HAL
open science

# Modélisation et contrôle d'un véhicule tout-terrain à deux trains directeurs

Laëtitia Li

## To cite this version:

Laëtitia Li. Modélisation et contrôle d'un véhicule tout-terrain à deux trains directeurs. Robotique [cs.RO]. Université Paris sciences et lettres, 2021. Français. NNT : 2021UPSLM032 . tel-03461466

**HAL Id: tel-03461466**

**https://pastel.hal.science/tel-03461466v1**

Submitted on 1 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PSL UNIVERSITÉ PARIS

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à MINES ParisTech

# Modélisation et contrôle d'un véhicule tout-terrain à deux trains directeurs


Soutenue par
**Laëtitia LI**
Le 15 janvier 2021


Ecole doctorale n° 621
**INGÉNIERIE DES SYSTÈMES, MATÉRIAUX, MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE (ISMME)**

Spécialité
**INFORMATIQUE TEMPS RÉEL, ROBOTIQUE ET AUTOMATIQUE**

Composition du jury :

| | |
|---|---|
| Michel, BASSET<br>Professeur, UHA | *Président* |
| Hugues, MOUNIER<br>Professeur, Polytech Paris Saclay | *Rapporteur* |
| Dominique, GRUYER<br>Directeur de Recherche PICS-L, | *Rapporteur* |
| Brigitte, D'ANDREA-NOVEL<br>Professeur, Mines ParisTech | *Directrice de thèse* |
| Arnaud, QUADRAT<br>Ingénieur, Safran Electronics & Defense | *Examinateur* |

MINES ParisTech | PSL

# Résumé

L'intérêt pour les véhicules autonomes n'a cessé de croître ces dernières années. La conduite autonome sur des terrains accidentés, ou encore avec des conditions d'adhérences faibles sont encore des défis technologiques à relever. Le système de contrôle doit être capable d'identifier la variabilité de ces terrains tout en suivant une trajectoire de la meilleure manière possible. Les travaux décrits dans ce mémoire se focalisent sur le développement d'une stratégie globale de commande pour adresser le problème de la conduite de véhicule autonome à deux trains directeurs en milieu tout-terrain. Dans de tels milieux et lors de déplacement à vitesse élevée, les pneumatiques sont soumis à d'importants glissements qui entrainent un comportement sous vireur ou survireur du véhicule. L'objectif est donc d'évoluer le plus rapidement possible dans des environnements difficiles tout en gardant un suivi précis quelles que soient les conditions d'adhérence.

Pour ce faire, plusieurs points ont été abordés notamment au niveau de la modélisation du véhicule et des pneumatiques, de l'estimation des efforts pneumatiques et de la commande de véhicule à deux trains directeurs. Les contributions principales sont les suivantes : un algorithme d'estimation des forces latérales à partir de deux paramètres fondamentaux : le coefficient de rigidité de dérive et le coefficient de friction latérale maximale, et un algorithme de commande qui assure le suivi de la trajectoire de référence. La commande est basée sur un modèle dynamique afin de prendre en compte les interactions entre la roue et le sol. En effet, à des vitesses importantes, les fortes dynamiques rendent les modèles cinématiques peu réalistes. Ceux-ci sont uniquement capables de représenter des phénomènes relativement lents et donc ne conviennent que pour des véhicules se déplaçant à vitesse faible. Cette commande cherchera à maintenir, dans la mesure du possible, le comportement du pneumatique dans un domaine linéaire. L'exploitation du deuxième train directeur permettra de réguler l'orientation du véhicule relativement à une trajectoire de référence. Cela permettra de contrôler le véhicule même en présence de glissements importants et ainsi de pousser les limites de stabilité du véhicule.

# Table des matières

**Table des matières** iii

**Liste des figures** vii

**Liste des tableaux** xiii

**1 Introduction** 3
1.1 Cadre général . . . 3
1.2 Des véhicules routiers aux véhicules tout-terrain . . . 4
1.3 Les contraintes du tout-terrain . . . 5
1.4 Trains directeurs et roues motrices . . . 5
1.5 Le projet FURIOUS . . . 6
1.6 Approche proposée et contributions scientifiques . . . 10

**2 Modélisation du véhicule** 13
2.1 Modélisation générale d'un robot . . . 14
2.2 Roulement sans glissements et contraintes non holonomes . . . 15
2.2.1 Roulement sans glissements . . . 15
2.2.2 Contraintes non-holonomes . . . 17
2.3 Epure de Jeantaud . . . 19
2.4 Repérage des différents solides . . . 21
2.5 Modélisation cinématique . . . 25
2.5.1 Modélisation cinématique bicyclette . . . 25
2.5.2 Modélisation cinématique étendue . . . 27
2.5.3 Modélisation cinématique étendue par rapport à un chemin . . . 29
2.6 Modélisation dynamique . . . 30
2.6.1 Modélisation dynamique bicyclette à 3 DDL . . . 30
2.6.2 Modélisation dynamique de type 4 roues à 7 DDL . . . 33
2.6.3 Modélisation dynamique de type 4 roues à 10 DDL . . . 34
2.6.4 Modélisation dynamique de type 4 roues à 14 DDL . . . 43
2.7 Modélisation de la liaison pneumatique . . . 46
2.7.1 Notations pour formaliser les forces s'appliquant au pneumatique . . . 46
2.7.1.1 Taux de glissement . . . 49
2.7.1.2 Angle de dérive et taux de glissement latéral . . . 50
2.7.2 Modèle de Brosse . . . 52
2.7.3 Modèle de Gim . . . 53
2.7.4 Modèle de Dugoff . . . 53
2.7.5 Modèle de Kiencke/Burckhardt . . . 55
2.7.6 Modèle de Pacejka . . . 56
2.7.7 Modèle de Pacejka à l'ordre 3 . . . 60
2.7.8 Modèle linéaire . . . 61
2.8 Modèles utilisés dans la thèse . . . 62
2.9 Simulateur sur matlab/simulink . . . 63

**3 Estimation** **69**
3.1 Etat de l'art . . . 69
3.2 Filtrage de Kalman . . . 71
3.3 Estimation des efforts latéraux . . . 73
3.4 Estimation du coefficient de rigidité de dérive et du coefficient de friction latérale maximale . . . 79
3.4.1 Les 3 modèles de frottements considérés . . . 79
3.4.2 Algorithme d'estimation à 3 zones . . . 81
3.4.3 Réglages des seuils . . . 87
3.5 Simulations et résultats . . . 92
3.5.1 Estimation des forces latérales . . . 92
3.5.2 Estimation des coefficients de friction et de rigidité de dérive . . . 99
3.5.2.1 Outils d'analyse . . . 100
3.5.2.2 Résultats route asphaltée mouillée $\mu = 0.8$ . . . 104
3.5.2.3 Résultats route enneigée $\mu = 0.3$ . . . 105
3.5.3 Conclusion . . . 114

**4 Commande de véhicule** **125**
4.1 Etat de l'art . . . 126
4.1.1 Suivi de chemin (path following) . . . 126
4.1.2 Suivi de trajectoire (trajectory tracking) . . . 128
4.1.3 Quelques techniques de contrôle . . . 129
4.1.4 Forme chaînée . . . 130
4.1.5 Linéarisation par feedback . . . 137
4.1.5.1 Linéarisation par feedback statique . . . 138
4.1.5.2 Linéarisation par feedback dynamique . . . 141
4.1.6 Méthode par backstepping et approches par Lyapunov . . . 142
4.2 Proposition d'une nouvelle commande pour le véhicule eRider . . . 143
4.2.1 Dynamique d'erreur du suivi de trajectoire . . . 144
4.2.2 Modélisation du véhicule . . . 147
4.2.3 Contrôle par bouclage linéarisant . . . 149
4.2.4 Contrôle par backstepping avec modèle linéaire de pneumatique . . . 150
4.2.5 Contrôle par backstepping avec modèle non linéaire de pneumatique . . . 152
4.2.6 Résultats de simulations . . . 155
4.3 Conclusion et comparaisons de résultats des commandes . . . 170

**5 Conclusion et perspectives** **173**

**A Notations** **III**
A.1 Notations générales de mécanique . . . III
A.2 Paramètres du véhicule (valeurs numériques partie 2.4) . . . IV
A.3 Notations liées à l'état et entrées du véhicule . . . V
A.4 Notations liées aux pneumatiques . . . VI
A.5 Autres notations . . . VII

**B Notions de mécanique pour la modélisation du véhicule** **IX**
B.1 Bases et repères . . . IX
B.2 Vitesses . . . X
B.2.1 Différents types de vitesses . . . X
B.2.2 Vitesse d'un point quelconque du véhicule . . . XI
B.3 Accélérations du centre de gravité . . . XII
B.4 Matrice de changement de base et vitesse instantanée de rotation . . . XIII
B.5 Rotation dans un plan . . . XIII

B.6 Outils mathématiques : Principe fondamental de la dynamique . . . . . XIV

**C Calcul analytique des angles de dérives XV**

**D Asservissement du modèle cinématique de type bicyclette augmenté sur un chemin XIX**

D.1 Modélisation dans le repère de Frenet . . . . . XIX

D.1.1 Repère de Frenet . . . . . XIX

D.1.2 Coordonnées généralisées du véhicule . . . . . XX

D.2 Dynamique du véhicule en coordonnées curvilignes . . . . . XXI

D.2.1 Expression de $\dot{s}$ . . . . . XXI

D.2.2 Expression de $\dot{d}^\star$ . . . . . XXII

D.2.3 Expression de $\dot{\tilde{\psi}}$ : . . . . . XXII

**E Outils mathématiques XXIII**

E.1 Point d'équilibre . . . . . XXIII

E.2 Fonctions de Lyapunov . . . . . XXIV

E.2.1 Système autonome . . . . . XXIV

E.2.2 Système linéaire à temps invariant . . . . . XXV

# Liste des figures


1.1 Représentation du robot véhicule (à gauche), du robot fantassin 1 (au centre) et du robot fantassin 2 (à droite) . . . 7
1.2 eRider . . . 8
1.3 Illustration du simulateur 4DV-Sim . . . 10

2.1 Repérage d'un robot mobile . . . 15
2.2 Eléments constitutifs d'un train de véhicule . . . 16
2.3 Liaisons cinématiques d'un train . . . 16
2.4 Caractérisation du roulement sans glissement . . . 17
2.5 Véhicule à deux trains directeurs . . . 20
2.6 Paramétrage du système . . . 20
2.7 Représentation des différents repères (vue de côté) . . . 22
2.8 Représentation des différents repères (vue de haut) . . . 22
2.9 Rotations du système de coordonnée du centre de gravité par rapport au repère inertiel . . . 23
2.10 Rotations du système de coordonnée de l'essieu par rapport au repère porte-moyeu des roues . . . 25
2.11 Modèle cinématique de type "bicyclette" . . . 26
2.12 Modèle cinématique de type "bicyclette" étendu . . . 28
2.13 Configuration du modèle bicyclette étendu avec deux trains directeurs par rapport à un chemin . . . 29
2.14 Modèle bicyclette dynamique à 3DDL . . . 32
2.15 Forces et moments appliqués à la roue . . . 34
2.16 Modélisation des suspensions 10 DDL . . . 35
2.17 Forces et moments appliqués au véhicule - vu de profil . . . 36
2.18 Forces et moments appliqués au véhicule - vu de dessus . . . 36
2.19 Forces appliquées au véhicule - vu de derrière . . . 37
2.20 Forces et moments appliqués à la roue . . . 39
2.21 Modélisation des suspensions d'un quart de véhicule . . . 42
2.22 Système suspension/masse non-suspendue 14 DDL VS 10 DDL . . . 43
2.23 Modélisation des suspensions 14 DDL . . . 44
2.24 Forces appliquées aux roues - vu de derrière . . . 45
2.25 Modélisation des suspensions d'un quart de véhicule (avec $r_{eq}$ la longueur à l'équilibre du ressort) . . . 45
2.26 Zone de contact d'un pneu [Rajamani, 2014] . . . 47
2.27 Résultantes et moments . . . 48
2.28 Cercle d'adhérence . . . 48
2.29 Vitesse de la roue et taux de glissement . . . 49
2.31 Signe du taux de glissement . . . 50
2.32 Angle de dérive avant . . . 51
2.33 Modèle de Brosse . . . 52
2.34 Modèle de Dugoff . . . 55

2.35 Courbe caractéristique suivant le modèle de Pacejka [Pacejka, 1996] . . . . . 59
2.36 Courbes caractéristiques des efforts selon Pacejka pour trois valeurs de charges verticales [Pacejka, 1996] . . . . . 60
2.37 Force longitudinale du pneu en fonction du taux de glissement [Rajamani, 2014] 61
2.38 Description des modules du simulateur . . . . . 64
2.39 Distribution normale . . . . . 68

3.1 Courbe de la force latérale en fonction de l'angle de dérive pour différentes valeurs de coefficient de friction à partir d'un modèle de Pacejka [Pacejka, 2006] (lin mod = modèle linéaire) . . . . . 70
3.2 Estimation de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{max}}$ . . . . . 73
3.3 Répartition des forces verticales . . . . . 75
3.4 Délimitation des zones d'estimation . . . . . 80
3.5 Schématisation de l'algorithme d'estimation du coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et du coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{max}}$ . . . . . 81
3.6 Conditions pour initialiser la zone . . . . . 84
3.7 Conditions pour le choix de la zone . . . . . 84
3.8 Détermination de $a_{seuil1}$ et $\beta_{seuil3}$ . . . . . 89
3.9 Détermination de $\beta_{seuil2}$ . . . . . 89
3.10 Détermination de $b_{seuil2}$ . . . . . 91
3.11 Trajectoire de type changement de voie . . . . . 93
3.12 Trajectoire changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ avec bruit de mesure. . . . . 93
3.13 Trajectoire changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ avec bruit de mesure. . . . . 94
3.14 Trajectoire changement de voie : accélération latérale pour $\mu = 0.8$ à une vitesse de $17\,m/s$ . . . . . 94
3.15 Trajectoire changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure. . . . . 95
3.16 Trajectoire changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure. . . . . 95
3.17 Trajectoire de type double changement de voie . . . . . 96
3.18 Trajectoire de type double changement de voie en fonction du temps . . . . . 96
3.19 Trajectoire double changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$ avec bruit de mesure. . . . . 97
3.20 Trajectoire double changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ avec bruit de mesure. . . . . 97
3.21 Trajectoire double changement de voie : accélération latérale pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$ . . . . . 98
3.22 Trajectoire double changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure. . . . . 98
3.23 Trajectoire double changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure. . . . . 99
3.24 Illustration $n°1$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 101
3.25 Illustration $n°2$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 102
3.26 Illustration $n°3$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 102
3.27 Illustration $n°4$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 103
3.28 Illustration $n°5$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 103
3.29 Forces latérales réelles en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 104
3.30 Forces latérales estimées en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$ . . . . . 105

3.31 Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 106
3.32 Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 106
3.33 Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 107
3.34 Erreur entre la force latérale réelle et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 107
3.35 $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 108
3.36 Angle de dérive roue par roue, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 108
3.37 Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 109
3.38 Analyse $n°1$ de l'estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales mesurées, pour la roue avant gauche, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . 109
3.39 Analyse $n°2$ de l'estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales mesurées, pour la roue avant gauche, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . 110
3.40 Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$ . . . 110
3.41 Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$ . . . 111
3.42 Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 111
3.43 Erreur entre la force latérale réelle et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales mesurées), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 112
3.44 $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 112
3.45 Analyse $n°1$ de l'estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales estimées, pour la roue avant gauche, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . 113
3.46 Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . 113
3.47 Forces latérales réelles en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.3$ à $10m/s$ . . . 114
3.48 Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 115
3.49 Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 115
3.50 Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 116
3.51 Erreur entre la force latérale réelle et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . 116
3.52 Forces latérales estimées en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.3$ à $10m/s$ . . . 117
3.53 Angles de dérive en fonction du temps, roue par roue, pour $\mu = 0.3$ à $10m/s$ . 117
3.54 $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 118
3.55 Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 118
3.56 Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 119
3.57 Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 119
3.58 Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . 120

3.59 Erreur entre la force latérale estimée et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ 120
3.60 $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . . . 121
3.61 Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$ . . . . . 121
3.62 Comparaison des forces latérales obtenues avec le modèle de Dugoff et le modèle de Pacejka sur de l'asphalte sec pour $v = 19$ m/s (ligne pointillée) et $v = 14$ m/s (ligne pleine) . . . . . 123
3.63 Courbe de la force latérale en fonction de l'angle de dérive pour différentes valeurs de coefficient de rigidité de dérive . . . . . 123

4.1 Repère de Frenet . . . . . 127
4.2 Paramétrage de l'approche "path following" . . . . . 127
4.3 Paramétrage de l'approche "trajectory tracking" . . . . . 128
4.4 Boucle d'asservissement de la vitesse de rotation des roues . . . . . 137
4.5 Linéarisation entrée-sortie . . . . . 138
4.6 Boucle de linéarisation entrée-sortie et vue d'ensemble d'un système bouclé sur une correction classique . . . . . 140
4.7 Modèle bicyclette dynamique . . . . . 145
4.8 Modèle linéaire du pneu VS comportement réel non linéaire . . . . . 153
4.9 Trajectoire de type double changement de voie. . . . . 155
4.10 Courbure de la trajectoire de type double changement de voie en fonction de X.155
4.11 Trajectoire parcourue le véhicule sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 156
4.12 Ecarts latéral $d$ et d'orientation $\tilde{\psi}$ sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 157
4.13 Erreur de suivi sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 157
4.14 Angles de braquage avant et arrière sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 158
4.15 Trajectoire parcourue par le véhicule sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 159
4.16 Ecarts latéral $d$ et d'orientation $\tilde{\psi}$ sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 159
4.17 Erreur de suivi sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 160
4.18 Angles de braquage avant et arrière sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu. . . . . 160
4.19 Trajectoire parcourue par le véhicule pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$). . . . . 161
4.20 Ecarts latéral $d$ et d'orientation $\tilde{\psi}$ pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$). . . . . 161
4.21 Angles de braquage avant et arrière pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$). . . . . 162
4.22 Erreurs de suivis pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$). . . . . 162
4.23 Trajectoire de type double changement de voie. Chemin de référence en noir, suivi avec (C1) en rouge, suivi avec (C2) en vert et suivi avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 164

4.24 Erreur de suivi avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 164
4.25 Vitesse longitudinale désirée en noir, vitesse longitudinale avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 165
4.26 Vitesse latérale désirée en noir, vitesse latérale avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 165
4.27 Lacet désirée en noir, lacet avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 166
4.28 Erreur de lacet avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 166
4.29 Vitesse de lacet désirée en noir, lacet avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 167
4.30 Angle de braquage avant avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 167
4.31 Angle de braquage arrière avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 168
4.32 Couple total avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 168
4.33 Forces latérales en fonction de l'angle de dérive avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 169
4.34 Angles de dérive avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 169
4.35 Accélération latérale avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 170
4.36 Trajectoire de type double changement de voie. Chemin de référence en noir, suivi avec (4.35) en magenta, suivi avec (4.33) en cyan, suivi avec (C1) en rouge, suivi avec (C2) en vert et suivi avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ 171
4.37 Erreur de suivi avec (4.35) en magenta, avec (4.33) en cyan, avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$ . . . . . 171

C.1 Angle de dérive avant . . . . . XV
C.2 Schéma de véhicule . . . . . XVI

D.1 Paramétrage de l'approche "path following" pour le modèle bicyclette étendu XIX

# Liste des tableaux


2.3 Coefficients de Pacejka issus de [Pacejka, 2006] . . . . . 65
2.4 Valeurs simulateur HIL . . . . . 67
2.5 Valeurs des écarts-types choisies pour les bruits capteurs . . . . . 67

3.1 Quelques valeurs typiques de $\mu$ [Yingmin Jia, 2000], [Yakub and Mori, 2015], [Ghandour et al., 2010] . . . . . 70
3.2 Variables accessibles après filtrage . . . . . 72
3.3 Synthèse des erreurs . . . . . 99
3.4 Estimation à chaque pas de temps . . . . . 100

# Remerciements

Ce manuscrit est le fruit de trois années de travail parsemées d'embûches et de défis que je n'aurais su relever sans toutes ces rencontres et amitiés nouvelles qui ont grandement contribué à la richesse de ces trois années. C'est donc au travers de ces quelques modestes lignes que je tiens à remercier tous ceux que j'ai pu côtoyer pendant cette aventure.

Je commencerai naturellement par adresser mes remerciements les plus chaleureux à Brigitte d'Andréa-Novel, pour avoir accepté de diriger ma thèse. C'est une fierté d'avoir pu travailler avec elle. J'exprime ma reconnaissance à Michel Basset, professeur à l'université de Haute Alsace, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je remercie également mes rapporteurs, Hugues Mounier et Dominique Gruyer, pour l'attention portée à mes travaux et le temps consacré à son évaluation.

J'exprime ma reconnaissance à Sylvain pour tout ce que j'ai pu apprendre à ses côtés : merci pour ton implication et ta créativité ! C'est si enrichissant de travailler aux côtés d'un passionné. Merci aussi à Frédéric, de m'avoir si bien intégré à l'équipe aux prémices de ce projet. Je ne vous remercierais jamais assez de m'avoir encouragée à démarrer cette aventure.

Mille mercis à Arnaud, pour la qualité de son encadrement, pour sa rigueur bienveillante, ses critiques constructives et ses relectures minutieuses qui m'auront été d'une aide précieuse. Je tiens ici à lui exprimer toute ma gratitude, lui qui ne comptait plus les heures de week-end et de soirées qu'il m'a consacré. Merci à Sylvain et Arnaud de m'avoir aidée à parcourir les routes sinueuses du doctorat et de m'avoir amenée jusqu'à la ligne d'arrivée.

J'exprime toute ma gratitude à François Guillot, pour sa bienveillance et son soutien sans faille.

Merci à toute l'équipe Furious de Safran Electronics & Defense pour ces 3 années. Merci à Christophe et Jacques pour leur confiance. Merci Vianney pour la découverte de la moto, de la liberté que ça procure (et des courbatures aussi !). Merci à Paula et Raphaëlle d'être arrivées dans l'équipe, d'avoir un peu plus équilibré le ratio homme/femme (girl power) et d'avoir amené de la bonne humeur comme on sait si bien le faire.

Merci à Aurélien, pour m'avoir, à maintes reprises, remonté le moral, pour son aide précieuse et pour avoir éclairé ma lanterne pendant ces longs trajets quotidiens en bus, TER, métro. Je suis ravie de t'avoir converti au volley-ball et on se retrouvera aux Prolongations, je l'espère.

Merci à Minh Ân, mon coach à tous les niveaux, dans la sueur et la bonne humeur, sans qui je n'aurais pas mis un seul pied à la salle de sport. Ce champion de scrabble m'aura appris des mots très utiles (kwa, qat, ewe, gex, ixa, kawi, kawa, hadjdj), enseigné la belote, le billard, les fléchettes. Merci de m'avoir fait découvrir les fabuleuses charades à tiroir, mes méninges et mes abdos ont bien travaillé ! Merci pour toutes ces (fausses) confidences, merci pour ta sagesse et tes conseils avisés. L'élève a désormais dépassé le maître.

Merci à Dominique, mon voisin de bureau de toujours, toujours partant pour manger des friandises avec moi pour que je culpabilise moins et qui vendrait son âme pour des Skittles

arc-en-ciel. Merci d'avoir été là avec moi depuis le début, d'avoir partagé les journées sans lumières naturelles au hangar d'Ampère 3, les journées de travail au grand air à Vilgénis et les journées dans un cadre luxueux au CRT.

Merci à Julien, Géraud, Illiès, Mathieu, JF, Louis, Pierre O, Pierre G, Kévin, Olivier, Pailin, Marius et plus généralement au Goulag pour tous les bons moments partagés en pause café et pour toutes ces superbes activités qu'on a partagé ensemble.

Merci à Benoît, pâtissier talentueux, écrivain émérite, psychologue hors pair (gare à celui qui ne détourne pas le regard), pour son soutien, ses encouragements et le recul qu'il m'a aidé à prendre tout au long de cette aventure. Merci pour toutes ces petites douceurs, au doux parfum de pistache, de passion, de vanille et de rhum, qui rendent mon estomac heureux.

Merci au pôle asservissement (Guillaume, Stéphane, Louis, Pierre, Serge, Emilie, Michel, Mehdi), avec qui je n'ai malheureusement pas passé assez de temps, pour leur bienveillance et leurs encouragements.

Je remercie Christine et Christophe les assistants du centre de robotique pour leur aide dans toutes les démarches administratives. Je remercie également tout le personnel de Safran Electronics & Defense qui a contribué à faciliter mon arrivée et mon intégration.

Merci à Jordan, que j'ai pu, parfois, trop souvent, négliger, d'avoir été là ces dernières années, pour m'avoir supportée moi et mes humeurs pas toujours très joyeuses, pour m'avoir encouragée et soutenue, pour avoir consciencieusement relu plusieurs fois mon manuscrit, pour avoir épargné vos yeux de fautes honteuses. Je te remercie toi, ma famille ainsi que mes amies (une grosse pensée pour mes merveilleuses amies Mariam, Diana et Mégane) pour votre soutien indéfectible, vous êtes toujours là, malgré ces longs moments d'absence que requiert une thèse.

A vous tous, je vous dis merci.

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 Cadre général

Avec un nombre croissant de personnes sur les routes, engendrant des problèmes de congestion du trafic, d'accidents et de pollution, les nouvelles formes de mobilités deviennent des enjeux économiques et sociétaux. L'autonomisation des plateformes, ou autrement dit les systèmes à mobilité autonome, est un des sujets majeurs portés par la dynamique de ces nouvelles mobilités. L'autonomisation incrémentale des véhicules automobiles est déjà une réalité et un des domaines les plus médiatiques.

L'autonomisation des transports publics est également un sujet d'intérêt majeur mais la question ne s'arrête pas aux plateformes terrestres. Le domaine de l'aéronautique a été le premier à être impacté par de nouvelles formes de mobilité autonome, il y a 30 ans, avec les drones. La prochaine étape sera l'insertion de ces drones dans l'espace aérien et le développement de plateformes aériennes autonomes de transport de fret ou de passagers. Les perspectives dans le domaine maritime sont également réelles avec l'ambition de disposer à terme de bateaux plus autonomes, plus sûrs, embarquant des équipages réduits ou nuls.

Le développement grandissant des fonctions d'autonomies de ces plateformes a pour principal but de palier à des tâches répétitives, pénibles, fastidieuses et dangereuses. La conduite autonome de nos automobiles en est une illustration. C'est une réponse aux créneaux répétitifs, à la conduite pénible dans un bouchon, au pilotage fastidieux sur un trajet de plusieurs heures et à la gestion du danger lié à une perte d'attention voire à un endormissement. Ces plateformes intelligentes seront partagées, plus respectueuses de l'environnement, plus confortables, plus sûres et de plus en plus autonomes.

Dans le domaine civil, qu'il s'agisse des véhicules automobiles personnels ou des moyens divers de transports publics, la maturité technique couplée avec les questions d'acceptation sociétale et aussi de réglementation imposent de proposer des logiques d'autonomisation incrémentale raisonnables et raisonnées.

Le domaine de la défense, comme le domaine civil, va être bouleversé par ces évolutions vers de nouvelles formes de mobilité. Alors que la défense a été un précurseur sur ces sujets avec le développement de drones volants, de robots spécialisés (robots démineurs) ou de systèmes d'armes très sophistiqués, elle semble actuellement en retard sur les véhicules terrestres. Plusieurs raisons expliquent cette situation :

- les usages dans le civil apparaissent en première analyse très différents,
- les développements dans le civil, rapides et incrémentaux donnent l'impression de solution pas encore mature et d'architectures système pas encore stabilisées,
- il existe encore une forme de réserve et de crainte sur ces sujets.

Toutefois, la robotique a de réels avantages dans le domaine de la défense. Les soldats font face à des contraintes opérationnelles et des conditions difficiles dans leurs activités. Le poids de l'ensemble de leur équipement peut aller jusqu'à 50 kg et limiter leur vitesse de progression.

De plus, la plupart de leurs tâches sollicite énormément les ressources de leur attention visuelle. Une plateforme mobile terrestre équipée de capteurs et d'actionneurs et disposant d'un certain degré d'autonomie de décision peut donc accompagner des actes élémentaires ou des missions dans le cadre d'une manoeuvre terrestre et ce, dans un environnement contraignant et hostile. L'emploi de tels robots présente un intérêt majeur dans la préservation du potentiel humain de combat. Ces robots vont contribuer à améliorer la protection du combattant en réduisant son exposition au danger, améliorer la perception de l'environnement du combattant en offrant de réelles potentialités de vision au-delà des vues directes, accroître les capacités d'action (exploration autonome, inspection de zones inaccessibles ou dangereuses, surveillance permanente, capacité d'emport du fantassin débarqué,..), effectuer les tâches logistiques ainsi que les patrouilles répétitives.

## 1.2 Des véhicules routiers aux véhicules tout-terrain

De nombreux laboratoires et industriels sont intéressés par les travaux portant sur le développement des véhicules roulants et le domaine est en pleine expansion. Toutes les techniques nécessaires à leur automatisation complète ont aujourd'hui la maturité suffisante pour voir aboutir des projets. La Google car est un des exemples les plus connus en ce qui concerne le transport de personnes. On peut aussi citer l'édition 2007 du DARPA's Urban Challenge qui a stimulé la recherche pour la conception des véhicules autonomes. Cette compétition a pour objectif de mettre au point un véhicule capable d'évoluer et de s'intégrer au sein d'un trafic urbain. Les véhicules intelligents peuvent être classés en trois catégories [Bishop, 2000] :

- les véhicules avec systèmes d'alertes : de tels systèmes embarqués informent le conducteur sans agir sur le véhicule. Comme exemples, nous pouvons citer les véhicules équipés de systèmes d'alerte anti-collision et d'avertissement de franchissement involontaire de ligne,
- les véhicules avec systèmes de correction : ici le système embarqué agit partiellement et ponctuellement sur le véhicule. Comme exemples, nous pouvons citer l'ABS, l'ESP ainsi que les systèmes d'évitement de collisions,
- les véhicules autonomes : un véhicule autonome est un véhicule capable de rouler automatiquement, en toute autonomie dans un trafic réel et sur une infrastructure non spécifique sans l'intervention d'un être humain dont le rôle est limité à la supervision.

Concernant les véhicules routiers commercialisés actuellement, il n'y a pas d'autonomie totale mais il existe de nombreux outils, comme les systèmes d'aide à la conduite automobile, qui permettent d'améliorer la sécurité des conducteurs en l'aidant ou en le substituant. Ces dispositifs permettent d'améliorer significativement la stabilité dynamique des véhicules routiers (comme par exemple l'ESP et l'ABS).

Les retombées applicatives étant nombreuses, les thématiques de recherches sur les robots mobiles en milieux naturels apparaissent comme un enjeu majeur et font l'objet d'un nombre croissant d'études. On peut citer par exemple, les rovers pour l'exploration scientifique des corps du système solaire (planètes, lunes, astéroïdes).

Les applications terrestres comprennent par exemple les véhicules tout-terrain pour des applications au domaine de la défense. Des exemples de robots de type mules [Afghani and Javed, 2013] ont été développés pour le transport de charge lourde. On peut aussi trouver des véhicules téléopérés (UGV) pour répondre aux tâches de surveillance et d'exploration de zones.

Le domaine de l'agriculture aussi trouve des avantages dans la conduite des véhicules autonomes grâce à des machines agricoles autonomes, rapides et précises et permettant ainsi d'augmenter les rendements des surfaces cultivées. Les terrains en question étant peu structurés, la problématique de l'évolution en milieu tout-terrain se pose également.

Trois thématiques clés sont nécessaires pour une conduite autonome :

- la *perception* de l'environnement et la *localisation* : la perception est primordiale pour détecter les voies, les obstacles fixes et mobiles, etc. Les capteurs tels que les lidar, radar, caméras et GPS constituent le système de vision et fournissent une carte dynamique de l'environnement proche du véhicule. La localisation permet au véhicule de se repérer dans un repère global et ainsi de pouvoir définir des itinéraires possibles pour atteindre un but fixé.
- la *planification* des trajectoires : la planification de trajectoire rassemble l'ensemble des méthodes permettant de générer une trajectoire ou un chemin de référence, qui respecte un certain nombre de contraintes (confort, obstacles, point de passage obligatoire, etc). On peut trouver dans la littérature un grand nombre de travaux sur cette problématique. Le lecteur pourra par exemple trouver un état de l'art approfondi dans les ouvrages de [Pruski, 2014] et [Laumond, 2014]. On considèrera dans ces travaux que nous disposons déjà d'une trajectoire ou d'un chemin de référence.
- le *contrôle* du véhicule [Laumond, 2014], [Canudas de Wit et al., 1996] : le contrôle du véhicule, qui est la thématique principale de cette thèse, consiste à envoyer les consignes d'angles au volant et de couples aux roues pour suivre la trajectoire de référence.

## 1.3 Les contraintes du tout-terrain

Les systèmes d'aide à la conduite, mentionnés plus haut, développés pour les véhicules routiers ne sont pas transposables au cas des véhicules évoluant en milieu tout-terrain. Le principal blocage est dû au fait que leurs développements se basent sur des modèles linéaires de pneumatiques. En effet, les véhicules routiers se déplacent en environnement connu, bien structuré et présentant de bonnes propriétés, ce qui permet de formuler quelques hypothèses simplificatrices (essentiellement liées aux conditions de contact roue/sol comme l'hypothèse de roulement sans glissement). La commande des déplacements des robots mobiles est alors maîtrisée. C'est le cas par exemple dans le domaine des transports pour les milieux urbains [Parent, 2004].

Ces hypothèses ne sont plus valables en milieu tout-terrain, où les propriétés d'adhérence sont faibles, et supposent la maîtrise de certaines dynamiques, négligées dans un milieu structuré. En effet, dans le contexte d'évolution envisagé, un véhicule est soumis à des phénomènes physiques plus importants que dans le cas des véhicules routiers et qui ne sont classiquement pas adressés. En évoluant à haute vitesse et en terrain naturel, le véhicule est davantage impacté par la variabilité des conditions du sol qui influence les conditions d'adhérence. Il apparaît alors des glissements importants des roues par rapport au sol (glissement longitudinal et latéral) qu'il faut prendre en compte dans la commande des déplacements. La non prise en compte de ces effets dynamiques lors de la conception de la loi de commande remet fortement en cause leur robustesse.

Par conséquent, le contrôle des véhicules dans de tels milieux ne peut se borner à une extension directe des algorithmes développés dans le cadre des véhicules routiers dont les principes utilisés ne fourniraient pas les mêmes performances. Il est par conséquent nécessaire de développer des lois de commande dans un contexte dynamique prenant en compte les phénomènes d'interaction entre la roue et le sol.

## 1.4 Trains directeurs et roues motrices

Un robot mobile autonome muni de quatre roues motrices et directrices indépendantes peut être associé à différents types de motricités élémentaires. Ces motricités sont :

- L'entraînement différentiel (skid-steering). Dans cette configuration, les vitesses d'entraînement des roues sont pilotées indépendamment pour assurer à la fois la fonction de propulsion et celle de direction.

- Le braquage d'un seul train de direction (two-wheel steering). C'est le cas de configuration robotique le plus utilisé après celui du différentiel. Comme illustré dans le chapitre suivant, le braquage des roues permet de diriger le robot alors que leur motricité permet la propulsion. Cette configuration est appropriée lorsque le robot évolue dans des environnements ne nécessitant pas de manœuvres complexes.
- Le braquage des deux trains de direction : ces véhicules ont la capacité de braquer leurs roues avant et leurs roues arrière. Ils peuvent améliorer la stabilité du véhicule et permettent d'augmenter la manœuvrabilité du véhicule. Il existe différents niveaux de couplage entre ces roues :
  - deux trains couplés : les trains avant et arrière peuvent être couplés entre eux. Les essieux avant et arrière sont braqués l'un en fonction de l'autre à travers une fonction mathématique. Cette approche simplifie l'utilisation de la cinématique à deux trains directeurs mais limite la manoeuvrabilité dont pourrait bénéficier le véhicule s'il pouvait braquer indépendamment les essieux avant et arrière. Si les deux trains sont braqués en sens contraire la plage des rayons de courbure admissibles est plus importante et le robot peut négocier des virages plus étroits et difficiles. Le braquage des deux trains permet une différence d'orientation entre la direction des roues et celle du châssis, ce qui permet de réaliser des manoeuvres sans imposer au robot des effets centrifuges.
  - deux trains découplés : l'angle de braquage des roues avant est indépendant de l'angle de braquage des roues arrière. C'est ce couplage que l'on qualifiera par la suite de véhicule à deux trains directeurs.
- Le braquage indépendant de chaque roue. Il s'agit de la forme la plus souple mais aussi la plus difficile à commander. En effet, il faut garantir la cohérence des consignes données à chacune des roues pour s'assurer d'avoir le comportement souhaité.

## 1.5 Le projet FURIOUS

C'est donc dans le but de répondre aux nouvelles attentes d'autonomie dans le domaine de la défense que naît le projet FURIOUS (FUturs systèmes Robotiques Innovants en tant qu'OUtilS au profit du combattant embarqué et débarqué). Ce projet a pour ambition de démontrer concrètement et explicitement l'intérêt opérationnel d'introduire un système de robots au sein d'une section de combat d'infanterie. Dans le cadre de ce projet, Safran Electronics & Defense a construit un cluster de PME (4D-Virtualiz, Sominex, Kompai, Squadrone) et de laboratoires académiques (LAAS, ESIGELEC, Institut Pascal, LORIA, IRSTEA) au sein duquel, il acte en design autorité avec Effidence sur ce projet. Safran Electronics & Defense travaille sur les sujets de systèmes à mobilité autonome depuis 2013 et va apporter plusieurs de ses expertises pour répondre au mieux à ces attentes. L'autonomisation de ces plates-formes fait appel à des technologies, des briques fonctionnelles et des savoir-faire clés, au coeur des métiers de Safran Electronics & Defense : la perception de l'environnement, la navigation et le guidage et les calculateurs embarqués.

Le système FURIOUS a pour but de fournir une assistance aux forces de contact. Il est composé (cf figure 1.1) :

- d'un robot véhicule (véhicule off-road hybride et représentatif d'un véhicule militaire) visant à équiper une section de combat d'infanterie. Ce robot conduira ses missions dans des rues, boulevards et axes principaux mais aussi en périphérie des villes, sur tous types de chemins et même hors chemin.
- de deux mini robots accompagnant le fantassin. Ils sont destinés à être mis en oeuvre principalement dans les environnements urbains (intérieur et extérieur (pièce, étage, bâtiment, ruelle, rue boulevard, axe principal)).

FIGURE 1.1 – Représentation du robot véhicule (à gauche), du robot fantassin 1 (au centre) et du robot fantassin 2 (à droite)

Safran Electronics & Défense en partenariat avec plusieurs PME a donc développé et dronisé ces robots. Le système FURIOUS s'inscrit dans une logique d'amélioration des capacités des combattants lors de ses différentes missions. Afin d'assister la section d'infanterie à atteindre ces missions, les robots du système FURIOUS doivent proposer des fonctions robotiques en navigation, perception et localisation. Pour les fonctions de navigation, on peut citer par exemple :

- télécommander : permet au soldat d'avoir le contrôle sur la mobilité du robot,
- ralliement autonome d'objectif : fonction qui permet au robot de rallier un point préalablement spécifié par le soldat,
- suivi point de passage en extérieur : fonction qui permet au robot de se déplacer en suivant une trajectoire constituée de points d'intérêt géoréférencés,
- rejeu de trajectoire : fonction qui permet au robot de se déplacer de manière autonome en suivant une trajectoire préalablement enregistrée,
- suivi de leader : fonction qui permet au robot de se déplacer de manière autonome tout en restant principalement derrière le leader désigné (fantassin ou véhicule ami leader) et dans un intervalle de distance donné par rapport au leader,
- exploration autonome en intérieur : fonction qui permet au robot de parcourir un niveau (rez-de-chaussée ou étage) dans un bâtiment inconnu de manière systématique afin d'en faire sa cartographie, en 2D ou 3D, et selon des critères d'optimisation paramétrables (taux de couverture, discrétion,...),

pour les fonctions de perception :

- perception pour l'opérateur : Fonction qui permet au soldat d'avoir un retour visuel sur l'environnement,
- détection de personnes et de véhicules : Fonction qui permet d'alerter le fantassin sur la présence d'une personne (homme, femme, enfant) ou d'un véhicule se trouvant dans le champ d'observation du robot,

pour les fonctions de localisation :

- localisation et cartographie simultanée 2D : Fonction qui permet de reconstituer une représentation 2D de l'environnement dans lequel le robot évolue, interprétable par un opérateur humain. Cette fonction fournit également une localisation relative du robot dans cette carte 2D en temps réel.
- Localisation et cartographie simultanée 3D : Fonction qui permet de reconstituer une représentation 3D de l'environnement dans lequel le robot évolue, interprétable par un opérateur humain. Cette fonction fournit également une localisation relative du robot dans cette carte 3D en temps réel.
- Géolocalisation : Fonction qui permet au robot de connaitre et fournir sa position dans un référentiel absolu géoréférencé.

et pour les fonctions de contraintes sur la mobilité :

- gestion des obstacles (franchissement à vitesse adaptée, évitement, arrêt) : s'il y a un obstacle se trouvant sur sa trajectoire, le robot tente d'abord d'adapter sa vitesse pour franchir l'obstacle. Si le franchissement est impossible, il essaie d'éviter l'obstacle tout en progressant vers son but. Si l'évitement est impossible, le robot doit s'arrêter avant d'entrer en collision avec l'obstacle
- confinement aux voies carrossables : Fonction qui contraint le robot à rester sur des voies carrossables de type route et chemin.

Le robot véhicule conserve le principe d'un véhicule classiquement piloté et dispose de capacités d'autonomie partielles ou totales faisant de lui un robot. C'est un véhicule à 4 roues, homologué dans la catégorie quadricycle lourd, immatriculé pour rouler sur routes ouvertes, équipé pour sa propulsion de deux moteurs électriques, un par essieu, et géré par des variateurs indépendants. Le châssis du robot est réalisé par la société Technical Studio.

FIGURE 1.2 – eRider

Il s'agit d'un véhicule 4 roues motrices représenté figure 1.2 pesant 1200 kg et dont les dimensions sont :

- longueur : 384 cm,
- largeur : 170 cm,
- hauteur : 141 cm (volant), 198 cm (arceau),
- empattement : 368 cm,
- voie : 157 cm.

La plateforme dispose de quatre pneus tout-terrain de 74 cm de diamètre. Les trains avant et arrière sont chacun munis d'une direction assistée motorisée. Sa dimension et sa masse lui permettent de transporter une charge utile de l'ordre de 500kg/600kg au maximum. Il est capable de se déplacer sur une route asphaltée plate sèche à une vitesse maximale de 70 $km/h$. Il est capable de faire demi-tour en moins de 60 secondes entre deux murs distants de 8 mètres et le rayon de braquage est de 3,70 m.

Les robots terrestres apportent une permanence d'observation mais sont soumis aux caprices du terrain. La capacité de franchissement et l'autonomie de navigation sont deux problèmes à traiter simultanément et ceux-ci constituent un challenge important.

Pour tester les différents modules algorithmiques développés par la Safran Electronics & Defense, la société a fait appel à la société 4D Virtualize. Celle-ci propose des outils et services aux acteurs économiques et industriels afin de faciliter le développement de projets innovants dans le domaine de la robotique (drones roulants et volants) et dans le domaine du véhicule instrumenté. 4D Virtualize intervient dans trois domaines d'activité : l'étude et la validation de robot et de véhicule instrumenté, la validation des comportements des robots avec interaction directe entre les systèmes virtuels et les systèmes réels et la simulation 3D temps réel. La société met en oeuvre ses compétences en termes de :

- virtualisation 3D des environnements réels,
- modélisation des plateformes et des charges utiles,
- modélisation du comportement des plateformes,
- modélisation et optimisation d'algorithmes,
- mise en place de simulations *hardware in the loop* (HIL).

La société 4D Virtualize fournit à Safran Electronics & Defense, une unité de simulation, appelée 4DV-Sim, pour le prototypage virtuel de systèmes robotiques et véhicules instrumentés. Elle permet la simulation temps-réel, d'un ou plusieurs systèmes intelligents dans un environnement virtuel en 3D proche de leur mode de fonctionnement réel. La plate-forme de simulation se présente sous la forme d'un système matériel, dont l'architecture modulaire Plug & Play permet une connexion directe et une compatibilité totale avec toutes les unités de traitement et logiciels connectés. Le niveau de réalisme et les différentes fonctionnalités de 4DV-Sim permettent de tester et de valider tous types d'applications robotiques avec du contrôle-commande, de l'automatique, du traitement du signal, de l'informatique embarquée etc. Il permet à la fois la génération d'informations capteurs et la prise en compte de commandes en respectant la cohérence globale des données et ainsi vérifier l'architecture globale de la solution.

Le simulateur propose un modèle dynamique de véhicule et intègre un modèle de Pacejka pour la modélisation des pneumatiques. Le véhicule simulé dans la plateforme a les mêmes dimensions que le véhicule réel, deux essieux directeurs et un moteur de propulsion par essieu. Il simule un protocole de communication identique à celui du système réel. Dans le cas du robot véhicule, le protocole de communication est un protocole CAN. Il permet aussi de simuler l'environnement ainsi que les capteurs. Un des atouts de 4DV-Sim est de fournir une bibliothèque de modèles de capteurs du commerce intégrant les protocoles propriétaires. Par exemple, un logiciel d'acquisition de données d'un capteur lidar Velodyne par exemple peut fonctionner indifféremment s'il est connecté à un capteur réel ou s'il est connecté au modèle du capteur du simulateur. L'interface physique (câble Ethernet type RJ45) ainsi que le protocole de communication (trames TCP/IP format propriétaire) sont absolument identiques. Cependant, certains capteurs comme la centrale inertielle Safran Sigma 30N ne peuvent pas être modélisés finement dans le simulateur 4DV-Sim car les données nécessaires ne sont pas accessibles (dans le cas de la Sigma 30N du fait que c'est un matériel militaire). Pour ces capteurs, il existe dans le simulateur des capteurs génériques paramétrables qui permettent de s'approcher au mieux des résultats des capteurs retenus pour le système final. Un logiciel dit "passerelle" est ensuite mis en place par Safran entre le simulateur 4DV-Sim et le système Furious afin d'avoir en entrée du système un protocole identique.

Le simulateur 4DV-Sim est donc connecté à une baie contenant une réplique des calculateurs et logiciels portés sur les robots réels et a pour objectifs :

- d'aider au développement et à l'intégration des différentes fonctions du système FURIOUS. Les algorithmes sont stimulés par des données simulées basées sur des modèles représentatifs des interactions physiques, à savoir des modèles mécaniques, électromagnétiques, etc.
- de permettre une première phase de validation de ces fonctions en simulation
- de corriger d'éventuelles erreurs de conception avant mise en oeuvre du système réel

- d'envisager les utilisations possibles du système FURIOUS d'un point de vue plus opérationnel

FIGURE 1.3 – Illustration du simulateur 4DV-Sim

## 1.6 Approche proposée et contributions scientifiques

### Objectifs et cadre de travail

Le travail conduit dans cette thèse, a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre le Centre de Robotique de l'Ecole des Mines de Paris et Safran Electronics & Defense. Cette thèse CIFRE a été financée par la société Safran Electronics & Defense avec le soutien de l'ANRT (Association Nationale de la Recherche Technique). Ce travail s'inscrit dans le contexte du projet FURIOUS présenté précédemment.

On s'intéresse dans cette thèse à la mobilité autonome sur des **terrains difficiles d'accès, non structurés** [1], tels que les terrains d'opérations militaires. L'objet de cette thèse est l'étude de robots mobiles à roues à **deux trains directeurs**, évoluant à haute vitesse en milieu tout-terrain en tenant compte de la dynamique et des glissements de chacune des roues. L'objectif premier de ce travail de thèse est de concevoir une architecture de commande permettant une amélioration des performances en termes de suivi de trajectoire lorsque le véhicule se déplace **à grande vitesse**. Cette notion de grande vitesse dépend de la nature du terrain traversé et du véhicule lui-même. On pourra donc considérer que le véhicule se déplace à grande vitesse dès lors que les effets dynamiques sont tels qu'ils engendrent des comportements comme du glissement ou du dérapage impactant ainsi le suivi de la trajectoire.

### Plan du manuscrit

Suite à ce premier chapitre introductif, ce mémoire s'articule ensuite autour de 3 autres chapitres dont les contributions sont détaillées ci-dessous.

Le **deuxième chapitre** est consacré, d'une part à la modélisation de la dynamique du véhicule et d'autre part à la modélisation du comportement du pneumatique. On détaillera les modélisations véhicules de la plus simple, prenant en compte seulement la cinématique, à la plus complexe dont la dynamique intègrera 14 degrés de liberté. L'approche choisie étant une commande basée sur un modèle du contact au sol, une étude approfondie de la modélisation de l'interaction entre le véhicule et le sol est nécessaire. Il s'en suivra donc une étude bibliographique, non exhaustive, présentant la complexité de l'interaction entre le pneumatique et

1. Environnement non structuré : terminologie consacrée habituellement pour dire que l'on ne connaît pas la géométrie de l'environnement dans lequel évolue le robot.

la chaussée. Le chapitre se termine par une discussion sur les choix de modélisations adoptés.

L'algorithme de commande doit permettre d'assurer le suivi sur une trajectoire consigne quelque soit le type de surface sur lequel le véhicule est susceptible d'évoluer, c'est-à-dire indépendamment des conditions du terrain (par exemple asphalte sec, sol mouillé, etc.). Dans un tel contexte d'évolution, il est nécessaire que le contrôleur prenne en compte les informations concernant la nature du sol et des efforts latéraux que le pneumatique peut fournir. Le **troisième chapitre** présente donc un algorithme permettant d'estimer le coefficient de friction latérale maximale et le coefficient de rigidité de dérive du pneumatique. Ces paramètres fournissent d'importantes informations sur les conditions du sol. Ils permettent d'estimer les efforts à l'interface de contact pneumatique chaussée dont la connaissance permet d'améliorer la stabilité du véhicule. On adresse dans un premier temps une partie bibliographique, puis une partie de développement explicitant l'approche mise en place puis une partie évaluation avec des résultats de simulation.

Le **quatrième et dernier chapitre** traite de la commande et présente quelques notions de base liées au domaine du contrôle en général puis quelques structures de contrôle classique développées pour les véhicules à deux trains directeurs comme l'approche par *backstepping*. Pour des raisons de simplicité les lois de contrôle pour véhicules autonomes utilisent principalement un modèle linéaire de pneumatiques. Cette modélisation n'est toutefois valide que pour de petits angles de dérive. Le contexte d'application considéré ici pouvant entraîner des angles de dérive important, l'approche proposée ici va chercher à considérer un modèle plus complexe que le simple modèle linéaire. La loi de commande par backstepping sera donc déclinée en une version prenant en compte les efforts pneumatiques. On présentera donc dans cette partie les développements liés à ce nouvel algorithme de commande. Le chapitre se terminera par des résultats de simulation qui valident l'approche élaborée dans différentes situations.

# Chapitre 2

# Modélisation du véhicule

Pour approfondir la connaissance du véhicule roulant que l'on souhaite commander, l'étape de modélisation est fondamentale. On cherche à établir les équations différentielles caractérisant l'évolution temporelle des différentes variables prépondérantes de la dynamique du véhicule. En d'autres termes, la connaissance d'un modèle mathématique (composé d'un ensemble d'équations de mouvements représentant les phénomènes physiques) est nécessaire pour l'analyse de la dynamique des véhicules et la conception de lois de contrôle. Un système peut être représenté avec différents niveaux de précision, de complexité et le choix dépend des objectifs à atteindre. La difficulté dans ce choix réside dans la capacité à déterminer un modèle suffisamment représentatif de la dynamique (dans l'environnement souhaité) mais suffisamment simple pour être utilisé lors de l'établissement de la commande. En effet, suivant le niveau de simplifications choisi pour la modélisation, la loi de contrôle est plus ou moins difficile à concevoir. Ainsi, l'utilisation d'un modèle simple permet d'élaborer plus facilement la commande mais a pour conséquence de négliger certains phénomènes physiques.

En *milieu tout-terrain*, les conditions d'adhérence rencontrées au niveau des roues sont plus faibles et engendrent des phénomènes dynamiques qui deviennent non négligeables. L'impact est d'autant plus important lorsqu'on évolue à *grande vitesse*. Disposer d'un modèle prenant en compte les phénomènes spécifiques dus à l'évolution en milieu naturel devient donc primordial. Ceci permettra d'appréhender plus finement le comportement du véhicule afin d'établir des lois de contrôle adaptées aux situations considérées.

La stratégie mise en place est de développer deux modèles :

- un modèle simplifié, aussi appelé *modèle de synthèse*, permettant d'élaborer la commande,
- un modèle de connaissance, aussi appelé *modèle de validation*, permettant de simuler de manière plus précise le comportement du véhicule et ainsi de tester la loi de contrôle dans des conditions plus réalistes.

Il existe dans la littérature deux principaux types de modèles de véhicules :

- les *modèles bicyclettes* (pouvant être cinématiques ou dynamiques),
- les *modèles de type 4 roues*.

Un *modèle cinématique* est basé sur des considérations géométriques alors qu'un *modèle dynamique* est basé sur les principes fondamentaux de la dynamique et prend en considération la masse, l'inertie et l'interaction entre le véhicule et le sol par exemple.

Ce chapitre est dédié à la construction des différents modèles cinématique et dynamique d'un véhicule suivant le nombre de *degrés de liberté* (DDL) considéré. On commencera par étudier des modèles de véhicule simples comme le modèle cinématique bicyclette ou dynamique bicyclette à 3 DDL prenant en compte la dynamique latérale et longitudinale du véhicule pour ensuite parvenir à des modèles de plus en plus complexes prenant en compte les mouvements verticaux, latéraux, longitudinaux ainsi que les mouvements de roulis, tangage

et lacet (Fig. 2.7). Pour cela, nous nous baserons sur le principe fondamental de la dynamique et sur les outils développés dans la théorie de la mécanique du solide [Brémont and Réocreux, 1995], [Agati et al., 2003]. Dans ce chapitre nous utilisons les résultats classiques de la dynamique appliqués au véhicule et on retrouvera le formalisme utilisé dans [Pommier, 2005].

## 2.1 Modélisation générale d'un robot

On considère un robot mobile (voir Figure 2.1) localisé sur un plan 2D dans lequel est défini un système de coordonnées cartésien global attaché au *repère inertiel* $\mathscr{R}_i = (O, \vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$. On considère également un système de coordonnées attaché à un repère $\mathscr{R}_c = (G, \vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c)$ fixé au *châssis* du robot, où l'axe $\vec{i}_c$ correspond à la direction avant du véhicule.

Habituellement, les coordonnées locales utilisées pour la description de systèmes mécaniques sont appelées *coordonées généralisées* et notées $q_1, q_2, ..., q_n$ [Campion et al., 1991a]. Chaque *configuration* du système est représentée par le vecteur de coordonnées généralisées noté $q$ tel que :

$$q = (q_1, q_2, ..., q_n)^{\mathrm{T}}. \tag{2.1}$$

La configuration est ainsi définie sur un espace $\mathcal{Q}$ de dimension $n$, appelée *l'espace des configurations*. La position de chaque point matériel du système est une fonction des coordonnées généralisées.

On note $G$ le centre de gravité du robot tel que :

$$\overrightarrow{OG} \triangleq x\,\vec{i}_i + y\,\vec{j}_i + z\,\vec{k}_i \tag{2.2}$$

et $\psi$ l'orientation du véhicule telle que :

$$\psi \triangleq \widehat{\vec{i}_i, \vec{i}_c}.$$

Les coordonnées généralisées sont : $q = (x, y, z, \psi)$. La vitesse de $G$ par rapport au repère $\mathscr{R}_i$ exprimée dans le repère $\mathscr{R}_i$ se note :

$$\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = \dot{x}\,\vec{i}_i + \dot{y}\,\vec{j}_i + \dot{z}\,\vec{k}_i \tag{2.3}$$

et dans le repère $\mathscr{R}_c$ :

$$\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = V_x\,\vec{i}_c + V_x\,\vec{j}_c + V_z\,\vec{k}_c \tag{2.4}$$

avec $V_x$, $V_y$ et $V_z$ respectivement les *vitesses longitudinale, latérale et verticale* telles que :

$$\begin{cases} V_x = \dot{x}\,\cos\psi + \dot{y}\,\sin\psi, \\ V_y = -\dot{x}\,\sin\psi + \dot{y}\,\cos\psi, \\ V_z = \dot{z}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Dans le cas plan, $z = 0$ et $V_z = 0$, on appelle *posture* du robot :

$$q \triangleq (x, y, \psi)^T, \tag{2.6}$$

les coordonnées généralisées qui représentent la position et l'orientation du système par rapport au repère global $\mathscr{R}_i$. La position du robot est donc complètement déterminée à partir de ces trois variables. On appelle *vecteur d'état* le vecteur $X$ tel que :

$$X \triangleq (x, y, \psi, V_x, V_y, \dot{\psi}) \tag{2.7}$$

qui représente la dynamique du système.

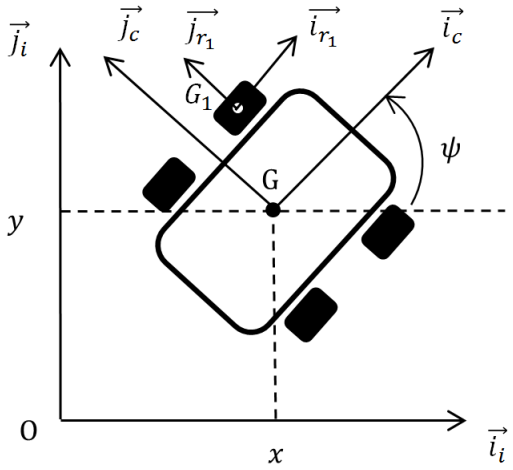



FIGURE 2.1 – Repérage d'un robot mobile

## 2.2 Roulement sans glissements et contraintes non holonomes

### 2.2.1 Roulement sans glissements

Le déplacement à l'aide de roues utilise le frottement engendré par le contact entre la roue et le sol. Ainsi, le mouvement des roues relativement au sol dépend fortement de la nature de l'interaction (régularité, matériaux en contact). Dans de bonnes conditions, le contact entre la roue et le sol satisfait la condition de *roulement sans glissement*, ce qui signifie que la vitesse relative de la roue par rapport au sol au point de contact est nulle. En principe, pour que cette condition soit applicable, il faut satisfaire les hypothèses suivantes :

- le contact entre la roue et le sol est ponctuel,
- les roues sont indéformables, de même rayon.

On introduit un repère intermédiaire $\mathscr{R}_{r_1} = (G_{r_1}, \vec{i}_{r_1}, \vec{j}_{r_1}, \vec{k}_{r_1})$ avec $\vec{k}_{r_1}$ vertical et $\vec{i}_{r_1}$ dans la direction du mouvement. Ce repère est attaché au *porte-moyeu* de la roue 1 et tourne avec la direction de la roue (voir figure 2.2 et 2.3). Le passage entre le repère $\mathscr{R}_i$ et ce repère intermédiaire $\mathscr{R}_{r_1}$ se fait autour de l'axe de direction $\vec{k}_i = \vec{k}_{r_1}$ par la rotation d'angle $\delta$, correspondant *au braquage* de la direction de la roue. Enfin, le passage de $\mathscr{R}_{r_1}$ à un repère $\mathscr{R}_{p_1} = (G_1, \vec{i}_{p_1}, \vec{j}_{p_1}, \vec{k}_{p_1})$ lié au pneumatique se fait par une dernière rotation d'angle $\Phi$, induit par le couple moteur, autour de l'axe $\vec{j}_{r_1}$. On suppose dans la suite que les points $G_{r_1}$ et $G_1$ sont confondus.

On note $r$ le *rayon libre* de la $i^{\text{ème}}$ roue. Le rayon libre correspond au rayon d'un pneu qui n'est pas déformé. Considérons une roue de rayon $r$ (voir Figure 2.4) se déplaçant sur le plan horizontal $(O, \vec{i}_i, \vec{j}_i)$. On suppose que l'axe de la roue est toujours horizontal. Soit $G_1$ le centre de la roue, $Q_1$ le point de contact de la roue avec le sol tel que $\overrightarrow{G_1Q_1} = -r\,\vec{k}_{r_1}$. En posant,

$$\omega \triangleq \dot{\Phi} \tag{2.8}$$

le vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_p/\mathscr{R}_i)$ de la roue s'écrit alors :

$$\vec{\Omega}(\mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) = \dot{\delta}\,\vec{k}_{r_1} - \omega\,\vec{j}_{r_1}.$$

La vitesse d'entraînement $\vec{V}(Q_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i)$ s'écrit :

$$\vec{V}(Q_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(G_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{G_1Q_1}. \tag{2.9}$$

D'après la condition de roulement sans glissement, $\vec{V}(Q_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i)$ au point de contact est nulle. Il vient la relation vectorielle entre la vitesse $\vec{V}(G_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i)$ du centre $G_1$ de la roue et le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i)$ suivante :

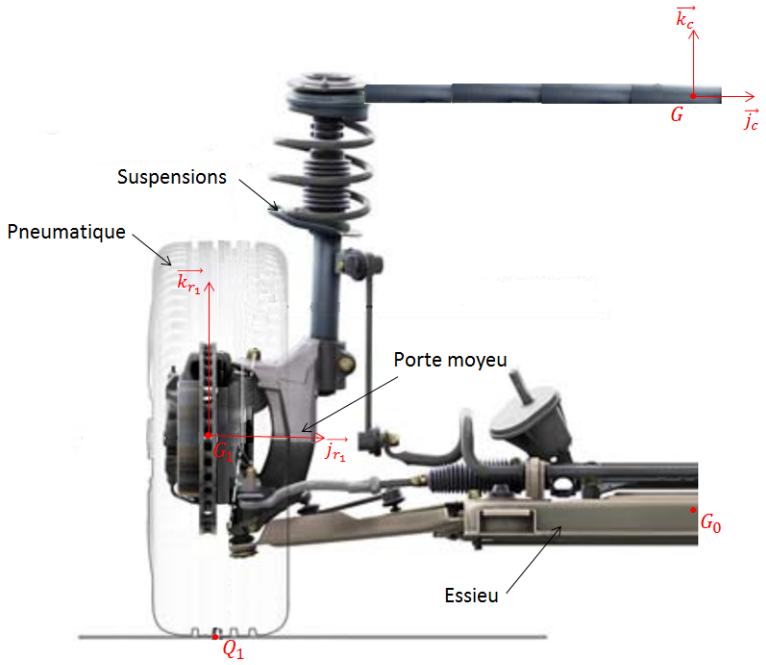



FIGURE 2.2 – Eléments constitutifs d'un train de véhicule

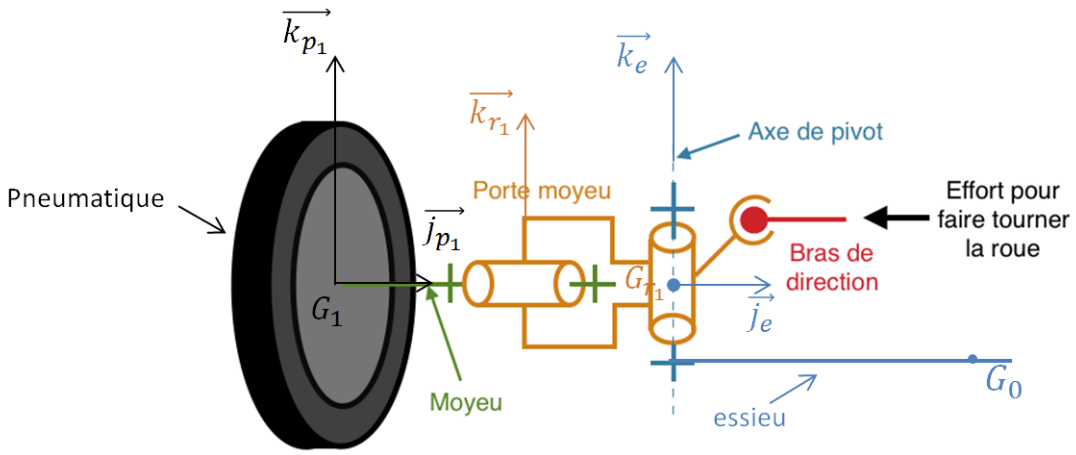



FIGURE 2.3 – Liaisons cinématiques d'un train

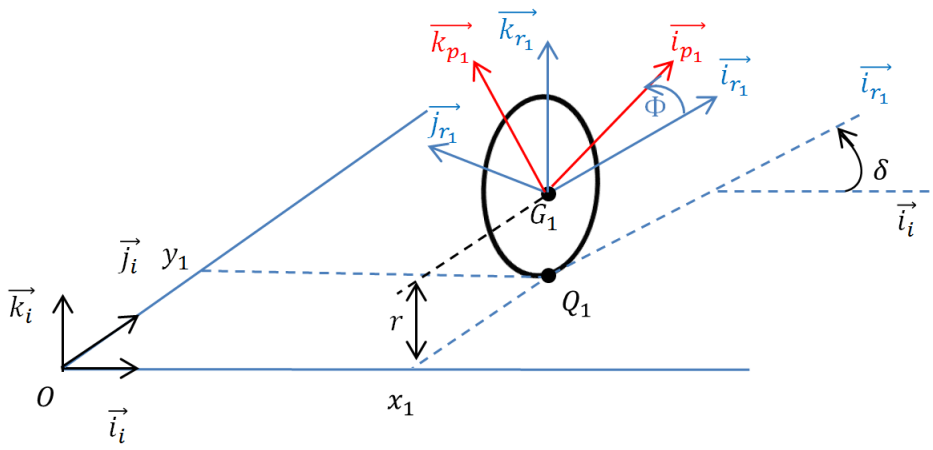



FIGURE 2.4 – Caractérisation du roulement sans glissement

$$\vec{V}(Q_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(G_1 \in \mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{G_1Q_1} = \vec{0}. \tag{2.10}$$

Soit

$$\begin{aligned} \vec{V}(G_1/\mathscr{R}_i) &= \overrightarrow{G_1Q_1} \wedge \vec{\Omega}(\mathscr{R}_{p_1}/\mathscr{R}_i) \\ &= -r\,\vec{k}_{r_1} \wedge (\dot{\delta}\,\vec{k}_{r_1} - \omega\,\vec{j}_{r_1}) \\ &= -r\,\omega\,\vec{i_{r_1}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

L'équation (2.11) met en évidence que le vecteur vitesse est dans le plan de la roue et a pour module $r\,\omega$. La contrainte cinématique correspondant à un roulement sans glissement des pneus sur le sol se traduit par le fait que la vitesse de la roue est suivant son axe longitudinal $\vec{i}_{r_1}$ et certaines évolutions sont donc interdites.

*Remarque* 2.2.1. En général, on distingue aussi deux autres notions : le *rayon sous charge* $r_l$ et le *rayon effectif* $r_e$. Le rayon sous charge $r_l$ est la distance du centre de la zone de contact du pneu avec le sol au centre de la roue (voir Figure 2.26). Le rayon effectif $r_e$ est le rapport entre la vitesse linéaire au centre de la roue et sa vitesse angulaire, soit :

$$r_e = \frac{||\vec{G}_i/\mathscr{R}_i||}{\omega}.$$

Le lecteur trouvera plus de détails concernant ces notions dans [Rajamani, 2014] et [Bludel and Harty, 2015]. On prendra comme valeur numérique $r$ au lieu de $r_l$ dans les simulations.

### 2.2.2 Contraintes non-holonomes

Une *contrainte* sur un système mécanique restreint son mouvement en limitant l'ensemble des chemins qu'il peut suivre.

**Définition 2.2.1.** [Murray et al., 1994] Soit un système dans l'espace des configurations $\mathcal{Q}$ soumis à des contraintes indépendantes sur les vitesses sous la forme $A^{\mathrm{T}}(q)\,\dot{q} = 0$, avec $q$ le vecteur de coordonnées généralisées (voir équation (2.1)) de dimension $n$ et $A(q) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ représentant un ensemble de $m$ contraintes de vitesses. Une contrainte de cette forme est appelée *contrainte Pfaffienne*.

**Définition 2.2.2.** [Murray et al., 1994] Une contrainte Pfaffienne est dite *intégrable* s'il existe une fonction vectorielle $h : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^m$ telle que $A^{\mathrm{T}}(q)\,\dot{q} = 0 \Leftrightarrow \nabla h\,\dot{q} = 0$ avec $\nabla h \triangleq \dfrac{\partial h}{\partial q}$. Une contrainte Pfaffienne non intégrable est un exemple de *contraintes non-holonomes*.

Les équations (2.13) découlant de l'hypothèse de roulement sans glissement sont des contraintes non-holonomes. Plus de détails pourront être trouvés dans [De Luca et al., 1998].

**Définition 2.2.3.** Le champ de vecteur [X,Y] est appelé *crochet de Lie* des champs de vecteurs $X$ et $Y$. Pour deux vecteurs $X(q), Y(q)$, les composantes du crochet de Lie sont données par : $[X(q), Y(q)] = \nabla Y X - \nabla X Y$.

Déterminer si une contrainte est intégrable ou non n'étant pas évident, on fait appel au théorème de Frobenius et aux crochets de Lie dont on trouvera les détails dans [Campion et al., 1991b] ou [Nijmeijer and van der Schaft, 1990]. Le paragraphe suivant est issu du cours de [Bayle, 2015] de robotique mobile.

**Théorème 2.2.1.** *Soit un système de configuration $q$, de dimension $n$, soumis à un ensemble de $m$ contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme $A^{\mathrm{T}}(q)\,\dot{q} = 0$, avec $A(q) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Soit $B(q) = (b_1(q), b_2(q)....b_m(q))$ une matrice de rang plein $m$, orthogonale à $A(q)$ sur tout l'espace des configurations $\mathcal{Q}$, i.e $A^T(q)\,B(q) = 0$. Soit enfin l'algèbre de Lie de dimension $p$, avec $m \leq p \leq n$, engendrée par l'ensemble des colonnes de $B(q)$, auxquelles s'ajoutent les crochets de Lie successifs formés à partir de ces colonnes, à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre. Alors, parmi les contraintes auxquelles est soumis le système, $n-p$ sont intégrables.*

Prenons l'exemple de la roue figure (2.4) avec la configuration $q = (x_1\ y_1\ \delta\ \Phi)^T$ avec $\omega = \dot{\Phi}$. Dans le repère $\mathscr{R}_i$, les coordonnées des points sont : $G_1 = (x_1\ y_1\ r)^{\mathrm{T}}$ et $Q = (x_1\ y_1\ 0)^{\mathrm{T}}$. Il vient :

$$\dot{x}_1\,\vec{i_i} + \dot{y}_1\,\vec{j_i} + (\dot{\delta}\,\vec{k_i} - \omega\,(\sin\delta\,\vec{i_i} - \cos\delta\,\vec{j_i})) \wedge (-r\,\vec{k_i}) = \vec{0}.$$

Soit en regroupant terme à terme :

$$(\dot{x}_1 - r\,\omega\,\cos\delta)\,\vec{i_i} + (\dot{y}_1 - r\,\omega\,\sin\delta)\,\vec{j_i} = \vec{0}. \tag{2.12}$$

Ce qui nous donne dans $\mathscr{R}_i$ le système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - r\,\omega\,\cos\delta = 0, \\ \dot{y}_1 - r\,\omega\,\sin\delta = 0. \end{cases}$$

La transformation permettant de passer du repère $\mathscr{R}_i$ au repère $\mathscr{R}_{r_1}$ étant la suivante :

$$\begin{aligned} \vec{i_i} &= \cos\delta\,\vec{i_{r_1}} - \sin\delta\,\vec{j_{r_1}}, \\ \vec{j_i} &= \sin\delta\,\vec{i_{r_1}} + \cos\delta\,\vec{j_{r_1}}, \end{aligned}$$

ces contraintes peuvent aussi être réécrites dans $\mathscr{R}_{r_1}$ et les projections respectivement suivant $\vec{i_{r_1}}$ et $\vec{j_{r_1}}$ donnent :

$$\begin{cases} \dot{y}_1\,\sin\delta + \dot{x}_1\,\cos\delta = r\,\omega, \\ -\dot{x}_1\,\sin\delta + \dot{y}_1\,\cos\delta = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Le système 2.13, peut s'écrire sous la forme $A^T(q)\,\dot{q} = 0$ avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} -\sin\delta & \cos\delta & 0 & 0 \\ \cos\delta & \sin\delta & 0 & r \end{pmatrix}.$$

On en déduit $B(q)$ tel que $A^T(q)B(q) = 0$ :

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 \\ \sin\delta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-1}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule les crochets de Lie successifs à partir des colonnes $b_1(q)$ et $b_2(q)$ de la matrice $B(q) = (b_1; b_2)$ :

$$\begin{aligned} [b_1(q), b_2(q)] &= (\sin\delta \ \ -\cos\delta \ 0 \ 0)^T, \\ [b_1(q), [b_1(q), b_2(q)]] &= 0, \\ [b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]] &= (\cos\delta \ \ \sin\delta \ 0 \ 0)^T. \end{aligned} \tag{2.14}$$

On constate que $b_1(q)$, $b_2(q)$, $[b_1(q), b_2(q)]$ et $[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]]$ engendrent une algèbre de Lie de dimension 4, égale à celle de $q$. On peut donc en conclure qu'il n'existe pas de contraintes intégrables. Les contraintes 2.13 sont donc des contraintes non-holonomes.

Les contraintes non-holonomes n'interdisent pas certaines configurations $q$ de l'espace des configurations $\mathcal{Q}$, mais certaines variations infinitésimales d'une configuration (espace des vitesses) en fonction de celle-ci. Autrement dit, la dérivée de l'état d'un système non-holonome ne peut pas évoluer instantanément dans toutes les directions de son espace du fait de contraintes non-intégrables (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas toutes exprimables seulement en fonction du temps et de leur configuration $q$). Ceci signifie qu'il existe des contraintes cinématiques ne pouvant être éliminées par une réduction de l'état du système.

Pour le cas de la cinématique à un train directeur par exemple, on peut compter deux contraintes non-holonomes. Une contrainte d'égalité qui interdit les déplacements en crabe dans des conditions de roulement sans glissement, et une contrainte d'inégalité qui exprime l'impossibilité qu'a une voiture à tourner sur elle-même à cause de l'angle de braquage maximum $\delta_{max}$ inférieur à $\pi/2$. Un exemple illustrant l'existence de ces contraintes dans une situation courante, est la nécessité d'effectuer un créneau pour se garer entre deux voitures puisqu'un déplacement latéral par rapport au cap de son véhicule n'est pas possible.

## 2.3 Epure de Jeantaud

Dans le *système de direction* à "épure de Jeanteaud", les angles de braquage des roues sont couplés par un mécanisme à barres articulées (voir Figure 2.5). Lors d'un virage, les roues intérieure et extérieure sont braquées d'un angle différent afin de satisfaire l'hypothèse de roulement sans glissement. Ainsi les normales aux plans des roues sont concourantes en un point $C$, le centre instantané de rotation. En s'appuyant sur la figure 2.6 on obtient les relations suivantes pour les angles de braquage moyens avant $\delta_f$ et arrière $\delta_r$ :

$$\begin{cases} \tan\delta_f = \dfrac{D}{R}, \\ \tan\delta_r = \dfrac{D-l}{R}. \end{cases} \tag{2.15}$$

De plus, on peut relier la distance entre le centre de l'essieu et le centre instantané de rotation avec les angles de braquage moyens avant et arrière :

$$\frac{1}{R} = \frac{\tan\delta_f - \tan\delta_r}{l}.$$

A partir de manipulations géométriques, l'expression des angles de braquage de chacune des roues, respectivement, avant droite, avant gauche, arrière droite et arrière gauche est la

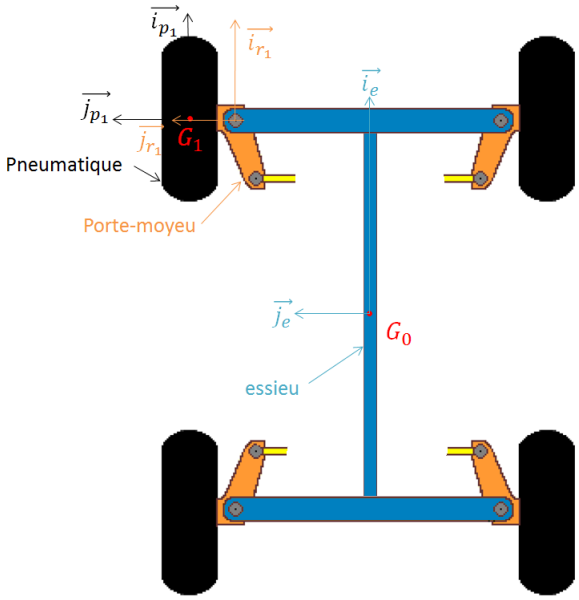



FIGURE 2.5 – Véhicule à deux trains directeurs

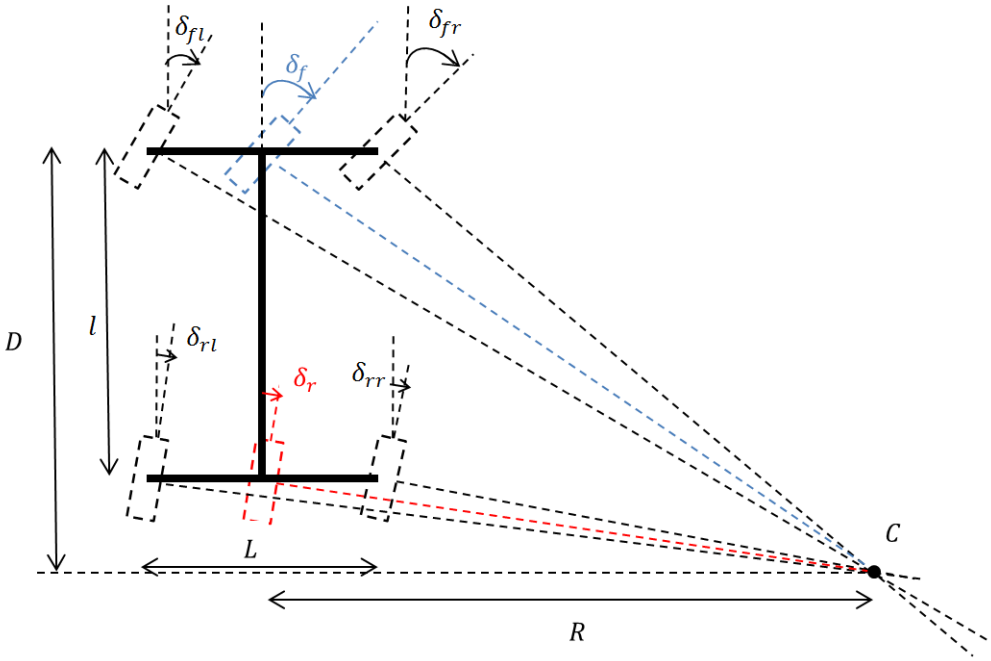



FIGURE 2.6 – Paramétrage du système

suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tan\delta_{fr}} = \dfrac{1 - \frac{L\,(\tan\delta_f - \tan\delta_r)}{2\,l}}{\tan\delta_f}, \\ \dfrac{1}{\tan\delta_{fl}} = \dfrac{1 + \frac{L\,(\tan\delta_f - \tan\delta_r)}{2\,l}}{\tan\delta_f}, \\ \dfrac{1}{\tan\delta_{rr}} = \dfrac{1 - \frac{L\,(\tan\delta_f - \tan\delta_r)}{2\,l}}{\tan\delta_r}, \\ \dfrac{1}{\tan\delta_{rl}} = \dfrac{1 + \frac{L\,(\tan\delta_f - \tan\delta_r)}{2\,l}}{\tan\delta_r}. \end{cases} \tag{2.16}$$

## 2.4 Repérage des différents solides

Dans la suite, nous utiliserons les notations de changement de base comme indiqué à l'annexe B.

Les différents solides considérés sont les suivants (voir Figure 2.7, Figure 2.2, Figure 2.3, Figure 2.8) :

- *la jante et le pneumatique* de la roue. Le pneumatique constitue la liaison entre le sol et la roue. Le point de contact au sol est noté $Q_i$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- *le porte-moyeu* de la roue, de centre $G_i$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, qui est relié à l'essieu,
- *l'essieu* avant $M_1$ et arrière $M_2$, qui permet d'orienter le plan de la roue,
- *le châssis* de centre de gravité $G$, qui représente la partie suspendue du véhicule, relié à l'essieu à travers les suspensions.

Les différents systèmes de coordonnées utilisés sont les suivants (voir Figure 2.7, Figure 2.2, Figure 2.3, Figure 2.8) :

- la *base* $[i]$ du repère inertiel $\mathscr{R}_i = \{O, [i]\}$ sera notée sous forme d'une *matrice ligne des vecteurs de la base*,
$$[i] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix},$$
et a pour origine le point $O$.
- la base $[c]$ du repère $\mathscr{R}_c = \{G, [c]\}$ attaché au châssis sera notée
$$[c] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_c & \vec{j}_c & \vec{k}_c \end{pmatrix},$$
avec $\vec{i}_c$ vers l'avant du véhicule, $\vec{j}_c$ vers la gauche, $\vec{k}_c$ la verticale et a pour origine $G$ le centre de gravité du véhicule, telle que $\overrightarrow{OG} = [i](x, y, z)^{[i]}$.
- la base $[e]$ du repère $\mathscr{R}_e = \{G_0, [e]\}$ attaché à l'essieu du véhicule sera notée
$$[e] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_e & \vec{j}_e & \vec{k}_e \end{pmatrix}.$$
On note $M_1$ le centre de l'essieu avant et $M_2$ le centre de l'essieu arrière. L'origine du repère, $G_0$, est la projection verticale de $G$ sur l'axe $(M_1M_2)$, telle que $\overrightarrow{OG_0} = [i](x, y, r)^{[i]^T}$. Les 4 roues sont supposées de même rayon $r$.
- la base $[r_i]$ du repère $\mathscr{R}_{r_i} = \{G_i, [r_i]\}$ attaché au porte-moyeu de la roue, sera notée
$$[r_i] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_{r_i} & \vec{j}_{r_i} & \vec{k}_{r_i} \end{pmatrix},$$

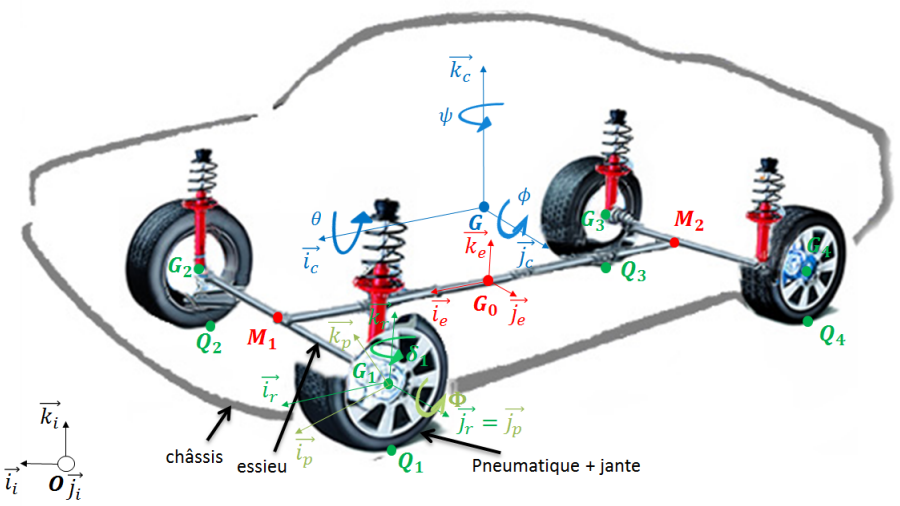



FIGURE 2.7 – Représentation des différents repères (vue de côté)

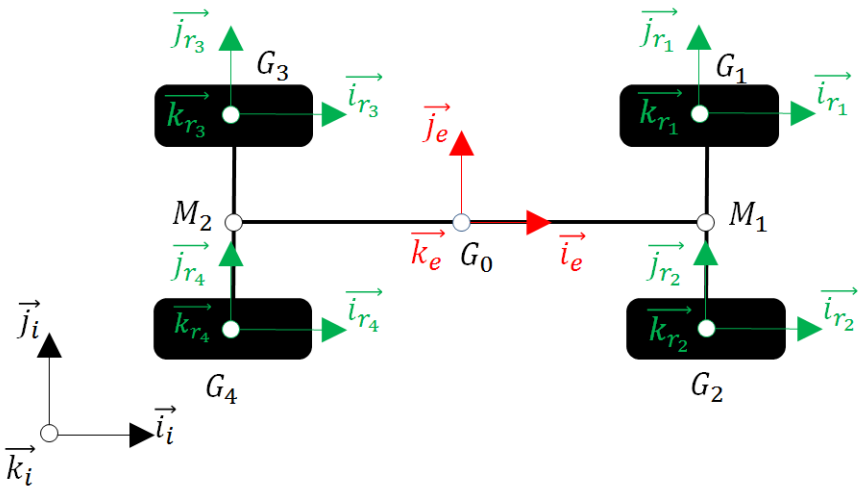


FIGURE 2.8 – Représentation des différents repères (vue de haut)

et a pour origine le point $G_i$, au niveau du porte-moyeu de la roue $i$ telle que (voir Figure 2.16) :

$$\overrightarrow{G_0G_1} = [e](l_f, L_1, 0)^{[e]^T}$$
$$\overrightarrow{G_0G_2} = [e](l_f, -L_2, 0)^{[e]^T}$$
$$\overrightarrow{G_0G_3} = [e](-l_r, L_1, 0)^{[e]^T}$$
$$\overrightarrow{G_0G_4} = [e](-l_r, -L_2, 0)^{[e]^T}$$

- la base $[p_i]$ du repère $\mathscr{R}_{p_i} = \{G_i, [p_i]\}$ associé à la jante et au pneumatique $i$ sera notée

$$[p_i] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_{p_i} & \vec{j}_{p_i} & \vec{k}_{p_i} \end{pmatrix},$$

et a pour origine le point $G_i$, au niveau du porte-moyeu de la roue $i$.

### Transformation entre le repère inertiel $\mathscr{R}_i$ et le repère du châssis $\mathscr{R}_c$

Le châssis du véhicule subit trois rotations par rapport au repère inertiel. Avec la représentation roulis-tangage-lacet [Craig, 2004], la matrice de rotation équivalente est obtenue

comme composition de trois rotations élémentaires $R_z(\psi)$, $R_y(\phi)$ et $R_x(\theta)$ (voir Figure 2.9) :

- la rotation de lacet autour de $\vec{k_i}$ : $[a] = [i]\, T^{[i]}_{[a]} = [i]\, R_z(\psi)$,
- la rotation de tangage autour de $\vec{j_a}$ : $[b] = [a]\, T^{[a]}_{[b]} = [a]\, R_y(\phi)$,
- la rotation de roulis autour de $\vec{i_b}$ : $[c] = [b]\, T^{[b]}_{[c]} = [b]\, R_x(\theta)$.

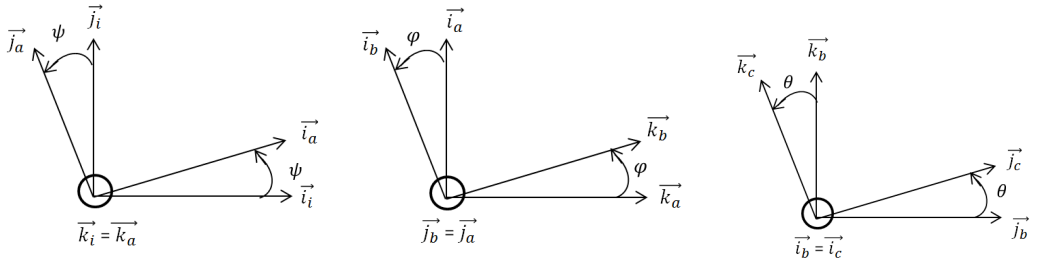
La matrice $R_z(\psi)$ permettant la transformation de la base $[a]$ vers la base $[i]$ due à la rotation autour de l'axe $\vec{k_i}$ d'angle $\psi$ s'écrit :

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, en s'appuyant sur la figure (2.9), les matrices de transformation pour les angles de roulis et de tangage s'écrivent :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}.$$




(a) rotation suivant $\vec{k_i} = \vec{k_a}$ - lacet (b) rotation suivant $\vec{j_a} = \vec{j_b}$ - tangage (c) rotation suivant $\vec{i_b} = \vec{i_c}$ - roulis

FIGURE 2.9 – Rotations du système de coordonnée du centre de gravité par rapport au repère inertiel

On a donc :

$$\begin{aligned} [c] &= [b]\, R_x(\theta) \\ &= [a]\, R_y(\phi)\, R_x(\theta) \\ &= [i]\, R_z(\psi)\, R_y(\phi)\, R_x(\theta) \\ &= [i]\, T^{[i]}_{[c]}. \end{aligned}$$

Soit :

$$T^{[i]}_{[c]} = R_z(\psi)\, R_y(\phi)\, R_x(\theta) \tag{2.17}$$

avec

$$\begin{aligned} T^{[i]}_{[c]} &= R_z(\psi) \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi\,\cos\psi & \cos\psi\,\sin\phi\,\sin\theta - \sin\psi\,\cos\theta & \cos\psi\,\sin\phi\,\cos\theta + \sin\psi\,\sin\theta \\ \sin\psi\,\cos\phi & \sin\psi\,\sin\phi\,\sin\theta + \cos\psi\,\cos\theta & \sin\psi\,\sin\phi\,\cos\theta - \cos\psi\,\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi\,\sin\theta & \cos\phi\,\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

$T^{[i]}_{[c]}$ est donc la matrice permettant de passer du repère véhicule au repère inertiel. Ainsi si $G^{[i]} = (x\ y\ z)^T$ alors $G^{[c]} = T^{[i]}_{[c]}\, G^{[i]}$ (cf définitions des notations annexe B).

### Transformation entre le repère du châssis $\mathscr{R}_c$ et le repère de l'essieu $\mathscr{R}_e$

On suppose que la route est plane. Le passage du repère inertiel au repère essieu se fait via un angle de cap suivant $\vec{k}_i$. Le repère châssis subit par rapport au repère essieu un angle de dévers $\theta_{relatif}$ et d'élévation $\phi_{relatif}$. Le lacet entre le repère essieu et le châssis est supposé bloqué. Dans ces conditions $\theta_{relatif} = \theta$ et $\phi_{relatif} = \phi$. Le repère $\mathscr{R}_c$ est donc obtenu après une rotation de roulis puis de tangage du repère $\mathscr{R}_e$.

On a donc :

$$\begin{aligned} T_{[c]}^{[e]} &= R_y(\phi) R_x(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

### Transformation entre le repère de l'essieu $\mathscr{R}_e$ et le repère des porte-moyeux $\mathscr{R}_{r_i}$

Les repères des porte-moyeux des roues $\mathscr{R}_{r_i}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ subissent une rotation d'angle $\delta_i$ qui correspond à l'angle de braquage induit par la direction des roues ainsi qu'une rotation d'angle $\gamma_i$ qui correspond à l'angle de carrossage des roues (voir Figure 2.20). La matrice de rotation équivalente est obtenue comme composition de deux rotations élémentaires (voir Figure 2.10) :

- la rotation d'angle $\delta_i$ autour de $\vec{k}_e$ : $[e_1] = [e]\, T_{[e_1]}^{[e]} = [e]\, R_z(\delta_i)$,
- la rotation d'angle $\gamma_i$ autour de $\vec{i}_{e_1}$ : $[r_i] = [e_1]\, T_{[r_i]}^{[e_1]} = [e_1]\, R_x(\gamma_i)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} [r_i] &= [e_1]\, R_x(\gamma) \\ &= [e]\, R_z(\delta)\, R_x(\gamma) \\ &= [e]\, T_{[r_i]}^{[e]}. \end{aligned}$$

Soit :

$$T_{[r_i]}^{[e]} = R_z(\delta_i) R_x(\gamma_i). \tag{2.20}$$

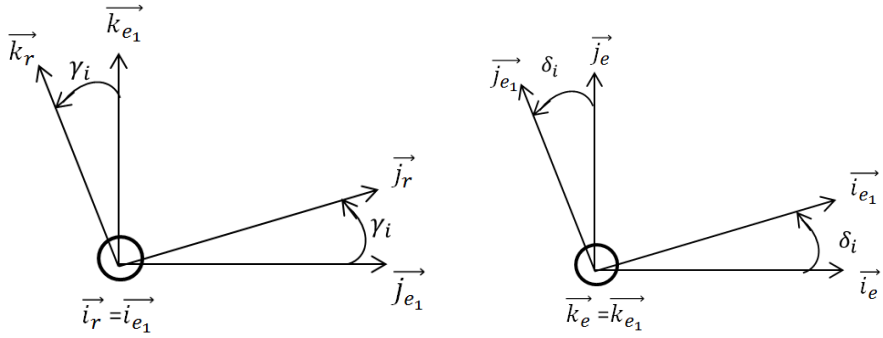
On a donc :

$$\begin{aligned} T_{[r_i]}^{[e]} &= R_z(\delta_i)\, R_x(\gamma_i) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\delta_i & -\sin\delta_i & 0 \\ \sin\delta_i & \cos\delta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_i & -\sin\gamma_i \\ 0 & \sin\gamma_i & \cos\gamma_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\delta_i & -\sin\delta_i\,\cos\gamma_i & \sin\delta_i\,\sin\gamma_i \\ \sin\delta_i & \cos\delta_i\,\cos\gamma_i & -\sin\gamma_i \\ 0 & \sin\gamma_i & \cos\gamma_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

### Transformation entre le système de coordonnées $\mathscr{R}_{r_i}$ et le système de coordonnées $\mathscr{R}_{p_i}$

Les repères roues $\mathscr{R}_{p_i}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ subissent une rotation d'angle $\Phi_i = \int \omega\, dt$ par rapport au repère $\mathscr{R}_{r_i}$ suivant $\vec{j}_{p_i} = \vec{j}_{r_i}$ avec $\omega$ la vitesse angulaire de la jante et du pneumatique de la roue par rapport à son porte-moyeu. On a donc :

$$T_{[p_i]}^{[r_i]} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_i & 0 & \sin\Phi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi_i & 0 & \cos\Phi_i \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$




(a) rotation suivant $\vec{k}_e$ (b) rotation suivant $\vec{i}_{e_1}$

FIGURE 2.10 – Rotations du système de coordonnée de l'essieu par rapport au repère porte-moyeu des roues

## 2.5 Modélisation cinématique

### 2.5.1 Modélisation cinématique bicyclette

Une première manière d'obtenir les équations de mouvement pour procéder à la commande des véhicules consiste à considérer uniquement les vecteurs vitesses en négligeant complètement la dynamique du véhicule. Les équations du mouvement sont établies à partir de l'hypothèse de roulement sans glissement des roues sur le sol (voir paragraphe 2.2), permettant de connaître l'orientation des vecteurs vitesses. Sous cette hypothèse, on considère que la vitesse de chaque roue est dans la direction de la roue. Cette modélisation repose sur une simplification du véhicule (Figure 2.7) sous la forme dite bicyclette. Dans ce modèle, les roues droite et gauche d'un même essieu sont regroupées en une unique roue (voir Figure 2.6 et Figure 2.11). Avec les notations de la figure 2.11 : $G_f$ et $G_r$ représentent respectivement le centre des roues virtuelles avant (front) et arrière (rear), $\delta_f$ et $\delta_r$ sont respectivement les angles de braquage avant et arrière, $l$ l'empattement, $\psi$ l'angle de lacet et $\dot{\psi}$ la vitesse de lacet. On définit le repère $\mathscr{R}_{r_i} = (\vec{i}_{r_i}, \vec{j}_{r_i}, \vec{k}_{r_i})$, avec $i \in (f, r)$, attaché au point de pivotement de direction de la roue $i$. On note $\vec{V}_r \triangleq \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i)$ le vecteur vitesse du centre de gravité de la roue arrière par rapport à $\mathscr{R}_i$, $\vec{V}_f \triangleq \vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i)$ le vecteur vitesse du centre de gravité de la roue avant par rapport à $\mathscr{R}_i$.

Ce modèle décrit l'évolution du mouvement plan du véhicule. Il est utilisé pour le contrôle latéral de véhicule et repose sur plusieurs hypothèses et restrictions :

- contraintes géométriques :
  - les effets de roulis ou de tangage sont négligeables : $\phi = \theta = 0$, c'est-à-dire $\mathscr{R}_c = \mathscr{R}_e$,
  - le sol est considéré comme localement plan,
  - symétrie du véhicule par rapport à l'axe longitudinal passant par le centre de l'essieu avant $M_1$ et arrière $M_2$,
- contraintes cinématiques :
  - roulement sans glissements des pneumatiques (équation (2.10) vérifiée) :

$$\begin{cases} \vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i) \triangleq V_f\, \vec{i}_{r_f} = -r\, \omega_f\, \vec{i}_{r_f}, \\ \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i) \triangleq V_r\, \vec{i}_{r_r} = -r\, \omega_r\, \vec{i}_{r_r}, \end{cases} \tag{2.23}$$

- pas d'effets dynamiques :
  - pas d'effets aérodynamiques,
  - pas de transfert de charge latéral suivant $\vec{j}_c$ et longitudinal suivant $\vec{i}_c$,

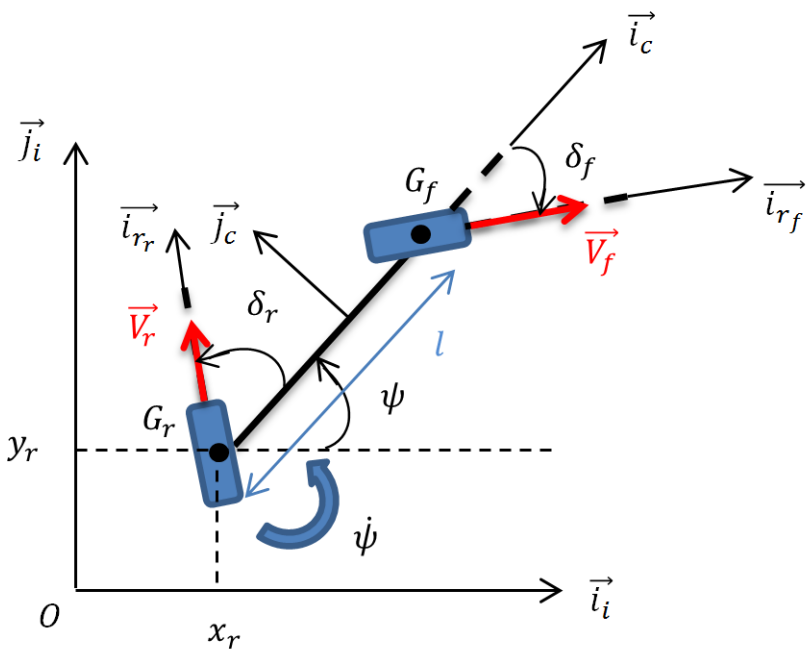



FIGURE 2.11 – Modèle cinématique de type "bicyclette"

– pas d'effets de souplesse de la suspension et du châssis,

L'hypothèse de roulement sans glissement (équation (2.4) projetée dans $[r_r]$ ou $[r_f]$) implique une relation directe entre la vitesse longitudinale du pneu et la vitesse de rotation des roues telle que $||\vec{V}_f|| = r\,\omega_f$ et $||\vec{V}_r|| = r\,\omega_r$ avec $r$ le rayon de la roue et $\omega_f$ et $\omega_r$ les vitesses de rotation de la roue avant et arrière autour de son porte-moyeu. Cette hypothèse n'est en réalité valable que pour des vitesses faibles et sur route adhérente (ex : asphalte). La formule de composition des vitesses donne :

$$\begin{aligned}
&\vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i) + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{G_f G_r} \\
&\Rightarrow \vec{V}_f = \vec{V}_r + \dot{\psi}\,\vec{k}_c \wedge l\,\vec{i}_c \\
&\Rightarrow V_f\,(\cos\delta_f\,\vec{i}_c + \sin\delta_f\,\vec{j}_c) = V_r\,(\cos\delta_r\,\vec{i}_c + \sin\delta_r\,\vec{j}_c) + \dot{\psi}\,l\,\vec{j}_c.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

En projetant sur $\vec{i}_c$ :

$$\begin{aligned}
V_f\,\cos\delta_f &= V_r\,\cos\delta_r \\
\Rightarrow V_f &= V_r \frac{\cos\delta_r}{\cos\delta_f}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

En projetant sur $\vec{j}_c$ :

$$\begin{aligned}
V_f\,\sin\,\delta_f &= V_r\,\sin\delta_r + l\,\dot{\psi} \\
\Rightarrow l\,\dot{\psi} &= V_f\,\sin\delta_f - V_r\,\sin\delta_r
\end{aligned}$$

avec (2.25), on obtient :

$$\dot{\psi} = \frac{V_r}{l}\cos\delta_r\,(\tan\delta_f - \tan\delta_r). \tag{2.26}$$

Enfin, en posant

$$\begin{aligned}
\dot{x}_r &\triangleq \vec{V}_r \cdot \vec{i}_i, \\
\dot{y}_r &\triangleq \vec{V}_r \cdot \vec{j}_i,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Le modèle cinématique de type "bicyclette", exprimé par rapport à la roue arrière, est décrit par le système d'équations suivant :

**Modélisation véhicule 1** (Cinématique bicyclette).

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \cos(\psi + \delta_r)\, V_r, \\ \dot{y}_r = \sin(\psi + \delta_r)\, V_r, \\ \dot{\psi} = \dfrac{V_r}{l}\ \cos\delta_r\,(\tan\delta_f - \tan\delta_r). \end{cases} \tag{2.28}$$

Les trois états de ce système sont $X \triangleq (x_r, y_r, \psi)^T$ et les trois commandes sont les angles de braquage $\delta_f$ et $\delta_r$ et le module de la vitesse $V_r$, tel que $U \triangleq (\delta_f, \delta_r, V_r)^T$. Ce modèle, de type non linéaire

$$\dot{X} = f(X, U)$$

est simple et ne nécessite la connaissance que de l'empattement. Cependant, il n'est valide que pour des variations lentes de courbure de trajectoire due à une vitesse faible de $V_r$. Malgré cette limitation, les modèles bicyclettes sont les modèles les plus utilisés pour la génération de trajectoire et l'élaboration des lois de commande pour le contrôle du véhicule [Rajamani, 2014]. Une illustration de l'utilisation de ce type de modèle se trouve dans [Thrun et al., 2006], où Stanley, le véhicule autonome qui avait remporté le DARPA Grand Challenge (2005) utilisa ce modèle pour la conception du contrôleur latéral.

### 2.5.2 Modélisation cinématique étendue

Dans le cas où le véhicule doit évoluer en milieu naturel, l'hypothèse de roulement sans glissement (équation (2.10)) n'est plus valide et les pneumatiques glissent sur le sol plus ou moins intensément en fonction de différents facteurs (accélération latérale, accélération longitudinale, charge, coefficient de frottement du sol, usure des pneus, températures,...). En effet, comme illustré Figure 2.12, la direction du vecteur vitesse $\vec{V}_f \triangleq \vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i)$ ou $\vec{V}_r \triangleq \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i)$ n'est en réalité pas suivant l'axe longitudinal du pneumatique $\vec{i}_{r_f}$ ou $\vec{i}_{r_r}$ mais décalée d'un angle $\beta_f$ ou $\beta_r$ que l'on appelle *angle de dérive*. Cette différence constitue l'angle de dérive et ce dernier est défini comme étant l'angle entre l'axe longitudinal du pneumatique et le vecteur vitesse, ie :

$$\begin{cases} \beta_f \triangleq \widehat{\vec{V}_f, \vec{i}_{r_f}}, \\ \beta_r \triangleq \widehat{\vec{V}_r, \vec{i}_{r_r}}. \end{cases} \tag{2.29}$$

et on a :

$$\begin{cases} \vec{V}_f = V_f\,(\cos\beta_f\,\vec{i}_{r_f} + \sin\beta_f\,\vec{j}_{r_f}), \\ \vec{V}_r = V_r\,(\cos\beta_r\,\vec{i}_{r_r} + \sin\beta_r\,\vec{j}_{r_r}). \end{cases} \tag{2.30}$$

Ces angles $\beta_f$ et $\beta_r$ sont engendrés d'une part par la déformation du pneu et d'autre part par le glissement du pneu sur le sol. C'est un paramètre clé dans la description de la composante latérale de la force d'interaction au point de contact entre le pneu et le sol. D'un point de vue dynamique, cette force permet la rotation du véhicule (voir paragraphe 2.7 pour plus de détails).

Pour prendre en compte ces angles de dérives, le modèle cinématique doit donc se baser sur la direction réelle des vecteurs vitesses et non pas sur la direction des pneumatiques. Ce nouveau modèle, appelé *modèle cinématique bicyclette étendu* [Lenain, 2005] est donc dérivé du modèle bicyclette en y ajoutant deux variables représentant les dérives.

En suivant la même démarche que pour la partie précédente, le modèle cinématique de type bicyclette étendu exprimé par rapport à la roue arrière est décrit par le système d'équations suivant :

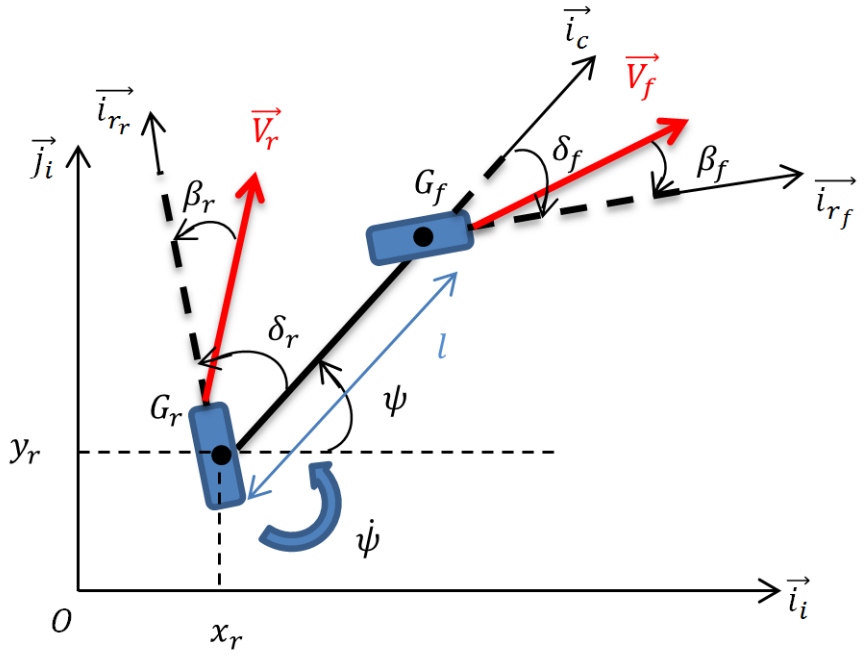



FIGURE 2.12 – Modèle cinématique de type "bicyclette" étendu

**Modélisation véhicule 2** (Cinématique bicyclette étendue)**.**

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \cos(\psi + \delta_r - \beta_r)\, V_r, \\ \dot{y}_r = \sin(\psi + \delta_r - \beta_r)\, V_r, \\ \dot{\psi} = \dfrac{V_r}{l} \cos(\delta_r - \beta_r)\,(\tan(\delta_f - \beta_f) - \tan(\delta_r - \beta_r)). \end{cases} \tag{2.31}$$

Les trois états de ce système sont $X = (x_r, y_r, \psi)^T$ et les trois commandes sont $U = (\delta_f, \delta_r, V_r)^T$ respectivement les angles de braquage et le module de la vitesse. Deux variables supplémentaires $\beta = (\beta_f, \beta_r)^T$ traduisant le glissement sont introduites. Ce système prend alors la forme non linéaire suivante :

$$\dot{X} = f(X, U, \beta).$$

Dans cette approche, une description complète de l'interaction pneu/sol n'est pas nécessaire, réduisant donc considérablement le nombre de paramètres à identifier et l'hypothèse de roulement sans glissement est préservée mais selon le nouvel axe du vecteur vitesse, ce qui permet de prendre en compte un modèle de pneu un peu plus fiable tout en gardant la simplicité du modèle cinématique de type bicyclette.

Toutefois, la nécessité de connaître les angles de dérives $\beta_f$ et $\beta_r$ ajoute une difficulté supplémentaire. Ces derniers dépendant de nombreux paramètres tels que la vitesse du véhicule, les pneumatiques, la courbure de la trajectoire ou encore les conditions d'adhérence, l'utilisation d'un modèle dépendant des mesures effectuées en temps réel est nécessaire. Si on dispose d'une *centrale inertielle* et des mesures des grandeurs $(V_x, V_y, \dot{\psi})$ (voir équation (2.5)) alors on peut estimer les angles de dérives grâce aux expressions (2.102) et (2.101) qui seront données dans la suite. Par contre, si ces mesures ne sont pas possibles, on peut estimer les angles de dérives via l'utilisation d'un observateur (voir [Lenain et al., 2010] par exemple).

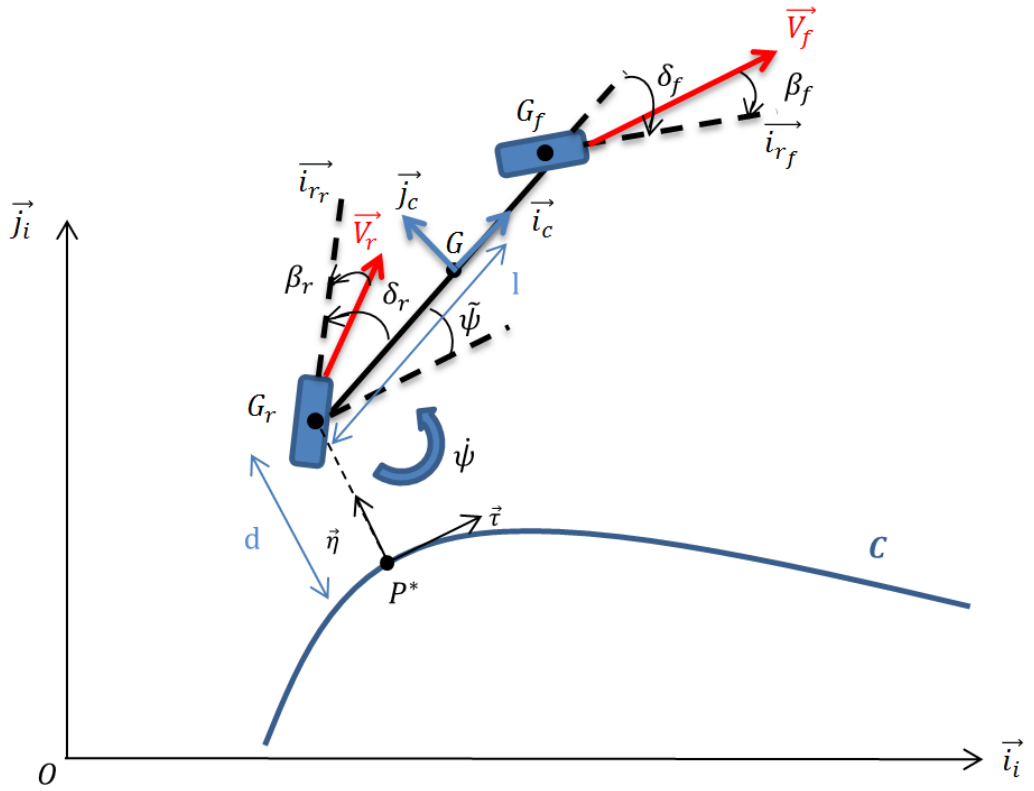



FIGURE 2.13 – Configuration du modèle bicyclette étendu avec deux trains directeurs par rapport à un chemin

### 2.5.3 Modélisation cinématique étendue par rapport à un chemin

Les modèles précédemment présentés expriment la configuration du véhicule par rapport à un repère absolu, mais il est également possible de l'exprimer par rapport à un chemin $\mathscr{C}$ (voir annexe D. On omettra dans la suite les symboles $\star$ présents dans l'annexe pour une meilleure lisibilité). L'état du véhicule peut être caractérisé dans un repère local de Frenet, relativement à la trajectoire de référence à suivre, par trois variables : l'abscisse curviligne $s$, l'écart latéral $d$ et l'écart angulaire $\tilde{\psi}$ comme illustré figure 2.13.

Les notations sont les suivantes :

- $\mathscr{C}$ est la trajectoire à suivre ou trajectoire de référence
- $G_r$ est le centre de l'essieu arrière
- $G_f$ est le centre de l'essieu avant
- $P^\star$ est le point appartenant à la trajectoire $\mathscr{C}$ le plus proche du point de contrôle $G_r$
- $s$ est l'abscisse curviligne de $P^\star$ le long de $\mathscr{C}$, et $\kappa(s)$ définit la courbure de $\mathscr{C}$ en ce point,
- $d$ et $\tilde{\psi} = \psi - \psi_\tau$ sont respectivement la distance algébrique de $P^\star$ à $G_r$ et l'écart angulaire du véhicule par rapport à la tangente à $\mathscr{C}$ en $P^\star$ (voir figure 2.13)
- $\delta_f$ et $\delta_r$ sont les angles de braquage des roues avant et arrière (moyenne des angles de braquage droit et gauche)
- $V_r$ est la vitesse longitudinale du véhicule (vitesse du point $G_r$)
- $l$ est l'empattement du véhicule (distance entre le centre de l'essieu avant et le centre de l'essieu arrière)

Le châssis étant rigide, le véhicule peut donc être entièrement caractérisé d'une part par la position $(s, d)$ du point $G_r$ par rapport à $\mathscr{C}$ et d'autre part par son orientation $\tilde{\psi}$ par rapport

à la tangente à $\mathscr{C}$ au point $P^\star$, $\vec{\tau}$. Le vecteur d'état à contrôler est donc $X = (s\ d\ \tilde{\psi})^{\mathrm{T}}$ et le vecteur de commande $U = (\delta_f\ \delta_r)^T$ se compose des angles de braquage avant $\delta_f$ et arrière $\delta_r$. La représentation d'état du véhicule s'écrit (voir démonstration annexe D.2) :

**Modélisation véhicule 3** (Cinématique bicyclette étendue Frenet)**.**

$$\begin{cases} \dot{s} &= \dfrac{V_r\ \cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)}{1 - \kappa(s)\, d}, \\ \dot{d} &= \sin(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\, V_r, \\ \dot{\tilde{\psi}} &= \dfrac{V_r}{l}\ \cos(\delta_r - \beta_r)\,(\tan(\delta_f - \beta_f) - \tan(\delta_r - \beta_r)) - \kappa(s)\dfrac{\cos(\tilde{\psi} - \beta_r + \delta_r)\, V_r}{(1 - \kappa(s)d)}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Le modèle (2.32) devient singulier lorsque $d = \frac{1}{\kappa(s)}$, c'est-à-dire lorsque le centre de courbure est superposé avec le point $G_r$. En pratique, cette situation n'est pas rencontrée car la courbure du chemin est toujours petite et le véhicule reste proche du chemin $\mathscr{C}$.

*Remarque* 2.5.1. La loi de contrôle actuellement implémentée pour contrôler le véhicule eRider se base sur cette modélisation cinématique bicyclette mais avec un seul train directeur et sans prendre en compte les angles de dérive, c'est-à-dire que $\delta_r = \beta_r = \beta_f = 0$. Le modèle est alors le suivant :

$$\begin{cases} \dot{s} &= \dfrac{V_r\ \cos\tilde{\psi}}{1 - \kappa(s)\, d}, \\ \dot{d} &= V_r\ \sin\tilde{\psi}, \\ \dot{\tilde{\psi}} &= V_r\left(\dfrac{\tan\delta_f}{l} - \dfrac{\kappa(s)\ \cos\tilde{\psi}}{(1 - \kappa(s)d)}\right). \end{cases} \tag{2.33}$$

## 2.6 Modélisation dynamique

### 2.6.1 Modélisation dynamique bicyclette à 3 DDL

Une modélisation dynamique revient à caractériser les mouvements du véhicule en prenant en compte l'accélération en plus de la vitesse ce qui permet d'obtenir une modélisation plus fine et plus proche de la réalité. Toutefois, augmenter la représentativité du modèle se fait au détriment du nombre de paramètres à considérer et de la complexité. Il faut donc être en mesure d'estimer ou de mesurer ces nouveaux paramètres (inerties, masse, position du centre de gravité, etc.) mis en jeu, qui parfois peuvent sembler complexe. L'établissement des équations des modèles dynamiques est basé sur deux principes : le premier concerne l'équilibre des forces extérieures agissant sur le véhicule et le deuxième concerne l'équilibre des moments dynamiques du véhicule par rapport aux moments extérieurs (voir partie B.6).

Le modèle le plus répandu en dynamique véhicule est le modèle bicyclette (cf Figure (2.14)), se déplaçant dans le plan $(O, \vec{i}_i, \vec{j}_i)$. Les dynamiques verticales $z = 0$ et $V_z = 0$ et de roulis $\theta = 0$ et tangage $\phi = 0$ sont négligées ce qui permet de regrouper les côtés gauche et droit du véhicule (voir Figure 2.6). Ce modèle à 3 degrés de liberté prend en compte la dynamique latérale $V_x$, longitudinale $V_y$ et de lacet $\dot{\psi}$.

On considère le système matériel $\Sigma_c \triangleq \{\textit{châssis de la bicyclette}\}$ attaché au repère $\mathscr{R}_c$ et modélisé par une barre $[G_r, G_f]$ de centre de gravité $G$, de masse $m$ et de moment d'inertie $I_z$ suivant l'axe vertical $\vec{k}_c$. En appliquant le théorème de la résultante dynamique (B.25) au système $\Sigma_c$, on a :

$$m\,\dot{\vec{V}}(G/\mathscr{R}_i) = \vec{\mathcal{R}}(\bar{\Sigma}_c \to \Sigma_c). \tag{2.34}$$

Les forces extérieures appliquées au système $\Sigma_c$ sont les efforts $\vec{F}_f$ sur le pneu avant et $\vec{F}_r$ sur le pneu arrière. Elles sont considérées identiques dans le repère $\mathscr{R}_c$ et le repère $\mathscr{R}_e$. Ces efforts peuvent être décomposés en efforts latéraux $F_{y_f}$ et $F_{y_r}$ suivant $\vec{j}_c$ et longitudinaux $F_{x_f}$ et $F_{x_r}$ suivant $\vec{i}_c$. En négligeant les forces aérodynamiques ainsi que le poids du véhicule en cas de dévers ou de pente, on a donc :

$$\vec{\mathcal{R}}(\bar{\Sigma}_c \to \Sigma_c) = \vec{F}_f + \vec{F}_r = (F_{x_f} + F_{x_r})\,\vec{i}_c + (F_{y_f} + F_{y_r})\,\vec{j}_c. \tag{2.35}$$

La formule de dérivation d'un vecteur $\vec{V}$ exprimé dans une base distincte de la base inertielle s'exprime comme suit ((B.3)) :

$$\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{V} = \frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\vec{V} + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \vec{V}. \tag{2.36}$$

En appliquant cette formule à la vitesse inertielle du point de gravité $G$ du véhicule exprimé dans le repère du châssis, $\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = V_x\,\vec{i}_c + V_y\,\vec{j}_c$ et en notant $\dot{\vec{V}}(G/\mathscr{R}_i) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{V}(G/\mathscr{R}_i)$ et avec $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) = \dot{\psi}\,\vec{k}_c$ on a :

$$\dot{V}(G/\mathscr{R}_i)^{[c]} = \begin{pmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^{[c]} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]} = \begin{pmatrix} \dot{V}_x - V_y\,\dot{\psi} \\ \dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}. \tag{2.37}$$

On note $a_x$ et $a_y$ les accélérations longitudinale et latérale au point $G$ telles que :

$$\begin{cases} a_x \triangleq \dot{V}_x - V_y\,\dot{\psi}, \\ a_y \triangleq \dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi}. \end{cases} \tag{2.38}$$

En projetant suivant $\vec{i}_c$ et $\vec{j}_c$, l'équation (2.34) devient :

$$\begin{cases} m\,(\dot{V}_x - V_y\,\dot{\psi}) = F_{x_f} + F_{x_r}, \\ m\,(\dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi}) = F_{y_f} + F_{y_r}. \end{cases} \tag{2.39}$$

En appliquant le théorème du moment dynamique (B.26) combiné à l'équation (B.27) :

$$\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}(\underline{\underline{J}}_G(\Sigma_c)\,\vec{\Omega}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i)) = \vec{\mathcal{M}}_G(\bar{\Sigma}_c \to \Sigma_c), \tag{2.40}$$

avec

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\bar{\Sigma}_c \to \Sigma_c) = \overrightarrow{GG_f} \wedge \vec{F}_f + \overrightarrow{GG_r} \wedge \vec{F}_r.$$

où

$$\vec{F}_f = [c] \cdot \begin{pmatrix} F_{x_f} \\ F_{y_f} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}, \quad \vec{F}_r = [c] \cdot \begin{pmatrix} F_{x_r} \\ F_{yr} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]},$$

$$\overrightarrow{GG_f} = [c] \cdot \begin{pmatrix} l_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}, \quad \overrightarrow{GG_r} = [c] \cdot \begin{pmatrix} -l_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}.$$

Soit en projetant suivant $\vec{k}_c$ :

$$I_z\ddot{\psi} = l_f\ F_{yf} - l_r\ F_{yr}.$$

Le modèle dynamique à 3 degrés de liberté est donc le suivant :

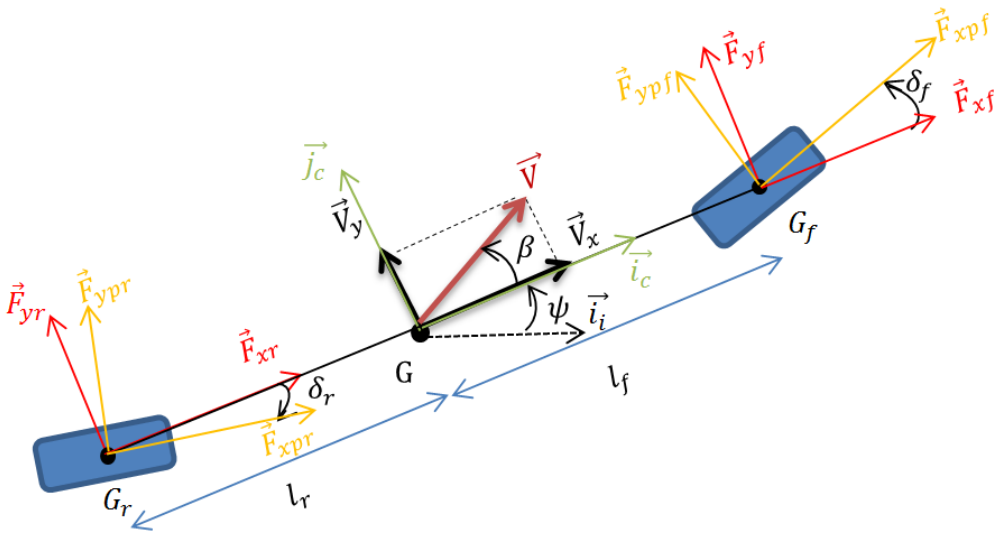



FIGURE 2.14 – Modèle bicyclette dynamique à 3DDL

**Modélisation véhicule 4** (Dynamique à 3 DDL)**.**

$$\begin{cases} m\,(\dot{V}_x - V_y\,\dot{\psi}) = F_{x_f} + F_{x_r}, \\ m\,(\dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi}) = F_{y_f} + F_{y_r}, \\ I_z\ddot{\psi} = l_f\,F_{y_f} - l_r\,F_{y_r}. \end{cases} \tag{2.41}$$

En supposant que la masse de la roue est nulle (négligeable par rapport à la masse du châssis), ces efforts peuvent être exprimés en fonction des efforts du sol sur les pneumatiques $F_{x_{p_f}}$, $F_{x_{p_r}}$, $F_{y_{p_f}}$ et $F_{y_{p_r}}$ exprimés dans le repère du porte-moyeu $\mathscr{R}_{r_i}$ comme suit :

$$\begin{cases} F_{x_f} = F_{x_{p_f}}\,\cos\delta_f - F_{y_{p_f}}\,\sin\delta_f, \\ F_{y_f} = F_{y_{p_f}}\,\cos\delta_f + F_{x_{p_f}}\,\sin\delta_f, \\ F_{x_r} = F_{x_{p_r}}\,\cos\delta_r - F_{y_{p_r}}\,\sin\delta_r, \\ F_{y_r} = F_{y_{p_r}}\,\cos\delta_r + F_{x_{p_r}}\,\sin\delta_r. \end{cases} \tag{2.42}$$

Les forces $F_{x_{p_f}}$, $F_{x_{p_r}}$, $F_{y_{p_f}}$ et $F_{y_{p_r}}$ seront explicitées au paragraphe 2.7. Les variables de contrôle sont les angles de braquage $\delta = (\delta_f, \delta_r)^T$ au niveau de la roue avant $\delta_f$ et de la roue arrière $\delta_r$, qui s'expriment à travers les efforts $F_{y_f}$ et $F_{y_r}$ dans le repère $\mathscr{R}_{r_i}$ (voir par exemple (2.102), (2.111) et (2.112) pour le lien entre ces grandeurs).

*Remarque* 2.6.1. La littérature utilise aussi le modèle à 2DDL où la vitesse longitudinale $V_x$ est supposée constante. Ce modèle considère seulement la dynamique transversale du véhicule et est généralement utilisé pour faire du contrôle latéral. Les équations se réduisent alors à :

*Modélisation véhicule* 5 (Dynamique à 2 DDL).

$$\begin{cases} m\,(\dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi}) = F_{y_f} + F_{y_r}, \\ I_z\,\ddot{\psi} = l_f\,F_{y_f} - l_r\,F_{y_r}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Il est représentatif du comportement du véhicule en virage à condition que l'accélération transversale du véhicule reste inférieure à $3m.s^{-2}$. Sa simplicité et sa linéarité ont fait de lui un modèle standard en contrôle commande.

### 2.6.2 Modélisation dynamique de type 4 roues à 7 DDL

Lorsque le véhicule est fortement sollicité, les modèles bicyclettes atteignent leurs limites et ne sont plus appropriés pour modéliser le comportement dynamique du véhicule. Les modèles de type 4 roues sont dès lors plus représentatifs mais également plus complexes comme nous allons le voir. On ne considère plus que le véhicule est assimilé à une bicyclette mais qu'il dispose bien de 4 roues et se déplaçant toujours dans le plan $(O, \vec{i}_i, \vec{j}_i)$ (voir figures 2.7 et 2.8). On néglige dans ce modèle les dynamiques verticales du véhicule. La structure du véhicule peut être décomposée en plusieurs parties :

- les 4 jantes et pneumatiques des roues : $\Sigma_{p_i}$ auxquels on associe un repère $\mathscr{R}_{p_i}$,
- les 4 porte-moyeux des roues : $\Sigma_{r_i}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ auxquelles on associe un repère $\mathscr{R}_{r_i}$,
- l'essieu du véhicule : $\Sigma_e$ auquel on associe un repère $\mathscr{R}_e$,
- le châssis du véhicule : $\Sigma_c$ auquel on associe un repère $\mathscr{R}_c$.

On reprend le modèle à 3 DDL avec ses deux équations de vitesse au centre de gravité et une équation de lacet (voir équations (2.41)) auquel il est nécessaire d'ajouter les équations de vitesse de rotation des 4 roues. Ce modèle est souvent utilisé pour l'amélioration de la sécurité du véhicule en situation de freinage d'urgence (système ABS).

La dynamique du châssis du véhicule $\Sigma_c$ ayant déjà été déterminée à l'équation (2.41), appliquons le théorème du moment dynamique, rappelé à l'équation (B.26), au centre d'inertie $G_i$ de chacune des roues du sous-système $\Sigma_{p_i}$. Les couples et efforts appliqués sur la $i$ème roue sont les suivants (cf figure 2.15) :

- couple moteur $C_{m_i}$ suivant $\vec{j}_{r_i}$ appliqué au point $G_i$,
- couple de freinage $C_{b_i}$ suivant $\vec{j}_{r_i}$ appliqué au point $G_i$,
- efforts longitudinaux et latéraux $F_{xp_i}$ et $F_{yp_i}$ dus au sol sur le pneumatique $i$ exprimés dans le repère $\mathscr{R}_{r_i}$ .

On a donc :

$$\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}(\underline{\underline{J}}_{G_i}(\Sigma_{p_i})\,\vec{\Omega}(\Sigma_{p_i}/\mathscr{R}_i)) = \vec{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\Sigma}_{p_i} \to \Sigma_p), \tag{2.44}$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\Sigma}_{p_i}) &= (C_{m_i} - C_{b_i})\,\vec{j}_{r_i} + \overrightarrow{G_iQ_i} \wedge \vec{F}_p, \\ &= [r_i]\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ C_{m_i} - C_{b_i} \\ 0 \end{pmatrix}^{[r_i]} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_l \end{pmatrix}^{[r_i]} \wedge \begin{pmatrix} F_{xp_i} \\ F_{yp_i} \\ 0 \end{pmatrix}^{[r_i]}\right\}.\end{aligned}$$

En projetant suivant $\vec{j}_{r_i}$ lié au $i$ème repère $\mathscr{R}_{r_i}$, la dynamique de rotation de la $i$ème roue s'exprime comme suit :

$$I_{r_i}\,\dot{\omega}_i = C_{m_i} - C_{b_i} - r_{l_i}\,F_{xp_i}, \tag{2.45}$$

avec $I_{r_i}$ l'inertie de la roue $i$, $\dot{\omega}_i$ l'accélération angulaire de la roue $i$ et $r_{l_i}$ le rayon sous charge de la roue $i$ (voir 2.2 pour la définition).

Le modèle à 7 DDL s'écrit donc :

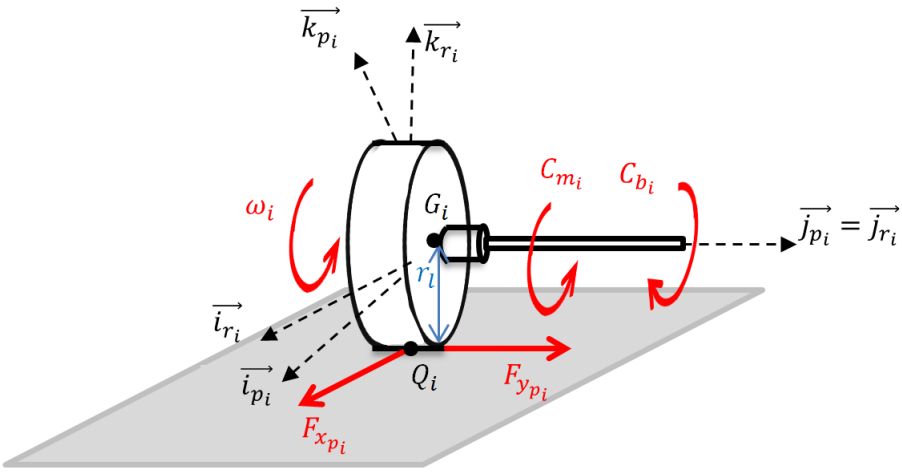



FIGURE 2.15 – Forces et moments appliqués à la roue

**Modélisation véhicule 6** (Dynamique à 7 DDL)**.**

$$\begin{cases} m\,(\dot{V}_x - V_y\,\dot{\psi}) = \sum_{i=1}^{4} F_{x_i}, \\ m\,(\dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi}) = \sum_{i=1}^{4} F_{y_i}, \\ I_z\,\ddot{\psi} = l_f\,(F_{y_1} + F_{y_2}) - l_r\,(F_{y_3} + F_{y_4}), \\ I_{r_i}\,\dot{\omega}_i = T_{\omega_i} - r_l\,F_{xp_i}, \quad i = 1...4 \end{cases} \tag{2.46}$$

avec $\epsilon_i = (f, f, r, r)$ et

$$\begin{cases} F_{x_i} = F_{x_{p_i}}\,\cos\delta_{\epsilon_i} - F_{y_{p_i}}\,\sin\delta_{\epsilon_i}, \\ F_{y_i} = F_{y_{p_i}}\,\cos\delta_{\epsilon_i} + F_{x_{p_i}}\,\sin\delta_{\epsilon_i}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Pour le contrôle latéral, les variables de contrôle sont les angles de braquage avant $\delta_f$ et arrière $\delta_r$ via l'expression des forces latérales (voir par exemple (2.102) et (2.112) pour le lien entre ces grandeurs). Le mouvement longitudinal est, quant à lui, contrôlé par les couples moteurs/freinage $T_{\omega_i} = C_{m_i} - C_{b_i}$ via $F_{x_{p_i}}$ (voir par exemple (2.111) et (2.132).

### 2.6.3 Modélisation dynamique de type 4 roues à 10 DDL

**Description du modèle**

Il s'agit du modèle à 7 degrés de liberté auquel on ajoute la dynamique verticale du véhicule (voir figure 2.7), c'est-à-dire les vitesses et accélérations angulaire de roulis $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et de tangage $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ ainsi que la vitesse et accélération verticale $V_z$, $\dot{V}_z$ du centre de gravité $G$. On suppose que les roues sont rigides, c'est-à-dire que le rayon des roues est fixe dans le temps. Ce modèle comprend une masse suspendue $m_s$ représentant le châssis du véhicule et 4 solides non suspendus représentant les roues. Le châssis, associé au repère $\mathscr{R}_c$ possède 6 DDL (longitudinale $x$, latérale $y$, verticale $z$, roulis $\theta$, tangage $\phi$, lacet $\psi$) par rapport à $\mathscr{R}_i$ et chaque roue, associée à un repère $\mathscr{R}_{p_i}$ possède 1 DDL (rotation de la roue) par rapport à $\mathscr{R}_i$.

Pour l'étude de la dynamique verticale, on suppose que les pneus ont une masse négligeable comparée à celle du châssis du véhicule. En d'autres termes, le véhicule est modélisé avec juste une masse suspendue $m_s$ et les masses non suspendues sont considérées nulles $m_u = 0$. La roue est considérée alors comme ponctuelle et restant à tout instant en contact avec le sol,

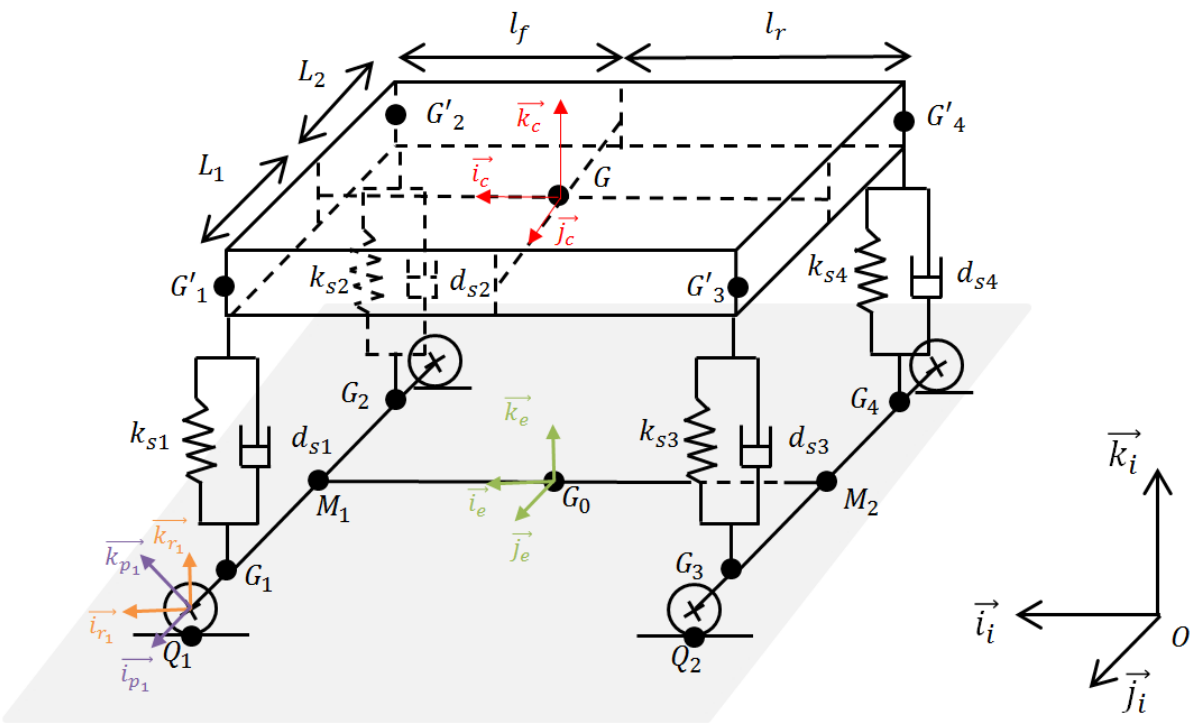



FIGURE 2.16 – Modélisation des suspensions 10 DDL

c'est-à-dire que $Q_i = G_i$ (voir Figure 2.16). Les suspensions sont modélisées à l'aide d'un ressort $k_{si}$ et d'un système d'amortissement $d_{si}$ comme indiqué Figure 2.16. On note $G'_i$ la projection du centre de la roue $G_i$ dans le plan attaché au châssis $(G, \vec{i_c}, \vec{j_c})$.

**Bilan des forces**

Les actions mécaniques appliquées à la masse suspendue $\Sigma_c$ sont :

- les efforts latéraux $F_{y_i}$ et longitudinaux $F_{x_i}$ dus aux pneus exprimés dans $\mathscr{R}_e$ et on suppose qu'ils sont identiques dans $\mathscr{R}_c$
- le poids du véhicule exprimé dans $\mathscr{R}_i$ suivant $\vec{k_i}$
- les forces aérodynamiques $\vec{F}_{aero}$ exprimées dans $\mathscr{R}_e$ telles que $\overrightarrow{F_{aero}} = F_{aero}\,\vec{i_e}$

  Elles sont données par :

$$F_{aero} = \frac{1}{2}\rho_a\, S\, C_x\, V_x^2 \tag{2.48}$$

  où $C_x$ est le coefficient de traînée aérodynamique, $S$ la surface frontale du véhicule, et $\rho_a$ la masse volumique de l'air.

- les efforts verticaux induits par la suspension $\vec{F}_{z_i}$ suivant $\overrightarrow{G_iG'_i}$.

  Le modèle quart de véhicule est utilisé pour chaque roue [Rajamani, 2014], [Kiencke and Nielsen, 2000]. Chaque roue $i$ est connectée via un ressort de raideur $k_{s_i}$ et un amortisseur de raideur $k_{v_i}$ au châssis. La suspension possède un degré de liberté et on suppose que la direction est perpendiculaire à la masse suspendue, c'est-à-dire $\vec{G_iG'_i} \simeq \vec{k_c}$ [Rajamani, 2014]. Elle est composée d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle. Les forces de suspensions $\vec{F}_{z_i}$ combinent la force de rappel du ressort $\vec{F}_{r_i}$ et la force d'amortissement vue comme une force visqueuse $\vec{F}_{v_i}$ qu'on considère linéaire :

$$\overrightarrow{F_{z_i}} = \overrightarrow{F_{r_i}} + \overrightarrow{F_{v_i}} \simeq F_{s_i}\vec{k_c}. \tag{2.49}$$

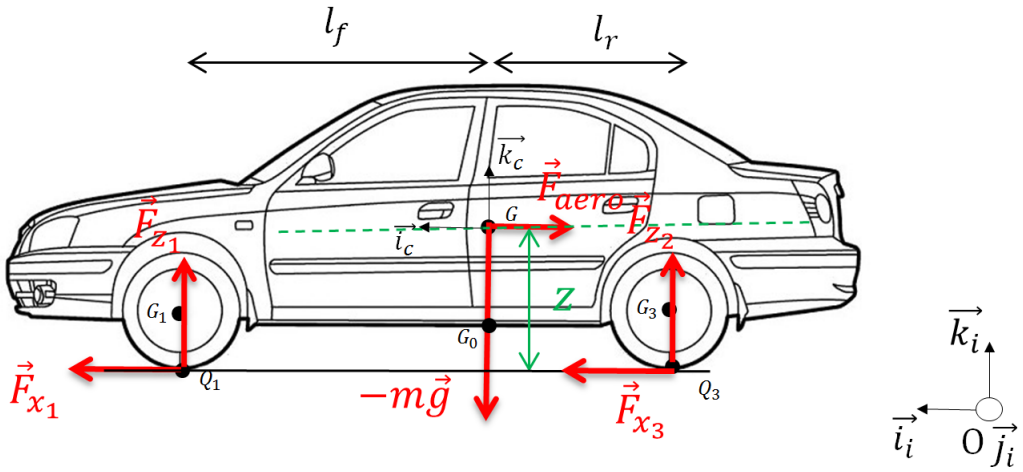



FIGURE 2.17 – Forces et moments appliqués au véhicule - vu de profil

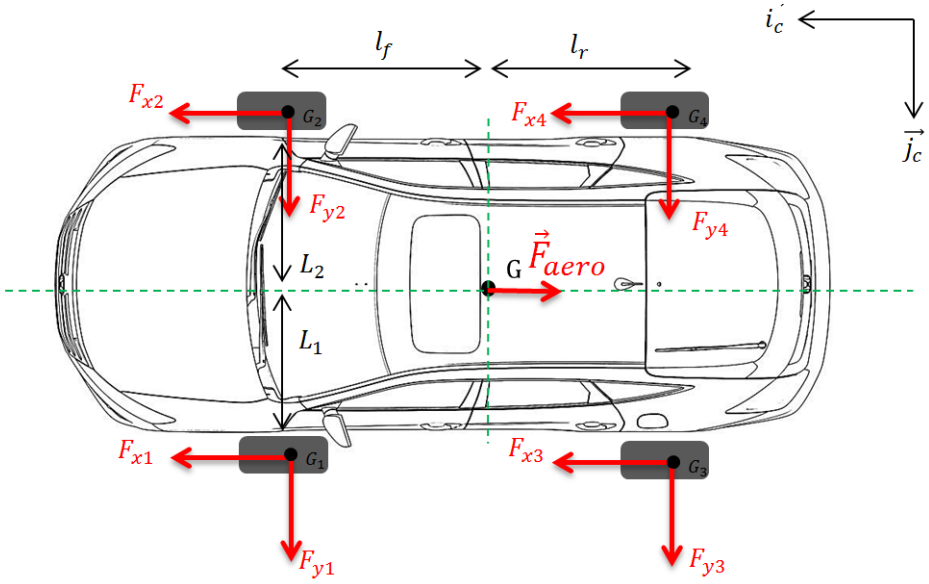



FIGURE 2.18 – Forces et moments appliqués au véhicule - vu de dessus

La force de rappel du ressort s'exprime comme :

$$\overrightarrow{F_{r_i}} = -k_{s_i}\,(l_i - l_0)\,\overrightarrow{k_c}, \tag{2.50}$$

avec $l_i$ la longueur du ressort, $l_0$ la longueur à vide du ressort et $k_{s_i}$ la raideur du ressort.

**Relations fondamentales appliquées au châssis**

En appliquant la formule (2.36) à $\dot{\vec{V}}(G/\mathscr{R}_i)$ projeté dans le repère $\mathscr{R}_c$, on obtient :

$$\dot{V}(G/\mathscr{R}_i)^{[c]} = \begin{pmatrix}\dot{V}_x\\ \dot{V}_y\\ \dot{V}_z\end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}^{[c]} \wedge \begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}^{[c]} = \begin{pmatrix}\dot{V}_x + \dot{\phi}\,V_z - \dot{\psi}\,V_y\\ \dot{V}_y + \dot{\psi}\,V_x - \dot{\theta}\,V_z\\ \dot{V}_z + \dot{\theta}\,V_y - \dot{\phi}\,V_x\end{pmatrix}^{[c]}. \tag{2.51}$$

Pour exprimer les forces aérodynamiques dans le repère $\mathscr{R}_c$, on applique la matrice de transformation $T_{[e]}^{[c]}$ et pour les forces gravitationnelles dans le repère $\mathscr{R}_c$, on applique la matrice de transformation $T_{[i]}^{[c]}$. Appliquons le théorème de la résultante dynamique (B.25) au système

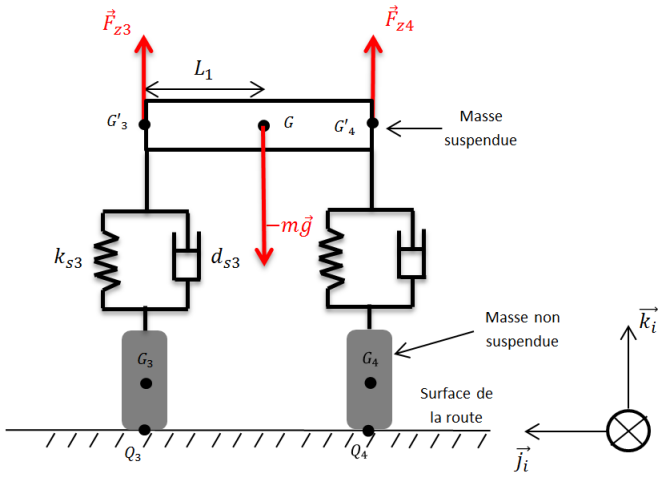



FIGURE 2.19 – Forces appliquées au véhicule - vu de derrière

$\Sigma_c$ et projetons suivant les 3 axes du repère $\mathscr{R}_c$ :
Suivant $\vec{i}_c$ :

$$m\,(\dot{V}_x + \dot{\phi}\,V_z - \dot{\psi}\,V_y) = \sum_{i=1}^{4} F_{x_i} - F_{aero}\,\cos\phi + m\,g\,\sin\phi.$$

Suivant $\vec{j}_c$ :

$$m\,(\dot{V}_y + \dot{\psi}\,V_x - \dot{\theta}\,V_z) = \sum_{i=1}^{4} F_{y_i} - F_{aero}\,\sin\phi\sin\theta - m\,g\,\cos\phi\,\sin\theta.$$

Suivant $\vec{k}_c$, le bilan des forces (voir Figure 2.19) donne :

$$m\,(\dot{V}_z + \dot{\theta}\,V_y - \dot{\phi}\,V_x) \quad = \sum_{i=1}^{4} F_{z_i} - F_{aero}\,\sin\phi\,\cos\theta - m_s\,g\,\cos\phi\,\cos\theta\ .$$

D'après (B.26) et (B.27)

$$\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{\sigma_G}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i) = \vec{\mathcal{M}}_G(\bar{\Sigma} \to \Sigma_c). \tag{2.52}$$

Or, d'après (2.36) la dérivée du moment cinétique de $\Sigma_c$ donne :

$$\begin{aligned}\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{\sigma_G}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i) &= \frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\vec{\sigma_G}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i) + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \vec{\sigma_G}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i) \\ &= \underline{\underline{J}}_G(\Sigma_c)\frac{d\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)}{dt} + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \vec{\sigma_G}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i).\end{aligned} \tag{2.53}$$

Or $\vec{\sigma_G}(\Sigma_c/\mathscr{R}_i) = \underline{\underline{J}}_G(\Sigma_c)\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) = \begin{pmatrix} I_x\,\dot{\theta} & I_y\,\dot{\phi} & I_z\,\dot{\psi}\end{pmatrix}^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_x\,\ddot{\theta} \\ I_y\,\ddot{\phi} \\ I_z\,\ddot{\psi}\end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} I_z\,\dot{\phi}\,\dot{\psi} - I_y\,\dot{\psi}\,\dot{\phi} \\ I_x\,\dot{\psi}\,\dot{\theta} - I_z\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} \\ I_y\,\dot{\theta}\,\dot{\phi} - I_x\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\end{pmatrix}^{[c]} = \mathcal{M}_G(\bar{\Sigma} \to \Sigma_c)^{[c]}. \tag{2.54}$$

Finalement, l'application du théorème du moment dynamique donne :

$$\mathcal{M}_G(\bar{\Sigma} \to \Sigma_c)^{[c]} = \sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{F}_{x_i}) + \sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{F}_{yi}) + \sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{GG_i'} \wedge \vec{F}_{z_i}) \tag{2.55}$$

On a donc dans $[c]$ :

$$\begin{pmatrix} I_x\,\ddot{\theta} \\ I_y\,\ddot{\phi} \\ I_z\,\ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_y - I_z)\,\dot{\phi}\,\dot{\psi} \\ (I_z - I_x)\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} \\ (I_x - I_y)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z\,F_{x_1} \\ -L_1\,F_{x_1} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z\,F_{x_2} \\ L_2\,F_{x2} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z\,F_{x_3} \\ -L_1\,F_{x_3} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z\,F_{x_4} \\ L_2\,F_{x_4} \end{pmatrix}^{[c]}$$
$$+ \begin{pmatrix} z\,F_{y_1} \\ 0 \\ l_f\,F_{y_1} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} z\,F_{y_2} \\ 0 \\ l_f\,F_{y_2} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} z\,F_{y_3} \\ 0 \\ -l_r\,F_{y_3} \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} z\,F_{y_4} \\ 0 \\ -l_r\,F_{y_4} \end{pmatrix}^{[c]}$$
$$+ \begin{pmatrix} L_1\,F_{z_1} \\ -l_f\,F_{z_1} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} -L_2\,F_{z_2} \\ -l_f\,F_{z_2} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} L_1\,F_{z_3} \\ l_r\,F_{z_3} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]} + \begin{pmatrix} -L_2\,F_{z_4} \\ l_r\,F_{z_4} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}, \tag{2.56}$$

avec $z$ la hauteur du centre de gravité, $L_1$ et $L_2$ les demi-voies, $l_f$ et $l_r$ les demi-empattements (voir Figure 2.17 et Figure 2.18).

En projetant suivant $\vec{i}_c$ :

$$I_x\,\ddot{\theta} = (I_y - I_z)\,\dot{\phi}\,\dot{\psi} + z\sum_{i=1}^{4} F_{y_i} + L_1\,(F_{z_1} + F_{z_3}) - L_2\,(F_{z_2} + F_{z_4}). \tag{2.57}$$

En projetant suivant $\vec{j}_c$ :

$$I_y\,\ddot{\phi} = (I_z - I_x)\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} - z\sum_{i=1}^{4} F_{x_i} - l_f\,(F_{z_1} + F_{z_2}) + l_r\,(F_{z_3} + F_{z_4}). \tag{2.58}$$

En projetant suivant $\vec{k}_c$ :

$$I_z\,\ddot{\psi} = (I_x - I_y)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} - L_1\,(F_{x_1} + F_{x_3}) + L_2\,(F_{x_2} + F_{x_4}) + l_f\,(F_{y_1} + F_{y_2}) - l_r\,(F_{y_3} + F_{y_4}). \tag{2.59}$$

La dynamique du centre de gravité $G$ s'exprime alors comme suit :

$$\begin{cases} m\,\dot{V}_x = -m\,\dot{\phi}\,V_z + m\,\dot{\psi}\,V_y + \sum\limits_{i=1}^{4} F_{x_i} - F_{aero}\,\cos\phi + m\,g\,\sin\phi, \\ m\,\dot{V}_y = -m\,\dot{\psi}\,V_x + m\,\dot{\theta}\,V_z + \sum\limits_{i=1}^{4} F_{yi} - F_{aero}\,\sin\phi\,\sin\theta - m\,g\,\cos\phi\,\sin\theta, \\ m\,\dot{V}_z = -m\,\dot{\theta}\,V_y + m\,\dot{\phi}\,V_x + \sum\limits_{i=1}^{4} F_{z_i} - F_{aero}\,\sin\phi\,\cos\theta - m_s\,g\,\cos\phi\,\cos\theta \\ I_x\,\ddot{\theta} = (I_y - I_z)\,\dot{\phi}\,\dot{\psi} + z\sum\limits_{i=1}^{4} F_{y_i} + L_1\,(F_{z_1} + F_{z_3}) - L_2\,(F_{z_2} + F_{z_4}), \\ I_y\,\ddot{\phi} = (I_z - I_x)\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} - z\sum\limits_{i=1}^{4} F_{x_i} - l_f\,(F_{z_1} + F_{z_2}) + l_r\,(F_{z_3} + F_{z_4}), \\ I_z\,\ddot{\psi} = (I_x - I_y)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} - L_1\,(F_{x_1} + F_{x_3}) + L_2\,(F_{x_2} + F_{x_4}) + l_f\,(F_{y_1} + F_{y_2}) - l_r\,(F_{y_3} + F_{y_4}). \end{cases} \tag{2.60}$$

**Relations fondamentales appliquées à chacune des roues**

La dynamique de rotation des roues s'exprime comme précédemment (voir équation (2.45)). Par contre, si on souhaite aussi prendre en compte le moment d'auto-alignement des roues (voir figure 2.20), alors (2.44) donne :

$$\mathcal{M}_{G_i}(\bar{\Sigma}_{r_i})^{[r_i]} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{m_i} - C_{b_i}) \\ 0 \end{pmatrix}^{[r_i]} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_l \end{pmatrix}^{[r_i]} \wedge \begin{pmatrix} F_{xp_i} \\ F_{yp_i} \\ 0 \end{pmatrix}^{[r_i]} + T_{[e]}^{[r_i]} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{z_i} \end{pmatrix}^{[e]}.$$

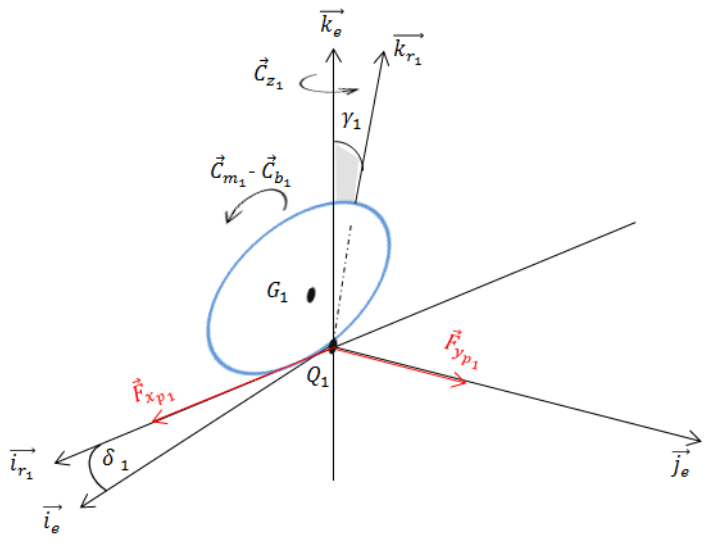



FIGURE 2.20 – Forces et moments appliqués à la roue

Suivant $\vec{j}_{r_i}$ la dynamique de rotation des roues s'exprime alors par :

$$I_{r_i}\,\dot{\omega}_i = C_{m_i} - C_{b_i} - r_l\,F_{xp_i} + \sin\gamma_i\,C_{z_i}, \qquad i = 1...4, \tag{2.61}$$

avec $\gamma_i$ l'angle de carrossage de la roue $i$ (voir la partie 2.4).

En posant $T_{\omega_i} = C_{m_i} - C_{b_i}$, on a :

$$I_{r_i}\,\dot{\omega}_i = T_{\omega_i} - r_l\,F_{xp_i} + \sin\gamma_i\,C_{z_i}, \qquad i = 1...4. \tag{2.62}$$

**Expression des forces de suspension**

Détaillons l'expression des efforts verticaux induits par la suspension.

Les irrégularités de la roue sont prises en compte à travers le terme $z_s$ représentant l'altitude du sol. On note $\Delta_{z_{G'_i}}$ la variation d'altitude du point $G'_i$ dont l'origine de la mesure est prise au niveau de la position d'équilibre du système (voir Figure 2.21). En effet, nous allons montrer qu'une telle hypothèse permet de simplifier l'écriture des forces de suspensions.

Reprenons les équations (2.60) régissant la dynamique du centre de gravité $G$ du châssis. On considère que le véhicule est en équilibre, les accélérations de roulis $\ddot{\theta}$ et de tangage $\ddot{\phi}$ ne sont donc pas considérées ($\ddot{\theta} \approx 0$ et $\ddot{\phi} \approx 0$). On néglige également les forces aérodynamiques. La première équation donne :

$$m\,a_x = F_{x_f} + F_{x_r} \tag{2.63}$$

avec :

$$\begin{cases} F_{x_f} = F_{x_1} + F_{x_2}, \\ F_{x_r} = F_{x_3} + F_{x_4}. \end{cases} \tag{2.64}$$

La troisième équation donne :

$$F_{z_f} + F_{z_r} = m\,g \tag{2.65}$$

avec :

$$\begin{cases} F_{z_f} = F_{z_1} + F_{z_2}, \\ F_{z_r} = F_{z_3} + F_{z_4}. \end{cases} \tag{2.66}$$

La cinquième équation donne, avec $\ddot{\psi} = \dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ :

$$- z\,(F_{x_f} + F_{x_r}) - l_f\,F_{z_f} + l_r\,F_{z_r} = 0. \tag{2.67}$$

Soit :

$$\begin{cases} m\,a_x = F_{x_f} + F_{x_r}, \\ F_{z_r} = m\,g - F_{z_f}, \\ l_f\,F_{z_f} = \dfrac{l_r\,m\,g - z\,m\,a_x}{l}, \end{cases} \tag{2.68}$$

ce qui permet d'avoir les forces verticales avant $F_{z_f}$ et arrière $F_{z_r}$ :

$$\begin{cases} F_{z_f} = \dfrac{l_r\,m\,g - z\,m\,a_x}{l}, \\ F_{z_r} = \dfrac{l_f\,m\,g + z\,m\,a_x}{l}. \end{cases} \tag{2.69}$$

Pour calculer les forces verticales pneu par pneu, on considère que les essieux des trains avant et arrière sont découplés. On peut définir une masse virtuelle $m^*(t)$, dépendant du temps, résultant du mouvement longitudinal qui prend en compte le transfert de masse durant l'accélération :

$$m^*(t) = \frac{F_{zf}}{g} = m\left(\frac{l_r}{l} - \frac{z\,a_x}{g\,l}\right). \tag{2.70}$$

En ne considérant que le train avant, la quatrième équation de (2.60) donne :

$$z\,(F_{y_1} + F_{y_2}) = L_1\,F_{z_1} - L_2\,F_{z_2} \tag{2.71}$$

et la deuxième équation de (2.60), en posant $\theta = 0$ et $\phi = 0$ donne :

$$m^*(t)\,a_y \triangleq F_{y_1} + F_{y_2}. \tag{2.72}$$

On a donc :

$$m^*(t)\,z\,a_y = L_1\,F_{z_1} - L_2\,F_{z_2}. \tag{2.73}$$

Puis, en combinant avec (2.66), on obtient :

$$F_{z_1} = \frac{L_2}{L}\,m\left(\frac{l_r}{l}\,g - \frac{z}{l}\,a_x\right) - m\left(\frac{l_r}{l}\,g - \frac{z}{l}\,a_x\right)\frac{z}{L\,g}\,a_y. \tag{2.74}$$

De même pour les autres roues :

$$\begin{cases} F_{z_2} = \dfrac{L_1}{L}\,m\left(\dfrac{l_r}{l}\,g - \dfrac{z}{l}\,a_x\right) + m\left(\dfrac{l_r}{l}\,g - \dfrac{z}{l}\,a_x\right)\dfrac{z}{L\,g}\,a_y, \\ F_{z_3} = \dfrac{L_4}{L}\,m\left(\dfrac{l_f}{L}\,g + \dfrac{z}{l}\,a_x\right) - m\left(\dfrac{l_f}{l}\,g + \dfrac{z}{l}\,a_x\right)\dfrac{h}{L\,g}\,a_y, \\ F_{z_4} = \dfrac{L_3}{L}\,m\left(\dfrac{l_f}{l}\,g + \dfrac{z}{l}\,a_x\right) + m\left(\dfrac{l_f}{l}\,g + \dfrac{z}{l}\,a_x\right)\dfrac{z}{L\,g}\,a_y. \end{cases} \tag{2.75}$$

A partir de (2.75) et en posant $a_x$ et $a_y$ nulles, on peut ainsi définir une masse virtuelle $m^*_{s_i}$ pour chacune des roues telle que :

$$m^*_{s_i} \triangleq \frac{F_{z_i}}{g}. \tag{2.76}$$

Soit :

$$m^*_{s_i} = \frac{m\,l_{\epsilon_i}}{2(l_f + l_r)}, \quad i \in \{1,2,3,4\} \quad \text{et} \quad \epsilon_i := (r,r,f,f). \tag{2.77}$$

Lorsque le système est en équilibre statique, le bilan des forces appliquées à la masse suspendue donne :

$$F_{r_i} - m^*_{s_i}\, g = 0 \tag{2.78}$$

Soit :

$$-\, k_{s_i}\,(l_{eq} - l_0) = m^*_{s_i}\, g. \tag{2.79}$$

En exprimant $l_i$ en fonction de la position du centre de masse $\Delta_{z_{G'_i}}$, on a (voir Figure 2.21) :

$$l_i = l_{eq} + \Delta_{z_{G'_i}} - z_s \tag{2.80}$$

avec $l_{eq}$ la longueur du ressort à l'équilibre. Soit, en remplaçant dans (2.50) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{r_i}} &= -k_{s_i}\,(l_{eq} + \Delta_{z_{G'_i}} - z_s - l_0)\,\overrightarrow{k_c} \\ &= (-k_{s_i}\,(l_{eq} - l_0) - k_{s_i}\,(\Delta_{z_{G'_i}} - z_s))\,\overrightarrow{k_c}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

En remplaçant (2.79) dans (2.81), on obtient donc :

$$\overrightarrow{F_{r_i}} = m^*_{s_i}\,\vec{g} - k_{s_i}\,(\Delta_{z_{G'_i}} - z_{s_i})\,\overrightarrow{k_c}. \tag{2.82}$$

La force d'amortissement s'exprime :

$$\overrightarrow{F_{v_i}} = -k_{v_i}\,(\dot{\Delta}_{z_{G'_i}} - \dot{z}_{s_i})\,\overrightarrow{k_c}. \tag{2.83}$$

avec $k_{v_i}$ le coefficient d'amortissement. Finalement les forces de suspensions s'expriment comme suit :

$$\overrightarrow{F_{z_i}} = (m^*_{s_i}\, g - k_{s_i}\,(\Delta_{z_{G'_i}} - z_{s_i}) - k_{v_i}\,(\dot{\Delta}_{z_{G'_i}} - \dot{z}_{s_i}))\,\overrightarrow{k_c}. \tag{2.84}$$

On a d'après (2.76) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} F_{z_i} = m\,g \iff g \sum_{i=1}^{4} m^*_{s_i} &= m\,g \\ \iff \sum_{i=1}^{4} m^*_{s_i} &= m. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{4} F_{z_i} = m\,g - \sum_{i=1}^{4} k_{s_i}\,(\Delta_{z_{G'_i}} - z_{s_i}) - \sum_{i=1}^{4} k_{v_i}\,(\dot{\Delta}_{z_{G'_i}} - \dot{z}_{s_i})). \tag{2.86}$$

**Expression du débattement des suspensions**

Les points $G'_i$ s'expriment dans le repère $\mathscr{R}_c$ comme suit (voir Figure 2.16) :

$$G_1^{'[c]} = \begin{pmatrix} l_f \\ L_1 \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}, \quad G_2^{'[c]} = \begin{pmatrix} l_f \\ -L_2 \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}, \quad G_3^{'[c]} = \begin{pmatrix} -l_r \\ L_1 \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}, \quad G_4^{'[c]} = \begin{pmatrix} -l_r \\ -L_2 \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}. \tag{2.87}$$

La matrice de transformation permettant de passer du repère $\mathscr{R}_c$ au repère $\mathscr{R}_e$ avant les mouvements de roulis et de tangage est :

$$T_{[c]}^{[e]} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.88}$$

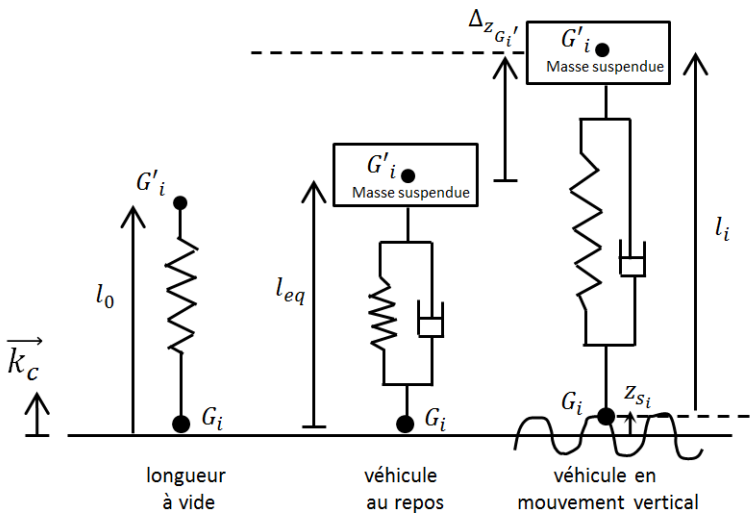



FIGURE 2.21 – Modélisation des suspensions d'un quart de véhicule

Le déplacement de la suspension $i$, noté $z_{G_i'}$, dans le repère $[e]$ s'exprime donc comme :

$$\Delta^{[e]}_{z_{G_i'}} = T^{[e]}_{[c]}\, G_i'^{[c]}. \tag{2.89}$$

Soit en projetant sur l'axe vertical $\vec{k}_e$ :

$$\begin{cases} \Delta_{z_{G_1'}} = -l_f\, \sin\phi + L_1\, \cos\phi \sin\theta, \\ \Delta_{z_{G_2'}} = -l_f\, \sin\phi - L_2\, \cos\phi \sin\theta, \\ \Delta_{z_{G_3'}} = l_r\, \sin\phi + L_1\, \cos\phi \sin\theta, \\ \Delta_{z_{G_4'}} = l_r\, \sin\phi - L_2\, \cos\phi \sin\theta. \end{cases} \tag{2.90}$$

Puis en dérivant par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_{z_{G_1'}} = -l_f\, \dot{\phi}\, \cos\phi + L_1\, \dot{\theta}\, \cos\phi\, \cos\theta - L_1\, \dot{\phi}\, \sin\phi\, \sin\theta, \\ \dot{\Delta}_{z_{G_2'}} = -l_f\, \dot{\phi}\, \cos\phi - L_2\, \dot{\theta}\, \cos\phi\, \cos\theta + L_2\, \dot{\phi}\, \sin\phi\, \sin\theta, \\ \dot{\Delta}_{z_{G_3'}} = l_r\, \dot{\phi}\, \cos\phi + L_1\, \dot{\theta}\, \cos\phi\, \cos\theta - L_1\, \dot{\phi}\, \sin\phi\, \sin\theta, \\ \dot{\Delta}_{z_{G_4'}} = l_r\, \dot{\phi}\, \cos\phi - L_2\, \dot{\theta}\, \cos\phi\, \cos\theta + L_2\, \dot{\phi}\, \sin\phi\, \sin\theta. \end{cases} \tag{2.91}$$

En supposant $\theta$ et $\phi$ petits, on a $\Delta^{[c]}_{z_{G_i'}} = \Delta^{[e]}_{z_{G_i'}}$.

**Modélisation globale**

Le modèle à 10 DDL s'écrit donc, avec $i = 1...4$ :

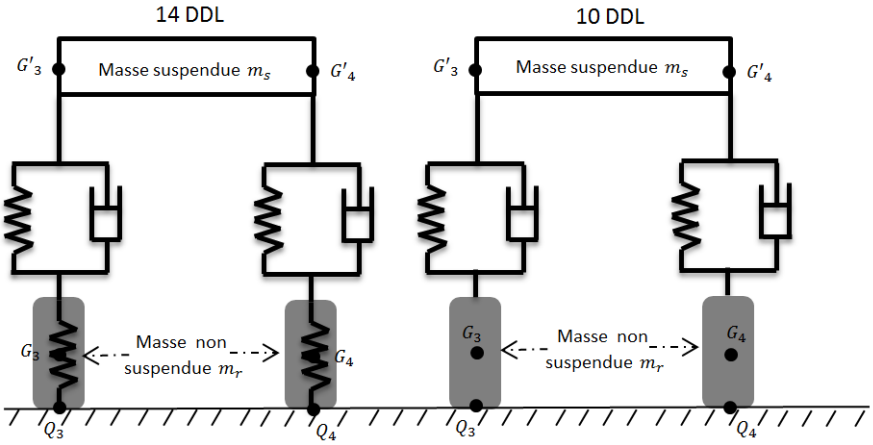



FIGURE 2.22 – Système suspension/masse non-suspendue 14 DDL VS 10 DDL

**Modélisation véhicule 7** (Dynamique à 10 DDL)**.**

$$\begin{cases} m\,\dot{V}_x = -m\,\dot{\phi}\,V_z + m\,\dot{\psi}\,V_y + \sum\limits_{i=1}^{4} F_{x_i} - F_{aero}\,\cos\phi + m\,g\,\sin\phi, \\ m\,\dot{V}_y = -m\,\dot{\psi}\,V_x + m\,\dot{\theta}\,V_z + \sum\limits_{i=1}^{4} F_{yi} - F_{aero}\,\sin\phi\,\sin\theta - m\,g\,\cos\phi\,\sin\theta, \\ m_s\,\dot{V}_z = -m\,\dot{\theta}\,V_y + m\,\dot{\phi}\,V_x + \sum\limits_{i=1}^{4} F_{z_i} - F_{aero}\,\sin\phi\,\cos\theta - m_s\,g\,\cos\phi\,\cos\theta, \\ I_x\,\ddot{\theta} = (I_y - I_z)\,\dot{\phi}\,\dot{\psi} + z\sum\limits_{i=1}^{4} F_{y_i} + L_1\,(F_{z_1} + F_{z_3}) - L_2\,(F_{z_2} + F_{z_4}), \\ I_y\,\ddot{\phi} = (I_z - I_x)\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} - z\sum\limits_{i=1}^{4} F_{x_i} - l_f\,(F_{z_1} + F_{z_2}) + l_r\,(F_{z_3} + F_{z_4}), \\ I_z\,\ddot{\psi} = (I_x - I_y)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta} - L_1\,(F_{x_1} + F_{x_3}) + L_2\,(F_{x_2} + F_{x_4}) + l_f\,(F_{y_1} + F_{y_2}) - l_r\,(F_{y_3} + F_{y_4}), \\ I_{r_i}\,\dot{\omega}_i = T_{\omega_i} - r_l\,F_{xp_i} + \sin\gamma\,C_{z_i}. \end{cases} \tag{2.92}$$

avec $F_{z_i}$ calculée à l'équation (2.84), $F_{x_i}$ et $F_{y_i}$ sont reliés aux termes $F_{x_{p_i}}$ et $F_{y_{p_i}}$ via l'équation (2.47) qui sont eux-mêmes déterminés via un modèle de pneumatique comme le modèle de Pacejka par exemple (2.132) et $\Delta_{z_{G'_i}}$ et $\dot{\Delta}_{z_{G'_i}}$ calculés aux équations (2.90) et (2.91).

### 2.6.4 Modélisation dynamique de type 4 roues à 14 DDL

Le modèle à 14 degrés de liberté est utilisé pour étudier le comportement du véhicule dans les directions longitudinale, latérale et verticale. Contrairement au modèle à 10DDL, on considère cette fois les équations dynamiques de la masse non suspendue. Les roues ne sont donc plus considérées comme rigides et possèdent des propriétés élastiques que l'on modélise par un ressort (voir figure 2.22). La masse suspendue possède 6 DDL (longitudinale, latérale, verticale, roulis, tangage, lacet) et chaque masse non-suspendue possède 2 DDL (mouvement vertical et rotation de la roue).

Les équations dynamiques de la masse suspendue restent les mêmes que celles du modèle à 10 DDL (voir équations (2.92)).

Dans le modèle à 14 DDL il faut prendre en compte les équations dynamiques des masses non suspendues. On suppose donc que le rayon des roues n'est pas fixe dans le temps. Faisons le bilan des forces pour chaque système masse non-suspendue :

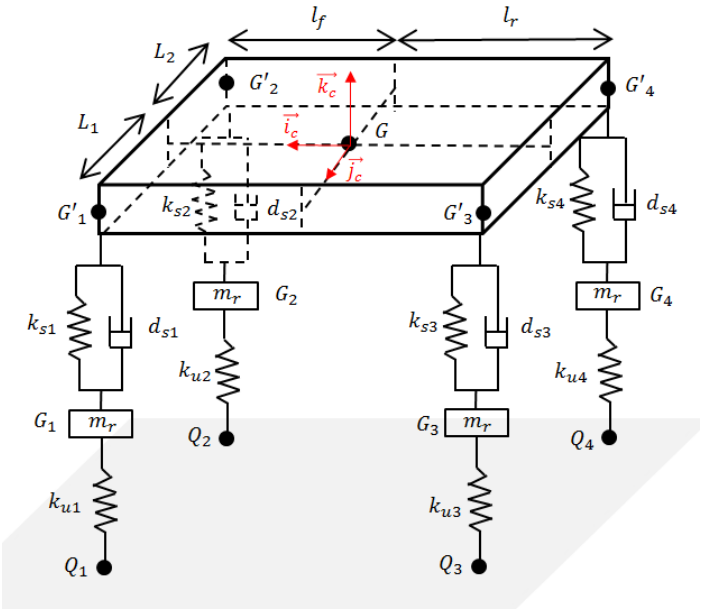



FIGURE 2.23 – Modélisation des suspensions 14 DDL

- poids de la roue : $m_{r_i}\, g$ suivant $\vec{k_i}$
- efforts verticaux induits par la suspension : $F_{z_i}$ suivant $\vec{k_c}$
- forces de rappel du ressort modélisant le pneumatique : $F_{u_i}$ suivant $\vec{k_c}$ telles que

$$\overrightarrow{F_{u_i}} = -k_{u_i}\,(r_i - r_0)\,\overrightarrow{k_c}, \tag{2.93}$$

avec $r_i$ la longueur du ressort, $r_0$ la longueur à vide du ressort et $k_{u_i}$ la raideur du ressort.

En faisant le bilan des forces sur les masses non suspendues :

$$m_{r_i}\,\ddot{z}_{u_i} = k_{s_i}\,(z_{G'_i} - z_{u_i}) + k_{v_i}\,(\dot{z}_{G'_i} - \dot{z}_{u_i}) - k_{u_i}\,(z_{u_i} - z_{s_i}). \tag{2.94}$$

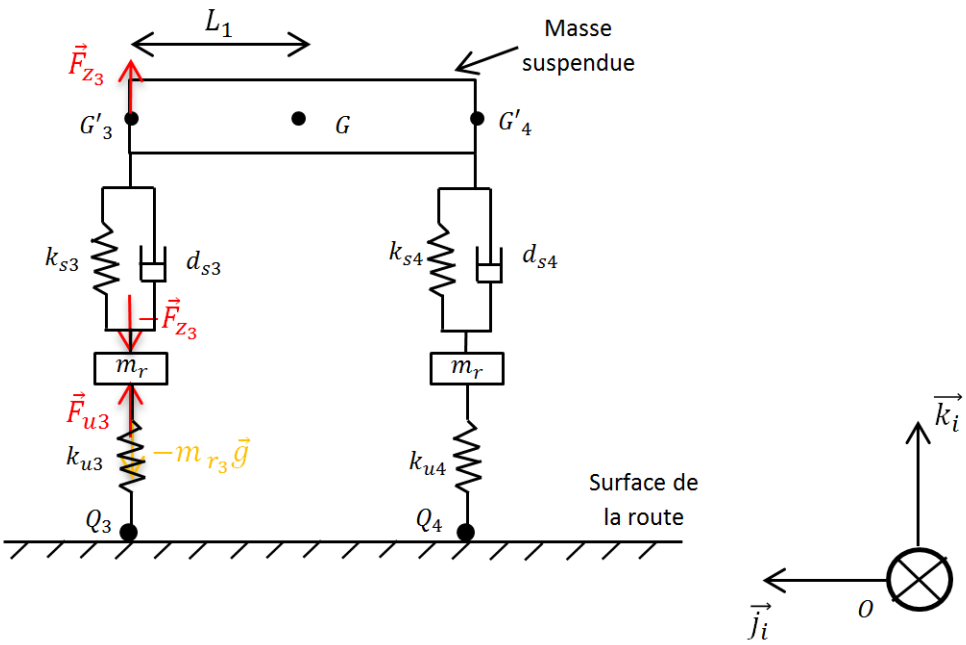



FIGURE 2.24 – Forces appliquées aux roues - vu de derrière

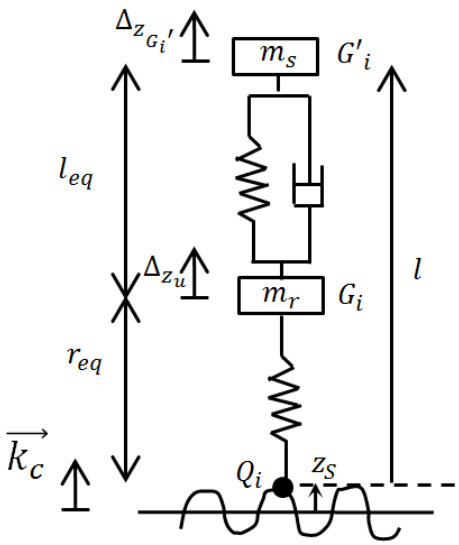



FIGURE 2.25 – Modélisation des suspensions d'un quart de véhicule (avec $r_{eq}$ la longueur à l'équilibre du ressort)

## 2.7 Modélisation de la liaison pneumatique

L'étude portant ici sur le déplacement de véhicules en milieux naturels, la prise en compte des glissements au contact roue/sol devient indispensable. Le pneumatique étant la seule liaison entre le véhicule et le sol, il s'agit d'étudier les forces générées entre le pneu et la surface du sol.

Disposer d'une modélisation correcte des pneumatiques dans la modélisation de la dynamique d'un véhicule est primordiale puisque cela permettra d'établir une architecture de contrôle plus performante. Cette section porte donc sur une étude bibliographique des différents modèles existants.

Du fait de la complexité du comportement mécanique du pneumatique due à la non-linéarité des lois qui le caractérise, de l'interdépendance de ces lois et du nombre de facteurs intervenant dans ces lois, de nombreux modèles ont été développés. Le principal problème auquel il faut se confronter est la multitude de paramètres à prendre en compte comme la nature du sol, la pression, la raideur du pneumatique, l'adhérence etc.

La littérature comporte de nombreux modèles étudiant le comportement dynamique du pneumatique et classe ces modèles en deux catégories : l'approche *analytique* et l'approche *empirique*.

Les modèles *analytiques* sont des modèles de contact physique établis à partir de considérations physiques et d'analyse de la caractérisation de la surface de contact roues/sol et de la répartition de pression sur cette surface. Les premiers modèles de pneu ne concernent que la relation entre les forces et le glissement en régime stationnaire. Ils sont formés à partir du modèle de Brush [Svendenius and Wittenmark, 2003]. Les modèles de Dugoff [Dugoff et al., 1970] et de Gim [GIM and Nikravesh, 1991] s'appuient sur cette modélisation pour proposer des modèles enrichis. Plus un modèle analytique cherche à être exhaustif (prise en compte de tous les phénomènes, et description fine des surfaces de contact), plus les modèles deviennent complexes et sont coûteux en terme de temps de calcul. De plus, ils contiennent beaucoup de paramètres, ce qui les rend difficiles à utiliser pour élaborer les commandes. D'autres modèles analytiques comme le modèle de Dahl [Dahl, 1968] proposent une modélisation qui s'appuie sur les frottements de Coulomb pour développer un modèle caractérisant les glissements à basse vitesse. Par contre ce modèle ne prend pas en compte l'évolution du coefficient de frottement avec la vitesse (effet Stribeck), ni le cisaillement et le frottement visqueux. Ce modèle a donc été généralisé pour prendre en compte ces effets et a donné naissance au modèle de LuGre [Canudas de Wit et al., 1995]. Il est basé sur un modèle de friction dynamique qui cherche à capturer le comportement transitoire des forces de contact pneumatique/chaussée sous des conditions de vitesse variant dans le temps.

Les modèles *empiriques* cherchent à établir un modèle général à partir de données expérimentales. Les paramètres sont identifiés à partir de résultats expérimentaux obtenus sur banc d'essai. Ces paramètres n'ont pas forcément de signification physique. Dans cette catégorie, le modèle le plus utilisé est le modèle de Pacejka [Pacejka, 2006]. On a ensuite des modèles semi empiriques basés sur des lois de comportement empiriques combinées avec un calcul analytique de force. Dans cette catégorie on peut par exemple citer le modèle de Kiencke et Nielsen [Kiencke and Nielsen, 2000].

Nous présenterons ici quelques unes de ces approches.

### 2.7.1 Notations pour formaliser les forces s'appliquant au pneumatique

Contrairement à une roue rigide et indéformable (figure 2.20), le contact entre le pneu et le sol ne se fait pas en un unique point. En effet, comme montré figure 2.26, le pneu d'un véhicule se déforme sous l'action de la charge verticale exercée sur lui.

La résultante des forces que le pneu reçoit du sol est supposée appliquée au centre de la surface de contact $\Sigma$ et peut être décomposée suivant trois axes (voir figure 2.27) :

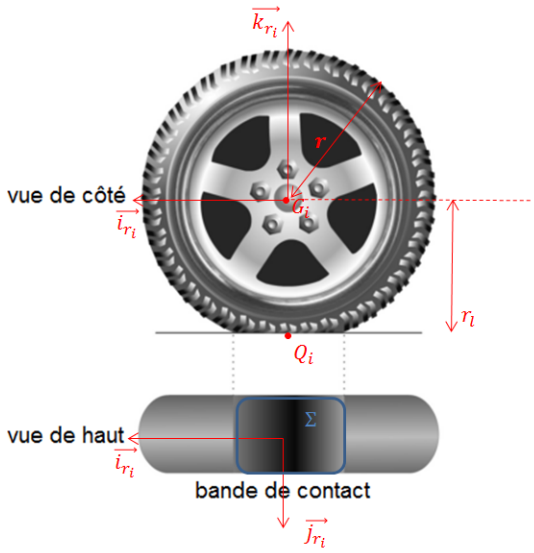



FIGURE 2.26 – Zone de contact d'un pneu [Rajamani, 2014]

- la *force longitudinale* $F_{x_p}$, suivant l'axe $\vec{i}_r$, telle que $\vec{F}_{x_p} = \int_\Sigma d\vec{F}_{x_p}$, transmise par le pneu au sol et définie colinéairement à la direction de la roue. C'est l'effort principal permettant de faire avancer le véhicule,
- la *force latérale* $F_{y_p}$, suivant l'axe $\vec{j}_r$, telle que $\vec{F}_{y_p} = \int_\Sigma d\vec{F}_{y_p}$, transmise par le pneu au sol et définie perpendiculairement à la direction de la roue. C'est l'effort principal permettant de modifier la direction du véhicule,
- la *force verticale* $F_{z_p}$, suivant l'axe $\vec{k}_r$, telle que $\vec{F}_{z_p} = \int_\Sigma d\vec{F}_{z_p}$, appliquée par le pneu au sol. Elle est principalement due à la masse du véhicule et varie en fonction des transferts de charge lors d'un virage, et du réglage de la suspension.

De la même façon, le moment que le pneu reçoit du sol peut être décomposé suivant trois axes :

- le *moment de renversement* $C_x$ suivant l'axe $\vec{i}_e$ et appliqué au point $Q_i$
- le *moment de résistance au roulement* $C_y$ suivant l'axe $\vec{j}_e$ et appliqué au point $Q_i$ qui tend à freiner la rotation de la roue
- le *moment d'auto-alignement* $C_z$ suivant l'axe $\vec{k}_e$ et appliqué au point $Q_i$ qui apparaît en concordance avec l'effort de dérive $F_{y_p}$ et tend à réduire l'angle de dérive (voir définition dans la partie 2.7.1.2). Cette action de rappel se traduit par une variation des efforts au niveau des organes de guidage de la roue et tend donc à ramener la roue dans la direction de son vecteur vitesse et s'oppose au couple de braquage induit par $\delta$.
- $C_m$ est le couple moteur transmis à la roue soit par le moteur du véhicule soit par les frottements dus aux roulements pour les roues non-motrices, suivant l'axe $\vec{j}_r$ et appliqué au point $G_i$
- $C_b$ est le couple résistant dû au freinage, suivant l'axe $\vec{j}_r$ et appliqué au point $G_i$

Du point de vue de la dynamique de lacet du véhicule, les forces longitudinale $F_{x_p}$ et latérale $F_{y_p}$ sont les composantes les plus importantes car elles décrivent la capacité du véhicule à accélérer/freiner et à tourner. La résultante des efforts $F = \sqrt{F_{x_p}^2 + F_{y_p}^2}$ que le pneu transmet dans le plan de contact est une force tangentielle qui s'oppose à la vitesse de glissement. Son module est inférieur ou égal à la force normale au point d'application multipliée par un facteur $\mu$ appelé *coefficient de friction* :

$$||\vec{F}_{x_p} + \vec{F}_{y_p}|| \leq \mu \, ||\vec{F}_{z_p}||. \tag{2.95}$$

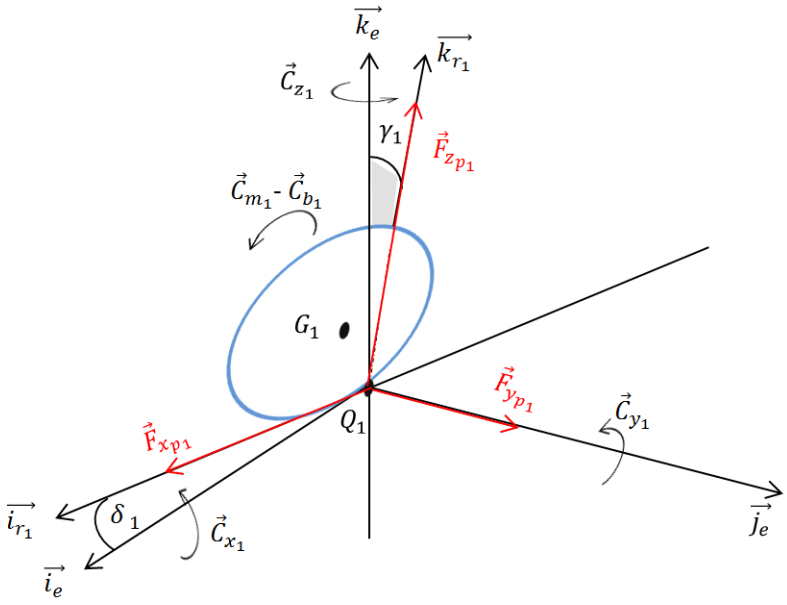



FIGURE 2.27 – Résultantes et moments

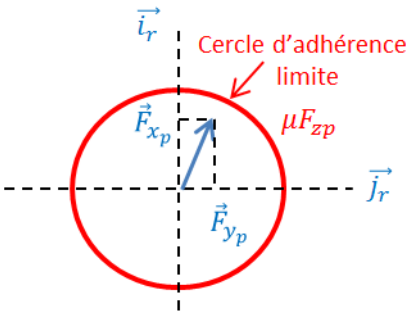



FIGURE 2.28 – Cercle d'adhérence

Ce coefficient de friction $\mu$ peut être décrit comme la force tangentielle maximale normalisée par la force verticale qui peut être produite entre chaque roue et le sol. Il existe donc une limitation des forces produites lors des phrases de freinage, d'accélération ou encore de braquage comme illustré Figure 2.28. Le coefficient de friction est une variable difficilement mesurable. Elle est fonction du revêtement routier, du pneumatique et surtout des conditions climatiques. $\mu$ varie entre 0 et 1 :

- Lorsque le coefficient de friction est proche de 1, le contact entre le pneumatique et la chaussée est très bon. La chaussée est alors sèche avec de bons pneumatiques.
- Un coefficient de friction compris entre 0.5 et 0.8 correspond au déplacement du véhicule sur une chaussée humide ou légèrement mouillée.
- Lorsque la valeur atteint 0.2 ou 0.3, la chaussée est très glissante, en dessous, la route est verglacée.

Les efforts maximaux transmissibles sont donc fonction de nombreux paramètres comme les conditions d'adhérence $\mu$, la force normale $F_{z_p}$ mais aussi des caractéristiques du pneu, etc. Cela implique qu'une sollicitation selon un axe du véhicule diminue la capacité du pneu à transmettre une force dans l'autre direction.

Les nombreux modèles caractérisant les efforts latéraux $F_{y_p}$ et longitudinaux $F_{x_p}$ pour les pneumatiques découplent souvent les dynamiques latérales et longitudinales pour des raisons

de simplification du modèle ou parce qu'une seule dynamique est étudiée.

Dans le cadre de l'évolution du véhicule engendrant de hautes dynamiques, le pneu subit des contraintes qui le déforment et qui font apparaître des phénomènes de glissement. La plupart des modèles de pneumatique sont basés sur ces phénomènes, comme par exemple les modèles de Dugoff [Dugoff et al., 1970], [Kiencke and Nielsen, 2000] et Pacejka [Pacejka, 1996].

Ces glissements peuvent être divisés en deux catégories : les glissements longitudinaux et latéraux. La modélisation du contact pneu/sol revient à déterminer la relation liant les forces de contact à ces glissements.

#### 2.7.1.1 Taux de glissement

On note $V_{x_p}$ la vitesse linéaire suivant l'axe $\vec{i}_r$ de la roue et $r_e\,\omega$ la vitesse de rotation équivalente du pneu obtenue avec l'hypothèse de roulement sans glissement (voir équation (2.4)). $\omega$ est la vitesse angulaire de la roue et $r_e$ le rayon effectif de la roue (défini dans la partie 2.6.2). On prendra comme valeur numérique celle de $r$ au lieu de $r_e$ dans les simulations.

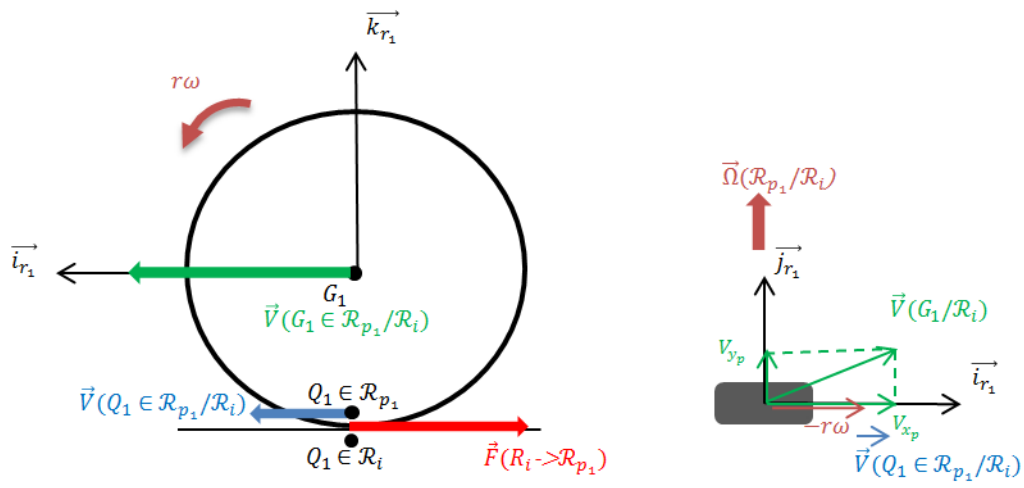



FIGURE 2.29 – Vitesse de la roue et taux de glissement

D'après l'équation (2.9), on a :

$$\vec{V}(Q \in \mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i) = (V_{x_p} - r_e\,\omega)\,\vec{i}_{r_i} + V_{y_p}\,\vec{j}_{r_i}. \tag{2.96}$$

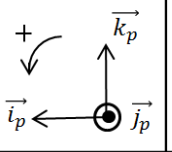
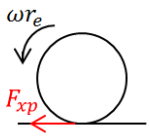
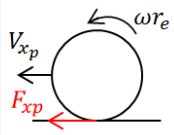
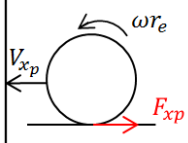
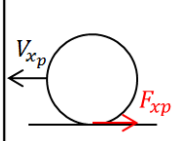
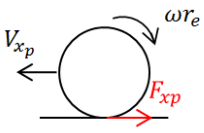
La variable influençant principalement l'évolution de la force longitudinale $F_{x_p}$ est la vitesse de glissement longitudinal $\vec{V}(Q \in \mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i) \cdot \vec{i}_{r_i}$. Elle permet de décrire la différence entre la vitesse linéaire $V_{x_p} = \vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i) \cdot \vec{i}_{r_i}$ et la vitesse de rotation équivalente

$$\vec{\Omega}(\mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{G_iQ_i} = r_e\,\omega$$

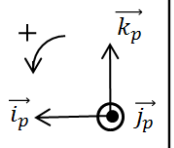
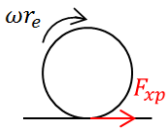
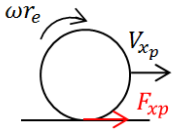
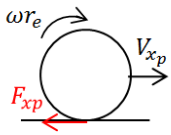
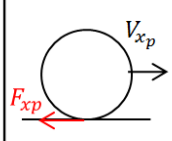
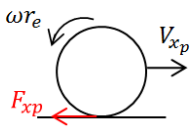
du pneu (voir Figure 2.96). En choisissant la convention d'une force longitudinale positive en fonction de la vitesse de glissement longitudinal, cette dernière est donc définie comme suit : $r_e\,\omega - V_{x_p}$.

Le *taux de glissement* est alors défini par :

$$\begin{cases} \sigma_x \triangleq -\dfrac{\vec{V}(Q \in \mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i)}{V_{x_p}}\,\vec{i}_r = \dfrac{r_e\,\omega - V_{x_p}}{V_{x_p}} & \text{durant le freinage, si } V_{x_p} \neq 0, \\ \sigma_x \triangleq -\dfrac{\vec{V}(Q \in \mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i)}{r_e\,\omega}\,\vec{i}_r = \dfrac{r_e\,\omega - V_{x_p}}{r_e\,\omega} & \text{durant l'accélération, si } \omega \neq 0, \\ \sigma_x \triangleq 0 \quad si \quad \omega = 0 \quad et \quad V_{x_p} = 0 \end{cases} \tag{2.97}$$

| cas | patinage | traction | freinage | blocage | rétropatinage |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |
| condition | $\omega > 0, V_{x_p} = 0$ | $\omega r_e > V_{x_p} > 0$ | $V_{x_p} > \omega r_e > 0$ | $\omega = 0, V_{x_p} > 0$ | $\omega < 0, V_{x_p} > 0$ |
| glissement | $\sigma_x = 1$ | $1 > \sigma_x > 0$ | $0 > \sigma_x > -1$ | $\sigma_x = -1$ | $\sigma_x = -1$ |

(a) Signe du taux de glissement en marche avant, ie si $V_{x_p} \geq 0$

| cas | patinage | traction | freinage | blocage | rétropatinage |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |
| condition | $\omega < 0, V_{x_p} = 0$ | $\omega r_e < V_{x_p} < 0$ | $V_{x_p} < \omega r_e < 0$ | $\omega = 0, V_{x_p} < 0$ | $\omega > 0, V_{x_p} < 0$ |
| glissement | $\sigma_x = -1$ | $0 > \sigma_x > -1$ | $1 > \sigma_x > 0$ | $\sigma_x = 1$ | $\sigma_x = 1$ |

(b) Signe du taux de glissement en marche arrière, ie si $V_{x_p} \leq 0$

FIGURE 2.31 – Signe du taux de glissement

ou encore, pour prendre en compte aussi bien la marche arrière que la marche avant ainsi que le rétropatinage :

$$\sigma_x = \frac{r_e\,\omega - V_{x_p}}{\max(|V_{x_p}|, |r_e\omega|, |r_e\,\omega - V_{x_p}|)}. \tag{2.98}$$

$\sigma_x$ est compris entre l'intervalle [-1,1]. Lorsque $\sigma_x = -1$, la roue est bloquée en rotation mais le véhicule continue d'avancer et lorsque $\sigma_x = 1$, la roue patine et le véhicule reste sur place. Enfin, $\sigma_x = 0$ signifie que la roue roule sans glisser. Les phases d'accélération et de décélération correspondent respectivement aux valeurs positives et négatives de $\sigma_x$.
On peut regrouper sous forme de tableau 2.31, la valeur du glissement longitudinal en fonction de $V_{x_p}$ et $\omega$.

L'estimation précise du glissement longitudinal se fait aisément dans le cadre de véhicule routier car le rayon sous charge des roues $r_e$ est relativement constant car le sol est lisse et non-déformable. En revanche, dans un milieu tout-terrain, le sol ne peut plus être considéré plat et induit de grandes déformations du pneu à haute vitesse. Cela fait varier le rayon $r_e$ et rend son estimation difficile.

#### 2.7.1.2 Angle de dérive et taux de glissement latéral

Dans le cas de l'effort latéral, la variable principalement influençante est l'*angle de dérive du pneumatique* $\beta$. Il est défini comme l'angle entre l'orientation du pneu $\vec{i}_r$ et l'orientation du vecteur vitesse $\vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i)$ de la roue $i$ :

$$\sin\beta \triangleq \frac{\vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i)\cdot\vec{j}_r}{||\vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i)||} \tag{2.99}$$

Il caractérise le *glissement latéral* du pneu par rapport au sol. Le phénomène de glissement des pneus s'explique par le fait que la force latérale produite par les pneus n'est plus suffisante.

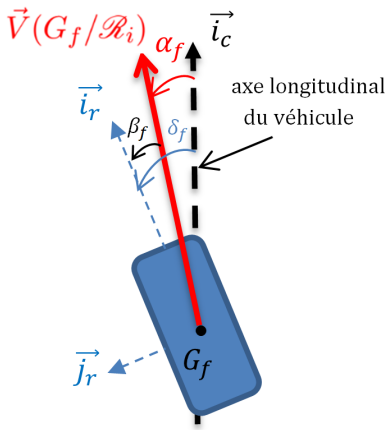



FIGURE 2.32 – Angle de dérive avant

On définit $\alpha$ l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'axe longitudinal du véhicule :

$$\sin\alpha \triangleq \frac{\vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i)\cdot\vec{j_c}}{||\vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i)||} \tag{2.100}$$

Sur la figure 2.32, l'angle de dérive avant $\beta_f$ est défini comme :

$$\beta_f = \delta_f - \alpha_f. \tag{2.101}$$

De la même manière, on définit l'angle de dérive arrière :

$$\beta_r = \delta_r - \alpha_r. \tag{2.102}$$

Le rapport entre la vitesse latérale et la vitesse longitudinale à chaque roue peut être utilisé pour calculer $\alpha_f$ et $\alpha_r$ (voir équation (C.4) avec $L_1 = L_2 = 0$) :

$$\tan\alpha_f = \frac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x}, \tag{2.103}$$

$$\tan\alpha_r = \frac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x}, \tag{2.104}$$

où $V_y$ est la vitesse latérale au centre de gravité du véhicule, $V_x$ la vitesse longitudinale au centre de gravité du véhicule, $\dot{\psi}$ le taux de lacet, $l_f$ et $l_r$ les demi-empattements.

En se basant sur l'équation (2.96) on peut alors expliciter le glissement latéral en phase de freinage et de traction comme suit [Denis, 2015] :

$$\begin{cases} \sigma_y = -\dfrac{\vec{V}(Q\in\mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i)}{V_{x_p}}\,\vec{j_r} = \dfrac{-V_{y_p}}{V_{x_p}} = -\tan(\beta_{r,f}) \quad \text{en phase de freinage,} \\ \sigma_y = -\dfrac{\vec{V}(Q\in\mathscr{R}_{p_i}/\mathscr{R}_i)}{r_e\,\omega}\,\vec{j_r} = \dfrac{-V_{y_p}}{V_{x_p}}\dfrac{V_{x_p}}{r_e\,\omega} = -(1-\sigma_x)\,\tan(\beta_{r,f}) \quad \text{en phase de traction.} \end{cases} \tag{2.105}$$

Le glissement global du pneumatique, défini comme étant la résultante de la somme géométrique des glissements longitudinaux ($\sigma_x$) et latéraux ($\sigma_y$), est exprimé comme suit [Kiencke and Nielsen, 2000] :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \tag{2.106}$$

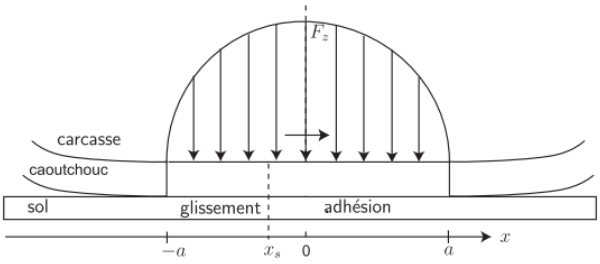



FIGURE 2.33 – Modèle de Brosse

### 2.7.2 Modèle de Brosse

L'utilisation du modèle de Brosse (brush model) [Svendenius and Wittenmark, 2003] est une approche classique pour modéliser le comportement des pneus. Il a été très populaire dans les années 60-70 avant que les approches empiriques deviennent dominantes. Il décrit les phénomènes physiques mis en jeu dans le pneu par application de la théorie de l'élasticité. Le modèle de brush décrit la génération des forces pneumatiques en se basant sur un partage de la surface de contact en une *région d'adhérence* et une *région de glissement* (voir Figure 2.33). Les points de contacts entre deux surfaces sont modélisés comme étant un poil de brosse flexible. Les forces dans la région d'adhérence sont supposées être causées par les déformations élastiques dans le volume de caoutchouc situé entre la carcasse du pneu et le sol. La carcasse est supposée rigide, ce qui signifie que les effets de la déformation de la carcasse sont négligées. Dans la région de glissement, les forces sont causées par les frottements de glissement et sont calculées d'après la loi de Coulomb. Le modèle est obtenu en divisant le volume de caoutchouc dans la *région de contact* en petit éléments déformables. Les éléments sont associés à des lamelles élastiques rectangulaires. Chaque élément se déforme latéralement sur toute la région de contact, mais leur longueur est infinitésimale sur la direction longitudinale. La déformation croît lorsque l'abscisse diminue dans la zone d'adhésion. Le glissement apparaît (en $x_s$) lorsque la force longitudinale atteint le cône de Coulomb. On décrit généralement la distribution de pression normale par une loi parabolique :

$$p(x) = \frac{3\,F_z}{4\,a}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right). \tag{2.107}$$

La force latérale $F_{y_p}$ s'exprime alors [Pacejka, 2006] en fonction de $\beta$ l'angle de dérive, $\mu$ le coefficient de friction, $c_{py}$ la rigidité latérale des éléments de la bande de roulement par unité de longueur, $F_z$ la charge verticale et $\beta_{sl}$ l'angle pour lequel le glissement latéral total a lieu. Cette modélisation permet aussi de calculer la force longitudinale $F_{x_p}$. On obtient les expressions suivantes :

**Modélisation pneumatique 1** (Brosse)**.**

$$\begin{cases} F_{y_p}^{brs} = 3\,\mu\,F_z\,\theta_y\,\sigma_y(1 - |\theta_y\,\sigma_y| + \frac{1}{3}(\theta_y\,\sigma_y)^2) & \text{si} \quad |\beta| < \beta_{sl} \\ F_{y_p}^{brs} = \mu\,F_z\,\text{sign}(\beta) \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} > |\beta| > \beta_{sl} \end{cases} \tag{2.108}$$

$$\begin{cases} F_{x_p}^{brs} = 3\,\mu\,F_z\,\theta_x\,\sigma_x(1 - |\theta_x\,\sigma_x| + \frac{1}{3}(\theta_x\,\sigma_x)^2) & \text{si} \quad |\kappa| < \kappa_{sl} \\ F_{x_p}^{brs} = \mu\,F_z\,\text{sign}(\beta) \quad \text{si} \quad |\kappa| > \kappa_{sl} \end{cases} \tag{2.109}$$

avec

- $a$ la moitié de la surface de contact

- $\theta_y = \frac{2\,c_{py}\,a^2}{3\,\mu\,F_z}$
- $\sigma_y = \tan\beta$
- $\tan\beta_{sl} = \frac{1}{\theta_y}$
- $\theta_x = \frac{2\,c_{px}\,a^2}{3\,\mu\,F_z}$
- $\sigma_x = \frac{\kappa}{1+\kappa}$
- $\kappa$ le glissement longitudinal
- $c_{py}$ et $c_{px}$ la rigidité latérale et longitudinale des éléments de la bande de roulement par unité de longueur
- $\kappa_{sl}$ la valeur pour laquelle le glissement longitudinal est total : $\kappa_{sl} = \frac{-1}{1\pm\theta_x}$.

### 2.7.3 Modèle de Gim

Ce modèle analytique [GIM and Nikravesh, 1991] considère séparément les effets du glissement longitudinal et latéral. Ces efforts dépendent de la charge verticale totale $F_z$, du glissement longitudinal et latéral, de la longueur de la surface de contact, de la rigidité longitudinale et latérale et du coefficient de frottement.

**Modélisation pneumatique 2** (Gim).

$$\begin{cases} F_{x_p}^{gim} = \dfrac{K_x\,W}{2}\sigma_x\,l_n^2 + \mu_x\,F_z\,(1 - l_n^2 + 2\,{l_n}^3), \\ F_{y_p}^{gim} = \dfrac{K_y\,W}{2}\sigma_y\,l_n^2 + \mu_y\,F_z\,(1 - 3\,l_n^2 + 2\,{l_n}^3), \end{cases} \tag{2.110}$$

avec

$$l_n = 2\,L\left[1 - \frac{2\,W\,L^2}{3\,\mu\,F_z}\sqrt{(K_x\,\sigma_x)^2 + (K_y\,\sigma_y)^2}\right],$$

- $K_x$ : raideur longitudinale du pneumatique par unité d'aire
- $K_y$ : raideur latérale du pneumatique par unité d'aire
- $L$ : longueur de la surface de contact
- $W$ : largeur du pneumatique
- $\mu_x$ et $\mu_y$ : coefficients de frottement longitudinal et latéral

### 2.7.4 Modèle de Dugoff

Ce modèle [Dugoff et al., 1970] permet de calculer analytiquement les forces longitudinales $F_{x_p}$ et latérales $F_{y_p}$ en fonction de l'angle de dérive $\beta$ et du taux de glissement $\sigma_x$, tout en prenant en compte le couplage de ces efforts à travers un coefficient $\lambda$. Il suppose une distribution uniforme de la pression verticale sur la zone de contact du pneu. Soient $\mu$ le coefficient de friction, $C_\beta$ le coefficient de rigidité de dérive (raideur latérale) et $C_\sigma$ le coefficient de rigidité longitudinale (raideur longitudinale). Les forces longitudinale et latérale sont données par :

**Modélisation pneumatique 3** (Dugoff avec couplage)**.**

$$F_{x_p}^{Dug\ tot} = C_\sigma \frac{\sigma_x}{1-\sigma_x} f(\lambda), \tag{2.111}$$

$$F_{y_p}^{Dug\ tot} = C_\beta \frac{\tan(\beta)}{1-\sigma_x} f(\lambda), \tag{2.112}$$

quelque soit $\sigma_x$ différent de 1 et le paramètre de couplage $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\mu\, F_z\, (1-\sigma_x)}{2\sqrt{(C_\sigma\, \sigma_x)^2 + (C_\beta\, \tan(\beta))^2}} \tag{2.113}$$

avec

$$f(\lambda) = (2-\lambda)\,\lambda \quad \text{si } \lambda < 1,$$
$$f(\lambda) = 1 \quad \text{si } \lambda \geq 1.$$

Si on ne considère pas de couplage, c'est-à-dire $\sigma_x = 0$, la force latérale $F_{y_p}$ (2.112) peut être ré-exprimée :

**Modélisation pneumatique 4** (Dugoff sans couplage)**.**

$$F_{y_p}^{Dug} = \begin{cases} C_\beta \tan(\beta) \text{ si } \lambda \geq 1, \\ C_\beta \tan(\beta)\,(2-\lambda)\lambda \text{ si } \lambda < 1 \end{cases} \tag{2.114}$$

avec

$$\lambda = \frac{\mu_y\, F_z}{2\, C_\beta\, |\tan\beta|}.$$

*Remarque* 2.7.1. Si $\beta$ tend vers $\frac{pi}{2}$ alors $\lambda$ tend vers 0. On a alors :

$$F_{y_p}^{Dug} \longrightarrow C_\beta\, \tan\beta \frac{2\,\mu_y\, F_z}{2\, C_\beta\, |tan\beta|}. \tag{2.115}$$

Soit :

$$F_{y_{p_{max}}}^{Dug} = \mu_y\, F_z. \tag{2.116}$$

Donc finalement, pour le modèle de Dugoff, on a :

$$\mu_y = \mu_{y_{max}}. \tag{2.117}$$

*Remarque* 2.7.2. La valeur $\lambda = 1$ correspond à une valeur de $\beta$ telle que

$$\beta^\star = \pm \arctan \frac{\mu_y\, Fz}{2\, C_\beta}. \tag{2.118}$$

Soit encore

$$\beta^\star = \pm \arctan \frac{F_{y_{p_{max}}}^{Dug}}{2\, C_\beta}. \tag{2.119}$$

*Remarque* 2.7.3.

- Si $\lambda \geq 1$, $F_{y_p}^{Dug} = C_\beta\, \tan\beta$. On a alors :

$$\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta} = \frac{C_\beta}{\cos^2\beta}.$$

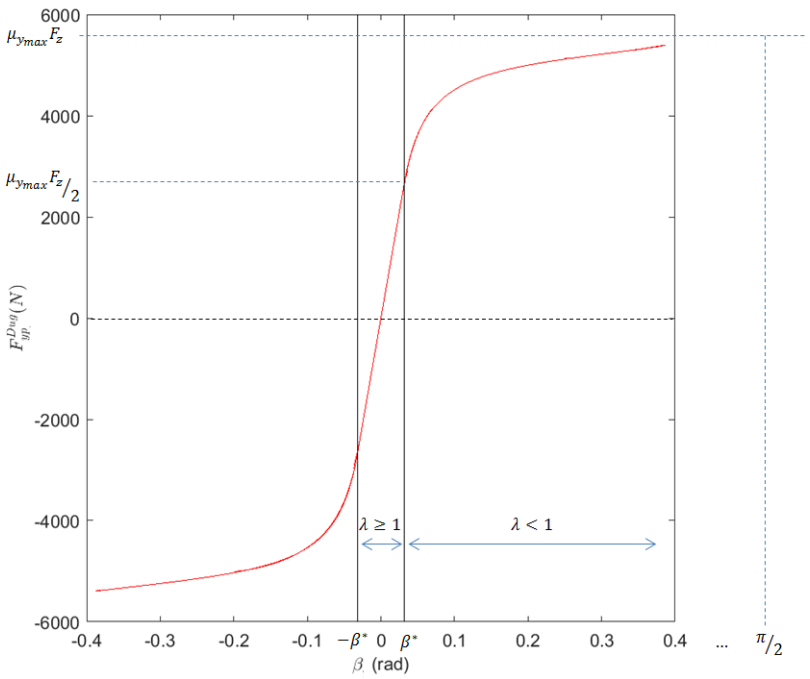



FIGURE 2.34 – Modèle de Dugoff

- Si $\lambda < 1$, $F_{y_p}^{Dug} = \frac{\tan\beta\, \mu_{y_{max}}\, F_z}{|\tan\beta|} - \frac{\tan\beta\, \mu_{y_{max}}^2\, F_z^2}{4\, C_\beta\, |\tan\beta|^2}$. On a alors :

$$\begin{cases} F_{y_p}^{Dug} = \mu_{y_{max}}\, F_z - \dfrac{\mu_{y_{max}}^2\, F_z^2}{4\, C_\beta\, \tan\beta}, & \forall\beta > 0, \\ F_{y_p}^{Dug} = -\mu_{y_{max}}\, F_z - \dfrac{\mu_{y_{max}}^2\, F_z^2}{4\, C_\beta\, \tan\beta}, & \forall\beta < 0, \end{cases} \tag{2.120}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial\beta} = \frac{\mu_{y_{max}}^2\, F_z^2}{4\, C_\beta\, \sin^2\beta} \quad \forall\beta.$$

### 2.7.5 Modèle de Kiencke/Burckhardt

Ce modèle [Kiencke and Nielsen, 2000] est semi-empirique car le calcul des efforts longitudinaux et latéraux se fait suivant deux étapes :

- la première étape est analytique et permet de calculer le coefficient de frottement par la méthode de Burckhardt.
- la deuxième étape formule empiriquement une relation mathématique reliant les glissements et le coefficient de frottement aux efforts tangentiels.

Les efforts longitudinaux et latéraux s'expriment grâce aux équations suivantes :

**Modélisation pneumatique 5** (Kiencke et Burckhardt)**.**

$$F_{x_p}^{Kie} = \frac{\mu(\sigma)}{\sigma} F_z\, (\sigma_x\, \cos\beta + \sigma_y\, \sin\beta), \tag{2.121}$$

$$F_{y_p}^{Kie} = \frac{\mu(\sigma)}{\sigma} F_z\, (\sigma_y\, \cos\beta - \sigma_x\, \sin\beta) \tag{2.122}$$

où :

- $F_z$ représente la charge verticale appliquée au pneumatique
- $\sigma$ : résultante de la somme géométrique des glissement longitudinaux $\sigma_x$ et latéraux $\sigma_y$ telle que $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
- $\beta$ : angle de dérive de la roue
- $\mu(\sigma)$ : le coefficient de frottement qui se calcule selon la méthode de Burckhardt.

Dans la version la plus simple, le coefficient de friction ne dépend que du glissement longitudinal total $\sigma$ soit :

$$\mu(\sigma) = c_1\,(1 - \exp(-c_2\,\sigma)) - c_3\,\sigma. \tag{2.123}$$

Si on souhaite disposer d'un modèle plus précis, prenant en compte la vitesse $V_G$ au centre de gravité du véhicule telle que $V_G = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ et la force normale $Fz$, on a :

$$\mu(\sigma) = (c_1\,(1 - \exp(-c_2\,\sigma)) - c_3\,\sigma)\exp(-c_4\,\sigma\,V_G)(1 - c_5\,F_z^2). \tag{2.124}$$

Les paramètres $c_1$, $c_2$ et $c_3$ dépendent du pneumatique et de la surface de contact. $c_4$ et $c_5$ décrivent respectivement les influences dues aux fortes variations de la vitesse et de la charge. L'ensemble de ces paramètres est empirique.

### 2.7.6 Modèle de Pacejka

Il donne l'une des représentations les plus réalistes du comportement du pneumatique et est le plus répandu. C'est un modèle semi-empirique basé sur un modèle analytique supposant une distribution parabolique des forces de contact pneu/sol et sur des données expérimentales par identification et interpolation des paramètres. Il est basé sur une fonction sin(arctan) qui offre une excellente approximation des forces en régime permanent. Pacejka dans [Pacejka, 1996] propose une méthode pour calculer les forces longitudinales et latérales du pneu ainsi que le moment d'auto-alignement pour un large éventail de conditions de fonctionnement. De plus, il propose une description des forces en situation de glissement pur et couplé (combiné). Il faut noter l'importance du couplage entre les efforts longitudinaux et latéraux du pneumatique. En effet, plus l'effort moteur est important (effort longitudinal), moins la roue aura de potentiel directeur (effort latéral). Ainsi, on parle souvent des comportements transversal ou longitudinal, purs ou couplés, du pneumatique. On désigne par :

- *force latérale pure* $F_{y_{p0}}$, la force latérale produite par le pneu sous sollicitations de charge $F_z$, dérive $\beta$ et carrossage $\gamma$ mais à taux de glissement longitudinal $\sigma_x$ nul.
- *force latérale couplée* $F_{y_p}$, la force latérale produite par le pneu sous sollicitations de charge $F_z$, dérive $\beta$ et carrossage $\gamma$ mais à taux de glissement longitudinal $\sigma_x$ non nul. La force latérale couplée est généralement inférieure à la force latérale pure car le glissement longitudinal dégrade le potentiel transversal du pneu.
- *force longitudinale pure* $F_{x_{p0}}$, la force longitudinale produite par le pneu sous sollicitations de charge $F_z$ et de taux de glissement longitudinal $\sigma_x$, à dérive $\beta$ et carrossage nuls $\gamma$.
- *force longitudinale couplée* $F_{x_p}$, la force longitudinale produite par le pneu sous sollicitations de charge $F_z$ et de taux de glissement $\sigma_x$, à dérive $\beta$ et carrossage non nuls $\gamma$. La force longitudinale couplée est généralement inférieure à la force longitudinale pure car la dérive et le carrossage dégradent le potentiel longitudinal du pneu.

L'inconvénient majeur est qu'il ne prend pas en compte la variation du revêtement et est extrêmement dépendant de paramètres très variables comme la vitesse, la température, la pression de gonflage, l'usure, etc., ce qui le rend difficilement "embarquable". Un ensemble de

paramètres n'est donc valide que pour un type de pneumatique.

Le modèle étant générique, on notera $Y$ la force longitudinale $F_{x_p}$ ou latérale $F_{y_p}$ fonction d'une variable X qui sera respectivement le taux de glissement $\sigma_x$ ou de l'angle de dérive $\beta$. Pour une charge verticale $F_z$ et un angle de carrossage $\gamma$ donnés, la forme générale de la formule de Pacejka donne :

$$Y(X) = y(x) + S_v \tag{2.125}$$

avec

$$y(x) = D \sin\left[C \arctan\left(B\,x - E\,\left(B\,x - \arctan(B\,x)\right)\right)\right], \tag{2.126}$$

$$x = X - S_h \tag{2.127}$$

où

- $B$ : traduit la rigidité, il est calculé à partir de la pente à l'origine $BCD$
- $C$ : contrôle les limites de la fonction sinus et détermine la forme de la courbe résultante
- $D$ : valeur maximale atteinte par $Y$
- $E$ : contrôle la courbure de la valeur maximale et sa position horizontale $x_m$
- $S_h$ : décalage horizontal
- $S_v$ : décalage vertical

$S_h$ et $S_v$ sont dus aux phénomènes de plysteer et de conicité qui pourraient exister même en roulant sur une ligne droite ($\beta = 0$). Ces deux différents phénomènes sont étroitement liés à l'asymétrie constructive du pneumatique (voir [Badji, 2009] pour plus de détails). L'équation (2.126) représente la réponse à un glissement pur (soit longitudinal $\sigma_x$, soit latéral $\beta$). Ces paramètres peuvent être classés en trois grandes catégories :

- les propriétés intrinsèques du pneumatique : la géométrie, la composition (rigidité-élasticité, matériaux, etc.), l'état du pneu (pression, usure, etc.) ont un impact sur la génération de ces efforts. Tout l'intérêt est bien sûr d'adapter ces paramètres en fonction des propriétés du sol.
- le type de sol (asphalte, terre, neige,...) ainsi que ses propriétés (sec, humide, ...) rentrent également en jeu. Il change de manière drastique les conditions d'adhérence.
- la configuration du véhicule : la géométrie du véhicule, la raideur des suspensions qui influence le transfert de charge lors des phases de changement de direction ou de freinage/ accélération et modifie la charge verticale $F_z$ du véhicule et d'autres paramètres de conception (amortisseur, barre antiroulis, etc.), ont une influence sur ces paramètres.

Une courbe typique du modèle de Pacejka est tracée figure 2.35. Cette courbe exprime l'évolution non linéaire qui existe d'un côté entre la force latérale et l'angle de dérive et d'un autre côté entre la force longitudinale et le taux de glissement. D'autres facteurs comme la charge verticale (voir 2.36) et le coefficient de friction influencent ce modèle. Une augmentation de la charge verticale se traduit par une augmentation de la force latérale.

On détaille, ci-dessous, les expressions des forces longitudinale et latérale sous glissement "pur" dans un premier temps, c'est-à-dire sans prendre en compte le couplage longitudinal/latéral. Puis dans un second temps, on explicitera les relations couplées. Dans les équations ci-dessous, $df_z$ représente la variation normalisée de la charge verticale

$$df_z = \frac{F_z - F_{z0}}{F_{z0}}$$

avec $F_{z0} = m\,g$ la charge verticale nominale. Les paramètres ci-dessous sont identifiés empiriquement. Le modèle complet compte plus de 85 paramètres qui doivent être calibrés à partir de données mesurées. Pour plus de détails voir [Pacejka, 2006] et 2.3 pour les valeurs numériques.

- Force longitudinale (glissement longitudinal pur)

$$F_{x_{p_0}} = D_x \sin\left[C_x \arctan\left\{B_x\left(\sigma_x + S_{H_x}\right) - E_x\left(B_x\left(\sigma_x + S_{H_x}\right) - \arctan(B_x\left(\sigma_x + S_{H_x}\right))\right)\right\}\right] + S_{V_x} \tag{2.128}$$

avec

  - $C_x = p_{C_{x1}}\,\lambda_{Cx}$
  - $D_x = \mu_x\,F_z$
  - $\mu_x = (p_{D_{x1}} + p_{D_{x2}}\,df_z)\,\lambda_{\mu x}$
  - $E_x = (p_{E_{x1}} + p_{E_{x2}}\,df_z + p_{E_{x3}}\,df_z^2)\,(1 - p_{E_{x4}}\,\mathrm{sign}(\sigma_x + S_{Hx}))\,\lambda_{Ex}$
  - $K_{xk} = F_z\,(p_{K_{x1}} + p_{K_{x2}}\,df_z)\,\exp(-p_{K_{x3}}\,df_z)\,\lambda_{Kx}$
  - $B_x = \frac{K_{xk}}{C_x\,D_x}$
  - $S_{Hx} = (p_{H_{x1}} + p_{H_{x2}}\,df_z)\,\lambda_{Hx}$
  - $S_{Vx} = F_z\,(p_{V_{x1}} + p_{V_{x2}}\,df_z)\,\lambda_{Vx}$

- Force latérale (glissement latéral pur)

$$F_{y_{p_0}} = D_y \sin(C_y \arctan(B_y\,(\beta + S_{H_y}) - E_y\,(B_y\,(\beta + S_{H_y}) - \arctan(B_y\,(\beta + S_{H_y}))))) + S_{V_y} \tag{2.129}$$

avec

  - $\gamma_y = \gamma\,\lambda_{\gamma y}$
  - $C_y = p_{C_{y1}}\,\lambda_{Cy}$
  - $D_y = \mu_y\,F_z$
  - $\mu_y = (p_{D_{y1}} + p_{D_{y2}}\,df_z)(1 - p_{D_{y3}}\,\gamma_y^2)\,\lambda_{\mu y}$
  - $E_y = (p_{E_{y1}} + p_{E_{y2}}\,df_z)(1 - (p_{E_{y3}} + p_{E_{y4}}\,\gamma_y)\,sign(\beta + S_{H_y}))\,\lambda_{Ey}$
  - $K_y = p_{K_{y1}}\,F_{z0}\,\sin\left[2\,\arctan\left(\frac{F_z}{p_{K_{y2}}\,F_{z0}\,\lambda_{Fz0}}\right)\right](1 - p_{K_{y3}}\,\gamma_y^2)\,\lambda_{Kya}$
  - $B_y = \frac{K_y}{C_y\,D_y}$
  - $S_{H_y} = (p_{H_{y1}} + p_{H_{y2}}\,df_z)\lambda_{H_y} + p_{H_{y3}}\,\gamma_y\,\lambda_{Ky\gamma}$
  - $S_{V_y} = F_z\,(p_{V_{y1}} + p_{V_{y2}}\,df_z)\,\lambda_{V_y} + (p_{V_{y3}} + p_{V_{y4}}\,df_z)\,\gamma_y\,\lambda_{Ky}$

Dans le cas où les glissements longitudinaux et latéraux apparaissent de manière simultanée. Les forces longitudinales et latérales s'expriment alors comme suit :

- Forces longitudinales (combiné)

$$F_{x_p} = \frac{G_{xa}}{G_{xa0}}\,F_{x0} \tag{2.130}$$

avec

  - $G_{xa} = \cos\left[C_{xa}\arctan\left\{B_{xa}\,(\beta + S_{H_{xa}}) - E_{xa}\,(B_{xa}\,(\beta + S_{H_{xa}}) - \arctan(B_{xa}(\beta + S_{H_{xa}})))\right\}\right]$
  - $G_{xa0} = \cos\left[C_{xa}\,\arctan\left\{B_{xa}\,S_{H_{xa}} - E_{xa}\,(B_{xa}\,S_{H_{xa}} - \arctan(B_{xa}\,S_{H_{xa}}))\right\}\right]$
  - $B_{xa} = r_{B_{x1}}\,\cos\left[\arctan(r_{Bx2}\,\sigma_x)\right]\,\lambda_{xa}$
  - $C_{xa} = r_{C_{x1}}$
  - $E_{xa} = r_{E_{x1}} + r_{E_{x2}}\,df_z$
  - $S_{Hxa} = r_{Hx1}$

- Forces latérales (combiné)

$$F_{y_p} = \frac{G_{yk}}{G_{yk0}}F_{y0} + S_{Vyk} \tag{2.131}$$

avec

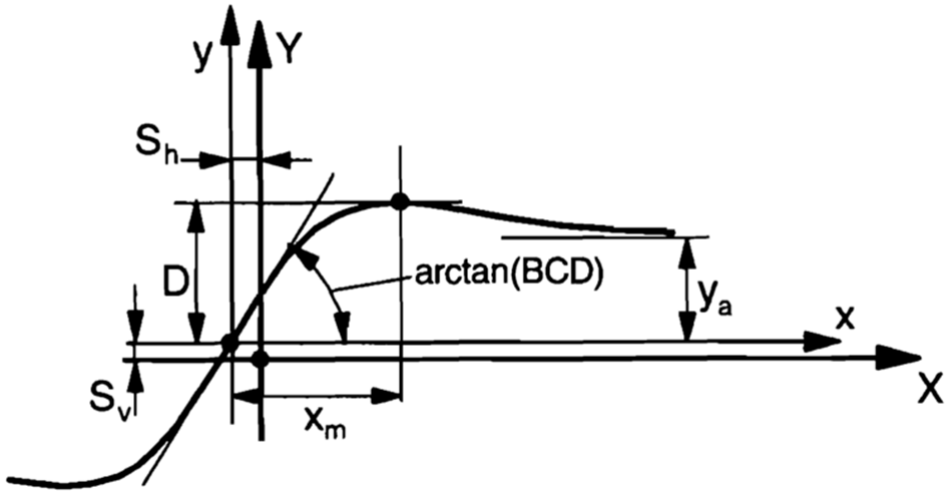



FIGURE 2.35 – Courbe caractéristique suivant le modèle de Pacejka [Pacejka, 1996]

- $G_{yk} = \cos\left[C_{yk}\ \arctan\left\{B_{yk}\,(\sigma_x + S_{H_{yk}}) - E_{yk}\,(B_{yk}(\sigma_x + S_{H_{yk}}) - \arctan(B_{yk}\,(\sigma_x + S_{H_{yk}})))\right\}\right]$
- $G_{yk0} = \cos\left[C_{yk}\ \arctan\left\{B_{yk}\,S_{H_{yk}} - E_{yk}\,(B_{yk}\,S_{H_{yk}} - \arctan(B_{yk}\,S_{H_{yk}}))\right\}\right]$
- $B_{yk} = r_{By1}\ \cos\left[\arctan(r_{By2}\,(\beta - r_{By3}))\right]\ \lambda_{yk}$
- $C_{yk} = r_{Cy1}$
- $E_{yk} = r_{Ey1} + r_{Ey2}\,df_z$
- $S_{Hyk} = r_{Hy1} + r_{Hy2}\,df_z$
- $S_{Vyk} = D_{Vyk}\ \sin\left[r_{Vy5}\ \arctan(r_{Vy6}\,\sigma_x)\right]$
- $D_{Vyk} = \mu_y\,F_z(r_{Vy1} + r_{Vy2}\,df_z + r_{Vy3}\,\gamma)\cos\left[\arctan(r_{Vy4}\,\beta)\right]$

Finalement, la modélisation de Pacejka est donnée par :

**Modélisation pneumatique 6** (Pacejka)**.**

$$\begin{cases} F_{x_p}^{pac} = \dfrac{G_{xa}}{G_{xa0}}\,F_{x0} \\ F_{y_p}^{pac} = \dfrac{G_{yk}}{G_{yk0}}F_{y0} + S_{Vyk} \end{cases} \tag{2.132}$$

Avec la courbe Figure 2.36, on constate que les courbes des efforts latéraux présentent trois zones :

- Une *zone d'adhérence* où le pneumatique a un comportement dynamique linéaire. Plus on augmente l'angle de dérive, plus l'effort transversal croît. La directivité est alors totale.
- Une *zone transitoire* où la courbe est croissante mais non linéaire. Une partie de l'aire de contact glisse. On perd de l'adhérence, les efforts transmis continuent d'augmenter mais de façon moindre. Le véhicule est capable de transmettre des efforts plus importants. La saturation du pneumatique, c'est-à-dire l'effort transversal maximal délivrable délimite l'extrémité de la zone de transition.
- Une *zone de saturation* : Le pneumatique entre dans une zone de glissement. L'effort transversal diminue au fur et à mesure que l'angle de dérive croît. Il y a alors glissement (ou dérapage) du pneumatique.

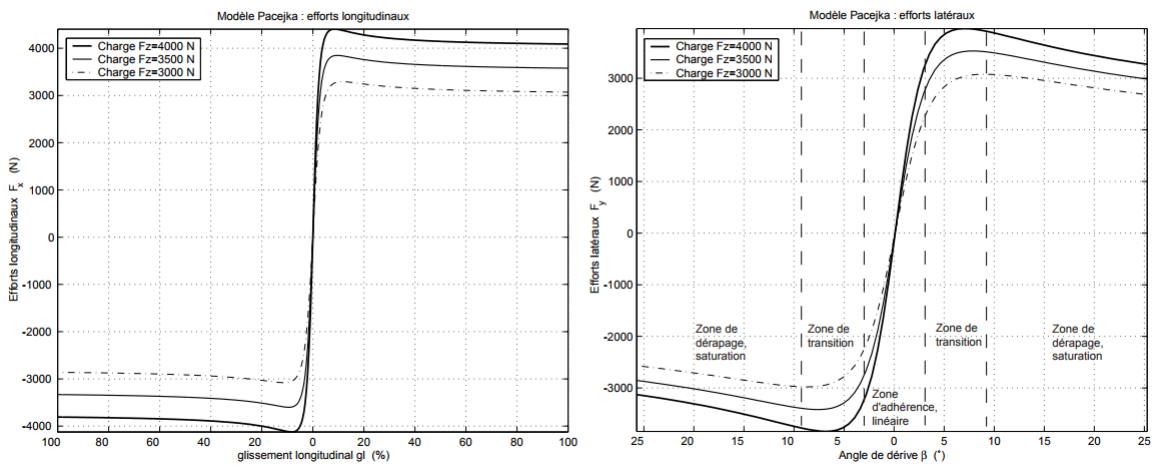



FIGURE 2.36 – Courbes caractéristiques des efforts selon Pacejka pour trois valeurs de charges verticales [Pacejka, 1996]

### 2.7.7 Modèle de Pacejka à l'ordre 3

On considère la force latérale avec glissement latéral uniquement. En reprenant l'équation (2.129) et en négligeant les décalages verticaux $S_{V_y}$ et horizontaux $S_{H_y}$, on obtient :

$$F_{y_p}(\beta) = D_y \sin\left[C_y \arctan\left\{B_y\,\beta - E_y\left(B_y\,\beta - \arctan(B_y\,\beta)\right\}\right]. \tag{2.133}$$

Déterminons le développement à l'ordre 3 en $\beta$ de cette fonction. On rappelle que :

$$\arctan(B_y\,\beta) = B_y\,\beta - \frac{B_y^3\,\beta^3}{3} + o(\beta^3), \tag{2.134}$$

soit :

$$F_{y_p}(\beta) = D_y \sin\left[C_y \arctan\left\{B_y\,\beta - \frac{E_y\,B_y^3\,\beta^3}{3} + o(\beta^3)\right\}\right] \tag{2.135}$$

et

$$\arctan\left(B_y\,\beta - \frac{B_y^3\,E_y}{3}\beta^3 + o(\beta^3)\right) = B_y\,\beta + \beta^3\left(-\frac{B_y^3}{3} - \left(\frac{B_y^3\,E_y}{3}\right)\right) + o(\beta^3), \tag{2.136}$$

ce qui donne :

$$F_{y_p}(\beta) = D_y \sin\left[C_y\,B_y\,\beta - \frac{C_y\,B_y^3}{3}\,(1+E_y)\,\beta^3\right]. \tag{2.137}$$

De plus,

$$\sin\left(C_y\,B_y\,\beta - \frac{C_y\,B_y^3}{3}\,(1+E_y)\,\beta^3 + o(\beta^3)\right) = C_y\,B_y\,\beta + \left(\frac{-(C_y\,B_y)^3}{6} - \frac{C_y\,B_y^3\,(1+E_y)}{3}\right)\beta^3 + o(\beta^3), \tag{2.138}$$

soit

$$F_{y_p}(\beta) = D_y\,C_y\,B_y\,\beta - D_y\left(\frac{(C_y\,B_y)^3}{6} + \frac{C_y\,B_y^3\,(1+E_y)}{3}\right)\beta^3 + o(\beta^3). \tag{2.139}$$

Finalement nous avons :

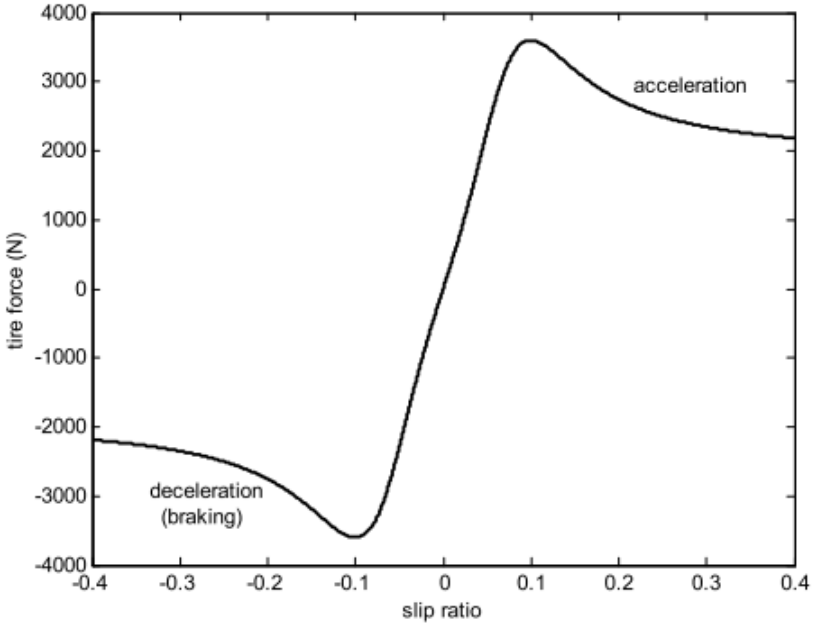



FIGURE 2.37 – Force longitudinale du pneu en fonction du taux de glissement [Rajamani, 2014]

**Modélisation pneumatique 7** (DL à l'ordre 3 du modèle de Pacejka)**.**

$$F_{y_p}^{DL3}(\beta) \simeq B_y\, C_y\, D_y\, \beta - \frac{1}{6}\left(B_y^3\, C_y\, D_y\, \left(C_y^2\,(1+E_y)\right)\right)\, \beta^3. \tag{2.140}$$

Si on considère $F_z = F_{z0}$ constant et les $\lambda = 1$, en reprenant les expressions détaillées à l'équation (2.129) on a :

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{p_{Ky1}\, \sin\left(2\, \arctan \frac{1}{p_{Ky2}}\right)}{p_{Cy1}\, \mu_y}, \\ C_y &= p_{Cy1}, \\ D_y &= \mu_y\, F_z, \\ E_y &= p_{Ey1}(1 - p_{Ey3}\, \mathrm{sign}(\beta)). \end{aligned} \tag{2.141}$$

### 2.7.8 Modèle linéaire

Dans la majorité des cas, l'objectif est de garder le comportement du pneu dans la zone linéaire où la relation entre les efforts appliqués au pneu et les variables de glissements et de dérives peuvent être considérées comme linéaires. De même, pour de petits angles de dérive, la force latérale sur le pneu est proportionnelle à l'angle de dérive du pneu. Les forces longitudinales et latérales des pneus avant et arrière peuvent donc s'écrire :

**Modélisation pneumatique 8** (Linéaire)**.**

$$F_{x_p}^{lin} \simeq C_\sigma\, \sigma_x \tag{2.142}$$

$$F_{y_p}^{lin} \simeq C_\beta \, \beta \tag{2.143}$$

où $C_\beta$ et $C_\sigma$ sont respectivement les *coefficients de rigidité de dérive* et les *coefficients de rigidité longitudinale.*

## 2.8 Modèles utilisés dans la thèse

**Génération de trajectoire** Le modèle cinématique bicyclette présenté précédemment au paragraphe 2.5.1 est basé sur l'hypothèse de roulement sans glissements. Les commandes basées sur ce modèle semblent satisfaisantes lorsque le véhicule se déplace à basse vitesse. Toutefois, en milieu naturel ou à haute vitesse, la référence [Lenain et al., 2006] met en évidence l'inadéquation de ce type de modèle pour le suivi de trajectoire. En effet, le pneumatique est soumis aux phénomènes de glissement en milieu naturel et l'hypothèse de roulement sans glissement n'est plus réaliste. Ce modèle sera donc utilisé seulement pour la *génération de trajectoire.*

**Elaboration de la commande** Les glissements doivent être pris en compte pour préserver la précision du suivi de chemin, indépendamment du chemin à suivre et des conditions d'adhérence. Un second modèle, appelé modèle cinématique étendu, présenté au paragraphe 2.5.2, consiste à prendre en compte ces glissements dans la modélisation. La principale limitation de ce modèle concerne les phénomènes dynamiques du véhicule qui sont totalement négligés. Ce modèle n'est donc pas adapté pour caractériser un véhicule se déplaçant à haute vitesse. Il est donc plus judicieux de prendre un modèle dynamique de véhicule.

Pour *l'élaboration de la commande*, le modèle de synthèse utilisé, et le plus largement répandu, est le modèle bicyclette dynamique à 3 DDL (2.6.1). Bien que son domaine de validité soit largement plus réduit, comparé à des modèles plus complexes à 10 ou 14 DDL, il s'avère être suffisant pour représenter les non-linéarités du véhicule. Toutefois, lors de dynamiques importantes du véhicule, il est nécessaire d'ajouter la prise en compte des transferts de charge et une modélisation des pneumatiques. En effet, la prise en compte des transferts de charge via la connaissance des forces verticales va permettre d'aller au-delà des limitations inhérentes au modèle bicyclette (il regroupe sur une unique roue l'ensemble des contributions des roues gauche et droite d'un même train). Ces transferts de charge modifient les forces verticales exercées par le sol sur le véhicule au niveau des 4 points de contact roue/sol et jouent donc un rôle essentiel dans la production par les pneumatiques des forces longitudinales et latérales. Villagra montre dans sa thèse [Villagra, 2006] que les transferts de charge peuvent être pris en compte par le biais d'une rigidité de dérive variable et affirme qu'un modèle de type bicyclette où les pneumatiques et les trains sont bien modélisés est plus réaliste qu'un autre modèle où roulis et tangage seraient pris en compte, mais où le comportement des pneus serait grossièrement approximé. La modélisation des pneumatiques ne se fera donc pas via une approche simplement linéaire où la rigidité de dérive est supposée constante, comme cela peut être le cas dans la majorité des travaux. Le modèle de Pacejka ne sera pas utilisé ici car difficilement exploitable au vu du grand nombre de paramètres à identifier qui sont fortement variables. Il est adapté pour des applications où les paramètres du véhicule sont maîtrisés et connus. Quand au modèle de Kiencke/Burckhardt, même si le nombre de paramètres reste limité (5 paramètres), il introduit un couplage entre les efforts longitudinal et latéral. Ce couplage impose l'estimation du glissement longitudinal $\sigma_x$ et donc la connaissance du rayon sous charge de la roue. De plus, l'hypothèse de paramètres invariants utilisé dans ce modèle n'est pas envisageable pour des applications tout-terrain. Les modèles analytiques s'appuient sur la description physique des phénomènes à l'origine des efforts et permettent de décrire de manière précise la formation de ces efforts. Certaines de ces approches utilisent des modèles théoriques dont la lourdeur calculatoire les rend inutilisables en commande et nécessitent

parfois des paramètres difficiles à obtenir comme la pression du pneu, la gomme, le type de terrain, etc.

Etant donné que le calcul de la commande nécessitera un modèle de pneumatique, celui-ci doit être suffisamment simple et fiable pour être calculé en temps réel. Il doit donc s'agir d'un modèle analytique simplifié mais tout de même assez représentatif du comportement du pneumatique. Il doit prendre en compte les paramètres les plus influents sur la génération des efforts, c'est-à-dire la charge verticale $F_z$, le taux de glissement longitudinal $\sigma_x$, l'angle de dérive $\beta$, le coefficient de friction $\mu$ ainsi que le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ du pneu. Cette grandeur, très importante, apparaît dans tous les modèles de véhicules et relie de manière linéaire les efforts latéraux $F_{y_p}$ et l'angle de dérive $\beta$ dans le domaine des faibles dérives. Le modèle de Dugoff (2.112) regroupe tous ces paramètres importants et présente l'avantage de prendre en considération les dynamiques non linéaires ainsi que le couplage latéral/longitudinal. De plus, les forces longitudinales $F_{x_p}$ et latérales $F_{y_p}$ sont directement reliées de manière transparente aux deux paramètres que nous cherchons à estimer au chapitre 3 : le coefficient de friction $\mu$ et le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$. Nous faisons donc le choix d'utiliser ce modèle de Dugoff pour cette étude théorique.

**Modèle de validation** Enfin pour *le modèle de validation*, les modèles dynamiques à 4 roues sont les modèles les plus représentatifs mais aussi les plus complexes. En effet, les modèles à 10 et 14 ddl (2.6.3 et 2.6.4) sont fortement non-linéaires, les rendant inutilisables pour la synthèse de la commande. Par contre, ils sont largement utilisés pour simuler le comportement du véhicule lors de la validation d'algorithmes embarqués. On supposera pour la validation que le modèle à 10 DDL est suffisamment réaliste pour la plupart des situations. Ce dernier sera combiné à un modèle de Pacejka pour la modélisation des pneumatiques. Il permet d'obtenir un comportement type du véhicule sur lequel les lois de contrôle peuvent être testées et sera donc utilisé pour la création d'un simulateur avancé.

En conclusion, les modélisations retenues sont :

- le modèle cinématique bicyclette pour la génération des consignes à suivre,
- le modèle bicyclette à 3 DDL combiné à un modèle linéaire de pneumatique puis un modèle de Dugoff pour la conception de la loi de commande,
- le modèle dynamique à 10 DDL combiné au modèle de Pacejka utilisé comme modèle de validation.

## 2.9 Simulateur sur matlab/simulink

Le simulateur utilisé pour valider le développement des lois de commande provient de [Polack, 2018]. Il s'agit d'un modèle de véhicule à 10 DDL similaire aux équations présentées partie 2.6.3. Les 10 DDL sont les mouvements longitudinaux (position $x$, vitesse longitudinale $V_x$), latéraux (position $y$, vitesse latérale $V_y$) et verticaux (position $z$, vitesse verticale $V_z$) du centre de gravité $G$ ainsi que les rotations de roulis ($\theta$, $\dot{\theta}$), tangage ($\phi$, $\dot{\phi}$) et lacet ($\psi$, $\dot{\psi}$) et les vitesses de rotation de chacune des quatre roues ($\dot{\omega_1}$, $\dot{\omega_2}$, $\dot{\omega_3}$, $\dot{\omega_4}$).

Les variables d'état sont composées de la position $(x, y, z)$ du centre de gravité $G$ exprimé dans le repère inertiel $\mathscr{R}_i$ , ses vitesses longitudinale $V_x$, latérale $V_y$ et verticale $V_z$ exprimées dans le repère châssis $\mathscr{R}_c$, les rotations et vitesses de roulis $\theta$, $\dot{\theta}$, tangage $\phi$, $\dot{\phi}$ et lacet $\psi$, $\dot{\psi}$ associées à la matrice de passage de $\mathscr{R}_i$ vers $\mathscr{R}_c$ et les vitesses de rotation $\omega_i$ de $\mathscr{R}_{p_i}$ par rapport à $\mathscr{R}_{r_i}$ de chacune des roues (voir chapitre 2 et annexe A pour les notations).

A chaque instant, les variables d'entrées du simulateur correspondent à l'état $X(t)$ du véhicule, les commandes $u(t)$ à appliquer au véhicule et le coefficient de friction du sol $\mu$ :

$$\begin{aligned} X &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15} \quad x_{16})^T \\ &= (x \quad V_x \quad y \quad V_y \quad z \quad V_z \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4)^T \end{aligned}$$

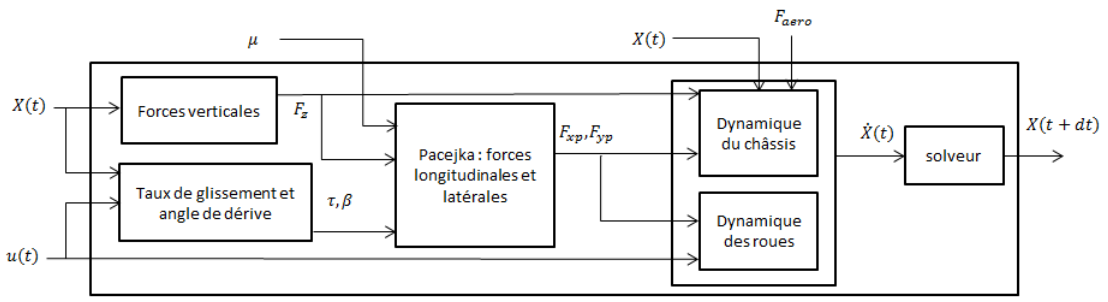



FIGURE 2.38 – Description des modules du simulateur

et les variables de commande sont les couples moteur et de freinage $T_{\omega_i}$ ainsi que les angles de braquage $\delta_i$ des directions :

$$\begin{aligned} U &\triangleq (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; u_4 \;\; u_5 \;\; u_6)^T \\ &= (T_{\omega_1} \; T_{\omega_2} \; T_{\omega_3} \; T_{\omega_4} \; \delta_f \;\; \delta_r)^T. \end{aligned}$$

Le simulateur fournit en sortie une mise à jour des variables d'état $X(t+dt)$ (voir Figure 2.38). Soit finalement :

$$X(t+dt) = f(X, U, \mu, F_{aero}). \tag{2.144}$$

Le simulateur sera décomposé en 5 fonctions et d'un solveur (voir Figure 2.38) dont les descriptions se trouvent ci-après. Les valeurs numériques des différents paramètres utilisés sont détaillées dans le tableau 2.4.

### Calcul des forces verticales

Les forces verticales totales de contact entre la roue et le sol (incluant les forces statiques et dynamiques) sont celles présentées à l'équation (2.84) en supposant qu'il n'y a pas de variation au niveau du sol ($z_s = 0$). Elles s'écrivent :

$$F_{z_i} = m^*_{s_i}\, g - k_{s_i}\, \Delta_{z_{G'_i}} - k_{v_i}\, \dot{\Delta}_{z_{G'_i}} \tag{2.145}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_{z_{G'_1}} = -l_f \, \sin\phi + L_1 \, \cos\phi \, \sin\theta, \\ \Delta_{z_{G'_2}} = -l_f \, \sin\phi - L_2 \, \cos\phi \, \sin\theta, \\ \Delta_{z_{G'_3}} = l_r \, \sin\phi + L_1 \, \cos\phi \, \sin\theta, \\ \Delta_{z_{G'_4}} = l_r \, \sin\phi - L_2 \, \cos\phi \, \sin\theta, \end{cases} \tag{2.146}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_{z_{G'_1}} = -l_f \, \dot{\phi} \, \cos\phi + L_1 \, \dot{\theta} \, \cos\phi \, \cos\theta - L_1 \, \dot{\phi} \, \sin\phi \, \sin\theta, \\ \dot{\Delta}_{z_{G'_2}} = -l_f \, \dot{\phi} \, \cos\phi - L_2 \, \dot{\theta} \, \cos\phi \, \cos\theta + L_2 \, \dot{\phi} \, \sin\phi \, \sin\theta, \\ \dot{\Delta}_{z_{G'_3}} = l_r \, \dot{\phi} \, \cos\phi + L_1 \, \dot{\theta} \, \cos\phi \, \cos\theta - L_1 \, \dot{\phi} \, \sin\phi \, \sin\theta, \\ \dot{\Delta}_{z_{G'_4}} = l_r \, \dot{\phi} \, \cos\phi - L_2 \, \dot{\theta} \, \cos\phi \, \cos\theta + L_2 \, \dot{\phi} \, \sin\phi \, \sin\theta. \end{cases} \tag{2.147}$$

### Calcul du taux de glissement et de l'angle de dérive

Les angles de dérives $\beta_i$ sont calculés à partir de l'équation (C.5) développée à l'annexe C. Avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\epsilon_i := (f, f, r, r)$ et $\vec{V}(G_i/\mathscr{R}_i) = [c](V_{x_i}, V_{y_i}, 0)^{[c]T}$ dans le repère du châssis $\mathscr{R}_c$, développé à l'équation (C.3), on a :

$$\beta_i = \begin{cases} \text{sign}(V_{x_i})\, \delta_{\epsilon_i} - \arctan\left(\dfrac{V_{y_i}}{V_{x_i}}\right) & \text{si} \quad V_{x_i} \neq 0, \\ 0 \quad \text{sinon}, \end{cases} \tag{2.148}$$

où $\delta_f = u(5)$ et $\delta_r = u(6)$.

Le glissement longitudinal est calculé en reprenant l'équation (2.98) :

$$\sigma_{x_i} = \begin{cases} \dfrac{r\,\omega_i - V_{x_{p_i}}}{\max(|V_{x_{p_i}}|, |r\,\omega_i|, |r\,\omega_i - V_{px_i}|)} & \text{si} \quad V_{x_{p_i}} \neq 0, \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.149}$$

Le terme $V_{x_{p_i}}$ représente la vitesse longitudinale du pneu dans le repère roue. On a :

$$\begin{pmatrix} V_{x_{p_i}} \\ V_{y_{p_i}} \\ 0 \end{pmatrix}^{[r_i]} = T_{[e]}^{[r_i]}\, T_{[c]}^{[e]} \begin{pmatrix} V_{x_i} \\ V_{y_i} \\ 0 \end{pmatrix}^{[c]}. \tag{2.150}$$

En posant l'angle de carrossage, de roulis et de tangage nuls, on a :

$$\begin{pmatrix} V_{x_{p_i}} \\ V_{y_{p_i}} \end{pmatrix}^{[r_i]} = \begin{pmatrix} \cos\delta_i & \sin\delta_i \\ -\sin\delta_i & \cos\delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{x_i} \\ V_{y_i} \end{pmatrix}^{[c]}.$$

### Calculs des forces longitudinales et latérales

Les forces longitudinales $F_{x_{p_i}}$ et latérales $F_{y_{p_i}}$ exprimées dans le repère roue $\mathscr{R}_{r_i}$ sont calculées en utilisant le modèle de Pacejka présenté précédemment au paragraphe 2.7.6 par les équations (2.131) et (2.130). Les valeurs numériques utilisées sont celles détaillées dans [Pacejka, 2006]. L'ensemble des coefficients $\lambda$ qui sont des facteurs d'échelles, sont égaux à 1 et les autres coefficients sont détaillés dans le tableau 2.3.

TABLE 2.3 – Coefficients de Pacejka issus de [Pacejka, 2006]

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_{Cx1} = 1.65$ | $p_{Dx1} = 1$ | $p_{Dx2} = 0$ | $p_{Ex1} = -0.5$ | $p_{Ex2} = 0$ | $p_{Ex3} = 0$ | $p_{Ex4} = 0$ |
| $p_{Kx1} = 12$ | $p_{Kx2} = 10$ | $p_{Kx3} = -0.6$ | $p_{Hx1} = 0$ | $p_{Hx2} = 0$ | $p_{Vx1} = 0$ | $p_{Vx2} = 0$ |
| $p_{Cy1} = 1.3$ | $p_{Dy1} = 1$ | $p_{Dy2} = 0$ | $p_{Dy3} = 0$ | | | |
| $p_{Ey1} = -1$ | $p_{Ey2} = 0$ | $p_{Ey3} = 0$ | $p_{Ey4} = 0$ | | | |
| $p_{Ky1} = 10$ | $p_{Ky2} = 1.5$ | $p_{Ky3} = 0$ | $p_{Hy1} = 0$ | $p_{Hy2} = 0$ | $p_{Hy3} = 0.25$ | |
| $p_{Vy1} = 0$ | $p_{Vy2} = 0$ | $p_{Vy3} = 0.15$ | $p_{Vy4} = 0$ | | | |
| $r_{Bx1} = 5$ | $r_{Bx2} = 8$ | $r_{Cx1} = 1$ | $r_{Ex1} = 0$ | $r_{Ex2} = 0$ | $r_{Hx1} = 0$ | |
| $r_{By1} = 7$ | $r_{By2} = 2.5$ | $r_{By3} = 0$ | $r_{Cy1} = 1$ | | | |
| $r_{Ey1} = 0$ | $r_{Ey2} = 0$ | $r_{Hy1} = 0.02$ | $r_{Hy2} = 0$ | | | |
| $r_{Vy1} = 0$ | $r_{Vy2} = 0$ | $r_{Vy3} = -0.2$ | $r_{Vy4} = 14$ | $r_{Vy5} = 1.9$ | $r_{Vy6} = 10$ | |

On obtient ensuite l'expression des forces latérales et longitudinales dans le repère du châssis via les équations (2.42) :

$$\begin{cases} F_{x_i} = F_{x_{p_i}} \cos\delta_{\epsilon_i} - F_{y_{p_i}} \sin\delta_{\epsilon_i}, \\ F_{y_i} = F_{y_{p_i}} \cos\delta_{\epsilon_i} + F_{x_{p_i}} \sin\delta_{\epsilon_i}. \end{cases}$$

où $i \in (1, 2, 3, 4)$ et $\epsilon_i := (f, f, r, r)$.

### Dynamique de l'état $X$

Le modèle utilisé est le modèle dynamique à 10 DDL présenté à l'équation (2.92). On néglige l'angle de cambrage des roues ($\gamma = 0$) dans l'équation de la dynamique de rotation des roues et on néglige les termes croisés d'inertie sur les dynamiques de rotation ($\dot{\phi}\,\dot{\psi} =$

0, $\dot{\theta}\,\dot{\psi} = 0$ et $\dot{\phi}\,\dot{\theta} = 0$). Les dynamiques des coordonnées $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont obtenues à partir des équations (2.5).

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2\,\cos x_{11} - x_4\,\sin x_{11} \\
\dot{x}_2 = x_{12}\,x_4 - x_{10}\,x_6 + \dfrac{1}{m}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{4} F_{xi} - F_{aero}\,\cos x_9 + m\,g\,\sin x_9\right) \\
\dot{x}_3 = x_2\,\sin x_{11} + x_4\,\cos x_{11} \\
\dot{x}_4 = -x_{12}\,x_2 + x_8\,x_6 + \dfrac{1}{m}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{4} F_{yi} - F_{aero}\,\sin x_9\,\sin x_7 - m\,g\,\cos x_9\,\sin x_7\right) \\
\dot{x}_5 = x_6 \\
\dot{x}_6 = \dfrac{1}{m_s}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(-k_{s_i}\,\Delta_{z_{G'_i}} - k_{v_i}\,\dot{\Delta}_{z_{G'_i}}) - F_{aero}\,\phi\right) \\
\dot{x}_7 = x_8 \\
\dot{x}_8 = \dfrac{1}{I_x}\left(x_5\displaystyle\sum_{i=1}^{4} F_{yi} + L_1\,F_{s_1} - L_2\,F_{s_2} + L_1\,F_{s_3} - L_2\,F_{s_4}\right) \\
\dot{x}_9 = x_{10} \\
\dot{x}_{10} = \dfrac{1}{I_y}\left(-x_5\displaystyle\sum_{i=1}^{4} F_{xi} - l_f\,F_{s_1} - l_f\,F_{s_2} + l_r\,F_{s_3} + l_r\,F_{s_4}\right) \\
\dot{x}_{11} = x_{12} \\
\dot{x}_{12} = \dfrac{1}{I_z}\left(-L_1\,(F_{x1} + F_{x3}) + L_2\,(F_{x2} + F_{x4}) + l_f\,(F_{y1} + F_{y2}) - l_r\,(F_{y3} + F_{y4})\right) \\
\dot{x}_{13} = \dfrac{u_1 - r_l\,F_{xp_1}}{I_r} \\
\dot{x}_{14} = \dfrac{u_2 - r_l\,F_{xp_2}}{I_r} \\
\dot{x}_{15} = \dfrac{u_3 - r_l\,F_{xp_3}}{I_r} \\
\dot{x}_{16} = \dfrac{u_4 - r_l\,F_{xp_4}}{I_r}
\end{cases} \tag{2.151}$$

### Bruits de mesures

Soit $\eta$ une mesure. Les erreurs de mesures sont supposées suivre une distribution normale avec un écart-type $\sigma_\eta$ autour d'une valeur moyenne $\bar{\eta}$ (voir Figure 2.39). Etant donné que la zone $\pm 4\,\sigma_\eta$ autour de la valeur moyenne $\bar{\eta}$ dans la distribution gaussienne normale contient plus de $99,99\%$ des valeurs de mesures bruitées, l'écart type pour le bruit appliqué est défini à partir d'une tolérance de $\pm\Delta_{\eta_{\max}}$, tel que :

$$\sigma_\eta \triangleq \frac{\Delta_{\eta_{\max}}}{4}. \tag{2.152}$$

Les équations suivantes montrent les bruits de mesures, supposés blancs, gaussiens, cen-

TABLE 2.4 – Valeurs simulateur HIL

| | | |
|---|---|---|
| $l$ | $2.68872\,m$ | Empattement total : $l = l_f + l_r$ (voir Figure 3.3) |
| $l_f$ | $0.93872\,m$ | Demi-empattement (distance entre le centre de l'essieu avant et le centre de gravité) |
| $l_r$ | $1.75\,m$ | Demi-empattement (distance entre le centre de l'essieu arrière et le centre de gravité) |
| $L$ | $1,5\,m$ | Voie (distance entre les deux roues d'un essieu) |
| $L_1$ | $0.75\,m$ | Demi-voie : distance entre la roue avant gauche et le centre de l'essieu avant |
| $L_2$ | $0.75\,m$ | Demi-voie : distance entre la roue avant droite et le centre de l'essieu avant |
| $m$ | $2788\,kg$ | Masse totale du véhicule |
| $m_s$ | $2300\,kg$ | Masse suspendue du véhicule (châssis+essieu) |
| $m_m$ | $400\,kg$ | Masse non-suspendue du véhicule (4 moyeux de $100\,kg$) |
| $m_r$ | $22\,kg$ | Masse d'une roue |
| $h$ | $0.545\,m$ | Hauteur du centre de gravité |
| $I_x$ | $1049.66\,kg.m^2$ | Moment d'inertie total par rapport à l'axe vertical $\vec{i}_c$ |
| $I_y$ | $2613.89\,kg.m^2$ | Moment d'inertie total par rapport à $\vec{j}_c$ |
| $I_z$ | $2833.32\,kg.m^2$ | Moment d'inertie total par rapport à l'axe vertical $\vec{k}_c$ |
| $r$ | $0.395\,m$ | Rayon des roues |
| $I_r$ | $0.890865\,km.m^2$ | Inertie de la roue autour de l'axe $\vec{j}_p$ |

trés, appliqués aux différentes variables :

$$\begin{cases} \omega_i^{\text{noisy}} = \omega_i + \eta_{\dot{\psi}}(0, \sigma_{\omega_i}), \\ \dot{\psi}^{\text{noisy}} = \dot{\psi} + \eta_{\dot{\psi}}(0, \sigma_{\dot{\psi}}), \\ \dot{\phi}^{\text{noisy}} = \dot{\phi} + \eta_{\dot{\phi}}(0, \sigma_{\dot{\phi}}), \\ \dot{\theta}^{\text{noisy}} = \dot{\theta} + \eta_{\dot{\theta}}(0, \sigma_{\dot{\theta}}), \\ V_x^{\text{noisy}} = V_x + \eta_{V_x}(0, \sigma_{V_x}), \\ V_y^{\text{noisy}} = V_y + \eta_{V_y}(0, \sigma_{V_y}), \\ V_z^{\text{noisy}} = V_z + \eta_{V_z}(0, \sigma_{V_y}) \end{cases} \tag{2.153}$$

où $\eta(\bar{\eta}, \sigma_\eta)$ représente une variable aléatoire gaussienne de moyenne $\bar{\eta}$ et de variance $\sigma_\eta^2$. On suppose les écarts-types des mesures bruitées constants dans le temps et les valeurs choisies sont présentées dans le tableau 2.5.

TABLE 2.5 – Valeurs des écarts-types choisies pour les bruits capteurs

| Sensor : m | $\sigma_\eta$ |
|---|---|
| $\omega_i$ | $0.1 rad/s$ |
| $\dot{\psi}$ | $0.010 rad/s$ |
| $\dot{\phi}$ | $0.010 rad/s$ |
| $\dot{\theta}$ | $0.010 rad/s$ |
| $V_x$ | $0.03 m/s$ |
| $V_y$ | $0.03 m/s$ |
| $V_z$ | $0.03 m/s$ |

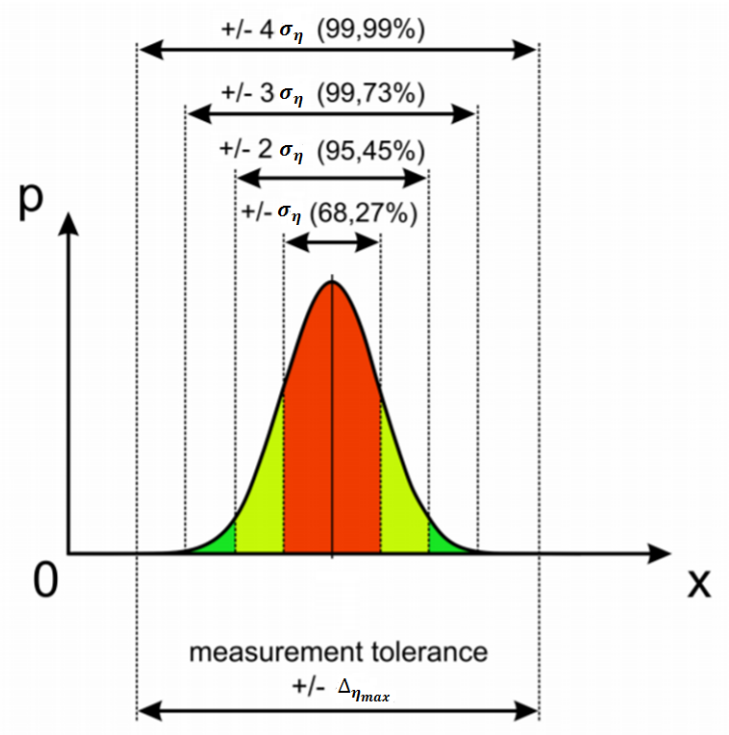



FIGURE 2.39 – Distribution normale

# Chapitre 3

# Estimation

On cherchera dans cette partie à estimer le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{max}}$. La connaissance de ces deux paramètres permet de caractériser le comportement du pneu sur l'ensemble des valeurs d'angles de dérive $\beta$, et donne la tendance sur l'évolution future de la force latérale. On déterminera donc à chaque instant, le profil de la courbe de la force latérale, sa norme et son évolution à l'instant t. Les courbes des forces latérales à l'avant et à l'arrière sont ainsi connues ce qui permet de connaitre un profil de commandabilité à l'avance et de faire des compromis. Un train à la limite de dérapage sera moins sollicité que l'autre train. La rigidité de dérive est une information centrale car elle intervient de manière cruciale sur la stabilité du véhicule. Ces paramètres fournissent donc d'importantes informations concernant les conditions au sol et sont bénéfiques dans un contexte de boucle fermée pour la conception des lois de contrôle, comme nous le verrons au chapitre suivant.

## 3.1 Etat de l'art

La force latérale $F_y$ est principalement influencée par l'angle de dérive $\beta$. Comme on peut le voir Figure 3.1 pour de petites valeurs d'angle de dérive, la force latérale est proportionnelle à l'angle de dérive (voir équation (2.143)). Pour des valeurs plus grandes, la force latérale sature (voir le paragraphe 2.7 pour les différentes modélisations des pneumatiques).

Les lois de contrôle pour véhicule autonome sont majoritairement basées sur l'hypothèse de comportement linéaire du pneumatique, c'est-à-dire que les efforts latéraux sont considérés comme étant des fonctions affines de la dérive pneumatique (voir (2.143)). Une telle hypothèse n'est valide que pour de petits angles de dérive (voir Figure 3.1) et le comportement du pneumatique devient fortement non linéaire lors de manœuvres sévères, sur terrains glissants ou à haute vitesse.

Pour garder cette hypothèse valide, les angles de dérive doivent rester au sein de la zone linéaire du pneumatique, ce qui nous amène à estimer l'angle de dérive seuil pour lequel on sort de la zone linéaire. Cette information peut être obtenue à travers la connaissance du *coefficient de friction latérale maximale* $\mu_{y_{max}}$. Ce dernier est défini comme étant le rapport entre la force latérale maximale $F_{y_{max}}$ et la force verticale $F_z$ :

$$\mu_{y_{max}} \triangleq \frac{F_{y_{max}}}{F_z}. \tag{3.1}$$

On trouve dans le tableau 3.1 quelques valeurs typiques de $\mu_{y_{max}}$ pour différents types de revêtement. Plus $\mu_{y_{max}}$ est proche de 1, plus $F_{y_{max}}$ est grand.

Un autre paramètre important est le *coefficient de rigidité de dérive* $C_\beta$, défini comme la pente à l'origine de la courbe de $F_{y_p}$ en fonction de $\beta$ ((2.143)). La connaissance du coefficient de rigidité de dérive est nécessaire dans le contexte d'une commande en boucle fermée comme on le verra dans la suite. Ces deux paramètres suffisent à traduire l'interaction entre le pneu

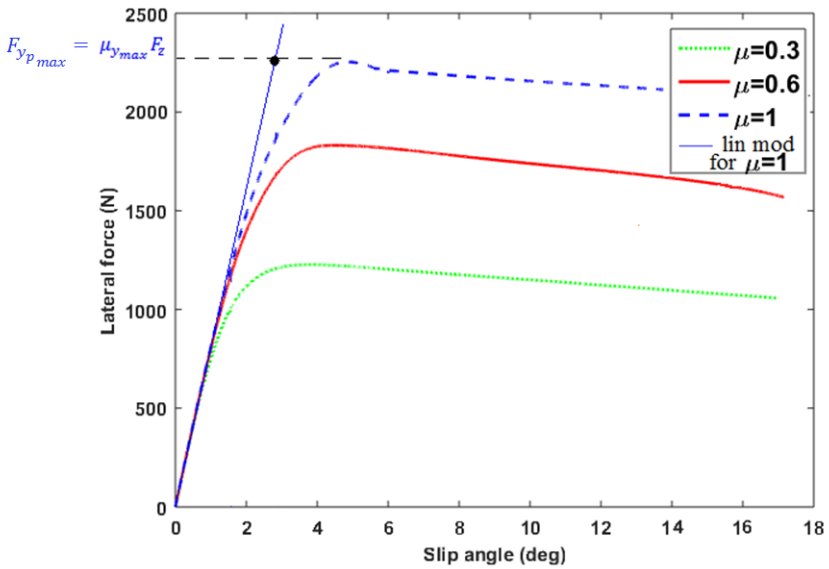



FIGURE 3.1 – Courbe de la force latérale en fonction de l'angle de dérive pour différentes valeurs de coefficient de friction à partir d'un modèle de Pacejka [Pacejka, 2006] (lin mod = modèle linéaire)

TABLE 3.1 – Quelques valeurs typiques de $\mu$ [Yingmin Jia, 2000], [Yakub and Mori, 2015], [Ghandour et al., 2010]

| Road conditions | Asphalt dry | Asphalt wet | Snow | Ice |
|---|---|---|---|---|
| Approximated $\mu$ | 0.9-1.0 | 0.5-0.8 | 0.2-0.3 | 0.15-0.2 |

et le sol si on fait l'hypothèse de découplage entre les forces latérales et longitudinales (par exemple (2.129), (2.114)). Connaître précisément et en temps-réel ces paramètres permet de les intégrer dans une loi de contrôle et d'en augmenter les performances.

Les nombreux facteurs qui affectent ces deux paramètres $\mu_{y_{max}}$ et $C_\beta$, comme par exemple le type de surface, le type de pneumatique, la température, la pression des pneumatiques, rendent l'identification de ces paramètres difficile et ont fait l'objet de nombreuses recherches. Pour un type de pneumatique donné, la charge verticale et la pression de gonflage des pneumatiques sont les principales variables [Gillespie, 2000]. La plupart des approches estimant les coefficients de rigidité de dérive utilisent un modèle linéaire adaptatif. Par exemple, dans [Lenain and Thuilot, 2012] et [Denis et al., 2015], le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ est estimé à partir d'un algorithme de descente de gradient et [Baffet et al., 2006] utilise un filtre de Kalman.

Concernant les travaux portant sur le coefficient de friction, différentes méthodes peuvent être citées. Certaines cherchent à estimer les paramètres qui affectent le coefficient de friction et essayent de prédire le coefficient de friction maximale en utilisant des modèles de friction. Ces méthodes requièrent l'utilisation de capteurs spécifiques (capteurs sur les pneus, capteurs optiques ou acoustiques) ( [Eichhorn and Roth, 1992], [Breuler et al., 1992], [Bachmann, 1995]). D'autres approches mesurent les effets des changements de friction sur le comportement du pneu et développent des estimateurs basés sur la connaissance du glissement longitudinal [Andersson, 2005]. L'idée derrière ces estimateurs est d'utiliser la courbe de friction en fonction du glissement longitudinal pour identifier le coefficient de friction latérale maximale. La pente de cette courbe est reliée au type de route sur lequel le véhicule se déplace et permet d'établir une classification. Certains de ces estimateurs fonctionnent pendant la phase de freinage [Uchanski, 2001], alors que d'autres pendant la phase de traction [Ray, 1997], [Gustafsson, 1997]. Ces approches requièrent un glissement minimal du pneu à travers

les accélérations, les décélérations ou les manœuvres de braquage et rencontrent des problèmes de calibration. La pente de la courbe permettant de classifier le type de route est sensible aux caractéristiques du pneumatique. On trouve également des recherches où les estimateurs sont développés à partir de modèles théoriques de forces comme le modèle de Burckhardt ( [Castro et al., 2012], [Tanelli et al., 2008]) ou de LuGre ( [Senatore and Sharifzadeh, 2018], [Sharifzadeh et al., 2016]). Ces modèles sont complexes et les deux paramètres à estimer n'apparaissent pas clairement dans l'expression des forces. Les références [Ahn et al., 2009] et [Hu et al., 2015] utilise un modèle de Brush dans lequel les deux paramètres apparaissent clairement mais seul le coefficient de friction est estimé. Toutes ces méthodes sont basées sur des approches d'ajustement de courbe et d'identification paramétrique pour minimiser l'erreur entre la force développée au niveau du pneumatique et celle donnée par le modèle théorique. On peut trouver dans [Hahn et al., 2002] une méthode d'estimation du coefficient de friction et du coefficient de rigidité de dérive. L'estimation est faite à partir d'un modèle latéral de pneumatique et est basée sur un modèle paramétrique et une loi adaptative.

On propose dans cette section un algorithme d'estimation pour le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$ et le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ basé sur des mesures obtenues à partir d'une centrale inertielle, comme la vitesse de lacet $\dot{\psi}$, les vitesses longitudinale $V_x$ et latérale $V_y$, des mesures d'angle de braquage $\delta$ et de vitesse de rotation des roues $\omega$ (voir figure 3.2). Une mesure du couple des roues $T_\omega$ est également nécessaire via un capteur additionnel ou dans notre cas, obtenue via la loi de contrôle dans un contexte de boucle fermée. Ces mesures permettent de calculer les angles de dérive $\beta$, les forces verticales $F_z$ et les forces longitudinales $F_x$ nécessaires à l'estimation des forces latérales $F_y$. Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet d'une publication à la conférence ITSC [Li et al., 2019b] ainsi que d'un dépôt de brevet (numéro de dépôt : 1912014).

## 3.2 Filtrage de Kalman

L'algorithme d'estimation présenté dans ce chapitre nécessite la connaissance des variables suivantes : $\dot{V}_x$, $\dot{V}_y$, $\dot{\omega}_i$ et $\ddot{\psi}$ (voir tableau 3.2) que l'on obtient à partir des mesurées bruitées $V_x^{\text{noisy}}$, $V_y^{\text{noisy}}$, $\omega_i^{\text{noisy}}$, $\dot{\psi}^{\text{noisy}}$ (voir (2.153)).

Détaillons le cas pour la variable $V_x$, qui sera applicable à toutes les autres variables que l'on cherchera à estimer.

A partir de la mesure bruitée $V_x^{\text{noisy}}$ de $V_x$, on cherche à déterminer $\dot{V}_x$. Les instants de mesures sont notés $t_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $V_x(t_n)$, $\dot{V}_x(t_n)$, $\ddot{V}_x(t_n)$ sont les valeurs à l'instant $t_n$. La mesure de $V_x(t_n)$ bruitée est notée $y_n$ telle que : $y_n = V_x(t_n) + b_n$. On suppose $\ddot{V}_x$ constante entre deux observations consécutives et aléatoire. On suppose de plus que $\ddot{V}_x(t_n)$ est un bruit blanc au sens large, stationnaire et centré :

$$\begin{aligned} E[\ddot{V}_x(t_n)] &= 0, \\ E[\ddot{V}_x(t_n)\,\ddot{V}_x(t_m)] &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$, on a :

$$\dot{V}_x(t) = \dot{V}_x(t_n) + \int_{t_n}^{t} \ddot{V}_x(t_n)\, d\tau = \dot{V}_x(t_n) + \ddot{V}_x(t_n)(t - t_n) \tag{3.3}$$

et

$$V_x(t_{n+1}) = V_x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{V}_x(t)\, dt = V_x(t_n) + \dot{V}_x(t_n)(t_{n+1} - t_n) + \frac{\ddot{V}_x(t_n)}{2}(t_{n+1} - t_n)^2 \tag{3.4}$$

Posons $\Delta t \triangleq t_{n+1} - t_n$ et $X_n \triangleq (V_x(t_n), \dot{V}_x(t_n))^T$ le vecteur d'état. Les équations précédentes

donnent l'équation d'état :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \\ (\Delta t) \end{pmatrix} \ddot{V}_x(t_n) \\ &= A_n\, X_n + B_n\, U_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{pmatrix}$ et $U_n = \ddot{V}_x(t_n)$.

L'équation d'observation donne :

$$\begin{aligned} V_x^{\text{noisy}}(t_n) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} X_n + m_{V_x}(t_n) \\ &= H\, X_n + b_n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. On suppose la durée entre deux observations consécutives constante, égale à $\Delta t$. Dans ce cas, les équations sont stationnaires : $A_n = A$ et $B_n = B$. On suppose également les bruits stationnaires de variance $R$ pour $(m_{V_x}(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et de variance $Q$ pour $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi les équations du filtre de Kalman peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1/k} &= A\, \hat{X}_{k/k}, \\ P_{k+1/k} &= A\, P_{k/k}\, A^T + B\, Q\, B^T, \\ R^{\epsilon}_{k+1} &= R + H\, P_{k+1/k}\, H^T, \\ \epsilon_{k+1/k} &= y_{k+1} - H\, \hat{X}_{k+1/k}, \\ K^f_{k+1} &= P_{k+1/k}\, H^T\, (R^{\epsilon}_{k+1})^{-1}, \\ P_{k+1/k+1} &= P_{k+1/k} - K^f_{k+1}\, R^{\epsilon}_{k+1}\, (K^f_{k+1})^T, \\ \hat{X}_{k+1/k+1} &= \hat{X}_{k+1/k} + K^f_{k+1}\, \epsilon_{k+1/k} \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec les conditions initiales $\hat{X}_{0/-1}$ et $P_{0/-1} = P_0$ ainsi que $Q$ et $R$ détaillés dans le tableau 3.2.

TABLE 3.2 – Variables accessibles après filtrage

| Variables | Mesures bruitées | Estimées | $\hat{X}_{0/-1}$ | $P_0$ | $Q$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_x$ | $V_x^{\text{noisy}}$ | $\hat{V}_x$, $\hat{\dot{V}}_x$ | $\begin{pmatrix} V_{x_0} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ | 100 | $\sigma^2_{V_x}$ |
| $V_y$ | $V_y^{\text{noisy}}$ | $\hat{V}_y$, $\hat{\dot{V}}_y$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ | 100 | $\sigma^2_{V_y}$ |
| $V_z$ | $V_z^{\text{noisy}}$ | $\hat{V}_z$, $\hat{\dot{V}}_z$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ | 100 | $\sigma^2_{V_z}$ |
| $\omega$ | $\omega^{\text{noisy}}$ | $\hat{\omega}$, $\hat{\dot{\omega}}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ | 100 | $\sigma^2_{\omega}$ |
| $\dot{\psi}$ | $\dot{\psi}^{\text{noisy}}$ | $\hat{\dot{\psi}}$, $\hat{\ddot{\psi}}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ | 100 | $\sigma^2_{\dot{\psi}}$ |
| $\dot{\phi}$ | $\dot{\phi}^{\text{noisy}}$ | $\hat{\dot{\phi}}$ , $\hat{\ddot{\phi}}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ | 100 | $\sigma^2_{\dot{\phi}}$ |
| $\dot{\theta}$ | $\dot{\theta}^{\text{noisy}}$ | $\hat{\dot{\theta}}$ , $\hat{\ddot{\theta}}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ | 1000 | $\sigma^2_{\dot{\theta}}$ |

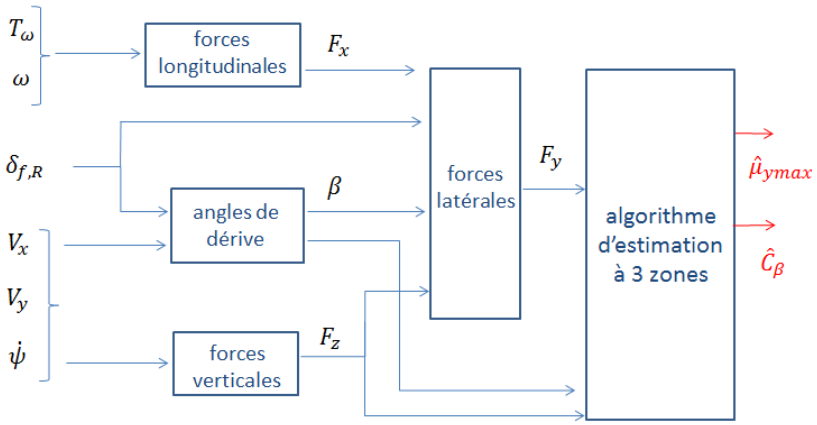



FIGURE 3.2 – Estimation de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{max}}$

## 3.3 Estimation des efforts latéraux

L'algorithme d'estimation est décomposé en plusieurs modules comme présenté à la Figure 3.2 et les paramètres nécessaires sont calculés ci-dessous. Les notations sont celles introduites au chapitre 2 et résumées en annexe A. Les différents modules sont les suivants et sont détaillés ci-après :

- estimation des forces longitudinales
- estimation des angles de dérive
- estimation des forces verticales
- estimation des forces latérales
- estimation des coefficients de rigidité de dérive $C_\beta$ et du coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{max}}$.

**Forces longitudinales**
Concernant les forces longitudinales, elles sont calculées à partir de la dynamique de rotation des roues (voir équation (2.46)) :

$$F_{x_p} = \frac{T_\omega - I_r\,\dot{\omega}}{r}. \tag{3.8}$$

Elle est obtenue à partir de l'estimation des accélérations angulaires des roues et de la mesure du couple aux roues.

**Algorithm 1** Calculer les forces longitudinales $\hat{F}_{x_{p_i}}$

**Require:** $I_r$, $r$
  **Inputs :** $\dot{\hat{\omega}}_i$, $T_{\omega_i}$
  **Description :**
  $\hat{F}_{x_p} \leftarrow \frac{T_\omega - I_r\,\dot{\hat{\omega}}}{r}$
  **return** $\hat{F}_{x_{p_i}}$

**Angle de dérive**
Les angles de dérive sont calculés analytiquement avec les formules suivantes (voir (2.102) et C) à partir des informations issues de la centrale inertielle qui permettent d'estimer $V_x$, $V_y$

et $\dot{\psi}$.

$$\beta_1 = \delta_1 - \arctan\left(\frac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x - L_1\,\dot{\psi}}\right),$$
$$\beta_2 = \delta_2 - \arctan\left(\frac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x + L_2\,\dot{\psi}}\right),$$
$$\beta_3 = \delta_3 - \arctan\left(\frac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x - L_3\,\dot{\psi}}\right),$$
$$\beta_3 = \delta_4 - \arctan\left(\frac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x + L_4\,\dot{\psi}}\right).$$

**Algorithm 2** Calculer les angles de dérive $\hat{\beta}_i$

**Require:** $l_f$, $l_r$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$

**Inputs :** $\dot{\hat{\psi}}$, $\hat{V}_x$, $\hat{V}_y$

**Description :**

$$\hat{\beta}_1 \leftarrow \delta_1 - \arctan\left(\frac{\hat{V}_Y + l_f\,\dot{\hat{\psi}}}{\hat{V}_x - L_1\,\dot{\hat{\psi}}}\right)$$
$$\hat{\beta}_2 \leftarrow \delta_2 - \arctan\left(\frac{\hat{V}_Y + l_f\,\dot{\hat{\psi}}}{\hat{V}_x + L_2\,\dot{\hat{\psi}}}\right)$$
$$\hat{\beta}_3 \leftarrow \delta_3 - \arctan\left(\frac{\hat{V}_Y - l_r\,\dot{\hat{\psi}}}{\hat{V}_x - L_3\,\dot{\hat{\psi}}}\right)$$
$$\hat{\beta}_4 \leftarrow \delta_4 - \arctan\left(\frac{\hat{V}_Y - l_r\,\dot{\hat{\psi}}}{\hat{V}_x + L_4\,\dot{\hat{\psi}}}\right)$$

**return** $\hat{\beta}_i$

#### Forces verticales

Les forces verticales $F_z$ déterminent les forces maximales longitudinale $F_{x_p}$ et latérale $F_{y_p}$ disponibles. Beaucoup de recherches ont simplifié l'estimation des forces verticales en négligeant les perturbations de la route ainsi que l'effet des suspensions. Une manière d'estimer, détaillée ci-dessous, est de se baser sur un calcul statique en ignorant la dynamique des suspensions, et en considérant le poids du véhicule $m\,g$, la position du centre de gravité $G$, les accélérations longitudinale $a_x$ suivant $\vec{i}_c$ et latérale $a_y$ suivant $\vec{j}_c$ [Kiencke and Nielsen, 2000], [Doumiati et al., 2012]. Le calcul des forces est détaillé dans la partie 2.6.3 à l'équation (2.75) que l'on rappelle ici :

$$\begin{cases} F_{z_1} = m\left(\frac{l_r}{l}\,g - \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{L_2}{L} - m\left(\frac{l_r}{l}\,g - \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{h}{L}\,\frac{a_y}{g}, \\ F_{z_2} = m\left(\frac{l_r}{l}\,g - \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{L_1}{L} + m\left(\frac{l_r}{l}\,g - \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{h}{L}\,\frac{a_y}{g}, \\ F_{z_3} = m\left(\frac{l_f}{L}\,g + \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{L_4}{L} - m\left(\frac{l_f}{l}\,g + \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{h}{L}\,\frac{a_y}{g}, \\ F_{z_4} = m\left(\frac{l_f}{l}\,g + \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{L_3}{L} + m\left(\frac{l_f}{l}\,g + \frac{h}{l}\,a_x\right)\frac{h}{L}\,\frac{a_y}{g}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Lorsque le véhicule accélère, la force d'entraînement due à l'accélération longitudinale $a_x$ au niveau du centre de gravité engendre un couple de tangage qui réduit la force verticale sur les roues avant et augmente celle sur les roues arrières. Lorsque le véhicule se met à tourner,

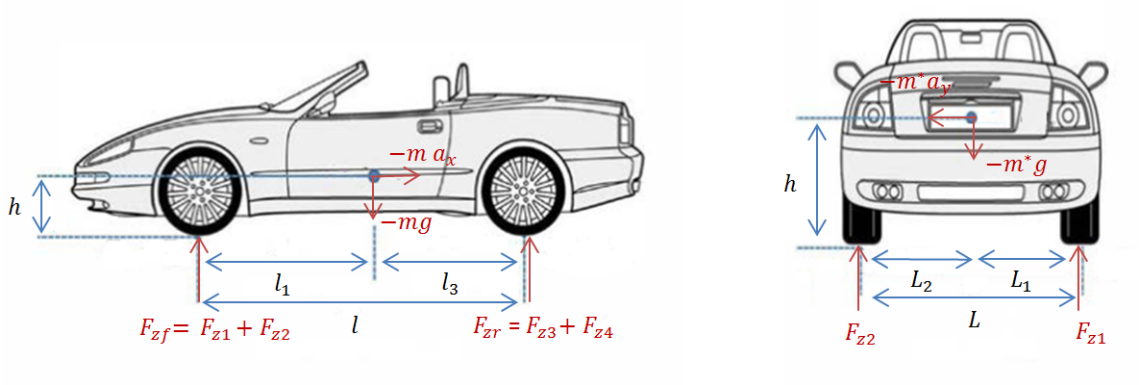



FIGURE 3.3 – Répartition des forces verticales

l'accélération latérale $a_y$ produit un couple de roulis qui augmente la charge verticale sur le côté extérieur au virage et réduit celle sur le côté intérieur.

Si on néglige le couplage entre les accélérations longitudinales et latérales, les forces verticales se résument à :

$$\begin{cases} F_{z_1} = m\left(\dfrac{L_2\,l_r}{L\,l}\,g - \dfrac{L_2\,h}{L\,l}\,a_x - \dfrac{h\,l_r}{L\,l}\,a_y\right), \\ F_{z_2} = m\left(\dfrac{L_1\,l_r}{L\,l}\,g - \dfrac{L_1\,h}{L\,l}\,a_x + \dfrac{h\,l_r}{L\,l}\,a_y\right), \\ F_{z_3} = m\left(\dfrac{L_4\,l_f}{L\,l}\,g + \dfrac{L_4\,h}{L\,l}\,a_x - \dfrac{h\,l_f}{L\,l}\,a_y\right), \\ F_{z_4} = m\left(\dfrac{L_3\,l_f}{L\,l}\,g + \dfrac{L_3\,h}{L\,l}\,a_x + \dfrac{h\,l_f}{L\,l}\,a_y\right). \end{cases} \tag{3.10}$$

*Remarque* 3.3.1. Une autre façon d'estimer les forces verticales est de passer par l'étude de la dynamique des suspensions (voir partie 2.6.4) [Doumiati et al., 2012]. En effet, en posant

$$F_{z_i} \triangleq k_{u_i}\,(z_{u_i} - z_{s_i}),$$

et en remplaçant avec (2.94), on a :

$$F_{z_i} = k_{s_i}\,(\Delta_{z_{G_i}} - z_{u_i}) + k_{v_i}\,(\dot{\Delta}_{z_{G_i}} - \dot{z}_{u_i}) - m_{ri}\,\ddot{z}_{ui}, \tag{3.11}$$

cela constitue un estimateur dynamique pour les forces verticales mais nécessite des capteurs de mesures de l'accélération verticale $\ddot{z}_{ui}$, de la déformation des suspensions $z_{G_i} - z_{u_i}$ et de la vitesse de déformation $\dot{z}_{G_i} - \dot{z}_{u_i}$. Ces dernières mesures nécessitent des capteurs qui ne sont pas présents sur notre véhicule. A cela se rajoutent la complexité à modéliser convenablement la dynamique des suspensions et la difficulté à considérer les perturbations de la route.

**Algorithm 3** Calculer les forces verticales $\hat{F}_{z_i}$

**Require:** $l_f$, $l_r$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$, $h$, $m$, $g$
  **Inputs :** $\hat{V}_x$, $\hat{V}_y$, $\dot{\hat{\psi}}$
  **Description :**
  $\hat{a}_x \leftarrow \dot{\hat{V}}_x - \hat{V}_y\,\dot{\hat{\psi}}$ from (2.38)
  $\hat{a}_y \leftarrow \dot{\hat{V}}_y + \hat{V}_x\,\dot{\hat{\psi}}$ from (2.38)
  $\hat{F}_{z_i}$ from (3.10)
  **return** $\hat{F}_{z_i}$

**Forces latérales**

A partir de la connaissance de ces trois données $(F_{x_p}, \beta, F_z)$, il est possible d'estimer les forces latérales $F_{y_p}$. Certaines méthodes utilisent des modèles de pneumatiques pour estimer les forces latérales essieu par essieu mais en négligeant les forces longitudinales arrières [Baffet et al., 2006] et [Baffet et al., 2008a]. D'autres méthodes sont aussi basées sur des modèles de pneumatiques mais considèrent des modèles de véhicules à 4 roues et estiment ensuite les forces à l'aide d'un filtre de Kalman étendu [Doumiati et al., 2010], [Dakhlallah et al., 2008], [Doumiati et al., 2012] ou d'un filtre de Kalman "unscented" [Doumiati et al., 2009]. Dans notre cas, on ne souhaite pas utiliser un modèle de force pour estimer les forces latérales $F_{y_p}$ car un modèle de force sera déjà utilisé pour estimer les variables $C_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$. De plus, ne pas utiliser de modèles complexes de forces permet de gagner en temps de calcul et d'augmenter la robustesse comparé aux variations des conditions de la route. Par exemple, [Doumiati et al., 2008], [Baffet et al., 2009], [M'Sirdi et al., 2005] et [Baffet et al., 2008b] n'utilisent pas de modèle de forces mais négligent les forces longitudinales arrière et estiment les forces latérales par essieu grâce à un observateur.

[Yang et al., 2014] estime les forces latérales sans utiliser de modèle de pneumatiques mais en se basant sur le calcul des moments $\mathcal{M}_G$ au centre de gravité $G$ ainsi qu'au centre de chaque roue $\mathcal{M}_{G_i}$. En adaptant l'algorithme de [Yang et al., 2014] aux véhicules à deux trains directeurs, l'application du théorème du moment dynamique ((B.26) et (B.27)) en projection suivant $\vec{k}_c$ donne :

$$\begin{cases} \vec{\delta}_G(G/\mathscr{R}_i) \cdot \vec{k}_c = \vec{\mathcal{M}}_G \cdot \vec{k}_c, \\ \vec{\delta}_G(G/\mathscr{R}_i) \cdot \vec{k}_c = I_z \ddot{\psi} \end{cases} \tag{3.12}$$

avec

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{F}_i. \tag{3.13}$$

et

$$\overrightarrow{F}_i^{[r_i]} = \begin{pmatrix} F_{x_{p_i}} \\ F_{y_{p_i}} \\ 0 \end{pmatrix}^{[r_i]}. \tag{3.14}$$

La formule de changement de point du moment dynamique (B.28) donne :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_{G_i} = \vec{\mathcal{M}}_G + m\,(\overrightarrow{a_G} \wedge \overrightarrow{GG_i}), \\ \vec{\mathcal{M}}_{G_i} = \displaystyle\sum_{j \neq i, i=1}^{4} \overrightarrow{G_iG_j} \wedge \vec{F}_i. \end{cases} \tag{3.15}$$

où $\overrightarrow{a_G}$ est le vecteur accélération au point $G$. On pose :

$$\vec{F}_{x_{p_i}} \triangleq (\vec{F}_i \cdot \vec{i}_c) \cdot \vec{i}_c,$$

$$\vec{F}_{y_{p_i}} \triangleq (\vec{F}_i \cdot \vec{j}_c) \cdot \vec{j}_c,$$

$$T_{x_0} \triangleq \left( \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{F}_{x_{p_i}} \right) \cdot \vec{k}_c,$$

$$T_{y_0} \triangleq \left( \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{F}_{y_{p_i}} \right) \cdot \vec{k}_c,$$

$$T_{x_i} \triangleq \left( \sum_{j \neq i, i=1}^{4} \overrightarrow{G_iG_j} \wedge \vec{F}_{x_{p_i}} \right) \cdot \vec{k}_c$$

et

$$T_{y_i} \triangleq \left( \sum_{j \neq i, i=1}^{4} \overrightarrow{G_i G_j} \wedge \vec{F}_{y_{p_i}} \right) \cdot \vec{k}_c$$

où $T_{x_\bullet}$ et $T_{y_\bullet}$ incluent respectivement les termes dépendant des forces longitudinale et latérale et s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} T_{x_0} = F_{x_{p_1}} \left(l_f \sin\delta_f - L_1 \cos\delta_f\right) + F_{x_{p_2}} \left(l_f \sin\delta_f + L_2 \cos\delta_f\right) \\ \qquad - F_{x_{p_3}} \left(l_r \sin\delta_r + L_3 \cos\delta_r\right) + F_{x_{p_4}} \left(L_4 \cos\delta_r - l_r \sin\delta_r\right), \\ T_{x_1} = F_{x_{p_2}} L_2 \cos\delta_f - F_{x_{p_3}} \left(l_f + l_r\right) \sin\delta_r + F_{x_{p_4}} \left(L_4 \cos\delta_r - l \sin\delta_r\right), \\ T_{x_2} = -F_{x_{p_1}} L_1 \cos\delta_f - F_{x_{p_3}} \left(l \sin\delta_r + L_3 \cos\delta_r\right) - F_{x_{p_4}} l \sin\delta_r, \\ T_{x_3} = F_{x_{p_1}} l \sin\delta_f + F_{x_{p_2}} \left(l \sin\delta_f + L_2 \cos\delta_f\right) + F_{x_{p_4}} L_4 \cos\delta_r, \\ T_{x_4} = F_{x_{p_1}} \left(l \sin\delta_f - L_1 \cos\delta_f\right) + F_{x_{p_2}} l \sin\delta_f - F_{x_{p_3}} L_3 \cos\delta_r. \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} T_{y_0} = F_{y_{p_1}} \left(l_f \cos\delta_f + L_1 \sin\delta_f\right) + F_{y_{p_2}} \left(l_f \cos\delta_f - L_2 \sin\delta_f\right) \\ \qquad + F_{y_{p_3}} \left(-l_r \cos\delta_r + L_3 \sin\delta_r\right) - F_{y_{p_4}} \left(l_r \cos\delta_r + L_4 \sin\delta_r\right), \\ T_{y_1} = -F_{y_{p_2}} L_2 \sin\delta_f - F_{y_{p_3}} l \cos\delta_r - F_{y_{p_4}} \left(l \cos\delta_r + L_4 \sin\delta_r\right), \\ T_{y_2} = F_{y_{p_1}} L_1 \sin\delta_f + F_{y_{p_3}} \left(-l \cos\delta_r + L_3 \sin\delta_r\right) - F_{y_{p_4}} l \cos\delta_r, \\ T_{y_3} = F_{y_{p_1}} l \cos\delta_f + F_{y_{p_2}} \left(l \cos\delta_f - L_2 \sin\delta_f\right) - F_{y_{p_4}} L_4 \sin\delta_r, \\ T_{y_4} = F_{y_{p_1}} \left(l \cos\delta_f + L_1 \sin\delta_f\right) + F_{y_{p_2}} l \cos\delta_f + F_{y_{p_3}} L_3 \sin\delta_r. \end{cases} \tag{3.17}$$

Finalement :

$$\begin{cases} I_z \ddot{\psi} = T_{x_0} + T_{y_0}, \\ \mathcal{M}_{G_i} = \mathcal{M}_G + m \left(\vec{a_G} \wedge \overrightarrow{GG_i}\right).\vec{k}_c = T_{x_i} + T_{y_i} \end{cases} \tag{3.18}$$

Les moments s'écrivent,

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{G_1} = I_z \ddot{\psi} - l_f \, m \, a_y + L_1 \, m \, a_x, \\ \mathcal{M}_{G_2} = I_z \ddot{\psi} - l_f \, m \, a_y - L_2 \, m \, a_x, \\ \mathcal{M}_{G_3} = I_z \ddot{\psi} + l_r \, m \, a_y + L_3 \, m \, a_x, \\ \mathcal{M}_{G_4} = I_z \ddot{\psi} + l_r \, m \, a_y - L_4 \, m \, a_x. \end{cases} \tag{3.19}$$

En écrivant (3.17) sous forme matricielle :

$$T_Y = H \, F_Y \tag{3.20}$$

avec

$$\begin{cases} T_Y \triangleq \begin{pmatrix} T_{y_0} & T_{y_1} & T_{y_2} & T_{y_3} & T_{y_4} \end{pmatrix}^T \\ F_Y \triangleq \begin{pmatrix} F_{y_{p_1}} & F_{y_{p_2}} & F_{y_{p_3}} & F_{y_{p_4}} \end{pmatrix}^T \\ H \triangleq \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 \end{pmatrix}^T, \\ H_1 \triangleq \begin{pmatrix} l_f \cos\delta_f + L_1 \sin\delta_f & l_f \cos\delta_f - L_2 \sin\delta_f & -l_r \cos\delta_r + L_3 \sin\delta_r & -l_r \cos\delta_r - L_4 \sin\delta_r \end{pmatrix}, \\ H_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -L_2 \sin\delta_f & -l \cos\delta_r & -(l \cos\delta_r + L_4 \sin\delta_r) \end{pmatrix}, \\ H_3 \triangleq \begin{pmatrix} L_1 \sin\delta_f & 0 & -l \cos\delta_r + L_3 \sin\delta_r & -l \cos\delta_r \end{pmatrix}, \\ H_4 \triangleq \begin{pmatrix} l \cos\delta_f & l \cos\delta_f - L_2 \sin\delta_f & 0 & -L_4 \sin\delta_r \end{pmatrix}, \\ H_5 \triangleq \begin{pmatrix} l \cos\delta_f + L_1 \sin\delta_f & l \cos\delta_f & L_3 \sin\delta_r & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

La relation linéaire entre $T_Y$ et $F_Y$ permettrait d'obtenir une estimation $\hat{F}_Y$ des composantes de $F_Y$ en utilisant la méthode des moindres carrés visant à minimiser la fonction de coût suivante :

$$\hat{F}_Y = \arg\min_{F_Y} ||T_Y - H\, F_Y||_2. \tag{3.21}$$

La solution au sens des moindres carrés serait alors :

$$\hat{F}_Y = (H^T\, H)^{-1}\, H^T\, \hat{T}_Y. \tag{3.22}$$

Elle existerait et serait unique si $H$ était de rang 4, c'est-à-dire que $H^T H$ est inversible. Malheureusement, la matrice $H$ n'est pas de rang 4 lorsque les angles de braquage sont nuls, c'est-à-dire lorsque $\delta_f = \delta_r = 0$.

Pour palier à ce problème de rang, on va finalement estimer la somme des forces latérales avant et la somme des forces latérales arrières. On constate qu'en combinant les 4 dernières équations de (3.17), on peut avoir une expression regroupant la somme des forces latérales avant et arrière :

$$\frac{(T_{y_3} - T_{y_1}) + (T_{y_4} - T_{y_2})}{2} = -l\, \cos\delta_f\, (F_{y_{p_1}} + F_{y_{p_2}}) - l\, \cos\delta_r\, (F_{y_{p_3}} + F_{y_{p_4}}). \tag{3.23}$$

De plus, en supposant que $F_{y_{p_i}} \approx F_{y_i}$ dans la première équation de (3.18) l'expression de $T_{y_0}$ est simplifiée et ne fait plus intervenir les termes en sin, ce qui permet également d'obtenir une expression en fonction de la somme des forces latérales avant et arrière :

$$T_{y_0} = l_f\, \cos\delta_f\, (F_{y_{p_1}} + F_{y_{p_2}}) - l_r\, \cos\delta_r\, (F_{y_{p_3}} + F_{y_{p_4}}) \tag{3.24}$$

ce qui permet de réécrire :

$$T_Y^* = H^*\, F_Y^* \tag{3.25}$$

avec

$$\begin{cases} T_Y^* \triangleq \begin{pmatrix} T_{y_0} & \frac{(T_{y_3}-T_{y_1})+(T_{y_4}-T_{y_2})}{2} \end{pmatrix}^T \\ F_Y^* \triangleq \begin{pmatrix} F_Y^*(1) & F_Y^*(2) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} F_{y_{p_1}} + F_{y_{p_2}} & F_{y_{p_3}} + F_{y_{p_4}} \end{pmatrix}^T \\ T_{y_\bullet} = \mathcal{M}_\bullet - T_{x_\bullet} \\ H^* \triangleq \begin{pmatrix} l_f\, \cos\delta_f & -l_r\, \cos\delta_r \\ l\, \cos\delta_f & l\, \cos\delta_r \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit :

$$F_Y^* = H^{*-1}\, T_Y^*. \tag{3.26}$$

L'équation (3.26) donne l'estimation des forces pour l'ensemble du train avant et du train arrière. En supposant que le coefficient de friction latérale $\mu_y$ est le même sur les roues gauche et droite, la relation entre les forces verticales et les forces latérales au niveau de chaque pneu peut être approximée par la relation linéaire suivante [Yang et al., 2014] :

$$\begin{cases} \dfrac{F_{y_{p_1}}}{F_{z_1}} \simeq \dfrac{F_{y_{p_2}}}{F_{z_2}}, \\ \dfrac{F_{y_{p_3}}}{F_{z_3}} \simeq \dfrac{F_{y_{p_4}}}{F_{z_4}}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Finalement, pour obtenir les forces latérales roue par roue, on applique la distribution suivante :

$$\begin{cases} F_{y_{p_1}} = \dfrac{F_{z_1}}{F_{z_1} + F_{z_2}}\, F_Y^*(1), \\ F_{y_{p_2}} = \dfrac{F_{z_2}}{F_{z_1} + F_{z_2}}\, F_Y^*(1), \\ F_{y_{p_3}} = \dfrac{F_{z_3}}{F_{z_3} + F_{z_4}}\, F_Y^*(2), \\ F_{y_{p_4}} = \dfrac{F_{z_4}}{F_{z_3} + F_{z_4}}\, F_Y^*(2) \end{cases} \tag{3.28}$$

On en déduit donc l'algorithme suivant pour le calcul des forces latérales pneu par pneu :

**Algorithm 4** Calculer les forces latérales $\hat{F}_{y_{p_i}}$

**Require:** $I_r, r$
**Inputs :** $\ddot{\hat{\psi}},\ \hat{a}_y,\ \hat{a}_x\ \omega_i\ \delta_f,\ \delta_r\ T_{\omega_i}$
**Description :**
$\hat{F}_z$ from (3.10)
$\hat{F}_{x_p}$ from (3.8)
$\hat{T}_{x_\bullet}$ from (3.16)
$\hat{\mathcal{M}}_\bullet$ from (3.19)
$\hat{T}_{y_\bullet} \leftarrow \hat{\mathcal{M}}_\bullet - \hat{T}_{x_\bullet}$
$\hat{T}_Y^* \leftarrow \begin{pmatrix} \hat{T}_{y_0} & \frac{(\hat{T}_{y_3}-\hat{T}_{y_1})+(\hat{T}_{y_4}-\hat{T}_{y_2})}{2} \end{pmatrix}^T$
$H^* \leftarrow \begin{pmatrix} l_f\ \cos\delta_f & -l_r\ \cos\delta_r \\ l\ \cos\delta_f & l\ \cos\delta_r \end{pmatrix}$
$\hat{F}_Y^* \leftarrow H^{*-1}\,\hat{T}_Y^*$
$\hat{F}_{y_{p_1}} \leftarrow \frac{\hat{F}_{z_1}}{\hat{F}_{z_1}+\hat{F}_{z_2}}\,\hat{F}_Y^*(1)$
$\hat{F}_{y_{p_2}} \leftarrow \frac{\hat{F}_{z_2}}{\hat{F}_{z_1}+\hat{F}_{z_2}}\,\hat{F}_Y^*(1)$
$\hat{F}_{y_{p_3}} \leftarrow \frac{\hat{F}_{z_3}}{\hat{F}_{z_3}+\hat{F}_{z_4}}\,\hat{F}_Y^*(2)$
$\hat{F}_{y_{p_4}} \leftarrow \frac{\hat{F}_{z_4}}{\hat{F}_{z_3}+\hat{F}_{z_4}}\,\hat{F}_Y^*(2)$
**return** $\hat{F}_{y_{p_i}}$

## 3.4 Estimation du coefficient de rigidité de dérive et du coefficient de friction latérale maximale

### 3.4.1 Les 3 modèles de frottements considérés

Il existe de nombreux modèles de pneumatique qui reflètent la relation fortement non linéaire entre les forces latérales réelles et la dérive réelle des pneumatiques comme détaillée dans la partie 2.7. Les forces latérales $F_{y_p}(\beta)$ en fonction de l'angle de dérive sont modélisables avec le modèle de Pacejka $F_{y_p}^{Pac}(\beta)$ 2.132. Cette courbe, qui est la plus représentative du comportement du pneumatique, peut avoir un décalage horizontal ou vertical [Pacejka, 1996]. Elle est habituellement divisée en 3 zones délimitées en rouge sur la figure 3.4. Pour l'estimation, on distingue 3 autres zones d'estimation, en vert, qui diffèrent de celles en rouge. A chacune des zones vertes est associé un modèle théorique que l'on définit comme suit :

- une *zone affine* appartenant à la zone linéaire
- une *zone de Dugoff* chevauchant les zones linéaire, de transition et de saturation
- une *zone constante* appartenant à la zone de saturation

**Zone 1 :** Cette zone de modélisation correspond à des petites valeurs d'angles de dérive où la relation entre la force latérale réelle et l'angle de dérive réel peut être considérée comme étant linéaire. On choisit une modélisation avec une équation affine. Le modèle choisi est donc :

$$\forall \beta \in \text{Zone 1} : F_{y_p}^*(\beta) = C_\beta\,\beta + b_1, \quad (C_\beta, b_1)\ \in\ \mathbb{R}^2. \tag{3.29}$$

Seule la valeur du coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ sera mis à jour dans cette zone.

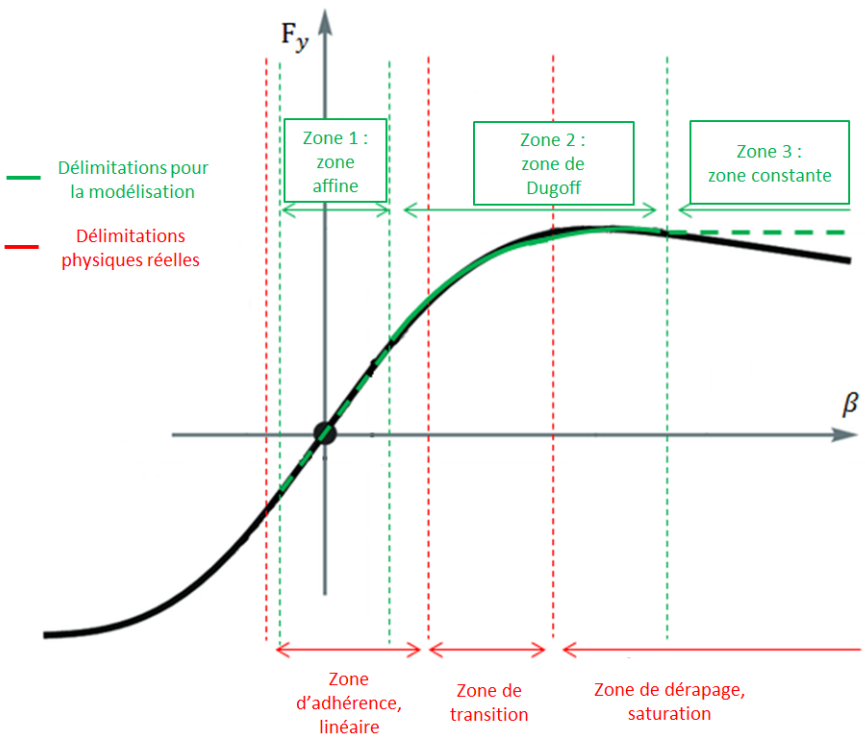



FIGURE 3.4 – Délimitation des zones d'estimation

**Zone 2 :** Dans cette zone, on fait le choix du modèle simplifié de Dugoff (2.114) pour décrire les non linéarités du pneumatique. Cette simplification suppose que le glissement longitudinal est négligeable :

$$F_{y_p}^{Dug}(\beta) = \begin{cases} C_\beta \tan(\beta) \text{ si } \lambda \geq 1, \\ C_\beta \tan(\beta)\,(2-\lambda)\lambda \;\text{ si } \lambda < 1 \end{cases} \tag{3.30}$$

et $\lambda$ est donné par :

$$\lambda = \frac{\mu_{y_{\max}} F_z}{2\, C_\beta \mid \tan(\beta) \mid}. \tag{3.31}$$

Les équations (3.30) et (3.31) mettent clairement en évidence le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$. On a donc :

$$\forall \beta \in \text{Zone 2} : F_{y_p}^{*}(\beta) = F_{y_p}^{Dug}(\beta). \tag{3.32}$$

Ainsi, dans cette zone, on pourra estimer simultanément le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$.

**Zone 3 :** Dans cette zone, on s'affranchit du modèle de Dugoff découplé que l'on vient remplacer par une équation constante :

$$\forall \beta \in \text{Zone 3} : F_y^{*}(\beta) = \mu_{y_{max}} F_z. \tag{3.33}$$

Par conséquent, seule la valeur de $\mu_{y_{\max}}$ sera mise à jour et on ne cherchera pas à mettre à jour la valeur du coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$.

*Remarque* 3.4.1. Le modèle de Dugoff synthétise, à travers les deux paramètres $C_\beta$ et $\mu_{y_{max}}$, tous les paramètres influençant les efforts latéraux. Ainsi, contrairement au modèle de Pacejka, considéré comme étant le modèle de référence, ce modèle simplifié de Dugoff relie la force latérale à ces deux paramètres d'une manière beaucoup plus transparente. De plus, son comportement dans cette zone est très similaire au modèle de Pacejka et fait intervenir un faible nombre de paramètres. Ces raisons font du modèle découplé de Dugoff un modèle tout à fait convenable pour la zone 2.

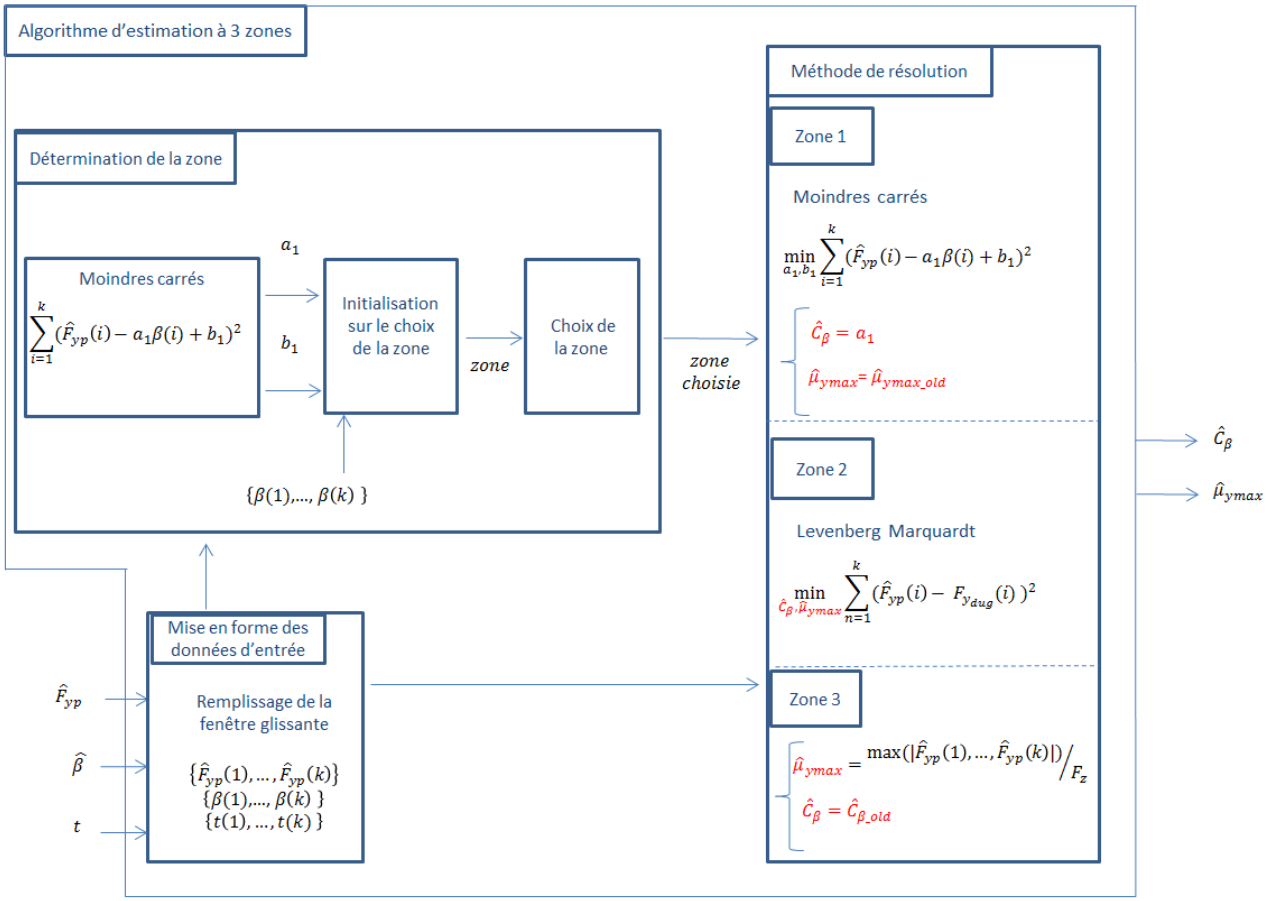



FIGURE 3.5 – Schématisation de l'algorithme d'estimation du coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et du coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{max}}$

### 3.4.2 Algorithme d'estimation à 3 zones

Le but est de trouver le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$, pour les trains avant et arrière, qui minimisent l'erreur entre la force latérale $\hat{F}_{y_p}$ estimée à partir des équations (3.28) et la force latérale $F_y^*$ obtenue à partir des 3 différents modèles théoriques que nous venons d'expliciter. Les étapes de cet algorithme sont illustrées à la figure 3.5.

**Données d'entrée :** Une fois les forces latérales $\hat{F}_{y_p}$ estimées avec l'algorithme 4, il faut créer une fenêtre glissante $Data$ (voir l'algorithme 5) constituée d'un ensemble de valeurs de forces latérales estimées $\hat{F}_{yp}$, d'angles de dérive estimées $\hat{\beta}$ et de données temporelles $t$ telles que :

- $Mat_F \triangleq \left[\hat{F}_{y_p}(1), ..., \hat{F}_{y_p}(k)\right]$,
- $Mat_\beta \triangleq \left[\hat{\beta}(1), ..., \hat{\beta}(k)\right]$,
- $Mat_t \triangleq [t(1), ..., t(k)]$,
- $Data \triangleq \{Mat_Fy; Mat_\beta; Mat_t\}$

avec $1 \leq k \leq N$, où $t$ est le temps et $N$ est la taille maximale de la fenêtre glissante, fixée empiriquement.

**Mise en forme des données d'entrée :** Accumuler ces valeurs dans le temps en utilisant une *fenêtre glissante* permet d'éviter les aberrations dans l'estimation des deux paramètres. Un compromis doit être fait étant donné que l'accumulation d'un grand ensemble de données

engendrera du retard et augmentera le temps de calcul mais donnera de meilleures performances.

Notons $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\epsilon_3$, $\tau_1$ et $\tau_2$ des seuils fixés par l'utilisateur (voir les équations (3.49), (3.58), (3.60), (3.59) et (3.61)). Cette fenêtre glissante, de taille $k$ variable, avec $k \leq N$, est construite suivant les conditions temporelles et spatiales précisées ci-dessous :

- la $k+1^{ième}$ donnée $\left\{\hat{F}_{yp}(k+1), \hat{\beta}(k+1), t(k+1)\right\}$ est ajoutée à la fenêtre si :
  - la fenêtre n'est pas pleine et la différence entre la dernière valeur d'angle de dérive $\beta(k)$ de la fenêtre et la valeur courante $\beta(k+1)$ est supérieure à $\epsilon_1$
  - la fenêtre n'est pas pleine et aucune donnée n'a été ajoutée depuis un temps $\tau_1$
- la fenêtre est rafraîchie en supprimant des données si :
  - la différence entre la première valeur d'angle de dérive $\beta(1)$ de la fenêtre et la dernière $\beta(k)$ est supérieure à $\epsilon_2$ : on supprime la première valeur et on décale
  - la fenêtre est pleine : on supprime une valeur sur deux et on décale
  - une donnée est dans la fenêtre depuis un temps $\tau_2$ et la différence entre la première valeur d'angle de dérive $\beta(1)$ de la fenêtre et la dernière $\beta(k)$ est supérieure à $\epsilon_3$ : on supprime une valeur sur deux et on décale.

**Algorithm 5** Mise en forme des données d'entrée

**Require:** $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\epsilon_3$ , $\tau_1$, $\tau_2$
  **Inputs :** $\hat{F}_{y_{p_i}}$, $\hat{\beta}_i$, $t$
  **Description :**
  **if** $k+1 \leq N$ and $|\beta(k+1) - \beta(k)| \geq \epsilon_1$ **then**
    $Mat_Fy \leftarrow \left[Mat_Fy, \hat{F}_{yp}(k+1)\right]$
    $Mat_\beta \leftarrow [Mat_\beta, \beta(k+1)]$
    $Mat_t \leftarrow [Mat_t, t(k+1)]$
  **else if** $k+1 \leq N$ and $|t(k+1) - t(k)| \geq \tau_1$ **then**
    $Mat_Fy \leftarrow \left[Mat_Fy, \hat{F}_{yp}(k+1)\right]$
    $Mat_\beta \leftarrow [Mat_\beta, \beta(k+1)]$
    $Mat_t \leftarrow [Mat_t, t(k+1)]$
  **else**
    $Mat_Fy \leftarrow Mat_Fy$
    $Mat_\beta \leftarrow Mat_\beta$
    $Mat_t \leftarrow Mat_t$
  **end if**
  **if** $|\beta(1) - \beta(k)| \geq \epsilon_2$ **then**
    $Mat_Fy \leftarrow [Mat_Fy(2), ..., Mat_Fy(k)]$
    $Mat_\beta \leftarrow [Mat_\beta(2), ..., Mat_\beta(k)]$
    $Mat_t \leftarrow [Mat_t(2), ..., Mat_t(k)]$
  **else if** $k+1 \geq N$ **then**
    $Mat_Fy \leftarrow [Mat_Fy(1), ..., Mat_Fy(2n-1)]$
    $Mat_\beta \leftarrow [Mat_\beta(1), ..., Mat_\beta(2n-1))]$
    $Mat_t \leftarrow [Mat_t(1), ..., Mat_t(2n-1)]$ avec $2 \leq n \leq (k+1)/2$
  **else if** $|\beta(1) - \beta(k)| > \epsilon_3$ and $|t(1) - t(k+1)| > \tau_2$ **then**
    $Mat_Fy \leftarrow [Mat_Fy(2), ..., Mat_Fy(k)]$
    $Mat_\beta \leftarrow [Mat_\beta(2), ..., Mat_\beta(k)]$
    $Mat_t \leftarrow [Mat_t(2), ..., Mat_t(k)]$
  **else**
    $Mat_Fy \leftarrow Mat_Fy$
    $Mat_\beta \leftarrow Mat_\beta$
    $Mat_t \leftarrow Mat_t$
  **end if**
  **return** $Mat_Fy$ , $Mat_\beta$, $Mat_t$

**Détermination de la zone** Il faut déterminer la zone dans laquelle se situe la fenêtre glissante de données $Data$ en appliquant une méthode des moindres carrés.

A chaque instant, on ajuste une droite affine $a_1\,\beta + b_1$ sur les données $Mat_Fy$ et $Mat_\beta$ de la fenêtre. Les valeurs de $Mat_\beta$ et les valeurs du coefficient directeur $a_1$ et de l'ordonnée à l'origine $b_1$ de la droite ainsi obtenues nous permettront de délimiter les zones. En effet, à l'approche de la zone de perte d'adhérence, le coefficient directeur de cette droite devient de plus en plus faible et son ordonnée à l'origine de plus en plus grande.

La détermination de la zone se fait en deux étapes et dépend de seuils $a_{seuil1}$ (3.48), $a_{seuil2}$ (3.41), $\beta_{seuil1}$ (3.51), $\beta_{seuil2}$ (3.9) et $\beta_{seuil3}$ (3.46) qui sont déterminés empiriquement (voir partie 3.5.2) :

- Dans un premier temps, on applique des conditions grossières (voir Figure 3.6) sur les valeurs de $a_1$ et sur les angles de dérive pour déterminer dans quelle zone on peut potentiellement se situer,
- puis on affine ces conditions de manière plus précise (voir Figure 3.7).

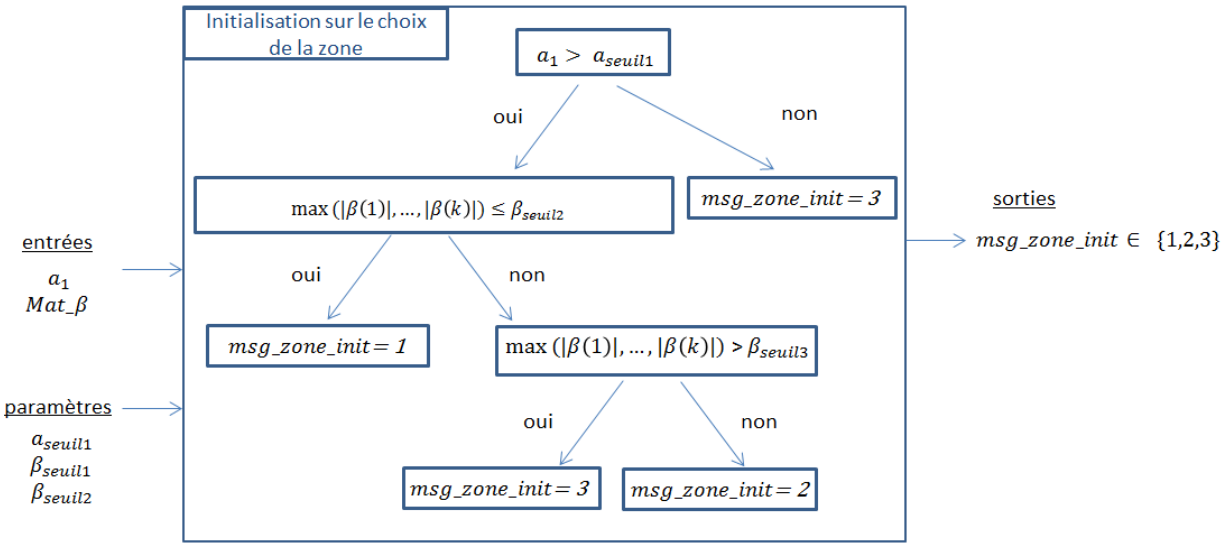



FIGURE 3.6 – Conditions pour initialiser la zone

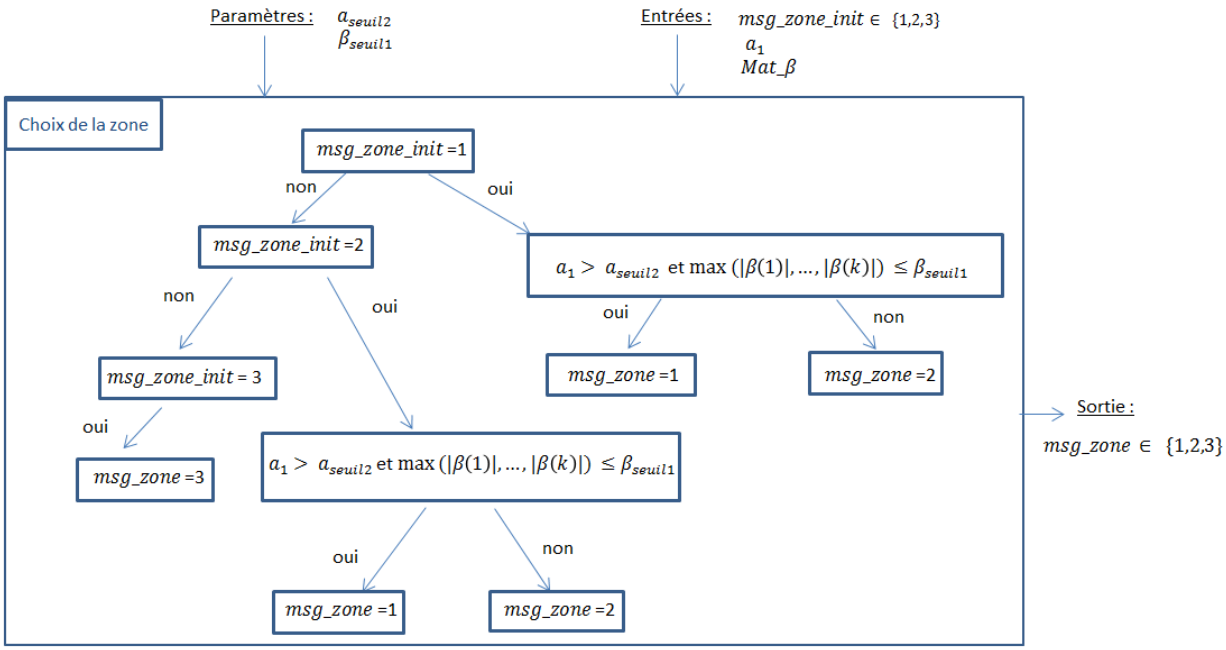



FIGURE 3.7 – Conditions pour le choix de la zone

**Algorithm 6** Détermination de la zone : initialisation

**Require:** $a_{seuil1}$, $\beta_{seuil2}$, $\beta_{seuil3}$
  **Inputs :** $a_1$, $Mat_\beta$
  **Description :**
  **if** $a_1 \leq a_{seuil1}$ **then**
    $msg_zone_init \leftarrow 3$
  **else if** $\max(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) < \beta_{seuil2})$ **then**
    **if** $\max(\beta(1), ..., \beta(k)) \leq \beta_{seuil2}$ **then**
      $msg_zone_init \leftarrow 1$
    **else if** $\max(\beta(1), ..., \beta(k)) > \beta_{seuil3}$ **then**
      $msg_zone_init \leftarrow 3$
    **else**
      $msg_zone_init \leftarrow 2$
    **end if**
  **end if**
  **return** $msg_zone_init$

**Algorithm 7** Détermination de la zone : affinement

**Require:** $a_{seuil2}$, $\beta_{seuil1}$
  **Inputs :** $a_1$, $Mat_\beta$, $msg_zone_init$
  **Description :**
  **if** $msg_zone_init = 1$ **then**
    **if** $a_1 > a_{seuil2}$ et $\max(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) \leq \beta_{seuil1}$ **then**
      $msg_zone = 1$
    **else**
      $msg_zone = 2$
    **end if**
  **else if** $msg_zone_init = 2$ **then**
    **if** $a_1 > a_{seuil2}$ and $\max(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) \leq \beta_{seuil1}$ **then**
      $msg_zone = 1$
    **else**
      $msg_zone = 2$
    **end if**
  **else**
    $msg_zone = 3$
  **end if**
  **return** $msg_zone$

**Méthode de résolution :** Une fois la zone identifiée, le but est de trouver le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ et le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$ qui minimisent les erreurs entre les forces latérales $F^*_{y_p}$ fournies par le modèle théorique de la zone choisie et les forces latérales estimées $\hat{F}_{y_p}$ (3.28).

- Si la zone choisie est la *zone affine*, soit la zone 1, une méthode d'ajustement linéaire par les **moindres carrés** est appliquée. On cherche $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_1$ tels que :

$$J_1 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{a}_1\, \beta(i) + \hat{b}_1 - \hat{F}_{y_p}(i))^2 \tag{3.34}$$

  soit minimal, avec $k$ le nombre de valeurs dans la fenêtre glissante. On résout donc le

problème d'optimisation suivant :

$$(a_1, b_1) = \arg\min_{(a_1,b_1)} \left( \sum_{i=1}^{k} \hat{a}_1\, \beta(i) + \hat{b}_1 - \hat{F}_{y_p}(i) \right). \tag{3.35}$$

La solution à ce problème est alors :

$$\begin{cases} \hat{C}_\beta \triangleq a_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \beta(i) \sum_{i=1}^{k} \hat{F}_{yp}(i) - k \sum_{i=1}^{k} \beta(i) \hat{F}_{yp}(i)}{(\sum_{i=1}^{k} \beta(i))^2 - k \sum_{i=1}^{k} \beta(i)^2}, \\ b_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \beta(i) \hat{F}_{yp}(i) \sum_{i=1}^{k} \beta(i) - \sum_{i=1}^{k} \beta(i)^2 \sum_{i=1}^{k} \hat{F}_{yp}(i)}{(\sum_{i=1}^{k} \beta(i))^2 - k \sum_{i=1}^{k} \beta(i)^2}. \end{cases} \tag{3.36}$$

Dans cette zone, seul le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ est estimé par $\hat{C}_\beta$. $\mu_{y_{\max}}$ garde la valeur précédente $\hat{\mu}_{y_{\max}\text{old}}$. Le fait de ne pas pouvoir estimer le coefficient $\mu_{y_{\max}}$ dans cette zone n'est pas critique car sa connaissance n'est nécessaire que dans les régions transitoire et de saturation du comportement du pneumatique. Dans la région linéaire, seule la connaissance de $C_\beta$ est primordiale.

- Si la zone choisie est la *zone de Dugoff*, soit la zone 2, on applique un algorithme de **Levenberg Marquardt** (LM). Cet algorithme itératif fournit une solution au problème de minimisation d'une fonction à plusieurs variables. Cet algorithme peut être vu comme une combinaison de la méthode de descente de gradient et de Gauss Newton [Madsen et al., 2004]. On cherche à minimiser la somme des erreurs au carré

$$J_2 = \sum_{i=1}^{k} (F^*_{y_p}(i) - \hat{F}_{y_p}(i))^2 \tag{3.37}$$

avec $k$ le nombre d'éléments dans la fenêtre. L'algorithme prend comme entrée les dérivées partielles de la force latérale par rapport aux paramètres que l'on souhaite estimer. D'après (3.30) :

$$\begin{aligned} &\text{if } \lambda \geq 1 : \begin{cases} \dfrac{\partial F^{Dug}_{y_p}}{\partial \mu_{y_{\max}}} = 0, \\ \dfrac{\partial F^{Dug}_{y_p}}{\partial C_\beta} = \tan(\beta), \end{cases} \\ &\text{if } \lambda < 1 : \begin{cases} \dfrac{\partial F^{Dug}_{y_p}}{\partial C_\beta} = \dfrac{\mu^2_{y_{\max}} F_z^2}{4\, C_\beta^2 \tan(\beta)}, \\ \dfrac{\partial F^{Dug}_{y_p}}{\partial \mu_{y_{\max}}} = F_z \operatorname{sign}(C_\beta \tan(\beta)) - \dfrac{F_z^2\, \mu_{y_{\max}}}{2\, C_\beta}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Dans l'algorithme de LM, on sature les valeurs de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ telles que :

$$\hat{C}_\beta \leq \hat{C}_{\beta_{sat}} = 10^7,$$
$$\hat{\mu}_{y_{\max}} \leq \hat{\mu}_{y_{\max} sat} = 1.$$

En sortie, l'algorithme de LM donne une estimation des coefficients de rigidité de dérive $\hat{C}_\beta$ et de friction latérale maximale $\hat{\mu}_{y_{\max}}$.

- Enfin, pour la *zone constante*, c'est-à-dire la zone 3, la constante $b_2$ est choisie égale à la **valeur maximale** des valeurs des forces latérales présentes dans la fenêtre :

$$b_2 = \max(|\hat{F}_{yp}(1)|, ..., |\hat{F}_{yp}(k)|). \tag{3.39}$$

Dans cette zone, $\hat{C}_\beta$ garde la valeur précédente $\hat{C}_{\beta_{\text{old}}}$ et seul le coefficient de friction latérale maximale estimé $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ peut être mis à jour et on a :

$$\hat{\mu}_{y_{\max}} = \frac{b_2}{F_z}. \tag{3.40}$$

On sature également l'estimation $\hat{\mu}_{y_{\max}} \leq \hat{\mu}_{y_{\max}sat} = 1$.

L'estimation des coefficients $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ n'a pas lieu lorsque l'une des conditions ci-dessous est vraie :

- il n'y a pas de nouvelles données ajoutées à la fenêtre glissante
- $\text{sign}(a_1) < 0$ et $\max(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) \leq \beta_{seuil1}$
- $|b_1| > b_{seuil2} = 1000$ et $\min(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) < \beta_{seuil2}$
- $a_1 > a_{seuil2}$ et $|b_1| > b_{seuil2}$
- $\min(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) < \beta_{seuil1}$ et $|b_1| > b_{seuil1} = 400$

**Algorithm 8** Méthode de résolution

**Require:** $a_{seuil2}$, $\beta_{seuil1}$, $\beta_{seuil2}$, $b_{seuil1}$, $b_{seuil2}$
  **Inputs :** $msg_zone$, $Mat_Fy$ , $Mat_\beta$, $Mat_t$, $a_1$, $b_1$
  **Description :** Initialisation : $\hat{C}_\beta = 3.10^4$, $\hat{\mu}_{y_{max}} = 0.5$.
  **if** $Data(t) = Data(t+1)$ or ($\text{sign}(a_1) < 0$ and $\max(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) \leq \beta_{seuil1}$) or ($|b_1| > b_{seuil2} = 1000$ et $\min(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) < \beta_{seuil2}$ ) or ($a_1 > a_{seuil2}$ et $|b_1| > b_{seuil2}$ ) or ($\min(|\beta(1)|, ..., |\beta(k)|) < \beta_{seuil1}$ et $|b_1| > b_{seuil1} = 400$) **then**
    $\hat{C}_\beta \leftarrow \hat{C}_{\beta_{old}}$
    $\hat{\mu}_{y_{\max}} \leftarrow \hat{\mu}_{y_{\max}old}$
  **else**
    **if** $msg_zone = 1$ **then**
      $\hat{C}_\beta \leftarrow$(3.36)
    **else if** $msg_zone_init = 2$ **then**
      $\begin{cases} \hat{C}_\beta \leftarrow \text{à partir de l'algorithme de LM} \\ \hat{\mu}_{y_{\max}} \leftarrow \text{à partir de l'algorithme de LM} \end{cases}$
    **else**
      $\hat{\mu}_{y_{\max}} \leftarrow$ à partir de (3.40)
    **end if**
  **end if**
  **return** $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$

**Angle de dérive seuil :** Estimer le coefficient de friction latérale maximale $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ et le coefficient de rigidité de dérive $\hat{C}_\beta$ permet de calculer *l'angle de dérive seuil $\beta_{th}$ pour lequel le modèle linéaire de pneu n'est plus valide*. On considère que l'angle de dérive seuil est déterminé par la valeur tel que $\lambda = 1$ dans le modèle de Dugoff (voir (2.118)). On a donc :

$$\beta_{th} \triangleq \arctan \frac{\mu_{y_{\max}} F_z}{2\, C_\beta}.$$

### 3.4.3 Réglages des seuils

Différents seuils doivent être réglés dans les algorithmes 5, 6, 7 et 8 pour estimer les coefficients de rigidité de dérive $\hat{C}_\beta$ et de friction latérale maximale $\hat{\mu}_{y_{max}}$. Premièrement, des seuils temporels $\tau_1$ et $\tau_2$ ainsi que seuils sur la dispersion des valeurs d'angle de dérive $\epsilon_1$, $\epsilon_2$ et $\epsilon_3$ pour la mise en forme des données d'entrée dans l'algorithme 5. Deuxièmement, des seuils sur le passage des zones $a_{seuil1}$, $a_{seuil2}$, $\beta_{seuil1}$, $\beta_{seuil2}$ dans les algorithmes 6 et 7. Enfin, des seuils $b_{seuil1}$ et $b_{seuil2}$ pour éviter de lancer l'algorithme d'estimation 8.

Pour déterminer la zone dans laquelle on se trouve, on approxime la fenêtre glissante par une droite affine $a_1\,\beta + b_1$. La valeur de son coefficient directeur $a_1$, des angles de dérives dans la fenêtre glissante $Mat_\beta$ et de l'ordonnée à l'origine $b_1$ nous permettent de choisir la zone.

**Détermination de $a_{seuil2}$ dans l'algorithme 7 et 8 :**

Une valeur typique du coefficient de rigidité de dérive est $C_{\beta_{typ}} = 4.95 \times 10^4 N/rad$. Ce dernier peut avoir des valeurs largement supérieures, en fonction de la charge verticale disponible [Milliken and Milliken, 1995], [Gillespie, 2000]. On choisit dans la suite

$$a_{seuil2} \triangleq C_{\beta_{\text{typ}}}. \tag{3.41}$$

**Détermination de $a_{seuil1}$ et $\beta_{seuil3}$ de l'algorithme 6 :**
On cherche à calculer les coefficients seuils $a_{seuil1}$ et $\beta_{seuil3}$ pour lesquels on suppose que la zone constante est atteinte (voir Figure 3.8).

On considère une force verticale de

$$F_{z_{\text{typ}}} = \frac{m\,g}{4} = 6.8376.10^3\,N.$$

On considère le cas où l'adhérence est la plus élevée car cette condition permet au pneu d'adhérer avec des angles de dérives plus importants, soit $\mu_{y_{\max}} = 1$. On suppose que le pneu est proche de la zone 3 lorsque la force latérale atteint 80% de sa valeur maximale. D'après l'équation (3.30) :

$$F_{y_p}^{\text{Dug}} = C_\beta \,\tan\beta\,(2-\lambda)\,\lambda, \tag{3.42}$$

or d'après l'équation (3.31) :

$$C_\beta\,|\tan\beta| = \frac{\mu_{y_{\max}}\,F_z}{2\,\lambda}, \tag{3.43}$$

soit pour $\beta > 0$ :

$$F_{y_p}^{\text{Dug}} = \frac{\mu_{y_{\max}}\,F_z}{2\,\lambda}\,(2-\lambda)\,\lambda = F_{y_{\max}}\,\frac{2-\lambda}{2}. \tag{3.44}$$

On cherche la valeur de $\lambda$ pour laquelle on a 80% de la valeur maximale $F_{y_{\max}}$ : $F_{y_p}^{Dug} = 80\% F_{y_{\max}}$. Soit : $80\% = \frac{2-\lambda}{2}$ et donc : $\lambda = 0.4$. On peut en déduire l'angle de dérive $\beta_{80\%}$ correspondant :

$$\beta_{80\%} = \arctan\frac{\mu_{y_{\max}}\,F_{z_{\text{typ}}}}{2\,C_{\beta_{\text{typ}}}\,\lambda} = 0.171\,rad. \tag{3.45}$$

On pose donc :

$$\beta_{seuil3} \triangleq 0.171\,rad. \tag{3.46}$$

On suppose que $a_1$ est assimilable à la dérivée première de la force latérale issue du modèle de Dugoff $F_{y_p}^{\text{Dug}}$ en fonction de l'angle de dérive $\beta$ pour $\lambda < 1$ (voir équation (2.120)) :

$$a_1 \approx \frac{\partial F_{y_p}^{\text{Dug}}}{\partial\beta} = \frac{\mu_{y_{\max}}^2\,F_z^2}{4\,C_\beta\,\sin^2\beta} = \frac{F_{y_{\max}}^2}{4\,C_\beta\,\sin^2\beta}. \tag{3.47}$$

L'équation (3.47) pour l'angle $\beta_{seuil3}$ donne alors :

$$a_{seuil1} \triangleq \frac{(6.8376\times10^3)^2}{4\times4.95\times10^4\times\sin^2(0.171)} \approx 8000\,N/rad. \tag{3.48}$$

**Détermination de $\beta_{seuil1}$, $\beta_{seuil2}$ et $\epsilon_2$ des algorithmes 5, 6, 7 et 8 :**

On cherche maintenant à délimiter grossièrement la zone 1 en imposant un seuil $\beta_{seuil2}$ tel que $\beta_{seuil2} = \beta_{th}$. Dans le cas où $\mu_{y_{max}} = 1$, l'équation (2.118) donne $\beta_{th} = 0.069\,rad$ et dans le cas où $\mu_{y_{\max}} = 0.3$, on a $\beta_{th} = 0.0207\,rad$.

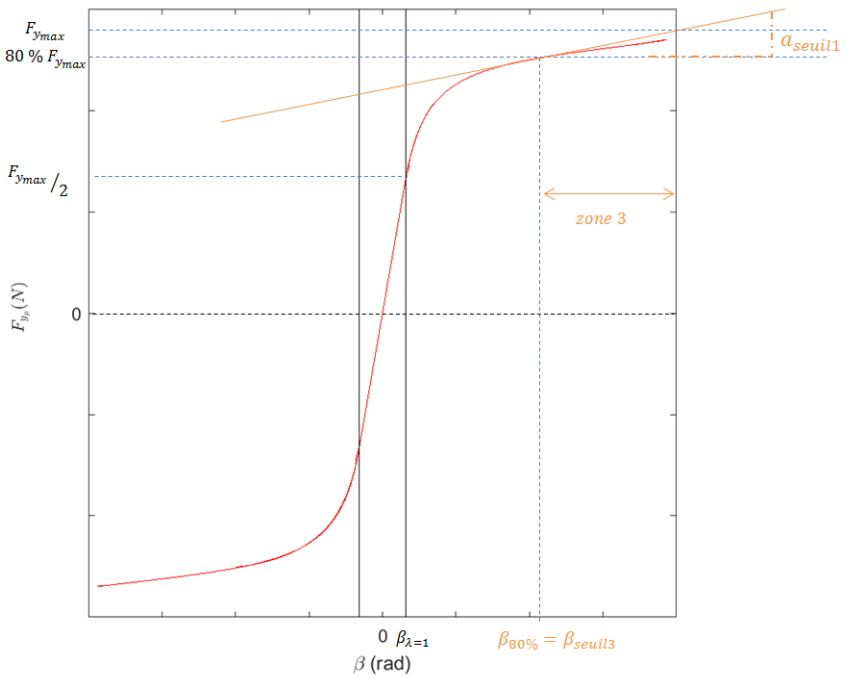



FIGURE 3.8 – Détermination de $a_{seuil1}$ et $\beta_{seuil3}$

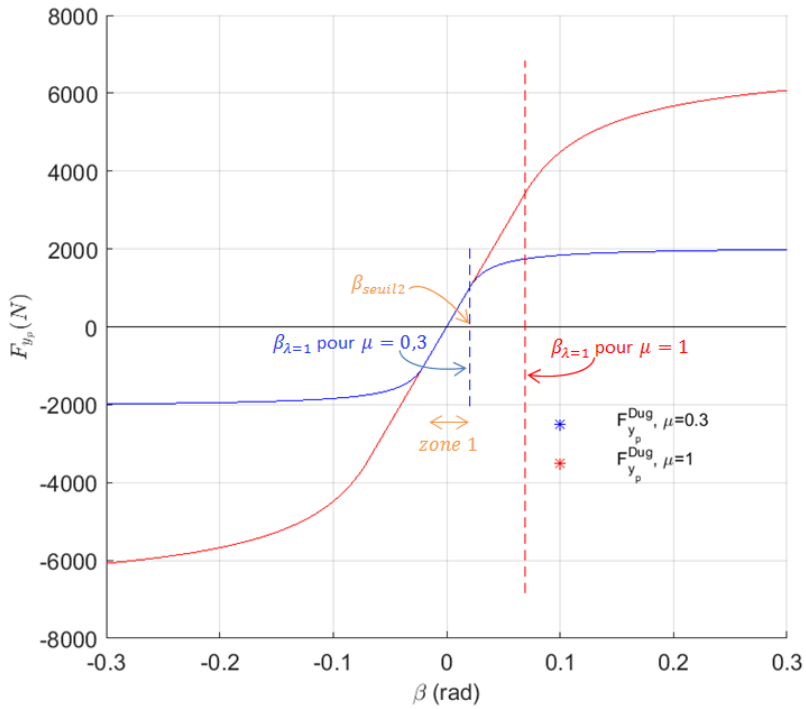



FIGURE 3.9 – Détermination de $\beta_{seuil2}$

On peut donc considérer que la fin de la zone 1 est située entre les valeurs 0.0207 rad et 0.069 rad. On pose

$$\epsilon_2 \triangleq 0.069\, rad, \tag{3.49}$$

c'est-à-dire que l'écart entre la première et la dernière valeur de $\beta$ de notre fenêtre glissante ne dépasse pas cette valeur $\epsilon_2$ (voir algorithme 5). On assure ainsi d'englober le maximum de point lorsqu'on est dans la zone 1 peu importe les conditions d'adhérence.

En considérant la situation la plus défavorable, on a donc :

$$\beta_{seuil2} \triangleq 0.0207\, rad. \tag{3.50}$$

Les simulations montrent qu'en dessous de 1 degré, le pneu a forcément un comportement linéaire, on décide donc de poser

$$\beta_{seuil1} \triangleq 0.0175\, rad. \tag{3.51}$$

**Détermination de $b_{seuil1}$ et $b_{seuil2}$ de l'algorithme 8** :
L'algorithme 8 n'est pas exécuté à chaque instant. En effet, comme illustré sur la Figure 3.30, lorsque la force latérale en fonction de l'angle de dérive ne passe pas autour de ($\beta = 0, F_{y_p} = 0$), le modèle de Dugoff n'est pas adapté et l'estimation est faussée. Pour pallier à ce problème, on bloque l'estimation en fonction de la valeur de $b_1$ et des seuils $b_{seuil1}$ et $b_{seuil2}$.

En considérant le cas où l'adhérence est la plus faible, i.e $\mu_{y_{\max}} = 0.3$, le seuil $b_{seuil2}$ correspond à l'ordonnée à l'origine de la tangente du modèle de Dugoff au point $(\beta_{80\%}, 80\% F_{y_{max}})$ (voir Figure 3.10) :

$$T_1(\beta) - 80\% F_{y_{max}} = \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{80\%}} (\beta - \beta_{80\%}). \tag{3.52}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} T_1(\beta) &= \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{80\%}} \beta + \left(80\% F_{y_{max}} - \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{80\%}} \beta_{80\%}\right) \\ &= \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{80\%}} \beta + b_{seuil2} \end{aligned} \tag{3.53}$$

avec

$$b_{seuil2} \triangleq 80\% F_{y_{max}} - \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{80\%}} \beta_{80\%}.$$

En reprenant (3.45) avec $\mu_{y_{\max}} = 0.3$, $\lambda = 0.4$, on a :

$$\beta_{80\%} \triangleq \arctan \frac{0.3 \times 6.8376 \times 10^3}{2 \times 4.95 \times 10^4 \times 0.4} = 0.0518\, rad,$$

soit

$$b_{seuil2} \triangleq \frac{80}{100} 0.3 \times 6.8376.10^3 - \frac{(0.3 \times 6.8376 \times 10^3)^2}{4 \times 4.95 \times 10^4 \times (\sin(0.0518))^2} \times 0.0518 \approx 10^3. \tag{3.54}$$

En considérant toujours le cas où l'adhérence est la plus faible $\mu_{y_{\max}} = 0.3$, le seuil $b_{seuil1}$ correspond à l'ordonnée à l'origine de la tangente du modèle de Dugoff au point $(\beta_{60\%}, 60\% F_{y_{max}})$ (voir Figure 3.10) :

$$\begin{aligned} T_2(\beta) &= \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{60\%}} \beta + \left(60\% F_{y_{max}} - \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{60\%}} \beta_{60\%}\right) \\ &= \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{60\%}} \beta + b_{seuil1} \end{aligned} \tag{3.55}$$

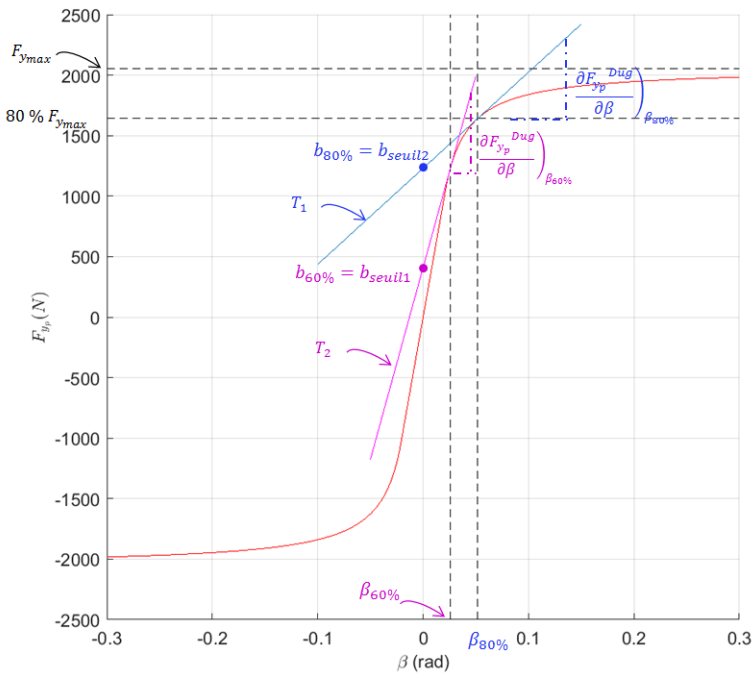



FIGURE 3.10 – Détermination de $b_{seuil2}$

avec

$$b_{seuil1} \triangleq 60\% F_{y_{max}} - \left.\frac{\partial F_{y_p}^{Dug}}{\partial \beta}\right|_{\beta_{60\%}} \beta_{60\%}.$$

et

$$\beta_{60\%} \triangleq \arctan \frac{0.3 \times 6.8376 \times 10^3}{2 \times 4.95 \times 10^4 \times 0.8} = 0.0259\, rad,$$

soit

$$b_{seuil1} \triangleq \frac{60}{100} 0.3 \times 6.8376.10^3 - \frac{(0.3 \times 6.8376 \times 10^3)^2}{4 \times 4.95 \times 10^4 \times (\sin(0.0259))^2} \times 0.0259 \approx 400. \tag{3.56}$$

**Détermination de $N$, $\epsilon_1$, $\epsilon_3$, $\tau_1$, $\tau_2$ de l'algorithme 5 :**

On choisit une fenêtre glissante comportant au maximum

$$N \triangleq 100 \tag{3.57}$$

valeurs. Pour ne pas avoir des valeurs d'angles de dérive trop proches dans la fenêtre glissante, on décide d'ajouter une valeur de $\beta$ à condition d'avoir un écart d'au moins 1 milliradian, soit

$$\epsilon_1 \triangleq 0.001\, rad. \tag{3.58}$$

On pose

$$\tau_1 \triangleq 0.01\, s, \tag{3.59}$$

c'est-à-dire qu'on ajoute une valeur à la fenêtre si celle-ci n'est pas pleine et qu'aucune valeur n'a été ajouté à la fenêtre depuis un temps $\tau_1$ alors on l'ajoute. On pose

$$\epsilon_3 \triangleq 0.0207\, rad \tag{3.60}$$

et

$$\tau_2 \triangleq 5\, s, \tag{3.61}$$

c'est-à-dire qu'on supprime certains valeurs si la première valeur de la fenêtre glissante est dans la fenêtre depuis $\tau_2$ secondes et que les $\beta$ ont une dispersion d'au moins $\epsilon_3$ radian.

**Valeurs des seuils** :

Finalement, les valeurs numériques des seuils retenues sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{seuil1} &= 8000, \\
a_{seuil2} &= 4.95 \times 10^4, \\
b_{seuil1} &= 1000, \\
b_{seuil2} &= 400, \\
\beta_{seuil1} &= 0.0175, \\
\beta_{seuil2} &= 0.0207, \\
\beta_{seuil3} &= 0.171, \\
\epsilon_1 &= 0.001, \\
\epsilon_2 &= 0.069, \\
\epsilon_3 &= 0.0207 \\
\tau_1 &= 0.01, \\
\tau_2 &= 5, \\
N &= 100.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

## 3.5 Simulations et résultats

Pour évaluer les performances de l'algorithme proposé, on teste l'algorithme en simulation sur un modèle de validation à 10 ddl développé sur Matlab/ Simulink (voir 2.9). Le modèle prend en compte le couplage des glissements longitudinaux et latéraux via un modèle de Pacejka (2.132) [Pacejka, 2006]. Les perturbations extérieures telles que le dévers ou la pente de la route sont négligées. Les simulations prennent en compte les bruits de mesures décrits à l'équation (2.153). L'estimation est effectuée pour chacune des 4 roues.

### 3.5.1 Estimation des forces latérales

Pour tester l'efficacité de l'estimateur des forces latérales on réalise les simulations sous différentes conditions : route asphalte mouillée et route enneigée et on considère deux manoeuvres différentes : une trajectoire de type changement de voie comme celle illustrée à la figure 3.11 et une trajectoire de type double changement de voie, illustrée à la figure 3.17, permettant d'atteindre des dynamiques importantes. On tracera les erreurs d'estimation pour chacune des roues à partir de l'expression :

$$\epsilon_i(t) \triangleq \frac{|F_{y_{p_i}}(t) - \hat{F}_{y_{p_i}}(t)|}{\max(F_{y_{p_i}}(t))}. \tag{3.63}$$

On entend par forces latérales *réelles* $F_{y_{p_i}}$ les forces latérales obtenues en simulation avec le modèle de Pacejka et les forces latérales *estimées* $\hat{F}_{y_{p_i}}$ celles obtenues avec l'algorithme 4.

#### Trajectoire de type changement de voie

On teste l'algorithme d'estimation des forces latérales en simulation sur une trajectoire de type changement de voie (voir Figure 3.11) à une vitesse de $17\,m/s$ et avec $\mu = 0.8$ et $\mu = 0.3$. Les résultats sont présentés aux figures 3.12 et 3.13 pour $\mu = 0.8$ et aux figures 3.15 et 3.16 pour $\mu = 0.3$. Pour $\mu = 0.8$, les erreurs d'estimations sont globalement inférieurs à 10% exceptés durant les virages où l'erreur atteint 20%. Ceci est dû à la répartition droite gauche choisie (voir équation (3.28)). En effet, si on considère les forces axe par axe, l'erreur

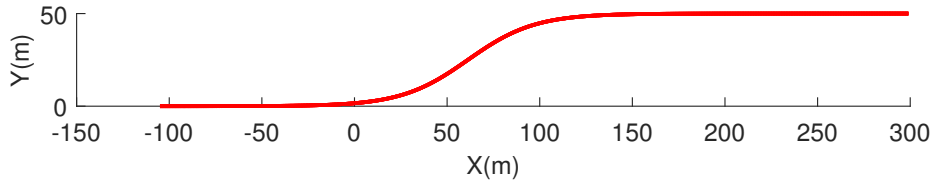



FIGURE 3.11 – Trajectoire de type changement de voie

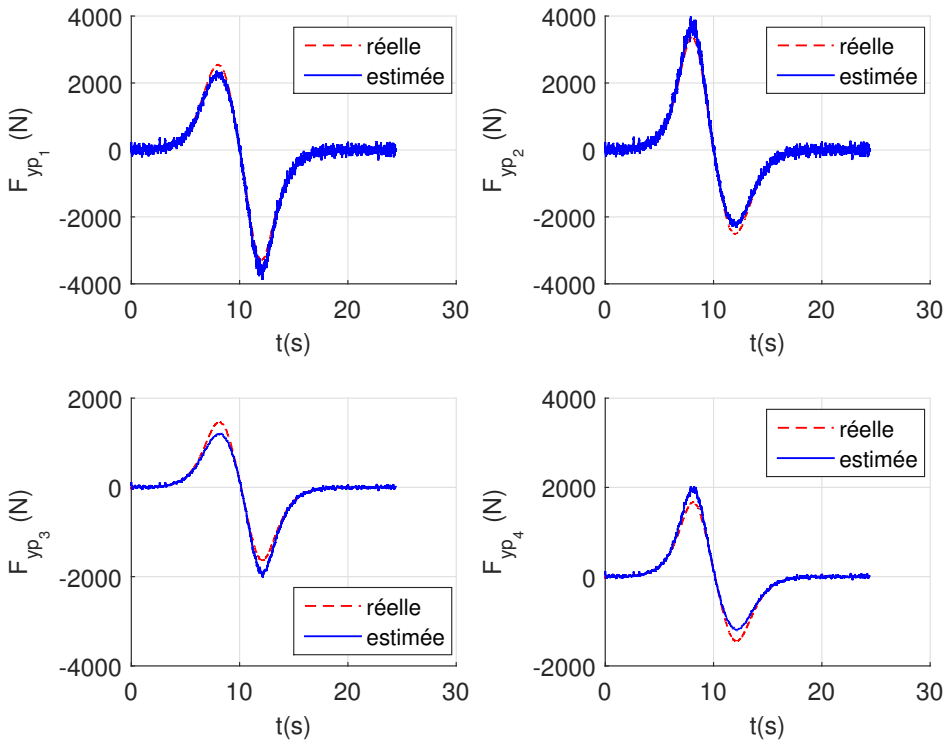



FIGURE 3.12 – Trajectoire changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ avec bruit de mesure.

d'estimation est inférieure à 10% durant toute la simulation. Les mêmes constatations sont faites pour $\mu = 0.3$, avec des pics d'erreurs plus importants lors des virages.

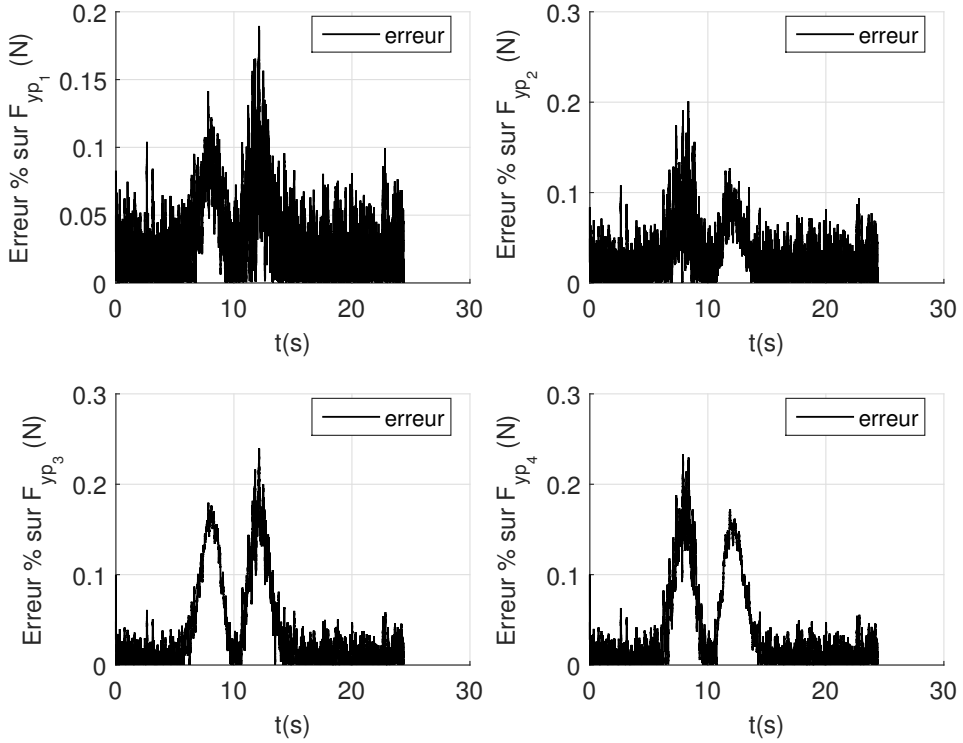



FIGURE 3.13 – Trajectoire changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ avec bruit de mesure.

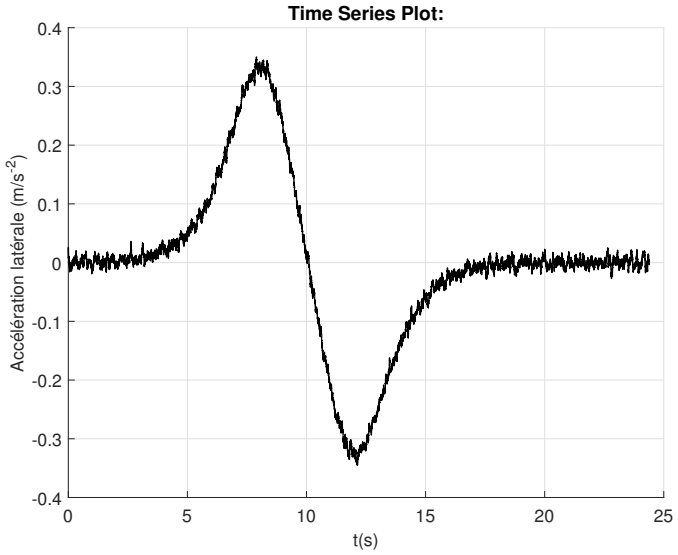



FIGURE 3.14 – Trajectoire changement de voie : accélération latérale pour $\mu = 0.8$ à une vitesse de $17\,m/s$

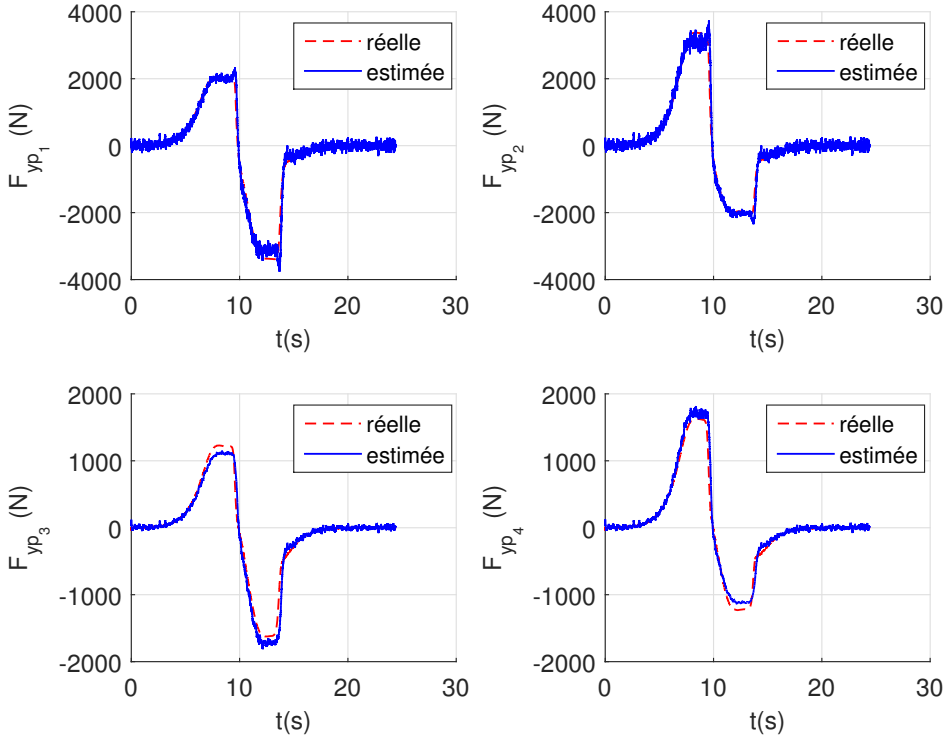



FIGURE 3.15 – Trajectoire changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure.

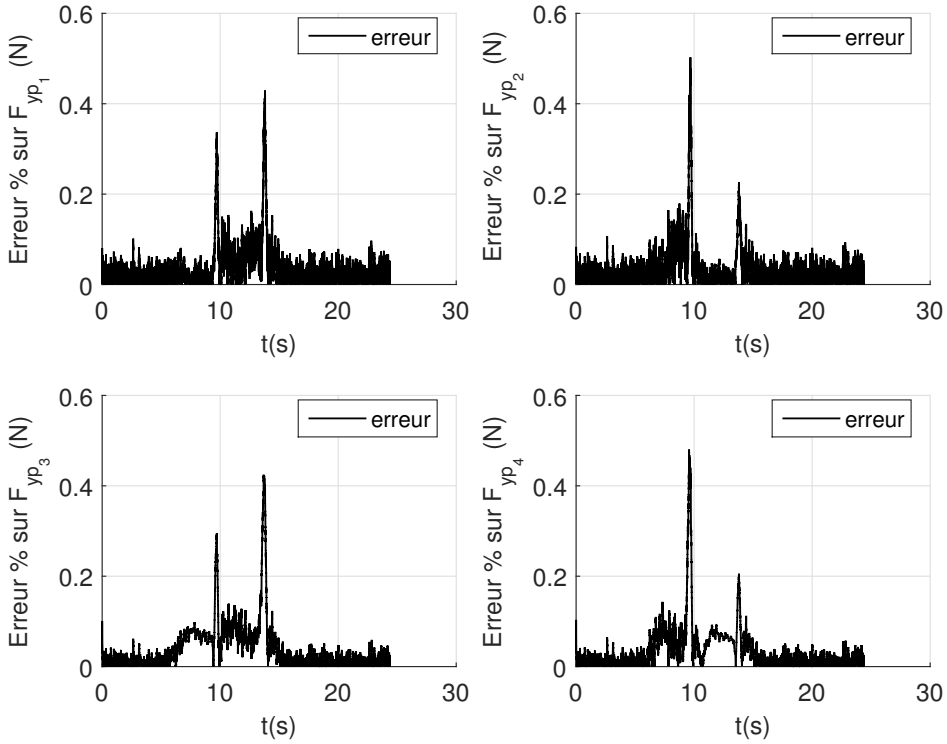



FIGURE 3.16 – Trajectoire changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure.

### Trajectoire de type double changement de voie

On teste l'algorithme d'estimation des forces latérales en simulation sur Matlab/Simulink, sur une trajectoire de type double changement de voie (voir figures 3.17 et 3.18) avec $\mu = 0.8$

et $\mu = 0.3$. Les bruits de mesures décrits à l'équation (2.153) sont considérés.

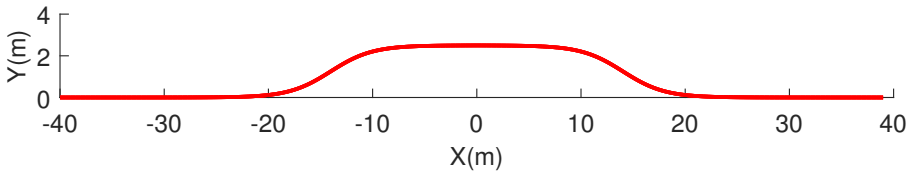



FIGURE 3.17 – Trajectoire de type double changement de voie

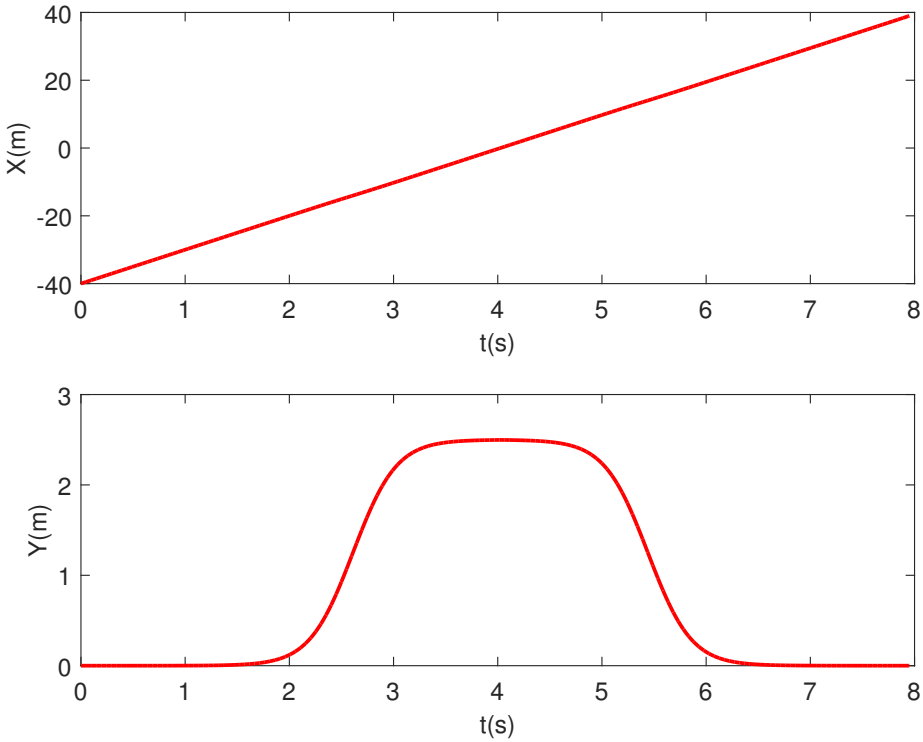



FIGURE 3.18 – Trajectoire de type double changement de voie en fonction du temps

Les figures 3.19 et 3.22 montrent l'estimation des forces latérales estimées et mesurées au niveau de chaque roue pour $\mu = 0.8$ et $\mu = 0.3$ avec une vitesse de déplacement de $10\,m/s$. Ce type de manoeuvre entraîne des accélérations latérales plus importantes, jusqu'à $0.6\,g$ (voir Figure 3.21). Les erreurs d'estimation sont illustrées aux figures 3.20 et 3.23. On constate que l'algorithme proposé montre de bonnes performances. Toutefois, on constate toujours que l'erreur d'estimation est importante dans les virages où l'accélération latérale est forte. Dans le cas où pour $\mu = 0.8$, l'erreur d'estimation atteint près de 40% pour les roues avant lorsque l'accélération latérale dépasse les $0.6\,g$. Autrement, l'erreur reste inférieure à 20%. De même, pour $\mu = 0.3$, dans les virages, le véhicule est soumis à une accélération latérale importante et les erreurs sont importantes mais pendant un bref instant.

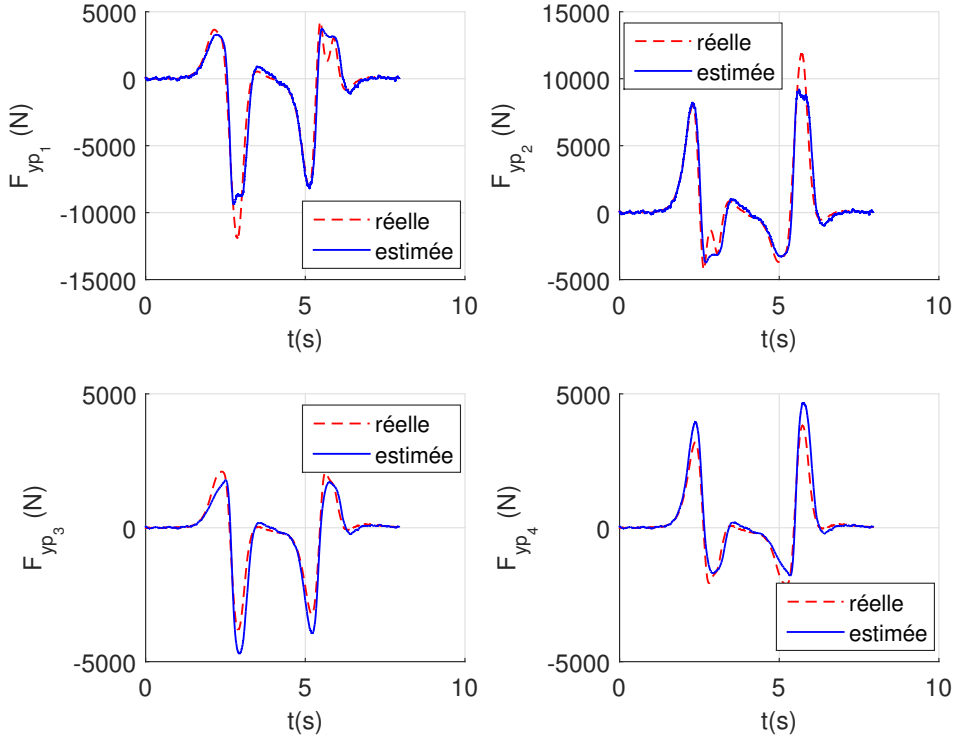



FIGURE 3.19 – Trajectoire double changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$ avec bruit de mesure.

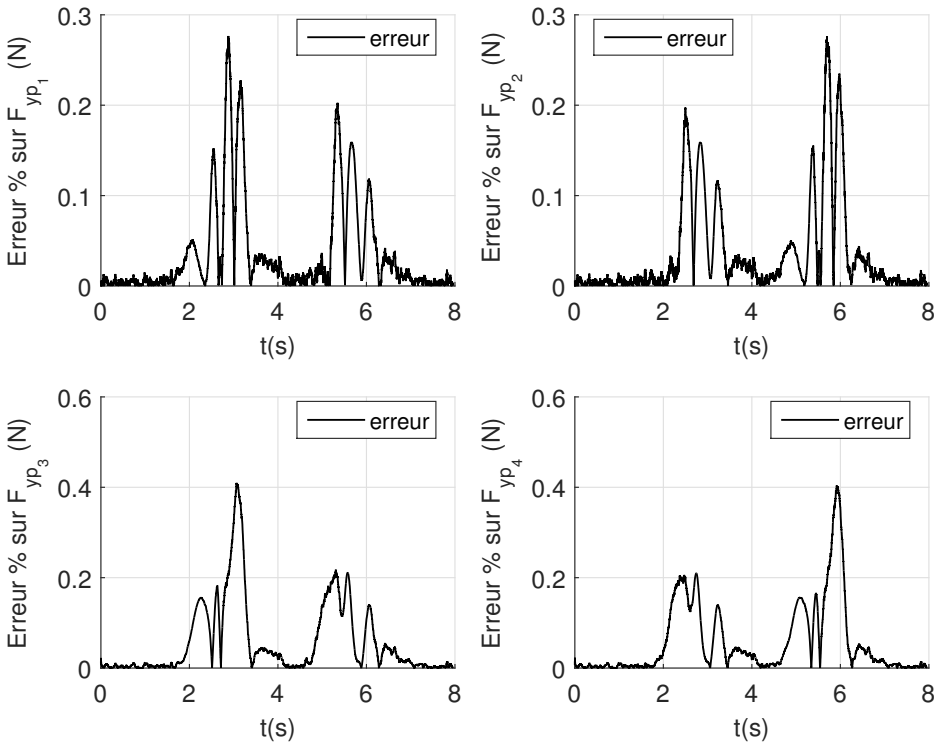



FIGURE 3.20 – Trajectoire double changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.8$ avec bruit de mesure.

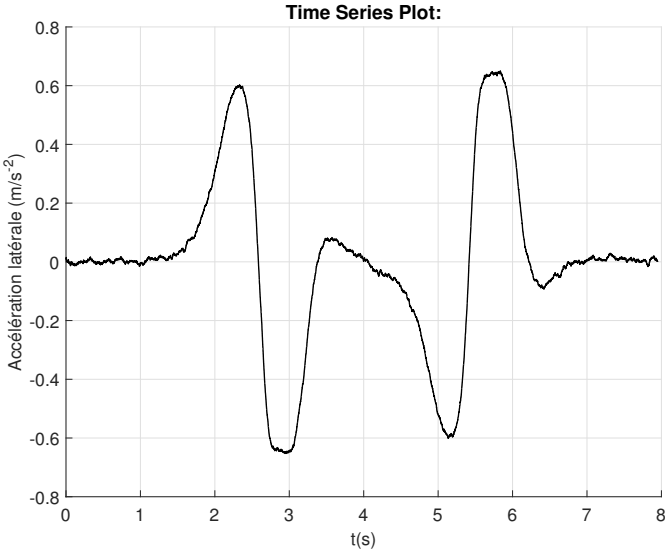



FIGURE 3.21 – Trajectoire double changement de voie : accélération latérale pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$

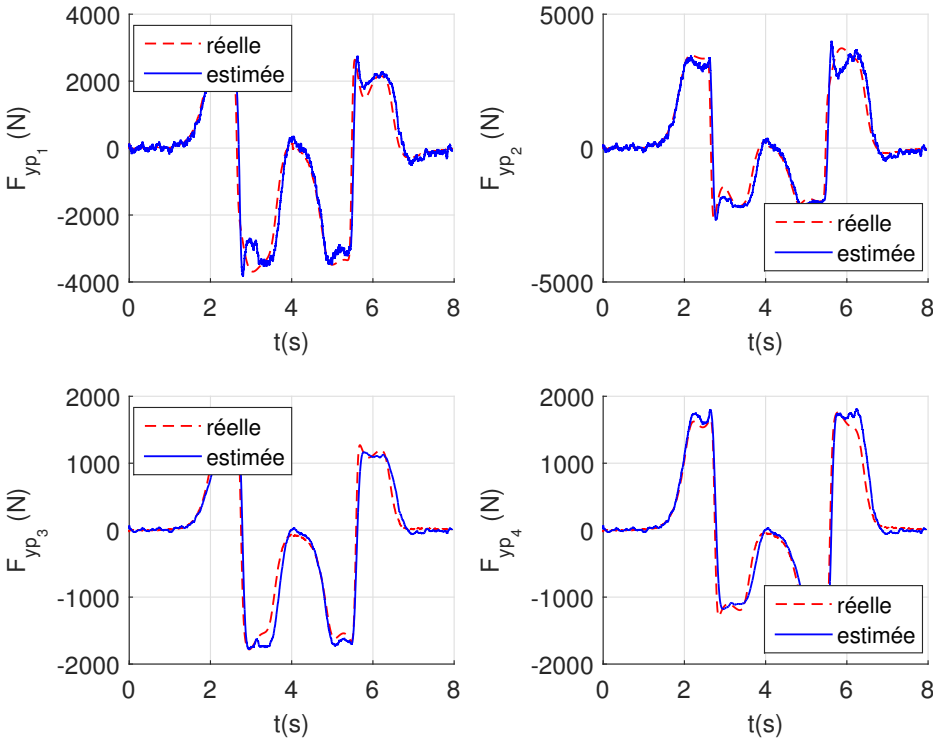



FIGURE 3.22 – Trajectoire double changement de voie : estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure.

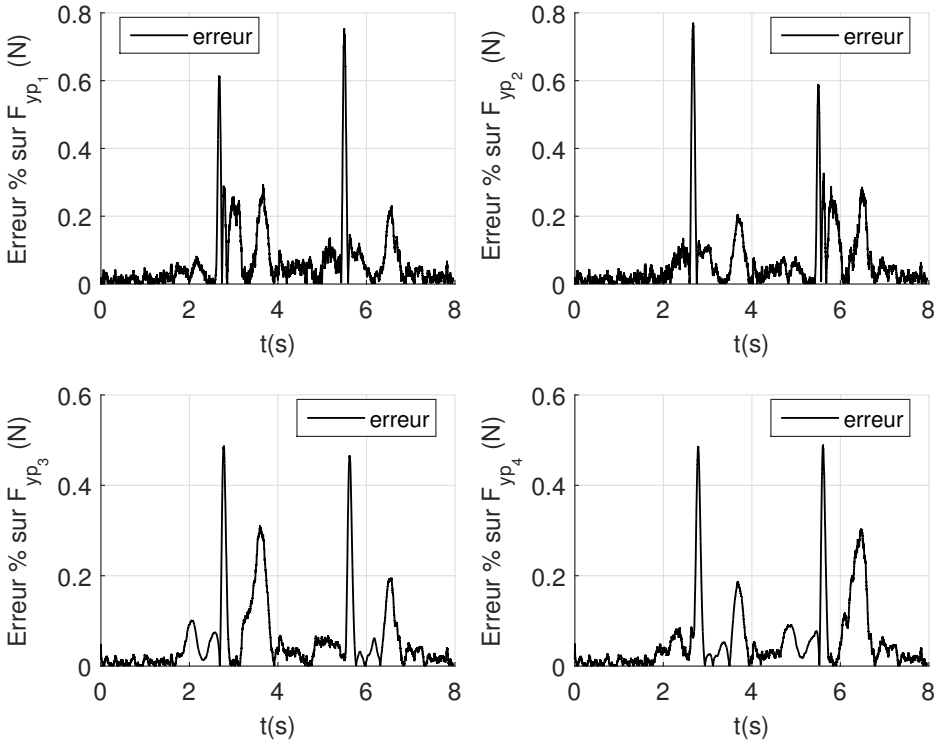



FIGURE 3.23 – Trajectoire double changement de voie : erreur en pourcentage de l'estimation des forces latérales pour $\mu = 0.3$ avec bruit de mesure.

**Tableau de synthèse**

On synthétise les résultats dans le tableau 3.3. On appelle $e_{max}$, le maximum de l'erreur entre les 4 roues calculé à partir de l'équation (3.63) :

$$e_{max} \triangleq \max_i \epsilon_i(t).$$

On définit $E_{tot}$ le maximum de l'erreur entre les 4 roues calculé comme suit, avec $n$ le nombre d'éléments :

$$\epsilon_{tot_i} \triangleq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_t (\hat{F}_{y_p}(t) - F_{y_p}(t))^2} \tag{3.64}$$

et

$$E_{tot} = \max_i \epsilon_{tot_i}. \tag{3.65}$$

TABLE 3.3 – Synthèse des erreurs

| | Trajectoire | $\mu_{y_{\max}}$ | Accélération latérale max | $e_{max}$ en % | $E_{tot}$ en N |
|---|---|---|---|---|---|
| Avec bruit | Changement | 0.8 | $3.4369\,m/s^{-2}$ | 0.3120 | 148.08 |
| | de voie | 0.3 | $3.1177\,m/s^{-2}$ | 0.2671 | 195.49 |
| Avec bruit | Double changement | 0.8 | $6.3782\,m/s^{-2}$ | 0.4097 | 791.9 |
| | de voie | 0.3 | $3.1769\,m/s^{-2}$ | 0.7711 | 436.15 |

### 3.5.2 Estimation des coefficients de friction et de rigidité de dérive

Plusieurs essais sous différentes types de revêtement ont été effectués pour évaluer la performance de l'estimateur. Pour cela, on effectue les tests sur une trajectoire de type double changement de voie qui implique des dynamiques importantes du véhicule.

#### 3.5.2.1 Outils d'analyse

Une fois la simulation effectuée, toutes les données étant disponibles, l'analyse de la performance peut se faire en rejouant le comportement de l'estimateur des forces de frottement sur l'ensemble des données. Soit $T$ le temps de simulation et $T_e$ le pas de temps de simulation tel que $n \triangleq \frac{T}{T_e}$. A chaque pas d'estimation $t_k \triangleq k\,T_e$, avec $\forall k \in [\![0; n]\!]$, on estime une valeur de $\hat{C}_\beta(t_k)$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}(t_k)$, qui permet de calculer le modèle de Dugoff correspondant $\hat{F}_{y_p}^{Dug}(t_k, \tau)$ pour tout $\tau \in [\![t_0; t_n]\!]$ (voir tableau 3.4) :

$$\begin{cases} \hat{F}_{y_p}^{Dug}(t_k, \tau) = \hat{C}_\beta(t_k)\,\tan(\beta(\tau)) \quad \text{si} \quad \lambda(\tau) \geq 1, \\ \hat{F}_{y_p}^{Dug}(t_k, \tau) = \hat{C}_\beta(t_k)\,\tan(\beta(\tau))\,(2 - \lambda(\tau))\,\lambda(\tau) \quad \text{si} \quad \lambda(\tau) < 1, \end{cases} \tag{3.66}$$

avec $\lambda(\tau) = \frac{\hat{\mu}_{y_{\max}}(t_k)\,F_z(\tau)}{2\,\hat{C}_\beta(t_k)|\tan(\beta(\tau))|}$.

On peut alors tracer sur une même figure (voir par exemple Figure 3.24) les données suivantes :

- en noir, les valeurs réelles issues du modèle de Pacejka durant toute la simulation,
- en bleu, les valeurs présentes dans la fenêtre glissante à chaque instant,
- en magenta, le modèle affine qui s'ajuste au mieux, au sens des moindres carrés, à la fenêtre glissante,
- en rouge, le modèle de Dugoff pour toutes les valeurs de la simulation à partir des estimations de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$,
- en vert, une portion du modèle de Dugoff (rouge) qui correspond à la portion de la fenêtre glissante,
- en noir plein, le modèle constant qui correspond à la fenêtre glissante.

A partir des estimations $\hat{C}_\beta(t_k)$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ il est possible de calculer la courbe de frottement de Dugoff pour toutes les données disponibles. Dans l'exemple considéré ici, la figure 3.24 montre le modèle de Dugoff (en rouge), à l'instant $t_k = 1.756\,s$. La zone choisie est la zone affine, soit la zone 1. On peut voir que la courbe de Dugoff n'est pas très proche de la courbe réelle noire pointillée. Ceci est dû au fait que la simulation vient de débuter ce qui implique que $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ n'a pas encore été mis à jour. A chaque instant, on peut calculer l'erreur entre les forces issues du modèle de Dugoff et les forces réelles comme suit :

$$e(k\,T_e) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\tau}(\hat{F}_{y_p}^{Dug}(k\,T_e, \tau) - F_{y_p}(\tau))^2}, \quad \text{avec} \quad \tau \in [\![t_0; t_n]\!],$$

et on pose :

$$E_{T_e} = (e(T_e), e(2\,T_e), ...e(n\,T_e)).$$

Le tracé de $E_{T_e}$ par rapport à l'instant d'estimation nous donne une indication sur l'erreur que l'on fait à chaque instant sur l'estimation de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$.

TABLE 3.4 – Estimation à chaque pas de temps

| $T_e$ | $2\,T_e$ | $3\,T_e$ | ... | $n\,T_e$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{C}_\beta(T_e)$ | $\hat{C}_\beta(2\,T_e)$ | $\hat{C}_\beta(3\,T_e)$ | ... | $\hat{C}_\beta(n\,T_e)$ |
| $\hat{\mu}_{y_{\max}}(T_e)$ | $\hat{\mu}_{y_{\max}}(2\,T_e)$ | $\hat{\mu}_{y_{\max}}(3\,T_e)$ | ... | $\hat{\mu}_{y_{\max}}(n\,T_e)$ |
| $\hat{F}_{y_p}^{Dug}(T_e)$ | $\hat{F}_{y_p}^{Dug}(2\,T_e)$ | $\hat{F}_{y_p}^{Dug}(3\,T_e)$ | ... | $\hat{F}_{y_p}^{Dug}(n\,T_e)$ |
| $e(T_e)$ | $e(2\,T_e)$ | $e(3\,T_e)$ | ... | $e(n\,T_e)$ |

Sur la figure 3.25, à l'instant $t_k = 1.756\,s$, la fenêtre glissante se remplit, l'estimation de $\hat{C}_\beta$ est plus précise, mais on ne peut toujours pas estimer $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ car le comportement du pneu se trouve toujours dans la zone 1. A la figure 3.26, à l'instant $t_k = 1.767\,s$, on entre dans la zone de Dugoff, l'estimation de $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ peut avoir lieu et se fait de plus en plus précise lorsqu'on atteint la zone de transition (voir Figure 3.27 pour $t_k = 2.117\,s$). Pour finir, la figure 3.28, à l'instant $t_k = 2.316\,s$, montre l'estimation lorsque la zone détectée est la zone 3.

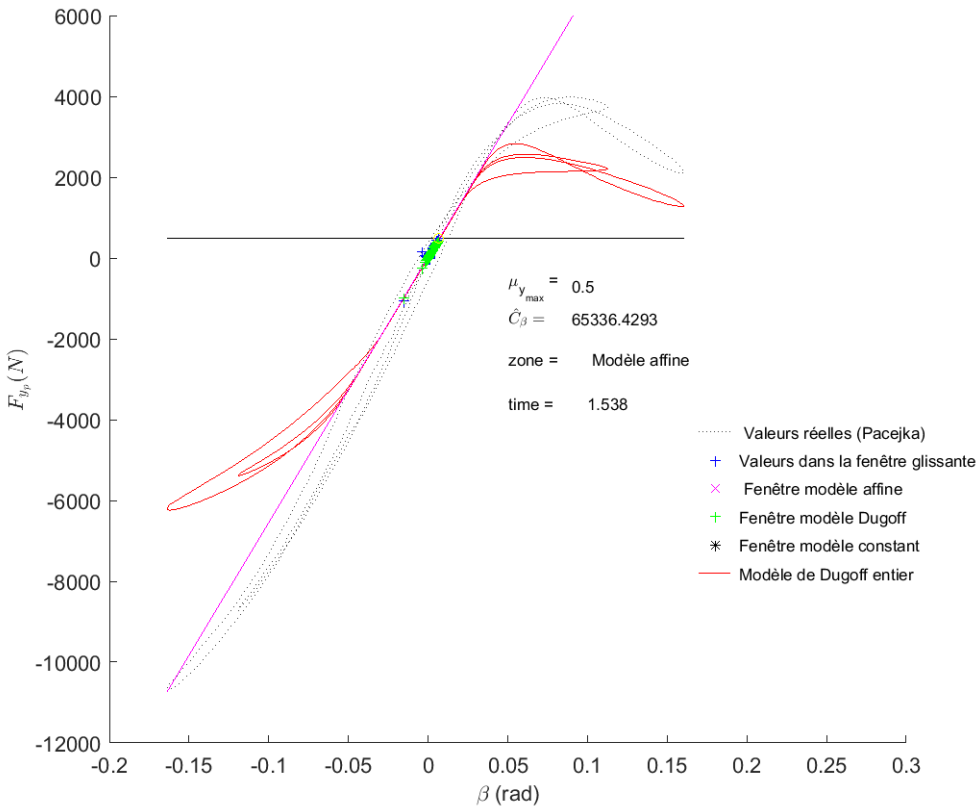



FIGURE 3.24 – Illustration $n°1$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

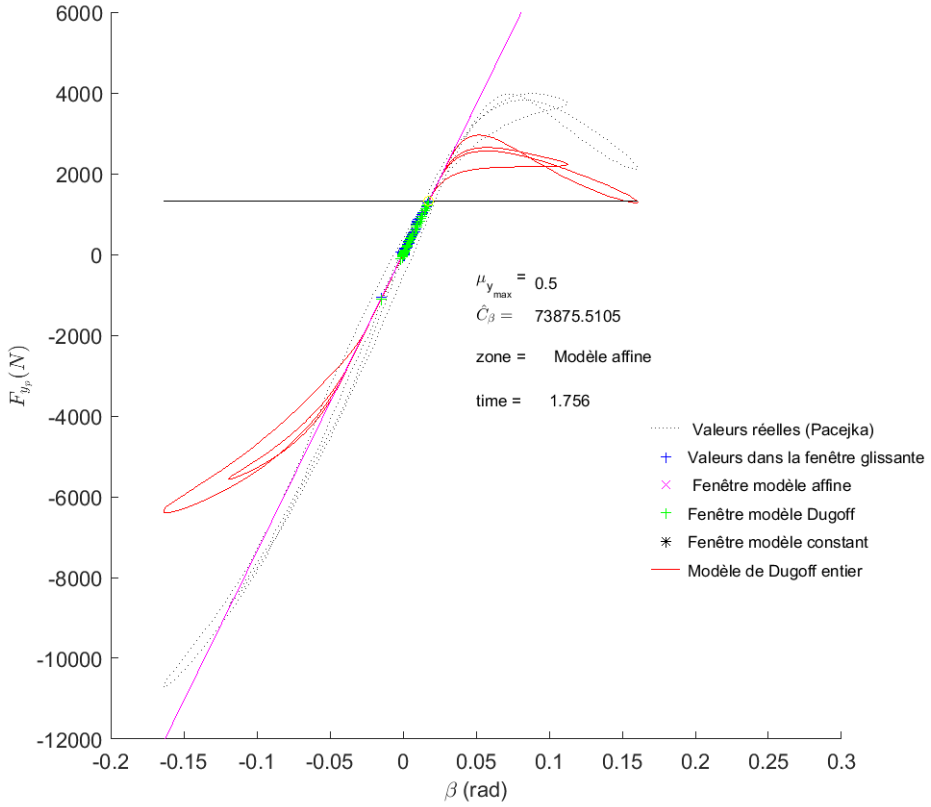



FIGURE 3.25 – Illustration $n°2$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

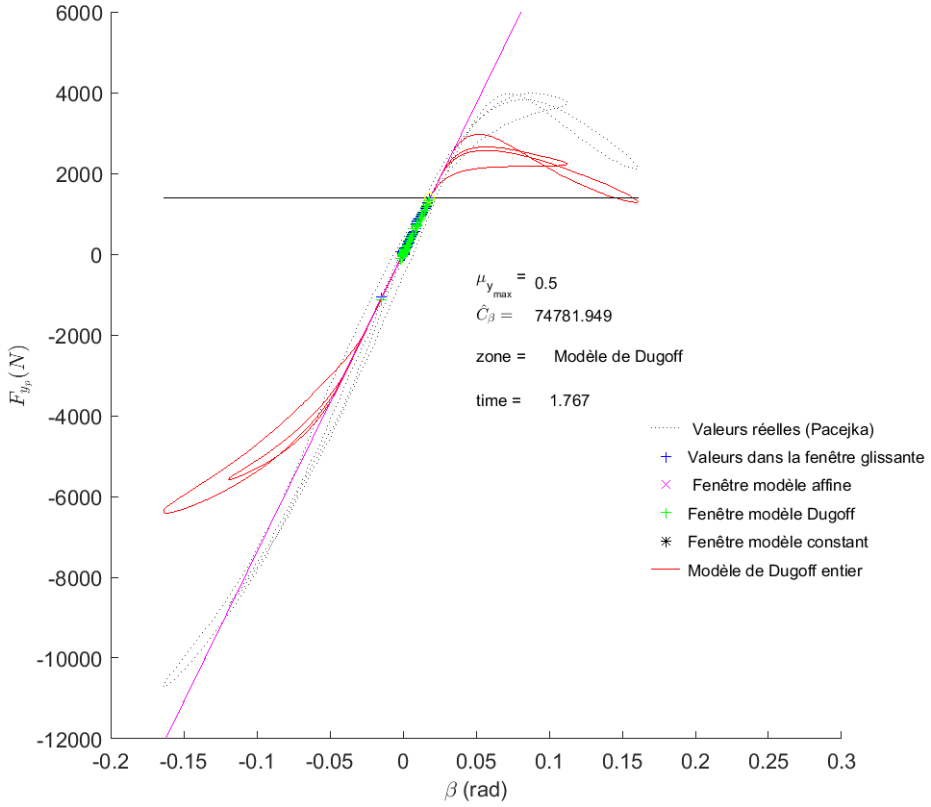



FIGURE 3.26 – Illustration $n°3$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

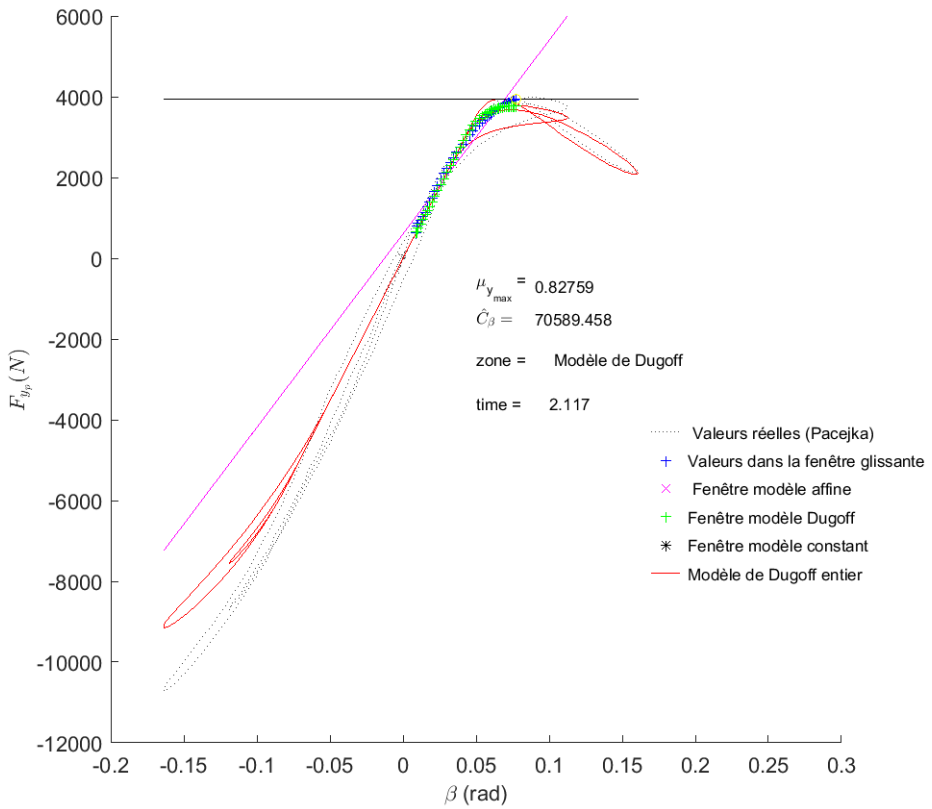



FIGURE 3.27 – Illustration $n°4$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

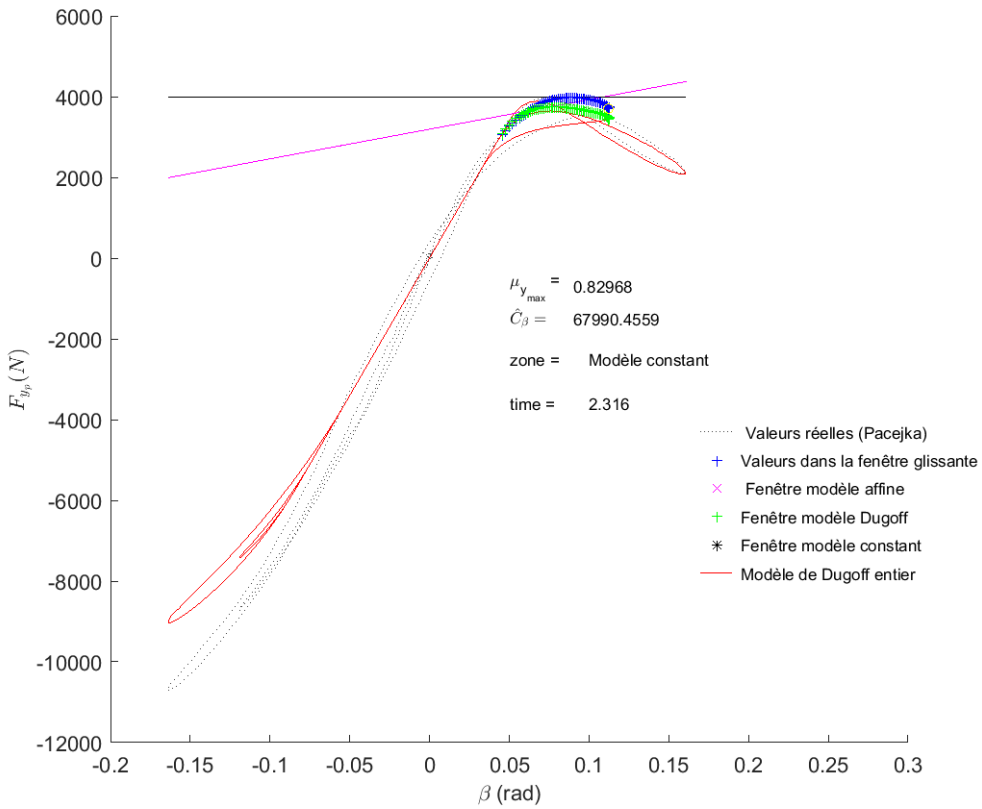



FIGURE 3.28 – Illustration $n°5$ du résultat de l'algorithme d'estimation, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

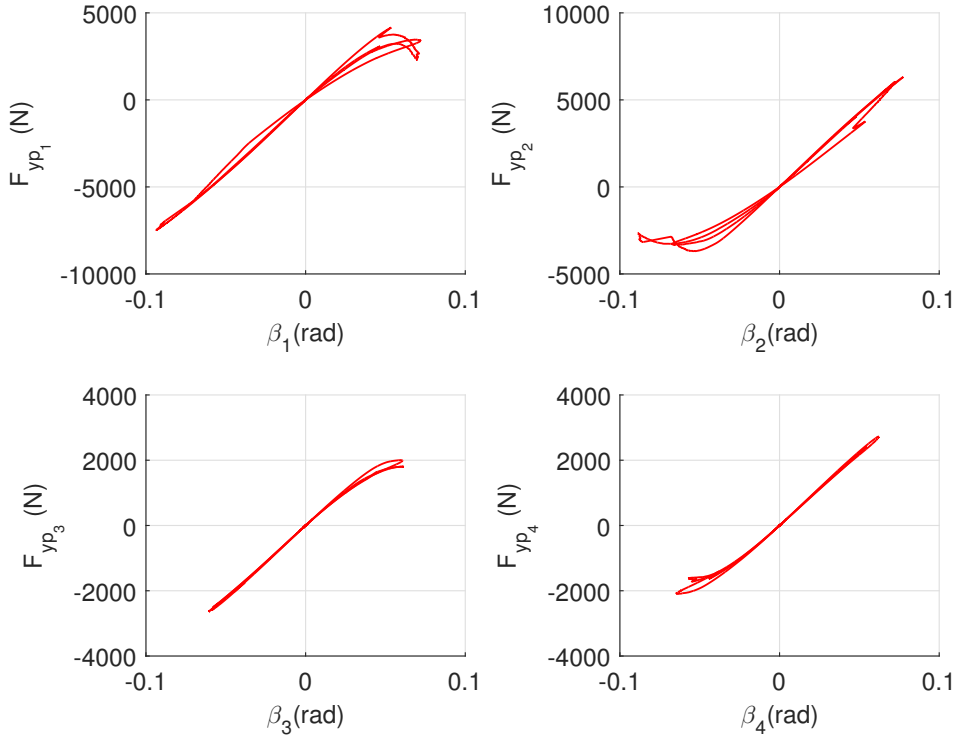



FIGURE 3.29 – Forces latérales réelles en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

#### 3.5.2.2 Résultats route asphaltée mouillée $\mu = 0.8$

Le véhicule se déplace à une vitesse de $10\,m/s$ sur une trajectoire composée d'asphalte mouillé ($\mu = 0.8$) de type double changement de voie comme illustré à la Figure 3.17. La courbe de la *force latérale réelle* en fonction de l'angle de dérive au niveau de chacune des roues, est illustrée à la figure 3.29 et la *force latérale estimée* en fonction de l'angle de dérive au niveau de chacune des roues à la figure 3.30.

La figure 3.31 montre l'estimation du coefficient de rigidité de dérive $\hat{C}_\beta$ en utilisant les forces latérales réelles (courbes bleues) que l'on vient comparer à celles obtenues à partir du modèle de Pacejka (courbes rouges) implémentées dans le simulateur tel que $C_{\beta_{mes}} = B_y\,C_y\,D_y$ (voir équation (2.129)). La figure 3.32 montre l'estimation du coefficient de friction latérale maximale en utilisant les forces latérales réelles (courbes bleues). Le coefficient d'adhérence du sol est supposé égal à 0.8. On observe que $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ sont bien estimés quand les forces latérales réelles sont utilisées. Même si les écarts peuvent paraître importants au premier abord, on constate qu'une fois ces estimées réinjectées dans le modèle de Dugoff, les forces latérales ainsi calculées sont très proches des forces réelles (voir Figure 3.33 et Figure 3.34). En dehors des virages où l'accélération latérale maximale atteint $5.3\,m/s^{-2}$, l'erreur est inférieure à 10%.

Analysons les courbes correspondant au pneu avant gauche. Au début de la trajectoire, le véhicule se déplace sur une ligne droite, comme le montre la figure 3.17, et la force latérale est proportionnelle à l'angle de dérive (voir Figure 3.29). Sur cette portion de la trajectoire, entre $t = 0\,s$ et $t = 1.5\,s$, l'angle de dérive reste très proche de $0\,rad$ (voir Figure 3.36). Les données sont bruitées et ne sont pas encore assez dispersées (voir Figure 3.38), ce qui explique pourquoi le coefficient $\hat{C}_\beta$ est légèrement sous estimé. Jusqu'à $t = 1.7\,s$, le coefficient de friction latérale maximale $\hat{\mu}_{y_{max}}$ ne peut pas être estimé car la zone correspondante est la zone 1 et la valeur est alors fixée à 0.5. Ensuite, le véhicule amorce son virage à gauche, la force latérale atteint

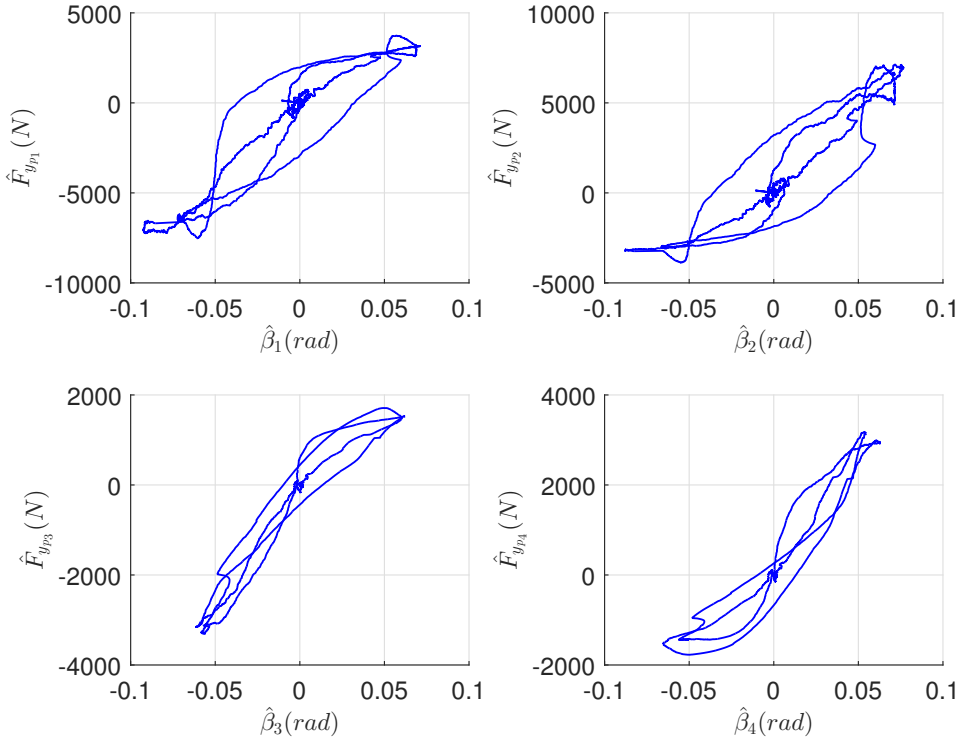



FIGURE 3.30 – Forces latérales estimées en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$

la zone de transition et l'estimation de $\hat{\mu}_{y_{max}}$ peut se faire. A $t = 1.8\,s$ l'estimation de $\hat{\mu}_{y_{max}}$ donne la valeur 1 mais on constate Figure 3.39 que la courbe de Dugoff s'ajuste très bien à la courbe réelle. Ainsi, même si les valeurs semblent éloignées des références attendues, les estimations de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{max}}$ réinjectées dans le modèle de Dugoff donnent des forces latérales très proches de la réalité.

Le coefficient de rigidité de dérive estimé à partir de la force latérale estimée est impacté par l'estimation de la force latérale. En effet, commme montré Figure 3.19, la force latérale réelle a une amplitude plus importante que la force estimée, ce qui explique pourquoi le coefficient de friction latérale maximale $\hat{\mu}_{y_{max}}$ estimé est inférieur à la valeur attendue (voir Figure 3.41). Même si cette estimation ne correspond pas à la valeur 0.8 attendue, elle est correctement estimée par rapport à la force latérale utilisée en entrée (voir Figure 3.45). En effet, l'allure de la courbe de Dugoff (rouge) obtenue à partir des estimations est très proche de la courbe de Pacejka (noire). De plus, si on compare la force latérale réelle et celle obtenue à partir du modèle de Dugoff et des estimations $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{max}}$ (Figure 3.42 et Figure 3.43), on constate que l'erreur est globalement faible.

#### 3.5.2.3 Résultats route enneigée $\mu = 0.3$

Le véhicule se déplace à une vitesse de $10\,m/s$ sur une trajectoire de type double changement de voie comme illustrée à la Figure 3.17 enneigée ($\mu = 0.3$). La courbe de la *force latérale réelle* en fonction de l'angle de dérive au niveau de chacune des roues, est illustrée à la figure 3.47 et la *force latérale estimée* en fonction de l'angle de dérive au niveau de chacune des roues à la figure 3.52. Les coefficients de rigidité de dérive et de friction latérale maximale sont bien estimés à partir des forces latérales réelles (voir figure 3.49 et 3.48). En effet, une fois réinjectées dans le modèle de Dugoff (voir figures 3.50 et 3.51), les erreurs sont inférieures à 15%. Par contre, à partir des forces latérales estimées, les coefficients de rigidité de dérive et de friction latérale maximale sont moins précis et la force latérale issue du modèle de Dugoff et de ces estimations a des erreurs plus importantes, de l'ordre de 30% en virage (voir figures

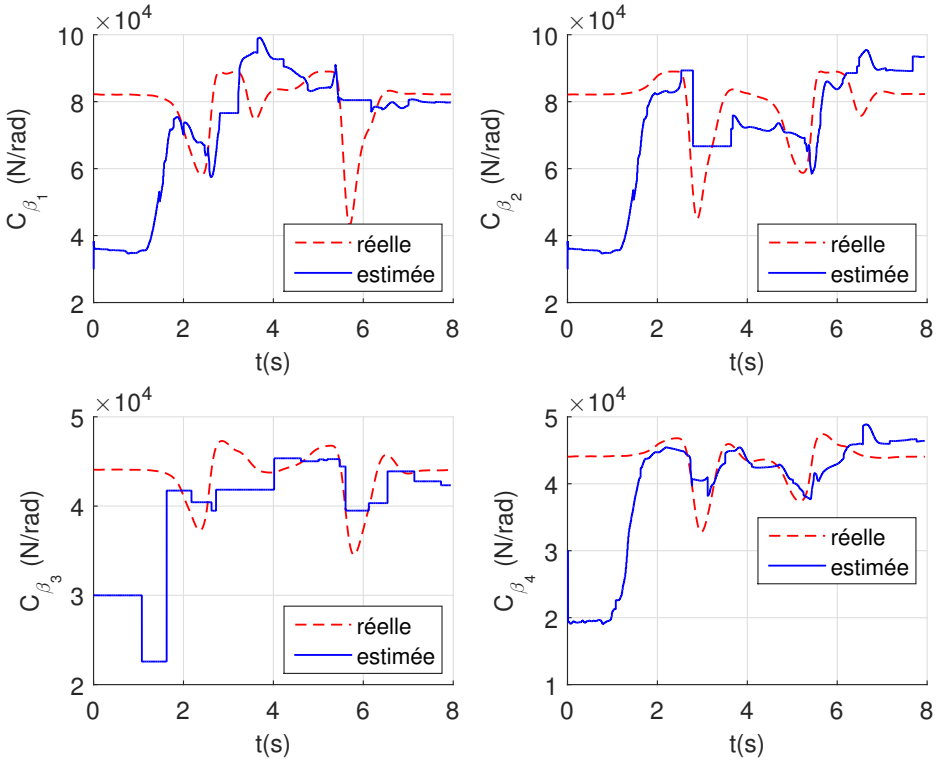



FIGURE 3.31 – Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

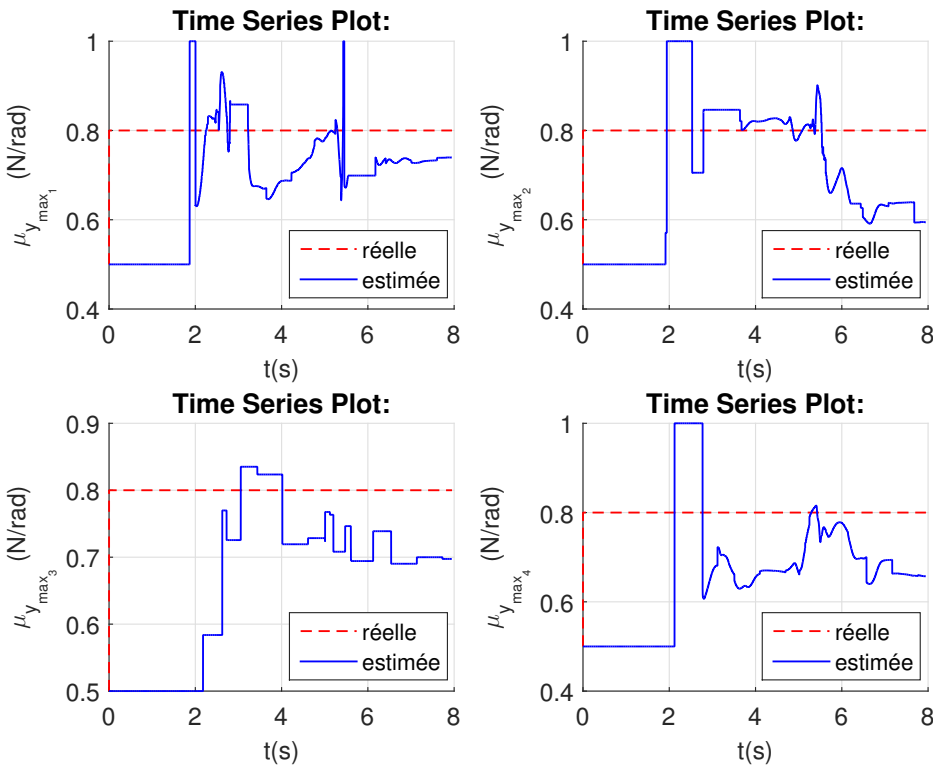



FIGURE 3.32 – Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

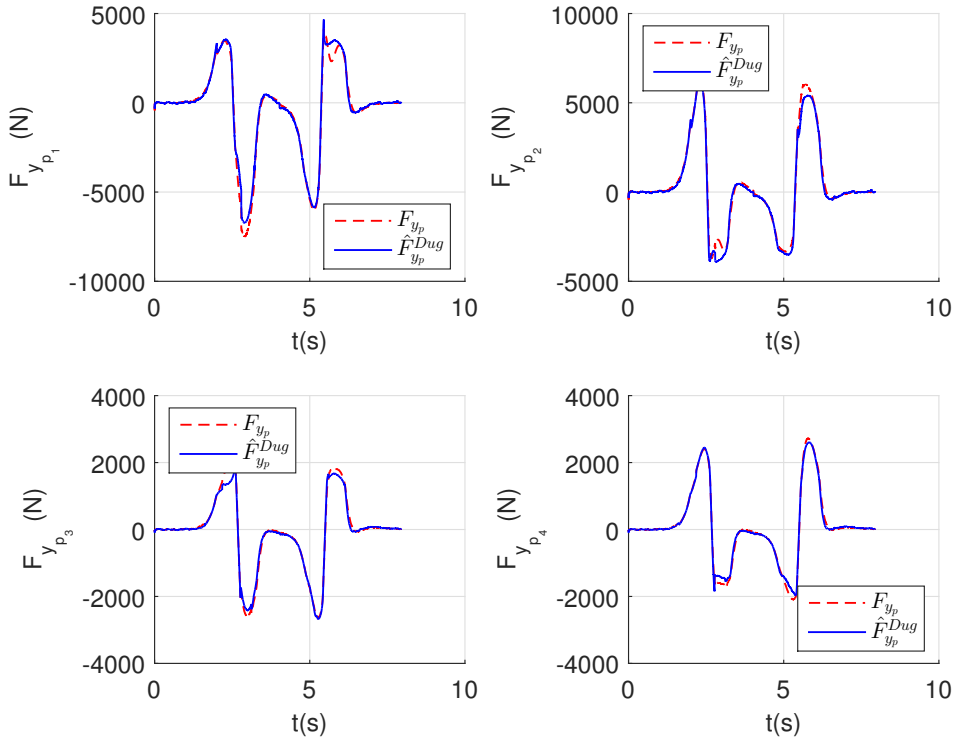



FIGURE 3.33 – Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

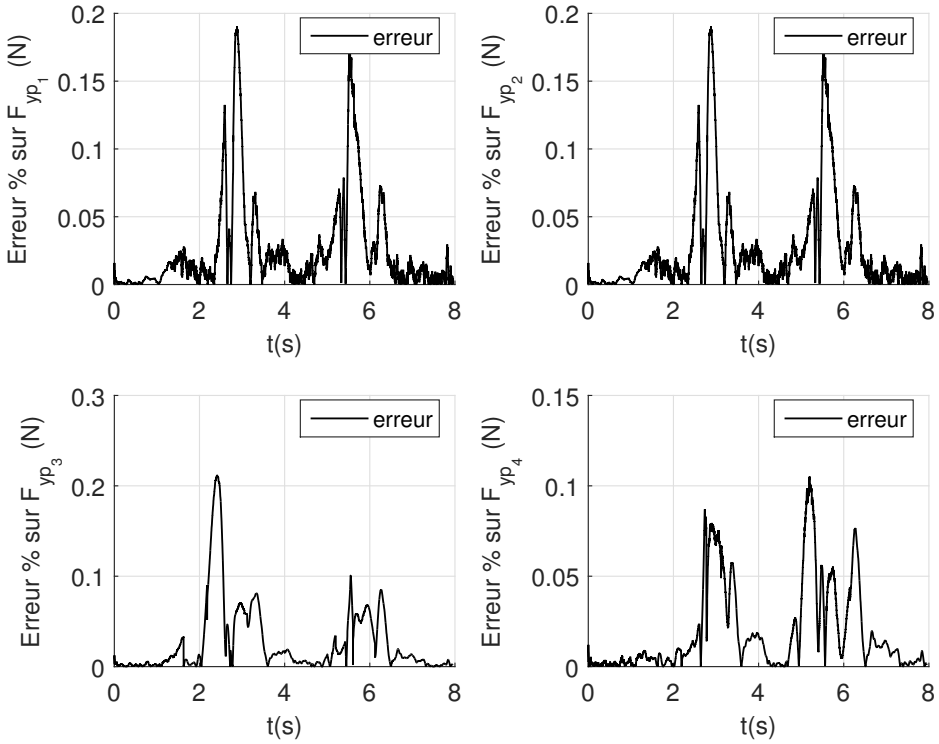



FIGURE 3.34 – Erreur entre la force latérale réelle et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

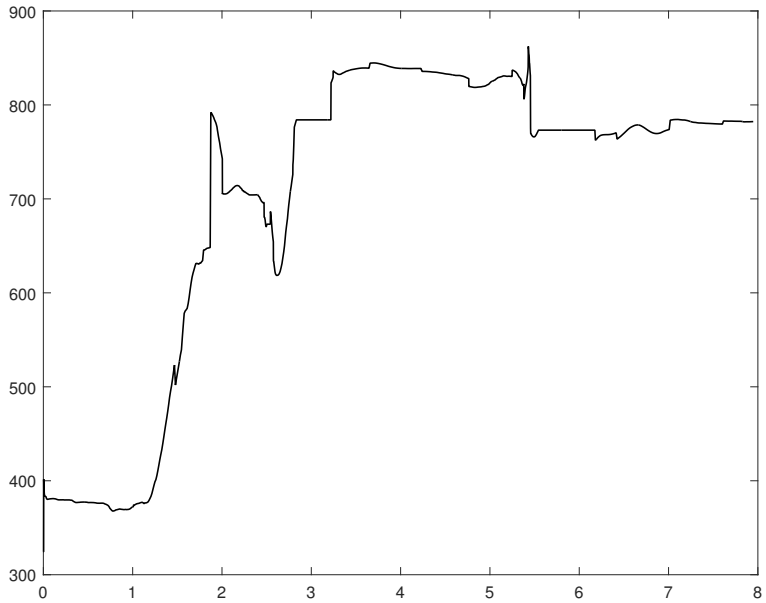



FIGURE 3.35 – $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

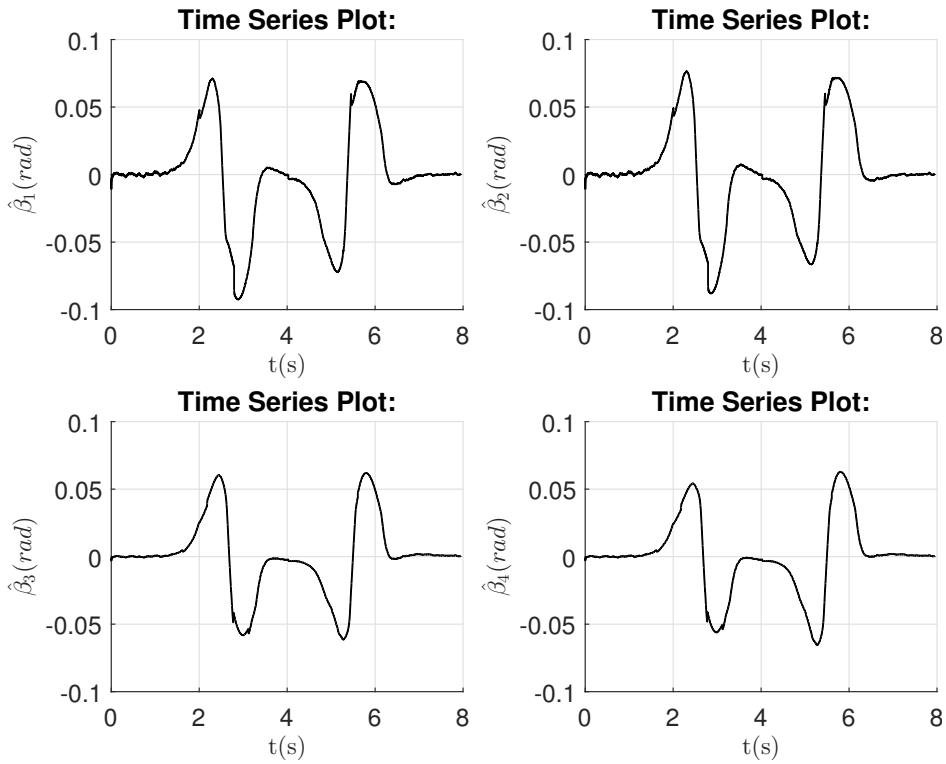



FIGURE 3.36 – Angle de dérive roue par roue, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

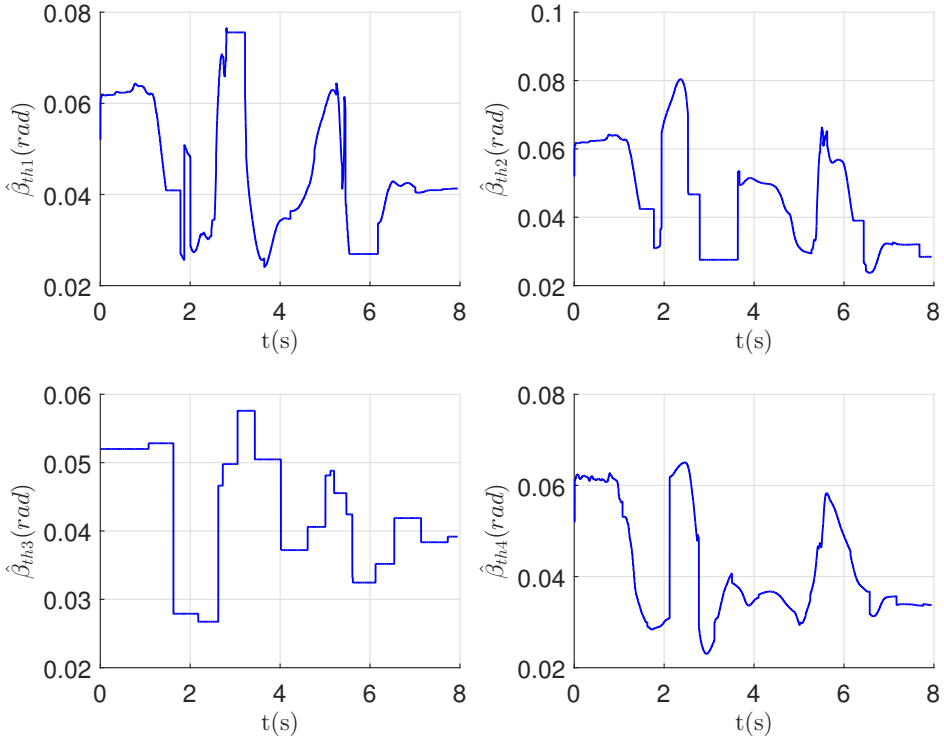



FIGURE 3.37 – Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

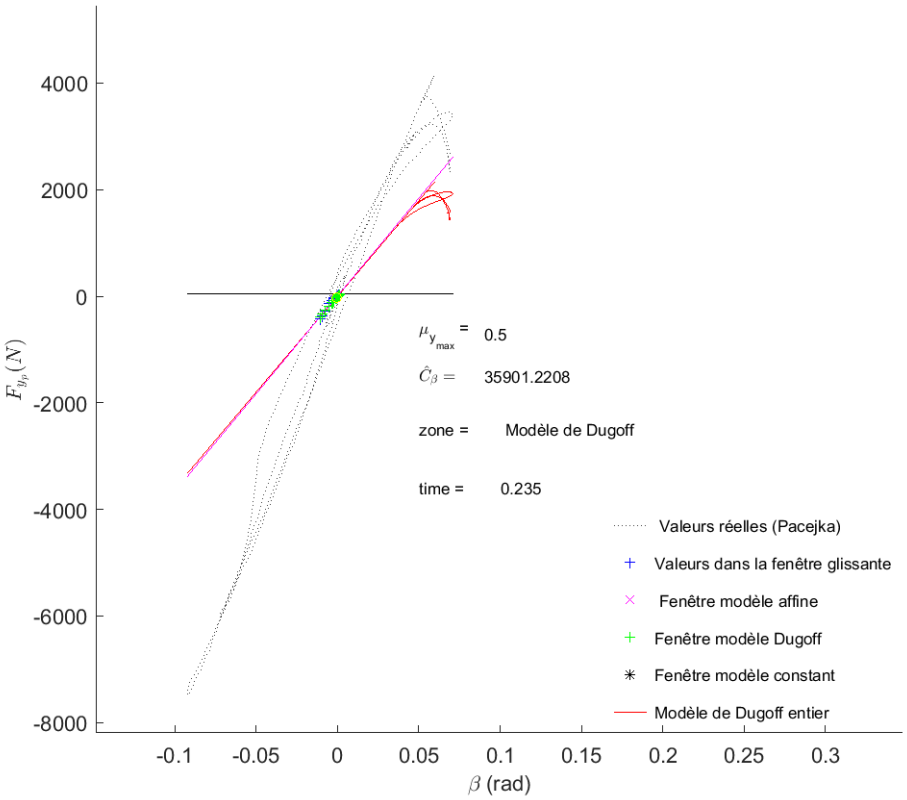



FIGURE 3.38 – Analyse $n°1$ de l'estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales mesurées, pour la roue avant gauche, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

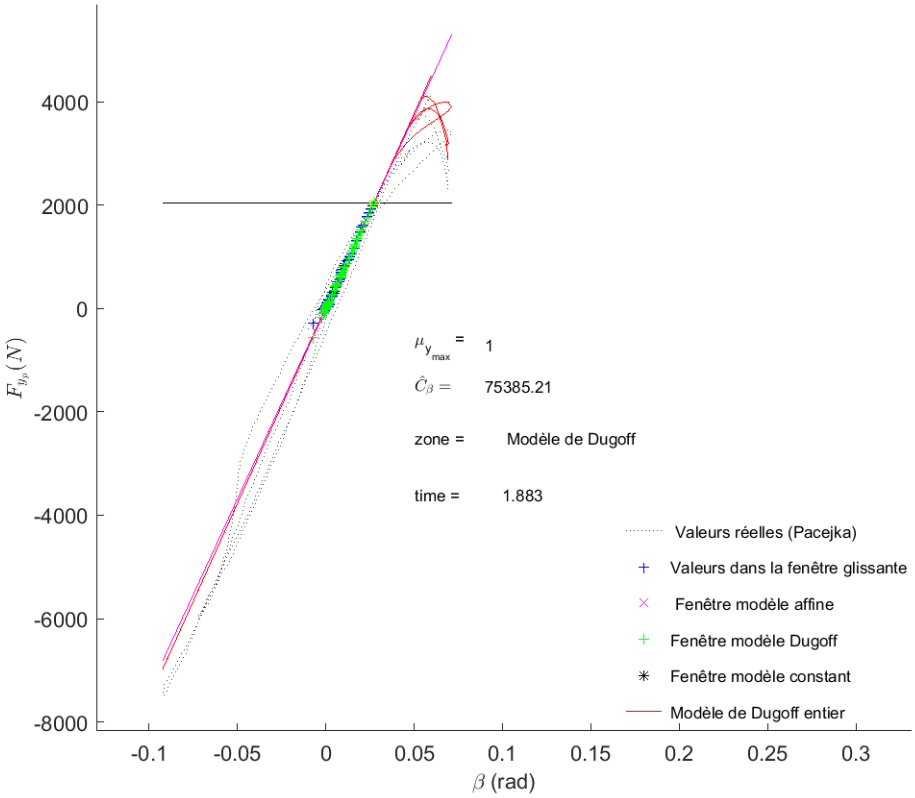



FIGURE 3.39 – Analyse $n°2$ de l'estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales mesurées, pour la roue avant gauche, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

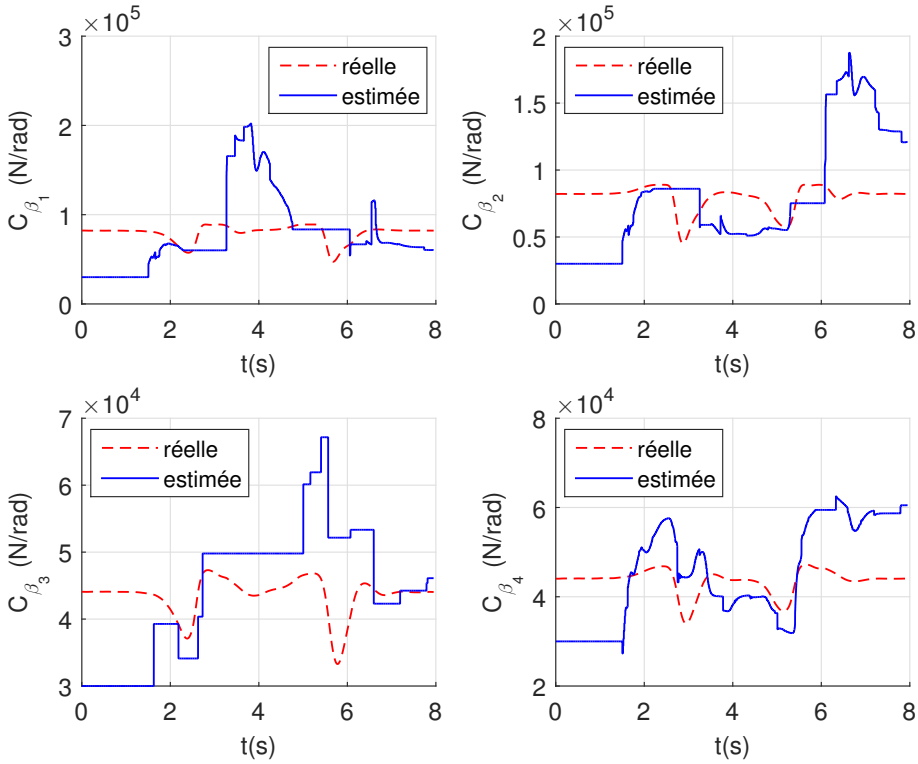



FIGURE 3.40 – Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$

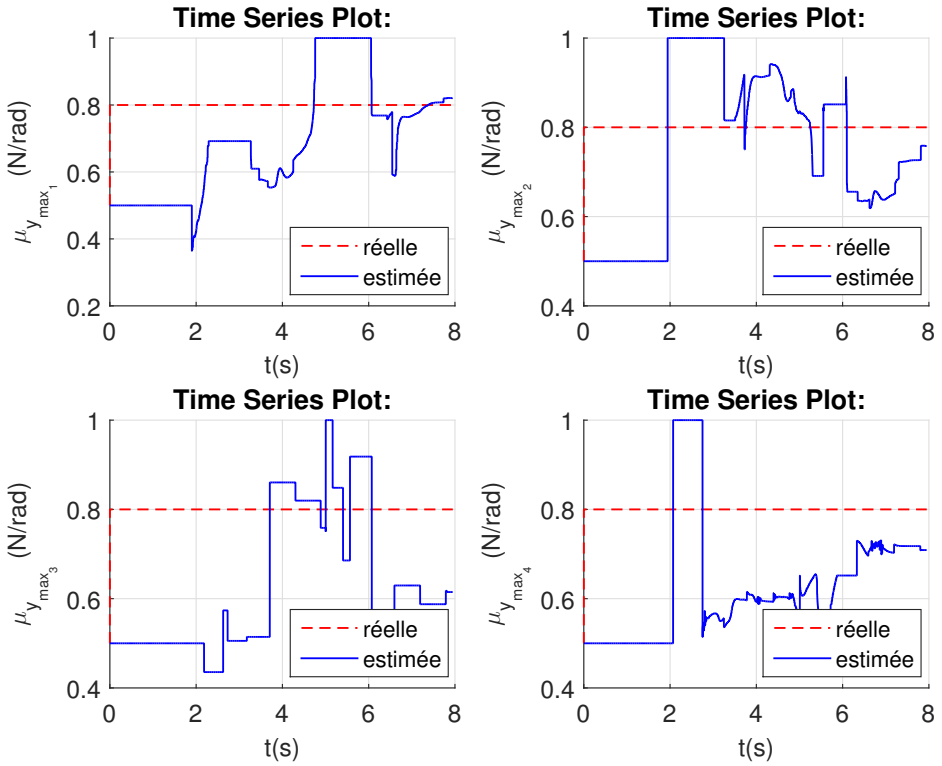



FIGURE 3.41 – Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.8$ à $10m/s$

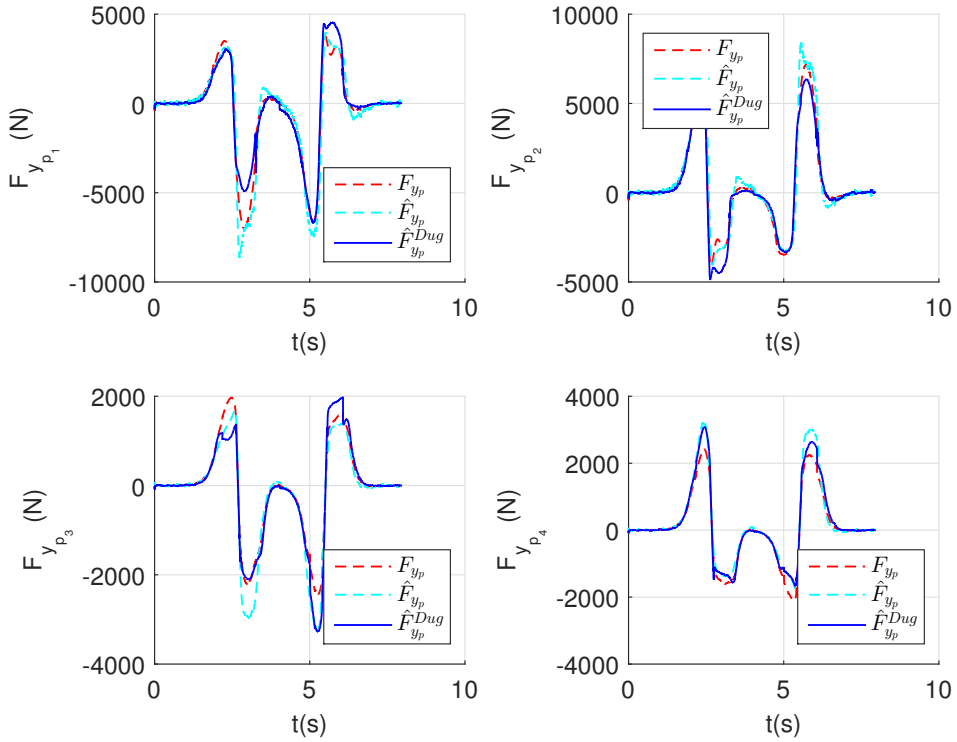



FIGURE 3.42 – Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

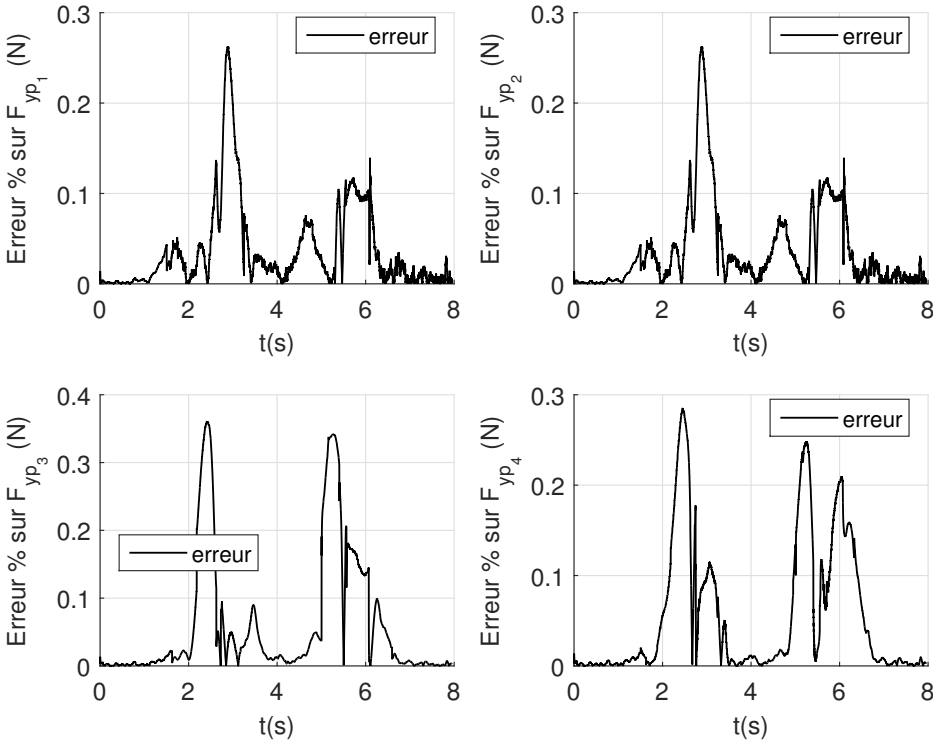



FIGURE 3.43 – Erreur entre la force latérale réelle et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales mesurées), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

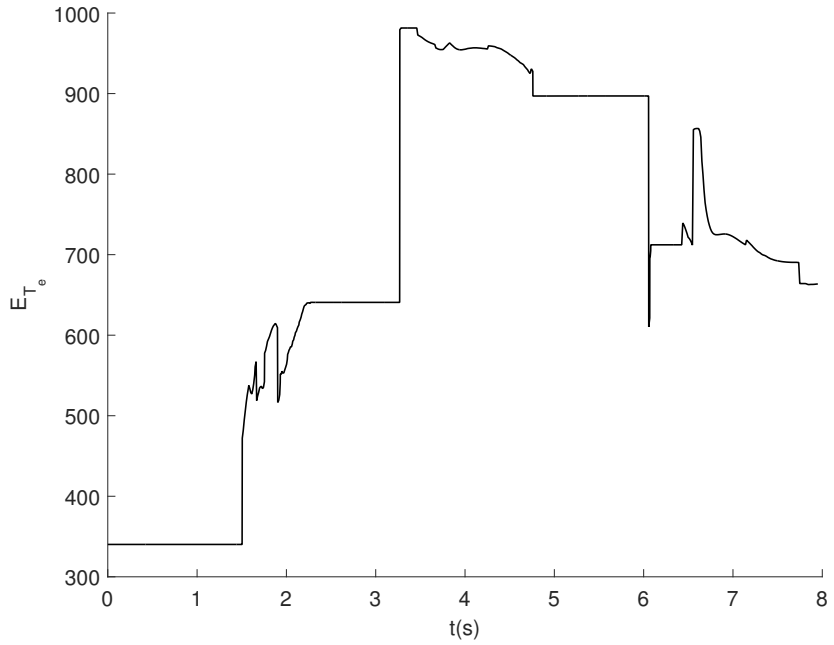



FIGURE 3.44 – $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

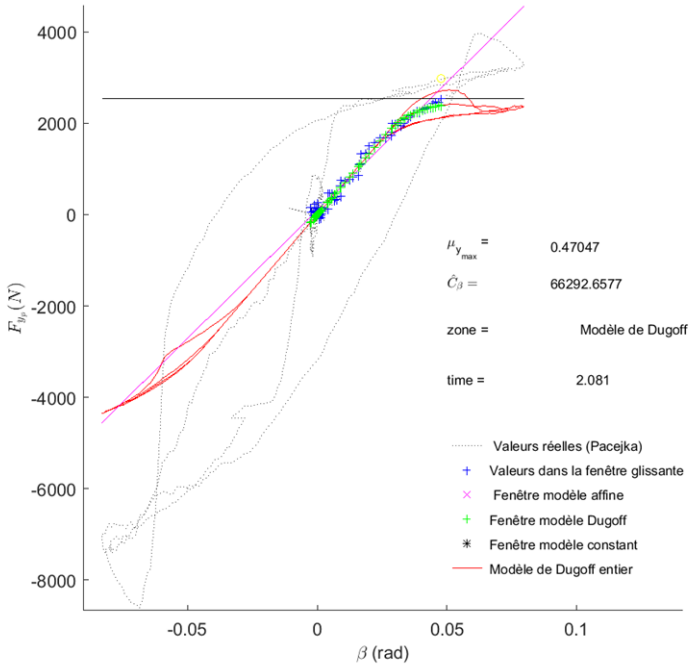



FIGURE 3.45 – Analyse $n°1$ de l'estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales estimées, pour la roue avant gauche, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

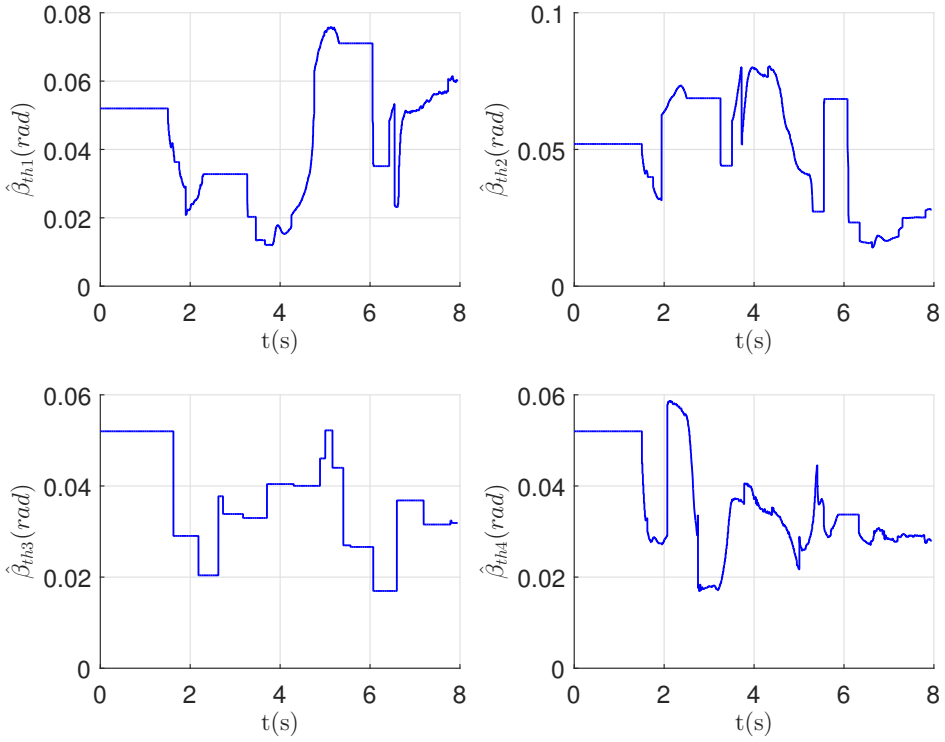



FIGURE 3.46 – Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

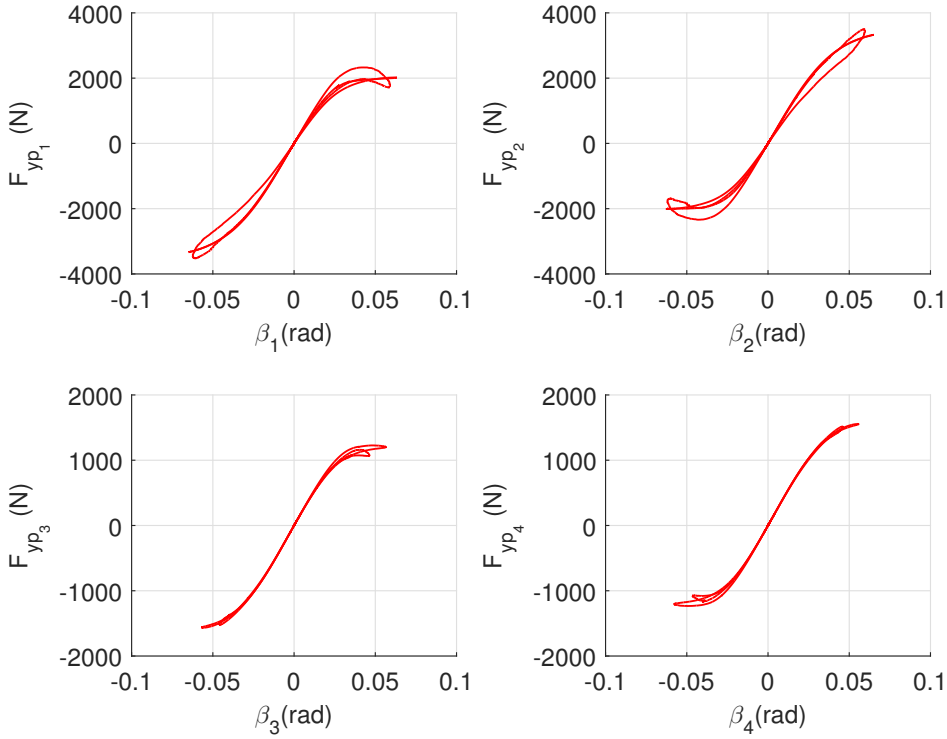



FIGURE 3.47 – Forces latérales réelles en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.3$ à $10m/s$

3.57, 3.56, 3.58 et 3.59). Ceci est dû au fait que la force latérale estimée est inférieure à la force latérale réelle (voir Figure 3.22).

### 3.5.3 Conclusion

L'algorithme d'estimation du coefficient de rigidité de dérive et du coefficient de friction latérale maximale montre de bonnes performances surtout lorsque la force latérale estimée en entrée de l'algorithme est précise. On peut remarquer que lorsque la force latérale est bien estimée (dans le cas où on utilise la force réelle ici), l'erreur d'estimation du coefficient de friction latérale maximale est beaucoup plus faible pour $\mu = 0.3$ que pour $\mu = 0.8$. En effet, en remplaçant $F$ par $\mu$ dans l'équation (3.65), on a pour $\mu = 0.3$, $E_{tot} = 0.1168$ et pour $\mu = 0.8$, $E_{tot} = 0.1917$. L'algorithme a donc de meilleures performances lorsque les angles de dérives ne sont pas trop petits. Par conséquent, l'algorithme est d'autant plus efficace lorsque des manoeuvres latérales importantes sont réalisées. De plus, il est également plus facile d'estimer des coefficients de friction latérale maximale de faibles valeurs puisque les forces latérales sont influencées par le coefficient de friction pour des angles de dérive plus petits et les saturations des pneumatiques arrivent plus rapidement. Ces simulations nous permettent donc finalement de faire les remarques suivantes :

*Remarque* 3.5.1. Le modèle $F_{y_p}^{Dug}(\beta)$ (équation (3.30)) n'a pas été utilisé dans la zone 1 car il n'est pas nécessaire. En effet, il est important de remarquer que lorsque le pneu ne glisse pas complètement, la force latérale n'est pas dépendante du coefficient de friction, bien que ce dernier fournisse un maximum. Par contre, elle dépend de la rigidité de dérive. Ainsi, la force latérale ne dépend du coefficient de friction que lorsque le pneu a perdu son adhérence. Comme mis en évidence figure 3.1, pour de petites valeurs d'angles de dérive, $\mu_{y_{\max}}$ n'a pas un impact important sur la valeur des forces latérales. De plus, on a vu dans la partie 3.4.2 que l'algorithme de Levenberg Marquardt utilisé pour le modèle de Dugoff nécessite le calcul de la dérivée partielle de la force latérale par rapport aux paramètres à estimer $C_\beta$ et $\mu_{y_{max}}$ (voir équation (3.38)). On peut remarquer que si le paramètre $\lambda$ du modèle de Dugoff (3.30)

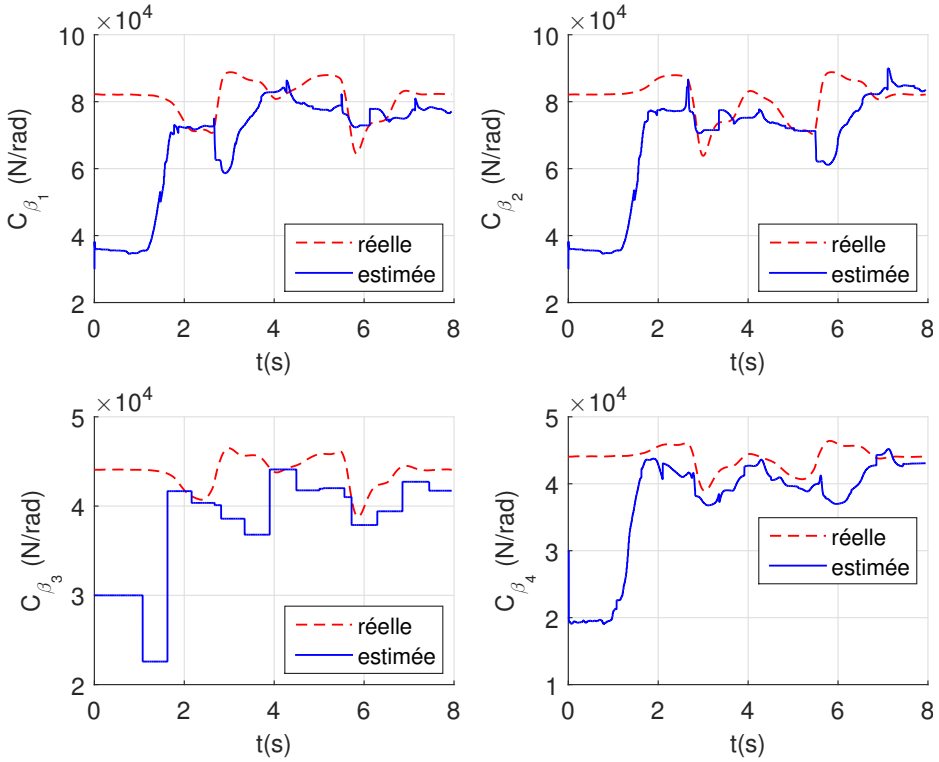



FIGURE 3.48 – Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

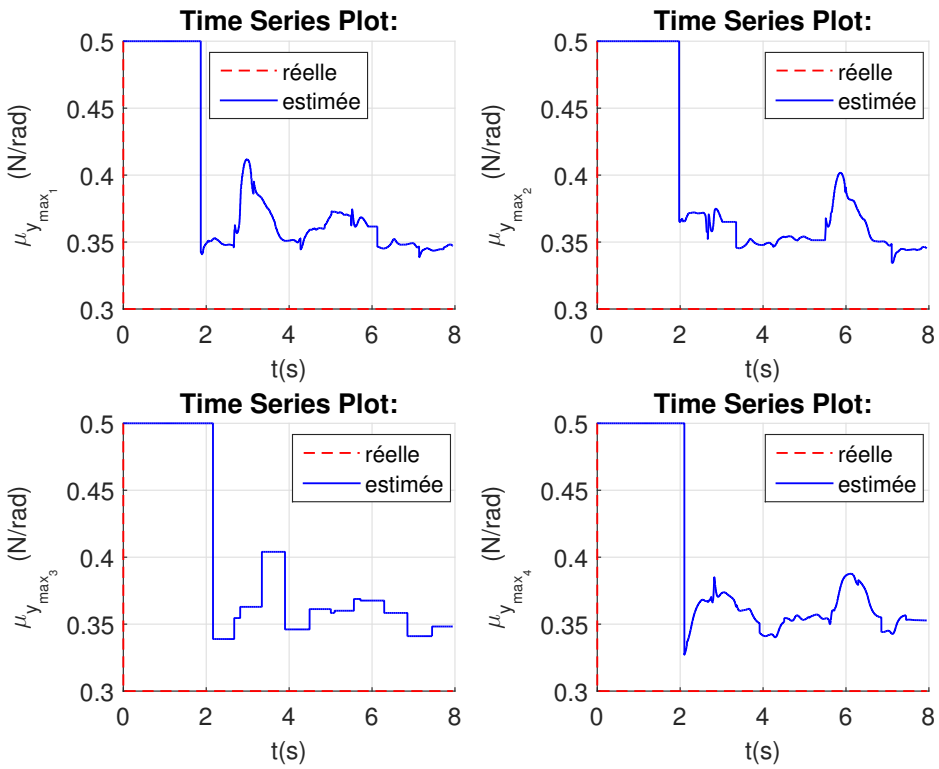



FIGURE 3.49 – Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

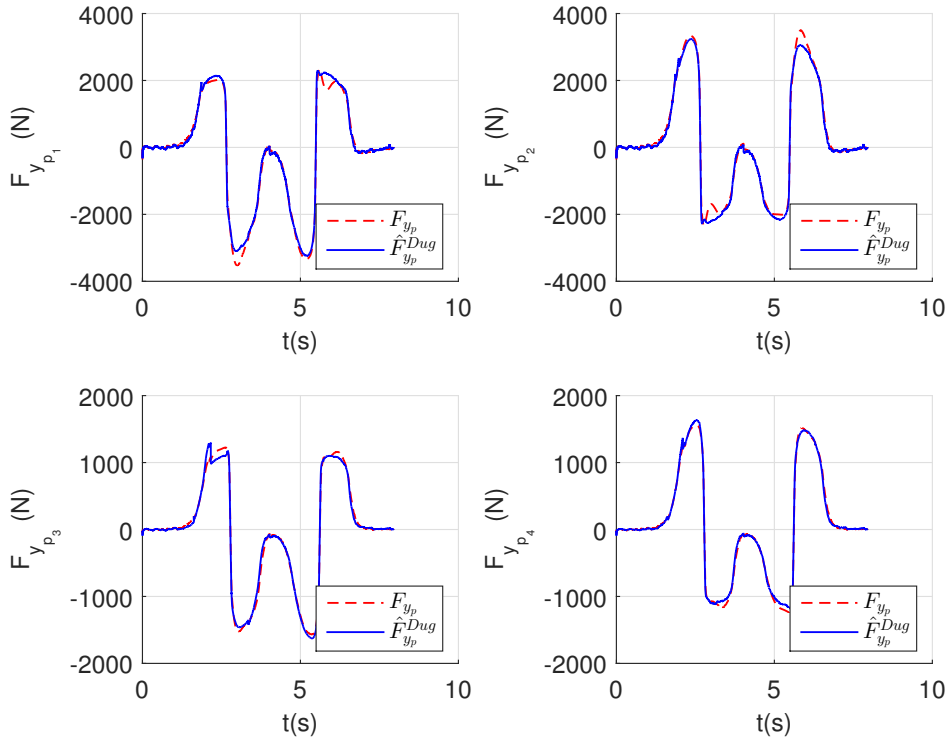



FIGURE 3.50 – Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

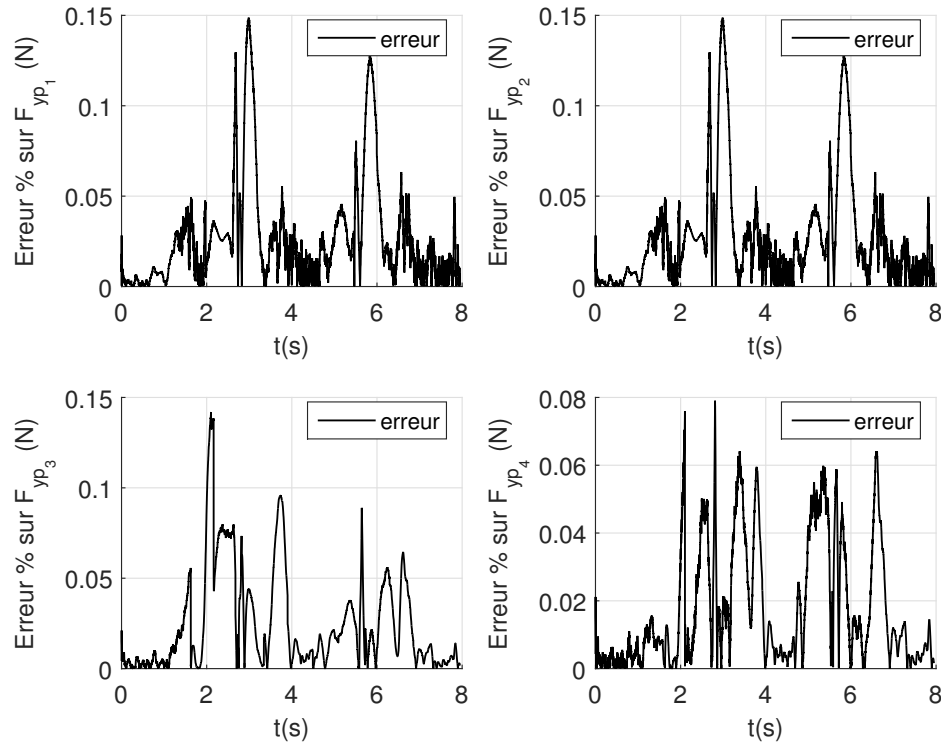



FIGURE 3.51 – Erreur entre la force latérale réelle et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

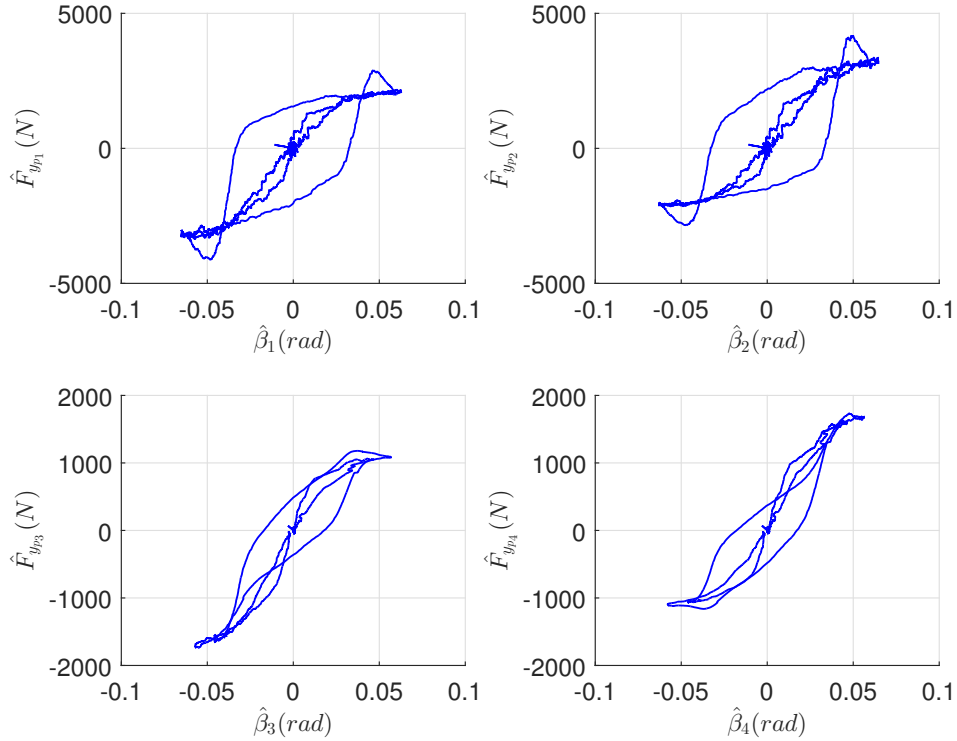



FIGURE 3.52 – Forces latérales estimées en fonction de l'angle de dérive, roue par roue, pour $\mu = 0.3$ à $10m/s$

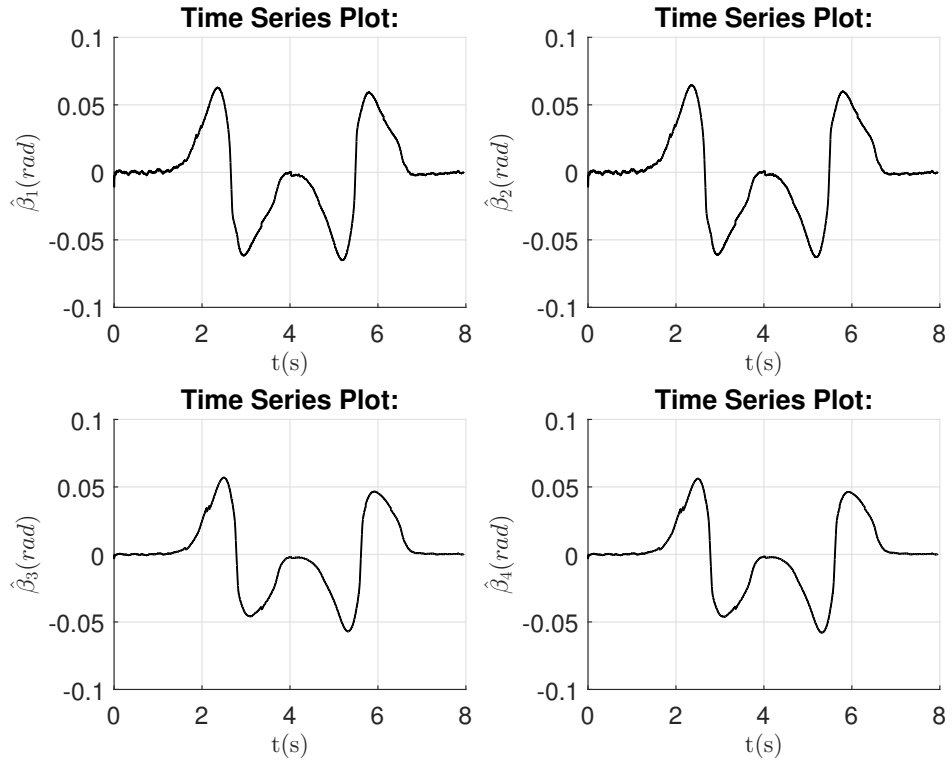



FIGURE 3.53 – Angles de dérive en fonction du temps, roue par roue, pour $\mu = 0.3$ à $10m/s$

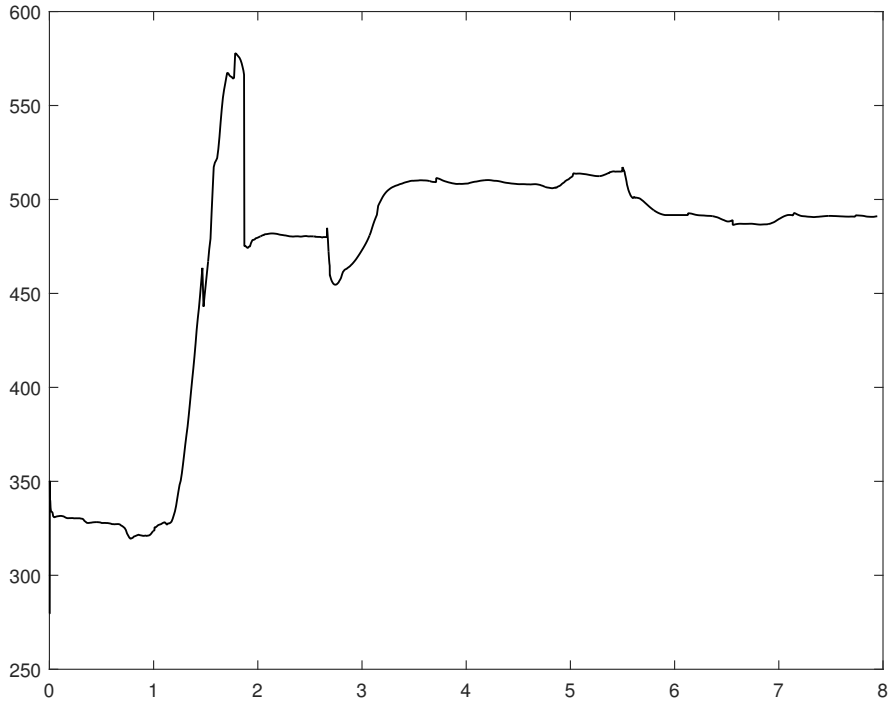



FIGURE 3.54 – $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales réelles), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

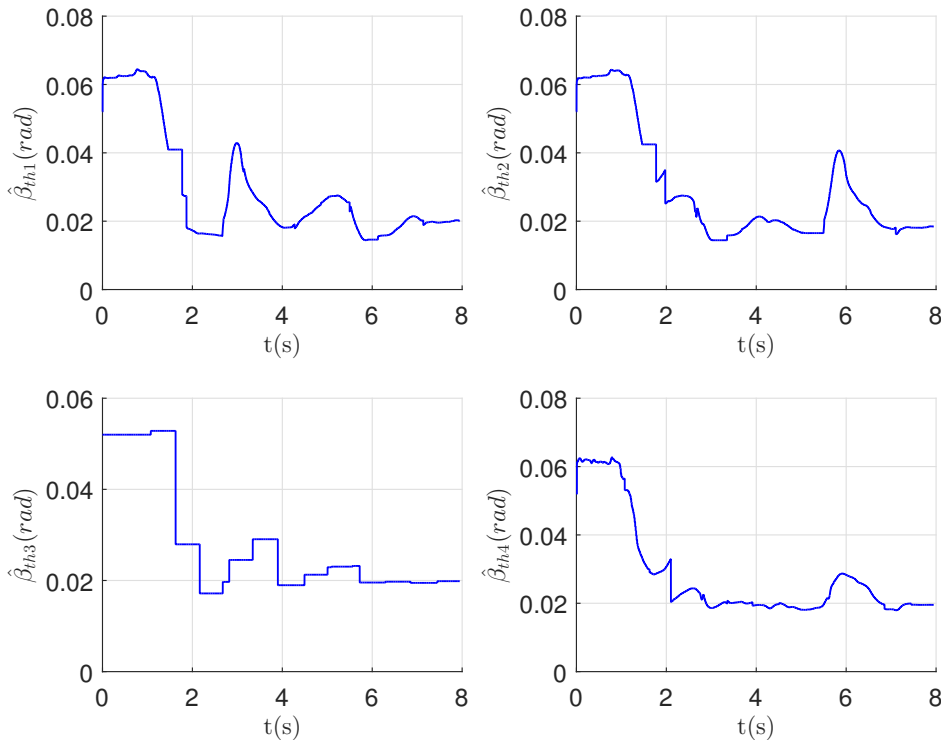



FIGURE 3.55 – Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales réelles, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

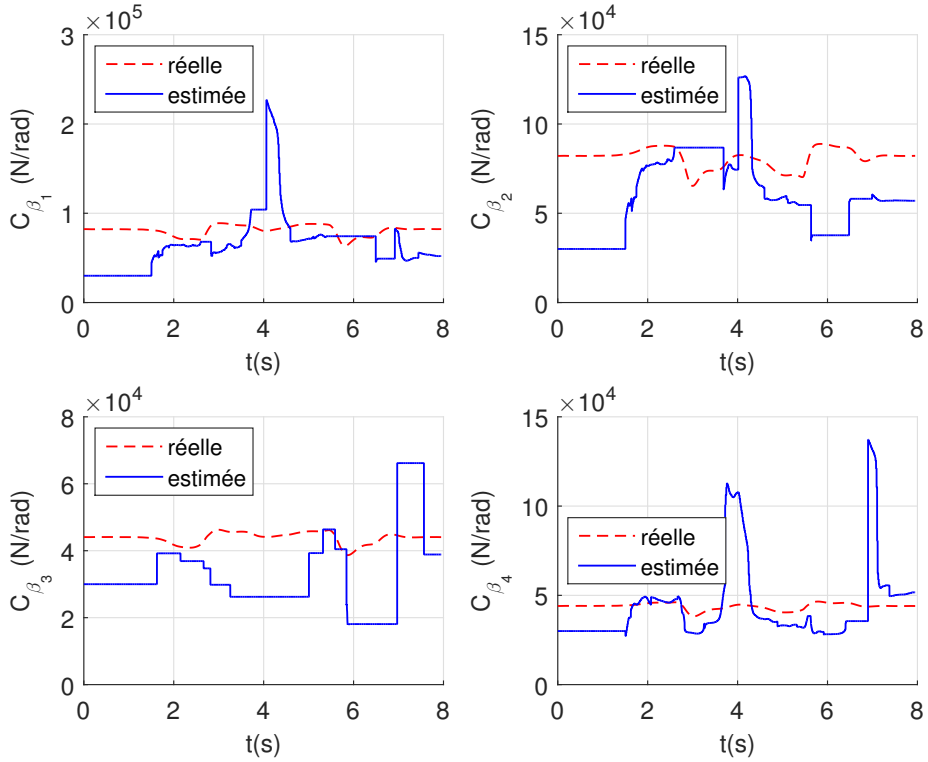



FIGURE 3.56 – Estimation du coefficient de rigidité de dérive à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

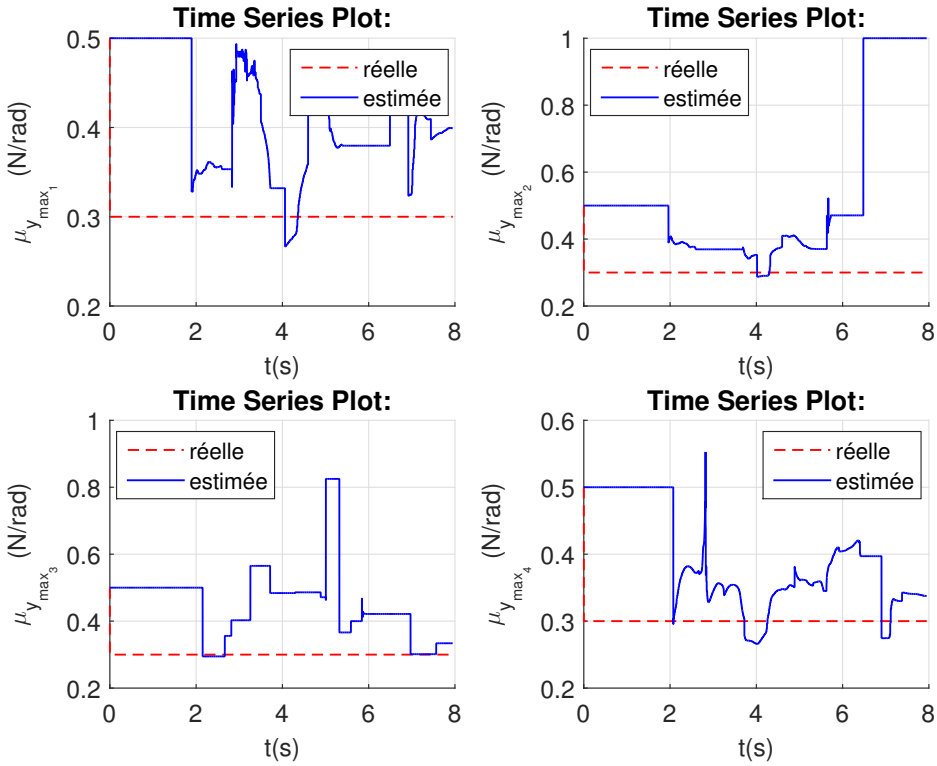



FIGURE 3.57 – Estimation du coefficient de friction latérale maximale à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

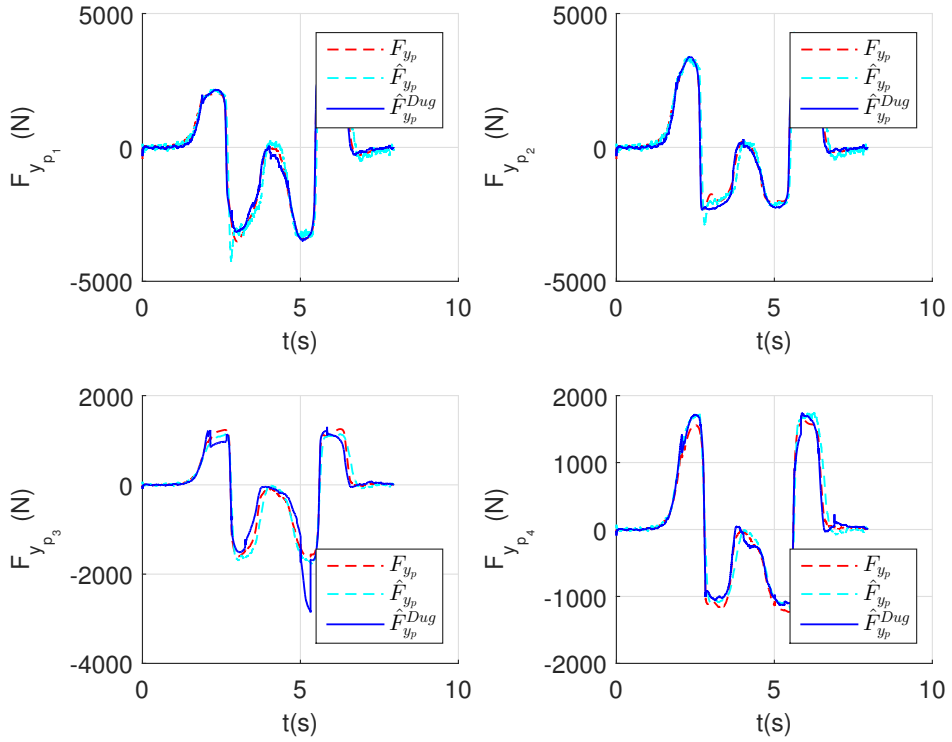



FIGURE 3.58 – Force latérale issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

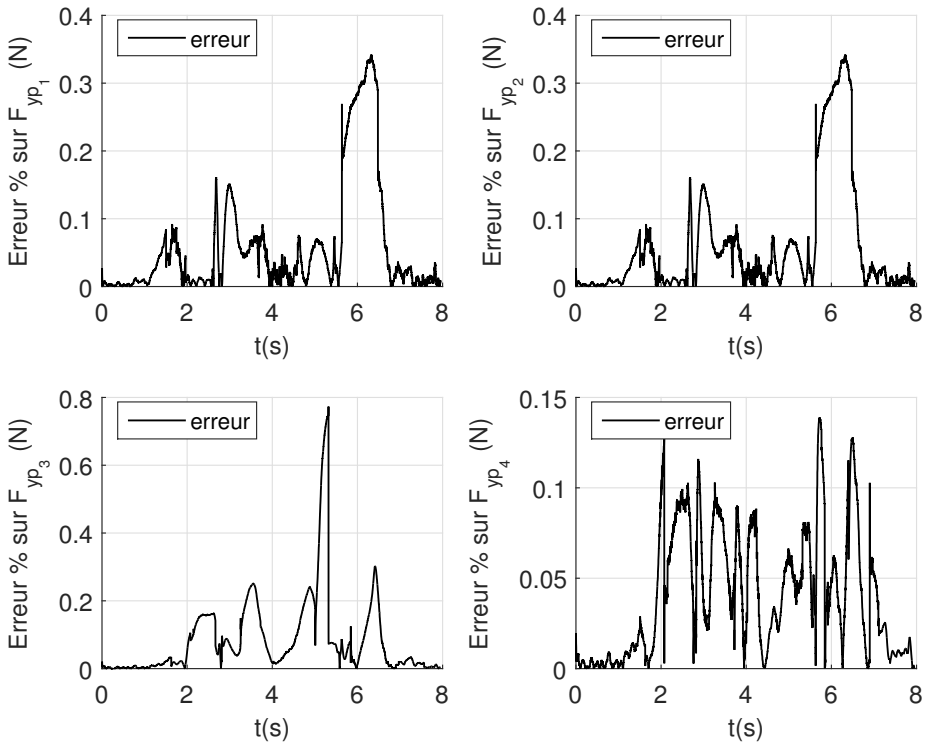



FIGURE 3.59 – Erreur entre la force latérale estimée et celle issue du modèle de Dugoff à partir de $\hat{C}_\beta$ et $\mu_{y_{\max}}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

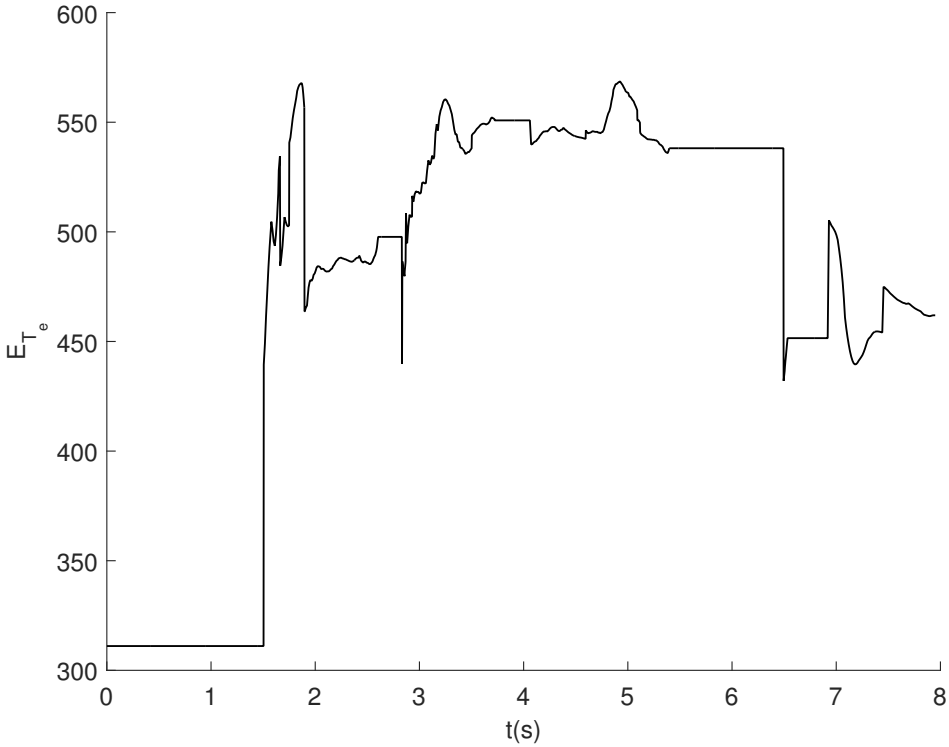



FIGURE 3.60 – $E_{T_e}$ (à partir des forces latérales estimées), pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

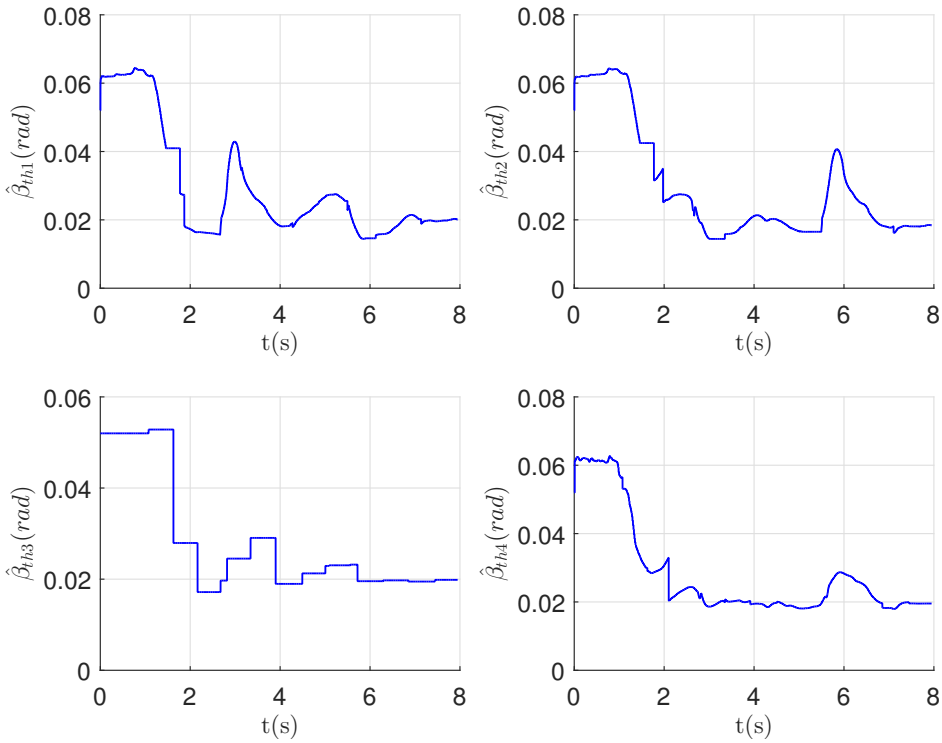



FIGURE 3.61 – Estimation de l'angle de dérive seuil à partir des forces latérales estimées, pour $\mu = 0.3$ à $10\,m/s$

est tel que $\lambda \geq 1$, c'est-à-dire que le pneu a un comportement linéaire, alors le coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$ ne peut être estimé puisque la dérivée partielle est nulle (voir équation (3.38)). Utiliser le modèle de Dugoff dans la zone 1 n'a donc pas de valeur ajoutée. De plus, comme dit plus haut, le modèle de Dugoff passe forcément par l'origine ce qui n'est pas toujours le cas du comportement réel. L'utilisation d'un modèle affine dans la zone 1 permet d'une part d'avoir une bonne initialisation de la valeur de $\hat{C}_\beta$ lors de l'utilisation de l'algorithme de Levenberg Marquardt et ainsi d'éviter les problèmes de convergence lors de la résolution et d'autre part de gagner en temps de calcul.

*Remarque* 3.5.2. Pourquoi le modèle $F_{y_p}^{Dug}(\beta)$ (équation (3.30)) n'a-t-il pas été utilisé dans la zone 3 ? La précision du modèle de Dugoff décroit pour des angles de dérive importants lorsqu'on le compare au modèle de Pacejka. En effet, alors que la courbe donnée par le modèle de Pacejka commence à décroître, celle donnée par le modèle de Dugoff continue de croître légèrement. Par conséquent, lorsque les angles de dérive deviennent importants, le modèle de Dugoff surestime la valeur de la force latérale par rapport au modèle de Pacejka. C'est la raison pour laquelle le modèle de Dugoff n'est pas utilisé dans la zone 3. Illustrons cela avec un véhicule faisant une manoeuvre de type changement de voie. Sous des conditions de conduite normales (c'est-à-dire une accélération latérale inférieure à $0.4g$), on montre figure 3.62, que sur terrain adhérent tel que de l'asphalte à une vitesse de $14m/s$ (courbes pleines en rouge et bleue), les forces obtenues à partir du modèle de Pacejka et de Dugoff se superposent bien. Par contre, pour une vitesse de $19m/s$ (courbes pointillées rouge et bleue), soit une accélération latérale importante de $0.47g$, la force obtenue à partir du modèle de Dugoff est légèrement surestimée par rapport à celle obtenue avec le modèle de Pacejka.

Autre raison, utiliser le modèle de Dugoff dans cette zone mettrait à jour aussi le coefficient de rigidité de dérive, ce qui pourrait conduire à des valeurs erronées car plusieurs valeurs de $C_\beta$ peuvent éventuellement correspondre à une même valeur de $\mu_{y_{\max}}$. La figure 3.63 en est une illustration. Supposons qu'à un instant $t$, la fenêtre glissante est constituée des valeurs de la courbe bleue dans l'encadré noir. Les courbes bleue et rouge ont deux valeurs de coefficient de rigidité différentes (l'un est dix fois plus grand que l'autre) et cherchent toutes les deux à s'ajuster au mieux sur la portion de courbe bleue située dans le cadre. Il n'est pas évident de déterminer le coefficient de rigidité de dérive qui correspond le mieux lorsque l'on se situe sur cette portion de la courbe.

Le choix d'un modèle constant assure ainsi une bonne initialisation du coefficient de friction latérale maximale $\mu_{y_{\max}}$ en entrée de la zone 2 pour l'algorithme de LM et le temps de calcul par rapport à l'algorithme de LM s'en trouve également diminué.

Finalement, séparer l'estimation en plusieurs zones permet donc de limiter l'intervalle dans lequel le modèle de Dugoff est appliqué, ce qui prévient d'éventuelles erreurs et de mauvaises convergences dues à l'algorithme de LM. Par contre, cela implique que le coefficient de friction latérale $\mu_{y_{\max}}$ garde la valeur précédente $\mu_{y_{\max\,\mathrm{old}}}$ dans la zone 1 et que le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ garde la valeur précédente $C_{\beta\,old}$ dans la zone 3.

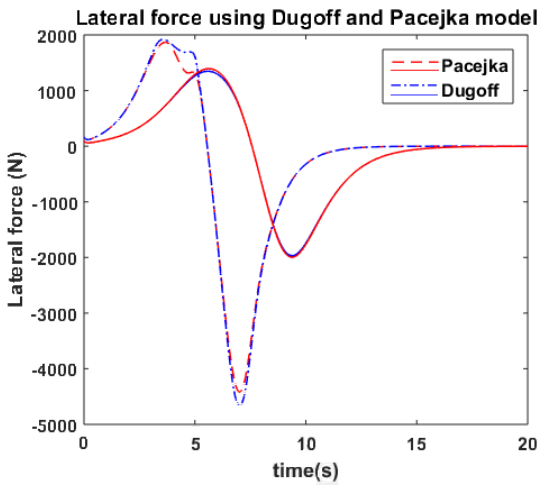



FIGURE 3.62 – Comparaison des forces latérales obtenues avec le modèle de Dugoff et le modèle de Pacejka sur de l'asphalte sec pour $v = 19$ m/s (ligne pointillée) et $v = 14$ m/s (ligne pleine)

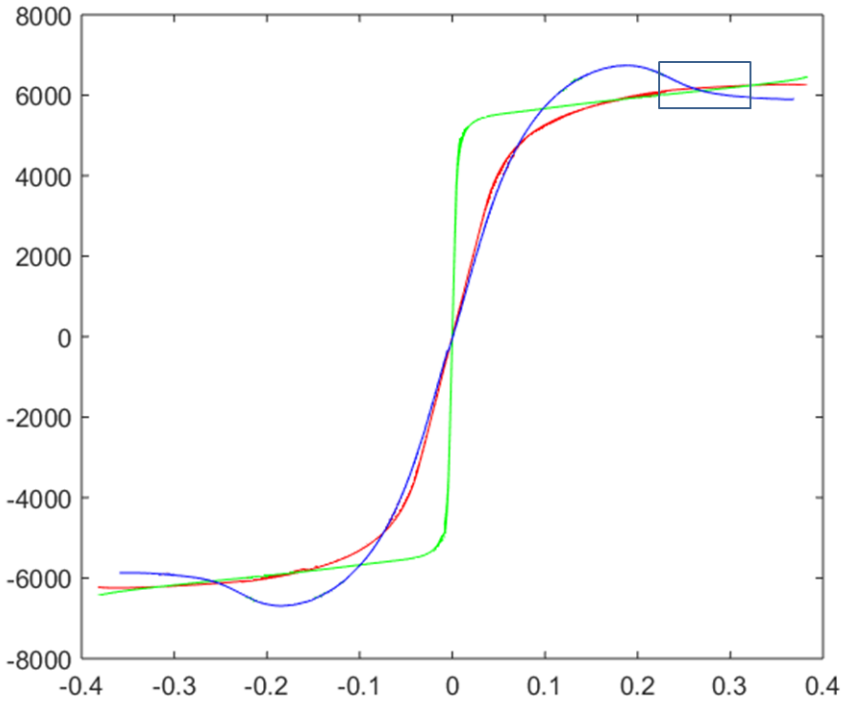



FIGURE 3.63 – Courbe de la force latérale en fonction de l'angle de dérive pour différentes valeurs de coefficient de rigidité de dérive

# Chapitre 4

# Commande de véhicule

On aborde dans ce chapitre la thématique du contrôle de véhicule. De nombreuses techniques ont été développées et ont des applications différentes dépendant du type de véhicule considéré, de leur environnement d'évolution et de la tâche à réaliser.

De nombreux travaux de recherches ont été menés au cours des dernières années dans le but de trouver des théories et techniques de contrôle capables de gérer des systèmes non linéaires de manière satisfaisante. Un grand nombre de méthodes ont été proposées, mais contrairement au cas des systèmes linéaires, il manque une théorie unifiée et les méthodes sont différentes les unes des autres.

Il existe en robotique mobile plusieurs problèmes classiques de commande de déplacements dans le plan [Laumond et al., 1998], [Canudas de Wit et al., 1996]. On peut distinguer deux types de tâches :

- La *poursuite de trajectoire*. Le but est de développer des lois de commande pour asservir le véhicule sur une trajectoire de référence, communément appelé "trajectory tracking". Le robot doit rallier et suivre une trajectoire définie dans le repère cartésien et associée à une *contrainte temporelle*, en partant d'une position initiale sur ou à côté de cette trajectoire.
- Le *suivi de chemin*. Le but est de développer des lois de commande pour asservir le véhicule sur un chemin de référence quant à lui nommé "path following" ou suivi de trajectoire géométrique. Le robot doit rallier et suivre une trajectoire définie géométriquement dans le repère cartésien en partant d'une position initiale sur ou à côté de cette trajectoire *sans une référence à la notion de temps*.

On présentera d'abord dans ce chapitre quelques techniques de contrôle classiques pour le suivi de chemin et le suivi de trajectoire. La plupart de ces approches sont dédiées à la commande de véhicule sur terrains adhérents et dont l'évolution respecte l'hypothèse de roulement sans glissement ou cherchent à conserver le véhicule dans une situation où l'application de l'hypothèse de roulement sans glissement est satisfaite (c'est-à-dire qu'on cherche à minimiser les effets du glissement).

L'objectif de notre étude est la commande d'un véhicule se déplaçant à grande vitesse sur un terrain naturel. Les conditions du sol sont alors fortement variables, les phénomènes de glissements ne sont plus négligeables et on ne peut plus faire une telle hypothèse. Le comportement du véhicule ne peut plus être défini par un modèle cinématique classique. On se confronte alors à une dualité puisque les hautes vitesses nécessitent l'utilisation de modèles suffisamment simples, tandis que la complexité des phénomènes en présence requiert une représentation fine du comportement du véhicule.

On détaillera donc dans ce chapitre la synthèse d'une loi de commande capable de suivre une trajectoire préalablement calculée tout en compensant les dérives pneumatiques. La commande prend en compte une estimation de l'interaction entre la roue et le sol via les estimateurs développés au chapitre 3.

## 4.1 Etat de l'art

### 4.1.1 Suivi de chemin (path following)

Dans l'approche suivi de chemin, l'objectif est de forcer le robot à atteindre et suivre une courbe géométrique pré-définie sans dépendance avec le temps. Le suivi de chemin consiste à minimiser l'écart entre un point quelconque du véhicule (par exemple son centre de gravité) et une courbe de référence ($\mathscr{C}$) du plan (voir figure 4.2).

Un chemin ($\mathscr{C}$) est défini par des points $P$ dont les coordonnées sont des fonctions paramétriques de l'*abscisse curviligne* $s$ :

$$P : \begin{cases} x_p(s), \\ y_p(s). \end{cases}$$

La vitesse de déplacement du véhicule $|\dot{s}| = \left\| \frac{d\vec{OP}}{dt} \right\|$ peut être constante mais non nulle. ($\mathscr{C}$) peut aussi être définie de manière équivalente avec l'orientation désirée et la position initiale :

$$P : \begin{cases} \psi_{\tau_p}(s), \\ x_p(0) = x_0, \\ y_p(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $\vec{\tau}_p$ le vecteur tangent à la trajectoire et $\psi_{\tau_p}$ son angle de cap par rapport à la référence inertielle $\vec{i}_i$, tel que $\psi_{\tau_p} = \widehat{\vec{i}_i, \vec{\tau}_p}$ (voir équation (D.5)). En effet, $x_p$ et $y_p$ se calculent alors à partir de $\psi_{\tau_p}$ :

$$\begin{cases} x_p(s) = x_0 + \displaystyle\int_0^s \cos(\psi_{\tau_p}(u))\, du, \\ y_p(s) = y_0 + \displaystyle\int_0^s \sin(\psi_{\tau_p}(u))\, du. \end{cases} \tag{4.2}$$

Inversement, en notant $x'_p \triangleq \frac{d\,x_p}{ds}$ et $y'_p \triangleq \frac{d\,y_p}{ds}$, l'angle de cap $\psi_\tau$ se déduit des dérivées $x'_p$ et $y'_p$ comme suit :

$$\psi_{\tau_p}(s) = \arctan2(y'_p, x'_p) = \begin{cases} \arctan(\dfrac{y'_p}{x'_p}) \quad \text{si} \quad x'_p(s) > 0, \\ \pi + \arctan(\dfrac{y'_p}{x'_p}) \quad \text{si} \quad x'_p(s) < 0 \quad \textit{et} \quad y'_p(s) > 0, \\ -\pi + \arctan(\dfrac{y'_p}{x'_p}) \quad \text{si} \quad x'_p(s) < 0 \quad \textit{et} \quad y'_p(s) < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\,\text{sign}(y'_p) \quad \text{si} \quad x'_p(s) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Considérons un point mobile $G$ (Figure 4.1) et $P^\star$ le point du chemin ($\mathscr{C}$) le plus proche de $G$ (voir définition à l'équation (D.3)). Le point $P^\star$ peut aussi être vu comme étant la projection du point $G$ sur la courbe ($\mathscr{C}$) de telle façon que $\overrightarrow{P^\star G}$ soit orthogonal à $\vec{\tau}$, le vecteur tangent à la courbe en $P^\star$. Les conditions pour lesquelles cette projection est définie sans ambiguïté sont données dans [Samson, 1992]. $P^\star$ est repéré sur la trajectoire par son abscisse curviligne $s^\star$ par rapport au point de référence $P_0$. On notera $s^\star$ par $s$ dans la suite pour simplifier l'écriture (voir partie D.1.2).

On définit un repère de Frenet $\mathscr{R}_f$ associé (voir annexe D), comme indiqué figure 4.1, tel que

$$\vec{\tau} \triangleq \frac{d\overrightarrow{OP^\star}}{ds}$$

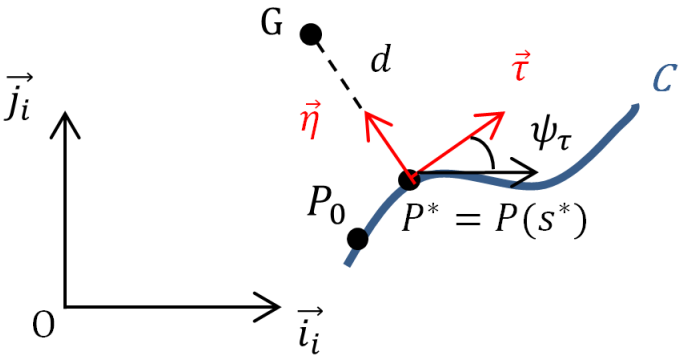



FIGURE 4.1 – Repère de Frenet

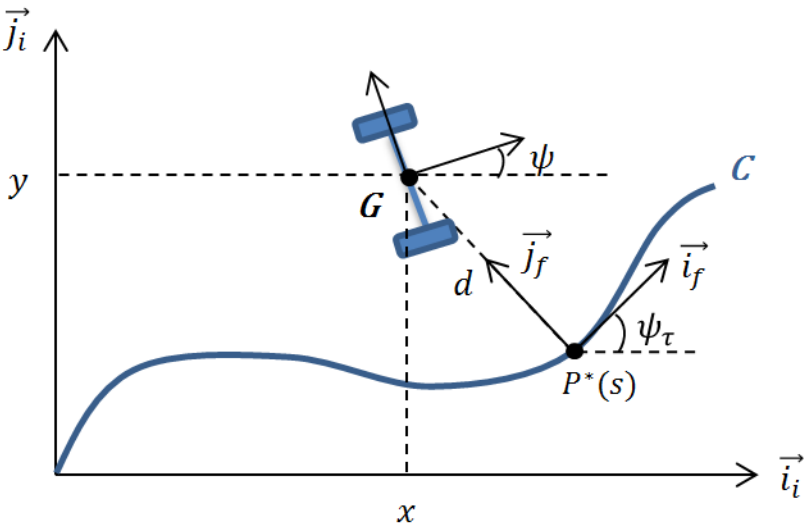



FIGURE 4.2 – Paramétrage de l'approche "path following"

est le vecteur unitaire tangent orienté dans le sens du mouvement et $\vec{\eta} \triangleq \vec{k_i} \wedge \vec{\tau}$. La courbure de la courbe notée $\kappa$ est définie telle que

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa\,\vec{\eta},$$

la dérivée du vecteur normal unitaire donne

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\kappa\vec{\tau}$$

et $\psi_\tau$ est défini tel que

$$\frac{d\psi_\tau}{ds} \triangleq \kappa(s).$$

La position du point $G$ dans le repère inertiel $\mathscr{R}_i$ est caractérisée par le couple de coordonnées cartésiennes $(x, y)$ ou de manière équivalente par le couple $(s, d)$ dans le repère de Frenet $\mathscr{R}_f$. On définit l'écart entre la position du véhicule $G$ et le chemin de référence $(\mathscr{C})$ comme une grandeur algébrique, dont le signe dépend du côté où se trouve le véhicule par rapport au chemin désiré :

$$d \triangleq \vec{\eta} \cdot \overrightarrow{P^\star G}.$$

L'abscisse curviligne $s$, la distance $d$ ainsi que l'erreur en orientation $\tilde{\psi} = \psi - \psi_\tau$ sont les nouveaux états du système :

$$X = (s, d, \tilde{\psi})^T.$$

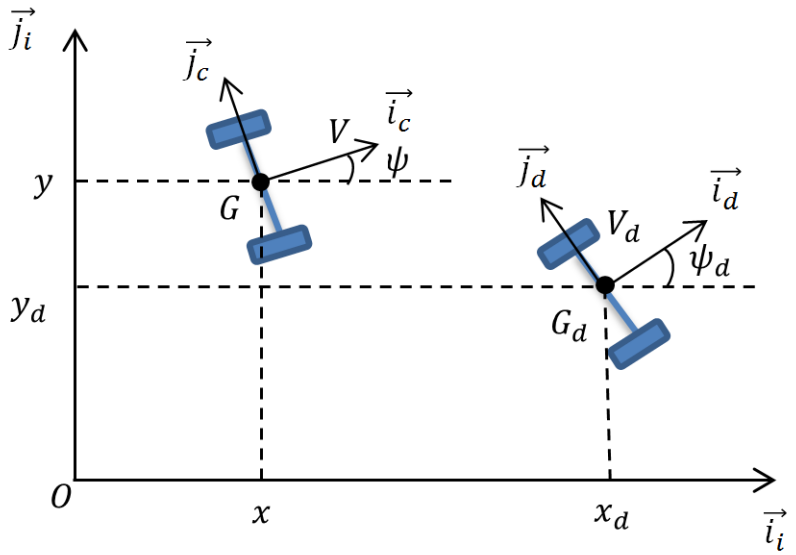



FIGURE 4.3 – Paramétrage de l'approche "trajectory tracking"

L'objectif du suivi de chemin est donc la minimisation de $|d(G)|$. Si on souhaite en plus asservir la vitesse longitudinale $V_x(t)$ du véhicule sur une consigne $V_{xd}(t)$, le problème devient un suivi de chemin modulé en vitesse.

Asservir le véhicule à la courbe $\mathscr{C}$ revient donc à trouver une loi de commande agissant sur la vitesse de rotation, dans le cas de l'unicycle par exemple, telle que $d(t)$ et $\tilde{\psi}(t)$ tendent vers 0 lorsque $t$ tend vers l'infini.

L'avantage de cette stratégie est la décorrélation de la dynamique longitudinale de la dynamique latérale du véhicule, c'est-à-dire que le véhicule s'asservit sur le chemin indépendamment de la vitesse longitudinale du système.

### 4.1.2 Suivi de trajectoire (trajectory tracking)

L'approche de type poursuite de trajectoire comme illustrée Figure 4.3 cherche à faire converger la posture d'un robot mobile vers celle d'un robot virtuel de référence ($\Sigma_d = \{G_d, \psi_d\}$) régi par les mêmes équations de mouvement. Dans le cas de robots mobiles de type unicycle, le robot virtuel de référence satisfait le système d'équations suivant :

$$\Sigma_d : \begin{cases} \dot{x}_d &= V_d(t)\cos(\psi_d), \\ \dot{y}_d &= V_d(t)\sin(\psi_d), \\ \dot{\psi}_d &= \Omega_d(t). \end{cases} \tag{4.4}$$

Dans cette approche, la trajectoire de référence désirée dépend du temps. L'objectif est alors de positionner le robot sur un point de référence donné à un temps donné. Une trajectoire de référence est définie par la donnée de trois fonctions : $x_d(t), y_d(t), \psi_d(t)$ où $t$ représente le temps ( $t \geq 0$).

L'objectif est de déterminer une loi de commande $(V(t), \Omega(t))$ qui permette de faire tendre vers zéro d'une part l'erreur entre la posture courante et la posture de référence et d'autre part l'erreur d'orientation, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} e_x = x - x_d \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ e_y = y - y_d \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ e_\psi = \psi - \psi_d \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Finalement, les problèmes de suivi de trajectoire et de suivi de chemin modulé en vitesse ne diffèrent que par le calcul de l'écart $d$.

### 4.1.3 Quelques techniques de contrôle

La plupart des recherches adressant le problème de guidage automatique de véhicule sont basées sur les véhicules à un train directeur, habituellement le train avant, sous l'hypothèse de roulement sans glissement [Thuilot et al., 2004]. La problématique du contrôle de robots mobiles de type 4WS (four wheel-steering, 4 roues directrices) a fait l'objet de nombreux travaux. Plusieurs stratégies de commande ont été proposées dans la littérature. On cherche à calculer les commandes à appliquer aux actionneurs telles que les angles de braquages $\delta$ ou les couples aux roues $T_\omega$. Ces différentes lois de contrôle peuvent être catégorisées par rapport aux types d'actionneurs à commander ou aux types de modèles (cinématique ou dynamique) utilisés pour synthétiser la loi de contrôle. Des stratégies de contrôle simples sont souvent utilisées pour des applications à basses vitesses, où les dynamiques du véhicule sont telles que des hypothèses simplificatrices peuvent être faites sur la dynamique du véhicule et certains aspects du mouvement du véhicule peuvent être ignorés.

Une des classes les plus populaires de méthode de suivi de chemin est basée sur les méthodes géométriques. Les deux méthodes les plus connues pour les véhicules à un train directeur sont l'algorithme "pure pursuit" et le contrôleur "Stanley". Le contrôleur "pure pursuit" est un algorithme permettant de déterminer la courbure de la trajectoire permettant au véhicule de rejoindre un point objectif situé sur la trajectoire de référence. L'intérêt de l'algorithme est de choisir un point objectif sur la trajectoire à une certaine distance devant le véhicule, vue comme une distance d'anticipation. Un arc qui relie la position actuelle du véhicule au point objectif est construit et constitue la nouvelle trajectoire à suivre [Coulter, 1992]. Le choix de l'horizon de prédiction est crucial. [Snider, 2009] montre que plus la distance d'anticipation est faible, plus la précision du suivi est importante mais plus le véhicule va osciller. On trouve dans la littérature un grand nombre de travaux portant sur la problématique de détermination de la distance d'anticipation [Snider, 2009], [Ollero et al., 1997]. Le contrôleur Stanley, du même nom que le véhicule qui a gagné le DARPA Grand Challenge, est une loi de contrôle non linéaire fonction de l'écart latéral à la trajectoire, d'un écart angulaire et d'un gain que l'on peut régler. Plus de détails pourront être trouvés dans [Thrun et al., 2006].

Une autre classe est basée sur des modèles cinématiques et dynamiques. Certains travaux cherchent à augmenter la manœuvrabilité du véhicule durant le suivi de chemin dans des environnements encombrés [Petrov, 2009] et suggèrent une loi de contrôle où l'angle de braquage arrière est fonction de l'angle de braquage avant. Toutefois, ces approches privent ces véhicules de leur capacité à se déplacer en crabe ou de d'autres modes de braquages asymétriques. D'autres approches consistent à rechercher une linéarisation exacte des modèles non linéaires pour pouvoir tirer parti des outils de l'automatique linéaire. [Yun and Sarkar, 1996] développe une linéarisation par feedback dynamique pour emmener le véhicule d'une configuration initiale vers une configuration finale. En effet, il est montré que le modèle cinématique n'est pas linéarisable par retour d'état statique. Une autre méthode consiste à transformer les modèles dédiés au suivi de chemin et à les convertir sous forme chaînée [Murray and Sastry, 1991], [Sordalen, 1993], [Samson, 1995]. Ceci permet ensuite d'appliquer des méthodes de contrôle classiques. Dans [Wang et al., 2016], [Hiraoka et al., 2009], un modèle dynamique de véhicule est utilisé et combiné à un contrôle par mode glissant pour le suivi d'erreurs de position et d'orientation. De nombreuses études sur les véhicules 4WS essayent aussi d'améliorer les performances de tenue de route et la stabilité en suivant une vitesse de lacet et un angle de dérive de référence à l'aide de techniques de contrôle robustes [Leith et al., 2005], [Wu et al., 2007], de contrôleurs par feedback et feedforward [Li and Yu, 2009], de stratégies de contrôle par logique floue [Zhang et al., 2007] ou d'approches optimales [Amdouni et al., 2013].

Dans toutes les méthodes précédemment citées, l'orientation du véhicule est tangent à la trajectoire de référence. Ces différentes approches permettent d'obtenir des suivis précis si la condition de roulement sans glissement est valable. Cette hypothèse est seulement valide pour des véhicules se déplaçant à faible vitesse sur terrain adhérent. Par conséquent, pour des véhicules se déplaçant à des vitesses plus élevées sur des terrains à faible adhé-

rence, de nombreux phénomènes dynamiques interviennent, principalement les glissements des pneumatiques et engendrent des erreurs de suivi. Ces erreurs ne peuvent pas être compensées de manière satisfaisante avec des techniques classiques comme l'action intégrale par exemple [Lenain, 2005]. Lorsque les glissements sont considérés, ils sont généralement pris en compte de deux manières : une première méthode est de considérer un modèle dynamique sur lequel repose la description des glissements contrairement aux modèles cinématiques qui sont généralement dérivés de l'hypothèse de roulement sans glissement. Ces modèles nécessitent l'utilisation d'une représentation roue/sol telles que celles décrites dans le chapitre des modélisations (paragraphe 2.7). Ils impliquent toutefois un nombre important de paramètres à identifier. Une autre méthode consiste à ajouter les variables de glissement dans la représentation cinématique, ce qui amène au modèle cinématique étendu [Lenain et al., 2006]. Cette méthode permet de prendre en compte les glissements sans ajouter de paramètres complexes. Il faut toutefois déterminer leurs valeurs via des observateurs basés modèles comme celui proposé dans [Cariou et al., 2009] et [Lenain et al., 2010] par exemple. Cette méthode, couplée à un contrôleur adaptatif et prédictif, permet d'obtenir des comportements robustes et des résultats très satisfaisants en milieux naturels. Les lois de contrôle pour chacun des trains directeurs ainsi obtenues, sont rendues indépendantes et permettent au véhicule de suivre la trajectoire tout en pilotant son orientation. Cependant, ces approches présentent des inconvénients : des singularités à vitesse nulle, des comportements satisfaisants soit à hautes soit à basses vitesses. De plus, les lois de commande utilisées en parallèle des observateurs sont principalement basées sur le modèle cinématique. Elles ne prennent donc pas en compte l'ensemble du comportement du robot pour réaliser le suivi. De tels modèles ne sont valides que lorsque la dynamique du robot est faible pendant le suivi de trajectoire, ce qui impose généralement une vitesse de déplacement faible. [Krid et al., 2016] prend en compte les conditions d'adhérence via un modèle dynamique de véhicule comprenant un modèle de force linéaire des pneumatiques. Pour anticiper les phases de transitions et compenser les dépassements qui en résulteraient, un algorithme prédictif est mis en place pour anticiper les changements de trajectoire à venir et ainsi améliorer les performances de suivi. Les glissements sont supposés évoluer dans la zone de pseudo-glissement avec une rigidité de dérive constante déterminée hors-ligne, ce qui limite l'approche au suivi à moyenne vitesse. Dans [Lucet et al., 2015] les lois de commande issues de [Cariou et al., 2009] sont couplées à un algorithme de stabilisation incluant un modèle dynamique de lacet du robot qui régule le couple de chacune des 4 roues. Cette stabilisation impose à la vitesse de lacet de converger vers la valeur théorique lorsqu'il n'y a pas de glissements. Ces approches permettent de réduire significativement les dépassements à haute et très haute vitesse comparé au suivi de trajectoire avec une loi de commande cinématique uniquement. Malgré les performances accrues de ces approches, les dépassements et les erreurs de suivi sont encore trop importants pour que ces stratégies soient appliquées à des applications de suivi de précision.

### 4.1.4 Forme chaînée

**Principe :** Les robots mobiles non holonomes (voir paragraphe 2.2.2) peuvent être transformés en système chaîné par un changement de variables d'état et de commande [Leroquais and d'Andrea-Novel, 1995] afin de linéariser le modèle considéré. Il a été prouvé dans [Sordalen, 1993], [Murray and Sastry, 1991], [Samson, 1995] que les modèles cinématiques dédiés au suivi de chemin pouvaient être convertis par des changements de variables sous une forme

dite chaînée. Un système sous forme chaînée s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & U_1, \\ \dot{X}_2 & = & X_3\,U_1, \\ \dot{X}_3 & = & X_4\,U_1, \\ & \ldots & \\ & \ldots & \\ \dot{X}_{n-1} & = & X_n\,U_1, \\ \dot{X}_n & = & U_2, \end{array}\right. \tag{4.6}$$

avec $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ et $U = (U_1, U_2)^T$ respectivement le vecteur d'état et le vecteur de commande. Pour mettre en évidence que le système chaîné est presque linéaire, il suffit de remplacer la dérivée temporelle par une dérivée par rapport à la variable d'état $X_1$ [Samson, 1995] et [Sampei et al., 1991]. En utilisant les notations suivantes :

$$\forall i \in [1, n-1] \quad X_i' \triangleq \frac{d}{dX_1} X_i = \frac{\frac{dX_i}{dt}}{\frac{dX_1}{dt}} = \frac{\dot{X}_i}{\dot{X}_1} \quad \text{et} \quad U_3 \triangleq \frac{U_2}{U_1} \quad \text{si} \quad U_1 \neq 0, \tag{4.7}$$

on a :

$$\dot{X}_i = X_i'\,\dot{X}_1.$$

D'où :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{X}_1 = X_1'\,U_1 = U_1, \\ \dot{X}_2 = X_2'\,U_1 = X_3\,U_1, \\ \dot{X}_3 = X_3'\,U_1 = X_4\,U_1, \\ \quad \ldots \\ \quad \ldots \\ \dot{X}_{n-1} = X_{n-1}'\,U_1 = X_n\,U_1, \\ \dot{X}_n = \dfrac{U_2}{U_1} U_1, \end{array}\right. \tag{4.8}$$

c'est-à-dire que le système chaîné 4.6 peut être réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} X_1' = 1, \\ X_2' = X_3, \\ X_3' = X_4, \\ \quad \ldots \\ \quad \ldots \\ X_{n-1}' = X_n, \\ X_n' = U_3. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Les $n-1$ dernières équations du système 4.9 constituent clairement un système linéaire.

**Application au suivi de chemin :** Considérons le problème de suivi de chemin en milieu tout-terrain. On reprendra les notations du paragraphe 4.1.1 et de l'annexe D. L'utilisation d'une modélisation cinématique de véhicule de type bicyclette étendu [Lenain, 2005], [Thuilot et al., 2002], permet de prendre en compte les angles de dérives. La configuration du robot est exprimée par rapport au chemin $\mathscr{C}$. L'état du véhicule peut être caractérisé dans un repère local de Frenet, relativement à la trajectoire de référence à suivre, par trois variables : l'abscisse curviligne $s$, l'écart latéral $d$ et l'écart angulaire $\tilde{\psi}$, comme exprimé à la partie 2.5.3.

La représentation d'état du système $X = (s, d, \tilde{\psi})$ s'écrit (voir démonstration annexe D.2) :

$$\begin{cases} \dot{s} &= \dfrac{V_r \cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)}{1 - \kappa\, d} \\ \dot{d} &= \sin(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\, V_r \\ \dot{\tilde{\psi}} &= \dfrac{V_r}{l} \cos(\delta_r - \beta_r)\,(\tan(\delta_f - \beta_f) - \tan(\delta_r - \beta_r)) - \kappa \dfrac{\cos(\tilde{\psi} - \beta_r + \delta_r)\, V_r}{(1 - \kappa\, d)} \end{cases} \tag{4.10}$$

L'objectif est donc de piloter les angles de braquage $\delta_f$ et $\delta_r$ pour faire tendre $d$ et $\tilde{\psi}$ vers zéro. On cherche donc à concevoir un contrôleur respectant cet objectif en utilisant la technique de linéarisation exacte et changement d'échelle des temps.

Dans le cas du suivi de chemin, en définissant un changement de variable permettant une réécriture sous forme chaînée et par un changement d'échelle des temps (dérivation par rapport à l'abscisse curviligne au lieu d'une dérivation par rapport au temps), il est possible d'obtenir une expression linéaire pour la partie du modèle du robot décrivant l'écart à la trajectoire, sans aucune approximation.

**Chaînage du système :** Il est clair que le modèle (2.32) n'est pas linéaire. Nous allons donc transformer ce système sous la forme chaînée. Ceci nous permettra ensuite de construire deux lois de contrôle, une pour le train avant contrôlant l'écart latéral et une pour le train arrière contrôlant l'écart angulaire. Dans un premier temps, on considère $\delta_r$ comme une variable mesurée et le modèle (2.32) a donc pour entrées $V_r$ et $\delta_f$.

L'expression générale pour une forme chaînée de dimension 3 $(X_1, X_2, X_3)$ comportant deux entrées $U_1$ et $U_2$ doit s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= U_1, \\ \dot{X}_2 &= X_3\, U_1, \\ \dot{X}_3 &= U_2. \end{cases} \tag{4.11}$$

On pose le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} X_1 &\triangleq s, \\ X_2 &\triangleq d. \end{cases} \tag{4.12}$$

En dérivant (4.12) en fonction du temps, en posant :

$$X_3 \triangleq \frac{\dot{X}_2}{U_1} = \frac{\dot{X}_2}{X_1} = (1 - \kappa\, d)\, \tan(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r) \tag{4.13}$$

et enfin en posant $U_2 \triangleq \dot{X}_3$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \dfrac{V_r \cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)}{1 - \kappa\, d}, \\ \dot{X}_2 = X_3 \dfrac{V_r \cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)}{1 - \kappa\, d}, \\ \dot{X}_3 = \dfrac{d}{dt}\Big((1 - \kappa\, d) \tan(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\Big). \end{cases} \tag{4.14}$$

Les transformations d'état et de commandes qui permettent de transformer le système (2.32) en un système chaîné (4.11) sont données par (4.12) et :

$$\begin{aligned} U_1 &\triangleq \frac{V_r \cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)}{1 - \kappa\, d}, \\ U_2 &\triangleq \frac{d}{dt}\Big((1 - \kappa\, d) \tan(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\Big). \end{aligned} \tag{4.15}$$

On peut noter que $U_1$ est homogène à la vitesse d'avance $V_r$ du véhicule le long de $\mathscr{C}$ et $U_2$ dépend de l'angle de braquage $\delta_f$.

**Changement d'échelle de temps :** Le système d'équations (4.14) décrit le comportement des variables $d$ et $\tilde{\psi}$ dans le temps en fonction de la vitesse $V_r$ et est donc dépendant de celle-ci. Pour être indépendant du temps et de la vitesse du véhicule dans l'asservissement de type suivi de chemin, nous allons plutôt chercher à exprimer les dynamiques $\frac{\partial d}{\partial s}$ et $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s}$ c'est-à-dire le long de l'abscisse curviligne $s$ de la courbe. Cette technique est appelée "*time-scaling*" et est détaillée dans [Samson, 1995]. On peut mettre le système (4.14) sous une forme linéaire (4.16) par un changement d'échelle de temps, comme détaillé ci-dessous.

En dérivant par rapport à la variable $X_1$, et en utilisant la notation définie à l'équation (4.7), (4.11) donne :

$$\begin{cases} X_1' &= 1, \\ X_2' &= X_3, \\ X_3' &= \frac{U_2}{U_1} = U_3, \end{cases} \tag{4.16}$$

sous l'hypothèse que $U_1 \neq 0$.

Pour prendre en compte aussi bien la marche avant que la marche arrière, il faut prendre en compte le signe de $U_1$. Notons

$$X_i{}^{(\mathrm{j})} \triangleq \operatorname{sign}(U_1)\,\frac{\partial^{\mathrm{j}} X_i}{\partial X_1{}^{\mathrm{j}}},$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} X_2{}^{(1)} = \operatorname{sign}(u_1)\,\dfrac{\partial X_2}{\partial X_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,\dfrac{\partial X_2}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial X_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,X_3\,\dfrac{U_1}{U_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,X_3, \\ X_3{}^{(1)} = \operatorname{sign}(U_1)\,\dfrac{\partial X_3}{\partial X_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,\dfrac{\partial X_3}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial X_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,\dfrac{U_2}{U_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,U_3, \end{cases}$$

La conversion du système (2.32) en un système chaîné (4.14), puis le changement d'échelle de temps a donc permis d'obtenir une forme linéaire exacte (4.17) :

$$\begin{cases} X_1{}^{(1)} &= \operatorname{sign}(U_1), \\ X_2{}^{(1)} &= \operatorname{sign}(U_1)\,X_3, \\ X_3{}^{(1)} &= \operatorname{sign}(U_1)\,U_3. \end{cases} \tag{4.17}$$

**Loi de commande :** L'évolution $X_2$ et $X_3$ forme un double intégrateur et est pilotée par la commande virtuelle $U_3$.

Maintenant que le modèle non linéaire a été converti sous la forme chaînée et linéarisée, on peut appliquer des techniques de commande classiques. On cherche à faire converger l'écart latéral $d$ vers zéro, c'est-à-dire $X_2$. La convergence de $X_2$ peut être assurée en choisissant un correcteur de type proportionnel dérivé pour la variable de commande $U_3$ afin d'imposer la dynamique du second ordre :

$$X_2{}^{(2)} = -K_d\,X_2{}^{(1)} - K_p\,X_2 \quad \text{avec} \quad (K_d, K_p) \in \mathbb{R}^{+2}. \tag{4.18}$$

avec

$$X_2{}^{(2)} = \operatorname{sign}(U_1)\,\frac{\partial^2 X_2}{\partial^2 X_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial X_2}{\partial X_1}\right) = \operatorname{sign}(U_1)\frac{\partial}{\partial X_1}X_3 = \operatorname{sign}(U_1)\,\frac{U_2}{U_1} = \operatorname{sign}(U_1)\,U_3.$$

Les gains $(K_p, K_d)$ imposent non pas un temps de réponse mais une distance de réponse. Par conséquent, pour une erreur initiale donnée, la trajectoire du véhicule sera identique, quelque soit la valeur de la vitesse $V_r$, qu'elle soit constante ou variable. Ces gains peuvent être interprétés en terme d'amortissement $\xi$ et de pulsation naturelle $\omega_n$ : $(K_p, K_d) = (\omega_n^2, 2\,\xi\,\omega_n)$. On peut imposer un amortissement critique $\xi = 1$ en choisissant $K_p = \frac{K_d^2}{4}$. En remplaçant (4.18) avec les expressions de (4.17), on a :

$$\operatorname{sign}(U_1)\,U_3 = -K_d\,\operatorname{sign}(U_1)\,X_3 - K_p\,X_2.$$

Donc :

$$U_3 = -K_d\, X_3 - \mathrm{sign}(U_1)\, K_p\, X_2. \tag{4.19}$$

Posons

$$\tilde{\psi}_2 \triangleq \tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r$$

et calculons $U_3 = \dfrac{U_2}{U_1}$ :

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{d}{dt}\Big(\tan\tilde{\psi}_2\,(1-\kappa\, d)\Big)\\
&= \frac{d}{ds}\Big(\tan\tilde{\psi}_2\,(1-\kappa\, d)\Big)\,\frac{ds}{dt}\\
&= \frac{d}{ds}\Big(\tan\tilde{\psi}_2\,(1-\kappa\, d)\Big)\,U_1\\
&= \left[-\frac{d\kappa}{ds}\,d\,\tan\tilde{\psi}_2 - \kappa\,\frac{d\,d}{ds}\tan\tilde{\psi}_2 + (1-\kappa\, d)\,\frac{d\tilde{\psi}_2}{ds}(1+\tan^2\tilde{\psi}_2)\right]U_1.
\end{aligned}$$

A partir des équations de (4.10), on a :

$$\frac{d\,d}{ds} = \frac{\frac{d\,d}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \tan\tilde{\psi}_2\,(1-\kappa\, d) \tag{4.20}$$

et

$$\frac{d\tilde{\psi}_2}{ds} = \frac{d(\tilde{\psi}+\delta_r-\beta_r)}{ds} = \frac{\frac{d\tilde{\psi}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} + \frac{\frac{d\delta_r}{dt}}{\frac{ds}{dt}} - \frac{\frac{d\beta_r}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \tag{4.21}$$

Soit

$$\begin{aligned}
U_2 = \Bigg[&-d\,\tan\tilde{\psi}_2\,\frac{d\kappa}{ds} - \kappa(1-\kappa\, d)\tan^2\tilde{\psi}_2\\
&+(1-\kappa\, d)(1+tan^2\tilde{\psi}_2)\left((1-\kappa\, d)\frac{\cos(\delta_r-\beta_r)}{\cos\tilde{\psi}_2}\left(\frac{\tan(\delta_f-\beta_f)-\tan(\delta_r-\beta_r)}{l}\right)-\kappa\right.\\
&\left.+\frac{\dot{\delta}_r}{U_1}-\frac{\dot{\beta}_r}{U_1}\right)\Bigg]U_1
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
U_3 = &-d\,\tan\tilde{\psi}_2\,\frac{d\kappa}{ds} - \kappa(1-\kappa\, d)\tan^2\tilde{\psi}_2\\
&+(1-\kappa\, d)(1+tan^2\tilde{\psi}_2)\left((1-\kappa\, d)\frac{\cos(\delta_r-\beta_r)}{\cos\tilde{\psi}_2}\left(\frac{\tan(\delta_f-\beta_f)-\tan(\delta_r-\beta_r)}{l}\right)-\kappa\right.\\
&\left.+\frac{\dot{\delta}_r}{U_1}-\frac{\dot{\beta}_r}{U_1}\right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Pour s'affranchir des bruits de dérivation numérique, on suppose que :

$$\frac{d\,\kappa}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\beta}_r = \dot{\delta}_r = 0. \tag{4.23}$$

Ces hypothèses ne sont pas restrictives puisqu'en pratique ces variables varient lentement.

**Loi de commande du train avant**

En réorganisant $U_3$, on obtient :

$$U_3 = -\kappa\,(1-\kappa\,d)\tan^2\tilde{\psi}_2 + (1-\kappa\,d)^2\left(\cos(\delta_r-\beta_r)\frac{\tan(\delta_f-\beta_f)-\tan(\delta_r-\beta_r)}{l} - \frac{\kappa\,\cos(\tilde{\psi}_2)}{1-\kappa\,d}\right)\frac{1+\tan^2(\tilde{\psi}_2)}{\cos(\tilde{\psi}_2)}. \quad (4.24)$$

En égalisant (4.24) et (4.19) puis en isolant $\delta_f$, la commande à appliquer sur l'actionneur permettant le braquage des roues avant est la suivante :

$$\delta_f = \arctan\left[\frac{l}{\cos(\delta_r-\beta_r)}\left(\frac{\cos^3(\tilde{\psi}_2)}{(1-\kappa\,d)^2}\left(-\left(K_d\,X_3+\mathrm{sign}(\mathrm{U}_1)\,K_p\,X_2\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\kappa(1-\kappa\,d)\tan^2\tilde{\psi}_2\right)+\frac{\kappa\,\cos\tilde{\psi}_2}{1-\kappa\,d}\right)+\tan(\delta_r-\beta_r)\right]+\beta_f$$
$$\text{avec}\quad \tilde{\psi}_2=\tilde{\psi}+\delta_r-\beta_r, \quad (4.25)$$

et existe à condition que $\delta_r-\beta_r \neq \pm 90\,deg$. Cette hypothèse est en pratique satisfaite étant donné que l'angle de braquage arrière est mécaniquement limité et que les angles de dérive ne peuvent pas atteindre plus ou moins 45 degrés en pratique.

**Loi de commande du train arrière**

Pour établir la loi de commande arrière, on injecte l'équation (4.25) dans la dynamique de l'écart angulaire (troisième équation du modèle (2.32)), que l'on dérive par rapport à l'abscisse curviligne (voir [Cariou, 2012]) :

$$\tilde{\psi}' = \frac{\cos^2\tilde{\psi}_2}{1-\kappa\,d}\left(-(K_d\,X_3+\mathrm{sign}(\mathrm{U}_1)\,K_p\,X_2)+\kappa\,(1-\kappa\,d)\,\tan^2\tilde{\psi}_2\right).$$

Dans [Cariou, 2012] $K_p$ est choisi tel que $K_p = \frac{{K_d}^2}{4}$ de manière à avoir un amortissement critique égal à 1 ainsi qu'un pôle double. De plus, en supposant que $\tilde{\psi}_2$ reste proche de zéro, $\cos^2\tilde{\psi}_2$ peut être considéré égal à 1. En remplaçant $X_2$ et $X_3$ par leurs expressions aux équations (4.12) et (4.13), l'expression précédente se simplifie comme suit :

$$\tilde{\psi}' = -K_d\,\tan\tilde{\psi}_2 - \mathrm{sign}(U_1)\frac{{K_d}^2\,d}{4\,(1-\kappa\,d)} + \kappa\tan^2\tilde{\psi}_2. \quad (4.26)$$

Deux cas d'études peuvent être envisagés :

- suivi de trajectoires rectilignes ($\kappa = 0$)

  Alors (4.26) devient :

  $$\tilde{\psi}' = -K_d\,\tan\tilde{\psi}_2 - \mathrm{sign}(U_1)\frac{{K_d}^2\,d}{4}. \quad (4.27)$$

  En imposant la dynamique d'erreur suivante : $\tilde{\psi}' = K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d - \tilde{\psi})$ avec $\tilde{\psi}_d$ l'écart angulaire désiré, on a :

  $$\delta_r = \delta_{r_1} \triangleq \arctan\left(\frac{-K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d-\tilde{\psi})}{K_d} - \mathrm{sign}(U_1)\frac{K_d\,d}{4}\right) - \tilde{\psi} + \beta_r. \quad (4.28)$$

- suivi de trajectoires courbes ($\kappa \neq 0$)

Alors, en posant $\Theta = \tan\tilde{\psi}_2$, (4.26) devient :

$$-\tilde{\psi}' - K_d\,\Theta - \mathrm{sign}(U_1)\frac{{K_d}^2\,d}{4\,(1-\kappa\,d)} + \kappa\,\Theta^2 = 0. \tag{4.29}$$

En imposant comme précédemment la dynamique d'erreur suivante : $\tilde{\psi}' = K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d - \tilde{\psi})$ avec $\tilde{\psi}_d$ l'écart angulaire désiré, le discriminant $\Delta$ de (4.29) s'écrit :

$$\Delta = {K_d}^2 + \frac{\kappa\,\mathrm{sign}(U_1)\,{K_d}^2\,d}{1-\kappa\,d} + 4\,\kappa\,K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d - \tilde{\psi}). \tag{4.30}$$

[Cariou, 2012] montre qu'en choisissant $K_d \geq 0.6$ et $K_d \leq 1$ et en respectant certaines contraintes sur la trajectoire, on obtient $\Delta > 0$. La racine appropriée s'écrit alors :

$$\Theta = \frac{K_d - \sqrt{\Delta}}{2\,\kappa}. \tag{4.31}$$

On obtient donc :

$$\delta_r = \delta_{r_2} \triangleq \arctan\left(\frac{K_d - \sqrt{\dfrac{{K_d}^2\,(1+\kappa\,\mathrm{sign}(U_1)\,d)}{1-\kappa(s)\,d} + 4\,\kappa\,\mathrm{sign}(U_1)\,K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d - \tilde{\psi})}}{2\,\kappa}\right) - \tilde{\psi} + \beta_r. \tag{4.32}$$

La loi de contrôle du train arrière impose la convergence de $\tilde{\psi}$ vers $\tilde{\psi}_d$. La loi (4.28) est utilisée pour les chemins à faible courbure tandis que (4.32) est utilisé pour les chemins à courbure élevée. Dans [Cariou, 2012] il est affirmé que la continuité des expressions de $\delta_{r_1}$ et $\delta_{r_2}$ a été vérifiée numériquement. La commutation se fait alors pour une valeur seuil de courbure de $0.0001m^{-1}$. La stabilité globale du système est établie à l'aide des fonctions de Lyapunov.

Finalement :

$$\begin{cases} \delta_f = \arctan\left[\dfrac{l}{\cos(\delta_r - \beta_r)}\left(\dfrac{\cos^3(\tilde{\psi}_2)}{(1-\kappa\,d)^2}\,(-\,(K_d\,X_3 + \mathrm{sign}(\mathrm{U}_1)\,K_p\,X_2)\right.\right. \\ \qquad \left.\left. +\kappa(1-\kappa\,d)\tan^2\tilde{\psi}_2\right) + \dfrac{\kappa\,\cos\tilde{\psi}_2}{1-\kappa\,d}\right) + \tan(\delta_r - \beta_r)\Bigg] + \beta_f \quad \text{avec} \quad \tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r, \\ \delta_r = \arctan\left(\dfrac{-K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d - \tilde{\psi})}{K_d} - \mathrm{sign}(U_1)\dfrac{K_d\,d}{4}\right) - \tilde{\psi} + \beta_r \quad \text{si} \quad \kappa = 0, \\ \delta_r = \arctan\left(\dfrac{K_d - \sqrt{\dfrac{{K_d}^2\,(1+\kappa\,\mathrm{sign}(U_1)\,d)}{1-\kappa(s)\,d} + 4\,\kappa\,\mathrm{sign}(U_1)\,K_{d_2}\,(\tilde{\psi}_d - \tilde{\psi})}}{2\,\kappa}\right) - \tilde{\psi} + \beta_r \quad \text{si} \quad \kappa \neq 0. \end{cases} \tag{4.33}$$

Cette méthode permet donc de réguler l'écart angulaire sur une valeur de consigne choisie. Les deux commandes sont utilisées sur deux objectifs distincts. La loi de commande avant contrôle l'écart latéral et la loi de commande arrière contrôle l'écart angulaire. Toutefois, dès que les roues du train directeur avant ou arrière subiront de forts glissements, le suivi ne sera plus assuré. De plus, les simplifications numériques effectuées (voir (4.23)) dans la loi de contrôle peuvent devenir problématiques dès que le but est de suivre des chemins tortueux.

**Commande actuelle sur le véhicule eRider**

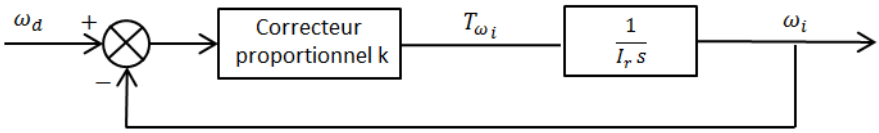



FIGURE 4.4 – Boucle d'asservissement de la vitesse de rotation des roues

La loi de contrôle actuellement implémentée sur le véhicule eRider est basée sur cette technique de chaînage et sur le modèle bicyclette avec un train directeur détaillé aux équations (2.33). Le braquage des angles avant est alors donné par la loi de commande suivante [Lenain, 2005] :

$$\begin{aligned}\delta_f = \arctan\Bigg[&\frac{l\,\kappa\,\cos\tilde{\psi}}{1-\kappa\,d}\\ &+\frac{l\,\cos^3(\tilde{\psi})}{(1-\kappa\,d)^2}\left(-\left(U_1\,K_d\,(1-\kappa\,d)\tan\tilde{\psi}\right)+\mathrm{sign}(\mathrm{U}_1)\,K_p\,d\right)+\kappa(1-\kappa\,d)\,\tan^2\tilde{\psi}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.34}$$

L'angle de braquage du train arrière est tel que : $\delta_r = -\delta_f$.

Finalement :

$$\begin{cases}\delta_f = \arctan\Bigg[\dfrac{l\,\kappa\,\cos\tilde{\psi}}{1-\kappa\,d}\\ \quad+\dfrac{l\,\cos^3(\tilde{\psi})}{(1-\kappa\,d)^2}\left(-\left(U_1\,K_d\,(1-\kappa\,d)\tan\tilde{\psi}\right)+\mathrm{sign}(\mathrm{U}_1)\,K_p\,d\right)+\kappa(1-\kappa\,d)\,\tan^2\tilde{\psi}\right)\Bigg],\\ \delta_r = -\delta_f.\end{cases} \tag{4.35}$$

**Contrôleur longitudinal**

Les commandes du système (4.14) sont les angles de braquage et la vitesse longitudinale du véhicule. Cependant, les commandes du véhicule sont les couples aux roues. par conséquent, pour la commande longitudinale, on effectue une boucle d'asservissement sur la vitesse de rotation de chacune des roues (voir Figure 4.4). On utilise un simple correcteur proportionnel qui prend en compte l'erreur entre la vitesse angulaire de référence des roues $\omega_d$ et la vitesse angulaire actuelle des roues. On suppose que toutes les roues tournent à la même vitesse et qu'elles suivent l'hypothèse de roulement sans glissement, ce qui impose

$$\omega_d = \frac{V_d}{r},$$

avec $V_d$ la vitesse désirée.

Le couple à appliquer à chaque roue est alors :

$$T_{\omega_i} = k\,(\omega_d - \omega_i), \tag{4.36}$$

avec $k$ un gain positif.

### 4.1.5 Linéarisation par feedback

Une autre méthode pour le développement d'une loi de contrôle, est de trouver une linéarisation exacte des modèles non linéaires des robots non holonomes [Sampei et al., 1991]. La linéarisation exacte par rétroaction (feedback linearization) est un sujet largement traité dans la littérature [Brockett, 1978], [Su, 1982], [Isidori and Ruberti, 1984]. Cette méthode

consiste à transformer algébriquement un système dynamique non linéaire de manière à ce que la dynamique en boucle fermée ait une forme linéaire pour pouvoir appliquer les techniques de contrôle linéaire classiques. Les rétroactions peuvent être dynamiques (dynamic feedback) ou statiques (static feedback), stationnaires ou non (c'est-à-dire avec ou sans dépendance explicite du temps), continues ou non.

#### 4.1.5.1 Linéarisation par feedback statique

**Linéarisation entrée-sortie des systèmes SISO**

La linéarisation entrée-sortie de la dynamique d'un système non linéaire consiste à trouver une loi de commande qui permet au système bouclé d'avoir un comportement linéaire comme indiqué figure 4.5. Un contrôleur peut alors être construit pour asservir cette sortie sur une valeur désirée $Y_d(t)$ en utilisant les techniques linéaires standards. L'erreur régulée à zéro est alors

$$\tilde{Y} = Y - Y_d.$$

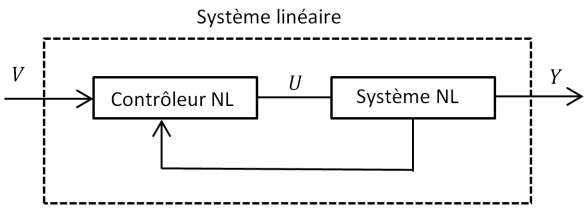



FIGURE 4.5 – Linéarisation entrée-sortie

Considérons le système non-linéaire SISO :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + g(X)\,U, \\ Y &= h(X), \end{aligned} \tag{4.37}$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ et $u$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour réaliser cette transformation, il faut dériver successivement la sortie $Y = h(X)$ par rapport au temps jusqu'à l'apparition de l'entrée $U$. Le nombre de dérivations nécessaires à l'apparition de la variable de commande $U$ est appelé degré relatif $r$ du système, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} L_g L_f^{r-1} h(X) &\neq 0, \\ L_g L_f^k h(X) &= 0, \quad \forall k < r-1. \end{aligned} \tag{4.38}$$

avec $L_g$ et $L_f^k$ les dérivées de Lie tel que :

$$\begin{cases} L_g h \triangleq \dfrac{\partial h(X)}{\partial X} g(X), \\ L_f h \triangleq \dfrac{\partial h(X)}{\partial X} f(X), \\ L_f^k h \triangleq \dfrac{\partial}{\partial X}\left(L_f^{k-1} h\right) f(X), \\ L_g L_f^k h(X) \triangleq \dfrac{\partial}{\partial X}\left(L_f^k h(X)\right) g(X). \end{cases} \tag{4.39}$$

On a donc pour (4.37) :

$$\dot{Y} = \frac{dh(X)}{dt} = \frac{\partial h(X)}{\partial X}\dot{X} = \frac{\partial h(X)}{\partial X} f(X) + \frac{\partial h(X)}{\partial X} g(X)\,U \tag{4.40}$$

qui s'écrit plus rapidement sous la forme de Lie :

$$\dot{Y} = L_f h(X) + L_g h(X)\, U. \tag{4.41}$$

Si $L_g h(X) \neq 0$ alors le degré relatif vaut 1, sinon on continue à dériver tant que le terme $L_g L_f^{r-1} h(X)$ est non nul :

$$\begin{cases} Y = h(X), \\ \dot{Y} = L_f h(X), \\ \vdots \\ Y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(X), \\ Y^{(r)} = L_f^r h(X) + L_g L_f^{r-1} h(X)\, U. \end{cases} \tag{4.42}$$

Supposons le cas $r = n$, c'est-à-dire que le degré relatif est égal à la dimension de l'état. L'équation (4.42) permet de définir la transformation $T : X \in \mathbb{R}^n \mapsto Z \in \mathbb{R}^{r=n}$

$$\Phi(X) = Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_r \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} Y \\ \dot{Y} \\ \vdots \\ Y^{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ \vdots \\ L_f^{(r-1)} h(X) \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

ou encore

$$Z_i = L_f^{i-1} h(X) \triangleq \phi_i(X), \quad i = 1, ...n, \tag{4.44}$$

où $\phi_i(X)$ est un difféomorphisme qui transforme les trajectoires exprimées dans le système de coordonnées d'origine (celui de $X$) dans le nouveau système de coordonnées (celui de $Z$). L'évolution dans les nouvelles coordonnées est alors décrite par :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2, \\ \dot{Z}_2 = Z_3, \\ \vdots \\ \dot{Z}_{r-1} = Z_r, \\ \dot{Z}_r = L_f^r h(X) + L_g L_f^{r-1} h(X)\, U. \end{cases} \tag{4.45}$$

Ainsi, la commande par "retour de sortie" (output feedback), pour avoir $\dot{Z}_i = V$, est :

$$U = \frac{V - L_f^r h(X)}{L_g L_f^{r-1} h(X)} = \frac{V - b(Z)}{a(Z)} \tag{4.46}$$

où $V$ désigne une nouvelle entrée et $a(Z) = a(\phi(X))$ et $b(Z) = b(\phi(X))$ avec

$$\phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \ldots, \phi_n(X))^T.$$

(4.46) donne le système linéaire liant la nouvelle entrée $V$ à la sortie $Y = Z_1$ :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2, \\ \dot{Z}_2 = Z_3, \\ \vdots \\ \dot{Z}_{r-1} = Z_r, \\ \dot{Z}_r = V, \end{cases} \tag{4.47}$$

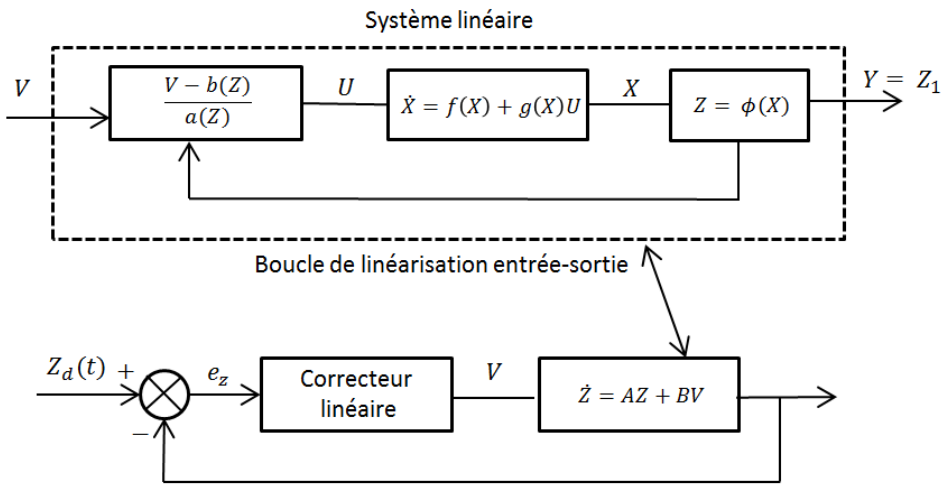



FIGURE 4.6 – Boucle de linéarisation entrée-sortie et vue d'ensemble d'un système bouclé sur une correction classique

où $V$ peut recevoir les commandes d'un contrôleur linéaire standard. Ce système, bouclé avec la loi de commande (4.46) est un système linéaire contrôlable. Enfin, le contrôleur non-linéaire final est obtenu en utilisant les transformations inverses de (4.43) et (4.46). Sous forme matricielle, (4.47) donne :

$$\dot{Z} = A\,Z + B\,V \tag{4.48}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une fois le système linéarisé par le retour d'état statique (4.46), on peut utiliser les corrections classiques par une deuxième boucle en cascade constituant la boucle externe. Ici, le système à contrôler est composé d'une chaîne d'intégrateurs découplés. On pourra donc utiliser $m$ correcteur PID. Le schéma bloc résultant est décrit figure 4.6. La référence [Micaelli and Samson, LM16] traite le problème de suivi de chemin et utilise cette approche pour la synthèse de lois de commande de robots équipés de deux trains directeurs.

**Cas des systèmes MIMO**

Considérons le système non-linéaire MIMO :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + \sum_{i=1}^{m} g_i(X)\,U_i, \\ Y = h(X), \end{cases} \tag{4.49}$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^m$ et $Y \in \mathbb{R}^m$. De la même manière que pour le système SISO, il faut dériver chacune des sorties jusqu'à faire apparaître une des commandes. On définit alors un vecteur de degré relatif $r \in \mathbb{R}^m$ où chaque $r_j$ est associé à l'une des $m$ relations entrée-sortie. Supposons que $r_j$ soit le plus petit entier pour lequel au moins une des commandes apparaît dans $Y_j^{(r_j)}$

$$Y_j^{(r_j)} = L_f^{r_j} h_j + \sum_{i=1}^{m} (L_{g_i} L_f^{r_j - 1} h_j)\,U_i \tag{4.50}$$

où $L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j \neq 0$ pour au moins un $i$. Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ Y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(X) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(X) \end{pmatrix} + E(X) \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

où $E(X)$ est une matrice de dimension $m \times m$ et est la matrice de découplage du système MIMO telle que :

$$E(X) \triangleq \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

Si $\sum_{i=1}^m r_i = n$ et tant que $E(X)$ est inversible, le système est entrée-état linéarisable par feedback statique. La commande du système peut s'écrire :

$$U = E(X)^{-1} \left( \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(X) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(X) \end{pmatrix} \right) \tag{4.53}$$

où $V_i$ sont les composantes de la commande linéarisée. Lorsque $\sum_{i=1}^m r_i < n$ le système est partiellement linéarisable.

#### 4.1.5.2 Linéarisation par feedback dynamique

Lorsque la matrice de découplage n'est pas inversible, alors le système n'est pas linéarisable par retour d'état statique et on y remédie par un retour d'état dynamique. L'idée est de retarder l'apparition des entrées $U$ en dérivant de nouveau $Y$ pour que la matrice de découplage soit de rang plein. Il est nécessaire d'effectuer une *extension dynamique* en augmentant l'état

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ \zeta \end{pmatrix},$$

de dimension $n+n_a$ où $n_a$ est la dimension du vecteur $\zeta$. On ajoute successivement au vecteur d'état les entrées qui apparaissent trop tôt et on considère leurs dérivées comme des entrées de substitution. Il s'en suit ensuite une transformation par retour d'état statique sur le système ainsi augmenté. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)\, U, \\ Y = h(X), \end{cases} \tag{4.54}$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^m$. La commande

$$\begin{cases} U = \alpha(X,\zeta) + \beta(X,\zeta)\, V, \\ \dot{\zeta} = \gamma(X,\zeta) + \delta(X,\zeta)\, V, \end{cases} \tag{4.55}$$

associée à un difféomorphisme $z = \phi(x,\zeta)$ transforme le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)\,(\alpha(X,\zeta) + \beta(X,\zeta)\, V), \\ \dot{\zeta} = \gamma(X,\zeta) + \delta(X,\zeta)\, V, \\ Y = h(X). \end{cases}$$

en un système linéaire contrôlable :

$$\begin{cases} \tilde{X} = F(\tilde{X}) + G(\tilde{X})\, V, \\ Y = H(\tilde{X}), \end{cases}$$

avec $H(\tilde{X}) \triangleq h(X)$, $G(\tilde{X}) \triangleq \begin{pmatrix} g(X)\,\beta(X,\zeta) \\ \delta(X,\zeta) \end{pmatrix}$ et $F(\tilde{X}) \triangleq \begin{pmatrix} f(X) + g(X)\,\alpha(X,\zeta) \\ \gamma(X,\zeta) \end{pmatrix}$.

La commande (4.55), est appelée commande par retour d'état dynamique.

### 4.1.6 Méthode par backstepping et approches par Lyapunov

Développée dans [Kokotovic, 1992], la technique de backstepping combine les fonctions de Lyapunov avec une procédure récurvise de contrôle pour stabiliser l'origine du système. Cette méthode ne fait pas nécessairement appel à la linéarisation et permet, lorsqu'il y en a, de conserver les non-linéarités utiles. Le système non-linéaire doit se présenter sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 = f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\, Z_1, \\ \dot{Z}_1 = f_1(Z_0, Z_1) + g_1(Z_0, Z_1)\, Z_2, \\ \vdots \\ \dot{Z}_k = f_k(Z_0, Z_1, \ldots, Z_k) + g_k(Z_0, Z_1, \ldots, Z_k) Z_{k+1}, \\ \vdots \\ \dot{Z}_n = f_n(q) + g_n(q)\, U, \end{cases} \tag{4.56}$$

où les $Z_k$ sont des scalaires, tout comme l'unique entrée de commande $U$, et les conditions suivantes doivent être remplies : $f_0(0) = f_k(0, 0, \ldots, 0) = 0$ et $g_{1 \leq k \leq n}(.) \neq 0$. L'idée principale est d'utiliser certaines variables d'état de (4.56) comme des *commandes virtuelles* et de concevoir des lois de contrôle intermédiaire dépendant de la dynamique de chaque état. Pour faire suivre à la sortie $Y = Z_0$ un signal de référence $y_{ref} = Z_{0ref}$, une approche récursive en $n$ étapes est alors développée.

Etape 1 : On considère d'abord le sous-système :

$$\dot{Z}_0 = f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\, Z_1$$

où $Z_1$ est traitée comme une commande virtuelle dont l'expression serait $Z_1 = \phi_0(Z_0)$ avec $\phi_0(0) = 0$. On définit l'erreur de poursuite

$$\epsilon_0 = Z_0 - Z_{0ref}.$$

Ce premier sous système s'écrit alors :

$$\Sigma_0 : \epsilon_0 = f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\, \phi_0(Z_0) - \dot{Z}_{0ref}.$$

La fonction de Lyapunov $\mathcal{V}_0(Z_0)$ assignée est telle que :

$$\mathcal{V}_0(Z_0) = \frac{1}{2}\epsilon_0^2. \tag{4.57}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\dot{\mathcal{V}}_0(Z_0) = \epsilon_0\, \dot{\epsilon}_0 = \epsilon_0\, (f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\, \phi_0(Z_0) - \dot{Z}_{0ref}).$$

Le choix de la fonction

$$f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\, \phi_0(Z_0) - \dot{Z}_{0ref} = -k_0\, \epsilon_0$$

avec $k_0 > 0$, rendrait la fonction de Lyapunov (4.57) définie non positive :

$$\dot{\mathcal{V}}_0(Z_0) = -k_0\, \epsilon_0^2 \leq 0.$$

L'origine de ce sous système $\Sigma_1$ est asymptotiquement stable, avec la commande virtuelle désirée

$$\phi_0(Z_0) = \frac{1}{g_0(Z_0)}(-k_0\, \epsilon_0 - f_0(Z_0) + \dot{Z}_{0ref}).$$

Etape 2 : On s'intéresse au système

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 = f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\, Z_1, \\ \dot{Z}_1 = f_1(Z_0, Z_1) + g_1(Z_0, Z_1)\, Z_2 \end{cases}$$

où $Z_2$ est traitée comme une commande virtuelle dont l'expression serait $Z_2 = \phi_1(Z_0, Z_1)$ avec $\phi_1(0,0) = 0$. On définie maintenant l'erreur entre la variable d'état $Z_1$ et sa valeur désirée $\phi_0(Z_0)$ :

$$\epsilon_1 = Z_1 - \phi_0(Z_0).$$

Ainsi, le sous système s'écrit :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\epsilon}_0 = f_0(Z_0) + g_0(Z_0)\,(\epsilon_1 + \phi_0(Z_0)) - \dot{Z}_{0ref}, \\ \dot{\epsilon}_1 = f_1(Z_0, Z_1) + g_1(Z_0, Z_1)\,\phi_1(Z_0, Z_1) - \dot{\phi}_0(Z_0), \end{cases}$$

pour lequel on assigne la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{V}_1(Z_0, Z_1) = \mathcal{V}_0(Z_0) + \frac{1}{2}\epsilon_1^2. \tag{4.58}$$

La dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1(Z_0, Z_1) &= \dot{\mathcal{V}}_0(Z_0) + \epsilon_1\,\dot{\epsilon}_1 \\ &= \epsilon_0\,(f_0(Z_0) + g_0(z_0)\,\phi_0(Z_0) - \dot{Z}_{0ref}) \\ &+ \epsilon_1\,(f_1(Z_0, Z_1) - \dot{\phi}_0(Z_0) + g_0(Z_0)\,\epsilon_0 + g_1(Z_0, Z_1)\,\phi_1(Z_0, Z_1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\dot{\mathcal{V}}_1(Z_0, Z_1) = -k_0\,\epsilon_0^2 + \epsilon_1(f_1(Z_0, Z_1) - \dot{\phi}_0(Z_0) + g_0(Z_0)\,\epsilon_0 + g_1(Z_0, Z_1)\,\phi_1(Z_0, Z_1)).$$

Le choix de la commande virtuelle :

$$\phi_1(Z_0, Z_1) = \frac{1}{g_1(Z_0, Z_1)}(-k_1\,\epsilon_1 - f_1(\epsilon_0, \epsilon_1) + \dot{\phi}_0(Z_0) - g_0(Z_0)\,\epsilon_0),$$

avec $k_1 > 0$ et $\dot{\phi}_0(Z_0) = \frac{\partial \phi_0}{\partial Z_0}\dot{Z}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial Z_{0ref}}\dot{Z}_{0ref}$ conduit à :

$$\dot{\mathcal{V}}_1(Z_0, Z_1) = -k_0\,\epsilon_0^2 - k_1\,\epsilon_1^2 \leq 0$$

qui garantie la stabilité asymptotique de l'origine du sous système $\Sigma_1$.

Etape k : On considère le système $\Sigma_k$. En procédant de la même manière, on assigne la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{k-1} + \frac{1}{2}\epsilon_k^2$$

où

$$\begin{cases} \epsilon_0 = Z_0 - Z_{0ref} \\ \epsilon_i = Z_i - \phi_{i-1}, \quad i \in \{2, ..., k\} \end{cases}$$

La commande qui permet au système global d'assurer la poursuite de la trajectoire de référence $Y_{ref} = Z_{0ref}$ est la dernière commande assignée à l'étape $n$.

## 4.2 Proposition d'une nouvelle commande pour le véhicule eRider

Les véhicules évoluant en terrains difficiles sont soumis à des phénomènes physiques plus importants que dans le cas des véhicules routiers. Le principal problème auquel il faut faire face est le glissement des pneumatiques qui doit être pris en compte lors de la conception de la loi de contrôle pour assurer un suivi précis. Dans cette partie, on adresse le problème de suivi de trajectoire d'un véhicule à deux trains directeurs en présence de glissement. Les 4 roues ne sont pas indépendamment motrices, mais on peut commander le couple des trains avant $T_{\omega_f}$ et arrière $T_{\omega_r}$. Cette commande en couple associée aux commandes des angles de braquages avant $\delta_f$ et arrière $\delta_r$ permettent d'assurer, à grande vitesse, un suivi de trajectoire

autonome précis. L'ajout d'un second train directeur offre un degré de liberté supplémentaire permettant de contrôler l'orientation du véhicule tout en suivant une trajectoire de référence $(x_d, y_d)$. Le braquage des roues arrière $\delta_r$ est utilisé pour augmenter la stabilité du véhicule en lui donnant la possibilité de se déplacer en crabe. Un train directeur qui glisse sera compensé par l'autre train directeur. La structure du contrôleur est basée sur un modèle dynamique bicyclette à 3 degrés de liberté (voir équations (2.41)). Ce contrôleur prend en compte les effets non linéaires du pneu (estimés à la partie 3) pour augmenter la stabilité du véhicule en présence de glissement.

### 4.2.1 Dynamique d'erreur du suivi de trajectoire

Le suivi de trajectoire a pour but de réguler la position $(x, y)$ et l'orientation $\psi$ du véhicule vers une trajectoire de référence $(x_d, y_d, \psi_d)$ associée à une loi temporelle et à une vitesse de parcours $V_d$ désirée. Cela peut être vu comme un problème de régulation d'un véhicule, attaché à un repère $\mathscr{R}_c$ (voir Figure 4.7), vers un véhicule virtuel, attaché à un repère de référence $\mathscr{R}_d$ qui suit le chemin idéal. Les configurations du véhicule et du véhicule virtuel dans le repère inertiel $\mathscr{R}_i$ sont respectivement notées $(x, y, \psi)^T$ et $(x_d, y_d, \psi_d)^T$. On note $R_{\psi_d}$ la matrice de transformation entre les repères $\mathscr{R}_d$ et $\mathscr{R}_i$ et $R_\psi$ celle entre les repères $\mathscr{R}_c$ et $\mathscr{R}_i$ telles que :

$$R_{\psi_\bullet} \triangleq \begin{pmatrix} \cos(\psi_\bullet) & -\sin(\psi_\bullet) & 0 \\ \sin(\psi_\bullet) & \cos(\psi_\bullet) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $[f]$ la base du repère de frenet $\mathscr{R}_f$ et $\mathscr{R}_d$ le repère associé à l'orientation désirée du châssis, tels que les bases s'expriment :

$$[f] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{k}_f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [d] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_d & \vec{j}_d & \vec{k}_d \end{pmatrix},$$

avec $\vec{\tau}$ tangent au chemin. On a $\psi_d - \psi_\tau = \widehat{\vec{i}_d, \vec{\tau}}$ l'angle orienté entre les repères $\mathscr{R}_d$ et $\mathscr{R}_f$ avec $\psi_d$ l'orientation désirée du véhicule. On pose

$$\psi_d \triangleq \psi_\tau + \Delta\psi,$$

soit

$$\Delta\psi = \psi_d - \psi_\tau.$$

$\psi_\tau$ est l'angle que fait la tangente à la courbe par rapport à l'axe $\vec{i}_i$ tel que $\psi_\tau = \arctan(\frac{dy_d}{dx_d})$, avec $dx_d$ et $dy_d$, la variation infinitésimale suivant $\vec{i}_i$ et $\vec{j}_i$.

Les entrées sont les positions du chemin de référence (pas de référence de temps) $x_d$, $y_d(x_d)$, le lacet de référence $\psi_d$ et le module de la vitesse tangentielle $v_d$. $v_d$ est la vitesse de parcours désirée le long de la trajectoire de référence. On note $V_d^{[d]}$ la matrice colonne des composantes scalaires du vecteur $\vec{V}_d \triangleq \vec{V}(P/\mathscr{R}_i)$ dans la base $[f]$ et on a :

$$V_d^{[f]} = (v_d, 0, 0)^T.$$

On note $V_d^{[d]}$ la matrice colonne des composantes scalaires du vecteur $\vec{V}_d$ dans la base $[d]$ :

$$V_d{}^{[\mathrm{d}]} = (V_{x_d}, V_{y_d}, 0)^T.$$

Soit encore $V_d{}^{[\mathrm{d}]} = T_{[f]}^{[d]} V_d{}^{[\mathrm{f}]}$ avec

$$T_{[f]}^{[d]} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\psi) & \sin(\Delta\psi) & 0 \\ -\sin(\Delta\psi) & \cos(\Delta\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

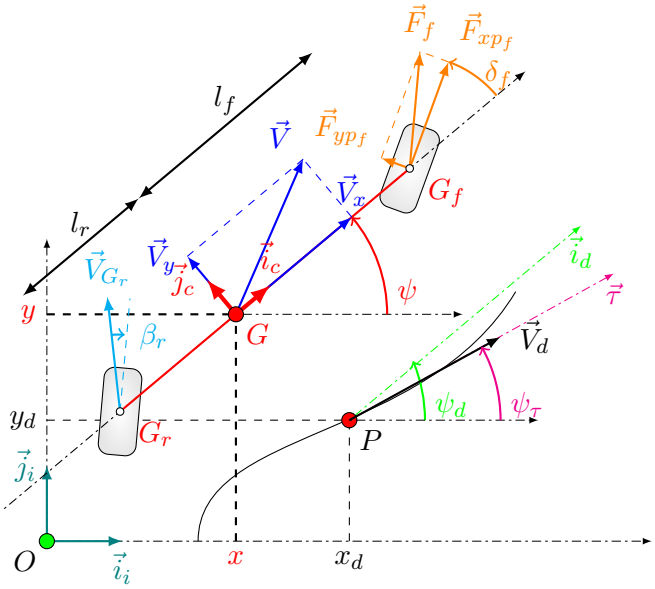



FIGURE 4.7 – Modèle bicyclette dynamique

On obtient donc (voir figure 4.7) :

$$\begin{cases} V_{x_d} &= v_d \cos(\Delta\psi), \\ V_{y_d} &= -v_d \sin(\Delta\psi). \end{cases} \tag{4.59}$$

Exprimons le vecteur accélération dans la base de Frenet $[f]$. En reprenant (B.16), on a :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}_i) &= [f] \cdot \Gamma^{[f]} = [f] \cdot \left( \dot{V}_d^{[f]} + \Lambda(\Omega_{(f/i)})\, V_d^{[f]} \right) \\ &= \dot{v}_d\, \vec{\tau} + \dot{\psi}_\tau\, v_d\, \vec{\eta} \end{aligned} \tag{4.60}$$

or $\dot{\psi}_\tau = v_d\, \kappa$ (voir annexe D.2.3). Finalement :

$$[f] \cdot \Gamma^{[f]} = \dot{v}_d\, \vec{\tau} + v_d^2\, \kappa\, \vec{\eta}, \tag{4.61}$$

ou encore exprimé dans le repère désiré : $\Gamma^{[d]} = T_{[f]}^{[d]}\, \Gamma^{[f]}$. Les expressions de $\dot{V}_{x_d}$ et $\dot{V}_{y_d}$ sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{V}_{x_d} &= \dot{v}_d \cos(\Delta\psi) + \dot{v}_d^2\, \kappa \sin(\Delta\psi), \\ \dot{V}_{y_d} &= -\dot{v}_d \sin(\Delta\psi) + \dot{v}_d^2\, \kappa \cos(\Delta\psi). \end{cases} \tag{4.62}$$

Avec $V^{[c]} = V(G/\mathscr{R}_i)^{[c]} = (V_x, V_y, 0)^T$, on définit les vecteurs d'états suivants :

$$X \triangleq (V_x, V_y, \dot{\psi})^T$$

et

$$X_d \triangleq (V_{x_d}, V_{y_d}, \dot{\psi}_d)^T.$$

On en déduit la trajectoire en fonction du temps :

$$[i] \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\psi}_d \end{pmatrix}^{[i]} = [i] \cdot T_{[d]}^{[i]} \begin{pmatrix} V_{x_d} \\ V_{y_d} \\ \dot{\psi}_d \end{pmatrix}^{[d]} \tag{4.63}$$

avec

$$T_{[d]}^{[i]} = R_{\psi_d} = \begin{pmatrix} \cos(\psi_d) & -\sin(\psi_d) & 0 \\ \sin(\psi_d) & \cos(\psi_d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'erreur de suivi de trajectoire (erreurs longitudinale, latérale et d'orientation) dans le repère $[i]$ est notée $E^{[i]} = (e_x, e_y, e_\psi)^T$.

$$[i] \cdot E \triangleq [i] \cdot \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\psi \end{pmatrix}^{[i]} \triangleq [i] \cdot \begin{pmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \psi_d - \psi \end{pmatrix}^{[i]}, \tag{4.64}$$

que l'on va pouvoir dériver dans $[i]$. On a :

$$[i]\cdot\dot{E} = [i]V_d^{[i]} - [i]V^{[i]} = [i]\cdot\begin{pmatrix} \dot{x}_d - \dot{x} \\ \dot{y}_d - \dot{y} \\ \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \end{pmatrix} = [i]\cdot T_{[d]}^{[i]} \begin{pmatrix} V_{x_d} \\ V_{y_d} \\ \dot{\psi}_d \end{pmatrix}^{[d]} - [i]\cdot T_{[c]}^{[i]} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^{[c]} = [i]\cdot(R_{\psi_d} X_d - R_\psi X). \tag{4.65}$$

Ce vecteur d'erreur de vitesse peut également s'écrire dans la base $[c]$ associée au châssis. Si l'on pose $\epsilon^{[c]}$ cette matrice d'erreur de vitesse

$$[c] \cdot \epsilon^{[c]} \triangleq [c] \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \triangleq [c] \cdot T_{[i]}^{[c]} \dot{E}^{[i]} = [c] \cdot R_{-\psi} \dot{E}^{[i]}, \tag{4.66}$$

soit encore

$$\epsilon^{[c]} = R_{e_\psi} X_d - X \tag{4.67}$$

avec

$$R_{e_\psi} = \begin{pmatrix} \cos(\psi_d - \psi) & -\sin(\psi_d - \psi) & 0 \\ \sin(\psi_d - \psi) & \cos(\psi_d - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En dérivant $\epsilon^{[c]}$ on obtient :

$$\dot{\epsilon}^{[c]} = \dot{R}_{e_\psi} X_d + R_{e_\psi} \dot{X}_d - \dot{X} \tag{4.68}$$

avec

$$\dot{X}_d \triangleq \begin{pmatrix} \dot{V}_{x_d} & \dot{V}_{y_d} & \ddot{\psi}_d \end{pmatrix}^T \tag{4.69}$$

et

$$\dot{X} \triangleq \begin{pmatrix} \dot{V}_x & \dot{V}_y & \ddot{\psi} \end{pmatrix}^T.$$

Avec la définition de la matrice antisymétrique (B.21) associée au produit vectoriel,

$$\dot{R}_{e_\psi} = \dot{e}_\psi \, \Lambda \, R_{e_\psi}$$

et

$$\Lambda \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient alors :

$$\dot{\epsilon}^{[c]} = R_{e_\psi}(\dot{e}_\psi \, \Lambda \, X_d + \dot{X}_d) - \dot{X}. \tag{4.70}$$

Les erreurs $E^{[i]}$ projetées dans le repère du véhicule $\mathscr{R}_c$ s'expriment comme suit :

$$[c] \cdot E^{[c]} \triangleq [c] \cdot T_{[i]}^{[c]} E^{[i]} \tag{4.71}$$

avec

$$T_{[i]}^{[c]} = R_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage du repère $\mathscr{R}_c$ au repère $\mathscr{R}_i$. On a donc :

$$E^{[c]} = R_{-\psi}\, E^{[i]}.$$

En exprimant la dérivée temporelle par rapport à la base [c] des erreurs de positions (4.71), on obtient :

$$\dot{E}^{[c]} = \dot{R}_{-\psi}\, E^{[i]} + R_{-\psi}\, \dot{E}^{[i]}$$

et en reprenant la définition de la matrice antisymétrique (B.21) associée à la dérivation d'une matrice de rotation

$$\dot{R}_{-\psi} = -\dot{\psi}\, \Lambda\, R_{-\psi}\,,$$

nous avons alors

$$\dot{E}^{[c]} = -\dot{\psi}\, \Lambda\, R_{-\psi}\, E^{[c]} + R_{-\psi}\, \dot{E}^{[i]}.$$

De plus, en réintroduisant les matrices $E^{[c]}$ et $\epsilon^{[c]}$ (4.71) et (4.66), l'équation dynamique de l'erreur $E^{[c]}$ devient :

$$\dot{E}^{[c]} = -\dot{\psi}\, \Lambda\, E^{[c]} + \epsilon^{[c]}\,.$$

Finalement, on a donc le système suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \Sigma_1 : \dot{E}^{[c]} = -\dot{\psi}\, \Lambda\, E^{[c]} + \epsilon^{[c]}, \\ \Sigma_2 : \dot{\epsilon}^{[c]} = R_{e_\psi}\, (\dot{e}_\psi\, \Lambda\, X_d + \dot{X}_d) - \dot{X}. \end{cases} \tag{4.72}$$

Par la suite on simplifiera l'écriture en posant :

$$\begin{cases} E \triangleq E^{[c]}, \\ \epsilon \triangleq \epsilon^{[c]}. \end{cases}$$

avec $E$ l'erreur en position et $\epsilon$ l'erreur en vitesse.

### 4.2.2 Modélisation du véhicule

Le véhicule considéré ici étant amené à évoluer en environnement tout-terrain, les faibles conditions d'adhérence doivent être prises en compte dans la modélisation du véhicule pour pouvoir concevoir une loi de contrôle permettant un suivi précis. On construit la loi de contrôle à partir du modèle bicyclette dynamique à 3 degrés de liberté (voir 2.41) prenant en compte les forces d'interaction entre le pneumatique et le sol. On rappelle les équations du modèle :

$$\begin{cases} m\,(\dot{V}_x - V_y\,\dot{\psi}) = F_{x_f} + F_{x_r}, \\ m\,(\dot{V}_y + V_x\,\dot{\psi}) = F_{y_f} + F_{y_r}, \\ I_z\,\ddot{\psi} = l_f\, F_{y_f} - l_r\, F_{y_r}. \end{cases} \tag{4.73}$$

Les forces et moments du système d'équation (4.73) exprimés dans le repère du véhicule s'écrivent :

$$\begin{cases} F_{x_f} = F_{x_{p_f}}\, \cos\delta_f - F_{y_{p_f}}\, \sin\delta_f, \\ F_{y_f} = F_{y_{p_f}}\, \cos\delta_f + F_{x_{p_f}}\, \sin\delta_f, \\ F_{x_r} = F_{x_{p_r}}\, \cos\delta_r - F_{y_{p_r}}\, \sin\delta_r, \\ F_{y_r} = F_{y_{p_r}}\, \cos\delta_r + F_{x_{p_r}}\, \sin\delta_r, \end{cases} \tag{4.74}$$

avec $\delta_f$ et $\delta_r$ les angles de braquage avant et arrière.

Dans les équations (4.74), les forces longitudinales sont calculées en utilisant le modèle dynamique des roues :

$$F_{x_p} \triangleq \begin{pmatrix} F_{x_{p_f}} \\ F_{x_{p_r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{T_{\omega_f} - I_r\,\dot{\omega}_f}{r} \\ \dfrac{T_{\omega_r} - I_r\,\dot{\omega}_r}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\epsilon\, T_\omega - I_r\,\dot{\omega}_f}{r} \\ \dfrac{(1-\epsilon)\, T_\omega - I_r\,\dot{\omega}_r}{r} \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

où $\epsilon$ représente un coefficient de répartition du couple total entre les trains avant et arrière. $\epsilon$ est compris entre 0 (roues motrices à l'arrière) et 1 (roues motrices à l'avant). $\dot{\omega}_f$ et $\dot{\omega}_r$ sont les accélérations des roues. On considère que les forces latérales sur chaque axe sont proportionnelles aux angles de dérives avant $\beta_f$ et arrière $\beta_r$ (voir modèle (2.143)) :

$$F_{y_p} \approx F_{y_p}^{\text{lin}} \triangleq C_\beta \, \beta \tag{4.76}$$

avec

$$\begin{aligned}
\beta &\triangleq \begin{pmatrix} \beta_f \\ \beta_r \end{pmatrix} = \delta - \begin{pmatrix} \frac{V_y + l_f \, \dot{\psi}}{V_x} \\ \frac{V_y - l_r \, \dot{\psi}}{V_x} \end{pmatrix}, \\
\delta &\triangleq \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \end{pmatrix}, \\
\dot{\omega} &\triangleq \begin{pmatrix} \dot{\omega}_f \\ \dot{\omega}_r \end{pmatrix}, \\
F_{y_p} &\triangleq \begin{pmatrix} F_{y_{p_f}} \\ F_{y_{p_r}} \end{pmatrix}, \\
F_{y_p}^{\text{lin}} &\triangleq \begin{pmatrix} F_{y_{p_f}}^{\text{lin}} \\ F_{y_{p_r}}^{\text{lin}} \end{pmatrix}, \\
C_\beta &\triangleq \begin{pmatrix} C_{\beta_f} & 0 \\ 0 & C_{\beta_r} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

où $C_{\beta_f}$ et $C_{\beta_r}$ sont les coefficients de rigidité de dérives avant et arrière. La vitesse longitudinale $V_x$ est considérée non nulle.

En considérant l'hypothèse des petits angles pour l'équation (4.74) et en injectant (4.74), (4.75) et (4.76) dans (4.73), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
m \, \dot{V}_x &= m \, V_y \, \dot{\psi} - \frac{I_r}{r} \dot{\omega}_f - \frac{I_r}{r} \dot{\omega}_r + \frac{T_\omega}{r} - C_{\beta_f} \left( \delta_f - \frac{V_y + l_f \, \dot{\psi}}{V_x} \right) \delta_f - C_{\beta_r} \left( \delta_r - \frac{V_y - l_r \, \dot{\psi}}{V_x} \right) \delta_r, \\
m \, \dot{V}_y &= -m \, V_x \, \dot{\psi} - C_{\beta_f} \left( \frac{V_y + l_f \, \dot{\psi}}{V_x} \right) - C_{\beta_r} \left( \frac{V_y - l_r \, \dot{\psi}}{V_x} \right) \\
&\quad + (C_{\beta_f} - \frac{I_r}{r} \, \dot{\omega}_f) \, \delta_f + (C_{\beta_r} - \frac{I_r}{r} \, \dot{\omega}_r) \, \delta_r + \frac{\epsilon}{r} \, T_\omega \, \delta_f + \frac{(1-\epsilon)}{r} \, T_\omega \, \delta_r, \\
\ddot{\psi} &= -\frac{l_f}{I_z} \, C_{\beta_f} \left( \frac{V_y + l_f \, \dot{\psi}}{V_x} \right) + \frac{l_r}{I_z} \, C_{\beta_r} \left( \frac{V_y - l_r \, \dot{\psi}}{V_x} \right) + \frac{l_f}{I_z} \, (C_{\beta_f} - \frac{I_r}{r} \, \dot{\omega}_f) \, \delta_f - \frac{l_r}{I_z} \, (C_{\beta_r} - \frac{I_r}{r} \, \dot{\omega}_r) \, \delta_r \\
&\quad + \frac{l_f \, \epsilon}{I_z \, r} \, T_\omega \, \delta_f - \frac{l_r \, (1-\epsilon)}{I_z \, r} \, T_\omega \, \delta_r.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Le modèle donné par (4.78) peut maintenant s'écrire sous la forme :

$$\dot{X} = f(X, \dot{\omega}) + g(X, \dot{\omega}) \, U + h(U) \tag{4.79}$$

avec $U$ regroupant les trois variables de contrôle :

$$U \triangleq \begin{pmatrix} T_\omega \\ \delta_f \\ \delta_r \end{pmatrix},$$

$$X \triangleq \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \tag{4.80}$$

$$f(X,\dot{\omega}) \triangleq \begin{pmatrix} V_y\,\dot{\psi} - \dfrac{I_r}{m\,r}\,\dot{\omega}_f - \dfrac{I_r}{m\,r}\,\dot{\omega}_r \\ -V_x\,\dot{\psi} - \dfrac{C_{\beta_f}}{m}\dfrac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x} - \dfrac{C_{\beta_r}}{m}\dfrac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x} \\ -\dfrac{l_f}{I_z}\,C_{\beta_f}\dfrac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x} + \dfrac{l_r}{I_z}\,C_{\beta_r}\dfrac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x} \end{pmatrix},$$

$$h(U) \triangleq \begin{pmatrix} -\dfrac{C_{\beta_f}}{m}\,\delta_f^2 - \dfrac{C_{\beta_r}}{m}\,\delta_r^2 \\ \dfrac{\epsilon}{m\,r}\,T_\omega\,\delta_f + \dfrac{(1-\epsilon)}{m\,r}\,T_\omega\,\delta_r \\ \dfrac{l_f}{I_z}\,\dfrac{\epsilon}{r}T_\omega\,\delta_f - \dfrac{l_r}{I_z}\,\dfrac{(1-\epsilon)}{r}T_\omega\,\delta_r \end{pmatrix},$$

$$g(X,\dot{\omega}) \triangleq \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m\,r} & \dfrac{C_{\beta_f}}{m}\dfrac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x} & \dfrac{C_{\beta_r}}{m}\dfrac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x} \\ 0 & \dfrac{C_{\beta_f}}{m} - \dfrac{I_r}{m\,r}\dot{\omega}_f & \dfrac{C_{\beta_r}}{m} - \dfrac{I_r}{m\,r}\,\dot{\omega}_r \\ 0 & \dfrac{l_f}{I_z}\,C_{\beta_f} - \dfrac{l_f}{I_z}\dfrac{I_r}{r}\,\dot{\omega}_f & \dfrac{-l_r}{I_z}C_{\beta_r} + \dfrac{l_r}{I_z}\dfrac{I_r}{r}\,\dot{\omega}_r \end{pmatrix}. \tag{4.81}$$

Pour réduire la complexité du modèle non linéaire (4.79), on néglige les termes non linéaires :

$$\dot{X} = f(X,\dot{\omega}) + g(X,\dot{\omega})\,U. \tag{4.82}$$

### 4.2.3 Contrôle par bouclage linéarisant

Une manière de résoudre le problème de suivi de trajectoire d'un véhicule passe par l'expression de la dynamique du vecteur d'erreur. D'après les équations (4.72) et (4.67), la dérivée de l'erreur en position dans le repère véhicule donne :

$$\dot{E} = -\dot{\psi}\Lambda\,E + R_{e_\psi}\,X_d - X. \tag{4.83}$$

Pour faire apparaître la commande $U$, on dérive encore une fois :

$$\ddot{E} = (-\ddot{\psi}\,\Lambda + \dot{\psi}^2\,\Lambda^2)\,E + (R_{e_\psi}\,\dot{e}_\psi\,\Lambda - \dot{\psi}\,\Lambda\,R_{e_\psi})\,X_d + \dot{\psi}\,\Lambda\,X + R_{e_\psi}\,\dot{X}_d - \dot{X}. \tag{4.84}$$

Soit en réinjectant (4.82) :

$$\ddot{E} = (-\ddot{\psi}\,\Lambda + \dot{\psi}^2\,\Lambda^2)\,E + (R_{e_\psi}\,\dot{e}_\psi\,\Lambda - \dot{\psi}\,\Lambda\,R_{e_\psi})\,X_d + \dot{\psi}\,\Lambda\,X + R_{e_\psi}\,\dot{X}_d - (f(X) + g(X)\,U). \tag{4.85}$$

En imposant une dynamique d'erreur suivante :

$$\ddot{E} = -K_D\,\dot{E} - K_P\,E \tag{4.86}$$

où

$$K_D = \begin{pmatrix} K_{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{d_3} \end{pmatrix}$$

et

$$K_P = \begin{pmatrix} K_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{p_3} \end{pmatrix},$$

on en déduit les commandes à appliquer pour suivre les consignes $X_d$ et $\dot{X}_d$ :

$$U = g^{-1}(X)\left[(-\ddot{\psi}\,\Lambda + \dot{\psi}^2\,\Lambda^2)\,E + (R_{e_\psi}\,\dot{e}_\psi\,\Lambda - \dot{\psi}\,\Lambda\,R_{e_\psi})\,X_d + \dot{\psi}\,\Lambda\,X + R_{e_\psi}\,\dot{X}_d - f(X) + K_D\,\dot{E} + K_P\,E\right]. \tag{4.87}$$

### 4.2.4 Contrôle par backstepping avec modèle linéaire de pneumatique

Appliquons le principe de backstepping sur le système décrivant la dynamique des erreurs (4.72).

**Etape 1** : A cette étape, $\epsilon$ est considéré comme la commande du sous-système $\Sigma_1$. On effectue un changement de variable : $Z_1 \triangleq E$.

$$\Sigma_1 : \dot{Z}_1 = -\dot{\psi}\,\Lambda\,Z_1 + \epsilon. \tag{4.88}$$

On prend comme fonction de Lyapunov :

$$\mathcal{V}_1(Z_1) = \frac{1}{2}\,Z_1^T\,Z_1. \tag{4.89}$$

En dérivant on obtient donc :

$$\dot{\mathcal{V}}_1(Z_1) = \frac{1}{2}\,\dot{Z}_1^T\,Z_1 + \frac{1}{2}\,Z_1^T\,\dot{Z}_1 = \frac{1}{2}\,(-\dot{\psi}\,\Lambda\,Z_1 + \epsilon)^T\,Z_1 + \frac{1}{2}\,Z_1^T\,(-\dot{\psi}\,\Lambda\,Z_1 + \epsilon). \tag{4.90}$$

Cette fonction stabiliserait $\Sigma_1$ si elle était de Lyapunov. Donc si,

$$\epsilon = \dot{\psi}\,\Lambda\,Z_1 - K_1\,Z_1, \quad \text{avec} \quad K_1 > 0 \tag{4.91}$$

ce qui donnerait :

$$\dot{\mathcal{V}}_1(Z_1) = -Z_1^T\,K_1\,Z_1. \tag{4.92}$$

En revanche, $\epsilon$ n'étant pas la commande réelle, on pose

$$Z_2 \triangleq \epsilon - \epsilon_d \tag{4.93}$$

avec

$$\epsilon_d \triangleq \dot{\psi}\,\Lambda\,Z_1 - K_1\,Z_1, \tag{4.94}$$

la commande désirée pour stabiliser $\Sigma_1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{Z}_1 &= -\dot{\psi}\,\Lambda Z_1 + Z_2 + \epsilon_d \\ &= Z_2 - K_1\,Z_1 \end{aligned} \tag{4.95}$$

et :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1(Z_1) &= \frac{1}{2}\,\dot{Z}_1^T\,Z_1 + \frac{1}{2}\,Z_1^T\,\dot{Z}_1 \\ &= \frac{1}{2}\,(-\dot{\psi}\,\Lambda Z_1 + Z_2 + \epsilon_d)^T\,Z_1 + \frac{1}{2}\,Z_1^T(-\dot{\psi}\,\Lambda\,Z_1 + Z_2 + \epsilon_d) \\ &= \frac{1}{2}\,(-K_1\,Z_1 + Z_2)^T\,Z_1 + \frac{1}{2}\,Z_1^T\,(-K_1\,Z_1 + Z_2) \\ &= -Z_1^T\,K_1\,Z_1 + \frac{1}{2}\,\left(Z_2^T\,Z_1 + Z_1^T\,Z_2\right). \end{aligned} \tag{4.96}$$

**Etape 2** : Prenons une deuxième fonction de Lyapunov $\mathcal{V}_2(Z)$ pour compléter la première : $\mathcal{V}_2(Z) = \mathcal{V}_1(Z_1) + \frac{1}{2}\,Z_2^T\,Z_2$. En dérivant $\mathcal{V}_2(Z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2(Z) &= \dot{\mathcal{V}}_1(Z_1) + \frac{1}{2}\,\dot{Z}_2^T\,Z_2 + \frac{1}{2}\,Z_2^T\,\dot{Z}_2 \\ &= -Z_1^T\,K_1\,Z_1 + \frac{1}{2}\,\left(Z_2^T\,Z_1 + Z_1^T\,Z_2\right) + \frac{1}{2}\,\dot{Z}_2^T\,Z_2 + \frac{1}{2}\,Z_2^T\,\dot{Z}_2. \end{aligned} \tag{4.97}$$

En dérivant (4.93), on a :

$$\dot{Z}_2 = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_d \tag{4.98}$$

et en posant $\mathcal{U} \triangleq \dot{\epsilon}$, on obtient :

$$\dot{\mathcal{V}}_2(Z) = -Z_1^T\, K_1\, Z_1 + \frac{1}{2}\, Z_2^T\, (Z_1 + \mathcal{U} - \dot{\epsilon}_d) + \frac{1}{2}\, (Z_1^T + (\mathcal{U} - \dot{\epsilon}_d)^T)\, Z_2. \tag{4.99}$$

Cette fonction stabilise $\Sigma_2$ si elle est de Lyapunov donc :

$$\mathcal{U} = \dot{\epsilon}_d - Z_1 - K_2\, Z_2 \tag{4.100}$$

avec $K_2 > 0$ et en dérivant (4.94) :

$$\dot{\epsilon}_d = \Lambda\, \ddot{\psi}\, Z_1 + \Lambda\, \dot{\psi}\, \dot{Z}_1 - K_1\, \dot{Z}_1. \tag{4.101}$$

En injectant (4.100) dans (4.72), on en déduit la commande $U$ :

$$\begin{cases} U & = -g^{-1}\left(f - R_{e_\psi}\,(\dot{e}_\psi\, \Lambda\, X_d + \dot{X}_d) + \mathcal{U}\right), \\ \mathcal{U} & = \dot{\epsilon}_d - E - K_2\,(\epsilon - \epsilon_d), \\ \epsilon_d & = \dot{\psi}\, \Lambda\, E - K_1\, E, \\ \dot{\epsilon}_d & = \ddot{\psi}\, \Lambda\, E + (\dot{\psi}\, \Lambda - K_1)\, \dot{E}, \\ X & = (V_x, V_y, \dot{\psi})^T, \\ X_d & = (V_{x_d}, V_{y_d}, \dot{\psi}_d)^T. \end{cases} \tag{4.102}$$

*Remarque* 4.2.1. La loi de contrôle est applicable si $g$ est inversible, soit :

$$\det(g) \quad = -\left(\frac{l_r\,(r\, C_{\beta_f} - I_r\, \dot{\omega}_f)(r\, C_{\beta_r} - I_r\, \dot{\omega}_r)}{m^2\, r^3\, I_z} + \frac{l_f\,(r\, C_{\beta_r} - I_r\, \dot{\omega}_r)(r\, C_{\beta_f} - I_r\, \dot{\omega}_f)}{m^2\, r^3\, I_z}\right) \neq 0. \tag{4.103}$$

L'ordre de grandeur de $\frac{r\, C_\beta}{I_r}$ est d'environ $10^4$ et est supérieur à l'accélération angulaire de la roue donc $r\, C_\beta - I_r\, \dot{\omega} \neq 0$.

**Equation de la boucle fermée :** D'après (4.98) et (4.102) on a :

$$\dot{Z}_2 = -Z_1 - K_2\, Z_2. \tag{4.104}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 \\ 0 & -K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}.$$

En dérivant $\dot{Z}_1$ à l'équation (4.95) :

$$\ddot{Z}_1 = -K_1\, \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = -K_1\, \dot{Z}_1 - Z_1 - K_2\,(K_1\, Z_1 + \dot{Z}_1).$$

Finalement l'équation différentielle régissant la convergence de $Z_1$ est donnée par :

$$\ddot{Z}_1 + (K_1 + K_2)\, \dot{Z}_1 + (1 + K_1\, K_2)\, Z_1 = 0. \tag{4.105}$$

En dérivant (4.104) :

$$\ddot{Z}_2 = -\dot{Z}_1 - K_2\, \dot{Z}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \ddot{Z}_2 + K_2\, \dot{Z}_2 + Z_2 - K_1\, Z_1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \ddot{Z}_2 + K_2\, \dot{Z}_2 + Z_2 - K_1\,(-\dot{Z}_2 - K_2\, Z_2) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \ddot{Z}_2 + (K_2 + K_1)\, \dot{Z}_2 + (1 + K_1\, K_2)\, Z_2 = 0 \end{aligned}$$

Le système linéarisé final donne donc :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Z_1 \\ \dot{Z}_1 \\ Z_2 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix} = A_z \begin{pmatrix} Z_1 \\ \dot{Z}_1 \\ Z_2 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1+K_1\,K_2) & -(K_2+K_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\,(1+K_1\,K_2) & -(K_1+K_2) \end{pmatrix}.$$

**Algorithm 9** Contrôle par backstepping avec modèle linéaire de pneumatique et coefficient de rigidité de dérive fixe

**Require:** $l_f$, $l_r$, $I_z$,$I_r$, $m$, $r$, $K_1$, $K_2$, $C_{\beta_{fixe}}$
  **Inputs :** $V_x$,$V_y$, $\dot{\psi}$, $\dot{\omega_f}$, $\dot{\omega_r}$, $X_d$, $\dot{X}_d$
  **Description :**
  $C_{\beta_{fixe}} \leftarrow 4.95 \times 10^4$
  $U$ from (4.102)
  **return** $T_\omega$, $\delta_f$ et $\delta_r$

**Algorithm 10** Contrôle par backstepping avec modèle linéaire de pneumatique et coefficient de rigidité de dérive estimé

**Require:** $l_f$, $l_r$, $I_z$,$I_r$, $m$, $r$, $K_1$, $K_2$
  **Inputs :** $V_x$,$V_y$, $\dot{\psi}$, $\dot{\omega_f}$, $\dot{\omega_r}$, $X_d$, $\dot{X}_d$, $\hat{C}_\beta$
  **Description :**
  $\hat{C}_\beta$ from algo 8
  $U$ from (4.102)
  **return** $T_\omega$, $\delta_f$ et $\delta_r$

### 4.2.5 Contrôle par backstepping avec modèle non linéaire de pneumatique

Lorsque le véhicule est fortement sollicité, il est soumis à de fortes accélérations latérales qui provoquent une saturation des forces d'interaction pneumatique chaussée. Les pneumatiques se retrouvent alors dans les zones de comportement non linéaire (voir paragraphe 2.7.6). Par conséquent, les équations du modèle dynamique utilisé dans la partie précédente et basées sur un modèle linéaire de pneumatique (valide que pour de petits angles de dérives) ne sont plus suffisantes pour décrire le comportement du véhicule. Pour des valeurs d'angles de dérive $\beta$ plus importantes, la force latérale $F_{y_p}$ générée par le pneumatique est plus faible que celle donnée par le modèle linéaire de pneumatique (4.76) (voir figure 4.8) : $F_{y_p} \approx F_{y_p}^{pac} < F_{y_p}^{lin}$. On cherche à déterminer une loi de contrôle en $T_\omega$, $\delta_f$, $\delta_r$, qui améliore la tenue de route du véhicule en présence de glissements. Pour prendre en compte l'erreur de modélisation des pneumatiques, on introduit les termes d'erreurs $\tilde{F}(\beta)$, tels que :

$$\widetilde{F} \triangleq F_{y_p} - F_{y_p}^{\text{lin}}. \tag{4.106}$$

On définit donc les forces latérales $F_{y_p}$ comme étant fonction de la force $F_{y_p}^{\text{lin}}$ nécessaire au contrôleur pour le suivi de trajectoire et $\tilde{F}$ les forces ajoutées pour prendre en compte les non-linéarités du pneumatique. On a donc :

$$F_{y_p} = F_{y_p}^{\text{lin}} + \widetilde{F}, \tag{4.107}$$

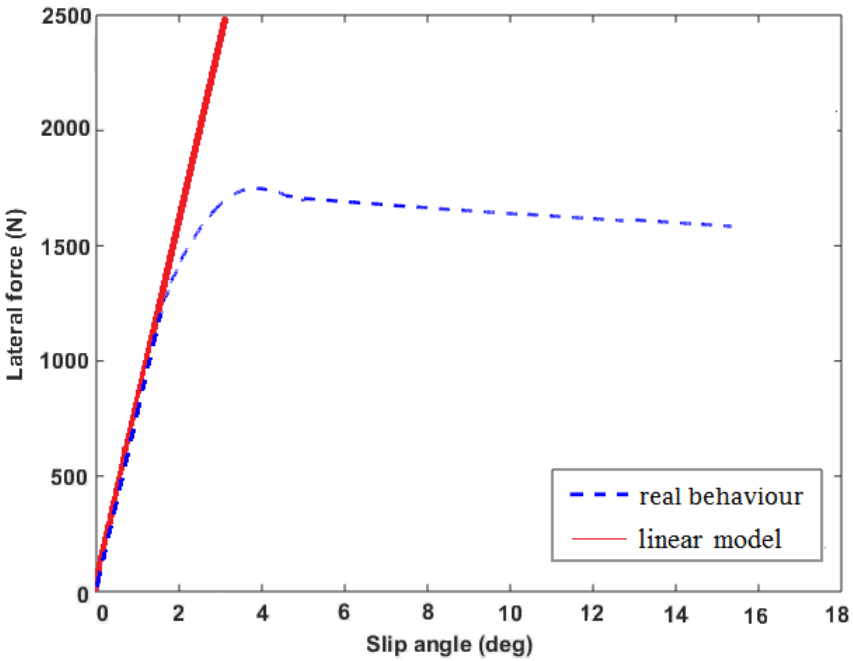



FIGURE 4.8 – Modèle linéaire du pneu VS comportement réel non linéaire

En faisant l'hypothèse des petits angles et avec les notations (4.77), les expressions (4.74) deviennent alors :

$$\begin{cases} F_x \approx F_{x_p} - \mathrm{diag}(\delta)\,(F_{y_p}^{\mathrm{lin}} + \widetilde{F}), \\ F_y \approx (F_{y_p}^{\mathrm{lin}} + \widetilde{F}) + \mathrm{diag}(\delta)\,F_{x_p}, \end{cases} \tag{4.108}$$

avec

$$\mathrm{diag}(\delta) \triangleq \begin{pmatrix} \delta_f & 0 \\ 0 & \delta_r \end{pmatrix}.$$

Puis en remplaçant dans (4.73) on obtient :

$$\dot{X} = f_1(X, \dot{\omega}) + g_1(X, \dot{\omega})\,U, \tag{4.109}$$

avec

$$f_1 \triangleq f + \Delta_f,$$
$$g_1 \triangleq g + \Delta_g,$$

$f$ et $g$ définies à l'équation (4.81) et

$$\Delta_f \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \frac{\widetilde{F}_f + \widetilde{F}_r}{m} & \frac{l_f\,\widetilde{F}_f - l_r\,\widetilde{F}_r}{I_z} \end{pmatrix}^T = \alpha\,\widetilde{F}, \tag{4.110}$$

$$\Delta_g \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{F}_f & -\widetilde{F}_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{l_f}{I_z} & \frac{-l_r}{I_z} \end{pmatrix}. \tag{4.111}$$

On peut donc ajouter un terme de bouclage supplémentaire $K_\Delta\,\Delta_f$ à la loi de contrôle (4.102) tel que :

$$\begin{cases} U &= -g^{-1}\left(f - R_{e_\psi}\,(\dot{e}_\psi\,\Lambda\,X_d + \dot{X}_d) + \mathcal{U}\right) \\ \mathcal{U} &= \dot{\epsilon}_d - E - K_2\,(\epsilon - \epsilon_d) - K_\Delta\,\Delta_f, \\ \epsilon_d &= \dot{\psi}\,\Lambda\,E - K_1\,E, \\ \dot{\epsilon}_d &= \ddot{\psi}\,\Lambda\,E + (\dot{\psi}\,\Lambda - K_1)\,\dot{E}, \end{cases} \tag{4.112}$$

avec $K_\Delta$ une matrice diagonale de gains telle que

$$K_\Delta \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_\psi \end{pmatrix}. \tag{4.113}$$

**Théorème 4.2.1.** *Si $g_1 = g$, $k_y = -1$, $k_\psi = -1$ alors la fonction de Lyapunov candidate $\dot{\mathcal{V}}_2(Z)$ à l'équation (4.99) est définie négative et le système (4.72) est stable.*

L'utilisation de cette loi de commande nécessite la connaissance des coefficients de rigidité de dérive $C_\beta$ (voir matrices $f$ et $g$ à l'équation (4.81)) ainsi que des termes $\tilde{F}$, définis à partir de l'équation (4.106). A partir des estimations du coefficient de rigidité de dérive $\hat{C}_\beta$ et du coefficient de friction latérale maximale $\hat{\mu}_{y_{\max}}$ (détaillé au chapitre 3), on peut calculer les forces latérales à l'aide du modèle de Dugoff (voir équation (2.114)) :

$$\widehat{F}_{yp}^{Dug} \triangleq \begin{cases} \widehat{C}_\beta \tan(\beta) & \text{if } \lambda \geq 1 \\ \widehat{C}_\beta \tan(\beta)\,(2-\lambda)\lambda & \text{if } \lambda < 1 \end{cases} \tag{4.114}$$

et $\lambda$ donné par :

$$\lambda = \frac{\widehat{\mu}_{y_{\max}} F_z}{2\,\widehat{C}_\beta \mid \tan\beta \mid}.$$

On a alors

$$\widehat{\widetilde{F}} = \widehat{F}_{yp}^{Dug} - \widehat{F}_{yp}^{lin}, \quad \text{avec} \quad \widehat{F}_{yp}^{lin} = \hat{C}_\beta\,\beta. \tag{4.115}$$

On note $\bar{\Delta}_f$ les valeurs filtrées de $\hat{\Delta}_f \triangleq \alpha\,\widehat{\widetilde{F}}$, l'estimation de $\Delta_f$ définie par (4.110). La loi de contrôle (4.112) donne alors :

$$\begin{cases} U &= -g^{-1}\left(f - R_{e_\psi}\,(\dot{e}_\psi\,\Lambda\,X_d + \dot{X}_d) + \mathcal{U}\right), \\ \mathcal{U} &= \dot{\epsilon}_d - E - K_2\,(\epsilon - \epsilon_d) - K_\Delta\,\bar{\Delta}_f, \\ \epsilon_d &= \dot{\psi}\,\Lambda\,E - K_1\,E, \\ \dot{\epsilon}_d &= \ddot{\psi}\,\Lambda\,E + (\dot{\psi}\,\Lambda - K_1)\,\dot{E}, \end{cases} \tag{4.116}$$

En pratique, le terme $\bar{\Delta}_f$ est déterminé comme suit :

$$\bar{\Delta}_f(s) \triangleq F_{LP}(s)\,\hat{\Delta}_f(s) = \alpha\,F_{LP}(s)\,\widehat{\widetilde{F}}(s) \tag{4.117}$$

avec

$$\begin{cases} F_{LP}(s) \triangleq \frac{1}{1+\frac{s}{2\,\pi\,f_0}} \\ \widehat{\widetilde{F}} \triangleq \widehat{F}_{yp}^{Dug} - \widehat{F}_{yp}^{lin}, \\ \widehat{F}_{yp}^{lin} = \widehat{C}_\beta\,\beta, \end{cases}$$

$s$ est la variable de Laplace, $F_{LP}(s)$ un filtre passe-bas et $f_0$ la fréquence de coupure.

L'algorithme 11 présenté ci-dessous a fait l'objet d'une publication à la conférence IFAC [Li et al., 2020] ainsi que d'un dépôt de brevet (numéro de dépôt : 1912015) [Li et al., 2019a].

**Algorithm 11** Contrôle par backstepping avec modèle non linéaire de pneumatique

**Require:** $l_f$, $l_r$, $I_z$,$I_r$, $m$, $r$, $K_1$, $K_2$, $K_\Delta$
  **Inputs :** $V_x$,$V_y$, $\dot{\psi}$, $\dot{\omega_f}$, $\dot{\omega_r}$, $X_d$, $\dot{X}_d$, $\hat{C}_\beta$, $\hat{\mu}_{y_{\max}}$
  **Description :**
  $\widehat{\widetilde{F}}$ from (4.114) and (4.115) (algo 8)
  $\bar{\Delta}_f(s)$ from (4.117)
  $U$ from (4.116)
  **return** $T_\omega$, $\delta_f$ et $\delta_r$

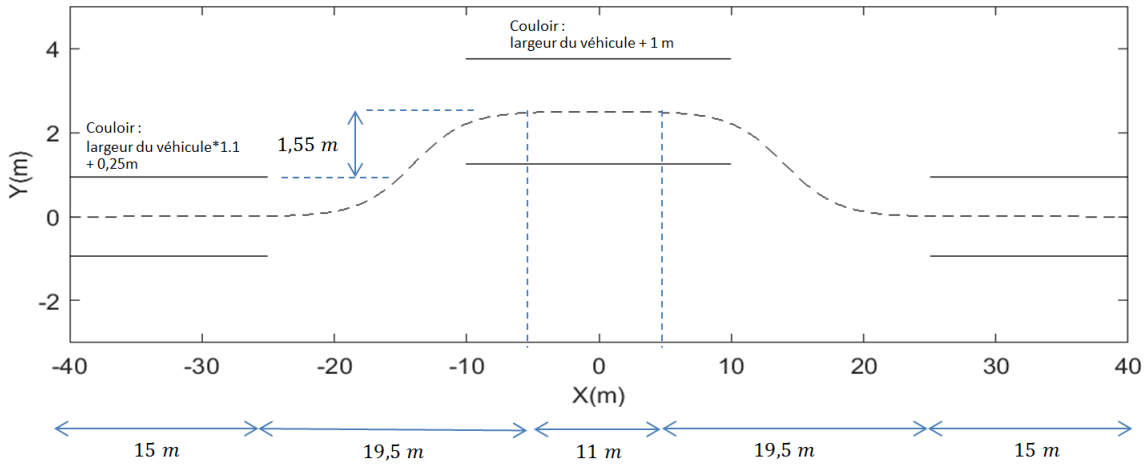



FIGURE 4.9 – Trajectoire de type double changement de voie.

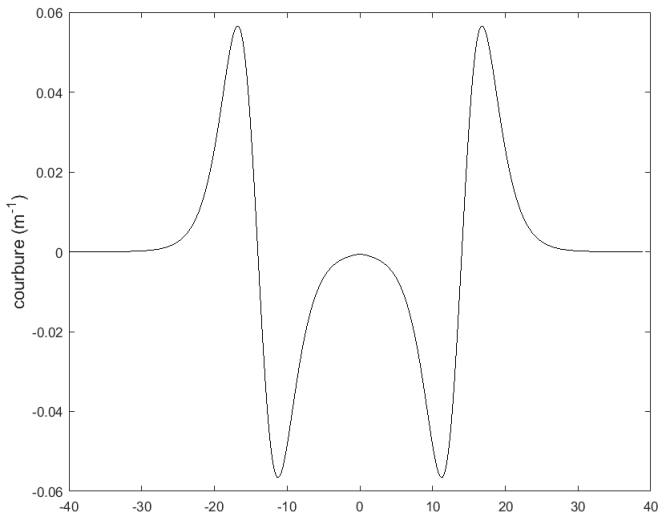



FIGURE 4.10 – Courbure de la trajectoire de type double changement de voie en fonction de X.

### 4.2.6 Résultats de simulations

Pour évaluer les performances des différentes lois de contrôle présentées, on choisit une trajectoire de type double changement de voie (voir Figure 4.9). Selon la National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) c'est une trajectoire exigeante qui permet d'atteindre l'accélération latérale maximale et donc de tester les limites du véhicule sous conditions de transferts de charge latéral importants. Lorsque l'accélération latérale maximale est atteinte, l'effort latéral ne peut pas être augmenté de manière indéfinie sans perdre le contrôle. La courbure de la trajectoire en fonction de l'abscisse $X$ de la trajectoire est affichée à la figure 4.10. On tracera pour chaque simulation l'erreur de suivi définie comme suit :

$$e_{suivi}(t) \triangleq \sqrt{(x(t) - x_{ref}(t))^2 + (y(t) - y_{ref}(t))^2}, \tag{4.118}$$

avec $(x(t), y(t))$ la position du centre de gravité $G$ du véhicule et $(x_{ref}(t), y_{ref}(t))$ la position de référence à un instant $t$.

#### Loi de contrôle issue de la forme chaînée (voir partie 4.1.4)

On teste dans un premier temps les performances de la loi de contrôle actuellement implémentée sur le véhicule eRider (voir équations 4.35). Cette stratégie est comparée avec

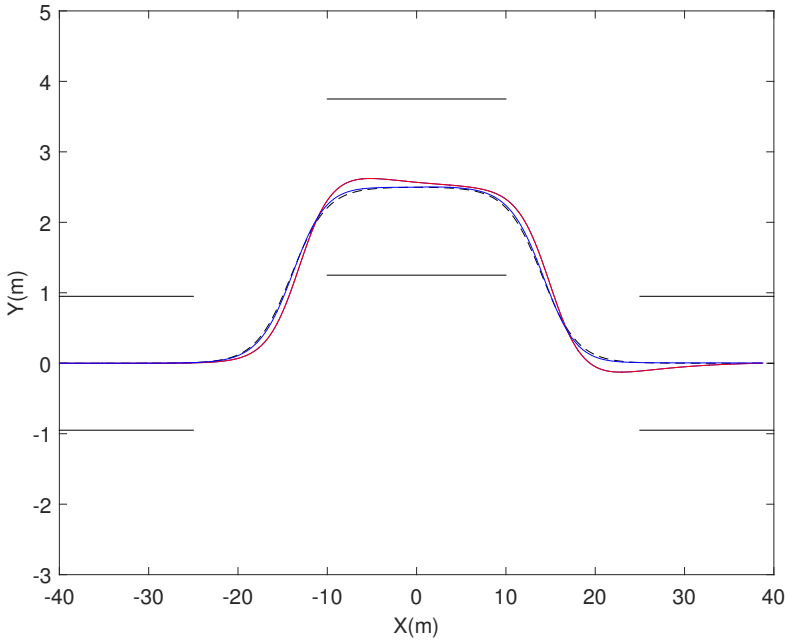



FIGURE 4.11 – Trajectoire parcourue le véhicule sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

les performances des lois de contrôle sur les angles de braquage des trains avant et arrière (voir équations (4.33), avec $\beta_f = \beta_r = 0$), basées sur le modèle cinématique bicyclette et la technique de contrôle sous forme chaînée.

Les gains choisis sont les suivants :

$$K_d = 0.10,\ K_p = \frac{K_d^2}{4},\ K_{d_2} = 0.5.$$

Les lois de contrôle sont d'abord testées sur un modèle bicyclette (voir équations (2.31)) puis sur un modèle beaucoup plus complet (il s'agit du modèle à 10 DLL présenté dans la section 2.9). Les simulations effectuées sont les suivantes :

1. loi de contrôle eRider (4.35) sur modèle cinématique (voir équations (2.31))
2. loi de contrôle (4.33) sur modèle cinématique (voir équations (2.31))
3. loi de contrôle eRider (4.35) sur modèle dynamique à 10 DDL (voir partie 2.9)
4. loi de contrôle (4.33) sur modèle dynamique à 10 DDL (voir partie 2.9)

On trace en rouge figure 4.11, la trajectoire parcourue par le centre de gravité du véhicule avec la loi de contrôle (4.35), en bleu celle obtenue à partir de (4.33) et en noir la trajectoire de référence pour une vitesse désirée de $10\,m/s$. Les écarts latéral et d'orientation sont présentés à la figure 4.12. Les erreurs sont très faibles avec la loi de commande (4.33), moins de 8 cm d'erreur latéral et 0.5 degrés d'erreur d'orientation. Les erreurs sont légèrement plus importantes dans les virages ce qui est dû aux effets dynamiques négligés pour établir la commande. Les performances de cet algorithme sont donc très bons sur un modèle cinématique. Bien que la loi de commande eRider (4.35) ait des erreurs un peu plus importantes que (4.33) (autour de 20 cm pour l'écart latéral et autour de 2 degrés pour l'erreur d'orientation), elles restent néanmoins très faibles.

Pour les simulations avec un modèle dynamique, on considère que le véhicule se déplace sur une trajectoire de type asphalte sec ($\mu = 1$) à 10 $m/s$. On note que l'accélération latérale maximale est de $3\,m/s^{-2}$. Les écarts latéral et d'orientation sont présentés aux figures 4.15 et 4.16. L'écart latéral est maintenant de l'ordre du mètre pour les deux lois de contrôle et l'erreur d'orientation autour de 4 degrés. On constate que la trajectoire parcourue par le

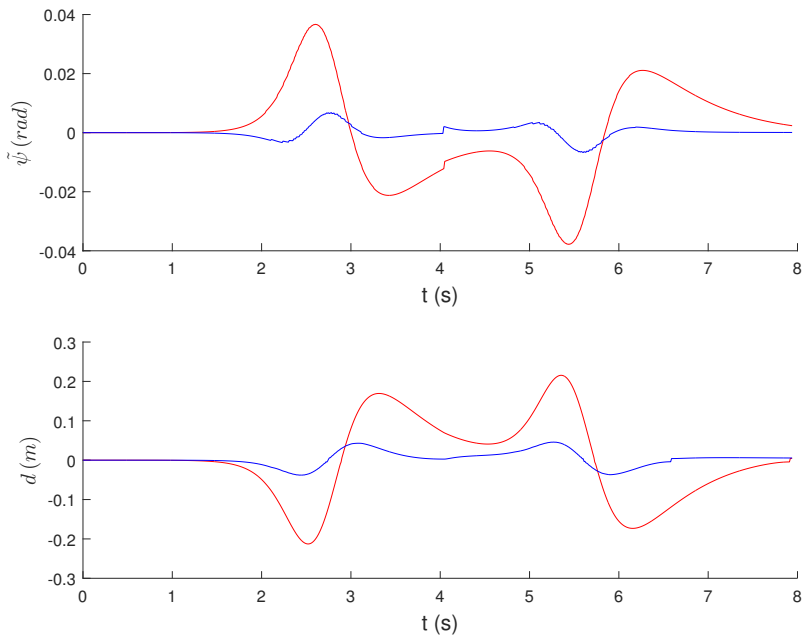



FIGURE 4.12 – Ecarts latéral $d$ et d'orientation $\tilde{\psi}$ sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

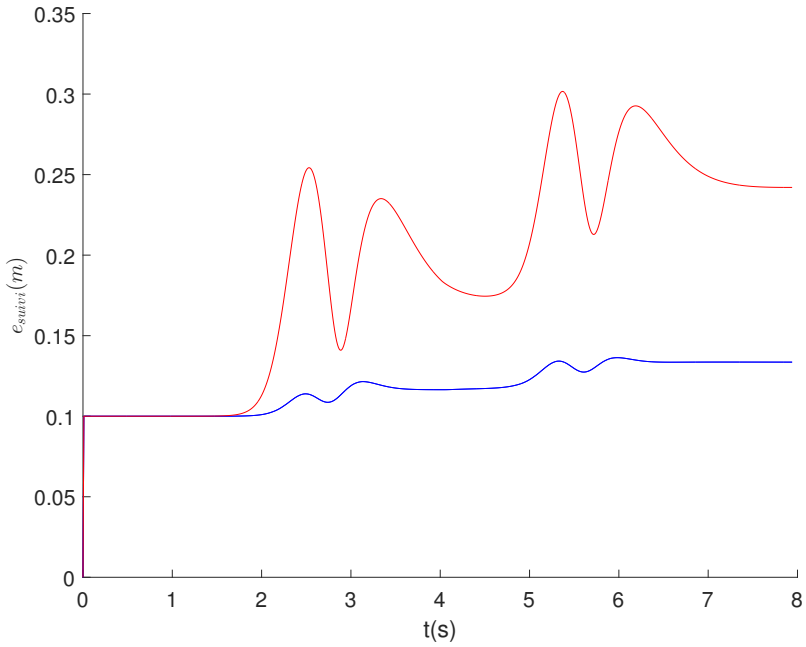



FIGURE 4.13 – Erreur de suivi sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

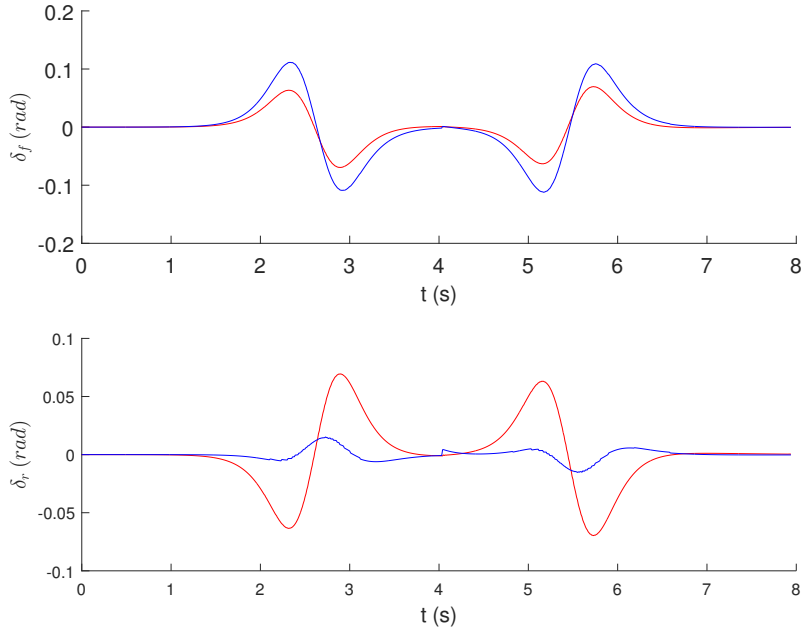



FIGURE 4.14 – Angles de braquage avant et arrière sur un modèle cinématique bicyclette avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

véhicule est beaucoup plus éloignée de la trajectoire de référence que dans le cas précédent. En effet, les phénomènes dynamiques ayant été négligés durant l'établissement de la loi de contrôle, la correspondance avec le modèle de simulation ne se fait plus. Le véhicule a un comportement sous vireur dans les virages. Les écarts de suivi sont plus importants (voir Figure 4.17).

Les résultats de suivi pour différents types de surface pour la loi de contrôle (4.33) sont présentés aux figures 4.19 et 4.20. La courbe rouge représente le suivi pour $\mu = 1$, en bleue pour $\mu = 0.8$ et en cyan pour $\mu = 0.5$. On constate que plus l'adhérence est faible, moins le suivi est précis. Pour $\mu = 0.5$, le véhicule sous-vire au niveau du deuxième virage et il y a un fort dépassement. Pour $\mu = 0.3$ par exemple, le le suivi n'est même plus du tout assuré et n'est donc pas tracé ici. Avec une telle loi de commande, le suivi ne peut pas être garanti lors de déplacements sur terrain à faible adhérence ou à des vitesses d'évolution plus importantes.

**Loi de contrôle basée sur la méthode de backstepping (voir parties 4.2.4 et 4.2.5)**

Plusieurs simulations (voir tableau 2.4 pour les valeurs numériques) ont été réalisées pour évaluer l'efficacité des lois de contrôle (4.102) et (4.116). Un modèle à 10 DDL est utilisé couplé à un modèle de Pacejka des pneumatiques pour simuler la dynamique du véhicule dont le détail se trouve au paragraphe 2.9). Les entrées de commande sont le couple appliqué à chacune des roues $T_{\omega_i}$ ainsi que les angles de braquage avant $\delta_f$ et arrière $\delta_r$. On choisit :

$$k_y = 5 \quad \text{et} \quad k_\psi = 4.$$

Une trajectoire de référence de type double changement de voie (voir Figure 4.9) associée à une vitesse de parcours désirée de la trajectoire $V_d$ sont données ($V_d = \dot{s}$, avec $s$ l'abscisse curviligne le long du chemin). Le profil de la vitesse désirée $V_d$ est constante. Les vitesses de référence désirées $X_d = (V_{x_d}, V_{y_d}, \dot{\psi}_d)^T$ (voir équation (4.69) et (4.59)) sont calculées à partir de l'hypothèse de roulement sans glissements. Dans ce cas, la vitesse latérale au centre de gravité est nulle et l'angle de lacet de référence est tangent à la trajectoire, soit $\Delta\psi = 0$. La loi de contrôle est testée pour une trajectoire de type asphalte mouillée telle que le coefficient d'adhérence soit de $\mu = 0.8$.

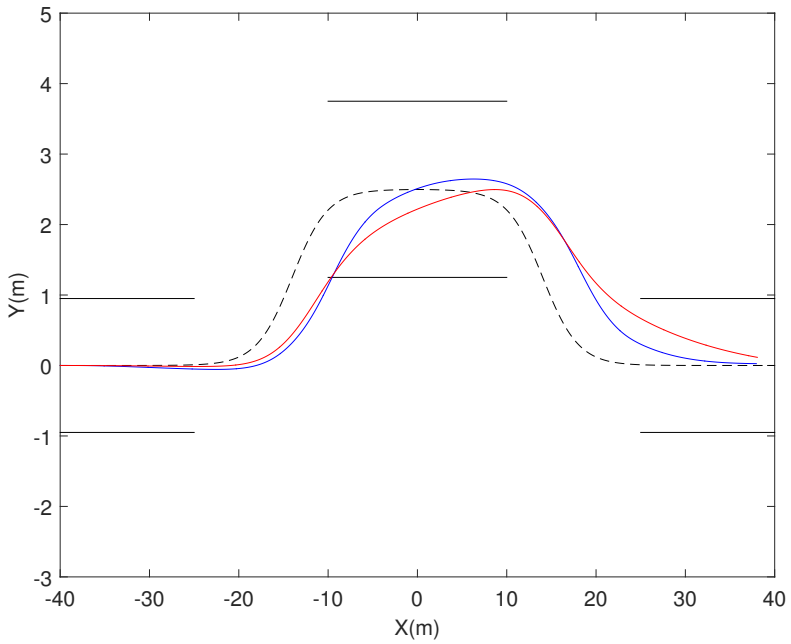



FIGURE 4.15 – Trajectoire parcourue par le véhicule sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

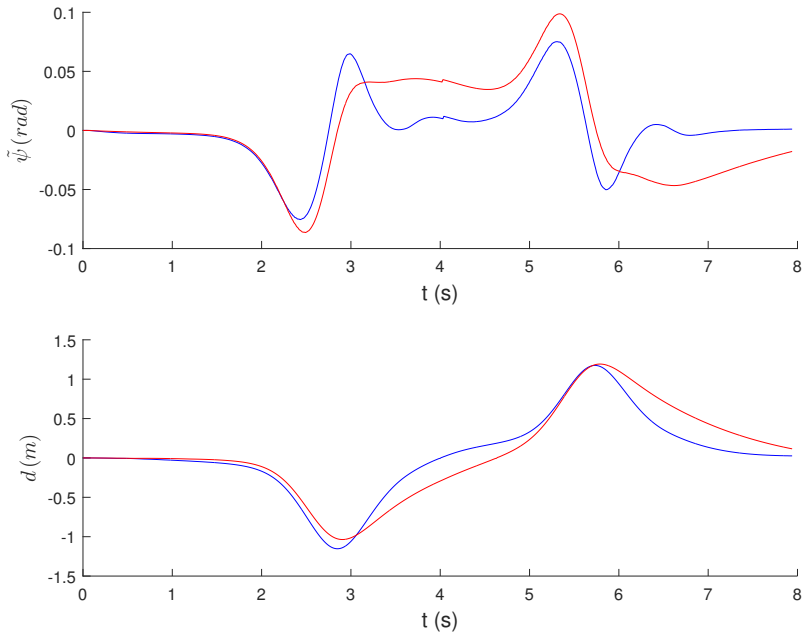



FIGURE 4.16 – Ecarts latéral $d$ et d'orientation $\tilde{\psi}$ sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

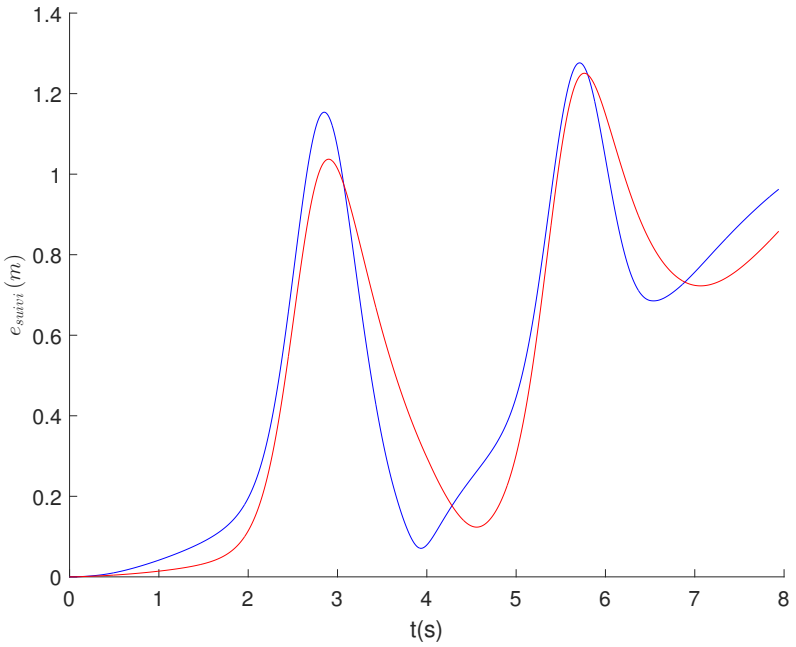



FIGURE 4.17 – Erreur de suivi sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

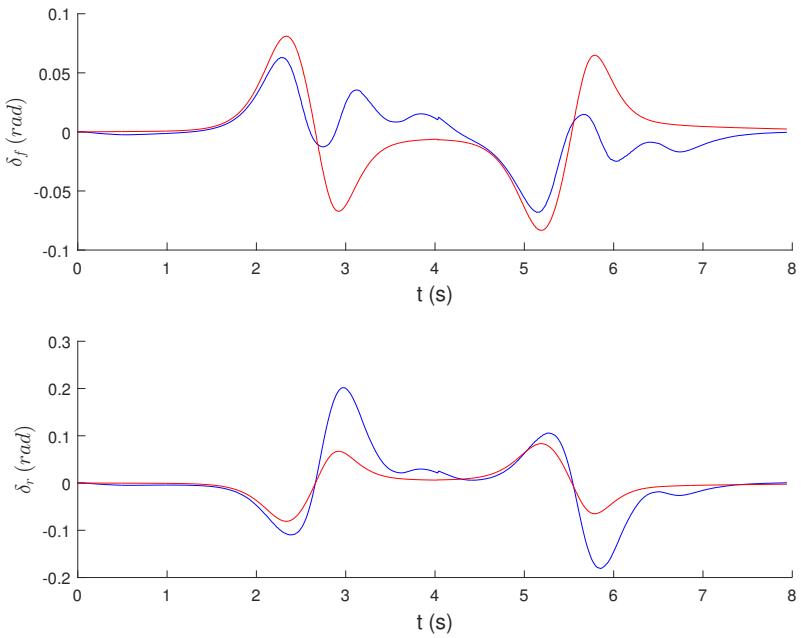



FIGURE 4.18 – Angles de braquage avant et arrière sur un modèle dynamique à 10 DDL avec la loi de contrôle (4.35) en rouge et la loi de contrôle (4.33) en bleu.

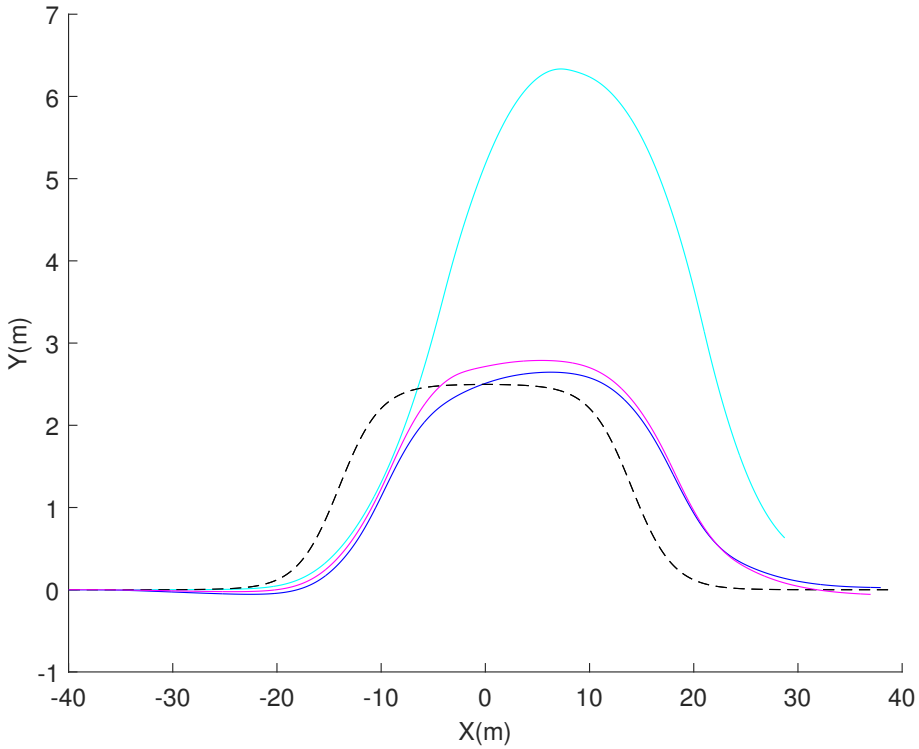



FIGURE 4.19 – Trajectoire parcourue par le véhicule pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$).

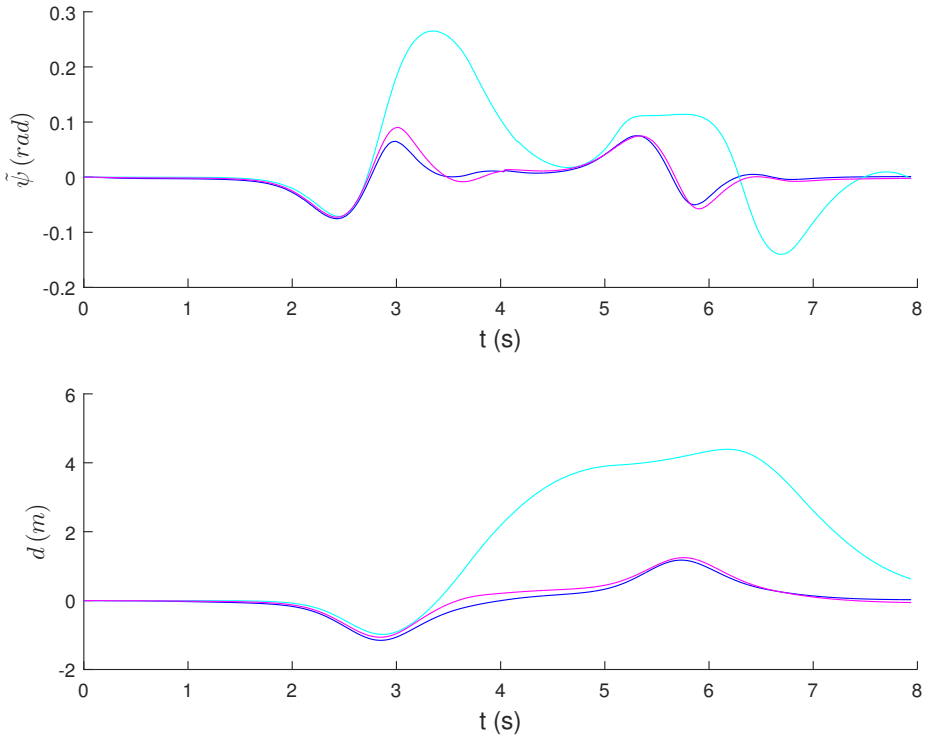



FIGURE 4.20 – Ecarts latéral $d$ et d'orientation $\tilde{\psi}$ pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$).

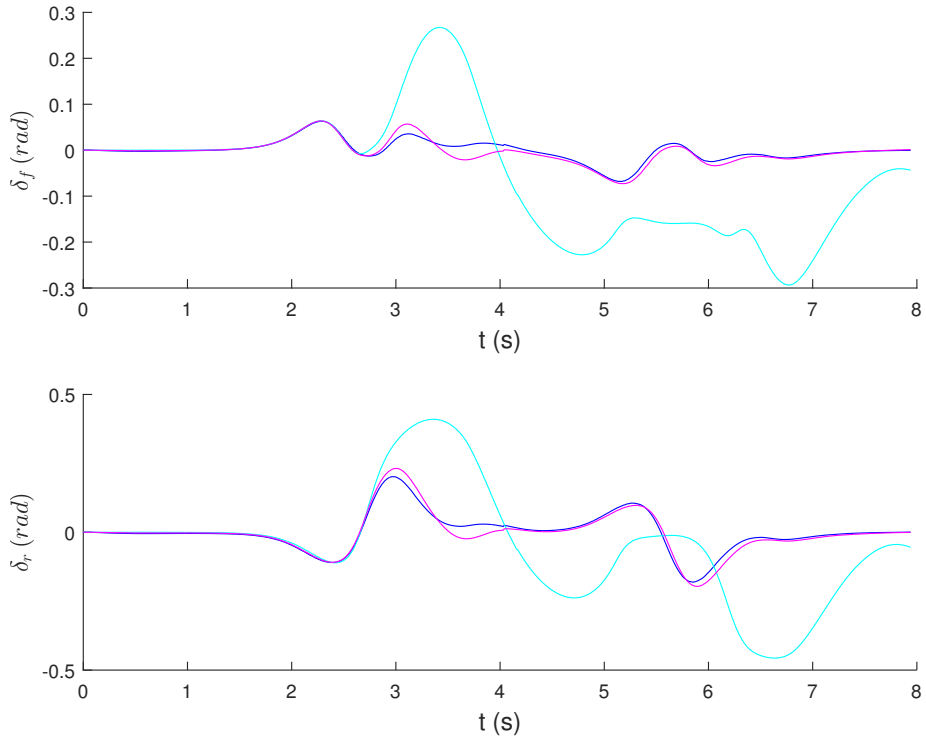



FIGURE 4.21 – Angles de braquage avant et arrière pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$).

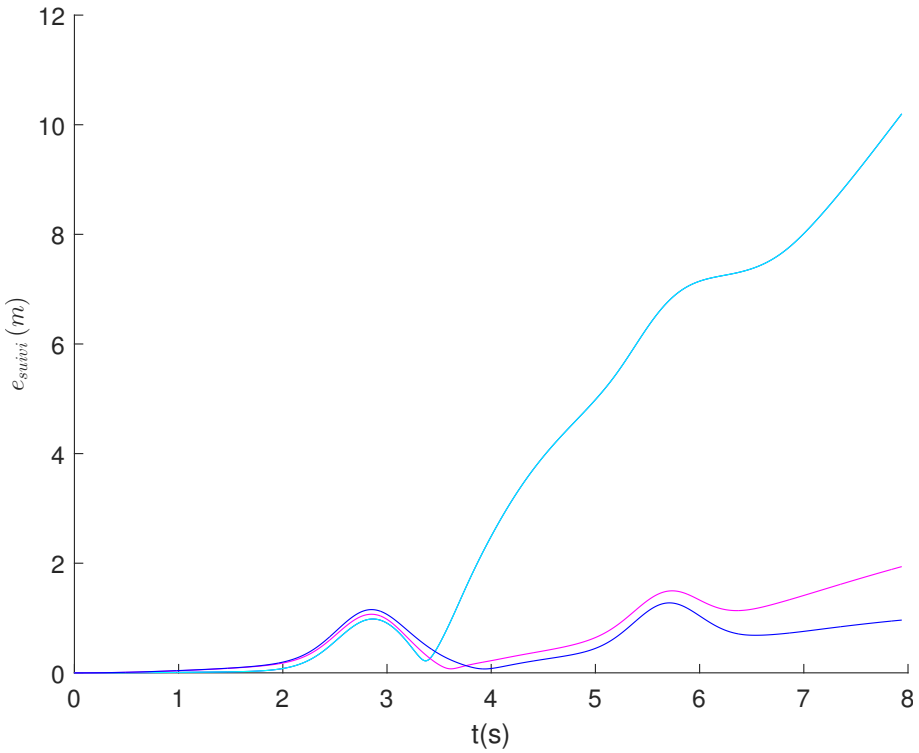



FIGURE 4.22 – Erreurs de suivis pour différents types de surface sur un modèle à 10DDL (en cyan pour $\mu = 0.5$, en magenta pour $\mu = 0.8$ et en bleu pour $\mu = 1$).

Dans un premier temps on teste la loi de contrôle (4.102) sous l'hypothèse de forces latérales linéaires. On considère que le coefficient de rigidité de dérive $C_\beta$ n'est pas connu et on le suppose égal à $C_\beta = 4.95 \times 10^4\, N/rad$ (voir algorithme 9). On appellera dans la suite cette loi de contrôle (C1) et les courbes seront tracées en rouge :

$$(C1) : \text{loi de contrôle } (4.102) \ + \text{ridigité de dérive fixe.}$$

On comparera ensuite cette loi de contrôle avec le cas où la rigidité de dérive est estimée à partir de la méthode détaillée dans le chapitre 3 (voir algorithme 10). On appellera dans la suite cette loi de contrôle (C2) et les courbes seront tracées en vert :

$$(C2) : \text{loi de contrôle } (4.102) \ + \text{ridigité de dérive estimée.}$$

Enfin, pour la dernière simulation on utilise la loi de contrôle (4.116) (voir algorithme 11), prenant en compte un modèle non linéaire de pneumatique, que l'on nomme (C3) et dont les courbes seront tracées en bleu :

$$(C3) : \text{loi de contrôle } (4.116) \ .$$

La fréquence de coupure $f_0$ utilisé pour la loi de contrôle (4.116) est égal à 20 Hz. Le réglage des gains $K_1$ et $K_2$ est le même pour toutes les simulations et on pose $K_1 = 2$ et $K_2 = 5$. Le paramètre $\epsilon$ des matrices $f$ et $g$ (voir équation (4.81)) est égal à 0.5. On pose $V_d = 10\, m/s$.

Pour chaque cas on trace les vitesses longitudinale, latérale et de lacet, l'angle de lacet, erreur de suivi, les angles de braquage avant et arrière, le couple total, les angles de dérives sur chacune des roues et les forces latérales en fonction de l'angle de dérive pour chaque roue. On affiche figure 4.23, la trajectoire suivie par le centre de gravité du véhicule pour chacun des cas détaillés ci-dessus. On calcule l'erreur de suivi $e_{suivi}(t)$ (voir (4.118)), dont les courbes sont représentées figure 4.24.

Sous les conditions décrites précédemment, en observant l'erreur de suivi (voir Figure 4.23 et Figure 4.24) la loi de contrôle (C1) donne les moins bons résultats. Le suivi est près de deux fois meilleur avec la loi de commande (C3). Les commandes à appliquer pour assurer le suivi sont beaucoup plus importantes que dans le cas des commandes (C2) et (C3). Les forces latérales avant et arrière fonction des angles de dérive sont fortement non linéaires dans le cas (C1) (voir courbes rouges à la figure 4.33). Au travers de ces simulations on peut observer la capacité et l'efficacité de la loi de contrôle (C3) à garder le comportement du pneu dans le domaine linéaire. En effet, les angles de dérive sont considérablement diminués (voir Figure 4.34). Avec la commande (C1), les angles de dérive étaient beaucoup plus importants pour les roues avant, c'est-à-dire que le véhicule avait tendance à sous virer, alors qu'avec (C3) les dérives avant et arrière s'équilibrent. Le véhicule change de voie de manière beaucoup plus douce et les commandes à appliquer sont diminuées de moitié (voir figures 4.32, 4.30 et 4.31). La figure 4.35 montre qu'avec (C3) l'accélération latérale maximale est également diminuée : $7.26\, m/s^2$ avec (C1), $6.2\, m/s^2$ avec (C2) et $5.2\, m/s^2$ avec (C3). Le contrôleur (C3) est donc capable d'opérer même avec des valeurs d'accélérations latérales importantes.

A partir de la figure 4.28, on peut constater que les erreurs d'orientation sont plus importants avec la loi de commande (C3). En effet, grâce au second train directeur, l'orientation du véhicule ne suit pas forcément la tangente à la courbe (démarche en crabe) afin de répartir les dérives sur les essieux avant et arrière pour gagner en stabilité. La loi de contrôle (C3) démontre donc des performances de tenue de route plus satisfaisantes et fournit un suivi plus précis.

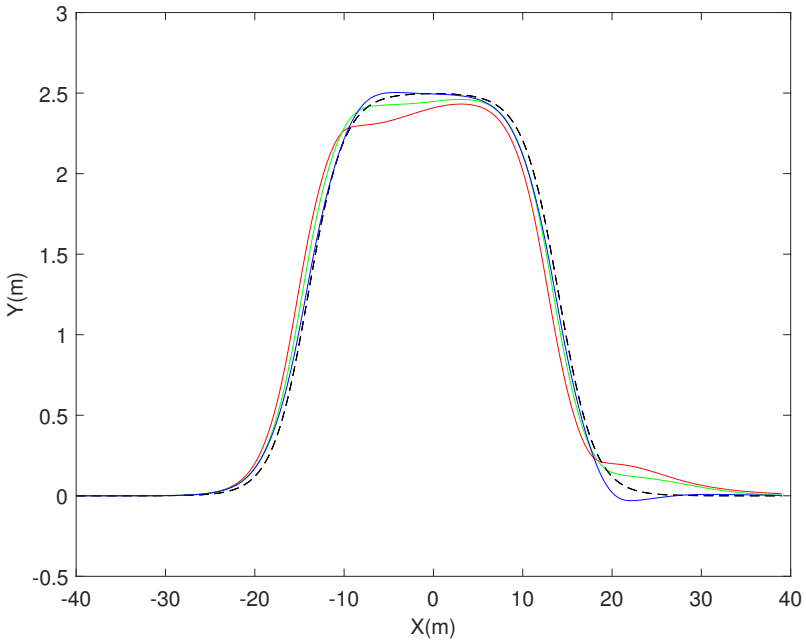



FIGURE 4.23 – Trajectoire de type double changement de voie. Chemin de référence en noir, suivi avec (C1) en rouge, suivi avec (C2) en vert et suivi avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

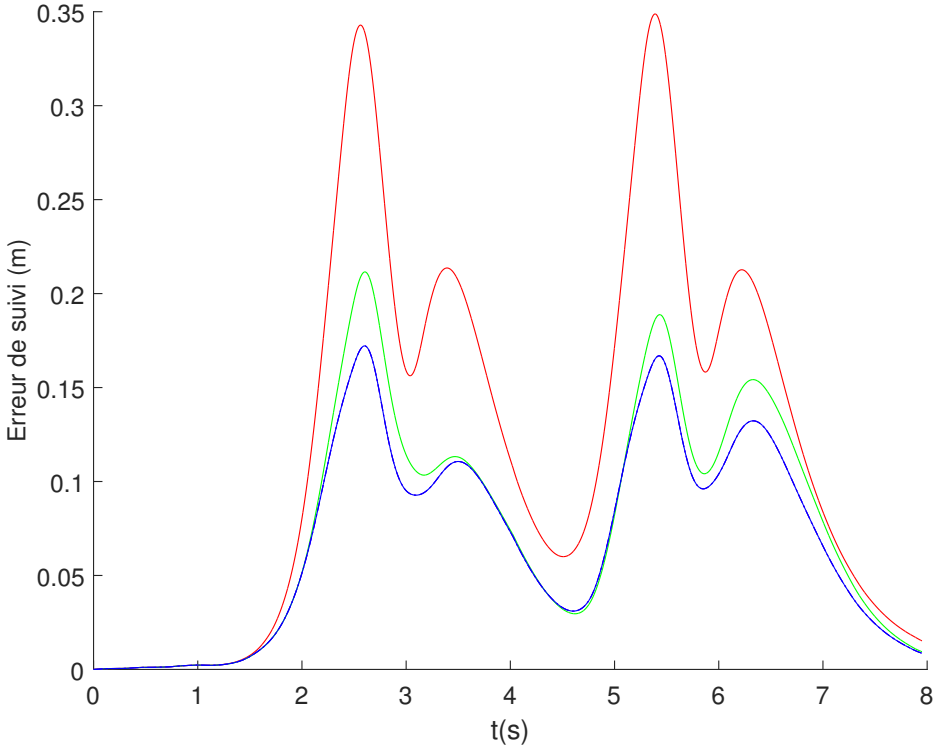



FIGURE 4.24 – Erreur de suivi avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

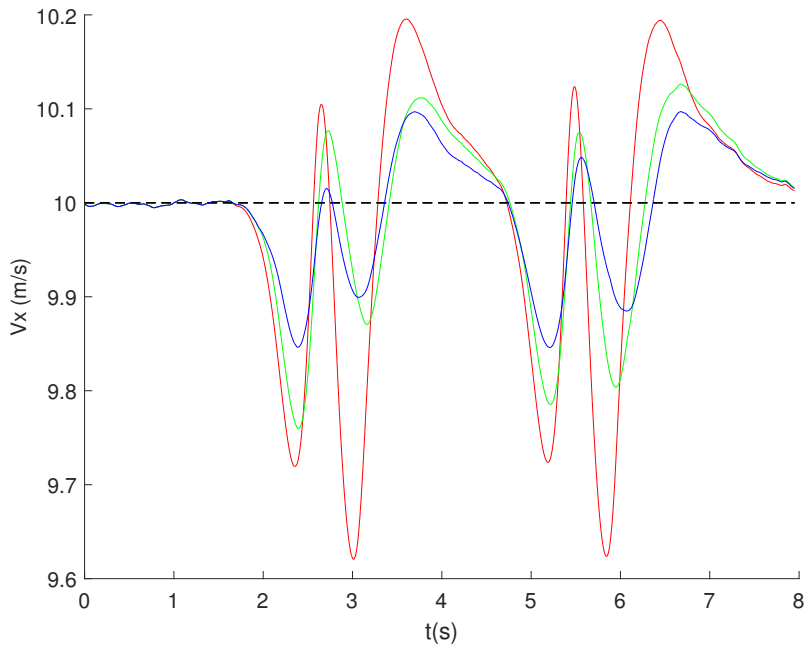



FIGURE 4.25 – Vitesse longitudinale désirée en noir, vitesse longitudinale avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

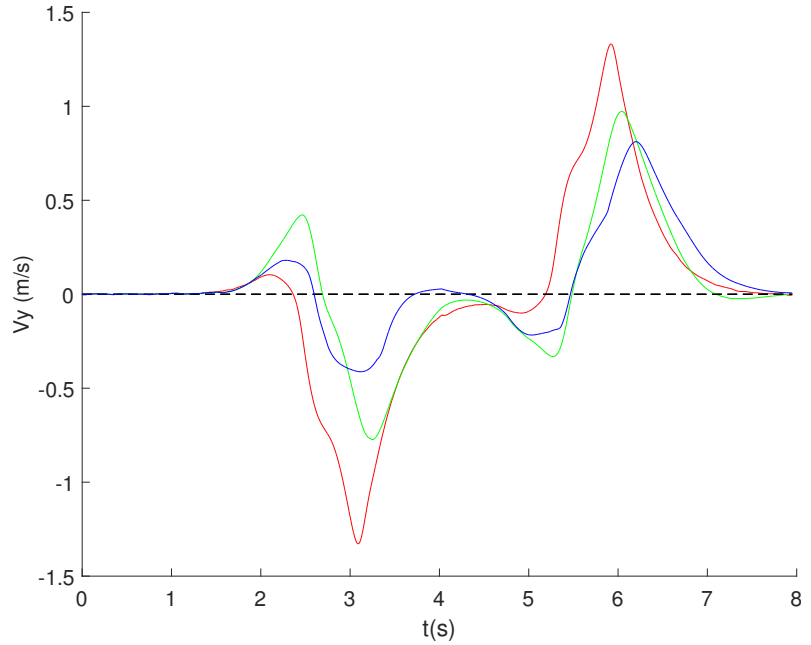



FIGURE 4.26 – Vitesse latérale désirée en noir, vitesse latérale avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

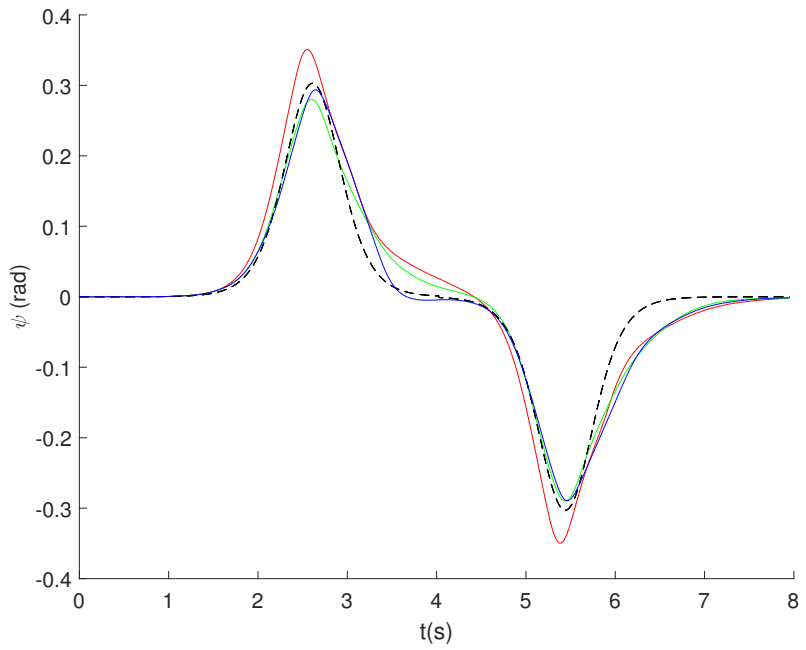



FIGURE 4.27 – Lacet désirée en noir, lacet avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

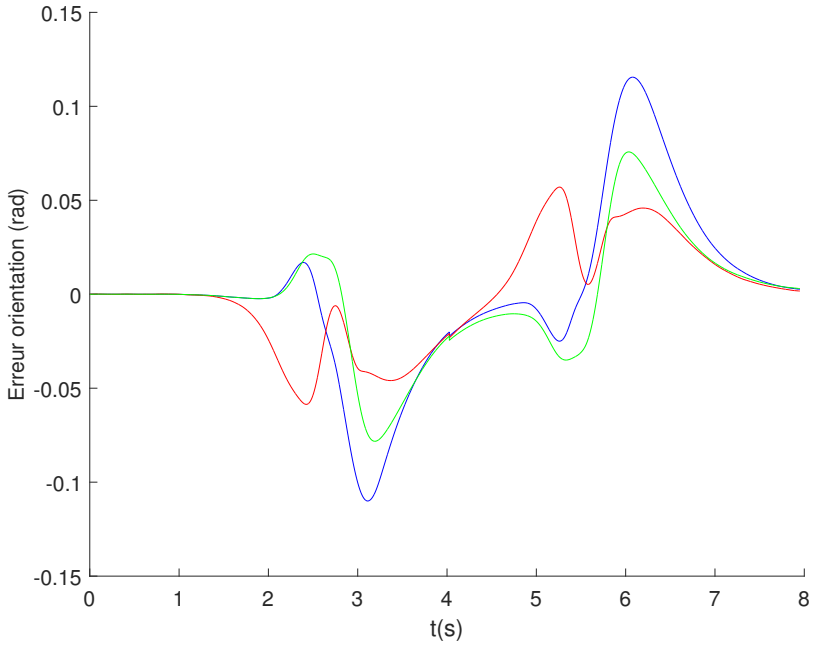



FIGURE 4.28 – Erreur de lacet avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

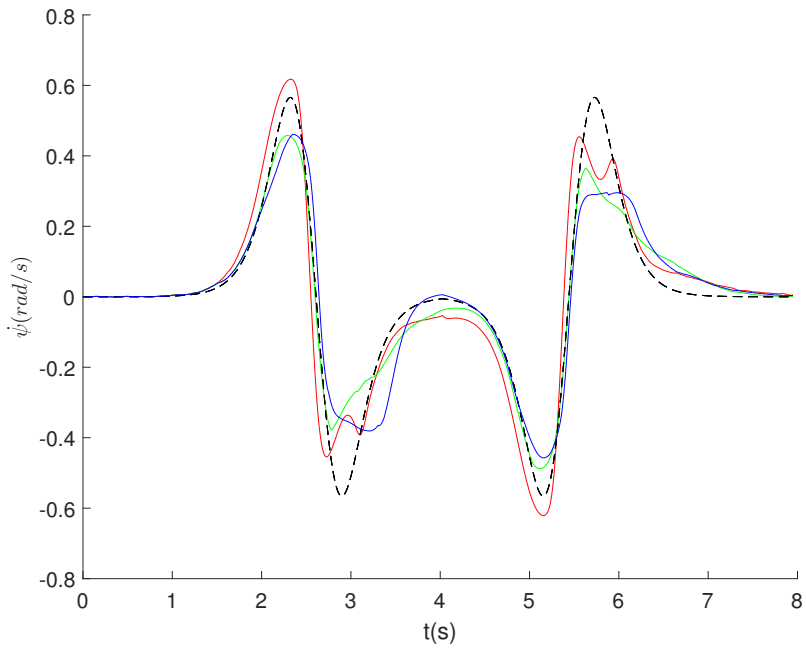



FIGURE 4.29 – Vitesse de lacet désirée en noir, lacet avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

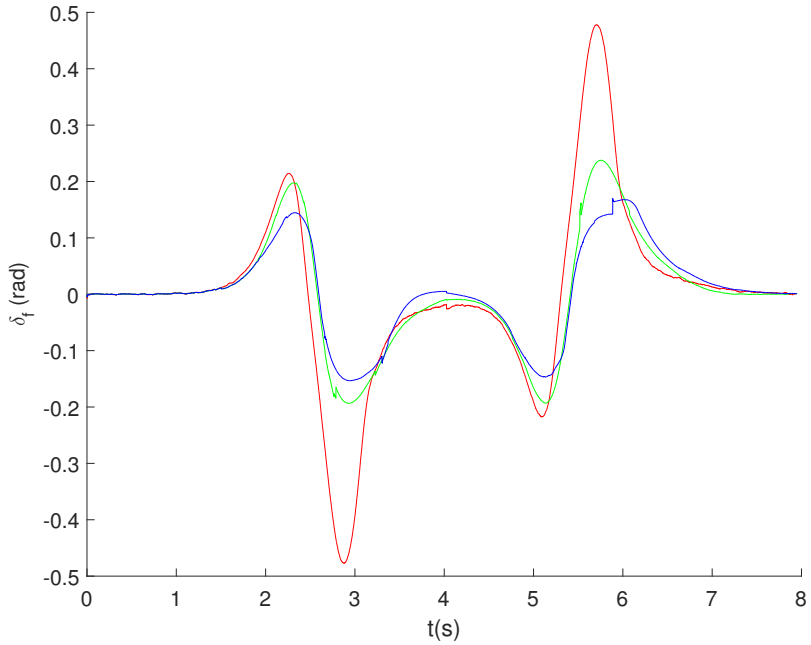



FIGURE 4.30 – Angle de braquage avant avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

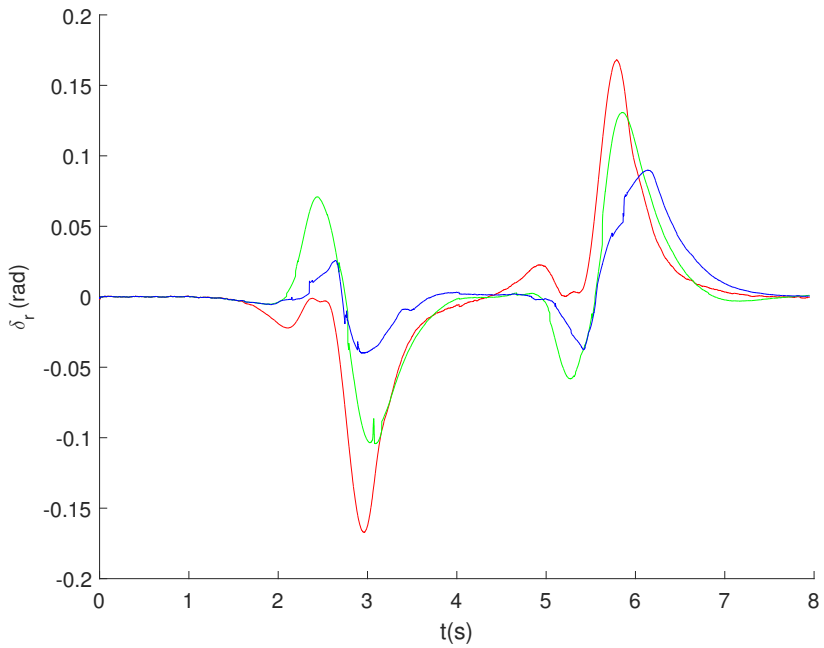



FIGURE 4.31 – Angle de braquage arrière avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

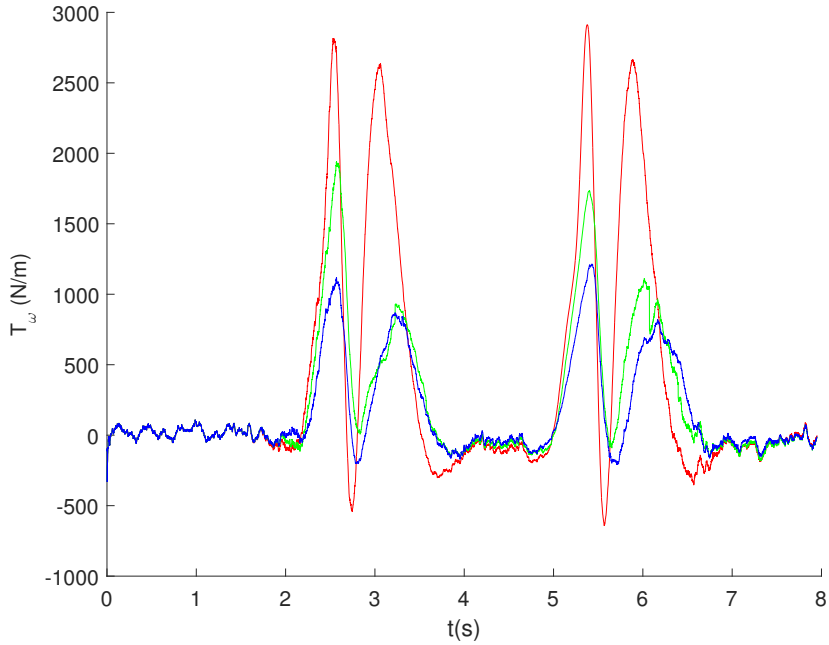



FIGURE 4.32 – Couple total avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

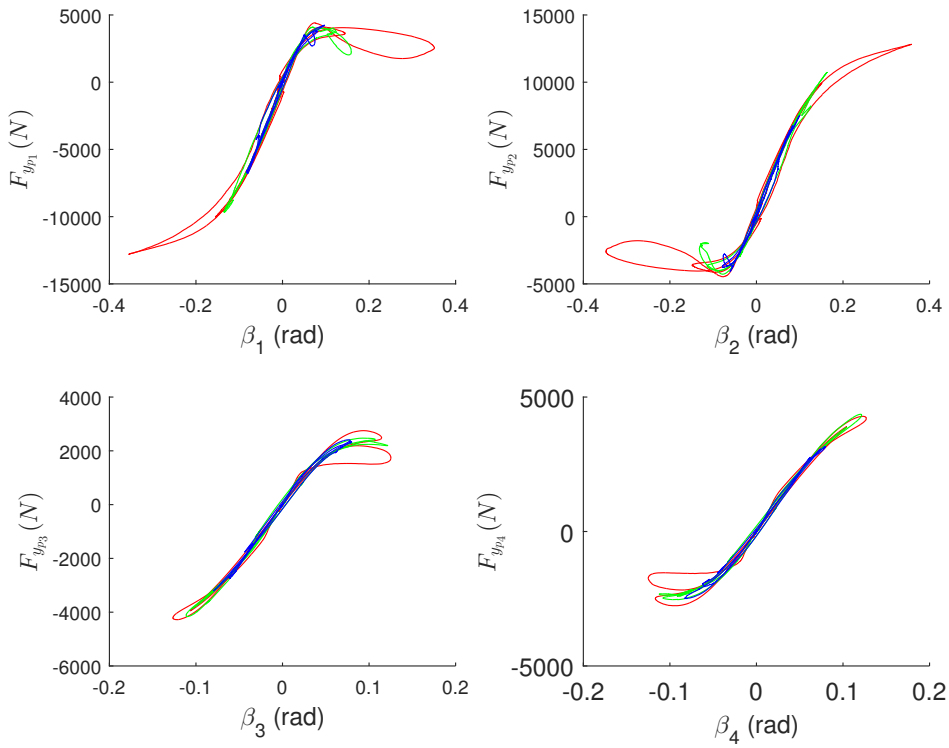



FIGURE 4.33 – Forces latérales en fonction de l'angle de dérive avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

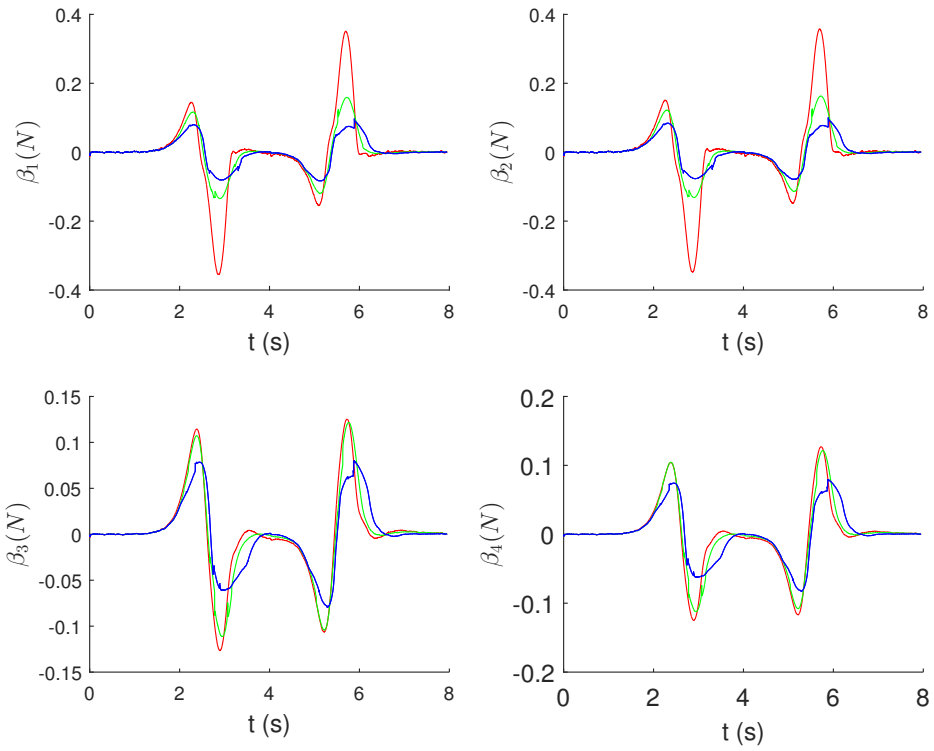



FIGURE 4.34 – Angles de dérive avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

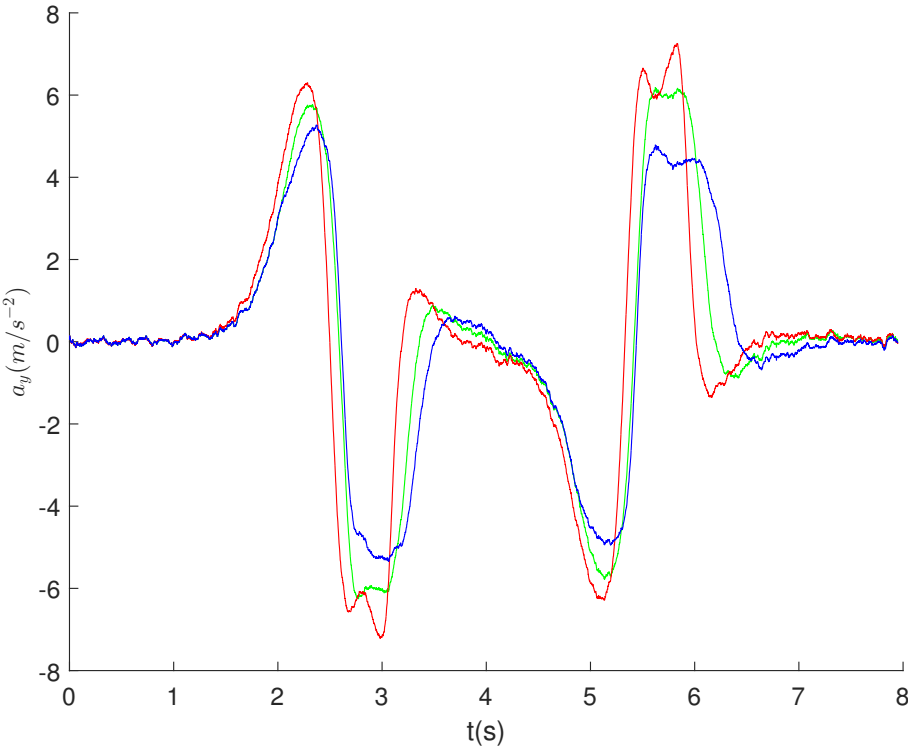



FIGURE 4.35 – Accélération latérale avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

## 4.3 Conclusion et comparaisons de résultats des commandes

On a présenté dans ce chapitre les travaux relatifs à la commande de véhicules à deux trains directeurs. En plus des rappels concernant des concepts théoriques associés aux méthodes classiques de commande, nous avons présenté une nouvelle loi de commande pour les véhicules à deux trains directeurs en présence de glissements. La loi de commande actuellement implémentée sur le véhicule eRider a été comparée à d'autres lois de contrôle. La commande eRider est développée à partir d'un modèle cinématique bicyclette et permet de commander le train directeur avant. La loi de contrôle arrière n'est rien d'autre que l'opposé de la commande du train avant.

Une seconde loi de contrôle, développée dans [Cariou, 2012] a également été testée. Ce contrôleur repose sur une forme chaînée du modèle cinématique à deux trains directeurs. Ces travaux proposent une loi de commande non couplée pour les trains directeurs avant et arrière. La loi pilotant le train directeur avant permet de faire converger l'erreur latéral à zéro et la loi pilotant le train directeur arrière asservi l'erreur angulaire du robot sur une valeur de consigne désirée. L'angle de braquage avant est défini en considérant dans un premier temps l'angle de braquage arrière comme une donnée connue et non comme une entrée de commande. Cela permet au véhicule d'atteindre la trajectoire de référence et de garder le centre de l'essieu arrière sur cette trajectoire. Cette expression est ensuite réinjectée dans la dynamique de l'écart angulaire ce qui nous permet d'avoir une relation entre l'angle de braquage arrière et la dérivée de l'écart angulaire. La loi de contrôle pour le train arrière fournit ainsi un contrôle indépendant pour l'orientation du robot.

Les simulations portées sur ces deux contrôleurs ont montré que lorsque le véhicule est soumis à des dynamiques importantes, le suivi n'était plus satisfaisant (voir figures4.36 et 4.37). Ceci a donc conduit à concevoir des algorithmes de contrôle basés sur des modèles dynamiques de véhicule. Une approche par backstepping a donc été développée et a montré de meilleurs performances que celles données par les lois de commande basées cinématique. Toutefois, cette loi de commande considère que le comportement du pneu est linéaire ce qui

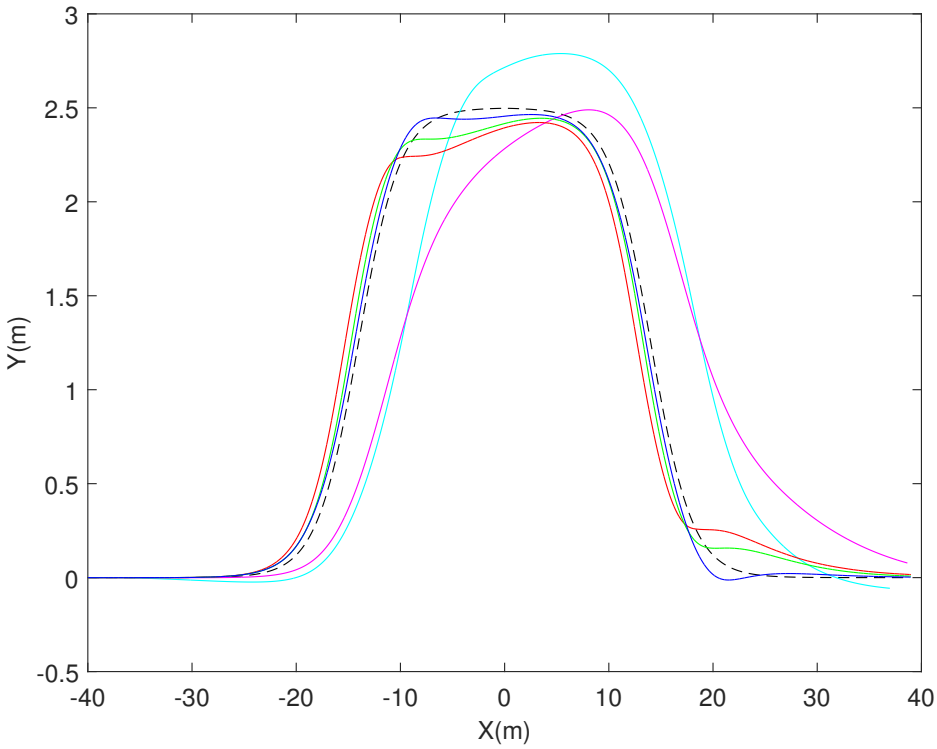



FIGURE 4.36 – Trajectoire de type double changement de voie. Chemin de référence en noir, suivi avec (4.35) en magenta, suivi avec (4.33) en cyan, suivi avec (C1) en rouge, suivi avec (C2) en vert et suivi avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

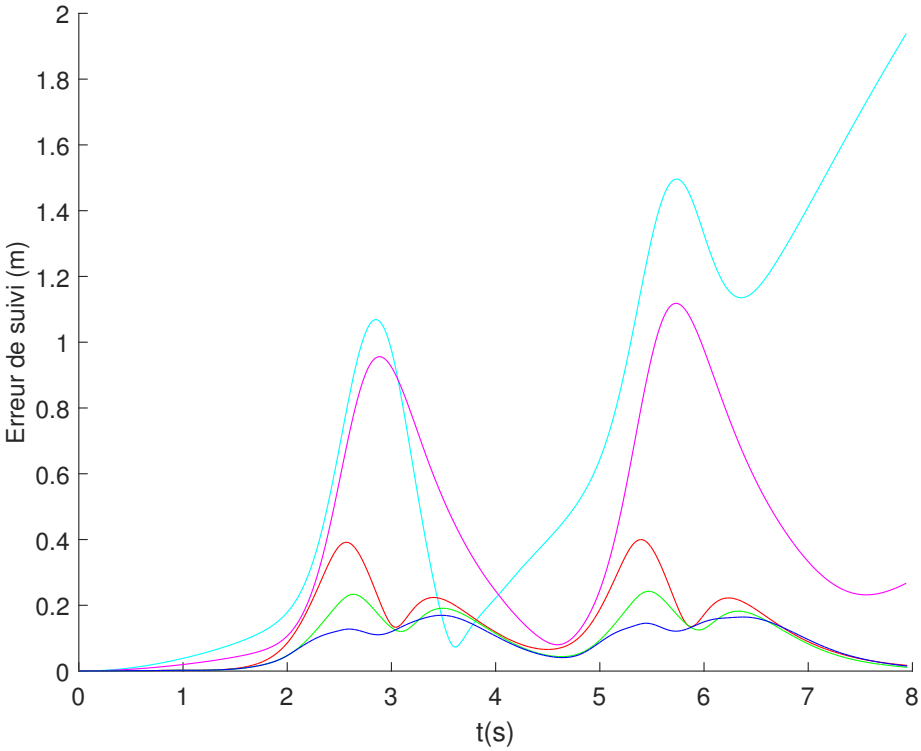



FIGURE 4.37 – Erreur de suivi avec (4.35) en magenta, avec (4.33) en cyan, avec (C1) en rouge, avec (C2) en vert et avec (C3) en bleu, pour $\mu = 0.8$ à $10\,m/s$

n'est pas le cas lorsque le véhicule est soumis à des dynamiques importantes. Ainsi, contrairement aux approches généralement mises en place (hypothèse de comportement linéaire du pneumatique), le contrôleur finalement proposé permet de prendre en compte les mauvaises conditions d'adhérence qui peuvent être rencontrées dans le contexte tout-terrain. Il a été montré en simulation que l'utilisation de cette loi de contrôle a permis de réduire considérablement les dérives subit par le pneumatique, permettant ainsi une meilleure contrôlabilité du véhicule et un suivi de trajectoire plus précis. Cela permet donc de considérer des vitesses d'avance plus rapides lors de déplacements dans des environnements difficiles.

# Chapitre 5

# Conclusion et perspectives

Après une brève introduction et la présentation du cadre de travail, le chapitre 2 présente les différentes possibilités de modélisation du comportement du véhicule. L'étude de ces différentes modélisations a permis de mettre en évidence les avantages et inconvénients de chacun de ces modèles et de choisir le modèle le plus approprié pour l'application de conduite autonome à grande vitesse en milieu tout-terrain. Il a donc été décidé qu'un modèle dynamique à 3DDL était nécessaire pour établir une loi de commande suffisamment satisfaisante dans de telles conditions d'évolution. Cette étude a également permis de développer un modèle de validation en simulation, à 10DDL, plus complet, sur lequel les algorithmes ont été testés. Ainsi, le modèle simplifié permet de concevoir plus facilement une loi de commande et le modèle complet fournit un outil pour simuler les comportements fins du véhicule. Une seconde étude, concernant les différentes méthodes de modélisation du contact entre la roue et le sol a ensuite été considérée. En effet, en milieu naturel ou tout terrain, les véhicules sont généralement soumis à des dérives dues au glissement entre le pneumatique et le sol. Ces perturbations engendrent des écarts non souhaités du véhicule par rapport à la trajectoire de référence. Etant donné le domaine d'évolution du véhicule, il est nécessaire de prendre en compte les glissements dans l'élaboration de la loi de commande. Cette étude bibliographique a permis de mettre en avant le modèle de pneumatique le plus approprié à notre cas d'application et ainsi de faire le choix sur la modélisation de Dugoff. Ce modèle est un bon compromis entre, d'une part, la complexité et le réalisme du modèle, et d'autre part, la rapidité de calcul et la facilité de mise en oeuvre.

Le chapitre 3 est consacré à l'estimation des efforts latéraux au travers de deux paramètres traduisant l'interaction entre le pneumatique et le sol : le coefficient de rigidité de dérive et le coefficient de friction latérale maximale. La connaissance de ces deux paramètres a permis de caractériser le comportement du pneumatique sur l'ensemble des valeurs d'angles de dérive. Cet estimateur est basé sur les mesures de vitesses disponibles grâce à une centrale inertielle, des angles de braquage, des couples aux roues ainsi que des vitesses de rotation des roues. L'algorithme prend en compte les zones linéaires et non linéaire du comportement du pneumatique en utilisant un algorithme considérant 3 modèles de frottements (affine, Dugoff, constante). Il a été constaté qu'avec des entrées bien estimées, l'algorithme donne des valeurs de coefficient de rigidité de dérive et de friction latérale maximale très proches des valeurs réelles et permettent, une fois réinjectées dans le modèle de Dugoff, d'avoir des forces latérales proches des mesures réelles.

Le chapitre 4 s'est penché sur les approches permettant le suivi de trajectoire pour les véhicules à deux trains directeurs. Le contrôle de véhicule à deux trains directeurs a été étudié depuis les années 80 pour améliorer la stabilité et la manoeuvrabilité du véhicule. Il existe une multitude d'approches permettant de traiter ce problème. Ce chapitre a permis de présenter quelques techniques classiques de commande de ces systèmes non linéaires, no-

tamment une technique de mise en forme du système sous forme chaînée d'un modèle basé sur des hypothèses cinématiques. Ce contrôleur, comme la plupart de ceux conçus pour le contrôle de robots mobiles à roues, suppose l'hypothèse de roulement sans glissements. Cette hypothèse est largement réaliste pour des conditions d'applications sur terrains adhérents. Cependant, elle n'est plus valable pour des applications où les glissements ne peuvent être négligés, comme dans le cas où le véhicule évolue sur des terrains naturels à vitesse élevée. Les architectures de commande basées sur une telle hypothèse ne peuvent plus garantir la stabilité du véhicule en présence de glissement, due à la dynamique importante du véhicule et à la saturation des forces disponibles entre le sol et la roue.

La conception d'un contrôleur non linéaire permettant au véhicule à deux trains directeurs de suivre une trajectoire malgré des conditions engendrant des glissements importants a été présentée. L'approche choisie consiste à utiliser un modèle d'interaction des roues avec le sol afin d'estimer les efforts à l'interface de contact comme détaillé au chapitre 3. Nous souhaitons ainsi, par l'intermédiaire du modèle dynamique, maîtriser ces efforts et donc maîtriser le déplacement du véhicule. Ce contrôleur repose sur un modèle dynamique de véhicule à 3DDL couplé à une approche par backstepping. Les performances de ce nouveau contrôleur sont comparées en simulations à la loi de commande actuellement en place dans le véhicule considéré. Un scénario de simulation classique, permettant d'engendrer de fortes dynamiques (trajectoire de type double changement de voie) a permis de valider l'approche et a montré en premier lieu des écarts latéraux très faibles. De plus, il a été observé une diminution importante des angles de dérive et comme attendu, l'utilisation du second train directeur a permis d'orienter le véhicule de manière à maintenir le pneu dans son domaine linéaire. Finalement, cette loi de commande est capable de compenser les glissements subis durant le suivi d'une trajectoire à vitesse élevée.

## Limitations et perspectives techniques

Concernant l'algorithme d'estimation du coefficient de rigidité de dérive et du coefficient de friction latérale maximale, plusieurs axes d'améliorations peuvent être mis en lumière. D'une part, l'importance d'une bonne estimation des forces latérales est nécessaire au préalable. La méthode proposée ici pourrait être améliorée afin que les écarts soient plus faibles lorsque la courbure et l'accélération latérale subies par le véhicule sont importantes. D'autre part, le coefficient de rigidité de dérive dépendant fortement de la charge verticale, il serait judicieux de considérer des seuils en fonction du rapport entre la force latérale et la force verticale. Enfin, un dernier point d'amélioration concerne l'estimation des coefficients de rigidité de dérive et de friction latérale maximale lorsque la force latérale en fonction de l'angle de dérive ne passe pas par l'origine. Ce cas n'est pour l'instant pas géré par l'algorithme présenté dans le chapitre 3.

L'algorithme de commande proposé semble répondre aux attentes du problème initial qui était de commander un véhicule autonome à deux trains directeurs en milieu tout terrain. Même si les simulations sur un modèle à 10DDL donnent un premier aperçu de l'efficacité de la loi de commande développée, les essais expérimentaux sur une plateforme réelle restent nécessaires. En effet, la prise en compte de la dynamique des actionneurs par exemple pourrait changer les performances.

# Bibliographie


[Afghani and Javed, 2013] Afghani, S. and Javed, M. (2013). Academic research international. page 60. 4

[Agati et al., 2003] Agati, P., Brémont, Y., and Gérard, D. (2003). *Mécanique du solide*. Dunod. 14

[Ahn et al., 2009] Ahn, C., Peng, H., and Tseng, E. (2009). Estimation of road friction for enhanced active safety systems : Algebraic approach. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1104–1109. 71

[Amdouni et al., 2013] Amdouni, I., Jeddi, N., and El Amraoui, L. (2013). Optimal control approach developed to four-wheel active steering vehicles. In *2013 5th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)*, pages 1–6. 129

[Andersson, 2005] Andersson, A. (2005). Road-tire friction estimation for afs vehicle control. Master's thesis, Department of Automatic Control Lund Institute of Technology. 70

[Bachmann, 1995] Bachmann, T. (1995). *The importance of the integration of road, tyre and vehicle technologies*. Tyre road interaction series. PIARC. 70

[Badji, 2009] Badji, B. (2009). *Caractérisation du comportement non linéaire en dynamique du véhicule*. PhD thesis, Université de Technologie de Belfort-Montbeliard. 57

[Baffet et al., 2008a] Baffet, G., Charara, A., and Gérald, D. (2008a). An observer of tire–road forces and friction for active security vehicle systems. *Mechatronics, IEEE ASME Transactions on*, 12 :651–661. 76

[Baffet et al., 2008b] Baffet, G., Charara, A., and Lechner, D. (2008b). Estimation of tire-road forces and vehicle sideslip angle. In Aramburo, J. and Trevino, A. R., editors, *Advances in Robotics, Automation and Control*, chapter 8. IntechOpen, Rijeka. 76

[Baffet et al., 2009] Baffet, G., Charara, A., and Lechner, D. (2009). Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness. *Control Engineering Practice*, 17 :1255–1264. 76

[Baffet et al., 2006] Baffet, G., Charara, A., and Stephant, J. (2006). Sideslip angle, lateral tire force and road friction estimation in simulations and experiments. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 903–908. 70, 76

[Bayle, 2015] Bayle, B. (2015). Cours de robotique mobile. Télécom Physique Strasbourg, Université de Strasbourg. 18

[Bishop, 2000] Bishop, R. (2000). A survey of intelligent vehicle applications worldwide. In *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium 2000 (Cat. No.00TH8511)*, pages 25–30. 4

[Bludel and Harty, 2015] Bludel, M. and Harty, D. (2015). *The multibody systems approach to vehicle dynamics (second edition), chapter 5, Tyre Characteristics and Modelling*. Butterworth-Heinemann. 17

[Breuler et al., 1992] Breuler, B., Eichhorn, U., and Roth, J. (1992). Measurement of tyre road friction ahead of the car and inside the tyre. In *Proceedings of the international symposium on AVEC*, pages 347–353. 70

[Brémont and Réocreux, 1995] Brémont, Y. and Réocreux, P. (1995). *Mécanique 1,2,3, Cours et exercices*. collection Sciences Industrielles, Ed. Ellipses, Paris. 14

[Brockett, 1978] Brockett, R. (1978). Feedback invariants for nonlinear systems*. *IFAC Proceedings Volumes*, 11(1) :1115 – 1120. 7th Triennial World Congress of the IFAC on A Link Between Science and Applications of Automatic Control, Helsinki, Finland, 12-16 June. 137

[Campion et al., 1991a] Campion, G., Bastin, G., and D'Andréa-Novel, B. (1991a). Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1184–1189. vol. 2. 14

[Campion et al., 1991b] Campion, G., d'Andrea Novel, B., and Bastin, G. (1991b). Controllability and state feedback stabilizability of non holonomic mechanical systems. In *Advanced Robot Control*, pages 106–124. Springer Berlin Heidelberg. 18

[Canudas de Wit et al., 1995] Canudas de Wit, C., Olsson, H., Astrom, K. J., and Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :419–425. 46

[Canudas de Wit et al., 1996] Canudas de Wit, C., Siciliano, B., and Bastin, G. (1996). *Theory of robot control*. Springer. 5, 125

[Cariou, 2012] Cariou, C. (2012). *Contribution à commande de robot mobile poly-articulé à roues sur sol naturel*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont II. 135, 136, 170

[Cariou et al., 2009] Cariou, C., Lenain, R., and Thuilot, B. (2009). Automatic guidance of a four-wheel-steering mobile robot for accurate field operations. *Journal of Field Robotics*. 130

[Castro et al., 2012] Castro, R., Araújo, R., and Freitas, D. (2012). Real-time estimation of tyre-road friction peak with optimal linear parameterisation. *Control Theory & Applications, IET*, 6 :2257–2268. 71

[Coulter, 1992] Coulter, R. C. (1992). Implementation of the pure pursuit path tracking algorithm. *The Robotics Institute, Carnegie Mellon University*. 129

[Craig, 2004] Craig, J. (2004). *Introduction to robotics : Mechanics and control, Third edition*. Pearson. 22

[Dahl, 1968] Dahl, P. (1968). A solid friction model. Technical report, Technical report. 46

[Dakhlallah et al., 2008] Dakhlallah, J., Glaser, S., and Sebsadji, Y. (2008). Tire-road forces estimation using extended kalman filter and sideslip angle evaluation. pages 4597–4602. 76

[D'Andréa-Novel and Cohen de Lara, 2002] D'Andréa-Novel, B. and Cohen de Lara, M. (2002). *Commande linéaire des systèmes dynamiques*. Ecoles des Mines de Paris. XXIII, XXIV

[De Luca et al., 1998] De Luca, A., Oriolo, G., and Samson, C. (1998). *Feedback control of a nonholonomic car like robot. In Robot motion planning and control, pages 171-253*. Springer. 18

[Denis, 2015] Denis, D. (2015). *Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles reconfigurables en milieu tout-terrain : application à la stabilité dynamique d'engins agricoles*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont II. 51

[Denis et al., 2015] Denis, D., Nizard, A., Thuilot, B., and Lenain, R. (2015). Slip and cornering stiffnesses observation for the stability assessment of off-road vehicles. 70

[Doumiati et al., 2012] Doumiati, M., Charara, A., Victorino, A., and Lechner, D. (2012). Vehicle dynamics estimation using kalman filtering : Experimental validation. *Vehicle Dynamics Estimation using Kalman Filtering : Experimental Validation*. 74, 75, 76

[Doumiati et al., 2008] Doumiati, M., Victorino, A., CHARARA, A., and Lechner, D. (2008). Embedded estimation of the tire road forces and validation in a laboratory vehicle. 76

[Doumiati et al., 2009] Doumiati, M., Victorino, A., Charara, A., and Lechner, D. (2009). Estimation of vehicle lateral tire-road forces : A comparison between extended and unscented kalman filtering. *2009 European Control Conference, ECC 2009*. 76

[Doumiati et al., 2010] Doumiati, M., Victorino, A., Charara, A., and Lechner, D. (2010). A method to estimate the lateral tire force and the sideslip angle of a vehicle : Experimental validation. pages 6936 – 6942. 76

[Dugoff et al., 1970] Dugoff, H., Fancher, P. S., and Segel, L. (1970). An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance. In *SAE Technical Paper*. SAE International. 46, 49, 53

[Eichhorn and Roth, 1992] Eichhorn, U. and Roth, J. (1992). Prediction and monitoring of tyre road friction. In *Proc. FZSZTA, London*. 70

[Ghandour et al., 2010] Ghandour, R., Victorino, A., Doumiati, M., and Charara, A. (2010). Tire/road friction coefficient estimation applied to road safety. pages 1485 – 1490. xiii, 70

[Gillespie, 2000] Gillespie, T. (2000). Fundamentals of vehicle dynamics. 70, 88

[GIM and Nikravesh, 1991] GIM, G. and Nikravesh, P. (1991). An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamics simulations. part 2 : Comprehensive slips. *International Journal of Vehicle Design*, 12 :19–39. 46, 53

[Gustafsson, 1997] Gustafsson, E. (1997). Slip-based estimation of tire-road friction. *Autom.*, 33 :1087–1099. 70

[Hahn et al., 2002] Hahn, J.-O., Rajamani, R., and Alexander, L. (2002). Gps-based real-time identification of tire-road friction coefficient. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 10 :331–343. 71

[Hiraoka et al., 2009] Hiraoka, T., Nishihara, O., and Kumamoto, H. (2009). Automatic path-tracking controller of a four-wheel steering vehicle. *Vehicle System Dynamics*, 47 :1205–1227. 129

[Hu et al., 2015] Hu, C., Wang, R., Wang, Z., Chadli, M., and Yan, F. (2015). Integrated optimal dynamics control of 4ws4wd electric ground vehicles with tire-road frictional coefficient estimation. In *2015 American Control Conference (ACC)*, pages 5426–5431. 71

[Isidori and Ruberti, 1984] Isidori, A. and Ruberti, A. (1984). On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 4(1) :17 – 22. 137

[Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall. XXIII, XXV

[Kiencke and Nielsen, 2000] Kiencke, U. and Nielsen, L. (2000). *Automotive Control Systems*. Springer. 35, 46, 49, 51, 55, 74

[Kokotovic, 1992] Kokotovic, P. (1992). The joy of feedback : nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3) :7–17. 142

[Krid et al., 2016] Krid, M., Amar, F., and Lenain, R. (2016). A new explicit dynamic path tracking controller using generalized predictive control. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15. 130

[Laumond et al., 1998] Laumond, J., Sekhavat, S., and Lamiraux, F. (1998). In *Robot motion planning and control*, volume 229. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, London. 125

[Laumond, 2014] Laumond, J.-p. (2014). *La robotique mobile*. Hermès. 5

[Leith et al., 2005] Leith, D., Leithead, W., and Vilaplana, M. (2005). Robust lateral controller for 4-wheel steer cars with actuator constraints. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. 129

[Lenain, 2005] Lenain, R. (2005). *Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles en présence de glissement*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont II. 27, 130, 131, 137

[Lenain and Thuilot, 2012] Lenain, R. and Thuilot, B. (2012). Mobile robot control on uneven and slippery ground : An adaptive approach based on a multi-model observer. pages 1141–1148. 70

[Lenain et al., 2006] Lenain, R., Thuilot, B., Cariou, C., and Martinet, P. (2006). High accuracy path tracking for vehicles in presence of sliding : application to farm vehicle automatic guidance for agriculural tasks. *Autonomous Robots*, pages 79–97. 62, 130

[Lenain et al., 2010] Lenain, R., Thuilot, B., Cariou, C., and Martinet, P. (2010). Mixed kinematic and dynamic sideslip angle observer for accurate control of fast off-road mobile robots. *Journal of Filed Robotics*, pages 181–196. vol.27, n°2. 28, 130

[Leroquais and d'Andrea-Novel, 1995] Leroquais, W. and d'Andrea-Novel, B. (1995). Transformation of the kinematic models of restricted mobility wheeled mobile robots with a single platform into chain forms. In *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3811–3816 vol.4. 130

[Li and Yu, 2009] Li, B. and Yu, F. (2009). Optimal model following control of four-wheel active steering vehicle. 129

[Li et al., 2020] Li, L., d'Andréa-Novel, B., and Quadrat, A. (2020). Longitudinal and lateral control for four wheel steering vehicles. In *21st IFAC World Congress*. 154

[Li et al., 2019a] Li, L., d'Andréa-Novel, B., Quadrat, A., and S.Thorel (2019a). Procédé de commande d'un véhicule roulant en condition d'adhérence précaire. numéro d'enregistrement du dépôt de brevet : Fr1912015. 154

[Li et al., 2019b] Li, L., d'Andréa-Novel, B., and Thorel, S. (2019b). New online estimation algorithm of lateral tire-road coefficients based on inertial navigation system. In *2019 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC)*, pages 3859–3866. 71

[Lucet et al., 2015] Lucet, E., Lenain, R., and Grand, C. (2015). Dynamic path tracking control of a vehicle on slippery terrain. *Control Engineering Practice*, 42 :60–73. 130

[Madsen et al., 2004] Madsen, K., Nielsen, H., and Tingleff, O. (2004). Methods for nonlinear least squares problems (2nd ed.). page 60. 86

[Micaelli and Samson, LM16] Micaelli, A. and Samson, C. (1993NTLM16). Trajectory tracking for unicycle-type and two-steering-wheels mobile robots. *[Research Report] RR-2097, INRIA*. 140

[Milliken and Milliken, 1995] Milliken, W. F. and Milliken, D. L. (1995). *Race car vehicle dynamics*. SAE International. 88

[M'Sirdi et al., 2005] M'Sirdi, N., Rabhi, A., Zbiri, N., and Delanne, Y. (2005). Vehicle–road interaction modelling for estimation of contact forces. *Vehicle System Dynamics*, 43 :403–411. 76

[Murray et al., 1994] Murray, R. M., Li, Z., and Sastry, S. S. (1994). A mathematical introduction to robotic manipulation. *CRC press*. Chapitre 6. 17

[Murray and Sastry, 1991] Murray, R. M. and Sastry, S. S. (1991). Steering nonholonomic systems in chained form. In *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1121–1126 vol.2. 129, 130

[Nijmeijer and van der Schaft, 1990] Nijmeijer, H. and van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag New York. 18

[Ollero et al., 1997] Ollero, A., Garcia, A., Martínez, J., and Mandow, A. (1997). Fuzzy tracking methods for mobile robots. 129

[Pacejka, 1996] Pacejka, H. (1996). Magic formula tyre model with transient properties. *Vehicle System Dynamics*, pages 234–249. 27. viii, 49, 56, 59, 60, 79

[Pacejka, 2006] Pacejka, H. B. (2006). *Tyre and Vehicle Dynamics (Second Edition)*. Butterworth-Heinemann. viii, xiii, 46, 52, 57, 65, 70, 92

[Parent, 2004] Parent, M. (2004). From drivers assistance to full automation for improved efficiency and better safety. volume 5, pages 2931 – 2934 Vol.5. 5

[Petrov, 2009] Petrov, P. (2009). Nonlinear path following for a bi-steerable vehicle. In *Information technologies and control*. 129

[Polack, 2018] Polack, P. (2018). *Consistency and stability of hierarchical planning and control systems for autonomous driving*. PhD thesis, Mines ParisTech. 63

[Pommier, 2005] Pommier, S. (2005). *Préparation aux Agrégations de Mécanique et de Génie Mécanique : Dynamique des systèmes de solides*. ENS Cachan. 14, XII, XIV

[Pruski, 2014] Pruski, A. (2014). *Robotique mobile : la planification de trajectoire*. Hermès. 5

[Rajamani, 2014] Rajamani, R. (2014). *Vehicle dynamics and control*. Springer. vii, viii, 17, 27, 35, 47, 61

[Ray, 1997] Ray, L. (1997). Nonlinear tire force estimation and road friction identification : Simulation and experiments. *Autom.*, 33 :1819–1833. 70

[Sampei et al., 1991] Sampei, M., Tamura, T., Itoh, T., and Nakamishi, M. (1991). Path tracking control of trailer-like mobile robot. *IEEE RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pages 193–198. 131, 137

[Samson, 1992] Samson, C. (1992). Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot. *Proc. Int. Conf. ICARCV'92, RO-13.1*. Singapore. 126

[Samson, 1995] Samson, C. (1995). Control of chained systems. application to path following and time-varying point stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 64–77. vol 40(1). 129, 130, 131, 133

[Senatore and Sharifzadeh, 2018] Senatore, A. and Sharifzadeh, M. (2018). Estimation of tyre-road friction during abs braking for snow and ice conditions. 71

[Sharifzadeh et al., 2016] Sharifzadeh, M., Akbari, A., Timpone, F., and Daryani, R. (2016). Vehicle tyre/road interaction modeling and identification of its parameters using real-time trust-region methods. *IFAC Proceedings Volumes*, 49 :111–116. 71

[Snider, 2009] Snider, J. M. (2009). Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking. *The Robotics Institute, Carnegie Mellon University*. 129

[Sordalen, 1993] Sordalen, O. J. (1993). Conversion of the kinematics of a car with n trailers into a chained form. In *[1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 382–387 vol.1. 129, 130

[Su, 1982] Su, R. (1982). On the linear equivalents of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2(1) :48 – 52. 137

[Svendenius and Wittenmark, 2003] Svendenius, J. and Wittenmark, B. (2003). Brush tire model with increased flexibility. In *2003 European Control Conference (ECC)*, pages 1863–1868. 46, 52

[Tanelli et al., 2008] Tanelli, M., Piroddi, L., and Savaresi, S. (2008). Real-time identification of tire-road friction conditions. In *IET Control Theory and Applications*. 71

[Thrun et al., 2006] Thrun, S., Montemerlo, M., Dahlkamp, H., Stavens, D., Aron, A., Diebel, J., Fong, P., Gale, J., Halpenny, M., Hoffmann, G., and et al. (2006). Stanley : The robot that won the darpa grand challenge : Research articles. *J. Robot. Syst.*, 23(9) :661–692. 27, 129

[Thuilot et al., 2004] Thuilot, B., Bom, J., Marmoiton, F., and Martinet, P. (2004). Accurate automatic guidance of an urban electric vehicle relying on a kinematic gps sensor. *IFAC Proceedings Volumes*, 37 :155–160. 129

[Thuilot et al., 2002] Thuilot, B., Cariou, C., Martinet, P., and Berducat, M. (2002). Automatic guidance of a farm tractor relying on a single cp-dgps. *Autonomous Robots 13(1,*, pages 53–71. 131

[Uchanski, 2001] Uchanski, M. (2001). *Road Friction Estimation for Automobiles Using Digital Signal Processing Methods*. PhD thesis, University of California, Berkeley. 70

[Villagra, 2006] Villagra, J. (2006). *Conception optimisée de lois de commande et de paramètres pour les organes de liaison au sol*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris. 62

[Wang et al., 2016] Wang, R., Yin, G., Zhuang, J., Zhang, N., and Chen, J. (2016). The path tracking of four-wheel steering autonomous vehicles via sliding mode control. In *2016 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC)*, pages 1–6. 129

[Wu et al., 2007] Wu, J., Tang, H., Li, S., and Fang, W. (2007). Improvement of vehicle handling and stability by integrated control of four wheel steering and direct yaw moment. *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference, CCC 2007*. 129

[Yakub and Mori, 2015] Yakub, F. and Mori, Y. (2015). Comparative study of autonomous path-following vehicle control via model predictive control and linear quadratic control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D Journal of Automobile Engineering*, 229. xiii, 70

[Yang et al., 2014] Yang, J., Chen, W., and Wang, Y. (2014). Estimate lateral tire force based on yaw moment without using tire model. *ISRN Mechanical Engineering*, 2014 :1–8. 76, 78

[Yingmin Jia, 2000] Yingmin Jia (2000). Robust control with decoupling performance for steering and traction of 4ws vehicles under velocity-varying motion. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3) :554–569. xiii, 70

[Yun and Sarkar, 1996] Yun, X. and Sarkar, N. (1996). Dynamic feedback control of vehicles with two steerable wheels. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 3105–3110 vol.4. 129

[Zhang et al., 2007] Zhang, J., Zhang, Y., Chen, L., and Yang, J. (2007). A fuzzy control strategy and optimization for four wheel steering system. In *2007 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety*, pages 1–6. 129

# Annexe A

# Notations

Les indices $\square_i$ pour $i \in \{f, r\}$ correspondent à l'essieu avant et arrière respectivement et les indices $\square_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ indiquent une variable liée à la roue avant gauche, $\square_2$ à la roue avant droite, $\square_3$ à la roue arrière gauche et $\square_4$ à la roue arrière droite.

## A.1 Notations générales de mécanique

| | | |
|---|---|---|
| $[c] = (\vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c)$ | sans | Base rattachée au repère $\mathscr{R}_c$, (B.2). |
| $[e] = (\vec{i}_e, \vec{j}_e, \vec{k}_e)$ | sans | Base rattachée au repère $\mathscr{R}_e$ |
| $\mathcal{D}$ | sans | Torseur dynamique. |
| $[i] = (\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$ | sans | Base inertielle, rattachée au repère $\mathscr{R}_i$, (B.1). |
| $G$ | sans | Centre de gravité et point du repère véhicule $\mathscr{R}_c$. |
| $G_0$ | sans | Projection verticale de $G$ sur l'axe $(M_1M_2)$. |
| $G_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ | sans | Origine des repères $\mathscr{R}_{p_i}$ . |
| $\vec{G}$ | sans | $\vec{G} = \overrightarrow{OG}$ |
| $G^{[i]}$ | sans | Composante du vecteur $\vec{G}$ dans la base $[i]$. |
| $\underline{\underline{J}}_G$ | sans | Tenseur d'inertie. |
| $M_1$ | sans | Centre de l'essieu avant. |
| $M_2$ | sans | Centre de l'essieu arrière. |
| $\mathcal{M}_G$ | $N.m$ | Moment du torseur des actions mécaniques extérieures au point $G$. |
| $O$ | sans | Point fixe du repère inertiel $\mathscr{R}_i$. |
| $P$ | sans | Point mobile quelconque. |
| $[p_i] = (\vec{i}_{p_i}, \vec{j}_{p_i}, \vec{k}_{p_i})$ | sans | Base rattachée au repère $\mathscr{R}_{p_i}$ associé à la jante et au pneumatique $i$. |
| $\vec{P}$ | sans | $\vec{P} = \overrightarrow{OP}$ |
| $\mathcal{Q}$ | sans | Espace des configurations de dimension $n$. |
| $Q_i$ | sans | Point de contact entre la roue $i$ et le sol. |
| $\vec{\mathcal{R}}$ | sans | Résultante du torseur des actions mécaniques. |
| $\mathscr{R}_c$ | sans | Repère du véhicule (car). |
| $\mathscr{R}_e$ | sans | Repère qui diffère du repère $\mathscr{R}_c$ par l'absence d'angle de roulis et de tangage. L'origine de ce repère est située au niveau du sol suivant la projection perpendiculaire du point milieu du train arrière. |
| $\mathscr{R}_f$ | sans | Repère de Frenet. |
| $[r_f] = (\vec{\tau}, \vec{eta}, \vec{k}_f)$ | sans | Base rattachée au repère $\mathscr{R}_f$ |
| $\mathscr{R}_i$ | sans | Repère inertiel. |
| $[r_i] = (\vec{i}_{r_i}, \vec{j}_{r_i}, \vec{k}_{r_i})$ | sans | Base rattachée au repère $\mathscr{R}_i$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{R}_{p_i}$ | sans | Repère attaché au point de pivotement de direction de la roue $i$. |
| $\mathscr{R}_r$ | sans | Repère attaché à une roue. |
| $R_x(\theta)$ | sans | Matrice de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe $\vec{i}$, (B.23). |
| $R_y(\phi)$ | sans | Matrice de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe $\vec{j}$, (B.22). |
| $R_z(\psi)$ | sans | Matrice de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe $\vec{k}$, (B.19). |
| $T_{[b]}^{[a]}$ | sans | Matrice de changement de base, $[b]$ projetée dans $[a]$, (B.3). |
| $T_\psi$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $R_G$ à $R_i$ avec juste une rotation de lacet |
| $T_\phi$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $R_G$ à $R_i$ avec juste une rotation de tangage |
| $T_\theta$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $R_G$ à $R_i$ avec juste une rotation de roulis |
| $T_{[c]}^{[i]}$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $\mathscr{R}_c$ à $\mathscr{R}_i$ |
| $T_{[e]}^{[c]}$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $\mathscr{R}_e$ à $\mathscr{R}_c$ |
| $T_{[e]}^{[r_i]}$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $\mathscr{R}_e$ à $\mathscr{R}_{r_i}$ |
| $T_{[p_i]}^{[r_i]}$ | sans | Matrice de passage permettant de passer du repère $\mathscr{R}_{p_i}$ à $\mathscr{R}_{r_i}$ |
| $\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}$ | $s^{-1}$ | Dérivation par rapport à un repère $\mathscr{R}_i$. |
| $\vec{V}(P/\mathscr{R}_c)$ | $m.s^{-1}$ | Vecteur vitesse relatif du point $P$ par rapport à $\mathscr{R}_c$, (B.6). |
| $V^{[c]}$ | sans | Composante du vecteur quelconque $\vec{V}$ dans la base $[c]$. |
| $V^{[i]}$ | sans | Composante du vecteur quelconque $\vec{V}$ dans la base $[i]$. |
| $\vec{V}_f$ | $m.s^{-1}$ | Vecteur vitesse du centre de gravité de la roue avant par rapport à $\mathscr{R}_i$. |
| $\vec{V}_r$ | $m.s^{-1}$ | Vecteur vitesse du centre de gravité de la roue arrière par rapport à $\mathscr{R}_i$. |
| $\vec{V}(P/\mathscr{R}_i)$ | $m.s^{-1}$ | Vecteur vitesse absolue du point $P$ par rapport à $\mathscr{R}_i$, (B.5-B.8) |
| $\vec{V}(P \in \mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)$ | $m.s^{-1}$ | Vecteur vitesse d'entrainement au point $P$, (B.7). |
| $\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}_i)$ | $m.s^{-2}$ | Vecteur d'accélération absolue de $G$, (B.14-B.16). |
| $\vec{\delta}_A$ | sans | Torseur dynamique. |
| $\Lambda$ | $rad.s^{-1}$ | Matrice anti-symétrique dans la cas plan, (B.20). |
| $\Lambda(\Omega)$ | $rad.s^{-1}$ | Matrice anti-symétrique d'une rotation dans l'espace, (B.12). |
| $\overrightarrow{\Omega}_{(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)}$ | $rad.s^{-1}$ | Vecteur de vitesse de rotation instantanée de $[c]$ par rapport à $[i]$. |
| $\vec{\sigma}_G$ | sans | Moment cinétique au point $G$. |

## A.2 Paramètres du véhicule (valeurs numériques partie 2.4)

| | | |
|---|---|---|
| $h$ | $m$ | Hauteur du centre de gravité |
| $I_r$ | $km.m^2$ | Inertie de la roue autour de l'axe $\vec{j}_p$ |
| $I_x$ | $kg.m^2$ | Moment d'inertie total par rapport à l'axe vertical $\vec{i}_c$ |
| $I_y$ | $kg.m^2$ | Moment d'inertie total par rapport à $\vec{j}_c$ |
| $I_z$ | $kg.m^2$ | Moment d'inertie total par rapport à l'axe vertical $\vec{k}_c$ |
| $l$ | $m$ | Empattement |

| | | |
|---|---|---|
| $l_i$ | $m$ | Demi-empattement (distance entre le centre de l'essieu et le centre de gravité) |
| $L$ | $m$ | Voie (distance entre les deux roues d'un essieu). Voir Figure 2.18. |
| $L_1$ | $m$ | Demi-voie : distance entre la roue avant gauche et le centre de l'essieu avant |
| $L_2$ | $m$ | Demi-voie : distance entre la roue avant droite et le centre de l'essieu avant |
| $L_3$ | $m$ | Demi-voie : distance entre la roue arrière gauche et le centre de l'essieu arrière |
| $L_4$ | $m$ | Demi-voie : distance entre la roue arrière droite et le centre de l'essieu arrière |
| $m$ | $kg$ | Masse totale du véhicule |
| $m_s$ | $kg$ | Masse suspendue du véhicule |
| $m_r$ | $kg$ | Masse des roues |
| $m^\star$ | $kg$ | Masse virtuelle |
| $r$ | $m$ | Rayon libre des roues |
| $r_e$ | $m$ | Rayon effectif de la roue |
| $r_l$ | $m$ | Rayon sous charge des roues |

## A.3 Notations liées à l'état et entrées du véhicule

| | | |
|---|---|---|
| $\dot{G}^{[i]}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse absolue du centre de gravité du véhicule exprimé dans la base inertielle $[i]$. |
| $T_\omega$ | unité | Couple total appliqué aux roues |
| $V^{[c]}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse absolue du centre de gravité du véhicule exprimé dans la base attachée au véhicule $[c]$. |
| $V_G$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse du centre de gravité telle que $V_G = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}$. |
| $V_x$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse longitudinale absolue du centre de gravité $G$ du véhicule exprimée dans $[c]$, (B.11). |
| $V_{x_p}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse linéaire de la roue dans $[r]$. |
| $V_{x_f}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse longitudinale de la roue avant dans $[c]$. |
| $V_{x_r}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse longitudinale de la roue arrière $[c]$. |
| $\dot{V}_x$ | $m.s^{-2}$ | Dérivée de la vitesse longitudinale du centre de gravité $G$ du véhicule, (B.15-B.18). |
| $V_y$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse latérale absolue du centre de gravité $G$ du véhicule exprimée dans $[c]$, (B.11). |
| $V_{y_f}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse latérale de la roue avant |
| $V_{y_r}$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse latérale de la roue arrière |
| $\dot{V}_y$ | $m.s^{-2}$ | Dérivée de la vitesse latérale du centre de gravité $G$ du véhicule, (B.15-B.18). |
| $V_z$ | $m.s^{-1}$ | Vitesse verticale absolue du centre de gravité $G$ du véhicule exprimée dans $[c]$, (B.11). |
| $\dot{V}_z$ | $m.s^{-2}$ | Dérivée de la vitesse verticale du centre de gravité $G$ du véhicule, (B.15-B.18). |
| $X, Y, U$ | mixte | Etat, sortie, commande du système. |
| $x$,$y$,$z$ | $m$ | Position du centre de gravité $\overrightarrow{OG}$ dans le repère inertiel $[i]$. |
| $\delta_f$ | $rad$ | Angle de braquage de la roue avant. |
| $\delta_r$ | $rad$ | Angle de braquage de la roue arrière. |
| $\theta$ | $rad$ | Angle de roulis. |
| $\dot{\theta}$ | $rad.s^{-1}$ | Vitesse de roulis. |
| $\ddot{\theta}$ | $rad.s^{-2}$ | Accélération de roulis. |
| $\phi$ | $rad$ | Angle de tangage. |

| | | |
|---|---|---|
| $\dot{\phi}$ | $rad.s^{-1}$ | Vitesse de tangage. |
| $\ddot{\phi}$ | $rad.s^{-2}$ | Accélération de tangage. |
| $\psi$ | $rad$ | Angle de lacet |
| $\dot{\psi}$ | $rad.s^{-1}$ | Vitesse de lacet |
| $\omega$ | $rad.s^{-1}$ | Vitesse de rotation des roues |
| $\ddot{\psi}$ | $rad.s^{-2}$ | Accélération de lacet |

## A.4 Notations liées aux pneumatiques

| | | |
|---|---|---|
| $C_{b_i}$ | Nm | Couples de freinage appliqués aux roues. |
| $C_{m_i}$ | Nm | Couples moteurs appliqués aux roues. |
| $C_{x_i}$ | Nm | Moment de renversement appliqué au point $Q_i$. |
| $C_{y_i}$ | Nm | Moment de résistance au roulement appliqué au point $Q_i$. |
| $C_{z_i}$ | Nm | Moment d'auto-alignement appliqué au point $Q_i$. |
| $G_f$ | sans | Centre de gravité roue avant. |
| $G_r$ | sans | Centre de gravité roue arrière. |
| $G_1$ | sans | Centre de gravité roue avant gauche. |
| $G_2$ | sans | Centre de gravité roue avant droite. |
| $G_3$ | sans | Centre de gravité roue arrière gauche. |
| $G_4$ | sans | Centre de gravité roue arrière droite. |
| $F_{aero}$ | N | Force aérodynamique exprimée dans $\mathscr{R}_e$. |
| $F_{r_i}$ | N | Force de rappel du ressort composant la suspension entre le châssis et la roue. |
| $F_{s_i}$ | N | Efforts de suspension entre le châssis et les roues. |
| $F_{u_i}$ | N | Force de rappel du ressort représentant la souplesse du pneumatique. |
| $F_{v_i}$ | N | Force d'amortissement composant la suspension entre le châssis et la roue. |
| $F_{x_i}$ | N | Efforts longitudinaux dus aux pneus exprimés dans $\mathscr{R}_c$. |
| $F_{x_{p_i}}$ | N | Efforts longitudinaux dus aux pneus exprimés dans le repère pneumatique $\mathscr{R}_{p_i}$. |
| $F_{y_i}$ | N | Efforts latéraux dus aux pneus exprimés dans $\mathscr{R}_c$. |
| $F_{y_{p_i}}$ | N | Efforts latéraux dus aux pneus exprimés dans le repère pneumatique $\mathscr{R}_{p_i}$. |
| $F_{z_{p_i}}$ | N | Efforts verticaux exprimés dans $\mathscr{R}_{p_i}$. |
| $F_{z_i}$ | N | Efforts verticaux exprimés dans $\mathscr{R}_c$. |
| $\alpha_i$ | rad | Angle entre l'axe longitudinal du véhicule et la direction du vecteur vitesse au point $G_i$ du véhicule. |
| $\beta_i$ | rad | Angle de dérive du véhicule, défini comme l'angle entre l'axe longitudinal du pneu et la direction du vecteur vitesse au point $G_i$ du véhicule. |
| $\gamma_i$ | rad | Angle de carrossage des roues (permet d'apprécier l'inclinaison du pneumatique par rapport au sol dans un plan vertical). |
| $\mu$ | sans | Coefficient de friction du sol. |
| $C_\beta$ | $N/rad$ | Coefficient de rigidité de dérive. |
| $C_\sigma$ | $N/rad$ | Coefficient de rigidité longitudinale. |
| $k_{s_i}$ | $N/m$ | Raideur du ressort des suspensions. |
| $l_i$ | $m$ | Longueur du ressort des suspensions. |
| $l_0$ | $m$ | Longueur à vide du ressort des suspensions. |
| $k_{u_i}$ | $N/m$ | Raideur du ressort modélisant les roues. |
| $r_i$ | $m$ | Longueur du ressort modélisant les roues. |
| $r_0$ | $m$ | Longueur à vide du ressort modélisant les roues. |

## A.5 Autres notations

| | | |
|---|---|---|
| $\rho_a$ | $kg/m^3$ | Masse volumique de l'air . |
| $C_x$ | sans | Coefficient de traînée aérodynamique. |
| $S$ | $m^2$ | Surface frontale du véhicule. |
| $s$ | $m$ | Abscisse curviligne. |
| $g$ | $9.81\ m\,s^{-2}$ | Accélération de la pesanteur. |
| $\nabla$ | ... | Gradient. |
| $[...]$ | ... | Crochet de Lie (voir définition 2.2.3). |
| $\wedge$ | ... | Produit vectoriel. |
| $^T$ | ... | Transposée. |
| $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ | ... | Dérivée temporelle. |
| $X' = \frac{dX}{ds}$ | ... | Dérivée par rapport à l'abscisse curviligne $s$. |
| $X^{\text{noisy}}$ | ... | Mesure bruitée de $X$. |
| $\hat{X}$ | ... | Estimation de $X$ à partir de mesures bruitées $X^{\text{noisy}}$. |
| $\mathcal{V}$ | ... | Fonction de Lyapunov. |
| $\eta$ | ... | Bruit de mesure. |
| $\bar{\eta}$ | ... | Moyenne du bruit de mesure. |
| $\sigma_\eta$ | ... | Écart-type du bruit |

# Annexe B

# Notions de mécanique pour la modélisation du véhicule

## B.1 Bases et repères

Les *points* sont définis sur un espace *affine* qui utilise des *repères*. Les vecteurs et particulièrement les vecteurs vitesses, accélérations ou forces sont définis sur des espaces *vectoriels* qui utilisent des *bases*.

La *base orthonormée* du repère inertielle sera notée sous forme d'une *matrice ligne des vecteurs de la base*,

$$[i] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix} . \tag{B.1}$$

avec $\vec{i}_i$ vers le nord, $\vec{j}_i$ l'ouest et $\vec{k}_i$ la verticale. La base orthonormée du repère attaché au véhicule sera notée

$$[c] \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_c & \vec{j}_c & \vec{k}_c \end{pmatrix} , \tag{B.2}$$

avec $\vec{i}_c$ l'avant du véhicule, $\vec{j}_c$ vers la gauche et $\vec{k}_c$ la verticale. Tout *vecteur* $\vec{V}$ peut être décrit dans l'une ou l'autre des bases.

$$\begin{cases} V_x^{[i]} \triangleq \vec{i}_i \cdot \vec{V} , \\ V_y^{[i]} \triangleq \vec{j}_i \cdot \vec{V} , \\ V_z^{[i]} \triangleq \vec{k}_i \cdot \vec{V} , \\ V^{[i]} \triangleq \begin{pmatrix} V_x^{[i]} \\ V_y^{[i]} \\ V_z^{[i]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_i \\ \vec{j}_i \\ \vec{k}_i \end{pmatrix} \cdot \vec{V} = [i]^T \cdot \vec{V} , \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_x^{[c]} \triangleq \vec{i}_c \cdot \vec{V} , \\ V_y^{[c]} \triangleq \vec{j}_c \cdot \vec{V} , \\ V_z^{[c]} \triangleq \vec{k}_c \cdot \vec{V} , \\ V^{[c]} \triangleq \begin{pmatrix} V_x^{[c]} \\ V_y^{[c]} \\ V_z^{[c]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_c \\ \vec{j}_c \\ \vec{k}_c \end{pmatrix} \cdot \vec{V} = [c]^T \cdot \vec{V} . \end{cases}$$

L'écriture du vecteur se fera en faisant le *produit* (noté avec $\cdot$) entre une base et une matrice colonne des coordonnées :

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{i}_i \, V_x^{[i]} + \vec{j}_i \, V_y^{[i]} + \vec{k}_i \, V_z^{[i]} = \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}^{[i]} \triangleq [i] \cdot V^{[i]} , \\ \\ \vec{V} = \vec{i}_c \, V_x^{[c]} + \vec{j}_c \, V_y^{[c]} + \vec{k}_c \, V_z^{[c]} = \begin{pmatrix} \vec{i}_c & \vec{j}_c & \vec{k}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}^{[c]} \triangleq [c] \cdot V^{[c]} . \end{cases}$$

Les matrices de changement de bases $T_{[c]}^{[i]}$ ou $T_{[i]}^{[c]}$ sont définies par :

$$\begin{cases} \vec{V} = [i] \cdot V^{[i]} = [i] \cdot T_{[c]}^{[i]} \, V^{[c]} , \\ \vec{V} = [c] \cdot V^{[c]} = [c] \cdot T_{[i]}^{[c]} \, V^{[i]} , \end{cases}$$

avec cette convention, les formules de changement de base et de changement de composantes des vecteurs s'écrivent alors :

$$\begin{cases} [c] = [i] \cdot T_{[c]}^{[i]} \ , \\ [i] = [c] \cdot T_{[i]}^{[c]} \ , \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V^{[i]} = T_{[c]}^{[i]} \, V^{[c]} \ , \\ V^{[c]} = T_{[i]}^{[c]} \, V^{[i]} \ . \end{cases} \tag{B.3}$$

Remarque : $T_{[c]}^{[i]}$ est la matrice de passage de la base [i] vers [c]. Elle permet de passer des composantes dans le sens inverse, c-à-d de [c] à [i].

Il est possible d'exprimer les vecteurs d'une base dans une autre base en utilisant la matrice des cosinus directeurs. En utilisant les notations précédentes nous avons :

$$\begin{cases} \vec{i}_c = \vec{i}_i \left(\vec{i}_i \cdot \vec{i}_c\right) + \vec{j}_i \left(\vec{j}_i \cdot \vec{i}_c\right) + \vec{k}_i \left(\vec{k}_i \cdot \vec{i}_c\right) = \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix} \cdot i_c^{[i]} = [i] \cdot i_c^{[i]} \ , \\ \vec{j}_c = \vec{i}_i \left(\vec{i}_i \cdot \vec{j}_c\right) + \vec{j}_i \left(\vec{j}_i \cdot \vec{j}_c\right) + \vec{k}_i \left(\vec{k}_i \cdot \vec{j}_c\right) = \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix} \cdot j_c^{[i]} = [i] \cdot j_c^{[i]} \ , \\ \vec{k}_c = \vec{i}_i \left(\vec{i}_i \cdot \vec{k}_c\right) + \vec{j}_i \left(\vec{j}_i \cdot \vec{k}_c\right) + \vec{k}_i \left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_c\right) = \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix} \cdot k_c^{[i]} = [i] \cdot k_c^{[i]} \ , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_c^{[i]} \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_i \cdot \vec{i}_c \\ \vec{j}_i \cdot \vec{i}_c \\ \vec{k}_i \cdot \vec{i}_c \end{pmatrix} \ , \\ j_c^{[i]} \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_i \cdot \vec{j}_c \\ \vec{j}_i \cdot \vec{j}_c \\ \vec{k}_i \cdot \vec{j}_c \end{pmatrix} \ , \\ k_c^{[i]} \triangleq \begin{pmatrix} \vec{i}_i \cdot \vec{k}_c \\ \vec{j}_i \cdot \vec{k}_c \\ \vec{k}_i \cdot \vec{k}_c \end{pmatrix} \ , \end{cases}$$

soit en regroupant les vecteurs de la base mobile :

$$[c] = \left(\vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c\right) = \left([i] \cdot i_c^{[i]}, [i] \cdot j_c^{[i]}, [i] \cdot k_c^{[i]}\right) = [i] \cdot \left(i_c^{[i]}, j_c^{[i]}, k_c^{[i]}\right) \ .$$

Finalement, la matrice de changement de base est :

$$T_{[c]}^{[i]} \triangleq \left(i_c^{[i]}, j_c^{[i]}, k_c^{[i]}\right) = \begin{pmatrix} \vec{i}_i \cdot \vec{i}_c & \vec{i}_i \cdot \vec{j}_c & \vec{i}_i \cdot \vec{k}_c \\ \vec{j}_i \cdot \vec{i}_c & \vec{j}_i \cdot \vec{j}_c & \vec{j}_i \cdot \vec{k}_c \\ \vec{k}_i \cdot \vec{i}_c & \vec{k}_i \cdot \vec{j}_c & \vec{k}_i \cdot \vec{k}_c \end{pmatrix} \ , \tag{B.4}$$

et

$$T_{[i]}^{[c]} = \left(T_{[c]}^{[i]}\right)^T \ .$$

La matrice de passage contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base [c] exprimées dans l'ancienne base [i].

Un repère est l'association d'un point de référence et d'une base. Le repère $\mathscr{R}_i \triangleq \{O, [i]\}$ est le repère inertiel avec comme point d'origine $O$ et une base fixe $[i] = \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix}$. Le repère $\mathscr{R}_c \triangleq \{G, [c]\}$ est attaché au centre de gravité $G$ du véhicule et a une base mobile $[c] = \begin{pmatrix} \vec{i}_c & \vec{j}_c & \vec{k}_c \end{pmatrix}$ du véhicule. Le repère $\mathscr{R}_{p_i} \triangleq \{G_i, [p_i]\}$ est attaché au centre de gravité $G_i$ d'une roue $i$ et a une base mobile $[p_i] = \begin{pmatrix} \vec{i}_{p_i} & \vec{j}_{p_i} & \vec{k}_{p_i} \end{pmatrix}$ de cette même roue.

## B.2 Vitesses

### B.2.1 Différents types de vitesses

Soit $P$ et $G$ deux points mobiles se déplaçant par rapport à un repère inertiel $\mathscr{R}_i$. La *vitesse absolue* (ou inertielle) du point $P$ s'exprime alors :

$$\vec{V}(P/\mathscr{R}_i) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\overrightarrow{OP} = \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\overrightarrow{OG} + \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\overrightarrow{GP} \tag{B.5}$$

où $\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}$ est la dérivation temporelle en considérant le repère $\mathscr{R}_i$ fixe. La vitesse du vecteur $\overrightarrow{GP}$ peut s'exprimer avec la loi de Bour dans le repère $\mathscr{R}_c$ par :

$$\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\overrightarrow{GP} = \frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{GP}$$

où $\frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}$ est la dérivation temporelle en considérant le repère $\mathscr{R}_c$ comme fixe et $\overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)$ est le vecteur instantané de la vitesse de rotation de la base $[c]$ par rapport à la base $[i]$. En définissant la *vitesse relative* du point $P$ dans le repère $\mathscr{R}_c$ par

$$\vec{V}(P/\mathscr{R}_c) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\overrightarrow{GP}\,, \tag{B.6}$$

la *vitesse absolue* du point $G$ par

$$\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\overrightarrow{OG}\,,$$

et la *vitesse d'entrainement* au point $P$ avec

$$\vec{V}(P \in \mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \triangleq \vec{V}(G/\mathscr{R}_i) + \overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{GP} \tag{B.7}$$

(en utilisant le signe $\in$ pour la distinguer), alors la *vitesse absolue* du point $P$ est la somme de la *vitesse relative* et de la *vitesse d'entrainement* :

$$\vec{V}(P/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(P/\mathscr{R}_c) + \vec{V}(P \in \mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)\,. \tag{B.8}$$

En tant que vecteur, le vecteur vitesse $\vec{V}(P/\mathscr{R}_i)$ peut s'exprimer dans n'importe quelle base, en particulier $[i]$ ou $[c]$.

### B.2.2 Vitesse d'un point quelconque du véhicule

Si maintenant le point $P$ est attaché au véhicule, la vitesse relative $\vec{V}(P/\mathscr{R}_c) = 0$ et il ne reste que la vitesse d'entrainement. (B.8) devient :

$$\vec{V}(P/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(P \in \mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(G/\mathscr{R}_i) + \overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{GP}\,. \tag{B.9}$$

Pour calculer la vitesse de translation $\vec{V}(G/\mathscr{R}_i)$ de (B.9), on peut exprimer la position du centre de gravité du véhicule $\overrightarrow{OG}$ par un vecteur $\vec{G}$ dans la base $[i]$ :

$$\vec{G} \triangleq \overrightarrow{OG} = [i] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{[i]}\,.$$

Le vecteur vitesse absolue de G peut se projeter dans la base inertielle $[i]$. Les composantes du vecteur vitesse sont alors directement les dérivées des composantes de la position en utilisant un point de dérivation sur la matrice des composantes du vecteur :

$$\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = \dot{x}^{[i]}\,\vec{i}_i + \dot{y}^{[i]}\,\vec{j}_i + \dot{z}^{[i]}\,\vec{k}_i = \begin{pmatrix} \vec{i}_i & \vec{j}_i & \vec{k}_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}^{[i]} = [i] \cdot \dot{G}^{[i]}\,.$$

Ce vecteur vitesse absolue peut aussi s'exprimer dans la base mobile rattachée au véhicule $[c]$. Ce qui se fait en utilisant la formule de changement de base (B.3) :

$$\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = [i] \cdot \dot{G}^{[i]} = \left([c] \cdot T_{[i]}^{[c]}\right) \dot{G}^{[i]} = [c] \cdot \left(T_{[i]}^{[c]}\,\dot{G}^{[i]}\right)\,.$$

Pour simplifier l'écriture, il est possible de nommer

$$V^{[c]} \triangleq T_{[i]}^{[c]}\,\dot{G}^{[i]} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}^{[c]} . \tag{B.10}$$

Les composantes du vecteur vitesse inertielle dans les bases inertielle $[i]$ ou mobile $[c]$ sont donc :

$$\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = [i]\cdot\dot{G}^{[i]} = [c]\cdot V^{[c]} , \tag{B.11}$$

Dans l'équation (B.9), la vitesse induite par la rotation du véhicule est notée par un vecteur $\vec{V}_{\Omega_{(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)}} \triangleq \vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)\wedge\vec{L}$ avec $\vec{L}\triangleq\overrightarrow{GP}$ le vecteur de distance. $\vec{V}_\Omega$ peut s'exprimer dans la base mobile $\mathscr{R}_c$ du véhicule. Pour utiliser un calcul matriciel simple, on peut définir un opérateur matriciel anti-symétrique (appliqué à droite) associé au produit vectoriel $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)\wedge\bullet$ du vecteur de rotation instantané de la base $[c]$ par rapport à la base $[i]$. Il peut être défini par une matrice anti-symétrique exprimée dans la base $[c]$ :

$$\Omega^{[c]}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)\wedge\bullet^{[c]} \triangleq \Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i))\bullet^{[c]} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}\bullet^{[c]} . \tag{B.12}$$

Finalement, nous avons $\vec{V}_{\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)} = [c]\cdot\Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i))\,L^{[c]}$. Dans le repère inertiel $\mathscr{R}_i$ ou mobile $\mathscr{R}_c$, l'équation (B.9) de la vitesse absolue du point $P$ s'exprime de plusieurs façons possibles suivant la base de référence utilisée :

$$\begin{cases} \vec{V}(P/\mathscr{R}_i) = [c]\cdot\left(V^{[c]} + \Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i))\,L^{[c]}\right) = [i]\cdot\left(\dot{G}^{[i]} + T_{[c]}^{[i]}\,\Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i))\,L^{[c]}\right) , \\ \vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = [c]\cdot V^{[c]} = [i]\cdot\dot{G}^{[i]} . \end{cases} \tag{B.13}$$

## B.3 Accélérations du centre de gravité

En tant que vecteur, l'accélération du point $G$ (centre de gravité du véhicule) peut s'exprimer dans différentes bases. Dans $[i]$ la base inertielle, l'accélération du point $G$ est directement la dérivation du vecteur vitesse $\vec{V}(G/\mathscr{R}_i)$, exprimé par les composantes du vecteur $\dot{G}^{[i]}$ dans (B.11), ce qui donne alors

$$\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}_i) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = [i]\cdot\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\dot{G}^{[i]} = [i]\cdot\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}^{[i]} = [i]\cdot\ddot{G}^{[i]} . \tag{B.14}$$

Par contre, il est aussi possible d'utiliser $V^{[c]}$ l'autre expression de la vitesse indiquée dans (B.11). Avec la formule classique de Bour, l'accélération s'écrit en faisant intervenir le produit vectoriel ( [Pommier, 2005] p.17) :

$$\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}_i) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = \frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) + \vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)\wedge\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) .$$

La première dérivation du terme de droite donne

$$\frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\vec{V}(G/\mathscr{R}_i) = \frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}\left([c]\cdot V^{[c]}\right) = [c]\cdot\left(\frac{d^{\mathscr{R}_c}}{dt}V^{[c]}\right) = [c]\cdot\left(\frac{d}{dt}V^{[c]}\right)$$

soit

$$\dot{V}^{[c]} \triangleq \frac{d}{dt}V^{[c]} = \frac{d}{dt}\left(T_{[i]}^{[c]}\,\dot{G}^{[i]}\right) . \tag{B.15}$$

Avec l'opérateur associé au produit vectoriel $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)\wedge\bullet$ indiqué en (B.12), il est alors possible d'écrire l'accélération dans la base mobile $[c]$ du véhicule avec

$$\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}_i) = [c]\cdot\Gamma^{[c]} = [c]\cdot\left(\dot{V}^{[c]} + \Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i))\,V^{[c]}\right) . \tag{B.16}$$

## B.4 Matrice de changement de base et vitesse instantanée de rotation

En dérivant les matrices de changement de base, nous avons la matrice anti-symétrique suivante :

$$T_{[i]}^{[c]}\,T_{[c]}^{[i]} = I_d \;\Rightarrow\; \dot{T}_{[i]}^{[c]}\,T_{[c]}^{[i]} + T_{[i]}^{[c]}\,\dot{T}_{[c]}^{[i]} = 0 \;\Rightarrow\; T_{[i]}^{[c]}\,\dot{T}_{[c]}^{[i]} = -\dot{T}_{[i]}^{[c]}\,T_{[c]}^{[i]}\ .$$

L'accélération du point $G$ peut aussi s'exprimer à partir des composantes $V^{[c]}$, après un simple changement de base (B.3), puis une dérivation, puis le changement de base inverse :

$$\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}_i) = [i]\cdot\frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\left(T_{[c]}^{[i]}\,V^{[c]}\right) = [i]\cdot\left(T_{[c]}^{[i]}\dot{V}^{[c]} + \dot{T}_{[c]}^{[i]}\,V^{[c]}\right) = [c]\cdot\left(\dot{V}^{[c]} + T_{[i]}^{[c]}\,\dot{T}_{[c]}^{[i]}\,V^{[c]}\right)\ .$$

En identifiant l'expression précédente avec la seconde égalité de (B.16), nous avons :

$$\Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)) = T_{[i]}^{[c]}\,\dot{T}_{[c]}^{[i]} = -\dot{T}_{[i]}^{[c]}\,T_{[c]}^{[i]}\ . \tag{B.17}$$

et l'équation (B.15) devient

$$\dot{V}^{[c]} = T_{[i]}^{[c]}\left(\ddot{G}^{[i]} + T_{[c]}^{[i]}\,\dot{T}_{[i]}^{[c]}\,\dot{G}^{[i]}\right) = T_{[i]}^{[c]}\left(\ddot{G}^{[i]} + \Lambda(\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i))\,\dot{G}^{[i]}\right)\ . \tag{B.18}$$

Ainsi, en mesurant les vitesses instantanées de rotation avec des gyromètres, il est possible d'intégrer l'équation différentielle suivante

$$\dot{T}_{[c]}^{[i]} = T_{[c]}^{[i]}\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi de mettre à jour la matrice de changement de base. On peut de cette façon obtenir les angles d'orientation du véhicule pour faire de la navigation inertielle.

## B.5 Rotation dans un plan

Dans le plan $(O,\,\vec{i}_i,\,\vec{j}_i)$ perpendiculaire à l'axe $\vec{k}_i$, la matrice de changement de base (B.4) se simplifie et ne fait apparaitre qu'un seul angle :

$$T_{[c]}^{[i]} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \triangleq R_z(\psi)\ , \tag{B.19}$$

avec $\psi = \widehat{\vec{i}_i, \vec{i}_c}$ l'angle orienté où le premier vecteur est le vecteur de la base de mobile. On remarquera que dans le cas plan le produit de matrices de rotations est commutatif $T_{[c]}^{[i]}\,T_{[p]}^{[c]} = T_{[p]}^{[c]}\,T_{[c]}^{[i]}$.

Dans le cas plan la vitesse instantanée de rotation est $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i) = \dot{\psi}\,\vec{k}_i = \dot{\psi}\,\vec{k}_c$. A partir de (B.12), la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel se simplifie :

$$\Omega(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)^{[c]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}\ ,\quad \Lambda(\Omega_{(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\psi}\,\Lambda\ ,$$

avec

$$\Lambda \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{B.20}$$

En utilisant (B.17), la matrice anti-symétrique $\Lambda$ est associée à la dérivation de la matrice de rotation plane

$$R_z(-\psi)\,\dot{R}_z(\psi) = T_{[i]}^{[c]}\,\dot{T}_{[c]}^{[i]} = \dot{\psi}\,\Lambda\ ,$$

ce qui va simplifier les calculs :

$$\begin{cases} \dot{R}_z(\psi) = \dot{\psi}\,R_z(\psi)\,\Lambda = \dot{\psi}\,\Lambda\,R_z(\psi)\ , \\ \dot{R}_z(-\psi) = -\dot{\psi}\,\Lambda\,R_z(-\psi) = -\dot{\psi}\,R_z(-\psi)\,\Lambda\ . \end{cases} \tag{B.21}$$

De même dans les deux autres plans, respectivement perpendiculaires à $\vec{j}$ des $y$ et $\vec{i}$ des $x$ :

$$R_y(\phi) \triangleq \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}\ , \tag{B.22}$$

$$R_x(\theta) \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ . \tag{B.23}$$

## B.6 Outils mathématiques : Principe fondamental de la dynamique

Les paragraphes suivants sont issus de [Pommier, 2005] (pages 52, 71).
**Enoncé** : Il existe au moins un repère $\mathscr{R}_i$ appelé repère Galiléen, tel que pour tout système matériel $\Sigma$ en mouvement par rapport à $\mathscr{R}_i$, le torseur dynamique $\mathcal{D}$ de $\Sigma$ dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_i$ soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures $\mathcal{T}$ à $\Sigma$. Si l'on note $\bar{\Sigma}$ l'extérieur de $\Sigma$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(\Sigma/\mathscr{R}_i)\} = \left\{\mathcal{T}(\bar{\Sigma} \to \Sigma)\right\}. \tag{B.24}$$

On en déduit donc les théorèmes suivants :

**Théorème de la résultante dynamique** : la résultante du torseur dynamique de $\Sigma$ par rapport à $\mathscr{R}_i$ est égal à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures $\vec{\mathcal{R}}$ à $\Sigma$ :

$$m\,\dot{\vec{V}}(G/\mathscr{R}_i) = \vec{\mathcal{R}}(\bar{\Sigma} \to \Sigma), \tag{B.25}$$

où $m$ est la masse, $G$ le centre de gravité du système $\Sigma$ en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}_i$, $\vec{V}(G/\mathscr{R}_i)$ le vecteur vitesse de $G$ par rapport à $\mathscr{R}_i$ et $\dot{\vec{V}}(G/\mathscr{R}_i) \triangleq \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{V}(G/\mathscr{R}_i)$.

**Théorème du moment dynamique** : le moment en tout point $A$ du torseur dynamique $\vec{\delta}_A$ de $\Sigma$ dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_i$ est égale au moment du torseur des actions mécaniques extérieures $\mathcal{M}_A$ à $\Sigma$ au même point.

$$\vec{\delta}_A(A/\mathscr{R}_i) = \vec{\mathcal{M}}_A(\bar{\Sigma} \to \Sigma). \tag{B.26}$$

De plus, si $A$ est le centre d'inertie $G$ alors :

$$\vec{\delta}_G(\Sigma/\mathscr{R}_i) = \dot{\vec{\sigma}}_G(\Sigma/\mathscr{R}_i) = \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}[\underline{\underline{J}}_G(\Sigma)\,\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)] \tag{B.27}$$

où $\vec{\sigma}_G(\Sigma/\mathscr{R}_i)$ est le moment cinétique, $\dot{\vec{\sigma}}_G(\Sigma/\mathscr{R}_i) = \frac{d^{\mathscr{R}_i}}{dt}\vec{\sigma}_G(\Sigma/\mathscr{R}_i)$, $\underline{\underline{J}}_G$ l'opérateur d'inertie du système $\Sigma$ au point $G$ et $\vec{\Omega}(\mathscr{R}_c/\mathscr{R}_i)$ le vecteur vitesse de rotation de $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_i$.
**Formule de changement de point du moment dynamique :**

$$\vec{\delta}_B(\Sigma/\mathscr{R}_i) = \vec{\delta}_A(\Sigma/\mathscr{R}_i) + m\,\vec{\Gamma}(\Sigma/\mathscr{R}_i) \wedge \overrightarrow{AB}. \tag{B.28}$$

# Annexe C

# Calcul analytique des angles de dérives

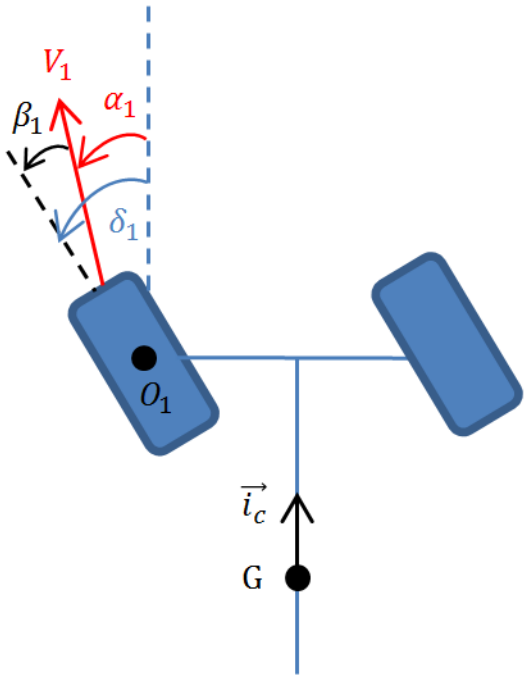



FIGURE C.1 – Angle de dérive avant

D'après la figure C.1, pour une roue quelconque, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le cas d'une modélisation à 4 roues ou $\forall k \in \{f, r\}$ dans le cas d'une modélisation à 2 roues, nous avons :

$$\beta_k = \delta_k - \alpha_k \tag{C.1}$$

où $\alpha_k$ est l'angle que forme le vecteur vitesse $\vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i)$ au point $G_k$ centre de gravité de la $k^{ieme}$ roue avec $\vec{i_c}$ l'axe longitudinal du véhicule. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique. On déduit de la figure C.1 :

$$\tan \alpha_k = \frac{\vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i) \cdot \vec{j_c}}{\vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i) \cdot \vec{i_c}}, \tag{C.2}$$

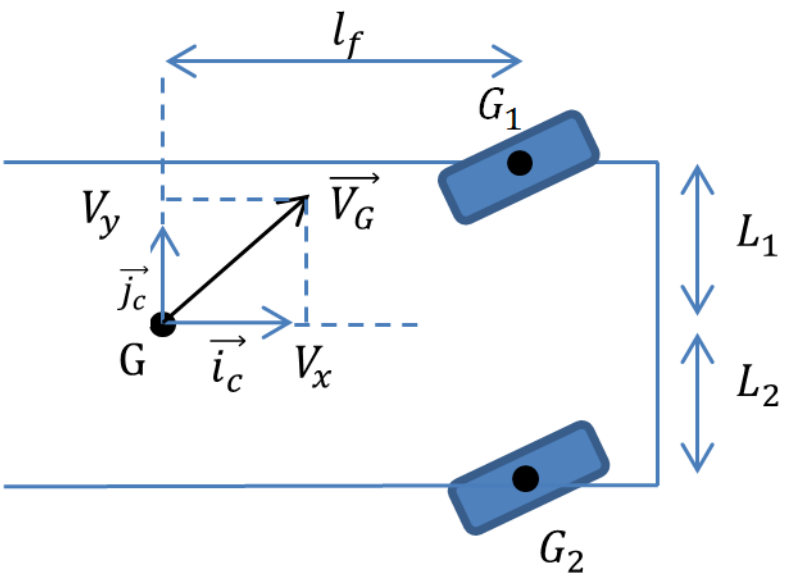



FIGURE C.2 – Schéma de véhicule

Calculons la vitesse $\vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i)$. On considère un modèle de véhicule à 4 roues (voir Figure C.2).

Le mouvement du centre de la roue se décompose en un mouvement de translation lié à la vitesse du centre de gravité $G$ et un mouvement induit par une rotation. Avec les équations (B.10), (B.13) calculons la vitesse au point $G_k$. Pour tout $L_k, \in (L_1, -L_2, L_1, -L_2)$ et $l_k, \in (l_f, l_f, -l_r, -l_r)$

$$\begin{aligned}\vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i) &= \vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i) + \vec{\Omega}_{(c/i)} \wedge \overrightarrow{GG_k} \\ &= \vec{V}(G_k/\mathscr{R}_i) + \dot{\psi}\,\vec{k_c} \wedge (l_k\,\vec{i_c} + L_k\,\vec{j_c}) \\ &= (V_x - L_k\,\dot{\psi})\,\vec{i_c} + (V_y + l_k\,\dot{\psi})\,\vec{j_c}\end{aligned}$$

Ainsi, pour la roue avant gauche, avant droite, arrière gauche et arrière droite, on a respectivement :

$$\begin{cases}\vec{V}(G_1/\mathscr{R}_i) = (V_x - L_1\dot{\psi})\vec{i_c} + (V_y + l_f\dot{\psi})\,\vec{j_c}\,, \\ \vec{V}(G_2/\mathscr{R}_i) = (V_x + L_2\dot{\psi})\vec{i_c} + (V_y + l_f\dot{\psi})\,\vec{j_c}\,, \\ \vec{V}(G_3/\mathscr{R}_i) = (V_x - L_1\dot{\psi})\vec{i_c} + (V_y - l_r\dot{\psi})\,\vec{j_c}\,, \\ \vec{V}(G_4/\mathscr{R}_i) = (V_x + L_2\dot{\psi})\vec{i_c} + (V_y - l_r\dot{\psi})\,\vec{j_c}\,.\end{cases} \tag{C.3}$$

Donc (C.2) donne :

$$\begin{cases}\alpha_1 = \arctan\left(\dfrac{V_y + l_f\dot{\psi}}{V_x - L_1\dot{\psi}}\right)\,, \\ \alpha_2 = \arctan\left(\dfrac{V_y + l_f\dot{\psi}}{V_x + L_2\dot{\psi}}\right)\,, \\ \alpha_3 = \arctan\left(\dfrac{V_y - l_r\dot{\psi}}{V_x - L_1\dot{\psi}}\right)\,, \\ \alpha_4 = \arctan\left(\dfrac{V_y - l_r\dot{\psi}}{V_x + L_2\dot{\psi}}\right)\,,\end{cases} \tag{C.4}$$

et les angles de dérives :

$$\begin{cases} \beta_1 = \delta_1 - \arctan\left(\dfrac{V_y + l_f\dot{\psi}}{V_x - L_1\dot{\psi}}\right), \\ \beta_3 = \delta_2 - \arctan\left(\dfrac{V_y + l_f\dot{\psi}}{V_x + L_2\dot{\psi}}\right), \\ \beta_3 = \delta_3 - \arctan\left(\dfrac{V_y - l_r\dot{\psi}}{V_x - L_1\dot{\psi}}\right), \\ \beta_4 = \delta_4 - \arctan\left(\dfrac{V_y - l_r\dot{\psi}}{V_x + L_2\dot{\psi}}\right). \end{cases} \tag{C.5}$$

Si on considère un modèle bicyclette, alors $L_1 = L_2 = 0$ et $\vec{V}(G_1/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(G_2/\mathscr{R}_i) \triangleq \vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i)$, $\vec{V}(G_3/\mathscr{R}_i) = \vec{V}(G_4/\mathscr{R}_i) \triangleq \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i)$. On note $V_{x_f}$ et $V_{y_f}$ les vitesses suivant $\vec{i}_c$ et $\vec{j}_c$ de la roue avant et $V_{x_r}$ et $V_{y_r}$ les vitesses suivant $\vec{i}_c$ et $\vec{j}_c$ de la roue arrière :

$$\begin{cases} V_{x_f} \triangleq \vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i)\cdot\vec{i}_c = V_x\,, \\ V_{y_f} \triangleq \vec{V}(G_f/\mathscr{R}_i)\cdot\vec{j}_c = V_y + l_f\,\dot{\psi}\,, \\ V_{x_r} \triangleq \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i)\cdot\vec{i}_c = V_x\,, \\ V_{y_r} \triangleq \vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i)\cdot\vec{j}_c = V_y - l_r\,\dot{\psi}\,. \end{cases}$$

Donc (C.2) donne :

$$\begin{cases} \alpha_f = \arctan\left(\dfrac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x}\right), \\ \alpha_r = \arctan\left(\dfrac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x}\right), \end{cases} \tag{C.6}$$

et les angles de dérive :

$$\begin{cases} \beta_f = \delta_f - \arctan\left(\dfrac{V_y + l_f\,\dot{\psi}}{V_x}\right), \\ \beta_r = \delta_r - \arctan\left(\dfrac{V_y - l_r\,\dot{\psi}}{V_x}\right). \end{cases} \tag{C.7}$$

# Annexe D

# Asservissement du modèle cinématique de type bicyclette augmenté sur un chemin

Soit $(\mathscr{C})$ une courbe du plan et soient $\mathscr{R}_i = (\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$ un repère fixe, $\mathscr{R}_c = (\vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k}_c)$ un repère lié au véhicule et $\mathscr{R}_f$, indexé par l'abscisse curviligne $s$ sur la courbe, est tel que le vecteur unitaire $\vec{\tau}_p$ soit tangent à la courbe (voir Figure D.1). Soit $G_r$ un point du véhicule de coordonnées $(x_r, y_r)$ exprimées dans la base $\mathscr{R}_i$. On cherche à établir les équations de mouvement de $G_r$ par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

## D.1 Modélisation dans le repère de Frenet

### D.1.1 Repère de Frenet

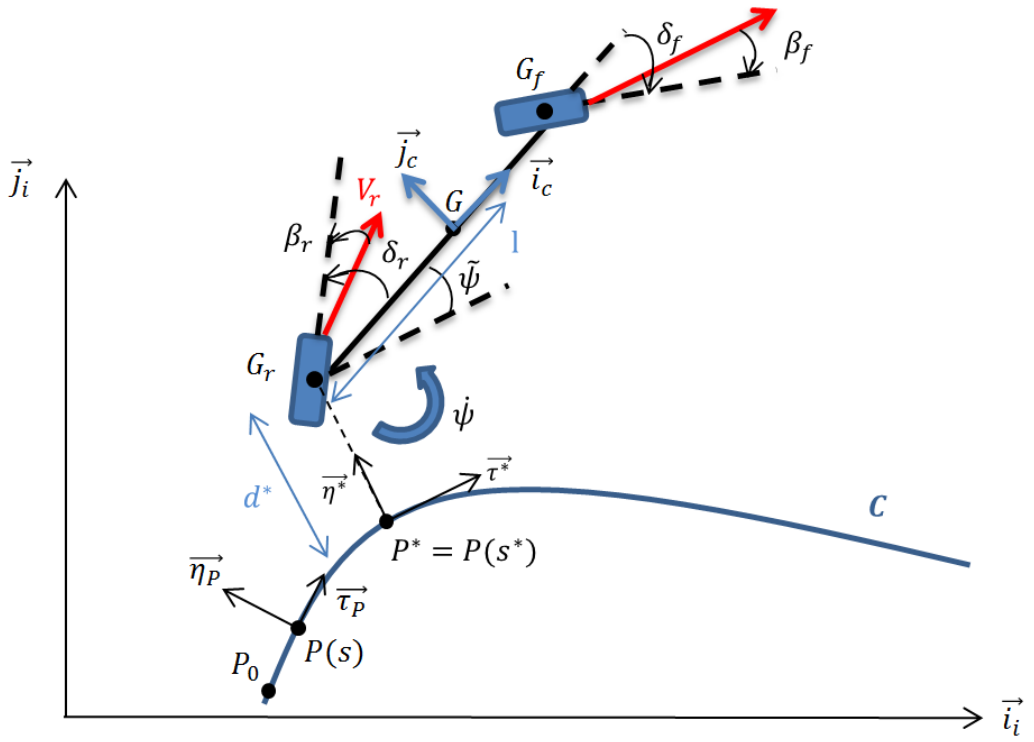



FIGURE D.1 – Paramétrage de l'approche "path following" pour le modèle bicyclette étendu

Soit $P$ un point parcourant $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x_p, y_p)$ exprimées dans la base $\mathscr{R}_i$. Un

chemin est caractérisé par plusieurs critères :

- L'*abscisse curviligne* $s$ du point $P$ sur $(\mathscr{C})$ est la longueur depuis un point d'origine $P_0 = (x_0, y_0)^T$ fixé, qui est assimilable à une longueur d'arc (exprimée en mètre). Soit $ds$, la variation infinitésimale d'abscisse curviligne. Elle est définie par :

$$ds \triangleq \sqrt{dx_p^2 + dy_p^2}\,,$$

L'abscisse curviligne est obtenue par intégration $s = s_0 + \int ds$. On remarquera que

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx_p}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_p}{dt}\right)^2} = \left\|\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\vec{V}(P/\mathscr{R}_i)\right\|\,,$$

et donc

$$\left\|\frac{d}{ds}\overrightarrow{OP}\right\| = \frac{\left\|\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right\|}{\frac{ds}{dt}} = 1\,.$$

- Le *vecteur tangent unitaire* $\vec{\tau}_p$ est donc obtenu par dérivation du point suivant sa coordonnée curviligne :

$$\vec{\tau}_p \triangleq \frac{\vec{V}(P/\mathscr{R}_i)}{\left\|\vec{V}(P/\mathscr{R}_i)\right\|} = \frac{d}{ds}\overrightarrow{OP}. \tag{D.1}$$

- La *courbure* de la courbe notée $\kappa$ est définie telle que

$$\frac{d\vec{\tau}_p}{ds} = \kappa\,\vec{\eta}_p \tag{D.2}$$

avec $\vec{\eta}_p$ le vecteur *unitaire normal*. On peut également calculer sa dérivée comme suit

$$\frac{d\vec{\eta}_p}{ds} = -\kappa\,\vec{\tau}_p\,.$$

Le point $P$ attaché à la trajectoire $(\mathscr{C})$ et la base $[\vec{\tau}_p, \vec{\eta}_p]$ qui suit la courbe forment ce que l'on appelle le *repère de Frenet*.

### D.1.2 Coordonnées généralisées du véhicule

Il est possible de définir la position et l'orientation du véhicule de repère $\mathscr{R}_c = (G, [\vec{i}_c, \vec{j}_c])$ en utilisant le repère de Frenet $\mathscr{R}_f^\star = (P^\star, [\vec{\tau}^\star, \vec{\eta}^\star])$, avec $P^\star = P(s^\star)$ un point particulier attaché à la trajectoire $(\mathscr{C})$ que nous allons définir.

- La *distance la plus courte* entre le point du véhicule $G_r$ et la courbe va définir le point $P^\star$ de la courbe $(\mathscr{C})$ (voir figure D.1). Soit $d = \|\overrightarrow{PG_r}\| = \sqrt{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2}$, on cherchera à minimiser cette distance :

$$d^\star(x_r, y_r) = \min_{P\in\mathscr{C}} d\,, \quad P^\star = \arg\min_{P\in\mathscr{C}} d\,. \tag{D.3}$$

- Le point $P^\star$ étant sur la courbe, il est défini par sa *coordonnée curviligne* particulière $s = s^\star$, obtenue suite à l'optimisation.
- On pose, $\vec{\tau}^\star$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire au point $P^\star$, $\vec{\eta}^\star$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{\tau}^\star$ et $\psi_\tau^\star$ l'angle entre $\vec{\tau}^\star$ et $\vec{i}_i$. On définit enfin *l'erreur d'orientation du véhicule* par l'angle

$$\tilde{\psi} \triangleq \widehat{\vec{\tau}^\star, \vec{i}_c} = \psi - \psi_\tau^\star\,, \tag{D.4}$$

l'angle entre le vecteur tangent à la trajectoire $\vec{\tau}^\star$ et $\vec{i}_c$ l'axe longitudinal du véhicule. Cet angle est calculé à partir de la différence entre $\psi \triangleq \widehat{\vec{i}_i, \vec{i}_c}$ et l'angle du chemin :

$$\psi_\tau^\star \triangleq \widehat{\vec{i}_i, \vec{\tau}^\star}, \tag{D.5}$$

voir figure D.1.

Les coordonnées généralisées du véhicule dans le repère de Frenet sont donc

$$q^\star = (s^\star, d^\star, \tilde{\psi})\,. \tag{D.6}$$

On omettra dans la suite les symboles $\star$ pour une meilleure lisibilité.

## D.2 Dynamique du véhicule en coordonnées curvilignes

Établissons le système dynamique qui régit l'expression de chacune de ces coordonnées généralisées dans le repère de Frenet, c-à-d, $(\dot{s}, \dot{d}, \dot{\tilde{\psi}})$. D'après la figure D.1 il est possible de calculer la vitesse du point $G_r$ sur la trajectoire $(\mathscr{C})$ en faisant intervenir $P^\star$ (le point de la courbe le plus proche du véhicule) :

$$\frac{d\overrightarrow{OG_r}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OP^\star}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{P^\star G_r}}{dt}\right)\,.$$

Par définition du vecteur vitesse de $P^\star$ dans le repère de Frenet, le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{\tau}$. Ce qui donne

$$\frac{d\overrightarrow{OP^\star}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\vec{\tau}\,.$$

De plus, en posant $d = \|\overrightarrow{P^\star G_r}\|$, nous avons

$$\frac{d\overrightarrow{P^\star G_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(d\,\vec{\eta}) = \frac{dd}{dt}\,\vec{\eta} + d\,\frac{d\vec{\eta}}{dt}\,,$$

qui par définition du vecteur de Frenet $\vec{\eta}$, donne la composante normale à la trajectoire :

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \frac{d\vec{\eta}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = -\kappa\,\dot{s}\,\vec{\tau}\,,$$

d'où

$$\frac{d\overrightarrow{P^\star G_r}}{dt} = \dot{d}\,\vec{\eta} - \dot{s}\,\kappa\,d\,\vec{\tau}\,.$$

En regroupant les expressions de $\frac{d\overrightarrow{OP^\star}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{P^\star G_r}}{dt}$, cela donne finalement le vecteur vitesse dans la base de Frenet :

$$\frac{d\overrightarrow{OG_r}}{dt} = \dot{s}\,(1-\kappa\,d)\,\vec{\tau} + \dot{d}\,\vec{\eta}\,. \tag{D.7}$$

### D.2.1 Expression de $\dot{s}$

En projetant la vitesse du point $G_r$ (D.7) sur $\vec{\tau}$, cela donne

$$\frac{d\overrightarrow{OG_r}}{dt}\cdot\vec{\tau} = \left(\dot{s}\,(1-\kappa\,d)\,\vec{\tau} + \dot{d}\,\vec{\eta}\right)\cdot\vec{\tau} = \dot{s}\,(1-\kappa\,d)\,. \tag{D.8}$$

Mais il est aussi possible d'exprimer directement la vitesse su point $G_r$ en utilisant son module dans le repère de Frenet avec $V_r \triangleq \left\|\vec{V}(G_r/\mathscr{R}_i)\right\|$, soit

$$\frac{d\overrightarrow{OG_r}}{dt}\cdot\vec{\tau} = V_r\,\cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\,. \tag{D.9}$$

En identifiant les expressions (D.8) avec ( D.9), nous avons

$$\dot{s}\,(1-\kappa\,d) = V_r\,\cos\left(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r\right)\,,$$

d'où l'expression de $\dot{s}$ qui est donc :

$$\dot{s} = \frac{\cos\left(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r\right)}{1-\kappa\,d}\,V_r\,. \tag{D.10}$$

### D.2.2 Expression de $\dot{d}^\star$

De même que précédemment, en projetant la vitesse du point $G_r$ (D.7) sur $\vec{\eta}$ cela donne

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{OG_r}}{dt}.\vec{\eta} = \dot{d}\,, \\ \dfrac{d\overrightarrow{OG_r}}{dt}.\vec{\eta} = V_r\,\sin(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\,, \end{cases}$$

et donc :

$$\dot{d} = \sin\left(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r\right) V_r\,. \tag{D.11}$$

### D.2.3 Expression de $\dot{\tilde{\psi}}$ :

En dérivant (D.4) par rapport au temps, nous avons donc $\tilde{\psi} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_\tau$. En dérivant $\vec{i}_c \cdot \vec{\tau} = \cos\psi_\tau$ par rapport à la coordonnée curviligne et en utilisant (D.2) nous avons d'une part

$$\frac{d\left(\vec{i}_c \cdot \vec{\tau}\right)}{ds} = \vec{i}_c \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{i}_c \cdot \kappa\,\vec{\eta} = -\kappa \sin\psi_\tau\,,$$

et d'autre part

$$\frac{d\left(\vec{i}_c \cdot \vec{\tau}\right)}{ds} = \frac{d\cos\psi_\tau}{ds} = -\frac{d\psi_\tau}{ds}\,\sin\psi_\tau\,,$$

donc

$$\frac{d\psi_\tau}{ds} = \kappa\,,$$

et en utilisant l'expression (D.10) de $\dot{s}$, nous avons :

$$\dot{\psi}_\tau = \frac{d\psi_\tau}{dt} = \frac{d\psi_\tau}{ds}\,\dot{s} = \kappa\,\frac{\cos\left(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r\right)}{1 - \kappa\,d}\,V_r\,.$$

De plus, en utilisant (2.31), nous avons

$$\dot{\psi} = \frac{\cos(\delta_r - \beta_r)\,\left(\tan(\delta_f - \beta_f) - \tan(\delta_r - \beta_r)\right)}{l}\,V_r\,.$$

Donc :

$$\dot{\tilde{\psi}} = \left(\frac{\cos(\delta_r - \beta_r)\,\left(\tan(\delta_f - \beta_f) - \tan(\delta_r - \beta_r)\right)}{l} - \frac{\kappa}{(1 - \kappa\,d)}\cos(\tilde{\psi} + \delta_r - \beta_r)\right) V_r\,. \tag{D.12}$$

# Annexe E

# Outils mathématiques

Les définitions et théorèmes énoncés ci-dessous sont tirés de [D'Andréa-Novel and Cohen de Lara, 2002] et [Khalil, 2002].

## E.1 Point d'équilibre

Nous définissons ci-dessous la notion de point d'équilibre pour un système général non autonome de la forme

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{E.1}$$

avec $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue par morceaux par rapport à la variable $t$.

**Définition E.1.1.** On appelle point d'équilibre (ou point singulier) du système $\dot{x} = f(t, x)$ à $t = 0$, tout point $x_e$ tel que :

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \geq 0\,.$$

La notion de stabilité de point d'équilibre est essentielle dans la théorie du contrôle. En effet, l'objectif usuel est de trouver une loi de contrôle qui conduit le système en un point d'équilibre stable. Nous distinguons les systèmes non autonomes des systèmes autonomes. La dépendance explicite de $f$ par rapport au temps engendre des notions de stabilité bien différentes ; il en va de même des outils d'analyse associés.

**Définition E.1.2.** Soit le système dynamique linéaire $\dot{x} = A\,x$. $A$ désigne une matrice réelle carrée de taille $n$. On appelle polynôme caractéristique le polynôme suivant de degré $n$

$$\chi_A(z) = \det(zI - A)$$

et sp(A) l'ensemble des valeurs propres de $A$, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de ce polynôme. On appelle

- *multiplicité* d'une valeur propre $\lambda$ et on note $m(\lambda)$, la multiplicité de la racine $\lambda$ du polynôme caractéristique $\chi_A$ ;
- *indice* d'une valeur propre $\lambda$, et on note $\nu(\lambda)$, le premier entier $\nu$ non nul tel que la suite croissante $(\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})^\nu)_{\nu \geq 1}$ soit stationnaire à partir de $\nu = \nu(\lambda)$ ;
- espace propre caractéristique complexe associé à $\lambda$ le noyau $N(\lambda) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})^\nu$, c'est-à-dire
$$x \in N(\lambda) \iff \forall \nu \geq \nu(\lambda), \quad (A - \lambda\,I)^\nu\,x = 0.$$

**Théorème E.1.1.** *Soit $A$ une matrice réelle de taille $n \times n$, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 ... \lambda_r$. Considérons le point d'équilibre $x_e = 0$ du système dynamique $\dot{x} = A\,x$, c-à-d $f(t, x) = A\,x$ :*

- *Si $\exists j = 1, ...r$, $\Re(\lambda_j) > 0$, alors le point 0 est instable.*
- *Si $\forall j = 1, ...r$, $\Re(\lambda_j) \leq 0$ et*

- *si* $\forall j = 1, ...r,\ \Re(\lambda_j) < 0$,*alors le point 0 est asymptotiquement stable ;*
- *si* $\exists j = 1, ...r,\ \Re(\lambda_j) = 0$ *et* $\nu(\lambda_j) > 1$, *le point 0 est instable ;*
- *si* $\forall j = 1, ...r,\ (\Re(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1)$, *le point 0 est stable mais non asymptotiquement stable.*

*La démonstration pourra être trouvée dans [D'Andréa-Novel and Cohen de Lara, 2002].*

Nous savons désormais qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable si les valeurs propres de $A$ sont à partie réelle strictement négative. Le critère de Routh, qui est couramment utilisé, permet de déterminer de manière simple si les racines du polynôme caractéristique de $A$ sont à partie réelle strictement négative.

## E.2 Fonctions de Lyapunov

L'utilisation des fonctions de Lyapunov permet d'étendre la caractérisation de la stabilité des points d'équilibres à des systèmes plus généraux impliquant par exemple des points d'équilibre non hyperboliques. En revanche, il n'est pas forcément aisé de trouver de telles fonctions.

### E.2.1 Système autonome

Prenons le cas d'un système autonome $\Sigma_1$ défini par :

$$\Sigma_1 : \dot{x} = f(x)\,.$$

**Définition E.2.1.** [D'Andréa-Novel and Cohen de Lara, 2002] Soit $x_e$ un point d'équilibre du système autonome $\Sigma_1$. On appelle fonction de Lyapynov, pour $f$ au voisinage de $x_e$, une fonction $\mathcal{V}$ définie au voisinage de $x_e$ telle que :

- $\mathcal{V}(x) > 0$ sauf en $x = x_e$ où $\mathcal{V}(x_e) = 0$,
- $\mathcal{V}$ est une fonction différentiable à dérivées continues et vérifie l'inégalité $\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0$

**Théorème E.2.1.** *Soit* $x_e = 0$ *un point d'équilibre du système* $\Sigma_1$ *et* $D \subset \mathbb{R}^n$ *contenant* $x_e = 0$. *Soit* $\mathcal{V} : D \to \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov :*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \quad et \quad \mathcal{V}(x) > 0 \quad dans \quad D \setminus \{0\}$$

*et*

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \quad dans \quad D,$$

*alors* $x_e = 0$ *est stable. Si de plus*

$$\dot{\mathcal{V}}(x) < 0 \quad dans \quad D\,,$$

*alors* $x_e = 0$ *est asymptotiquement stable.*

Dans le cas où $D = \mathbb{R}$, nous avons le théorème suivant :

**Théorème E.2.2.** *Soit* $x_e = 0$ *un point d'équilibre du système* $\Sigma_1$. *Soit* $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov :*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \quad et \quad \mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall x \neq 0\,,$$

$$||x|| \to \infty \Rightarrow \mathcal{V}(x) \to \infty \quad (V \text{ est radicalement non bornée}),$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0\,,$$

*alors* $x_e = 0$ *est globalement asymptotiquement stable.*

**Définition E.2.2.** Une fonction $\mathcal{V}(x)$ est dite

- définie positive si $\mathcal{V}(0) = 0$ et $\mathcal{V}(x) > 0$ pour $x \neq 0$,
- semi définie positive si $\mathcal{V}(0) = 0$ et $\mathcal{V}(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$,
- définie négative si $-\mathcal{V}(x)$ est définie positive,
- semi définie négative si $-\mathcal{V}(x)$ est semi définie positive.

Finalement, s'il existe une fonction $\mathcal{V}(x)$ définie positive continûment différentiable et si $\dot{\mathcal{V}}(x)$ est semi définie négative ou définie négative, alors l'origine du système $\Sigma_1$ est respectivement stable ou asymptotiquement stable.

### E.2.2 Système linéaire à temps invariant

Nous considérons désormais le système linéaire à temps invariant $\dot{x} = A\,x$ ainsi qu'une fonction de Lyapunov quadratique candidate

$$\mathcal{V}(x) = x^T\,P\,x$$

avec $P$ une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée de $\mathcal{V}$ le long des trajectoires du système linéaire est donnée par

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = x^T\,P\,\dot{x} + \dot{x}^T\,P\,x = x^T(PA + A^TP)x = -x^T\,Q\,x$$

avec $Q$ une matrice symétrique. Si $Q$ est définie positive, alors d'après le théorème E.2.1 l'origine est asymptotiquement stable.

**Théorème E.2.3.** *Une matrice $A$ est une matrice de stabilité ou de Hurwitz (c'est-à-dire $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de $A$) si et seulement si, pour toute matrice $Q$ symétrique définie positive, il existe une matrice $P$ symétrique définie positive telle que*

$$PA + A^TP = -Q\,. \tag{E.2}$$

*De plus, si $A$ est une matrice stable, alors $P$ est l'unique solution de (E.2).*

*Démonstration.* Quelques éléments de preuve sont apportés ici, à l'exception de la démonstration de l'unicité de la matrice $P$, cette dernière est détaillée dans [Khalil, 2002].

- Soit $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ tels que $PA + A^TP = -Q \Rightarrow A$ est de Hurwitz. Prenons la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x) = x^T\,P\,x$, $\dot{\mathcal{V}} = -x^T\,Q\,x$. D'après le théorème E.2.1 l'origine est asymptotiquement stable et d'après le théorème E.1.1, $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de $A$ : $A$ est donc Hurwitz.
- $A$ est de Hurwitz $\Rightarrow \forall\ Q = Q^T > 0,\ \exists\ P = P^T > 0$ tel que $PA + A^TP = -Q$. Par définition de $A$ ; $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de $A$, ce qui nous permet de considérer la matrice $P$ définie par

$$P = \int_0^\infty e^{A^T\,t}\,Q\,e^{A\,t}\,dt. \tag{E.3}$$

Supposons que $P$ n'est pas définie positive, alors il existe $x \neq 0$ tel que $x^TPx = 0$. Cependant avec $Q = Q^T > 0$, c-à-d $Q$ n'est pas singulier,

$$\begin{aligned} x^TPx = 0 &\Rightarrow \int_0^\infty x^T\,e^{A^T\,t}\,Q\,e^{A\,t}\,x\,dt = 0 \\ &\Rightarrow e^{A\,t}\,x \equiv 0,\ \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

puisque $e^{A\,t}$ est non singulière pour tout $t$. $P$ est donc définie positive. De plus,

$$\begin{aligned} P\,A + A^T\,P &= \int_0^\infty e^{A^T\,t}\,Q\,e^{A\,t}\,A\,dt + \int_0^\infty A^T\,e^{A^T\,t}\,Q\,e^{A\,t}\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^T\,t}\,Q\,e^{A\,t}\right)\,dt = \left[e^{A^T\,t}\,Q\,e^{A\,t}\right]_0^\infty = -Q \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve.

Il est également possible de prouver la stabilité asymptotique de l'origine pour $Q$ uniquement semi-définie positive. $\square$

RÉSUMÉ

L'intérêt pour les véhicules autonomes n'a cessé de croître ces dernières années. La conduite autonome sur des terrains accidentés, ou encore avec des conditions d'adhérences faibles sont encore des défis technologiques à relever. Le système de contrôle doit être capable d'identifier la variabilité de ces terrains tout en suivant une trajectoire de la meilleure manière possible. Les travaux décrits dans ce mémoire se focalisent sur le développement d'une stratégie globale de commande pour adresser le problème de la conduite de véhicule autonome à deux trains directeurs en milieu tout-terrain. Dans de tels milieux et lors de déplacements à vitesses élevées, les pneumatiques sont soumis à d'importants glissements qui entrainent un comportement sous vireur ou survireur du véhicule. L'objectif est donc d'évoluer le plus rapidement possible dans des environnements difficiles tout en gardant un suivi précis quelles que soient les conditions d'adhérence.
Pour ce faire, plusieurs points ont été abordés notamment au niveau de la modélisation du véhicule et des pneumatiques, de l'estimation des efforts pneumatiques et de la commande de véhicule à deux trains directeurs. Les contributions principales sont les suivantes : un algorithme d'estimation des forces latérales à partir de deux paramètres fondamentaux : le coefficient de rigidité de dérive et le coefficient de friction latérale maximale, et un algorithme de commande qui assure le suivi de la trajectoire de référence. La commande est basée sur un modèle dynamique afin de prendre en compte les interactions entre la roue et le sol. En effet, à des vitesses importantes, les fortes dynamiques rendent les modèles cinématiques peu réalistes. Ceux-ci sont uniquement capables de représenter des phénomènes relativement lents et donc ne conviennent que pour des véhicules se déplaçant à vitesse faible. Cette commande cherchera à maintenir, dans la mesure du possible, le comportement du pneumatique dans un domaine linéaire. L'exploitation du deuxième train directeur permettra de réguler l'orientation du véhicule relativement à une trajectoire de référence. Cela permettra de contrôler le véhicule même en présence de glissements importants et ainsi de pousser les limites de stabilité du véhicule.

## MOTS CLÉS

Contrôle longitudinal et latéral, dynamique du véhicule, deux trains directeurs, glissement des pneumatiques

ABSTRACT

Interest in autonomous vehicles has increased steadily over recent years. Autonomous driving on rough terrain or with low grip conditions are still technological challenges to be met. The control system must be able to identify the variability of these terrains while following a trajectory. The work described in this thesis focuses on the development of a control strategy to address the problem of autonomous driving with four steering wheels in an off-road environment. In such environments, at high speed, tires are subject to significant slippage, which causes the phenomenon of understeering or oversteering. Thus, the objective is to evolve as quickly as possible in difficult environments while following a reference path whatever the grip conditions.
To do so, several points were addressed, such as vehicle and tires modeling, estimation of tire forces and control of four-wheel steering vehicles. The main contributions are: a lateral forces estimation algorithm obtained from two fundamental parameters: the cornering stiffness coefficient and the maximum lateral friction coefficient and a control algorithm allowing to follow a reference trajectory. The control strategy is based on a dynamic model in order to take into account the interactions between the wheel and the ground. Indeed, at high speeds, vehicles are subject to important dynamic phenomena making the kinematic models unrealistic. Kinematic models are only able to represent relatively slow phenomena and therefore are only suitable for low speed vehicles. The developed control strategy will maintain, as far as possible, the tire's behavior in the linear domain. The second steering axle will add an additional degree of freedom allowing to control the vehicle yaw angle with respect to a reference trajectory. This will allow to control the vehicle even in presence of significant slippage and thus increase the vehicle stability.

## KEYWORDS

Longitudinal and lateral control, vehicle dynamics, four wheel steering, slip angles, tire forces estimation