retour au temps moyen de sortie

On a déterminé que le temps moyen est donné par :

$$\tau = \frac{\langle \psi|Q_{\tilde{S}}|\psi\rangle}{\langle \psi|\tilde{S}|\psi\rangle}.$$

$Q_{\tilde{S}}$  et  $\tilde{S}$  sont par construction hermitiens. De plus, l'opérateur  $\tilde{S}$  donne le facteur de transmission à travers un ensemble de canaux de sortie, il est donc défini positif. Le théorème énoncé plus haut s'applique. Soit  $|\psi\rangle$  un vecteur. On peut l'exprimer dans la base des vecteurs propres généralisés du couple  $(Q_{\tilde{S}}, \tilde{S})$  :

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |e_n\rangle. \quad (\text{III.62})$$

On a alors pour l'expression de  $\tau$  :

$$\tau = \frac{\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \langle e_n|Q_{\tilde{S}}|e_n\rangle + \sum_{m \neq n} c_m^* c_n \langle e_m|Q_{\tilde{S}}|e_n\rangle}{\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \langle e_n|\tilde{S}|e_n\rangle + \sum_{m \neq n} c_m^* c_n \langle e_m|\tilde{S}|e_n\rangle}. \quad (\text{III.63})$$

D'une part  $\langle e_m|\tilde{S}|e_n\rangle = \delta_{n,m}$ , d'autre part  $Q_{\tilde{S}}|e_n\rangle = \lambda_n \tilde{S}|e_n\rangle$ . On a par conséquent :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \lambda_n \langle e_n|\tilde{S}|e_n\rangle + \sum_{m \neq n} c_m^* c_n \lambda_n \langle e_m|\tilde{S}|e_n\rangle}{\sum_{n=1}^N |c_n|^2} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \lambda_n}{\sum_{n=0}^N |c_n|^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

En notant  $|a_n|^2 = \frac{|c_n|^2}{\sum_{n=1}^N |c_n|^2}$ , on obtient :

$$\tau = \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \lambda_n, \quad (\text{III.65})$$

où  $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 = 1$ , et les  $\lambda_n$  sont réels.

Connaissant la décomposition du front d'onde incident sur la base des vecteurs propres généralisés du couple  $(Q_{\tilde{S}}, \tilde{S})$ , on a ainsi accès au temps moyen du signal de sortie. De l'Eq. (III.65), on en déduit que le temps moyen est borné par :

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \lambda^{Min} \leq \tau \leq \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \lambda^{Max}, \quad (\text{III.66})$$

où  $\lambda^{Min}$  et  $\lambda^{Max}$  sont les valeurs propres généralisées minimale et maximale. Or  $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 = 1$ , donc :

$$\lambda^{Min} \leq \tau \leq \lambda^{Max}. \quad (\text{III.67})$$

Ces bornes supérieures et inférieures sont atteintes lorsque  $a_n = 1$  pour  $n$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_n$  maximale et minimale. Ainsi, le temps moyen est maximal (resp. minimal) quand le front d'onde incident correspond au vecteur propre généralisé de plus grande (resp. petite) valeur propre généralisée.

#### **Distribution des valeurs propres généralisées des couples $(Q_R, R)$ et $(Q_T, T)$**

D'après ce qui précède, les bords de la distribution des valeurs propres généralisées du couple  $(Q_R, R)$  et du couple  $(Q_T, T)$  donnent accès aux temps moyen de réflexion et transmission extrémaux. Les Figs. III.7 (a), (b) et (c) montrent la distribution des valeurs propres généralisées du couple  $(Q_R, R)$ . Cette distribution est similaire à celle des temps moyen de réflexion des vecteurs propres de  $Q_R$  pour  $0 < \tau < \langle \tau \rangle$ , mais les valeurs extrémales de la distribution sont significativement plus larges, comme l'indiquent les lignes verticales en pointillé.

Les Figs. III.7 (d), (e) et (f) montrent la distribution des valeurs propres généralisées du couple  $(Q_T, T)$ . La distribution est qualitativement très différente de celle des temps de transmission des vecteurs propres de  $Q_T$ . La distribution présente un maximum autour de  $0.5 \langle \tau \rangle$  et décroît algébriquement en  $\tau^{-1.24}$  aux temps longs positifs et négatifs.

### **III.4 Temps moyen de transmission de fronts d'onde particuliers**

Dans cette section, nous nous intéressons spécifiquement au temps moyen de transmission, c'est-à-dire au temps moyen du signal mesuré sur l'ensemble des canaux de transmission. Pour rappel, ce temps s'exprime sous la forme :

$$\tau_T = \frac{\langle \psi | Q_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle}, \quad (\text{III.68})$$

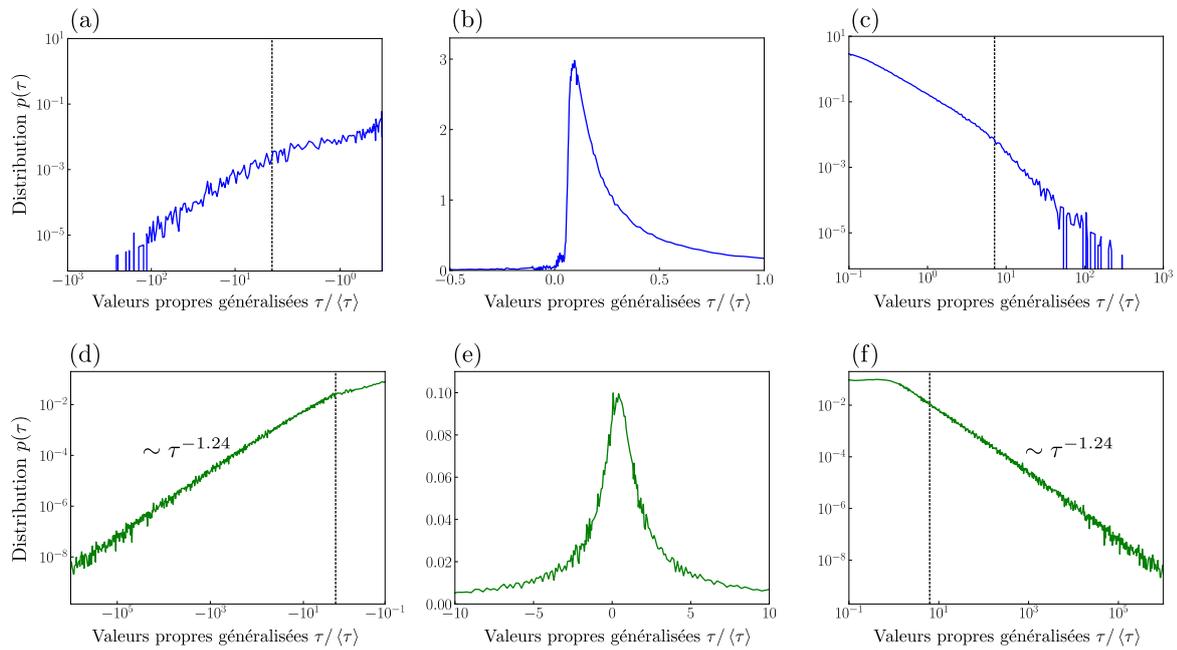


FIGURE III.7 – (a), (b) et (c) Distribution numérique des valeurs propres généralisées du couples  $(Q_R, R)$  pour un milieu diffusant d'épaisseur  $kL = 300$  imbriqué dans un guide d'onde supportant  $N = 287$  modes propagatifs. Le libre parcours moyen vaut  $k\ell = 21.4$ . Les distributions ont été générées en utilisant 128 réalisations du désordre. (d), (e) et (f) Distributions numériques des valeurs propres généralisées du couples  $(Q_T, T)$  avec ces mêmes paramètres. Les lignes verticales en pointillé représentent le minimum et le maximum de la distribution des temps moyens des vecteurs propres de  $Q_R$  et  $Q_T$ .

où  $T$  et  $Q_T$  sont les opérateurs polychromatiques :

$$T = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 t^\dagger(\Omega) t(\Omega), \quad (\text{III.69})$$

$$Q_T = \frac{1}{2} \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ -it^\dagger(\Omega) \partial_\Omega t(\Omega) + i \partial_\Omega t^\dagger(\Omega) t(\Omega) \right]. \quad (\text{III.70})$$

### III.4.1 Étude numérique du temps moyen de transmission des vecteurs propres de $T$ et $Q_T$

Le temps moyen de transmission s'exprime en fonction de deux opérateurs,  $Q_T$  et  $T$ . On peut se demander si on peut trouver parmi les vecteurs propres de ces deux opérateurs des fronts d'onde pour lesquels le temps moyen de transmission est très différent du temps de Thouless, c'est à dire du temps mis en moyenne par une onde plane pour traverser le milieu. Nous avons construit numériquement les opérateurs  $Q_T$  et  $T$  pour un milieu diffusant d'épaisseur optique  $b \approx 18$  imbriqué dans un guide d'onde éclairé par des impulsions gaussiennes de sorte que le spectre du champ incident s'écrit  $A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} e^{-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\sigma^2}}$ . Trois régimes de largeurs spectrales ( $\sigma/\omega_{\text{Th}} < 1$ ,  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \sim 1$  et  $\sigma/\omega_{\text{Th}} > 1$ ) sont étudiés. Le guide supporte 160 modes à la fréquence centrale  $\omega_o$  de l'impulsion. Les matrices  $Q_T$  et  $T$  permettent d'évaluer le temps moyen de transmission pour un front d'onde arbitraire. Pour la suite de ce chapitre, nous désignons le front d'onde correspondant au premier mode du guide, utilisé pour évaluer le comportement d'un front d'onde quelconque, par onde plane.

Les Figs. III.8 (a), (c) et (e) représentent le temps moyen de transmission des vecteurs propres de  $T$  et  $Q_T$  en fonction de leur transmission pour trois valeurs de la largeur spectrale ( $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ ,  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$  et  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 4$ ) correspondant aux trois régimes  $\sigma/\omega_{\text{Th}} < 1$ ,  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \sim 1$  et  $\sigma/\omega_{\text{Th}} > 1$ . Avant de commenter spécifiquement ces trois régimes, on peut noter que l'étendue des temps moyen de transmission (différence entre le temps moyen le plus faible et le plus élevé) diminue quand  $\sigma$  augmente, que ce soit pour les vecteurs propres de  $Q_T$  ou de  $T$ . Lorsque la largeur spectrale augmente, le nombre de degrés de liberté spectraux augmente, il est donc peu surprenant de voir que l'étendue des temps moyen de transmission accessibles avec les vecteurs propres de  $Q_T$  et  $T$  se resserre autour du temps moyen de transmission d'une onde plane. Cette observation est à mettre en parallèle des résultats de la Réf. [118] où les auteurs observent que les fluctuations du temps moyen de transmission diminue lorsque la largeur spectrale de l'impulsion augmente.

On peut également noter que certains vecteurs propres de  $Q_T$  ont un temps moyen de transmission négatif pour  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ , ce qui n'est pas aberrant. En effet, pour une impulsion incidente dont la largeur temporelle est plus grande que le temps de Thouless, le temps moyen de transmission peut être négatif si les premières composantes temporelles du paquet d'onde sont plus transmises que les dernières. Un tel effet est d'autant moins possible que le niveau de transmission s'approche de l'unité. Comme on peut le voir sur la Fig. III.8 (a), les fronts d'onde ayant un temps moyen de transmission négatif ont un coefficient de transmission inférieur au niveau de transmission moyen  $\bar{T} = \text{Tr}(T)/N$ . On observe sur les Figs. III.8 (c) et (e) qu'il n'y a plus de temps négatif pour  $\sigma \geq \omega_{\text{Th}}$ .

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ .** On observe sur la Figs. III.8 (a) que le temps moyen est corrélé avec le coefficient de transmission : le temps moyen correspondant aux états propres de  $T$  augmente avec le coefficient de transmission de ces états. De même, le temps moyen des états propres de  $Q_T$  augmente en valeur absolue avec le coefficient de transmission de ces états. En outre, le temps moyen de transmission augmente fortement avec la transmission pour des vecteurs propres dont la transmission est supérieure à la transmission moyenne. Dans la simulation présentée, portant sur une seule réalisation du désordre, le temps moyen le plus élevé obtenu avec les vecteurs propres de  $Q_T$  est de  $4.4\tau_{\text{Th}}$ , soit environ deux fois le temps moyen obtenu avec une onde plane. Avec les vecteurs propres de  $T$ , le temps moyen maximum que l'on peut obtenir est de  $3.6\tau_{\text{Th}}$ . La Fig. III.8 (b) montre que le signal transmis reste gaussien pour les différents front d'ondes considérés, le temps moyen correspond alors au retard induit par la propagation. Pour le vecteur propre de  $Q_T$  conduisant au plus grand temps moyen de transmission, le retard obtenu reste toutefois inférieur à la largeur temporelle du signal.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$ .** Comme pour la cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ , la Fig. III.8 (c) montre que le temps moyen de transmission des vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$  augmente avec le coefficient de transmission de ces états. Le temps moyen de transmission correspondant au vecteur propre de  $Q_T$  (resp.  $T$ ) qui maximise ce dernier est environ égal à  $3.1\tau_{\text{Th}}$  (resp.  $2.6\tau_{\text{Th}}$ ), ce qui est peu différent de celui d'une onde plane ( $2.4\tau_{\text{Th}}$ ). La Fig. III.8 (d) montre que les profils des signaux transmis correspondant aux différents vecteurs considérés ne sont plus gaussiens. En particulier le temps moyen et le temps de sortie du maximum ne sont plus égaux. Les différents profils exhibent une décroissance plus lente que la montée. Le temps moyen de transmission obtenu avec les vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$  est supérieur à celui obtenu avec une onde plane, car le profil décroît plus tardivement et de façon moins abrupte.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 4$ .** On observe sur la Fig. III.8 (e) que le temps moyen de transmission des vecteurs propres de  $Q_T$  augmente encore avec le coefficient de transmission de ces vecteurs, mais ce n'est plus le cas pour les vecteurs propres de  $T$ . Pour les vecteurs propres de  $T$  dont le coefficient de transmission est inférieure à  $\bar{T}$ , le temps moyen de transmission est décorrélié du coefficient de transmission, mais pour ceux dont la transmission est supérieure à  $\bar{T}$ , le temps moyen de transmission diminue avec le coefficient de transmission. Pour l'ensemble des vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$ , les temps moyen de transmission correspondant sont relativement proches de celui d'une onde plane. La Fig. III.8 (f) montre que les profils des signaux transmis correspondant aux vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$  qui maximisent le temps moyen sont similaires à celui d'une onde plane.

On peut conclure que, pour les trois largeurs spectrales étudiées, les vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$  ne permettent pas d'obtenir un signal transmis clairement distinct de celui obtenu avec une simple onde plane.

### III.4.2 Vecteurs propres généralisés du couple $(Q_T, T)$

Nous avons vu à la section III.3 que les fronts d'onde qui permettent de maximiser ou minimiser le temps moyen de transmission sont les vecteurs propres du couple  $(Q_T, T)$ . Les Figs. III.9 (a), (c) et (e) représentent le temps moyen de transmission, pour la même réalisation du désordre qu'à la sous-section précédente, des vecteurs propres généralisés du

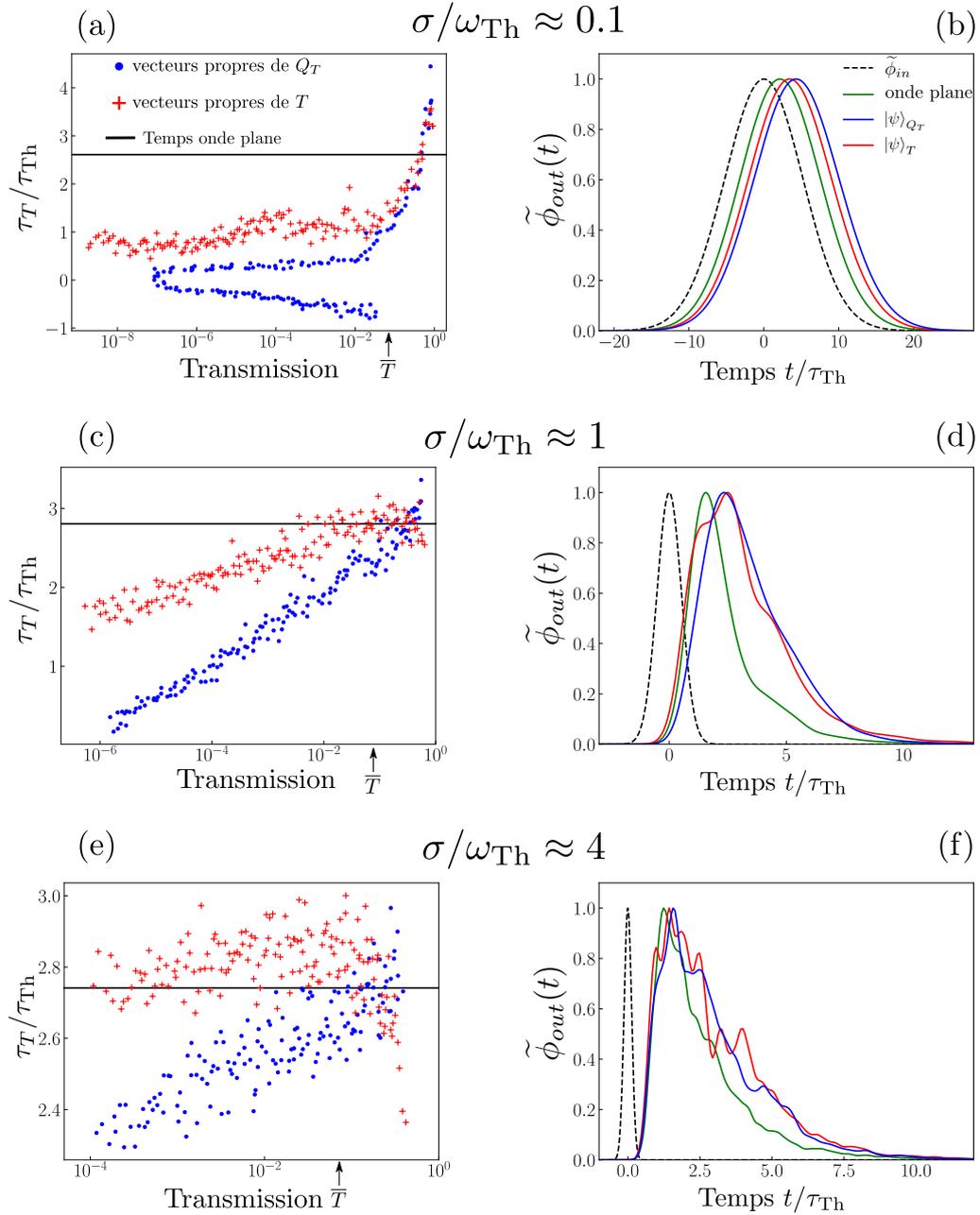


FIGURE III.8 – (a, c, e) Temps moyen de transmission des vecteurs propres de  $Q_T$  et  $T$  en fonction de leur facteur de transmission pour différentes valeurs de la largeur spectrale de l'impulsion incidente. (b, d, f) Profils normalisés par leur maximum du flux transmis lorsqu'on injecte les fronts d'onde suivants : une onde plane normale au milieu (premier mode du guide d'onde) et les vecteurs propres de  $Q_T$  et  $T$  ayant le plus grand temps moyen de transmission (correspondant aux points sur la figure de gauche de plus grande ordonnée). L'impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir. Les temps moyens des signaux représentés dans ces figures sont renseignés dans le tableau III.11 et illustrés sur la Fig. III.12.

couple  $(Q_T, T)$  en fonction de leur niveau de transmission pour les trois largeurs spectrales étudiées précédemment ( $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ ,  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$  et  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 4$ ). De même que pour les vecteurs propres de  $Q_T$  et  $T$ , l'étendue des temps moyen de transmission diminue avec la largeur spectrale. On remarque également que les vecteurs propres généralisés, pour les trois largeurs spectrales étudiées, ont tous des niveaux de transmission bien inférieurs à  $\bar{T}$ . Le fait que tous les vecteurs propres généralisés ont une transmission inférieure à  $\bar{T}$  n'est pas en contradiction avec le fait que la trace de la matrice de transmission, et par conséquent  $\bar{T}$ , ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle est exprimée la matrice car les vecteurs propres généralisés constituent une base, mais cette base n'est pas orthonormée par rapport au produit scalaire classique, comme rappelé à la sous-section III.3.2.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ .** Contrairement aux vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$ , la Fig. III.9 (a) montre que le temps moyen de transmission des vecteurs propres généralisés n'est pas corrélé de manière simple avec le niveau de transmission de ces vecteurs. De plus, la plage de transmission des vecteurs propres généralisés, comptée en décade, est bien plus fine que la plage de transmission des vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$ . Le temps moyen de transmission maximal est de  $13.2\tau_{\text{Th}}$ , soit environ 6 fois plus que pour une onde plane. La Fig. III.9 (b) expose un profil quasi-gaussien du signal transmis correspondant au vecteur propre généralisé de plus grand temps moyen, le maximum du signal étant bien décalé temporellement d'un temps égal au temps moyen.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$ .** La Fig. III.9 (c) fait apparaître cette fois un temps moyen de transmission des vecteurs propres généralisés augmentant avec le niveau de transmission de ces vecteurs. Mais comme pour le régime de faible largeur spectrale, le niveau de transmission des vecteurs propres généralisés s'étend sur une plage plus étroite que pour les vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$ . Le profil du signal transmis correspondant au vecteur propre généralisé de plus grand temps moyen, représenté sur la Fig. III.9 (d), présente un profil est non gaussien mais différent de celui d'une onde plane ou des vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$  présents sur la Fig. III.8 (d), avec une montée du signal plus lente.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 4$ .** Comme pour  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$ , la Fig. III.9 (e) montre que le temps moyen de transmission des vecteurs propres généralisés n'est pas corrélé simplement avec le facteur de transmission de ces vecteurs. Là encore, la plage de transmission des vecteurs propres généralisés est beaucoup plus étroite que pour les vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$ . Le profil du signal transmis correspondant au vecteur propre généralisé de plus grand temp moyen, illustré sur la Fig. III.9 (f), ne présente plus un pic marqué mais un profil élargi.

Si, pour  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$  et  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$ , les vecteurs propres généralisés permettent d'obtenir un profil du signal transmis suffisamment piqué et décalé temporellement par rapport à celui d'une onde plane, le faible niveau de transmission de ces fronts d'onde particuliers limite leur intérêt pratique.

### III.4.3 Optimisation du temps moyen de transmission

Nous avons identifié à la sous-section précédente les fronts d'onde qui permettent de maximiser ou minimiser le temps moyen, mais le niveau de transmission de ces fronts

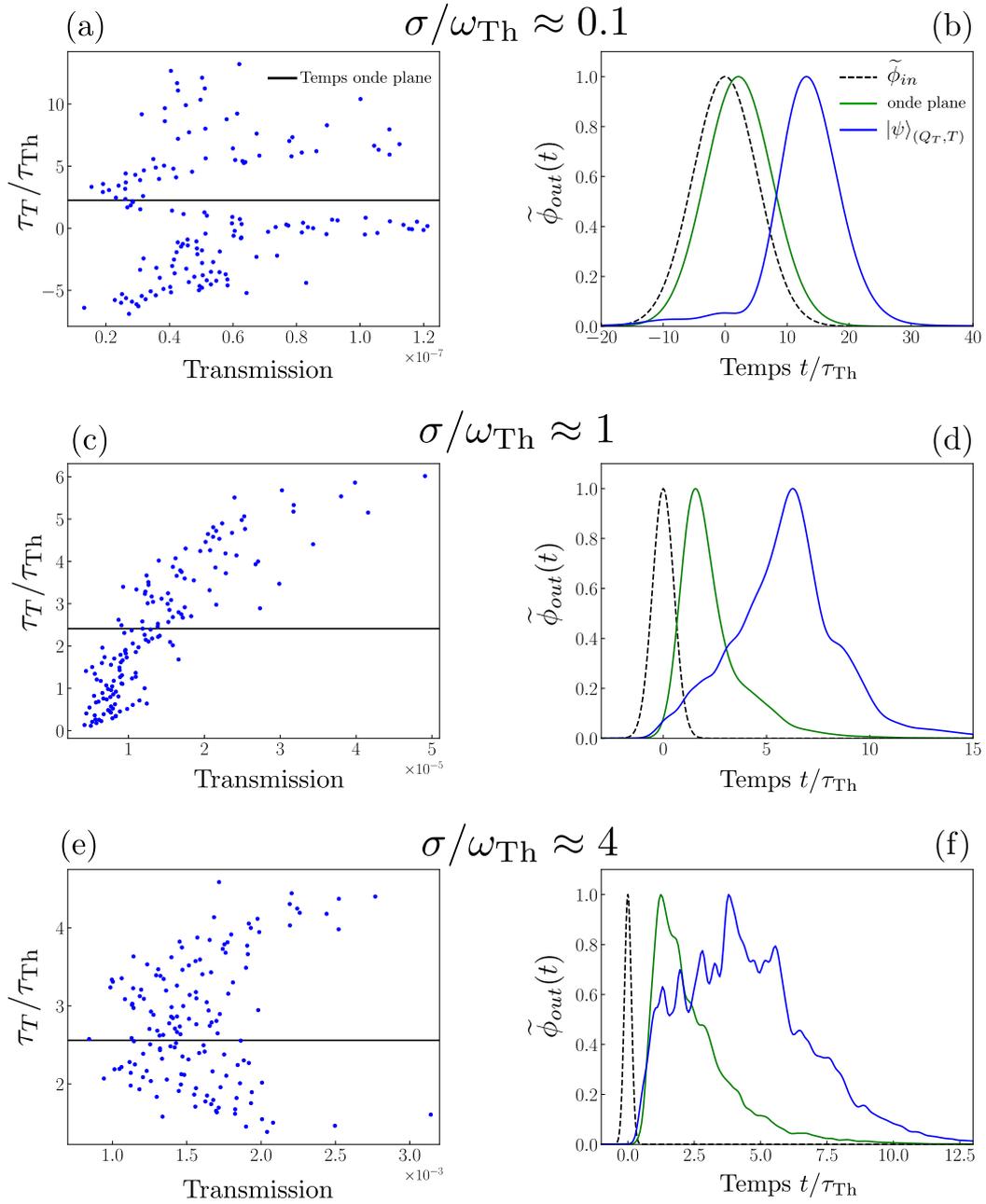


FIGURE III.9 – (a, c, e) Temps moyen de transmission des vecteurs propres généralisés du couple  $(Q_T, T)$  en fonction de leur facteur de transmission pour trois largeurs spectrales de l'impulsion incidente. (b, d, f) Profils normalisés par leur maximum du flux transmis lorsqu'on injecte les fronts d'onde suivants : une onde plane (premier mode du guide d'onde) et le vecteur propre généralisé du couple  $(Q_T, T)$  de plus grand temps moyen de transmission. L'impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir. Les temps moyens des signaux observés sur ces figures sont renseignés dans le tableau III.11 et illustrés sur la Fig. III.12.

d'onde, largement inférieur au niveau de transmission moyen  $\bar{T}$ , limite leur utilité.

Une approche alternative permettant de trouver des fronts d'onde présentant un temps moyen de transmission particulier tout en gardant un facteur de transmission non-négligeable consiste à optimiser de manière itérative l'expression  $\frac{\langle \psi | Q_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle}$ , qui représente la fonction à maximiser dans notre algorithme. À chaque itération, un coefficient du front d'onde incident  $|\psi\rangle$  dans la base des modes du guide est modulé aléatoirement en amplitude et en phase. On conserve ensuite la valeur qui maximise  $\frac{\langle \psi | Q_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle}$ , sous contrainte de garder  $\langle \psi | T | \psi \rangle \geq \bar{T}$ . L'ensemble des coefficients sont modulés, et ce processus est répété plusieurs fois. Nous avons ainsi maximisé le temps moyen de transmission avec la contrainte de garder un niveau de transmission supérieur à  $\bar{T}$ . Les Figs. III.10 (a), (b) et (c) montrent les profils obtenus lorsqu'on injecte le front d'onde optimisé pour les trois valeurs de largeur spectrale  $\sigma/\omega_{Th} \approx 0.1$ ,  $\sigma/\omega_{Th} \approx 1$  et  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$ .

**Cas  $\sigma/\omega_{Th} \approx 0.1$ .** La Fig. III.10 (a) montre que le profil obtenu avec le front d'onde optimisé est toujours gaussien, le maximum étant obtenu à un temps de  $6.7\tau_{Th}$ , soit environ l'écart-type du signal correspondant à l'onde plane. Le signal transmis correspondant au vecteur optimisé se superpose donc encore partiellement avec celui dû à une onde plane.

**Cas  $\sigma/\omega_{Th} \approx 1$ .** Le signal transmis correspondant au front d'onde optimisé, représenté sur la Fig. III.10 (b), n'est plus gaussien, et croît aux temps courts plus lentement que le profil de l'onde plane. Il en ressort que le profil du signal transmis est plus symétrique de part et d'autre du maximum que le profil dû à l'onde plane. Ce profil est similaire à celui dû au vecteur propre généralisé présenté sur la Fig. III.9 (d) mais avec un maximum et un temps moyen de transmission plus faible. Le maximum sort à un temps de  $4.1\tau_{Th}$ , proche du temps moyen de transmission qui vaut  $4.7\tau_{Th}$ .

**Cas  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$ .** On constate sur la Fig. III.10 (c) que le profil du signal transmis correspondant au front d'onde optimisé, comme celui obtenu avec le vecteur propre généralisé présent sur la Fig. III.9 (f), présente un profil irrégulier et large qui décroît exponentiellement aux temps longs.

### III.5 Minimisation de la dispersion temporelle par modulation spatiale du front d'onde

Nous avons exprimé à la section III.2 la variance centrée réduite du signal en sortie d'un ensemble arbitraire de canaux pour une impulsion entrante avec un front d'onde arbitraire  $|\psi\rangle$ . Pour une impulsion incidente avec un spectre gaussien de variance temporelle  $1/(4\sigma^2)$  (comme étudié à la section précédente), le signal mesuré à travers l'ensemble des canaux de transmission s'exprime comme :

$$V = \frac{\langle \psi | L_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle} - \left( \frac{\langle \psi | Q_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle} \right)^2, \quad (\text{III.71})$$

où  $T$ ,  $Q_T$  sont les opérateurs polychromatiques donnés par les Eqs. (III.69) et (III.70), et  $L_T$  l'opérateur polychromatique permettant d'exprimer le second cumulant du signal

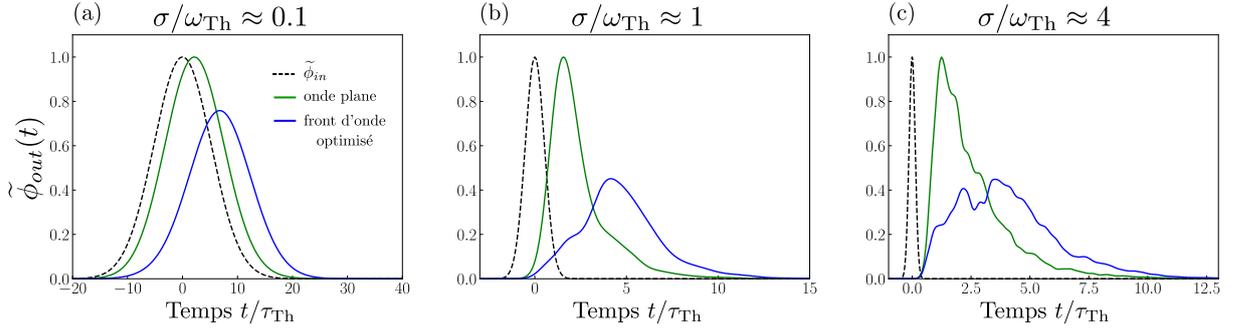


FIGURE III.10 – (a, b, c) Profils normalisés du flux transmis pour différentes largeurs spectrales de l’impulsion gaussienne incidente lorsqu’on injecte en entrée les fronts d’onde suivants : une onde plane et le front d’onde obtenu par maximisation de l’expression algébrique du temps moyen de sortie avec la contrainte de garder une transmission supérieure à  $\bar{T} = \text{Tr}(T)/N$ . Les profils sont normalisés par le maximum du profil correspondant à l’onde plane. L’impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir. Le temps moyen des signaux représentés sur ces figures sont renseignés dans le tableau III.11 et illustrés sur la Fig. III.12.

	onde plane	vecteur propre de $Q_T$	vecteur propre de $T$	vecteur propre généralisé	vecteur optimisé
$\sigma/\omega_{T_h} \approx 0.1$	2.24	4.44	3.56	13.2	6.70
$\sigma/\omega_{T_h} \approx 1$	2.41	3.36	3.15	6.02	4.72
$\sigma/\omega_{T_h} \approx 4$	2.55	2.96	3.00	4.58	4.07

FIGURE III.11 – Temps moyen de transmission (en unité de  $\tau_{T_h}$ ) des profils représentés sur les Figs. III.8 (b), (d) et (f) (onde plane, vecteur propre de  $Q_T$ , et vecteur propre de  $T$ ), sur les Figs. III.9 (b), (d) et (f) (vecteur propre généralisé), ainsi que sur les Figs. III.10 (a), (b) et (c) (vecteur optimisé).

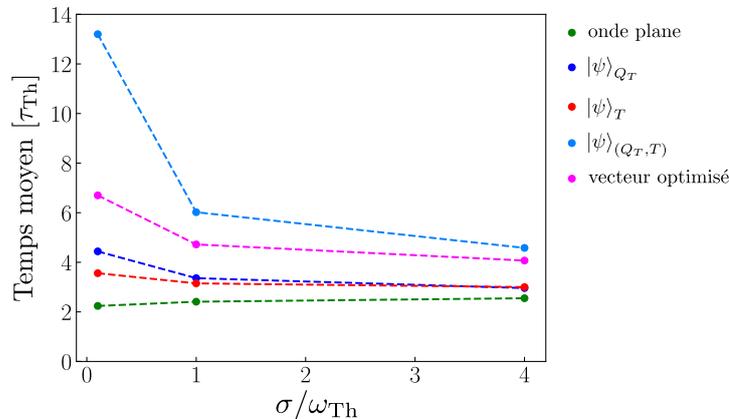


FIGURE III.12 – Temps moyen de transmission des profils représentés sur les Figs. III.8 (b), (d), (f), III.9 (b), (d), (f) et III.10 (a), (b), (c) en fonction de  $\sigma/\omega_{T_h}$ .

transmis :

$$L_T = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ \frac{1}{4\sigma^2} t^\dagger t + \frac{1}{2} \partial_\Omega t^\dagger \partial_\Omega t - \frac{1}{4} (\partial_\Omega^2 t^\dagger t + t^\dagger \partial_\Omega^2 t) \right]. \quad (\text{III.72})$$

La variance peut également se réécrire sous la forme :

$$V = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{\langle \psi | \hat{L}_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle} - \left( \frac{\langle \psi | Q_T | \psi \rangle}{\langle \psi | T | \psi \rangle} \right)^2, \quad (\text{III.73})$$

où  $\hat{L}_T$  est défini par :

$$\hat{L}_T = \int d\Omega |A(\Omega)|^2 \left[ \frac{1}{2} \partial_\Omega t^\dagger \partial_\Omega t - \frac{1}{4} (\partial_\Omega^2 t^\dagger t + t^\dagger \partial_\Omega^2 t) \right]. \quad (\text{III.74})$$

On a ainsi :

$$L_T = \hat{L}_T + \frac{T}{4\sigma^2}. \quad (\text{III.75})$$

Les opérateurs  $L_T$  et  $\hat{L}_T$  se confondent lorsque  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Dans cette section, nous étudions dans un premier temps numériquement l'écart-type des signaux transmis lorsqu'on injecte en entrée les fronts d'onde correspondant aux vecteurs propres de  $L_T$  et de  $\hat{L}_T$ . Dans un second temps, nous cherchons, par optimisation itérative, des fronts d'onde produisant un profil transmis peu dispersé temporellement.

### III.5.1 Écart-type temporel pour les vecteurs propres de $L_T$ et $\hat{L}_T$

De même que précédemment, les opérateurs  $L_T$  et  $\hat{L}_T$  ont été construits numériquement pour des paquets d'onde incidents avec un spectre gaussien,  $A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}}$ . Les Figs. III.13 (a), (c) montrent l'écart-type du signal transmis correspondant aux vecteurs propres de  $L_T$  et de  $\hat{L}_T$  pour les valeurs de largeur spectrale  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$  et  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 4$ . L'écart-type des signaux représentés sur les Figs. III.13 (b) et (d) sont donnés dans le tableau III.14. Nous ne nous intéressons pas au cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 0.1$  car l'écart-type du signal transmis dans ce régime de faible largeur spectrale est sensiblement égal à l'écart-type du signal entrant, il y a peu de dispersion temporelle.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 1$ .** La Fig. III.13 (c) montre que les valeurs d'écart-type correspondant aux vecteurs propres de  $L_T$  et  $\hat{L}_T$  tendent à se confondre. L'écart-type du signal transmis obtenu avec les vecteurs propres de ces deux opérateurs augmente avec le facteur de transmission. Les écart-types observés s'étendent sur une plage de valeurs allant de  $0.5\tau_{\text{Th}}$ , soit celui du signal incident, à environ  $2.3\tau_{\text{Th}}$ , soit 1.3 fois celui dû à une onde plane. Le profil du signal transmis correspondant aux vecteurs propres de  $L_T$  et  $\hat{L}_T$  ayant une transmission proche de  $\bar{T}/2$ , illustré sur la Fig. III.13 (b), présente les mêmes caractéristiques que celui dû à une onde plane.

**Cas  $\sigma/\omega_{\text{Th}} \approx 4$ .** D'après la Fig. III.13 (e), les points correspondant aux vecteurs propres de  $L_T$  et de  $\hat{L}_T$  sont maintenant tous confondus et ces vecteurs ont tous des écart-types

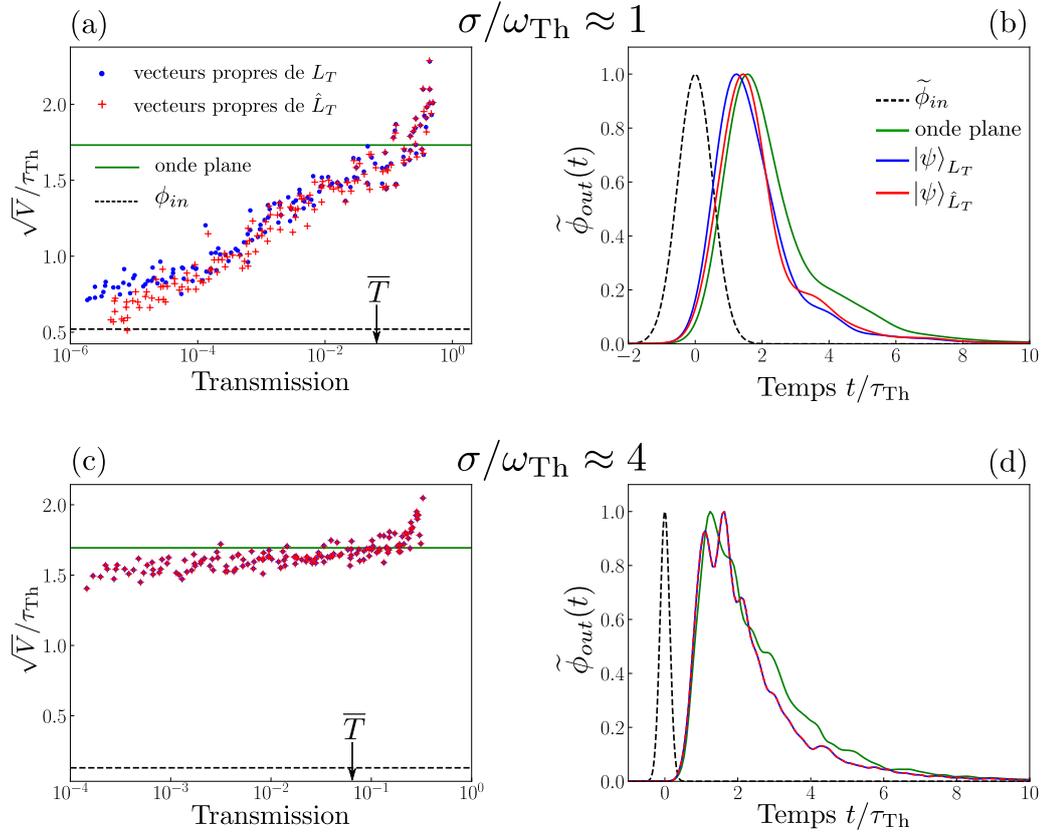


FIGURE III.13 – (a, c) Écart-type du signal transmis en fonction du niveau de transmission lorsqu'on injecte en entrée les vecteurs propres de  $L$  pour deux largeurs spectrales différentes. L'écart-type du signal d'entrée et du signal transmis lorsqu'on injecte une onde plane en entrée (en réalité le premier mode du guide) sont représentés par des lignes horizontales. (b, d) Profils normalisés par leur maximum du flux transmis lorsqu'on injecte en entrée les fronts d'onde suivants : une onde plane (premier mode du guide d'onde), le vecteur propre de  $L$  ayant le plus faible écart-type avec une transmission supérieure à  $\bar{T}/2$ , où  $\bar{T}$  est la transmission moyenne et le vecteur propre de  $\hat{L}$  ayant le plus faible écart-type avec une transmission supérieure à  $\bar{T}/2$ . L'impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir.

	signal incident	onde plane	vecteur propre de $L_T$	vecteur propre de $\hat{L}_T$
$\sigma/\omega_{Th} \approx 1$	0.52	1.73	1.44	1.44
$\sigma/\omega_{Th} \approx 4$	0.13	1.69	1.57	1.57

FIGURE III.14 – Écart-type (en unité de  $\tau_{Th}$ ) des profils représentés sur les figures III.13 (b) et (d).

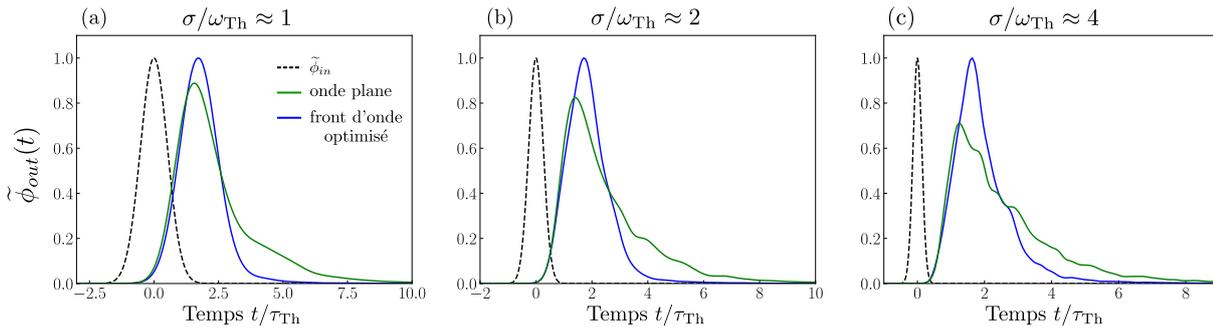


FIGURE III.15 – (a, b, c) Profils normalisés du flux transmis lorsqu’on injecte en entrée les fronts d’onde suivants : une onde plane (premier mode du guide) et le front d’onde obtenu par minimisation de l’expression algébrique de la variance avec la contrainte de garder une transmission supérieure à  $\bar{T}$ , où  $\bar{T}$  est la transmission moyenne. Les profils sont normalisés par le maximum du profil correspondant au vecteur obtenu par optimisation. L’impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir.

Écart-type $[\tau_{T_h}]$	signal incident	onde plane	vecteur optimisé
$\sigma/\omega_{T_h} \approx 1$	0.52	1.73	0.86
$\sigma/\omega_{T_h} \approx 2$	0.26	1.70	0.89
$\sigma/\omega_{T_h} \approx 4$	0.13	1.69	1.01

FIGURE III.16 – Écart-type (en unité  $\tau_{T_h}$ ) des profils représentés sur les Figs. III.15 (a), (b) et (c).

proches de celui obtenu avec une onde plane ( $\sim 1.7\tau_{T_h}$ ), ce qui est bien supérieur à celui du signal incident ( $\sim 0.12\tau_{T_h}$ ). Le profil du signal transmis correspondant aux vecteurs propres de  $L_T$  et de  $\hat{L}_T$ , représenté sur la Fig. III.13 (d), diffère peu de celui d’une onde plane.

Les vecteurs propres de  $L_T$  et de  $\hat{L}_T$  ayant un coefficient de transmission de l’ordre de  $\bar{T}$  ne permettent pas d’obtenir des signaux transmis peu dispersés temporellement. On s’attend à des résultats similaires avec les vecteurs propres de  $Q_T$  et de  $T$ , c’est pourquoi nous n’étudions pas l’écart-type des signaux transmis lorsque le front d’onde incident correspond à l’un de ces vecteurs.

### III.5.2 Optimisation de la variance

De façon analogue à ce qui a été fait pour le temps de transmission, on peut utiliser un algorithme itératif pour minimiser l’expression algébrique de la variance tout en imposant une transmission supérieure ou égale à  $\bar{T}$ . Les Figs. III.15 (a), (b) et (c) montrent les profils lorsqu’on injecte en entrée les fronts d’onde optimisés pour les largeurs spectrales  $\sigma/\omega_{T_h} \approx 1$ ,  $\sigma/\omega_{T_h} \approx 2$  et  $\sigma/\omega_{T_h} \approx 4$ . Le signal obtenu avec le vecteur optimisé est moins dispersé temporellement que celui obtenu avec une onde plane pour les trois largeurs spectrales étudiés. En particulier, pour  $\sigma/\omega_{T_h} \approx 1$ , le signal correspondant au vecteur optimisé est quasi-gaussien. Les écart-types des signaux représentés sur ces figures sont

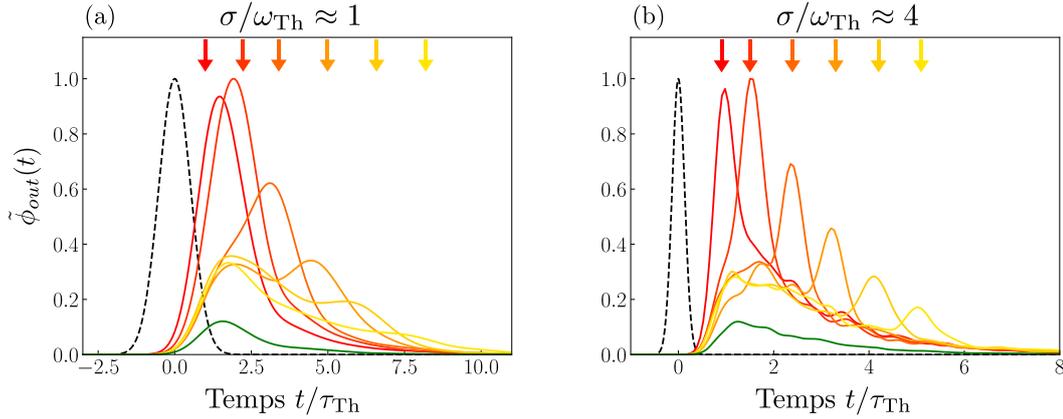


FIGURE III.17 – (a, b) Profils normalisés du signal transmis pour différentes largeurs spectrales de l’impulsion gaussienne incidente lorsqu’on injecte en entrée les fronts suivants : le premier mode du guide d’onde (en vert) et le vecteur singulier de valeur singulière maximale de la TRTM prise aux différents temps indiqués par des flèches de couleurs correspondantes (du rouge au jaune). Les profils sont normalisés par le maximum commun à ces différents profils. L’impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir.

indiqués dans le tableau III.16 et illustrés sur la Fig. III.20. On constate que l’écart-type du signal obtenu avec le vecteur optimisé augmente avec  $\sigma$ . En effet, le nombre de degrés de libertés spectraux augmente avec  $\sigma$ , or le nombre de degrés de libertés contrôlés en entrée, égal au nombre de degrés de liberté spatiaux, est lui constant.

### III.5.3 Comparaison avec les performances de la TRTM

Nous nous proposons dans cette sous-section de comparer les performances en terme de compression temporelle des vecteurs optimisés précédents et des vecteurs singuliers de la TRTM maximisant la transmission à différents instants. Commençons par analyser les caractéristiques des vecteurs singuliers de la TRTM. Les profils de sortie obtenus avec les vecteurs singuliers de valeur singulière maximale de la TRTM à différents instants  $t_o$  sont représentés sur la Fig. III.17 pour (a)  $\sigma/\omega_{Th} \approx 1$  et (b)  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$ . Les différents profils sont tous normalisés par le maximum commun à ces différents profils. On remarque, par comparaison de l’amplitude des profils avec celui dû à une onde plane, que les vecteurs singuliers de la TRTM prise aux différents instants ont un niveau transmission bien plus élevé que pour une onde plane. Les Figs. III.17 (a) et (b) montrent que les profils des vecteurs singuliers de la TRTM présentent un maximum qui coïncide bien avec les temps auxquels sont évaluées les TRTM. Les maximums sont d’autant plus marqués, et coïncident d’autant mieux avec les instants  $t_o$  auxquels sont évaluées les TRTM, que  $\sigma$  est large. Aux temps différents de  $t_o$ , le profil du signal est similaire au profil diffusif obtenu avec une onde plane, mais d’amplitude supérieure.

#### Comparaison des performances

Les figs. III.18 (a), (b) et (c) représentent les profils des signaux transmis lorsque le front d’onde incident correspond au vecteur  $|\psi\rangle_V$  obtenu par minimisation de la variance, et

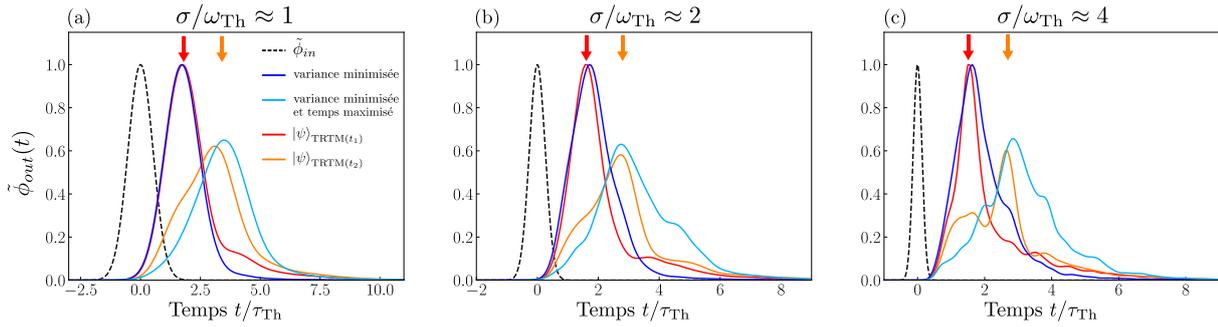


FIGURE III.18 – (a, b, c) Profils normalisés du flux transmis pour différentes largeurs spectrales de l’impulsion gaussienne incidente lorsqu’on injecte en entrée les fronts suivants : le vecteur singulier de valeur singulière maximale de la TRTM prise aux différents temps indiqués par des flèches de couleurs correspondantes (rouge et orange), les vecteurs obtenus par minimisation de la variance (bleu) et minimisation de la variance tout en maximisant le temps moyen de sortie (bleu claire). Pour une meilleure comparaison des profils, les profils correspondant aux vecteur singuliers des TRTM sont normalisés par le maximum commun de ces deux profils et les profils correspondant aux vecteurs obtenus par optimisation sont normalisés par le maximum commun de ces deux profils. L’impulsion incidente normalisée par son maximum est également représentée en trait pointillé noir.

	signal incident	$ \psi\rangle_1$	$ \psi\rangle_2$	$ \psi\rangle_{TRTM(t_1)}$	$ \psi\rangle_{TRTM(t_2)}$
$\sigma/\omega_{Th} \approx 1$	0.52	0.86	1.41	1.39	1.65
$\sigma/\omega_{Th} \approx 2$	0.26	0.89	1.44	1.48	1.62
$\sigma/\omega_{Th} \approx 4$	0.13	1.01	1.41	1.51	1.62

FIGURE III.19 – Écart-type (en unité de  $\tau_{Th}$ ) des profils représentés sur les Figs. III.18 (a), (b) et (c).  $|\psi\rangle_1$  correspond au vecteur obtenu par minimisation de la variance et  $|\psi\rangle_2$  au vecteur obtenu en minimisant la variance tout en maximisant le temps moyen.

au vecteur singulier  $|\psi\rangle_{TRTM(t_1)}$  de valeur singulière maximale de la TRTM évaluée un instant proche du maximum du premier profil. Les écart-types des signaux représentés sur ces figures sont indiqués dans le tableau III.19 et illustrés sur la Fig. III.20. Dans le cas  $\sigma/\omega_{Th} \approx 1$ , le signal obtenu avec le front d’onde optimisé est clairement moins dispersé que le signal obtenu avec le vecteur singulier de la TRTM. En revanche, pour  $\sigma/\omega_{Th} \approx 2$  et  $\sigma/\omega_{Th} \approx 4$ , ce dernier a une largeur à mi-hauteur plus faible que celui obtenu avec le vecteur optimisé. Pourtant, le tableau III.19 indique que l’écart-type du signal transmis est plus faible d’un facteur 1,7 et 1,5 lorsqu’on injecte  $|\psi\rangle_V$  à la place de  $|\psi\rangle_{TRTM(t_1)}$ . Ceci est dû au fait qu’aux temps longs, le signal transmis par  $|\psi\rangle_V$  ne présente pas de queue lentement décroissante, contrairement au signal obtenu avec  $|\psi\rangle_{TRTM(t_1)}$ . Pour ce dernier, le signal transmis a un écart-type relativement proche de celui obtenu avec une onde plane. L’optimisation permet donc bel et bien de réduire de manière significative l’écart-type, mais la TRTM permet d’obtenir un profil avec un pic de plus faible largeur à mi-hauteur pour  $\sigma/\omega_{Th} > 1$ .

Sont également représentés sur les Figs. III.18 (a), (b) et (c) le profil du signal transmis lorsqu’on injecte le vecteur obtenu par minimisation de la variance tout en maximisant

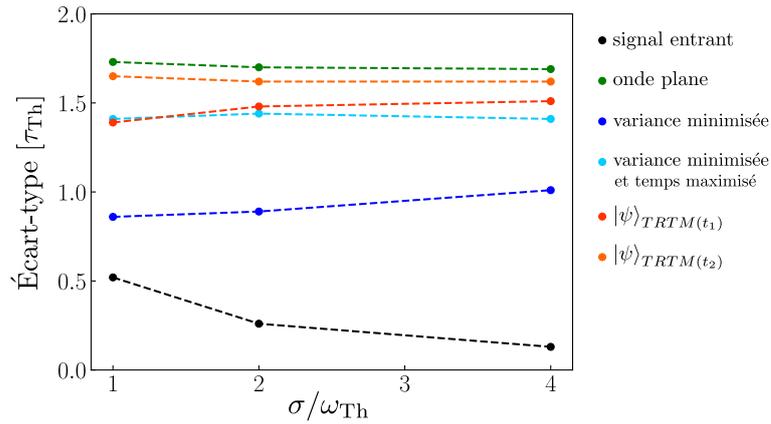


FIGURE III.20 – Écart-type des profils représentés sur les Figs. III.15 (a), (b), (c) et III.18 (a), (b), (c) en fonction de  $\sigma/\omega_{Th}$ .

le temps moyen et en gardant une transmission supérieure à  $\bar{T}$ , ainsi que le profil dû à  $|\psi\rangle_{TRTM(t_2)}$ , avec  $t_2$  un instant proche du maximum du précédent profil. Le profil obtenu avec le vecteur optimisé reste plus piqué que le profil obtenu avec  $|\psi\rangle_{TRTM(t_2)}$  quand  $\sigma$  augmente.

## III.6 Conclusion

Nous avons établi des expressions, à l'aide de la sous-matrice de diffusion  $\tilde{s}$  et de ses dérivées première et seconde par rapport à la fréquence, du temps moyen et de la variance centrée réduite du signal sortant dans un ensemble arbitraire de canaux de sortie lorsqu'un milieu quelconque est éclairé par une impulsion avec un front d'onde arbitraire. Contrairement à l'expression du temps de séjour, ces expressions font intervenir plusieurs opérateurs. Néanmoins, ces opérateurs peuvent tous se construire aisément à partir de la matrice de diffusion du milieu. Nous avons ainsi construit numériquement ces opérateurs à partir des matrices de transmission et réflexion, elles-mêmes obtenues par résolution de l'équation de Helmholtz à de multiples fréquences. Nous avons alors montré l'existence de fronts d'onde produisant des signaux transmis qui se distinguent temporellement du signal obtenu avec une onde plane dans des régimes où la largeur spectrale est voisine de la pulsation de Thouless. En particulier, nous avons vu qu'il est possible de fortement limiter la dispersion temporelle en minimisant l'expression algébrique de la variance. Notons enfin que disposer d'une expression du temps moyen et de la variance construite uniquement à partir de la matrice de diffusion permet, dans un contexte expérimental, de trouver les fronts d'onde optimaux sans avoir à implémenter une boucle itérative d'optimisation nécessitant la mesure du signal transmis à chaque itération.



# Chapitre IV

## Contrôle de flux locaux en transmission par optimisation du flux réfléchi

### IV.1 État de l'art et objectifs

#### IV.1.1 Méthode de focalisation non-invasive à travers et à l'intérieur d'un milieu diffusant

Nous avons vu au chapitre 1 qu'il est possible, grâce aux techniques de modulation du front d'onde, de focaliser spatialement l'intensité lumineuse à une position arbitraire à travers un milieu fortement diffusant [15, 25]. Focaliser la lumière sur une cible à travers ou à l'intérieur d'un tel milieu est particulièrement intéressant pour les applications liées à la microscopie. En effet, si l'on sait focaliser la lumière dans un plan d'observation donné, on peut reconstruire une image en balayant la position du point focal. Cependant, les techniques de contrôle du front d'onde qui ont permis d'apprendre à focaliser la lumière à travers des milieux diffusants nécessitent soit d'avoir accès au champ dans le plan de focalisation [25], soit d'avoir un signal de retour provenant de ce plan [15]. Ceci constitue une limite forte à l'utilisation des approches de contrôle du front d'onde pour l'imagerie non-invasive dans les tissus biologiques.

En 2012, J. Bertolotti et ses collaborateurs ont reconstitué la forme d'un objet fluorescent placé derrière une fine couche diffusante [123]. En exploitant l'effet mémoire angulaire, ils ont pu mesurer l'autocorrélation de l'objet puis réussi à reconstituer, à l'aide d'un algorithme itératif, l'image de l'objet. Par la suite, d'autres travaux basés sur l'autocorrélation de speckle ont permis d'obtenir l'image d'objets fluorescents ou non à travers des milieux opaques [124–126]. Mais cette technique est limitée par la portée de l'effet mémoire (qui est réduite à la taille d'un grain de speckle pour un objet au contact ou à l'intérieur d'un milieu diffusant) et la complexité de l'algorithme de reconstruction. Une autre façon d'exploiter l'effet mémoire est d'apprendre dans un premier temps à focaliser en un point grâce aux techniques de modulation du front d'onde, puis de balayer la position du point focal en inclinant le front d'onde incident. Bien que cela nécessite une nouvelle fois un signal de retour permettant d'apprendre la focalisation initiale, une seule

optimisation est nécessaire. Cette optimisation peut se faire de manière non invasive en maximisant par exemple le signal total de fluorescence à deux-photons [127], ou encore en maximisant le contraste du signal de fluorescence à un photon [128, 129], ce que ne permet pas la maximisation du signal total de fluorescence (le signal de fluorescence à un photon étant linéaire en intensité, la maximisation de ce dernier conduit à maximiser l'intensité sur l'ensemble des particules fluorescentes et pas nécessairement à focaliser la lumière sur une particule). Cependant, ces techniques restent elles aussi limitées par la courte portée de l'effet mémoire.

Il est également possible d'utiliser le signal acousto-optique afin de focaliser dans un milieu diffusant. Dans une expérience d'acousto-optique, des ultrasons sont focalisés à l'intérieur du milieu d'intérêt. Les photons passant au niveau du foyer acoustique sont décalés en fréquence de la fréquence des ultrasons. Ils sont appelés photons marqués. Maximiser le signal correspondant aux photons marqués permet d'apprendre à focaliser la lumière au niveau du foyer acoustique [130–135]. On peut finalement noter l'utilisation de la matrice de transmission acousto-optique, qui relie le champ incident au champ décalé en fréquence produit dans le milieu au niveau d'une zone marquée par une onde acoustique, pour focaliser dans un milieu diffusant : l'état singulier associé à la plus grande valeur singulière de la matrice est celui qui maximise la quantité détectée de photons marqués, et donc focalise au niveau du focus acoustique [136].

La revue [137] résume les résultats obtenus concernant l'imagerie non-invasive à travers des milieux opaques par optimisation d'un signal de rétro-contrôle en utilisant les techniques de contrôle du front d'onde. L'inconvénient majeur des techniques mentionnées ci-dessus ou dans la revue [137] réside dans le fait que ces dernières nécessitent la détection d'un signal (fluorescence, photons marqués, etc) spécifique à la zone sur laquelle on souhaite focaliser. Bien souvent, un tel signal n'est pas disponible naturellement sans utiliser de méthode invasive ou introduire des marqueurs dans le milieu.

### IV.1.2 Intensité transmise conditionnelle

On peut alors se demander s'il est possible, à partir du seul speckle réfléchi, d'apprendre à focaliser en transmission d'un milieu diffusant. Des travaux récents, initiés à l'Institut Langevin, ont quantifié les corrélations spatiales et l'information mutuelle qui existent entre le speckle réfléchi et le speckle transmis de part et d'autre d'un milieu diffusant [138–143]. Les corrélations spatiales d'intensité entre un point  $\mathbf{r}_R$  situé en réflexion, et un point  $\mathbf{r}_T$  situé en transmission sont quantifiées par le corrélateur :

$$C(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) = \frac{\langle I(\mathbf{r}_R)I(\mathbf{r}_T) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle} - 1, \quad (\text{IV.1})$$

où  $I$  désigne l'intensité du champ. Il est également possible de définir les corrélations spatiales entre deux points situés en transmission ou en réflexion. Dans la suite, on désignera par corrélations R/T (associées au corrélateur  $C^{RT}$ ) les corrélations entre un point situé en réflexion et un point situé en transmission, corrélations T/T (associées au corrélateur  $C^{TT}$ ) celles entre deux points en transmission, et corrélations R/R (associées au corrélateur  $C^{RR}$ ) celles entre deux points en réflexion. Ces différentes configurations sont illustrées sur la Fig. IV.1. À l'Institut Langevin, N. Fayard et ses collaborateurs ont

calculé explicitement le corrélateur  $C^{RT}$  pour un milieu éclairé par une onde plane, donnant des prédictions en accord avec les simulations réalisées [140, 141]. Ces chercheurs ont par la suite montré que, pour des milieux de grande épaisseur optique, ces corrélations sont négatives, ne dépendent pas du libre parcours moyen de transport, et diminuent algébriquement avec l'épaisseur du milieu [141]. En 3D, l'amplitude du corrélateur vaut :

$$C^{RT} \sim -\frac{1}{(kL)^2}, \quad (\text{IV.2})$$

où  $L$  est l'épaisseur du milieu, et  $k$  la norme du vecteur d'onde. Ces corrélations ont également été mises en évidence expérimentalement [141]. Dans la Réf. [142], les corrélations R/T, R/R, et T/T ont été utilisées pour exprimer la distribution jointe d'intensité réfléchie et transmise. Cette distribution jointe permet de calculer l'information mutuelle entre le speckle réfléchi et transmis [142], mais également le profil moyen d'intensité transmise connaissant l'intensité réfléchie. Cette analyse montre que si l'on mesure une intensité réfléchie inférieure au niveau de réflexion moyen sur une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ , alors l'intensité transmise mesurée en vis-à-vis de la zone  $\mathcal{D}$  est en moyenne augmentée par rapport au niveau de transmission moyen. Cette augmentation est d'autant plus importante que l'intensité réfléchie mesurée est faible. L'intensité transmise, après moyenne sur les configurations du désordre pour lesquels l'intensité réfléchie est faible dans la zone  $\mathcal{D}$ , présente un profil paramétré uniquement par  $L$  et  $D$ , avec un maximum se trouvant en vis-à-vis de la zone  $\mathcal{D}$ . Dans le dernier chapitre de sa thèse (non publié), N. Fayard a testé numériquement la validité de ces prédictions en sélectionnant des configurations du milieu désordonné éclairé par une onde plane qui donnaient lieu à une intensité réfléchie inférieure à la valeur moyenne dans une zone  $\mathcal{D}$  de taille  $D$  variable. Ces configurations sont trouvées en testant de très nombreuses configurations aléatoires du désordre, et en ne retenant que celles qui satisfont au critère choisi. Pour  $D \gg \lambda$ , de telles configurations sont extrêmement rares. Afin de s'affranchir de la statistique du désordre, sur lequel nous n'avons par ailleurs aucun contrôle dans une expérience classique d'imagerie en milieu diffusant, une idée consiste à se tourner vers les techniques de modulation du front d'onde en vue de minimiser l'intensité réfléchie dans une zone de largeur  $D$  pour une réalisation du désordre donnée.

### IV.1.3 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous rappelons dans un premier temps les propriétés des corrélations R/T, puis expliquons comment calculer, à partir de ces corrélations, le profil moyen d'intensité transmise connaissant l'intensité réfléchie sur une zone  $\mathcal{D}$  de taille arbitraire. Nous analysons en particulier le profil moyen d'intensité transmise que l'on mesure lorsque l'intensité réfléchie est inférieure au niveau de réflexion moyen sur une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ , en terme d'augmentation du niveau de transmission et de focalisation spatiale. Puis nous présentons des simulations numériques 2D de contrôle de front d'onde (réalisées par N. Fayard en 2018) visant à optimiser la transmission par réduction de la réflexion dans la zone  $\mathcal{D}$ . Le profil moyen d'intensité transmise, après optimisation du flux réfléchi, présente une augmentation locale par rapport au profil moyen d'intensité transmise obtenu pour un front d'onde plan. Nous comparons, en terme d'amplitude, les profils moyens d'intensité transmise obtenus numériquement avec les prédictions présentées précédemment. Enfin,

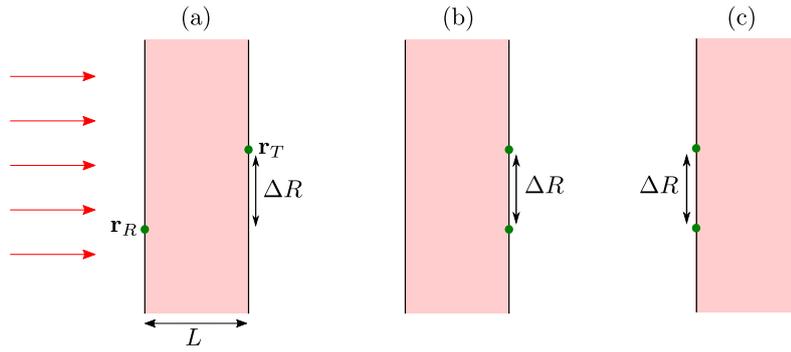


FIGURE IV.1 – (a) Configuration R/T avec une onde plane incidente normale à la surface du milieu. (b) Configuration T/T. (c) Configuration R/R.

nous présentons nos travaux expérimentaux réalisés durant la dernière année de thèse, dont le but est de déterminer si les prédictions des simulations numériques peuvent être reproduites dans des conditions réalistes.

## IV.2 Corrélations R/T

### IV.2.1 Corrélation gaussiennes

Le fonction de corrélation (IV.1) est un corrélateur de quatre champs :

$$C(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) = \frac{\langle E(\mathbf{r}_R)E^*(\mathbf{r}_R)E(\mathbf{r}_T)E^*(\mathbf{r}_T) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle} - 1. \quad (\text{IV.3})$$

En première approximation, le champ en sortie d'un milieu diffusant peut être représenté par une variable aléatoire gaussienne. Cette approximation conduit à la loi de Rayleigh pour la distribution d'intensité en transmission et réflexion d'un milieu diffusant :

$$P_{Ray}(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-I/\langle I \rangle}. \quad (\text{IV.4})$$

Pour un champ décrit par une variable aléatoire gaussienne, le corrélateur (IV.3) s'écrit [144] :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) &\simeq \frac{\langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle + \langle |E(\mathbf{r}_R)E(\mathbf{r}_T)^*|^2 \rangle}{\langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle} - 1 \\ &= \frac{\langle |E(\mathbf{r}_R)E(\mathbf{r}_T)^*|^2 \rangle}{\langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle}. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Les corrélations apparaissant dans l'Eq. (IV.5) sont appelées corrélations  $C_1$ . Ces corrélations gaussiennes sont dominantes à courtes portées pour les configurations R/R et T/T, et rendent compte de la structure granulaire du speckle en réflexion et transmission [4]. Pour la configuration R/T,  $C_1^{RT}$  varie comme [144] :

$$C_1^{RT}(\Delta R = 0) \propto e^{-L/\ell_s}, \quad (\text{IV.6})$$

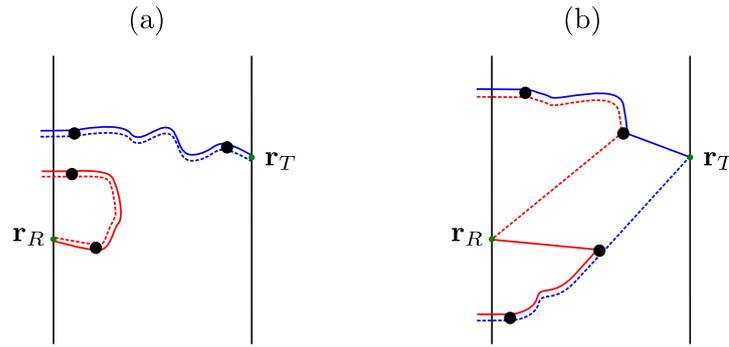


FIGURE IV.2 – (a) Diagramme correspondant au produit non-corrélé des intensités moyennes  $\langle I(\mathbf{r}_R)I(\mathbf{r}_T) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle$ . (b) Diagramme correspondant aux corrélations  $C_1^{RT}$ .

où  $\Delta R$  est la distance transverse entre les deux points considérés, comme illustré sur la Fig. IV.1, et  $\ell_s$  le libre parcours moyen de diffusion. Les corrélations  $C_1^{RT}$  s'atténuent exponentiellement avec l'épaisseur optique  $b = L/\ell_s$  du milieu, et sont donc de très faible amplitude pour des milieux de grande épaisseur optique.

### IV.2.2 Approche diagrammatique

Une approche couramment utilisée pour calculer des corrélations d'intensité est l'approche diagrammatique, largement présentée et utilisée dans la Réf. [4]. Cette dernière consiste à représenter sous forme de diagrammes les séquences de diffusion impliquant 4 champs. L'objectif consiste ensuite à trouver les chemins qui dominent lorsque l'on moyenne sur les réalisations du désordre. Chaque diagramme correspond à une contribution au corrélateur qui peut être calculée à partir de briques élémentaires qui sont le champ moyen et l'intensité moyenne (cette dernière obéissant à une équation de diffusion [4]).

La Fig. IV.2 montre deux diagrammes impliqués dans le calcul de  $C^{RT}$ . La Fig. IV.2 (a) est un diagramme composé de deux paires de champs. Chaque paire contient un champ et son conjugué qui suivent une même séquence de diffusion. Une telle paire est appelée diffuson (il obéit à une équation de diffusion). La Fig. IV.2 (a) montre donc deux diffusons dont l'un contribue à  $I(\mathbf{r}_R)$  et l'autre à  $I(\mathbf{r}_T)$  de façon indépendante, ce qui correspond au produit non-corrélé des deux intensités moyennes  $\langle I(\mathbf{r}_R)I(\mathbf{r}_T) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_R) \rangle \langle I(\mathbf{r}_T) \rangle$ . La Fig. IV.2 (b) montre deux diffusons dont le champ et le champ conjugué subissent une séquence de diffusion identique, à l'exception du dernier événement de diffusion, correspondant à soit une sortie en réflexion, soit en transmission, sous forme de champ moyen qui s'amortit exponentiellement avec l'épaisseur traversée. Ce diagramme représente la contribution  $C_1^{RT}$ .

### IV.2.3 Corrélations non-gaussiennes

Pour la configuration T/T, la première correction aux corrélations gaussiennes provient des séquences de diffusion impliquant le croisement de deux diffusons avec échange de partenaires, les corrélations correspondantes sont appelées  $C_2^{TT}$ , et sont de longue portée. Par conséquent, elles sont dominantes devant  $C_1^{TT}$  aux distances supérieures à la longueur

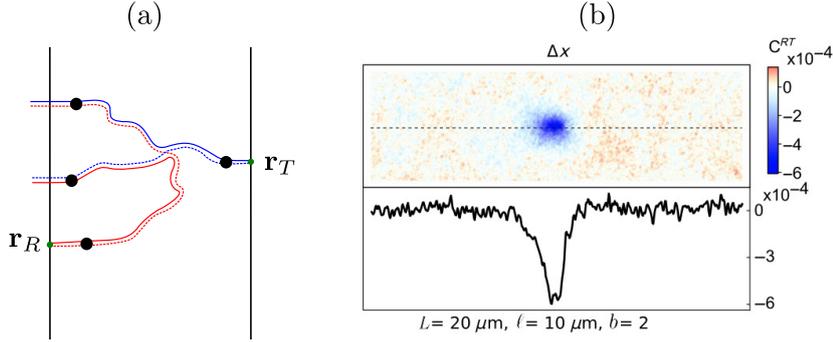


FIGURE IV.3 – (a) Diagramme correspondant au corrélateur  $C_2^{RT}$ . (b) Mesure expérimentale de  $C_2^{RT}$ , issue de [141] pour un milieu d'épaisseur optique  $b = 2$ .

d'onde [4, 145–147]. Le diagramme correspondant au corrélateur  $C_2$  pour la configuration R/T est représenté sur la Fig. IV.3 (a). Pour la configuration R/T, la contribution  $C_2^{RT}$  ne dépend pas du libre parcours moyen dans le régime de grande épaisseur optique, et s'écrit [141, 142] :

$$C_2^{RT}(\Delta R) = -\frac{1}{(kL)^{d-1}} f_d(\Delta R/L), \quad (\text{IV.7})$$

où  $d$  est la dimension de l'espace, et  $f_d$  une fonction positive décroissante d'amplitude et de largeur de l'ordre de l'unité. Le corrélateur  $C_2^{RT}$  est donc négatif, a une portée de l'ordre de  $L$ , et s'atténue algébriquement avec l'épaisseur du milieu. Pour la configuration R/T,  $C_2^{RT}$  est la contribution dominante aux corrélations R/T lorsque l'épaisseur du milieu est plus grande que la longueur d'onde. Ces corrélations ont été mises en évidence expérimentalement récemment [142]. La Fig. IV.3 (b) reproduit une mesure issue de la Réf. [141] pour un milieu d'épaisseur optique  $b = 2$ .

### IV.3 Statistique conditionnelle de l'intensité transmise

Le but de cette section est de montrer comment il est possible, à l'aide de la distribution jointe d'intensité réfléchi et transmise, d'estimer le profil moyen d'intensité transmise connaissant l'intensité en divers points situés en réflexion d'un milieu diffusant.

#### IV.3.1 Statistique conditionnelle avec un point en réflexion et un point en transmission

Commençons par considérer le cas où nous connaissons la valeur  $I_o$  de l'intensité  $I_R$  en un point en réflexion  $\mathbf{r}_R$ , et cherchons la valeur de l'intensité  $I_T$  en un point en transmission  $\mathbf{r}_T$  après moyenne sur le désordre. Nous notons cette intensité conditionnelle  $\langle I_{T,c} \rangle = \langle I_T | I_R = I_o \rangle$ . Dans la suite nous considérerons les intensités normalisées par leur valeur moyennée sur le désordre,  $\tilde{I} = I / \langle I \rangle$ . On cherche donc à calculer  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle = \langle \tilde{I}_T | \tilde{I}_R = \tilde{I}_o \rangle$ . Cette quantité s'exprime comme :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle = \int d\tilde{I}_T \frac{\tilde{I}_T P(\tilde{I}_R = \tilde{I}_o, \tilde{I}_T)}{P(\tilde{I}_R = \tilde{I}_o)}, \quad (\text{IV.8})$$

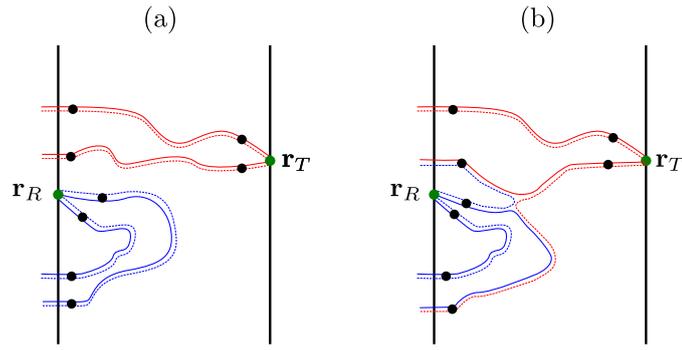


FIGURE IV.4 – Deux diagrammes intervenant dans le calcul du moment d'ordre (2,2)  $\langle \tilde{I}_R^2 \tilde{I}_T^2 \rangle$ . (a) Diagramme des moments non-corrélés  $\langle \tilde{I}_R \rangle^2 \langle \tilde{I}_T \rangle^2$ . (b) Corrélacion du moment d'ordre (2,2) par croisement de deux diffusons avec échange de partenaires.

où  $P(\tilde{I}_R, \tilde{I}_T)$  est la distribution jointe des intensités normalisées réfléchie et transmise, et  $P(\tilde{I}_R)$  la distribution d'intensité réfléchie normalisée. Calculer la distribution d'une variable aléatoire  $X$  est équivalent à calculer tous ses moments  $\langle X^M \rangle$  pour  $M$  entier allant de 0 à  $+\infty$ . Pour une variable aléatoire  $X$ , la distribution  $P(X = x)$  des valeurs de cette variable est donnée par :

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{(ik)^M}{M!} \langle X^M \rangle e^{-ikx}. \quad (\text{IV.9})$$

De la même façon, la distribution jointe  $P(x, y)$  de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  s'exprime comme :

$$P(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_y \int dk_x \sum_{N, M=0}^{+\infty} \frac{(ik_y)^N}{N!} \frac{(ik_x)^M}{M!} \langle X^M Y^N \rangle e^{-ik_x x} e^{-ik_y y}. \quad (\text{IV.10})$$

Calculer la distribution jointe d'intensité  $P(\tilde{I}_R, \tilde{I}_T)$  revient donc à connaître tous les moments  $\langle \tilde{I}_R^M \tilde{I}_T^N \rangle$ . Le corrélateur  $C^{RT}$  correspond au moment d'ordre (1,1) de cette distribution jointe.

### Développement perturbatif

Nous avons vu, pour un milieu d'épaisseur  $L > \lambda$ , que la contribution majeure aux corrélacions R/T vient de  $C_2^{RT}$ , correspondant au croisement de deux diffusons avec échange de partenaires de diffusion. De manière analogue, le moment  $\langle \tilde{I}_R^M \tilde{I}_T^N \rangle$  peut être calculé de façon perturbative.  $\tilde{I}_R^M$  fait intervenir  $M$  champs et  $M$  champs conjugués, et  $\tilde{I}_T^N$  fait intervenir  $N$  champs et  $N$  champs conjugués. La première contribution au moment d'ordre  $(M, N)$  provient du croisement de deux diffusons avec échange de partenaires, comme représenté sur la Fig. IV.4 (b) pour le moment (2,2). En dénombrant les appariements possibles de champs conjugués donnant lieu à de tels diagrammes, on obtient [142] :

$$\langle \tilde{I}_R^M \tilde{I}_T^N \rangle = \langle \tilde{I}_R^M \rangle \langle \tilde{I}_T^N \rangle + \langle \tilde{I}_R^{M-1} \rangle \langle \tilde{I}_T^{N-1} \rangle M^2 N^2 C_2^{RT}. \quad (\text{IV.11})$$

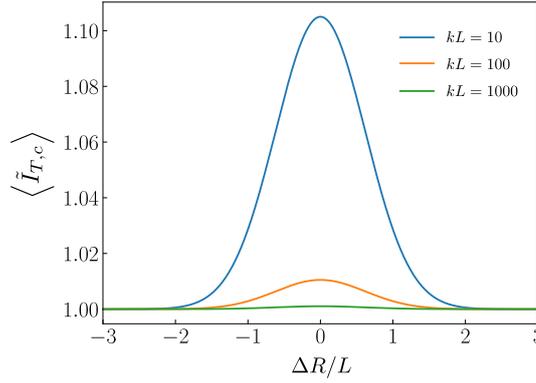


FIGURE IV.5 –  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  obtenue à partir de l'Eq. (IV.15) en fonction de la distance transverse  $\Delta R/L$  avec  $\tilde{I}_R = 0$  pour plusieurs valeurs de l'épaisseur du milieu dans un système 2D.

De cette expression du moment d'ordre  $(M, N)$ , il en découle que la probabilité jointe d'intensité en transmission s'écrit [142] :

$$P(\tilde{I}_R, \tilde{I}_T) = P(\tilde{I}_R)P(\tilde{I}_T) \left[ 1 + C_2^{RT}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T)v(\tilde{I}_R)v(\tilde{I}_T) \right], \quad (\text{IV.12})$$

où :

$$v(x) = \frac{\partial_x [x \partial_x P]}{P(x)}. \quad (\text{IV.13})$$

L'Eq. (IV.12) montre que  $C_2^{RT}$  quantifie l'écart à l'indépendance entre l'intensité transmise et l'intensité réfléchie. Ainsi,  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  prend la forme :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle = \int d\tilde{I}_T \tilde{I}_T P(\tilde{I}_T) \left[ 1 + C_2^{RT}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T)v(\tilde{I}_o)v(\tilde{I}_T) \right]. \quad (\text{IV.14})$$

Dans la suite, on supposera que  $L \gg \ell, \ell_s \gg \lambda$ . Dans ce régime,  $C_2^{TT} \ll 1$  et  $C_2^{RR} \ll 1$ , si bien que  $P(\tilde{I}_T)$  et  $P(\tilde{I}_R)$  sont bien décrites par la loi de Rayleigh  $P_{Ray}(\tilde{I}) = e^{-\tilde{I}}$ . On obtient dès lors  $v(x) = x - 1$  et :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle = 1 + C_2^{RT}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) (\tilde{I}_o - 1). \quad (\text{IV.15})$$

En raison du signe négatif de  $C_2^{RT}$ , la variation relative d'intensité  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle - 1$  est égale à l'opposé de la variation relative de l'intensité réfléchie  $\tilde{I}_o - 1$ , multipliée par l'amplitude des corrélations  $C_2^{RT}$ . Cette variation relative est maximale quand le point en transmission  $\mathbf{r}_T$  se situe en vis-à-vis du point  $\mathbf{r}_R$ , comme le montre la Fig. IV.5 pour un système 2D. L'approximation gaussienne suivante de  $f_2$  définie dans l'Eq. (IV.7) a été utilisée pour exprimer  $C_2^{RT}$  [142] :

$$f_2(x) \approx \alpha e^{-\beta x^2}, \quad (\text{IV.16})$$

où  $\alpha \approx 1.05$  et  $\beta \approx 1.3$ . La portée transverse de  $C_2^{RT}$  valant  $\sim L$ , l'intensité apparaissant dans l'Eq. (IV.15) est augmentée sur une zone de taille  $L$ .

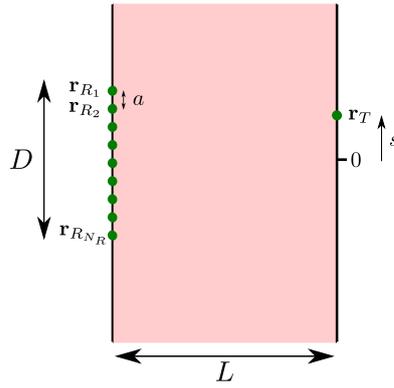


FIGURE IV.6 – Schéma du système étudié. L'intensité réfléchie en  $N_R$  points situés dans une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$  est connue.

### IV.3.2 Statistique conditionnelle avec plusieurs grains de speckle en réflexion

On considère maintenant la situation où nous mesurons l'intensité en  $N_R$  points régulièrement espacés en réflexion, et couvrant une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ , comme illustré sur la Fig. IV.6. La distance  $a$  entre deux points consécutifs est supposée supérieure à la taille d'un grain de speckle, de sorte que les intensités en réflexion sont peu corrélées. On cherche maintenant à calculer la valeur moyenne de l'intensité transmise en  $\mathbf{r}_T$  connaissant l'intensité réfléchie sur l'ensemble des points  $\mathbf{r}_{R_i}$ ,  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle = \langle \tilde{I}_T | \{ \tilde{I}_{R_i} \} \rangle$ . Nous avons besoin de la distribution jointe  $P(\tilde{I}_{R_1}, \tilde{I}_{R_2}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}, \tilde{I}_T)$ . Avec le même raisonnement que précédemment, consistant à ne retenir que les diagrammes faisant intervenir  $C_2^{RT}$  pour corréler les intensités réfléchie et transmise, on obtient pour la distribution jointe [142] :

$$P(\tilde{I}_{R_1}, \tilde{I}_{R_2}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}, \tilde{I}_T) = P(\tilde{I}_{R_1}, \tilde{I}_{R_2}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}) P(\tilde{I}_T) \times \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_R} C_2^{RT}(\mathbf{r}_{R_i}, \mathbf{r}_T) v_i(\tilde{I}_{R_1}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}) v(\tilde{I}_T) \right), \quad (\text{IV.17})$$

où

$$v_i(\tilde{I}_{R_1}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}) = \frac{\partial_{\tilde{I}_{R_i}} \left[ \tilde{I}_{R_i} \partial_{\tilde{I}_{R_i}} P(\tilde{I}_{R_1}, \tilde{I}_{R_2}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}) \right]}{P(\tilde{I}_{R_1}, \tilde{I}_{R_2}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}})}. \quad (\text{IV.18})$$

En négligeant  $C_2^{TT}$  en  $\mathbf{r}_T$  ainsi que  $C_1^{RR}$  et  $C_2^{RR}$  entre deux points distincts n'appartenant pas aux mêmes grains de speckle de la surface en réflexion ( $C_2^{RR} \ll 1$  pour  $k\ell \gg 1$  [142]), on obtient  $v_i(\tilde{I}_{R_1}, \dots, \tilde{I}_{R_{N_R}}) = \tilde{I}_{R_i} - 1$  et  $v(\tilde{I}_T) = \tilde{I}_T - 1$ , si bien que l'intensité transmise devient :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle \approx 1 + \sum_{i=1}^{N_R} C_2^{RT}(\mathbf{r}_{R_i}, \mathbf{r}_T) (\tilde{I}_{R_i} - 1). \quad (\text{IV.19})$$

La connaissance de l'intensité en chaque point  $\mathbf{r}_{R_i}$  apporte une contribution à l'intensité transmise conditionnelle qui dépend de l'intensité réfléchie au point  $\mathbf{r}_{R_i}$ , ainsi que de la distance transverse entre le point  $\mathbf{r}_{R_i}$  et le point en transmission via le corrélateur  $C_2^{RT}$ .

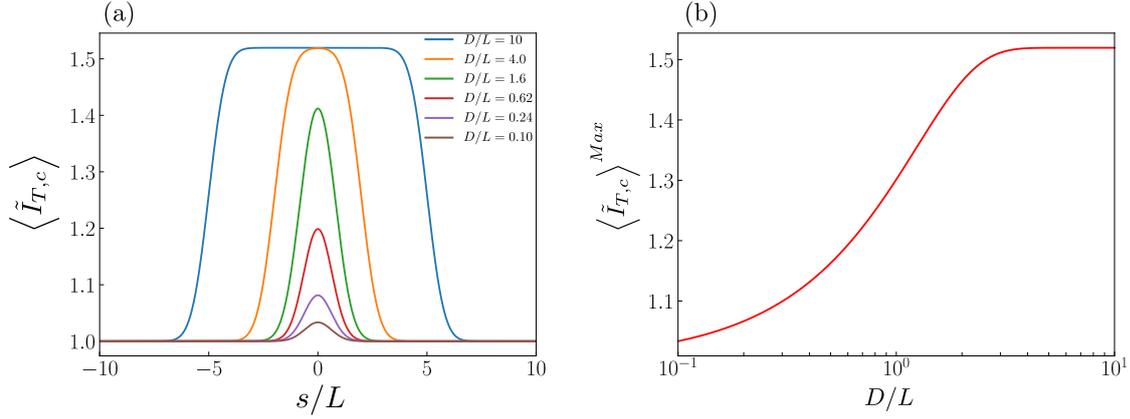


FIGURE IV.7 – (a) Intensité transmise conditionnelle moyenne pour un système 2D en fonction de la position transverse  $s$  lorsque l’intensité réfléchie sur la zone  $\mathcal{D}$  est nulle. (b) Maximum de  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  en fonction de la taille  $D$  de la zone  $\mathcal{D}$ .

### Continuum de points

Dans la limite où l’on mesure un continuum de points couvrant la zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ , les points en réflexion séparés d’une distance inférieure à  $\lambda/2$  portent la même information. L’équation (IV.19) peut être approximée par :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle \approx 1 + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbf{r} \in \mathcal{D}} d\mathbf{r} C_2^{RT}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) (\tilde{I}_{\mathbf{r}} - 1). \quad (\text{IV.20})$$

On peut remarquer que pour un champ incident non-contrôlé,  $\tilde{I}_{\mathbf{r}} - 1$  est une variable aléatoire centrée en 0, et donc les contributions de  $C_2^{RT}$  se moyennent statistiquement à 0. Pour tirer profit de ces corrélations, il est nécessaire de trouver des cas particuliers pour lesquels les valeurs de réflexion sont corrélées sur la zone  $\mathcal{D}$ .

### IV.3.3 Faible réflexion sur l’ensemble de la zone $\mathcal{D}$

On suppose ici que l’intensité réfléchie est homogène et vaut  $\tilde{I}_o$  sur l’ensemble de la zone  $\mathcal{D}$ . L’Eq. (IV.20) s’écrit alors :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle = 1 + \frac{2(\tilde{I}_o - 1)}{\lambda} \int_{\mathbf{r} \in \mathcal{D}} d\mathbf{r} C_2^{RT}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T). \quad (\text{IV.21})$$

La variation relative de l’intensité  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle - 1$  est inversement proportionnelle à la variation relative de l’intensité réfléchie dans la zone  $\mathcal{D}$  multipliée par la valeur absolue de l’intégrale de  $C_2^{RT}$  sur la zone où on mesure l’intensité réfléchie. Pour illustrer cette prédiction, considérons le cas d’un système 2D. L’Eq. (IV.21) s’écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}_{T,c} \rangle(s) &= 1 + \frac{2(\tilde{I}_o - 1)}{\lambda} \int_{-D/2}^{D/2} dv C_2^{RT}(v - s) \\ &= 1 + \frac{(\tilde{I}_o - 1)}{\pi} \int_{-D/2L - s/L}^{D/2L - s/L} du f_2(u), \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

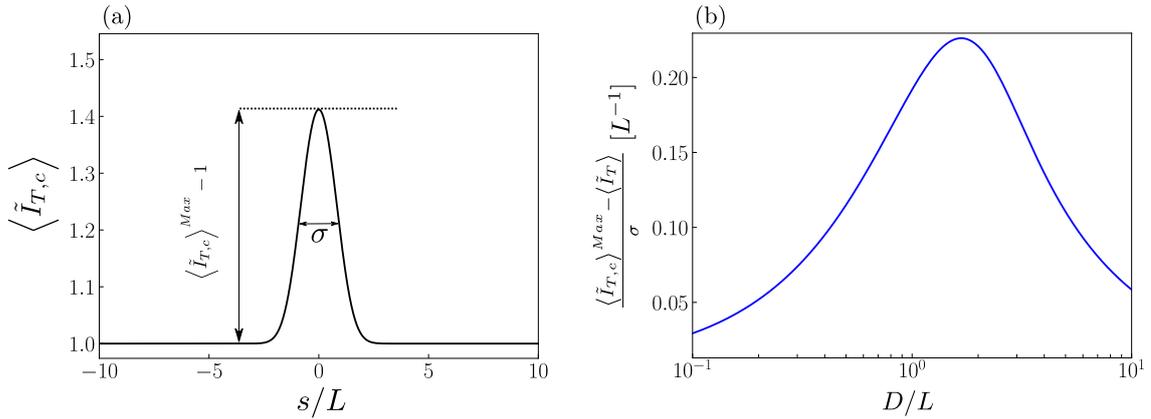


FIGURE IV.8 – (a) Schéma illustrant les quantités utilisées pour évaluer le degré de focalisation.  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle^{Max} - 1$  est l'augmentation relative maximale de l'intensité transmise conditionnelle, et  $\sigma$  la largeur à mi-hauteur de  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle - 1$ . (b) Degré de focalisation en fonction de  $D$ .

où  $s$  est la position relative du point en transmission par rapport au centre de la zone  $\mathcal{D}$  et  $f_2$  définie dans l'Eq. (IV.7). L'équation (IV.22) montre que pour  $\tilde{I}_o$  fixé,  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  ne dépend que du rapport  $D/L$  et de la position relative  $s/L$  du point en transmission par rapport au centre de la zone  $\mathcal{D}$ . La Fig. IV.7 (a) montre  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  pour un système 2D et différentes valeurs de  $D$  lorsque  $\tilde{I}_R = \tilde{I}_o = 0$  sur l'ensemble de la zone  $\mathcal{D}$ . L'intensité transmise est maximum en  $s = 0$ . On distingue deux régimes :

- $D < L$  : à l'intensité moyenne s'ajoute une contribution positive de largeur  $L$  dont l'amplitude augmente avec  $D$ . En effet, lorsque  $D$  augmente, le nombre de points en réflexion qui contribuent à  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  via  $C_2^{RT}$  augmente.
- $D > L$  : l'intensité transmise présente une augmentation avec un plateau sur une zone de largeur  $\sim L + D$ .

La Fig. IV.7 (b) montre le maximum de  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle$  en fonction de  $D$ . Ainsi,  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle^{Max}$  sature lorsque  $D \gg L$ , et est augmenté d'environ 50% par rapport à l'intensité transmise moyenne. Cette valeur maximale obtenue pour  $D \gtrsim 3L$  ne peut être correcte. En effet, lorsque  $D$  est égal à la largeur de la zone d'illumination et que l'intensité réfléchie est nulle, alors le flux transmis est  $b$  fois supérieur au niveau de transmission moyen,  $b$  étant l'épaisseur optique du milieu. En confondant le flux transmis et l'intensité transmise, on obtient :

$$\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle \propto b. \quad (IV.23)$$

Le raisonnement conduisant à l'Eq. (IV.20) est perturbatif, ne prenant en compte dans l'évaluation des moments de  $P(\tilde{I}_R, \tilde{I}_T)$  que les diagrammes constitués d'un seul échange à quatre champs. Il n'est donc pas surprenant d'obtenir une prédiction pour le maximum de l'intensité conditionnelle différente de celle imposée par la conservation de flux dans la limite  $D \gg L$ .

### Focalisation

Pour évaluer le degré de focalisation, nous considérons le rapport entre le maximum de  $\langle \tilde{I}_{T,c} \rangle - 1$  et la largeur à mi-hauteur  $\sigma$  de cette quantité, comme représenté sur la Fig. IV.8 (a). La Fig. IV.8 (b) représente ce rapport en fonction de  $D$ . Le degré de focalisation est maximal lorsque  $D/L \approx 1.6$ .

### Statistique conditionnelle et contrôle du front d'onde

Nous avons considéré dans la section précédente le cas où nous mesurons une intensité réfléchie inférieure à sa valeur moyenne sur une zone  $D$  de largeur arbitraire lorsqu'un milieu diffusant est éclairé par une onde plane. Une étude basée sur les corrélations R/T prédit en moyenne une augmentation de l'intensité transmise sur une zone qui dépend de la largeur  $D$ . En particulier, l'augmentation de l'intensité transmise présente le meilleur profil en terme de focalisation pour  $D \approx L$ . Cependant, une réalisation du désordre pour laquelle la réflexion est minimale sur toute la zone  $\mathcal{D}$  correspond à un événement rare, d'autant plus rare que la largeur  $D$  de cette zone augmente. Par ailleurs, dans des conditions expérimentales, nous n'avons pas forcément de contrôle sur la réalisation du désordre. Pour remédier à ce problème, on se propose d'utiliser les techniques de modulation du front d'onde afin de forcer un tel comportement, pour une réalisation du désordre imposée, et d'étudier les profils de transmission correspondants.

## IV.4 Expérience numérique de minimisation de la réflexion

Dans cette section, nous présentons des résultats d'expériences numériques de minimisation et maximisation de l'intensité réfléchie sur une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D = L$  par contrôle du front d'onde. Les simulations ont été réalisées par Nikos Fayard. Deux méthodes sont présentées pour minimiser l'intensité réfléchie : une utilisant un algorithme itératif pour optimiser le front d'onde incident, l'autre utilisant la matrice de réflexion. Dans les deux cas, les matrices de réflexion et de transmission d'un milieu diffusant d'épaisseur  $kL = 200$  imbriqués dans un guide d'onde de largeur  $kW = 1500$  ont été obtenues à l'aide de la méthode de construction récursive de la fonction de Green détaillée en Annexe D. Ces matrices de réflexion et de transmission permettent de connaître l'intensité réfléchie et transmise pour un front d'onde arbitraire. Le coefficient de transmission moyen du milieu vaut  $\langle T \rangle = 0.15$ . Du coefficient de transmission moyen, on en déduit que l'épaisseur optique du milieu vaut  $b \approx 10$ .

### Minimisation avec un algorithme itératif

L'optimisation du front d'onde incident est effectuée, non pas dans la base des modes du guide, mais dans l'espace réel, et en modulant uniquement la phase du front d'onde incident en chaque point de la zone  $\mathcal{D}$ , comme schématisé sur la Fig. IV.9. L'amplitude de l'onde incidente est uniforme sur la largeur du guide. Dans une telle situation, un comportement diffusif (donc négligeant tout effet interférentiel) conduirait à un profil de transmission uniforme. En chaque point de la zone  $\mathcal{D}$ , huit valeurs de phase sont testées. La fonction de coût minimisée est l'intensité totale réfléchie dans la zone  $\mathcal{D}$ .

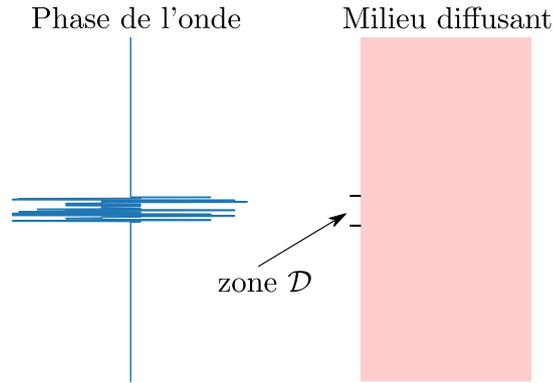


FIGURE IV.9 – Schéma de l'expérience de minimisation.

### Minimisation avec la matrice de réflexion

Il est également possible d'utiliser la matrice de réflexion  $r$  pour minimiser l'intensité dans une zone donnée. L'idée consiste à projeter la matrice de réflexion sur la zone  $\mathcal{D}$ . On considère ensuite les fronts d'ondes incidents construits à partir des états singuliers de la matrice projetée associés aux valeurs singulières minimales. L'état singulier associé à la valeur singulière minimale (resp. maximale) correspond au front d'onde minimisant (resp. maximisant) l'intensité réfléchie dans la zone  $\mathcal{D}$ . La méthode de construction récursive de la fonction de Green donne accès à la matrice de réflexion dans la bases des modes du guide d'onde dans lequel est imbriqué le milieu diffusant. Il convient donc dans un premier temps d'exprimer la matrice de réflexion  $r$  dans la base des pixels en utilisant la matrice de passage de la base des modes à la base des pixels  $C$ . On réduit ensuite la matrice obtenue pour ne prendre en compte que la réflexion dans la zone  $\mathcal{D}$ . On utilise pour cela le projecteur correspondant  $P$ . La matrice résultante s'exprime :

$$r_P = PCrC^\dagger P^\dagger. \quad (\text{IV.24})$$

Bien que la matrice  $r$  soit filtrée, la distribution des valeurs propres de  $r_P^\dagger r_P$  représentée sur la Fig. IV.10 reste très proche de la distribution bimodale :

$$p(R) = \frac{1 - \langle R \rangle}{2} \frac{1}{(1 - R)\sqrt{R}}, \quad (\text{IV.25})$$

où  $\langle R \rangle = 0.85$  est la réflexion moyenne. Seul le nombre de vecteurs propres avec un coefficient de réflexion nul tend à diminuer. Ce faible écart au comportement bimodal provient du fait que la perte d'information induite par le projecteur en sortie est minime tant que  $D \gg \ell$ . La distribution théorique exacte des valeurs propres pourrait être obtenue en utilisant la théorie des matrices filtrées [31].

### Analyse des résultats

La Fig. IV.11 (a) (resp. (b)) montre le profil d'intensité réfléchie (resp. transmise) moyenné sur 100 réalisations du désordre pour trois fronts d'onde incidents : un front d'onde plan et d'amplitude uniforme, un front d'onde d'amplitude uniforme mais de phase modulée obtenue par minimisation de l'intensité réfléchie dans une zone de largeur  $D = L$ , et un

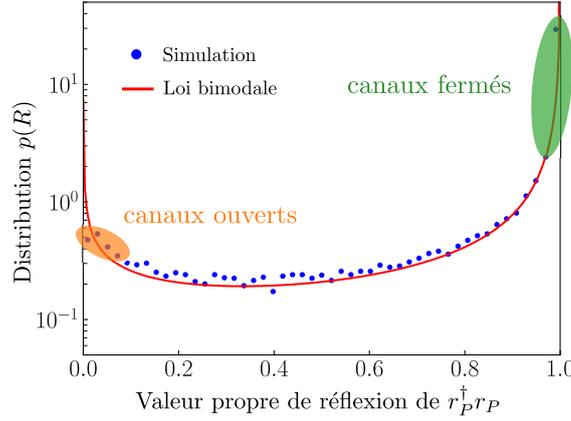


FIGURE IV.10 – Distribution numérique des valeurs propres de la matrice  $r_P^\dagger r_P$  pour un milieu diffusant d'épaisseur  $kL = 200$  imbriqué dans un guide de largeur  $kW = 1500$ . La largeur de la zone correspondant à la matrice de réflexion  $r_P$  est  $kD = kL = 200$ . La réflexion moyenne vaut  $\langle R \rangle = 0.85$ . La distribution a été construite avec 200 réalisations du désordre. La courbe rouge représente la loi bimodale (IV.25).

front d'onde d'amplitude uniforme et de phase modulée obtenue par maximisation de l'intensité réfléchie dans cette même zone. La Fig. IV.11 (c) (resp. (d)) présente quant à elle les profils d'intensité réfléchie (resp. transmise) résultant de la propagation de fronts incidents construits à partir de différents états propres de  $r_P^\dagger r_P$ . L'amplitude des fronts incidents est uniforme et leur phase sur la zone  $\mathcal{D}$  est prise égale à celle des états propres. Les cas d'un état propre de valeur propre minimale (canal ouvert) et maximale (canal fermé) sont considérés.

Pour le front d'onde plan, les profils moyens d'intensité réfléchie et transmise sont uniformes, en raison de l'invariance statistique par translation du système. Avec le front d'onde minimisant l'intensité réfléchie, l'intensité est diminuée d'environ 50% dans la zone d'intérêt. Le profil d'intensité transmise correspondant présente bien une augmentation locale sur une zone de largeur  $\sim L$  en vis-à-vis de la zone  $\mathcal{D}$ . Le maximum du profil d'intensité transmise est environ 3 fois supérieure à l'intensité transmise lorsqu'on injecte le front d'onde plan. Le profil moyen d'intensité réfléchie correspondant au front d'onde construit à partir du canal ouvert en injection est diminuée d'environ 80% dans la zone cible, soit une diminution plus marquée que le profil obtenu par optimisation. Le profil moyen d'intensité transmise correspondant présente un maximum presque 4 fois supérieur au profil moyen obtenu avec un front d'onde plan. D'après les prédictions faites à la section précédente, pour une diminution de l'intensité réfléchie de 50% (resp. 80%), on s'attend à une augmentation maximale de 15% (resp. 24%). Il y a donc un ordre de grandeur de différence entre la valeur observée en simulation et la valeur estimée avec l'Eq. (IV.21). Cela montre que l'analyse perturbative précédente du profil d'intensité transmise ne permet pas de décrire quantitativement le profil d'intensité transmise dans la limite  $D \gg \lambda$ . Les Figs. IV.11 (a) et (c) montrent également une augmentation de l'intensité réfléchie en bordure de la zone où l'intensité est minimisée, ce qui peut s'expliquer par le signe négatif du corrélateur  $C_2^{RR}$  [142].

Il est par ailleurs possible de maximiser la réflexion plutôt que de la minimiser. Le profil

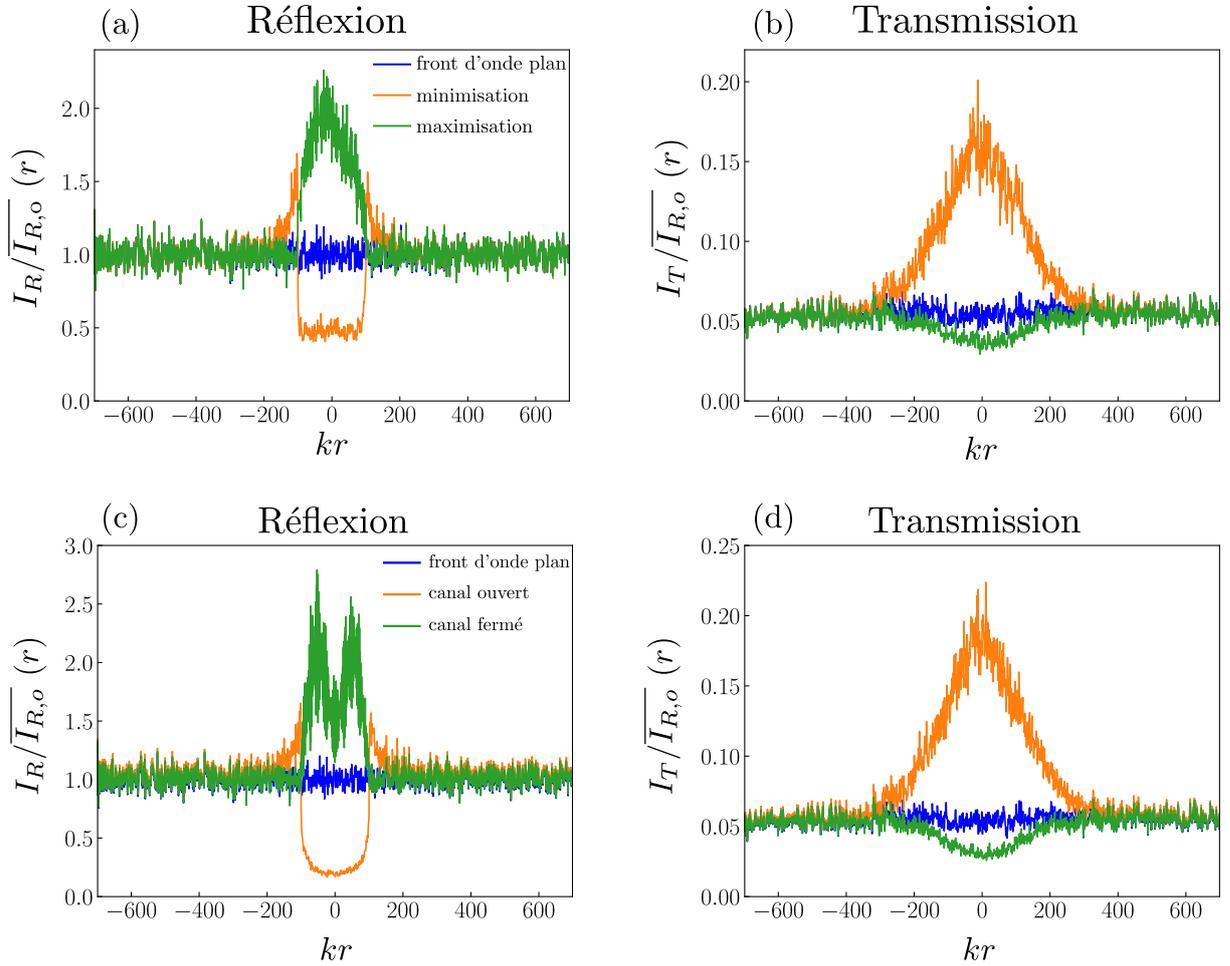


FIGURE IV.11 – (a-b) Profil numériques de (a) l'intensité réfléchie et (b) transmise, moyennés sur 100 réalisations du désordre, pour différents fronts d'onde incidents : un front d'onde plan et d'amplitude uniforme (bleu), un front d'onde d'amplitude uniforme mais de phase obtenue par minimisation (orange) ou maximisation (vert) de l'intensité réfléchie dans une zone de largeur  $kD = kL = 200$ . Les intensités sont renormalisées par  $\overline{I_{R,o}} = \int_{\mathcal{D}} dr I_{R,o}(r) / D$ , où  $I_{r,o}$  est l'intensité réfléchie lorsqu'on injecte un front d'onde plan. (c-d) Profils numériques de (c) l'intensité réfléchie et (d) transmise, moyennés sur 100 réalisations du désordre, pour différents fronts d'onde incidents : un front d'onde plan et d'amplitude uniforme (bleu), un front d'onde d'amplitude uniforme dont la phase correspond à celle d'un canal ouvert de la matrice  $r_P^\dagger r_P$  (orange) et un front d'onde d'amplitude uniforme dont la phase correspond à celles d'un canal fermé de  $r_P^\dagger r_P$  (vert).

moyen d'intensité réfléchi correspondant au front d'onde obtenu de manière itérative est augmenté d'environ 70% par rapport au profil correspondant au front d'onde plan. Le profil transmis correspondant présente une diminution d'intensité d'environ 15%. Le profil moyen d'intensité réfléchi correspondant au front d'onde construit à partir du canal fermé montre une augmentation forte de l'intensité réfléchi avec un profil particulier présentant plusieurs maximums. L'intensité transmise est diminuée d'environ 20%. On peut noter que, d'après l'Eq. (IV.21), la diminution de l'intensité transmise devrait être supérieure ou égale à l'augmentation observée en minimisant l'intensité réfléchi. Cette observation confirme que l'analyse perturbative ne permet pas de décrire quantitativement le profil transmis.

## IV.5 Étude expérimentale de la minimisation de la réflexion par contrôle du front d'onde

Dans cette section, nous minimisons expérimentalement l'intensité réfléchi par un milieu diffusant par contrôle du front d'onde incident, et nous étudions le profil d'intensité transmise. Le milieu diffusant est constitué de particules polydisperses d'oxyde de zinc (ZnO), avec une taille typique de 500 nm, déposés à l'aide d'un aérographe sur une lamelle de microscope. Les échantillons réalisés ont une épaisseur allant de 10  $\mu\text{m}$  à 40  $\mu\text{m}$  avec des variations locales d'épaisseur de  $\pm 1 \mu\text{m}$  dues à la taille des particules de ZnO. Les échantillons diffusants réalisés ont un libre parcours moyen de transport  $\ell = 0.7 \mu\text{m} \pm 0.4 \mu\text{m}$ . Leur préparation et leur caractérisation sont présentées en annexe D. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus avec un échantillon d'épaisseur 11  $\mu\text{m}$ . En supposant que le libre parcours moyen de diffusion est proche du libre parcours moyen de transport, l'épaisseur optique de l'échantillon vaut  $b \approx 15$ .

### IV.5.1 Montage expérimental

Le montage utilisé pour minimiser le flux réfléchi est représenté sur la Fig. IV.12. Il implique un SLM à cristaux liquides réflectif (Meadowlark,  $1920 \times 1152$  pixels, taille des pixels :  $9.2 \mu\text{m} \times 9.2 \mu\text{m}$ ) permettant de contrôler la phase d'une des deux polarisations linéaires du champ, comme expliqué au chapitre 1. Le SLM est vu comme un second écran par l'ordinateur, les images envoyées sur ce dernier sont encodées sur 8 bits, permettant de faire varier linéairement la phase de 0 à  $2\pi$ . Le laser (NewFocus TLB-6712) est un laser accordable sur une plage de longueur d'onde allant de 765 nm à 781 nm, avec une puissance maximale de 60 mW. Pour les expériences présentées, nous travaillons à une longueur d'onde de 773 nm. Le faisceau en sortie du laser est polarisé linéairement. Le faisceau laser est étendu avant d'être projeté sur le SLM. Un pinhole permet de filtrer le faisceau afin d'obtenir un faisceau homogène sur le SLM. La polarisation du faisceau incident sur le SLM est contrôlée à l'aide d'une lame demi-onde. Un montage 4f avec un grossissement de 0.6 permet de faire l'image du SLM dans le plan focal de la lentille  $L_2$ . Ce plan est conjugué avec la face d'entrée du milieu diffusant à l'aide d'un objectif de microscope conjugué fini à huile de grossissement 100 et d'ouverture numérique 1.25. Ainsi, le plan du SLM est conjugué avec la face d'entrée du milieu diffusant, et il y a un facteur de démagnification de 167 entre ces deux plans. La face d'entrée du milieu diffusant est également conjuguée avec le plan de la caméra CCD 2 (GT-2300 de Allied

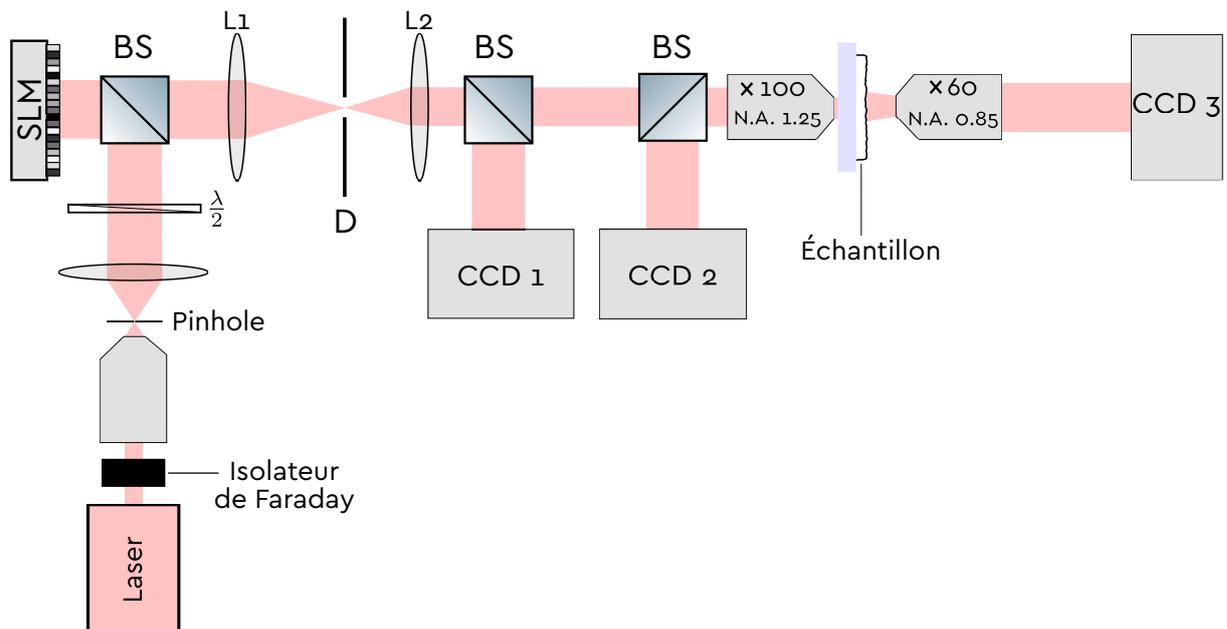


FIGURE IV.12 – Schéma du montage expérimental utilisé pour minimiser l'intensité réfléchie dans une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ . Les lentilles  $L_1$  et  $L_2$  forment un montage  $4f$ . Le diaphragme  $D$  permet de filtrer la lumière non-modulé par le SLM. Le plan de ce dernier est conjugué avec la surface du milieu diffusant en réflexion à l'aide du montage  $4f$  et d'un objectif de microscope conjugué fini (grossissement  $\times 100$ , N.A. 1.25). La caméra CCD 2 image la surface du milieu en réflexion. La caméra CCD 3 image la surface du milieu en transmission à l'aide d'un objectif de microscope conjugué fini (grossissement  $\times 60$ , N.A. 0.85). La caméra CCD 1 image le plan du SLM via le montage  $4f$ .

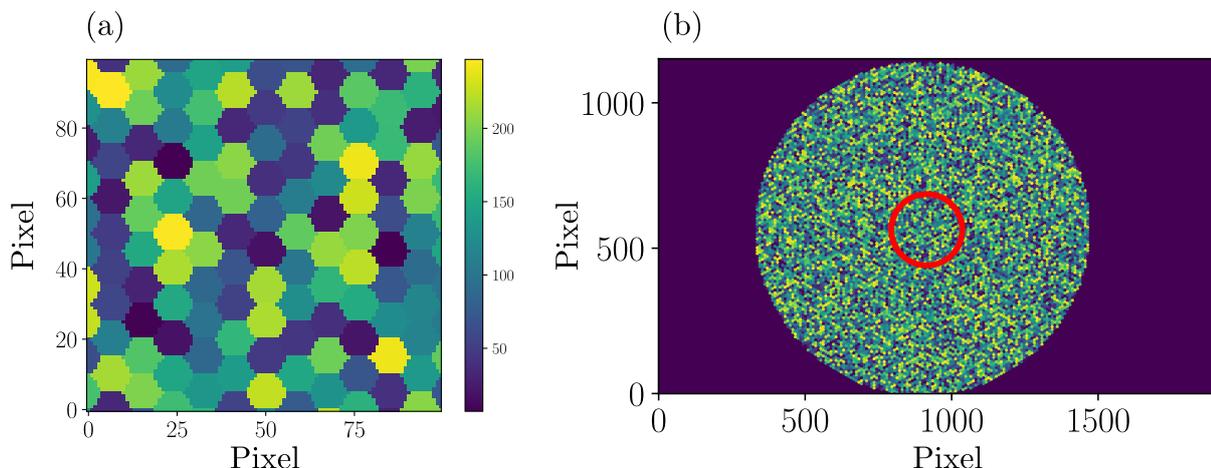


FIGURE IV.13 – (a) Portion d’image affichée sur le SLM avec des macropixels dont le diamètre est de 10 pixels. (b) Image affichée sur le SLM, seuls les macropixels dans le cercle rouge sont modulés. La pente de phase, ajoutée au masque de modulation et permettant de supprimer la lumière non-modulée, n’est pas représentée.

Vision, taille des pixels :  $5.5 \mu\text{m} \times 5.5 \mu\text{m}$ ) qui permet de faire l’image du speckle réfléchi. L’image du speckle transmis est obtenue sur la caméra CCD 3 (Manta G-235B de Allied Vision, taille des pixels :  $5.86 \mu\text{m} \times 5.86 \mu\text{m}$ ) via un objectif conjugué fini de grossissement 60 et d’ouverture numérique 0.85. La caméra CCD 1 (Mako G-319B de Allied Vision, taille des pixels :  $3.45 \mu\text{m} \times 3.45 \mu\text{m}$ ) est conjuguée avec le plan du SLM via le montage 4f, et permet de contrôler le front d’onde incident sur le milieu diffusant. Les images enregistrées par les caméras sont encodées sur 12 bits.

### Filtrage de la lumière non-modulée

Du fait du taux de remplissage fini des pixels du SLM et d’éventuelles réflexions parasites, une partie de la lumière réfléchie par le SLM n’est pas modulée. Pour filtrer cette fraction de lumière non-modulée, une pente de phase  $e^{i\mu_x x}$  est appliquée sur le SLM en plus du masque souhaitée  $M(x, y)$ . On suppose que l’effet des contributions non-modulées peut être représenté par une fraction  $A$  uniforme, représentant le rapport entre l’intensité modulée et l’intensité incidente. Le champ réfléchi par le SLM peut alors s’écrire :

$$E_{\text{SLM}}(x, y) = Ae^{i\mu_x x} M(x, y) + (1 - A). \quad (\text{IV.26})$$

Le champ  $E$  dans le plan de Fourier de la lentille  $L_1$  s’écrit :

$$E(x, y) = A\delta(x - \lambda f_1 \mu_x) \otimes TF(M(x, y)) + (1 - A)\delta(x), \quad (\text{IV.27})$$

où  $f_1$  est la focale de la lentille  $L_1$ . Le champ modulé est décalé spatialement dans le plan de Fourier de  $L_1$ , et la lumière non modulée est filtrée à l’aide d’un diaphragme placé dans ce plan. Ainsi, la lumière incidente sur le milieu diffusant est entièrement modulée.

### IV.5.2 Algorithme d’optimisation

Lors de l’optimisation, les pixels du SLM sont regroupés pour former des macropixels hexagonaux pour lesquels la valeur de modulation de la phase est uniforme, comme re-

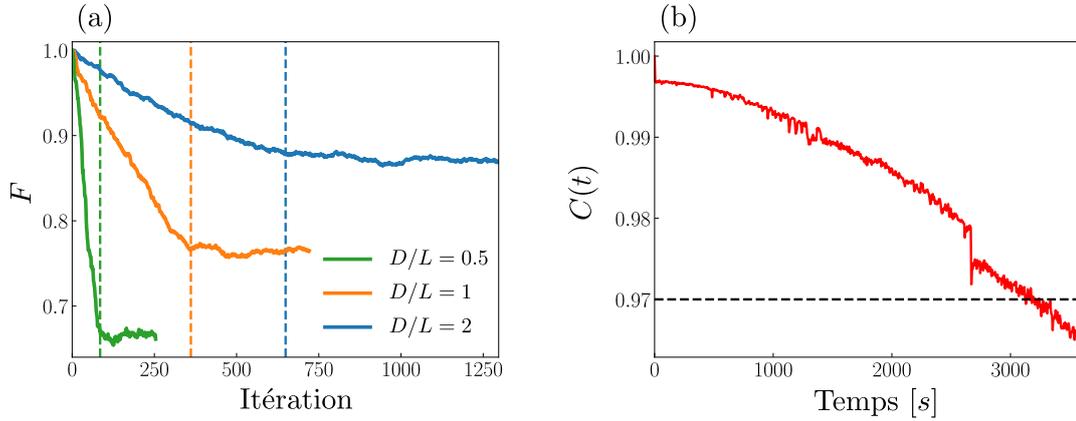


FIGURE IV.14 – (a) Fonction de coût renormalisée par son maximum pour différentes largeurs  $D$ . Les lignes en trait pointillé verticales correspondent au premier passage sur l'ensemble des macropixels utilisés pour l'optimisation. (b) Corrélacion temporelle du speckle réfléchi.

présenté sur la Fig. IV.13 (a). La phase du champ est uniquement modulée dans la zone  $\mathcal{D}$  de diamètre  $D$  délimitée par un cercle rouge sur la Fig. IV.13 (b). Ailleurs, la phase sur chacun des macropixels est choisie aléatoirement et reste constante tout au long de l'optimisation. L'algorithme d'optimisation est un algorithme séquentiel. Pour chaque pixel, 7 valeurs de phase sont testées, la valeur de la phase minimisant la fonction de coût est retenue. Plusieurs passages sur l'ensemble des macropixels utilisés pour l'optimisation sont réalisés (typiquement deux ou trois).

### Fonction de coût

En réalité, la modulation dans le plan d'entrée du milieu diffusant n'est pas une modulation de phase pure. Si on suppose la modulation parfaite dans le plan du SLM, on en fait l'image sur le milieu diffusant par un montage 4f d'ouverture numérique inférieure à 1 (N.A.  $\approx 0.1$ ). Cet effet agit comme un filtre passe-bas sur les fréquences spatiales de l'image. Or, l'image que nous envoyons présente des fréquences spatiales élevées au niveau de l'interface entre deux macropixels de phases différentes. Ainsi, il en résulte une modulation d'amplitude qui est localisée à l'interface entre les macropixels et dont l'effet est d'autant plus important que la différence de phase entre macropixels voisins est grande. Cette modulation d'amplitude résiduelle dépend donc du masque de phase envoyé, et il est important de s'assurer que cet effet ne perturbe pas l'optimisation. En particulier, nous voulons éviter que l'optimisation minimise l'intensité réfléchi en minimisant le flux de lumière injectée dans la zone  $\mathcal{D}$  au lieu de minimiser le coefficient de réflexion. La fonction de coût  $F$  de l'algorithme est l'intensité totale réfléchi dans la zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ , normalisée par le flux incident dans la zone  $\mathcal{D}$ . Pour obtenir ce flux incident, l'image du SLM sur la caméra CCD 1 est enregistrée, permettant d'obtenir, en appliquant un masque numérique, le flux total incident sur la zone modulée.

### Convergence de la fonction de coût

La Fig. IV.14 (a) montre la fonction de coût en fonction du nombre d'itérations pour plusieurs valeurs de  $D$ . Après un premier passage sur l'ensemble des macropixels, l'algorithme séquentiel converge vers un minimum. Ce dernier augmente avec  $D$ . Ce résultat s'explique en partie par le fait que le nombre de macropixels correspondant à la zone d'optimisation (et par conséquent le temps d'optimisation) augmente quadratiquement avec le diamètre  $D$ . Or le speckle se décorrèle avec le temps, donc l'efficacité de l'algorithme séquentiel diminue avec  $D$ . Pour quantifier la décorrélation temporelle du speckle réfléchi sur une zone  $\mathcal{Z}$ , on utilise le corrélateur  $C$  défini par :

$$C(t) = \frac{\left| \int_{\mathbf{r} \in \mathcal{Z}} d\mathbf{r} H(\mathbf{r}, t=0) H(\mathbf{r}, t) \right|}{\sqrt{\int_{\mathbf{r} \in \mathcal{Z}} d\mathbf{r} H^2(\mathbf{r}, t=0)} \sqrt{\int_{\mathbf{r} \in \mathcal{Z}} d\mathbf{r} H^2(\mathbf{r}, t)}}, \quad (\text{IV.28})$$

où  $H(\mathbf{r}, t) = I_R(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{S_{\mathcal{Z}}} \int_{\mathbf{r} \in \mathcal{Z}} d\mathbf{r} I_R(\mathbf{r}, t)$ , avec  $S_{\mathcal{Z}}$  la surface de la zone  $\mathcal{Z}$ , et  $I_R$  l'intensité réfléchie. La Fig. IV.14 (b) montre la fonction de corrélation temporelle du speckle réfléchi sur une zone  $\mathcal{Z}$  de dimension  $22 \mu\text{m} \times 22 \mu\text{m}$  lorsque le milieu est éclairé par un front d'onde plan. Le speckle réfléchi reste corrélé à plus de 97% sur près de 50 minutes. En 50 minutes, approximativement 1000 itérations sont effectuées par l'algorithme pour 7 valeurs de phase testées.

### IV.5.3 Minimisation de l'intensité réfléchie

La Fig. IV.15 (a) montre la différence d'intensité entre un speckle réfléchi après optimisation  $I_R^{opt}$  et le speckle correspondant avant optimisation  $I_R^{non-opt}$  pour une minimisation sur une zone  $\mathcal{D}$  de taille  $D = L$ . Une majorité des grains du speckle résultant présentent des valeurs d'intensité réfléchie plus faible après optimisation qu'avant optimisation dans la zone  $\mathcal{D}$  délimitée par le cercle noir. La différence d'intensité en transmission après et avant optimisation est représentée sur la Fig. IV.15 (b). Du fait des fluctuations statistiques, il est difficile de juger visuellement d'une augmentation de l'intensité dans la zone en vis-à-vis de celle modulée.

Afin de mieux apprécier les variations de l'intensité transmise, un filtre passe-bas d'ordre 2 sur les fréquences spatiales est appliqué aux images de façon à filtrer les fluctuations rapides du speckle. La fréquence de coupure utilisée est  $0.91 \mu\text{m}^{-1}$  pour les images représentant l'intensité réfléchie et  $0.10 \mu\text{m}^{-1}$  pour les images représentant l'intensité transmise. De plus, l'expérience d'optimisation est répétée plusieurs fois. Pour chaque expérience d'optimisation, la partie du masque initiale affichée sur le SLM correspondant à la zone de minimisation de l'intensité réfléchie est changée. La Fig. IV.15 (c) représente la différence entre le speckle réfléchi après optimisation et celui avant optimisation, après filtrage spatial et moyenne sur les différentes réalisations de l'expérience. L'intensité après optimisation est effectivement diminuée dans la zone  $\mathcal{D}$ , mais augmentée dans un anneau autour de cette zone, de façon analogue aux résultats observés en simulation numérique pour un système 2D. La Fig. IV.15 (d) montre quant à elle une augmentation significative de l'intensité transmise après optimisation de l'intensité réfléchie.

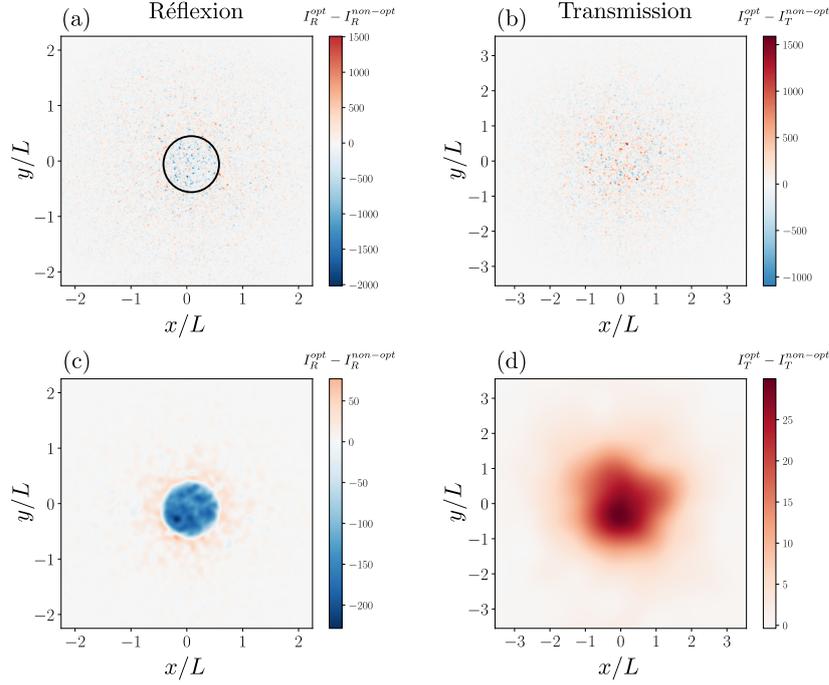


FIGURE IV.15 – (a-b) Différence entre l'intensité après optimisation et celle avant optimisation en (a) réflexion et (b) transmission. (c-d) Différence entre l'intensité après optimisation et celle avant optimisation, obtenue après un filtrage spatial et une moyenne sur les différentes réalisations de l'expérience (ici 37) en (c) réflexion et (d) transmission.

### Profil d'intensité radiale

Afin de mieux visualiser et quantifier l'effet observé, une moyenne angulaire des cartes d'intensités en réflexion et transmission est réalisée. La position du centre utilisé pour effectuer la moyenne angulaire en réflexion et transmission est obtenu de la façon suivante. Un grand nombre  $N$  de masques aléatoires, avec  $N = 800$ , sont appliqués au SLM. Un masque typique affiché sur le SLM est représenté sur la Fig. IV.16 (e). Les masques consistent en des fluctuations aléatoires mais lisses de la phase et restreintes dans une zone correspondant à un disque de  $5 \mu\text{m}$  de diamètre dans le plan d'entrée du milieu diffusant. En utilisant la technique de filtrage de la lumière non modulée détaillée en sous-section IV.5.1, nous forçons l'intensité à être nulle en dehors de cette zone. Les  $N$  figures de speckle obtenus sur les caméras en réflexion et transmission pour les  $N$  masques sont enregistrées. L'objectif est d'estimer les zones en réflexion et en transmission qui sont affectées par cette modulation. Les centres géométriques de ces zones nous donnent alors les positions centrales qui seront utilisées pour effectuer les moyennes angulaires. Ainsi, l'écart-type de l'intensité est calculé sur les différentes images enregistrées en réflexion et transmission. Les Figs. IV.16 (a) et (b) montrent les cartes d'écart-type ainsi obtenues en (a) réflexion et (b) transmission après filtrage passe-bas des fréquences spatiales. En raison de la diffusion latérale de la lumière lors de la traversée de l'échantillon, la tâche observée est plus large en transmission qu'en réflexion. Les cartes d'écart-type d'intensité sont ensuite tronquées à 50% de leur maximum, comme représenté sur les Figs. IV.16 (c) et (d). Le centre de masse de la carte tronquée d'écart-type d'intensité en réflexion est utilisé comme position du centre de la zone d'optimisation  $\mathcal{D}$ , ainsi que pour effectuer la

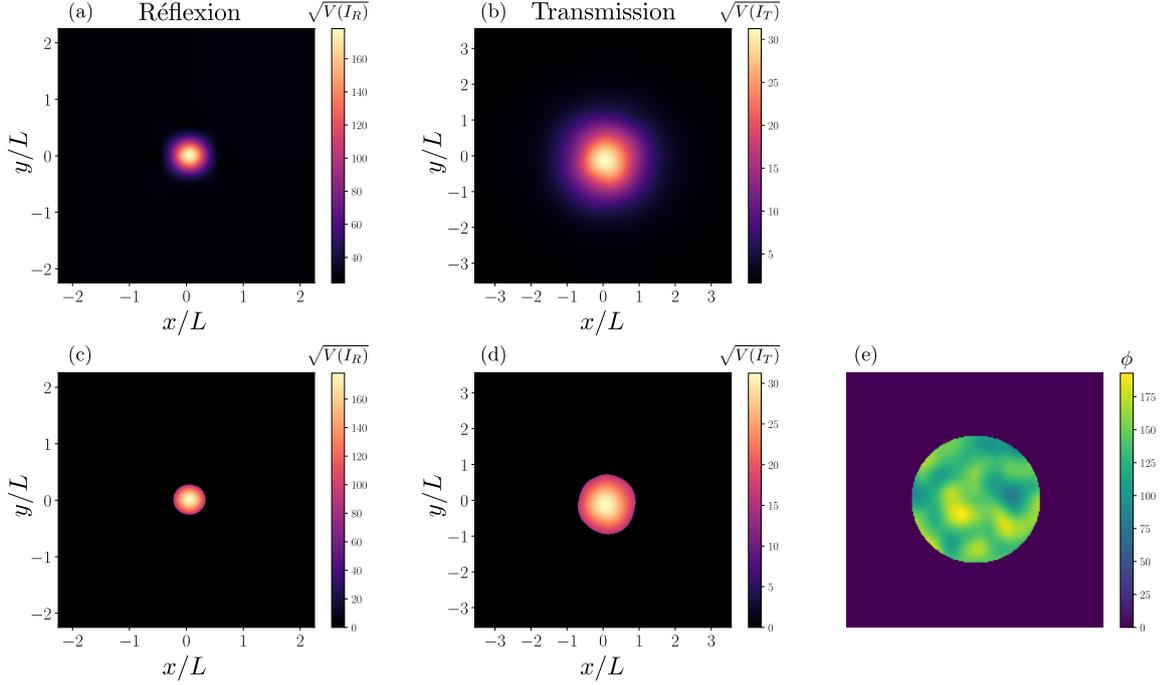


FIGURE IV.16 – (a-b) Écart-type de l’intensité en (a) réflexion et (b) transmission après filtrage spatial. (c-d) Cartes de l’écart-type de l’intensité tronquées à 50% du maximum en (c) réflexion et (b) transmission. (e) Masque typique (sans la pente de phase) affiché sur le SLM pour calculer l’écart-type d’intensité en réflexion et transmission.

moyenne angulaire des cartes d’intensité réfléchie. Le centre de masse de la carte tronquée d’écart-type d’intensité en transmission est utilisé comme centre pour effectuer la moyenne angulaire des cartes d’intensité transmise.

Les Figs. IV.17 (b) et (e) présentent la différence entre l’intensité radiale après optimisation et celle avant optimisation en (b) réflexion et (e) transmission. L’intensité réfléchie est minimisée de façon homogène dans la zone  $\mathcal{D}$ . L’augmentation de l’intensité transmise présente quant à elle un profil gaussien de largeur à mi-hauteur égale à  $1.23L$ . Pour pouvoir comparer les résultats expérimentaux aux résultats obtenus en simulation, ainsi qu’aux prédictions théoriques, nous évaluons le rapport entre l’intensité après optimisation  $I_T^{opt}$ , et celle avant optimisation  $I_T^{non-opt}$ . Les Figs. IV.17 (c) et (f) représentent la moyenne sur les différentes réalisations de l’expérience du rapport entre l’intensité après optimisation et celle avant optimisation en (c) réflexion et (f) transmission. Les résultats sont similaires si on effectue le rapport de la moyenne de l’intensité optimisée sur la moyenne de l’intensité non-optimisée. La Fig. IV.17 (c) indique que l’intensité réfléchie est diminuée d’environ 29% dans la zone  $\mathcal{D}$ . La Fig. IV.17 (f) montre une augmentation relative de la transmission avec un profil gaussien. Cependant, cette augmentation relative, contrairement à la différence  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$ , n’est pas négligeable pour  $r/L > 3$ . Ceci est dû au fait que le profil d’intensité transmise avant optimisation  $I_T^{non-opt}$  n’est pas homogène. Ce dernier, représenté sur la Fig. IV.17 (d), décroît avec la distance radiale. Bien que la différence  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$ , illustrée sur la Fig. IV.17 (e), soit faible pour  $r/L > 3$ , la normalisation par le profil avant optimisation conduit à une augmentation relative non négligeable pour  $r/L > 3$ .

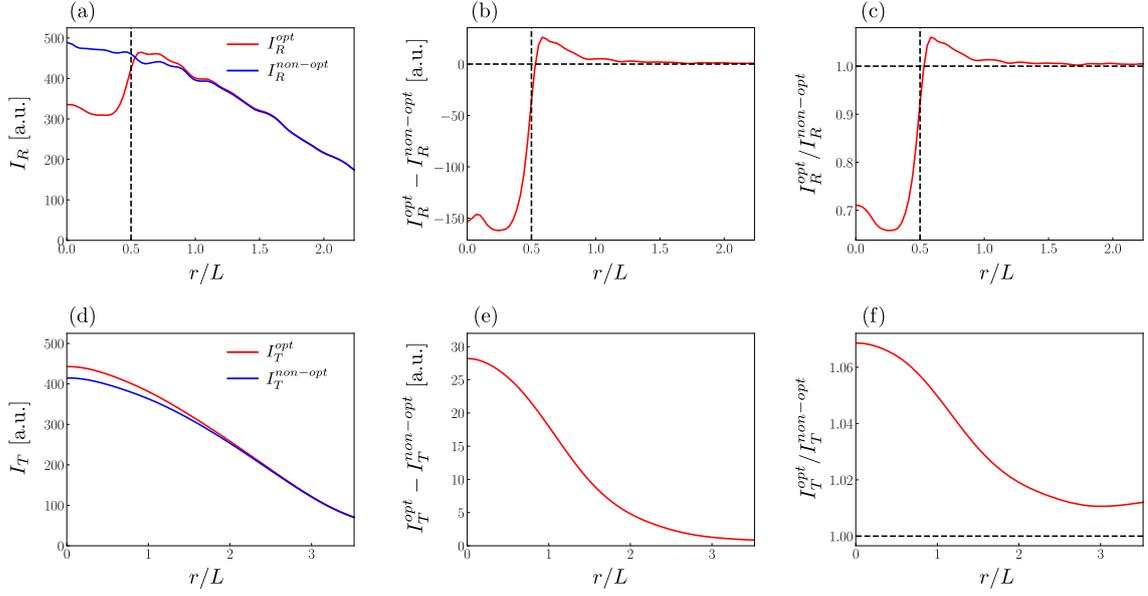


FIGURE IV.17 – (a) Intensité réfléchie après optimisation  $I_R^{opt}$  et avant optimisation  $I_R^{non-opt}$ . La ligne verticale en trait pointillé délimite la zone d'optimisation  $\mathcal{D}$ . (b) Différence d'intensité réfléchie entre après et avant optimisation. (c) Rapport entre l'intensité réfléchie après optimisation et l'intensité réfléchie avant optimisation. (d) Intensité transmise après optimisation  $I_T^{opt}$  et avant optimisation  $I_T^{non-opt}$ . (e) Différence d'intensité transmise entre après et avant optimisation. (f) Rapport entre l'intensité transmise après optimisation et l'intensité transmise avant optimisation.

### Comparaison avec les résultats de l'expérience numérique d'optimisation

Nous comparons ici les résultats obtenus en expérience et en simulation par optimisation pour une minimisation de l'intensité réfléchie sur une zone de taille  $D = L$ . La figure IV.17 (f) indique une augmentation relative maximale de l'intensité transmise de l'ordre de 7% pour une diminution de l'intensité réfléchie dans la zone  $\mathcal{D}$  d'environ 29%. Pour l'expérience numérique, l'augmentation relative maximale est de 300% pour une diminution de l'intensité réfléchie dans la zone  $\mathcal{D}$  d'environ 50%. L'augmentation relative de l'intensité transmise en simulation est 40 fois supérieure à celle obtenue en expérience. La diminution de l'intensité réfléchie, environ deux fois plus faible dans l'expérience que celle obtenue en simulation, explique en partie cette différence. On peut également noter les différences suivantes entre l'expérience et les simulations numériques. Tout d'abord, les simulations correspondent à la propagation d'une onde scalaire pour un système 2D placé dans un guide d'onde et non à une onde vectorielle en 3D pour un système ouvert dont on ne contrôle qu'une des deux polarisations incidentes comme c'est le cas expérimentalement. Ensuite, l'épaisseur du milieu, le libre parcours moyen de transport et l'épaisseur optique, même si ils sont du même ordre de grandeur, différent dans les deux cas ( $kL$  vaut 200 en simulation et 90 expérimentalement,  $kl \approx 20$  en simulation et  $kl \approx 6$  expérimentalement,  $b \approx 10$  en simulation et  $b \approx 15$  expérimentalement). En particulier, les simulations sont faites pour des systèmes dilués ( $kl \gg 1$ ), alors que le libre parcours moyen de transport mesuré est de l'ordre de la longueur d'onde. De plus, l'indice effectif du milieu diffusant, estimé à 1.26 (voir annexe D), est différent de l'indice optique de la

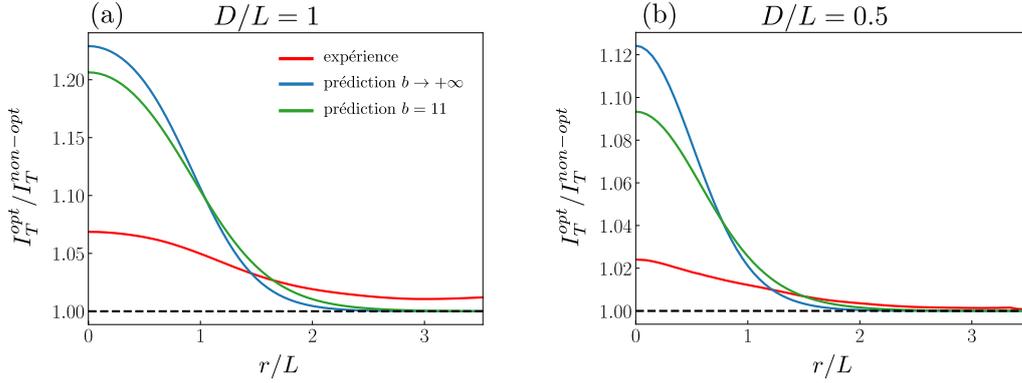


FIGURE IV.18 – Rapport entre l'intensité transmise après optimisation et l'intensité transmise avant optimisation, et prédictions fondées sur l'Eq. IV.21 avec  $C_2^{RT}$  correspondant à un milieu dans la limite  $b \rightarrow +\infty$ , et un milieu d'épaisseur optique  $b = 11$ , pour (a)  $D = L$  et (b)  $D = 0.5L$ .

lamelle de verre sur laquelle repose le milieu diffusant, alors que l'indice effectif du milieu diffusant en simulation est proche de l'indice optique du guide. Ainsi, la réflexion spéculaire est négligeable en simulation, mais ce n'est pas forcément le cas en expérience. Il faut aussi noter que le profil du faisceau incident n'est pas homogène dans l'expérience, comme l'atteste le profil décroissant de  $I_R^{non-opt}$  avec  $r$ . Enfin, en raison de l'ouverture numérique limitée, l'image du SLM sur la face d'entrée du milieu diffusant présente une modulation d'amplitude localisée à l'interface entre les macropixels, et nous ne contrôlons pas tous les degrés de liberté spatiaux possibles en entrée (la taille minimale contrôlable est supérieure à  $\lambda/2$ ), contrairement aux simulations numériques. L'ensemble de ces différences fait qu'il est délicat de comparer les résultats expérimentaux et numériques. Il faut ajouter que de potentielles imperfections d'alignement peuvent contribuer à expliquer cette différence.

### Confrontation avec les prédictions

Le rapport entre les intensités transmises après et avant optimisation, ainsi que les prédictions fondées sur l'Eq. (IV.21), sont représentés sur les Figs. IV.18 pour une optimisation sur une zone  $\mathcal{D}$  de diamètre (a)  $D = L$  et (b)  $D = 0.5L$ . L'intensité  $\tilde{I}_o$  intervenant dans l'Eq. (IV.21) est choisie de manière à correspondre aux résultats expérimentaux. On la prend égale à la moyenne du rapport entre l'intégrale de l'intensité dans la zone  $\mathcal{D}$  après optimisation et celle avant optimisation :

$$\tilde{I}_o = \left\langle \frac{\int_{\mathbf{r} \in \mathcal{D}} d\mathbf{r} I_R^{opt}(\mathbf{r})}{\int_{\mathbf{r} \in \mathcal{D}} d\mathbf{r} I_R^{non-opt}(\mathbf{r})} \right\rangle, \quad (\text{IV.29})$$

où  $\langle \rangle$  désigne la moyenne sur les réalisations de l'expérience. On obtient  $\tilde{I}_o = 0.71$  pour  $D = L$  et  $\tilde{I}_o = 0.31$  pour  $D = 0.5L$ . Le résultat est sensiblement égal si on fait le rapport des moyennes sur les réalisations de l'expérience. Les prédictions évaluées pour  $b \rightarrow +\infty$  et  $b = 11$  sont similaires, en particulier dans le cas  $D = L$ . En revanche, l'augmentation expérimentale maximale en  $r = 0$  est ici inférieure aux prédictions fondées sur  $C_2^{RT}$  d'un facteur compris entre 4 et 5 pour  $D = 0.5L$  et d'un facteur 3 pour  $D = L$ . Par

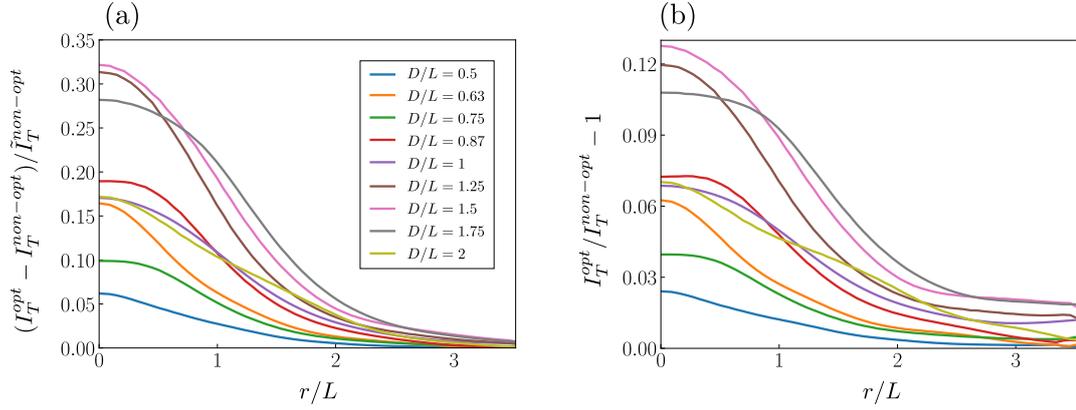


FIGURE IV.19 – (a) Différence d'intensité transmise  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$  pour les différentes valeurs de  $D$ , normalisée par  $\tilde{I}_T^{non-opt} = \int d\mathbf{r} I_T^{non-opt}(\mathbf{r})$ . (b) Augmentation relative de l'intensité transmise  $I_T^{opt} / I_T^{non-opt} - 1$  pour les différents valeurs de  $D$ .

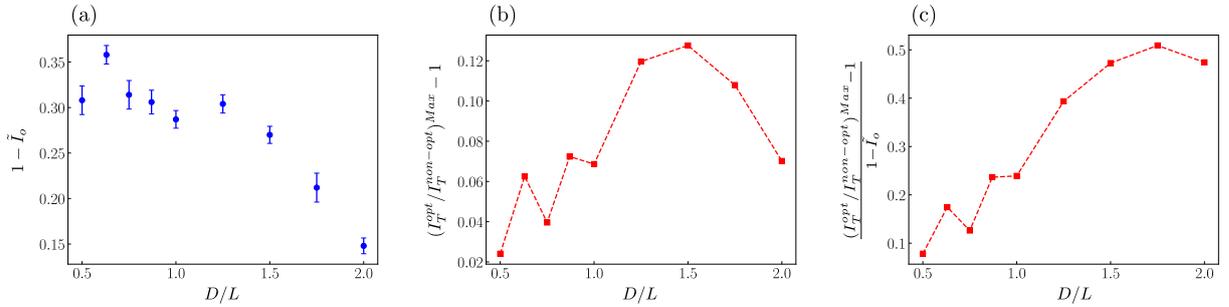


FIGURE IV.20 – (a) Diminution de l'intensité réfléchie  $1 - \tilde{I}_o$  en fonction de  $D/L$ . Les barres d'erreurs correspondent aux variations des mesures pour les différentes réalisations de l'expérience. (b) Maximum de  $I_T^{opt} / I_T^{non-opt} - 1$  en fonction de  $D$ . (c) Maximum de  $I_T^{opt} / I_T^{non-opt} - 1$  normalisée par la diminution relative de l'intensité réfléchie  $1 - \tilde{I}_o$  en fonction de  $D$ .

ailleurs, on rappelle que ces dernières sous-estiment d'un ordre de grandeur l'augmentation relative maximale observée en simulation pour un système 2D et  $D = L$ . De même que l'augmentation de l'intensité transmise observée en simulation n'est pas quantitativement décrite par les prédictions fondées sur l'Eq. (IV.21), l'augmentation de l'intensité transmise observée expérimentalement n'est pas précisément décrite par ces dernières.

#### IV.5.4 Expérience d'optimisation pour différentes valeurs de $D$

L'expérience d'optimisation a été conduite pour différents diamètres  $D$  de la zone d'optimisation  $\mathcal{D}$  allant de  $0.5L$  à  $2L$ . La Fig. IV.19 (a) montre la différence d'intensité transmise après et avant optimisation. Le temps d'intégration des caméras pouvant varier d'une expérience à une autre, la différence  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$  est normalisée par  $\tilde{I}_T^{non-opt} = \frac{1}{S_{\mathcal{U}}} \int_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} d\mathbf{r} I_T^{non-opt}(\mathbf{r})$ , où  $\mathcal{U}$  est la zone sur laquelle s'étend le speckle transmis et  $S_{\mathcal{U}}$  la surface correspondante. La différence d'intensité  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$  augmente globalement avec la largeur de la zone d'optimisation. L'augmentation relative de l'intensité transmise,  $I_T^{opt} / I_T^{non-opt} - 1$ , pour les différentes valeurs de  $D$ , illustrée sur la Fig. IV.19 (b),

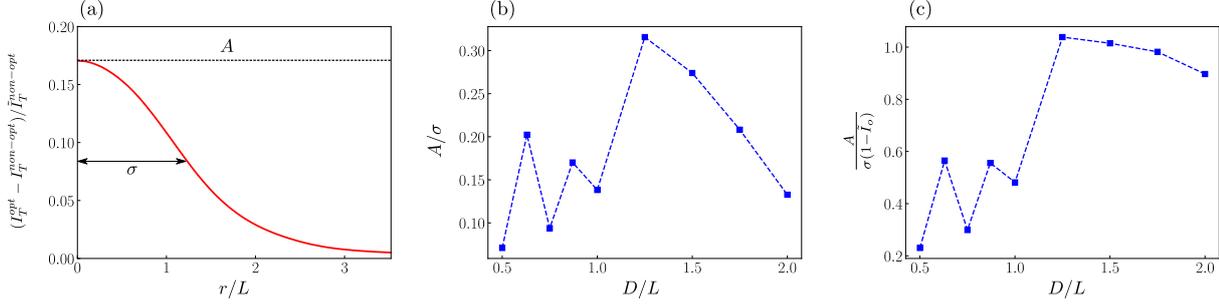


FIGURE IV.21 – (a) Graphique illustrant les quantités utilisées pour évaluer le degré de focalisation. (b) Degré de focalisation défini comme  $A/\sigma$  en fonction de  $D$ . (c) Degré de focalisation défini comme  $A/\sigma(1 - \tilde{I}_o)$  en fonction de  $D$ .

présente un profil similaire à la différence d'intensité  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$ . Cependant, de même que précédemment, l'augmentation relative n'est pas négligeable aux longues distances radiales en raison du profil non-homogène de  $I_T^{non-opt}$ . L'augmentation relative de l'intensité transmise prise en  $r = 0$ , correspondant à l'augmentation relative maximale, est représentée sur la Fig. IV.20 (b) pour les différentes valeurs de  $D$ . Bien que les profils d'augmentation relative de l'intensité transmise ne sont pas quantitativement décrites par les prédictions fondées sur l'Eq. (IV.21), on s'attend à observer une augmentation du rapport  $I_T^{opt}/I_T^{non-opt}$  avec  $D$ . Le fait que le maximum de  $I_T^{opt}/I_T^{non-opt} - 1$  ne croît pas de façon monotone peut notamment s'expliquer par le fait que la diminution relative de l'intensité réfléchie,  $(1 - \tilde{I}_o)$ , diffère selon la valeur de  $D$ , comme illustré sur la Fig. IV.20 (a). Néanmoins, pour  $0.5 \geq D/L \geq 1.25$ , les valeurs de la diminution relative d'intensité réfléchie, en excluant  $D/L = 0.63$ , sont sensiblement égales, et l'augmentation relative de l'intensité transmise croît globalement sur cette plage de valeur. L'augmentation de  $(I_T^{opt}/I_T^{non-opt})^{Max} - 1$  normalisée par la diminution relative d'intensité réfléchie  $1 - \tilde{I}_o$  en fonction de  $D$ , illustrée sur la Fig. IV.20 (c), suggère qu'à diminution égale de l'intensité réfléchie, le maximum de  $I_T^{opt}/I_T^{non-opt} - 1$  augmente avec  $D$ .

## Focalisation

En raison du profil non-homogène de  $I_T^{non-opt}$ , l'augmentation relative de l'intensité transmise après optimisation n'est pas nulle aux grandes distances radiales. Contrairement à la section IV.3, il n'est donc pas pertinent d'utiliser le rapport du maximum de  $I_T^{opt}/I_T^{non-opt} - 1$  divisé par la largeur à mi-hauteur de cette quantité pour évaluer la qualité de focalisation en transmission. Pour évaluer le degré de focalisation, nous choisissons de considérer la différence  $I_T^{opt} - I_T^{non-opt}$  normalisée par  $\tilde{I}_T^{non-opt} = \frac{1}{S_U} \int_{\mathbf{r} \in \mathcal{U}} d\mathbf{r} I_T^{non-opt}(\mathbf{r})$ . Nous définissons

la qualité de focalisation comme le rapport du maximum de  $(I_T^{opt} - I_T^{non-opt})/\tilde{I}_T^{non-opt}$ , noté  $A$ , par la largeur à mi-hauteur  $\sigma$  de cette quantité. La Fig. IV.21 représente le degré de focalisation pour les différentes valeurs de  $D$ . Le degré de focalisation est maximal pour  $D/L = 1.25$ . Il peut être également pertinent pour évaluer le degré de focalisation de considérer le rapport précédent normalisé par la diminution relative d'intensité réfléchie  $1 - \tilde{I}_o$ . Le degré de focalisation est encore maximal pour  $D/L = 1.25$ .

## IV.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons dans un premier temps rappelé le raisonnement perturbatif permettant d'estimer, à l'aide du corrélateur  $C_2^{RT}$ , le profil moyen d'intensité transmise à travers un milieu diffusant éclairé par une onde plane lorsque l'intensité réfléchie est inférieure à sa valeur moyenne sur une zone  $\mathcal{D}$  de largeur  $D$ . On prédit ainsi une augmentation non-uniforme de l'intensité transmise, avec un degré de focalisation optimal lorsque  $D$  est de l'ordre de l'épaisseur du milieu. Cependant, l'observation d'un profil d'intensité réfléchie minimisée sur plusieurs grains de speckle étant peu probable, nous avons ensuite discuté la possibilité de contrôler le front d'onde incident pour minimiser l'intensité réfléchie dans la zone choisie. Nous avons ainsi présenté des simulations, réalisées par Nikos Fayard, de minimisation par contrôle du front d'onde de l'intensité réfléchie dans une zone  $\mathcal{D}$  de largeur égale à l'épaisseur du milieu. Ces simulations, basées sur la résolution de l'équation d'onde scalaire à 2D, montrent que l'intensité transmise peut être concentrée transversalement sur une zone de taille comparable à l'épaisseur du milieu avec une augmentation relative excédant les 100%. Enfin, nous avons présenté des résultats expérimentaux visant à tester la possibilité de reproduire les résultats de simulation dans un cadre réaliste (géométrie 3D ouverte, onde vectorielle, illumination transverse limitée). Nous avons démontré une minimisation de l'intensité réfléchie sur des zones de largeur  $D$  allant de  $0.5L$  à  $2L$ , où  $L$  est l'épaisseur du milieu. Nous avons observé pour ces différents cas une augmentation de l'intensité transmise, d'autant plus forte que  $D$  est grand. Le profil de l'intensité transmise est par ailleurs optimal en terme de focalisation lorsque  $D \approx 1.25L$ .

L'approche développée dans ce chapitre pour focaliser la lumière en transmission d'un milieu opaque consiste à minimiser l'intensité réfléchie sur une zone de taille arbitraire. Il est intéressant de mettre en regard cette approche d'une étude récente montrant que les états propres de l'opérateur de transmission  $t^\dagger t$  restent localisés transversalement dans un milieu désordonné, même en régime diffusif [148]. Les canaux ouverts, mesurés à partir de la matrice de réflexion, sont donc des candidats intéressants en terme de focalisation de la lumière à travers ou à l'intérieur d'un milieu diffusant.

Notons enfin l'apparition des réseaux de neurones dans le domaine de l'optique en milieux complexes pour retrouver la forme d'objets à travers des milieux opaques ou en transmission d'une fibre multimode [149–155]. Il peut être envisageable de se tourner vers les réseaux de neurones afin, par exemple, d'apprendre la matrice de transmission à partir de la matrice de réflexion, ce qui permettrait peut-être de focaliser la lumière à une position arbitraire en transmission à partir du seul flux réfléchi.



# Conclusion

Au cours de cette thèse, mêlant théorie, simulations numériques et expérience, nous nous sommes intéressés à l'optimisation par contrôle du front d'onde de propriétés importantes de la lumière se propageant dans des milieux diffusants : son temps de séjour, sa dispersion temporelle et sa distribution spatiale d'intensité transmise.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes penchés sur le stockage d'énergie électromagnétique dans un milieu fortement diffusant en régime stationnaire en utilisant des approches théoriques et numériques. Le rapport entre l'énergie électromagnétique stockée dans un milieu sans perte et le flux d'énergie incident dans ce milieu permet de définir le temps de séjour, introduit notamment par F. Smith pour des ondes quantiques. Nous avons dans un premier temps établi une expression très générale (valide pour tout milieu en régime linéaire) et originale d'un opérateur pour le temps de séjour, noté  $Q_d$ . Ce dernier est la somme de trois termes, dont un des termes est l'opérateur de Wigner-Smith. Nous avons ensuite étudié la distribution des valeurs propres de  $Q_d$ . Une approche type DMPK révèle en particulier l'existence d'un temps de séjour maximal lorsque la conductance du milieu est élevée. Ce dernier varie comme le temps de Thouless pour des milieux de grande épaisseur optique. Il est donc possible, par façonnage du front d'onde, de stocker  $b$  fois plus d'énergie dans un milieu diffusant que dans un milieu dont la constante diélectrique est homogène,  $b$  étant l'épaisseur optique du milieu diffusant. Les différents opérateurs qui composent l'opérateur temps de séjour ont par ailleurs été construits numériquement par résolution de l'équation d'onde. Nous avons vu que si la fréquence de travail est différente de la fréquence d'apparition d'un nouveau mode propagatif du guide dans lequel est placé le milieu diffusant, la distribution des valeurs propres de l'opérateur de  $Q_d$  est similaire à celle de l'opérateur de Wigner-Smith. La distribution numérique des temps de séjour se révèle alors être en très bon accord avec la prédiction théorique. Une analyse détaillée des distributions numériques montre l'existence d'une queue de la distribution qui décroît selon une loi log-normale. Cette loi log-normale serait due à la présence de modes anormalement localisés dans le milieu dont le nombre croît lorsque la conductance diminue. Enfin, nous avons montré numériquement que l'opérateur  $Q_d$ , par construction sensible aux effets dispersifs, permet de détecter et de focaliser sélectivement la lumière sur une cible résonante cachée dans un milieu opaque.

Au chapitre 3, nous nous sommes intéressés au contrôle temporel du flux total transmis à travers un milieu diffusant éclairé par une impulsion. Nous avons pour cela établi une expression matricielle du temps moyen et de la variance du signal transmis ou réfléchi, donnant accès à ces quantités pour un front d'onde arbitraire. Ces expressions matricielles font intervenir, contrairement à l'expression matricielle du temps de séjour, plusieurs opérateurs, chacun s'exprimant à partir de la matrice de diffusion. Nous avons tout d'abord

exploité l'expression matricielle du temps moyen afin de trouver des fronts d'onde pour lesquels ce dernier est différent de celui obtenu avec une onde plane pour différentes durées de l'impulsion incidente. Nous avons ainsi déterminé les fronts d'onde permettant de maximiser ou minimiser le temps moyen. Le facteur de transmission de ces derniers étant bien plus faible que le niveau de transmission moyen, leur intérêt pratique est alors limité. Nous avons ensuite cherché à maximiser le temps moyen par optimisation de l'expression matricielle correspondante tout en gardant un facteur de transmission supérieur ou égal au niveau de transmission moyen. Le temps moyen de transit d'une impulsion peut être ainsi augmenté d'un facteur trois, sans dispersion notable pour des largeurs spectrales d'impulsion inférieures à la pulsation de Thouless du milieu. Nous avons par la suite cherché des fronts d'onde permettant de limiter la dispersion temporelle du signal transmis lorsque la largeur spectrale de l'impulsion est supérieure à la pulsation de Thouless. Pour cela, nous avons minimisé l'expression matricielle de la variance du signal transmis par optimisation. Cette méthode nous a permis de façonner des fronts d'onde tels que le signal transmis est bien moins dispersé que celui obtenu avec une onde plane. Ces mêmes fronts d'onde conduisent à des signaux transmis avec un écart-type nettement inférieur à ceux obtenus avec les vecteurs singuliers de la matrice de transmission résolue temporellement. Notre approche peut se révéler utile pour l'imagerie de tissus biologiques ou pour la transmission d'information à travers des fibres multimodes pour lesquels la dispersion intermodale limite le débit d'information.

Dans le dernier chapitre, nous avons considéré la possibilité de focaliser la lumière en transmission d'un milieu diffusant à partir de l'optimisation du seul flux réfléchi. Notre étude était motivée par des études théoriques et expérimentales récentes, en partie menées à l'Institut Langevin, montrant l'existence de corrélations entre les intensités réfléchie et transmise de part et d'autre d'un milieu diffusant éclairé par une onde plane. Un raisonnement perturbatif s'appuyant sur l'existence de ces corrélations montre que si l'intensité réfléchie est inférieure au niveau de réflexion moyen sur une zone  $\mathcal{D}$  de taille arbitraire, alors l'intensité transmise est supérieure à l'intensité transmise moyenne en vis-à-vis de la zone  $\mathcal{D}$ . En particulier, le profil moyen d'intensité transmise est, selon cette analyse, optimal en terme de focalisation lorsque la largeur de la zone  $\mathcal{D}$  est de l'ordre de l'épaisseur du milieu. Nous avons présenté des simulations numériques d'optimisation du front d'onde, réalisées par Nikos Fayard à l'Institut Langevin, visant à minimiser l'intensité réfléchie par un milieu diffusant sur une zone de taille égale à l'épaisseur du milieu. Ces simulations révèlent une augmentation de l'intensité transmise de l'ordre de 300% sur une zone de taille comparable à l'épaisseur  $L$  du milieu. Nous avons ensuite détaillé les résultats expérimentaux obtenus durant la dernière année de cette thèse concernant la minimisation de l'intensité réfléchie sur une zone circulaire  $\mathcal{D}$  de diamètre  $D$  comparable à l'épaisseur du milieu. Une augmentation de l'intensité transmise a bien été observée après optimisation du flux réfléchi. Cette augmentation est d'autant plus importante que la largeur de la zone où l'intensité réfléchie est minimisée est grande. Le degré de focalisation mesuré est par ailleurs maximal pour  $D \approx 1.25L$ . Ces résultats encourageants montrent qu'il est possible de contrôler expérimentalement le flux transmis localement à partir d'une mesure et d'une optimisation du flux réfléchi. D'autres approches sont envisageables afin de focaliser la lumière à travers un milieu diffusant à partir de la seule mesure du champ réfléchi. Une étude récente, montrant que les canaux de transmission restent localisés transversalement, suggère que les canaux ouverts, mesurés à partir de

la matrice de réflexion, sont de bons candidats afin d'augmenter localement l'intensité transmise. Il peut être également envisageable d'utiliser les réseaux de neurones afin, par exemple, d'apprendre à construire la matrice de transmission à partir d'une mesure de la matrice de réflexion.



# Annexe A

## Méthodes numériques

### A.1 Algorithme de construction récursif de la fonction de Green

Considérons un milieu d'épaisseur  $L$  imbriqué dans un guide d'onde de largeur  $W$ , comme représenté sur la Fig. A.1. Les murs du guide sont parfaitement réfléchissants, de sorte que le champ est nul sur les parois du guide. L'espace est discrétisé, et en chaque zone de l'espace représenté par un carré bleu, une valeur de la constante diélectrique est attribuée selon :

$$\epsilon_r = \epsilon_1 + \delta\epsilon_r, \quad (\text{A.1})$$

où  $\epsilon_1$  est une constante, et  $\delta\epsilon_r$  est distribué uniformément dans  $[-\epsilon_{sca}, \epsilon_{sca}]$ . Pour nos simulations  $\epsilon_1$  est pris égal à la constante diélectrique dans le guide  $\epsilon_g = 2.25$ .

Le schéma de calcul des matrices de réflexion et transmission se décompose en deux étapes :

- La fonction de Green entre la face d'entrée et la face de sortie du milieu  $G^{in,out}$ , ainsi que la fonction de Green  $G^{in,in}$  entre la face d'entrée et cette même face d'entrée sont calculées à une fréquence arbitraire avec la méthode de construction itérative de la fonction de Green [156, 157].  $G^{in,out}$  et  $G^{in,in}$  sont des matrices de taille  $N_y \times N_y$ , où  $N_y$  est le nombre de points de l'espace discrétisé dans la dimension transverse.
- Les matrices de transmission et de réflexion sont ensuite obtenues à partir de  $G^{in,out}$  et de  $G^{in,in}$  en utilisant les relations de Fisher-Lee [158].

#### Calcul des matrices $r_e$ et $t_e$

Pour le calcul des matrices de réflexion et transmission des modes propagatifs vers les modes évanescents,  $r_e$  et  $t_e$ , nous avons pris en compte un nombre  $N_e$  de modes évanescents égal à quelques dizaines. Inclure les modes évanescents modifie la première étape de la méthode Green recursive qui consiste à calculer la fonction de Green  $g_o$  d'un guide semi-

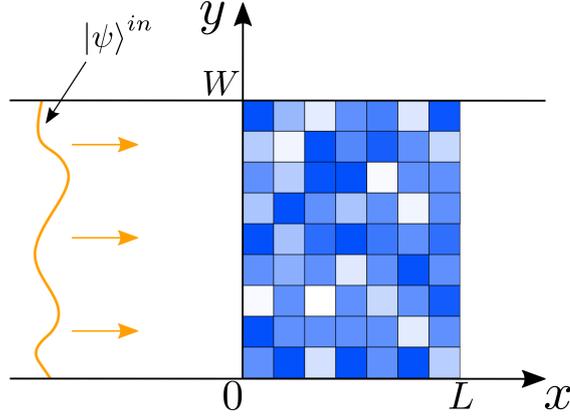


FIGURE A.1 – Représentation du modèle utilisé dans le cadre de la méthode Green récursive. En chaque zone représenté par un carré bleu, une valeur de la constante diélectrique est attribuée.

infini.  $g_o$ , en prenant en compte les modes évanescents, s'écrit dans le code :

$$g_o(m, n) = - \sum_{p=1}^N \phi(p, m)\phi(p, n)e^{2i \arcsin\left(\frac{\sqrt{k_g^2 - k_y^2(p)}}{2}\right)} - \sum_{p=1}^{N_e} \phi(N+p, m)\phi(N+p, n)e^{-2 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{k_y^2(N+p) - k_g^2}}{2}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

où  $N$  est le nombre de modes propagatifs,  $N_e$  le nombre de modes évanescents pris en compte dans le calcul des matrices  $r_e$  et  $t_e$ ,  $k_g = kdh\sqrt{\epsilon_g}$ , avec  $k$  la norme du vecteur d'onde dans le vide et  $dh$  le pas de discrétisation de l'espace. Le vecteur d'onde transverse  $k_y$  du mode  $p$  s'écrit :

$$k_y(p) = \sqrt{2 \left(1 - \cos\left(\frac{p\pi}{N_y + 1}\right)\right)}. \quad (\text{A.3})$$

Les éléments de la matrice  $\phi$  de taille  $(N + N_e) \times N_y$  s'écrivent :

$$\phi(p, m) = \sqrt{\frac{2}{N_y + 1}} \sin\left(\frac{p\pi m}{N_y + 1}\right). \quad (\text{A.4})$$

Le premier terme du membre de droite de l'Eq. (A.2) est la partie standard incluant les modes propagatifs. Le deuxième terme correspond à la prise en compte des modes évanescents.

La prise en compte des modes évanescents n'intervient plus dans la suite de la méthode jusqu'au calcul des matrices  $r_e$  et  $t_e$  avec les relations de Fisher-Lee :

$$r_e(m, n) = 2i\sqrt{v_m^e}\sqrt{v_n} \sum_{p,q=1}^{N_y} \phi(N+m, p)\phi(n, q)G^{in,in}(p, q), \quad (\text{A.5})$$

$$t_e(m, n) = 2i\sqrt{v_m^e}\sqrt{v_n} \sum_{p,q=1}^{N_y} \phi(N+m, p)\phi(n, q)G^{in,out}(p, q), \quad (\text{A.6})$$

avec  $1 \leq m \leq N_e$ ,  $1 \leq n \leq N$ .  $v_n$  et  $v_n^e$  sont des facteurs de normalisation :

$$v_n = \sqrt{k_g^2 - k_y^2(n)} \sqrt{1 - \frac{k_g^2 - k_y^2(n)}{4}} \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad (\text{A.7})$$

$$v_n^e = i \sqrt{k_y^2(N+n) - k_g^2} \sqrt{1 + \frac{k_y^2(N+n) - k_g^2}{4}} \quad \forall n = 1, \dots, N_e. \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Dérivée fréquentielle

Les opérateurs rencontrés aux chapitre 2 et 3 font apparaître des dérivées fréquentielles. La dérivée première et seconde d'un opérateur sont obtenues numériquement comme suit :

$$f'(\omega) = \frac{f(\omega + d\omega) - f(\omega - d\omega)}{2d\omega} \quad (\text{A.9})$$

$$f^{(2)}(\omega) = \frac{f(\omega + d\omega) + f(\omega - d\omega) - 2f(\omega)}{d\omega^2} \quad (\text{A.10})$$

Le pas fréquentiel utilisé pour construire les dérivées numériques est  $\delta\omega/\omega_o = 10^{-8}$ .

## A.3 Carte de champ

Pour un front d'onde incident  $|\psi\rangle$ , nous souhaitons déterminer la valeur du champ en tout point du milieu diffusant. Les matrices  $r$ ,  $t$ ,  $r_e$  et  $t_e$ , calculées à l'aide de la méthode Green recursive et des relations de Fisher-Lee, permettent de connaître le champ réfléchi  $E_r$  et transmis  $E_t$ . De plus le champ est nul sur les parois du guide. Nous connaissons donc, pour un front d'onde incident arbitraire, le champ aux bords de l'échantillon. Nous souhaitons donc résoudre l'équation de Helmholtz :

$$\left[ \tilde{\nabla}^2 + \epsilon_r(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \right] E(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.11})$$

où  $\tilde{\nabla}^2$  est le laplacien en espace discrétisé, avec des conditions aux bords connues. Nous notons  $E_{i,j}$  et  $\epsilon_{i,j}$  le champ et la permittivité relative au point repéré par les coordonnées  $i, j$ . L'opération du laplacien en espace discrétisé sur le champ s'écrit :

$$\tilde{\nabla}^2 E_{i,j} = \frac{E_{i+1,j} + E_{i-1,j} + E_{i,j+1} + E_{i,j-1} - 4E_{i,j}}{dh^2}, \quad (\text{A.12})$$

où  $dh$  est le pas de discrétisation de l'espace. De l'Eq (A.11), on a donc :

$$E_{i+1,j} + E_{i-1,j} + E_{i,j+1} + E_{i,j-1} - [4 - \epsilon_{i,j}(kdh)^2] E_{i,j} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_y, \quad \forall j = 1, \dots, N_x, \quad (\text{A.13})$$

où  $k = \omega/c$  est la norme du vecteur d'onde dans le vide. En particulier, nous avons :

$$E_{2,j} + \boxed{E_{0,j}} + E_{1,j+1} + E_{1,j-1} - \left[4 - \epsilon_{1,j}(kdh)^2\right] E_{1,j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_x, \quad (\text{A.14})$$

$$\boxed{E_{N_y+1,j}} + E_{N_y-1,j} + E_{N_y,j+1} + E_{N_y,j-1} - \left[4 - \epsilon_{N_y,j}(kdh)^2\right] E_{N_y,j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_x, \quad (\text{A.15})$$

$$E_{i+1,1} + E_{i-1,1} + E_{i,2} + \boxed{E_{i,0}} - \left[4 - \epsilon_{i,1}(kdh)^2\right] E_{i,1} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_y, \quad (\text{A.16})$$

$$E_{i+1,N_x} + E_{i-1,N_x} + \boxed{E_{i,N_x+1}} + E_{i,N_x-1} - \left[4 - \epsilon_{i,N_y}(kdh)^2\right] E_{i,N_x} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_y. \quad (\text{A.17})$$

Les termes entourés correspondent au champ connu sur les bords du milieu diffusant. Les termes  $E_{0,j}$  et  $E_{N_y+1,j}$  correspondent au champ sur les parois du guide et sont donc nuls. Nous introduisons les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_{\text{BC}}$  et  $\epsilon_r$  de taille  $N_y N_x$  :

$$\mathbf{E} = [E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{N_y,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, \dots, E_{N_y,2}, \dots, E_{1,N_x}, E_{2,N_x}, \dots, E_{N_y,N_x}], \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{E}_{\text{BC}} = [E_{1,0}, E_{2,0}, \dots, E_{N_y,0}, 0, 0, \dots, 0, E_{N_y,N_x+1}, E_{N_y,N_x+1}, \dots, E_{N_y,N_x+1}], \quad (\text{A.19})$$

$$\epsilon_r = [\epsilon_{1,1}, \epsilon_{2,1}, \dots, \epsilon_{N_y,1}, \epsilon_{1,2}, \epsilon_{2,2}, \dots, \epsilon_{N_y,2}, \dots, \epsilon_{1,N_x}, \epsilon_{2,N_x}, \dots, \epsilon_{N_y,N_x}]. \quad (\text{A.20})$$

L'équation (A.13) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$A\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{\text{BC}}, \quad (\text{A.21})$$

où  $A$  est une matrice parcimonieuse de taille  $N_y N_x \times N_y N_x$ . Cette dernière est représentée sur la Fig. A.3. Les éléments diagonaux en rouge sont égaux à

$$A(n, n) = -4 + \epsilon_r(n)(kdh)^2. \quad (\text{A.22})$$

Les éléments diagonaux en bleu sont égaux à 1. Les diagonales situées juste au-dessus et juste en-dessous de la diagonale principale comportent des zéros, situés entre les blocs de taille  $N_y \times N_y$ . Le champ  $\mathbf{E}$  s'obtient en inversant le système (A.21). La matrice  $A$  étant parcimonieuse, il existe des méthodes numériques sous python et matlab pour, premièrement, écrire  $A$  en donnant uniquement les éléments non-nuls, et deuxièmement, résoudre ce type de problème sans avoir à inverser explicitement  $A$ .

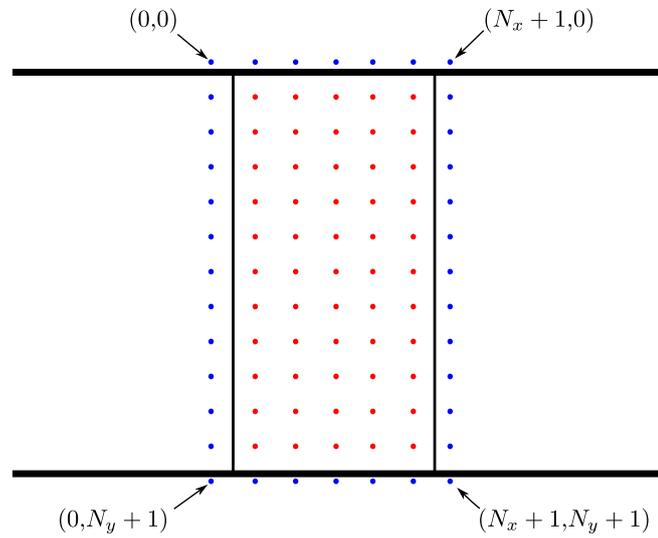


FIGURE A.2 – Espace discrétisé. La valeur du champ est connue au niveau des points bleus (bords du milieu diffusant), et inconnue au niveau des points rouges (points dans le milieu diffusant).

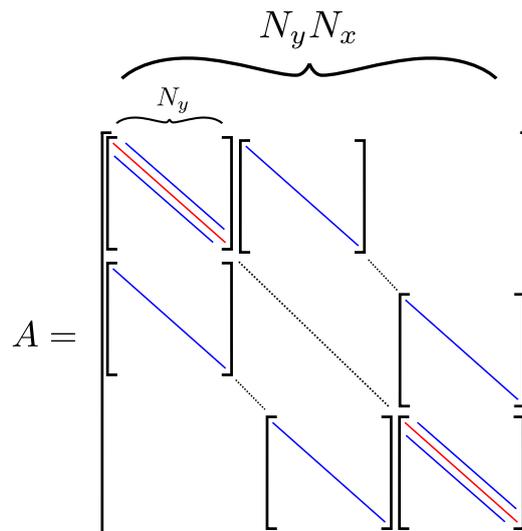


FIGURE A.3 – Représentation de la matrice parcimonieuse  $A$ .



# Annexe B

## Opérateur temps de séjour

### B.1 Flux incident et base des modes propres normalisés

Dans un premier temps, nous allons établir l'expression du flux incident  $\phi_{in}$  dans un guide d'onde, comme indiqué sur la Fig. B.1, en fonction du champ électrique incident  $E_{in}$  et du champ magnétique incident  $B_{in}$ . Le flux à travers une section du guide d'onde  $\phi_{in}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi_{in} &= \frac{\epsilon_o c^2}{4} \int_{y=0}^W dy [\mathbf{E}_{in}(y) \wedge \mathbf{B}_{in}(y)^* + \mathbf{E}_{in}(y)^* \wedge \mathbf{B}_{in}(y)] \\ &= \frac{i\epsilon_o c^2}{4\omega} \int_{y=0}^W dy [\mathbf{E}_{in}(y) \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}_{in}^*)(y) - \mathbf{E}_{in}^*(y) \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}_{in})(y)] \quad (\text{B.1}) \\ &= \frac{i\epsilon_o c^2}{4\omega} \int_{y=0}^W dy [E_{in,z}(y) \nabla E_{in,z}^*(y) - E_{in,z}^*(y) \nabla E_{in,z}(y)].\end{aligned}$$

Le champ incident est une superposition des modes propres propagatifs du guide et peut s'écrire :

$$E_{in,z}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) e^{ik_n x}, \quad (\text{B.2})$$

où  $k_n$  est la projection du vecteur d'onde selon  $x$ , et  $c_n$  un coefficient décrivant la décomposition du champ sur le  $n^e$  mode propagatif. Le flux à travers une section du guide d'onde se réécrit :

$$\phi_{in} = \frac{\epsilon_o c^2}{2\omega} \sum_{n=0}^N k_n |c_n|^2. \quad (\text{B.3})$$

On remarque que, pour une même amplitude  $c(n)$ , le flux ne va pas être le même selon le mode propagatif. On introduit la base des propres normalisée de sorte que chaque mode propagatif porte un flux unité. Les amplitudes du champ dans cette nouvelle base s'expriment à l'aide des amplitudes  $c_n$  par  $d_n = \sqrt{\frac{k_n \epsilon_o n_g c}{2k \phi_{in}}} c_n$ , où  $n_g$  est l'indice du guide. On introduit le vecteur  $|\psi\rangle$  dont les coefficients sont les amplitudes  $d_n$ . Les matrices de réflexion et de transmission sont exprimées dans cette base normalisée.

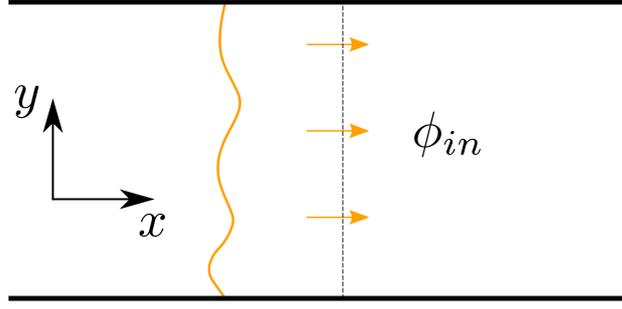


FIGURE B.1 – Représentation du flux du champ incident à travers une section du guide d'onde.

## B.2 Notations

Avant de faciliter le calcul de l'Eq. (II.42), nous introduisons le formalisme suivant :

- $|\psi\rangle$  le vecteur de taille  $N$  dont les coefficients correspondent à l'amplitude du champ dans la base des modes propres normalisés.
- $M(y)$  la matrice diagonale de taille  $N \times N$  dont les éléments diagonaux sont  $M(y, n, n) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right)$ .
- $M_e(y)$  la matrice diagonale de taille infinie dont les éléments diagonaux sont  $M_e(y, n, n) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin\left(\frac{(N+n)\pi y}{W}\right)$ .
- $P(x)$  la matrice diagonale de taille  $N \times N$  dont les éléments diagonaux s'écrivent  $P(x, n, n) = e^{i\sqrt{k^2 - (n\pi/W)^2}x}$ . On introduit également la matrice  $k_x$  telle que  $P(x) = e^{ik_x x}$ .
- $P_e(x)$  la matrice diagonale de taille infini dont les éléments diagonaux s'écrivent  $P_e(x, n, n) = e^{-\sqrt{((N+n)\pi/W)^2 - k^2}x}$ . On introduit également la matrice  $\kappa$  telle que  $P(x) = e^{-\kappa x}$ .
- $\mu$  la matrice diagonale de taille  $N \times N$  dont les éléments diagonaux s'écrivent  $\mu(n, n) = \sqrt{1 - \frac{(n\pi/W)^2}{k^2}}$ . On a en particulier  $\mu = k_x/k$  avec  $k = n_g k_{vide}$ .
- $\mu_e$  la matrice diagonale de de taille infinie dont les éléments diagonaux s'écrivent  $\mu_e(n, n) = i\sqrt{\frac{((N+n)\pi/W)^2}{k^2} - 1}$ . On a en particulier  $\mu_e = i\kappa/k$ .
- $|1\rangle$  le vecteur de taille  $N$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.
- $|1_e\rangle$  le vecteur de taille infini dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Avec ces notations, les champ incident, réfléchi et transmis s'écrivent :

$$E_{in}(x, y) = \sqrt{\frac{2\phi_{in}}{\epsilon_o n_g c}} \langle 1 | M(y) P(x) \mu^{-1/2} | \psi \rangle, \quad (B.4)$$

$$E_r(x, y) = \sqrt{\frac{2\phi_{in}}{\epsilon_o n_g c}} \left[ \langle 1 | M(y) P(-x) \mu^{-1/2} r | \Psi \rangle + \langle 1_e | M_e(y) P_e(-x) \mu_e^{-1/2} r_e | \psi \rangle \right], \quad (B.5)$$

$$E_t(x, y) = \sqrt{\frac{2\phi_{in}}{\epsilon_o n_g c}} \left[ \langle 1 | M(y) P(x - L) \mu^{-1/2} t | \Psi \rangle + \langle 1_e | M_e(y) P_e(x - L) \mu_e^{-1/2} t_e | \psi \rangle \right]. \quad (B.6)$$

Le formalisme introduit permet d'écrire de façon simple et compacte les calculs.

## B.3 Opérateur temps de séjour

On développe maintenant l'intégrale de surface apparaissant dans l'Eq. (II.42) pour l'écrire sous forme matricielle faisant intervenir les matrices  $r$ ,  $t$ ,  $r_e$  et  $t_e$ , ainsi que leurs dérivées fréquentielles. Comme représenté sur la Fig. B.2, l'orientation du vecteur sortant normal à la surface du milieu en réflexion est l'opposé de celle en transmission. On note  $C = \sqrt{\frac{2\phi_{in}}{\epsilon_o n_g c}}$ . On suppose que le flux (et par conséquent  $C$ ) ne dépend pas de la fréquence.

La première partie de l'intégrale de surface dans l'Eq. (II.42) s'écrit :

$$\oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \nabla (E_z^*(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r})) = \int_{y=0}^W dy [\partial_x (E_z^* E_z)(x = L, y) - \partial_x (E_z^* E_z)(x = 0, y)]. \quad (B.7)$$

Commençons par calculer  $\int_{y=0}^W dy E_z^* E_z(x = L, y)$  et  $\int_{y=0}^W dy E_z^* E_z(x = 0, y)$ . En  $x = L$ , on obtient en utilisant l'expression (B.6) du champ transmis :

$$\int_0^W dy E_z^*(y) E_z(y) = C^2 \left[ \langle \psi | t^\dagger \mu^{-1} t | \psi \rangle + \langle \psi | t_e^\dagger \mu_e^{-1/2 \dagger} P_e(x - L) P_e(x - L) \mu_e^{-1/2} t_e | \psi \rangle \right]. \quad (B.8)$$

En réflexion, le champ est la somme du champ incident et du champ réfléchi. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^W dy E_z^*(y) E_z(y) = & C^2 \langle \psi | \mu^{-1} + r^\dagger \mu^{-1} r + \mu^{-1} P^*(x) P(-x) r + r^\dagger P^*(-x) P(x) \mu^{-1} | \psi \rangle \\ & + C^2 \langle \psi | r_e^\dagger \mu_e^{-1/2 \dagger} P_e(-x) P_e(-x) \mu_e^{-1/2} r_e | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (B.9)$$

Seule la matrice  $P$  dépend de  $x$ . Ainsi, le membre de gauche de l'Eq. (B.7) s'écrit :

$$\oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \nabla (E_z^*(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r})) = C^2 \left[ -2ik \langle \psi | r^\dagger - r | \psi \rangle - 2k \langle \psi | r_e^\dagger r_e + t_e^\dagger t_e | \psi \rangle \right]. \quad (B.10)$$

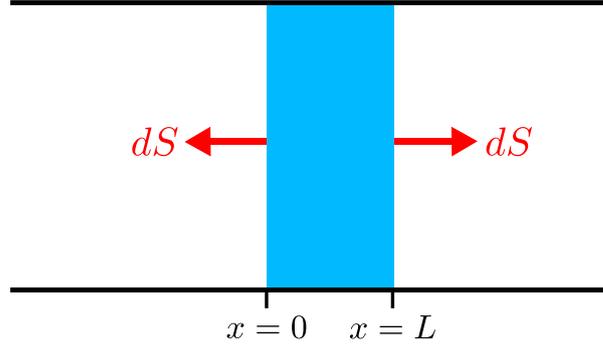


FIGURE B.2 – Représentation de l'orientation des vecteurs normaux à la surface du milieu.

L'Eq. (B.10) fait apparaître une asymétrie entre réflexion et transmission. Le terme faisant intervenir  $r^\dagger - r$  vient de l'interférence entre le champ réfléchi et le champ incident, c'est pourquoi il n'y a pas d'équivalent en transmission.

La seconde partie de l'intégrale s'écrit :

$$\oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot (\partial_\omega E_z(\mathbf{r}) \nabla E_z^*(\mathbf{r}) - E_z^*(\mathbf{r}) \nabla \partial_\omega E_z(\mathbf{r})) = \int_0^W dy (\partial_x E_z^* \partial_\omega E_z - E_z^* \partial_\omega \partial_x E_z)(x=L, y) - \int_0^W dy (\partial_x E_z^* \partial_\omega E_z - E_z^* \partial_\omega \partial_x E_z)(x=0, y). \quad (\text{B.11})$$

En transmission, le champ et ses dérivés s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_t(x=L, y) &= C \langle 1 | M(y) \mu^{-1/2} t | \psi \rangle + \langle 1_e | M_e \mu_e^{-1/2} t_e | \psi \rangle, \\ \partial_x E_t(x=L, y) &= Ci \langle 1 | M(y) k_x \mu^{-1/2} t | \psi \rangle - \langle 1_e | M_e(y) \kappa \mu_e^{-1/2} t_e | \psi \rangle, \\ \partial_\omega E_t(x=L, y) &= C \langle 1 | M(y) (\partial_\omega \mu^{-1/2} t + \mu^{-1/2} \partial_\omega t) | \psi \rangle \\ &\quad + C \langle 1_e | M_e(y) (\partial_\omega \mu_e^{-1/2} t_e + \mu_e^{-1/2} \partial_\omega t_e) | \psi \rangle, \\ \partial_\omega \partial_x E_t(x=L, y) &= Ci \langle 1 | M(y) (\partial_\omega k_x \mu^{-1/2} t + k_x \partial_\omega \mu^{-1/2} t + k_x \mu^{-1/2} \partial_\omega t) | \psi \rangle, \\ &\quad - C \langle 1_e | M_e(y) (\partial_\omega \kappa \mu_e^{-1/2} t_e + \kappa \partial_\omega \mu_e^{-1/2} t_e + \kappa \mu_e^{-1/2} \partial_\omega t_e) | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Cela conduit pour l'intégrale en  $x=L$  :

$$\int_0^W dy (\partial_x E_z^* \partial_\omega E_z - E_z^* \partial_\omega \partial_x E_z)(x=L, y) = C^2 \left[ -2ik \langle \psi | t^\dagger \partial_\omega t | \psi \rangle - 2i \frac{n_g}{c} \langle \psi | t^\dagger t | \psi \rangle \right] + C^2 k \langle \psi | t_e^\dagger \kappa^{-1} \partial_\omega \kappa t_e | \psi \rangle. \quad (\text{B.12})$$

En réflexion, le champ est la somme du champ incident et du champ réfléchi, on obtient

alors :

$$\begin{aligned}
 \int_0^W dy (\partial_x E_z^* \partial_\omega E_z - E_z^* \partial_\omega \partial_x E_z) (x=0, y) = & C^2 \left[ 2ik \langle \psi | r^\dagger \partial_\omega r | \psi \rangle - 2i \frac{ng}{c} \langle \Psi | 1 - r^\dagger r | \psi \rangle \right] \\
 & - C^2 ik \langle \psi | r^\dagger k_x^{-1} \partial_\omega k_x - k_x^{-1} \partial_\omega k_x r | \psi \rangle \\
 & - C^2 k \langle \psi | r_e^\dagger \kappa^{-1} \partial_\omega \kappa r_e | \psi \rangle .
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

### Expression de l'opérateur temps de séjour

Le regroupement des termes précédents fait apparaître la matrice  $k_x^{-1} \partial_\omega k_x - 1/\omega$ . Cette matrice peut se réécrire  $\mu^{-1} \partial_\omega \mu$ . De même, la matrice  $\kappa^{-1} \partial_\omega \kappa - 1/\omega$  apparaît, cette dernière peut se réécrire  $|\mu_e^{-1}| \partial_\omega |\mu_e|$ . Finalement l'intégrale de surface apparaissant dans l'Eq. (II.42) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon_o c^2}{4\omega} \oint_S d\mathbf{r} \mathbf{n} \cdot \left[ \frac{1}{2\omega} \nabla (E_z^*(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r})) + (\partial_\omega E_z(\mathbf{r}) \nabla E_z^*(\mathbf{r}) - E_z^*(\mathbf{r}) \nabla \partial_\omega E_z(\mathbf{r})) \right] \\
 = \phi_{in} \langle \psi | Q_d | \psi \rangle ,
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

avec

$$Q_d = Q + Q_i + Q_e + Q_a, \tag{B.15}$$

où :

- $Q = -iS^\dagger \partial_\omega S$  est l'opérateur de Wigner-Smith [42] avec  $S = \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ .
- $Q_i = \frac{i}{2} (r_p^\dagger D - D r_p)$  avec  $D = \mu^{-1} \partial_\omega \mu$ .
- $Q_e = \frac{1}{2} (r_e^\dagger D_e r_e + t_e^\dagger D_e t_e)$  avec  $D_e = |\mu_e|^{-1} \partial_\omega |\mu_e|$ .
- $Q_a = \frac{i}{2\omega} (1 - t^\dagger t - r^\dagger r) = \frac{i}{2\omega} A$ , avec  $A$  l'opérateur absorption.



# Annexe C

## Distribution marginale des temps propres

### C.1 Distribution marginale des temps propres pour un milieu semi-infini

Nous cherchons la distribution  $p(x)$  qui minimise le hamiltonien :

$$H = 2(N+1)N \int_{x=0}^{+\infty} dx p(x)x - \frac{N(N-1)}{2} \int_{x_1=0}^{+\infty} dx_1 \int_{x_2=0}^{+\infty} dx_2 \ln|x_2 - x_1| p(x_1)p(x_2), \quad (\text{C.1})$$

avec la contrainte  $\int_{x=0}^{+\infty} dx p(x) = 1$ . La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de résoudre ce problème variationnel sous contrainte. On introduit le multiplicateur  $c_o$  et on cherche maintenant  $p(x, c_o)$  qui minimise la quantité  $H'$  :

$$H' = 2 \int_{x=0}^{+\infty} dx p(x)x - \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^{+\infty} dx_1 \int_{x_2=0}^{+\infty} dx_2 \ln|x_2 - x_1| p(x_1)p(x_2) - c_o \int_{x=0}^{+\infty} dx p(x) \quad (\text{C.2})$$

On cherche une solution  $p$  telle que la dérivée fonctionnelle de  $H'$  soit nulle :

$$\frac{\partial H'}{\partial p} = 0. \quad (\text{C.3})$$

On aboutit alors l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$2x - c_o - \int_{x'=0}^{+\infty} dx' \ln|x - x'| p(x'). \quad (\text{C.4})$$

La dérivée de l'Eq. (C.4) par rapport à  $\alpha$  conduit à l'équation de Fredholm :

$$2 = VP \int_{x'=0}^{+\infty} dx' \frac{p(x')}{x - x'}, \quad (\text{C.5})$$

où  $VP$  désigne la valeur principale de Cauchy de l'intégrale. L'équation (C.5) est une équation intégrale de Fredholm du premier type. Celle-ci est bien connue en physique, et sa solution est donnée pour une distribution  $p$  à support bornée par un théorème dû au mathématicien italien Francesco Tricomi [159]. On va donc supposer que  $p$  est à support borné de type  $]0, b]$ . La solution de (C.5) est alors :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{x}\sqrt{(b-x)}} \left( C + VP \int_{t=0}^b dt \frac{2\sqrt{t}\sqrt{b-t}}{t-x} \right) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{x}\sqrt{(b-x)}} \left( C + 2 \left( \frac{b}{2} - x \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

On fixe  $C$  (et implicitement  $c_o$ ) avec la condition  $\int_{x=0}^b dx p(x) = 1$ . On obtient  $\int_{x=0}^b dx p(x) = C = 1$ . La condition  $p(b) = 0$  ( $p$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et nulle sur  $[b, +\infty[$ ) impose  $b = 1$ . On obtient finalement :

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}. \quad (\text{C.7})$$

## C.2 Distribution marginale des temps propres pour un milieu de taille finie

Pour un milieu de taille finie, le temps moyen en régime diffusif est donné par  $\langle \tau \rangle = \pi L/2v$ , où  $v = c/n$  avec  $n$  l'indice effectif du milieu. Nous introduisons un nouveau multiplicateur de Lagrange  $c_1$ . Nous cherchons maintenant la distribution  $p(\alpha, c_o, c_1)$  qui minimise :

$$H' = 2 \int_{x=0}^{+\infty} dx p(x)x - \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^{+\infty} dx_1 \int_{x_2=0}^{+\infty} dx_2 \ln |x_2 - x_1| p(x_1)p(x_2) + c_o \int_{x=0}^{+\infty} dx p(x) + c_1 \int_{x=0}^{+\infty} dx \frac{p(x)}{x}. \quad (\text{C.8})$$

La dérivée de l'équation d'Euler-Lagrange conduit à l'équation de Fredholm :

$$2 - \frac{c_1}{x^2} = VP \int_{t=0}^{+\infty} dt \frac{p(t)}{x-t}. \quad (\text{C.9})$$

En effectuant le changement de variable  $\tilde{x} = 4x$ , on réécrit l'équation précédente :

$$\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\tilde{x}^2} = VP \int_{\tilde{t}=0}^{+\infty} d\tilde{t} \frac{p(\tilde{t})}{\tilde{x}-\tilde{t}}, \quad (\text{C.10})$$

où  $\mu = 4c_1$ . Le problème est alors formellement équivalent à celui rencontré dans [92]. On suppose maintenant que la distribution  $p(x)$  est à support borné de type  $[a, b]$ , c'est-à-dire que l'on suppose l'existence d'un temps maximal. La solution donnée par le théorème de Tricomi s'écrit :

$$p(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}-a}\sqrt{b-\tilde{x}}} \left( C + VP \int_{\tilde{t}=a}^b d\tilde{t} \frac{\sqrt{\tilde{t}-a}\sqrt{b-\tilde{t}}}{\tilde{t}-\tilde{x}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\tilde{t}^2} \right) \right). \quad (\text{C.11})$$

Les constantes  $C$ ,  $\mu$ ,  $a$  et  $b$  sont fixées par les conditions  $p(a) = 0$ ,  $p(b) = 0$ , la contrainte sur la norme  $\int_{\tilde{x}=a}^b d\tilde{x} p(\tilde{x}) = 1$  et la contrainte sur la valeur moyenne  $\int_{\tilde{x}=a}^b d\tilde{x} \frac{p(\tilde{x})}{\tilde{x}} = \langle \tau \rangle / (4\tau_s)$ . La distribution  $p(\tau)$  prend finalement la forme :

$$p(\tau) = \frac{2\tau_s}{\pi\tau^2} \left(1 + \gamma \frac{\tau}{\tau_s}\right) \sqrt{1 - \frac{\beta\tau}{\tau_s} \sqrt{\frac{\alpha\tau}{\tau_s} - 1}}, \quad (\text{C.12})$$

avec  $\alpha = b/4$ ,  $\beta = a/4$  et  $\gamma$  solutions de :

$$\frac{(1\sqrt{\beta/\alpha})^2 (3 + 2\sqrt{\beta/\alpha} + 3\beta/\alpha)}{2\sqrt{\beta/\alpha} (1 + \beta/\alpha)} = \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s}, \quad (\text{C.13})$$

$$\alpha = \frac{1 + \beta/\alpha}{(1 - \beta/\alpha)^2}, \quad (\text{C.14})$$

$$\gamma = \frac{2\beta/\alpha}{(1 - \beta/\alpha)^2}. \quad (\text{C.15})$$



# Annexe D

## Préparation et caractérisation des échantillons

### D.1 Préparation des échantillons

Les milieux diffusants utilisés au chapitre 4 sont des micro-couches d'oxyde de zinc (ZnO). La poudre de ZnO utilisée provient de US Research Nanomaterials, les particules de ZnO ont une taille de 500 nm. Tout d'abord, 9 g de poudre de ZnO sont mélangés à 35 mL d'eau milli-Q. Le mélange d'eau et de ZnO forme une peinture blanche. Ce mélange est passé à l'agitateur mécanique pendant une quinzaine de minute, puis au bain ultrasonique (bain US) pendant 30 minutes. Le mélange est laissé au repos une heure puis repassé au bain US 30 minutes. Entre temps, les lamelles de microscope sur lesquelles va être déposé le milieu diffusant sont lavées au bain US dans de l'isopropanol pendant 30 minutes. Les lamelles sont ensuite rincées à l'eau mQ, puis séchées rapidement après avec un jet d'air comprimé. Pour finir de nettoyer les lamelles et les rendre hydrophiles, ces dernières sont passées au four à ozone pendant 30 minutes. Ainsi, lorsqu'on dépose ensuite le mélange eau-ZnO, celui-ci s'étale correctement sur la lamelle, il n'y a pas de formation de gouttelletes sur la lamelle. Le mélange eau-ZnO est laissé au repos entre 3 et 4 heures avant utilisation.

Le mélange eau-ZnO est déposé sur les lamelles à l'aide d'un aérographe. Notre aérographe est le modèle Evolution Silverline Two in One de chez Harder & Steenbeck. L'aérographe permet de déposer sous forme de micro-gouttelletes la peinture (le mélange eau-ZnO) sur

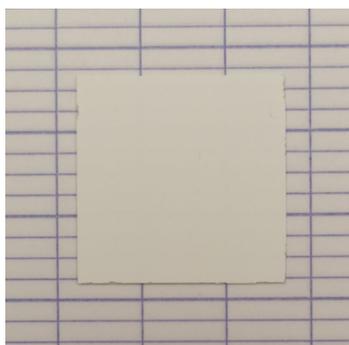


FIGURE D.1 – Couche d'oxyde de zinc.

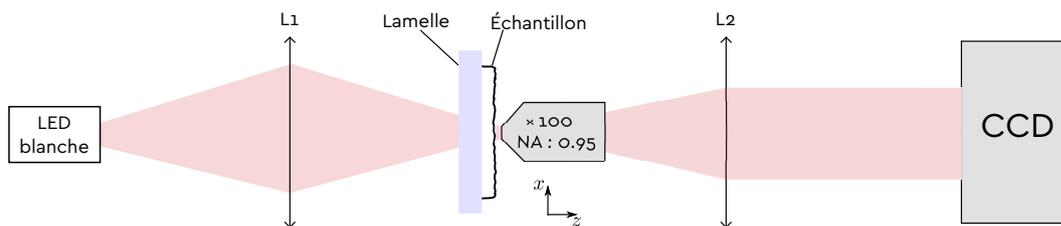


FIGURE D.2 – Schéma du montage utilisé pour mesurer l'épaisseur du milieu diffusant. L'échantillon est éclairé en lumière incohérente par une LED blanche. La lentille  $L_1$  permet de concentrer la lumière sur une zone réduite. La caméra CCD se situe au plan focal de la lentille de tube  $L_2$  (focal de 125mm). L'objectif de microscope est placé sur une platine de translation selon  $z$  avec une précision de déplacement micrométrique. L'ensemble lamelle-échantillon est placée sur une platine de translation selon  $x$ .

la lamelle. Avant utilisation, le mélange eau-ZnO est agité à la main quelques minutes. La lamelle est fixée à l'horizontal avec du scotch double face dans une boîte en carton pour éviter que la lamelle ne s'envole sous l'effet de l'air comprimé venant de l'aérographe. L'aérographe est placé à une vingtaine de centimètres de l'échantillon de sorte à avoir un spray uniforme sur la surface de la lamelle de microscope. L'aérographe forme un angle d'environ  $60^\circ$  par rapport à l'horizontal. La pression dans la pompe à air est fixée entre 2.3 et 2.7 bars. L'aérographe est utilisé de façon à avoir un spray sortant tout juste visible à l'oeil nu. Des mouvements circulaires de la main permettent d'obtenir un dépôt homogène sur la lamelle. L'épaisseur du milieu diffusant est contrôlé par la durée de dépôt de la peinture. Après 1 à 2 minutes, on obtient un échantillon d'une dizaine de micromètres d'épaisseur. Nous avons ainsi fabriqué des échantillons avec une épaisseur allant de  $10\ \mu\text{m}$  à  $40\ \mu\text{m}$ . Un milieu diffusant typique obtenu est représenté sur la Fig. D.1. Le milieu est à laissé au repos environ 12 heures avant utilisation, le temps que l'eau s'évapore.

## D.2 Caractérisation des échantillons

### D.2.1 Caractérisation de l'épaisseur

Pour caractériser l'épaisseur des échantillons, le montage représenté sur la Fig. D.2 est utilisé. L'objectif de microscope est monté sur une platine de translation avec une précision de déplacement micrométrique, et la lamelle et le milieu diffusant sont montés sur une platine de translation latérale. Pour mesurer l'épaisseur du milieu, la mise au point est faite tout d'abord sur la lamelle de verre, puis l'ensemble lamelle-échantillon est translaté, et la mise au point est faite sur la surface de l'échantillon. La différence de position sur la platine de translation de l'objectif de microscope entre les deux mises au point indique l'épaisseur de l'échantillon. En réalité, l'angle entre la surface de la lamelle et la direction de translation latérale n'est pas tout à fait égal à zéro. Cela implique que la mesure précédente ne correspond pas directement à l'épaisseur du milieu, mais comprends aussi la contribution due à l'angle de la platine. Pour s'affranchir de ce biais, la mise au point est réalisée sur la lamelle de verre pour différents déplacements latéraux. Pour vérifier l'homogénéité de l'épaisseur du milieu, la mise au point est également réalisée en plusieurs points de l'échantillon.

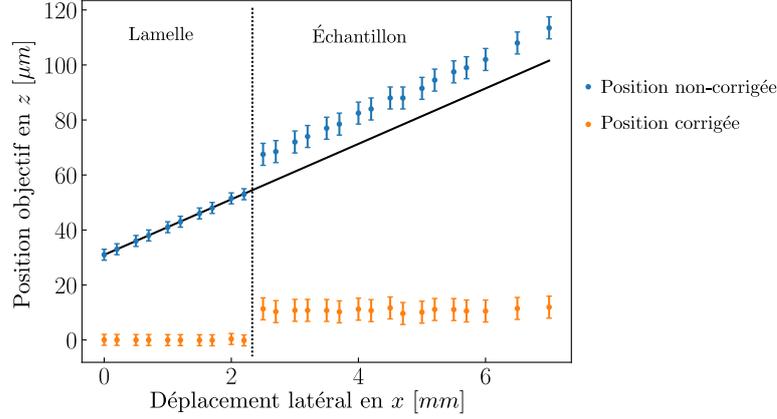


FIGURE D.3 – Mesure de l'épaisseur d'un échantillon. Les positions non-corrigées correspondent aux positions de l'objectif pour obtenir la mise au point en fonction du déplacement latéral. La courbe en trait noir représente un ajustement des positions non-corrigées sur la partie lamelle par une fonction affine  $y = ax + b$ . Les positions corrigées correspondent à la différence entre les positions corrigées et l'ajustement linéaire. Les barres d'erreurs correspondent à l'incertitude due à la limite de précision de mesure de la platine de translation, et à la profondeur de mise au point au niveau de l'échantillon.

### D.2.2 Caractérisation du libre parcours moyen de transport

Le libre parcours moyen de transport de milieux diffusants réalisés avec le protocole ci-dessus a été caractérisé à 773 nm par Clément Robert-Ralison durant son stage de M2 à l'Institut Langevin. La méthode utilisée repose sur la mesure du coefficient de transmission  $T$  à travers un milieu diffusant pour une onde plane sous incidence normale à la surface du milieu pour différentes épaisseurs  $L$  du milieu [160]. En supposant que le libre parcours moyen d'absorption est grand devant le libre parcours moyen de diffusion ( $\ell_a \gg \ell_s$ ), et pour un milieu multiplement diffusant, ce dernier s'exprime [161–164] :

$$\frac{1}{T} = \frac{L + z_{e1} + z_{e2}}{\ell + z_{e1}}, \quad (\text{D.1})$$

où  $z_{e1}$  (resp.  $z_{e2}$ ) est la longueur d'extrapolation en réflexion (resp. transmission). Les longueurs d'extrapolations ne dépendent pas de l'épaisseur du milieu. Le coefficient de transmission  $T$  a été mesuré pour des milieux diffusants avec une épaisseur allant de 6  $\mu\text{m}$  à 37  $\mu\text{m}$ . La pente de l'ajustement affine de  $1/T = aL + b$  en fonction de  $L$  permet d'évaluer le libre parcours moyen de transport. Ce dernier vaut  $\ell = 0.7 \mu\text{m} \pm 0.4 \mu\text{m}$ .

L'indice effectif  $n_{eff}$  des milieux diffusants réalisés avec le précédent protocole a également été évalué par Clément Robert-Ralison avec la formule de Maxwell-Garnett [165] :

$$n_{eff} = \sqrt{\frac{\epsilon + 2\epsilon_o + 2f(\epsilon - \epsilon_o)}{\epsilon + 2\epsilon_o - f(\epsilon - \epsilon_o)}}, \quad (\text{D.2})$$

où  $\epsilon_o$  est la permittivité du vide,  $\epsilon = \epsilon_o n_{\text{ZnO}}^2$  la permittivité de l'oxyde de zinc, avec  $n_{\text{ZnO}}$  l'indice de l'oxyde de Zinc, et  $f$  la fraction volumique d'oxyde de zinc. L'indice effectif des milieux réalisés vaut  $n_{eff} = 1.26 \pm 0.09$ .



# Bibliographie

- [1] <https://www.meteocontact.fr/pour-tout-aller-plus-loin/le-brouillard>.
- [2] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, volume 2, Academic press New York (1978).
- [3] M. C. W. van Rossum and T. M. Nieuwenhuizen, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313 (1999).
- [4] E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic physics of electrons and photons*, Cambridge University Press (2007).
- [5] H. W. Babcock, *Publ. Astron. Pac. Soc.* **65**, 229–236 (1953).
- [6] R. A. Muller and A. Buffington, *J. Opt. Soc. Am.* **64**, 1200–1210 (1974).
- [7] D. P. Greenwood and D. L. Fried, *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 193–206 (1976).
- [8] J. Hardy, in *Solar instrumentation : What's next ?*, volume 1, page 421 (1981).
- [9] R. C. Smithson, in *Electromechanical System Interaction with Optical Design*, volume 779, pages 18–22, International Society for Optics and Photonics (1987).
- [10] H. Yu, J. Park, K. Lee, J. Yoon, K. Kim, S. Lee, and Y. Park, *Curr. Appl. Phys.* **15**, 632–641 (2015).
- [11] S. Popoff, <https://www.wavefrontshaping.net>.
- [12] <https://www.meadowlark.com>.
- [13] S. Rotter and S. Gigan, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 015005 (2017).
- [14] <https://www.thorlabs.com>.
- [15] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, *Opt. Lett.* **32**, 2309–2311 (2007).
- [16] I. M. Vellekoop, A. Lagendijk, and A. P. Mosk, *Nat. Photonics* **4**, 320 (2010).
- [17] S. M. Popoff, A. Goetschy, S. F. Liew, A. D. Stone, and H. Cao, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 133903 (2014).
- [18] A. P. Mosk, A. Lagendijk, G. Leroose, and M. Fink, *Nat. Photonics* **6**, 283 (2012).
- [19] J. Aulbach, B. Gjonaj, P. M. Johnson, A. P. Mosk, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 103901 (2011).
- [20] O. Katz, E. Small, Y. Bromberg, and Y. Silberberg, *Nat. Photonics* **5**, 372 (2011).

- 
- [21] J. Aulbach, B. Gjonaj, P. Johnson, and A. Lagendijk, *Opt. Express* **20**, 29237–29251 (2012).
- [22] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny, and M. Fink, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 173902 (2009).
- [23] C. Prada and M. Fink, *Wave motion* **20**, 151–163 (1994).
- [24] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* **99**, 2067–2076 (1996).
- [25] S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 100601 (2010).
- [26] S. Popoff, G. Lerosey, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan, *Nat. Commun* **1**, 1–5 (2010).
- [27] A. N. Tikhonov, *Soviet Math. Dokl.* **4**, 1035–1038 (1963).
- [28] D. Gore, A. Paulraj, and R. Nabar, Introduction to space-time wireless communication (2004).
- [29] O. Dorokhov, *JETP Lett.* **36**, 318–321 (1982).
- [30] B. Gérardin, J. Laurent, A. Derode, C. Prada, and A. Aubry, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 173901 (2014).
- [31] A. Goetschy and A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 063901 (2013).
- [32] A. Liutkus, D. Martina, S. Popoff, G. Chardon, O. Katz, G. Lerosey, S. Gigan, L. Daudet, and I. Carron, *Sci. Rep.* **4**, 5552 (2014).
- [33] Y. Choi, T. D. Yang, C. Fang-Yen, P. Kang, K. J. Lee, R. R. Dasari, M. S. Feld, and W. Choi, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 023902 (2011).
- [34] C. Park, J.-H. Park, C. Rodriguez, H. Yu, M. Kim, K. Jin, S. Han, J. Shin, S. H. Ko, K. T. Nam, L. Yong-Hee, C. Yong-Hoon, and P. YongKeun, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 113901 (2014).
- [35] P. Del Hougne and G. Lerosey, *Phys. Rev. X* **8**, 041037 (2018).
- [36] M. W. Matthès, P. del Hougne, J. de Rosny, G. Lerosey, and S. M. Popoff, *Optica* **6**, 465–472 (2019).
- [37] H. Defienne, M. Barbieri, I. A. Walmsley, B. J. Smith, and S. Gigan, *Sci. Adv.* **2**, e1501054 (2016).
- [38] S. Leedumrongwatthanakun, L. Innocenti, H. Defienne, T. Juffmann, A. Ferraro, M. Paternostro, and S. Gigan, *Nat. Photonics* **14**, 139–142 (2020).
- [39] L. Eisenbud, *The formal properties of nuclear collisions*, Ph.D. thesis, Princeton University (1948).
- [40] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **98**, 145 (1955).
- [41] J. M. Jauch, K. B. Sinha, and B. N. Misra, *Helv. Phys. Acta* **45**, 398–426 (1972).

- [42] F. T. Smith, *Phys. Rev.* **118**, 349 (1960).
- [43] A. Lagendijk and B. A. Van Tiggelen, *Phys. Rep.* **270**, 143–215 (1996).
- [44] C. A. A. de Carvalho and H. M. Nussenzveig, *Phys. Rep.* **364**, 83–174 (2002).
- [45] J. Friedel, *Nuovo Cimento Suppl.* **7**, 287–311 (1958).
- [46] H. G. Winful, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 260401 (2003).
- [47] E. Condon and P. Morse, *Rev. Mod. Phys.* **3**, 43 (1931).
- [48] L. A. MacColl, *Phys. Rev.* **40**, 621 (1932).
- [49] T. E. Hartman, *J. Appl. Phys.* **33**, 3427–3433 (1962).
- [50] H. G. Winful, *Nature* **424**, 638–638 (2003).
- [51] H. G. Winful, *Phys. Rep.* **436**, 1–69 (2006).
- [52] H. G. Winful, *Phys. Rev. E* **68**, 016615 (2003).
- [53] C. Texier, *Physica E* **82**, 16–33 (2016).
- [54] M. Davy, Z. Shi, J. Wang, X. Cheng, and A. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 033901 (2015).
- [55] A. Z. Genack, P. Sebbah, M. Stoytchev, and B. A. Van Tiggelen, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 715 (1999).
- [56] B. A. Van Tiggelen, P. Sebbah, M. Stoytchev, and A. Z. Genack, *Phys. Rev. E* **59**, 7166 (1999).
- [57] Y. V. Fyodorov and H.-J. Sommers, *J. Math. Phys.* **38**, 1918–1981 (1997).
- [58] J. A. Mendez-Bermudez and T. Kottos, *Phys. Rev. B* **72**, 064108 (2005).
- [59] A. Ossipov and Y. V. Fyodorov, *Phys. Rev. B* **71**, 125133 (2005).
- [60] A. M. Martínez-Argüello, M. Martínez-Mares, and J. C. García, *Journal of Mathematical Physics* **55**, 081901 (2014).
- [61] P. Brouwer, K. Frahm, and C. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4737 (1997).
- [62] A. Grabsch, D. V. Savin, and C. Texier, *J. Phys. A : Math. Theo.* **51**, 404001 (2018).
- [63] T. Kottos, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 10761 (2005).
- [64] P. Ambichl, A. Brandstötter, J. Böhm, M. Kühmayer, U. Kuhl, and S. Rotter, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 033903 (2017).
- [65] M. Horodyski, M. Kühmayer, A. Brandstötter, K. Pichler, Y. V. Fyodorov, U. Kuhl, and S. Rotter, *Nat. Photonics* **14**, 149–153 (2020).
- [66] P. Šeba, K. Życzkowski, and J. Zakrzewski, *Phys. Rev. E* **54**, 2438 (1996).
- [67] L. Landau and E. Lifshitz, *Électrodynamique des milieux continus*, Mir (1969).
- [68] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, AAPT (1999).

- [69] Y. S. Barash and V. L. Ginzburg, *Phys. Usp.* **19**, 263 (1976).
- [70] P. A. Mello, N. Kumar, and D. Narendra Kumar, *Quantum transport in mesoscopic systems : complexity and statistical fluctuations : a maximum-entropy viewpoint*, volume 4, Oxford University Press on Demand (2004).
- [71] J. Wishart, *Biometrika* pages 32–52 (1928).
- [72] E. P. Wigner, *Ann. Math.* **62**, 548 (1955).
- [73] A. M. Tulino and S. Verdú, *Random matrix theory and wireless communications*, Now Publishers Inc (2004).
- [74] P. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, *Ann. Phys.* **181**, 290–317 (1988).
- [75] C. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997).
- [76] N. G. Van Kampen, *Chaos* (1981).
- [77] C. Beenakker, J. C. Paasschens, and P. Brouwer, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1368 (1996).
- [78] N. Bruce and J. T. Chalker, *J. Phys. A* **29**, 3761 (1996).
- [79] A. Ossipov, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 076601 (2018).
- [80] C. Beenakker and P. Brouwer, *Physica E* **9**, 463–466 (2001).
- [81] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140–156 (1962).
- [82] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 166–175 (1962).
- [83] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 157–165 (1962).
- [84] M. L. Mehta, *Random matrices*, Elsevier (2004).
- [85] V. A. Marčenko and L. A. Pastur, *Math. USSR-Sb.* **1**, 457 (1967).
- [86] T. Kottos, A. Ossipov, and T. Geisel, *Phys. Rev. E* **68**, 066215 (2003).
- [87] A. Ossipov, T. Kottos, and T. Geisel, *Europhys. Lett.* **62**, 719 (2003).
- [88] J. Chabé, *Chaos quantique et transition d'Anderson avec des atomes refroidis par laser*, Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille (2007).
- [89] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [90] R. Pierrat, P. Ambichl, S. Gigan, A. Haber, R. Carminati, and S. Rotter, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **111**, 17765–17770 (2014).
- [91] R. Savo, R. Pierrat, U. Najar, R. Carminati, S. Rotter, and S. Gigan, *Science* **358**, 765–768 (2017).
- [92] A. Grabsch and C. Texier, *J. Phys. A : Math. Theo.* **49**, 465002 (2016).
- [93] M. Durand, S. Popoff, R. Carminati, and A. Goetschy, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 243901 (2019).
- [94] P. Hong, O. S. Ojambati, A. Lagendijk, A. P. Mosk, and W. L. Vos, *Optica* **5**, 844–849 (2018).

- [95] N. Bachelard, J. Andreasen, S. Gigan, and P. Sebbah, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 033903 (2012).
- [96] N. Bachelard, S. Gigan, X. Noblin, and P. Sebbah, *Nat. Phys.* **10**, 426–431 (2014).
- [97] R. Sarma, A. G. Yamilov, S. Petrenko, Y. Bromberg, and H. Cao, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 086803 (2016).
- [98] M. Koirala, R. Sarma, H. Cao, and A. Yamilov, *Phys. Rev. B* **96**, 054209 (2017).
- [99] M. Davy, Z. Shi, J. Park, C. Tian, and A. Z. Genack, *Nat. Commun.* **6**, 1–6 (2015).
- [100] A. D. Mirlin, *Phys. Rep.* **326**, 259–382 (2000).
- [101] P. del Hougne, R. Sobry, O. Legrand, F. Mortessagne, U. Kuhl, and M. Davy, *arXiv preprint arXiv :2001.04658* (2020).
- [102] M. S. Patterson, B. Chance, and B. C. Wilson, *Appl. Opt.* **28**, 2331–2336 (1989).
- [103] A. Z. Genack and J. M. Drake, *Europhys. Lett.* **11**, 331 (1990).
- [104] N. C. Bruce, F. E. W. Schmidt, J. C. Dainty, N. P. Barry, S. C. W. Hyde, and P. M. W. French, *Appl. Opt.* **34**, 5823–5828 (1995).
- [105] M. Tomita and T. Matsumoto, *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 170–174 (1995).
- [106] M. A. Webster, T. D. Gerke, A. M. Weiner, and K. J. Webb, *Opt. Lett.* **29**, 1491–1493 (2004).
- [107] E. Tal and Y. Silberberg, *Opt. Lett.* **31**, 3529–3531 (2006).
- [108] A. Derode, P. Roux, and M. Fink, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4206 (1995).
- [109] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, and M. Fink, *Science* **315**, 1120–1122 (2007).
- [110] D. J. McCabe, A. Tajalli, D. R. Austin, P. Bondareff, I. A. Walmsley, S. Gigan, and B. Chatel, *Nat. Commun.* **2**, 447 (2011).
- [111] M. Mounaix, D. Andreoli, H. Defienne, G. Volpe, O. Katz, S. Grésillon, and S. Gigan, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 253901 (2016).
- [112] D. Andreoli, G. Volpe, S. Popoff, O. Katz, S. Grésillon, and S. Gigan, *Sci. Rep.* **5**, 10347 (2015).
- [113] M. Mounaix, H. Defienne, and S. Gigan, *Phys. Rev. A* **94**, 041802 (2016).
- [114] W. Xiong, C. W. Hsu, and H. Cao, *Nat. Commun.* **10**, 1–7 (2019).
- [115] M. Mounaix and J. Carpenter, *Nat. Commun.* **10**, 1–8 (2019).
- [116] C. W. Hsu, A. Goetschy, Y. Bromberg, A. D. Stone, and H. Cao, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 223901 (2015).
- [117] P. Sebbah, O. Legrand, B. A. Van Tiggelen, and A. Z. Genack, *Phys. Rev. E* **56**, 3619 (1997).
- [118] P. Sebbah, O. Legrand, and A. Z. Genack, *Phys. Rev. E* **59**, 2406 (1999).

- [119] B. A. van Tiggelen, S. E. Skipetrov, and J. H. Page, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **226**, 1457–1475 (2017).
- [120] R. S. Martin and J. H. Wilkinson, *Numer. Math.* **11**, 99–110 (1968).
- [121] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, volume 3, JHU press (2012).
- [122] G. Leborgne, Diagonalisation : valeurs propres, valeurs propres généralisées (2015).
- [123] J. Bertolotti, E. G. Van Putten, C. Blum, A. Lagendijk, W. L. Vos, and A. P. Mosk, *Nature* **491**, 232–234 (2012).
- [124] O. Katz, P. Heidmann, M. Fink, and S. Gigan, *Nat. Photonics* **8**, 784–790 (2014).
- [125] J. Chang and G. Wetzstein, *J. Biophotonics* **11**, e201700224 (2018).
- [126] M. Hofer, C. Soeller, S. Brasselet, and J. Bertolotti, *Opt. Express* **26**, 9866–9881 (2018).
- [127] O. Katz, E. Small, Y. Guan, and Y. Silberberg, *Optica* **1**, 170–174 (2014).
- [128] A. Boniface, B. Blochet, J. Dong, and S. Gigan, *Optica* **6**, 1381–1385 (2019).
- [129] A. Daniel, D. Oron, and Y. Silberberg, *Opt. Express* **27**, 21778–21786 (2019).
- [130] J. W. Tay, P. Lai, Y. Suzuki, and L. V. Wang, *Sci. Rep.* **4**, 3918 (2014).
- [131] X. Xu, H. Liu, and L. V. Wang, *Nat. Photonics* **5**, 154–157 (2011).
- [132] Y. M. Wang, B. Judkewitz, C. A. DiMarzio, and C. Yang, *Nat. Commun.* **3**, 1–8 (2012).
- [133] B. Judkewitz, Y. M. Wang, R. Horstmeyer, A. Mathy, and C. Yang, *Nat. Photonics* **7**, 300–305 (2013).
- [134] H. Ruan, M. Jang, B. Judkewitz, and C. Yang, *Sci. Rep.* **4**, 7156 (2014).
- [135] K. Si, R. Fiolka, and M. Cui, *Sci. Rep.* **2**, 748 (2012).
- [136] O. Katz, F. Ramaz, S. Gigan, and M. Fink, *Nat. Commun.* **10**, 1–10 (2019).
- [137] R. Horstmeyer, H. Ruan, and C. Yang, *Nat. Photonics* **9**, 563–571 (2015).
- [138] R. Pnini and B. Shapiro, *Phys. Rev. B* **39**, 6986 (1989).
- [139] L. S. Froufe-Perez, A. Garcia-Martin, G. Cwilich, and J. J. Sáenz, *Physica A* **386**, 625–632 (2007).
- [140] N. Fayard, A. Cazé, R. Pierrat, and R. Carminati, *Phys. Rev. A* **92**, 033827 (2015).
- [141] I. Starshynov, A. Paniagua-Diaz, N. Fayard, A. Goetschy, R. Pierrat, R. Carminati, and J. Bertolotti, *Phys. Rev. X* **8**, 021041 (2018).
- [142] N. Fayard, A. Goetschy, R. Pierrat, and R. Carminati, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 073901 (2018).

- [143] A. M. Paniagua-Diaz, I. Starshynov, N. Fayard, A. Goetschy, R. Pierrat, R. Carminati, and J. Bertolotti, *Optica* **6**, 460–464 (2019).
- [144] N. Fayard, *Joint-statistics between reflected and transmitted speckle patterns : from mesoscopic correlations to information theory*, Ph.D. thesis, Université de recherche Paris Sciences et Lettres PSL Research University (2017).
- [145] S. Feng, C. Kane, P. A. Lee, and A. D. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 834 (1988).
- [146] S. Feng and P. A. Lee, *Science* **251**, 633–639 (1991).
- [147] E. Akkermans and G. Montambaux, *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 101–112 (2004).
- [148] H. Yilmaz, C. W. Hsu, A. Yamilov, and H. Cao, *Nat. Photonics* **13**, 352–358 (2019).
- [149] R. Horisaki, R. Takagi, and J. Tanida, *Opt. Express* **24**, 13738–13743 (2016).
- [150] G. Satat, M. Tancik, O. Gupta, B. Heshmat, and R. Raskar, *Opt. Express* **25**, 17466–17479 (2017).
- [151] Y. Li, Y. Xue, and L. Tian, *Optica* **5**, 1181–1190 (2018).
- [152] Y. Sun, J. Shi, L. Sun, J. Fan, and G. Zeng, *Opt. Express* **27**, 16032–16046 (2019).
- [153] M. Lyu, H. Wang, G. Li, S. Zheng, and G. Situ, *Adv. Photon.* **1**, 036002 (2019).
- [154] N. Shabairou, E. Cohen, O. Wagner, D. Malka, and Z. Zalevsky, *Opt. Lett.* **43**, 5603–5606 (2018).
- [155] U. Kürüm, P. R. Wiecha, R. French, and O. L. Muskens, *Opt. Express* **27**, 20965–20979 (2019).
- [156] A. MacKinnon, *Z. Phys. B* **59**, 385–390 (1985).
- [157] H. U. Baranger, D. P. DiVincenzo, R. A. Jalabert, and A. D. Stone, *Phys. Rev. B* **44**, 10637 (1991).
- [158] D. S. Fisher and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **23**, 6851 (1981).
- [159] F. G. Tricomi, *Integral equations*, volume 5, Courier Corporation (1985).
- [160] C. Robert-Ralison, Focusing of light through a scattering medium by optimizing the backscattered intensity (2018).
- [161] J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz, *Phys. Rev. A* **44**, 3948 (1991).
- [162] R. Aronson, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2532–2539 (1995).
- [163] M. U. Vera and D. J. Durian, *Phys. Rev. E* **53**, 3215 (1996).
- [164] J. G. Rivas, R. Sprik, C. M. Soukoulis, K. Busch, and A. Lagendijk, *Europhys. Lett.* **48**, 22 (1999).
- [165] G. A. Niklasson, C. G. Granqvist, and O. Hunderi, *Appl. Opt.* **20**, 26–30 (1981).





## RÉSUMÉ

---

Depuis bientôt une quinzaine d'années, les outils de l'optique adaptative sont utilisés pour contrôler le transport de la lumière à travers des milieux désordonnés opaques. La mesure de la matrice de transmission optique permet par exemple de focaliser la lumière à travers un milieu diffusant, ou de retrouver une image masquée par ce dernier. Cette thèse, théorique et expérimentale, porte sur l'optimisation par contrôle du front d'onde de trois propriétés de la lumière en milieu complexe : l'énergie stockée, la dispersion temporelle, et l'intensité transmise. Dans un premier temps, nous établissons l'expression d'un opérateur pour l'énergie stockée dans un milieu diélectrique arbitraire. La distribution des valeurs propres de cet opérateur en milieu fortement diffusant est étudiée numériquement et analytiquement, révélant l'existence d'une borne maximale au stockage d'énergie. Dans un second temps, nous nous intéressons au contrôle temporel du signal transmis à travers un milieu diffusant. Par une approche matricielle, nous démontrons numériquement l'existence de fronts d'onde qui permettent de limiter la dispersion temporelle induite par la propagation ainsi que de contrôler le temps moyen de sortie. Dans la dernière partie de cette thèse, nous étudions expérimentalement la possibilité de focaliser la lumière en transmission d'un milieu opaque lorsque seul le flux réfléchi peut être mesuré et optimisé par façonnage du front incident.

## MOTS CLÉS

---

Optique, diffusion, modulation du front d'onde, énergie, corrélations mésoscopiques.

## ABSTRACT

---

Tools from adaptive optics have been used to control light transport through disordered opaque media for fifteen years now. For example, the measurement of the transmission matrix enables us to focus light through scattering media or to retrieve an image blurred by this medium. This thesis, both theoretical and experimental, tackles the optimization of three properties of light in complex media by wavefront shaping: stored energy, temporal dispersion and transmitted intensity. Firstly, we establish the expression of an operator for the stored energy in an arbitrary dielectric medium. The eigenvalue distribution of this operator for a strongly disordered medium is studied, both numerically and analytically, unraveling an upper edge for the stored energy. Secondly, we investigate the temporal control of the transmitted signal through a scattering medium. By using a matrix approach, we show numerically that it is possible to find some wavefronts which enable us to limit temporal dispersion caused by propagation, as well as having control over the mean output time. In the last part of this thesis, we study experimentally the feasibility of focusing light through an opaque medium in transmission solely by carrying out an optimization of the reflected field.

## KEYWORDS

---

Optics, diffusion, wavefront shaping, energy, mesoscopic correlations.