



**HAL**  
open science

# Développement de traverses instrumentées pour l'étude du comportement des voies ferrées

Le Hung Tran

► **To cite this version:**

Le Hung Tran. Développement de traverses instrumentées pour l'étude du comportement des voies ferrées. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2020. Français. NNT : 2020PESC1011 . tel-03235557

**HAL Id: tel-03235557**

**<https://pastel.hal.science/tel-03235557v1>**

Submitted on 25 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS-EST  
École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

*Spécialité : Structures et Matériaux*

Présentée par

**Le Hung TRAN**

Sujet de la thèse

---

DÉVELOPPEMENT DE TRAVERSES INSTRUMENTÉES  
POUR L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT  
DES VOIES FERRÉES

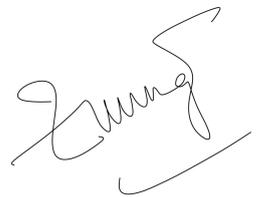
---

Soutenue le 29 juin 2020 devant le jury composé de

Jean-François Semblat	École Nationale Supérieure de Techniques Avancées	Président du jury
Geert Degrande	University of Leuven	Rapporteur
Pierre Hornych	Université Gustave Eiffel	Rapporteur
Christine Funfschilling	Société Nationale des Chemins de Fer	Examinatrice
Samir Messad	SATEBA (Consolis Group)	Examinateur
Tien Hoang	École des Ponts ParisTech	Examinateur
Gilles Foret	École des Ponts ParisTech	Directeur de thèse
Denis Duhamel	École des Ponts ParisTech	Co-directeur de thèse
Arnaud Loaëc	SATEBA (Consolis Group)	Invité



À ma famille !

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Tran Le Hung'. The signature is written in a cursive, flowing style with a long horizontal stroke at the end.

Tran Le Hung





École des Ponts  
ParisTech

CONSOLIS

SATEBA

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.  
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que l'on ne sait pourquoi.  
Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne



... et nous savons pourquoi !



# Remerciements

À l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincu que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de "l'apprenti-chercheur".

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, les Professeurs *Gilles Foret* et *Denis Duhamel* pour la confiance qu'ils m'ont accordé en acceptant d'encadrer ce travail doctoral dans l'équipe MSA, pour leurs multiples conseils et toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette recherche, pour leur culture scientifiques qu'ils m'ont fait partager. Sans oublier bien sûr les soutiens du Docteur *Cien Hoang* pendant mes moments de doute et d'incertitude. J'aimerais également leur dire à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité et leur respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je leur ai adressés. Sans leur aide, cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à la société SATEBA, notamment Messieurs *Arnaud Loeïc* et *Samir Messad* pour la chance qu'ils m'ont donnée de pouvoir travailler sur ce sujet de recherche. Les nombreuses et diverses discussions, remarques que nous avons eues ont été fort utiles pour mener à bien cette thèse.

J'exprime aussi ma sincère reconnaissance aux Professeurs *Jean-François Semblat*, *Geert Degrande*, *Pierre Hornych* et *Christine Fumfschilling* qui ont accepté de juger ce travail et d'en être le président, les rapporteurs et l'examinatrice et que je remercie pour le temps qu'ils ont passé à évaluer mon manuscrit.

Mes remerciements vont également à tous membres du laboratoire Navier, permanents, thésards ou stagiaires, qui m'y ont accueilli chaleureusement, notamment Madame *Marie-Françoise Kaspi*, qui s'occupe de toutes les procédures administratives et de la vie des doctorant(e)s, Monsieur *Gilles Moreau*, pour la préparation des matériels d'essais. De plus, je voudrais adresser mes remerciements particulièrement à ceux qui sont dans le bureau V121, *Sarah Gebai*, *Benjamin Claudet* et *Truong-Lon Pham* pour la bonne ambiance de travail.

La partie expérimentale de ma thèse n'aurait pas pu être réalisée sans support des personnes du centre d'essai R&D de SATEBA à Chalon-sur-Saône, Madame Christelle Galoche et Messieurs Eric Deliance et Cyril Gaudillère.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à des amis qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de mon travail. Le fait que la soutenance ait été réalisée en visio-conférence n'a pas pu empêcher mes amis répartis dans le monde entier, au Viet Nam, en France, en Russie, en Angleterre, en Allemagne, en Australie, au Canada etc. de pouvoir la suivre. Mes plus vifs remerciements vont particulièrement à Bernard Crumppf qui m'a suivi depuis mon premier jour en France et m'a donné beaucoup de conseils dans la vie quotidienne. Je n'oublie pas mon "coloc" à l'INSA de Lyon, Antoine Hudzik, qui m'a appris le français, pour nos inoubliables souvenirs en France, et aussi au Vietnam.

En fin, j'adresse mille mercis à ma famille, mon papa Tran Anh Tuan, ma maman Le Chi Bich Hoa et mon petit frère Tran Le Quang Huy pour leur soutien indéfectible aussi bien moral au cours de mon cursus. Ils n'ont pas pu assister à ma soutenance, mais leurs encouragements m'accompagnent, malgré la grande distance. J'ai une pensée à mes grand-parents qui n'y étaient pas mais ils ont beaucoup compté pour moi.

La liste est vraiment longue, merci à tous les autres que j'ai cotoyés et que, hélas, je n'ai pas pus citer.

*merci*

# Résumé

Les voies ferrées n'ont cessé d'évoluer depuis l'apparition du premier rail en fer laminé (1789). Elles se composent de la superstructure (les rails, les systèmes d'attaches, les traverses, les semelles sous-rail) et de l'infrastructure (la plateforme). Lors de son utilisation, la voie se dégrade avec une usure des semelles, des systèmes d'attaches, du vieillissement du ballast ou sous l'effet des défauts du matériel roulant. Toutefois, il est difficile d'obtenir des informations sur ces éléments en voie. La société SATEBA propose une solution complémentaire pour suivre l'état de la voie en temps réel. Il s'agit de la traverse "Smart Sleeper", traverse instrumentée de capteurs de déformation (réseaux de Bragg) permettant d'obtenir de l'information sur le comportement de la traverse en voie et notamment sur son niveau de déformation lors du passage des trains.

Ce travail rentre dans le cadre de la collaboration de recherche commune entre SATEBA et l'École des Ponts ParisTech et s'intéresse, d'une part à l'étude du comportement mécanique de la traverse en voie et, d'autre part à la dégradation de la voie ferroviaire et du matériel roulant.

La première partie de ce travail présente les modèles existants d'une voie ferrée ballastée et non-ballastée et propose de développer des modèles dynamiques de la traverse en voie. En utilisant la relation entre la force de réaction appliquée sur la traverse et le déplacement du rail dans le domaine fréquentiel, et à l'aide de la fonction de Green, les modèles dynamiques de la traverse en voie développés permettent de calculer rapidement la réponse de la traverse avec une bonne corrélation à des signaux mesurés sur site. Une simulation numérique de traverse par éléments finis a été validée en comparaison avec des résultats obtenus par des essais mécaniques sur la traverse.

La deuxième partie est consacrée à l'identification des paramètres du matériel roulant et de la voie. La détermination a été effectuée par des études paramétriques avec plusieurs types de fondation. Le fait de déterminer ces indicateurs nous permet de qualifier l'état de la voie. Grâce à des modèles dynamiques de la traverse en voie, une méthode d'identification des chargements du train a été développée. Une application industrielle - logiciel "**ChargeTEBA**" a été développée afin de faciliter le traitement des signaux réalisés sur site. Une nouvelle traverse instrumentée est proposée afin d'obtenir de meilleurs signaux, l'état de la voie et aussi des informations sur le matériel roulant.

**Mots-clés :** Voie ferrée, traverse instrumentée, ballast, fonction de Green, identification des chargements, dynamique, fondation homogène, fondation non-homogène, éléments finis, fiber Bragg grating (FBG)



# Abstract

Railways have evolved since the first rolled rail came into existence (1789). They consist of superstructure (rails, fastening systems, rail-pads) and infrastructure (platform). In practice, the deterioration of the track can be shown through the wear of rail-pads and fastening systems, aging ballast and the defects in the rolling stock. However, it is difficult to obtain information on these elements in track. SATEBA proposed a “Smart Sleeper”, a complementary solution to monitor the state of the track immediately. This is an integrated sleeper of strain sensors (Fiber Bragg gratings), making it possible to obtain information on the behavior of the railway track sleepers in general and on its level of deformation while the train passes the sleeper in particular.

This work serves as part of the joint research collaboration between SATEBA and the École des Ponts ParisTech, which investigates the mechanical behavior of railway sleepers and the deterioration of railway tracks and rolling stocks.

The first part of this work presents the existing models of a ballasted and non-ballasted railway track and proposes a dynamic model of the rail-track sleepers. By using the relationship between the reaction force applied to the sleeper and the rail displacement in the frequency domain, and thanks to the Green’s function, the dynamic models of the railway sleepers enable calculating quickly the response of sleepers with a result close to the authentic signal recorded in an instrumented site. A simulation of a sleeper by using the finite elements has been validated by a comparison with the experimental results.

The second part of this work focuses on the identification of the parameters of the rolling stock and the railway track. The determination was carried out by a parametric study with different kinds of foundation. The determination of these indicators allows us to bounce the state of the track. Also, thanks to dynamic models of the railway track sleeper, the method of identifying the train loads has been developed. An industrial application - a software namely “**ChargeTEBA**” has been developed to facilitate the processing of signals recorded on the instrumented site. A new version of an instrumented sleeper is proposed to obtain better signals, state of track and also rolling stock information.

**Keywords** : Railway track, instrumented sleeper, ballast, Green’s function, identification of train loads, dynamic, homogeneous fondation, non-homogeneous fondation, finite elements, fiber Bragg grating (FBG)



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>xix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xxi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l’art</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Généralités sur les chemins de fer . . . . .	7
1.2.1 Définition d’une voie ferrée ballastée . . . . .	7
1.2.2 Les efforts exercés sur la voie . . . . .	9
1.2.3 Forme analytique du chargement mobile . . . . .	10
1.3 Modélisation dynamique d’une voie ferrée ballastée . . . . .	12
1.3.1 Modèle de poutre sur une fondation continue . . . . .	12
1.3.2 Modèle de poutre périodiquement supportée . . . . .	13
1.4 Mécanisme de dégradation de la voie ferrée . . . . .	14
1.4.1 Couche de ballast . . . . .	14
1.4.2 Traverse en béton et son comportement . . . . .	15
1.4.3 Méthode de détection de l’endommagement d’une structure . . . . .	19
1.5 Les systèmes de surveillance des voies ferrées . . . . .	21
1.5.1 La détérioration de la ligne . . . . .	21
1.5.2 Les systèmes d’aide à la maintenance et au renouvellement d’une voie ferrée . . . . .	21
1.5.3 Surveillance des défauts d’une voie ferrée en France . . . . .	23
1.6 Projet de recherche de la traverse instrumentée “Smart Sleeper” . . . . .	24
1.6.1 La nécessité . . . . .	24
1.6.2 Fiber Bragg grating et le capteur fibre optique . . . . .	25
1.6.3 Travaux de recherche effectués avec le capteur FBG . . . . .	27
1.6.4 Traverse instrumentée “Smart Sleeper” . . . . .	29
1.7 Conclusion . . . . .	31
<b>I Comportement mécanique de la traverse en voie ferrée ballastée</b>	<b>33</b>
<b>2 Modèle analytique de la traverse en voie</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	36
2.1.1 Modélisation du chargement appliqué au rail par les roues . . . . .	36
2.1.2 Modélisation de la traverse . . . . .	36
2.1.3 Modélisation de la fondation . . . . .	38

2.1.4	Modélisation du rail	39
2.1.5	Modélisation des semelles sous rail	39
2.1.6	Choix du modèle	41
2.2	Comportement mécanique d'une traverse soumise à des efforts verticaux	41
2.2.1	Modèle de la fondation homogène	41
2.2.2	Modèle de la fondation non-homogène	52
2.3	Comportement mécanique d'une traverse soumise à des efforts latéraux	57
2.3.1	Modèle de poutre sous traction	57
2.3.2	Réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux	60
2.3.3	Influence des efforts latéraux sur la réponse totale de la traverse	61
2.4	Application à la voie Creil	62
2.4.1	Paramètres du modèle dynamique	62
2.4.2	Comparaison mesure et modèle	62
2.5	Conclusion	64
<b>3</b>	<b>Essais mécaniques sur la traverse</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction	68
3.2	Mesure de la réponse vibratoire d'une traverse	68
3.2.1	Matériels et dispositifs de mesure	68
3.2.2	Enregistrement et traitement des signaux	69
3.2.3	Résultat de mesure de la réponse vibratoire d'une traverse	71
3.3	Essai de flexion 3 points d'une traverse	71
3.3.1	Matériels et dispositifs de mesure	71
3.3.2	Enregistrement et traitement des signaux	74
3.4	Essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique	75
3.4.1	Matériels et dispositifs de mesure	75
3.4.2	Résultat des mesures	78
3.5	Essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast	80
3.5.1	Matériels et dispositifs de mesure	80
3.5.2	Résultat des mesures	81
3.6	Conclusion	83
<b>4</b>	<b>Modélisation numérique de la traverse par éléments finis</b>	<b>85</b>
4.1	Introduction	86
4.2	Calcul des fréquences propres d'une traverse	86
4.2.1	Modèle 3D de la traverse instrumentée	86
4.2.2	Modes propres d'une traverse libre	88
4.2.3	Comparaison entre les mesures et la modélisation	88
4.3	Simulation de flexion 3 points	90
4.3.1	Modèle 3D de la traverse instrumentée	90
4.3.2	Résultats et discussions	90
4.3.3	Comparaison mesure - modèle	92
4.4	Simulation de l'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique	95
4.4.1	Modèle 3D numérique de la traverse posée sur un tapis élastique	95
4.4.2	Résultats et discussions	97
4.4.3	Comparaison mesure - modèle	98
4.5	Simulation de l'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast	99
4.5.1	Modèle 3D numérique de la traverse posée dans une caisse de ballast	99
4.5.2	Résultats et discussions	101

4.5.3	Comparaison mesure - modèle . . . . .	103
4.6	Modèle semi-analytique de la traverse en voie . . . . .	103
4.6.1	Formulations mathématiques du problème . . . . .	104
4.6.2	Comparaison avec le modèle analytique de la traverse en voie . . . . .	108
4.6.3	Étude de l'influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse . . . . .	111
4.6.4	Étude de l'influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse . . . . .	114
4.7	Conclusion . . . . .	117

## II Supervision des matériels roulants et de l'ensemble ballast-fondation

### 119

<b>5</b>	<b>Identification des chargements exercés par le matériel roulant</b>	<b>121</b>
5.1	Introduction . . . . .	122
5.2	Identification des caractéristiques du matériel roulant . . . . .	123
5.2.1	Identification du nombre de roues du matériel roulant . . . . .	123
5.2.2	Identification de la vitesse du matériel roulant . . . . .	123
5.3	Identification des chargements exercés par le matériel roulant . . . . .	124
5.3.1	Identification des chargements verticaux . . . . .	125
5.3.2	Identification des chargements latéraux . . . . .	128
5.3.3	Identification des deux chargements . . . . .	130
5.4	Vérification avec les signaux numériques . . . . .	131
5.4.1	Signaux non bruités . . . . .	131
5.4.2	Signaux bruités . . . . .	132
5.5	Validation expérimentale avec un marteau d'impact . . . . .	134
5.5.1	Matériels et dispositifs de mesure . . . . .	135
5.5.2	Identification de la force exercée sur la traverse . . . . .	136
5.6	Validation expérimentale par un passage de train . . . . .	138
5.6.1	Matériels et dispositifs de mesure . . . . .	138
5.6.2	Visualisation des mesures et comparaison de deux types de capteur . . . . .	139
5.6.3	Identification des chargements . . . . .	140
5.7	Application avec les mesures sur site . . . . .	141
5.7.1	Description de la mesure . . . . .	141
5.7.2	Identification des chargements et discussion sur les résultats . . . . .	143
5.7.3	Comparaison des chargements identifiés par les "Smart Sleeper" sur le site de Creil . . . . .	144
5.8	Conclusion . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Détermination des indicateurs pour l'ensemble fondation-ballast</b>	<b>149</b>
6.1	Introduction . . . . .	150
6.2	Indicateur de l'ensemble fondation-ballast . . . . .	150
6.2.1	Études paramétriques des réponses de la traverse . . . . .	150
6.2.2	Exploitation des résultats avec un grand nombre de données . . . . .	152
6.3	Présentation du logiciel "ChargeTEBA" . . . . .	157
6.3.1	Fonctions principales . . . . .	157
6.3.2	Utilisation du logiciel . . . . .	158
6.4	Conclusion . . . . .	161

<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>163</b>
<b>A Modèle de poutre de Timoshenko</b>	<b>169</b>
A.1 Formulations mathématiques	169
A.1.1 Équation combinée de la poutre de Timoshenko	169
A.1.2 Calcul de la déformation de la poutre de Timoshenko	170
A.2 Conditions aux limites d'une poutre de Timoshenko	173
<b>B Calcul de la fonction de Green</b>	<b>175</b>
B.1 Traverse soumise à des efforts verticaux	175
B.1.1 Fondation homogène	175
B.1.2 Fondation non-homogène	177
B.2 Traverse soumise à des efforts latéraux	179
<b>C Modèle du rail périodiquement supporté</b>	<b>181</b>
C.1 Poutre d'Euler Bernoulli	182
C.2 Poutre de Timoshenko	182
C.3 Système équivalent d'une poutre périodiquement supportée	183
<b>D Module d'Young du ballast utilisé dans l'essai mécanique</b>	<b>185</b>
D.1 Modèle avec une zone de la fondation au-dessous de la traverse compactée	185
D.1.1 Modèle numérique 3D d'une traverse posée sur une fondation compactée au centre	185
D.1.2 Influence du compactage du ballast sur la déformation de la traverse	186
D.2 Études paramétriques du module d'Young du ballast	187
D.2.1 Modèle numérique 3D d'une traverse posée sur une fondation homogène	187
D.2.2 Résultats de l'étude paramétrique	187
<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>

# Table des figures

1	“Smart Sleeper” - solution connectée (photo source : Sateba.com)	1
2	Centre de recherche R&D de SATEBA à Chalon-sur-Saône (photo source : Sateba.com)	2
1.1	Voie ferrée ballastée (photo source : <i>hungtranle</i> ©)	6
1.2	Profil en travers schématique d’une voie ballastée	7
1.3	Profil du rail Vignole UIC60	8
1.4	Chargement mobile	11
1.5	Modèle de poutre sur une fondation continue	12
1.6	Modèle de poutre périodiquement supportée	13
1.7	Essais mécaniques du béton sous chargement statique	16
1.8	Comportement du béton en compression et en traction	16
1.9	Courbes de Wöhler	17
1.10	Évolution de la détérioration du béton	18
1.11	Les défauts géométriques de la voie	23
1.12	Schéma d’une fibre optique	26
1.13	Schéma d’une FBG	26
1.14	Fonctionnement d’une FBG et sa réponse spectrale	27
1.15	Traverse instrumentée “Smart Sleeper” : M450	29
1.16	Capteur de déformation FGB	30
1.17	Site instrumenté de Creil (photo source : Google Map)	30
2.1	La voie ferrée (a) et les chargements par les roues (b)	36
2.2	Modèle de poutre d’Euler-Bernoulli en flexion	37
2.3	Modèle de poutre de Timoshenko en flexion	37
2.4	Chargement vertical par les roues sur le rail	42
2.5	Modèle dynamique de la traverse soumise aux chargements verticaux et posée sur une fondation homogène	42
2.6	Visualisation des réponses de la traverse avec le modèle d’Euler-Bernoulli	45
2.7	Visualisation des réponses de la traverse avec le modèle de Timoshenko	48
2.8	Comparaison de la déflexion de la traverse dans deux cas de chargement	49
2.9	Comparaison de la déformation de la traverse dans deux cas de chargement	49
2.10	Comparaison des réponses dynamiques de la traverse dans le domaine fréquentiel (les courbes jaunes et violettes correspondent respectivement aux exemples de vitesse normale et élevée)	50
2.11	Comparaison des réponses dynamiques de la traverse dans le domaine temporel (les courbes jaunes et violettes correspondent respectivement aux exemples de vitesse normale et élevée)	51
2.12	Modèle dynamique de la traverse soumise aux chargements verticaux et posée sur une fondation non-homogène	52

2.13	Déformation de la traverse en fonction du facteur de consolidation $k_c$ . . . . .	55
2.14	Déplacement de la traverse en fonction du facteur de consolidation $k_c$ . . . . .	56
2.15	Force de réaction en fonction du facteur de consolidation $k_c$ . . . . .	57
2.16	Chargement latéral par les roues sur le rail . . . . .	57
2.17	Modèle dynamique de la traverse soumise aux chargements latéraux posée sur une fondation homogène . . . . .	58
2.18	Réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux . . . . .	61
2.19	Diagramme d'un train avec les paramètres géométriques . . . . .	62
2.20	Comparaison modèles et mesures <i>in situ</i> en fréquence . . . . .	63
2.21	Comparaison modèles et mesures <i>in situ</i> en temps . . . . .	64
2.22	Comparaison modèles et mesures <i>in situ</i> au passage d'un bogie . . . . .	65
2.23	Comparaison modèles et mesures <i>in situ</i> au passage d'un bogie . . . . .	65
3.1	Matériels utilisés pour la mesure de la réponse vibratoire . . . . .	68
3.2	Dispositif de mesure modale d'une traverse (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	69
3.3	Réponse vibratoire d'une traverse sous une excitation . . . . .	70
3.4	Détermination des modes propres correspondant aux fréquences mesurées . . . . .	70
3.5	Outils de mesure de déplacements . . . . .	72
3.6	Jauge de déformation KYOWA KC-70-120-A1-11 . . . . .	73
3.7	Colle X60 HBM . . . . .	73
3.8	Capteur de force TC4-AMP (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	73
3.9	Dispositif d'essai de flexion 3 points d'une traverse (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	74
3.10	Capteur de force HBM type U3/50 kN . . . . .	76
3.11	Étalonnage des capteurs de force HBM type U3/50 kN . . . . .	76
3.12	Traverse instrumentée par les jauges de déformation (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	76
3.13	Dispositif d'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	77
3.14	Schéma de connexion des jauges de déformation et des capteurs de force . . . . .	78
3.15	Déformation de la traverse posée symétriquement sur un tapis élastique . . . . .	79
3.16	Déformation de la traverse posée dis-symétriquement sur un tapis élastique . . . . .	79
3.17	Dispositif d'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	80
3.18	Déformation de la traverse posée symétriquement dans une caisse de ballast . . . . .	81
3.19	Déformation de la traverse posée dis-symétriquement dans une caisse de ballast . . . . .	82
4.1	Modèle numérique 3D de la traverse instrumentée . . . . .	86
4.2	Matériaux du modèle de la traverse instrumentée . . . . .	87
4.3	Maillage du modèle de la traverse instrumentée . . . . .	88
4.4	Visualisation des modes propres de la traverse . . . . .	89
4.5	Comparaison de fréquences propres des résultats expérimentaux et numériques . . . . .	89
4.6	Modèle numérique de l'essai de flexion 3 points d'une traverse . . . . .	91
4.7	Champs de déplacements verticaux de la traverse dans l'essai de flexion 3 points . . . . .	91
4.8	Champs de déformations suivant la direction longitudinale de la traverse dans l'essai de flexion 3 points . . . . .	92

4.9	Champs de contraintes Von-Mises de la traverse dans l'essai de flexion 3 points . . . . .	92
4.10	Champs de contraintes Von-Mises de chaque composant du modèle dans l'essai de flexion 3 points . . . . .	93
4.11	Poutre en flexion 3 points . . . . .	93
4.12	Comparaison du déplacement dans l'essai de flexion 3 points . . . . .	95
4.13	Comparaison de la déformation dans l'essai de flexion 3 points . . . . .	95
4.14	Modèle numérique de l'essai de flexion d'une traverse sur un tapis . . . . .	96
4.15	Champs de déplacements verticaux dans l'essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique . . . . .	97
4.16	Champs de déformations dans l'essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique . . . . .	98
4.17	Champs de contraintes de Von-Mises dans l'essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique . . . . .	98
4.18	Champs de contraintes de Von-Mises de chaque composant du modèle dans l'essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique . . . . .	99
4.19	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de l'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique . . . . .	99
4.20	Modèle numérique de l'essai de flexion d'une traverse dans une caisse de ballast . . . . .	100
4.21	Champs de déplacements verticaux dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast . . . . .	101
4.22	Champs de déformations verticaux suivant la direction longitudinale dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast . . . . .	102
4.23	Champs de contraintes de Von-Mises dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast . . . . .	102
4.24	Champs de contraintes de Von-Mises de chaque composant du modèle dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast . . . . .	103
4.25	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de l'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast . . . . .	103
4.26	Modèle semi-analytique de la traverse en voie . . . . .	104
4.27	Modèle semi-analytique d'une poutre de section uniforme et posée sur une fondation homogène . . . . .	109
4.28	Déplacement de la traverse de section uniforme et posée sur une fondation homogène . . . . .	109
4.29	Comparaison des réponses de la traverse de section uniforme soumise à des chargements symétriques entre le modèle numérique et le modèle analytique	110
4.30	Comparaison des réponses de la traverse de section uniforme soumise à des chargements dissymétriques entre le modèle numérique et le modèle analytique . . . . .	111
4.31	Modèle semi-analytique d'une poutre de section non-uniforme et posée sur une fondation homogène . . . . .	111
4.32	Déplacement de la traverse de section non-uniforme et posée sur une fondation homogène . . . . .	112
4.33	Influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse soumise à des chargements symétriques . . . . .	113
4.34	Influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse soumise à des chargements dissymétriques . . . . .	113

4.35	Modèle semi-analytique de la traverse de section non-uniforme et posée sur une fondation non-homogène . . . . .	114
4.36	Déplacement de la traverse de section non-uniforme et posée sur une fondation non-homogène . . . . .	115
4.37	Comparaison des réponses de la traverse soumise à des chargements symétriques et posée sur une fondation non-homogène entre le modèle analytique et le modèle numérique . . . . .	116
4.38	Comparaison des réponses de la traverse soumise à des chargements dissymétriques et posée sur une fondation non-homogène entre le modèle analytique et le modèle numérique . . . . .	116
4.39	Influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse soumise à des chargements symétriques . . . . .	117
4.40	Influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse soumise à des chargements dissymétriques . . . . .	117
5.1	Auscultation de la voie ferrée . . . . .	122
5.2	Signal lissé et détection de roues du matériel roulant . . . . .	123
5.3	Signaux obtenus d'un passage de train à partir de 3 traverses "Smart Sleeper" . . . . .	124
5.4	La voie ferrée (a) et le modèle analytique de la traverse en voie (b) . . . . .	125
5.5	Vérification avec les signaux numériques . . . . .	131
5.6	Signaux non bruités . . . . .	132
5.7	Comparaison des chargements introduits (points rouges) et identifiés (colonnes bleues) avec les signaux non bruités . . . . .	133
5.8	Signaux bruités . . . . .	134
5.9	Comparaison des chargements introduits (points rouges) et identifiés (colonnes bleues) avec les signaux fortement bruités . . . . .	135
5.10	Matériels et dispositif de mesure pour la validation expérimentale de la méthode d'identification des chargements avec un marteau d'impact (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	136
5.11	Signal obtenu provenant du marteau d'impact . . . . .	137
5.12	Signaux des jauges de déformation de la traverse instrumentée soumise à une force du marteau d'impact . . . . .	137
5.13	Force du marteau d'impact identifiée . . . . .	137
5.14	Matériels et dispositif de mesure pour validation expérimentale de la méthode d'identification des chargements par un passage de train (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	139
5.15	Signaux de mesure pour la validation de la méthode d'identification des chargements . . . . .	139
5.16	Déformation sur la partie haute, au centre de la traverse . . . . .	140
5.17	Chargements identifiés dans la mesure de validation . . . . .	141
5.18	Mesure sur site avec un passage de train (photo source : <i>hungtranle</i> ©) . . . . .	142
5.19	Mesures <i>in situ</i> . . . . .	142
5.20	Chargements identifiés d'un train . . . . .	144
5.21	Discussion sur les résultats réels . . . . .	144
5.22	Signaux reconstruits . . . . .	145
5.23	Signaux de la traverse #3 . . . . .	145
5.24	Comparaison de la masse identifiée de chaque wagon à partir de 3 traverses . . . . .	146
6.1	Évolution de l'ensemble fondation-ballast avec le temps . . . . .	150

6.2	Traverse en voie	151
6.3	Déformation en fonction du facteur de consolidation $k_c$	152
6.4	Déformation normalisée en fonction du facteur de consolidation $k_c$	152
6.5	Déformation au centre normalisée en fonction du facteur de consolidation $k_c$	153
6.6	Détection automatique des roues du train	153
6.7	Étude de la stabilité de l'ensemble fondation-ballast	154
6.8	Stabilité de l'ensemble fondation-ballast au-dessous des traverses instrumentées	154
6.9	Étude de l'évolution de l'ensemble fondation-ballast	155
6.10	Évolution de l'ensemble fondation-ballast au dessous des traverses instrumentées	155
6.11	Comparaison de l'état de l'ensemble fondation-ballast au niveau des traverses instrumentées	156
6.12	Comparaison des chargements identifiés à partir des traverses instrumentées dans une longue période	156
6.13	Schéma du logiciel <b>“ChargeTEBA”</b>	157
6.14	Interface graphique du logiciel <b>“ChargeTEBA”</b> ( <i>version :8.7.97</i> )	158
6.15	Paramètres d'entrée du logiciel <b>“ChargeTEBA”</b>	159
6.16	Informations obtenues après la lecture des données	160
6.17	Visualisation du signal	160
6.18	Liste des signaux	160
6.19	Chargements identifiés	161
C.1	Modèle du rail périodiquement supporté (a) et directions des chargements d'une roue (b)	181
C.2	Système équivalent de la poutre périodiquement supportée	183
D.1	Modèle numérique de l'essai de flexion d'une traverse posée sur une fondation compactée au centre	186
D.2	Déformation de la traverse posée sur une fondation compactée au centre	187
D.3	Étude paramétrique sur le module d'Young du ballast	187



# Liste des tableaux

1.1	Comportement du ballast selon les fréquences de vibrations . . . . .	14
1.2	Les systèmes d'aide à la maintenance et au renouvellement du chemin de fer	22
1.3	Seuil d'intervention des lignes ferroviaires . . . . .	24
2.1	Paramètres de la traverse . . . . .	38
2.2	Paramètres de la fondation . . . . .	38
2.3	Paramètres du rail . . . . .	40
2.4	Paramètres de la semelle sous rail . . . . .	41
2.5	Les choix du modèle analytique d'une voie ferrée ballastée . . . . .	41
2.6	Comparaison des coefficients dans deux modèles de poutre . . . . .	46
2.7	Comparaison des réponses dynamiques de la traverse calculées avec deux modèles de poutre . . . . .	51
2.8	Influence des efforts latéraux sur la déformation totale de la traverse . . . .	62
2.9	Paramètres des chargements périodiques . . . . .	62
3.1	Exemple de mesure des fréquences propres . . . . .	70
3.2	Résultats de mesures de fréquences propres d'une traverse . . . . .	71
4.1	Paramètres des matériaux de la traverse instrumentée . . . . .	87
4.2	Différence de fréquences propres entre les résultats expérimentaux et numériques	89
4.3	Paramètres matériaux du tapis élastique . . . . .	96
4.4	Forces appliquées dans l'essai de flexion de la traverse posée sur un tapis élastique . . . . .	97
4.5	Paramètres des matériaux du tapis élastique . . . . .	100
4.6	Forces appliquées dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast . . . . .	101
5.1	Erreur de la méthode avec différents niveaux de bruits sur les signaux . . . .	133
5.2	Comparaison de la force identifiée par un marteau d'impact . . . . .	138
5.3	Comparaison des chargements identifiés d'un train . . . . .	141
5.4	La masse de la locomotive et des wagons du train . . . . .	143
B.1	Expression des racines complexes de l'équation (B.12) . . . . .	178
C.1	Formulation du système équivalent d'une poutre périodiquement supportée	182
D.1	Paramètres des matériaux du ballast compacté . . . . .	186



# Introduction

## “Smart Sleeper” - solution connectée

Nous dénombrons dans le monde, un grand nombre de modes de déplacement de personnes et de marchandises qui sont de type : terrestre (routier, ferroviaire), maritime (fluvial ou par canaux) ou aérospatial (spatial ou aérien). Parmi ces moyens de transport, le transport ferroviaire joue un rôle important dans le monde entier.

Au début du XIX<sup>ème</sup> siècle, la France est en retard dans le développement des chemins de fer par rapport à ses pays voisins (Royaume-Uni, Allemagne, Belgique ou Suisse) à cause des guerres napoléoniennes. Le développement de la première ligne de chemin de fer en France est la ligne de Saint-Etienne à Andrézieux en 1824<sup>1</sup>. Néanmoins, de nos jours, la France possède un réseau ferroviaire très dense et à forte capacité avec 51217 km de lignes principales, dont 30000 km de voies en service qui irriguent l'ensemble du territoire national. Les entreprises ferroviaires et notamment la SNCF<sup>2</sup> ont de tout temps cherché à améliorer le transport ferroviaire ne serait-ce que pour garantir une plus grande sécurité des passagers. Les voies ferroviaires font ainsi régulièrement l'objet d'aménagements, de travaux de modernisation. Des recherches de nouvelles technologies et d'applications ont été menées et sont menées dans ce but. Plusieurs méthodes ont été développées permettant de surveiller l'état des voies à l'aide de techniques d'auscultation qui restent cependant coûteuses en temps et qui génèrent des gênes pour le trafic.



(a) Traverse “Smart Sleeper”

(b) Plateforme de visualisation

FIGURE 1 – “Smart Sleeper” - solution connectée (photo source : Sateba.com)

Dans le cadre de l'industrie 4.0, SATEBA et un partenaire français spécialisé dans la

1. Ordonnance royale du 27 février 1824 autorisant MM. de Lur-Saluces et consorts, sous le titre de “Compagnie du chemin de fer”, à établir une ligne “de la Loire au Pont-de l’Âne, sur la rivière de Furens, par le territoire houiller de Saint-Étienne” [34]

2. Société Nationale des Chemins de Fer français

surveillance des infrastructures ont développé une solution complémentaire de surveillance de la voie innovante : la traverse “Smart Sleeper” présentée lors de la conférence TRA2014<sup>3</sup> à Paris (voir figure 1). La traverse “Smart Sleeper” intègre des capteurs permettant de mesurer les déformations de la traverse en temps réel. Ces déformations permettent alors d’obtenir les caractéristiques du train et des informations relatives au site instrumenté.

La traverse “Smart Sleeper” vise donc à offrir une solution complémentaire, en accompagnement aux solutions existantes, permettant d’avoir une meilleure compréhension de la voie et de son évolution dans l’objectif de réduire les coûts de maintenance. Cette solution peut s’appeler aussi solution connectée puisqu’elle permet d’une part de collecter des informations à distance en temps réel, et d’autre part de les comparer sur une très longue période de temps, dans le but d’assurer une maintenance prédictive. La traverse “Smart Sleeper” a déjà été mise en service sur des lignes à grande vitesse (LGV Est, LGV SEA) et aussi sur des lignes conventionnelles mixtes.

## Coopération SATEBA - ENPC

En 2016, SATEBA et l’École des Ponts ParisTech (ENPC) ont signé un accord de partenariat dans le but de développer des méthodes d’exploitation et d’interprétation des données fournies par les traverses instrumentées pour l’étude du comportement des voies ferrées.



FIGURE 2 – Centre de recherche R&D de SATEBA à Chalon-sur-Saône (photo source : Sateba.com)

Ce travail rentre dans le cadre de cette coopération et porte sur la compréhension du comportement mécanique d’une voie ferrée ballastée qui évolue dans le temps et ceci en raison du vieillissement du ballast dû au trafic ou des problèmes de matériels roulants (surcharge, plats de roue). Il est donc nécessaire de disposer d’une méthode permettant de surveiller la voie en temps réel afin d’adapter au mieux la maintenance de la voie et ainsi de prolonger au maximum sa durée de vie. Cette méthode se doit d’être non-destructive et résilience.

L’objectif de cette thèse est d’exploiter les signaux en provenance des traverses “Smart Sleeper” qui sont déjà mises en service pour étudier le comportement des voies ferrées et s’il le faut proposer une version optimisée de la traverse permettant d’obtenir plus d’informations sur l’évolution de la voie. Les travaux de thèse contiennent 3 aspects : analytique, numérique et expérimental. Des modèles analytique et numérique sont développés pour modéliser le comportement dynamique de la traverse en voie. Ces modèles sont validés par les mesures

3. Transport Research Arena 2014

in-situ. A partir du modèle de comportement de la traverse en voie, nous avons développé un “problème inverse” pour identifier les chargements exercés par les trains et nous avons analysé les réponses de la traverse posée sur une fondation non-homogène afin de qualifier l’état de l’ensemble fondation-ballast.

## Structure du mémoire

Ce mémoire de thèse est composé de six chapitres. Le chapitre 1 présente des généralités sur les chemins de fer. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l’étude du comportement mécanique de la traverse instrumentée. Les chapitres 5, 6 sont dédiés aux applications des modèles développés pour la supervision des matériels roulants et de l’ensemble ballast-fondation de la voie ferrée.

Précisément, le premier chapitre présente la définition d’une voie ferrée ballastée avec ses composants et aussi les efforts exercés sur la voie. Nous présentons d’autre part dans ce chapitre des modèles dynamiques d’une voie ferrée ballastée qui sont développés à l’aide de plusieurs méthodes : analytique, numérique ou semi-analytique. Au cours de son utilisation, la voie se dégrade de différentes manières. Ce chapitre présente en dernier lieu une synthèse portant d’une part sur des systèmes de surveillance des voies ferrées et d’autre part, sur la traverse instrumentée et les capteurs à fibres optiques.

Le deuxième chapitre présente des modèles dynamiques de la traverse en voie soumise à des efforts verticaux, latéraux et posée sur deux types de fondation : homogène et non homogène. Ces modèles sont développés à partir des modèles de poutre d’Euler-Bernoulli ou de Timoshenko. En utilisant le modèle de Kelvin-Voigt pour l’ensemble fondation-ballast, le modèle de ressort-amortisseur pour la semelle sous rail et les chargements périodiques, les réponses de la traverse peuvent être calculées analytiquement dans le domaine fréquentiel à l’aide de la fonction de Green. Nous obtenons alors une relation entre le déplacement du rail et les forces appliquées à partir du modèle du rail périodiquement supporté. Enfin, nous montrons que les résultats numériques et les mesures sur site sont en très bonne adéquation, ce qui nous permet de valider nos modèles.

Le troisième chapitre présente les essais mécaniques que nous avons réalisés sur la traverse afin de mieux appréhender sa façon de travailler. Ces essais sont réalisés au sein du centre de recherche R&D de SATEBA à Chalon-sur-Saône (voir figure 2). Plusieurs essais ont été faits comme : mesure de la réponse vibratoire d’une traverse, essai de flexion 3 points d’une traverse et essai de flexion d’une traverse posée sur différents types de fondation. Les résultats de ces essais nous permettent de valider des modèles numériques en 3D que nous allons développer par des calculs éléments finis dans le chapitre suivant.

Le quatrième chapitre présente les modèles numériques par éléments finis. Il s’agit du modèle de la traverse seule et du modèle de la traverse posée sur une fondation homogène ou non-homogène. L’avantage de cette méthode est de pouvoir prendre en compte la géométrie exacte d’une traverse et de pouvoir obtenir sa réponse en 3D, ce que les modèles analytiques ne nous permettent pas de faire. Le fait que les résultats numériques soient proches des mesures réalisées montre la validation des modèles. Nous développons ensuite un modèle semi-analytique de la traverse en voie. Dans ce modèle, nous ne modélisons qu’une période de la voie qui contient 1 traverse et 1 fondation. En utilisant des conditions de stationnarité et aux limites, la réponse de l’ensemble du modèle peut être calculée par couplage avec le modèle du rail périodiquement supporté. Le fait que les résultats de ce modèle soient cohérents avec les résultats analytiques montre que les modèles analytiques sont capables de décrire les comportements mécaniques de la traverse en voie.

Le cinquième chapitre présente une méthode d’identification des chargements exercés

par un train à partir des réponses dynamiques de la traverse. Cette méthode est basée sur les modèles analytiques de la traverse en voie qui donnent une relation linéaire entre ces chargements et les déformations de la traverse dans le domaine fréquentiel. Une vérification réalisée en intégrant des signaux numériques bruités ou non montre que les chargements peuvent être identifiés très précisément. De plus, cette méthode est validée expérimentalement à l'aide de mesures réalisées lors d'un passage de train. Une exploitation des résultats avec les mesures in-situ montre aussi que les chargements identifiés sont cohérents aux masses de matériels roulants qui sont référencées.

Le sixième chapitre présente une étude de l'homogénéité ou de la consolidation de l'ensemble fondation-ballast. En se basant sur le modèle de la traverse posée sur une fondation non-homogène, une étude paramétrique montre la dépendance de la déformation au centre de la traverse sur le facteur de consolidation. La déformation normalisée de la traverse s'obtient en divisant la déformation mesurée en tous points de la traverse par la déformation en-dessous des rails. La relation entre déformation normalisée au centre de la traverse et le facteur de consolidation nous permet de qualifier l'état de la fondation. Une application est faite pour la voie à Creil. Enfin, une application industrielle, le logiciel "**ChargeTEBA**" développé sur MATLAB est présenté. Ce logiciel nous permet de visualiser les signaux en provenance de la traverse "Smart Sleeper", d'obtenir d'une part des informations relatives au site instrumenté et au matériel roulant et d'autre part d'identifier les chargements.

# Chapitre 1

## État de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Généralités sur les chemins de fer</b>	<b>7</b>
1.2.1	Définition d'une voie ferrée ballastée	7
1.2.2	Les efforts exercés sur la voie	9
1.2.3	Forme analytique du chargement mobile	10
<b>1.3</b>	<b>Modélisation dynamique d'une voie ferrée ballastée</b>	<b>12</b>
1.3.1	Modèle de poutre sur une fondation continue	12
1.3.2	Modèle de poutre périodiquement supportée	13
<b>1.4</b>	<b>Mécanisme de dégradation de la voie ferrée</b>	<b>14</b>
1.4.1	Couche de ballast	14
1.4.2	Traverse en béton et son comportement	15
1.4.3	Méthode de détection de l'endommagement d'une structure	19
<b>1.5</b>	<b>Les systèmes de surveillance des voies ferrées</b>	<b>21</b>
1.5.1	La détérioration de la ligne	21
1.5.2	Les systèmes d'aide à la maintenance et au renouvellement d'une voie ferrée	21
1.5.3	Surveillance des défauts d'une voie ferrée en France	23
<b>1.6</b>	<b>Projet de recherche de la traverse instrumentée "Smart Sleeper"</b>	<b>24</b>
1.6.1	La nécessité	24
1.6.2	Fiber Bragg grating et le capteur fibre optique	25
1.6.3	Travaux de recherche effectués avec le capteur FBG	27
1.6.4	Traverse instrumentée "Smart Sleeper"	29
<b>1.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

---

## 1.1 Introduction

Le premier train à vapeur est montré au public et circule pour la première fois le 21 Février 1804 à Pen-y-Darren, une région minière du pays de Galles. Cette date marque les débuts du chemin de fer mécanisé, moyen de transport qui va progresser très vite ensuite. De plus, grâce à la révolution industrielle, un boom ferroviaire apparaît dans les années 1840.

Néanmoins, l'histoire des chemins de fer a débuté avant la révolution industrielle, marquée par la naissance de la machine à vapeur. Précisément, dès l'époque médiévale, les mines sont exploitées en Europe et par conséquent, l'utilisation d'un moyen de transport s'avère alors nécessaire. Les exploitants s'aperçoivent que les charrettes de produits lourds roulent plus facilement sur les rails car les frottements sont moins importants. Initialement, les rails étaient fabriqués en bois, les véhicules étant tirés par des chevaux, et ont été ensuite remplacés par des rails en fer puis en acier. Les rails en fer ou en acier augmentent alors la performance de la traction. Leurs avantages ont été démontrés en 1805 en Angleterre à Croydon [45]. L'histoire du transport utilisant un système guidé est encore plus ancien. L'utilisation d'ornières creusées dans la pierre remonte encore plus loin dans le temps. Les systèmes utilisant le bois comme chemin est une des hypothèses envisagées pour expliquer le transport des charges lourdes dans l'antiquité [20].



FIGURE 1.1 – Voie ferrée ballastée (photo source : *hungtranle* ©)

De nos jours, avec le développement des technologies, les choix de moyens de transports sont multiples : transport aérien, transport spatial, transport fluvial, transport maritime, transport routier. Les chemins de fer restent un moyen de transport très utilisé dans le monde, avec un bon coefficient de sécurité, conformité, ponctualité, etc. Le système de transport guidé sert non seulement à des trajets à longue distance (TGV<sup>1</sup>, TER<sup>2</sup>, etc.) mais aussi à des transports publics en agglomérations avec des courtes distances (Tramway, RER<sup>3</sup>, Métro). Maintenant, les moteurs diesels et aussi les moteurs électriques ont remplacé les machines à vapeur. Le nouveau record de vitesse de pointe par un véhicule de série (non-modifié) a été obtenu par le “Shanghai Transrapid”, à  $501 \text{ kmh}^{-1}$  le 12 Novembre 2003 et, pour un train conventionnel, le 3 septembre 2010 par le “Zefiro 380” à  $486 \text{ kmh}^{-1}$ .

- 
1. Train à Grande Vitesse
  2. Transport Expresse Régional
  3. Réseau Express Régional d'Île-de-France

Le transport guidé peut utiliser également les voies non ballastées (la ligne de TGV sous la Manche, quelques lignes du métro parisien, etc.) ou les voies ballastées (voir figure 1.1).

Parallèlement, avec le développement du chemin de fer, la sécurité des voies ferroviaires reste toujours une question primordiale pour les entreprises suite à plusieurs accidents graves causés par différentes raisons : vieillissement des composants de la voie, problème de synchronisation des signaux, humaines, etc. Il est donc nécessaire d'étudier le comportement dynamique de la voie, de réaliser des travaux de modernisation, d'étudier de nouvelles technologies afin d'éviter les problèmes non souhaitables, d'améliorer au mieux la maintenance de la voie et ainsi de prolonger au maximum sa durée de vie.

## 1.2 Généralités sur les chemins de fer

### 1.2.1 Définition d'une voie ferrée ballastée

Une voie ferrée ballastée classique se compose généralement de deux rails dont l'inclinaison et l'écartement sont maintenus par des traverses en voie qui reposent sur une couche de ballast avec une épaisseur variable (voir figure 1.2).

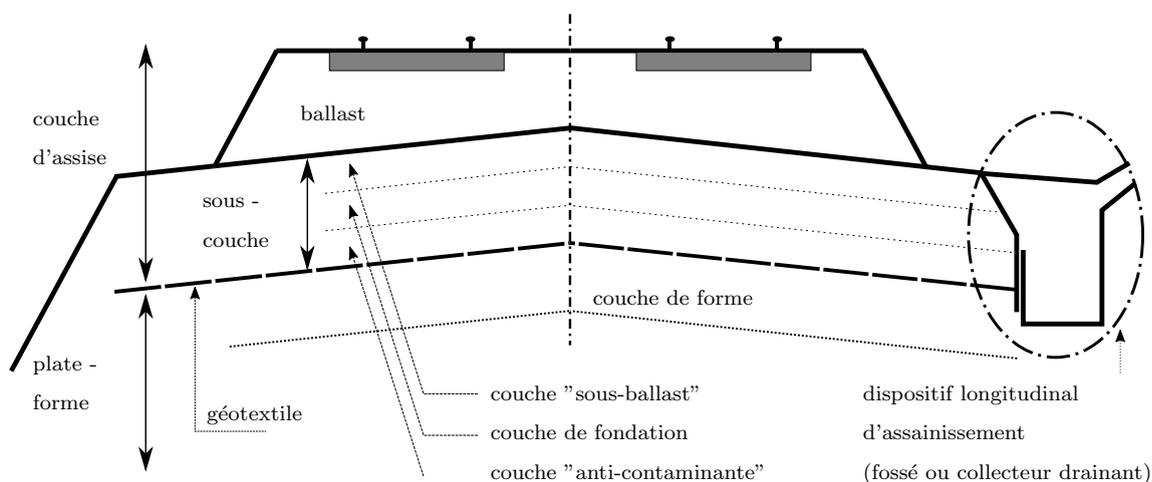


FIGURE 1.2 – Profil en travers schématique d'une voie ballastée

### Le rail

Le rail sert à diriger les trains en guidant les roues des véhicules dans le sens transversal. Le rail est un assemblage de barres élémentaires longues de 36 m ou 72 m, soudées électriquement pour obtenir des LRS<sup>4</sup> [102]. Il est le premier élément qui est en contact avec le véhicule (par les roues) et la voie. Au cours du développement du chemin de fer, plusieurs profils de rail ont été utilisés. Cependant, maintenant, deux profils de rails sont utilisés : le rail Vignole<sup>5</sup> (rail à patin) et le double champignon (rail symétrique).

Tous les profils ont les éléments communs suivants (voir figure 1.3) :

- Le champignon (la partie supérieure) : assure le contact roue-rail.
- L'âme (la partie médiane amincie)
- Le patin (la partie inférieure) : fixé avec les traverses par une semelle située en dessous.

4. LRS : Longs Rails Soudés

5. Charles VIGNOLE (1793 - 1875) : Ingénieur anglais qui a introduit en Europe le rail à patin de l'Américain STEVENS

Selon le type de train, plusieurs profils de rail Vignole ont été développés avec des différences de hauteur, d'épaisseur de l'âme, de largeur du patin, du champignon, etc. comme :

- Profil Vignole 60E1 : Voies modernes lourdes ou ligne TGV
- Profil Vignole 50E6 : Voies classiques

La forme du rail est développée pour avoir une inertie élevée afin de supporter les contraintes dues à la flexion du rail sous l'action des charges lors des passages des trains. L'épaisseur de l'âme est déterminée de manière à résister aux efforts tranchants et aux sollicitations aux voisinages des trous d'éclissage (pour les voies éclissées). La largeur du patin détermine le taux de compression sur la traverse car elle donne la rigidité du rail dans le plan horizontal.

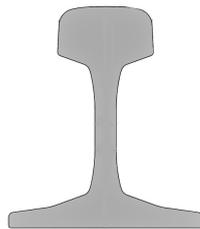


FIGURE 1.3 – Profil du rail Vignole UIC60

Le poids du rail est de 54 à 60 kg par mètre linéaire selon le tonnage du trafic. Ce paramètre a été normalisé d'après l'UIC<sup>6</sup>. Il est vraiment important car l'inertie verticale du rail en dépend. D'autre part, l'acier du rail doit avoir des propriétés lui assurant une bonne tenue à la corrosion, à l'abrasion ainsi qu'une absence de fragilité et enfin une soudabilité en vue de la confection de barres de grandes longueurs. Il doit aussi avoir un prix raisonnable.

### Les traverses

La transmission des efforts entre le rail et le ballast se fait par des traverses qui jouent un triple rôle [89] :

- Transmission des charges du rail au ballast
- Maintien de l'écartement des deux files de rails
- Maintien de l'inclinaison au 1/20 du rail Vignole

Les premières traverses en bois ont été remplacées par des traverses en acier. Maintenant, elles sont souvent fabriquées en béton pour des raisons de coût, de performances et de durée de vie. Il y a deux types de traverses :

- Mono-bloc : 1 bloc complet en béton armé ou en béton pré-contraint
- Bi-blocs : 2 blochets en béton armé reliés par une entretoise en acier qui travaille normalement en traction

La masse, la rigidité et la qualité du matériau de la traverse sont importantes puisqu'elles influencent la stabilité de la voie. La distance entre les deux traverses (entraxe) est de 0,6 m.

6. UIC : L'Union Internationale des Chemins de fer

### La semelle sous rail et le système d'attache

C'est la partie qui se situe entre le rail et les traverses. Plusieurs types et techniques d'attaches, selon le type de traverse, sont utilisés pour améliorer la fixation du rail sur les traverses et amortir la charge dynamique transmise par le rail. Les techniques crampons ou tire-fonds sont utilisées pour les attaches rigides du rail sur les traverses. L'attache la plus utilisée est l'attache élastique qui est vissée ou clipsée sur les rails. Actuellement, l'attache élastique NABLA RNTN est la plus utilisée.

La semelle sous rail est généralement en élastomère de 9 mm d'épaisseur. Ce matériau a une capacité d'amortissement importante ce qui permet de réduire considérablement les charges exercées sur les traverses (surtout pour les hautes fréquences) [5].

### La fondation

Cette partie comprend les deux couches suivantes (voir figure 1.2) :

- Le ballast : C'est le lit de pierre ou de gravier sur lequel repose une voie de chemin de fer. Les traverses reposent sur une épaisseur de 10 cm à 35 cm de ballast selon les caractéristiques de la ligne. La plupart des efforts appliqués sur la voie sont repris par cette partie. Le ballast est un granulat avec  $d/D = 25/50$  mm<sup>7</sup> provenant du concassage de roches extraites dans des carrières de pierres dures (granit, diorite, rhyolite, porphyre, quartzite, etc.). Pour stabiliser le ballast et les rails, il est nécessaire de compacter la couche lors de la mise en voie. La qualité du ballast est définie dans la norme européenne "NF EN 13450" (AFNOR, 2003) et au Référentiel Infrastructure IN0274 (SNCF, 2007) [118]. Le rôle du ballast est de [108] :
  - Répartir les charges sur la plate-forme.
  - Amortir la vibration grâce à ses propriétés rhéologiques.
  - Drainer rapidement la voie.
  - Permettre de rectifier rapidement le nivellement au moyen du bourrage-dressage mécanisé.
- La plate-forme est la partie supérieure de l'ouvrage en terre supportant les couches d'assise. La caractéristique essentielle de cet élément est sa capacité de portance. Son élasticité est relativement grande par rapport aux autres composants de la voie. Les grands paramètres qui décident sa qualité sont : la nature géotechnique du sol, les conditions hydrogéologiques et hydrologiques locales.

#### 1.2.2 Les efforts exercés sur la voie

Les efforts exercés sur la voie par le véhicule peuvent se décomposer suivant trois directions : longitudinale, verticale et transversale.

---

7.  $d/D$  mm : La classe granulatoire repère, un granulat afin de le différencier d'un autre. Cette classification désigne le granulat en indiquant son plus petit diamètre représentatif " $d$ " et son plus grand diamètre représentatif " $D$ "

## Les efforts longitudinaux

Les efforts longitudinaux dûs essentiellement aux accélérations et freinages, sont peu importants et ne posent d'éventuels problèmes que sur certains ouvrages d'art à fixation directe. Les efforts verticaux et transversaux, beaucoup plus importants, sont de natures différentes.

## Les efforts verticaux

Les efforts verticaux sont représentés par une charge statique (due au poids propre du véhicule appliqué sur l'essieu) et une charge dynamique (due à l'interaction dynamique entre le rail et le véhicule). L'UIC a classé les voies en trois catégories selon le poids des rails et l'espacement des traverses :

- **A** : 16 t par essieu
- **B** : 18 t par essieu
- **C** : 20 t par essieu

Ces trois catégories sont elles-mêmes décomposées chacune en trois sous groupes d'indice 2, 3, 4 caractérisés par le rapport entre le poids total du véhicule et la longueur mesurée entre ses deux extrémités [5] :

- Sous-catégorie **2** :  $6.4 \text{ tm}^{-1}$
- Sous-catégorie **3** :  $7.2 \text{ tm}^{-1}$
- Sous-catégorie **4** :  $8.0 \text{ tm}^{-1}$

L'ensemble des lignes de la SNCF est classé en catégorie **C4**.

La surcharge verticale dynamique dépend de plusieurs paramètres dont la vitesse des véhicules, la vibration de la structure du véhicule en passant sur les traverses et les imperfections des roues et des rails. Les imperfections peuvent être classées dans la catégorie :

- Défauts locaux au contact roue-rail : Ces défauts sont représentés par l'existence de joints, d'empreintes, d'ondulations sur la surface du rail ou bien de la modification de la forme des roues.
- Défauts globaux de la voie : ce sont les défauts verticaux du profil du rail avec la longueur. Ce type de défaut cause des vibrations en basses fréquences.

## Les efforts transversaux

Ces efforts sont moins importants que des efforts verticaux mais le ballast est beaucoup moins rigide dans la direction latérale. Ces efforts peuvent être causés par une force centrifuge lorsque la voie est courbe. Cette force provoque des efforts transversaux sur le rail et la voie. D'autre part, en cas de rails soudés, les efforts transversaux peuvent également résulter de forces d'origines thermiques dues au blocage de la dilatation du rail.

### 1.2.3 Forme analytique du chargement mobile

Lors des passages des trains, les vibrations sont transmises dans la voie par les points de contact entre les roues et les rails. La charge  $P$  peut être décomposée généralement en deux parties :

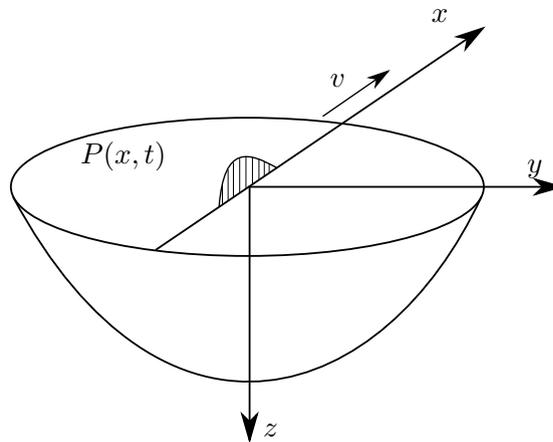


FIGURE 1.4 – Chargement mobile

- 1<sup>ère</sup> partie : La première partie représente la distribution de la charge à l’essieu en passant à un point fixe qui peut être représentée par une fonction de distribution  $\phi(x - vt)$  où :  $v$  est la vitesse du matériel roulant.
- 2<sup>ème</sup> partie : La deuxième partie est générée par l’interaction roue-rail et elle peut se décrire par une fonction  $f(t)$ . Cette fonction est indépendante de la direction du mouvement.

La forme générale de la charge mobile peut alors être exprimée par la formule suivante (voir figure 1.4) :

$$P(x, t) = f(t)\phi(x - vt) \quad (1.1)$$

### La fonction de distribution de charge

La fonction de distribution  $\phi(x_1)$  est déterminée à partir des informations obtenues sur les charges appliquées par les roues. La plupart des travaux qui abordent l’étude des vibrations d’une voie concernent le cas d’une charge mobile ponctuelle. Dans ce cas, la fonction  $\phi(x_1)$  peut être ré-écrite sous la forme d’une fonction de Dirac  $\delta(x_1)$ .

### La force d’interaction roue-rail

Vu que la fonction de distribution de charge représente la charge statique, la charge quasi-statique et la charge dynamique sont définies généralement par l’interaction roue-rail. La charge quasi-statique est une constante donnée par le poids du véhicule transmis par les roues et la charge dynamique est une fonction du temps détaillant des imperfections locale et globale de la voie. Nous constatons que cette partie est complexe et elle pourrait adopter la forme d’une fonction harmonique  $f(t) = \exp(i2\pi f_0 t)$  où :  $f_0$  est la fréquence de cette fonction harmonique. En mesurant les surcharges dynamiques, on remarque que les signaux obtenus sont aléatoires avec une dispersion qui croît avec la vitesse. En analysant leurs spectres d’accélération, on observe que trois intervalles de fréquences induits par un train en circulation peuvent être distingués comme indiqué dans [6] :

- $f \in [0, 20]$  Hz : Cet intervalle de fréquence correspond à l’oscillation des masses suspendues du véhicule.
- $f \in [20, 125]$  Hz : Cet intervalle correspond à l’oscillation des masses non-suspendues du véhicule et des masses liées à la voie sur le support élastique de la voie.

- $f \in [200, 2000]$  Hz : Cet intervalle correspond aux vibrations propres des liaisons élastiques intermédiaires de la voie (ondulation de la voie, soudage, etc.).

### 1.3 Modélisation dynamique d'une voie ferrée ballastée

Depuis un siècle, la modélisation dynamique d'une voie ferrée sous chargement a fait l'objet de nombreuses études et a donné lieu à de nombreux ouvrages. Citons dans le cadre de ces travaux, par exemple les modèles analytiques avec des théories de poutres élancées, les modèles semi-analytiques et les modélisations numériques. Cette partie fait un résumé des travaux effectués sur les modèles d'une voie ferroviaire.

#### 1.3.1 Modèle de poutre sur une fondation continue

Le modèle le plus simple pour modéliser le couplage rail/fondation est une poutre infinie posée sur une fondation de Winkler, soumise à une charge mobile (voir figure 1.5). Ce modèle a été étudié par Timoshenko en 1926. Fryba a développé ce modèle et a proposé des solutions analytiques complètes dans son ouvrage [40]. Le modèle de Fryba est constitué d'une force constante se déplaçant sur une poutre d'Euler-Bernoulli infinie qui est posée sur une fondation de Winkler. Ce modèle donne lieu à une équation différentielle du quatrième ordre du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli qui peut être résolue avec toutes les possibilités de vitesses et de valeurs de viscosité. Une vitesse critique pour laquelle la résonance apparaît a été trouvée. Elle dépend de la densité ainsi que de la rigidité en flexion de la poutre et aussi de la rigidité de la fondation. Cette vitesse augmente quand la rigidité de la fondation augmente. Néanmoins, le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli n'est pas forcément le bon modèle dans certains cas. En utilisant le modèle de poutre de Timoshenko et la méthode de résolution semi-analytique, Chen et al. [24] ont montré que la rigidité de la fondation devient importante donc la vitesse critique trouvée dans le cas de la poutre de Timoshenko est plus petite que celle dans le cas d'Euler-Bernoulli.

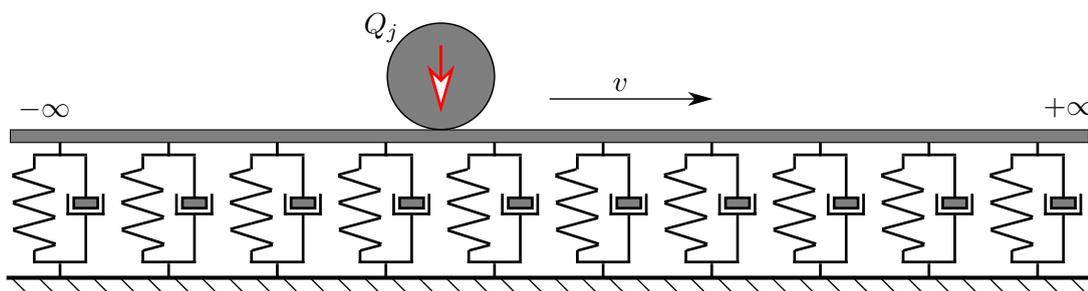


FIGURE 1.5 – Modèle de poutre sur une fondation continue

Nguyen et al. [91] ont ajouté une couche de masse et 3 systèmes de ressort-amortisseur sur ce modèle afin de tenir compte de la masse des traverses et des différentes couches d'une voie ballastée. En utilisant la méthode des éléments finis, ce modèle de la voie en 3D a été également développé par les auteurs. La méthode des éléments finis a été utilisée pour avoir la réponse non-stationnaire de la voie dans plusieurs ouvrages [8, 19].

Pour tenir compte de la complexité de la fondation, ce modèle a été développé par plusieurs chercheurs depuis quelques années. Quelques auteurs ont utilisé la loi de comportement cubique de la fondation pour leur modèle avec la technique de perturbation [9, 32, 58] ou la méthode de Galerkin [31]. La méthode numérique a été utilisée également pour les

fondations non-homogènes [22, 95]. Ces modèles permettent de représenter les défauts de la fondation ou des problèmes de transitions (zone entre ballast/non-ballast, les ponts, etc.).

### 1.3.2 Modèle de poutre périodiquement supportée

Pour prendre en compte la discontinuité des appuis (ou des traverses), le modèle de poutre périodiquement supportée a été étudié à partir des années 1960. La différence apportée par ce modèle résulte dans le fait que la poutre infinie est posée sur des appuis qui sont séparés par un intervalle constant. Dans ce cas, cet intervalle a une longueur qui est égale à la distance réelle entre deux traverses (voir figure 1.6). Chaque appui est représenté par ses caractéristiques mécaniques. On peut donc représenter une traverse par la combinaison d'un système masse-ressort-amortissement. Les auteurs proposent une condition de périodicité du déplacement de la poutre grâce à la périodicité de la structure.

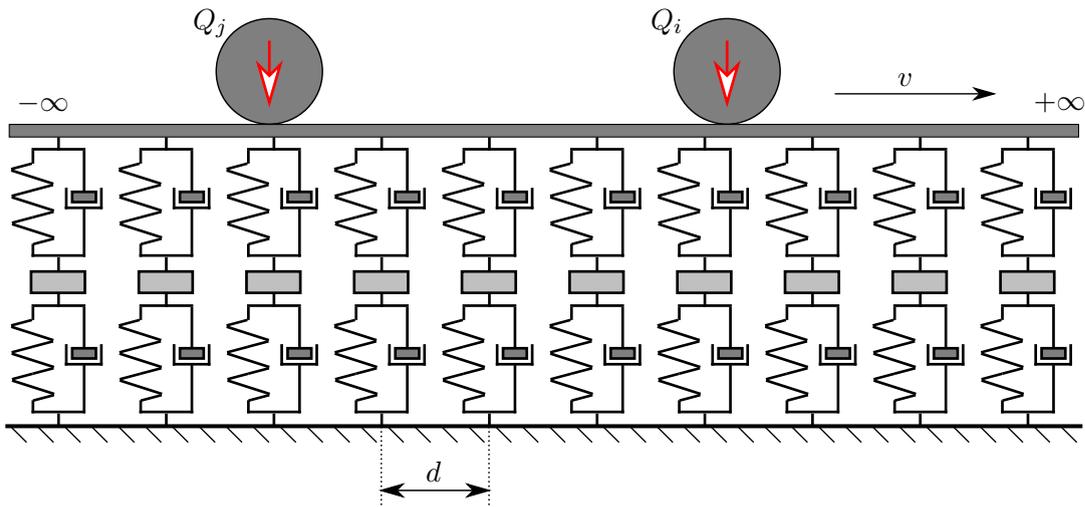


FIGURE 1.6 – Modèle de poutre périodiquement supportée

Un modèle avec des supports élastiques a été développé par Mead [76-82]. Dans ce modèle, il a appliqué des charges harmoniques et la résolution a été faite par un traitement par séries de Fourier. Sheng et al. [111, 112] ont quant à eux déterminé les charges à partir des interactions roue-rail. Metrikine [84] et Vostroukhov [120] ont traité le problème avec le déplacement des forces concentrées avec une condition de périodicité. Belotserkovskiy [14, 15] a étudié la vibration due à une charge mobile harmonique posée sur des appuis élastiques périodiques avec des conditions spéciales imposées sur les deux points quelconques qui sont séparés par une distance qui est égale à celle entre deux traverses. Une autre méthode pour résoudre les équations différentielles est d'utiliser la transformation de Fourier pour obtenir la formulation de Green. La formulation de Green a été utilisée dans plusieurs ouvrages. Nordborg [92, 93] a résolu le problème par cette méthode avec le théorème de Floquet. Foda et al. [39], Hozhabrossadati [54], etc. l'ont utilisée pour avoir la réponse dynamique de leur problème. Hoang et al. [53] ont utilisé la transformation de Fourier afin d'obtenir la relation entre la force de réaction appliquée sur la traverse et le déplacement en domaine fréquentiel pour les deux modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko :

$$\hat{R}_q(\omega) = \mathcal{K}_q(\omega)\hat{w}_q(\omega) + Q_q(\omega) \quad (1.2)$$

Avec l'indice "q" valable quelque soit le modèle et  $Q(\omega)$  représentant la charge équivalente.

## 1.4 Mécanisme de dégradation de la voie ferrée

Dans l'histoire du développement des chemins de fer, on déplore plusieurs accidents graves même si ce type de transport est un moyen de transport présentant un des plus grands niveaux de sécurité. Les accidents sont généralement causés par plusieurs facteurs, soit humain (dépassement de la vitesse, etc.) ou soit techniques (déraillement des trains, problème de signalisation, collision des trains, etc.). Dans cette partie, nous allons étudier les mécanismes de dégradation de la voie sous l'action de la dégradation de la couche de ballast et de l'endommagement des traverses.

### 1.4.1 Couche de ballast

#### Comportement du ballast sous vibrations

Le ballast est un matériau granulaire qui provient du concassage de roches dures et inertes vis à vis de l'eau. Ce matériau montre plusieurs comportements sous vibrations (voir Tableau 1.1).

Fréquences	Valeurs	Comportement
Faibles	[0 ; 25] Hz	Solide
Moyennes	[25 ; 50] Hz	Visco-élastique
Hautes	[ 50 ; $+\infty$ ] Hz	Liquéfié

TABLE 1.1 – Comportement du ballast selon les fréquences de vibrations

Les premiers travaux portant sur l'étude de la vibration des matériaux granulaires ont été réalisés en 1787 par Chladni [26]. L'étude du comportement du ballast sous vibration remonte à plus de deux siècles et suscite encore aujourd'hui la curiosité des chercheurs [60, 88, 94, 117].

#### Tassement

Lors des passages des trains, le ballast et les couches au-dessous peuvent subir une déformation non élastique. La voie ne revient pas à son état initial mais à une autre position proche de celle d'origine. Au fur et à mesure, après plusieurs cycles de chargement, les petites déformations non élastiques s'accumulent dans les différentes parties de la voie et vont conduire à un phénomène appelé tassement de la voie. Ce tassement dépend du chargement cyclique, de la qualité et du comportement du ballast, des sous-couches et de la plate-forme. Plusieurs lois empiriques de tassement ont été données par des chercheurs dans le monde [2, 17, 43, 56, 107, 113] et nous constatons que le tassement de la voie apparaît en deux phases :

- Phase 1 : Directement après le bourrage : Une étape de densification du ballast et de positionnement de la voie par des passages de trains à forte charge. Ce tassement apparaît rapidement jusqu'à la position où le ballast est bien compacté.
- Phase 2 : Apparition d'un tassement qui apparaît plus lentement que dans la phase 1. La relation entre le tassement et le nombre de cycles de charge (ou le temps) n'est pas linéaire.

La deuxième phase du tassement est la plus intéressante à cause de son effet sur la stabilité de la voie et le tassement peut s'expliquer par plusieurs mécanismes de comportement

du ballast et de la plate-forme. Mais les deux raisons principales du tassement viennent de la densification du ballast et du sol par réarrangement des grains et le comportement non élastique du ballast et du sol.

### Influences sur la voie

Pour les lignes classiques pour lesquelles les caractéristiques des matériaux ne sont pas bien définies, il existe entre la couche de ballast et les sous-couches une couche intermédiaire constituée d'un mélange de matériaux : ballast, grave, sol, sable, scories, etc. Cette couche est donc appelée la couche de ballast polluée. La plupart des dégradations viennent des voies classiques. Pour les voies modernes, la qualité des matériaux est assurée. La mise en œuvre est effectuée avec un compactage qui permet de bien stabiliser la structure. La dégradation de la couche de ballast vient généralement des causes suivantes :

- Usure et pollution du ballast : Sous l'action des charges (lors des passages des trains), le frottement entre les grains de ballast engendre des usures qui font que le ballast est endommagé et contaminé. Par conséquent, la performance de la couche de ballast n'est plus assurée. On peut citer plusieurs ouvrages qui étudient ce phénomène : Li et al. en 1995 [68], Karraz en 2008 [59] avec des essais de tri-axiaux, etc.
- Mauvais fonctionnement hydraulique : C'est la conséquence d'une mauvaise qualité de drainage de la couche d'assise. Cela vient du fait que le dispositif longitudinal de drainage est mal dimensionné. Dans le cas où le sol contient des argiles, l'action de chargement cyclique provoque une action de pompage qui fait remonter l'argile ramollie par la présence d'eau. Le pompage engendre la pollution du ballast. La portance du sol diminue en conséquence et le tassement augmente. Ce phénomène est appelé le phénomène de "remontée boueuse". Il existe essentiellement dans les anciennes voies et on peut trouver facilement des travaux portant sur ce phénomène.

#### 1.4.2 Traverse en béton et son comportement

Il y a eu de nombreuses études portant sur la dégradation de la traverse qui a un rôle important dans le fonctionnement de la voie. L'endommagement de la traverse doit être détecté le plus tôt possible pour que l'on puisse remplacer les matériels défectueux.

#### Comportement mécanique du béton

Le béton est un matériau hétérogène car il contient plusieurs composants et, de cette hétérogénéité découle des propriétés complexes. Il existe un certain nombre d'essais en laboratoire pour caractériser les propriétés du béton qui vont dépendre des chargements différents, des conditions de stockage, etc. Nous nous intéressons donc au comportement mécanique du béton et on constate que le béton a une résistance en compression qui est de 10 à 20 fois plus grande que celle en traction [74]. C'est la raison pour laquelle on utilise l'acier dans le béton (armature) afin d'augmenter sa résistance en traction. Plusieurs essais en laboratoire nous permettent de connaître son comportement mécanique comme :

- Essai de compression : Plusieurs formes géométriques d'éprouvette sont utilisées (cubique, cylindrique, etc.). Les charges de compression sont appliquées sur l'éprouvette jusqu'à la rupture (voir figure 1.7a).
- Essai de traction : De même façon qu'un essai en compression, plusieurs types d'éprouvette sont utilisés. Nous pouvons effectuer non seulement la traction simple mais aussi des essais de flexion en 3 points, 4 points (voir figure 1.7b)

La figure 1.8 montre le comportement du béton en compression et en traction.



FIGURE 1.7 – Essais mécaniques du béton sous chargement statique

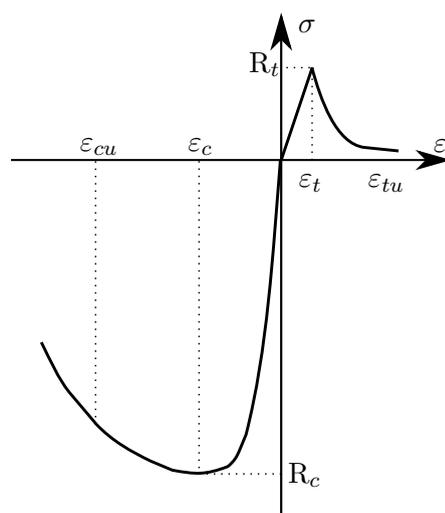


FIGURE 1.8 – Comportement du béton en compression et en traction

## Fatigue du béton

Le point de départ des études sur la fatigue fut probablement l'accident de train Versailles-Paris qui fit plus d'une cinquantaine de victimes le 10 Mai 1842. On mit longtemps avant d'élucider les raisons de la rupture brutale de l'essieu avant de la locomotive, rupture qui fut la cause de cette catastrophe. Les premiers essais de fatigue ont été effectués par Wöhler en 1860 pour caractériser la résistance à la fatigue en flexion rotative. Il en découle :

- Les courbes de Wöhler (où courbes  $S - N$ ) : Les courbes donnent les nombres  $N$  de cycles à la rupture (en abscisse) en fonction de la contrainte maximale appliquée  $S$  (en ordonnée) (voir figure 1.9)
- Un nouveau concept : *limite d'endurance* qui est la valeur asymptotique de  $S$  lorsque  $N$  devient très grand. La limite d'endurance est une valeur en dessous de laquelle il n'y aura jamais de fatigue.

Le mécanisme de la fatigue du matériau peut généralement se décomposer en quatre périodes distinctes [13] :

- Première période : Elle s'étend sur  $N_1$  cycles et correspond aux modifications microstructurales, essentiellement à la plastification et à l'écroutissement des grains. Cette phase peut bien sûr passer totalement inaperçue à l'échelle macroscopique de l'ingénieur.

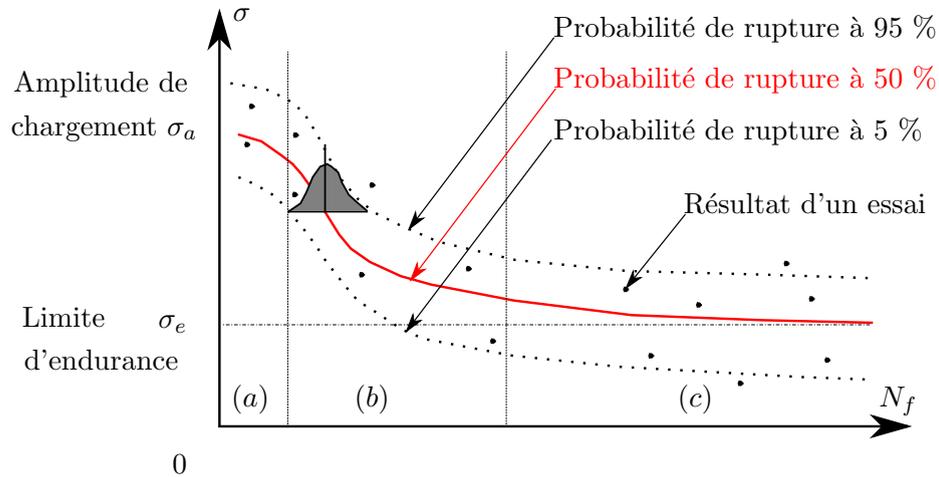


FIGURE 1.9 – Courbes de Wöhler

- Deuxième période : Elle s'étend sur  $N_2$  cycles et correspond à la nucléation de microfissures dans les bandes de glissement entre les grains de matière. Ces deux premières phases constituent le stade I, de nucléation de microfissures ou encore d'amorçage de la fissure de fatigue, dont on définit le nombre de cycles par  $N_n = N_1 + N_2$
- Troisième période : Elle comprend la coalescence des microfissures qui se rejoignent pour former des fissures de tailles détectables qui constitueront une fissure macroscopique. Cette période qui s'étend sur  $N_c$  cycles constitue le stade II.
- Quatrième période : C'est celle de la propagation de la macro-fissure jusqu'à la rupture finale avec le nombre de cycle  $N_p$ . Elle constitue le stade III.

Le nombre de cycles total vaut :  $N_f = N_n + N_c + N_p$  et selon le nombre de cycles atteint avant la rupture  $N_f$ , on distingue :

- La fatigue mégacyclique : Le nombre de cycles total est supérieur à  $10^7$  - zone (c) figure 1.9.
- La fatigue normale : Le nombre de cycles total peut aller dans l'intervalle de  $10^4$  à  $10^7$  cycle et se manifeste dans le domaine élastique - zone (b) figure 1.9.
- La fatigue oligocyclique : Le nombre de cycles total est inférieur à  $10^4$  et apparaît dans le domaine élasto-plastique - zone (a) figure 1.9.

Pour le béton, le stade I évolue rapidement et prend environ entre 5% et 10% du nombre total de cycles  $N_f$ . Le stade II contribue à la plupart de la durée de la fatigue avec un nombre de cycle égal à environ 80% à 90% du nombre de cycles total  $N_f$ . Le taux de détérioration de ce stade est stable. Le dernier stade est l'accélération de la détérioration jusqu'à la rupture [52]. La figure 1.10 représente l'évolution du nombre  $\omega$  qui varie entre 0 (pour le début d'essai : éprouvette non endommagée) et 1 (fin d'essai : rupture de l'éprouvette) en fonction du rapport du nombre de cycles  $n$  sur le nombre de cycles total  $N_f$ .

De nombreuses études ont été effectuées sur la fatigue des matériaux avec des modèles différents afin d'obtenir une loi de la fatigue des matériaux qui nous permet de prédire et

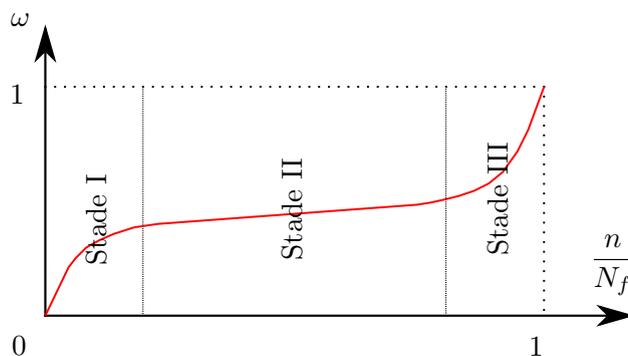


FIGURE 1.10 – Évolution de la détérioration du béton

estimer l'ordre de grandeur de la durée de vie des ouvrages. Les lois obtenues sont des lois empiriques et elles ne sont pas capables d'interpréter le mécanisme de l'endommagement et la propagation des fissures [1, 28, 114].

### Autres facteurs de dégradation du béton

En réalité, une structure se dégrade non seulement sous l'action mécanique mais aussi sous les autres actions comme la température, les conditions d'environnement, etc. La durabilité du matériau, et notamment ici du béton, reste encore aujourd'hui un thème de recherche des plus intéressants à cause de ses propriétés complexes. Plusieurs études ont été réalisées afin de mieux comprendre les autres sources de corrosion des ouvrages en béton (par exemple : les centrales nucléaires, les ponts, les barrages, etc.). Les autres facteurs principaux de dégradation du béton sont :

- La température :
  - Le gel/dégel : Les gels internes apparaissent à cause de la présence d'eau dans la pâte cimentaire.
  - L'écaillage des bétons : Le détachement de matière est influencé par la présence d'air (lors de changement de saison) ou/et de feu.
- Les réactions de gonflement internes dans les bétons :
  - La RAG<sup>8</sup> : Une réactivité entre le ciment (les alcalins) et les granulats (la silice) forme des produits gonflants et dégrade le béton.
  - La RSI<sup>9</sup> : Un risque majeur d'agression chimique pour le béton par les sources sulfatiques d'origine externe (sol, liquide, gaz) et internes (formation différée de l'ettringite).
- Les conditions d'environnement :
  - La carbonatation : La corrosion démarre lorsque le front de carbonatation atteint les aciers par la réaction chimique :  $\text{Ca}(\text{OH})_2 + \text{CO}_2 \rightarrow \text{CaCO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ . Par conséquent, le pH du béton diminue de 12,4 à environ 9. La carbonatation entraîne une corrosion généralisée des armatures.

---

8. Réaction Alkali-Granulat

9. Réaction Sulfatique Interne

- La pénétration des chlorures : Les deux “sortes” de chlorures (chlorures libres<sup>10</sup> et chlorures liés<sup>11</sup>) agissent par rupture du film passif des aciers. La pénétration des chlorures entraîne une corrosion localisée des armatures.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons surtout au comportement de la traverse sous l'action mécanique (chargement cyclique lors des passages des trains). Nous ne tiendrons donc pas compte de l'influence des facteurs cités ci-dessus. Les traverses s'endommagent à cause des actions des chargements et les résultats obtenus à partir des mesures dépendent uniquement des chargements.

### 1.4.3 Méthode de détection de l'endommagement d'une structure

La dégradation de la voie ferrée ballastée ne peut pas être détectée de manière aisée et évidente puisque les traverses sont immergées dans la couche de ballast et les endommagements des traverses ne sont donc pas facilement observables. La technique classique de surveillance lors des opérations de maintenance des traverses oblige alors à soulever le rail. Cependant, cette méthode ne permet pas d'analyser l'état de la traverse de manière générale car les endommagements apparaissent non seulement aux bords mais aussi à l'intérieur de la traverse. Évidemment, cette méthode génère des contraintes au niveau du temps, des coûts et cela influence directement le trafic des trains qui est de plus en plus chargé. Par conséquent, il est vraiment nécessaire de disposer d'autres méthodes plus simples et plus rapides pour détecter les endommagements qui sont causés par la dégradation de la voie (sous couches) ou des matériels défectueux. Grâce au développement des technologies, les méthodes de détection sont maintenant généralement non-destructives avec l'avantage de ne pas perturber la circulation des trains. Nous pouvons citer les quelques méthodes de contrôle non destructif (CND) suivantes :

- La corrélation d'images ou examen visuel (VT) : C'est la méthode la plus simple qui peut être réalisée facilement par observation des défauts apparus sur la surface des traverses. Cette méthode ne peut pas être utilisée dans ce cas car elle ne donne aucune information à l'intérieur des traverses.
- La mesure des ondes élastiques (AT) : Le principe de cette méthode est d'enregistrer et d'analyser les ondes élastiques à l'aide d'un récepteur posé sur la surface de l'objet après une excitation de la structure. Le temps de propagation des ondes d'un point à un autre augmente s'il existe des fissures sur son trajet. Cette méthode a une bonne précision. Néanmoins, dans le cas de plusieurs fissures, il faut prendre plusieurs mesures pour déterminer les positions exactes auxquelles les fissures se situent. Ce n'est donc pas forcément une bonne solution pour des questions de temps et de méthodologie.
- L'émission acoustique (UT) : Cette méthode est basée sur la transmission, la réflexion et l'absorption d'une onde acoustique (onde ultra-sonore). Précisément, avec une source acoustique positionnée en un point, on mesure le temps de propagation des ondes acoustiques propagées à un autre point sur la surface. Cette méthode est appréciée avec une précision élevée mais elle rencontre le même problème lorsqu'il y

---

10. Chlorures libres : se trouvent sous forme ionique dans la solution interstitielle. Ils sont extractibles à l'eau et sont, de ce fait, appelés également “chlorures solubles dans l'eau”.

11. Chlorures liés : fortement absorbés sur les C-S-H et liés chimiquement dans la matrice cimentaire sous forme de composés tels que les chloroaluminates de calcium  $C_3A.CaCl_2.10H_2O$ .

a plusieurs fissures dans l'objet. Cette technique est appliquée dans les gros ouvrages dans le domaine du génie civil [21].

- La mesure de la résistance électrique : Cette méthode est applicable plutôt pour le béton armé qui contient des aciers. L'objectif est de mesurer la résistance électrique de deux points quelconques sur le renfort en acier. Cette valeur augmente lorsqu'il y a la rupture de l'armature. Cependant, les traverses se cassent généralement d'abord dans la partie en béton et cette méthode ne peut pas être appliquée pour les traverses fabriquées en béton précontraint.
- L'analyse modale : C'est une des méthodes qui apparaît la plus adaptée aux traverses. En effet, chaque structure possède des modes propres avec des fréquences propres qui dépendent notamment de la géométrie et des caractéristiques mécaniques de la structure telle que sa raideur. L'apparition de l'endommagement d'une structure modifie ses modes propres (et aussi ses fréquences propres). L'analyse modale permet de mesurer les modes propres mais cette méthode reste souvent qualitative. Il existe de nombreuses études portant sur les traverses de voie ballastée utilisant cette technique car elle est assez simple et efficace. En 2006, Remennikov et al. [101] ont étudié l'effet du couplage traverse/ballast sur les modes propres d'une traverse de deux façons : numérique (méthode des éléments finis) et expérimentale. Ils ont également étudié l'effet de la raideur de la semelle sous rail. Lam et al. [65] ont étudié la faisabilité de la méthode d'analyse modale pour détecter les zones où le ballast est endommagé mais cette étude est limitée à cause des faibles sensibilités. Matsouka et al. [61] ont proposé une méthode de détection des endommagements en utilisant la mesure des modes propres *in situ*. Grâce aux études des influences de la fissuration en surface sur les trois premiers modes propres d'une traverse, ils ont conclu que le troisième mode est le plus utilisable pour détecter l'endommagement. Plus récemment, en 2016, Hoang et al. [52] ont développé une méthode basée sur l'analyse modale permettant d'identifier l'endommagement des blochets en béton pour les voies non ballastées.
- Contrôle radiologique (RT) ou la tomographie : C'est une technique d'imagerie très utilisée dans l'imagerie médicale, ainsi qu'en géophysique, en astrophysique et aussi en mécanique. Le principe de base de la tomographie est de réaliser des images d'un objet par coupes, par tranches et, grâce aux images obtenues, on peut détecter les endommagements et les micro-fissures à l'intérieur d'un objet [27]. Ce contrôle utilise plusieurs techniques comme :
  - La tomographie axiale calculée aux rayons X (CT) [41]
  - La tomographie par émission mono-photonique (SPECT)
  - La tomographie optique diffuse (TOD)
  - La tomographie en cohérence optique (OCT)
  - La tomographie par résonance magnétique nucléaire (IRM)

On peut aussi parler des autres méthodes de CND existantes comme : le courant de Foucault (ET), la magnétoscopie (MT<sup>12</sup>), la thermographie (TT<sup>13</sup>), etc.. Cependant, ces techniques ne sont pas utilisables sur voie pour des raisons de coûts, d'environnement, etc. Une technique utilisant les réseaux de fibres de Bragg (FBG<sup>14</sup>) a été développée. Cette

---

12. Cette technique fonctionne uniquement sur matériau ferromagnétique

13. Une technique permettant d'obtenir une image thermique d'une scène par analyse des infrarouges. L'image obtenue est appelée "thermogramme"

14. FBG : Fiber Bragg Grating

technique sera présentée dans la partie 1.6.

## 1.5 Les systèmes de surveillance des voies ferrées

Chaque société de chemin de fer utilise différentes techniques pour l'entretien des voies ferrées. Les différentes voies ferrées ont différentes proportions d'entretiens ordinaires et de renouvellements périodiques. Cependant, le facteur clé pour les chemins de fer n'est pas la fréquence des opérations mais, c'est la qualité de l'investissement et de la maintenance [105]. Donc, un des grands problèmes est de déterminer le bon moment d'intervention, autrement-dit, nous devons pouvoir connaître l'état de la voie afin d'effectuer les opérations lorsque cela est nécessaire.

### 1.5.1 La détérioration de la ligne

La voie ferrée est soumise aux agressions extérieures les plus sévères pendant toute sa vie et sous l'action de ces agressions, la géométrie de la voie, les matériels et aussi les matériaux se dégradent sous forme exponentielle [46]. La détérioration de la voie dépend de plusieurs paramètres et est causée par le tassement et le déplacement latéral de la voie. En plus, les ondulations augmentent de manière très rapide dans les virages. Afin d'assurer le confort et la sécurité des passages des trains, il est important d'observer l'état de la voie et de détecter les dégradations le plus tôt possible [16]. Plusieurs études ont été effectuées sur la problématique de la détérioration de la voie. Le principe de ces études est de modéliser la détérioration et de l'optimiser afin de minimiser le coût de l'intervention et de maximiser la vie de la voie [12]. La plupart de ces travaux portent un regard sur l'effet du tassement de la couche de ballast, l'usure et la fatigue du rail. Les modèles de détérioration de la voie peuvent être classés comme suit :

- Modèle de détérioration due aux tassements
- Modèle de détérioration due à l'usure et la fatigue
- Modèle de détérioration due aux changements des conditions de trafic
- Modèle de détérioration générale

### 1.5.2 Les systèmes d'aide à la maintenance et au renouvellement d'une voie ferrée

Pour la maintenance ou le renouvellement des voies ferrées, chaque société développe des systèmes différents. Ces systèmes ont pour but principal de les aider à obtenir de meilleures solutions pour l'entretien des chemins de fer sous les contraintes imposées. Quelques exemples de systèmes utilisés dans les grandes sociétés du monde du chemin de fer sont présentés dans le tableau 1.2. Les entreprises peuvent utiliser un ou plusieurs systèmes selon leurs besoins. Par exemple, au Canada, la société Burlington Northern Railroad (BN) utilise le système TMS pour surveiller la voie et le système REPOMAN pour planifier des interventions. Également en Pologne, deux systèmes sont utilisés par la Polskie Koleje Państwowe (PKP) dont le premier sert à traiter des données, détecter des imperfections, décider des interventions sur la voie (DONG) et le deuxième sert à organiser le plan de l'intervention (KOMPLAN). Les systèmes de surveillance des voies ferrées en France sont développés par la SNCF et seront présentés dans la partie 1.5.3.

Au cours des années, ces systèmes ont été développés non seulement par les compagnies de chemin de fer mais aussi par des chercheurs spécialisés dans ce domaine. En 1991, Tew et

Sociétés de chemin de fer	Pays	Système utilisé
British Rail (BR)	Angleterre	Maintenance and renewal planning aid system (Mini-MARPAS)
Deutsche Bahn Aktiengesellschaft (DB)	Allemagne	System dynamics
Nederlandse Spoorwegen (NS)	Pays-Bas	Bovenbouw Informatie en Contoie per Onderhoudsectie (BINCO)
Chemins de fer fédéraux suisses (CFF)	Suisse	Track maintenance management (GEV)
Polskie Koleje Państwowe (PKP)	Pologne	Polish abbreviation : Decisions relating to general repairs (DONG)
Polskie Koleje Państwowe (PKP)	Pologne	Computer-aided works planning (KOMPLAN)
Magyar Államvasutak (MÁV)	Hongrie	Computer-aided system for railway maintenance and renewal (PATER)
Burlington Northern Railroad (BR)	Canada	Track maintenance system (TMS)
Burlington Northern Railroad (BR)	Canada	Rail expert planning, organization and maintenance (REPOMAN)
Japanese Railways (JR)	Japon	Shinkansen management information system (SMIS)

TABLE 1.2 – Les systèmes d'aide à la maintenance et au renouvellement du chemin de fer

Tinwde [116] ont présenté leurs travaux au laboratoire BHPR-ML<sup>15</sup> à Melbourne, Australie qui sont appliqués pour les chemins de fer lourds. Ce système nous permet de calculer les cycles de maintenance recommandés. Aux États-Unis, un système de maintenance des voies ferrées a été développé par Uzarski et al. [119] au laboratoire U.S. Army Construction Engineering Research en 1993. En 1995, Japanese Railways (JR) a utilisé une méthode développée par Yoshimura et al. [125] qui s'appelle Micro LABOCS-II+ pour les surveillances de la voie.

Récemment, en Inde, différents capteurs de détection des endommagements de la voie sont proposés. Pradeep et Naganarasaiah Goud [97] ont développé un capteur utilisant ARM<sup>16</sup> avec la mesure des distances par ultrason pour contrôler la géométrie de la voie. Ce capteur comprend un capteur à ultrasons, un capteur infrarouge pour détecter l'augmentation de la température et un récepteur GPS. En 2016, Sachin et al. [7] ont présenté un système en utilisant un détecteur de pluie intense qui permet d'obtenir le niveau d'eau ainsi que la sécurité des passages des trains, un capteur infrarouge, un détecteur de mouvement et un capteur de température qui détecte l'augmentation de température du moteur pour prévenir le risque d'incendie. Les informations obtenues sont traitées par l'ARM7 Micro-Controller et sont affichées à l'aide d'un écran LCD.

15. Broken Hill Proprietary Research - Melbourne

16. ARM : Advanced RISC Machine

### 1.5.3 Surveillance des défauts d'une voie ferrée en France

#### Les matériels de la SNCF

Les imperfections de la voie doivent être contrôlées avec précision pour assurer la sécurité des circulations. En France, les maintenances s'effectuent à l'aide d'une voiture spéciale (voiture "Mauzin" de SNCF ou voiture "Mésuline", "Iris320" pour les LGV <sup>17</sup> [99]) ou le système de mesure de DMA. La SNCF a utilisé le système TIMON <sup>18</sup> pour traiter les informations obtenues par le train Mauzin. Ce système est développé par Meier-Hirmer et al. [83] et a été présenté lors de la Conférence COMPRAIL en 2006 au Royaume-Uni. Cette application est spécialisée pour le contrôle géométrique de la voie.

Plus récemment, en 2016, la SNCF a mis au point un nouveau dispositif de surveillance automatisée des voies. Il s'agit du train "Surveillance" dans le programme Vigirail. Ces nouvelles voitures circulent sur les voies, au même titre que les trains commerciaux parmi lesquels ils prennent place. Les caméras à haute définition dont sont équipées les voitures permettent de reconstituer la voie en 3D en temps réel. A l'aide d'un écran de contrôle, ce dispositif classe la voie suivant différentes catégories, et permet de localiser et de mesurer des défauts et déformations de la voie au niveau :

- des attaches
- du niveau du ballast
- de la surface du rail
- des éclisses <sup>19</sup>

#### Contrôle géométrique de la voie

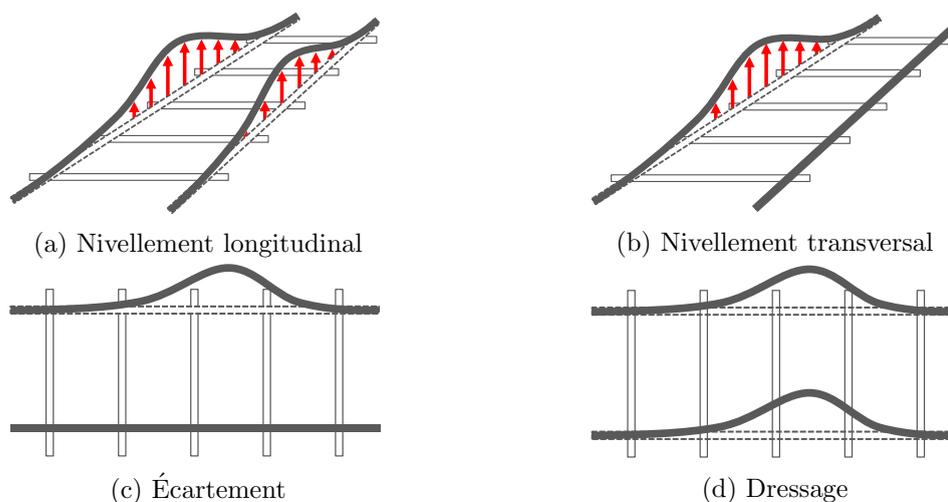


FIGURE 1.11 – Les défauts géométriques de la voie

Il existe plusieurs catégories de dégradation géométrique de la voie [63] (voir figure 1.11) :

- Nivellement longitudinal : Résultant du tassement global et résiduel

17. LGV : Lignes à Grande Vitesse

18. TIMON : Traitement Informatique du Mauzin et des Opérations de Nivellement

19. Les pièces métalliques servant à raccorder deux rails consécutifs

- Nivellement transversal : Deux modes à évaluer : l'écart de dévers et le gauchissement ou torsion de la voie.
- Écartement : Variation de la distance entre deux rails entre eux.
- Dressage : Variation transversale du milieu des rails par rapport à la position théorique initiale.

### Seuil d'intervention

Le niveau de dégradation de la voie est repris dans le tableau 1.3 par ordre d'importance décroissante :

Niveau	Explication
1	Valeur de ralentissement (VR)
2	Valeur d'intervention (VI)
3	Valeur d'alerte (VA)
4	Valeur d'objectif (VO)

TABLE 1.3 – Seuil d'intervention des lignes ferroviaires

### Opérations de maintenance

Les opérations de maintenance ont pour but de renouveler la voie ballastée. Dans ces opérations, tous les constituants de la voie sont remplacés, ce qui en fait des opérations coûteuses. Ces travaux s'effectuent normalement après environ 25 ans de service. Cette durée de vie dépend de la vitesse des matériels roulants sur la voie (évidemment, une voie LGV se dégrade plus vite qu'une voie classique).

Le bourrage est une opération qui permet de corriger les petits défauts de la voie au niveau du ballast. Cette opération comprend une correction par vibration (des bourroirs font vibrer le ballast à des fréquences comprises entre 35 et 45 Hz et permettent un serrage des grains situés sous les traverses à l'aide d'une "boureuse").

## 1.6 Projet de recherche de la traverse instrumentée "Smart Sleeper"

En 2011, le service R&D de la société SATEBA et son partenaire, une entreprise française spécialisée dans la surveillance des infrastructures, ont entrepris une collaboration pour développer un nouveau concept de traverse en béton : la traverse "Smart Sleepers". L'objectif de ce projet est de surveiller les traverses en béton pendant toute leur vie de manière régulière avec une haute précision.

### 1.6.1 La nécessité

Une des techniques de surveillance des traverses de voie actuellement utilisée requiert l'utilisation de jauges de déformations. En principe, les jauges sont collées sur les côtés latéraux de la traverse. Le problème rencontré ici est la durée de vie de la colle. En plus, les jauges sont très sensibles aux effets électro-magnétiques et les mesures ne peuvent pas être effectuées sur du long terme à cause du décollage des jauges lors de branchement (et de

débranchement également). D’autre part, lors des passages des trains, les fissures apparues sur la surface de la traverses peuvent perturber les mesures de façon importante et aller jusqu’à rendre les jauges inopérantes. Ainsi, les inconvénients liés à cette technique ont motivé le développement d’une autre solution pouvant satisfaire les critères suivants :

- La nouvelle solution doit être suffisamment robuste pour gérer les mesures *in situ* des trafics normaux et aussi des trafics de maintenance.
- Les mesures doivent être réalisées facilement et cette solution doit être robuste afin que le système de mesure soit opérationnel pendant toute la durée de vie de la voie et sans interruption.
- L’insensibilité aux effets électro-magnétiques est toujours une demande exigeante et non négligeable.
- Les mesures dynamiques lors des passages des trains doivent être obtenues avec une haute précision.

Après avoir pris en compte ces exigences, la meilleure solution est de mettre le dispositif de mesure à l’intérieur de la traverse pour qu’il soit protégé à long terme par le béton. La taille du capteur de mesure doit être raisonnable. Évidemment, le capteur doit être suffisamment petit pour pouvoir être noyé totalement dans la traverse. D’autre part, il doit être suffisamment grand pour mesurer la déformation pertinente dans la micro-structure du béton. Cependant, le fait de fixer le capteur à l’intérieur de la traverse entraîne quand même quelques exigences sur les caractéristiques du capteur pour assurer :

- La résistance à l’humidité.
- La résistance aux réactions chimiques internes du béton (les phénomènes RAG et RSI - voir la partie 1.4.2).
- La résistance aux actions mécaniques (en compression et aussi en traction) lorsque les traverses travaillent
- La résistance pendant le durcissement du béton

Un type de capteur extensométrique utilisé en France depuis plus de 70 ans dans les centrales nucléaires et les barrages en béton est le “Vibrating Wire”. Cette technique n’est cependant utilisée que pour des mesures statiques de structures en béton comme les ponts, les barrages, les tunnels, etc. La nécessité d’effectuer des mesures dynamiques sans interférence avec des effets électro-magnétiques dans ce projet a conduit au choix de la fibre optique à réseau de Bragg : “Fiber Bragg grating” (FBG).

## 1.6.2 Fiber Bragg grating et le capteur fibre optique

### Introduction à la fibre optique

La fibre optique est un fil de verre de petit diamètre qui permet de transmettre la lumière en son sein. Cette propriété de la fibre optique est le cœur de la technologie de détection optique. Ce type de capteur est déjà utilisé avec une bonne efficacité dans de nombreux secteurs industriels tels que les travaux publics, le secteur pétrolier et la médecine.

Une fibre optique se compose essentiellement de trois parties (voir figure 1.12) :

- La partie de protection : Cette partie contient plusieurs couches. L’objectif de cette partie est de protéger la fibre optique des sources de dégradation externes et aussi des actions physiques.
- La gaine : Cette partie a un indice de réfraction moins élevé que celui du cœur de la fibre. Elle réfléchit la lumière diffusée vers le cœur et minimise la perte lors de sa propagation à travers le cœur.

— Le cœur : Il permet la propagation de la lumière.

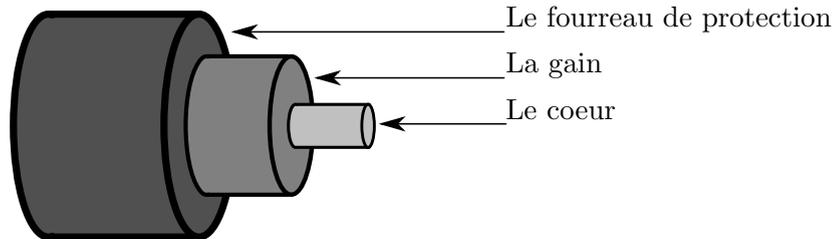


FIGURE 1.12 – Schéma d'une fibre optique

### Définition d'une Fiber Bragg grating

Un réseau de Bragg est une micro-structure de quelques millimètres qui alterne des couches de deux matériaux d'indices de réfraction différents, ce qui provoque une variation périodique de l'indice de réfraction effectif dans le cœur de la fibre (voir figure 1.13).

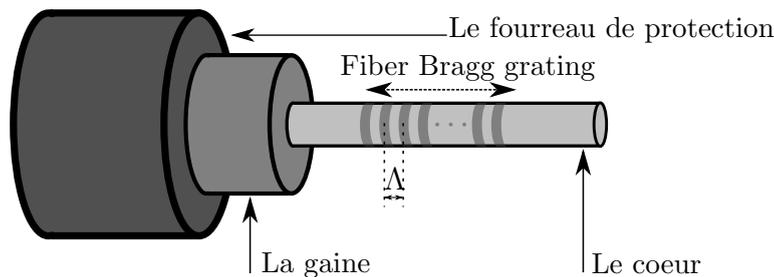


FIGURE 1.13 – Schéma d'une FBG

La FBG a été montrée la première fois en 1978 par Ken Hill. et al. [50]. A l'époque, les FBG ont été fabriquées en utilisant un laser visible se propageant le long du noyau de la fibre. Les capteurs FBG sont fabriqués en utilisant les procédés holographiques avec un masque de phase pour exposer une courte section de fibre photosensible à une distribution périodique d'intensité lumineuse. L'indice de réfraction de la fibre est modifié de façon permanente en fonction de l'intensité lumineuse à laquelle elle est soumise. La perturbation périodique de l'indice de réfraction qui en résulte est appelée réseau de Bragg sur fibre.

### Principes fondamentaux et fonctionnement

Une FBG est une sorte de micro-structure créée pour refléter une longueur d'onde de lumière. Cela signifie que si la lumière provenant d'une source à large bande est introduite dans la fibre optique, seule la lumière dans une largeur spectrale très étroite, centrée sur la longueur d'onde sera reflétée en retour par la zone de réfraction. La lumière restante poursuivra son chemin dans la fibre optique jusqu'à la zone de réfraction suivante sans aucune perte (voir figure 1.14). En conséquence, le FBG reflète une fréquence spécifique de lumière tout en transmettant toutes les autres.

L'équation fondamentale d'une fibre FBG décrit la longueur d'onde de Bragg  $\lambda_B$  en fonction du pas du réseau  $\Lambda$  et de l'indice de réfraction effectif du noyau de la fibre  $n_{\text{eff}}$  :

$$\lambda_B = 2n_{\text{eff}}\Lambda \quad (1.3)$$

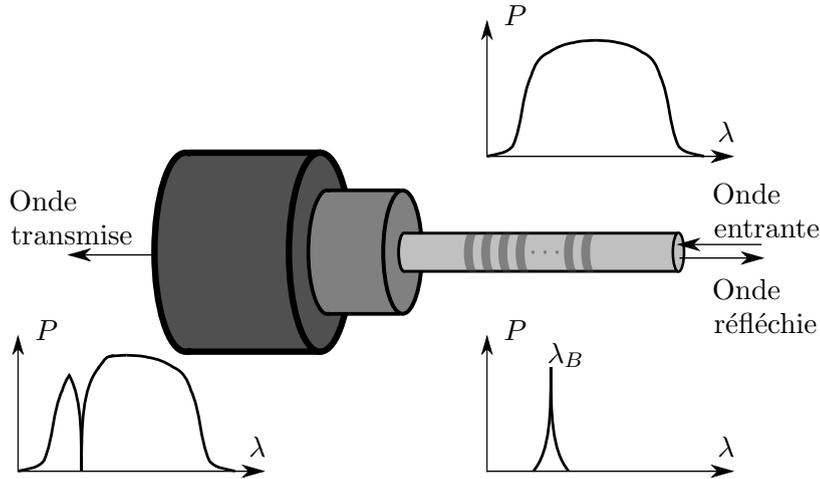


FIGURE 1.14 – Fonctionnement d'une FBG et sa réponse spectrale

Étant donné que la longueur d'onde de Bragg dépend du pas du réseau  $\Lambda$  (voir l'expression de l'équation (1.3)), les FBG peuvent être fabriqués avec des longueurs d'onde de Bragg variées, ce qui permet à différents FBG de réfléchir des longueurs d'onde de lumière unique. L'incrément de longueur d'onde  $\Delta\lambda_B$  peut se détailler en fonction de l'incrément de la déformation  $\Delta\varepsilon$  et de l'incrément de la température  $\Delta T$  [23, 87] :

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = (1 - \rho_\varepsilon) \Delta\varepsilon + (\alpha + \zeta) \Delta T \quad (1.4)$$

où :  $\rho_\varepsilon$ ,  $\alpha$  et  $\zeta$  sont respectivement le coefficient photo-élastique, le coefficient de dilatation thermique et le coefficient thermo-optique de la fibre.

Nous remarquons que le coefficient photo-élastique de la fibre est la variation de l'indice de réfraction sous une traction axiale et le coefficient thermo-optique de la fibre dépend de l'indice de réfraction à l'égard de la température.

### 1.6.3 Travaux de recherche effectués avec le capteur FBG

Plusieurs études ont été effectuées récemment pour moderniser la voie en utilisant les FBG. En 2010, Filograno et al. [36] ont utilisé le capteur FBG pour surveiller la ligne à grande vitesse Madrid - Barcelone en temps réel. Les capteurs ont été collés sur l'âme du rail en différentes positions et dans plusieurs directions : verticale, longitudinale, inclinée d'un angle à  $45^\circ$ . Sur la ligne, il y a plusieurs types de train qui passent fréquemment : S-102, S-103 et S-120 avec des caractéristiques différentes : la vitesse maximale, la longueur, le nombre d'essieux, etc. La variation de la longueur d'onde en fonction du temps permet de calculer la vitesse et l'accélération du train. Le nombre de pics représente le nombre d'essieux du train et la déformation à un point permet d'identifier le type d'essieu. De plus, la charge dynamique peut être calculée avec une précision élevée. La même étude a été effectuée par Wei et al. [122] à Hong Kong et a eu pour objectif de déterminer le nombre

d'essieux. Deux méthodes pour éviter la zone où des signaux sont bruités ont été proposées : X-Crossing and D-Crossing. Un pic d'un signal est déterminé par un front montant qui suit la suite un front descendant. La méthode X-Crossing est basée sur la définition de deux seuils différents pour la détection du front montant et du front descendant. Toutefois, cette méthode n'est pas capable de détecter tous les pics à cause du bruit. Alors, la méthode D-Crossing (Derivative-Crossing) qui est une méthode complémentaire est développée pour mieux déterminer les pics du signal. En 2011, Wei et al. [123] ont proposé une surveillance des roues en temps réel par la FBG. La surveillance de l'état des composants de la voie ferrée est développée par Buggy et al. [18] dans le programme PMNIDEA<sup>20</sup>. Ce travail a étudié le cas d'une jonction de deux rails (une éclisse) et a mis en évidence un changement significatif à haute fréquence de la déformation des composants de la voie.

A Hong Kong, en 2011, un système (appelé "Smart Railways") a été réalisé par Tam et al. [115] pour surveiller la voie ferrée KCRC's East Rail. Les capteurs ont été installés dans le train et aussi sur le rail. Les capteurs qui se situent dans le train servent à mesurer la déformation et la température, tandis que ceux qui se situent sur le rail servent à compter le nombre d'essieux et à surveiller la vibration du rail lors des passages des trains. Pour vérifier les mesures effectuées par les capteurs FBG, une comparaison avec les jauges de déformation a été faite.

La méthode d'utilisation du capteur FBG pour l'étude de la voie a été vérifiée par un modèle numérique. G. Kouroussis et al. [62] ont utilisé la méthode des éléments finis pour une voie posée sur la fondation de Winkler. Ils ont conclu que :

- Avec 1 capteur FBG : il est possible de déterminer la vitesse du train
- Avec 2 capteurs FBG : il est possible de déterminer la vitesse et la direction du train
- Avec 4 capteurs FBG : il est possible de déterminer en plus la charge d'essieu du train.

Les capteurs FBG servent non seulement à compter le nombre d'essieux [36, 69, 115], à calculer la vitesse et l'accélération du train [36, 75], à déterminer l'effort de réaction roue-rail [96] mais aussi à détecter les défauts de la voie. En 2004, Lee et al. [67] ont étudié le risque de déraillement en utilisant les capteurs FBG et la formulation de Nadal. Les capteurs ont été collés sur le pied et l'âme du rail. Une comparaison avec les jauges a été faite pour valider les mesures des nouveaux capteurs. En 2006, Ho et al. [51] ont montré que les capteurs FBG ont également la capacité de détecter les imperfections des roues par observation de la zone où les signaux sont bruités.

Récemment, Qian et al. [98] de l'University of Illinois à Urbana-Champaign et l'University of South Carolina ont présenté le projet "Railroad Infrastructure 4.0" pour qualifier la couche de ballast au-dessous de la traverse. Dans ce travail, 5 capteurs FBG sont collés le long de la traverse entre les deux rails. La fondation est divisée en 6 zones de même longueur et elle est simulée à l'aide d'un système d'évaluation. Les forces appliquées sur la traverse sont estimées via une équation donnée par AREMA<sup>21</sup>. Chaque zone de fondation est évaluée par un facteur BPI<sup>22</sup> qui est calculé comme suit :

$$\text{BPI} = \frac{P_{\text{comp}}}{P_{\text{uni}}} \quad (1.5)$$

où :  $P_{\text{comp}}$  et  $P_{\text{uni}}$  sont respectivement la pression du ballast calculée et la pression du ballast dans le cas de fondation homogène. Lorsque la zone est vide, le facteur BPI est égale à 0.

20. Predictive Maintenance Employing Non-Destructive Inspection & Data Analyse

21. American Railway Engineering and Maintenance-of-Way Association

22. Ballast Pressure Index

### 1.6.4 Traverse instrumentée “Smart Sleeper”

#### Présentation de la traverse instrumentée

Une traverse instrumentée (appelée également “Smart Sleeper”) est une traverse standard de type monobloc en béton précontraint à haute performance avec 5 génératrices (torons) de 60 kN. Les 6 capteurs FBG sont disposés parallèlement dans la longueur de la traverse (voir figure 1.15) :

- 4 capteurs se situent au-dessous des rails, 2 pour chaque rail dont 1 en partie haute et 1 en partie basse.
- 2 capteurs se situent au centre de la traverse dont 1 en partie haute et 1 en partie basse.

3 types de traverse sont fabriqués : M450, B70 et JBV60. Les mesures obtenues pourraient être traitées pour avoir plusieurs informations :

- Moment fléchissant : Il permet d’obtenir le comportement de la traverse et donne des informations sur le comportement de la voie.
- Déformation : La voie peut être surveillée à partir des informations données par la traverse en temps réel. Ces informations peuvent aussi permettre de valider l’efficacité des opérations de maintenance.
- Matériel roulant : Plusieurs types de traverse seront fabriquées pour s’adapter aux différents matériels roulants. Cela a pour but de surveiller en temps réel la voie, d’optimiser le trafic et d’augmenter la vitesse du train. On peut également contrôler la surcharge dynamique due aux imperfections des roues ou des matériels roulants.
- Points singuliers : La plupart des études sont effectuées en prenant l’hypothèse d’une poutre élancée droite et posée sur une couche de ballast avec des propriétés constantes. Il n’y a donc pas beaucoup d’informations aux niveaux des zones d’éclissage, des virages (courbe serrée), etc. En mettant ces capteurs à ces positions, nous pouvons alors mieux comprendre ce qui se passe lors des passages des trains.

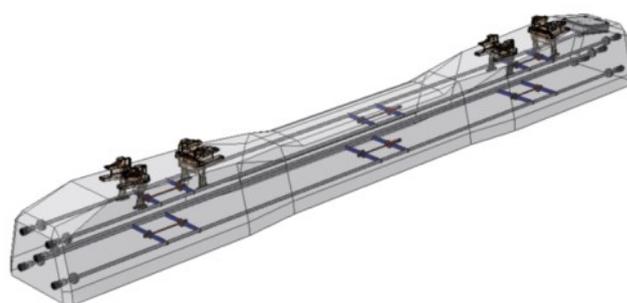


FIGURE 1.15 – Traverse instrumentée “Smart Sleeper” : M450

Dans les essais réalisés en laboratoire et en voie par la SATEBA et la SNCF (essai de flexion et essai de durabilité sur une Vibrogyr), le comportement de la traverse est testé en régime élastique [72] (la relation entre la déformation et la force appliquée peut se décrire par une fonction linéaire au centre de la traverse et au-dessous du rail). De même, les signaux obtenus provenant du capteur FBG n’ont pas été affectés après 36 millions de cycles de charge. Cela montre la robustesse des capteurs FBG et de la solution “Smart Sleeper”.

### Capteur de déformation FBG

Le capteur FBG (voir figure 1.16) est dédié spécialement aux mesures des déformations des structures en béton. Ce capteur satisfait toutes les exigences lorsqu'il est intégré à l'intérieur de la traverse en béton :



FIGURE 1.16 – Capteur de déformation FBG

- Durabilité : Ce capteur peut être encastré dans le béton sans la colle. Il est donc protégé pendant toute la durée de vie de la traverse (environ 50 ans).
- Intégré : Ce capteur ne change pas les propriétés mécaniques de la voie et il n'est pas intrusif.
- Multiplexage : Les mesures n'obligent pas d'aller sur place, elles peuvent être effectuées à longue distance.
- Fiabilité : Ce capteur applique la technologie de la FBG qui a beaucoup été utilisée dans les autres domaines industriels comme : offshore, construction, etc depuis plusieurs années. En plus, le branchement (ou débranchement) ne perturbe pas les mesures.

### Sites instrumentés et système d'acquisition



FIGURE 1.17 – Site instrumenté de Creil (photo source : Google Map)

La "Smart Sleeper" a été mise en service dans plusieurs sites en France et à l'étranger :

- en France

- Creil : en partenariat avec la SNCF : Il y a 3 traverses qui sont installées sur la ligne conventionnelle de Paris à Lille dont deux se situent sur la ligne droite et une est sur la voie légèrement courbée. La distance entre les traverses instrumentées est environ 100 m (voir figure 1.17).
  - Zilling : sur la ligne LGV Est européenne (LGV EST) qui relie Vaires-sur-Marne en Seine-et-Marne à Vendenheim dans le Bas-Rhin.
  - Bordeaux : sur la ligne LGV Sud Europe Atlantique (LGV SEA) qui est construit par la SNCF depuis avril 2016. Elle prolonge la branche sud-ouest de la LGV Atlantique jusqu'à Bordeaux.
  - Chalon-sur-Saône : dans le centre de recherche R&D de SATEBA.
- à l'étranger : à Oulu en Finlande.

## 1.7 Conclusion

Le vieillissement des voies ferrées est dû à plusieurs facteurs : au trafic ou à des défauts des composants de la voie. Ce problème concerne la question de la sécurité et du confort des voyageurs. Pour assurer la sécurité des voyageurs et des matériels roulants, les entreprises doivent effectuer des opérations de maintenance avec des systèmes d'accompagnement spécifique. Cependant, ces opérations peuvent avoir une influence sur le flux du trafic et il reste aussi une question de coût. Il est donc vraiment nécessaire d'étudier le comportement mécanique de la voie afin d'améliorer les opérations de maintenance.

Une traverse "Smart Sleeper" a été développée par SATEBA. Elle intègre des capteurs FBG placés dans la longueur de la traverse afin d'obtenir la déformation de la traverse lors des passages des trains. Quelques traverses ont été mises en service en France et à l'étranger. La méthode d'utilisation des capteurs FBG pour détecter les endommagements est une méthode de détection non-destructive dans le domaine des voies ferrées et est actuellement en développement. La traverse instrumentée se présente donc comme une solution supplémentaire pour surveiller l'état de la voie en temps réel. L'objectif de ce travail est d'obtenir des informations sur les matériels roulants et aussi sur la fondation à partir des signaux mesurés.

Ce chapitre a tout d'abord présenté de façon générale les composants d'une voie ferrée ballastée ainsi que leurs comportements mécaniques (la fatigue, la dégradation du ballast, etc.). Une synthèse bibliographique des modèles analytiques d'une voie ferrée qui sont applicables pour modéliser le comportement d'une traverse en voie a été résumé. Il existe quelques modèles analytiques : modèle de poutre sur une fondation ou modèle de poutre périodiquement supportée. Le résultat de ces modèles nous permet de construire des modèles dynamiques de la traverse en voie que nous allons présenter dans le chapitre suivant. Les mesures *in situ* à partir de la traverse instrumentée permettront de valider les modèles de la traverse élaborés dans le cadre de notre travail.



## Première partie

# Comportement mécanique de la traverse en voie ferrée ballastée



## Chapitre 2

# Modèle analytique de la traverse en voie

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>36</b>
2.1.1	Modélisation du chargement appliqué au rail par les roues	36
2.1.2	Modélisation de la traverse	36
2.1.3	Modélisation de la fondation	38
2.1.4	Modélisation du rail	39
2.1.5	Modélisation des semelles sous rail	39
2.1.6	Choix du modèle	41
<b>2.2</b>	<b>Comportement mécanique d'une traverse soumise à des efforts verticaux</b>	<b>41</b>
2.2.1	Modèle de la fondation homogène	41
2.2.2	Modèle de la fondation non-homogène	52
<b>2.3</b>	<b>Comportement mécanique d'une traverse soumise à des efforts latéraux</b>	<b>57</b>
2.3.1	Modèle de poutre sous traction	57
2.3.2	Réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux	60
2.3.3	Influence des efforts latéraux sur la réponse totale de la traverse	61
<b>2.4</b>	<b>Application à la voie Creil</b>	<b>62</b>
2.4.1	Paramètres du modèle dynamique	62
2.4.2	Comparaison mesure et modèle	62
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>64</b>

---

## 2.1 Introduction

La réponse dynamique d'une voie ferrée ballastée soumise aux chargements d'un train est un thème de recherche qui a donné lieu à de nombreux travaux depuis des dizaines d'années. Ce problème est étudié et est développé par les approches analytique et numérique. Les modèles existants s'intéressent plutôt à des réponses du rail ou de la fondation, et il n'y a que très peu de modèles dynamiques pour étudier la réponse de la traverse en voie. Les études effectuées sur la traverse s'intéressent au comportement des traverses de différents matériaux par méthode numérique en utilisant les éléments finis (en 2D et en 3D) et expérimentale, sous différentes valeurs de chargements.

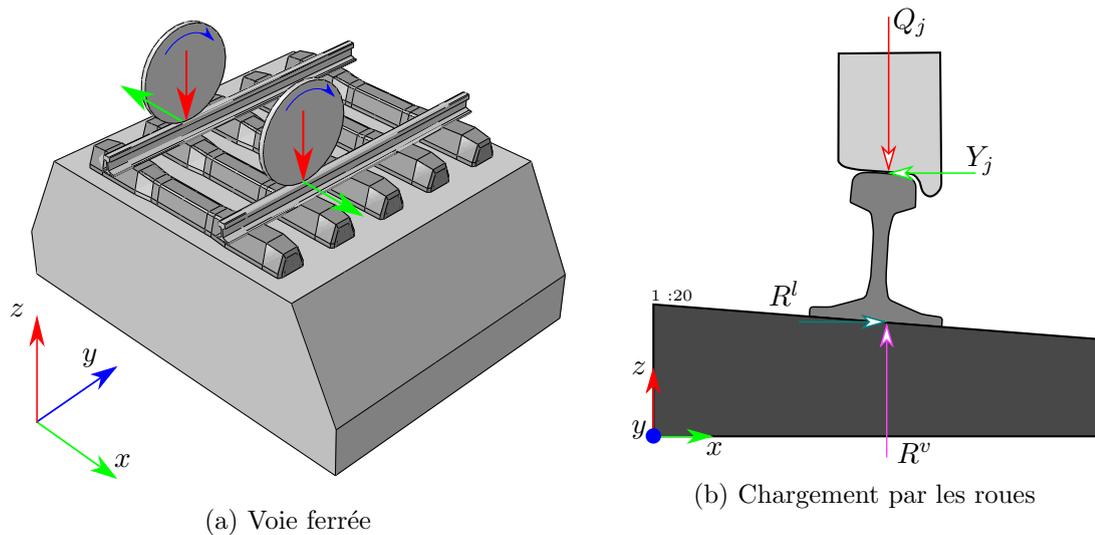


FIGURE 2.1 – La voie ferrée (a) et les chargements par les roues (b)

La figure 2.1a représente la voie ferrée en 3D. La voie comprend plusieurs composants (le rail, la traverse, la fondation, etc.). Pour analyser le comportement dynamique d'une traverse, il faut modéliser chaque composant de la voie afin d'en tenir compte dans les équations dynamiques de la structure. Comme le montre la figure 2.1a, il y a donc 5 éléments de la voie à modéliser : le chargement des roues, le rail, la traverse, la semelle sous rail et la fondation.

### 2.1.1 Modélisation du chargement appliqué au rail par les roues

Les chargements sont considérés comme des forces constantes qui se déplacent à une vitesse constante  $v$ . Chaque force mobile est caractérisée par la distance entre cette force et la première. Chaque essieu applique deux forces aux deux positions du rail et dans deux directions : verticale  $Q_j$  et latérale  $Y_j$  (figure 2.1b). Ainsi, lorsque le train contient plusieurs voitures de même charge, les forces ponctuelles sont réparties périodiquement.

### 2.1.2 Modélisation de la traverse

La traverse est étudiée par différentes méthodes : analytique [44], numérique [10, 42, 57, 64-66, 126] ou expérimentale [35, 124]. Il existe plusieurs façons pour modéliser analytiquement une traverse. Dans cette étude, la traverse est modélisée comme une poutre avec une longueur finie. Une poutre est une notion mécanique qui décrit une structure

élancée à une dimension et qui est représentée par une courbe moyenne et une section. La déformation de la section droite de la poutre est négligeable dans la théorie des poutres. Les deux modèles de poutre les plus communs sont :

- Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli (figure 2.2) : la section droite de la poutre reste toujours perpendiculaire à l'axe neutre. En flexion, ce modèle adopte une seule variable qui est le déplacement  $w(x, t)$ .

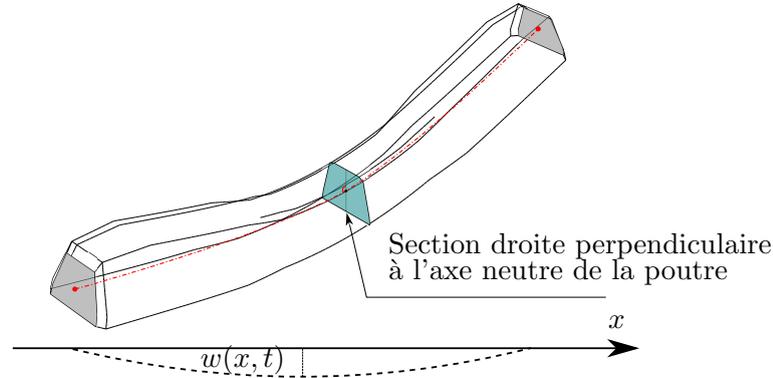


FIGURE 2.2 – Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli en flexion

- Modèle de poutre de Timoshenko (figure 2.3) : ce modèle prend en compte la rotation de la section droite par rapport à l'axe neutre. Ce modèle a donc deux variables : le déplacement de la poutre  $w(x, t)$  et la rotation de la section droite en flexion  $\phi(x, t)$ .

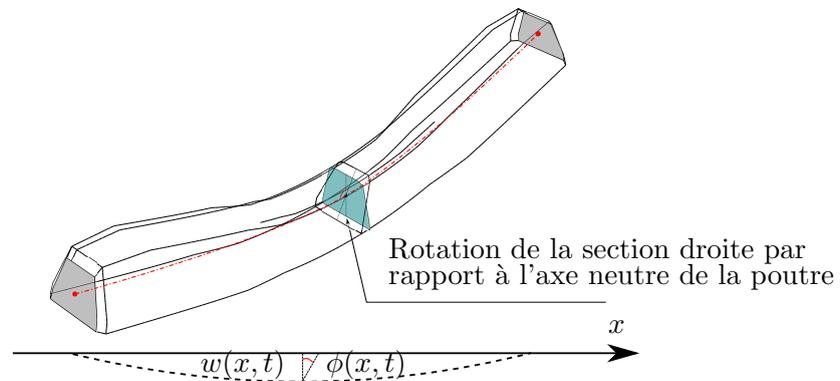


FIGURE 2.3 – Modèle de poutre de Timoshenko en flexion

Dans la théorie des poutres, la déformation de la poutre en flexion peut se calculer dans les deux cas du modèle comme suit :

- Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli :

$$\varepsilon_{xx}(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

- Modèle de poutre de Timoshenko :

$$\varepsilon_{xx}(x, z, t) = -z \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

où :  $z$  est la distance par rapport à la fibre neutre de la poutre. Dans ce chapitre, la traverse sera modélisée en utilisant ces deux modèles. Une comparaison de ces deux modèles montre les limites de la poutre d'Euler-Bernoulli dans la modélisation dynamique de la traverse.

Pour une poutre en compression/traction simple, la déformation est calculée à l'aide du déplacement  $u(x, t)$  de la poutre comme suit :

$$\varepsilon_{xx}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.3)$$

La déformation d'une poutre en compression/traction simple est homogène dans une section droite de la poutre. Elle ne dépend pas de la distance à l'axe neutre de la poutre.

Paramètre	Unité	Notation	Valeur
Module d'Young de la traverse	GPa	$E_s$	48
Module de cisaillement la traverse	GPa	$G_s$	20
Coefficient de cisaillement de Timoshenko		$\kappa_s$	0.845
Moment d'inertie de la traverse	m <sup>4</sup>	$I_s$	$1.694 \times 10^{-4}$
Masse volumique de la traverse	kgm <sup>-3</sup>	$\rho_s$	2658
Section de la traverse	m <sup>2</sup>	$S_s$	$47.7 \times 10^{-3}$
Longueur de la traverse	m	$2L$	2.41
Précontrainte	kN	$T$	300
Distance inter-traverse	m	$l$	0.6

TABLE 2.1 – Paramètres de la traverse

Le tableau 2.2 décrit les paramètres mécaniques et géométriques d'une traverse de section uniforme. Ces valeurs correspondent à des paramètres de la traverse M450 fabriquée par SATEBA.

### 2.1.3 Modélisation de la fondation

La fondation comprend la couche de ballast et la plateforme. Elle est le milieu le plus compliqué à modéliser. Il y a plusieurs façons de modéliser le ballast à cause de ses caractéristiques complexes. En utilisant une méthode numérique, les modèles les plus utilisés pour décrire son comportement sont : modèle discret [30, 121], modèle continu [11, 17, 71] ou le modèle couplage continu/discret [37, 38, 47-49, 103].

Dans ce travail, le modèle unidimensionnel de Kelvin-Voigt est utilisé pour modéliser la fondation avec deux paramètres : la raideur et l'amortissement de la fondation suivant chaque direction (latérale et verticale). Ce modèle est le plus simple rendant compte du comportement mécanique d'un solide visqueux.

Toutefois, après le bourrage, la fondation n'est pas homogène. Elle devient partiellement consolidée et puis, homogène au cours de l'utilisation. Dans ce travail, deux types de fondation (homogène et non-homogène) sont pris en compte afin de mieux comprendre l'évolution de la réponse de la traverse en voie en fonction du temps.

Paramètre	Unité	Notation	Valeur
Raideur de la fondation (direction verticale)	MNm <sup>-1</sup>	$k_f^v$	440
Amortissement de la fondation (direction verticale)	kNsm <sup>-1</sup>	$\zeta_f^v$	58.8
Raideur de la fondation (direction latérale)	MNm <sup>-1</sup>	$k_f^l$	160
Amortissement de la fondation (direction latérale)	kNsm <sup>-1</sup>	$\zeta_f^l$	90

TABLE 2.2 – Paramètres de la fondation

Les valeurs de la raideur et l'amortissement de la fondation suivant les deux directions verticale et latérale sont détaillées dans le Tableau 2.2. Ces valeurs seront utilisées dans la partie "applications numériques".

### 2.1.4 Modélisation du rail

Le rail peut être considéré comme une poutre infinie homogène. Les deux modèles qui sont utilisés sont :

- Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli [40, 90]
- Modèle de poutre de Timoshenko [4, 106]

En modélisant le rail comme le modèle de poutre périodiquement supportée (il s'agit des traverses), Hoang et al. [52] ont montré une relation entre la force de réaction et le déplacement du rail à la position d'une traverse qui a été donnée dans le domaine fréquentiel dans les deux cas de modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Cette relation ne dépend pas de la fondation. Les paramètres dans cette relation ne dépendent que des caractéristiques mécaniques du rail et des chargements.

En prenant cette hypothèse, la relation entre les efforts appliqués sur la traverse et le déplacement du rail aux deux positions de la traverse dans le domaine fréquentiel s'écrit (voie annexe C) :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = \mathcal{K}^v(\omega)\hat{w}_r^{[1]}(\omega) + \mathcal{Q}_1(\omega) \\ \hat{R}_2^v(\omega) = \mathcal{K}^v(\omega)\hat{w}_r^{[2]}(\omega) + \mathcal{Q}_2(\omega) \end{cases} \quad (2.4)$$

où :  $\mathcal{K}^v(\omega)$  et  $\mathcal{Q}_j(\omega)$  sont la raideur équivalente et le chargement équivalent du train dans le domaine fréquentiel. Pour deux choix de modèle du rail,  $\mathcal{K}^v(\omega)$  et  $\mathcal{Q}(\omega)$  ont une expression différente correspondant aux deux modèles.  $\hat{R}_j^v$  et  $\hat{w}_r^{(j)}$  sont respectivement l'effort de réaction et le déplacement vertical du rail  $j$  à la position de la traverse.

De la même manière, pour une poutre périodiquement supportée et soumise à des efforts latéraux, nous pouvons également obtenir la relation entre l'effort de réaction latéral et le déplacement latéral de la poutre dans le domaine fréquentiel (voir annexe C) :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^l(\omega) = \mathcal{K}^l(\omega)\hat{w}_r^{[1]}(\omega) + \mathcal{Y}_1(\omega) \\ \hat{R}_2^l(\omega) = \mathcal{K}^l(\omega)\hat{w}_r^{[2]}(\omega) + \mathcal{Y}_2(\omega) \end{cases} \quad (2.5)$$

où :  $\mathcal{K}^l(\omega)$  et  $\mathcal{Y}_j(\omega)$  sont respectivement la raideur équivalente et le chargement équivalent du train dans le domaine fréquentiel. Pour deux choix du modèle du rail,  $\mathcal{K}^l(\omega)$  et  $\mathcal{Y}(\omega)$  ont une expression différente correspondant aux deux modèles.  $\hat{R}_j^l$  et  $\hat{w}_r^{[j]}$  sont l'effort de réaction et le déplacement latéral du rail  $j$  à la position de la traverse. L'indice  $r$  dénote le rail dans les deux équations (2.4) et (2.5). Les paramètres mécaniques du rail sont détaillés dans le Tableau 2.3. Le rail utilisé est de type UIC 60.

### 2.1.5 Modélisation des semelles sous rail

Pour une voie ferrée, la semelle sous rail en caoutchouc est utilisée quand le rail est attaché au béton. Elle réduit la fatigue sur la traverse en béton résultant de l'impact et des vibrations dus aux passages de trains. Pour modéliser ce composant de la voie, un modèle de ressort-amortisseur est utilisé [6, 110] avec une masse légère, qui donc peut être négligée et qui travaillent de manière indépendante.

Paramètre	Unité	Notation	Valeur
Module d'Young du rail	GPa	$E_r$	210
Moment d'inertie du rail (direction verticale)	$\text{m}^4$	$I_r^v$	$3 \times 10^{-5}$
Moment d'inertie du rail (direction latérale)	$\text{m}^4$	$I_r^l$	$5 \times 10^{-6}$
Masse volumique du rail	$\text{kgm}^{-3}$	$\rho_r$	7850
Section du rail	$\text{m}^2$	$S_r$	$7.69 \times 10^{-3}$
Écartement des rails	m	$2a$	1.435

TABLE 2.3 – Paramètres du rail

- Comportement d'une seule semelle sous rail : la loi de comportement est linéaire. Chaque semelle sous rail est caractérisée par une raideur  $k_{rp}^v$  avec un amortissement  $\zeta_{rp}^v$  suivant la direction verticale et une raideur  $k_{rp}^l$  avec un amortissement  $\zeta_{rp}^l$  suivant la direction latérale.
- Comportement de l'ensemble des semelles sous rail : lorsque les supports sont identiques, cela définit une voie homogène.

Dans le domaine fréquentiel, les deux efforts de réactions appliquées sur la traverse peuvent s'exprimer comme suit :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = -k_p^v \left[ \hat{w}_r^{[1]}(\omega) - \hat{w}_s^v(a, \omega) \right] \\ \hat{R}_2^v(\omega) = -k_p^v \left[ \hat{w}_r^{[2]}(\omega) - \hat{w}_s^v(-a, \omega) \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

où : la raideur dynamique suivant la direction verticale  $k_p^v$  de la semelle sous rail est calculée dans le domaine fréquentiel par  $k_p^v = k_{rp}^v + i\omega\zeta_{rp}^v$ . Les deux notations  $\hat{w}_s^v(a, \omega)$  et  $\hat{w}_s^v(-a, \omega)$  sont les déplacements verticaux de la traverse aux deux positions du rail en  $x = \pm a$ . En combinant l'équation (2.6) dans l'équation (2.4), nous pouvons en déduire l'expression des efforts de réactions en fonction des déplacements verticaux de la traverse  $\hat{w}_s^v(\pm a, \omega)$  :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = \frac{k_p^v \mathcal{K}^v}{k_p^v + \mathcal{K}^v} \hat{w}_s^v(a, \omega) + \frac{k_p^v}{k_p^v + \mathcal{K}^v} \mathcal{Q}_1(\omega) \\ \hat{R}_2^v(\omega) = \frac{k_p^v \mathcal{K}^v}{k_p^v + \mathcal{K}^v} \hat{w}_s^v(-a, \omega) + \frac{k_p^v}{k_p^v + \mathcal{K}^v} \mathcal{Q}_2(\omega) \end{cases} \quad (2.7)$$

De la même façon, nous pouvons déduire à partir de l'équation (2.5) les expressions des efforts de réaction latéraux en fonction des déplacement latéraux de la traverse  $\hat{w}_s^l(\pm a, \omega)$  et la raideur dynamique de la traverse suivant la direction latérale  $k_p^l = k_{rp}^l + i\omega\zeta_{rp}^l$  comme suit :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^l(\omega) = \frac{k_p^l \mathcal{K}^l}{k_p^l + \mathcal{K}^l} \hat{w}_s^l(a, \omega) + \frac{k_p^l}{k_p^l + \mathcal{K}^l} \mathcal{Y}_1(\omega) \\ \hat{R}_2^l(\omega) = \frac{k_p^l \mathcal{K}^l}{k_p^l + \mathcal{K}^l} \hat{w}_s^l(-a, \omega) + \frac{k_p^l}{k_p^l + \mathcal{K}^l} \mathcal{Y}_2(\omega) \end{cases} \quad (2.8)$$

Les comportements mécaniques de la semelle sous rail sont indiqués dans le Tableau 2.4 suivant deux directions : verticale et latérale. Les valeurs seront utilisées dans les applications numériques.

Les équations (2.7) et (2.8) décrivent une relation entre les forces de réaction appliquées sur la traverse et les chargements exercés par le matériel roulant sur les rails dans le

Paramètre	Unité	Notation	Valeur
Raideur de la semelle sous rail (direction verticale)	MNm <sup>-1</sup>	$k_{rp}^v$	192
Amortissement de la semelle sous rail (direction verticale)	MNsm <sup>-1</sup>	$\zeta_{rp}^v$	1.97
Raideur de la semelle sous rail (direction latérale)	MNm <sup>-1</sup>	$k_{rp}^l$	62
Amortissement de la semelle sous rail (direction latérale)	kNsm <sup>-1</sup>	$\zeta_{rp}^l$	30

TABLE 2.4 – Paramètres de la semelle sous rail

domaine fréquentiel. Cette relation ne dépend que des paramètres mécaniques du rail, de la semelle sous rail et des chargements. Les comportement mécaniques n'intervienne pas dans ces équations. Cette relation est donc applicable pour tous les types de support.

### 2.1.6 Choix du modèle

Le tableau 2.5 représente des choix de modèle pour chaque composant de la voie. Pour chaque combinaison des choix de composants, on peut avoir un modèle dynamique de la traverse en voie correspondant. Dans ce chapitre, des modèles analytiques sont développés pour une voie homogène et non-homogène. La traverse est soumise à deux chargements suivant deux directions : verticale et latérale.

Direction des chargements	Modèle de la traverse	Modèle de la fondation
Verticale	Poutre d'Euler-Bernoulli	Homogène
Latérale	Poutre de Timoshenko	Non-homogène

TABLE 2.5 – Les choix du modèle analytique d'une voie ferrée ballastée

## 2.2 Comportement mécanique d'une traverse soumise à des efforts verticaux

Cette section décrit le comportement dynamique d'une traverse soumise à des efforts verticaux. Dans ce cas, les roues appliquent sur le rail des forces verticales  $Q_j$ , et les forces de réactions appliquées sur la traverse sont  $R^v$  comme représentées sur la figure 2.4. Les forces appliquées verticalement sur la traverse peuvent s'écrire à l'aide de la distribution de Dirac :

$$F^v(x, t) = -R_1^v(t)\delta(x - a) - R_2^v(t)\delta(x + a) \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Modèle de la fondation homogène

La figure 2.5 représente le modèle dynamique de la traverse en voie soumise aux chargements verticaux. Ces chargements  $Q_1$  et  $Q_2$  s'appliquent sur les rails 1 et 2 respectivement aux deux positions  $x = \pm a$ . La traverse a une longueur  $2L$  ( $-L \leq x \leq L$ ). La semelle sous rail est modélisée par un système ressort-amortisseur avec la raideur verticale  $k_{rp}^v$  et l'amortissement vertical  $\zeta_{rp}^v$ . La fondation Kelvin-Voigt a une raideur verticale  $k_f^v$  et un amortissement vertical  $\zeta_f^v$ .

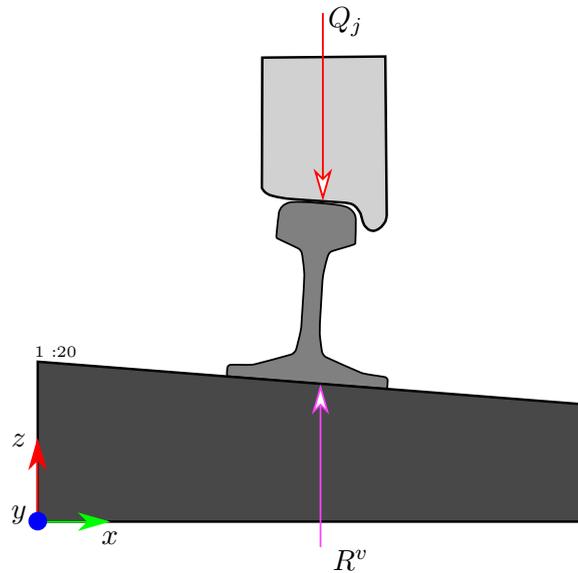


FIGURE 2.4 – Chargement vertical par les roues sur le rail

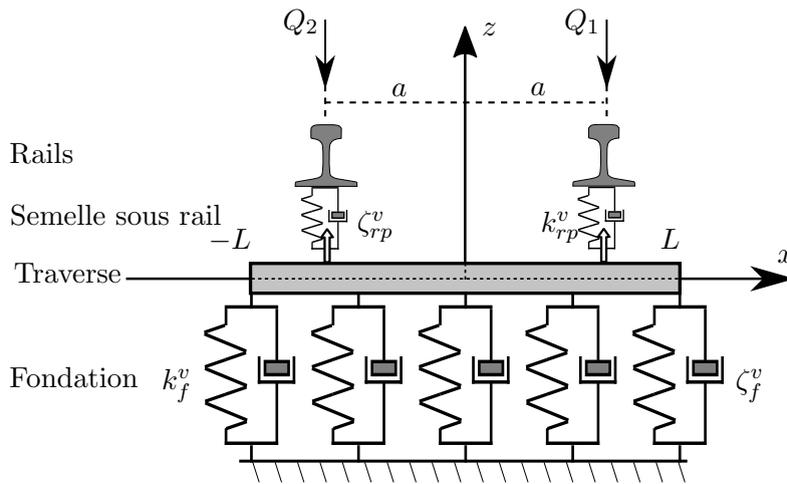


FIGURE 2.5 – Modèle dynamique de la traverse soumise aux chargements verticaux et posée sur une fondation homogène

Nous notons  $w_s^v(x, t)$  le déplacement vertical de la traverse dans le domaine temporel. Par la suite, nous écrivons l'équation dynamique de la traverse dans le cas libre-libre aux deux extrémités pour les deux cas du modèle de poutre.

### Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli

Dans la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli, la déformation en flexion d'une poutre est caractérisée par une seule variable qui est le déplacement vertical de l'axe neutre de la poutre. Lorsque la traverse est soumise à une force verticale  $F^v(x, t)$ , en quasi-statique, ce déplacement vérifie l'équation dynamique suivante :

$$E_s I_s \frac{\partial^4 w_s^v(x, t)}{\partial x^4} + \rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial x^2} + k_f^v w_s^v(x, t) + \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial t} = F^v \quad (2.10)$$

où :  $E_s$ ,  $I_s$ ,  $\rho_s$  et  $S_s$  sont le module d'Young, le moment d'inertie, la masse volumique et la section droite de la traverse respectivement.  $T$  représente la précontrainte de la traverse. Les deux paramètres  $k_f^v$  et  $\zeta_f^v$  sont la raideur et l'amortissement de la fondation suivant la direction verticale. La force appliquée  $F^v(x, t)$  sur la traverse est précisée dans l'équation (2.9). L'indice  $s$  dénote la traverse.

La traverse est en libre-libre aux deux extrémités, donc le moment et la force de cisaillement sont nuls. Les conditions aux limites de la poutre peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_s^v(-L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_s^v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w_s^v(-L, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_s^v(L, t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour résoudre l'équation (2.10) avec l'effort vertical présenté dans l'équation (2.9) et les conditions aux limites (2.11), nous allons utiliser la transformation de Fourier de ces équations par rapport à  $t$  et nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^4} - \xi_s^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} - \lambda_s^4 \hat{w}_s^v(x, \omega) = \left( \frac{-\hat{R}_1^v}{E_s I_s} \right) \delta(x - a) + \left( \frac{-\hat{R}_2^v}{E_s I_s} \right) \delta(x + a) \\ \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(-L, \omega)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(L, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \hat{w}_s^v(-L, \omega)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \hat{w}_s^v(L, \omega)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où :  $\hat{w}_s^v(x, \omega)$  est le déplacement de la traverse dans le domaine fréquentiel et  $\omega$  est la pulsation.  $\xi_s^2 = \frac{T}{E_s I_s}$  et  $\lambda_s^4 = \frac{\omega^2 \rho_s S_s - k_b^v}{E_s I_s}$ . La raideur dynamique de la fondation  $k_b^v$  est calculée par :  $k_b^v = k_f^v + i\omega \zeta_f^v$ .

L'équation (2.12) décrit la réponse de la traverse dans le domaine fréquentiel. La solution de l'équation (2.12) peut se calculer à l'aide de la fonction de Green  $G_a^E(x, \omega)$  qui est déterminée par l'équation différentielle linéaire d'ordre 4 :

$$\frac{\partial^4 G_a^E(x, \omega)}{\partial x^4} - \xi_s^2 \frac{\partial^2 G_a^E(x, \omega)}{\partial x^2} - \lambda_s^4 G_a^E(x, \omega) = \delta(x - a) \quad (2.13)$$

où  $a$  est un paramètre de la fonction de Green (ici, dans ce cas,  $a$  est l'abscisse de la poutre où la force est appliquée). La solution de la fonction de Green  $G_a^E(x, \omega)$  dans l'équation (2.13) est donnée par [55, 104] :

$$G_a^E(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + A_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + A_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [-L, a] \\ B_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + B_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + B_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + B_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (2.14)$$

Les coefficients de la fonction de Green dans l'équation (2.14) sont déterminés dans l'annexe B. Le déplacement dû à des efforts verticaux de la traverse dans le domaine fréquentiel peut s'exprimer à l'aide de la fonction de Green comme suit :

$$\hat{w}_s^v(x, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^E(x, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^E(x, \omega) \quad (2.15)$$

Le déplacement de la traverse aux deux positions des rails peut se calculer à l'aide de l'équation (2.15) :

$$\begin{cases} \hat{w}_s^v(a, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^E(a, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^E(a, \omega) \\ \hat{w}_s^v(-a, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^E(-a, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^E(-a, \omega) \end{cases} \quad (2.16)$$

En remplaçant les expressions du déplacement de la traverse de l'équation (2.16) dans l'équation (2.7), les forces de réactions peuvent se calculer en fonction de la fonction de Green et des paramètres de la voie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_E^v} [\mathcal{Q}_1 (G_{-a}^E(-a, \omega) + \chi_E^v) - \mathcal{Q}_2 G_{-a}^E(a, \omega)] \\ \hat{R}_2^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_E^v} [\mathcal{Q}_2 (G_a^E(a, \omega) + \chi_E^v) - \mathcal{Q}_1 G_a^E(-a, \omega)] \end{cases} \quad (2.17)$$

où :  $\chi_E^v = E_s I_s \frac{k_p^v + \mathcal{K}^v}{k_p^v \mathcal{K}^v}$  et  $\tilde{D}_E^v = [\chi_E^v + G_a^E(a, \omega)] [\chi_E^v + G_{-a}^E(-a, \omega)] - G_a^E(-a, \omega) G_{-a}^E(a, \omega)$ .

L'indice  $E$  dénote les paramètres du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. L'équation (2.17) nous permet de calculer les efforts de réaction appliqués verticalement sur la traverse dans le domaine fréquentiel. En remplaçant cette équation dans l'équation (2.15), nous pouvons obtenir le déplacement total de la traverse en voie  $\hat{w}_s^v(x, \omega)$ .

La déformation de la traverse dans le domaine fréquentiel peut se calculer à l'aide des équations (2.1), (2.15) et la transformation de Fourier :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = -z_s \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} = z_s \left( \frac{\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_a^E(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_{-a}^E(x, \omega)}{\partial x^2} \right) \quad (2.18)$$

La déformation de la traverse peut également s'exprimer d'une autre manière comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = z_s \left[ \hat{R}_1^v(\omega) \Psi_a^E(x, \omega) + \hat{R}_2^v(\omega) \Psi_{-a}^E(x, \omega) \right] \quad (2.19)$$

où les deux fonctions  $\Psi_a^E(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^E(x, \omega)$  sont définies par :

$$\begin{cases} \Psi_a^E(x, \omega) = \frac{1}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_a^E(x, \omega)}{\partial x^2} \\ \Psi_{-a}^E(x, \omega) = \frac{1}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_{-a}^E(x, \omega)}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.20)$$

Nous voyons que les deux fonctions  $\Psi_a^E(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^E(x, \omega)$  dépendent seulement des paramètres de la voie. Donc, sous cette expression, nous voulons montrer que la déformation de la traverse dépend de deux termes dont le premier représente les forces de réaction appliquées sur la traverse et le deuxième contient des paramètres de la voie.

Les équations (2.15) et (2.19) décrivent le déplacement et la déformation dynamiques de la traverse en voie sous des chargements verticaux du train dans le domaine fréquentiel en se basant sur le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. La transformation de Fourier inverse est utilisée pour obtenir ces réponses dans le domaine temporel.

La visualisation du déplacement et de la déformation de la traverse en 3D est présentée dans la figure 2.6. Cet exemple numérique est calculé avec une vitesse du chargement mobile :  $v = 150 \text{ kmh}^{-1}$ . Deux chargements verticaux  $Q_1, Q_2$  appliqués respectivement sur le rail 1 et rail 2 sont symétriques :  $Q_1 = Q_2 = 100 \text{ kN}$ . Les deux rails 1 et 2 sont colorés par des pointillés en rouge et bleu. La déformation de la traverse est prise à une distance  $z_s = -42 \times 10^{-3} \text{ m}$  par rapport à la fibre neutre. Cette valeur est la distance entre les capteurs sur la partie inférieure (R1I, CI et R2I) et la fibre neutre de la traverse "Smart Sleeper".

Nous voyons que la forme déformée et la déformation de la traverse sont symétriques. Le déplacement minimum se situe au centre de la traverse. Dans la partie inférieure de

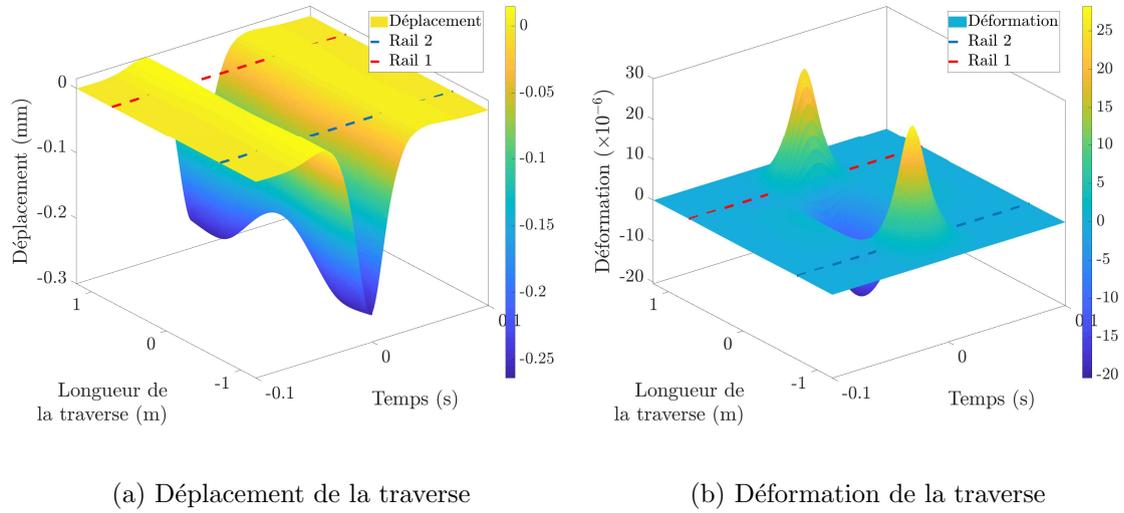


FIGURE 2.6 – Visualisation des réponses de la traverse avec le modèle d'Euler-Bernoulli

la fibre neutre, la poutre est en compression au centre (où la déformation est négative) et en traction aux deux positions du rail (où la déformation est positive). Les réponses dynamiques de la traverse calculées par le modèle d'Euler-Bernoulli seront interprétées dans la suite.

### Modèle de poutre de Timoshenko

Dans la théorie de poutre de Timoshenko, la rotation de la section droite d'une poutre par rapport à la fibre neutre est prise en compte. La déformation en flexion de la poutre est caractérisée par deux variables qui sont le déplacement vertical de la poutre  $w_s^v(x, t)$  et la rotation de la poutre  $\phi_s^v(x, t)$ . Sous l'action d'une force  $F^v(x, t)$ , une poutre de Timoshenko vérifie le système d'équations dynamiques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial t^2} = \kappa_s S_s G_s \left( \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_s^v}{\partial x} \right) + T \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial x^2} - k_f^v w_s^v - \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v}{\partial t} + F^v(x, t) \end{array} \right. \quad (2.21a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s I_s \frac{\partial^2 \phi_s^v}{\partial t^2} = E_s I_s \frac{\partial^2 \phi_s^v}{\partial x^2} + \kappa_s S_s G_s \left( \frac{\partial w_s^v}{\partial x} - \phi_s^v \right) \end{array} \right. \quad (2.21b)$$

où :  $E_s$ ,  $I_s$ ,  $\rho_s$ ,  $S_s$ ,  $G_s$  et  $\kappa_s$  sont respectivement le module d'Young, le moment d'inertie, la masse volumique, la section droite, le module de cisaillement et le facteur de cisaillement de la traverse.  $T$  représente la précontrainte de la poutre. Les deux paramètres  $k_f^v$  et  $\zeta_f^v$  sont la raideur et l'amortissement de la fondation. Pour résoudre l'équation (2.21), nous allons re-écrire ce système d'équations en une équation qui dépend d'une seule variable et puis nous la résoudrons dans le domaine fréquentiel. Le détail des calculs est montré dans l'annexe A. Après des transformations mathématiques, nous obtenons l'équation combinée

de l'équation (2.21) comme suit (voir équation (A.4)) :

$$\begin{aligned}
& E_s I_s \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^4 w_s^v}{\partial x^4} - \left( \frac{E_s I_s k_f^v + T \kappa_s S_s G_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial x^2} \\
& - \left( \frac{E_s I_s \zeta_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^3 w_s^v}{\partial t \partial x^2} + k_f^v w_s^v - \left( \frac{E_s I_s \rho_s S_s + \rho_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^4 w_s^v}{\partial t^2 \partial x^2} \\
& + \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v}{\partial t} + \left( \frac{\kappa_s \rho_s S_s^2 G_s + \rho_s I_s k_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial t^2} + \left( \frac{\rho_s I_s \zeta_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^3 w_s^v}{\partial t^3} \\
& + \left( \frac{\rho_s^2 I_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^4 w_s^v}{\partial t^4} = F^v - \left( \frac{E_s I_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 F^v}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho_s I_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 F^v}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

L'équation (2.22) est l'équation combinée dynamique de la poutre de Timoshenko. En utilisant la transformation de Fourier, l'équation dynamique de la poutre de Timoshenko peut s'exprimer dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$\frac{\partial^4 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^4} - \xi_s^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} - \lambda_s^4 \hat{w}_s^v(x, \omega) = k_1 \hat{F}^v(x, \omega) + k_2 \frac{\partial^2 \hat{F}^v(x, \omega)}{\partial x^2} \tag{2.23}$$

où :  $\hat{w}_s^v(x, \omega)$  est le déplacement de la poutre dans le domaine fréquentiel et  $\omega$  est la pulsation.  $\hat{F}^v(x, \omega)$  est la force appliquée sur la poutre dans le domaine fréquentiel. Les coefficients  $\xi_s$ ,  $\lambda_s$ ,  $k_1$  et  $k_2$  dans l'équation (2.23) sont détaillés et comparés avec le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli dans le tableau (2.6). Nous notons que la raideur dynamique de la fondation  $k_b^v$  est calculée par :  $k_b^v = k_f^v + i\omega\zeta_f^v$ .

Coef.	Euler-Bernoulli	Timoshenko
$\xi_s^2$	$\frac{T}{E_s I_s}$	$\frac{E_s I_s k_b^v + T \kappa_s S_s G_s - \omega^2 (E_s I_s \rho_s S_s + \rho_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T))}{E_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)}$
$\lambda_s^4$	$\frac{\rho_s S_s \omega^2 - k_b^v}{E_s I_s}$	$\frac{-\kappa_s S_s G_s k_b^v + \omega^2 (\kappa_s \rho_s S_s^2 G_s + \rho_s I_s k_f^v) + i\omega^3 \rho_s I_s \zeta_f^v - \omega^4 \rho_s^2 I_s S_s}{E_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)}$
$k_1$	$\frac{1}{E_s I_s}$	$\frac{\kappa_s S_s G_s - \omega^2 \rho_s I_s}{E_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)}$
$k_2$	0	$\frac{-1}{\kappa_s S_s G_s + T}$

TABLE 2.6 – Comparaison des coefficients dans deux modèles de poutre

D'après le Tableau 2.6, nous voyons que les deux modèles ne diffèrent que par les expressions des 4 coefficients de l'équation dynamique de la poutre en fréquence. Toutefois, si le module de cisaillement  $\kappa_s G_s$  était très grand et la vitesse du son  $\sqrt{\frac{E_s}{\rho_s}}$  tendaient vers l'infini, ces 4 coefficients des deux modèles donneraient la même formulation de la réponse dynamique du système. Ce phénomène est totalement cohérent avec la théorie des poutres classiques.

L'équation (2.22) décrit la réponse de la traverse de Timoshenko soumise à des efforts verticaux dans le domaine fréquentiel. La force totale appliquée sur la traverse  $\hat{F}^v(x, \omega)$  peut se calculer par la transformation de Fourier de l'équation (2.9). La solution de l'équation (2.22) peut se calculer à l'aide de la fonction de Green  $G_a^T(x, \omega)$  qui est déterminée par l'équation linéaire d'ordre 4 suivante :

$$\frac{\partial^4 G_a^T(x, \omega)}{\partial x^4} - \xi_s^2 \frac{\partial^2 G_a^T(x, \omega)}{\partial x^2} - \lambda_s^4 G_a^T(x, \omega) = k_1 \delta(x - a) + k_2 \frac{\partial^2 \delta(x - a)}{\partial x^2} \tag{2.24}$$

La solution de l'équation (2.24) est donnée par [73] :

$$G_a^T(x, \omega) = \bar{A}_1 \cosh(\lambda_1 x) + \bar{A}_2 \sinh(\lambda_1 x) + \bar{B}_1 \cos(\lambda_2 x) + \bar{B}_2 \sin(\lambda_2 x) + \bar{D}_a(x, \omega) \quad (2.25)$$

Le calcul de la fonction de Green  $G_a^T(x, \omega)$  est détaillé dans l'annexe B. Le déplacement de la traverse en voie dû à des efforts verticaux peut s'exprimer à l'aide de la fonction de Green comme suit :

$$\hat{w}_s^v(x, \omega) = -\hat{R}_1^v G_a^T(x, \omega) - \hat{R}_2^v G_{-a}^T(x, \omega) \quad (2.26)$$

Le déplacement de la traverse aux deux positions du rail est calculé à l'aide de l'équation (2.26) :

$$\begin{cases} \hat{w}_s^v(a, \omega) = -\hat{R}_1^v G_a^T(a, \omega) - \hat{R}_2^v G_{-a}^T(a, \omega) \\ \hat{w}_s^v(-a, \omega) = -\hat{R}_1^v G_a^T(-a, \omega) - \hat{R}_2^v G_{-a}^T(-a, \omega) \end{cases} \quad (2.27)$$

En remplaçant les expressions du déplacement de la traverse dans l'équation (2.27) dans l'équation (2.7), les forces de réactions peuvent se traduire en fonction de la fonction de Green et des paramètres de la voie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = \frac{1}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_T^v} [\mathcal{Q}_1 (\chi_T^v + G_{-a}^T(a, \omega)) - \mathcal{Q}_2 G_{-a}^T(a, \omega)] \\ \hat{R}_2^v(\omega) = \frac{1}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_T^v} [\mathcal{Q}_2 (\chi_T^v + G_a^T(-a, \omega)) - \mathcal{Q}_1 G_a^T(-a, \omega)] \end{cases} \quad (2.28)$$

où :  $\chi_T^v = \frac{k_p^v + \mathcal{K}^v}{k_p^v \mathcal{K}^v}$  et  $\tilde{D}_T^v = [(\chi_T^v + G_a^T(a, \omega))(\chi_T^v + G_{-a}^T(-a, \omega))] - G_a^T(-a, \omega)G_{-a}^T(a, \omega)$ .

L'indice  $T$  dénote les paramètres du modèle de poutre de Timoshenko. L'équation (2.28) nous permet de calculer les efforts de réaction appliqués verticalement sur la traverse dans le domaine fréquentiel. En remplaçant cette équation dans l'équation (2.26), nous obtenons le déplacement total de la traverse en voie.

La déformation d'une poutre de Timoshenko est calculée à l'aide de l'équation (2.2), et la transformation de Fourier (voir annexe A, équation (A.8)) :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = -z_s \left[ \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v}{\partial x^2} - \left( \frac{k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \hat{w}_s^v + \frac{\hat{F}^v(x, \omega)}{\kappa_s S_s G_s} \right] \quad (2.29)$$

En remplaçant les équations (2.9) et (2.26) dans l'équation (2.29), la déformation de la traverse peut s'exprimer d'une autre manière (voir Annexe A, équation (A.9)) :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = z_s \left[ \hat{R}_1^v(\omega) \Psi_a^T(x, \omega) + \hat{R}_2^v(\omega) \Psi_{-a}^T(x, \omega) \right] \quad (2.30)$$

où :

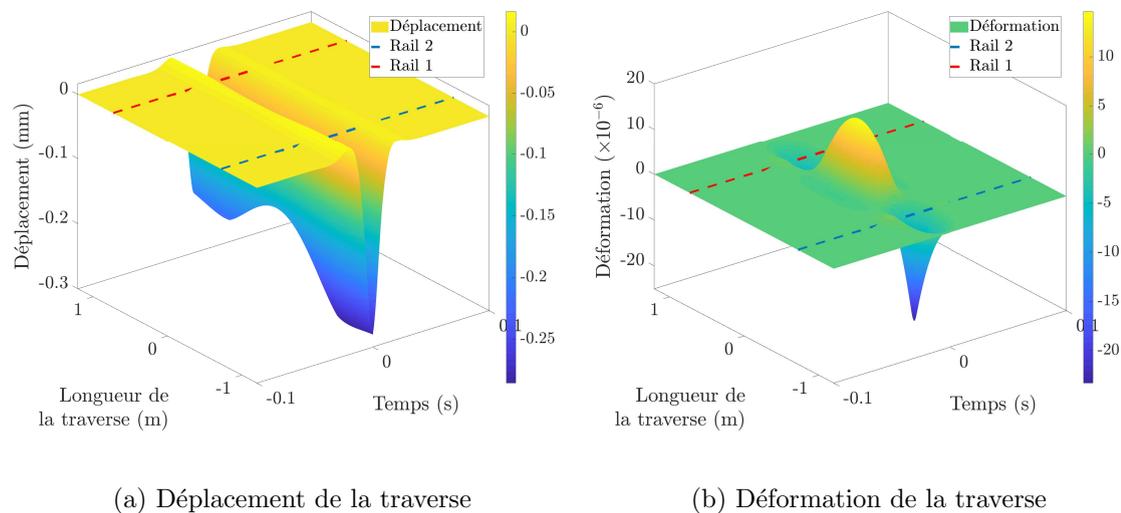
$$\begin{cases} \Psi_a^T(x, \omega) = \alpha^T \left( \frac{\partial^2 \bar{f}_a(x, \omega)}{\partial x^2} + H(x-a) \frac{\partial^2 \bar{g}_a(x, \omega)}{\partial x^2} \right) + \beta^T G_a^T(x, \omega) \\ \Psi_{-a}^T(x, \omega) = \alpha^T \left( \frac{\partial^2 \bar{f}_{-a}(x, \omega)}{\partial x^2} + H(x+a) \frac{\partial^2 \bar{g}_{-a}(x, \omega)}{\partial x^2} \right) + \beta^T G_{-a}^T(x, \omega) \end{cases} \quad (2.31)$$

avec :  $\alpha^T = \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s}$  et  $\beta^T = \frac{k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s}$ . Les 4 fonctions :  $\bar{f}_a(x, \omega)$ ,  $\bar{g}_a(x, \omega)$ ,  $\bar{f}_{-a}(x, \omega)$ ,  $\bar{g}_{-a}(x, \omega)$  sont définies dans Annexe A.

Les fonctions  $\Psi_a^T(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^T(x, \omega)$  ne dépendent pas du chargement, elles ne dépendent que des paramètres de la voie. Dans l'équation (2.30), nous arrivons à isoler les forces de réaction appliquées sur la traverse et les paramètres de la voie et cette expression est similaire à l'équation (2.19) qui décrit la déformation de la poutre d'Euler-Bernoulli.

Les équations (2.26) et (2.30) décrivent le déplacement et la déformation dynamiques de la traverse en voie sous des chargements verticaux du train dans le domaine fréquentiel en se basant sur le modèle de poutre de Timoshenko. La transformation de Fourier inverse est utilisée pour obtenir ces réponses dans le domaine temporel.

La figure 2.7 est la visualisation du déplacement et de la déformation de la traverse en 3D en prenant en compte le modèle de poutre de Timoshenko. Cet exemple numérique est calculé avec une vitesse de chargement mobile  $v = 300 \text{ kmh}^{-1}$ . Deux chargements verticaux  $Q_1$  et  $Q_2$  appliqués respectivement sur les rails 1 et 2 ne sont pas symétriques :  $Q_1 = 80 \text{ kN}$ ,  $Q_2 = 100 \text{ kN}$ . La figure 2.7b montre la déformation sur la partie supérieure de la traverse avec la distance à la fibre neutre  $z_s = 32.8 \times 10^{-3} \text{ m}$ .



(a) Déplacement de la traverse

(b) Déformation de la traverse

FIGURE 2.7 – Visualisation des réponses de la traverse avec le modèle de Timoshenko

Dans cette partie, la traverse est en traction au centre (où la déformation est positive) et en compression dans les zones situées sous les rails (où la déformation est négative). La forme déformée et la déformation ne sont pas symétriques à cause de la dissymétrie des chargements. Les réponses dynamiques de la traverse calculées par le modèle de Timoshenko seront interprétées dans la suite avec une comparaison avec le modèle d'Euler-Bernoulli.

### Influence du modèle de poutre

Les réponses dynamiques de la traverse posée sur une fondation homogène en prenant en compte la théorie de deux modèles de poutre sont détaillées dans les équations (2.15), (2.17), (2.19), (2.26), (2.28) et (2.30). Ces équations décrivent les forces de réaction au niveau des deux rails, les déplacement et déformation de la traverse dans le domaine fréquentiel. Dans un premier temps, nous allons comparer la déflexion et la déformation de la traverse dans deux cas de chargements symétrique et dissymétrique avec la vitesse des chargements mobiles  $v = 150 \text{ kmh}^{-1}$ . Dans les figures ci-dessous, la forme initiale de la traverse est présentée par une ligne noire continue. Les lignes continues verte et orange montrent respectivement le résultat du modèle d'Euler-Bernoulli et du modèle de

Timoshenko. Les deux rails sont colorés par les pointillés rouges et bleus.

- Déflexion de la traverse : La figure 2.8 montre la déflexion de la traverse soumise à des chargements symétriques (figure 2.8a) et dissymétriques (figure 2.8b).

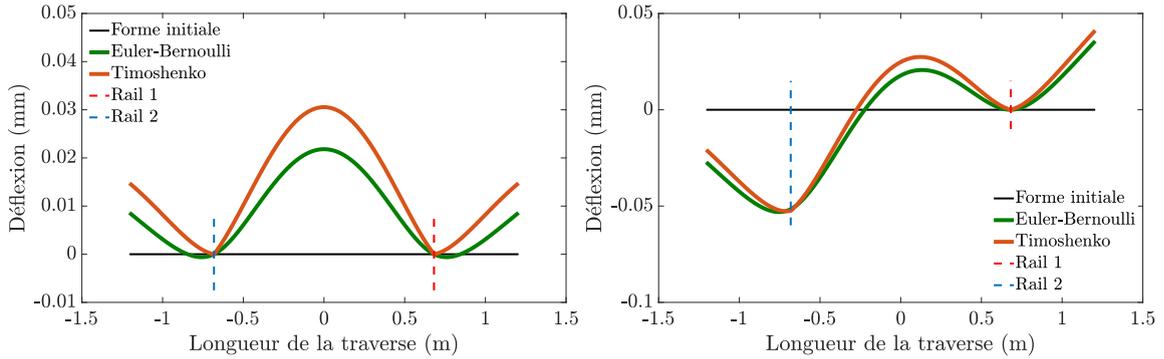
(a)  $Q_1 = Q_2 = 100$  kN(b)  $Q_1 = 80$  kN,  $Q_2 = 100$  kN

FIGURE 2.8 – Comparaison de la déflexion de la traverse dans deux cas de chargement

La forme déformée de la traverse est bien symétrique en cas d'égalité des deux chargements et elle est évidemment non symétrique dans le cas de dissymétrie des chargements. Avec les mêmes paramètres d'entrée pour les composants de la voie, la déflexion entre les deux rails de la traverse calculée par le modèle de Timoshenko donne une valeur un peu plus importante que celle obtenue à l'aide du modèle d'Euler-Bernoulli.

- Déformation de la traverse : La figure 2.9 présente la comparaison de la déformation de la traverse calculée avec les deux modèles de la poutre. La figure 2.9a montre la déformation calculée dans le cas de chargements symétriques  $Q_1 = Q_2 = 100$  kN et sur la partie inférieure de la traverse ( $z_s = -42 \times 10^{-3}$  m). Dans le cas de dissymétrie de chargements ( $Q_1 = 80$  kN,  $Q_2 = 100$  kN), la déformation sur la partie supérieure de la traverse est présentée dans la figure 2.9b avec  $z_s = 32.8 \times 10^{-3}$  m.

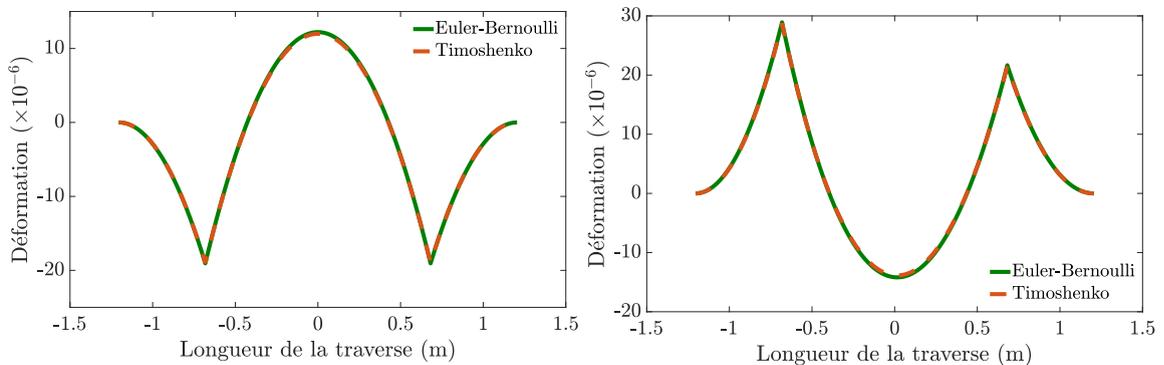
(a)  $Q_1 = Q_2 = 100$  kN(b)  $Q_1 = 80$  kN,  $Q_2 = 100$  kN

FIGURE 2.9 – Comparaison de la déformation de la traverse dans deux cas de chargement

Les déformations de la traverse calculées avec les deux modèles de poutres sont les mêmes. Au milieu de la traverse, le modèle de Timoshenko donne un résultat un peu plus petit que le modèle d'Euler-Bernoulli. La différence maximale calculée est 2.1%.

Dans la suite, une comparaison s'effectuera sur les trois grandeurs suivantes : les forces de réaction appliquées sur la traverse au niveau des rails, les déplacement et déformation de la traverse au niveau du rail. Les calculs sont réalisés pour deux vitesses de chargements mobiles différents : vitesse normale  $v = 150 \text{ kmh}^{-1}$  (en jaune) et vitesse élevée  $v = 300 \text{ kmh}^{-1}$  (en violet) avec des chargements dissymétriques :  $Q_1 = 80 \text{ kN}$ ,  $Q_2 = 100 \text{ kN}$ . Nous remarquons que les lignes continues et les cercles correspondent respectivement aux résultats du modèle d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. La déformation est calculée pour la partie inférieure de la poutre avec une distance  $z_s = -42 \times 10^{-3} \text{ m}$  par rapport à la fibre neutre de la traverse. Les résultats seront présentés dans les domaines fréquentiel et temporel.

- Les réponses dynamiques de la traverse en voie en fréquence : La figure 2.10 montre les forces de réactions appliquées sur les deux rails (figures 2.10a, 2.10d), le déplacement (figures 2.10b, 2.10e) et la déformation (figures 2.10c, 2.10f) de la traverse au niveau des deux rails dans le domaine fréquentiel. Vu que le rail 2 est soumis à une force plus grande que le rail 1, les réponses dynamique de la traverse sur le rail 2 sont évidemment plus grandes que celle sur le rail 1.

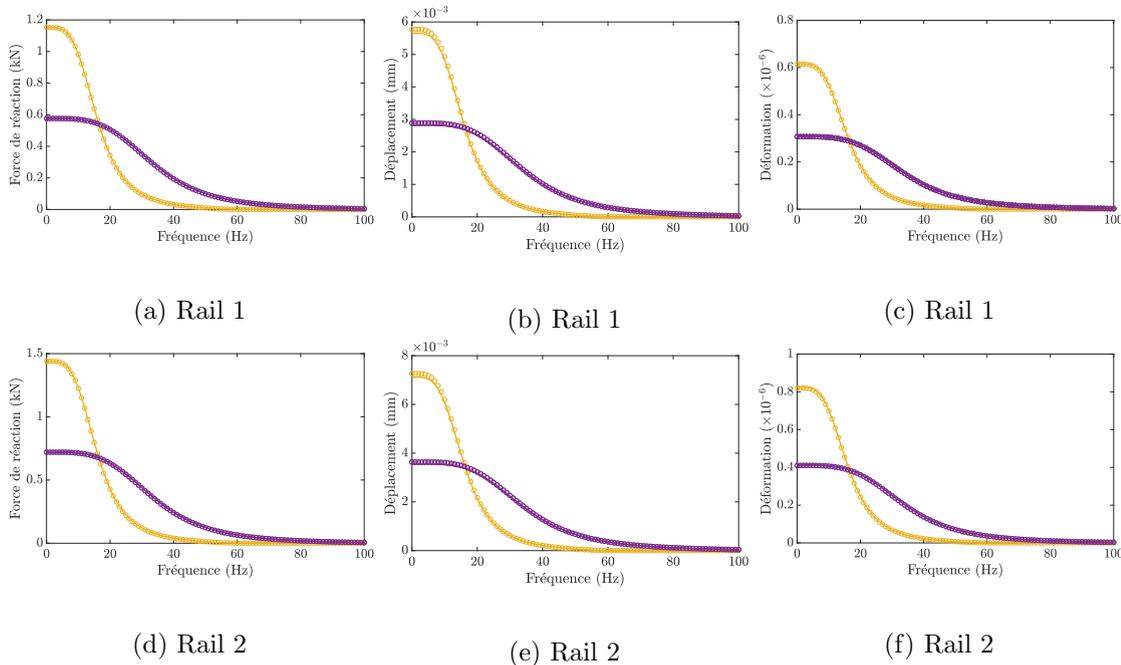


FIGURE 2.10 – Comparaison des réponses dynamiques de la traverse dans le domaine fréquentiel (les courbes jaunes et violettes correspondent respectivement aux exemples de vitesse normale et élevée)

Les réponses dynamiques de la traverse calculées à vitesse normale (en jaune) ont une amplitude plus grande que celle calculé à la vitesse élevée (en violet). Par contre, les réponses à une vitesse élevée ont une bande de fréquence plus large. Néanmoins, les deux modèles de poutre donnent des résultats similaires dans les deux cas de vitesse.

- Les réponses dynamiques de la traverse en voie en temps : En utilisant la transformation de Fourier inverse, les forces de réaction (figures 2.11a, 2.11d), le déplacement (figures 2.11b, 2.11e) de la traverse (figures 2.11c, 2.11f) et la déformation de la traverse au niveau des deux rails dans le domaine temporel sont montrés dans l'ensemble de la figure 2.11.

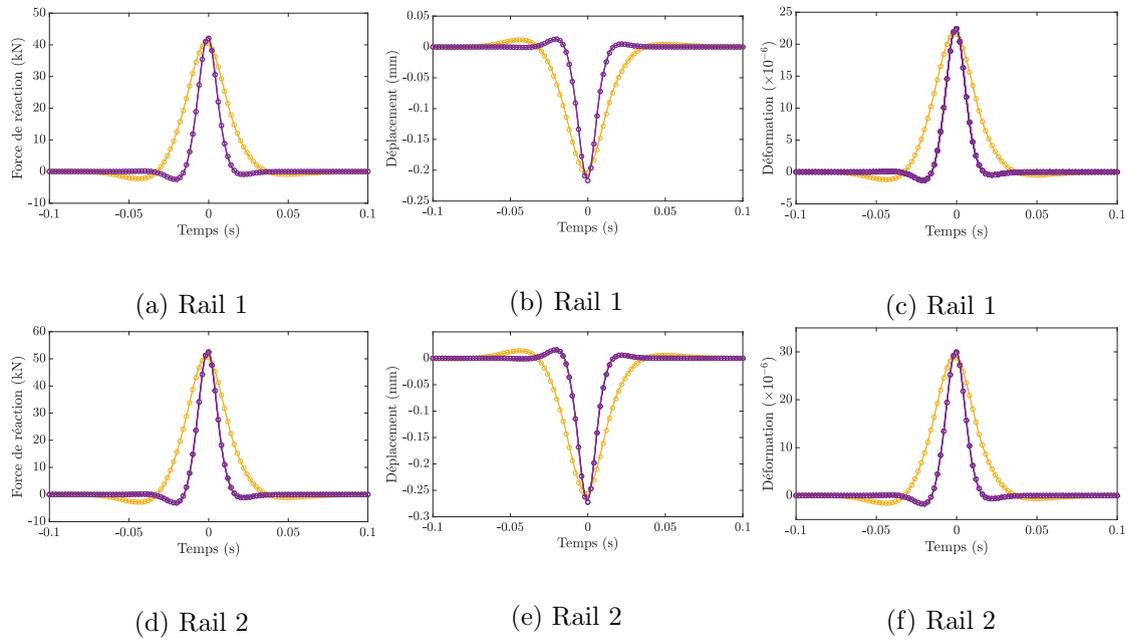


FIGURE 2.11 – Comparaison des réponses dynamiques de la traverse dans le domaine temporel (les courbes jaunes et violettes correspondent respectivement aux exemples de vitesse normale et élevée)

Les chargements de plus grande vitesse “chargent” la traverse en un temps plus court que les chargements de plus faible vitesse. Ce phénomène est montré par la pente des résultats calculés à la vitesse élevée (en violet) qui est plus grande. Pourtant, les deux modèles de poutre donnent des résultats similaires. Les différences des résultats sont indiquées dans le Tableau 2.7. Dans ce Tableau, les notations EB et TM correspondent respectivement aux résultats de poutre d’Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

	Réaction force (kN)				Déplacement (mm)				Déformation ( $\times 10^{-6}$ )			
	150 kmh $^{-1}$		300 kmh $^{-1}$		150 kmh $^{-1}$		300 kmh $^{-1}$		150 kmh $^{-1}$		300 kmh $^{-1}$	
	$R_1^v$	$R_2^v$	$R_1^v$	$R_2^v$	$\Delta l_1^v$	$\Delta l_2^v$	$\Delta l_1^v$	$\Delta l_2^v$	$\varepsilon_{xx_1}^v$	$\varepsilon_{xx_2}^v$	$\varepsilon_{xx_1}^v$	$\varepsilon_{xx_2}^v$
EB	40.76	50.89	42.43	52.97	-0.202	-0.254	-0.215	-0.270	-23.29	-31.04	-22.24	-32.33
TM	40.62	50.72	42.28	52.77	-0.205	-0.258	-0.218	-0.274	-23.15	-30.83	-24.10	-32.10
$\Delta(\%)$	0.343	0.334	0.354	0.378	1.485	1.575	1.395	1.481	0.601	0.677	0.588	0.711

TABLE 2.7 – Comparaison des réponses dynamiques de la traverse calculées avec deux modèles de poutre

Dans notre cas, le coefficient non-dimensionnel de cisaillement  $\Omega_s$  étant très petit devant 1 et étant donné la bande de fréquence considérée, nous obtenons des résultats identiques du modèle de poutre de Timoshenko et ceux du modèle d’Euler-Bernoulli (voir Tableau 2.7). Ce coefficient est calculé par :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{EI}{\kappa S G l^2} \\ &= 0.0015 \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.2.2 Modèle de la fondation non-homogène

Dans cette partie, un modèle dynamique de la traverse en voie est construit pour le cas de la non-homogénéité de la fondation. L'intérêt de cette partie est de pouvoir étudier la réponse de la traverse dans plusieurs cas de fondation, car en réalité, la fondation de la voie n'est pas homogène pendant toute sa vie. En effet, juste après le bourrage, la fondation est nouvellement bourrée et elle se compose de trois parties pouvant avoir trois caractéristiques mécaniques différentes. La partie de la fondation qui se situe au centre de la traverse est de densité plus faible. La traverse est donc considérée comme une poutre posée aux deux appuis. Au cours de son utilisation, cette partie va se "densifier". La fondation devient alors partiellement consolidée et puis, homogène. Ce modèle est présenté dans la figure 2.12 et nous étudions la réponse de la traverse sous application des chargements verticaux.

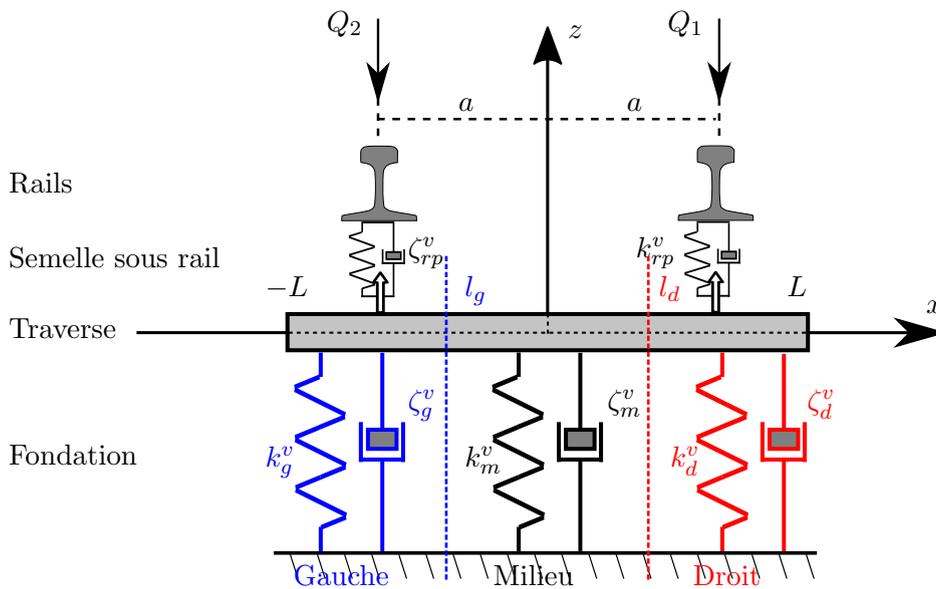


FIGURE 2.12 – Modèle dynamique de la traverse soumise aux chargements verticaux et posée sur une fondation non-homogène

Dans ce modèle, la fondation est divisée en trois zones (gauche, milieu et droit) :  $x \in [-L, l_g]$ ,  $x \in [l_g, l_d]$  et  $x \in [l_d, L]$ . Dans ce cas, nous prenons l'hypothèse que les deux rails se situent dans la zone à gauche et à droite de la fondation, ce qui veut dire que :  $-L < -a < l_g$  et  $l_d < a < L$ . En prenant le modèle de Kelvin-Voigt pour chaque zone de fondation, la raideur  $k_f^v$  et l'amortissement  $\zeta_f^v$  de la fondation s'écrivent :

$$k_f^v = \begin{cases} k_g^v & \text{pour } x \in [-L, l_g] \\ k_m^v & \text{pour } x \in [l_g, l_d] \\ k_d^v & \text{pour } x \in [l_d, L] \end{cases}, \quad \zeta_f^v = \begin{cases} \zeta_g^v & \text{pour } x \in [-L, l_g] \\ \zeta_m^v & \text{pour } x \in [l_g, l_d] \\ \zeta_d^v & \text{pour } x \in [l_d, L] \end{cases} \quad (2.33)$$

#### Formulations mathématiques du problème

Pour simplifier ce modèle, la traverse est modélisée comme une poutre d'Euler-Bernoulli avec une longueur  $2L$  (de  $-L$  à  $L$ ). L'équation dynamique de la poutre d'Euler-Bernoulli s'écrit en fonction du déplacement vertical de la traverse  $w_s^v(x, t)$ . En prenant la force verticale  $F^v(x, t)$  dans l'équation (2.9), le déplacement de la traverse vérifie l'équation :

$$E_s I_s \frac{\partial^4 w_s^v(x, t)}{\partial x^4} + \rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial x^2} + k_f^v w_s^v(x, t) + \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial t} = F^v \quad (2.34)$$

où :  $E_s$ ,  $I_s$ ,  $\rho_s$  et  $S_s$  sont le module d'Young, le moment d'inertie, la masse volumique et la section droite de la traverse respectivement.  $T$  représente la précontrainte de la traverse. Les deux paramètres  $k_f^v$  et  $\zeta_f^v$  sont la raideur et l'amortissement de la fondation et sont précisés dans l'équation (2.33). L'indice  $s$  dénote la traverse.

La traverse étant en conditions libre-libre aux deux extrémités, le moment et la force de cisaillement sont nuls. Les conditions aux limites de la poutre peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_s^v(-L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_s^v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w_s^v(-L, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_s^v(L, t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Pour résoudre l'équation (2.34) avec les efforts verticaux présentés dans l'équation (2.9) et les conditions aux limites (2.35), nous allons utiliser la transformation de Fourier de ces équations par rapport à  $t$  et nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^4} - \xi_s^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} - \lambda_s^4 \hat{w}_s^v(x, \omega) = \left( \frac{-\hat{R}_1^v}{E_s I_s} \right) \delta(x - a) + \left( \frac{-\hat{R}_2^v}{E_s I_s} \right) \delta(x + a) \\ \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(-L, \omega)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(L, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \hat{w}_s^v(-L, \omega)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \hat{w}_s^v(L, \omega)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

où :  $\hat{w}_s^v(x, \omega)$  est le déplacement de la traverse dans le domaine fréquentiel et  $\omega$  est la pulsation.  $\xi_s^2 = \frac{T}{E_s I_s}$  et  $\lambda_s^4 = \frac{\omega^2 \rho_s S_s - k_b^v}{E_s I_s}$ . La raideur dynamique de la fondation  $k_b^v$  est calculée par :

$$k_b^v = \begin{cases} k_g^v + i\omega \zeta_g^v & \text{pour } x \in [-L, l_g] \\ k_m^v + i\omega \zeta_m^v & \text{pour } x \in [l_g, l_d] \\ k_d^v + i\omega \zeta_d^v & \text{pour } x \in [l_d, L] \end{cases} \quad (2.37)$$

Alors,  $\lambda_s$  s'exprime avec trois expressions différentes correspondant aux trois zones de la fondation :

$$\lambda_s^4 = \begin{cases} \lambda_g^4 = \frac{\omega^2 \rho_s S_s - (k_g^v + i\omega \zeta_g^v)}{E_s I_s} & \text{pour } x \in [-L, l_g] \\ \lambda_m^4 = \frac{\omega^2 \rho_s S_s - (k_m^v + i\omega \zeta_m^v)}{E_s I_s} & \text{pour } x \in [l_g, l_d] \\ \lambda_d^4 = \frac{\omega^2 \rho_s S_s - (k_d^v + i\omega \zeta_d^v)}{E_s I_s} & \text{pour } x \in [l_d, L] \end{cases} \quad (2.38)$$

L'équation (2.36) décrit la réponse de la traverse en voie sous l'action des efforts verticaux dans le domaine fréquentiel. La solution est calculée à l'aide de la fonction de Green  $G_a^N(x, \omega)$  qui est déterminée par l'équation différentielle d'ordre 4 suivante :

$$\frac{\partial^4 G_a^N(x, \omega)}{\partial x^4} - \xi_s^2 \frac{\partial^2 G_a^N(x, \omega)}{\partial x^2} - \lambda_s^4 G_a^N(x, \omega) = \delta(x - a) \quad (2.39)$$

où :  $a$  est un paramètre de la fonction de Green (ici,  $a$  est l'abscisse sur la traverse où la force est appliquée). La solution de l'équation (2.39) est donnée par :

$$G_a^N(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + A_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + A_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [-L, l_g] \\ B_1(\omega)e^{\beta_1 x} + B_2(\omega)e^{\beta_2 x} + B_3(\omega)e^{\beta_3 x} + B_4(\omega)e^{\beta_4 x} & \text{pour } x \in [l_g, l_d] \\ C_1(\omega)e^{\gamma_1 x} + C_2(\omega)e^{\gamma_2 x} + C_3(\omega)e^{\gamma_3 x} + C_4(\omega)e^{\gamma_4 x} & \text{pour } x \in [l_d, a] \\ D_1(\omega)e^{\gamma_1 x} + D_2(\omega)e^{\gamma_2 x} + D_3(\omega)e^{\gamma_3 x} + D_4(\omega)e^{\gamma_4 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (2.40)$$

où : les coefficients  $A_i, B_i, C_i, D_i, \alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  sont les paramètres à déterminer. En utilisant les conditions aux limites pour une poutre libre-libre aux deux extrémités, les coefficients  $A_i(\omega), B_i(\omega), C_i(\omega)$  et  $D_i(\omega)$  peuvent être déterminés analytiquement ou numériquement (voir Annexe B).

Le déplacement du à des efforts verticaux de la traverse dans le domaine fréquentiel peut s'exprimer à l'aide de la fonction de Green comme suit :

$$\hat{w}_s^v(x, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^N(x, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^N(x, \omega) \quad (2.41)$$

Le déplacement de la traverse aux deux positions des rails peut se calculer à l'aide de l'équation (2.41) :

$$\begin{cases} \hat{w}_s^v(a, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^N(a, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^N(a, \omega) \\ \hat{w}_s^v(-a, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^N(-a, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^N(-a, \omega) \end{cases} \quad (2.42)$$

En remplaçant les expressions du déplacement de la traverse de l'équation (2.42) dans l'équation (2.7), les forces de réactions peuvent se calculer en fonction de la fonction de Green et des paramètres de la voie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_N^v} [\mathcal{Q}_1 (G_{-a}^N(-a, \omega) + \chi_N^v) - \mathcal{Q}_2 G_{-a}^N(a, \omega)] \\ \hat{R}_2^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_N^v} [\mathcal{Q}_2 (G_a^N(a, \omega) + \chi_N^v) - \mathcal{Q}_1 G_a^N(-a, \omega)] \end{cases} \quad (2.43)$$

où :  $\chi_N^v = E_s I_s \frac{k_p^v + \mathcal{K}^v}{k_p^v \mathcal{K}^v}$  et  $\tilde{D}_N^v = [\chi_N^v + G_a^N(a, \omega)] [\chi_N^v + G_{-a}^N(-a, \omega)] - G_a^N(-a, \omega) G_{-a}^N(a, \omega)$ .

L'indice  $N$  dénote les paramètres du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli posée sur une fondation non-homogène. L'équation (2.43) nous permet de calculer les efforts de réaction appliqués verticalement sur la traverse dans le domaine fréquentiel. En remplaçant cette équation dans l'équation (2.41), nous pouvons obtenir le déplacement total de la traverse en voie  $\hat{w}_s(x, \omega)$ .

La déformation de la traverse dans le domaine fréquentiel peut se calculer à l'aide de l'équation (2.1), (2.41) et la transformation de Fourier :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = -z_s \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} = z_s \left( \frac{\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_a^N(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_{-a}^N(x, \omega)}{\partial x^2} \right) \quad (2.44)$$

La déformation de la traverse peut également s'exprimer d'une autre façon comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = z_s \left[ \hat{R}_1^v(\omega) \Psi_a^N(x, \omega) + \hat{R}_2^v(\omega) \Psi_{-a}^N(x, \omega) \right] \quad (2.45)$$

avec les deux fonctions  $\Psi_a^N(x, \omega)$ ,  $\Psi_{-a}^N(x, \omega)$  définies par :

$$\begin{cases} \Psi_a^N(x, \omega) = \frac{1}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_a^N(x, \omega)}{\partial x^2} \\ \Psi_{-a}^N(x, \omega) = \frac{1}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_{-a}^N(x, \omega)}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.46)$$

Ces deux fonctions ne dépendent que des paramètres de la voie. Sous la forme de l'équation (2.45), la déformation de la traverse peut se calculer en fonction de deux termes qui sont les forces de réaction appliquées sur la traverse et les paramètres mécaniques des composants de la voie.

Les équations (2.41) et (2.44) décrivent le déplacement et la déformation dynamiques de la traverse en voie sous des chargements verticaux du train dans le domaine fréquentiel en se basant sur le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli en cas d'une fondation non-homogène. La transformation de Fourier inverse est utilisée pour obtenir ses réponses dans le domaine temporel.

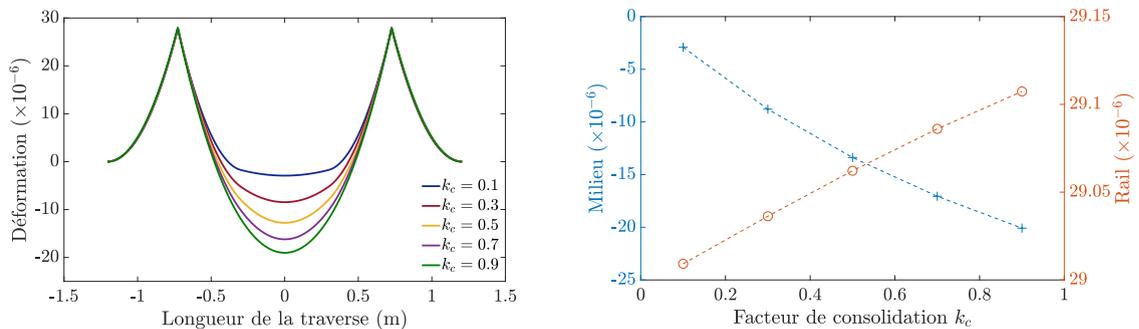
### Étude paramétrique sur la consolidation de la fondation

Dans cette partie, une étude paramétrique est effectuée afin d'étudier l'influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses dynamique de la traverse. Les chargements appliqués sur les rails sont symétriques :  $Q_1 = Q_2 = 100$  kN et se déplacent à une vitesse :  $150 \text{ kmh}^{-1}$ . La fondation est non-homogène symétrique :  $k_g^v = k_d^v$ , la raideur de la fondation au milieu varie en fonction du facteur de consolidation  $k_c$  :  $k_m^v = k_c k_g^v = k_c k_r^v$ . La partie au milieu a une largeur  $l_m = 0.76$  m (sur la figure 2.12, les valeurs sont  $l_g = -0.38$  m et  $l_d = 0.38$  m).

Le facteur de consolidation  $k_c$  varie entre 0 et 1 avec une convention :

- $k_c \ll 1$  : voie nouvellement bourrée
- $k_c \in [0, 1]$  : voie partiellement consolidée
- $k_c = 1$  : voie complètement consolidée (fondation homogène)

Les figures ci-dessous 2.13, 2.14 et 2.15 montrent les réponses dynamiques de la traverse en fonction du facteur de consolidation :  $k_c = 0.1$ ,  $k_c = 0.3$ ,  $k_c = 0.5$ ,  $k_c = 0.7$  et  $k_c = 0.9$ .



(a) Déformation de la traverse

(b) Évolution de la déformation

FIGURE 2.13 – Déformation de la traverse en fonction du facteur de consolidation  $k_c$

La figure 2.13 présente la déformation de la partie inférieure de la traverse. Dans le cas de symétrie des chargements et de fondation, la traverse se déforme aussi de façon

symétrique. Nous voyons bien que si  $k_c$  est petit (voie nouvellement bourrée ou partiellement consolidée), la partie au centre de la traverse ne travaillera pas. Précisément, la figure 2.13b montre l'évolution de la déformation au milieu (en bleu) et sous-rail (en rouge) de la traverse. Pour  $k_c = 0.1$ , la déformation au milieu de la traverse est presque nulle, ce qui est montré par la déflexion qui est presque constante dans la figure 2.14a. Plus la consolidation de la fondation est importante, plus la déformation au milieu de la traverse est grande. La déformation au milieu de la traverse varie de  $-2.91 \mu\text{def}$  à  $-20.88 \mu\text{def}$  (voir figure 2.13b). De la même façon, la déformation sous-rail augmente légèrement lors de l'augmentation de  $k_c$ . Elle varie de  $29.01 \mu\text{def}$  à  $29.11 \mu\text{def}$  (voir figure 2.13b). Toutefois, la variation de la déformation au milieu de la traverse est beaucoup plus grande que celle sous-rail.

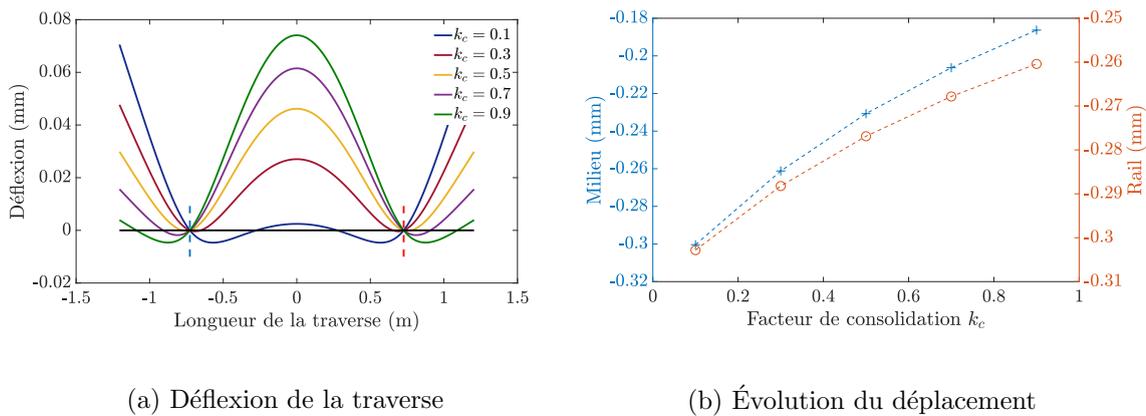
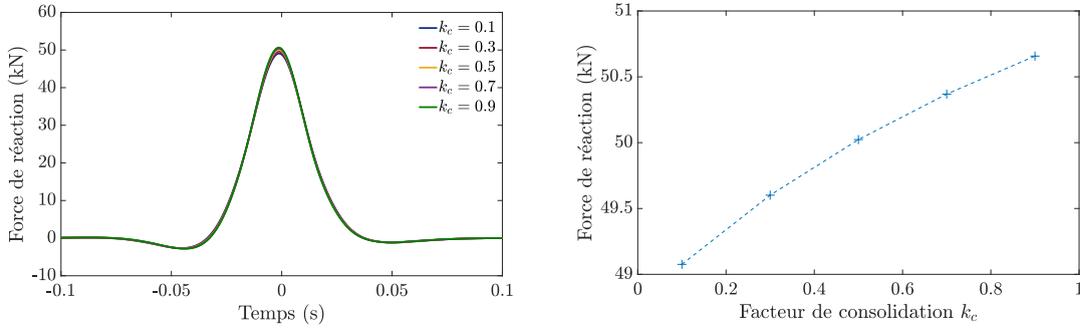


FIGURE 2.14 – Déplacement de la traverse en fonction du facteur de consolidation  $k_c$

La figure 2.14a présente la déflexion de la traverse en fonction du facteur de consolidation  $k_c$  et son évolution au centre de la traverse et à la position du rail (voir figure 2.14b). Si nous considérons que l'évolution de  $k_c$  représente également la consolidation de la fondation en temps, la figure 2.14a montre la déflexion de la traverse au cours du temps. Dans cette figure, la ligne noire est la forme non déformée de la traverse, la position des deux rails étant présentée par des pointillés rouges et bleus. Dans cette étude, la forme déformée de la traverse est aussi symétrique. Si la fondation n'est plus homogène, la déflexion au milieu de la traverse est de plus en plus grande. La figure 2.14b présente l'évolution du déplacement au milieu (en bleu) et sous-rail (en rouge) de la traverse. Lors de la densification de la partie centrale de la fondation, la fondation s'homogénéise et elle devient alors plus raide. Le déplacement de la traverse diminue et ce phénomène est bien montré par la diminution des déplacements de la traverse dans la figure 2.14b.

Les forces de réaction appliquées sur les deux rails sont les mêmes dans cette étude. La figure 2.15 montre les forces appliquées sur le rail en fonction du facteur  $k_c$ . L'évolution de la force de réaction est montrée dans la figure 2.15b. La traverse est soumise à des forces plus petites quant la voie est nouvellement bourrée. Ici, pour  $k_c = 0.1$ , la force appliquée sur la traverse est  $R^v = 49.14 \text{ kN}$ . D'autre part, pour une fondation presque homogène  $k_c = 0.9$ , la force de réaction est  $R^v = 50.13 \text{ kN}$ . Nous pouvons conclure que pour une voie usée, la traverse devrait travailler plus que pour une voie neuve.



(a) Force de réaction

(b) Évolution de la force de réaction

FIGURE 2.15 – Force de réaction en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ 

## 2.3 Comportement mécanique d'une traverse soumise à des efforts latéraux

Cette section présente un modèle dynamique d'une poutre soumise à des efforts latéraux. Dans ce cas, les roues appliquent sur le rail des forces latérales  $Y_j$ , et les forces de réaction appliquées sur la traverse sont  $R^l$  comme sur la figure 2.16. Les forces appliquées latéralement sur la traverse peuvent s'écrire à l'aide de la distribution de Dirac :

$$F^l(x, t) = R_1^l(t)\delta(x - a) + R_2^l(t)\delta(x + a) \quad (2.47)$$

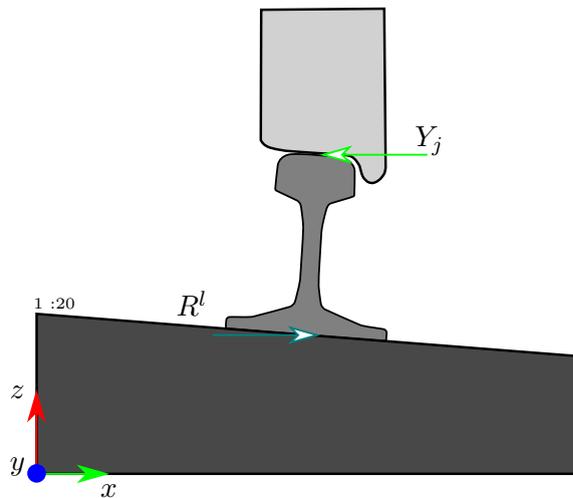


FIGURE 2.16 – Chargement latéral par les roues sur le rail

### 2.3.1 Modèle de poutre sous traction

La figure 2.17 représente le modèle dynamique de la traverse en voie soumise aux chargements latéraux. Ces chargements  $Y_1$  et  $Y_2$  s'appliquent sur les rails 1 et 2 respectivement aux deux positions  $x = \pm a$ . La traverse a une longueur  $2L$  ( $-L \leq x \leq L$ ). La semelle sous rail est modélisée par un système ressort-amortisseur avec la raideur latérale  $k_{rp}^l$  et

l'amortissement latéral  $\zeta_{rp}^l$ . La fondation de Kelvin-Voigt a une raideur latérale  $k_f^l$  et un amortissement latéral  $\zeta_f^l$ .

Nous notons  $w_s^l(x, t)$  le déplacement latéral de la traverse dans le domaine temporel. Par la suite, nous écrivons l'équation dynamique d'une poutre libre-libre aux deux extrémités sous traction/compression simple.

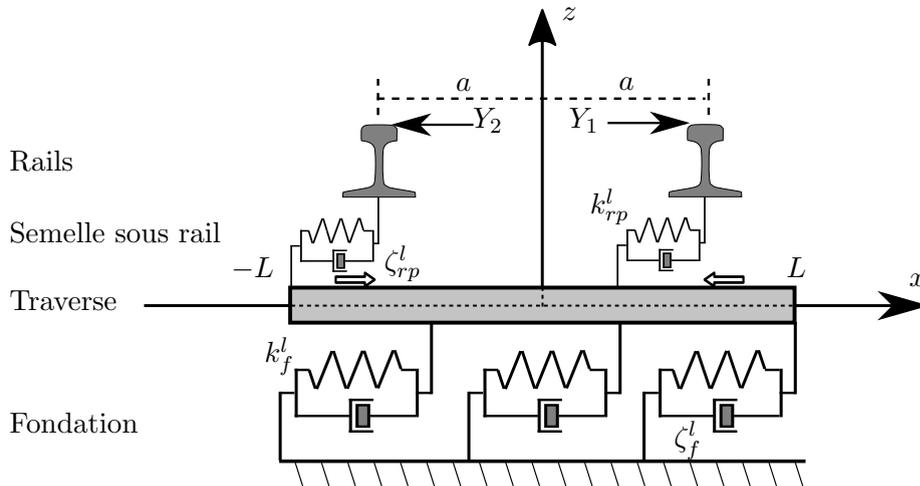


FIGURE 2.17 – Modèle dynamique de la traverse soumise aux chargements latéraux posée sur une fondation homogène

L'équation dynamique d'une poutre sous l'action d'une force  $F^l(x, t)$  s'écrit dans ce cas en fonction du déplacement latéral de la traverse  $w_s^l(x, t)$  et elle satisfait :

$$\rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^l(x, t)}{\partial t^2} - E_s S_s \frac{\partial^2 w_s^l(x, t)}{\partial x^2} + k_f^l w_s^l(x, t) + \zeta_f^l \frac{\partial w_s^l(x, t)}{\partial t} = F^l(x, t) \quad (2.48)$$

où :  $E_s$ ,  $S_s$  et  $\rho_s$  sont respectivement le module d'Young, la section droite et la masse volumique de la traverse. Les deux paramètres  $k_f^l$  et  $\zeta_f^l$  sont la raideur et l'amortissement de la fondation suivant la direction latérale. La force appliquée sur la traverse  $F^l(x, t)$  est précisée dans l'équation (2.47).

La traverse est en condition libre-libre à ses deux extrémités. Les conditions aux limites de la poutre peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_s^l(-L, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_s^l(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Pour obtenir la solution de l'équation (2.48) avec l'effort latéral présenté dans l'équation (2.47) et les conditions aux limites (2.49), nous allons utiliser la transformation de Fourier de ces équations par rapport à  $t$  afin de les résoudre dans le domaine fréquentiel. Ces équations peuvent se ré-écrire en fonction du déplacement de la traverse  $\hat{w}_s^l(x, \omega)$  comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{w}_s^l(x, \omega)}{\partial x^2} - \eta_s^2 \hat{w}_s^l(x, \omega) = \left( \frac{-\hat{R}_1^l}{E_s S_s} \right) \delta(x - a) + \left( \frac{-\hat{R}_2^l}{E_s S_s} \right) \delta(x + a) \\ \frac{\partial \hat{w}_s^l(L, \omega)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \hat{w}_s^l(-L, \omega)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

où :  $\hat{w}_s^l(x, \omega)$  est le déplacement latéral de la traverse dans le domaine fréquentiel et  $\omega$  est la vitesse angulaire.  $\eta_s^2 = \frac{k_b^l - \omega^2 \rho_s S_s}{E_s S_s}$ . La raideur dynamique de la fondation suivant la direction latérale  $k_b^l$  est calculée par :  $k_b^l = k_f^l + i\omega \zeta_f^l$ .

L'équation (2.50) décrit la réponse de la traverse soumise à des chargements latéraux dans le domaine fréquentiel. La solution de l'équation (2.50) peut se calculer à l'aide de la fonction de Green  $G_a^l(x, \omega)$  qui est déterminée par l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 G_a^l(x, \omega)}{\partial x^2} - \eta_s^2 G_a^l(x, \omega) = \delta(x - a) \quad (2.51)$$

où :  $a$  est un paramètre de la fonction de Green (ici,  $a$  est l'abscisse de la poutre où la force est appliquée). La solution de la fonction de Green  $G_a^l(x, \omega)$  dans l'équation (2.51) est donnée par :

$$G_a^l(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} & \text{pour } x \in [-L, a] \\ B_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + B_2(\omega)e^{\alpha_2 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (2.52)$$

Les coefficients de la fonction de Green dans l'équation (2.51) sont déterminés dans l'annexe B. Le déplacement du à des efforts latéraux de la traverse dans le domaine fréquentiel peut s'exprimer à l'aide de la fonction de Green comme suit :

$$\hat{w}_s^l = \frac{-\hat{R}_1^l(\omega)}{E_s S_s} G_a^l(x, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^l(\omega)}{E_s S_s} G_{-a}^l(x, \omega) \quad (2.53)$$

Le déplacement latéral de la traverse aux deux positions des rails peut se calculer à l'aide de l'équation (2.53) :

$$\begin{cases} \hat{w}_s^l(a, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^l}{E_s S_s} G_a^l(a, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^l}{E_s S_s} G_{-a}^l(a, \omega) \\ \hat{w}_s^l(-a, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^l}{E_s S_s} G_a^l(-a, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^l}{E_s S_s} G_{-a}^l(-a, \omega) \end{cases} \quad (2.54)$$

En remplaçant les expressions du déplacement latéral de la traverse dans l'équation (2.54) dans l'équation (2.8), les forces de réaction peuvent se calculer en fonction de la fonction de Green et des paramètres de la voie comme suit :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^l = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l \tilde{D}^l} \left[ \mathcal{Y}_1 \left( \chi^l + G_{-a}^l(-a, \omega) \right) - \mathcal{Y}_2 G_{-a}^l(a, \omega) \right] \\ \hat{R}_2^l = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l \tilde{D}^l} \left[ \mathcal{Y}_2 \left( \chi^l + G_a^l(a, \omega) \right) - \mathcal{Y}_1 G_a^l(-a, \omega) \right] \end{cases} \quad (2.55)$$

où :  $\chi^l = E_s S_s \left( \frac{k_p^l + \mathcal{K}^l}{k_p^l \mathcal{K}^l} \right)$  et  $\tilde{D}^l = [\chi^l + G_a^l(a, \omega)] [\chi^l + G_{-a}^l(-a, \omega)] - G_a^l(-a, \omega) G_{-a}^l(a, \omega)$ .

L'équation (2.55) nous permet de calculer l'effort de réaction appliqué latéralement sur la traverse dans le domaine fréquentiel. En remplaçant cette équation dans l'équation (2.53), nous pouvons obtenir le déplacement total de la traverse en voie  $\hat{w}_s^l(x, \omega)$ .

La déformation de la traverse dans le domaine fréquentiel peut se calculer à l'aide des équations (2.3) et (2.53) et de la transformation de Fourier :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^l(x, \omega) = \frac{\partial \hat{w}_s^l(x, \omega)}{\partial x} = \frac{-\hat{R}_1^l(\omega)}{E_s S_s} \frac{\partial G_a^l(x, \omega)}{\partial x} + \frac{-\hat{R}_2^l(\omega)}{E_s S_s} \frac{\partial G_{-a}^l(x, \omega)}{\partial x} \quad (2.56)$$

L'équation (2.56) peut s'exprimer d'une autre manière comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^l(x, \omega) = \hat{R}_1^l(\omega) \Psi_a^l(x, \omega) + \hat{R}_2^l(\omega) \Psi_{-a}^l(x, \omega) \quad (2.57)$$

Les deux fonctions  $\Psi_a^l(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^l(x, \omega)$  sont définies par :

$$\begin{cases} \Psi_a^l(x, \omega) = \frac{-1}{E_s S_s} \frac{\partial G_a^l(x, \omega)}{\partial x} \\ \Psi_{-a}^l(x, \omega) = \frac{-1}{E_s S_s} \frac{\partial G_{-a}^l(x, \omega)}{\partial x} \end{cases} \quad (2.58)$$

Ces deux fonctions ne dépendent que des paramètres mécaniques des composants de la voie. Sous cette expression, nous voyons que la déformation de la traverse peut se ré-écrire en fonction de deux termes dont le premier représente les forces de réaction appliquées sur la traverse et le deuxième contient des paramètres de la voie. D'ailleurs, dans la théorie de poutre en traction simple, la déformation est homogène sur une section droite. C'est la raison pour laquelle la distance par rapport à l'axe neutre n'intervient pas dans la formule de la déformation.

Les équations (2.53) et (2.57) décrivent le déplacement et la déformation de la traverse en voie sous des chargements latéraux du train dans le domaine fréquentiel. La transformation de Fourier inverse est utilisée pour obtenir ces réponses dans le domaine temporel.

### 2.3.2 Réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux

Dans cette application numérique, nous calculons les réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux :  $Y_1 = 8$  kN et  $Y_2 = -8$  kN. Les deux efforts s'appliquent sur les rails suivant deux directions différentes ( $Y_1$  vers la gauche et  $Y_2$  vers la droite). Les deux forces sont censées mettre la traverse en extension aux deux points d'application. La vitesse du chargement est :  $v = 150$  kmh<sup>-1</sup>. Les autres paramètres de la voie sont indiqués dans les tableaux précédents (2.1, 2.2, 2.3 et 2.4). En utilisant la transformation de Fourier inverse, la figure 2.18 montre les réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux. La figure 2.18a montre que le déplacement est nul au centre de la traverse. D'ailleurs, dans la partie comprise entre chaque extrémité de la traverse et le rail le plus proche, le déplacement de la traverse est constant. Ces résultats sont logiques puisqu'elle est en traction sous l'effet de deux efforts symétriques appliqués de façon symétrique par rapport au centre de la traverse.

Les forces de réactions appliquées sur la traverse sont :  $R_1^l = 5.15$  kN et  $R_2^l = -5.15$  kN. Les résultats sont bien montrés dans la figure 2.18c. Le signe “-” traduit le fait que les deux forces latérales ne sont pas dans la même direction, ce qui traduit le fait que la traverse est mise en extension. Ceci est confirmé par la valeur de la déformation constante dans la partie comprise entre les rails. Entre le rail et le bord de la traverse, la déformation est nulle (voir figures 2.18b et 2.18d).

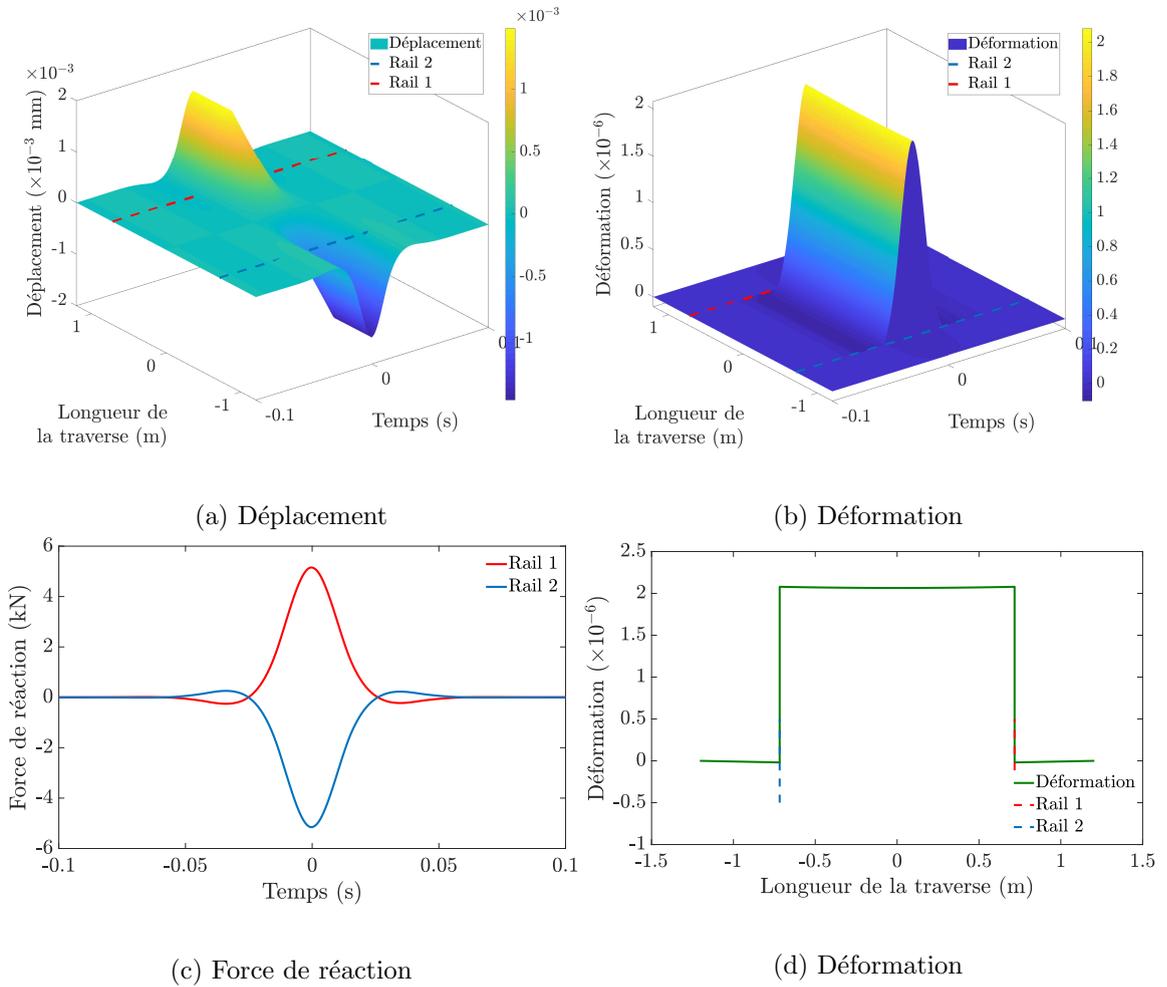


FIGURE 2.18 – Réponses dynamiques de la traverse soumise à des efforts latéraux

### 2.3.3 Influence des efforts latéraux sur la réponse totale de la traverse

Grâce au modèle dynamique de la traverse soumise à des efforts latéraux, nous étudions l'influence de ces efforts sur la déformation totale de la traverse en voie. Les calculs sont effectués sous condition de symétrie des efforts verticaux. La déformation de la traverse due à des efforts latéraux est calculée avec le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli posée sur une fondation homogène. En variant les efforts latéraux, l'influence sur la déformation est montrée dans le Tableau 2.8. L'influence est calculée par :

$$\Delta_{\varepsilon}(\%) = \left( \frac{\varepsilon_{xx}^l}{\varepsilon_{xx}^l + \varepsilon_{xx}^v} \right) \times 100 \quad (2.59)$$

Dans ce tableau, nous avons calculé le ratio de Nadal [25, 33, 109] indiquant le risque de déraillement du train. Dans le cas où deux forces latérales sont dans la même direction, l'influence de ces efforts sur la déformation est de l'ordre de 2%. Plus le ratio de Nadal est grand, plus l'influence sur la déformation totale est importante. L'influence est plus grande lorsque les deux forces latérales ne sont pas dans la même direction. Spécifiquement, dans cette configuration, la déformation au centre de la traverse est la plus influencée.

Chargements			Ratio de Nadal		Influence ( $\Delta_\varepsilon\%$ )		
$Q$ (kN)	$Y_1$ (kN)	$Y_2$ (kN)	$ Y_1/Q $	$ Y_2/Q $	Rail 1	Au centre	Rail 2
75	10	8	0.133	0.107	1.68	2.08	0.97
100	10	8	0.100	0.080	1.27	1.55	0.73
125	10	8	0.080	0.064	1.01	1.24	0.58
100	10	-8	0.100	0.080	2.56	15.90	2.37
100	8	-8	0.080	0.080	2.20	13.87	2.20
100	6	-8	0.060	0.080	1.82	11.95	2.04

TABLE 2.8 – Influence des efforts latéraux sur la déformation totale de la traverse

## 2.4 Application à la voie Creil

### 2.4.1 Paramètres du modèle dynamique

En utilisant le modèle dynamique de la traverse en voie, nous allons simuler un passage de train et comparer les résultats analytiques avec des mesures *in situ*. Pour ce faire, les paramètres mécaniques de la voie sont détaillés dans les tableaux précédents (2.1, 2.2, 2.3 et 2.4). Le diagramme d'un train est présenté dans la figure 2.19 où  $n_1$ ,  $n_2$  sont respectivement le premier et second wagon.

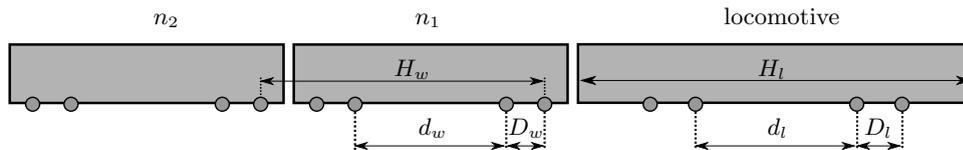


FIGURE 2.19 – Diagramme d'un train avec les paramètres géométriques

Les autres paramètres géométriques du train sont indiqués dans le Tableau 2.9. Ces paramètres sont cohérents avec les matériels roulants utilisés par la SNCF.

Contenu	Unité	Notation	Valeur
Longueur de la locomotive	m	$H_l$	19
Distance entre deux roues d'un bogie de la locomotive	m	$D_l$	3.2
Distance entre deux inter-roues de la locomotive	m	$d_l$	10
Longueur du wagon	m	$H_w$	15.5
Distance entre deux roues d'un bogie du wagon	m	$D_w$	2.2
Distance entre deux inter-roues du wagon	m	$d_w$	9.7
Chargement par roue	kN	$Q$	125
Nombre de wagons		$n_w$	20

TABLE 2.9 – Paramètres des chargements périodiques

### 2.4.2 Comparaison mesure et modèle

Un train de type Corail a été choisi pour cette comparaison. Ce train contient 20 wagons et 1 locomotive. Les mesures *in situ* ont été prises le 11 Janvier 2017. La vitesse du train calculée est  $154 \text{ kmh}^{-1}$  et cette valeur sera implémentée dans le modèle dynamique. Le pas

de temps mesuré est 0.001 s. En prenant les paramètres de la voie ci-dessus, la comparaison des réponses de la traverse s'effectuera dans les domaines fréquentiel et temporel aux trois positions : au dessous du rail inférieur (figure 2.20a : Capteur R1I - en vert), au dessous du rail supérieur (figure 2.20b : Capteur R1S - en rouge) et au centre de la traverse supérieure (figure 2.20c : Capteur CS - en noir).

- Comparaison dans le domaine fréquentiel : La figure 2.20 montre la comparaison de la déformation de la traverse entre les mesures *in situ* et le modèle aux 3 positions dans le domaine fréquentiel. Nous voyons que les résultats du modèle sont cohérents avec les spectres des signaux.

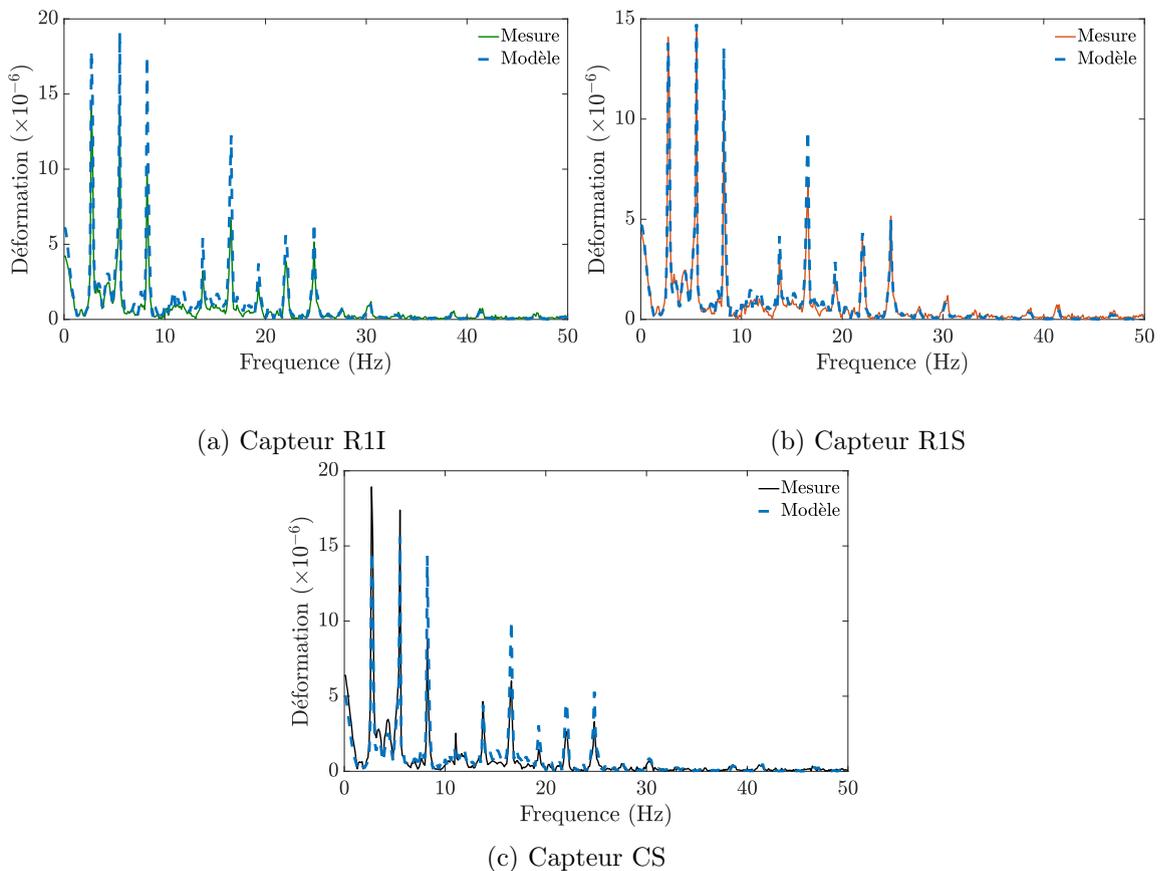
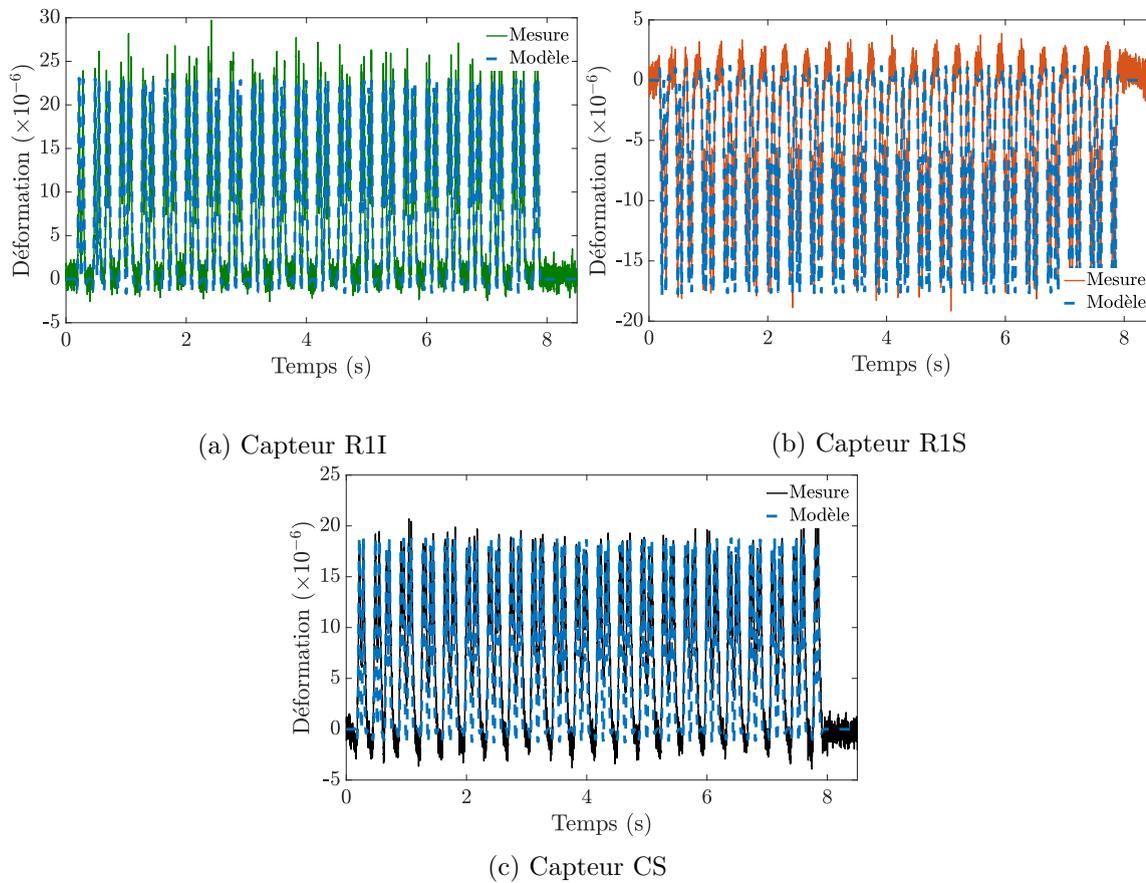


FIGURE 2.20 – Comparaison modèles et mesures *in situ* en fréquence

- Comparaison dans le domaine temporel : Avec les mêmes paramètres géométriques et du train d'entrée, le modèle dynamique de la traverse en voie est capable de simuler tous les signaux lors du passage du train. La figure 2.21 présente la superposition des signaux mesurés *in situ* avec les résultats analytiques aux 3 positions. La déformation du capteur au dessous du rail inférieur est positive donc ce capteur est en traction (figure 2.21a). Au contraire, sur la même position mais sur la partie supérieure, le capteur au dessous du rail supérieur est en compression ce qui est montré par la déformation négative (figure 2.21b). Au centre de la traverse supérieure, le capteur est en traction avec une déformation positive (figure 2.21c). Ces mesures sont cohérentes avec les modèles analytiques d'une traverse posée sur une fondation homogène. La figure 2.22 présente une comparaison lors du passage d'un bogie de ce train aux 3 positions.

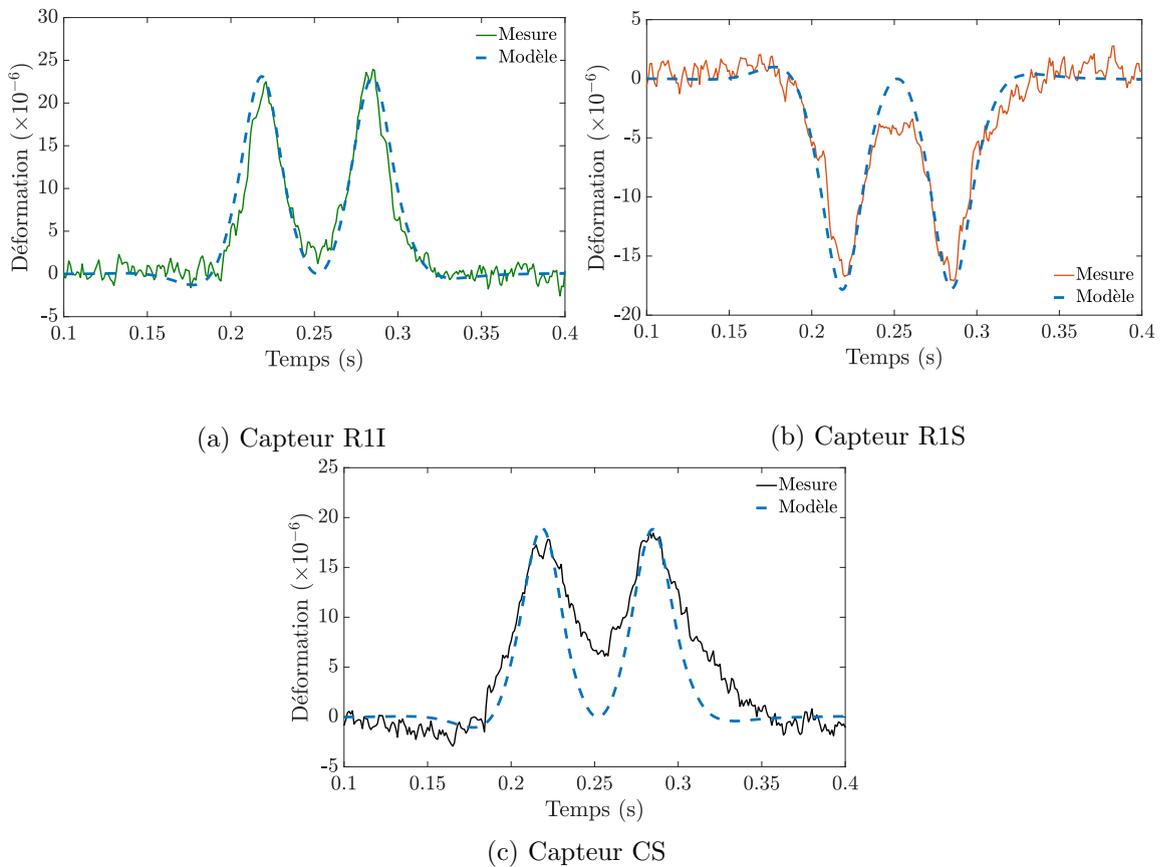
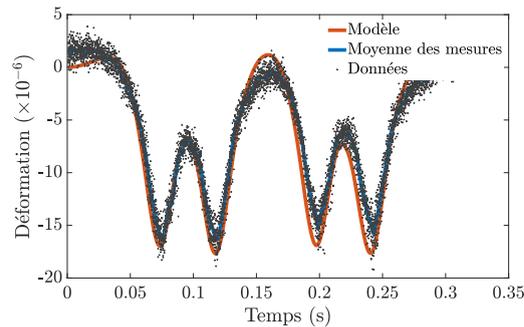
FIGURE 2.21 – Comparaison modèles et mesures *in situ* en temps

Nous voyons que les modèles sont en très bonne adéquation avec les mesures. La figure 2.23 montre la comparaison entre les mesures *in situ* et le modèle. Les croix noires sont la superposition de passages des bogies du train. La ligne bleue est la moyenne des mesures *in situ*. La ligne rouge est le résultat au passage d'un bogie du modèle analytique. L'erreur relative entre les mesures et le modèle au point de déformation maximale est  $\varepsilon = 0.84\%$  avec un écart-type  $\sigma = 1.36 \times 10^{-7}$ .

Le fait que l'écart-type calculé soit petit dans une période nous montre que le résultat du modèle analytique se trouve être très proche de la valeur moyenne des mesures *in situ*.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé des modèles dynamiques de la traverse en voie ferrée ballastée soumise à des chargements mobiles dans deux directions : verticale et latérale. La configuration globale de ces modèles repose sur un modèle de poutre de section uniforme posée sur une fondation de Kelvin-Voigt. L'équation dynamique de la poutre peut s'écrire à l'aide de la fonction de Dirac en quasi-statique. La méthode pour résoudre ce problème consiste à calculer la fonction de Green et à coupler avec le modèle de poutre périodiquement supportée. Deux approches nous permettent d'avoir deux relations entre la force de réaction appliquée sur la poutre et le déplacement de la poutre au point d'application de la force. Les réponses dynamiques de la poutre peuvent s'obtenir

FIGURE 2.22 – Comparaison modèles et mesures *in situ* au passage d'un bogieFIGURE 2.23 – Comparaison modèles et mesures *in situ* au passage d'un bogie

analytiquement dans le domaine fréquentiel.

Pour une poutre soumise à des efforts verticaux, deux modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko donnent des résultats très peu différents puisque la traverse a des dimensions assez limitées pour l'application du modèle de Timoshenko ( $l/h \approx 10$ ). De plus, les comportements mécaniques de la traverse donnent le coefficient non-dimensionnel de cisaillement  $\Omega_s$  très petit devant 1. Cette étude a démontré que le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli est capable de décrire les réponses de la traverse en voie. Ensuite, un modèle de la traverse posée sur une fondation non-homogène a été développé pour étudier le cas où la fondation est partiellement consolidée. Le facteur de consolidation de la fondation  $k_c$  est introduit. Une relation entre la déformation au centre de la traverse et ce facteur a

montré que plus la consolidation de la fondation est grande, plus la déformation au centre de la traverse est importante.

En réalité, le roue applique sur le rail une force suivant deux directions : verticale et latérale. C'est la raison pour laquelle un modèle de poutre soumise à des efforts latéraux a été développé pour étudier l'influence de ces efforts sur la réponse totale d'une poutre. Les études paramétriques montrent que l'influence est petite lorsque deux forces sont appliquées dans la même direction et elle est un peu plus grande quand les deux forces sont opposées.

Les modèles sont capables de simuler un passage de train. Une comparaison entre le modèle et les mesures *in situ* a montré que les réponses analytiques sont en très bonne adéquation avec des mesures *in situ*. Les mesures sont prises grâce à des capteurs fibres optiques d'une traverse instrumentée de SATEBA. Désormais, nous avons établi des modèles analytiques qui nous permettent de calculer rapidement les réponses de la traverse en voie pour étudier son comportement dynamique dans une voie ferrée ballastée. Dans le chapitre suivant, nous allons effectuer des essais sur la traverse pour mieux comprendre son comportement mécanique.

# Chapitre 3

## Essais mécaniques sur la traverse

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Mesure de la réponse vibratoire d'une traverse</b>	<b>68</b>
3.2.1	Matériels et dispositifs de mesure	68
3.2.2	Enregistrement et traitement des signaux	69
3.2.3	Résultat de mesure de la réponse vibratoire d'une traverse	71
<b>3.3</b>	<b>Essai de flexion 3 points d'une traverse</b>	<b>71</b>
3.3.1	Matériels et dispositifs de mesure	71
3.3.2	Enregistrement et traitement des signaux	74
<b>3.4</b>	<b>Essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique</b>	<b>75</b>
3.4.1	Matériels et dispositifs de mesure	75
3.4.2	Résultat des mesures	78
<b>3.5</b>	<b>Essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast</b>	<b>80</b>
3.5.1	Matériels et dispositifs de mesure	80
3.5.2	Résultat des mesures	81
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des essais mécaniques sur la traverse instrumentée M450. L'objectif de ces essais est de re-simuler les conditions d'une traverse en voie et de mieux comprendre sa façon de travailler dans des configurations différentes. Les chargements appliqués sur la traverse sont statiques et nous nous intéressons au profil de déformation sur le long de la traverse.

Dans ce chapitre, nous allons aborder quatre essais mécaniques essentiels. Le premier a fait l'objet de mesures des fréquences propres d'une traverse libre afin de déterminer ses modes propres. Le deuxième est essai de flexion 3 points appliqué à une traverse. Les deux derniers sont des essais de flexion appliqués à une traverse posée sur un tapis élastique (fondation non-homogène) et posée dans une caisse de ballast (fondation homogène).

Les mesures de ces essais servent aussi à vérifier le bon fonctionnement des capteurs FBG. Les résultats sont traités pour valider les modèles numériques de la traverse en utilisant des éléments finis que nous allons présenter dans le chapitre 4.

Ces essais ont été réalisés au sein du centre d'essais de la société SATEBA à Chalon-sur-Saône les 11 et 12 Février 2019.

### 3.2 Mesure de la réponse vibratoire d'une traverse

#### 3.2.1 Matériels et dispositifs de mesure

##### Matériels

Pour mesurer les réponses vibratoires d'une structure, nous avons besoin des matériels suivants : un capteur, un excitateur et un analyseur.

- Le capteur permet d'enregistrer une quantité dynamique (le déplacement, la vitesse ou l'accélération) en signal analogique ou numérique. Dans cet essai, nous avons utilisé les accéléromètres (mesure de l'accélération) uni-axiaux BK-4507 (voir figure 3.1).
- L'excitateur qui est un objet solide (un marteau d'impact, une barre, etc.) permet de générer une vibration de la structure. L'important est la fréquence de la force d'excitation et il faut que la forme de la force exercée soit similaire à la distribution de Dirac. Pour ce faire, un marteau d'impact de type BK-8202 est utilisé dans cet essai. Ce capteur est capable d'enregistrer les réponses dynamiques jusqu'à 22 kHz (voir figure 3.1).



FIGURE 3.1 – Matériels utilisés pour la mesure de la réponse vibratoire

- L'analyseur (ou boîte d'acquisition) est un système informatique permettant de recevoir et d'analyser les signaux en provenance du capteur. Un logiciel qui est développé par le laboratoire Navier (l'École des Ponts ParisTech - ENPC) sur la plate-forme LabView est utilisé. Pour cela, ce logiciel est capable de visualiser les signaux dans les domaines temporel, fréquentiel et de les enregistrer.

### Dispositif de mesure

La traverse est posée sur un tapis élastique. Les rails et semelles sous rails sont posés au-dessus de la traverse aux positions du rail et sont fixés par des systèmes d'attache.

Trois accéléromètres sont collés directement sur la traverse à différentes positions (au milieu, en dessous des rails). Les mesures sont faites dans les 3 directions dans lesquelles les accéléromètres sont posés (et aussi la direction d'excitation de la force) : verticale, transversale et horizontale. La figure 3.2 présente le dispositif de mesure suivant la direction horizontale. Les accéléromètres sont entourés par les cercles bleus et numérotés de 1 à 3 dans l'ordre de gauche à droite sur la figure.

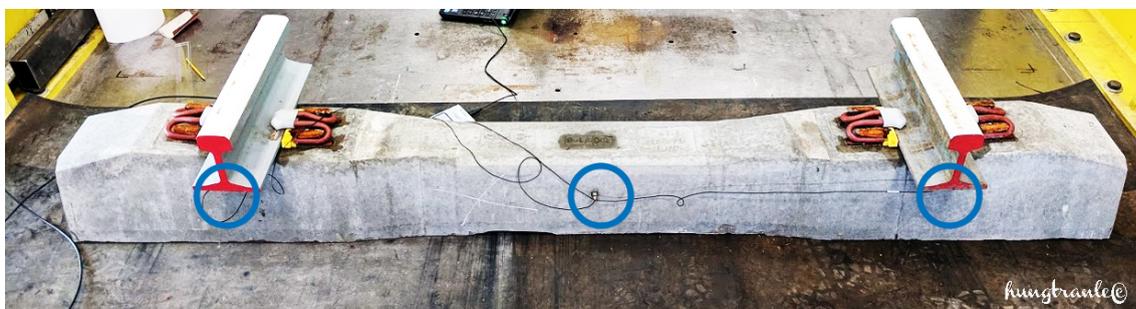


FIGURE 3.2 – Dispositif de mesure modale d'une traverse (photo source : *hungtranle*©)

Le fait de coller les accéléromètres et de taper sur la traverse à des positions différentes permet d'obtenir toutes les fréquences propres de la traverse (pour éviter le cas où la position de l'accéléromètre est située sur un nœud de la traverse qui ne donne pas une fréquence propre visible lors du traitement des signaux).

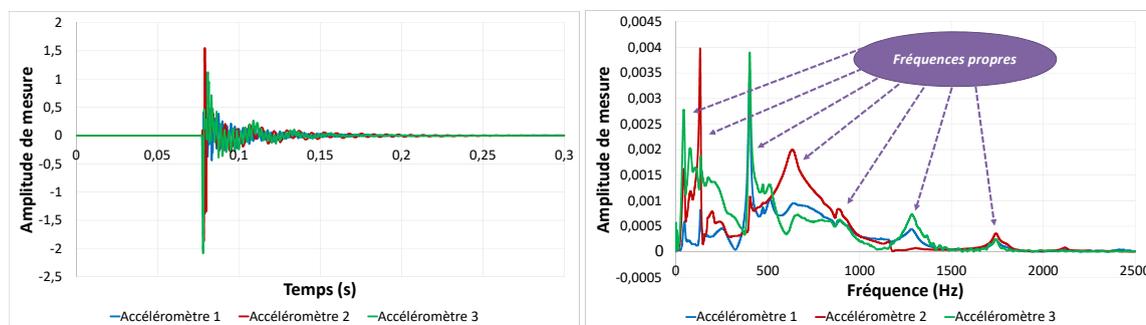
### 3.2.2 Enregistrement et traitement des signaux

#### Enregistrement des signaux

Lorsque la traverse est soumise à une excitation par le marteau, les accéléromètres captent l'accélération de la traverse suivant la direction dans laquelle ils sont posés dans le domaine temporel (figure 3.3a). Ces signaux sont envoyés à la boîte d'acquisition et ils sont transformés en fonctions de réponses en fréquence (figure 3.3b). Dans ces mesures, nous ignorons les pics en dessous de 100 Hz qui correspondent aux bruits et modes liés aux composants élastomères (la semelle sous rail, le tapis élastique).

#### Traitement des signaux

En fonction des positions des accéléromètres et du point d'excitation de force du marteau, nous arrivons à détecter les fréquences propres qui correspondent aux différents modes. Le Tableau 3.1 présente les cinq premières fréquences propres de la traverse détectées à l'aide de deux mesures différentes. Nous remarquons que le sens de mesure des accéléromètres



(a) Domaine temporel

(b) Domaine fréquentiel

FIGURE 3.3 – Réponse vibratoire d'une traverse sous une excitation

pour les deux exemples présentés dans ce Tableau n'est pas dans le même (horizontal dans l'excitation 1 et vertical dans la 2<sup>ème</sup>).

		Fréquence (Hz)				
		$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
Excitation 1	Acc. 1	131.8	156.8	400.6	473.4	869.0
	Acc. 2	131.4	154.2	402.2	474.4	870.4
	Acc. 3	132.8	156.2	428.8	473.4	901.6
Excitation 2	Acc. 1	132.2	400.2	476.2	789.6	893.0
	Acc. 2	131.4	400.2	438.0	472.8	854.2
	Acc. 3	129.8	401.2	472.8	871.6	909.4

TABLE 3.1 – Exemple de mesure des fréquences propres

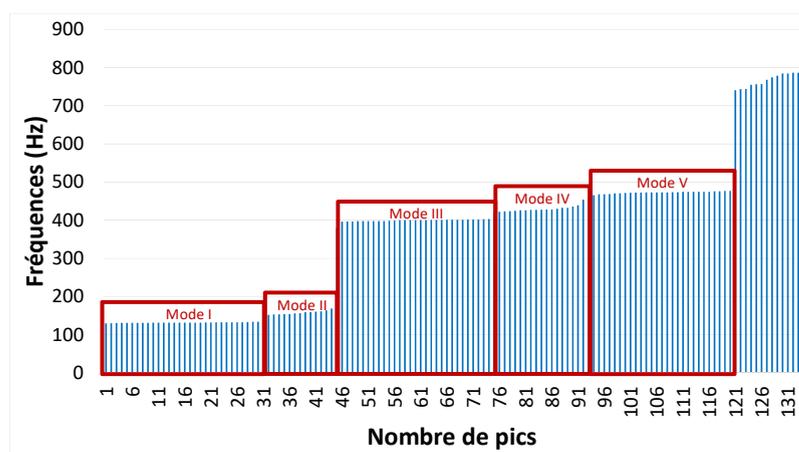


FIGURE 3.4 – Détermination des modes propres correspondant aux fréquences mesurées

Tout d'abord, nous voyons que les fréquences détectées ne correspondent pas toujours à l'ordre des fréquences propres. En plus, dans l'excitation 2, la deuxième fréquence apparue dans les 3 signaux n'est pas la même que pour l'excitation 1. Donc, avec une seule mesure, nous ne pouvons pas collecter toutes les fréquences propres de la traverse. C'est la raison pour laquelle nous avons effectué des mesures avec différentes positions et directions pour

les accéléromètres et pour le point d'application de la force d'excitation.

Après avoir collecté toutes les fréquences, nous les trions dans l'ordre de plus la petite à la plus grande (voir la figure 3.4). Dans cette figure, nous voyons que les modes propres apparaissent naturellement en ordre et sont détectés par des plages de données. Dans cette figure, nous montrons les 5 premiers modes propres. Le mode II apparaît de manière moins fréquente que le mode I. Nous remarquons que si deux modes propres ont la même fréquence (ou les deux fréquences sont proches), cette méthode ne peut pas les distinguer.

### 3.2.3 Résultat de mesure de la réponse vibratoire d'une traverse

Le résultat des mesures est présenté dans le Tableau 3.2. Dans ce Tableau, nous présentons la fréquence maximale, minimale, moyenne, la variance et l'écart-type pour les 5 premiers modes propres.

Mode	$f_{\min}$ (Hz)	$f_{\max}$ (Hz)	$f_{\text{moyenne}}$ (Hz)	Variance ( $\sigma^2$ )	Écart-type ( $\sigma$ )
I	129.8	134.0	131.9	0.84	0.91
II	152.2	161.2	156.8	12.41	3.52
III	392.2	403.4	399.3	3.46	1.86
IV	422.0	439.4	428.0	21.57	4.65
V	453.8	476.8	471.5	25.28	5.03

TABLE 3.2 – Résultats de mesures de fréquences propres d'une traverse

Nous constatons que les valeurs mesurées pour les 5 premiers modes ne sont pas dispersées, l'écart-type des mesures étant petit par rapport à la valeur moyenne. En considérant que la traverse utilisée est parfaite (sans fissure, neuve), nous allons utiliser ces résultats pour valider le modèle numérique 3D de la traverse dans le chapitre suivant.

## 3.3 Essai de flexion 3 points d'une traverse

Cet essai est un essai mécanique classique d'une poutre. En utilisant la jauge de déformation, nous voulons vérifier la qualité des capteurs à fibre optique. Les capteurs de déplacement servent à mesurer la flèche de la traverse et à contrôler les déplacements aux appuis.

### 3.3.1 Matériels et dispositifs de mesure

#### Matériels

- Traverse instrumentée : Une traverse M450 fabriquée par la société SATEBA est utilisée pour l'essai de flexion 3 points. Elle est équipée de 6 capteurs à fibre optique qui sont noyés à l'intérieur et suivant la direction longitudinale de la traverse. Ces capteurs se trouvent aux positions suivantes : aux deux rails, au milieu de la traverse (voir figure 1.15)
- Matériels pour la mesure des déplacements de la traverse :
  - Capteur de déplacement laser : La mesure est réalisée en se basant sur le principe de la triangulation. En fait, le rayon laser atteint l'objet sous la forme d'un petit point où la position est détectée à l'aide d'un récepteur du détecteur (ligne de photodiodes). En fonction de la distance, l'angle d'incidence varie et également

la position du point laser sur le récepteur. La distance par rapport à l'objet est déterminée en fonction de la valeur de l'angle d'incidence et selon la répartition de la lumière sur la ligne de photodiodes. Le capteur utilisé dans cet essai est le KEYENCE de série IL-S065 (voir figure 3.5a). Un KEYENCE IL-S065 est capable de mesurer une variation de  $\pm 9.4$  mm avec une distance de référence 65 mm. Un amplificateur de capteur KEYENCE de série IL-1000 (figure 3.5b) est connecté avec le capteur à laser afin d'afficher les mesures et de faciliter les manipulations.



FIGURE 3.5 – Outils de mesure de déplacements

- Capteur de déplacement LVDT<sup>1</sup> (voir figure 3.5c). Ce capteur est de type électrique passif (inductif) de déplacement linéaire, donc il donne des signaux analogiques mesurés en mV et puis, le déplacement peut s'obtenir par une multiplication avec un facteur de conversion. Le capteur utilisé dans cet essai est de type : DTCH400AG avec les caractéristiques : la longueur de 64 mm, le poids de 83 g. Un DTCH400AG peut mesurer un déplacement dans l'intervalle  $\pm 10$  mm. Trois capteurs sont utilisés dans cet essai dont les références sont : 61623, 61627 et 37529. L'étape d'étalonnage des capteurs a été réalisée en Octobre 2017 au sein du laboratoire Navier.

— Matériels pour la mesure des déformations de la traverse :

- Capteur fibre optique : Le capteur FBG est intégré à l'intérieur de la traverse (voir figure 1.16). Le signal provenant de ce capteur est analysé par un logiciel développé et assuré par SATEBA et ARDPI.
- Jauge de déformation : Les jauges permettent d'obtenir la déformation de la traverse sous l'action des forces à l'endroit où elles sont collées. Le principe de fonctionnement de la jauge de déformation est de déterminer la déformation de la jauge en mesurant sa variation de résistance électrique. La jauge de déformation que nous utilisons dans cet essai est de type KYOWA KC-70-120-A1-11 (voir la figure 3.6). Cette jauge a une longueur de 67 mm avec une résistance de  $120.2 \pm 0.2 \Omega$ , lot n° Y141.

La jauge est appliquée au béton à l'aide de la colle rapide X60 (HBM) qui contient deux composants : un liquide et un produit sous forme de poudre (voir la figure 3.7). Le dosage est à faire grâce à une cuillère de dosage pour la poudre et à un flacon équipé d'un compte gouttes.

1. Linear Variable Differential Transformer



FIGURE 3.6 – Jauge de déformation KYOWA KC-70-120-A1-11



FIGURE 3.7 – Colle X60 HBM

Les signaux analogiques des jauges sont envoyés à un système d'acquisition (ou un périphérique d'acquisition de données (DAQ)) et un logiciel développé par le laboratoire Navier, l'École des Ponts ParisTech sur la plate-forme de LabView qui prend en charge la partie d'analyse des informations. Dans cet essai, nous utilisons un DAQ "National Instruments".

- Le centre d'essais de SATEBA dispose d'un vérin hydraulique contrôlé par un capteur de force TC4-AMP fourni par AEP Transducers (voir figure 3.8). Ce capteur est capable de mesurer une force jusqu'à 500 kN (capacité du vérin hydraulique). L'étape d'étalonnage du capteur a été assurée par AEP transducers en 2014 et l'étalonnage a été vérifié par SATEBA et CERIB<sup>2</sup> en 2019.

FIGURE 3.8 – Capteur de force TC4-AMP (photo source : *hungtranle*©)

### Dispositif de mesure

La figure 3.9 présente le dispositif de cet essai. La traverse est posée sur deux appuis qui se trouvent au niveau des rails. Un chargement vertical est appliqué par un vérin

2. Centre d'Études et de Recherches de l'Industrie du Béton

hydraulique au milieu de la traverse. Un capteur de force permet d'obtenir la valeur exacte du chargement. Entre les appuis et la traverse, une semelle élastique est mise en place afin de protéger la traverse. Les appuis étant souples, nous avons installé des capteurs de déplacement pour contrôler les déplacements lors de l'essai. Deux capteurs de déplacements (1 LVDT et 1 à laser) sont mis symétriquement de part et d'autre de la traverse pour mesurer la flèche. Les capteurs de déplacement sont maintenus à l'aide de supports fixés par aimantation. Une jauge de déformation est collée au centre et sur la partie inférieure de la traverse où le capteur fibre optique se trouve. Cette jauge nous permet de vérifier les signaux provenant du capteur FBG. Dans cet essai, la traverse est soumise à un chargement statique jusqu'à 18 kN par pas de 2 kN.

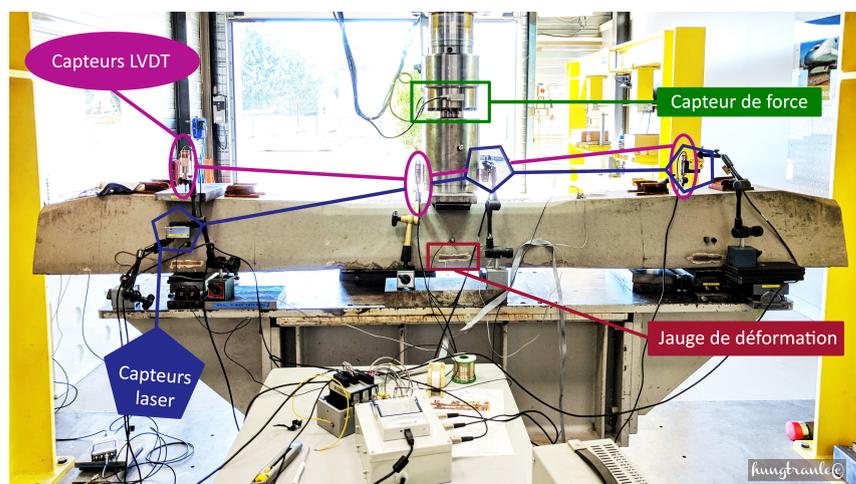


FIGURE 3.9 – Dispositif d'essai de flexion 3 points d'une traverse (photo source : *hungtranle*©)

### 3.3.2 Enregistrement et traitement des signaux

#### Enregistrement des signaux

— Mesure de déplacements :

- Capteur laser : Les déplacements de la traverse sont enregistrés à l'aide du logiciel développé par SATEBA et ARDPI.
- Capteur LVDT : Ces capteurs sont reliés à un DAQ "National Instruments" couplé à un logiciel développé par le laboratoire Navier, l'École des Ponts ParisTech.

— Mesure de déformations :

- Capteur fibre optique FBG : Les déformations de la traverse sont enregistrées directement à l'aide du logiciel de SATEBA et ARDPI. L'enregistrement est fait à une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz.
- Jauge de déformation : Les mesures sont faites à une fréquence d'échantillonnage 10 kHz à l'aide du logiciel développé par le laboratoire Navier.

#### Traitement des signaux

— Mesure de déplacements : Les mesures brutes de deux types de capteurs sont traitées de manières différentes.

- Capteur laser : Les signaux de ce capteur sont traités automatiquement par le logiciel développé par SATEBA et ARDPI et nous obtenons directement les déplacements de la traverse.
- Capteur LVDT : Ce capteur donne des signaux analogiques en mV. Pour obtenir des valeurs en mm, nous multiplions les valeurs en mV par le facteur de conversion.

Nous notons que  $\Delta l_g$ ,  $\Delta l_d$  et  $\Delta l_m$  sont les 3 déplacements mesurés par les capteurs de la traverse correspondant aux 3 positions : deux appuis et au milieu. Les deux mesures aux deux appuis nous permettent de contrôler la rotation et le mouvement de corps rigide de la traverse. Le déplacement au milieu de la traverse (la flèche)  $\delta l$  provenant de sa déformation sous chargement peut se calculer en enlevant la partie du déplacement de corps rigide au point de mesure. Grâce aux trois mesures, la flèche  $\delta l$  peut être déduite comme suit :

$$\delta l = \Delta l_m - \frac{\Delta l_g + \Delta l_d}{2} \quad (3.1)$$

Cette étape est faite pour les deux types de capteur de déplacements.

- Mesure de déformations : Lorsque les jauges et les capteurs FBG sont installés, chaque dispositif de mesure a une valeur de référence différente. Quand la traverse est déformée, les mesures varient par rapport aux valeurs initiales. Donc, à partir des valeurs enregistrées, les deux types de capteurs ont le même traitement suivant : la déformation est obtenue directement par une soustraction de la valeur de référence.

Les résultats de cet essai sont présentés dans le chapitre suivant.

## 3.4 Essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique

Dans cette partie, nous présentons l'essai de flexion de la traverse posée sur un tapis élastique. Pour ce faire, la traverse est posée sur un tapis élastique et nous appliquons deux forces sur la traverse aux deux positions du rail.

### 3.4.1 Matériels et dispositifs de mesure

#### Matériels

Les essais ont été réalisés au centre d'essais de la société SATEBA à Chalon-sur-Saône. Le bâti d'essai a déjà été présenté précédemment et nous ne reprenons pas ici sa description.

- Nous avons ajouté pour cet essai deux capteurs de force positionnés entre les rails et une barre transversale afin de déterminer les deux efforts verticaux appliqués sur la traverse (voir figure 3.13). Ces deux capteurs utilisés sont identiques (mêmes dimensions, etc.). Il s'agit du capteur : HBM type U3 qui a une capacité de 50 kN (voir figure 3.10).

Ce type de capteur nous donne un signal analogique en volt qui est classiquement converti en kN à l'aide d'un facteur de conversion donné par le fournisseur et vérifié par nos soins. Nous avons, pour cela, effectué une calibration de ces capteurs en appliquant une force statique connue sur chaque capteur et en traçant les tensions délivrées par les capteurs en fonction des forces appliquées, nous avons déterminé une relation linéaire et un coefficient directeur qui donne la valeur de ce facteur.



FIGURE 3.10 – Capteur de force HBM type U3/50 kN

Cette étape a été réalisée au sein du laboratoire Navier à l'École des Ponts ParisTech (ENPC). Le figure 3.11 montre les résultats de cette étape.

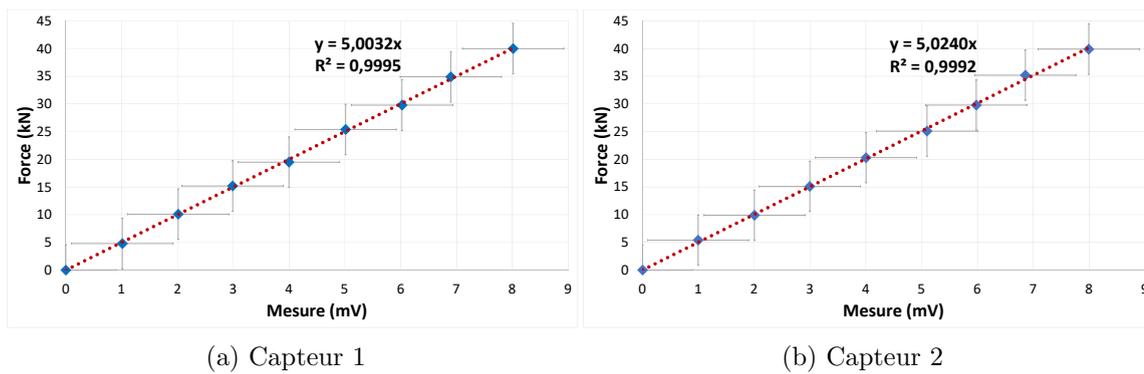
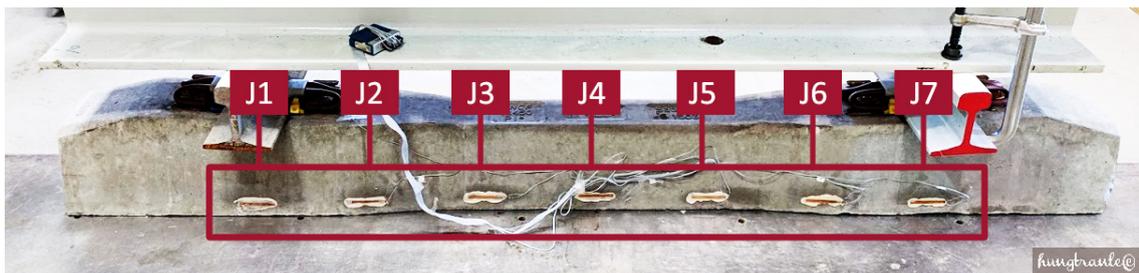


FIGURE 3.11 – Étalonnage des capteurs de force HBM type U3/50 kN

D'après les résultats de calibration, nous voyons qu'une corrélation linéaire est trouvée avec une bonne précision (les coefficients de détermination  $R^2$  dans les deux cas sont très proches de 1). D'un autre côté, nous constatons que les coefficients directeurs calculés ont une petite différence même si les deux capteurs utilisés sont identiques.

- Les jauges de déformation KYOWA de type KC-70-120 et la colle rapide X60 HBM sont utilisées dans cet essai.
- Le système d'acquisition est un périphérique d'acquisition de données (DAQ) qui reçoit les signaux analogiques provenant des jauges et des capteurs et les envoie à un ordinateur. Dans cet essai, nous utilisons un DAQ fabriqué par "National Instruments" avec le logiciel développé par le laboratoire Navier sur la plate-forme LabView.

FIGURE 3.12 – Traverse instrumentée par les jauges de déformation (photo source : *hungtranle*©)

- Traverse instrumentée par les jauges de déformation : Les jauges de déformation sont collées sur une ligne parallèlement à la fibre neutre de la traverse (voir figure 3.12).

Nous avons collé au total 7 jauges sur la traverse qui sont numérotées de J1 à J7 dans l'ordre de gauche à droite (voir figure 3.12). Trois jauges sont collés sur les mêmes positions que les capteurs fibre optiques : aux deux rails (J1 et J7) et au milieu de la traverse (J4). La distance entre J1 et J2, entre J6 et J7 est 24 cm. Les deux jauges J3 et J5 se situent au milieu des espaces (J2, J4) et (J4, J6) respectivement. Les 7 jauges ont des positions symétriques par rapport au milieu de la traverse. L'intérêt est de pouvoir obtenir le profil de déformation de la traverse. Nous remarquons que la traverse utilisée dans cet essai est le même type de la "Smart Sleeper" (M450) mais elle n'est pas instrumentée par les capteurs FBG.

### Dispositif de mesure

Le dispositif de mesure est présenté dans la figure 3.13. La traverse est posée sur un morceau d'une bande transporteuse pour des tapis roulants. Elle est équipée des systèmes d'attache pour fixer les rails avec la traverse aux deux positions du rail. Une semelle sous rail est mise entre la traverse et le rail. La force est générée par un vérin. Deux barres de profil en "H" sont posées l'une sur l'autre et les deux sont posées sur les rails, suivant la direction longitudinale de la traverse afin de répartir la force sur deux appuis.

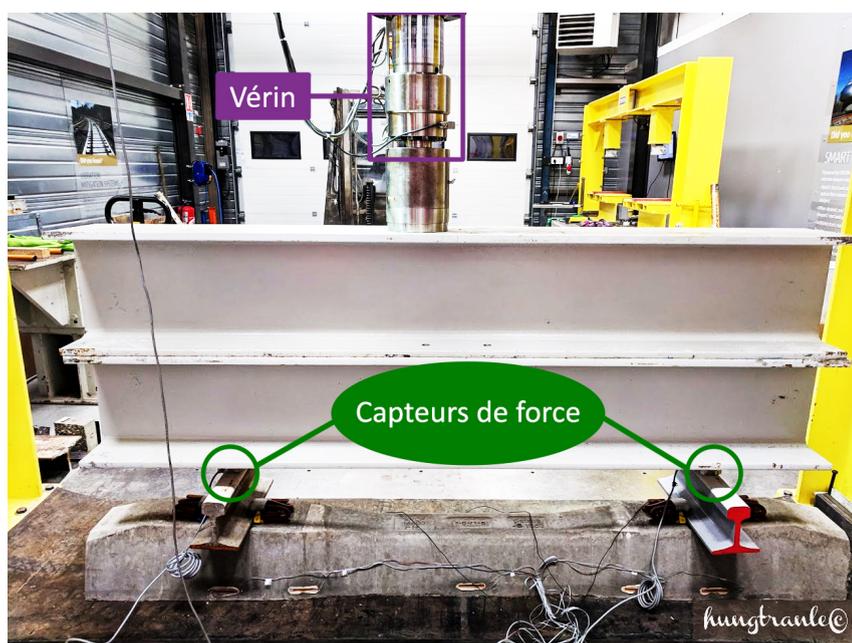


FIGURE 3.13 – Dispositif d'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique (photo source : *hungtranle*©)

La figure 3.14 présente le schéma de connexion des capteurs de force et des jauges de déformation à l'analyseur. Les capteurs de force sont alimentés par un courant continu de 24 V. Les jauges et les capteurs sont câblés à un DAQ qui est connecté à un ordinateur via un câble USB-A.

Dans cet essai, le vérin applique un chargement statique jusqu'à 120 kN. Nous avons effectué deux fois cet essai avec deux positions d'application de force différentes. Dans la première, la force appliquée au milieu de la barre. Dans la deuxième, nous avons décalé la traverse d'une distance de 17.5 cm et la configuration de ce cas est présentée dans la figure 3.13.

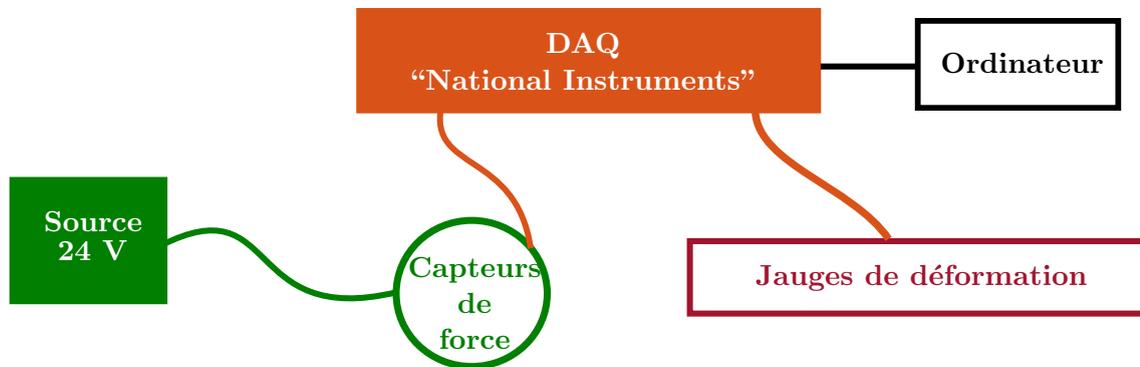


FIGURE 3.14 – Schéma de connexion des jauges de déformation et des capteurs de force

Nous remarquons ici l’existence d’un espace “vide” de 4 mm sous la face inférieure de la traverse en son milieu lorsque celle-ci est posée sur le tapis. Ce vide vient du fait de la présence de deux Patins Réducteurs d’Attribution (PRA) collés sous la traverse aux deux extrémités. Ces patins jouent le rôle de protection de la traverse contre les usures provenant du ballast en service.

### 3.4.2 Résultat des mesures

Dans cette partie, 5 jauges ont été collées. Il s’agit des jauges J1, J2, J4, J6 et J7. Nous rappelons que J1 et J7 se situent au niveau des rails et J4 est située au milieu de la traverse.

#### Traverse posée symétriquement

- Les forces appliquées sur les deux côtés de la traverse ont un rapport :  $R_1/R_2 = 1.203$ .
- Déformation de la traverse : La figure 3.15 présente l’évolution de la déformation de la traverse en fonction du chargement appliqué sur la barre. Les déformations mesurées par les 5 jauges montrent que toute la partie inférieure de la traverse est en traction. Les jauges J1, J2, J6 et J7 se déforment linéairement. Le couple de jauge (J1, J7) se déforme plus que le couple (J2, J6).  $R_1$  étant plus grande que  $R_2$ , la déformation des jauges collées à gauche de la traverse (J1, J2) est plus importante que celle de droite (J2, J6) (voir figures 3.15a et 3.15b). Le fait que la jauge J4 se déforme beaucoup moins que les autres jauge montre que la partie au milieu de la traverse travaille peu (voir figure 3.15c).

#### Traverse posée dis-symétriquement

- Les forces appliquées sur les deux côtés de la traverse ont un rapport :  $R_1/R_2 = 1.488$ .
- Déformation de la traverse : L’évolution des déformations de la traverse en fonction du chargement est montrée dans la figure 3.16. Tout d’abord, nous constatons que la jauge J7 ne fonctionne pas d’après la figure 3.16a. De l’autre côté du rail, la jauge J1 évolue linéairement. Le couple (J2, J6) donne les mêmes valeurs de déformation (voir figure 3.16c). La figure 3.16d montre que la jauge J4 se déforme beaucoup moins que les autres jauges.

A l’aide de ces essais, nous pouvons retracer le profil de déformation de la traverse posée sur un tapis élastique dans les deux cas de chargement. Le fait que la partie au milieu de la traverse soit “légèrement” en traction (déformation très faible) montre la

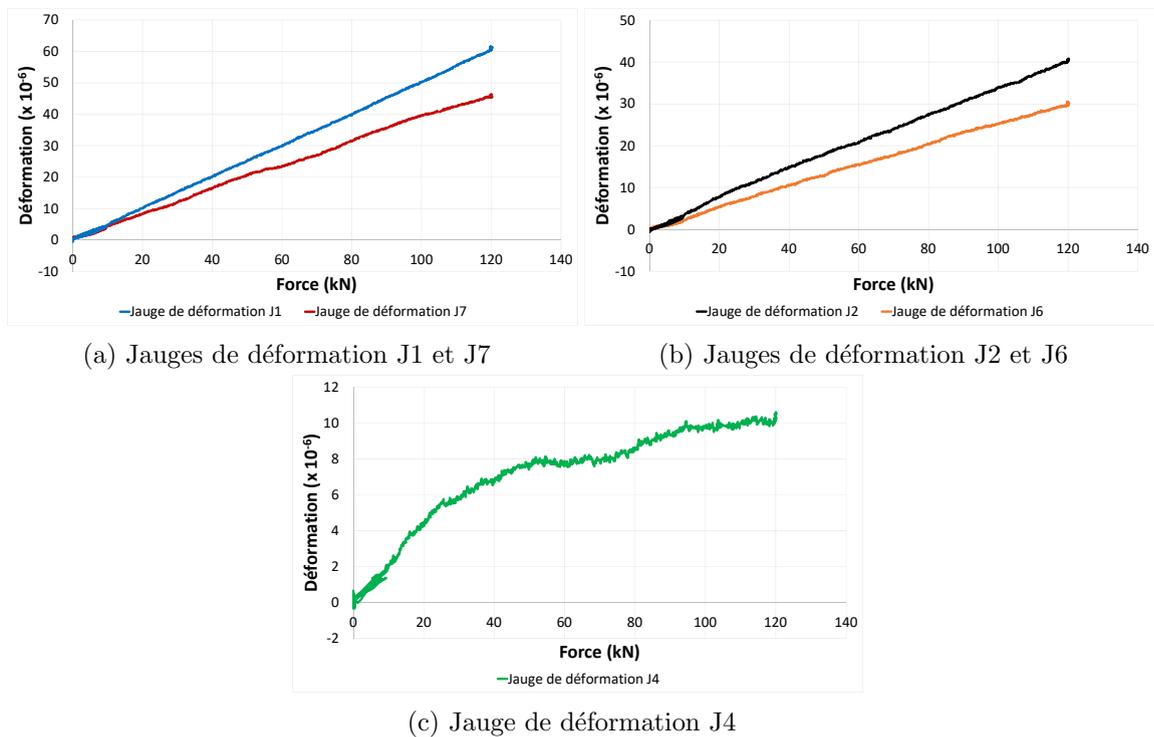


FIGURE 3.15 – Déformation de la traverse posée symétriquement sur un tapis élastique

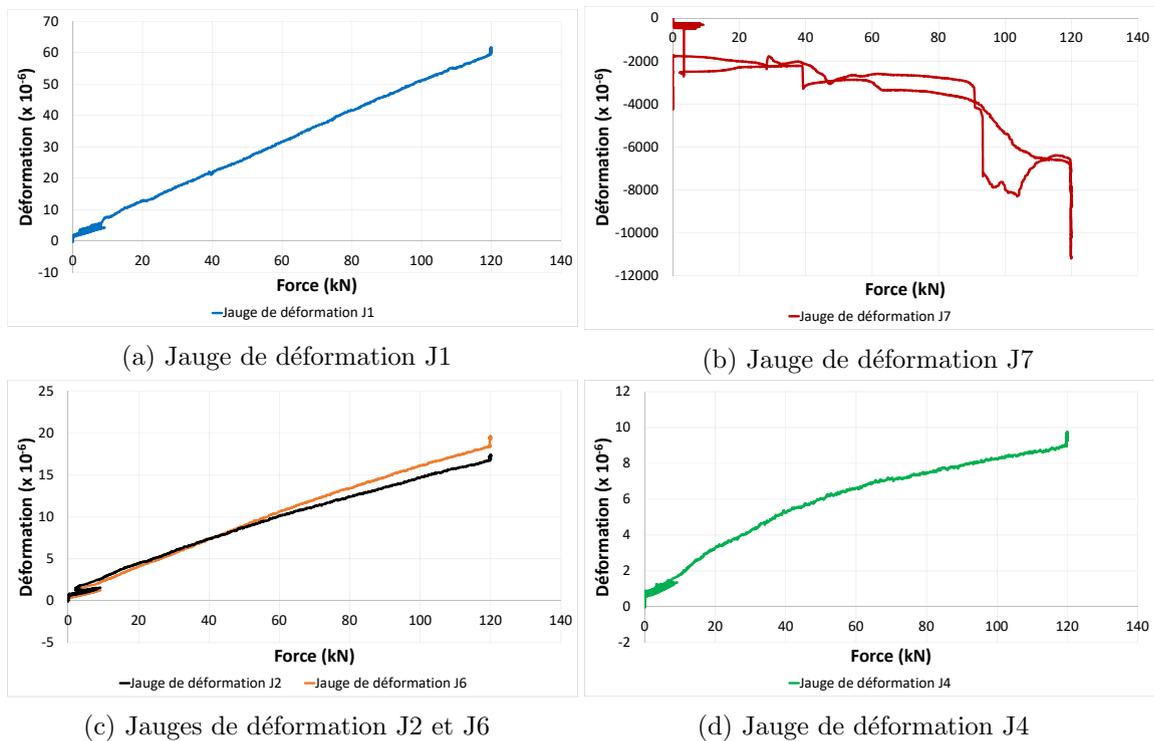


FIGURE 3.16 – Déformation de la traverse posée dis-symétriquement sur un tapis élastique

cohérence avec les résultats du modèle analytique de la traverse posée sur une fondation non-homogène dans le cas où le facteur de consolidation  $k_c$  est petit (voir chapitre 2). Les

mesures nous permettent de valider le modèle numérique d'une traverse posée sur une fondation non-homogène que nous allons présenter dans le chapitre 4.

### 3.5 Essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast

L'objectif de cet essai est d'étudier la réponse de la traverse posée sur une fondation homogène et de pouvoir re-simuler les conditions de travail de la traverse en voie réelle.

#### 3.5.1 Matériels et dispositifs de mesure

##### Matériels

- Une caisse en métal a été fabriquée avec les dimensions  $2.9\text{ m} \times 0.8\text{ m} \times 0.25\text{ m}$  correspondant respectivement à la longueur, largeur et hauteur de la caisse. Cette caisse est remplie par une couche de ballast neuf et non-usé pour que la traverse soit posée dessus. Le type de ballast utilisé dans cet essai est le même que celui utilisé dans la voie réelle (voir figure 3.17).
- Les autres matériels utilisés (les capteurs de force, les jauges de déformation, la traverse, etc.) ont été présentés dans la section 3.4.1.

##### Dispositif de mesure

La figure 3.17 présente le dispositif de cet essai. Le vérin applique une force sur une barre en acier de profil en "H". La force est répartie sur deux appuis où les deux rails se situent. Deux capteurs de forces sont posés afin de déterminer les forces appliquées sur chaque côté. La traverse est posée dans une caisse de ballast et soumise à deux forces aux positions du rail.

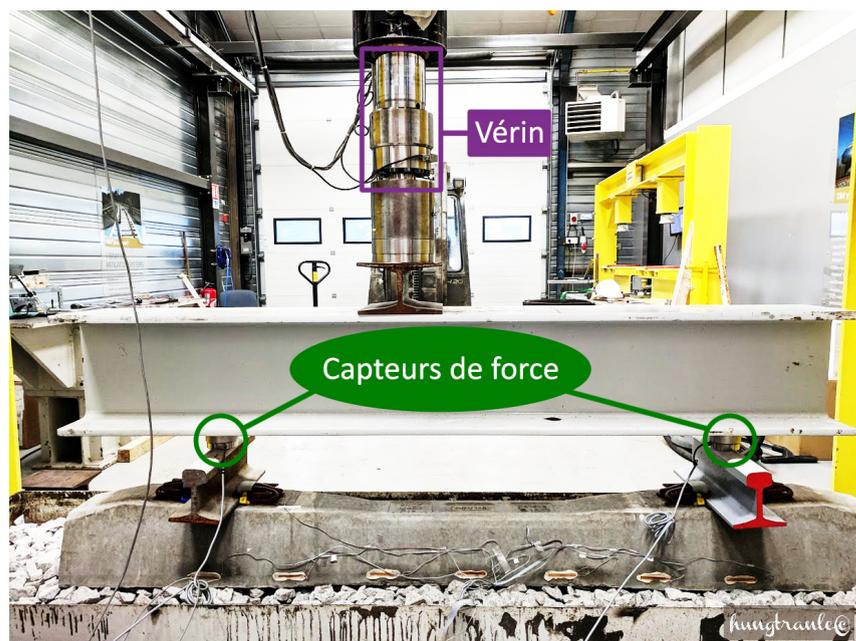


FIGURE 3.17 – Dispositif d'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast (photo source : *hungtranle*©)

Dans cet essai, le vérin génère une force statique jusqu'à 120 kN sur la barre. Nous avons réalisé deux cas d'études qui sont : un chargement au milieu de la traverse (la traverse se situe symétriquement) et un chargement non-symétrique (la traverse est décalée). La figure 3.17 montre le cas où la traverse est décalée vers la droite d'une distance de 15 cm.

Nous remarquons ici qu'avant d'effectuer cette manipulation, la caisse de ballast a été vibrée à l'aide de deux vibreurs à turbine pneumatique CASADIO et compactée à l'aide de chargements cycliques générés par le vérin. L'objectif de cette étape est d'obtenir une homogénéisation de la couche de ballast.

### 3.5.2 Résultat des mesures

Pour cet essai, 7 jauges ont été collées sur la traverse.

#### Traverse posée symétriquement

- Les forces appliquées sur les deux côtés de la traverse ont un rapport :  $R_1/R_2 = 1.171$ .
- Déformation de la traverse : La déformation de la traverse posée symétriquement dans une caisse de ballast est présentée dans la figure 3.18. Sur la partie inférieure de la traverse, le couple (J1, J7) montre que les zones de la traverse situées en-dessous des rails sont en traction tandis que les 5 autres jauges sont en compression. Les couples (J1, J7) et (J3, J5) ont des évolutions similaires en déformation. Les jauges J1 et J3 ont des déformations qui sont légèrement plus importantes que les jauges J5 et J7, ce qui est expliqué par le fait que la force appliquée sur la partie gauche,  $R_1$ , est plus grande que celle appliquée sur la partie droite,  $R_2$ . La figure 3.18d montre que la jauge collée au milieu de la traverse J4 a le niveau de déformation le plus élevé.

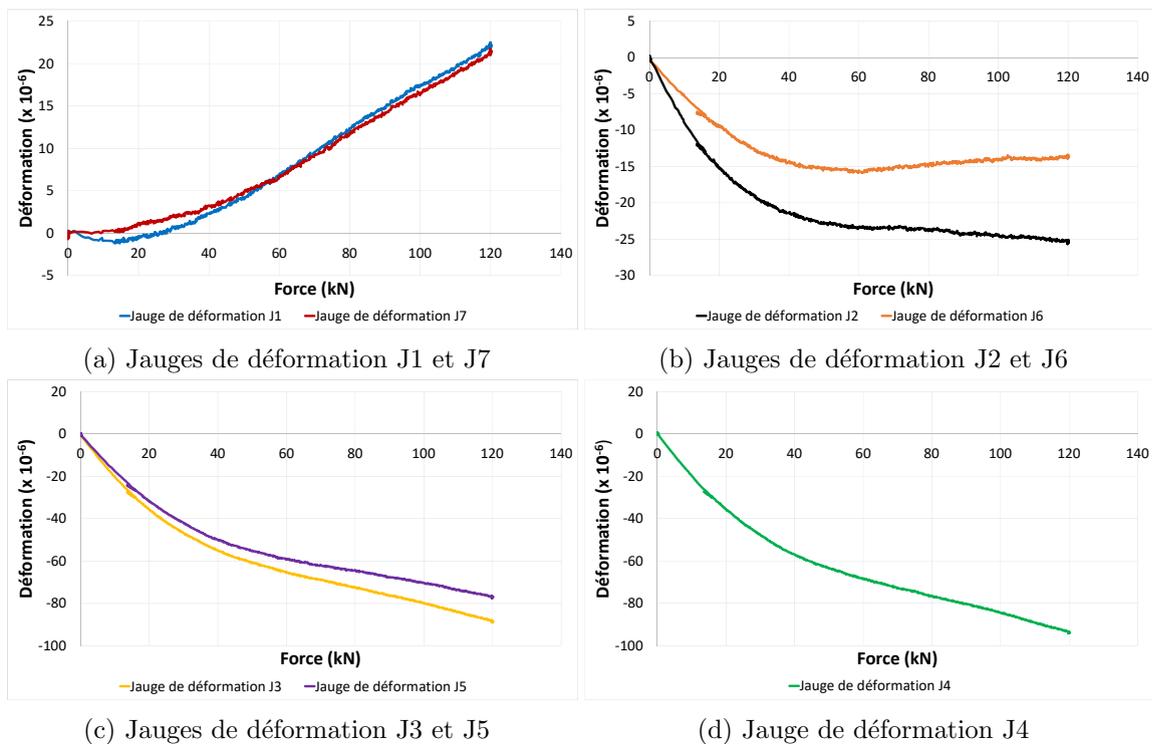


FIGURE 3.18 – Déformation de la traverse posée symétriquement dans une caisse de ballast

### Traverse posée dis-symétriquement

- Les forces appliquées sur deux côtés de la traverse ont un rapport :  $R_1/R_2 = 1.672$ .
- Déformation de la traverse : L'évolution des déformations de la traverse est présentée dans la figure 3.19. La figure 3.19a montre que les jauges J1 et J7 sont en traction avec des niveaux de déformations différents en raison de la dissymétrie de chargement. Le couple (J2, J6) évolue de deux manières différentes : la jauge J2 est légèrement en traction (déformation presque nulle) tandis que la jauge J6 est en compression (voir figure 3.19b). Les jauges J3 et J5 sont en compression mais la jauge J3 est moins déformée que la jauge J5. La figure 3.19d montre que le milieu de la traverse n'est plus la partie de la traverse qui se déforme le plus.

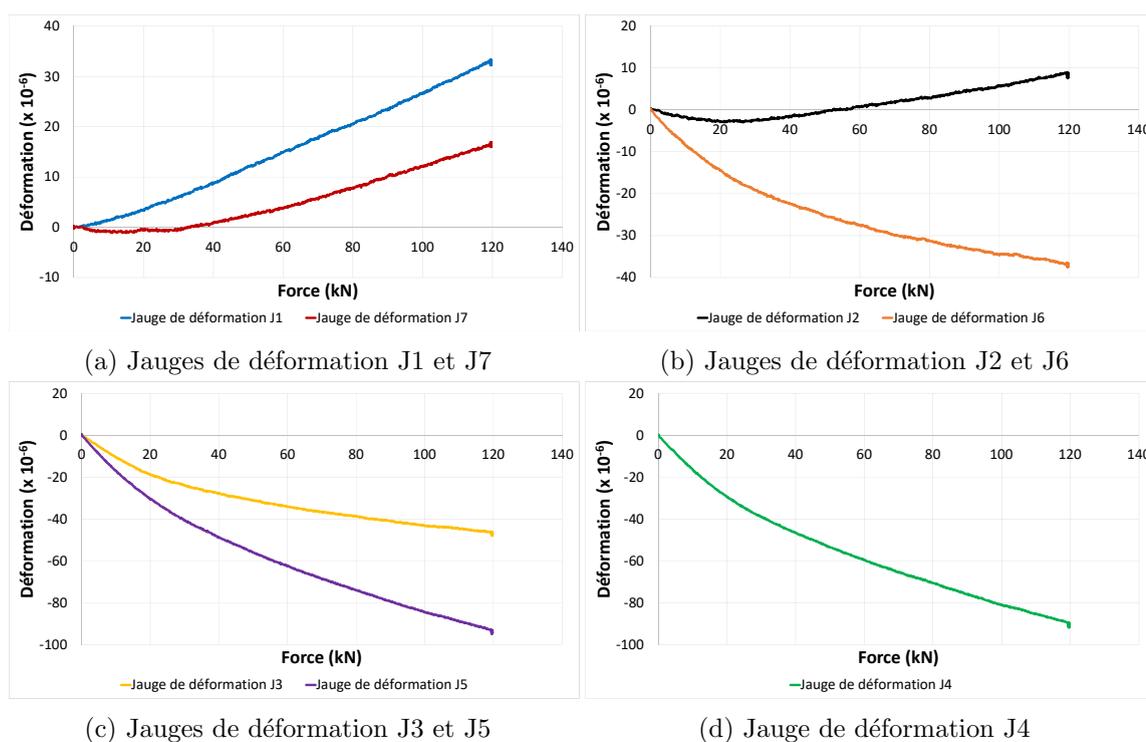


FIGURE 3.19 – Déformation de la traverse posée dis-symétriquement dans une caisse de ballast

Dans les deux cas d'essais, nous voyons que le profil de déformation de la traverse donné par le calcul numérique est cohérent avec celui donné par les mesures. La non-linéarité du ballast est mise en évidence par les évolutions de déformations de la traverse. Cependant, les résultats du modèle numérique sont obtenus avec un module d'Young équivalent de la fondation, ce qui ne décrit pas exactement le comportement du ballast.

Ces essais permettent de déterminer le profil de déformation de la traverse dans les deux cas de chargements grâce aux 7 jauges de déformations. Dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast, la traverse se déforme plus en son milieu qu'au niveau de ses extrémités, ce qui montre la cohérence avec les résultats du modèle dynamique de la traverse posée sur une fondation homogène. Les mesures nous permettent de valider le modèle numérique d'une traverse posée sur une fondation homogène présenté dans le chapitre suivant.

## 3.6 Conclusion

Les essais mécaniques sur la traverse qui ont été réalisés dans le cadre de ces travaux de thèse sont présentés dans ce chapitre. Ces essais permettent de mieux comprendre le comportement mécanique de la traverse instrumentée et ceci dans plusieurs conditions de fondations.

Pour la mesure de la réponse vibratoire de la traverse, en exerçant une force ponctuelle sur la traverse à l'aide d'un marteau d'impact, des accéléromètres sont utilisés afin de capter les quantités dynamiques de la traverse. Les mesures sont enregistrées et sont visualisées à l'aide d'un système d'acquisition DAQ "National Instruments" et un logiciel développé par le laboratoire Navier sur la plate-forme LabView. Ce logiciel nous permet également d'obtenir le spectre des signaux. En collectant des pics des spectres qui correspondent aux fréquences propres de la traverse, puis en les triant dans l'ordre croissant, les modes propres de la traverse apparaissent naturellement. Les résultats de cet essai sont obtenus avec une petites variance.

Les résultats de mesures obtenus lors de l'essai de flexion 3 points de la traverse (déplacements : capteurs laser et capteurs LVDT et déformations : jauges et capteurs FBG) sont en bonne corrélation avec les résultats numérique et analytique. Ces résultats nous permettent de conclure à la validation du modèle numérique de la traverse en statique.

Les essais de flexion de la traverse ont été réalisés avec deux types de fondations : non-homogène (un tapis élastique) et homogène (une caisse de ballast). Dans ces essais, la traverse est équipée de deux morceaux de rails fixés avec des systèmes d'attache. Une barre métallique est posée sur les deux rails afin de transmettre une force statique générée par un vérin hydraulique sur les deux côtés de la traverse. Deux capteurs de force HBM type U3/50 kN sont utilisés pour déterminer les forces appliquées sur la traverse. Le profil de déformation de la traverse est obtenu à l'aide des jauges de déformation KYOWA de type KC-70-120-A1-11 qui sont collées sur la partie inférieure de la traverse. Un système d'acquisition DAQ de "National Instruments" et un logiciel développé sur la plate-forme LabView par le laboratoire Navier nous permettent de sauvegarder des signaux analogiques en provenance des jauges de déformations. Les mesures montrent clairement la non-linéarité du ballast.

Les résultats des essais mécaniques nous permettent de valider des modèles numériques par éléments finis que nous allons développer dans le chapitre 4. D'ailleurs, en étudiant la non-linéarité du ballast, nous posons la question de la nécessité d'avoir un modèle dynamique de la traverse en voie posée sur une fondation non-linéaire ?



## Chapitre 4

# Modélisation numérique de la traverse par éléments finis

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>86</b>
<b>4.2</b>	<b>Calcul des fréquences propres d'une traverse</b>	<b>86</b>
4.2.1	Modèle 3D de la traverse instrumentée	86
4.2.2	Modes propres d'une traverse libre	88
4.2.3	Comparaison entre les mesures et la modélisation	88
<b>4.3</b>	<b>Simulation de flexion 3 points</b>	<b>90</b>
4.3.1	Modèle 3D de la traverse instrumentée	90
4.3.2	Résultats et discussions	90
4.3.3	Comparaison mesure - modèle	92
<b>4.4</b>	<b>Simulation de l'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique</b>	<b>95</b>
4.4.1	Modèle 3D numérique de la traverse posée sur un tapis élastique	95
4.4.2	Résultats et discussions	97
4.4.3	Comparaison mesure - modèle	98
<b>4.5</b>	<b>Simulation de l'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast</b>	<b>99</b>
4.5.1	Modèle 3D numérique de la traverse posée dans une caisse de ballast	99
4.5.2	Résultats et discussions	101
4.5.3	Comparaison mesure - modèle	103
<b>4.6</b>	<b>Modèle semi-analytique de la traverse en voie</b>	<b>103</b>
4.6.1	Formulations mathématiques du problème	104
4.6.2	Comparaison avec le modèle analytique de la traverse en voie	108
4.6.3	Étude de l'influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse	111
4.6.4	Étude de l'influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse	114
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les modèles analytiques de la traverse en voie qui nous permettent de calculer rapidement ses réponses dynamiques. Ces modèles se basent sur la théorie des poutres de section uniforme en 1D. Toutefois, la traverse est une poutre de section non-uniforme. C'est la raison pour laquelle ce chapitre est dédié au modèle numérique de la traverse en 3D.

Un modèle numérique en 3D de la traverse a été reconstruit avec ses dimensions réelles à l'aide du logiciel ABAQUS. Pour valider ce modèle, nous avons simulé l'essai vibratoire d'une traverse seule par éléments finis. Les modes propres et fréquences propres numériques seront comparés avec l'essai de mesure de fréquences propres du chapitre précédent.

Deux modèles de traverse posée sur une fondation homogène et non-homogène ont ensuite été développés pour simuler les essais de flexion d'une traverse. Les paramètres d'entrée sont les valeurs usuelles. Les résultats numériques obtenus à partir de ces modèles ont été comparés avec les résultats expérimentaux afin de pouvoir valider ces modèles.

La validation du modèle numérique de la traverse nous mène à un développement d'un nouveau modèle de la traverse en voie. Il s'agit d'un modèle semi-analytique dont le principe est le couplage du modèle analytique du rail et du modèle aux éléments finis de la traverse et la fondation. Les résultats du modèle numérique sont cohérents avec ceux du modèle analytique. Une étude de l'influence des dimensions réelles sur les réponses de la traverse montre l'avantage du modèle numérique qui est capable d'obtenir les réponses dynamiques de la traverse en voie les plus précises.

## 4.2 Calcul des fréquences propres d'une traverse

### 4.2.1 Modèle 3D de la traverse instrumentée

#### Géométrie d'une traverse instrumentée

Pour modéliser en éléments finis la traverse instrumentée M450 qui est mise en service à Creil, nous l'avons reconstruite en 3D à l'aide de son dessin et du logiciel ABAQUS. La figure 4.1 représente le modèle en 3D de la traverse M450. Nous remarquons ici que la traverse est précontrainte avec cinq torons de rayon 10 mm en acier. La longueur des torons est la même que celle de la traverse. Ils sont parallèles à l'axe neutre de la traverse.

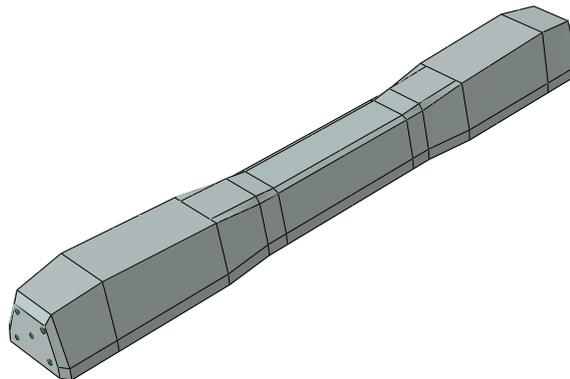


FIGURE 4.1 – Modèle numérique 3D de la traverse instrumentée

### Matériaux et maillage

- Matériaux : Les composants du modèle de la traverse sont le béton et cinq torons en acier qui sont présentés dans la figure 4.2. Nous remarquons que ce modèle ne tient pas compte des capteurs en fibre optique dans la direction longitudinale de la traverse, des ancrages du système d'attache ainsi que des Patins Réducteurs d'Attribution (PRA) situés en-dessous de la traverse à ses extrémités. En effet, ces composants ont une incidence négligeable sur le comportement mécanique de la traverse. Nous posons également une hypothèse de surface de contact parfaite entre les composants du modèle (ni glissement, ni décollement).

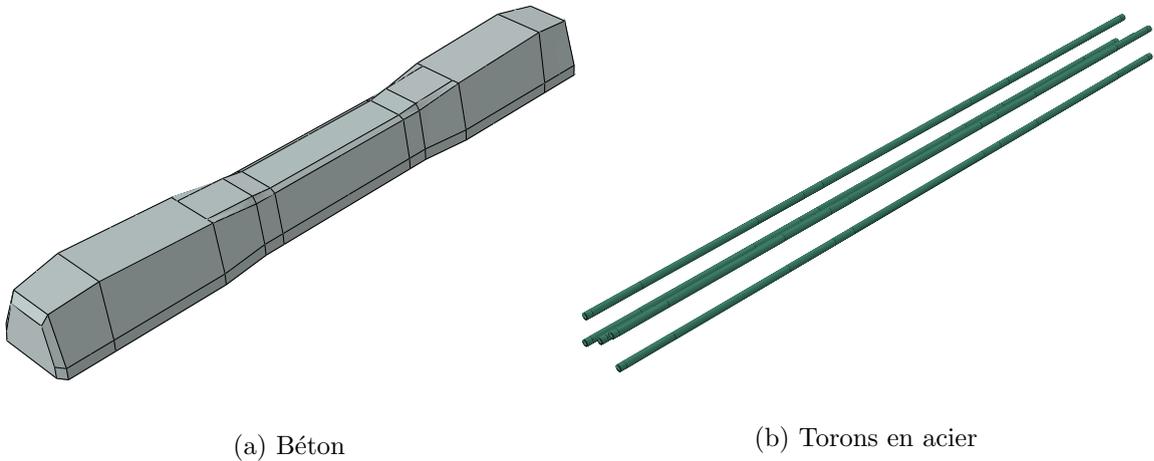


FIGURE 4.2 – Matériaux du modèle de la traverse instrumentée

En considérant que les matériaux de la traverse sont élastiques, linéaires et isotropes, deux matériaux sont créés avec les paramètres donnés dans le Tableau 4.1 :

Paramètres	Unité	Béton	Acier
Module d'Young	GPa	48	210
Densité	$\text{kgm}^{-3}$	2475	7810
Coef. de Poisson		0.2	0.3

TABLE 4.1 – Paramètres des matériaux de la traverse instrumentée

La masse totale de la traverse calculée par le modèle numérique est 305.7 kg et elle est cohérente avec la masse de la traverse réelle donnée par le fournisseur qui est égale à 305 kg.

- Maillage : Le maillage est créé avec le type d'élément hexagonal : C3D8R (linéaire avec intégration réduite). Le détail du maillage est donné sur la figure 4.3. Nous constatons que le maillage de l'acier est bien régulier. Pour la partie en béton, le maillage est aussi bien régulier sur le long du modèle. Par contre, une concentration d'éléments apparaît sur la section droite du modèle, autour des torons en acier. Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :
  - Taille moyenne de maille : 18 mm
  - Nombre d'éléments : 71540
  - Nombre de nœuds : 75999

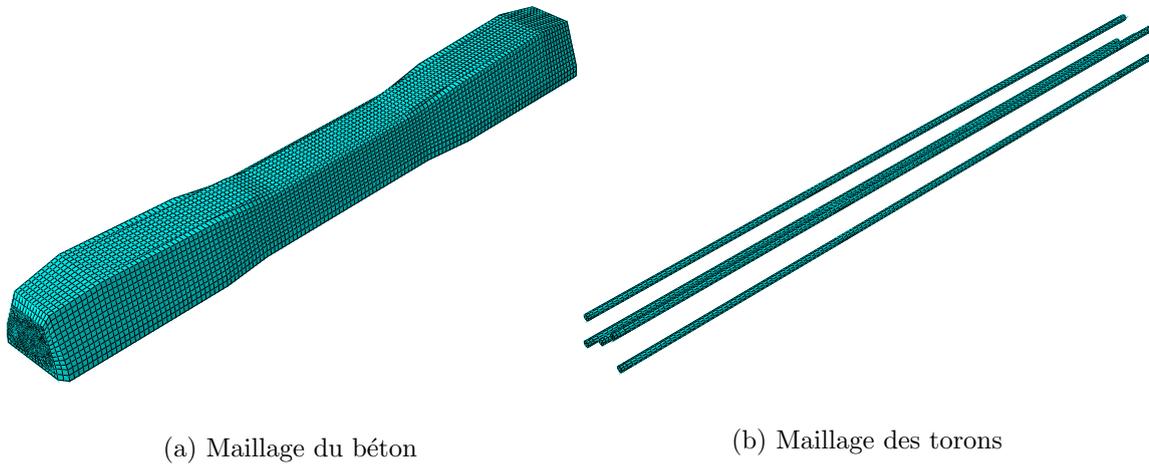


FIGURE 4.3 – Maillage du modèle de la traverse instrumentée

### Conditions aux limites

Pour calculer les modes propres de la traverse, il n’y a aucune condition aux limites appliquée sur le modèle. Le calcul est fait en mode “Perturbation linéaire/Fréquence<sup>1</sup>” en calculant les 15 premiers modes. Nous éliminons les 6 premiers modes qui correspondent à des mouvements libres de la traverse et les 9 premiers modes propres de la traverse sont les suivants.

#### 4.2.2 Modes propres d’une traverse libre

La figure 4.4 présente les 9 premiers modes propres d’une traverse. Nous voyons que les 3 premiers modes correspondent à des modes de flexion dans le plan vertical ou horizontal. La mode de torsion apparaît à partir du 4<sup>ème</sup> mode. En particulier, nous avons :

- 1<sup>er</sup> mode : Mode de flexion simple dans le plan vertical qui possède deux nœuds se situant aux positions :  $L/4$  et  $3L/4$  avec  $L$  la longueur de la traverse.
- 2<sup>ème</sup> mode : Mode de flexion simple dans le plan horizontal. C’est la raison pour laquelle les fréquences propres de ce mode n’apparaissent pas dans le cas où les accéléromètres sont posés verticalement (voir excitation 2 dans le Tableau 3.2). Ce mode possède les deux mêmes nœuds que le 1<sup>er</sup> mode.
- 4<sup>ème</sup> mode : Mode de torsion simple pour lequel l’axe de torsion est aussi l’axe longitudinal de la traverse passant par le centre géométrique de la section transversale. Ce mode possède 1 nœud au centre de la traverse. La fréquence d’apparition de ce mode est moins fréquente que les modes en flexion.

Les modes suivants sont des modes combinés.

#### 4.2.3 Comparaison entre les mesures et la modélisation

Afin de valider le modèle numérique 3D de la traverse, nous allons comparer les résultats numériques avec des mesures présentées dans la section 3.2. La figure 4.5 montre une comparaison de fréquences propres entre des mesures expérimentales et résultats numériques, analytiques des 9 premiers modes propres d’une traverse libre.

---

1. Linear perturbation/Frequency

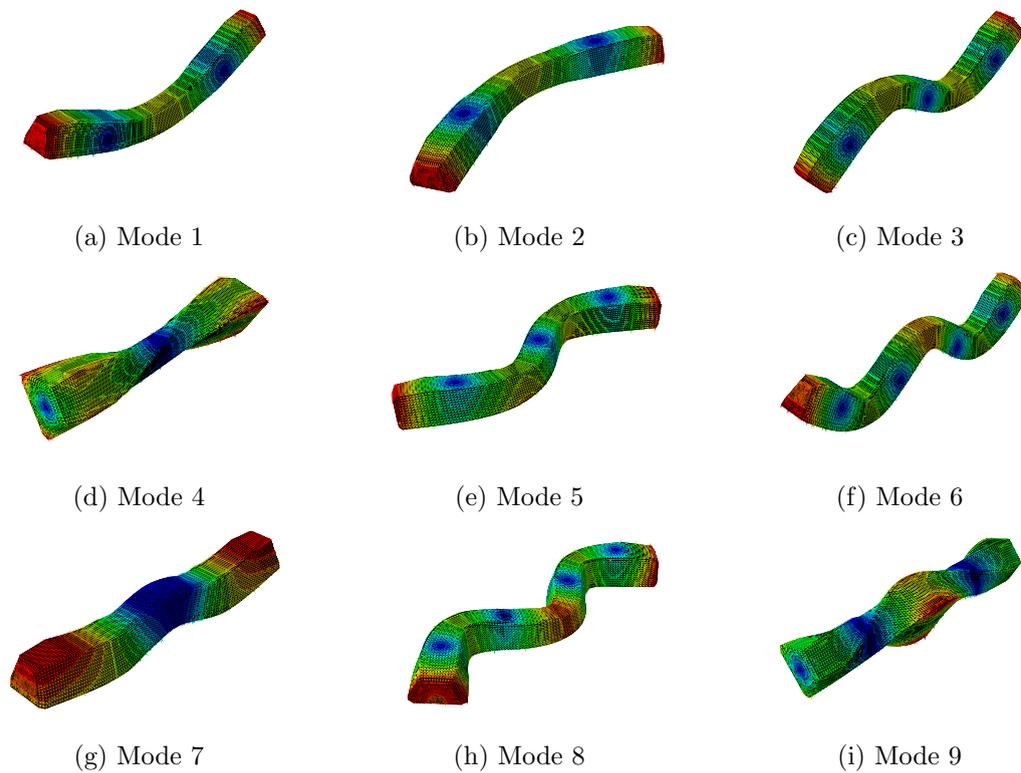


FIGURE 4.4 – Visualisation des modes propres de la traverse

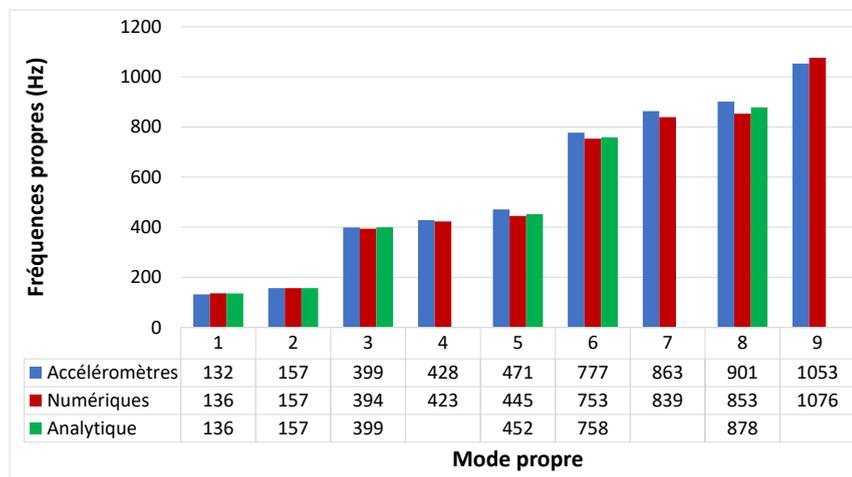


FIGURE 4.5 – Comparaison de fréquences propres des résultats expérimentaux et numériques

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Diff. num/exp (%)	3.03	0.00	1.25	1.16	5.52	3.09	2.78	5.32	2.18
Diff. ana/exp (%)	3.03	0.00	0.00	—	4.03	2.44	—	2.55	—

TABLE 4.2 – Différence de fréquences propres entre les résultats expérimentaux et numériques

Nous voyons que les résultats numériques et analytiques sont cohérents avec les résultats expérimentaux. Le Tableau 4.2 montre la différence relative entre les résultats obtenus par

ces trois méthodes. Les modes 4, 7 et 9 ne peuvent pas être calculées analytiquement car le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli ne permet pas d'obtenir les fréquences propres des modes de torsion ou de compression/traction. Nous constatons une différence inférieure à environ 3% sur les 4 premiers modes propres. Les modes 5 et 8 ont une différence de l'ordre de 5%. Cette différence vient de l'erreur numérique et du fait que nous ne tenons pas compte des PRA situés en bas de la traverse. Cette erreur est plus grande pour les modes de grand ordre (pour les hautes fréquences, il faut que le maillage soit plus fin). Malgré cette différence, nous pouvons conclure que ce modèle est validé.

## 4.3 Simulation de flexion 3 points

### 4.3.1 Modèle 3D de la traverse instrumentée

#### Géométrie, matériaux et maillage

Nous prenons la géométrie d'une traverse seule M450 présentée dans la partie 4.2 pour simuler l'essai de flexion 3 points d'une traverse. Les matériaux de la traverse sont repris dans le Tableau 4.1 et le maillage du modèle est présenté dans la figure 4.3.

#### Conditions aux limites et chargements

La traverse étant précontrainte à 300 kN, le calcul est fait en mode "Général/Statique"<sup>2</sup> à l'aide du logiciel ABAQUS à l'aide des deux étapes suivantes :

- Étape 1 : Précontrainte de la traverse (voir figure 4.6a) :
  - Conditions aux limites : Cette étape est faite sous conditions libre des déplacements nodaux de la traverse.
  - Chargements : Nous appliquons un chargement de type "Pression"<sup>3</sup> (chargement surfacique) sur la surface des torons de chaque côté de la traverse.
- Étape 2 : Flexion de la traverse (voir figure 4.6b) :
  - Conditions aux limites : La traverse est posée sur un appui simple et une rotule qui sont aux mêmes positions des deux côtés des rails. Les déplacements nodaux suivant la direction  $z$  d'appui simple sont bloqués. Les déplacements nodaux suivant les directions  $x$  et  $y$  de la rotule sont aussi bloqués.
  - Chargements : Un chargement statique de type "Pression" s'applique verticalement au milieu de la traverse. Le calcul est réalisé avec un chargement maximum de 18 kN avec un pas de 2 kN. Les dimensions de la surface où sont appliqués les chargements sont :  $0.1 \text{ m} \times 0.1285 \text{ m}$  comme montré sur la figure 4.6b.

### 4.3.2 Résultats et discussions

Dans cette simulation, nous nous intéressons aux champs de déplacements et de déformations de la traverse. Nous remarquons ici que les résultats numériques qui seront présentés dans cette section sont ceux obtenus après deux étapes de calcul. Donc, pour comparer avec les résultats expérimentaux qui seront présentés dans le chapitre 3, une étape intermédiaire de traitement des résultats numériques est réalisée. En fait, nous "éliminons" des résultats après le calcul de la précontrainte de la traverse dans les résultats finaux. Après ce traitement, les résultats obtenus présentent les réponses de la traverse dans l'étape de flexion.

---

2. General/Static

3. Pressure

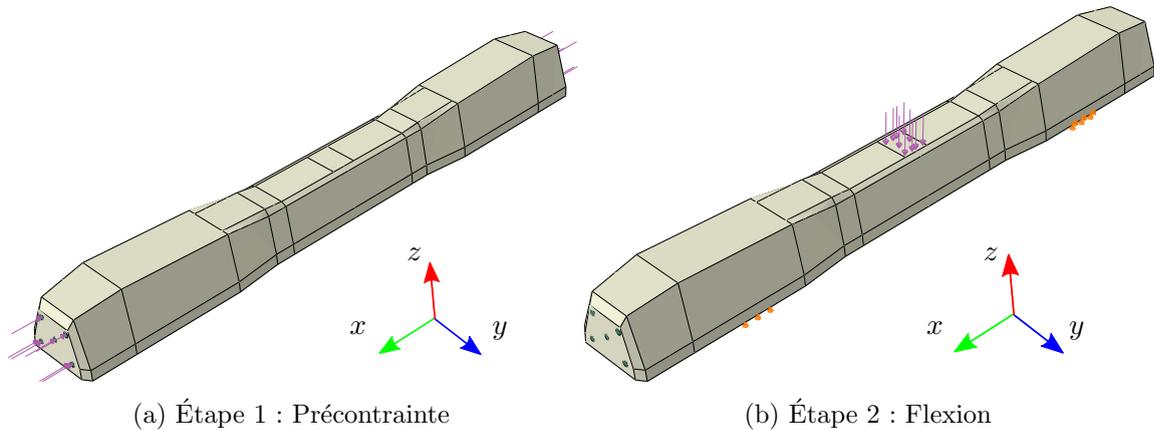


FIGURE 4.6 – Modèle numérique de l'essai de flexion 3 points d'une traverse

### Champs de déplacements

La figure 4.7 montre les champs de déplacements verticaux de la traverse soumise à un chargement vertical maximum. Sous la condition de la symétrie de la géométrie, des matériaux, des conditions aux limites et du chargement, son champ de déplacement est clairement symétrique. En observant sa réponse dans une section droite (voir figure 4.7b), nous constatons qu'au niveau des surfaces de contact entre les deux matériaux, les déplacements sont continus.

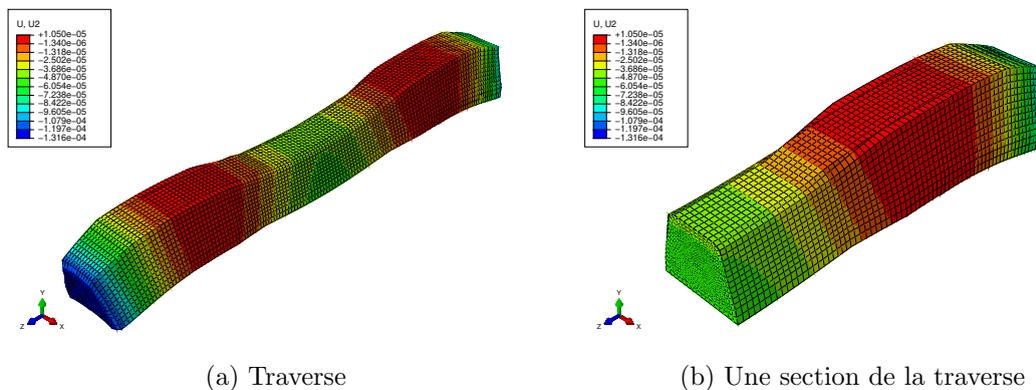


FIGURE 4.7 – Champs de déplacements verticaux de la traverse dans l'essai de flexion 3 points

### Champs de déformations

Les champs de déformations suivant la direction longitudinale de la traverse dans l'essai de flexion 3 points sont présentés dans la figure 4.8. Dans cette figure, les champs de déformations de la traverse sont symétriques (voir figure 4.8a) et sont continus (voir figure 4.8b).

### Champs de contraintes

Les champs de contraintes sont évidemment symétriques et ce qui est mis en évidence dans la figure 4.9. Par contre, en observant une section droite de la traverse, nous constatons qu'il y a une discontinuité de contrainte entre les deux matériaux.

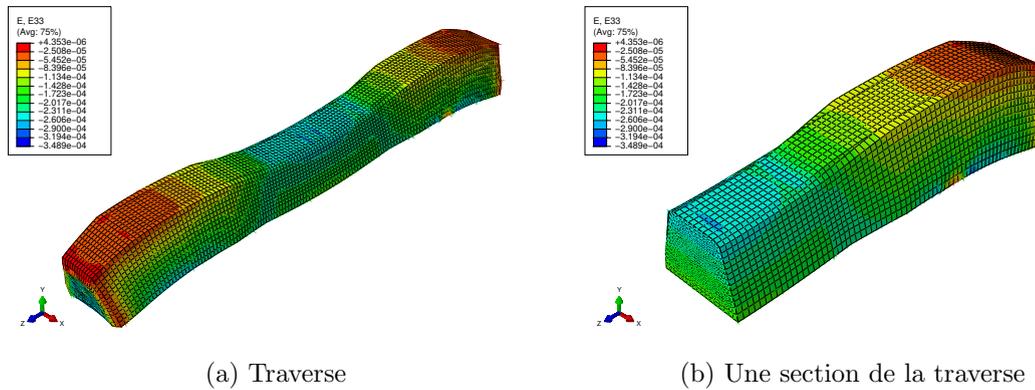


FIGURE 4.8 – Champs de déformations suivant la direction longitudinale de la traverse dans l'essai de flexion 3 points

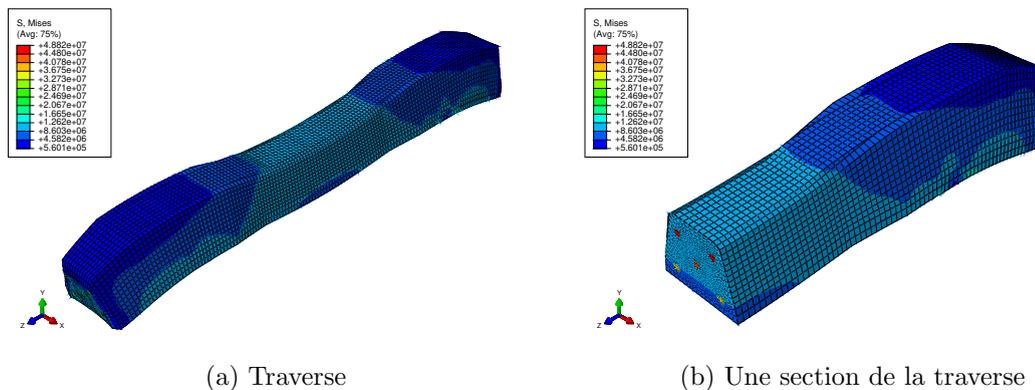


FIGURE 4.9 – Champs de contraintes Von-Mises de la traverse dans l'essai de flexion 3 points

Les figures 4.10a et 4.10b représentent les champs de contraintes dans chaque composant du modèle. La partie en acier travaille beaucoup plus par rapport à celle en béton. Ce résultat montre le rôle important de la partie acier dans la traverse. Comme nous nous y attendions, les deux torons supérieurs travaillent de manière différente des deux torons inférieurs (par exemple : sur la même section droite au milieu, la partie supérieure est en compression et celle inférieure est en traction).

Nous notons que la valeur de la contrainte de Von-Mises maximale est 49 MPa et étant donné la répartition des contraintes dans la traverse, elle est inférieure à la résistance de l'acier en traction et de ce type de béton en compression. Ce résultat montre qu'il n'est pas nécessaire de mettre en évidence un endommagement du système en utilisant le critère de rupture de Von-Mises.

### 4.3.3 Comparaison mesure - modèle

#### Rappel des formules analytiques d'une poutre en flexion 3 points

La figure 4.11 représente l'essai de flexion 3 points d'une poutre. Une force  $P$  s'applique au milieu de la poutre suivant la direction verticale. Nous notons que  $E$ ,  $I$ ,  $L$  sont respectivement le module d'Young, le moment d'inertie et la longueur de la poutre.

En utilisant les formules de la résistance des matériaux (RDM), nous pouvons calculer

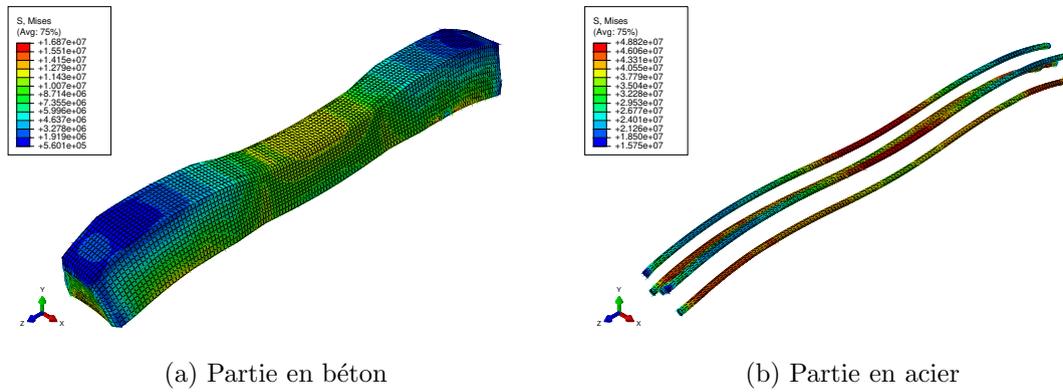


FIGURE 4.10 – Champs de contraintes Von-Mises de chaque composant du modèle dans l'essai de flexion 3 points

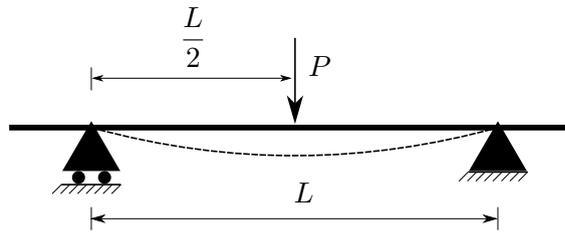


FIGURE 4.11 – Poutre en flexion 3 points

l'effort normal ( $N$ ), l'effort tranchant ( $T$ ) et le moment fléchissant ( $M_f$ ) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \quad \left( \forall x \in \left[ 0, \frac{L}{2} \right] \right) \\ T = \frac{P}{2} \quad \left( \forall x \in \left[ 0, \frac{L}{2} \right] \right) \\ M_f = \frac{Px}{2} \quad \left( \forall x \in \left[ 0, \frac{L}{2} \right] \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \quad \left( \forall x \in \left[ \frac{L}{2}, L \right] \right) \\ T = -\frac{P}{2} \quad \left( \forall x \in \left[ \frac{L}{2}, L \right] \right) \\ M_f = \frac{P(L-x)}{2} \quad \left( \forall x \in \left[ \frac{L}{2}, L \right] \right) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

D'autre part, la relation entre le moment fléchissant et la contrainte d'une poutre est :

$$\sigma_{xx} = -z \frac{M_f(x)}{I} \quad (4.2)$$

avec  $z$  : la distance par rapport à l'axe neutre de la poutre. D'après la théorie de poutre en flexion simple, nous pouvons en déduire les expressions des champs de déplacement et de déformation suivantes :

— La déformation de la poutre est calculée par :

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = -z \frac{M_f(x)}{EI} \quad (4.3)$$

La déformation maximale d'une poutre, qui se trouve au milieu de la poutre, est obtenue à l'aide de l'équation 4.1 comme suit :

$$\varepsilon_{xx} \left( \frac{L}{2}, z \right) = -z \frac{PL}{4EI} \quad (4.4)$$

— En petite déformation, on peut faire l'hypothèse que :

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \frac{M_f(x)}{EI} \quad (4.5)$$

avec  $w(x)$  : le déplacement vertical de la poutre. Il est obtenu en intégrant deux fois l'équation 4.5 et est combiné avec l'équation 4.1 en prenant en compte deux conditions :

- Déplacement nul aux appuis :  $w(0) = 0$  et  $w(L) = 0$
- Continuité de la rotation de section droite au milieu de la poutre :  $\frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{L}{2} \right) = 0$

L'expression du déplacement de la poutre dans l'intervalle  $x \in \left[ 0, \frac{L}{2} \right]$  est déterminée comme suit :

$$w(x) = \frac{Px}{EI} \left( \frac{x^2}{12} - \frac{L^2}{16} \right) \quad (4.6)$$

Dans la deuxième moitié de la poutre pour  $x \in \left[ \frac{L}{2}, L \right]$ , la forme du déplacement est symétrique et elle est décrite par un autre polynôme de forme similaire. La flèche de la poutre au centre de la traverse en  $x = \frac{L}{2}$  est :

$$\delta l = w \left( \frac{L}{2} \right) = -\frac{PL^3}{48EI} \quad (4.7)$$

Les équations 4.4 et 4.7 nous permettent de calculer analytiquement les réponses de la traverse dans l'essai de flexion 3 points. Dans la suite, nous allons calculer le déplacement et la déformation de la poutre de façon à comparer les résultats de mesures aux résultats numériques obtenus dans le chapitre 4. Les paramètres d'entrées sont indiqués dans le Tableau 2.1.

### Comparaison du déplacement

La figure 4.12 présente la comparaison du déplacement obtenu lors des mesures (par deux types de capteur) avec les résultats numérique et analytique. Les deux types de capteur donnent des résultats similaires pour le déplacement de la traverse à mi-travée. Les écarts constatés viennent du fait que les points de mesures sont espacés. Les valeurs des différentes mesures sont cohérentes, les capteurs n'étant pas exactement positionnés aux mêmes points. Cependant, nous remarquons qu'il y a une meilleure corrélation numérique/expérimental que analytique/expérimental. Nous voyons clairement que le résultat numérique est plus proche des résultats de mesures que le résultat analytique. Ceci peut être expliqué par la différence de la géométrie de poutre prise en compte par l'hypothèse de poutre de section uniforme dans le calcul analytique et la géométrie réelle pour le calcul numérique.

### Comparaison de la déformation

La comparaison de la déformation à mi-travée de la traverse dans l'essai de flexion 3 points de la traverse est présentée dans la figure 4.13.

Nous retrouvons bien une relation linéaire entre la force appliquée et les déformations à mi-travée de la traverse en accord avec l'équation 4.4. Les résultats numériques, analytiques et expérimentaux (jauges et capteurs FBG) sont en très bonne concordance. Ces deux comparaisons permettent de valider le modèle numérique qui considère la géométrie réelle de la traverse.

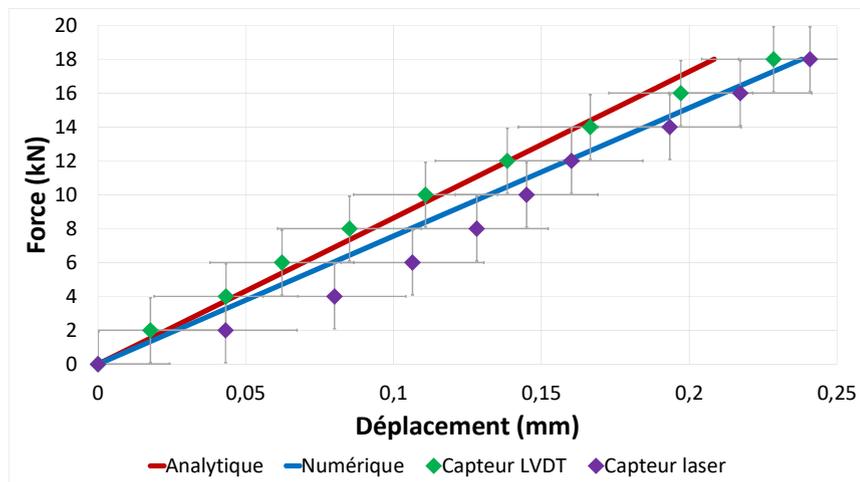


FIGURE 4.12 – Comparaison du déplacement dans l'essai de flexion 3 points

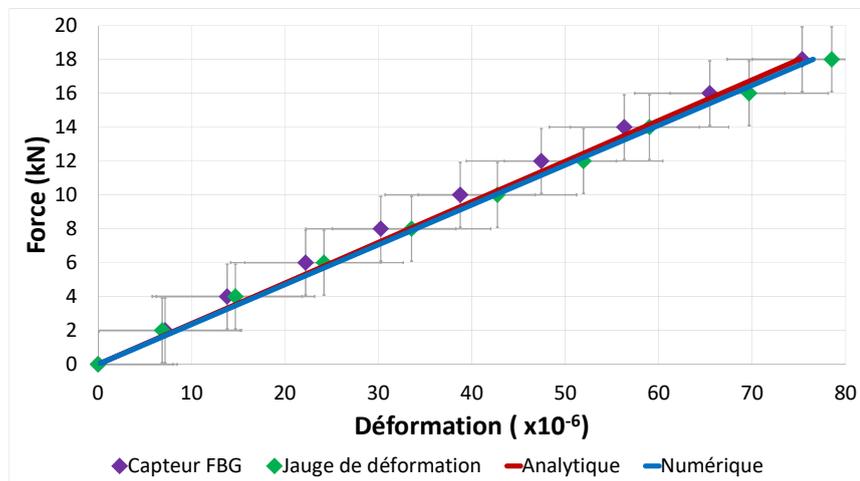


FIGURE 4.13 – Comparaison de la déformation dans l'essai de flexion 3 points

## 4.4 Simulation de l'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique

### 4.4.1 Modèle 3D numérique de la traverse posée sur un tapis élastique

#### Géométrie

Pour modéliser cet essai, nous utilisons le modèle numérique de la traverse seule qui est validé par l'essai vibratoire d'une traverse avec le calcul des fréquences propres par éléments finis. Après interprétation des résultats de mesure de cet essai dans le chapitre 3, nous avons constaté que le tapis est une fondation non-homogène et le modèle numérique de la traverse posée sur le tapis est présenté dans la figure 4.14a. Dans cette figure, le tapis contient 3 parties : gauche, milieu et droite correspondant aux trois couleurs : vanille, rouge et bleu. Le tapis a les dimensions :  $3 \text{ m} \times 0,8 \text{ m} \times 0,03 \text{ m}$  et la partie au milieu a une longueur de 0,76 m.

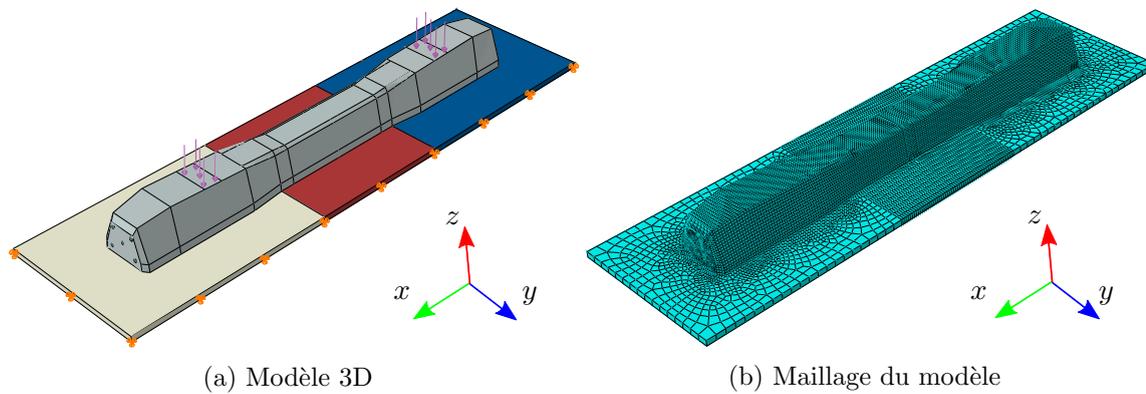


FIGURE 4.14 – Modèle numérique de l’essai de flexion d’une traverse sur un tapis

### Matériaux et maillage

- Matériaux : Les matériaux utilisés sont considérés linéaires, élastiques et isotropes. Le tableau 4.1 indique les matériaux utilisés pour la traverse. Les paramètres matériau du tapis sont indiqués dans le tableau 4.3. Ils sont choisis de façon à ce que le tapis soit une fondation non-homogène symétrique. Le module d’Young de la partie au milieu est presque nul pour simuler l’espace “vide” sous la traverse au milieu. Les valeurs utilisées sont usuelles.

Paramètres	Unité	Gauche	Milieu	Droite
Module d’Young	MPa	10	0.0025	10
Densité	kgm <sup>-3</sup>	920	920	920
Coef. de Poisson		0.2	0.2	0.2

TABLE 4.3 – Paramètres matériaux du tapis élastique

- Maillage : Le maillage du modèle est généré à l’aide du logiciel ABAQUS avec le type d’élément hexagonal : C3D8R (linéaire avec intégration réduite). La figure 4.14b montre le maillage du modèle. Le maillage du tapis est bien régulier. Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Taille moyenne de maille : 13.57 mm
- Nombre d’éléments : 120091
- Nombre de nœuds : 131552

### Conditions aux limites et chargements

Le calcul est lancé en mode “Général/Statique” dans le logiciel ABAQUS avec :

- Conditions aux limites : Seuls les déplacements nodaux sur la partie basse du tapis sont bloqués. Les surfaces de contact entre les 3 zones sont considérées parfaites (ni glissement, ni décollement) (voir figure 4.14a).
- Chargements : Les chargements appliqués sur la traverse sont définis de type “Pression” et suivant la direction verticale. Les positions d’application des chargements sont les surfaces de contact rail-traverse (voir figure 4.14a). Les valeurs des chargements dans les deux cas sont données dans le Tableau 4.4 :

Configuration	Unité	$R_1$	$R_2$
Traverse posée symétriquement	MPa	3.479	2.898
Traverse posée dis-symétriquement	MPa	3.810	2.561

TABLE 4.4 – Forces appliquées dans l'essai de flexion de la traverse posée sur un tapis élastique

#### 4.4.2 Résultats et discussions

Dans cette partie, nous ne nous intéressons qu'aux réponses de la traverse : les champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Deux cas de calculs sont réalisés, mais les résultats présentés correspondent au cas :  $R_1 = 3.810$  MPa et  $R_2 = 2.561$  MPa. Les deux cas seront utilisés afin de comparer ces résultats avec les résultats des essais mécaniques sur la traverse présentés dans le chapitre 3.

#### Champs de déplacements

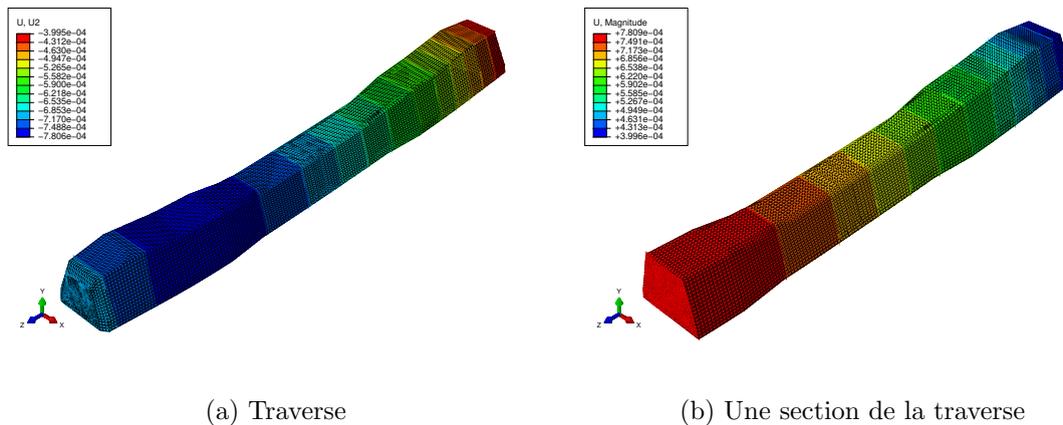


FIGURE 4.15 – Champs de déplacements verticaux dans l'essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique

Les déplacements verticaux de la traverse sont montrés dans la figure 4.15. Nous notons que le déplacement maximum est 0.78 mm, ce qui est plus petit que l'épaisseur du tapis du modèle (30 mm). Ce résultat indique que le résultat de ce calcul ne dépasse pas la limite du déplacement de la fondation. Le déplacement de la traverse est plus important du côté le plus chargé et il est bien homogène sur une même section droite.

#### Champs de déformations

Sous l'action de deux chargements différents, la traverse se déforme dis-symétriquement (voir figure 4.16a). Par contre, sur une section droite, la continuité de déformation est bien assurée, ce qui est montré dans la figure 4.16b. Sur les surfaces d'application des forces, la traverse est en compression. Au niveau de la position des rails, sur la partie inférieure où la traverse est en contact avec la fondation, la traverse est en traction. Dans la zone située milieu de la traverse, la déformation est quasi nulle. Ceci vient du fait que cette zone est modélisée comme "presque" vide, et montre une non-homogénéité de la fondation.

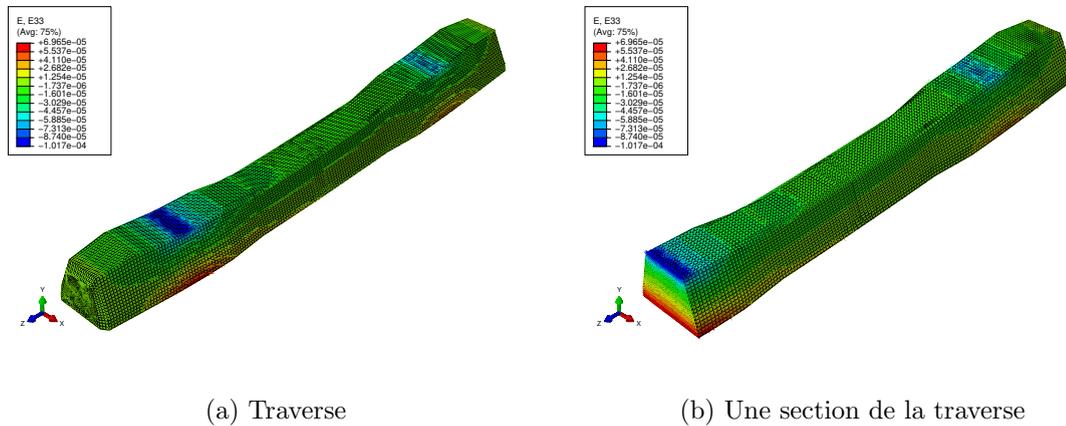


FIGURE 4.16 – Champs de déformations dans l’essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique

### Champs de contraintes

La figure 4.17 montre les champs de contraintes de Von-Mises de la traverse dans cet essai. La valeur maximale de la contrainte de Von-Mises est égale à 9.52 MPa. Cette valeur reste inférieure à la résistance des deux matériaux (béton en compression et acier en traction). Nous ne pouvons donc pas mettre en évidence un critère de rupture de Von-Mises dans ce calcul. Une discontinuité de contrainte est trouvée entre les deux matériaux.

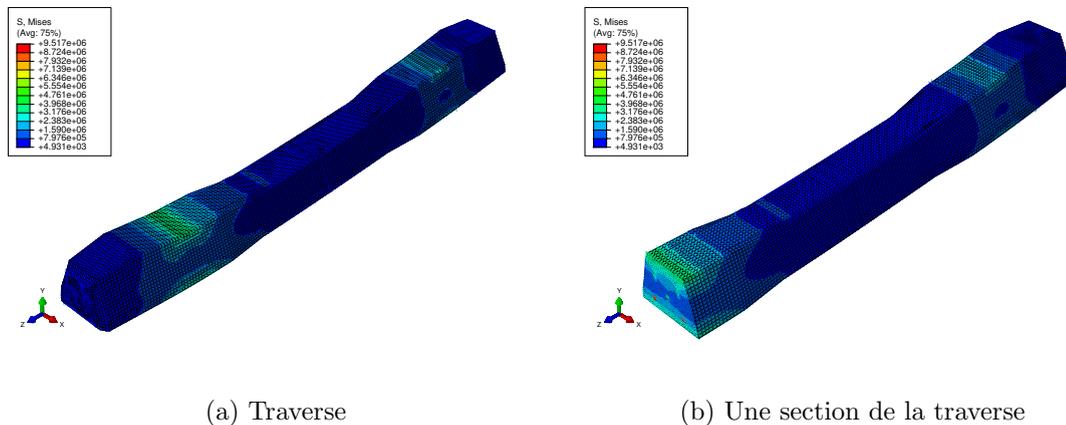


FIGURE 4.17 – Champs de contraintes de Von-Mises dans l’essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique

Les figures 4.18a et 4.18b présentent les champs de contraintes dans les deux parties du modèle de la traverse : le béton et les torons en acier. Les champs de contrainte ont des valeurs plus faibles dans la partie en béton (3.79 MPa) que dans l’acier (9.52 MPa). D’autre part, ces deux résultats montrent également que les valeurs de contraintes les plus faibles concernent la zone située du milieu de la traverse au milieu de la traverse (cela pour les deux matériaux) et que les zones sous rails “travaillent” le plus.

### 4.4.3 Comparaison mesure - modèle

La figure 4.19 présente la comparaison des mesures expérimentales avec les résultats du modèle numérique 3D de l’essai de flexion de la traverse posée sur une fondation

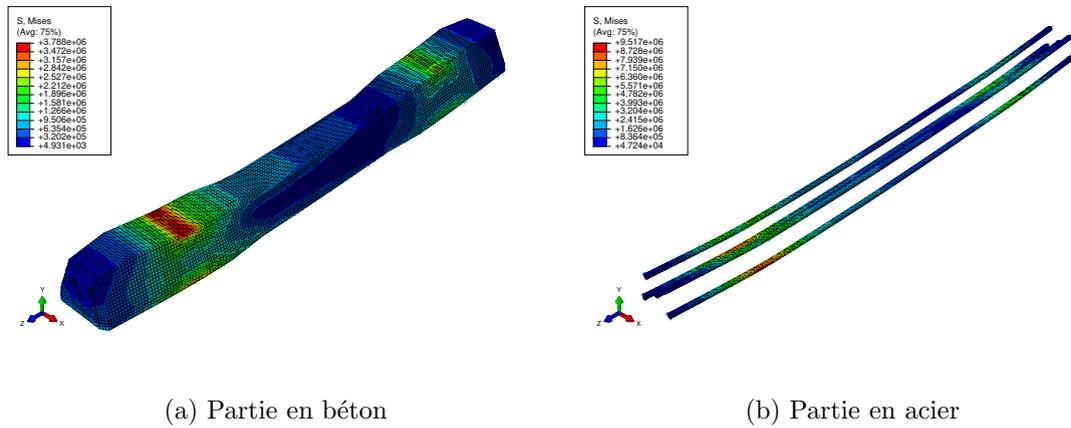


FIGURE 4.18 – Champs de contraintes de Von-Mises de chaque composant du modèle dans l'essai de flexion de la traverse sur un tapis élastique

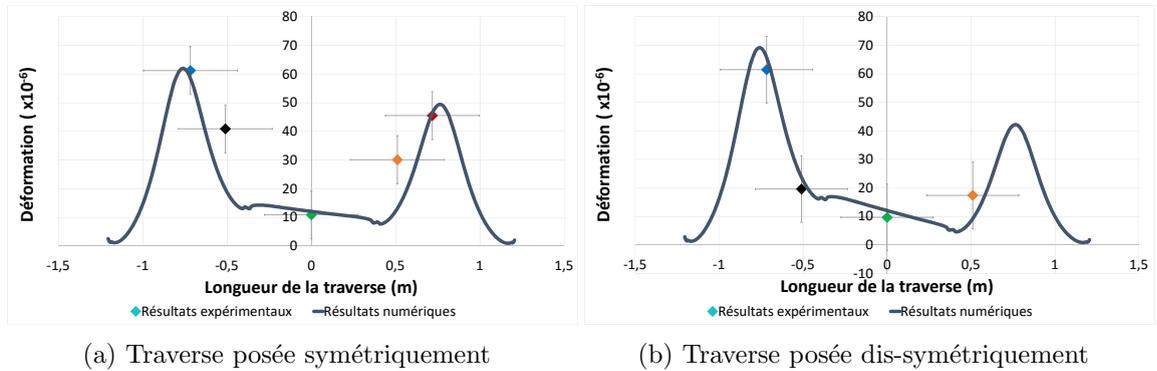


FIGURE 4.19 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de l'essai de flexion d'une traverse posée sur un tapis élastique

non-homogène.

Nous notons qu'il y a une bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux. De plus, la jauge située milieu de la traverse (J4 - vert) montre clairement dans les deux cas l'influence des caractéristiques de la partie centrale de la fondation sur la déformation de la traverse, ce qui est prédit dans le chapitre 2. Cette comparaison montre la validité du modèle de traverse posée sur une fondation non-homogène.

## 4.5 Simulation de l'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast

### 4.5.1 Modèle 3D numérique de la traverse posée dans une caisse de ballast

#### Géométrie

La traverse est posée sur une fondation homogène de dimensions : 2.9 m × 0.8 m × 0.25 m. La géométrie du modèle est donnée par la figure 4.20.

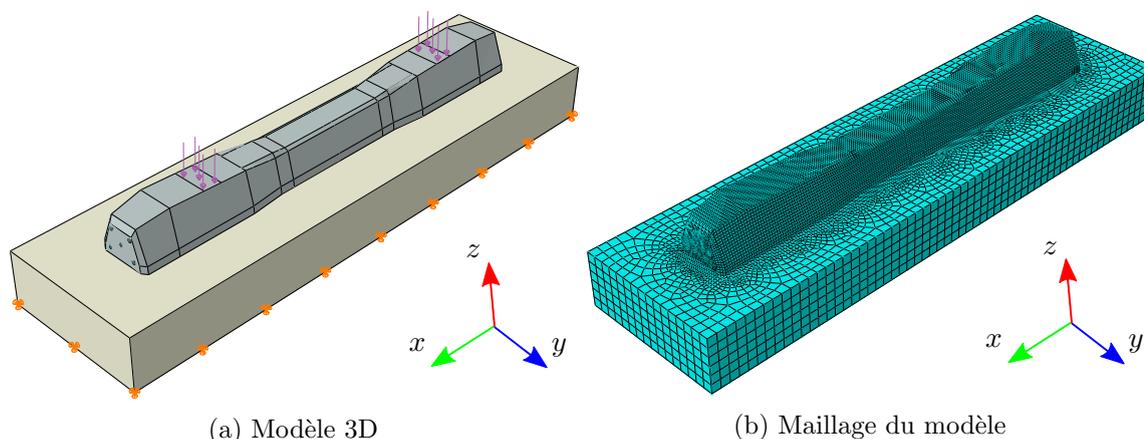


FIGURE 4.20 – Modèle numérique de l’essai de flexion d’une traverse dans une caisse de ballast

### Matériaux et maillage

- Matériaux : Les matériaux utilisés pour la traverse sont donnés dans le Tableau 4.1. La caisse de ballast est définie comme une fondation homogène avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

Paramètres	Unité	Ballast
Module d’Young	MPa	20
Densité	$\text{kgm}^{-3}$	1900
Coef. de Poisson		0.2

TABLE 4.5 – Paramètres des matériaux du tapis élastique

La démonstration du choix du module d’Young de la fondation (du ballast) est donnée en Annexe D.

- Maillage : Le maillage du modèle est montré dans la figure 4.20b. Ce maillage est créé avec le type d’éléments C3D8R sur ABAQUS avec les caractéristiques suivantes :
  - Taille moyenne de maille : 13.75 mm
  - Nombre d’éléments : 156306
  - Nombre de nœuds : 167177

Le maillage est bien régulier, et particulièrement dans la fondation.

### Conditions aux limites et chargements

Le calcul est lancé en mode “Général/Statique” dans le logiciel ABAQUS avec :

- Conditions aux limites : Seuls les déplacements nodaux sur la partie basse du ballast sont bloqués. Les surfaces de contact entre les différents matériaux sont considérées parfaites (ni glissement, ni décollement) (voir figure 4.20a).
- Chargements : Les chargements sont appliqués verticalement sur la traverse sur deux surfaces de contact rail-traverse et ils sont de type “Pression” (voir figure 4.20a). Le Tableau 4.6 présente les valeurs des forces appliquées sur la traverse dans cette simulation.

Configuration	Unité	$R_1$	$R_2$
Traverse posée symétriquement	MPa	3.436	2.934
Traverse posée dis-symétriquement	MPa	3.974	2.377

TABLE 4.6 – Forces appliquées dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast

### 4.5.2 Résultats et discussions

Deux cas de calculs correspondant aux deux configurations de la traverse indiquées dans le tableau 4.6 sont faits. Toutefois, nous ne présentons ici que les résultats du cas où la traverse est posée symétriquement avec  $R_1 = 3.436$  MPa et  $R_2 = 2.934$  MPa. Nous nous intéressons aux champs de déplacements, de déformations et de contraintes de la traverse. Les deux calculs numériques servent également à réaliser des comparaisons avec les essais mécaniques sur la traverse présentés dans le chapitre 3.

#### Champs de déplacements

Les déplacements verticaux de la traverse sont présentés dans la figure 4.21. Sous l'action de deux chargements différents appliqués sur les deux côtés, la traverse se déplace dis-symétriquement et le côté où le chargement est le plus grand présente des déplacements plus importants : sur la figure 4.21a, dans le sens de gauche à droite, les valeurs des déplacements diminuent en passant de 7.63 mm à 5.86 mm. Sur une même section droite, il n'y a pas de discontinuité de déplacement entre les deux matériaux (voir figure 4.21b).

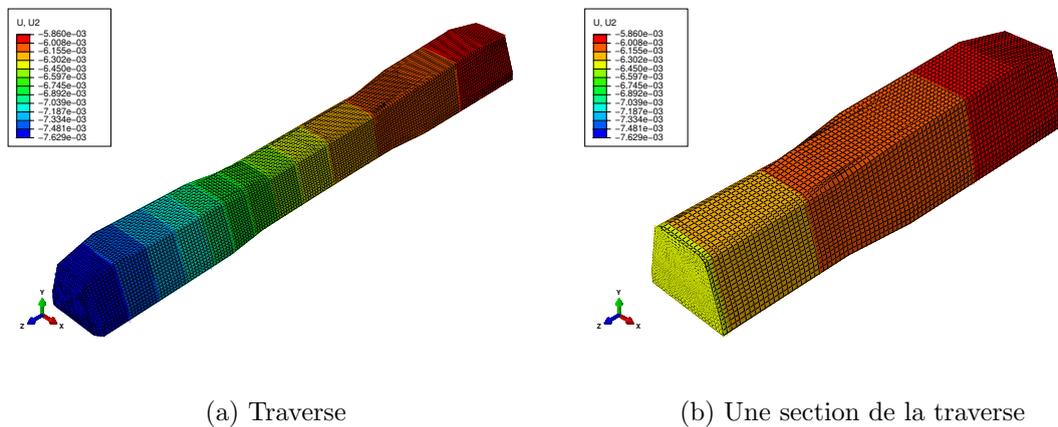


FIGURE 4.21 – Champs de déplacements verticaux dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast

#### Champs de déformations

La figure 4.22 représente les champs de déformations obtenus dans cette simulation suivant la direction longitudinale de la traverse. Aux deux points d'application des forces, la traverse est en compression. Nous voyons très bien que la déformation est plus importante à l'endroit où le chargement est le plus important. D'autre part, au milieu de la traverse, la partie supérieure est en traction (déformation positive) tandis que celle inférieure est en compression (déformation négative). Les deux valeurs extrêmes de déformations se trouvent

au milieu de la traverse ( $126.2 \mu\text{def}$  et  $-103.8 \mu\text{def}$ ). Ce résultat correspond parfaitement aux résultats du modèle analytique de la traverse en voie et posée sur une fondation homogène que nous avons présentés dans le chapitre 2. Sous des conditions d'élasticité, d'isotropie de de linéarité, sur une section droite de la traverse, les déformations sont continues entre les deux matériaux (voir figure 4.22b).

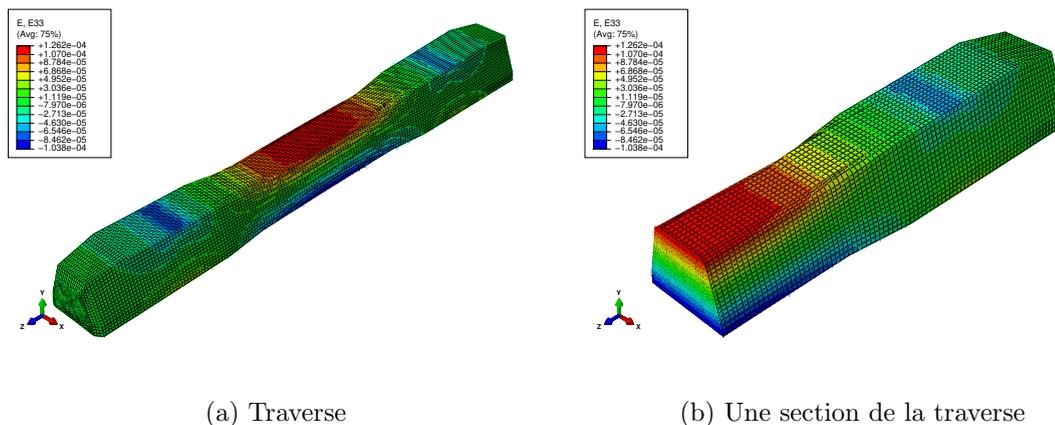


FIGURE 4.22 – Champs de déformations verticaux suivant la direction longitudinale dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast

### Champs de contraintes

Les champs de contraintes de la traverse sont donnés dans la figure 4.23. La contrainte maximum est de 16.5 MPa et elle se situe dans les torons en acier. Cette contrainte reste relativement inférieure à la résistance des deux matériaux utilisés dans ce modèle (béton en compression, acier en traction). Nous n'avons donc pas besoin de mettre en évidence un modèle d'endommagement en utilisant le critère de rupture de Von-Mises. Une discontinuité de contrainte se trouve sur une section droite de la traverse entre les deux matériaux et la contrainte dans la partie en acier est supérieure à celle dans le béton.

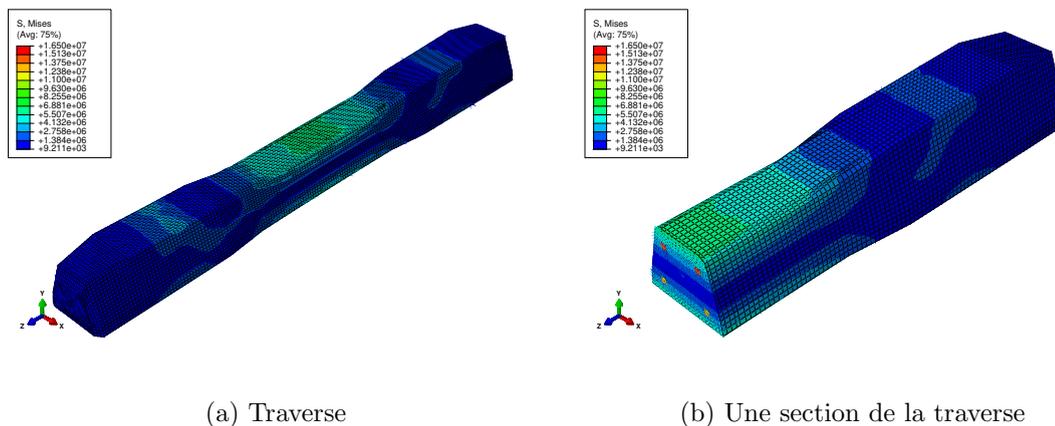


FIGURE 4.23 – Champs de contraintes de Von-Mises dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast

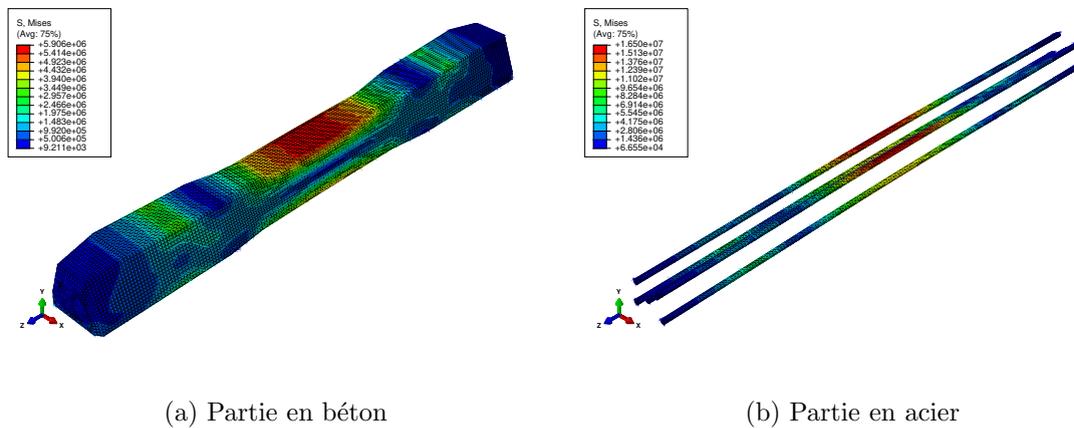


FIGURE 4.24 – Champs de contraintes de Von-Mises de chaque composant du modèle dans l'essai de flexion de la traverse posée dans une caisse de ballast

### 4.5.3 Comparaison mesure - modèle

Nous traçons sur la figure 4.25 la déformée de la traverse obtenue par le calcul numérique 3D et reportons les valeurs des déformations obtenues expérimentalement, ceci dans les configurations où d'une part la traverse est posée symétriquement par rapport au chargement et d'autre part posée dis-symétriquement.

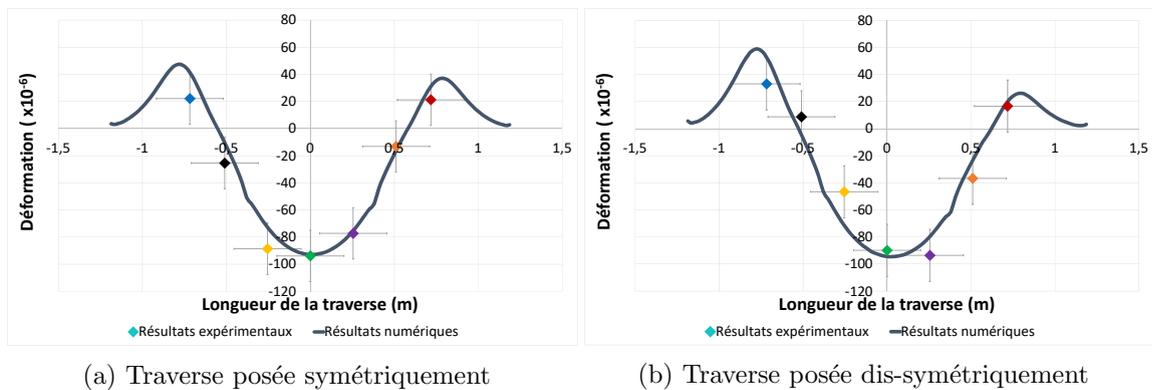


FIGURE 4.25 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de l'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast

Nous remarquons que les résultats numériques sont en accord avec les valeurs expérimentales données par les 7 jauges de déformation pour les deux cas d'essais. Nous pouvons donc conclure à la validité du modèle numérique à l'aide de la comparaison avec les essais de flexion de la traverse dans une caisse de ballast.

## 4.6 Modèle semi-analytique de la traverse en voie

La figure 4.26 présente la voie ferrée en 3D. Nous souhaitons maintenant développer un nouveau modèle de la traverse en voie en couplant d'une part le modèle numérique pour l'ensemble d'une traverse et d'autre part, le modèle analytique pour le rail. Dans ce modèle, nous étudions la réponse de la traverse soumise à des efforts verticaux.

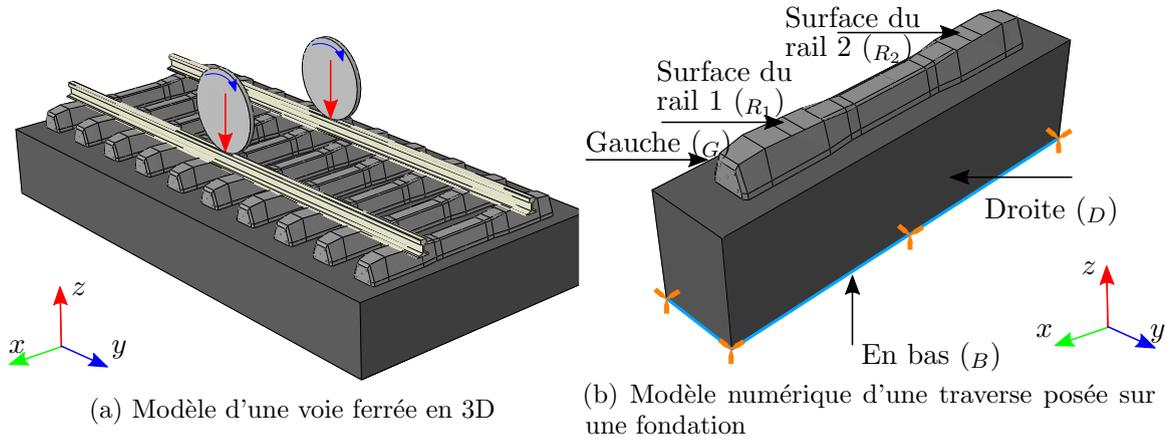


FIGURE 4.26 – Modèle semi-analytique de la traverse en voie

#### 4.6.1 Formulations mathématiques du problème

En modélisant une période de la voie ferrée par éléments finis, nous pouvons obtenir l'équation dynamique suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.8)$$

où :  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la traverse et la fondation.  $\mathbf{u}(t)$  et  $\mathbf{F}(t)$  représentent les déplacements et forces nodaux dans le domaine temporel. La notation  $(\dot{\square})$  dénote la dérivée en temps. En utilisant la transformation de Fourier, l'équation (4.8) peut se traduire dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{u}}(\omega) = \hat{\mathbf{F}}(\omega) \quad (4.9)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire,  $\hat{\mathbf{u}}(\omega)$  et  $\hat{\mathbf{F}}(\omega)$  présentent les déplacements et forces nodaux en fréquence. La matrice de rigidité dynamique (DSM) du modèle  $\mathbf{D}(\omega)$  est calculée par :

$$\mathbf{D}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (4.10)$$

En remplaçant l'équation (4.10) dans l'équation (4.9), l'équation dynamique du système peut s'écrire dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$\mathbf{D}(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \hat{\mathbf{F}}(\omega) \quad (4.11)$$

#### Conditions aux limites

Nous notons par les indices  $G$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $I$  les degrés de liberté (DDL) à gauche, à droite, en bas, à la surface du rail 1, à la surface du rail 2 et le reste des nœuds du modèle (voir figure 4.26b). Donc, l'équation (4.11) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{R_1R_1} & \mathbf{D}_{R_1R_2} & \mathbf{D}_{R_1G} & \mathbf{D}_{R_1D} & \mathbf{D}_{R_1B} & \mathbf{D}_{R_1I} \\ \mathbf{D}_{R_2R_1} & \mathbf{D}_{R_2R_2} & \mathbf{D}_{R_2G} & \mathbf{D}_{R_2D} & \mathbf{D}_{R_2B} & \mathbf{D}_{R_2I} \\ \mathbf{D}_{GR_1} & \mathbf{D}_{GR_2} & \mathbf{D}_{GG} & \mathbf{D}_{GD} & \mathbf{D}_{GB} & \mathbf{D}_{GI} \\ \mathbf{D}_{DR_1} & \mathbf{D}_{DR_2} & \mathbf{D}_{DG} & \mathbf{D}_{DD} & \mathbf{D}_{DB} & \mathbf{D}_{DI} \\ \mathbf{D}_{BR_1} & \mathbf{D}_{BR_2} & \mathbf{D}_{BG} & \mathbf{D}_{BD} & \mathbf{D}_{BB} & \mathbf{D}_{BI} \\ \mathbf{D}_{IR_1} & \mathbf{D}_{IR_2} & \mathbf{D}_{IG} & \mathbf{D}_{ID} & \mathbf{D}_{IB} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{R_1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{R_2} \\ \hat{\mathbf{u}}_G \\ \hat{\mathbf{u}}_D \\ \hat{\mathbf{u}}_B \\ \hat{\mathbf{u}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{R_1} \\ \hat{\mathbf{F}}_{R_2} \\ \hat{\mathbf{F}}_G \\ \hat{\mathbf{F}}_D \\ \hat{\mathbf{F}}_B \\ \hat{\mathbf{F}}_I \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

En prenant en compte le blocage des déplacements nodaux sur la surface en bas du modèle ( $\hat{\mathbf{u}}_B = \mathbf{0}$ ) et comme il n'y a pas de forces nodales à l'intérieur du modèle, l'équation (4.12) peut se simplifier comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{R_1R_1} & \mathbf{D}_{R_1R_2} & \mathbf{D}_{R_1G} & \mathbf{D}_{R_1D} & \mathbf{D}_{R_1I} \\ \mathbf{D}_{R_2R_1} & \mathbf{D}_{R_2R_2} & \mathbf{D}_{R_2G} & \mathbf{D}_{R_2D} & \mathbf{D}_{R_2I} \\ \mathbf{D}_{GR_1} & \mathbf{D}_{GR_2} & \mathbf{D}_{GG} & \mathbf{D}_{GD} & \mathbf{D}_{GI} \\ \mathbf{D}_{DR_1} & \mathbf{D}_{DR_2} & \mathbf{D}_{DG} & \mathbf{D}_{DD} & \mathbf{D}_{DI} \\ \mathbf{D}_{IR_1} & \mathbf{D}_{IR_2} & \mathbf{D}_{IG} & \mathbf{D}_{ID} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{R_1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{R_2} \\ \hat{\mathbf{u}}_G \\ \hat{\mathbf{u}}_D \\ \hat{\mathbf{u}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{R_1} \\ \hat{\mathbf{F}}_{R_2} \\ \hat{\mathbf{F}}_G \\ \hat{\mathbf{F}}_D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

### Condition de stationnarité en quasi-statique

En prenant la condition stationnaire en quasi-statique pour une période de la voie ferrée, nous supposons que les réponses dynamiques de cette zone ne changent pas lorsque les chargement mobiles viennent et partent dans cet intervalle. Par contre, ces réponses présentent un déphasage en temps qui est égal au temps pour que la force couvre la totalité de la longueur de cette zone :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_D(t) = \mathbf{u}_G\left(t + \frac{l}{v}\right) \\ \mathbf{F}_D(t) = -\mathbf{F}_G\left(t + \frac{l}{v}\right) \end{cases} \quad (4.14)$$

où :  $l$  et  $v$  sont la longueur de l'intervalle et la vitesse des chargements mobiles. En utilisant la transformation de Fourier, l'équation (4.14) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_D(\omega) = \hat{\mathbf{u}}_G e^{i\omega \frac{l}{v}} \\ \hat{\mathbf{F}}_D(\omega) = -\hat{\mathbf{F}}_G e^{i\omega \frac{l}{v}} \end{cases} \quad (4.15)$$

En remplaçant l'équation (4.15) dans l'équation (4.13), nous obtenons facilement la nouvelle forme de l'équation (4.13) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{R_1R_1} & \mathbf{D}_{R_1R_2} & \tilde{\mathbf{D}}_{R_1G} & \mathbf{D}_{R_1I} \\ \mathbf{D}_{R_2R_1} & \mathbf{D}_{R_2R_2} & \tilde{\mathbf{D}}_{R_2G} & \mathbf{D}_{R_2I} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{GR_1} & \tilde{\mathbf{D}}_{GR_2} & \tilde{\mathbf{D}}_{GG} & \tilde{\mathbf{D}}_{GI} \\ \mathbf{D}_{IR_1} & \mathbf{D}_{IR_2} & \tilde{\mathbf{D}}_{IG} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{R_1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{R_2} \\ \hat{\mathbf{u}}_G \\ \hat{\mathbf{u}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{R_1} \\ \hat{\mathbf{F}}_{R_2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

avec les nouveaux composants de la matrice  $\mathbf{D}(\omega)$  qui peuvent être déterminés à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{D}}_{GG} = \mathbf{D}_{GG} + \mathbf{D}_{GD}e^{i\omega \frac{l}{v}} + \mathbf{D}_{DG}e^{-i\omega \frac{l}{v}} + \mathbf{D}_{DD} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{GR_1} = \mathbf{D}_{GR_1} + \mathbf{D}_{DR_1}e^{-i\omega \frac{l}{v}}, & \tilde{\mathbf{D}}_{R_1G} = \mathbf{D}_{R_1G} + \mathbf{D}_{R_1D}e^{i\omega \frac{l}{v}} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{GR_2} = \mathbf{D}_{GR_2} + \mathbf{D}_{DR_2}e^{-i\omega \frac{l}{v}}, & \tilde{\mathbf{D}}_{R_2G} = \mathbf{D}_{R_2G} + \mathbf{D}_{R_2D}e^{i\omega \frac{l}{v}} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{GI} = \mathbf{D}_{GI} + \mathbf{D}_{DI}e^{-i\omega \frac{l}{v}}, & \tilde{\mathbf{D}}_{IG} = \mathbf{D}_{IG} + \mathbf{D}_{ID}e^{i\omega \frac{l}{v}} \end{cases} \quad (4.17)$$

L'équation (4.16) représente la forme réduite de la matrice DSM en quasi-statique.

### Hypothèse sur le déplacement

Dans l'équation (4.16), nous devons calculer les forces de réactions appliquées sur la traverse  $\hat{\mathbf{F}}_{R_1}$  et  $\hat{\mathbf{F}}_{R_2}$  aux deux positions du rail. En supposant que la traverse est rigide avec 1 DDL correspondant à ses déplacements verticaux et que les surfaces où s'appliquent des forces  $S_{R_1}$  et  $S_{R_2}$  ont la même direction que les déplacements nodaux, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \forall i \in S_{R_1} : \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v \text{ et } \hat{\mathbf{F}}_{R_1} = \sum_i \hat{\mathbf{F}}_{R_{1_i}} = -\hat{\mathbf{R}}_1^v \\ \forall i \in S_{R_2} : \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{w}}_{R_2}^v \text{ et } \hat{\mathbf{F}}_{R_2} = \sum_i \hat{\mathbf{F}}_{R_{2_i}} = -\hat{\mathbf{R}}_2^v \end{cases} \quad (4.18)$$

où :  $S_{R_1}$ ,  $\hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_1^v$ ,  $S_{R_2}$ ,  $\hat{\mathbf{w}}_{R_2}^v$  et  $\hat{\mathbf{R}}_2^v$  sont respectivement la surface, le déplacement et la force de réaction appliquée sur la surface au rail 1 et 2. Par conséquent, si nous notons  $d_{ik}$  et  $d_{ki}$  qui sont la ligne et colonne de la matrice DSM et correspondent aux forces nodales  $\hat{\mathbf{F}}_{R_{1_i}}$  et aux DDL  $\hat{\mathbf{u}}_i$ , nous avons :

$$\hat{\mathbf{F}}_{R_{1_i}} = \sum_k d_{ik} \hat{\mathbf{u}}_k \quad (\forall i \in S_{R_1}) \quad (4.19)$$

En remplaçant l'équation (4.19) dans les équations (4.18), on peut réécrire :

$$-\hat{\mathbf{R}}_1^v = \sum_{i \in S_{R_1}} \left( \sum_k d_{ik} \hat{\mathbf{u}}_k \right) = \sum_k \left( \sum_{i \in S_{R_1}} d_{ik} \right) \hat{\mathbf{u}}_k = \sum_k \tilde{d}_{S_{R_1}k} \hat{\mathbf{u}}_k \quad (4.20)$$

où :  $\tilde{d}_{S_{R_1}k} = \sum_{i \in S_{R_1}} d_{ik}$ . Par conséquent, l'équation (4.20) définit la nouvelle ligne de la

matrice DSM qui est obtenue en sommant les lignes correspondant aux forces nodales  $\hat{\mathbf{F}}_{R_{1_i}}$  avec  $i \in S_{R_1}$ . De même façon, nous avons :

$$\hat{\mathbf{F}}_{R_{1_k}} = \sum_{i \notin S_{R_1}} d_{ki} \hat{\mathbf{u}}_i + \sum_{i \in S_{R_1}} d_{ki} \hat{\mathbf{u}}_i \quad (\forall k) \quad (4.21)$$

En prenant en compte l'hypothèse de même déplacement aux surfaces des rails que nous avons présenté dans l'équation (4.18), l'équation (4.21) peut se réécrire comme suit :

$$\hat{\mathbf{F}}_{R_{1_k}} = \sum_{i \notin S_{R_1}} d_{ki} \hat{\mathbf{u}}_i + \left( \sum_{i \in S_{R_1}} d_{ki} \right) \hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v = \sum_{i \notin S_{R_1}} d_{ki} \hat{\mathbf{u}}_i + \tilde{d}_{kS_{R_1}} \hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v \quad (4.22)$$

où :  $\tilde{d}_{kS_{R_1}} = \sum_{i \in S_{R_1}} d_{ki}$ . Donc, l'équation (4.22) définit la nouvelle colonne de la matrice DSM qui est calculée en sommant les colonnes correspondant aux DDL  $\hat{\mathbf{u}}_i$  avec  $i \in S_{R_1}$ .

De la même manière, nous pouvons calculer la nouvelle ligne  $\tilde{d}_{S_{R_2}k}$  et la nouvelle colonne  $\tilde{d}_{kS_{R_2}}$  de la matrice DSM qui sont obtenues respectivement en sommant des lignes correspondant aux forces nodales  $\hat{\mathbf{F}}_{R_{2_i}}$  ( $i \in S_{R_2}$ ) et en sommant des colonnes correspondant aux DDL  $\hat{\mathbf{u}}_i$  ( $i \in S_{R_2}$ ). Alors, nous pouvons remplacer les lignes et colonnes de la matrice DSM qui correspondent aux DDL et forces nodales aux deux surfaces du rail  $S_{R_1}$ ,  $S_{R_2}$  par leurs sommes et nous obtiendrons les nouvelles lignes et colonnes qui justifient l'équation

(4.16) avec les DDL et forces nodales remplacées par le déplacement de la traverse et la force de réaction aux deux positions du rail :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{R_1 R_1}^* & \mathbf{D}_{R_1 R_2}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{R_1 G}^* & \mathbf{D}_{R_1 I}^* \\ \mathbf{D}_{R_2 R_1}^* & \mathbf{D}_{R_2 R_2}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{R_2 G}^* & \mathbf{D}_{R_2 I}^* \\ \tilde{\mathbf{D}}_{GR_1}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{GR_2}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{GG} & \tilde{\mathbf{D}}_{GI} \\ \mathbf{D}_{IR_1}^* & \mathbf{D}_{IR_2}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{IG} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v \\ \hat{\mathbf{w}}_{R_2}^v \\ \hat{\mathbf{u}}_G \\ \hat{\mathbf{u}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{R}}_1^v \\ -\hat{\mathbf{R}}_2^v \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### Couplage avec le modèle du rail

Quand le rail et ses supports sont modélisés par le modèle de poutre infinie périodiquement supportée soumise à des chargements mobiles verticaux et en prenant en compte la semelle sous rail entre la traverse et le rail, la relation entre la force de réaction verticale appliquée sur la traverse et son déplacement pour chaque rail  $k$  est établie dans l'équation 2.7 :

$$\hat{\mathbf{R}}_k^v(\omega) = \frac{k_p^v \mathcal{K}^v}{k_p^v + \mathcal{K}^v} \hat{\mathbf{w}}_{R_k}^v(\omega) + \frac{k_p^v}{k_p^v + \mathcal{K}^v} \mathcal{Q}_k(\omega) \quad (4.24)$$

L'équation (4.24) peut s'exprimer comme ci-dessous :

$$\eta_{\mathcal{K}} \hat{\mathbf{R}}_k^v = \hat{\mathbf{w}}_{R_k}^v + \hat{\mathbf{w}}_{\mathcal{Q}_k} \quad (4.25)$$

avec deux fonctions  $\eta_{\mathcal{K}}$  et  $\hat{\mathbf{w}}_{\mathcal{Q}_k}$  qui sont calculées par (voir équation (C.2)) :

$$\begin{cases} \eta_{\mathcal{K}} = \frac{k_p^v + \mathcal{K}^v}{k_p^v \mathcal{K}^v} \\ \hat{\mathbf{w}}_{\mathcal{Q}_k} = \frac{1}{v E_r I_r \left[ \left( \frac{\omega}{v} \right)^4 - \lambda_r^4 \right]} \sum_{j=1}^K \mathcal{Q}_j^{[k]} e^{-i\omega \frac{D_j}{v}} \end{cases}$$

La forme de l'équation (4.25) peut se traduire sous la forme matricielle avec deux rails comme suit :

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1^v \\ \hat{\mathbf{R}}_2^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v \\ \hat{\mathbf{w}}_{R_2}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{\mathcal{Q}_1} \\ \hat{\mathbf{w}}_{\mathcal{Q}_2} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

où la matrice  $\mathbf{H}$  est définie par :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \eta_{\mathcal{K}} & 0 \\ 0 & \eta_{\mathcal{K}} \end{bmatrix}$$

### Calcul de la réponse du modèle

En remplaçant les deux dernières lignes et deux dernières colonnes de l'équation (4.23) dans les premières lignes et colonnes, nous pouvons obtenir :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1^v \\ \hat{\mathbf{R}}_2^v \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{D}}_s \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{R_1}^v \\ \hat{\mathbf{w}}_{R_2}^v \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

où la matrice  $\tilde{\mathbf{D}}_s$  est calculée par :

$$\tilde{\mathbf{D}}_s = \mathbf{D}_{NN} - \mathbf{D}_{NM} \mathbf{D}_{MM}^{-1} \mathbf{D}_{MN} \quad (4.28)$$

avec les quatre matrices  $\mathbf{D}_{NN}$ ,  $\mathbf{D}_{NM}$ ,  $\mathbf{D}_{MM}$  et  $\mathbf{D}_{MN}$  qui sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{NN} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{R_1 R_1}^* & \mathbf{D}_{R_1 R_2}^* \\ \mathbf{D}_{R_2 R_1}^* & \mathbf{D}_{R_2 R_2}^* \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{NM} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{R_1 L}^* & \mathbf{D}_{R_1 I}^* \\ \tilde{\mathbf{D}}_{R_2 L}^* & \mathbf{D}_{R_2 I}^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{MN} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LR_1}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{LR_2}^* \\ \mathbf{D}_{IR_1}^* & \mathbf{D}_{IR_2}^* \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{MM} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LI} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les forces de réactions appliquées sur la traverse peuvent se déterminer en utilisant les deux équations (4.26) et (4.27) :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \hat{\mathbf{R}}_2 \end{bmatrix} = \left( \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{D}}_s^{-1} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{Q_1} \\ \hat{\mathbf{w}}_{Q_2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

L'équation (4.29) nous permet de calculer les forces de réactions appliquées sur la traverse. En remplaçant le résultat obtenu de l'équation (4.29) dans l'équation (4.23), nous pouvons déterminer la réponse du modèle. Par conséquent, dans ce modèle, les réponses dynamiques de la traverse et de la fondation peuvent être calculées sans avoir besoin de modéliser les DDL des rails et des semelles sous rail.

## 4.6.2 Comparaison avec le modèle analytique de la traverse en voie

### Géométrie, matériaux, maillage, conditions aux limites et chargements

Dans cette partie, nous allons effectuer une comparaison avec le modèle analytique de la traverse en voie que nous avons présenté dans le chapitre 2. Nous rappelons que le modèle analytique est basé sur le modèle d'une poutre de section uniforme posée sur une fondation visco-élastique (Kelvin-Voigt). Pour ce faire, à l'aide du logiciel ABAQUS, nous créons un modèle de poutre de section uniforme

- Géométrie : Les dimensions de la traverse sont : 2.41 m  $\times$  0.24 m  $\times$  0.2 m correspondant aux : longueur, largeur et hauteur de la traverse. La traverse est posée sur une fondation homogène de dimensions suivantes : 3 m  $\times$  0.6 m  $\times$  0.8 m (longueur, largeur et profondeur). La traverse est posée de manière symétrique sur la fondation et la géométrie de ce modèle est présentée dans la figure 4.27a.
- Matériaux : Les matériaux utilisés sont considérés étant élastique, linéaire et isotrope. La traverse est fabriquée en béton avec les caractéristiques mécaniques données dans le Tableau 4.1. Nous remarquons qu'il n'y a pas de torons en acier dans ce modèle de la traverse. La fondation est un milieu homogène avec les caractéristiques mécaniques suivantes : le module d'Young :  $E_f = 125$  MPa, la densité :  $\rho_f = 1900$  kgm<sup>-3</sup> et le coefficient de Poisson :  $\nu_f = 0.24$ . Le rail et la semelle sous rail ont les caractéristiques mécaniques données dans les Tableaux 2.3 et 2.4.
- Maillage : La figure 4.27b présente le maillage de ce modèle qui est créé à l'aide du logiciel ABAQUS à l'aide du type d'élément hexagonal avec intégration réduite C3D8R. Ce modèle contient 21720 éléments et 24662 nœuds. La taille moyenne de maille de la traverse et de la fondation sont respectivement 22 mm et 100 mm. Le maillage est bien régulier, et particulièrement dans la partie de la traverse.
- Conditions aux limites : Tous les déplacements nodaux sur la surface en bas de la fondation sont bloqués. La surface de contact entre la partie en béton de la traverse et la fondation est considérée parfaite (ni glissement, ni décollement).

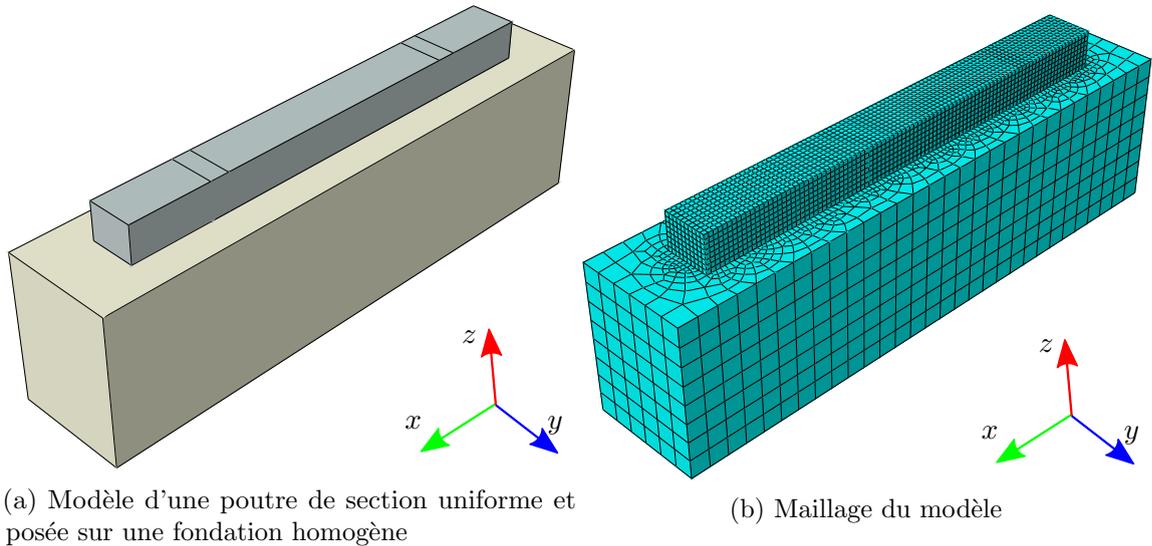


FIGURE 4.27 – Modèle semi-analytique d'une poutre de section uniforme et posée sur une fondation homogène

- **Chargements** : Les chargements sont appliqués verticalement sur les surfaces de contact aux rail 1 et rail 2 de la traverse. Nous allons étudier deux cas de chargements dans ce modèle : chargements symétriques ( $Q_1 = Q_2 = 100$  kN) et chargements dissymétriques ( $Q_1 = 80$  kN,  $Q_2 = 100$  kN). La vitesse du chargement est  $v = 150$  kmh<sup>-1</sup>.

### Visualisation des déplacements de la traverse

La figure 4.28 montre la visualisation en 3D du déplacement de la traverse dans deux cas de chargements. La position des rails 1 et 2 est représentée respectivement par les pointillés rouge et bleu.

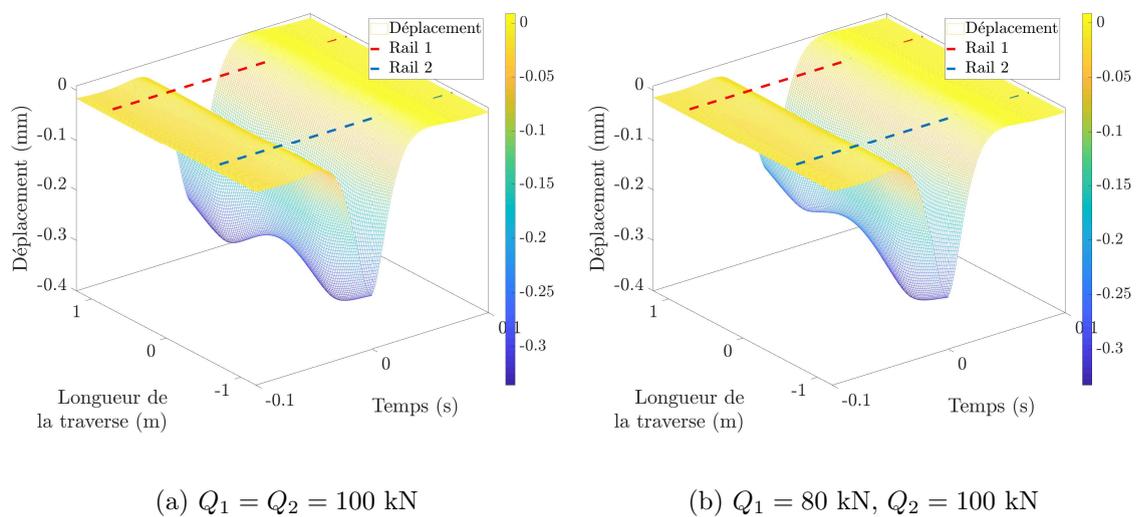


FIGURE 4.28 – Déplacement de la traverse de section uniforme et posée sur une fondation homogène

Nous voyons clairement que la forme déformée de la traverse est symétrique lors de

la symétrie des chargements. Dans le cas de chargements dissymétriques, la traverse se déforme aussi non-symétriquement.

### Validation du modèle en comparant avec le modèle analytique de la traverse en voie

Pour valider ce modèle, nous utilisons le modèle dynamique de la traverse en voie que nous avons présenté dans le chapitre 2 avec une traverse de mêmes caractéristiques mécaniques. Les autres paramètres d'entrée du modèle sont les mêmes que ceux utilisés pour le modèle numérique.

- Chargements symétriques : Dans ce cas, les forces de réactions sur les deux côtés de la traverse sont les mêmes (voir la figure 4.29a). La force obtenue par le modèle analytique et le modèle numérique sont respectivement : 48.35 kN et 48.47 kN. La différence entre deux modèles est 0.25%. La différence des forces de réaction génère une petite différence en déplacement entre les deux modèles qui est montrée dans la figure 4.29b.

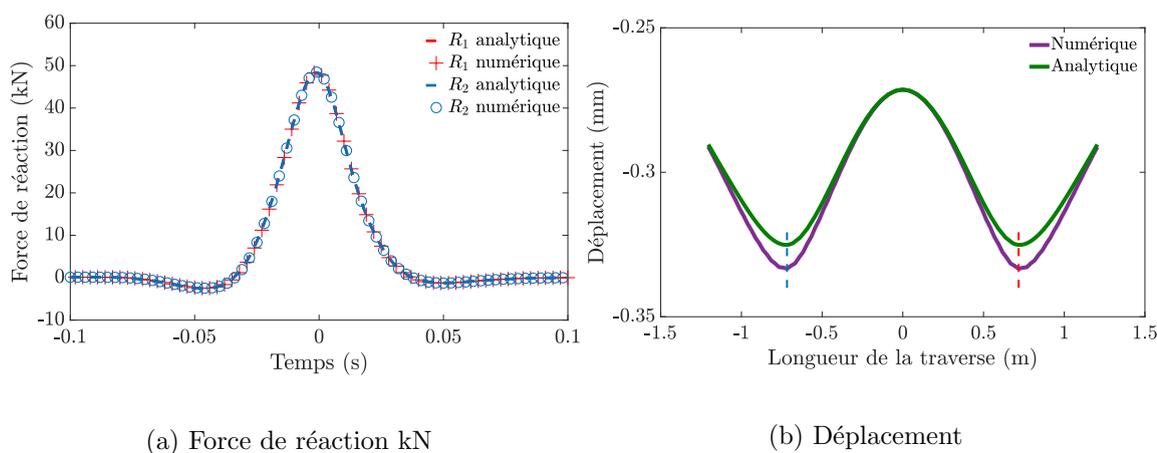


FIGURE 4.29 – Comparaison des réponses de la traverse de section uniforme soumise à des chargements symétriques entre le modèle numérique et le modèle analytique

Dans cette figure, les lignes verte et violette présentent la forme déformée de la traverse calculée par le modèle numérique et le modèle analytique. La différence du déplacement aux deux rails est 2.7%.

- Chargements dissymétriques : En cas de dissymétrie des chargements, les forces de réactions aux deux côtés de la traverse calculées à l'aide des deux modèles ont une différence de 0.37% (voir la figure 4.30a).

La figure 4.30b montre la forme déformée de la traverse avec les deux modèles. La différence du déplacement de la traverse entre les deux modèles est 3.7% et 1.8% correspondant aux positions des deux rails.

En comparant les résultats calculés par le modèle numérique et ceux calculés par le modèle analytique, nous remarquons que ces deux modèles donnent des réponses pratiquement identiques. Nous pouvons alors conclure à la validité du modèle numérique.

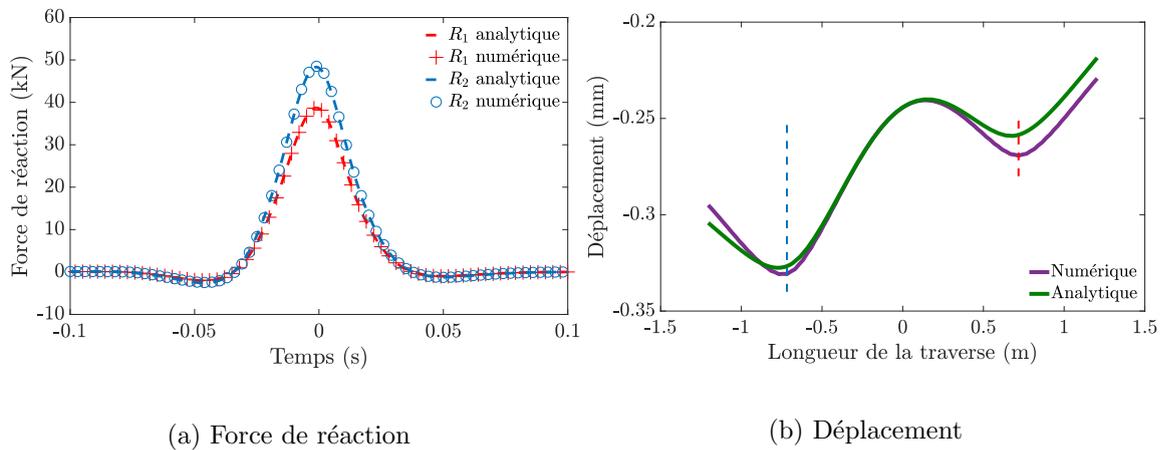


FIGURE 4.30 – Comparaison des réponses de la traverse de section uniforme soumise à des chargements dissymétriques entre le modèle numérique et le modèle analytique

### 4.6.3 Étude de l'influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse

#### Géométrie, matériaux, maillage, conditions aux limites et chargements

Dans cette partie, nous étudions la non-uniformité de section d'une poutre sur les réponses dynamiques en voie. La fondation est dans ce cas considérée homogène. La géométrie de la traverse de section non-uniforme est créée à l'aide du logiciel ABAQUS.

- Géométrie : L'étude est réalisée en prenant la géométrie réelle de la traverse M450 présentée dans la partie 4.2. La fondation est homogène avec les dimensions déjà mentionnées. La traverse est posée de manière symétrique sur la fondation et la géométrie de ce modèle est présentée dans la figure 4.31a.

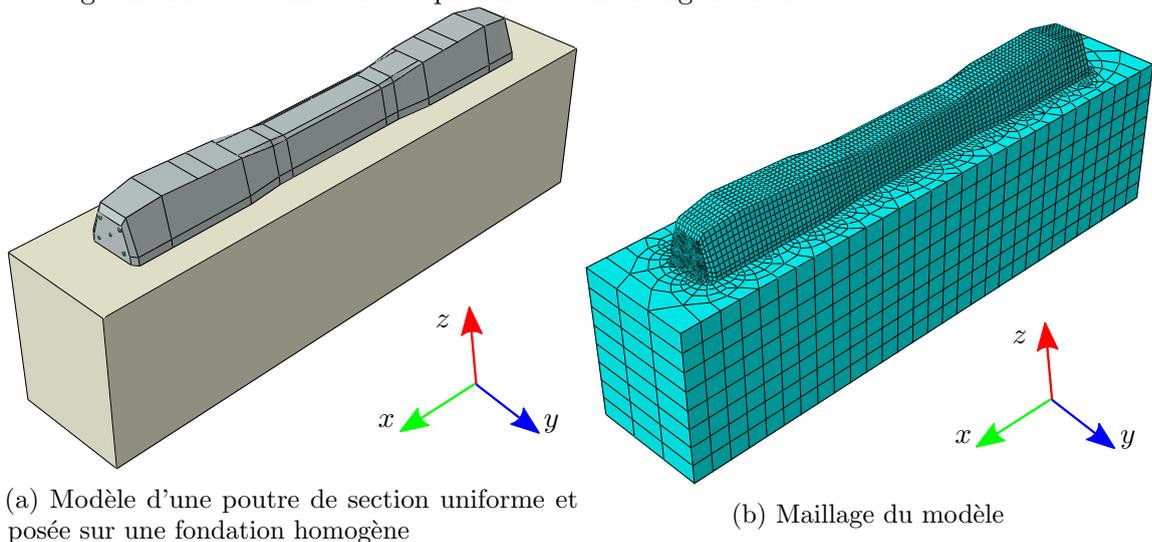


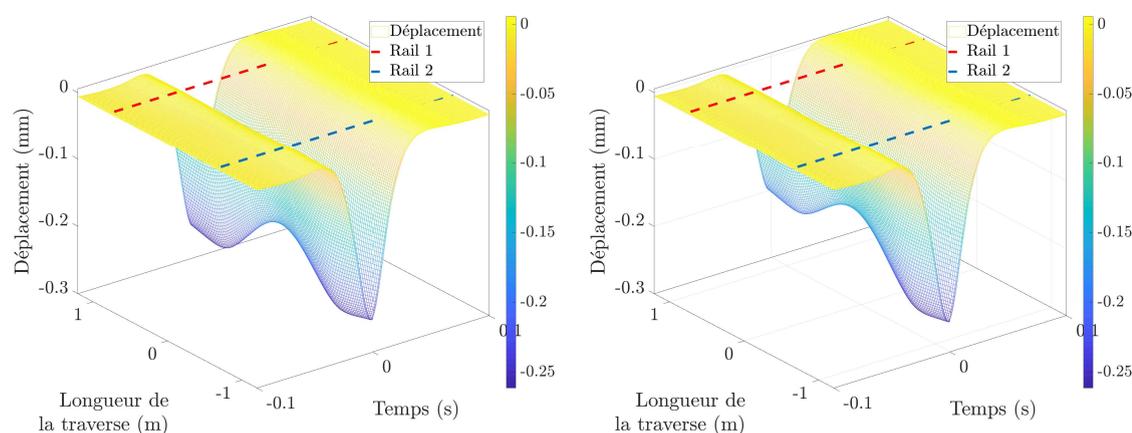
FIGURE 4.31 – Modèle semi-analytique d'une poutre de section non-uniforme et posée sur une fondation homogène

- Matériaux : La traverse est fabriquée en béton avec les caractéristiques mécaniques données dans le Tableau 4.1. Les caractéristiques mécaniques de la fondation, du rail et de la semelle sous rail sont les mêmes que dans le cas précédent.

- Maillage : La figure 4.31b présente le maillage de ce modèle qui est créé à l'aide du logiciel ABAQUS à l'aide du type d'élément hexagonal avec intégration réduite C3D8R. Ce modèle contient 78872 éléments et 83218 nœuds. Le maillage est bien régulier. La partie de la fondation a une taille moyenne de maille de 100 mm. Le maillage de la traverse est un peu moins dense que celui utilisé dans la partie 4.2 pour réduire le temps de calcul et la taille moyenne de maille est 23.5 mm.
- Conditions aux limites et chargements : Toutes les conditions aux limites et les chargements sont identiques à celles utilisées précédemment.

### Visualisation des déplacements de la traverse

La figure 4.32 montre les déplacements en 3D de la traverse calculés avec le modèle numérique dans deux cas de chargements. La position des rails 1 et 2 est représentée respectivement par les pointillés rouge et bleu.



(a)  $Q_1 = Q_2 = 100$  kN

(b)  $Q_1 = 80$  kN,  $Q_2 = 100$  kN

FIGURE 4.32 – Déplacement de la traverse de section non-uniforme et posée sur une fondation homogène

### Comparaison avec le modèle numérique d'une traverse de section uniforme posée sur une fondation homogène

Pour étudier l'influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse, nous comparons les résultats calculés avec une poutre de section uniforme du modèle analytique aux résultats calculés par le modèle numérique. Les caractéristiques mécaniques de la traverse de section uniforme sont les mêmes que celles de la section non-uniforme.

- Chargements symétriques : La figure 4.33a montre la comparaison des forces de réaction appliquées sur deux côtés de la traverse qui sont égales dans ce cas. Les résultats du modèle analytique et du modèle numérique sont respectivement 50.78 kN et 50.97 kN. La différence de force de réaction entre les deux modèles est 0.38%. En regardant la comparaison du déplacement de la traverse qui est présentée dans la figure 4.33b, nous voyons que la traverse de section uniforme se déforme plus que celle de section non-uniforme.

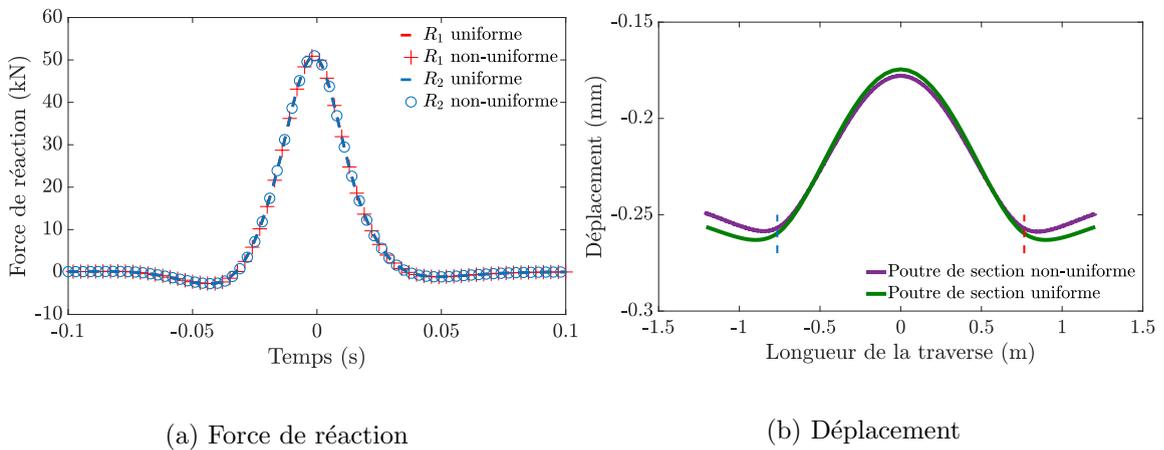


FIGURE 4.33 – Influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse soumise à des chargements symétriques

- Chargements dissymétriques : En cas de dissymétrie des chargements, les forces de réactions appliquées sur les deux côtés de la traverse obtenues pour les deux modèles ont aussi une différence de 0.51%. L'influence de la non-uniformité de section de la poutre sur le déplacement est montrée dans la figure 4.34b. Visuellement, nous pouvons conclure que la forme déformée d'une poutre de section non-uniforme est moins importante que celle d'une poutre de section uniforme. La différence maximale du déplacement entre les deux modèles est 2.1% et se trouve au niveau du rail 2.

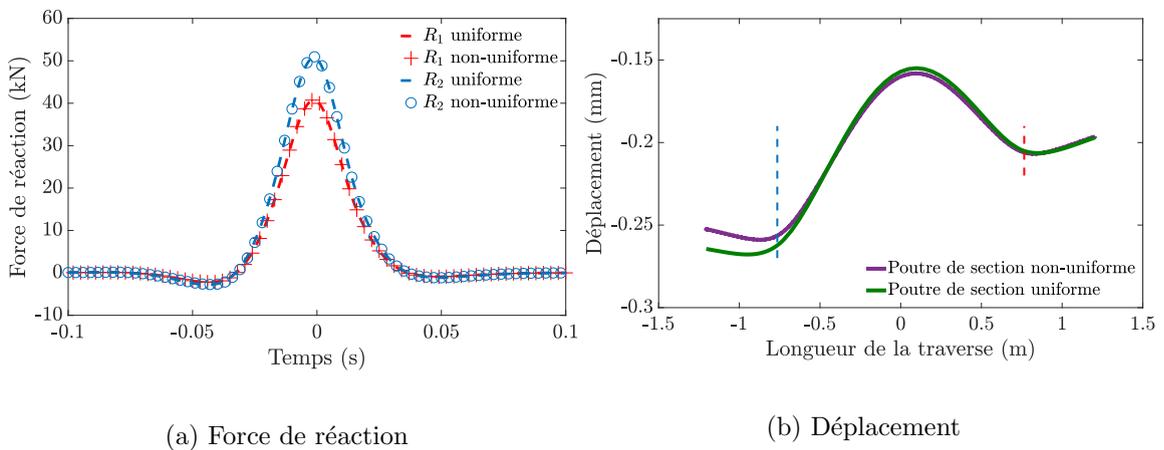


FIGURE 4.34 – Influence de la non-uniformité de section sur les réponses de la traverse soumise à des chargements dissymétriques

En étudiant la différence des réponses dynamiques de la traverse en voie entre le modèle d'une poutre de section uniforme (analytique) et d'une poutre de section non-uniforme (numérique), nous pouvons conclure que la poutre de section non-uniforme se déforme moins que la poutre de section uniforme (au milieu et aux deux positions du rail). Ce phénomène vient de la différence de géométrie, et, l'avantage du modèle numérique est de pouvoir obtenir les réponses les plus précises.

#### 4.6.4 Étude de l'influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse

Dans cette partie, nous effectuons une étude de l'influence de la non-homogénéité sur la réponse de la traverse. Une comparaison entre des modèles numériques sera effectuée et nous allons comparer ensuite avec le modèle analytique qui est basée sur l'hypothèse d'une poutre de section homogène.

##### Géométrie, matériaux, maillage, conditions aux limites et chargements

- Géométrie : La traverse utilisée est la même que pour l'étude précédente. Par contre, la fondation se compose des 3 parties différentes. Nous différencions ces parties à l'aides des indices  $g$ ,  $m$  et  $d$  représentant les parties à gauche, au milieu et à droite de la fondation. La longueur de chaque partie est  $l_g = l_d = 1.12$  m,  $l_m = 0.76$  m. La traverse est posée de manière symétrique sur la fondation. La figure 4.35a présente la géométrie du modèle.

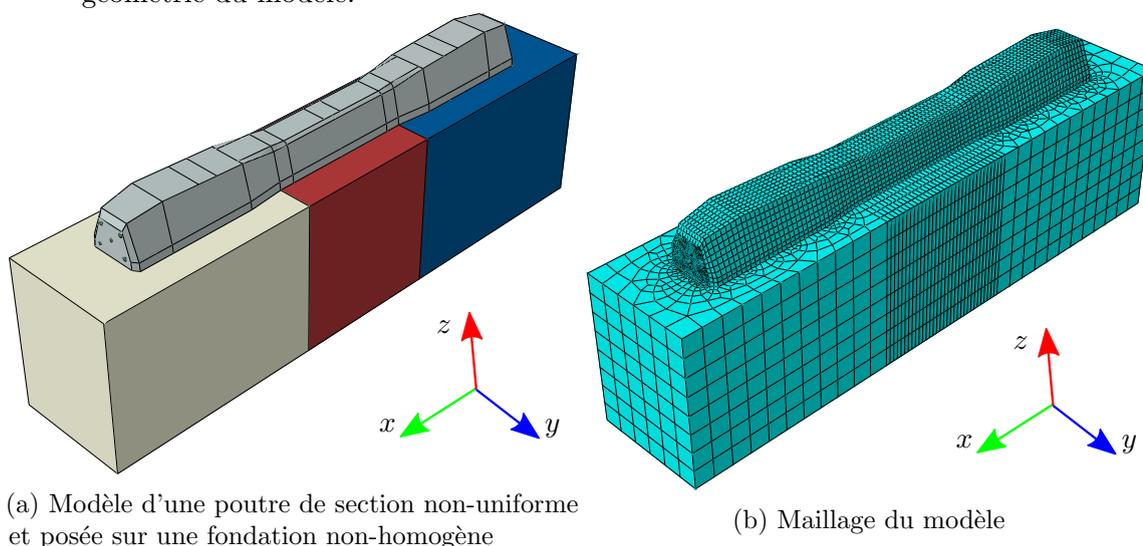


FIGURE 4.35 – Modèle semi-analytique de la traverse de section non-uniforme et posée sur une fondation non-homogène

- Matériaux : Pour la fondation, nous nous concentrons sur le cas de la fondation non-homogène symétrique avec le module d'Young suivant :  $E_g = E_d = E_f$ ,  $E_m = 50$  MPa. La densité et le coefficient de Poisson de 3 parties sont les mêmes :  $\rho_g = \rho_m = \rho_d = \rho_f$  et  $\nu_g = \nu_m = \nu_d = \nu_f$ . Nous remarquons qu'avec ce choix de fondation, le facteur de consolidation est calculé par  $k_c = \frac{E_m}{E_f}$  et  $k_c = 0.3$ . Les caractéristiques mécaniques des autres composants sont les mêmes que dans le cas précédent.
- Maillage : La figure 4.35b présente le maillage de ce modèle qui est créé à l'aide du logiciel ABAQUS et du type d'élément hexagonal avec intégration réduite C3D8R. Ce modèle contient 79360 éléments et 84019 nœuds. La taille moyenne de maille de la traverse est 23.5 mm. Le maillage est bien régulier. La taille moyenne de maille suivant la profondeur est 100 mm. Sur le long de la fondation, la taille moyenne dans la partie au milieu est la même que pour la traverse.
- Conditions aux limites et chargements : Toutes les conditions aux limites et les chargements sont les mêmes que dans le cas précédent.

### Visualisation des déplacements de la traverse

Les déplacements de la traverse posée sur une fondation non-homogène dans deux cas de chargements sont présentés dans les figures 4.36. La position des rail 1 et 2 est présentée respectivement par les pointillés rouge et bleu.

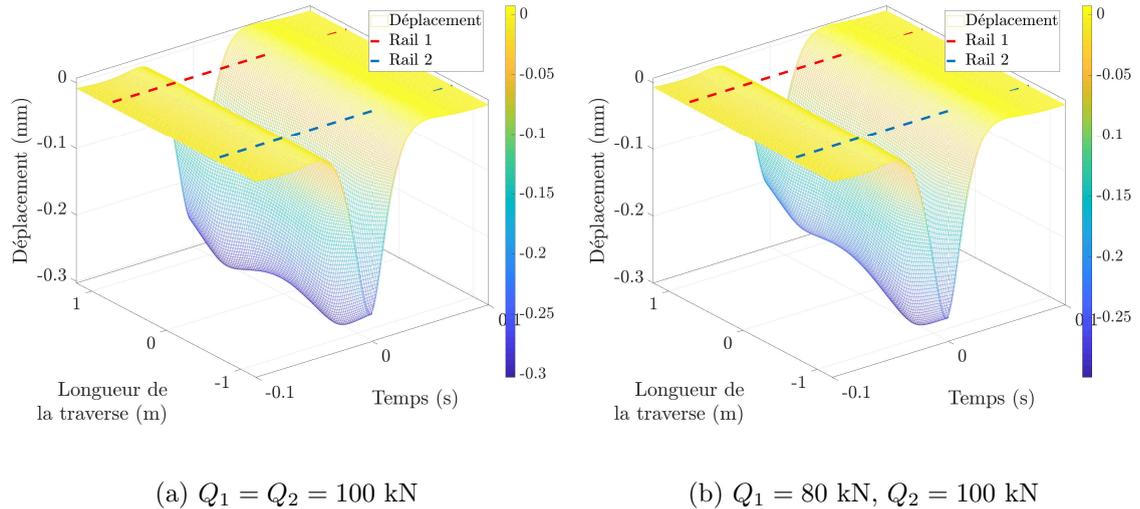


FIGURE 4.36 – Déplacement de la traverse de section non-uniforme et posée sur une fondation non-homogène

### Comparaison avec le modèle analytique de la traverse en voie posée sur une fondation non-homogène

Grâce au modèle dynamique de la traverse en voie posée sur une fondation non-homogène présenté dans le chapitre 2, nous effectuons une comparaison entre les résultats calculés par le modèle numérique et le modèle analytique. Dans cette étude, le facteur de consolidation est  $k_c = 0.3$ .

- Chargements symétriques : Les forces de réaction appliquées sur la traverse sont présentées dans la figure 4.37a. La force de réaction calculée par le modèle analytique est 49.67 kN tandis que celle calculée par le modèle numérique est 49.40 kN. Nous pouvons voir une très petite différence de déflexion de la traverse qui est montrée dans la figure 4.37a.
- Chargements dissymétriques : En cas de dissymétrie des chargements, les deux modèles donnent une différence de 0.76% sur les forces de réactions, que nous pouvons observer dans la figure 4.38a. De plus, nous obtenons une même forme déformée de la traverse.

Pour conclure, cette étude montre que les deux modèles donnent des résultats cohérents. Les très faibles différences obtenues nous permettent alors de conclure à la validité de ce modèle numérique.

### Comparaison avec le modèle numérique de la traverse de section non-uniforme posée sur une fondation homogène

Nous comparons ici les résultats calculés à l'aide de ce modèle numérique pour deux configurations de fondation.

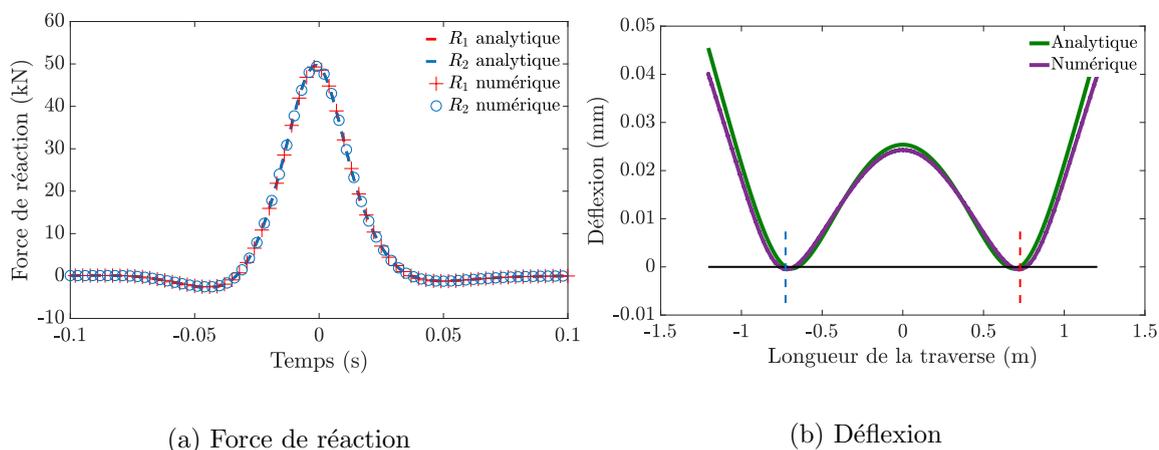


FIGURE 4.37 – Comparaison des réponses de la traverse soumise à des chargements symétriques et posée sur une fondation non-homogène entre le modèle analytique et le modèle numérique

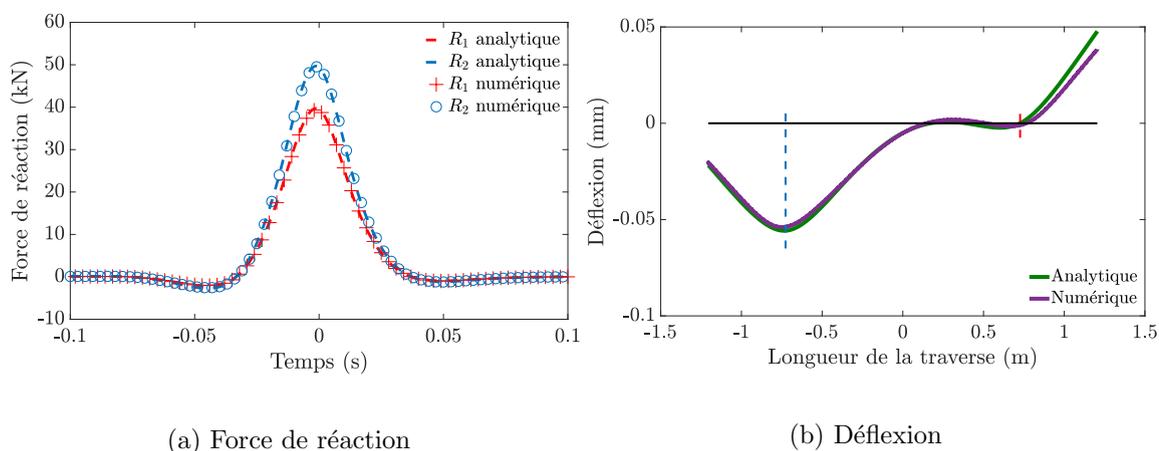


FIGURE 4.38 – Comparaison des réponses de la traverse soumise à des chargements dissymétriques et posée sur une fondation non-homogène entre le modèle analytique et le modèle numérique

— Chargements symétriques : En cas de fondation non-homogène symétrique, les forces de réactions sont évidemment les mêmes sur les deux côtés de la traverse (voir figure 4.39a). La différence de la force entre les deux modèles est : 3.2%.

La figure 4.39b montre que pour une fondation consolidée (où fondation homogène), la traverse se déforme de manière beaucoup plus que la fondation partiellement consolidée.

— Chargements dissymétriques : Les forces de réaction sur la traverse sont montrées dans la figure 4.40a. Dans les deux configurations de fondation, la différence maximale de la force de réaction est : 3.5%. Nous remarquons que les forces de réaction de la fondation homogène sont plus grandes que celles de la fondation non-homogène. La forme déformée de la traverse est montrée dans la figure 4.40b.

D'après cette étude, nous avons montré qu'avec une fondation consolidée, la traverse se déforme beaucoup que lorsque la voie est neuve. Dans ce cas, la fondation est partiellement consolidée.

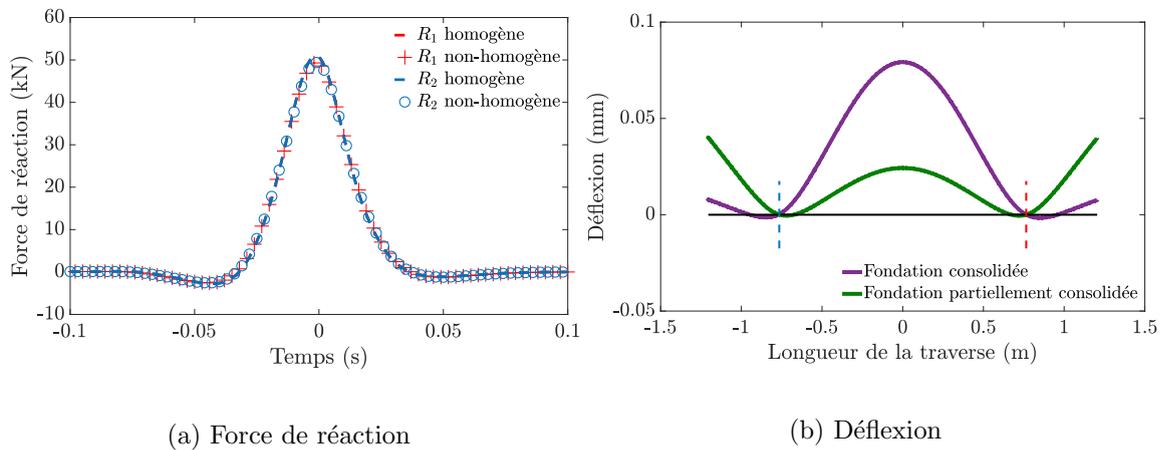


FIGURE 4.39 – Influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse soumise à des chargements symétriques

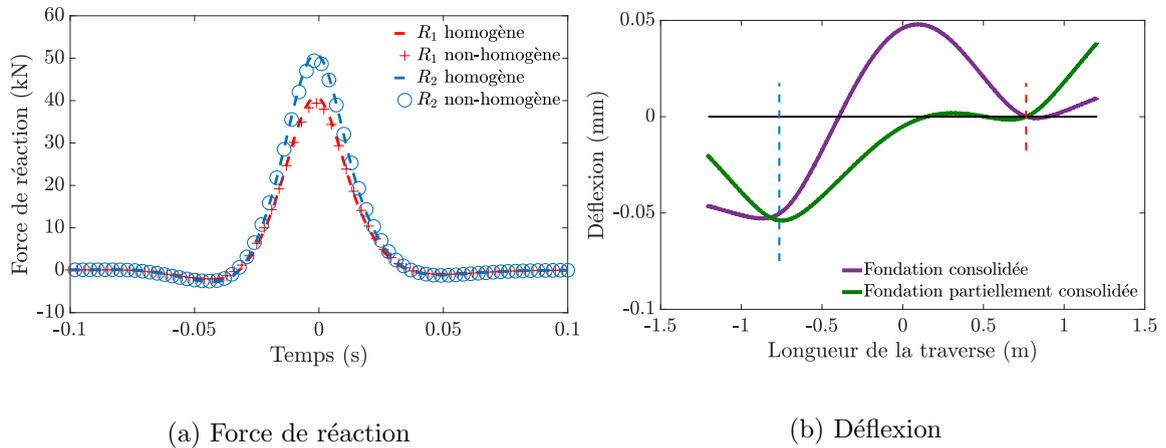


FIGURE 4.40 – Influence de la non-homogénéité de la fondation sur les réponses de la traverse soumise à des chargements dissymétriques

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des modèles numériques de la traverse réalisés à l'aide du logiciel éléments finis ABAQUS. Un modèle de la traverse seule de dimension réelle a été créé comportant deux matériaux : le béton et les torons en acier. Pour le modèle de la traverse seule, une analyse des réponses vibratoires a été réalisée. Les 9 premiers modes propres de la traverse ont été trouvés avec les 9 fréquences propres associées. Ensuite, une simulation de l'essai de flexion 3 points d'une traverse a été réalisée afin d'obtenir ses réponses en statique. Les conditions de blocage des déplacements nodaux d'une rotule et d'un appui simple ont été appliquées sur la partie inférieure de la traverse et aux positions des deux rails. Une force statique a été appliquée au milieu de la traverse. Les résultats numériques de cette simulation montrent la symétrie des déplacements, des déformations et des contraintes de la traverse. Ce calcul nous a servi à comprendre le mode de fonctionnement de la traverse. Enfin, deux simulations de flexion d'une traverse posée sur deux types de fondation (homogène et non-homogène) ont été réalisées. Dans ces simulations, deux chargements statiques différents ont été appliqués sur la traverse aux deux positions du rail. Les réponses de la traverse dans les deux configurations de

fondation montrent une bonne cohérence avec le modèle analytique de la traverse en voie.

Ces résultats numériques sont ensuite comparés avec les résultats des essais mécaniques que nous avons réalisés sur une traverse que nous avons présenté dans le chapitre précédent. En ce qui concerne les modes propres de la traverse et les fréquences propres de la traverse, nous observons une petite différence entre les résultats numériques et expérimentaux. Par ailleurs, dans la simulation de l'essai de flexion 3 points d'une traverse, les résultats de la flèche et la déformation sont obtenus avec une bonne cohérence lorsque nous les comparons à la théorie des poutres, aux résultats numériques et aux mesures (capteur en fibre optique, jauge de déformation, capteur de déplacement laser et capteur de déplacement LVDT). Dans les simulations de flexion d'une traverse posée sur une fondation, avec deux configurations de fondation, le profil de déformation de la traverse calculé est proche de celui obtenu à l'aide des mesures présentées dans le chapitre 3. Ces comparaisons nous permettent de valider le modèle numérique de la traverse.

D'autre part, en se basant sur le modèle numérique de la traverse, un modèle semi-analytique de la traverse en voie a été développé afin d'obtenir les réponses les plus précises de la traverse en considérant sa géométrie réelle. Ce modèle couple le modèle numérique aux éléments finis et le modèle analytique du rail. Ce modèle comporte une seule période de la voie (une traverse et une fondation). La matrice de rigidité dynamique du modèle s'obtient à l'aide du logiciel ABAQUS. En prenant les conditions aux limites, la condition stationnaire en quasi-statique et l'hypothèse sur les déplacement et force de réactions sur la surface de contact rail-traverse, nous pouvons réduire quelques DDLs de la matrice. D'autre part, le modèle analytique du rail donne une relation entre le déplacement sur les surfaces de contact traverse-rail et les forces de réaction. Les réponses du modèle peuvent se calculer en injectant cette relation dans l'équation du modèle. Dans la partie application numérique, nous montrons tout d'abord que le modèle numérique et le modèle analytique donnent des résultats cohérents en les comparant avec une poutre de section uniforme posée sur une fondation homogène. L'étude de l'influence de la non-uniformité de section de la poutre montre qu'elle est moins déformée. Enfin, une étude de l'influence de la non-homogénéité de fondation a été réalisée et validée par le modèle analytique de la traverse en voie posée sur une fondation non-homogène. L'avantage du modèle numérique est de pouvoir étudier la traverse avec ses dimensions réelles et avec les fondations les plus complexes. Ce calcul présente de plus un gain de temps puisque les réponses dynamiques de la traverse peuvent être calculées sans avoir besoin de modéliser les rails et les semelles sous rails.

## Deuxième partie

# Supervision des matériels roulants et de l'ensemble ballast-fondation



## Chapitre 5

# Identification des chargements exercés par le matériel roulant

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>122</b>
<b>5.2</b>	<b>Identification des caractéristiques du matériel roulant</b>	<b>123</b>
5.2.1	Identification du nombre de roues du matériel roulant	123
5.2.2	Identification de la vitesse du matériel roulant	123
<b>5.3</b>	<b>Identification des chargements exercés par le matériel roulant</b>	<b>124</b>
5.3.1	Identification des chargements verticaux	125
5.3.2	Identification des chargements latéraux	128
5.3.3	Identification des deux chargements	130
<b>5.4</b>	<b>Vérification avec les signaux numériques</b>	<b>131</b>
5.4.1	Signaux non bruités	131
5.4.2	Signaux bruités	132
<b>5.5</b>	<b>Validation expérimentale avec un marteau d'impact</b>	<b>134</b>
5.5.1	Matériels et dispositifs de mesure	135
5.5.2	Identification de la force exercée sur la traverse	136
<b>5.6</b>	<b>Validation expérimentale par un passage de train</b>	<b>138</b>
5.6.1	Matériels et dispositifs de mesure	138
5.6.2	Visualisation des mesures et comparaison de deux types de capteur	139
5.6.3	Identification des chargements	140
<b>5.7</b>	<b>Application avec les mesures sur site</b>	<b>141</b>
5.7.1	Description de la mesure	141
5.7.2	Identification des chargements et discussion sur les résultats	143
5.7.3	Comparaison des chargements identifiés par les "Smart Sleeper" sur le site de Creil	144
<b>5.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>146</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous auscultons la voie ferrée à partir des déformations de la traverse (voir figure 5.1). Ce chapitre montre une méthode pour identifier les chargements exercés par le matériel roulant sur la voie. Un indicateur présentant la consolidation de l'ensemble fondation-ballast sera présenté dans le chapitre suivant.

Les chargements exercés par le matériel roulant sur le rail se composent d'une partie statique et d'une partie dynamique. L'identification de ces chargements revêt une importance particulière, notamment pour les exploitants ferroviaires parce qu'elle permet d'obtenir des informations relatives aux matériels roulants et, de surveiller la distribution des chargements exercés par les trains au niveau de chaque roue et ainsi par exemple de pouvoir détecter les problèmes de plats de roue qui génèrent des surcharges.



FIGURE 5.1 – Auscultation de la voie ferrée

Ce travail rentre dans le cadre d'une thématique de recherche qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux dans le monde [29, 70, 85, 86, 127]. Dans le cadre de cette étude, le problème d'identification des chargements exercés par le train est développé en se basant sur le modèle dynamique de la traverse en voie que nous avons présenté dans le chapitre 3. Pour rentrer dans le détail, dans ces modèles, les chargements sont décrits à l'aide de la distribution de Dirac :  $Q_j\delta(x \pm a)$  et  $Y_j\delta(x \pm a)$  avec  $Q_j$  et  $Y_j$  des constantes représentant respectivement les chargements équivalents de chaque roue appliqués sur le rail suivants deux directions verticale et latérale et  $\pm a$  les positions des rails. Les réponses dynamiques de la traverse calculées à l'aide de ces modèles sont cohérentes avec des mesures enregistrées sur site. La méthode que nous allons présenter est de ce fait aussi appelée un "problème inverse", qui a pour but d'identifier les chargements du train à partir des réponses dynamiques de la traverse en voie.

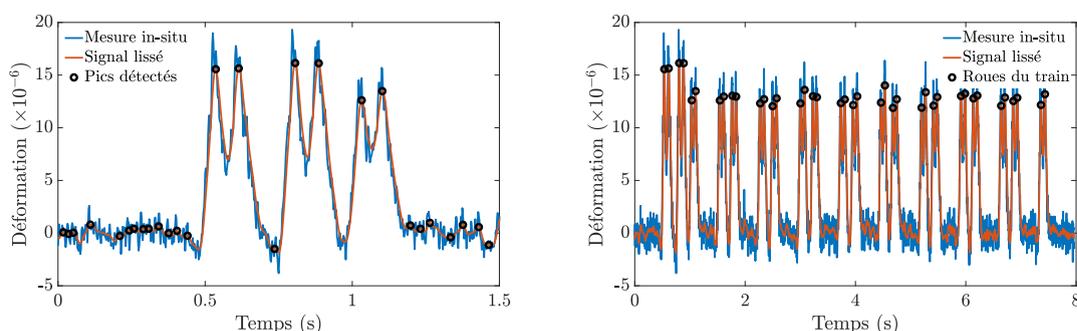
Cette méthode est développée en combinant les deux modèles dynamiques de la traverse en voie soumise à des efforts suivant les directions verticale et latérale. Dans le domaine fréquentiel, ces modèles engendrent une relation linéaire entre les chargements exercés par le train et les déformations de la traverse. Une vérification utilisant les signaux numériques créés à partir des modèles dynamiques donne une bonne précision. Une application sur les signaux réels montre une bonne cohérence avec les informations données par un train circulant sur le réseau SNCF. Une application industrielle sera présentée pour traiter facilement les mesures *in situ*.

## 5.2 Identification des caractéristiques du matériel roulant

Les mesures provenant des traverses instrumentées au passage du train sont traitées afin d'obtenir des caractéristiques du matériel roulant. Ces paramètres nous permettent d'identifier de manière plus précise les chargements exercés par le matériel roulant. Dans cette section, nous présentons la procédure utilisée pour traiter les signaux afin de déterminer le nombre de roues d'un train et sa vitesse.

### 5.2.1 Identification du nombre de roues du matériel roulant

Lors du passage du train, chaque pic du signal mesuré correspond à un passage de roue sur la traverse. Les signaux obtenus sont bruités à différents niveaux. Nous avons en effet constaté que les capteurs situés en dessous des rails sont plus bruités que ceux situés au centre de la traverse. Pour cette raison, nous identifions le nombre de roues d'un matériel roulant en utilisant les déformations mesurées au centre de la traverse. Afin de supprimer les pics liés au bruit qui n'est pas sinusoïdal, la première opération à réaliser pour identifier le nombre de roues consiste à lisser le signal mesuré. Le lissage du signal est fait à l'aide du logiciel MATLAB en utilisant un filtre à basse fréquence.



(a) Détection des pics du signal lissé

(b) Détection des roues du matériel roulant

FIGURE 5.2 – Signal lissé et détection de roues du matériel roulant

A partir du signal lissé, les pics peuvent être détectés à l'aide de la fonction `findpeaks` intégrée dans MATLAB. Toutefois, cette étape donne tous les pics du signal comprenant des pics qui correspondent aux passages de roues et des pics provenant de la forme sinusoïdale du signal (voir figure 5.2a). La fonction `findpeaks` est donc utilisée une seconde fois pour garder les pics souhaités avec option `MinPeakHeight`. Cette option permet de garder tous les pics qui correspondent à des valeurs de déformations supérieures à la valeur moyenne de déformation des pics détectés (voir figure 5.2b). Le nombre de pics détectés correspond donc au nombre de roues du matériel roulant. Cette étape nous permet d'obtenir non seulement le nombre de roues mais aussi le temps associé au passage de chaque roue sur la traverse. Néanmoins, pour un signal très bruité, le signal n'était pas suffisamment lissé, cette opération génère des erreurs. L'amélioration de cette étape est donc nécessaire.

### 5.2.2 Identification de la vitesse du matériel roulant

La vitesse du matériel roulant peut être calculée des deux façons suivantes :

- Par la distance entre deux roues d'un bogie : en considérant que la distance entre deux roues est connue et la vitesse du train est constante lors de son passage sur la

traverse, sa vitesse est calculée comme suit :

$$v = \frac{L_{bogie}}{t_{ar} - t_{av}} \quad (5.1)$$

où  $L_{bogie}$  est la longueur du bogie,  $t_{av}$  et  $t_{ar}$  sont respectivement le temps de passage sur la traverse associé aux roues avant et arrière de ce bogie dans le sens de circulation.

- Par la distance entre deux traverses “Smart Sleeper” : en considérant que le matériel roulant circule à une vitesse constante sur le site instrumenté, nous détectons le temps de passage de toutes les roues du train sur toutes les traverses (voir figure 5.3).

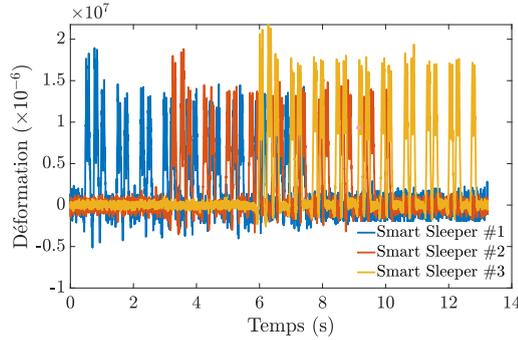


FIGURE 5.3 – Signaux obtenus d’un passage de train à partir de 3 traverses “Smart Sleeper”

La différence en temps de passage du train entre les traverses nous permet de calculer sa vitesse comme suit :

$$v = \frac{L_{ij}}{|t_{S_j} - t_{S_i}|} \quad (5.2)$$

où  $L_{ij}$  est la distance entre deux traverses  $i$  et  $j$ .  $t_{S_i}$  et  $t_{S_j}$  sont respectivement le temps de passage de la première roue du matériel roulant sur les traverses  $i$  et  $j$ .

Ces caractéristiques du matériel roulant sont les paramètres d’entrée pour identifier les chargements exercés par le train que nous abordons dans la section suivante. De plus, à l’aide des caractéristiques du matériel roulant, nous pouvons identifier le type de train circulant sur le site instrumenté.

### 5.3 Identification des chargements exercés par le matériel roulant

Dans cette partie, nous détaillons les formules mathématiques du “problème inverse” permettant d’identifier les chargements exercés par le train, ces formules étant établies à l’aide des modèles dynamiques de la traverse en voie. Le “problème inverse” est développé en prenant en compte le modèle de poutre d’Euler-Bernoulli pour la traverse. Ce choix est motivé par le fait que la comparaison réalisée au chapitre 3 entre les résultats obtenus avec le modèle de poutre d’Euler-Bernoulli et le modèle de Timoshenko pour l’étude des réponses de la traverse soumise à des efforts verticaux ne montre pas de différence significative.

Le modèle dynamique de la traverse en voie soumise à des efforts verticaux et latéraux est présenté dans la figure 5.4. Dans cette figure, la traverse est modélisée comme une poutre d’Euler-Bernoulli de longueur  $2L$  posée sur une fondation de Kelvin-Voigt avec

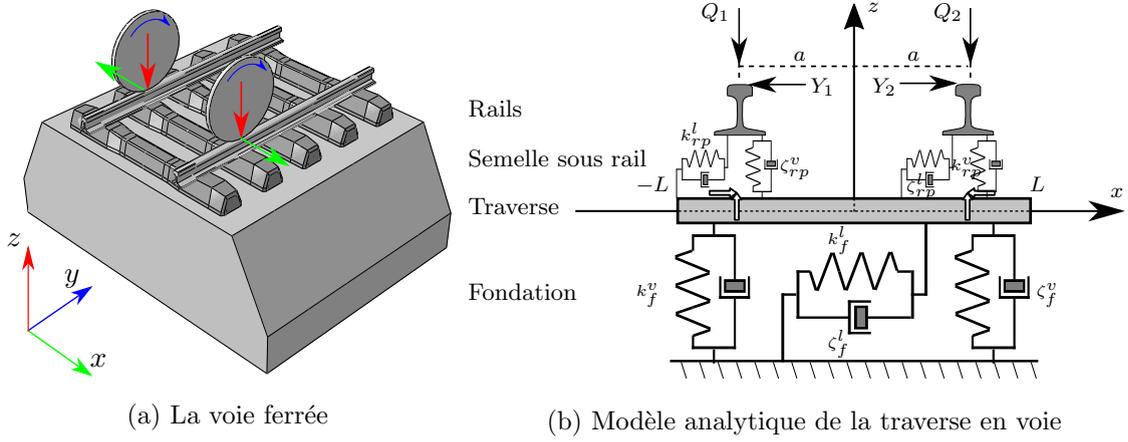


FIGURE 5.4 – La voie ferrée (a) et le modèle analytique de la traverse en voie (b)

les paramètres : les raideurs verticale et latérale qui sont respectivement  $k_f^v$  et  $k_f^l$ , les amortissements vertical et latéral qui sont respectivement  $\zeta_f^v$  et  $\zeta_f^l$ . Les chargements verticaux sont  $Q_1$  et  $Q_2$  et les chargements latéraux sont  $Y_1$  et  $Y_2$  et ils sont appliqués sur les rails aux deux positions :  $\pm a$ . En modélisant la semelle sous rail comme un système ressort-amortisseur, ses paramètres mécaniques sont les raideurs verticale  $k_{rp}^l$  et latérale  $k_{rp}^v$ , les amortissements vertical  $\zeta_{rp}^v$  et latéral  $\zeta_{rp}^l$ . Nous notons qu'actuellement, ce travail est basé sur l'hypothèse de la fondation homogène.

Les chargements qui sont appliqués sur le rail suivant deux directions peuvent être décrits à l'aide de la distribution de Dirac en deux positions des rails comme suit :

$$\begin{cases} F^v(x, t) = -R_1^v(t)\delta(x - a) - R_2^v(t)\delta(x + a) \\ F^l(x, t) = R_1^l(t)\delta(x - a) + R_2^l(t)\delta(x + a) \end{cases} \quad (5.3)$$

Les notations  $(\square)^v$  et  $(\square)^l$  représentent les variables suivant la direction verticale et latérale. Les paramètres mécaniques de la traverse sont notés : le module d'Young  $E_s$ , le moment d'inertie  $I_s$ , la masse volumique  $\rho_s$  et la section droite  $S_s$ . La précontrainte de la traverse est représentée par le constante  $T$ .

### 5.3.1 Identification des chargements verticaux

#### Rappel du modèle dynamique de la traverse en voie soumise à des efforts verticaux

L'équation dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli décrit le comportement de la traverse en temps et dans l'espace. En combinant avec les conditions aux limites d'une poutre libre-libre, nous pouvons obtenir un système d'équations comme suit :

$$\begin{cases} E_s I_s \frac{\partial^4 w_s^v(x, t)}{\partial x^4} + \rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial x^2} + k_f^v w_s^v(x, t) + \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial t} = F^v \\ \frac{\partial^2 w_s^v(-L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_s^v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w_s^v(-L, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_s^v(L, t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Ce problème a été résolu dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de Green qui est déterminée sous la forme :

$$G_a^E(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + A_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + A_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [-L, a] \\ B_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + B_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + B_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + B_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (5.5)$$

où les 4 coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont les racines de l'équation caractéristique  $\mathbb{P}^E$  et les 8 inconnues  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont déterminées à l'aide des conditions aux limites d'une poutre libre-libre, des conditions de continuité du déplacement, de la rotation et du moment, et de condition de discontinuité de la force de cisaillement au point d'application de force (voir Annexe B).

En couplant avec le modèle de rail périodiquement supporté (voir Annexe C), le déplacement vertical de la traverse peut être calculé comme suit :

$$\hat{w}_s^v(x, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^v(\omega)}{E_s I_s} G_a^E(x, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^v(\omega)}{E_s I_s} G_{-a}^E(x, \omega) \quad (5.6)$$

Les expressions des forces de réactions  $R_1^v$  et  $R_2^v$  sont :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_E^v} [\mathcal{Q}_1 (G_{-a}^E(-a, \omega) + \chi_E^v) - \mathcal{Q}_2 G_{-a}^E(a, \omega)] \\ \hat{R}_2^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v \tilde{D}_E^v} [\mathcal{Q}_2 (G_a^E(a, \omega) + \chi_E^v) - \mathcal{Q}_1 G_a^E(-a, \omega)] \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $\tilde{D}_E^v, \chi_E^v$  sont les constantes qui dépendent des paramètres de la voie (voir chapitre 2). Les constantes  $\mathcal{K}^v$  et  $\mathcal{Q}_k$  ( $k = 1, 2$ ) sont respectivement la raideur équivalente et le chargement équivalent qui sont déterminés dans le modèle du rail périodiquement supporté (voir Annexe C). La raideur équivalente ne dépend que des paramètres de la voie et le chargement équivalent représente le chargement exercé par le train dans le domaine fréquentiel.

La déformation suivant le long de la traverse dans le domaine fréquentiel peut se calculer comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = z_s \left[ \hat{R}_1^v(\omega) \Psi_a^E(x, \omega) + \hat{R}_2^v(\omega) \Psi_{-a}^E(x, \omega) \right] \quad (5.8)$$

où les deux fonctions  $\Psi_a^E(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^E(x, \omega)$  sont définies par :

$$\begin{cases} \Psi_a^E(x, \omega) = \frac{1}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_a^E(x, \omega)}{\partial x^2} \\ \Psi_{-a}^E(x, \omega) = \frac{1}{E_s I_s} \frac{\partial^2 G_{-a}^E(x, \omega)}{\partial x^2} \end{cases} \quad (5.9)$$

## Formulations mathématiques

Nous présentons maintenant la méthode d'identification des chargements verticaux exercés par un train à partir des déformations de la traverse. Cette méthode est basée sur le modèle dynamique de la traverse en voie que nous avons présenté précédemment. En considérant que la traverse est instrumentée à l'aide de plusieurs capteurs de déformations en différentes positions, l'équation (5.8) peut se réécrire comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx_i}^v(x_i, z_{s_i}, \omega) = \mathbf{A}_{i1}^v(x_i, z_{s_i}, \omega) \hat{R}_1^v(\omega) + \mathbf{A}_{i2}^v(x_i, z_{s_i}, \omega) \hat{R}_2^v(\omega) \quad (5.10)$$

où  $(x_i, z_{s_i})$  sont les coordonnées des capteurs de déformation (qui sont aussi les points de mesure). Les deux paramètres  $\mathbf{A}_{i1}^v$  et  $\mathbf{A}_{i2}^v$  sont détaillés comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{i1}^v(x_i, z_{s_i}, \omega) = \left( \frac{z_{s_i}}{E_s I_s} \right) \frac{\partial^2 G_a^E}{\partial x^2}(x_i, \omega) \\ \mathbf{A}_{i2}^v(x_i, z_{s_i}, \omega) = \left( \frac{z_{s_i}}{E_s I_s} \right) \frac{\partial^2 G_{-a}^E}{\partial x^2}(x_i, \omega) \end{cases} \quad (5.11)$$

L'équation (5.11) peut être réécrite sous cette forme :

$$[\hat{\varepsilon}_{xx}^v(\omega)] = [\mathbf{A}_{i1}^v(\omega) \quad \mathbf{A}_{i2}^v(\omega)] \begin{bmatrix} \hat{R}_1^v(\omega) \\ \hat{R}_2^v(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

où  $[\hat{\varepsilon}_{xx}^v(\omega)]$  représente le vecteur des signaux dans le domaine fréquentiel et a une dimension  $n_f$  qui dépend du nombre de signaux mesurés.

D'autre part, le vecteur de forces de réactions peut être réécrit à partir de l'équation (5.7) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_1^v(\omega) \\ \hat{R}_2^v(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^v(\omega) & \mathbf{B}_{12}^v(\omega) \\ \mathbf{B}_{21}^v(\omega) & \mathbf{B}_{22}^v(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_2(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

où les expressions des 4 composants  $\mathbf{B}_{ik}^v(\omega)$  dans cette équation peuvent être détaillées comme suit (voir Annexe C) :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11}^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v(\omega) \tilde{D}_E^v(\omega)} [G_{-a}^E(-a, \omega) + \chi_E^v(\omega)] \\ \mathbf{B}_{12}^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v(\omega) \tilde{D}_E^v(\omega)} [-G_{-a}^E(a, \omega)] \\ \mathbf{B}_{21}^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v(\omega) \tilde{D}_E^v(\omega)} [-G_a^E(-a, \omega)] \\ \mathbf{B}_{22}^v(\omega) = \frac{E_s I_s}{\mathcal{K}^v(\omega) \tilde{D}_E^v(\omega)} [G_a^E(a, \omega) + \chi_E^v(\omega)] \end{cases} \quad (5.14)$$

Les chargements équivalents  $Q_k(\omega)$  sont calculés pour chaque rail  $k$  dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$\begin{aligned} Q_k(\omega) &= \frac{\mathcal{K}^v(\omega)}{v E_r I_r^v \left[ \left( \frac{\omega}{v} \right)^4 - \lambda_r^4 \right]} \sum_{j=1}^K Q_{kj} e^{-i\omega \frac{D_j}{v}} \\ &= [\mathbf{C}^v(\omega)] \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (5.15)$$

où  $E_r, I_r^v$  sont respectivement le module d'Young et le moment d'inertie suivant la direction verticale du rail.  $D_j$  représente la distance entre les roues par rapport à la première,  $v$  est la vitesse du train. Le coefficient  $\lambda_r$  dépend des paramètres du rail et son expression est détaillée dans le Tableau C.1.  $\mathbf{Q}_k = [Q_{kj}]_j$  est un vecteur colonne des chargements mobiles appliqués sur le rail  $k$ . La matrice  $[\mathbf{C}^v(\omega)]$  a la dimension  $[n_f \times n_K]$  avec  $n_f$  et  $n_K$  représentant la longueur du vecteur  $[\hat{\varepsilon}_{xx}^v(\omega)]$  et le nombre des chargements mobiles.

À partir des équations (5.12), (5.13) et (5.15), une relation linéaire entre les déformations de la traverse dans le domaine fréquentiel et les chargements verticaux du train est obtenue comme suit :

$$[\hat{\varepsilon}_{xx}^v(\omega)] = [\mathbf{M}^v(\omega)] [\mathbf{Q}] \quad (5.16)$$

où :  $[\mathbf{M}^v(\omega)] = [\mathbf{A}_{i1}^v(\omega) \quad \mathbf{A}_{i2}^v(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^v(\omega) & \mathbf{B}_{22}^v(\omega) \\ \mathbf{B}_{21}^v(\omega) & \mathbf{B}_{12}^v(\omega) \end{bmatrix} [\mathbf{C}^v(\omega)]$ , le vecteur  $[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$  et il ne dépend que du nombre des roues du train.

### 5.3.2 Identification des chargements latéraux

L'équation dynamique d'une poutre en traction simple décrit le comportement de la traverse soumise à des efforts latéraux en temps et dans l'espace. En combinant avec les conditions aux limites d'une poutre libre-libre, nous pouvons obtenir un système d'équations comme suit :

$$\begin{cases} \rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^l(x, t)}{\partial t^2} - E_s S_s \frac{\partial^2 w_s^l(x, t)}{\partial x^2} + k_f^l w_s^l(x, t) + \zeta_f^l \frac{\partial w_s^l(x, t)}{\partial t} = F^l(x, t) \\ \frac{\partial w_s^l(-L, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_s^l(L, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Ce système d'équations a été résolu dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de Green qui est déterminée sous la forme :

$$G_a^l(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} & \text{pour } x \in [-L, a] \\ B_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + B_2(\omega)e^{\alpha_2 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (5.18)$$

où les 2 coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont les racines de l'équation caractéristique  $\mathbb{P}^l$  et les 4 inconnues  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont déterminées à l'aide des conditions aux limites d'une poutre libre-libre, de condition de continuité du déplacement et de condition de discontinuité de déformation au point d'application de la force (voir Annexe B).

En couplant avec le modèle de rail périodiquement supporté (voir Annexe C), le déplacement latéral de la traverse peut être calculé comme suit :

$$\hat{w}_s^l(x, \omega) = \frac{-\hat{R}_1^l(\omega)}{E_s S_s} G_a^l(x, \omega) + \frac{-\hat{R}_2^l(\omega)}{E_s S_s} G_{-a}^l(x, \omega) \quad (5.19)$$

Les expressions des forces de réactions  $R_1^v$  et  $R_2^v$  sont :

$$\begin{cases} \hat{R}_1^l(\omega) = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l \tilde{D}^l} \left[ \mathcal{Y}_1 \left( G_{-a}^l(-a, \omega) + \chi^l \right) - \mathcal{Y}_2 G_{-a}^l(a, \omega) \right] \\ \hat{R}_2^l(\omega) = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l \tilde{D}^l} \left[ \mathcal{Y}_2 \left( G_a^l(a, \omega) + \chi^l \right) - \mathcal{Y}_1 G_a^l(-a, \omega) \right] \end{cases} \quad (5.20)$$

où  $\tilde{D}^l, \chi^l$  sont des constantes qui dépendent des paramètres de la voie (voir chapitre 2). Les constantes  $\mathcal{K}^l$  et  $\mathcal{Y}_k$  ( $k = 1, 2$ ) sont respectivement la raideur équivalente et le chargement équivalent qui sont déterminés dans le modèle du rail périodiquement supporté (voir Annexe C). La raideur équivalente ne dépend que des paramètres de la voie et le chargement équivalent représente le chargement exercé par le train dans le domaine fréquentiel.

La déformation suivant le long de la traverse dans le domaine fréquentiel peut se calculer comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^l(x, z, \omega) = \hat{R}_1^l(\omega) \Psi_a^l(x, \omega) + \hat{R}_2^l(\omega) \Psi_{-a}^l(x, \omega) \quad (5.21)$$

où les deux fonctions  $\Psi_a^l(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^l(x, \omega)$  sont définies par :

$$\begin{cases} \Psi_a^l(x, \omega) = \frac{-1}{E_s S_s} \frac{\partial G_a^l(x, \omega)}{\partial x} \\ \Psi_{-a}^l(x, \omega) = \frac{-1}{E_s S_s} \frac{\partial G_{-a}^l(x, \omega)}{\partial x} \end{cases} \quad (5.22)$$

### Formulations mathématiques

La méthode d'identification des chargements latéraux exercés par un train à partir des déformations de la traverse sera présentée dans cette partie. Elle est basée sur le modèle dynamique de la traverse en voie que nous avons rappelé précédemment. En considérant que la traverse est instrumentée à l'aide de plusieurs capteurs de déformations en différentes positions, l'équation (5.21) peut se réécrire comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^l(x_i, \omega) = \mathbf{A}_{i1}^1(x_i, \omega) \hat{R}_1^l(\omega) + \mathbf{A}_{i2}^1(x_i, \omega) \hat{R}_2^l(\omega) \quad (5.23)$$

où  $x_i$  est la position des capteurs de déformation (qui sont aussi les points de mesure). Les deux paramètres  $\mathbf{A}_{i1}^1$  et  $\mathbf{A}_{i2}^1$  sont détaillés comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{i1}^1(x_i, \omega) = \left( \frac{-1}{E_s S_s} \right) \frac{\partial G_a^l}{\partial x}(x_i, \omega) \\ \mathbf{A}_{i2}^1(x_i, \omega) = \left( \frac{-1}{E_s S_s} \right) \frac{\partial G_{-a}^l}{\partial x}(x_i, \omega) \end{cases} \quad (5.24)$$

L'équation (5.24) peut être réécrite sous cette forme :

$$[\hat{\varepsilon}_{xx}^l(\omega)] = [\mathbf{A}_{i1}^1(\omega) \quad \mathbf{A}_{i2}^1(\omega)] \begin{bmatrix} \hat{R}_1^l(\omega) \\ \hat{R}_2^l(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

où  $[\hat{\varepsilon}_{xx}^l(\omega)]$  représente le vecteur des signaux dans le domaine fréquentiel et a une dimension  $n_f$  qui dépend du nombre de signaux mesurés.

De plus, le vecteur de forces de réactions peut être réécrit à partir de l'équation (5.20) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_1^l(\omega) \\ \hat{R}_2^l(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^1(\omega) & \mathbf{B}_{12}^1(\omega) \\ \mathbf{B}_{21}^1(\omega) & \mathbf{B}_{22}^1(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1(\omega) \\ \mathcal{Y}_2(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

où les expressions des 4 composants  $\mathbf{B}_{ik}^1(\omega)$  dans cette équation peuvent être détaillées comme suit (voir Annexe C) :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11}^1(\omega) = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l(\omega) \tilde{D}^l(\omega)} [G_{-a}^l(-a, \omega) + \chi^l(\omega)] \\ \mathbf{B}_{12}^1(\omega) = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l(\omega) \tilde{D}^l(\omega)} [-G_{-a}^l(a, \omega)] \\ \mathbf{B}_{21}^1(\omega) = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l(\omega) \tilde{D}^l(\omega)} [-G_a^l(-a, \omega)] \\ \mathbf{B}_{22}^1(\omega) = \frac{E_s S_s}{\mathcal{K}^l(\omega) \tilde{D}^l(\omega)} [G_a^l(a, \omega) + \chi^l(\omega)] \end{cases} \quad (5.27)$$

Les chargements équivalents  $\mathcal{Y}_k(\omega)$  sont calculés pour chaque rail  $k$  dans le domaine fréquentiel comme suit (voir annexe C) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k(\omega) &= \frac{\mathcal{K}^l(\omega)}{v E_r I_r^l \left[ \left( \frac{\omega}{v} \right)^4 - \lambda_r^4 \right]} \sum_{j=1}^K Y_{kj} e^{-i\omega \frac{D_j}{v}} \\ &= [\mathbf{C}^v(\omega)] \mathbf{Y}_k \end{aligned} \quad (5.28)$$

où  $E_r$ ,  $I_r^l$  sont respectivement le module d'Young et le moment d'inertie suivant la direction latérale du rail.  $D_j$  représente la distance entre les roues par rapport à la première roue,  $v$  est la vitesse du train. Le coefficient  $\lambda_r$  dépend des paramètres du rail et son expression est détaillée dans le Tableau C.1.  $\mathbf{Y}_k = [Y_{kj}]_j$  est un vecteur colonne des chargements mobiles appliqués sur le rail  $k$ . La matrice  $[\mathbf{C}^v(\omega)]$  a la dimension  $[n_f \times n_K]$  avec  $n_f$  et  $n_K$  représentant la longueur du vecteur  $[\hat{\varepsilon}_{xx}^l(\omega)]$  et le nombre des chargements mobiles.

A partir des équations (5.25), (5.26) et (5.28), nous pouvons obtenir une relation linéaire entre les déformations de la traverse dans le domaine fréquentiel et les chargements verticaux du train comme suit :

$$[\hat{\varepsilon}_{xx}^l(\omega)] = [\mathbf{M}^l(\omega)] [\mathbf{Y}] \quad (5.29)$$

où :  $[\mathbf{M}^l(\omega)] = [\mathbf{A}_{i1}^l(\omega) \quad \mathbf{A}_{i2}^l(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^l(\omega) & \mathbf{B}_{12}^l(\omega) \\ \mathbf{B}_{21}^l(\omega) & \mathbf{B}_{22}^l(\omega) \end{bmatrix} [\mathbf{C}^l(\omega)]$ , et  $[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}$  qui ne dépend que du nombre de roues du train.

### 5.3.3 Identification des deux chargements

Dans les deux précédentes parties, nous avons établi des relations linéaires entre les déformations de la traverse dans le domaine fréquentiel et les chargements mobiles suivant les deux directions : verticale et latérale. La déformation totale de la traverse est calculée en additionnant les déformations soumises à des efforts verticaux et celles soumises à des efforts latéraux :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}(\omega) = \hat{\varepsilon}_{xx}^v(\omega) + \hat{\varepsilon}_{xx}^l(\omega) \quad (5.30)$$

En rassemblant les équations (5.16) et (5.29), nous obtenons :

$$\begin{aligned} [\hat{\varepsilon}_{xx}(\omega)] &= [\mathbf{M}^v(\omega)] [\mathbf{Q}] + [\mathbf{M}^l(\omega)] [\mathbf{Y}] \\ &= [\mathbf{M}^v(\omega) \quad \mathbf{M}^l(\omega)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{M}(\omega)] [\mathbf{F}] \end{aligned} \quad (5.31)$$

L'équation (5.31) représente une relation linéaire entre la déformation totale de la traverse dans le domaine fréquentiel  $[\hat{\varepsilon}_{xx}(\omega)]$  et les chargements exercés par le train sur le rail  $[\mathbf{F}]$  suivant deux directions. Le vecteur colonne  $[\hat{\varepsilon}_{xx}(\omega)]$  contient des déformations de la traverse dans le domaine fréquentiel à différentes positions de mesure. La longueur de ce vecteur est  $n_f$ . Dans cette équation, la matrice  $[\mathbf{M}(\omega)]$  dépend des fonctions de Green dont la détermination est précisée dans les modèles dynamiques de la traverse en voie et des paramètres mécaniques des composants de la voie ferrée. Cette matrice a la dimension  $[n_f \times 2n_K]$  où  $n_K$  est le nombre de roues. L'inconnue dans cette équation est le vecteur  $[\mathbf{F}]$  et il ne dépend pas de la fréquence. Ces chargements peuvent être identifiés à l'aide de la fonction `mldivide` dans MATLAB. Cette opération dans MATLAB a plusieurs méthodes de décomposition pour résoudre un système d'équations linéaires qui dépendent de la taille des matrices. Dans ce cas, la matrice  $[\mathbf{M}(\omega)]$  est une matrice rectangulaire et nous pouvons alors utiliser la méthode de décomposition QR dans `mldivide`. De plus, afin de rendre cette opération la plus précise possible, il faut que la longueur du vecteur colonne  $[\hat{\varepsilon}_{xx}(\omega)]$  soit supérieure ou égale à 2 fois le nombre des chargements exercés par le train :

$$n_f \geq 2n_K \quad (5.32)$$

## 5.4 Vérification avec les signaux numériques

Nous avons présenté la méthode d'identification des chargements. Une vérification sera réalisée dans cette partie à l'aides des modèles dynamiques de la traverse en voie.

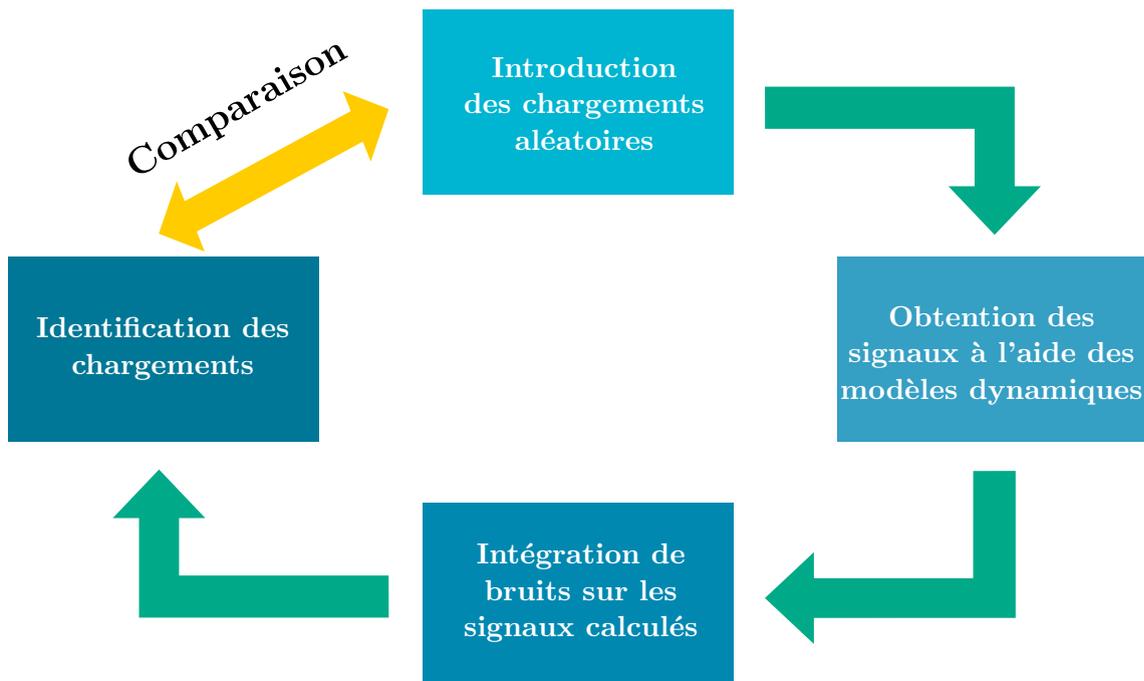


FIGURE 5.5 – Vérification avec les signaux numériques

Les chargements verticaux  $Q$  et latéraux  $Y$  sont tout d'abord introduits dans les modèles analytiques de manière aléatoire afin d'obtenir les réponses totales de la traverse. Des bruits blancs sont ensuite intégrés dans ces résultats afin de simuler les mesures *in situ*. Enfin, la méthode d'identification est appliquée afin d'obtenir les chargements identifiés qui sont en toute fin comparés aux chargements introduits.

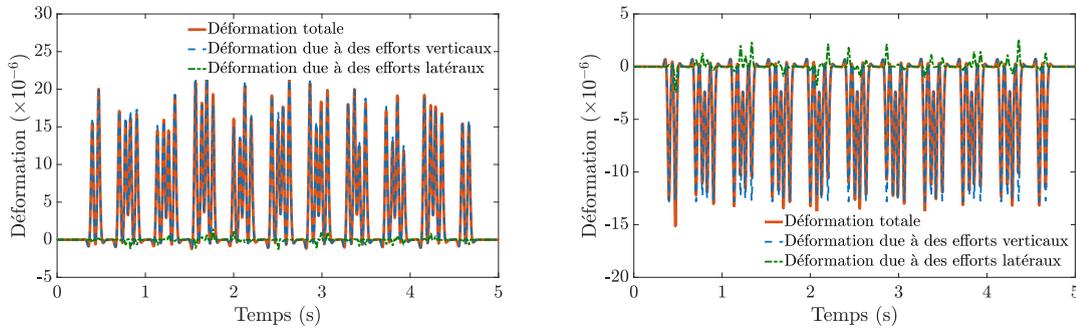
### 5.4.1 Signaux non bruités

#### Visualisation des signaux

Dans un premier temps, la méthode est vérifiée en considérant des signaux non bruités. La figure 5.6 présente les signaux analytiques obtenus à l'aides des modèles dynamiques de la traverse en voie aux 2 positions suivantes : au-dessous du rail et sur la partie basse de la traverse en son milieu.

Dans cet exemple, les chargements verticaux introduits dans les modèles dynamiques de la traverse en voie sont de même ordre de grandeur que les chargements réels exercés par un train. Les chargements latéraux varient dans un intervalle "raisonnable" pour les efforts latéraux appliqués sur les rails. De plus, ils sont aussi dans le seuil de sécurité de Nadal<sup>1</sup>. Dans ces figures, la déformation totale de la traverse est représentée par les lignes rouges. Les déformations dues aux efforts verticaux et latéraux sont respectivement représentées par les pointillés bleus et verts. Sur la partie basse de la traverse, le milieu de la traverse

1. Le ratio de Nadal indique le risque de déraillement d'un train via le rapport de chargement latéral sur le chargement vertical



(a) Au dessous du rail

(b) Milieu de la traverse

FIGURE 5.6 – Signaux non bruités

est bien en compression où la déformation est négative tandis que la partie au dessous du rail est en traction.

### Résultat d'identification des chargements

En utilisant la méthode d'identification des chargements sur les signaux numériques non bruités, les chargements introduits dans les modèles analytiques de la traverse sont bien identifiés et le résultat est présenté dans la figure 5.7. Les calculs sont réalisés dans une bande de fréquence de -1000 Hz à 1000 Hz qui correspond à la plage de mesure des capteurs FBG. Les chargements verticaux et latéraux qui s'appliquent sur le rail 1 sont présentés dans les figures 5.7a et 5.7b. Les figures 5.7c et 5.7d montrent les résultats de la méthode pour les chargements appliqués sur le rail 2 suivant les directions verticale et latérale. Pour les 4 figures, les points rouges et les colonnes bleues représentent respectivement les chargements introduits et identifiés. Nous observons dans un premier temps que cette méthode nous permet d'obtenir tous les chargements d'un train à partir des déformations de la traverse.

La différence moyenne entre les chargements introduits et identifiés dans cet exemple est  $5 \times 10^{-5}\%$ . L'erreur pour cet exemple est très faible et provient des calculs numériques. Ceci nous permet de valider la méthode d'identification et nous l'utiliserons dans le cas des signaux bruités.

#### 5.4.2 Signaux bruités

Afin de simuler les signaux mesurés *in situ*, nous allons intégrer les bruits blancs de manière aléatoire sur tous les signaux obtenus par les modèles analytiques, et à différents niveaux. Dans cet exemple, nous montrons 4 exemples de bruits : faiblement bruité, bruité, très bruité et fortement bruité qui sont associés respectivement aux 4 niveaux : 1,5%, 3%, 7% et 15%. Le niveau de bruit ( $n_b$ ) est calculé par la formule suivante :

$$n_b(\%) = \frac{\sigma_n}{\max |\varepsilon_{xx}|} \times 100 \quad (5.33)$$

où  $\sigma_n$  est l'écart-type du bruit intégré dans les signaux. Nous remarquons que le niveau de bruit  $n_b$  ne représente que de l'amplitude des bruits et n'a pas de source physique.

Les signaux bleus dans la figure 5.8 présentent les 4 signaux bruités à partir des signaux bruts qui sont montrés par les lignes rouges. Dans cette figure, nous montrons le signal au

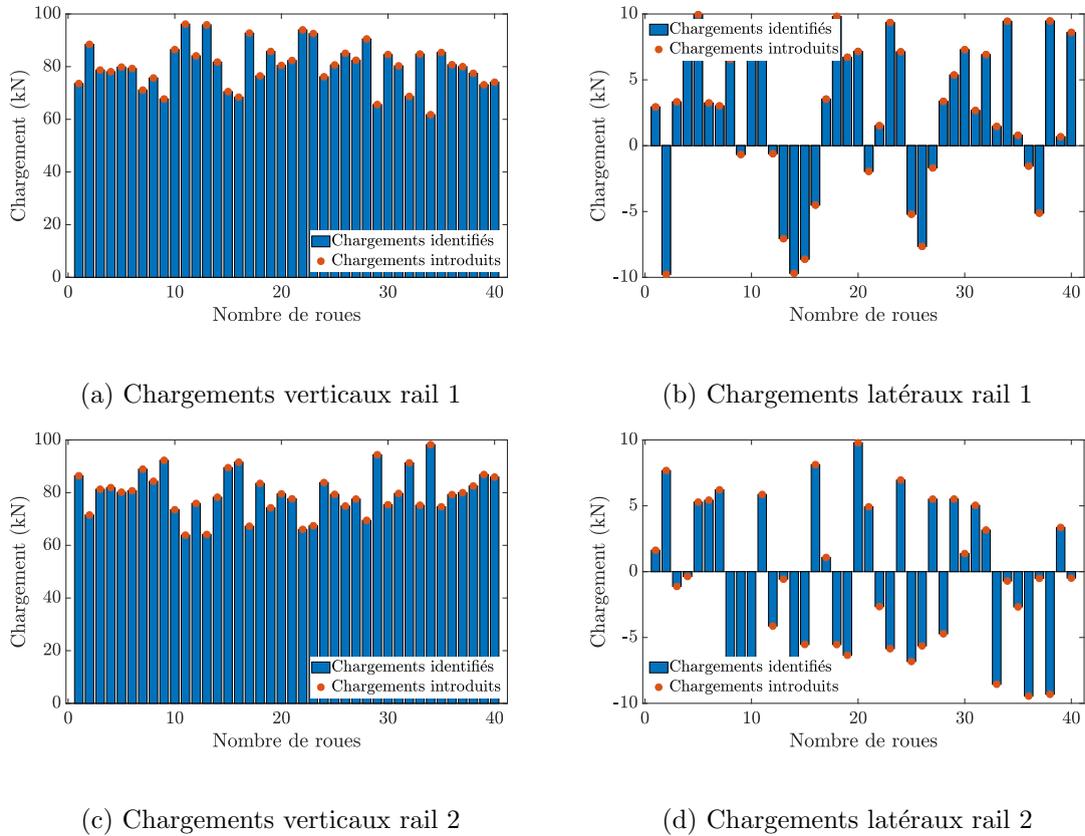


FIGURE 5.7 – Comparaison des chargements introduits (points rouges) et identifiés (colonnes bleues) avec les signaux non bruités

centre et sur la partie inférieure de la traverse. En cas de signaux fortement bruités, les chargements identifiés sont montrés dans la figure 5.9. Dans cette figure, les chargements verticaux sur les deux rails sont bien identifiés (voir figures 5.9a et 5.9c). Par contre, les chargements latéraux qui sont présentés dans les figures 5.9b et 5.9d sont identifiés avec une précision moyenne.

Niveau de bruit		Erreur relative (%)	
Description	$n_b$	Chargements verticaux	Chargements latéraux
Faiblement bruité	1,5%	0,19	1,5
Bruité	3,5%	0,32	3,4
Très bruité	7%	0,47	4,9
Fortement bruité	15%	0,86	8,1

TABLE 5.1 – Erreur de la méthode avec différents niveaux de bruits sur les signaux

Le tableau 5.1 montre l'erreur relative entre les chargements identifiés et introduits à différents niveaux de bruits. Nous obtenons une très bonne précision sur les chargements verticaux. La différence calculée est inférieure à 1% même pour les signaux fortement bruités. Néanmoins, cette erreur est plus importante en considérant les chargements latéraux. Plus les signaux sont bruités, plus l'erreur est importante. Ce problème peut être expliqué par la

petite amplitude des efforts latéraux par rapport aux efforts verticaux. De plus, le modèle de la traverse en voie soumise à des efforts latéraux est un modèle de poutre en traction simple qui ne prend en compte que les efforts latéraux appliqués sur la traverse au niveau des deux rails. Ce modèle néglige l'effet des moments qui s'appliquent sur la traverse.

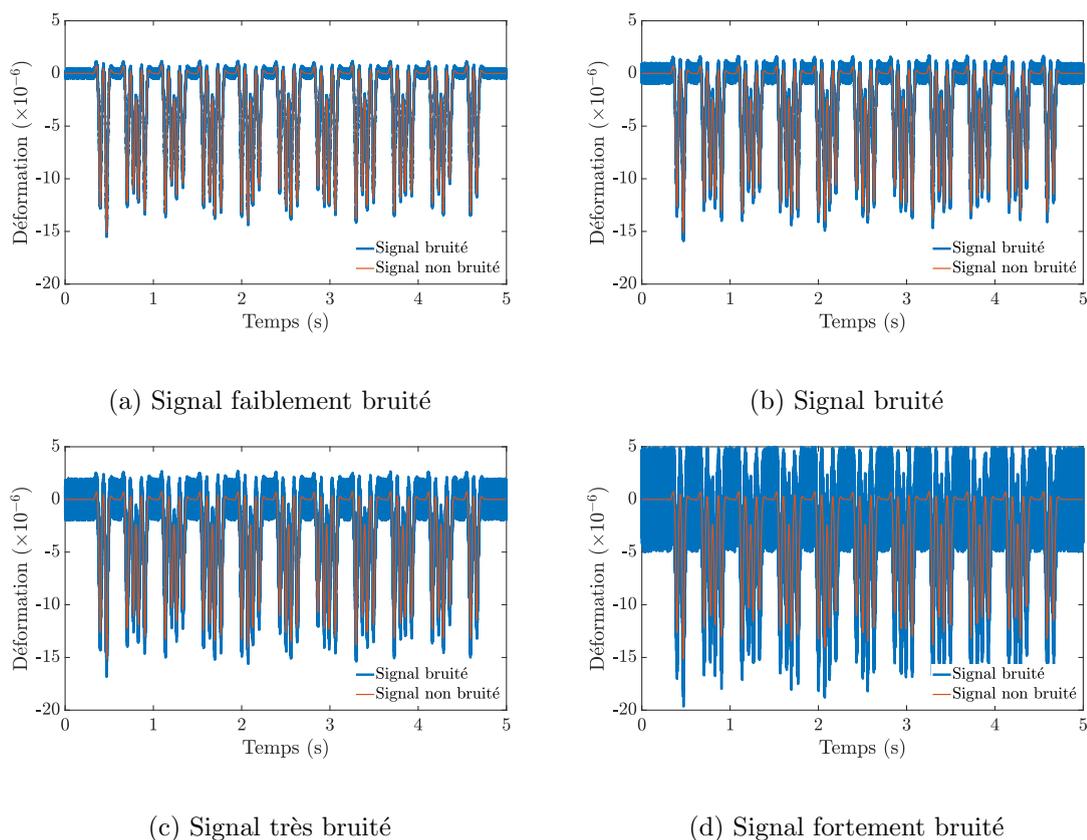
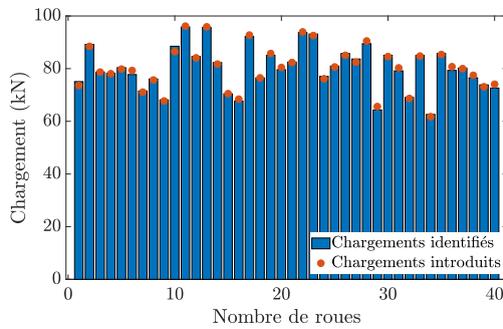


FIGURE 5.8 – Signaux bruités

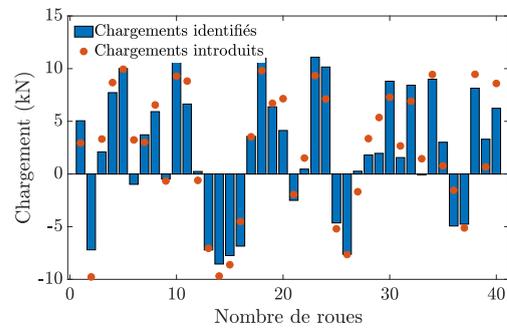
Toutefois, même si l'erreur est importante pour les chargement latéraux dans le cas de signaux fortement bruités, il faut mentionner le fait que ce cas est un exemple où le niveau de bruit est très exagéré et sert uniquement à l'étude que nous avons réalisée. Pour les mesures *in situ*, les bruits affectant les signaux sont plutôt au niveau de 3,5%. A ce niveau, les chargements latéraux sont identifiés avec une erreur acceptable (moins de 5%). De plus, la connaissance de la source physique des bruits dans les mesures *in situ* reste en question. Pour conclure, la méthode d'identification des chargements exercés par le train donne une très bonne précision sur les chargements verticaux et les chargements latéraux sont identifiés avec une erreur moyenne.

## 5.5 Validation expérimentale avec un marteau d'impact

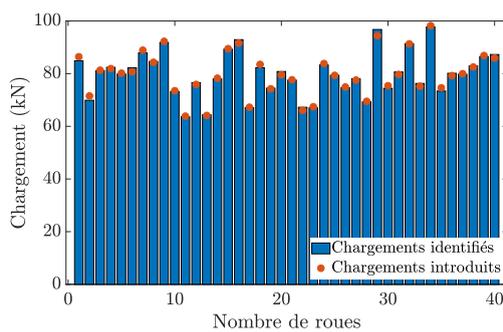
Pour valider la méthode d'identification des chargements à partir des réponses de la traverse, nous excitons la traverse instrumentée avec un marteau d'impact. A partir des réponses enregistrées, nous cherchons en retour à identifier la force exercée et connue lors de l'impact. Cet essai a été réalisé le 02/12/2019 au sein des locaux SATEBA à Chalon-sur-Saône.



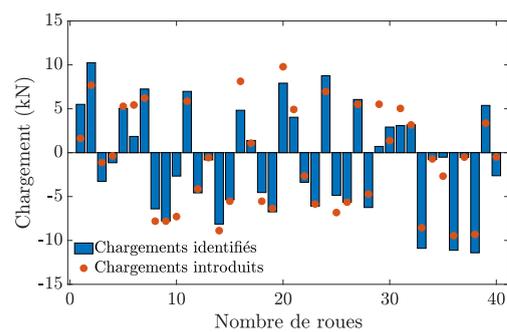
(a) Chargements verticaux rail 1



(b) Chargements latéraux rail 1



(c) Chargements verticaux rail 2



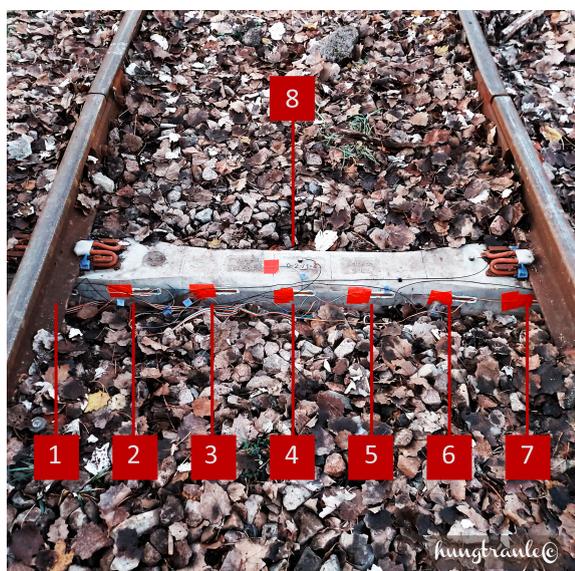
(d) Chargements latéraux rail 2

FIGURE 5.9 – Comparaison des chargements introduits (points rouges) et identifiés (colonnes bleues) avec les signaux fortement bruités

### 5.5.1 Matériels et dispositifs de mesure

#### Matériels

- La traverse instrumentée : Une traverse M450 est instrumentée à l'aide de jauges de déformation collées sur la position de la traverse située entre les deux rails sur la partie haute de la traverse. Dans cette mesure, nous avons utilisé 8 jauges KYOWA KC-70-120-A1-11. 7 jauges ont été collées entre les deux rails à égale distance. La 8<sup>ème</sup> jauge est collée sur la face opposée de la traverse et au milieu de la traverse (position identique à celle de la jauge 4 dans la longueur de la traverse) (voir figure 5.10a). Cette traverse est également équipée de 5 capteurs FBG fonctionnels situés : sous les rails et au centre de la traverse. Il s'agit des : R1S, CS, CI, R2I et R2S. Nous notons que le capteur FBG au centre sur la partie haute de la traverse (CS) et les jauges numéro 4, 8 sont à la même position.
- Marteau d'impact : Dans cet essai, nous utilisons le marteau de type PCB PiézoTRONIC 086D50 pour exercer une force sur la traverse (voir figure 5.10b). Ce marteau est connecté avec un analyseur afin d'enregistrer le signal de la force générée en mV. Un facteur de conversion nous permet de calculer la force en Newton.



(a) Traverse instrumentée



(b) Marteau d'impact PCB 086D50

FIGURE 5.10 – Matériels et dispositif de mesure pour la validation expérimentale de la méthode d'identification des chargements avec un marteau d'impact (photo source : *hungtranle*©)

### Dispositif de mesure

La figure 5.10 présente les matériels utilisés dans cet essai. Nous exerçons une force sur la traverse suivant la direction verticale à plusieurs endroits. Les déformations de la traverse sont enregistrées à l'aide du logiciel présenté dans le chapitre 3.

### 5.5.2 Identification de la force exercée sur la traverse

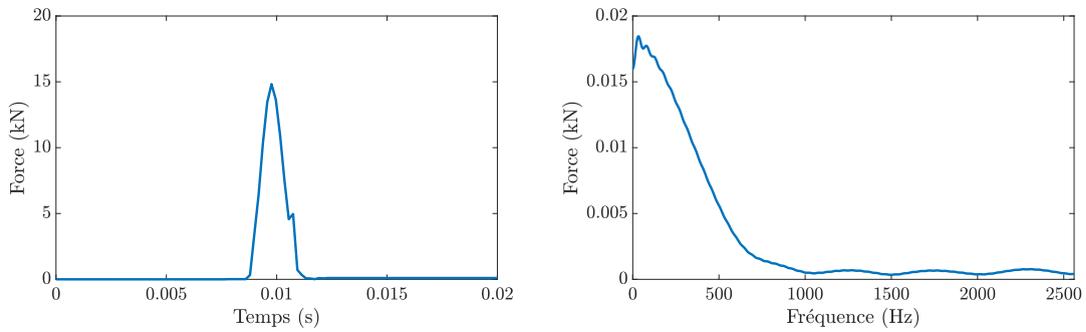
#### Visualisation d'un exemple de mesure

Le signal du marteau d'impact est présenté dans la figure 5.11. Nous présentons ici le signal traité qui donne la valeur mesurée en kN. Le pic dans la figure 5.11a correspond au moment où le marteau exerce une force sur la traverse. Il est bien sous la forme d'une force ponctuelle et son spectre est présenté dans la figure 5.11b.

La figure 5.12 présente les réponses de la traverse soumise à une force du marteau d'impact mesurées par les jauges de déformations. Le premier pic dans les réponses de la traverse correspond aux déformations dues à la force exercée. Les pics suivants décrivent le mouvement libre de la traverse. Le spectre des signaux est montré dans la figure 5.12b. Dans cette figure, nous constatons que les spectres donnent 2 pics à 131.3 Hz et 430 Hz. En comparant avec les résultats de mesure des fréquences propres de la traverse, ces deux valeurs correspondent aux deux modes propres (mode I et mode IV) de la traverse (voir chapitre 3). A partir de 500 Hz, les spectres sont nuls.

#### Identification de la force du marteau d'impact

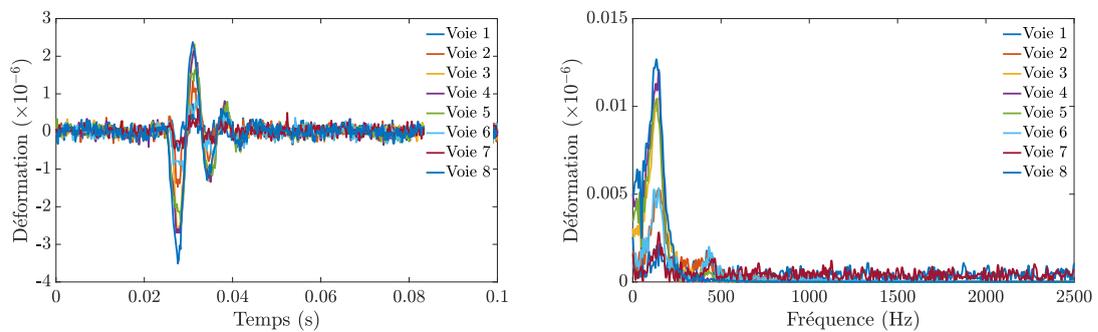
La figure 5.13 montre la force identifiée par cette méthode. Nous constatons que la forme de la force identifiée en temps n'est pas la même que celle d'un Dirac, ce que nous avons présenté dans la figure 5.11a. Ceci est normal car les mouvements libres de la traverse



(a) Domaine temporel

(b) Domaine fréquentiel

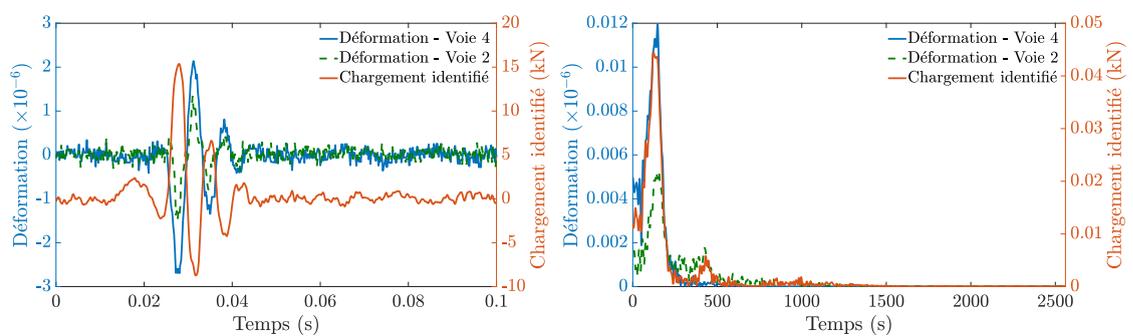
FIGURE 5.11 – Signal obtenu provenant du marteau d'impact



(a) Domaine temporel

(b) Domaine fréquentiel

FIGURE 5.12 – Signaux des jauges de déformation de la traverse instrumentée soumise à une force du marteau d'impact



(a) Domaine temporel

(b) Domaine fréquentiel

FIGURE 5.13 – Force du marteau d'impact identifiée

sont enregistrées dans les mesures. La force peut s'obtenir au moment du premier pic des signaux mesurés. De plus, les déformations et la force identifiée sont en phase opposée car sous l'effet de la force, la zone où les jauges sont situées se retrouve en compression.

En utilisant la méthode d'identification des chargements, nous obtenons les résultats

qui sont présentés dans le tableau 5.2. Les excitations 1, 2, 3 dans ce tableau correspondent respectivement aux 3 positions où nous avons exercé la force sur la traverse : au milieu, à côté du rail et à l'extrémité de la traverse.

	Excitation 1	Excitation 2	Excitation 3
Force exercée	14.93 kN	16.57 kN	14.81 kN
Force identifiée	15.28 kN	16.32 kN	14.54 kN
Différence	2.34%	1.53%	1.82%

TABLE 5.2 – Comparaison de la force identifiée par un marteau d'impact

D'après ce tableau, nous voyons que cette méthode nous permet d'identifier les forces avec une bonne précision (la différence est inférieure à 2.5%). L'erreur de la méthode vient du fait que la position d'application de la force n'est pas suffisamment précise et des bruits de mesures. Nous pouvons donc conclure à la validité de la méthode ainsi que celle des paramètres de la voie.

## 5.6 Validation expérimentale par un passage de train

Nous présentons maintenant un autre essai réalisé au sein des locaux SATEBA à Chalon-sur-Saône le 02/12/2019 pour lequel le chargement de la traverse a été réalisé à l'aide d'un passage de train dont nous connaissons la masse. L'idée est ici retrouver les chargements exercés par ce train sur la traverse à partir des déformations mesurées.

### 5.6.1 Matériels et dispositifs de mesure

#### Matériels

- Le train : Il comprend 4 wagons chargés de traverses qui ont été fabriquées dans l'usine SATEBA (voir figure 5.14a). Les caractéristiques de chaque wagon sont bien identifiées, surtout la tare<sup>2</sup>, la longueur de bogie et la charge utile (nombre de traverses) de chaque wagon.
- Traverse instrumentée : Nous avons utilisé la traverse instrumentée par les jauges de déformation présentée dans la section précédente (voir figure 5.10a).

#### Dispositif de mesure

La figure 5.14b présente le dispositif de cette mesure. Une locomotive rentre et tire les wagons pour sortir de l'usine. Lors du passage de ce train, deux systèmes d'acquisition nous permettent d'enregistrer les réponses de la traverse avec les deux types de capteurs de mesure (jauges de déformation, FBG). En ce qui concerne les capteurs FBG, nous obtenons directement les déformations de la traverse via la variation de longueur d'ondes. Les signaux en provenance des jauges de déformation sont enregistrés à l'aide du logiciel présenté au chapitre 3.

2. La tare est la masse à vide plus le carburant d'un véhicule ou d'une unité de transport intermodal.



(a) Wagons chargés de traverses

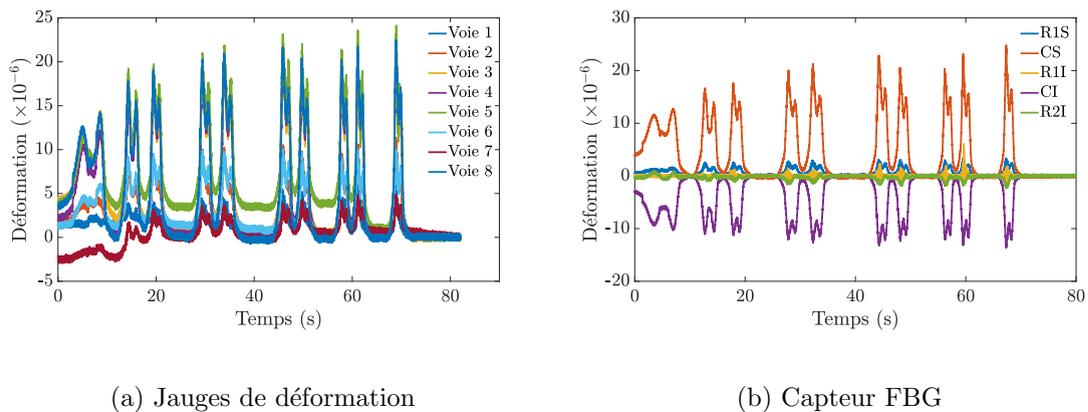
(b) Passage de train

FIGURE 5.14 – Matériels et dispositif de mesure pour validation expérimentale de la méthode d'identification des chargements par un passage de train (photo source : *hungtranle*©)

### 5.6.2 Visualisation des mesures et comparaison de deux types de capteur

#### Visualisation des mesures

Les signaux bruts en provenance de deux capteurs sont traités de deux façons différentes comme présentées au chapitre 3. Les figures 5.15a et 5.15b montrent les déformations de la traverse mesurées à l'aide des jauges de déformation et les capteurs FBG. Il y a au total



(a) Jauges de déformation

(b) Capteur FBG

FIGURE 5.15 – Signaux de mesure pour la validation de la méthode d'identification des chargements

20 pics qui correspondent aux 20 essieux du train (1 locomotive et 4 wagons). D'après la figure 5.14b, nous constatons que la première roue de la locomotive était placée très proche de la traverse. La traverse était donc déformée avant le début de la mesure. Pour cette raison, nous n'identifions que les chargements des wagons. Néanmoins, lors du passage des wagons, le signal provenant des déformations est très propre. Nous notons également que ce train accélère lors de la mesure (car il sort de l'usine). Le fait que sa vitesse augmente

est montré par le temps compris entre deux pics correspondant au passage de chaque bogie qui diminue. L'accélération du train peut générer une force supplémentaire importante sur le rail dans sa longueur.

En analysant les signaux en provenance des jauges de déformations, nous constatons que les 8 jauges sont en traction. Ces mesures sont logiques pour les jauges qui sont près du centre de la traverse. D'après les études précédentes, les jauges situées en dessous des rails doivent normalement être en compression, ce qui est en contradiction avec ce que nous observons ici. Cette différence peut alors provenir d'un problème sur la position des jauges mais aussi de l'état de la fondation. En effet, les mesures sont d'une part sensibles à la position des jauges et il se peut que les jauges n'aient pas été collées à la bonne position étant donné la difficulté d'accès à cette zone de collage. Il est cependant plus probable que cet état de fait vienne de l'état de la fondation, cette voie n'ayant jamais subi d'opération de maintenance. Nous remarquons d'autre part que les capteurs FBG situés au centre de la traverse donnent des résultats cohérents. Ces résultats montrent que la traverse est en traction sur sa partie haute et en compression sur sa partie basse. Toutefois, les capteurs FBG situés en dessous des rails ne sont pas exploitables. Ce problème peut être causé par le réglage de la boîte d'acquisition ou par l'état des capteurs.

### Comparaison des mesures de deux types de capteur

La figure 5.16 montre la comparaison des mesures en provenance de deux types de capteurs de déformation. La couleur jaune présente la mesure du capteur FBG et les couleurs bleue et rouge représentent les signaux des jauges de déformation. Ces 3 capteurs mesurent la déformation de la traverse à la même position.

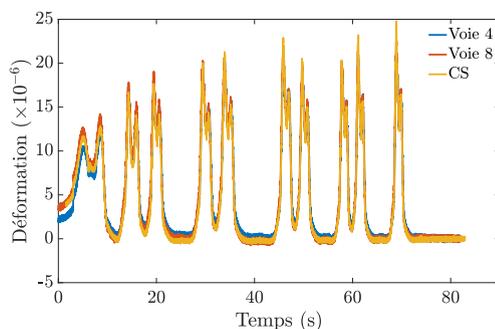


FIGURE 5.16 – Déformation sur la partie haute, au centre de la traverse

Nous observons un petit décalage en temps provenant d'un problème de synchronisation lors de l'acquisition des mesures des deux types de capteurs. Cependant nous voyons clairement que les 3 courbes sont cohérentes puisqu'elles sont presque confondues, ce qui montre une bonne cohérence entre les mesures réalisées avec les deux types de capteurs et nous confirme la qualité des signaux traités.

### 5.6.3 Identification des chargements

Dans cette partie, nous présentons le résultat obtenu après application de la méthode d'identification des chargements que nous avons appliquée aux signaux mesurés. Nous rappelons que les modèles dynamiques de la traverse en voie ont été développés sous l'hypothèse d'une vitesse constante. Cependant la vitesse du train augmente lors de cette mesure, ce qui nous a obligé à couper en morceaux les données, chaque morceau contenant

un passage de bogie. Chaque morceau correspond alors à chaque intervalle de temps dans lequel nous considérons que la vitesse est constante.

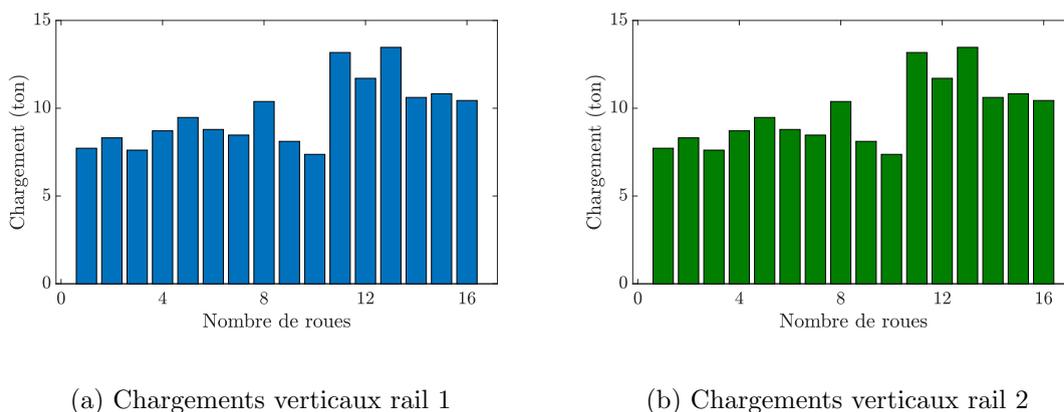


FIGURE 5.17 – Chargements identifiés dans la mesure de validation

Les chargements verticaux sur les deux rails exercés par chaque roue des wagons sont montrés dans la figure 5.17. Le tableau 5.3 présente les masses identifiées des 4 wagons. En comparant ces masses avec les masses données pour chacun, nous notons une différence relative entre la masse identifiée et la masse de référence donnée maximale qui est toutefois de 5.5%. Les erreurs peuvent être expliquées par l'état de la fondation, les bruits de mesure, le problème d'accélération du train ou enfin une faible variation sur la masse de référence. Cependant, ces erreurs relatives restent suffisamment petites pour pouvoir conclure que la méthode que nous avons présentée est validée.

Numéro de wagon	Masse du wagon	Chargement	Masse totale	Masse identifiée	Différence
1 <sup>er</sup> wagon	21 ton	44.95 ton	65.95 ton	62.37 ton	5.43%
2 <sup>ème</sup> wagon	24 ton	51.33 ton	75.33 ton	73.36 ton	2.61%
3 <sup>ème</sup> wagon	22 ton	44.95 ton	66.95 ton	68.95 ton	2.98%
4 <sup>ème</sup> wagon	21 ton	51.33 ton	72.33 ton	76.29 ton	5.48%

TABLE 5.3 – Comparaison des chargements identifiés d'un train

## 5.7 Application avec les mesures sur site

### 5.7.1 Description de la mesure

La méthode d'identification des chargements étant validée, nous allons maintenant l'utiliser pour traiter les signaux réels mesurés provenant d'une traverse instrumentée de capteurs FBG (voir la figure 1.15). La mesure a été effectuée lors du passage d'un train le 06 Mai 2017 à 09h59' sur le site de Creil (France).

Les signaux mesurés sont présentés dans la figure 5.19. Parmi ces figures, les figures 5.19a, 5.19b et 5.19c concernent les capteurs situés sur la partie supérieure de la traverse et les suivants sont les capteurs de la partie basse. Les signaux de même couleur sont pris aux



FIGURE 5.18 – Mesure sur site avec un passage de train (photo source : *hungtranle*©)

mêmes positions sur le long de la traverse : en dessous du rail 1 (bleu), au milieu (rouge) et en dessous du rail 2 (vert).

Ce train comprend une locomotive et 9 wagons. Il y a 40 roues sur chaque rail. Les signaux sont enregistrés à une fréquence d'acquisition de 500 Hz. La vitesse du train calculée est égale à  $131.58 \text{ kmh}^{-1}$ . Cette vitesse correspond à un train qui circule sur le réseau conventionnel des voies ferrées de la SNCF, probablement de type Corail.

De plus, d'après ces figures, nous constatons que les capteurs situés en dessous du rail 2 se déforment plus que ceux qui sont situés en dessous du rail 1. Ce phénomène peut être causé par le non équilibrage du train, par un problème d'homogénéité de la fondation ou par la combinaison de ces deux raisons. L'analyse des données provenant d'autres trains devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponse à cette question mais, dans cette étude, nous nous concentrons sur le cas de la fondation homogène.

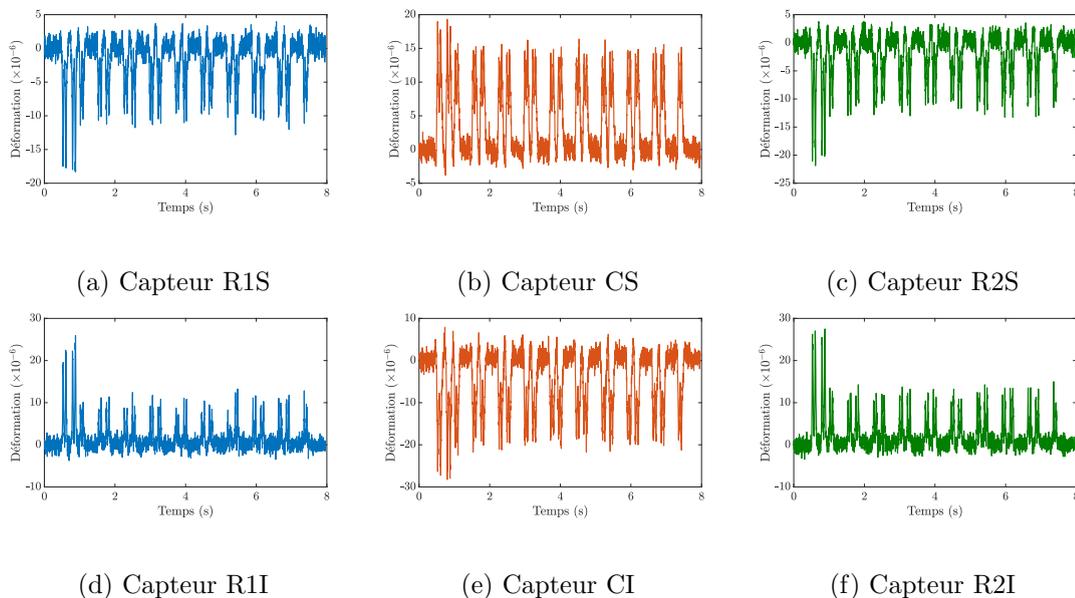


FIGURE 5.19 – Mesures *in situ*

### 5.7.2 Identification des chargements et discussion sur les résultats

En prenant les variables d'entrées qui sont détaillées dans les tableaux 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4, les chargements exercés par ce train sont bien identifiés et sont présentés dans la figure 5.20. Dans cette figure, les chargements verticaux sont représentés dans les figures 5.20a et 5.20b tandis que les figures 5.20c et 5.20d représentent les chargements latéraux. Les colonnes bleues et vertes montrent les résultats correspondant respectivement aux rail 1 et rail 2.

Numéro de wagon	Masse (ton)	Numéro de wagon	Masse (ton)
Locomotive	73.13	5 <sup>ème</sup> wagon	47.21
1 <sup>er</sup> wagon	49.67	6 <sup>ème</sup> wagon	46.72
2 <sup>ème</sup> wagon	48.95	7 <sup>ème</sup> wagon	48.86
3 <sup>ème</sup> wagon	48.42	8 <sup>ème</sup> wagon	48.04
4 <sup>ème</sup> wagon	47.59	9 <sup>ème</sup> wagon	48.19

TABLE 5.4 – La masse de la locomotive et des wagons du train

En se basant sur l'hypothèse de la fondation homogène, nous voyons clairement que les chargements verticaux appliqués sur le rail 2 sont plus importants que ceux appliqués sur le rail 1. Ceci explique le fait que les déformations mesurées sur le rail 2 sont plus grandes que celles du rail 1 (voir figure 5.19). De plus, la masse d'une locomotive est normalement supérieure à celle d'un wagon non chargé. Ceci est bien montré lorsque nous comparons les 4 premières colonnes aux autres colonnes dans les figures 5.20a et 5.20b.

Le tableau 5.4 montre la masse identifiée de chaque wagon. D'après les références disponibles [100], nous constatons que la masse de la locomotive identifiée (73.13 tonnes) correspond pratiquement à celle qui est référencée (74 tonnes). Les masses identifiées des 9 wagons sont aussi quasiment les mêmes que celles référencées (figure 5.21a). De plus, la masse d'un wagon de type Corail est de 42 tonnes tandis que les masses identifiées des wagons sont un peu plus grandes, cette différence provenant du nombre de voyageurs ou de la masse de marchandises sur chaque wagon.

Les chargements latéraux identifiés sur chaque rail sont présentés dans les figures 5.20c et 5.20d. Les ordres de grandeur de ces chargements sont presque identiques sur les deux rails. En additionnant ces chargements, la figure 5.21b montre les chargements latéraux totaux qui s'appliquent sur la voie. La traverse étant située dans une ligne droite, il est normal que ces chargements s'annulent pour la plupart des roues. Toutefois, les valeurs non identiques montrent le mouvement latéral du train lorsqu'il avance.

Nous avons ensuite utilisé les chargements identifiés à partir des mesures réalisées *in situ* à l'aide des modèles analytiques afin de reconstruire les réponses de la traverse. La figure 5.22 présente la superposition des signaux reconstruits (en noir) et les mesures *in situ* aux 3 positions : R1S (bleu), CS (rouge) et R2S (vert). Nous voyons que les réponses de la traverse reconstruites correspondent aux mesures *in situ*. Les différences observées peuvent être expliquées par des bruits de mesure. Elles restent cependant très faibles (1.57%).

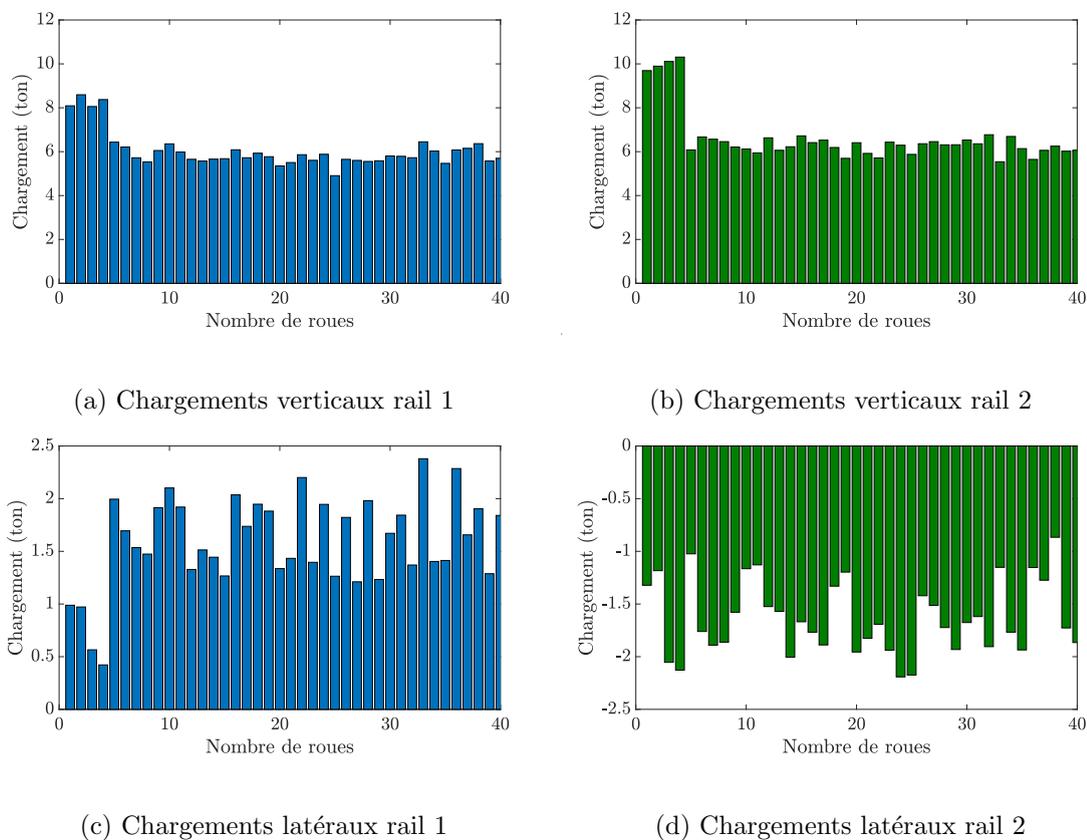


FIGURE 5.20 – Chargements identifiés d'un train

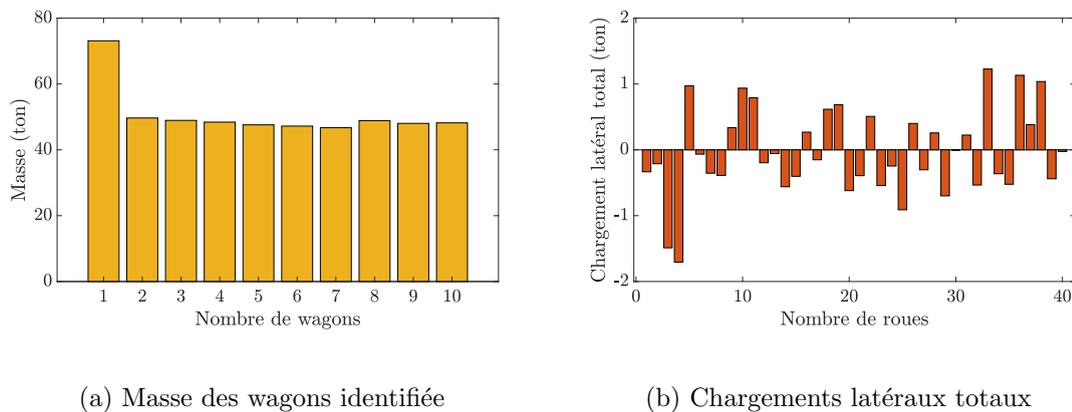


FIGURE 5.21 – Discussion sur les résultats réels

### 5.7.3 Comparaison des chargements identifiés par les “Smart Sleeper” sur le site de Creil

Sur le site de Creil, 3 traverses “Smart Sleeper” sont installées à une distance de 100 m les unes des autres (voir figure 1.17). Nous cherchons maintenant à identifier les chargements exercés par ce train à partir des mesures en provenance des 3 traverses lors d'un passage. Nous remarquons que les traverses #1 et #2 sont posées en ligne droite et la traverse #3 est située sur une portion légèrement courbée.

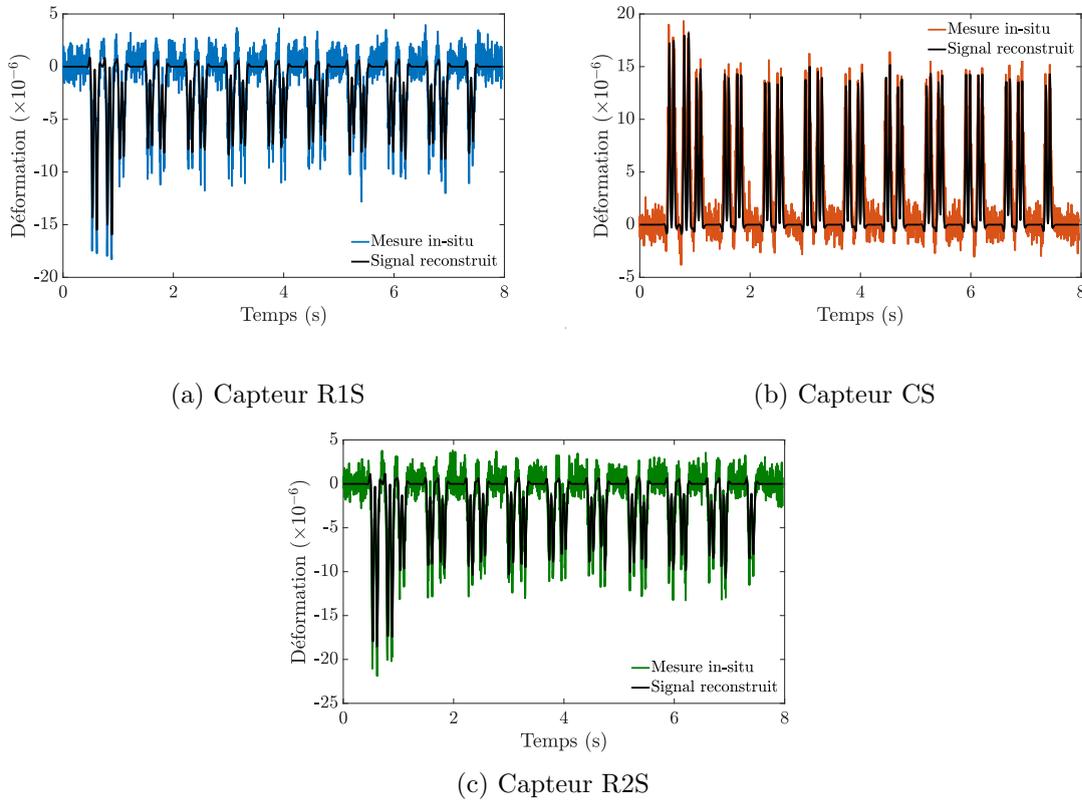


FIGURE 5.22 – Signaux reconstruits

### Exploitation des mesures provenant de la traverse #3

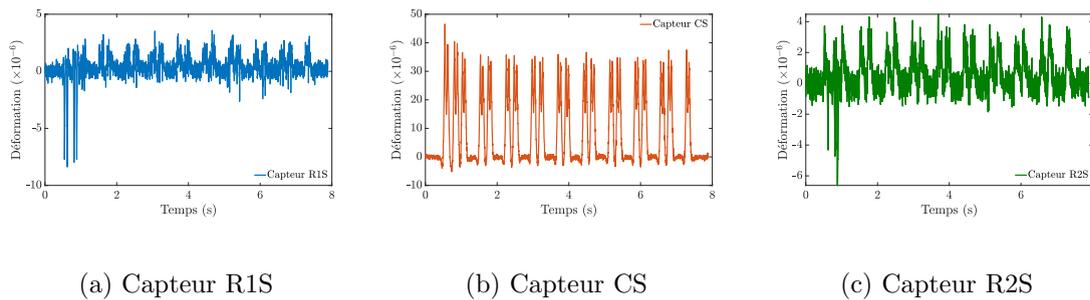


FIGURE 5.23 – Signaux de la traverse #3

Dans cette section, nous voulons montrer les mesures provenant de la “Smart Sleeper” #3 qui est posée sur une portion légèrement courbée. Les mesures de déformations lors d’un passage de train sont montrées dans la figure 5.23. Dans cette figure, nous voyons que le capteur au centre donne un signal qui est très net. Les 4 premiers pics correspondent au passage de la locomotive et les suivants correspondent à des wagons. Toutefois, les déformations de la traverse en provenant des capteurs situés en dessous des rails ont une amplitude très faible : pour le passage de la locomotive, nous obtenons  $-7.5 \mu\text{def}$  sur le rail 1,  $-5 \mu\text{def}$  sur le rail 2 ; pour le passage des wagons, nous constatons qu’il existe une déformation positive lors de chaque passage de roues, ce qui implique que, soit notre modèle dynamique n’est pas capable de décrire le comportement d’une traverse posée dans une

voie courbée, ou, soit les mesures paraissent erronées ce qui peut venir du fait de différentes raisons. Nous nous sommes rendus compte par la suite que certains capteurs ne répondaient pas correctement pour cette traverse et nous n’avons pas exploité les mesures provenant de cette traverse.

### Comparaison des chargements identifiés par les traverses #1 et #2

La masse identifiée de chaque wagon du train en utilisant les mesures provenant des “Smart Sleeper” #1 et #2 est présentée dans la figure 5.24. Dans cette figure, les colonnes bleue et rouge représentent les résultats obtenus respectivement pour les traverses #1 et #2.

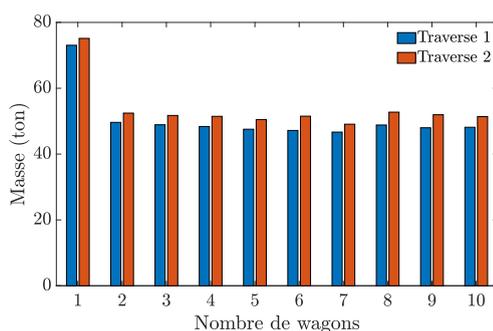


FIGURE 5.24 – Comparaison de la masse identifiée de chaque wagon à partir de 3 traverses

Nous observons dans cette figure une différence entre les résultats obtenus à partir des traverses #1 et #2 qui peut être expliquée par la différence de comportements mécaniques de l’ensemble fondation-ballast au niveau de ces deux traverses. Cette différence reste cependant très faible (l’erreur relative maximale est 3.7%). La cohérence des résultats provenant de 2 traverses indépendantes nous permet donc conclure à la fiabilité de la méthode.

## 5.8 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre un “problème inverse” basé sur les modèles dynamiques soumis à des efforts verticaux et latéraux de la traverse en voie dans le but d’identifier les chargements exercés par un train à partir des réponses dynamiques de la traverse. Une relation linéaire a été établie à partir des modèles analytiques, des déformations totales de la traverse dans le domaine fréquentiel et des chargements d’un train. Cette relation est détaillée dans l’équation (5.31). Dans cette équation, les forces ne dépendent que du nombre de roues d’un train. La fonction de transfert dépend des paramètres mécaniques des composants de la voie ferrée. Les chargements d’un train sont identifiés grâce au solveur `mldivide` dans MATLAB. Le fait que la longueur du vecteur de déformation soit supérieure à 2 fois le nombre de roues d’un train est une condition nécessaire afin d’obtenir de bons résultats avec cette méthode.

Nous avons dans un premier temps validé cette méthode à l’aide de signaux numériques créés par les modèles dynamiques. Pour ce faire, des chargements inconnus ont été introduits dans les modèles analytiques de manière aléatoire, les déformations totales de la traverse pouvant s’obtenir à différentes positions. En intégrant ces réponses brutes dans la méthode, les chargements sont identifiés avec une très bonne précision (erreur relative  $5 \times 10^{-5}\%$ ).

Ensuite, nous avons considéré des signaux intégrant des bruits blancs afin de simuler les mesures *in situ* avec différents niveaux de bruit. Les chargements verticaux identifiés ont dans ce cas une erreur inférieure à 1% par rapport aux chargements introduits tandis que les chargements latéraux identifiés ont une erreur un peu plus importante. Cette erreur est causée par la faible amplitude des efforts latéraux comparée à celle des effort verticaux. Malgré cette différence, la méthode est valide avec les signaux numériques bruités.

Pour la validation expérimentale de cette méthode, nous avons exercé une force verticale à l'aide d'un marteau d'impact sur la traverse à différentes positions. Ce type de marteau nous permet de remonter à la force que nous avons appliquée sur la traverse. A partir des déformations de la traverse mesurées par des jauges de déformations, nous avons identifié les forces appliquées avec une bonne précision. Ce résultat nous permet de conclure sur la validité de cette méthode et des paramètres de la voie.

Un essai a ensuite été réalisé sur le site SATEBA de Chalon-sur-Saône au cours duquel nous avons pu réaliser des mesures sur une traverse lors du passage d'un train. Ce train contenait des wagons dont nous connaissions la masse. Les déformations de la traverse étaient enregistrées par l'intermédiaire de jauges de déformation et de capteurs FBG. La cohérence des données mesurées a montré un bon fonctionnement des deux types de capteurs. Après avoir identifié les chargements, nous les avons comparé avec les masses des wagons et de la locomotive. Cette comparaison ne faisant apparaître que de très faibles erreurs, nous avons alors conclu à la validité de cette méthode d'identification des chargements exercés par le matériel roulant à partir de mesures de déformations des traverses.

Enfin, nous avons appliqué cette méthode lors d'un passage de train sur une voie commerciale. La mesure sur site est obtenue à l'aide de la traverse instrumentée par les capteurs FBG. Les mesures réalisées montrent qu'il s'agit probablement d'un train de type Corail. Les chargements exercés par le train identifiés à l'aide des mesures sont en adéquation avec les données référencées par la SNCF. La masse identifiée de la locomotive est en bonne adéquation avec la masse réelle (73.13 tonnes identifiée et 74 tonnes en référence, soit 1.1% d'écart relatif). Les masses des wagons identifiées sont aussi très proches des masses de référence en considérant que ces wagons sont chargés. Le mouvement latéral d'un train lorsqu'il avance est observé en exploitant les résultats relatifs aux efforts latéraux. Une comparaison de la masse identifiée de chaque wagon du train en utilisant les mesures provenant des traverses instrumentées donne une bonne cohérence entre les traverses #1 et #2. Nous rappelons que les mesures provenant de la traverse #3 n'ont pas été exploitées.



## Chapitre 6

# Détermination des indicateurs pour l'ensemble fondation-ballast

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>150</b>
<b>6.2</b>	<b>Indicateur de l'ensemble fondation-ballast</b>	<b>150</b>
6.2.1	Études paramétriques des réponses de la traverse	150
6.2.2	Exploitation des résultats avec un grand nombre de données	152
<b>6.3</b>	<b>Présentation du logiciel "ChargeTEBA"</b>	<b>157</b>
6.3.1	Fonctions principales	157
6.3.2	Utilisation du logiciel	158
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>161</b>

---

## 6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthode d'identification des chargements exercés par un train qui a pour finalité d'ausculter les matériels roulants. Nous nous intéressons maintenant à l'ensemble fondation-ballast de la voie ferrée. Ce domaine d'études a déjà fait l'objet de nombreuses recherches [5, 47, 89, 103]. Pour qualifier l'ensemble fondation-ballast en voie, certaines entreprises ont développé des matériels spécifiques comme le train "Mauzin" ou "Iris320" de la SNCF, etc. Néanmoins, cette méthode perturbe le trafic parce que ces trains circulent à faible vitesse afin d'obtenir les informations sur la voie et les résultats s'obtiennent à des moments espacés dans le temps.

Dans le but de surveiller la voie en temps réel, un projet nommé "Railroad Infrastructure 4.0" a été développé par les chercheurs de l'University of Illinois à Urbana-Champaign et l'University of South Carolina [98]. Cependant, les efforts appliqués sur le rail sont estimés via une formule donnée par l'association américaine de génie ferroviaire et d'entretien des voies (AREMA). Ici, nous voulons proposer une méthode non-destructive permettant de suivre l'état de l'ensemble fondation-ballast de la voie ferrée fonctionnant en temps réel à partir des données mesurées par les traverses. Nous avons en effet présenté dans les chapitres 2 et 4 les modèles de la traverse en voie posée sur une fondation non-homogène. Dans ces modèles, la fondation de la voie se compose de 3 parties : gauche, milieu et droite. La rigidité de la partie centrale de la fondation varie en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ . Une étude paramétrique est effectuée afin d'étudier l'influence de ce facteur sur les réponses de la traverse. Finalement, à partir de cette relation, nous pouvons parler de la consolidation de l'ensemble fondation-ballast. En appliquant cette méthode sur un grand nombre de données de mesure *in situ*, nous pouvons montrer que cette méthode permet de suivre l'évolution en temps de l'ensemble fondation-ballast.

## 6.2 Indicateur de l'ensemble fondation-ballast

### 6.2.1 Études paramétriques des réponses de la traverse

#### Rappel du modèle numérique

L'ensemble fondation-ballast est naturellement une fondation non-homogène. Si nous la divisons en 3 parties [3] comme montré sur la figure 6.1, chaque partie de la fondation a une raideur différente. En réalité, juste après le bourrage, la partie centrale située entre les deux rails est bien moins compactée que les parties sous rails. Elle est donc moins raide que les autres et la traverse peut être considérée comme une poutre posée sur deux appuis (voir figure 6.1a). Avec le temps, la partie centrale se "densifie" et l'ensemble ballast-fondation devient alors partiellement consolidé (voir figure 6.1b) et puis homogène (voir figure 6.1c).

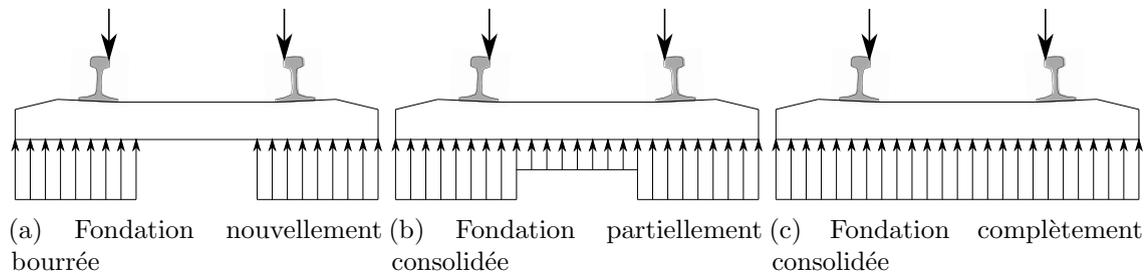


FIGURE 6.1 – Évolution de l'ensemble fondation-ballast avec le temps

Dans le cadre de cette étude, le problème étudié se restreint au cas d'une fondation symétrique non-homogène, c'est-à-dire que les deux parties sous rails ont les mêmes caractéristiques mécaniques et les chargements appliqués au niveau du rail sont les mêmes. La rigidité de la partie centrale  $E_m$  varie en fonction du facteur de consolidation  $k_c$  et la rigidité des parties sous rails comme suit :

$$\begin{cases} E_g = E_d = E_f \\ E_m = k_c \times E_f \end{cases} \quad (6.1)$$

Par convention, le facteur de consolidation  $k_c$  varie entre 0 et 1 :

- $k_c \ll 1$  : voie nouvellement bourrée
- $k_c \in [0, 1]$  : voie partiellement consolidée
- $k_c = 1$  : voie complètement consolidée (fondation homogène)

Les matériaux utilisés dans ce modèle sont considérés comme isotropes, élastiques et linéaires. Leurs caractéristiques mécaniques sont données dans le tableau 4.1. Nous prenons l'hypothèse de contact parfait aux surfaces de contact entre les composants (ni décollement et ni glissement). Les déplacements nodaux sur la surface basse de la fondation sont bloqués. Deux chargements égaux s'appliquent aux emplacements des rails sur la traverse sous type de "Pressure". Le maillage et le calcul sont faits à l'aide du logiciel ABAQUS.

### Résultats des études paramétriques

A l'aide du modèle numérique éléments finis de la traverse en voie, nous effectuons des études paramétriques en modifiant les caractéristiques mécaniques de la partie centrale de la fondation (voir figure 6.2).

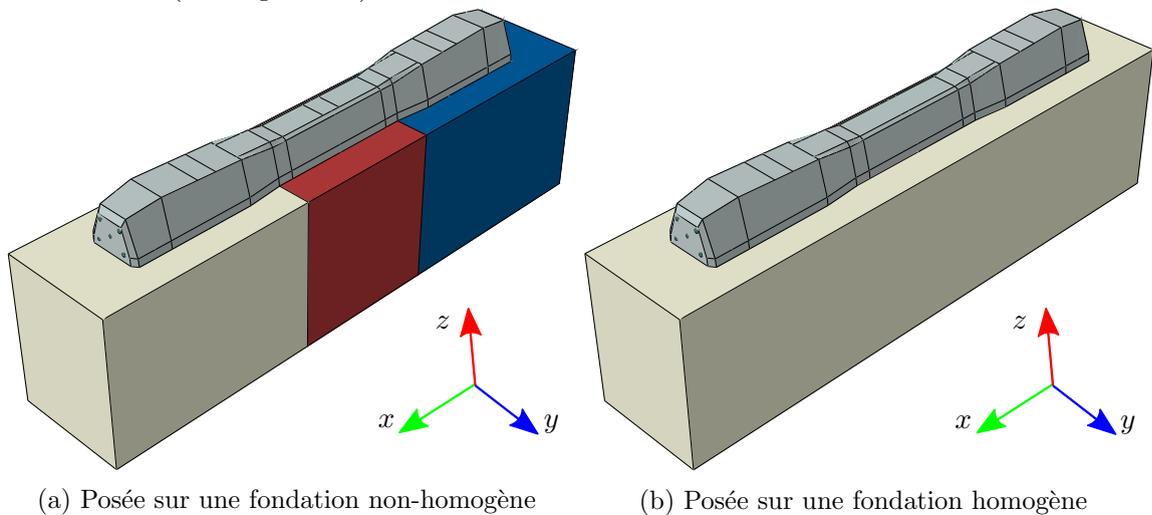
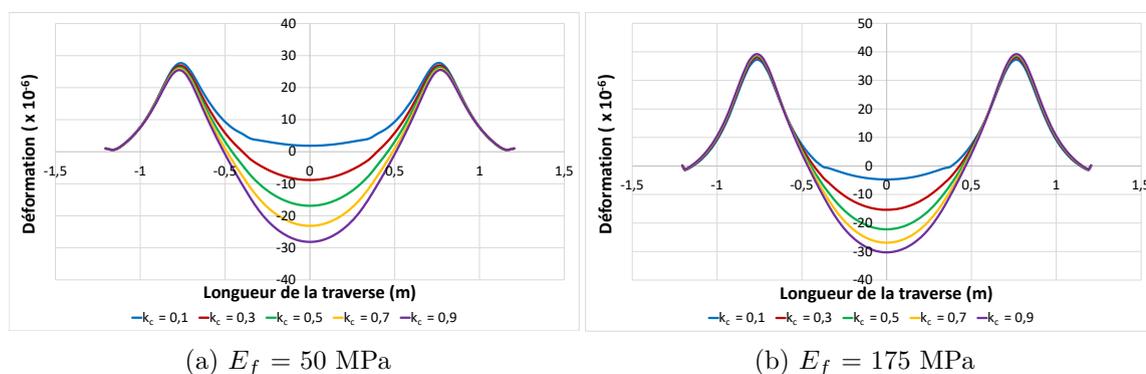


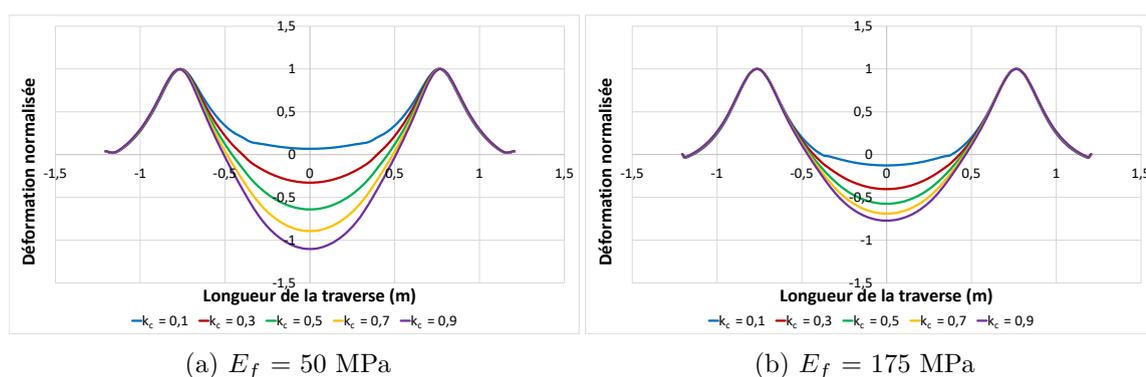
FIGURE 6.2 – Traverse en voie

La figure 6.3 montre la déformation sur la partie basse de la traverse dans deux cas de fondation :  $E = 50$  MPa et  $E = 175$  MPa. Dans ces figures, les 5 lignes bleue, rouge, verte, jaune et violette correspondent respectivement à 5 valeurs du facteur de consolidation  $k_c = [0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9]$ . Le cas où  $k_c = 0.1$  représente la voie nouvellement bourrée tandis que  $k_c = 0.9$  correspond à la voie "quasi" homogène.

Dans les 2 cas de fondation, nous constatons que la déformation de la traverse sous les rails varie très peu tandis que celle au milieu dépend fortement du facteur de consolidation

FIGURE 6.3 – Déformation en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ 

(de  $0.18 \mu\text{def}$  à  $-28 \mu\text{def}$  dans le premier cas et  $-4.72 \mu\text{def}$  à  $-30 \mu\text{def}$  dans le deuxième cas). Le cas étudié étant symétrique, la déformation de la traverse obtenue est symétrique. Ensuite, en divisant la déformation de la traverse par sa valeur maximale qui se trouve au niveau des rails, nous traçons les déformations normalisées ( $\bar{\varepsilon}$ ) dans la figure 6.4. Nous remarquons que cette valeur représente les réponses de la traverse qui ne dépendent pas des chargements.

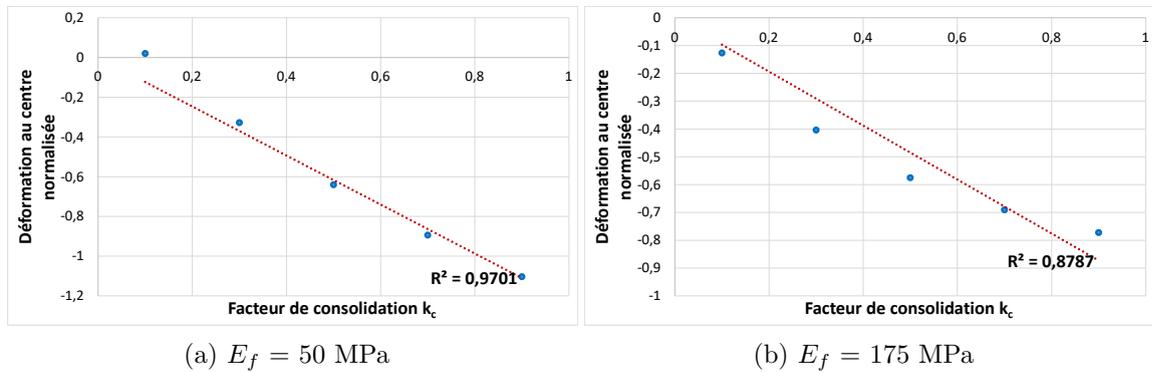
FIGURE 6.4 – Déformation normalisée en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ 

Les déformations normalisées sous rails pour tous les cas d'études sont égales à 1 ( $\bar{\varepsilon}_{R_1} = \bar{\varepsilon}_{R_2} = 1$ ). La seule valeur qui varie en fonction du facteur de consolidation  $k_c$  est la déformation normalisée au centre de la traverse ( $\bar{\varepsilon}_c$ ). Enfin, la figure 6.5 présente les valeurs normalisées au milieu en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ .

Les points bleus correspondent aux valeurs normalisées au centre de la traverse et les pointillés rouges représentent la courbe tendance de ces valeurs. Dans les deux cas de fondation, nous trouvons une relation linéaire : plus la déformation normalisée au centre est petite, plus la fondation est consolidée. Cette étude nous permet donc de mettre en évidence une relation entre la déformation normalisée et l'état de l'ensemble fondation-ballast d'une voie ferrée. Nous allons par la suite l'appliquer pour les mesures sur site.

## 6.2.2 Exploitation des résultats avec un grand nombre de données

Nous étudions, dans cette section l'évolution de l'état de l'ensemble fondation-ballast à partir des mesures des traverses instrumentées qui sont mises en service à Creil, France (voir figure 1.17). En collectant toutes les données pendant une période de 10 mois (de

FIGURE 6.5 – Déformation au centre normalisée en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ 

Février 2017 à Novembre 2017) ce qui représente 2650 passages de trains qui sont des trains de marchandises (FRET, etc.) et des trains de voyageurs (TER, Corail, etc.).

### Traitement des signaux et histogramme des données

Nous rappelons que la traverse “Smart Sleeper” intègre des capteurs de déformation aux positions suivantes : au dessous des rails et au centre de la traverse qui sont notés par :  $\varepsilon_{R_1}$ ,  $\varepsilon_{R_2}$  et  $\varepsilon_c$ . Dans un premier temps, nous détectons automatiquement le nombre de roue pour chaque passage de train à partir des signaux mesurés. Chaque roue qui passe sur une traverse correspond à un pic du signal (voir figure 6.6). Pour ce faire, nous utilisons le signal en provenance du **centre** de la traverse qui donne un signal moins bruité que ceux provenant des capteurs situés en dessous des rails.

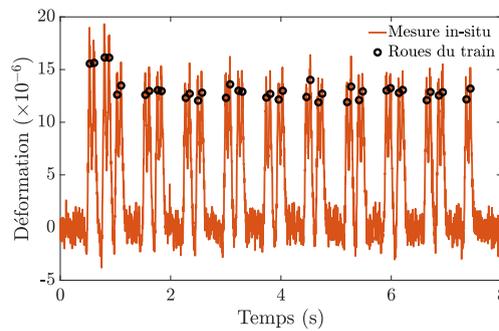


FIGURE 6.6 – Détection automatique des roues du train

Constatant qu’il y a toujours une différence entre les mesures des capteurs qui sont en dessous des rails, nous calculons ensuite la déformation moyenne des deux valeurs comme suit :

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_2}}{2} \quad (6.2)$$

La déformation normalisée au centre de la traverse peut être calculée par :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_m} \quad (6.3)$$

Nous introduisons ici la déformation normalisée au centre de la traverse comme un indicateur de l’ensemble fondation-ballast par la convention suivante : plus  $\bar{\varepsilon}_c$  est petite, plus la fondation est consolidée (homogène).

Les déformations normalisées au centre de la traverse sont calculées pour chaque passage de roue, et triées par ordre chronologique. Ensuite, pour obtenir l'histogramme des données, nous comptons le nombre de données dans chaque intervalle prédéfini. Un histogramme représente la probabilité de la déformation normalisée dans chaque l'intervalle et il dépend du nombre de données et aussi du temps. Les histogrammes obtenus à partir des 3 traverses, nous permettent alors de comparer l'état de l'ensemble fondation-ballast de la voie dans 3 positions différentes soumises aux mêmes chargements.

### Stabilité de l'ensemble fondation-ballast

La première application de cette méthode doit nous permettre d'étudier la stabilité de l'ensemble fondation-ballast. Les déformations normalisées au centre sont triées chronologiquement. En divisant la liste de données obtenue en 4 sous listes (intervalles), nous traçons 4 histogrammes qui comprennent chacun 25%, 50%, 75% et 100% des données (voir figure 6.7). Chaque histogramme présente l'état de l'ensemble fondation-ballast dans un intervalle de temps. Si la probabilité des données dans les 4 intervalles étaient les mêmes, nous pourrions conclure à la stabilité de l'ensemble fondation-ballast.

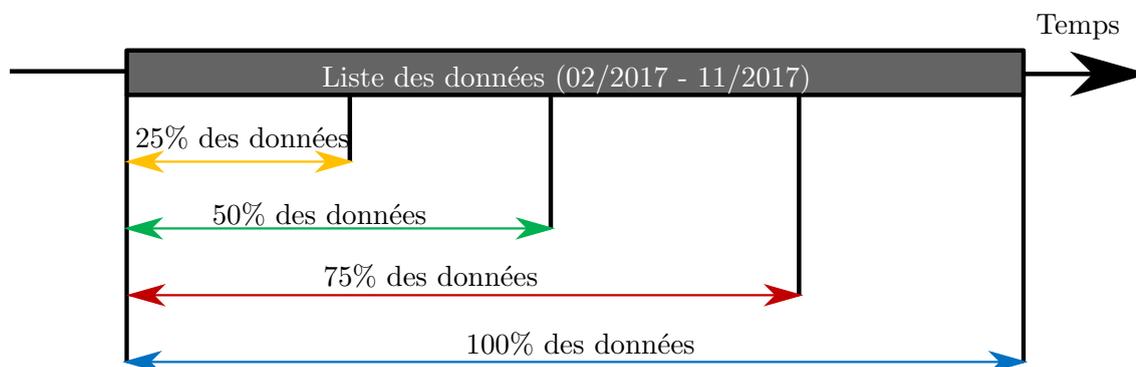
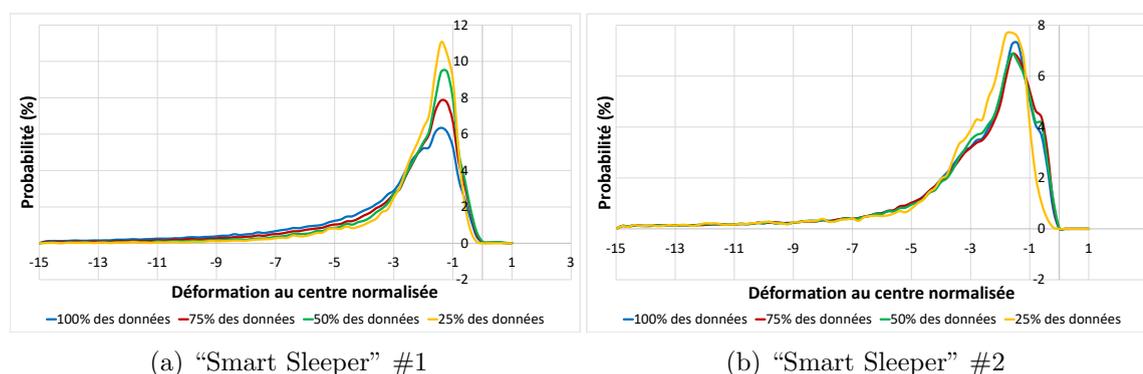


FIGURE 6.7 – Étude de la stabilité de l'ensemble fondation-ballast

Les figures 6.8a, 6.8b présentent les résultats de l'étude de la stabilité des zones fondation-ballast situées au niveau des traverses "Smart Sleeper" #1, #2 qui sont mises en service à Creil, France.



(a) "Smart Sleeper" #1

(b) "Smart Sleeper" #2

FIGURE 6.8 – Stabilité de l'ensemble fondation-ballast au-dessous des traverses instrumentées

La figure 6.8a montre clairement que les 4 histogrammes n'ont pas une même probabilité, ce qui pose la question de la stabilité de la fondation au niveau de la traverse #1. Nous

voyons clairement une diminution de stabilité de déformations normalisée au centre de cette traverse dans chaque intervalle de temps, ce qui n'est pas le cas de la traverse #2. En effet, l'histogramme de la figure 6.8b montre une stabilité des histogrammes qui traduit une stabilité de l'ensemble fondation-ballast au niveau de la traverse #2. Nous constatons qu'il existe des valeurs très petites de déformations normalisées qui sont causées par les bruits de mesures et(ou) la fréquence d'échantillonnage de mesures.

### Évolution de l'ensemble fondation-ballast en temps

Pour éclairer la question de la stabilité de l'ensemble fondation-ballast, nous étudions, dans cette partie, son évolution en temps. Pour ce faire, la liste des données est divisée en 5 intervalles. Chaque intervalle contient 20% du nombre des données qui correspond à peu près au nombre de passages de trains pendant 2 mois (voir figure 6.9).

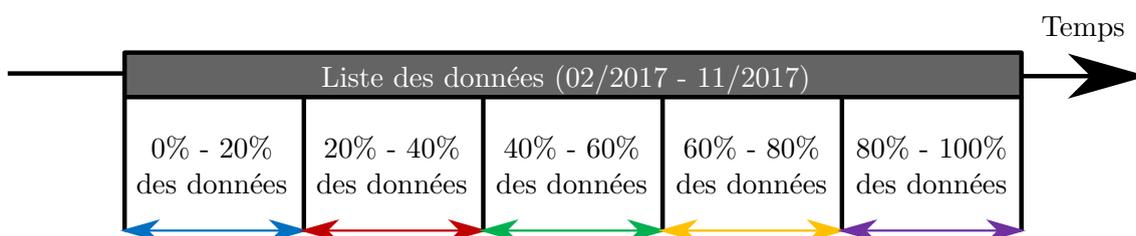


FIGURE 6.9 – Étude de l'évolution de l'ensemble fondation-ballast

Ainsi, avec 5 histogrammes de 5 intervalles, nous pouvons évaluer l'état de l'ensemble fondation-ballast en temps, ce qui est montré sur la figure 6.10. Les lignes bleue, rouge, verte, jaune et violette correspondent aux 5 intervalles de temps prédéfinis.

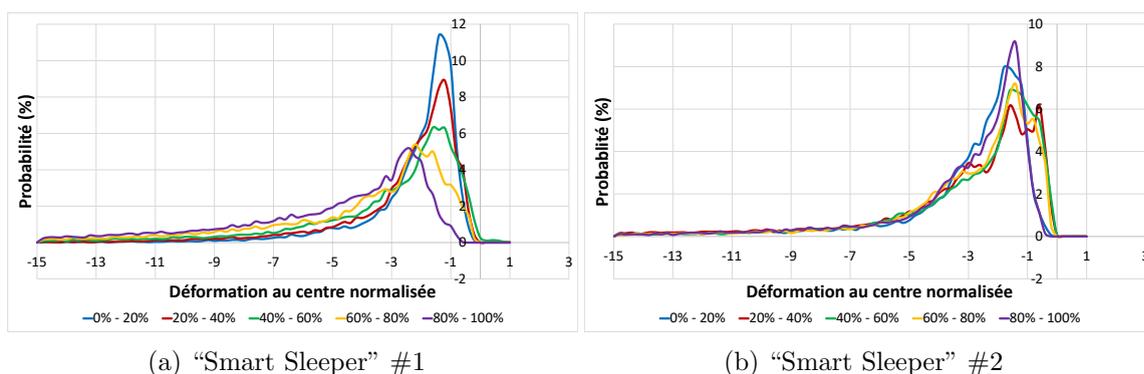


FIGURE 6.10 – Évolution de l'ensemble fondation-ballast au dessous des traverses instrumentées

Sur la figure 6.10a, nous voyons clairement une évolution de l'ensemble fondation-ballast au niveau de la traverse #1. La probabilité des déformations normalisées au centre diminue en fonction du temps, ce qui montre que la partie centrale se "densifie" et donc, que l'ensemble fondation-ballast s'est consolidé. Les résultats provenant de la traverse #2 montrent que l'ensemble fondation-ballast dans cette zone n'évolue pas dans chaque intervalle de 2 mois (voir figure 6.10b), ce qui montre une stabilité. Les résultats de cette étude sont cohérents avec l'étude de stabilité dont nous avons parlé précédemment.

### Comparaison de l'état de l'ensemble fondation-ballast au niveau des traverses instrumentées

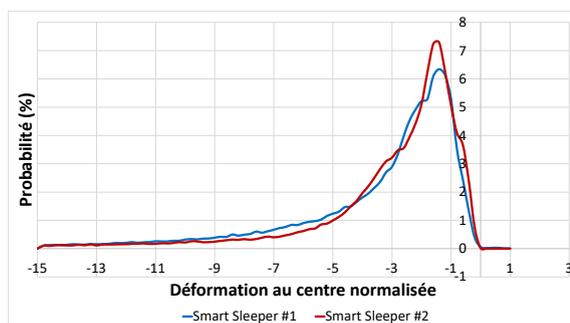
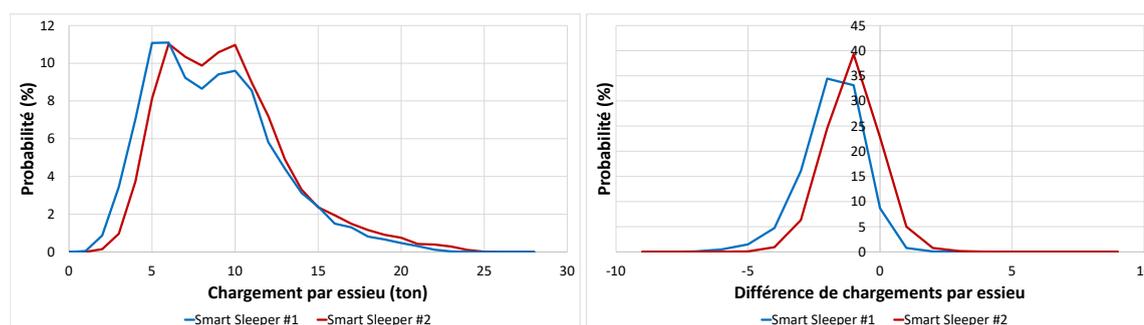


FIGURE 6.11 – Comparaison de l'état de l'ensemble fondation-ballast au niveau des traverses instrumentées

Enfin, la figure 6.11 montre la comparaison de l'état de l'ensemble pour les deux zones instrumentées pendant une même période de 10 mois en 2017. L'état de l'ensemble fondation-ballast des zones sous les traverses #1 et #2 est très peu différent, ce qui est montré par la même allure des histogrammes. Le fait que la probabilité de l'histogramme de la traverse #2 soit plus grande que celle de la traverse #1 montre que dans cette période, ses déformations normalisées sont plus “centrées”, ce qui traduit aussi une plus grande stabilité de l'ensemble fondation-ballast dans cette zone. Nous pouvons alors dire qu'au niveau de la traverse #1, l'ensemble fondation-ballast se ‘densifie’ en temps tandis que celui au niveau de la traverse #2 est stable.

### Comparaison des chargements identifiés à partir des données des 3 traverses

Dans cette section, nous identifions les chargement exercés par le trains sur les traverses instrumentées sur la période 02/2017 - 11/2017. Les chargements sont identifiés à l'aide des mesures de déformations provenant des traverses instrumentées. La figure 6.12 montre la comparaison des résultats après identification des chargements. Dans cette figure, nous montrons les chargements par essieu (voir figure 6.12a) et la différence des deux chargements verticaux d'un bogie (voir figure 6.12b). Les histogrammes des résultats obtenus pour les traverses #1 et #2 ont une même allure. La différence entre les traverses #1 et #2 vient des différents paramètres de la voie qui peut varier d'une zone à l'autre.



(a) Chargement par essieu

(b) Différence de chargement par essieu

FIGURE 6.12 – Comparaison des chargements identifiés à partir des traverses instrumentées dans une longue période

De plus, en analysant la différence entre les chargements exercés par un bogie qui passe sur le traverse #1, nous voyons que la plupart des trains ne sont pas équilibrés, ce qui n’est pas très logique car cette traverse est posée sur une ligne droite. Cependant nous avons pu vérifier que cette différence pouvait être atténuée en tenant compte des résultats de mesures réalisées lors de l’étalonnage de la traverse. Nous pouvons alors expliquer cette différence par l’hypothèse de l’homogénéité de l’ensemble fondation-ballast que nous avons utilisée non adaptée pour cette voie. Nous remarquons par ailleurs que la différence entre les chargements exercés par les matériels roulants sur la traverse #2 montre un meilleur équilibrage. Enfin, nous notons l’existence de chargements extrêmes par essieu (supérieur à 20 tonnes), pouvant être causés par des matériels roulants présentant des défauts (plats de roue par exemple) ou provenant de mesures très bruitées.

### 6.3 Présentation du logiciel “ChargeTEBA”

Les “Smart Sleeper” ont été mises en service à plusieurs endroits et des mesures sont déjà effectuées depuis un certain temps. Pour faciliter la partie auscultation de la voie, et particulièrement du matériel roulant, nous avons développé le logiciel “ChargeTEBA” qui se base sur la méthode d’identification des chargements exercés par le train présentée précédemment.

#### 6.3.1 Fonctions principales

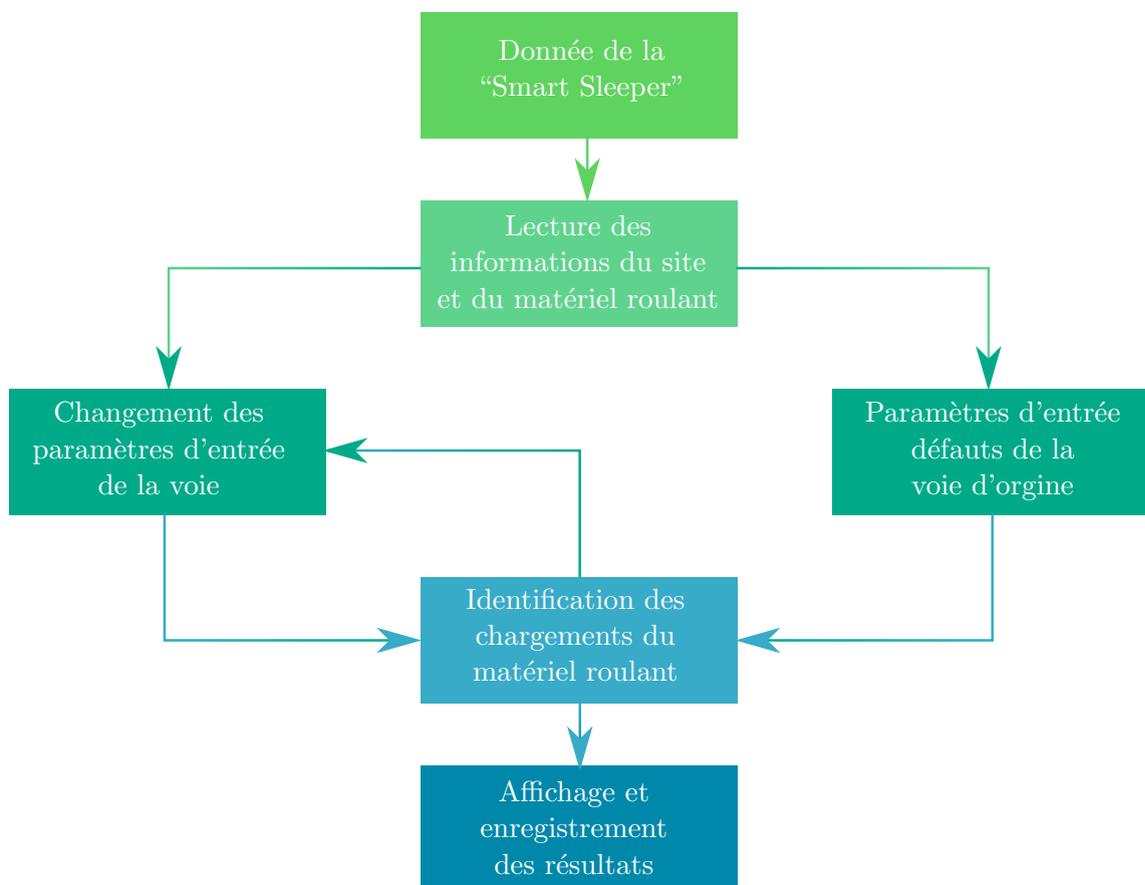


FIGURE 6.13 – Schéma du logiciel “ChargeTEBA”

Le logiciel **“ChargeTEBA”** permet de visualiser les réponses de la traverse et d'identifier les chargements générés par le matériel roulant avec une interface graphique. Le principe du logiciel est présenté dans le schéma de la figure 6.13. En se basant sur le programme MATLAB, les paramètres d'entrée du logiciel sont les paramètres de la voie dans la condition de la fondation homogène qui contiennent des données du rail, des semelles sous rail, de la traverse et de l'ensemble fondation-ballast.

Avec ces données, le logiciel **“ChargeTEBA”** permet d'identifier rapidement les chargements générés par le matériel roulant suivant deux directions : verticale et latérale qui sont présentés ensuite dans des graphiques.

### 6.3.2 Utilisation du logiciel

La figure 6.14 montre l'interface graphique du logiciel **“ChargeTEBA”** (*version :8.7.97*) qui contient trois zones : paramètres d'entrées du calcul, informations du site instrumenté et du matériel roulant, affichage des résultats.

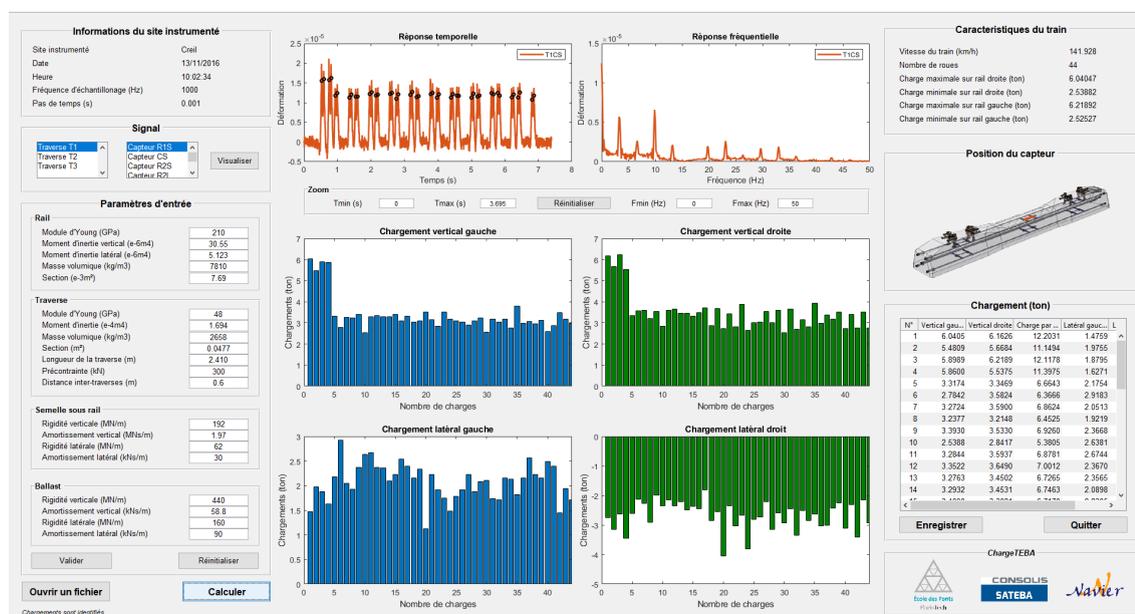


FIGURE 6.14 – Interface graphique du logiciel **“ChargeTEBA”** (*version :8.7.97*)

### Les paramètres d'entrée

Le logiciel commence par l'ouverture d'un fichier de mesures enregistrées provenant de la **“Smart Sleeper”**. Ce fichier est sauvegardé au format *\*.csv*. Les paramètres mécaniques des composants de la voie situés à gauche de l'interface comprennent les groupes suivants (voir figure 6.15) :

- Paramètres du rail : Le logiciel fournit les paramètres par défaut pour le rail de type UIC 60 : module d'Young, moments d'inertie suivant deux directions : verticale et latérale, masse volumique et section.
- Paramètres de la traverse : module d'Young, moment d'inertie, masse volumique, section, longueur de la traverse, niveau de précontrainte et distance inter-traverse. Les paramètres qui sont pris par défaut correspondent à la traverse M450. Nous considérons que la traverse a un comportement linéaire.

- Paramètres de la semelle sous rail : Elle est caractérisée par la rigidité et le coefficient d'amortissement suivant les deux directions verticale et latérale qui sont donnés dans le cahier des charges.
- Paramètres de l'ensemble fondation-ballast : Dans la 1<sup>ère</sup> version de ce logiciel, il est développé pour une fondation homogène qui a les caractéristiques suivantes : la rigidité et le coefficient d'amortissement suivant deux directions verticale et latérale. Ces paramètres peuvent être changés pour s'adapter à différents composants de la voie.

**Paramètres d'entrée**

Rail	
Module d'Young (GPa)	210
Moment d'inertie vertical (e-6m4)	30.55
Moment d'inertie latéral (e-6m4)	5.123
Masse volumique (kg/m3)	7810
Section (e-3m²)	7.69

Traverse	
Module d'Young (GPa)	48
Moment d'inertie (e-4m4)	1.694
Masse volumique (kg/m3)	2658
Section (m²)	0.0477
Longueur de la traverse (m)	2.410
Précontrainte (kN)	300
Distance inter-traverses (m)	0.6

Semelle sous rail	
Rigidité verticale (MN/m)	192
Amortissement vertical (MNs/m)	1.97
Rigidité latérale (MN/m)	62
Amortissement latéral (kNs/m)	30

Ballast	
Rigidité verticale (MN/m)	440
Amortissement vertical (kNs/m)	58.8
Rigidité latérale (MN/m)	160
Amortissement latéral (kNs/m)	90

FIGURE 6.15 – Paramètres d'entrée du logiciel "ChargeTEBA"

### Informations du site instrumenté et du matériel roulant

Après l'ouverture d'un fichier de mesure, le logiciel nous donne automatiquement les informations relatives au site instrumenté (voir figure 6.16a) qui se trouvent en haut à gauche de l'interface et les caractéristiques du matériel roulant (voir figure 6.16b) qui se trouvent en haut à droite de l'interface.

- Informations du site instrumenté : Il affiche le nom du site, date et heure de la mesure. Les paramètres de mesure sont détectés automatiquement.
- Caractéristiques du train : Le logiciel calcule la vitesse du train. Un algorithme est développé afin de détecter le nombre de roues de ce train. Les chargements extrêmes s'affichent automatiquement après l'étape d'identification.

Informations du site instrumenté		Caractéristiques du train	
Site instrumenté	Creil	Vitesse du train (km/h)	141.928
Date	13/11/2016	Nombre de roues	44
Heure	10:02:34	Charge maximale sur rail droite (ton)	6.04047
Fréquence d'échantillonnage (Hz)	1000	Charge minimale sur rail droite (ton)	2.53882
Pas de temps (s)	0.001	Charge maximale sur rail gauche (ton)	6.21892
		Charge minimale sur rail gauche (ton)	2.52527

(a) Informations du site instrumenté

(b) Caractéristique du train

FIGURE 6.16 – Informations obtenues après la lecture des données

### Affichage des résultats

- Les signaux mesurés : Nous pouvons visualiser les mesures *in situ* en temps ou en fréquence (voir figure 6.17). Dans cette figure, nous montrons le signal en provenance du capteur CS de la traverse 1. Chaque roue détectée est présentée par un cercle noir. Nous pouvons également régler l'intervalle de temps et de fréquence à l'aide de la fonction Zoom qui se trouve en-dessous des figures.

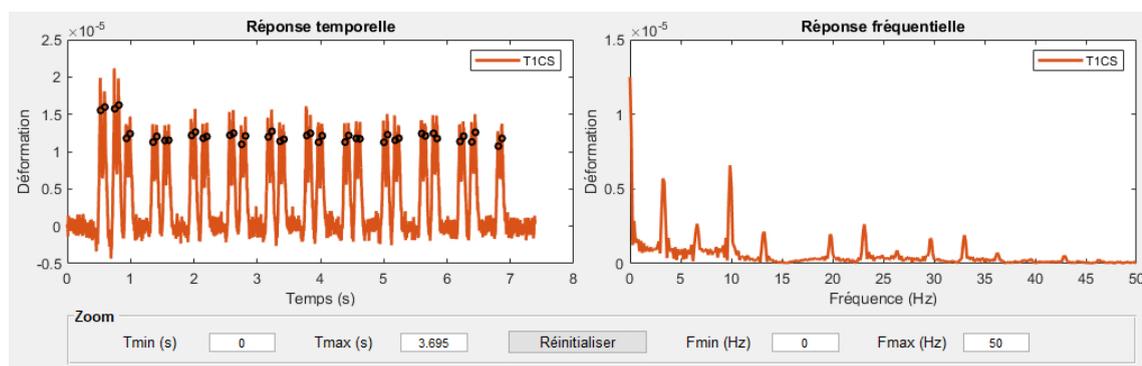


FIGURE 6.17 – Visualisation du signal

De plus, une liste des signaux mesurés nous permet de sélectionner (en choisissant le numéro de la traverse et le nom du capteur) et d'afficher (en cliquant sur le bouton "Visualiser") le signal souhaité (voir figure 6.18).

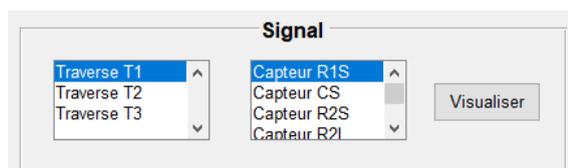


FIGURE 6.18 – Liste des signaux

- Chargements du train : Le cœur de ce logiciel concerne l'identification des chargements générés par le matériel roulant. Après la validation des paramètres d'entrée et la vérification des signaux mesurés, en cliquant sur le bouton "Calculer" qui se trouve dans la zone des paramètres d'entrée, les chargements exercés par le train suivant les directions verticale et latérale s'affichent dans 4 figures au centre de l'interface (voir figure 6.14). Les couleurs bleue et verte représentent respectivement les chargements du rail gauche et du rail droit.

**Chargement (ton)**

N°	Vertical gau...	Vertical droite	Charge par ...	Latéral gau...	L
1	6.0405	6.1626	12.2031	1.4759	^
2	5.4809	5.6684	11.1494	1.9755	
3	5.8989	6.2189	12.1178	1.8795	
4	5.8600	5.5375	11.3975	1.6271	
5	3.3174	3.3469	6.6643	2.1754	
6	2.7842	3.5824	6.3666	2.9183	
7	3.2724	3.5900	6.8624	2.0513	
8	3.2377	3.2148	6.4525	1.9219	
9	3.3930	3.5330	6.9260	2.3668	
10	2.5388	2.8417	5.3805	2.6381	
11	3.2844	3.5937	6.8781	2.6744	
12	3.3522	3.6490	7.0012	2.3670	
13	3.2763	3.4502	6.7265	2.3565	
14	3.2932	3.4531	6.7463	2.0898	
15	3.1888	3.3881	6.5769	2.2265	v

FIGURE 6.19 – Chargements identifiés

Un tableau se trouvant en bas à droite de l’interface détaille les chargements identifiés. Dans ce tableau, les chargement verticaux et latéraux sont donnés en tonnes (voir figure 6.19). De plus, le logiciel affiche aussi le chargement par essieu. Le bouton “Enregistrer” nous permet de sauvegarder tous les chargements identifiés avec les paramètres d’entrée, les informations relatives au site instrumenté, les caractéristiques du train dans un fichier au format *\*.txt*.

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude paramétrique d’une voie non-homogène. En se basant sur le modèle numérique par éléments finis d’une traverse posée sur une fondation non-homogène, le problème se restreint, dans cette étude, au cas de la fondation non-homogène symétrique. Le profil de la déformation de la traverse s’obtient en fonction du facteur de consolidation  $k_c$ . Nous constatons une faible variation de la déformation de la traverse dans la zone située en-dessous des rails tandis que celle située au centre dépend fortement du facteur  $k_c$ . C’est la raison pour laquelle nous calculons par la suite la déformation normalisée de la traverse en divisant ses réponses par la déformation mesurée dans la zone située en-dessous du rail où se trouve la déformation maximale. Une relation linéaire est trouvée entre la déformation normalisée au centre  $\bar{\varepsilon}_c$  et le facteur de consolidation  $k_c$ . Cette relation nous permet de conclure que plus la déformation normalisée au centre est petite, plus l’ensemble fondation-ballast est consolidé. Grâce à l’indicateur  $\bar{\varepsilon}_c$ , nous pouvons qualifier l’état de la fondation-ballast d’une voie ferrée.

En appliquant cette relation pour l’analyse les mesures provenant de traverses “Smart Sleeper” implantées sur le site de Creil sur une période de 10 mois en 2017, nous arrivons à étudier l’évolution de l’ensemble fondation-ballast au niveau des zones d’implantation de ces 2 traverses #1 et #2 via les histogrammes des déformations normalisées au centre  $\bar{\varepsilon}_c$ . En ce qui concerne la traverse #3, nous rappelons que les mesures provenant de cette traverse n’ont pas été exploitées car les mesures ne traduisent qu’une petite amplitude de déformations en dessous des rails, ce qui n’est pas cohérent avec les mesures provenant des traverses #1 et #2. Cette étude n’est donc pas appliquée pour cette zone instrumentée. L’état de l’ensemble fondation-ballast situé au niveau des traverses #1 et #2 peut être

caractérisé d'identique, leurs histogrammes ayant la même allure. De plus, le résultat donne clairement une évolution de l'ensemble fondation-ballast au niveau de la traverse #1, ce qui montre logiquement que la partie centrale de cette fondation se "densifie", la consolidation de la fondation est donc bien montrée par ce phénomène. La comparaison des chargements identifiés à partir des traverses instrumentées montre une cohérence entre les résultats des traverses #1 et #2. De plus, ces études soulèvent encore quelques questions concernant la qualité des signaux et l'algorithme de détection des roues d'un train.

Enfin, nous présentons une application industrielle, à savoir le logiciel "**ChargeTEBA**", qui est développé sur MATLAB. Ce logiciel nous permet non seulement de visualiser plus facilement les signaux, d'obtenir les informations du site instrumenté et les caractéristiques du train, mais aussi d'identifier les chargements générés par le train. Il est basé sur la méthode d'identification des chargements et l'hypothèse de la fondation homogène avec les paramètres d'entrée par défauts qui sont caractérisés, en ce moment, pour la voie de Creil. Les chargements identifiés et les paramètres d'entrée peuvent être sauvegardés dans un fichier pour être consultés ultérieurement. Dans la prochaine version du logiciel, nous pourrions créer une base de données pour plusieurs choix de composants de la voie et intégrer la partie d'étude de l'état de la fondation afin de développer le logiciel pour qu'il soit adapté à une fondation non-homogène. De plus, les fonctions existantes du logiciel peuvent être améliorées de manière plus "tactile".

# Conclusions et perspectives

## Contexte industriel

La maintenance des voies ferrées ballastées est primordiale dans le but d'assurer la sécurité des passages des trains et le confort des voyageurs. Les solutions existantes en France perturbent le trafic des trains et les résultats s'obtiennent de façon espacée dans le temps. Dans l'industrie 4.0, la réalisation d'une traverse instrumentée par des capteurs fibre optique semble pouvoir répondre à ces besoins. Le fait que les mesures peuvent se collecter à distance assure la sécurité des personnes et n'ont pas d'influence sur le trafic. Cependant, l'obtention des informations concernant l'état de la voie et du matériel roulant à partir des mesures en provenance des traverses instrumentées reste à faire ? La réponse à cette question constitue alors l'objectif de ces travaux de thèse CIFRE. Ces travaux rentrent dans le cadre d'une coopération entre la société SATEBA et le laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech.

## Contributions scientifiques

Dans la première partie, nous avons développé des modèles analytiques afin de calculer la réponse stationnaire de la traverse en voie posée sur une fondation homogène et non-homogène. La réponse de la traverse est calculée dans deux configurations de chargements suivant les directions verticale et latérale. Pour calculer la réponse de la traverse soumise à des efforts verticaux, les modèles de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ont été utilisés pour modéliser la traverse. La traverse est posée sur une fondation qui est modélisée à l'aide du modèle de Kelvin-Voigt. Les semelles sous rail ont été considérées comme un système de ressort-amortisseur. En considérant que les chargements sont périodiques sur le rail, la réponse de la traverse peut se calculer analytiquement dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de Green et du modèle du rail périodiquement supporté, la réponse de la traverse calculée montre qu'il y a peu de différence entre les deux modèles de poutres. Ce phénomène est expliqué par le coefficient non-dimensionnel de cisaillement de la traverse qui est très petit devant 1. En divisant l'ensemble fondation-ballast en 3 parties avec 3 comportements différents, nous avons calculé la réponse de la traverse et l'avons comparé dans plusieurs configurations de fondation. Nous avons montré que dans le cas d'une voie nouvellement bourrée, la partie centrale de la traverse travaille peu par rapport au cas de la voie consolidée (ou homogène). Pour calculer la réponse de la traverse soumise à des efforts latéraux, nous avons utilisé le modèle de poutre en traction simple pour modéliser la traverse. Le problème est simplifié en négligeant les moments appliqués sur la traverse au niveau des deux rails. L'influence des efforts latéraux sur la réponse totale de la traverse a ensuite été étudiée et nous avons montré que la partie centrale de la traverse est la zone de la traverse la plus influencée. Enfin, les modèles ont été validés en obtenant par une bonne adéquation des résultats de la modélisation avec les mesures sur site.

Pour mieux comprendre la façon de travailler de la traverse “Smart Sleeper”, nous avons effectué des essais mécaniques sur la traverse au sein du centre d’essai de SATEBA à Chalon-sur-Saône. Les premiers essais ont été réalisés sur la traverse seule : mesure de réponses vibratoires d’une traverse, mesures de champs de déplacement et de déformations dans l’essai de flexion 3 points d’une traverse. Ensuite, nous avons effectué des essais de flexion d’une traverse posée sur une fondation. Deux configurations de fondations sont utilisées dans ces essais à l’aide d’une caisse de ballast vibrée et compactée (pour fondation homogène) et d’un tapis transporteur (pour fondation non-homogène). Dans tous les essais, nous avons collé des jauges de déformation sur la traverse aux positions identiques à celles des capteurs FBG afin de comparer les mesures obtenues. De la même façon, pour nous assurer d’avoir de bonnes mesures de déplacement, deux types de capteurs ont été utilisés : capteur laser et capteurs LVDT. Les autres matériels d’essais (capteurs de force, accéléromètres etc) ont été calibrés avant utilisation. Dans l’essai de flexion 3 points d’une traverse, la déformation et le déplacement à mi-travée de la traverse sont en accord avec la théorie de poutre. De plus, les résultats de mesures montrent clairement la non linéarité du ballast.

Nous avons d’autre part développé le modèle numérique de la traverse par éléments finis à l’aide du logiciel ABAQUS. L’avantage de ce modèle est de pouvoir utiliser la géométrie réelle d’une traverse et de pouvoir calculer sa réponse en 3D. Ce modèle est validé car il a montré un bon accord avec les résultats d’essais de la traverse seule. Ensuite, les modèles de la traverse posée sur une fondation homogène et non-homogène par éléments finis ont été développés. Les résultats numériques de ces modèles sont en bonne cohérence avec les résultats des essais mécaniques. Les matériaux utilisés sont isotropes, linéaires et élastiques. La non-linéarité du ballast a été constatée d’après l’essai de flexion d’une traverse posée dans une caisse de ballast, ce qui nous a conduit à prendre comme raideur de la fondation dans le modèle numérique la raideur équivalente. Nous avons développé par la suite un modèle semi-analytique de la traverse en voie en couplant le modèle numérique d’une période de la voie et le modèle analytique du rail périodiquement supporté. Ce modèle semi-analytique nous permet de calculer la réponse de la traverse sans avoir besoin de modéliser les rails, les semelles sous rail et les chargements et de gagner en temps de calcul. Les résultats du modèle semi-analytique montrent clairement l’influence de la non-uniformité de la section sur la réponse de la traverse, ce que nous ne pouvons pas observer dans les modèles analytiques.

La deuxième partie de ce travail est dédiée à l’auscultation des matériels roulants et de la voie à partir des réponses dynamiques de la traverse en voie. Nous avons développé une méthode pour l’identification des chargements verticaux et latéraux générés par le train à l’aide de la relation linéaire entre les déformations de la traverse dans le domaine fréquentiel et les efforts appliqués sur les rails. Dans cette relation, les chargements du train et les déformations de la traverse sont reliés via une matrice dont chaque composante ne dépend que des paramètres de la voie et de la fonction de Green. A l’aide du solveur `mldivide` dans MATLAB, les chargements peuvent être identifiés rapidement. La vérification réalisée en considérant des signaux numériques non-bruités et bruités nous permet de vérifier la bonne précision de la méthode. Ensuite, en considérant les mesures réalisées sur site, nous avons montré que les chargements identifiés sont très proches des caractéristiques des trains concernées.

Nous avons ensuite étudié l’influence du facteur de consolidation sur la réponse de la traverse à l’aide du modèle de la traverse posée sur une fondation non-homogène. Dans cette étude, ce problème se restreint à la configuration de fondation non-homogène symétrique. Nous constatons une petite variation de déformation au niveau des rails tandis que la

déformation centrale dépend fortement du facteur de consolidation. Nous calculons ensuite la déformation normalisée en divisant les déformations par la déformation mesurée en-dessous des rails. La déformation normalisée au centre est reliée au facteur de consolidation via le fait suivant : plus la déformation normalisée est plus petite, plus la fondation est consolidée. La déformation normalisée est donc un facteur de l'ensemble fondation-ballast, qui indique son état. Une étude sur un grand nombre de données a ensuite été réalisée. Elle concerne 2650 passages de train sur le site de Creil. Elle a montré une évolution de l'ensemble fondation-ballast au niveau de la traverse #1 et une stabilité au niveau de la traverse #2. Une comparaison des chargements identifiés à partir des traverses instrumentées montre que les traverses #1 et #2 donnent des résultats cohérents. En ce qui concerne les mesures provenant de la traverse #3 qui est posée sur une portion courbée se pose une questions sur l'adaptation du modèle analytique ou des conditions de mesures (amplitudes des déformations mesurées en dessous des rails sont très faibles par rapport aux mesures aux mêmes positions des traverses #1 et #2). Ces données n'ont pas donc été exploitées.

Nous avons enfin développé un logiciel destiné à faciliter le traitement des mesures des traverses "Smart Sleeper". Ce logiciel nommé "**ChargeTEBA**" permet d'obtenir les informations du site instrumenté et les caractéristiques générés par les trains. De plus, les chargements du train peuvent être identifiés rapidement et visualisés dans l'interface graphique du logiciel. Enfin, les paramètres d'entrée peuvent changer pour s'adapter à plusieurs voies.

## Perspectives et discussions

### Sur les modèles de voie

**Le comportement de l'ensemble fondation-ballast :** Le modèle analytique de la traverse en voie est développé avec une fondation linéaire. Cependant, le ballast est un matériau avec un comportement complexe et notamment non linéaire comme le montre dans l'essai de flexion que nous avons réalisé sur une traverse placée dans une caisse de ballast. Le développement d'un modèle tenant compte la non linéarité du ballast est nécessaire afin de décrire la réponse de la traverse de manière plus précise. La méthode de résolution du problème est probablement par approximation de Galerkin et méthode de Runge-Kutta.

**Les chargements appliqués sur le rail :** Dans ce travail de thèse, les chargements appliqués sont des constantes qui ne décrivent que le chargement statique. Le contact roue-rail est donc considéré parfait. Cependant, ce contact, en réalité, présente des irrégularités causées par les défauts de roue (roue plate, etc.), l'ondulation sinusoïdale, ou les défauts de soudure entre les rails, etc. Ce modèle peut alors être développé en prenant en compte ces irrégularités en ajoutant un terme dans l'équation du modèle de rail. Ce développement nous permettrait d'étudier le comportement de la traverse sous l'action des chargements dynamiques.

**L'état de la traverse :** La traverse est considérée comme une traverse saine (il n'y a pas de fissure). Si la traverse est soumise à de forts chargements sur une durée de temps longue, elle pourrait être fissurée et les mesures ne seraient plus exactes. Le modèle de la traverse en voie peut être développé en prenant en compte ce phénomène pour étudier l'influence de fissures sur les réponses de la traverse. L'objectif de ce travail est de proposer une méthode d'auscultation de la traverse, qui peut être intégrée dans le logiciel "**ChargeTEBA**".

**Le modèle numérique par éléments finis :** En utilisant le modèle de la traverse

posée sur une fondation, nous pouvons ensuite l'utiliser pour étudier la réponse de la traverse dans la zone de transition par la méthode "Wave Finite Element Method" (WFEM).

### Sur l'auscultation des matériels roulants et de l'ensemble fondation-ballast

**Auscultation de l'ensemble fondation-ballast :** Nous nous sommes limités dans ce travail au cas de la fondation non-homogène symétrique. Ce travail peut donc s'élargir à d'autres configurations de fondation et des chargements. Ce travail donnerait une vue générale sur la réponse de la traverse, afin d'obtenir un bilan sur l'état de la fondation à partir des réponses de la traverse.

**Identification des chargements du train :** En développant le modèle de la traverse en voie soumise à des chargements dynamiques, nous voudrions ensuite différencier les chargements statiques et dynamiques d'un train pour mieux ausculter les matériels roulants.

### Sur la nouvelle version de la traverse "Smart Sleeper"

**La traverse "Smart Sleeper" :** Au vu des essais que nous avons réalisés, il nous semble intéressant de positionner un plus grand nombre de capteurs dans la longueur de la traverse afin d'obtenir le profil de déformation de la traverse de façon plus précise. La détermination du profil de déformation nous permettrait en effet de qualifier de manière plus précise l'équilibre de l'ensemble fondation-ballast et d'identifier les chargements avec une meilleure précision. Par ailleurs, le système de mesure équipant la traverse "Smart Sleeper" a une fréquence d'acquisition maximale de 500 Hz alors que les effets dynamiques ne peuvent être détectés que pour des fréquences d'acquisition supérieures à 1000 Hz. Il faudrait pouvoir par la suite disposer d'un matériel d'acquérir à des fréquences de 1000 Hz.

**La voie connectée :** L'implantation des traverses peut aussi être source de discussion. En effet, telles qu'elles sont disposées actuellement, elles restent difficilement utilisables pour qualifier correctement l'état du matériel roulant. Par ailleurs, leur grand espacement (100 mètres) génère des difficultés de connexion et d'alimentation des traverses instrumentées. Nous proposons de réaliser une portion de voie connectée dont la longueur serait égale au périmètre d'une roue, cette portion pouvant contenir au minimum 3 traverses "Smart Sleeper". Cette configuration permettrait d'assurer l'enregistrement des informations d'un périmètre de roue complet et de détecter tous les défauts. Elle serait aussi très adaptée aux zones sensibles pour lesquelles la voie présente des singularités comme les zones de transition, les zones de courbure ou les zones de fondation souples.

**L'application industrielle :** En adoptant les modifications que nous proposons il est nécessaire de mettre à jour le logiciel "ChargeTEBA" pour tenir compte de la nouvelle configuration de la traverse "Smart Sleeper" et de la nouvelle implantation des traverses. Le logiciel "ChargeTEBA" pourrait intégrer une base de données des types de composants de la voie pour que l'utilisateur n'ait pas besoin de saisir à la main les paramètres d'entrée. De plus, des fonctions peuvent être intégrées afin de faciliter les manipulations (par exemple : correction des erreurs lors de la détection des roues manuellement, etc.). L'étape d'optimisation du logiciel est donc indispensable pour réduire le temps de calcul.

## Publications et communications

Des résultats concernant les modèles de la traverse en voie obtenus dans le cadre de la thèse sont publiés dans des revues scientifiques et des conférences internationales comme indiqué ci-dessous.

## Articles

- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “A fast analytic method to calculate the dynamic response of railways sleepers”, *Journal of Vibration and Acoustics* 141 (1) (2018), p. 1368–1380, DOI :10.1115/1.4040392
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “Identification of train loads from the dynamic responses of an integrated sleeper in-situ”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, (2020), DOI :10.1177/1045389X20922905
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “A semi-analytical model for computing the dynamics of railway sleepers on non-homogeneous foundations”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, en relecture.
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “A comparison of beam models for the dynamic of railway sleepers”, *Journal of Rail and Rapid Transit*, en relecture.
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, “Calculation of dynamic responses of railway sleepers on a nonlinear foundation”, *Nonlinear Dynamics*, en rédaction.
- T.Hoang, L.-H. Tran, D. Duhamel, G. Foret, “Analytic model for the dynamics of a railway track on a nonuniform foundation”, *Structures*, en relecture

## Conférences

- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “Analytical model of the dynamics of railway sleeper”, p. 3937–3948, *6<sup>th</sup> International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2017)*, July 2017, Rhodes, Grèce, DOI :10.7712/120117.5695.18372.
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “Analytic method to identify train load from integrated sleeper in-situ”, *13<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIII)*, July 2018, New York, USA.
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “Analytical model for the dynamics of a railway sleepers on a non-homogeneous foundation”, *EMI International Conference*, July 2019, Lyon, France.
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “Influence of lateral wheel loads on the sleeper response of a railway track”, *26<sup>th</sup> International Conference on Sound & Vibration (ICSV 26)*, July 2019, Montréal, Canada.
- L.-H. Tran, T. Hoang, D. Duhamel, G. Foret, S. Messad and A. Loaëc, “Computational method for the dynamics railway sleeper on a viscoelastic foundation”, *5<sup>th</sup> International Conference on Railway Technology (RAILWAYS 2020)*, Sep 2020, Mallorca, Spain.



## Annexe A

# Modèle de poutre de Timoshenko

### A.1 Formulations mathématiques

Dans la théorie des poutres, l'équation dynamique de la poutre de Timoshenko s'écrit avec un système de deux équations qui dépendent de deux variables : le déplacement de la poutre  $w_s^v(x, t)$  et la rotation de la section droite par rapport à l'axe neutre  $\phi_s^v(x, t)$ . Dans notre cas, la poutre est en précontrainte avec une force  $T$  et est posée sur une fondation qui est caractérisée par la raideur  $k_f^v$  et l'amortissement  $\zeta_f^v$  à l'aide du modèle de Kelvin-Voigt. Alors, sous application d'une force  $F^v(x, t)$ , les équations dynamiques d'une poutre de Timoshenko en flexion peuvent s'écrire comme suit (2.21) :

$$\begin{cases} \rho_s S_s \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial t^2} = \kappa_s S_s G_s \left( \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_s^v}{\partial x} \right) + T \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial x^2} - k_f^v w_s^v - \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v}{\partial t} + F^v(x, t) & \text{(A.1a)} \\ \rho_s I_s \frac{\partial^2 \phi_s^v}{\partial t^2} = E_s I_s \frac{\partial^2 \phi_s^v}{\partial x^2} + \kappa_s S_s G_s \left( \frac{\partial w_s^v}{\partial x} - \phi_s^v \right) & \text{(A.1b)} \end{cases}$$

où :  $E_s$ ,  $I_s$ ,  $\rho_s$ ,  $S_s$ ,  $G_s$  et  $\kappa_s$  sont respectivement le module d'Young, le moment d'inertie, la masse volumique, la section droite, le module de cisaillement et le facteur de cisaillement de la poutre.

#### A.1.1 Équation combinée de la poutre de Timoshenko

Le système d'équations (A.1) peut être simplifié en une équation différentielle d'une variable qui est le déplacement de la poutre  $w_s^v(x, t)$  en éliminant la rotation de la section droite  $\phi_s^v(x, t)$ . Pour ce faire, à partir de l'équation (A.1a), on peut obtenir l'expression de la rotation  $\phi_s^v(x, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s^v(x, t)}{\partial x} = & \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial x^2} - \left( \frac{k_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) w_s^v(x, t) \\ & - \left( \frac{\zeta_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial t} - \left( \frac{\rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{F^v(x, t)}{\kappa_s S_s G_s} \end{aligned} \quad \text{(A.2)}$$

Différencions l'équation (A.1b) par rapport à  $x$ . Nous avons alors :

$$\rho_s I_s \frac{\partial^3 \phi_s^v(x, t)}{\partial x \partial t^2} = E_s I_s \frac{\partial^3 \phi_s^v(x, t)}{\partial x^3} + \kappa_s S_s G_s \left( \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_s^v(x, t)}{\partial x} \right) \quad \text{(A.3)}$$

En combinant l'équation (A.2) avec équation (A.3), le système d'équations (A.1) peut être ré-écrit :

$$\begin{aligned}
& E_s I_s \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^4 w_s^v}{\partial x^4} - \left( \frac{E_s I_s k_f^v + T \kappa_s S_s G_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial x^2} \\
& - \left( \frac{E_s I_s \zeta_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^3 w_s^v}{\partial t \partial x^2} + k_f^v w_s^v - \left( \frac{E_s I_s \rho_s S_s + \rho_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^4 w_s^v}{\partial t^2 \partial x^2} \\
& + \zeta_f^v \frac{\partial w_s^v}{\partial t} + \left( \frac{\kappa_s \rho_s S_s^2 G_s + \rho_s I_s k_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v}{\partial t^2} + \left( \frac{\rho_s I_s \zeta_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^3 w_s^v}{\partial t^3} \\
& + \left( \frac{\rho_s^2 I_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^4 w_s^v}{\partial t^4} = F^v - \left( \frac{E_s I_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 F^v}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho_s I_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 F^v}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Nous introduisons la raideur dynamique de la fondation  $k_b^v$  qui est calculée par :  $k_b^v = k_f^v + i\omega \zeta_f^v$ . L'équation (A.4) sera résolue dans le domaine fréquentiel. Pour ce faire, en utilisant la transformation de Fourier, l'équation dynamique de la poutre de Timoshenko (A.4) peut s'exprimer en fonction du déplacement de la poutre dans le domaine fréquentiel  $\hat{w}_s^v(x, \omega)$  comme suit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^4} - \left( \frac{E_s I_s k_b^v + T \kappa_s S_s G_s - \omega^2 (E_s I_s \rho_s S_s + \rho_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T))}{E_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} \\
& - \left( \frac{-\kappa_s S_s G_s k_b^v + \omega^2 (\kappa_s \rho_s S_s^2 G_s + \rho_s I_s k_f^v) + i\omega^3 \rho_s I_s \zeta_f^v - \omega^4 \rho_s^2 I_s S_s}{E_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)} \right) \hat{w}_s^v(x, \omega) \\
& = \left( \frac{\kappa_s S_s G_s - \omega^2 \rho_s I_s}{E_s I_s (\kappa_s S_s G_s + T)} \right) \hat{F}^v(x, \omega) + \left( \frac{-1}{\kappa_s S_s G_s + T} \right) \frac{\partial^2 \hat{F}^v(x, \omega)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

L'équation (A.4) est une équation différentielle d'ordre 4. La force totale appliquée sur la traverse est :  $\hat{F}^v(x, \omega) = -\hat{R}_1^v(\omega)\delta(x-a) - \hat{R}_2^v(\omega)\delta(x+a)$ . La fonction de Green nous permet de résoudre ce type d'équation.

### A.1.2 Calcul de la déformation de la poutre de Timoshenko

La déformation de la poutre de Timoshenko s'écrit (2.2) :

$$\varepsilon_{xx}^v(x, z, t) = -z_s \frac{\partial \phi_s^v(x, t)}{\partial x} \tag{A.6}$$

où :  $z_s$  est la distance par rapport à la fibre et  $\phi_s^v(x, t)$  est la rotation de la section droite par rapport à la fibre neutre. En prenant équation (A.2) dans équation (A.6), nous obtenons une nouvelle expression de la déformation de la poutre :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^v(x, z, t) = & -z_s \left[ \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial x^2} - \left( \frac{k_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) w_s^v(x, t) \right. \\
& \left. - \left( \frac{\zeta_f^v}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial t} - \left( \frac{\rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 w_s^v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{F^v(x, t)}{\kappa_s S_s G_s} \right]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

En utilisant la transformation de Fourier, la déformation de la poutre s'exprime comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = -z_s \left[ \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^2 \hat{w}_s^v}{\partial x^2} - \left( \frac{k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \hat{w}_s^v + \frac{\hat{F}^v}{\kappa_s S_s G_s} \right] \tag{A.8}$$

En posant :  $\alpha^T = \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s}$ ,  $\beta^T = \frac{k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s}$ ,  $\gamma^T = \frac{1}{\kappa_s S_s G_s}$  et en remplaçant les équations (2.9) et (2.26) dans l'équation (A.8), on peut réécrire :

$$\hat{\varepsilon}_{xx}^v(x, z, \omega) = z_s \left[ \hat{R}_1^v(\omega) \Psi_a^T(x, \omega) + \hat{R}_2^v(\omega) \Psi_{-a}^T(x, \omega) \right] \quad (\text{A.9})$$

où les fonctions :  $\Psi_a^T(x, \omega)$  et  $\Psi_{-a}^T(x, \omega)$  sont définies par :

$$\begin{cases} \Psi_a^T(x, \omega) = \alpha^T \frac{\partial^2 G_a^T(x, \omega)}{\partial x^2} - \beta^T G_a^T(x, \omega) + \gamma^T \delta(x - a) \\ \Psi_{-a}^T(x, \omega) = \alpha^T \frac{\partial^2 G_{-a}^T(x, \omega)}{\partial x^2} - \beta^T G_{-a}^T(x, \omega) + \gamma^T \delta(x + a) \end{cases} \quad (\text{A.10a})$$

$$\quad (\text{A.10b})$$

D'après l'équation (B.9), la fonction de Green  $G_a^T(x, \omega)$  peut s'exprimer :

$$G_a^T(x, \omega) = \bar{f}_a(x, \omega) + \bar{D}_a(x, \omega) \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{f}_a(x, \omega) = \bar{A}_1 \cosh(\lambda_1 x) + \bar{A}_2 \sinh(\lambda_1 x) + \bar{B}_1 \cos(\lambda_2 x) + \bar{B}_2 \sin(\lambda_2 x) \\ \bar{D}_a(x, \omega) = \frac{H(x - a)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left( \mathbf{C}_1 \frac{\sinh \lambda_1 (x - a)}{\lambda_1} - \mathbf{C}_2 \frac{\sin \lambda_2 (x - a)}{\lambda_2} \right) = H(x - a) \bar{g}_a(x, \omega) \end{cases}$$

où  $\bar{g}_a(x, \omega)$  est une fonction qui dépend des 4 paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$ . Les coefficients de ces fonctions sont calculés dans Annexe B. Nous remarquons que la fonction  $\bar{g}_a(x, \omega)$  est nulle en  $x = a$  :

$$\bar{g}_a(a, \omega) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Nous calculons ensuite la dérivée seconde par rapport à  $x$  de la fonction de Green  $G_a(x, \omega)$  :

$$\frac{\partial^2 G_a^T(x, \omega)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{f}_a(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{D}_a(x, \omega)}{\partial x^2} \quad (\text{A.13})$$

— Le premier terme de l'équation (A.13) s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_a}{\partial x^2} = \lambda_1^2 (\bar{A}_1 \cosh(\lambda_1 x) + \bar{A}_2 \sinh(\lambda_1 x)) - \lambda_2^2 (\bar{B}_1 \cos(\lambda_2 x) + \bar{B}_2 \sin(\lambda_2 x)) \quad (\text{A.14})$$

— Nous remarquons que :  $\frac{\partial H(x - a)}{\partial x} = \delta(x - a)$ , donc le deuxième terme de l'équation (A.13) s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial^2 \bar{D}_a(x, \omega)}{\partial x^2} = \frac{\partial \delta(x - a)}{\partial x} \bar{g}_a(x, \omega) + 2\delta(x - a) \frac{\partial \bar{g}_a(x, \omega)}{\partial x} + H(x - a) \frac{\partial^2 \bar{g}_a(x, \omega)}{\partial x^2} \quad (\text{A.15})$$

- Tout d'abord, nous rappelons la propriété de la fonction de Dirac  $\delta(x - a)$  qui est :

$$\delta(x - a) = \begin{cases} +\infty & \text{en } x = a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Après la remarque (A.12), nous pouvons en déduire :

$$\delta(x - a) \bar{g}_a(x, \omega) = 0 \quad (\forall x \in [-L, L]) \quad (\text{A.16})$$

Différencions l'équation (A.16), nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta(x-a)\bar{g}_a(x,\omega)) = \frac{\partial\delta(x-a)}{\partial x}\bar{g}_a(x,\omega) + \delta(x-a)\frac{\partial\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Après l'équation (A.17), nous obtenons une nouvelle relation :

$$\frac{\partial\delta(x-a)}{\partial x}\bar{g}_a(x,\omega) = -\delta(x-a)\frac{\partial\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x} \quad (\text{A.18})$$

En remplaçant l'équation (A.18) dans l'équation (A.15), la dérivée seconde par rapport à  $x$  de la fonction  $\bar{D}_a(x,\omega)$  peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\partial^2\bar{D}_a(x,\omega)}{\partial x^2} = \delta(x-a)\frac{\partial\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x} + H(x-a)\frac{\partial^2\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x^2} \quad (\text{A.19})$$

- La fonction delta Dirac  $\delta(x-a)$  étant non nulle uniquement en  $x=a$ , le premier terme de l'équation (A.19) est aussi non nul uniquement en  $x=a$ . Nous allons ensuite calculer la dérivée première par rapport à  $x$  de la fonction  $\bar{g}_a(x,\omega)$  en  $x=a$  comme suit (nous rappelons que les expressions des 4 paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  peuvent être trouvées dans l'Annexe B et le coefficient  $k_2$  est défini dans le Tableau 2.6) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x} \right|_{x=a} &= \left. \frac{\mathbf{C}_1 \cosh \lambda_1(x-a) - \mathbf{C}_2 \cos \lambda_2(x-a)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \right|_{x=a} \\ &= \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ &= \frac{(k_1 + \lambda_1^2 k_2) - (k_1 - \lambda_2^2 k_2)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ &= k_2 \\ &= \frac{-1}{\kappa_s S_s G_s + T} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

En mettant le résultat de l'équation (A.20) dans l'équation (A.19), la dérivée seconde par rapport à  $x$  de la fonction  $\bar{D}_a(x,\omega)$  peut s'exprimer d'une autre façon :

$$\frac{\partial^2\bar{D}_a(x,\omega)}{\partial x^2} = \frac{-\delta(x-a)}{\kappa_s S_s G_s + T} + H(x-a)\frac{\partial^2\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x^2} \quad (\text{A.21})$$

En utilisant les équations (A.11), (A.13) et (A.21), l'équation (A.10a) peut se réduire comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi_a^T(x,\omega) &= \alpha^T \left( \frac{\partial^2\bar{f}_a(x,\omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{D}_a(x,\omega)}{\partial x^2} \right) - \beta^T G_a^T(x,\omega) + \gamma^T \delta(x-a) \\ &= \alpha^T \left( \frac{\partial^2\bar{f}_a(x,\omega)}{\partial x^2} + H(x-a)\frac{\partial^2\bar{g}_a(x,\omega)}{\partial x^2} \right) - \beta^T G_a^T(x,\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

La fonction  $\Psi_a^T(x,\omega)$  est continue au point d'application de la force  $x=a$ , ceci est cohérent avec la continuité en déformation de la poutre. De la même manière, nous pouvons calculer la forme analytique de la fonction  $\Psi_{-a}^T(x,\omega)$  :

$$\Psi_{-a}^T(x,\omega) = \alpha^T \left( \frac{\partial^2\bar{f}_{-a}(x,\omega)}{\partial x^2} + H(x+a)\frac{\partial^2\bar{g}_{-a}(x,\omega)}{\partial x^2} \right) - \beta^T G_{-a}^T(x,\omega) \quad (\text{A.23})$$

## A.2 Conditions aux limites d'une poutre de Timoshenko

Pour une poutre libre-libre, le moment et la force de cisaillement sont nuls aux deux extrémités de la poutre. Nous pouvons en déduire les conditions de la poutre de Timoshenko :

— L'expression du moment de la poutre :

$$E_s I_s \frac{\partial \phi_s^v(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.24})$$

En utilisant équation (A.2) et la transformation de Fourier, on peut obtenir l'équation (A.24) dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} - \beta_s \hat{w}_s^v(x, \omega) = 0 \quad (\text{A.25})$$

où  $\beta_s = \left( \frac{k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s + T} \right)$  et pas de force appliquée aux extrémités de la poutre.

— L'expression de la force de cisaillement :

$$\kappa_s S_s G_s \left( \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial x} - \phi_s^v(x, t) \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Les 3 coefficients  $\kappa_s$ ,  $S_s$ ,  $G_s$  étant non nuls, nous remplaçons l'équation (A.26) dans l'équation (A.1b) et nous pouvons en déduire :

$$\begin{cases} \rho_s I_s \frac{\partial^2 \phi_s^v}{\partial t^2} - E_s I_s \frac{\partial^2 \phi_s^v}{\partial x^2} = 0 & (\text{A.27a}) \\ \frac{\partial w_s^v(x, t)}{\partial x} = \phi_s^v(x, t) & (\text{A.27b}) \end{cases}$$

Différencions l'équation (A.27b) et utilisons la transformation de Fourier, nous obtenons :

$$E_s \frac{\partial^2 \hat{\phi}_s^v}{\partial x^2} + \omega^2 \rho_s \frac{\partial \hat{w}_s^v}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.28})$$

La dérivée seconde par rapport à  $x$  de la rotation de section droite dans le domaine fréquentiel  $\hat{\phi}_s^v(x, \omega)$  peut se calculer en utilisant la transformation de Fourier de l'équation (A.2). Nous la différencions ensuite par rapport à  $x$  en prenant en compte le fait qu'il n'y a pas de force appliquée aux extrémités de la poutre :

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_s^v(x, \omega)}{\partial x^2} = \left( \frac{\kappa_s S_s G_s + T}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial^3 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^3} - \left( \frac{k_f^v + i\omega \zeta_f^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s} \right) \frac{\partial \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x} \quad (\text{A.29})$$

En remplaçant l'équation (A.29) dans l'équation (A.28), la condition au bord de la poutre de Timoshenko dans le domaine fréquentiel peut se ré-écrire comme suit :

$$\frac{\partial^3 \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x^3} - \gamma_s \frac{\partial \hat{w}_s^v(x, \omega)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.30})$$

où :  $\gamma_s = \left( \frac{E_s k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s (E_s + \kappa_s G_s)}{E_s (\kappa_s S_s G_s + T)} \right)$  et pas de force appliquée aux extrémités de la poutre. Nous rappelons que  $k_b^v$  est la raideur dynamique de la fondation dans la direction verticale qui est calculée par  $k_b^v = k_f^v + i\omega \zeta_f^v$ .



## Annexe B

# Calcul de la fonction de Green

### B.1 Traverse soumise à des efforts verticaux

#### B.1.1 Fondation homogène

##### Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli

Pour résoudre l'équation (2.13), nous calculons tout d'abord les racines de l'équation caractéristique  $\mathbb{P}^E$  qui est déterminée par [55, 104] :

$$\mathbb{P}^E(\alpha) = \alpha^4 - \xi_s^2 \alpha^2 - \lambda_s^4 \quad (\text{B.1})$$

Les 4 racines complexes  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de l'équation (B.1) sont les suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} = \frac{\xi_s^2 + \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_s^4}}{2} \\ \alpha_{3,4} = \frac{\xi_s^2 - \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_s^4}}{2} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

La solution de la fonction de Green  $G_a^E(x, \omega)$  dans l'équation (2.13) est donnée par :

$$G_a^E(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + A_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + A_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [-L, a] \\ B_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + B_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + B_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + B_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

De plus, la fonction de Green  $G_a^E(x, \omega)$  doit satisfaire les conditions aux limites d'une poutre libre-libre et les conditions de continuité et de discontinuité en  $x = a$ . Les 8 inconnues  $A_i(\omega)$  et  $B_i(\omega)$  avec  $1 \leq i \leq 4$  sont évaluées telles que la fonction de Green  $G_a^E(x, \omega)$  satisfait les conditions suivantes :

— Conditions d'une poutre libre-libre aux deux extrémités :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G_a^E(-L, \omega)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G_a^E(L, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 G_a^E(-L, \omega)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 G_a^E(L, \omega)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

— Continuité du déplacement, de la rotation et du moment de la poutre en  $x = a$  :

$$\begin{cases} G_a^E(a^+, \omega) - G_a^E(a^-, \omega) = 0 \\ \frac{\partial G_a^E(a^+, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial G_a^E(a^-, \omega)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 G_a^E(a^+, \omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_a^E(a^-, \omega)}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

— Discontinuité de la force de cisaillement de la poutre en  $x = a$  :

$$\frac{\partial^3 G_a^E(a^+, \omega)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G_a^E(a^-, \omega)}{\partial x^3} = 1 \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant les 8 équations (B.4), (B.5) et (B.6) dans l'équation (2.14), nous obtenons le système des 8 équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1^2 A_1 e^{-\alpha_1 L} + \alpha_2^2 A_2 e^{-\alpha_2 L} + \alpha_3^2 A_3 e^{-\alpha_3 L} + \alpha_4^2 A_4 e^{-\alpha_4 L} & = 0 \\ \alpha_1^3 A_1 e^{-\alpha_1 L} + \alpha_2^3 A_2 e^{-\alpha_2 L} + \alpha_3^3 A_3 e^{-\alpha_3 L} + \alpha_4^3 A_4 e^{-\alpha_4 L} & = 0 \\ \alpha_1^2 B_1 e^{\alpha_1 L} + \alpha_2^2 B_2 e^{\alpha_2 L} + \alpha_3^2 B_3 e^{\alpha_3 L} + \alpha_4^2 B_4 e^{\alpha_4 L} & = 0 \\ \alpha_1^3 B_1 e^{\alpha_1 L} + \alpha_2^3 B_2 e^{\alpha_2 L} + \alpha_3^3 B_3 e^{\alpha_3 L} + \alpha_4^3 B_4 e^{\alpha_4 L} & = 0 \\ (B_1 - A_1)e^{\alpha_1 a} + (B_2 - A_2)e^{\alpha_2 a} + (B_3 - A_3)e^{\alpha_3 a} + (B_4 - A_4)e^{\alpha_4 a} & = 0 \\ \alpha_1(B_1 - A_1)e^{\alpha_1 a} + \alpha_2(B_2 - A_2)e^{\alpha_2 a} + \alpha_3(B_3 - A_3)e^{\alpha_3 a} + \alpha_4(B_4 - A_4)e^{\alpha_4 a} & = 0 \\ \alpha_1^2(B_1 - A_1)e^{\alpha_1 a} + \alpha_2^2(B_2 - A_2)e^{\alpha_2 a} + \alpha_3^2(B_3 - A_3)e^{\alpha_3 a} + \alpha_4^2(B_4 - A_4)e^{\alpha_4 a} & = 0 \\ \alpha_1^3(B_1 - A_1)e^{\alpha_1 a} + \alpha_2^3(B_2 - A_2)e^{\alpha_2 a} + \alpha_3^3(B_3 - A_3)e^{\alpha_3 a} + \alpha_4^3(B_4 - A_4)e^{\alpha_4 a} & = 1 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

L'équation (B.7) nous permet de trouver analytiquement ou numériquement les 8 inconnues  $A_i(\omega)$  et  $B_i(\omega)$  avec  $1 \leq i \leq 4$  de la fonction de Green.

### Modèle de poutre de Timoshenko

La solution de la fonction de Green d'une poutre de Timoshenko dans l'équation (2.24) est donnée par [73] :

$$G_a^T(x, \omega) = \bar{A}_1 \cosh(\lambda_1 x) + \bar{A}_2 \sinh(\lambda_1 x) + \bar{B}_1 \cos(\lambda_2 x) + \bar{B}_2 \sin(\lambda_2 x) + \bar{D}_a(x, \omega) \quad (\text{B.8})$$

Le terme  $\bar{D}_a(x, \omega)$  dans l'équation (2.25) dénote la discontinuité de la force de cisaillement sous l'application d'une force unité en  $x = a$  qui est représentée par la distribution de Dirac dans l'équation (2.24). L'expression du terme  $\bar{D}_a(x, \omega)$  est :

$$\bar{D}_a(x, \omega) = \frac{H(x-a)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left( \mathbf{C}_1 \frac{\sinh \lambda_1 (x-a)}{\lambda_1} - \mathbf{C}_2 \frac{\sin \lambda_2 (x-a)}{\lambda_2} \right) \quad (\text{B.9})$$

où :  $H(x-a)$  est la fonction de Heaviside en  $x = a$ . Les coefficients apparus dans la fonction de Green sont déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_s^4} & \lambda_{1,2}^2 &= \frac{\Delta_s \pm \alpha_s^2}{2} \\ \mathbf{C}_1 &= k_1 + \lambda_1^2 k_2 & \mathbf{C}_2 &= k_1 - \lambda_2^2 k_2 \end{aligned}$$

Les 3 coefficients  $\alpha_s$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  sont des paramètres de l'équation de la poutre de Timoshenko et ils sont définis dans le Tableau 2.6. Les 4 inconnues  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{B}_1$  et  $\bar{B}_2$  sont déterminés en considérant que la fonction de Green  $G_a^T(x, \omega)$  satisfait les conditions aux limites d'une poutre de Timoshenko libre-libre aux deux extrémités (voir annexe A). En appliquant les deux conditions aux limites dans la traverse avec une longueur  $2L$  ( $x \in [-L, L]$ ) à chaque

bord, nous obtenons le système de 4 équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G_a^T(-L, \omega)}{\partial x^2} - \beta_s G_a^T(-L, \omega) = 0 \\ \frac{\partial^3 G_a^T(-L, \omega)}{\partial x^3} - \gamma_s G_a^T(-L, \omega) = 0 \\ \frac{\partial^2 G_a^T(L, \omega)}{\partial x^2} - \beta_s G_a^T(L, \omega) = 0 \\ \frac{\partial^3 G_a^T(L, \omega)}{\partial x^3} - \gamma_s G_a^T(L, \omega) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

où :  $\beta_s = \left( \frac{k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s}{\kappa_s S_s G_s + T} \right)$  et  $\gamma_s = \left( \frac{E_s k_b^v - \omega^2 \rho_s S_s (E_s + \kappa_s G_s)}{E_s (\kappa_s S_s G_s + T)} \right)$  avec  $E_s$ ,  $I_s$ ,  $\rho_s$ ,  $S_s$ ,  $G_s$  et  $\kappa_s$  sont respectivement le module d'Young, le moment d'inertie, la masse volumique, la section droite, le module de cisaillement et le facteur de cisaillement de la traverse,  $T$  dénote la pré-contrainte et  $k_b^v$  présente la raideur dynamique de la fondation (voir Annexe A). En développant les 4 équations ci-dessus, l'équation (B.10) peut se ré-écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M \cosh(-\lambda_1 L) & M \sinh(-\lambda_1 L) & -P \cos(-\lambda_2 L) & -P \sin(-\lambda_2 L) \\ \lambda_1 N \sinh(-\lambda_1 L) & \lambda_1 N \cosh(-\lambda_1 L) & \lambda_2 Q \sin(-\lambda_2 L) & -\lambda_2 Q \cos(-\lambda_2 L) \\ M \cosh(\lambda_1 L) & M \sinh(\lambda_1 L) & -P \cos(\lambda_2 L) & -P \sin(\lambda_2 L) \\ \lambda_1 N \sinh(\lambda_1 L) & \lambda_1 N \cosh(\lambda_1 L) & \lambda_2 Q \sin(\lambda_2 L) & -\lambda_2 Q \cos(\lambda_2 L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M (\mathbf{C}_1 \sinh \lambda_1 (L - a)) \lambda_1^{-1} + P (\mathbf{C}_2 \sin \lambda_2 (L - a)) \lambda_2^{-1} \\ N (\mathbf{C}_1 \cosh \lambda_1 (L - a)) + Q (\mathbf{C}_2 \cos \lambda_2 (L - a)) \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

où :  $M = \lambda_1^2 - \beta_s$ ,  $N = \lambda_1^2 - \gamma_s$ ,  $P = \lambda_2^2 + \beta_s$  et  $Q = \lambda_2^2 + \gamma_s$ . Ces coefficients de la fonction de Green peuvent être déterminés analytiquement ou numériquement.

### B.1.2 Fondation non-homogène

Pour résoudre l'équation (2.39) où  $\lambda_s$  est définie dans l'équation (2.38), nous calculons tout d'abord les racines de l'équation caractéristique  $\mathbb{P}^N$  qui est déterminée par :

$$\mathbb{P}^N(\alpha) = \alpha^4 - \xi_s^2 \alpha^2 - \lambda_g^4 \text{ pour } x \in [-L, l_g] \quad (\text{B.12a})$$

$$\mathbb{P}^N(\beta) = \beta^4 - \xi_s^2 \beta^2 - \lambda_m^4 \text{ pour } x \in [l_g, l_d] \quad (\text{B.12b})$$

$$\mathbb{P}^N(\gamma) = \gamma^4 - \xi_s^2 \gamma^2 - \lambda_d^4 \text{ pour } x \in [l_d, L] \quad (\text{B.12c})$$

Chaque équation dans l'équation (B.12) a 4 racines complexes qui sont précisées dans le Tableau B.1. La forme générale de la fonction de Green est :

$$G_a^N(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} + A_3(\omega)e^{\alpha_3 x} + A_4(\omega)e^{\alpha_4 x} & \text{pour } x \in [-L, l_g] \\ B_1(\omega)e^{\beta_1 x} + B_2(\omega)e^{\beta_2 x} + B_3(\omega)e^{\beta_3 x} + B_4(\omega)e^{\beta_4 x} & \text{pour } x \in [l_g, l_d] \\ C_1(\omega)e^{\gamma_1 x} + C_2(\omega)e^{\gamma_2 x} + C_3(\omega)e^{\gamma_3 x} + C_4(\omega)e^{\gamma_4 x} & \text{pour } x \in [l_d, a] \\ D_1(\omega)e^{\gamma_1 x} + D_2(\omega)e^{\gamma_2 x} + D_3(\omega)e^{\gamma_3 x} + D_4(\omega)e^{\gamma_4 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

De plus, la fonction de Green doit satisfaire les conditions aux limites pour une poutre libre-libre aux deux extrémités, les conditions de continuité et de discontinuité en 3 points :  $x = l_g$ ,  $x = l_d$  and  $x = a$ . Les 16 inconnues  $A_i(\omega)$ ,  $B_i(\omega)$ ,  $C_i(\omega)$  et  $D_i(\omega)$  sont déterminées en considérant que la fonction de Green  $G_a(x, \omega)$  satisfait les conditions suivantes :

Équation	1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> racine	3 <sup>ème</sup> et 4 <sup>ème</sup> racine
Équation (B.12a)	$\alpha_{1,2}^2 = \frac{\xi_s^2 + \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_g^4}}{2}$	$\alpha_{3,4}^2 = \frac{\xi_s^2 - \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_g^4}}{2}$
Équation (B.12b)	$\beta_{1,2}^2 = \frac{\xi_s^2 + \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_m^4}}{2}$	$\beta_{3,4}^2 = \frac{\xi_s^2 - \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_m^4}}{2}$
Équation (B.12c)	$\gamma_{1,2}^2 = \frac{\xi_s^2 + \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_d^4}}{2}$	$\gamma_{3,4}^2 = \frac{\xi_s^2 - \sqrt{\xi_s^4 + 4\lambda_d^4}}{2}$

TABLE B.1 – Expression des racines complexes de l'équation (B.12)

- Conditions aux limites d'une poutre d'Euler-Bernoulli libre-libre aux deux extrémités en  $x = \pm L$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G_a^N(-L, \omega)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G_a^N(L, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 G_a^N(-L, \omega)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 G_a^N(L, \omega)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

- Conditions de continuité du déplacement, de la rotation, du moment et de la force de cisaillement de la poutre en  $x = l_g$  :

$$\begin{cases} G_a^N(l_g^+, \omega) - G_a^N(l_g^-, \omega) = 0 \\ \frac{\partial G_a^N(l_g^+, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial G_a^N(l_g^-, \omega)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 G_a^N(l_g^+, \omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_a^N(l_g^-, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 G_a^N(l_g^+, \omega)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G_a^N(l_g^-, \omega)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

- Continuité du déplacement, de la rotation, du moment et de la force de cisaillement de la poutre en  $x = l_d$  :

$$\begin{cases} G_a^N(l_d^+, \omega) - G_a^N(l_d^-, \omega) = 0 \\ \frac{\partial G_a^N(l_d^+, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial G_a^N(l_d^-, \omega)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 G_a^N(l_d^+, \omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_a^N(l_d^-, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 G_a^N(l_d^+, \omega)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 G_a^N(l_d^-, \omega)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

- Continuité du déplacement, de la rotation, du moment de la poutre en  $x = a$  :

$$\begin{cases} G_a^N(a^+, \omega) - G_a^N(a^-, \omega) = 0 \\ \frac{\partial G_a^N(a^+, \omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial G_a^N(a^-, \omega)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 G_a^N(a^+, \omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G_a^N(a^-, \omega)}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

— Discontinuité de la force de cisaillement de la poutre en  $x = a$  :

$$\frac{\partial^3 G_a^N(a^+, \omega)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 G_a^N(a^-, \omega)}{\partial x^2} = 1 \quad (\text{B.18})$$

$$(\text{B.19})$$

En additionnant les équations (B.14), (B.15), (B.16), (B.17) et (B.18) dans l'équation (B.13), on obtient un système de 16 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 A_i e^{-\alpha_i L} = 0; \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i^3 A_i e^{-\alpha_i L} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 D_i e^{\gamma_i L} = 0; \quad \sum_{i=1}^4 \gamma_i^3 D_i e^{\gamma_i L} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 (B_i e^{\beta_i l_g} - A_i e^{\alpha_i l_g}) = 0; \quad \sum_{i=1}^4 (\beta_i B_i e^{\beta_i l_g} - \alpha_i A_i e^{\alpha_i l_g}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 (\beta_i^2 B_i e^{\beta_i l_g} - \alpha_i^2 A_i e^{\alpha_i l_g}) = 0; \quad \sum_{i=1}^4 (\beta_i^3 B_i e^{\beta_i l_g} - \alpha_i^3 A_i e^{\alpha_i l_g}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 (C_i e^{\gamma_i l_d} - B_i e^{\beta_i l_d}) = 0; \quad \sum_{i=1}^4 (\gamma_i C_i e^{\gamma_i l_d} - \beta_i B_i e^{\beta_i l_d}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 (\gamma_i^2 C_i e^{\gamma_i l_d} - \beta_i^2 B_i e^{\beta_i l_d}) = 0; \quad \sum_{i=1}^4 (\gamma_i^3 C_i e^{\gamma_i l_d} - \beta_i^3 B_i e^{\beta_i l_d}) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 (D_i - C_i) e^{\gamma_i a} = 0; \quad \sum_{i=1}^4 \gamma_i (D_i - C_i) e^{\gamma_i a} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 (D_i - C_i) e^{\gamma_i a} = 0; \quad \sum_{i=1}^4 \gamma_i^3 (D_i - C_i) e^{\gamma_i a} = 1 \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

L'équation (B.20) nous permet de résoudre les 16 inconnues  $A_i(\omega)$ ,  $B_i(\omega)$ ,  $C_i(\omega)$  et  $D_i(\omega)$  (avec  $1 \leq i \leq 4$ ) de la fonction de Green analytiquement ou numériquement.

## B.2 Traverse soumise à des efforts latéraux

Pour résoudre l'équation (2.51) où  $\eta_s$  est définie dans l'équation (2.50), nous calculons tout d'abord les racines de l'équation caractéristique  $\mathbb{P}^l$  qui est déterminée par :

$$\mathbb{P}^l(\alpha) = \alpha^2 - \eta_s^2 \quad (\text{B.21})$$

Les racines de l'équation (B.21) sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui sont définies par :  $(\alpha_{1,2})^2 = \eta_s^2$ . La forme générale de la fonction de Green  $G_a^l(x, \omega)$  est donnée par :

$$G_a^l(x, \omega) = \begin{cases} A_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + A_2(\omega)e^{\alpha_2 x} & \text{pour } x \in [-L, a] \\ B_1(\omega)e^{\alpha_1 x} + B_2(\omega)e^{\alpha_2 x} & \text{pour } x \in [a, L] \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

En plus, la fonction de Green  $G_a^l(x, \omega)$  doit satisfaire les conditions aux limites d'une poutre libre-libre et les conditions de continuité, de discontinuité en  $x = a$ . Donc, les 4 inconnues  $A_i(\omega)$  et  $B_i(\omega)$  sont déterminées en considérant que la fonction de Green  $G_a^l(x, \omega)$  satisfait les conditions suivantes :

— Condition d'une poutre libre-libre aux deux extrémités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_a^l(L, \omega)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G_a^l(-L, \omega)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

— Continuité du déplacement en  $x = a$  :

$$G_a^l(a^+, \omega) - G_a^l(a^-, \omega) = 0 \quad (\text{B.24})$$

— Discontinuité de la déformation en  $x = a$  :

$$\frac{\partial G_a^l(a^+, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial G_a^l(a^-, \omega)}{\partial x} = 1 \quad (\text{B.25})$$

Les équations (B.23), (B.24) et (B.25) nous permettent d'obtenir analytiquement et numériquement les 4 inconnues  $A_i(\omega)$  et  $B_i(\omega)$  ( $i = 1, 2$ ) de la fonction de Green.

## Annexe C

# Modèle du rail périodiquement supporté

Le fait que rail soit modélisé par une poutre infinie et que les forces de réaction des traverses soient des forces concentrées nous permet d'obtenir un système de rail périodiquement supporté (figure C.1). Dans cette figure, chaque rail est soumis à deux chargements mobiles suivant deux directions (verticale  $Q_j$  et latérale  $Y_j$ ) créés par chaque roue. Chaque roue est caractérisée par la distance par rapport à la première roue  $D_j$  et la vitesse du train  $v$ . La relation entre les efforts de réaction suivant deux directions (verticale  $\hat{R}^v$  et latérale  $\hat{R}^l$ ) et le déplacement du rail dans deux directions (verticale  $\hat{w}_r^v$  et latérale  $\hat{w}_r^l$ ) dans le domaine fréquentiel est donné par Hoang et al. [52].

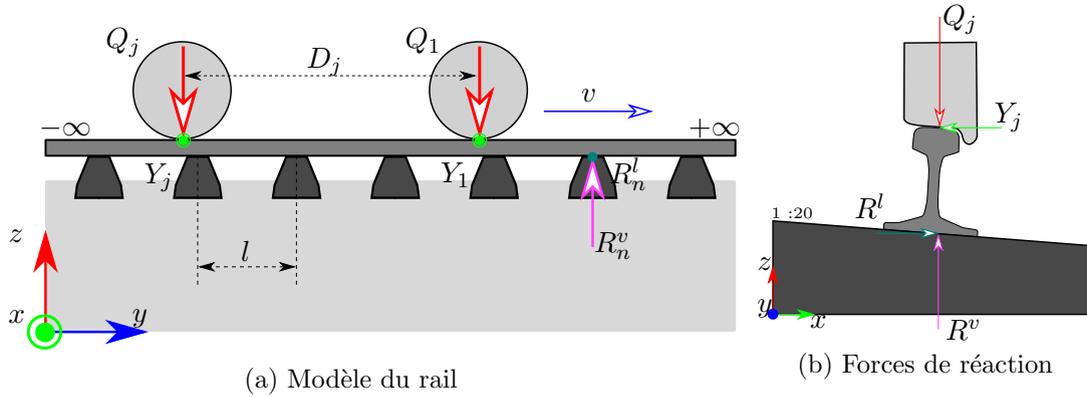


FIGURE C.1 – Modèle du rail périodiquement supporté (a) et directions des chargements d'une roue (b)

Dans le domaine fréquentiel, la relation entre les forces de réaction verticales des supports suivant deux directions ( $\hat{R}^v(\omega)$ ,  $\hat{R}^l(\omega)$ ) et leurs déplacements verticaux et latéraux ( $\hat{w}_r^v(\omega)$ ,  $\hat{w}_r^l(\omega)$ ) à partir des équations dynamiques de la poutre pour les deux modèles est décrite par :

$$\begin{cases} \hat{R}^v(\omega) = \mathcal{K}^v(\omega)\hat{w}_r^v(\omega) + \mathcal{Q}(\omega) \\ \hat{R}^l(\omega) = \mathcal{K}^l(\omega)\hat{w}_r^l(\omega) + \mathcal{Y}(\omega) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où :  $\mathcal{K}^v(\omega)$ ,  $\mathcal{K}^l(\omega)$  sont les raideurs équivalentes dans deux directions et  $\mathcal{Q}(\omega)$ ,  $\mathcal{Y}(\omega)$  sont les chargements équivalents dans deux directions. Pour chaque modèle de poutre différent, les expressions des grandeurs sont différentes. Ces grandeurs dépendent des paramètres

du rail :  $E_r$ ,  $I_r^v$ ,  $I_r^l$ ,  $\rho_r$ ,  $S_r$ ,  $\kappa_r$  et  $G_r$  sont respectivement le module d'Young, le moment d'inertie suivant la direction verticale, le moment d'inertie suivant la direction latérale, la masse volumique, la section droite, le coefficient de cisaillement de Timoshenko et le module de cisaillement du rail. Nous rappelons que l'indice  $r$  dénote le rail.

## C.1 Poutre d'Euler Bernoulli

En prenant le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli pour le rail, les grandeurs dans l'équation (C.1) sont :

$$\begin{cases} \mathcal{K}^v(\omega) = 4\lambda_r^3 E_r I_r^v \left[ \frac{\sin l\lambda_r}{\cos l\lambda_r - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{\sinh l\lambda_r}{\cosh l\lambda_r - \cos \frac{\omega l}{v}} \right]^{-1} \\ \mathcal{Q}(\omega) = \mathcal{K}^v(\omega) \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_j Q_j e^{-i\omega \frac{D_j}{v}} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Poutre de Timoshenko

En prenant le modèle de poutre de Timoshenko pour le rail, les grandeurs dans l'équation (C.1) sont :

$$\begin{cases} \mathcal{K}^v(\omega) = 2E_r I_r^v (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left[ \frac{C_1}{\lambda_1} \frac{\sin l\lambda_1}{\cos l\lambda_1 - \cos \frac{\omega l}{v}} - \frac{C_2}{\lambda_2} \frac{\sinh l\lambda_2}{\cosh l\lambda_2 - \cos \frac{\omega l}{v}} \right]^{-1} \\ \mathcal{Q}(\omega) = \mathcal{K}^v(\omega) \frac{\tilde{p}_0 l}{v} \sum_j Q_j e^{-i\omega \frac{D_j}{v}} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Le Tableau C.1 montre les expressions des paramètres dans les deux modèles de poutre périodiquement supportée :

Coef.	Euler-Bernoulli	Timoshenko
$C_{1,2}$	1	$1 - \frac{\rho_r I_r \omega^2 \mp E_r I_r^v \lambda_{1,2}^2}{\kappa_r S_r G_r}$
$\lambda_{1,2}^2$	$\lambda_r^2 = \sqrt{\frac{\rho_r S_r \omega^2}{E_r I_r^v}}$	$\sqrt{\frac{\rho_r S_r \omega^2}{E_r I_r^v} + \frac{\omega^4}{4} \left( \frac{\rho_r}{E_r} - \frac{\rho_r}{\kappa_r G_r} \right)^2} \pm \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\rho_r}{E_r} + \frac{\rho_r}{\kappa_r G_r} \right)$
$\tilde{p}_0 l$	$\frac{1}{E_r I_r^v \frac{\omega^4}{v^4} - \rho_r S_r \omega^2}$	$\frac{\kappa_r S_r G_r - \rho_r I_r^v \omega^2 + E_r I_r^v \frac{\omega^2}{v^2}}{\kappa_r S_r G_r \left( E_r I_r^v \frac{\omega^4}{v^4} - \rho_r S_r \omega^2 \right) - \rho_r S_r I_r^v (\kappa_r G_r + E_r - \rho_r v^2) \frac{\omega^4}{v^2}}$

TABLE C.1 – Formulation du système équivalent d'une poutre périodiquement supportée

Les grandeurs  $\mathcal{K}^l(\omega)$  et  $\mathcal{Y}(\omega)$  sont calculées de même manière dans les deux cas du modèle de poutre en changeant les paramètres du rail suivant la direction dans laquelle les forces sont appliquées sur le rail.

### C.3 Système équivalent d'une poutre périodiquement supportée

Dans les parties précédentes, nous avons présenté la relation entre les forces de réactions des supports  $\hat{R}(\omega)$  et leurs déplacements  $\hat{w}(\omega)$  dans le domaine fréquentiel établie à partir des modèles de poutre. Cette relation est applicable pour tout les types de support car elle ne dépend que des comportements mécaniques du rail, de la semelle sous rail et des chargements. Elle s'apparente à la loi de comportement d'un ressort de raideur équivalente  $\mathcal{K}(\omega)$  et de chargement équivalent  $\mathcal{Q}(\omega)$  (voir figure C.2). La raideur équivalente  $\mathcal{K}(\omega)$  est un nombre réel qui dépend de la fréquence.

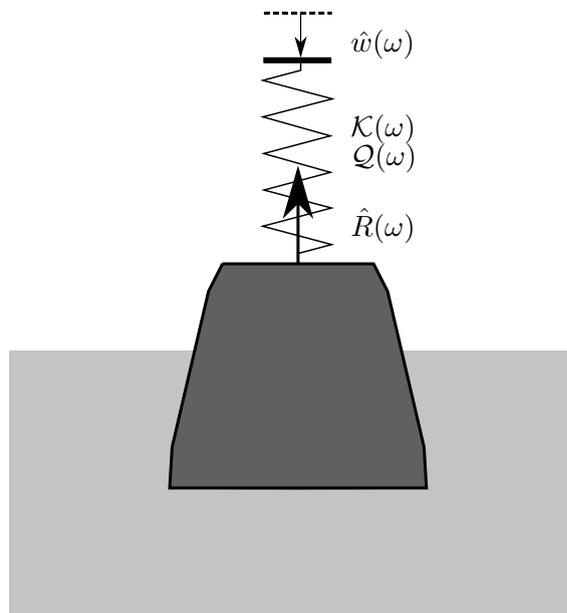


FIGURE C.2 – Système équivalent de la poutre périodiquement supportée



## Annexe D

# Module d'Young du ballast utilisé dans l'essai mécanique

Cette annexe présente les études paramétriques réalisées pour la détermination du module d'Young du ballast grâce à un modèle numérique éléments finis présenté dans la figure 4.20a. Dans ce modèle, une traverse de dimensions réelles est posée sur une fondation de dimensions  $2.9 \text{ m} \times 0.8 \times 0.25 \text{ m}$ . Le maillage de ce modèle est créé à l'aide d'éléments d'hexaèdre C3D8R (linéaire avec intégration réduite). Ce maillage contient 167177 nœuds et 156306 éléments et est montré dans la figure 4.20b.

Les matériaux utilisés pour la traverse sont donnés dans le Tableau 4.5. Une étude paramétrique sur le module d'Young de la fondation sera réalisée. Les matériaux sont considérés comme élastique, linéaire et isotrope. Les surfaces entre les différents matériaux sont parfaites (ni glissement, ni décollement).

Le calcul est fait en mode "Général/Statique" à l'aide du logiciel ABAQUS. Les déplacements nodaux de la surface en bas de la fondation sont bloqués. Les chargements appliqués sur deux surfaces de contact traverse-rail de la traverse.

### D.1 Modèle avec une zone de la fondation au-dessous de la traverse compactée

#### D.1.1 Modèle numérique 3D d'une traverse posée sur une fondation compactée au centre

##### Géométrie

Tout d'abord, nous voulons étudier l'influence de la nature de la fondation sur la déformation de la traverse. Cette fondation se compose de deux parties comme la figure D.1. La partie au-dessous de la traverse (rouge) présente le ballast compacté et nous varions la raideur du ballast aux alentours (vanille). Les dimensions de la partie rouge sont :  $2.475 \text{ m} \times 0.375 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$ .

##### Matériaux et maillage

- Matériaux : La traverse présente les caractéristiques mécaniques données dans le Tableau 4.1. Deux cas du ballast sont modélisés avec les paramètres indiqués dans le Tableau D.1 Les matériaux utilisés sont considérés comme élastique, linéaire et isotrope.

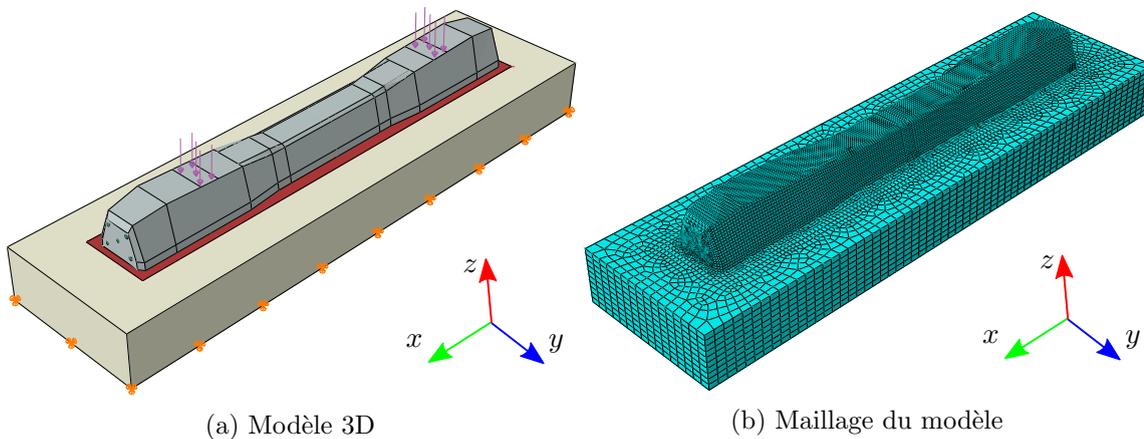


FIGURE D.1 – Modèle numérique de l'essai de flexion d'une traverse posée sur une fondation compactée au centre

Paramètres	Unité	Ballast compacté	Ballast
Module d'Young	MPa	150	20
Densité	$\text{kgm}^{-3}$	1900	1900
Coef. de Poisson		0.2	0.2

TABLE D.1 – Paramètres des matériaux du ballast compacté

- Maillage : La figure D.1b présente le maillage du modèle avec 190203 nœuds et 179506 éléments. Le maillage est bien régulier sur le long de la traverse et du ballast. Une concentration des mailles apparaît sur la section droite de la traverse.

### Conditions aux limites et chargements

Le calcul numérique est fait en mode “Général/Statique” sur le logiciel ABAQUS avec :

- Conditions aux limites : Blocage des déplacements nodaux sur la partie basse de la caisse de ballast comme le montre la figure D.1a. Les surfaces de contact entre les différents matériaux sont considérées comme parfaites (ni glissement, ni décollement)
- Chargements : Deux chargements verticaux de type “Pression” sont appliqués sur la traverse aux deux positions des rails comme la figure D.1a. Nous allons étudier deux cas : symétrie et dissymétrie des chargements. Les chargements appliqués dans le cas des chargements symétriques :  $R_1 = R_2 = 50 \text{ kN}$  et  $R_1 = 75 \text{ kN}$ ,  $R_2 = 50 \text{ kN}$  dans le deuxième cas.

#### D.1.2 Influence du compactage du ballast sur la déformation de la traverse

Dans cette étude, nous allons comparer deux types de fondation : compactage au centre avec les paramètres présentés dans le Tableau D.1 et homogène ( $E = 150 \text{ MPa}$ ). La figure D.2 présente le profil de déformation de la traverse soumise aux deux forces statiques suivant deux cas : chargements symétriques et dissymétriques. Nous voyons clairement que la déformation de la traverse suivant les deux types de fondation ne diffère pas beaucoup (environ 10% de différence). Même si la fondation compactée donne une déformation au milieu de la traverse plus petite que pour la fondation homogène ( $-32 \mu\text{def}$  et  $-40 \mu\text{def}$  en

comparant avec  $-29 \mu\text{def}$  et  $-36 \mu\text{def}$  dans deux cas de fondations). Cette étude montre une petite différence entre les deux types de fondation et, nous utilisons par la suite la fondation homogène pour modéliser l'essai de flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast.

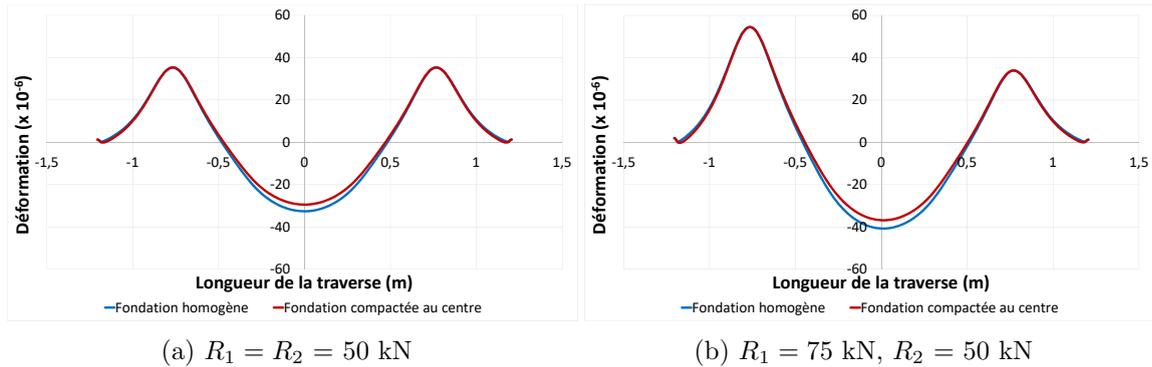


FIGURE D.2 – Déformation de la traverse posée sur une fondation compactée au centre

## D.2 Études paramétriques du module d'Young du ballast

### D.2.1 Modèle numérique 3D d'une traverse posée sur une fondation homogène

Ce modèle est présenté dans la section 4.5. Le module d'Young de la caisse du ballast varie dans le but de coller les résultats expérimentaux obtenus lors de l'essai de flexion d'une traverse dans une caisse de ballast. Les chargements appliqués et les mesures utilisées pour la comparaison sont les résultats pour la traverse posée symétriquement dans une caisse de ballast (section 4.5).

### D.2.2 Résultats de l'étude paramétrique

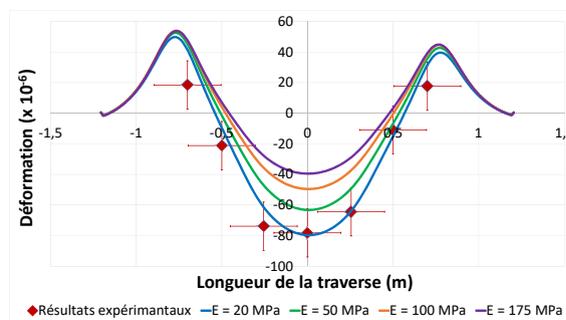


FIGURE D.3 – Étude paramétrique sur le module d'Young du ballast

La figure D.3 présente le résultat de l'étude paramétrique avec 4 valeurs différentes de rigidité du ballast :  $E = 20 \text{ MPa}$ ,  $50 \text{ MPa}$ ,  $100 \text{ MPa}$  et  $175 \text{ MPa}$ . Les résultats expérimentaux sont représentés par les points rouges. La déformation numérique est prise aux positions des jauges de déformations. Nous constatons que plus la raideur du ballast est faible, plus la déformation de la traverse est importante. D'après cette étude, nous prenons la valeur  $E = 20 \text{ MPa}$  pour l'essai de la flexion d'une traverse posée dans une caisse de ballast. Nous

pensons que cette valeur est plus faible que la rigidité du ballast usuelle, ce qui implique que la caisse de ballast ne présente pas une fondation réelle d'une voie ferrée. Néanmoins, nous pouvons utiliser cette valeur pour valider le modèle numérique en 3D.

# Bibliographie

- [1] AAS-JAKOBSEN, K. *Fatigue of concrete beams and columns*. Rapp. tech. p. 148. No. 70-1. Institutt for betonkon-struksjoner, NTH Trondheim, sept. 1970.
- [2] ABDELKRIM, M., BONNET, G. et DE BUHAN, P. “A computational procedure for predicting the long term residual settlement of a platform induced by repeated traffic loading”. In : *Computers and Geotechnics* 30 (déc. 2003), p. 463-476. ISSN : 0266352X. DOI : [10.1016/S0266-352X\(03\)00010-7](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(03)00010-7).
- [3] AEA TECHNOLOGY. *Design of mono block concrete sleepers*. UIC leaflet 713 R AEATR-TCE-2001-336 Issue 0. European Railway Research Institute, 2002.
- [4] AI, Z. Y. et CAI, J. B. “Static analysis of Timoshenko beam on elastic multilayered soils by combination of finite element and analytical layer element”. In : *Applied Mathematical Modelling* 39.7 (2015), p. 1875-1888. ISSN : 0307904X. DOI : [10.1016/j.apm.2014.10.008](https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.008).
- [5] AL SHAER, A. “Analyse des déformations permanentes des voies ferrées ballastées - approche dynamique”. Thèse de doct. École Nationale des Ponts et des Chaussées, 2006.
- [6] ALIAS, J. *La voie ferrée - Techniques de construction et d'entretien*. Deuxième édition. Eyrolles, 1984.
- [7] ANAP, S. D. et al. “Railway track monitoring and Accident avoidance using smart sensor network”. In : *International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering* 5.4 (2016), p. 985-988. ISSN : 2278-1021. DOI : [10.17148/IJARCCE.2016.54242](https://doi.org/10.17148/IJARCCE.2016.54242).
- [8] ANDERSEN, L., NIELSEN, S. R. K. et KIRKEGAARD, P. H. “Finite Element Modelling of Infinite Euler Beams on Kelvin Foundations Exposed to Moving Loads in Convected Co-ordinates”. In : *Journal of Sound and Vibration* 241.4 (avr. 2001), p. 587-604. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1006/jsvi.2000.3314](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3314).
- [9] ANSARI, M., ESMAILZADEH, E. et YOUNESIAN, D. “Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin–Voight foundation under moving loads”. In : *Journal of Sound and Vibration* 330.7 (2011), p. 1455-1471. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.10.005](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.005).
- [10] ARAB, A. A., BADIE, S. S. et MANZARI, M. T. “A methodological approach for finite element modeling of pretensioned concrete members at the release of pretensioning”. In : *Engineering Structures* 33.6 (2011), p. 1918-1929. ISSN : 01410296. DOI : [10.1016/j.engstruct.2011.02.028](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.028).
- [11] BAGI, K. “Stress and strain in granular assemblies”. In : *Mechanics of Materials* 22.3 (1996), p. 165-177. ISSN : 01676636. DOI : [10.1016/0167-6636\(95\)00044-5](https://doi.org/10.1016/0167-6636(95)00044-5).

- [12] BARROS, A., GRALL, A. et BÉRENGUER, C. “Maintenance policies for a two-units system : A comparative study”. In : *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 9.2 (2002), p. 127-149. ISSN : 1793-6446. DOI : [10.1142/S0218539302000718](https://doi.org/10.1142/S0218539302000718).
- [13] BATHIAS, C. et BAILLON, J. P. *La fatigue des matériaux et des structures*. deuxième édition. Hermes - Lavoisier, 1997.
- [14] BELOTSERKOVSKIY, P. M. “Forced oscillations of infinite periodic structures. Applications to railway track dynamics”. In : *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility* 29.1 (1998), p. 85-103. DOI : [10.1080/00423119808969554](https://doi.org/10.1080/00423119808969554).
- [15] BELOTSERKOVSKIY, P. M. “On the oscillations of infinite periodic beams subjected to a moving concentrated force”. In : *Journal of Sound and Vibration* 193.3 (1996), p. 705-712. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1006/jsvi.1996.0309](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0309).
- [16] BOCCIOLONE, M. et al. “A measurement system for quick rail inspection and effective track maintenance strategy”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 21.3 (2007), p. 1242-1254. ISSN : 08883270. DOI : [10.1016/j.ymssp.2006.02.007](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2006.02.007).
- [17] BODIN, V. “Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral”. Thèse de doct. Ecole Nationale des Ponts et des Chaussées, 2001.
- [18] BUGGY, S. J. et al. “Railway track component condition monitoring using optical fibre Bragg grating sensors”. In : *Measurement Science and Technology* 27.5 (mar. 2016), p. 1-15. DOI : [10.1088/0957-0233/27/5/055201](https://doi.org/10.1088/0957-0233/27/5/055201).
- [19] ÇALIM, F. F. “Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation”. In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 28.3 (2009), p. 469-476. ISSN : 09977538. DOI : [10.1016/j.euromechsol.2008.08.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.08.001).
- [20] CARIOU, P. “Un procédé de levage des grans Menhirs”. In : *Bulletin de la Société préhistorique de France* 55.7 (1958), p. 444-445.
- [21] CARPINTERI, A., LACIDOGNA, G. et PUGNO, N. “Structural damage diagnosis and life-time assessment by acoustic emission monitoring”. In : *Engineering Fracture Mechanics* 74.1 (2007), p. 273-289. ISSN : 00137944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2006.01.036](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.01.036).
- [22] CASTRO JORGE, P., SIMÕES, F. M. F. et PINTO DA COSTA, A. “Dynamics of beams on non-uniform nonlinear foundations subjected to moving loads”. In : *Computers & Structures* 148 (2015), p. 26-34. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2014.11.002](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.11.002).
- [23] CHAN, T. H. T. et al. “Fiber Bragg grating sensors for structural health monitoring of Tsing Ma bridge : Background and experimental observation”. In : *Engineering Structures* 28.5 (2006), p. 648-659. ISSN : 01410296. DOI : [10.1016/j.engstruct.2005.09.018](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.09.018).
- [24] CHEN, Y. H. et HUANG, Y. H. “Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48.1 (mar. 2000), p. 1-18. ISSN : 00457949. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<1::AID-NME858>3.0.CO;2-](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<1::AID-NME858>3.0.CO;2-).
- [25] CHERCHAS, D. B. “Determination of railway wheel climb probability based on the derailment coefficient”. In : *Journal of the Franklin Institute* 312.1 (1981), p. 31-40. ISSN : 0016-0032. DOI : [10.1016/0016-0032\(81\)90070-3](https://doi.org/10.1016/0016-0032(81)90070-3).
- [26] CHLADDNI, E. *Die Akustik*. Breitkopf und Härtel, 1802.

- [27] CLOETENS, P. et al. "Observation of microstructure and damage in materials by phase sensitive radiography and tomography". In : *Journal of Applied Physics* 81.9 (1997), p. 5878-5886. DOI : [10.1063/1.364374](https://doi.org/10.1063/1.364374).
- [28] CORNELISSEN, H. A. W. *Constant-amplitude tests on plain concrete in uniaxial tension and tension-compression*. Rapp. tech. No. 7804. Report 5-81-1. DELFT UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, jan. 1984.
- [29] CORTIS, D. et al. "Estimation of the wheel-rail lateral contact force through the analysis of the rail web bending strains". In : *Measurement* 99 (2017), p. 23-35. ISSN : 0263-2241. DOI : [10.1016/J.MEASUREMENT.2016.12.015](https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2016.12.015).
- [30] CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. "A discrete numerical model for granular assemblies". In : *Géotechnique* 29 (mar. 1979), p. 47-65. ISSN : 0016-8505. DOI : [10.1680/geot.1979.29.1.47](https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47).
- [31] DING, H., CHEN, L. Q. et YANG, S. P. "Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load". In : *Journal of Sound and Vibration* 331.10 (2012), p. 2426-2442. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2011.12.036](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.036).
- [32] DING, H. et al. "Dynamic response of an infinite Timoshenko beam on a nonlinear viscoelastic foundation to a moving load". In : *Nonlinear Dynamics* 73.1 (2013), p. 285-298. DOI : [10.1007/s11071-013-0784-0](https://doi.org/10.1007/s11071-013-0784-0).
- [33] DUKKIPATI, R. *Vehicle Dynamics*. Narosa Publishing House, 2000. ISBN : 978-81-7319-265-4.
- [34] DUVERGIER, J. B. *Collection complète des lois, décrets, ordonnances, règlements et avis du conseil-d'état*. T. 24. A. Guyot et Scribe, Charles-Bechet, 1824.
- [35] ESMAEILI, M., HOSSEINI, S. A. S. et SHARAVI, M. "Experimental assessment of dynamic lateral resistance of railway concrete sleeper". In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 82 (2016), p. 40-54. ISSN : 02677261. DOI : [10.1016/j.soildyn.2015.11.011](https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2015.11.011).
- [36] FILOGRANO, M. L. et al. "Real time monitoring of railway traffic using Fiber Bragg Grating sensors". In : *IEEE Sensors Journal* 12.1 (2012), p. 85-92. DOI : [10.1109/JSEN.2011.2135848](https://doi.org/10.1109/JSEN.2011.2135848).
- [37] FISH, J. et CHEN, W. "Discrete-to-continuum bridging based on multigrid principles". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.17 (2004), p. 1693-1711. ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2003.12.022](https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.022).
- [38] FISH, J. et CHEN, W. "Multiscale enrichment based on partition of unity". In : *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 62.10 (2005), p. 1341-1359. DOI : [10.1002/nme.1230](https://doi.org/10.1002/nme.1230).
- [39] FODA, M. A. et ABDULJABBAR, Z. "A dynamic Green function formulation for the reponse of a beam structure to a moving mass". In : *Journal of Sound and Vibration* 210.3 (1998), p. 295-306. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1006/jsvi.1997.1334](https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1334).
- [40] FRYBA, L. *Vibration of solids and structures under moving load*. Troisième édition. Thomas Telford, 1999.
- [41] GABRIEL, A. "Position sensitive x-ray detector". In : *Review of Scientific Instruments* 48.10 (1997), p. 1303-1305. DOI : [10.1063/1.1134870](https://doi.org/10.1063/1.1134870).

- [42] GRASSIE, S. L. “Dynamic Modelling of Concrete Railway Sleepers”. In : *Journal of Sound and Vibration* 187.5 (1995), p. 799-813. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1006/jsvi.1995.0564](https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0564).
- [43] GUERIN, N., SAB, K. et MOUCHERONT, P. “Identification expérimentale d’une loi de tassement du ballast”. In : *Canadian geotechnical journal* 36 (déc. 1998), p. 523-532. DOI : [10.1139/cgj-36-3-523](https://doi.org/10.1139/cgj-36-3-523).
- [44] GUIGOU-CARTER, C. et al. “Analytical and experimental study of sleeper SAT S 312 in slab track Sateba system”. In : *Journal of Sound and Vibration* 293.3 (2006), p. 878-887. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2005.08.053](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.08.053).
- [45] H. M., Flint. *Railroads of the United States, Their History and Statistics*. Philadelphia : John. E. Potter et Co., 1868.
- [46] HAKAN, G. “Decision support system for railway track maintenance and renewal management”. In : *Journal of Computing in Civil Engineering* 27.3 (mai 2013), p. 292-306. ISSN : 0887-3801. DOI : [10.1061/\(ASCE\)CP.1943-5487.0000221](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000221).
- [47] HAMMOUD, M. “Modélisations et simulation numérique du couplage entre les milieux discrets et continus”. Thèse de doct. École Nationale des Ponts et des Chaussées, 2009.
- [48] HAMMOUD, M., DUHAMEL, D. et SAB, K. “Static and dynamic studies for coupling discrete and continuum media; Application to a simple railway track model”. In : *International Journal of Solids and Structures* 47.2 (2010), p. 276-290. ISSN : 00207683. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2009.09.036](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.036).
- [49] HAMMOUD, M., SAB, K. et DUHAMEL, D. “A coupled discrete/continuous method for computing lattices. Application to a masonry-like structure”. In : *International Journal of Solids and Structures* 48.21 (2011), p. 3091-3098. ISSN : 00207683. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2011.07.002](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.07.002).
- [50] HILL, K. O. et al. “Photosensitivity in Optical Fiber Waveguides : Application to Reflection Filter Fabrication”. In : *Applied Physics Letters* 32.10 (juin 1978), p. 647-649. DOI : [10.1063/1.89881](https://doi.org/10.1063/1.89881).
- [51] HO, S. L. et al. “Real time monitoring of railway traffic using Fiber Bragg Grating sensors”. In : *IEEE Sensors Journal* (2006), p. 125-129. DOI : [10.1049/ic:20060056](https://doi.org/10.1049/ic:20060056).
- [52] HOANG, T. “Comportement mécanique et dégradation d’une voie ferrée en tunnel”. Thèse de doct. Université Paris-Est, 2017.
- [53] HOANG, T. et al. “Calculation of force distribution for a periodically supported beam subjected to moving loads”. In : *Journal of Sound and Vibration* 388 (2017), p. 327-338. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2016.10.031](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.10.031).
- [54] HOZHABROSSADATI, S. M. et al. “Green’s function for uniform Euler–Bernoulli beams at resonant condition : Introduction of Fredholm Alternative Theorem”. In : *Applied Mathematical Modelling* 39.12 (2015), p. 3366-3379. ISSN : 0307904X. DOI : [10.1016/j.apm.2014.11.038](https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.11.038).
- [55] IVAN, S. *Green’s Functions and Boundary Value Problems*. 3<sup>e</sup> éd. Wiley, 2011. ISBN : 978-0470609705.
- [56] IWNICKI, S., GRASSIE, S. et KIK, W. “Track settlement prediction using computer simulation tools”. In : *The Rail Technology Unit* (2000). ISSN : 0042-3114.

- [57] KAEWUNRUEN, S., GAMAGE, E. K. et REMENNIKOV, A. M. “Modelling Railway Prestressed Concrete Sleepers (Crossties) With Holes and Web Openings”. In : *Procedia Engineering* 161 (2016), p. 1240-1246. ISSN : 1877-7058. DOI : [10.1016/J.PROENG.2016.08.556](https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.08.556).
- [58] KARGARNOVIN, M. H. et al. “Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads”. In : *Computers & Structures* 83.23 (2005), p. 1865-1877. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2005.03.003](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.03.003).
- [59] KARRAZ, K. “Comportement cyclique à long terme d’un matériau granulaire modèle pour application aux infrastructures ferroviaires”. Thèse de doct. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.
- [60] KARRECH, A. “Comportement des matériaux granulaires sous vibrations : Application au cas du ballast”. Thèse de doct. Université Paris-Est, 2007.
- [61] KODAI, M., TSUTOMU, W. et MASAMICHI, S. “Damage detection method for sleepers based on vibration properties”. In : *EDP Sciences* 24 (2015). DOI : [10.1051/mateconf/20152405005](https://doi.org/10.1051/mateconf/20152405005).
- [62] KOUROUSSIS, G. et al. “Railway structure monitoring solutions using fibre Bragg grating sensors”. In : *International Journal of Rail Transportation* 4.3 (mai 2016), p. 135-150. ISSN : 2324-8386. DOI : [10.1080/23248378.2016.1184598](https://doi.org/10.1080/23248378.2016.1184598).
- [63] KRAKUTOVSKI, Z. “Etude de la dégradation géométrique des voies ferrées”. Mémoire de DEA. Ecole Nationale des Ponts et des Chaussées, 2000.
- [64] KUMARAN, G., MENON, D. et KRISHNAN NAIR, K. “Dynamic studies of railtrack sleepers in a track structure system”. In : *Journal of Sound and Vibration* 268.3 (2003), p. 485-501. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(02\)01581-X](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01581-X).
- [65] LAM, H. F., HU, Q. et WONG, M. T. “The Bayesian methodology for the detection of railway ballast damage under a concrete sleeper”. In : *Engineering Structures* 81 (2014), p. 289-301. ISSN : 01410296. DOI : [10.1016/j.engstruct.2014.08.035](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.08.035).
- [66] LARYEA, S. et al. “Comparison of performance of concrete and steel sleepers using experimental and discrete element methods”. In : *Transportation Geotechnics* 1.4 (2014), p. 225-240. ISSN : 22143912. DOI : [10.1016/j.trgeo.2014.05.001](https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2014.05.001).
- [67] LEE, K. Y., LEE, K. K. et HO, S. L. “Exploration of using FBG sensor for derailment detector”. In : *WSEAS Transactions Topics Systems* 3 (2004), p. 2440-2447.
- [68] LI, D. et SELIG, E. “Resilient Modulus for Fine-Grained Subgrade Soils”. In : *Journal of Geotechnical Engineering* 120 (juin 1994), p. 939-957. ISSN : 1944-8368. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:6\(939\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:6(939)).
- [69] LI, W. et al. “Train axle counters by Bragg and chirped grating techniques”. In : *Proc. SPIE* 7004 (2008). DOI : [10.1117/12.786519](https://doi.org/10.1117/12.786519).
- [70] LI, Y. F., LIU, J. X. et LIN, J. H. “Wheel-Rail Lateral Force Continuous Measurement Based on Rail Web Bending Moment Difference Method”. In : *Vibration, Structural Engineering and Measurement I*. T. 105. Applied Mechanics and Materials. Trans Tech Publications Ltd, jan. 2012, p. 755-759. DOI : [10.4028/www.scientific.net/AMM.105-107.755](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.105-107.755).
- [71] LIAO, C. L. et CHAN, T. C. “A generalized constitutive relation for a randomly packed particle assembly”. In : *Computers and Geotechnics* 20.3 (1997), p. 345-363. ISSN : 0266352X. DOI : [10.1016/S0266-352X\(97\)00010-4](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(97)00010-4).

- [72] LOAËC, A. et al. "Smart Sleeper - Measurement of bending moments in concrete sleepers laid on ballast tracks". In : *Transport Research Arena* (2014).
- [73] LUESCHEN, G. G. G., BERGMAN, L. A. et MCFARLAND, D. M. "Green's function for uniform Timoshenko beams". In : *Journal of Sound and Vibration* 194.1 (1996), p. 93-102. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1006/JSVI.1996.0346](https://doi.org/10.1006/JSVI.1996.0346).
- [74] MAI, S. H. "Etude de dégradation des voies ferrées urbaines". Thèse de doct. Université Paris-Est, 2011.
- [75] MAURIN, L. et al. "High speed real-time contact measurements between a Smart Train pantograph with embedded Fibre Bragg Grating sensors and its Overhead Contact Line". In : *6th International Workshop on Structural Health Monitoring 1 & 2* (2007), p. 1808-1815.
- [76] MEAD, D. J. "A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; Applications to periodic timoshenko beams and stiffened plates". In : *Journal of Sound and Vibration* 104.1 (1986), p. 9-27. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(86\)80128-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80128-6).
- [77] MEAD, D. J. "Free wave propagation in periodically supported, infinite beams". In : *Journal of Sound and Vibration* 11.2 (1970), p. 181-197. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(70\)80062-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)80062-1).
- [78] MEAD, D. J. "Wave propagation and natural modes in periodic systems : I. Monocoupled systems". In : *Journal of Sound and Vibration* 40.1 (1975), p. 1-18. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(75\)80227-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80227-6).
- [79] MEAD, D. J. "Wave propagation and natural modes in periodic systems : II. Multicoupled systems, with and without damping". In : *Journal of Sound and Vibration* 40.1 (1975), p. 19-39. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(75\)80228-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80228-8).
- [80] MEAD, D. J. "Wave propagation in continuous periodic structures : Research contributions from Southampton, 1964-1995". In : *Journal of Sound and Vibration* 190.3 (1996), p. 495-524. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1006/jsvi.1996.0076](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0076).
- [81] MEAD, D. J. et PUJARA, K. K. "Space-harmonic analysis of periodically supported beams : response to convected random loading". In : *Journal of Sound and Vibration* 14.4 (1971), p. 525-541. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(71\)90579-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90579-7).
- [82] MEAD, D. J. et YAMAN, Y. "The response of infinite periodic beams to point harmonic forces : A flexural wave analysis". In : *Journal of Sound and Vibration* 144.3 (1991), p. 507-529. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(91\)90565-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90565-2).
- [83] "A decision support system for track maintenance". In : *Computers in Railways X* (Wessex, UK). Sous la dir. de MEIER-HIRMER, C. et al. T. 88. WIT Press, 2006, p. 217-226. DOI : [10.2495/CR060221](https://doi.org/10.2495/CR060221).
- [84] METRIKINE, A. V. et POPP, K. "Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space". In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 18.4 (1999), p. 679-701. ISSN : 09977538. DOI : [10.1016/S0997-7538\(99\)00141-2](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(99)00141-2).
- [85] MILKOVIĆ, D. et al. "Wayside system for wheel-rail contact forces measurements". In : *Measurement* 46.9 (2013), p. 3308-3318. ISSN : 0263-2241. DOI : [10.1016/J.MEASUREMENT.2013.06.017](https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2013.06.017).
- [86] MOLATEFI, H. et MOZAFARI, H. "Analysis of new method for vertical load measurement in the barycenter of the rail web by using FEM". In : *Measurement* 46.8 (2013), p. 2313-2323. ISSN : 0263-2241. DOI : [10.1016/J.MEASUREMENT.2013.04.008](https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2013.04.008).

- [87] MOREY, W. W., MELTZ, G. et GLENN, W. H. "Fiber Optic Bragg Grating Sensors". In : *SPIE 2.1169 Fiber Optic and Laser Sensors VII* (1989), p. 98-107. DOI : [10.1117/12.963022](https://doi.org/10.1117/12.963022).
- [88] MORGAN, J. G. D. et MARKLAND, E. "The effect of vibration on ballast beds". In : *Géotechnique* 31 (sept. 1981), p. 367-386. ISSN : 0016-8505. DOI : [10.1680/geot.1981.31.3.367](https://doi.org/10.1680/geot.1981.31.3.367).
- [89] NGUYEN, V. H. "Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles". Thèse de doct. École Nationale des Ponts et des Chaussées, 2002.
- [90] NGUYEN, V. H. et DUHAMEL, D. "Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part 1 : Infinite bar under moving axial loads". In : *Computers & Structures* 84.21 (2006), p. 1368-1380. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2006.02.018](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.02.018).
- [91] NGUYEN, V. H. et DUHAMEL, D. "Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part II : Infinite beam under moving harmonic loads". In : *Computers & Structures* 86.21 (2008), p. 2056-2063. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2008.04.010](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.04.010).
- [92] NORDBORG, A. "Vertical Rail Vibrations : Pointforce Excitation". In : *Acustica* 84 (1998), p. 280-288.
- [93] NORDBORG, A. "Vertical Rail Vibrations : Pointforce Excitation". In : *Acustica* 84 (1998), p. 289-300.
- [94] OVIEDO-MARLO, X. "Etude du comportement du ballast par un modèle micromécanique". Thèse de doct. Ecole Nationale des Ponts et des Chaussées, 2001.
- [95] PAIXÃO, A., FORTUNATO, E. et CALÇADA, R. "Transition zones to railway bridges : Track measurements and numerical modelling". In : *Engineering Structures* 80 (2014), p. 435-443. ISSN : 01410296. DOI : [10.1016/j.engstruct.2014.09.024](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.09.024).
- [96] PIMENTEL, R. et al. "Hybrid Fiber-Optic/Electrical Measurement System for Characterization of Railway Traffic and Its Effects on a Short Span Bridge". In : *IEEE Sensors Journal* 8.7 (2008), p. 1243-1249. DOI : [10.1109/JSEN.2008.926519](https://doi.org/10.1109/JSEN.2008.926519).
- [97] PRADEEP, M. et NAGANARASIAH GOUD, K. "Damage detection of Railway track by sensor using advanced RISC machine". In : *International Journal of Engineering Trends and Technology* 6.1 (2013), p. 16-19. ISSN : 2231-5381.
- [98] QIAN, Y. et al. "Railroad infrastructure 4.0 : Development and application of an automatic ballast support condition assessment system". In : *Transportation Geotechnics* (2019). ISSN : 22143912. DOI : [10.1016/j.trgeo.2019.01.002](https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2019.01.002).
- [99] REDOUTEY, D. *Le matériel moteur de la SNCF en 2007*. La vie du rail, 2007. ISBN : 78-2-915034-65-3.
- [100] REDOUTEY, D. *Le matériel moteur de la SNCF en 2016*. La vie du rail, 2016. ISBN : 978-2-915034-65-3.
- [101] REMENNIKOV, A. et KAEWUNRUEN, S. "Experimental Investigation on Dynamic Railway Sleeper/Ballast Interaction". In : *Experimental Mechanics* 46.1 (fév. 2006), p. 57-66. ISSN : 00144851. DOI : [10.1007/s11340-006-5868-z](https://doi.org/10.1007/s11340-006-5868-z).
- [102] RICCI, L. "Modélisations discrètes et continues des voies ferrées ballastées". Thèse de doct. École Nationale des Ponts et des Chaussées, 2006.

- [103] RICCI, L. et al. "Dynamic behaviour of ballasted railway tracks : A discrete/continuous approach". In : *Computers & Structures* 83.28 (2005), p. 2282-2292. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2005.03.035](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.03.035).
- [104] ROACH, G. F. *Green's functions*. 2<sup>e</sup> éd. Cambridge University Press, 1982. ISBN : 978-0521282888.
- [105] ROGER, V. "Maintenance incentives under different infrastructure regimes". In : *Utilities Policy* 12.4 (2004), p. 315-322. ISSN : 09571787. DOI : [10.1016/j.jup.2004.07.006](https://doi.org/10.1016/j.jup.2004.07.006).
- [106] SAPOUNTZAKIS, E. J. et KAMPITSIS, A. E. "Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation". In : *Computers & Structures* 88.21 (2010), p. 1206-1219. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2010.06.010](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.06.010).
- [107] SATO, Y. "Japanese studies on deterioration of ballasted track". In : *Vehicule system dynamique* 24 (1995), p. 197-208. DOI : [10.1080/00423119508969625](https://doi.org/10.1080/00423119508969625).
- [108] SAUVAGE, R. et RICHEZ, G. *Les couches d'assise et de la voie ferrée*. R.G.C.F, 1978.
- [109] SHABANA, A. A. "Nadal's Formula and High Speed Rail Derailments". In : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 7.4 (juin 2012). 041003. ISSN : 1555-1415. DOI : [10.1115/1.4006730](https://doi.org/10.1115/1.4006730).
- [110] SHENG, X., JONES, C. J. C. et PETYT, M. "Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track". In : *Journal of Sound and Vibration* 225.1 (1999), p. 3-28. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1006/jsvi.1999.2232](https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2232).
- [111] SHENG, X. et al. "Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads". In : *Journal of Sound and Vibration* 282.1 (2005), p. 125-149. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2004.02.050](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.050).
- [112] SHENG, X. et al. "Using the Fourier-series approach to study interactions between moving wheels and a periodically supported rail". In : *Journal of Sound and Vibration* 303.3 (2007), p. 873-894. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2007.02.007](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.02.007).
- [113] SHENTON, M. J. *Deformation of railway ballast under repeated loading conditions*. Sous la dir. de PRESS, Pergamon. Oxford, 1978.
- [114] SHI, X. P., FWA, T. F. et TAN, S. A. "Flexural fatigue strength of plain concrete". In : *ACI Mater. J.* 90.5 (1993), p. 435-440.
- [115] TAM, H. Y. et al. "Fiber Bragg Grating Sensor". Utilization of Fiber Optic Bragg Grating Sensing Systems for Health Monitoring in Railway Applications.
- [116] "Track maintenance planning using computer analysis". In : *International Heavy Haul Railway Conference* (Vancouver, Canada). Sous la dir. de TEW, G. et TWINDLE, K. 1991, p. 158-184.
- [117] THOMAS, B. et al. "Identifying states in shallow vibrated beds". In : *Powder Technology* 57 (avr. 1989), p. 267-280. ISSN : 00325910. DOI : [10.1016/0032-5910\(89\)80046-4](https://doi.org/10.1016/0032-5910(89)80046-4).
- [118] TRINH, V. N. "Comportement hydromécanique de matériaux constitutifs de plateformes ferroviaires anciennes". Thèse de doct. Université Paris-Est, 2011.
- [119] UZARSKI, D. R., DARTER, M. I. et THOMPSON, M. R. *Development of condition indexes for Low volume railroad track*. Rapp. tech. USACERL Technical Report FM-93/13. US Army Corps of Engineers Construction Engineering Research Laboratories, 1993.

- [120] VOSTROUKHOV, A. V. et METRIKINE, A. V. "Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track". In : *International Journal of Solids and Structures* 40.21 (2003), p. 5723-5752. ISSN : 00207683. DOI : [10.1016/S0020-7683\(03\)00311-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00311-1).
- [121] WALTON, O. R. "Force models for particle-dynamics simulations of granular materials". In : *Mobile Particulate Systems* 287 (1995), p. 367-380.
- [122] WEI, C. et al. "A Fiber Bragg Grating Sensor System for Train Axle Counting". In : *IEEE Sensors journal* 12.10 (2010), p. 1905-1912. DOI : [10.1109/JSEN.2010.2049199](https://doi.org/10.1109/JSEN.2010.2049199).
- [123] WEI, C. et al. "Real-Time Train Wheel Condition Monitoring by Fiber Bragg Grating Sensors". In : *International Journal of Distributed Sensor Networks* 2012.10 (jan. 2012). DOI : [10.1155/2012/409048](https://doi.org/10.1155/2012/409048).
- [124] YELLA, S., DOUGHERTY, M. et GUPTA, N. K. "Condition monitoring of wooden railway sleepers". In : *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 17.1 (2009), p. 38-55. ISSN : 0968090X. DOI : [10.1016/j.trc.2008.06.002](https://doi.org/10.1016/j.trc.2008.06.002).
- [125] YOSHIMURA, A. et al. "Development of database system, MICRO LABOCS-II+, for railway track maintenance management". In : 36.2 (1995). Railway Technical Research Institute, Quarterly Reports, p. 95-101. ISSN : 0033-9008.
- [126] YOU, R. et al. "Nonlinear finite element analysis for structural capacity of railway prestressed concrete sleepers with rail seat abrasion". In : *Engineering Failure Analysis* 95 (2019), p. 47-65. ISSN : 1350-6307. DOI : [10.1016/J.ENGFAILANAL.2018.08.026](https://doi.org/10.1016/J.ENGFAILANAL.2018.08.026).
- [127] ZÓLTOWSKI, B., CASTANEDA, L. et ZÓLTOWSKI, M. "Instrumented study of the wheel-rail interaction ". In : *Vibroengineering PROCEDIA* 6 (oct. 2015), p. 228-233. ISSN : 2345-0533.