



HAL
open science

Simulation de la rupture des composites stratifiés dans le cadre de modèles de plaques multicouches

Paul Bouteiller

► **To cite this version:**

Paul Bouteiller. Simulation de la rupture des composites stratifiés dans le cadre de modèles de plaques multicouches. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. École des Ponts ParisTech, 2022. Français. NNT : 2022ENPC0006 . tel-03657186

HAL Id: tel-03657186

<https://pastel.hal.science/tel-03657186v1>

Submitted on 2 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation de la rupture des composites stratifiés dans le cadre de modèles de plaques multicouches

École doctorale Science Ingénieur Environnement (SIE)

Mécanique, Spécialité Structures matériaux

Thèse préparée au laboratoire Navier

Thèse soutenue le 31 janvier 2022, par
Paul BOUTEILLER

Composition du jury:

Federica, DAGHIA
Maîtresse de conférences, LMPS

Rapporteuse

Corrado, MAURINI
Professeur, Sorbonne Université

Rapporteur

Véronique, LAZARUS
Professeure, ENSTA ParisTech

Examinatrice

Johann, RANNOU
Ingénieur de recherche, Onera

Examineur

Christophe, BOUVET
Professeur, ISAE Toulouse

Examineur

Fabrice, CONGOURDEAU
Ingénieur, Dassault Aviation

Examineur

Jérémy, BLEYER
Docteur, ENPC

Examineur

Karam, SAB
Professeur, ENPC

Directeur de thèse

Résumé

La rupture des structures composites stratifiées est un phénomène complexe. Elle est précédée par plusieurs mécanismes de dégradation mécanique du matériau qui dépendent des nombreux paramètres de conception (drapage, séquence d'empilement, diamètre de fixation, géométrie, ...). Bien que développée depuis une vingtaine d'années, la modélisation et la simulation de ces mécanismes reste une problématique majeure : les validations n'ont été effectuées que sur un domaine restreint d'utilisation et leur complexité limite aujourd'hui leur diffusion dans le monde de l'ingénierie. En outre, les différentes échelles de conception requièrent une large variété de modèles, dont les domaines d'applications, quasi-disjoints, rendent non triviales leurs utilisations combinées. Cette thèse a pour objectifs de :

- ★ modéliser les mécanismes de dégradation mécanique des matériaux composites pour simuler leur initiation et leur propagation sous sollicitations hors-plan statiques et dynamiques, en fonction des paramètres de conception (drapage, épaisseur, conditions aux limites, énergie d'impact, ...)
- ★ d'intégrer les mécanismes d'endommagement et de délaminage dans les matériaux composites dans le cadre de nouvelles stratégies de modélisation du multicouche formulées en contraintes, dont la gamme de structures correctement simulées est plus large que les modèles actuellement retenus,
- ★ d'y inclure également le comportement dynamique et les effets des grands déplacements, afin d'évaluer l'efficacité et la robustesse de cette approche sur des cas-tests industriels.

Elle s'inscrit dans le cadre du projet MARCOS 2 impliquant l'ONERA et Dassault Aviation dont le but est de combiner les apports de campagnes d'essais permettant de recalibrer les différents modèles de comportements mécaniques aux outils de simulation développés dans cette thèse afin de fournir, in fine, un outil de dimensionnement des structures composites permettant d'obtenir des critères de tenue après impact.

Abstract

The failure of laminated composite structures is a complex phenomenon. It is preceded by several mechanisms of mechanical degradation of the material which depend on numerous design parameters (draping, stacking sequence, geometry, ...). Although developed since about twenty years, the modeling and simulation of these mechanisms remains a major problem : validations have been carried out only within a restricted field of use and their complexity limits their diffusion in the engineering field. In addition, the different scales of design require a wide variety of models whose almost disjointed application domains make their combined use non-trivial. The objectives of this thesis are to :

- ★ model the mechanical degradation mechanisms of composite materials to simulate their initiation and propagation under static and dynamic out-of-plane loadings, as a function of design parameters (drape, thickness, boundary conditions, impact energy, ...)
- ★ to integrate the damage and delamination mechanisms in composite materials within a stress-based layerwise theory, whose range of correctly simulated structures is wider than that of the currently retained models,
- ★ to include also the dynamic behavior and geometric non-linearities effects in order to evaluate the efficiency and the robustness of this approach on industrial test cases.

It is part of the MARCOS 2 project involving ONERA and Dassault Aviation, whose goal is to combine the contributions of test campaigns to recalibrate the various mechanical behaviors with the simulation tools developed in this thesis in order to provide, ultimately, a sizing tool for composite structures to obtain resistance criteria after low velocity impacts.

Remerciements

Peaufiner ce manuscrit me suscite des émotions fortes et diverses : satisfaction d'avoir énormément appris, sentiment d'être parvenu aux limites des connaissances accumulées sur un sujet bien précis ; mais aussi du bonheur des rencontres permises et des liens ainsi créés durant trois années. Les lignes qui suivent sont dédiées à toutes les personnes qui m'ont entouré jusque-là et desquelles je me sens redevable de quelque manière que ce soit, la tâche accomplie.

On entend souvent qu'une « bonne thèse », avant d'être guidée par un « bon sujet », est le fruit d'une équipe encadrante sans faille. Je ne peux par l'expérience que valider cette assertion, et en conséquence exprimer toute ma reconnaissance envers les superviseurs exceptionnels qui m'ont solidement accompagné au long de temps bien chahutés. D'abord Karam SAB, mon directeur de thèse qui m'a toujours éclairé avec bienveillance, de son savoir et de ses conseils ; mais aussi à Jeremy Bleyer, mon encadrant direct. Travailler avec Jeremy est une expérience unique, son incroyable force de travail demeure pour moi une source d'émerveillement ; le foisonnement et la richesse de ses idées, soutenus par ses connaissances en mécanique analytique et numérique, associées à une rigueur intellectuelle sans faille, m'ont énormément appris ... et inspiré. Jeremy, tu as été un encadrant extraordinaire de clarté et de gentillesse, merci.

Je dois remercier aussi l'aréopage qui m'a honoré de son intérêt, à commencer par Madame la Professeure Véronique LAZARUS, pour avoir accepté de présider et d'animer ma soutenance, ainsi que pour toutes ses stimulantes questions à cette occasion. Je remercie également Madame la Maitresse de conférence Fédérica DAGHIA et Monsieur le Professeur Corrado MAURINI d'avoir rapporté mon manuscrit de thèse. Leurs remarques m'ont été particulièrement précieuses et profitables aux tous derniers rajustements de ce travail. Je remercie aussi chaleureusement chacun de mes examinateurs : le Professeur Christophe BOUVET, Fabrice CONGOURDEAU et le Docteur Johann RANOU qui, avant que de bien vouloir intégrer le jury, m'ont accompagné ces trois dernières années à l'occasion de fécondes réunions et m'ont invité à rejoindre la petite communauté des « compositeux ».

Remuer en permanence des équations, déboguer des messages d'erreurs sournois et obscurs constitue un défi que je n'aurais pas su relever sans un environnement aussi parfaitement convivial que celui du Laboratoire Navier que je remercie par conséquent dans son ensemble, mais plus particulièrement, en commençant par les doctorants : Charlotte, Baptiste, Vianney, Pierre, Pierre, et Pierre (dans cet ordre), Kilian, Katja, Nicolas, Gaspard, Willy, Romane, Alma, Léo, Julien, Camille, Eki ; sans oublier, les chercheurs permanents ainsi que Marie-Françoise et Jeanine, les deux gracieux piliers du laboratoire.

Après tant d'années, nous continuons à roder ensemble. Merci Roirax pour tous ces moments et ces Kta-night si salvatrices.

L'aide de mes parents a été immense et ininterrompue. Merci d'avoir soutenu mes choix de parcours, d'avoir accompagné ma scolarité et ce doctorat. Je remercie tout particulièrement mon papa pour la relecture et la correction de ce manuscrit bilingue « français/mathématiques », lui qui maîtrisant la première langue, sans comprendre un mot de la seconde a contribué notablement à en rendre la lecture moins rébarbative.

Il faut que mes amis soient bons pour que je devienne meilleur. Alors je n'oublie pas non plus ceux qui m'ont permis quelques « respirations » entre mes plongées en équations : tous mes amis du lycée, de classes préparatoires, d'école, et de gymnastique que je remercie pour les moments insoucians, partagés en sorties/raids/voyages. Vous êtes géniaux. Merci Esther d'avoir suivi un bout de chemin avec moi au début de ma thèse et de m'avoir tant fait murir.

Cette thèse aurait certainement été morne sans Madeleine, mon petit personnage, qui me remplit de joie et d'amour depuis plus de deux ans.

Enfin je tiens à remercier profondément deux belles personnes qui occupent une place très particulière dans mon cœur et mon parcours. Tout d'abord Olivier JOACHIM, mon professeur de physique en classe préparatoire qui m'a donné le goût des sciences. L'ardente ferveur qui émanait de toi durant tes cours ont nécessairement suscité d'innombrables vocations scientifiques. Il est rare et précieux de s'asseoir sur les bancs d'un enseignant qui en plus d'expliquer clairement son art possède le don de le faire aimer. C'est toi qui m'a hissé au niveau de l'école de mes rêves, laquelle m'a permis en retour d'écrire cette thèse. Merci Olivier. Puis le professeur Alain EHRLACHER qui m'a enseigné la « belle mécanique », celle que j'ambitionne maintenant d'approfondir sans relâche. Merci Alain de m'avoir convaincu d'embrasser une carrière académique car comme tu le dis si bien : *La vie de chercheur est difficile, mais on se lève chaque matin, heureux d'aller au travail.*

Table des matières

Sommaire	i
Introduction générale	ix
0.1 Caractérisation mécanique des fibres de carbones	x
0.1.1 Anisotropie des matériaux fibrés	x
0.1.2 Mécanismes de rupture dans les matériaux composites	x
0.2 Dimensionnement de structures en bureau d'étude	xi
0.3 Modélisation des structures stratifiées	xii
0.3.1 Les modèles axiomatiques en déplacements	xiii
Approche mono-couche équivalente en déplacement	xiii
Approche cinématique par couche	xv
Solide like-shell	xv
0.3.2 Les modèles axiomatiques formulés en contraintes	xvi
0.3.3 Les modèles zig-zag	xvii
0.4 Comportement des composites à matrice polymère	xviii
0.4.1 Les outils pour la ruine des matériaux composites	xix
Classification des méthodes de représentation de la fissuration	xix
Application à la ruine des composites stratifiés	xx
0.4.2 Les différents critères retenus pour l'étude du délaminage	xxi
Critères en contrainte	xxii
Critères en facteur d'intensité de contrainte	xxii
Critères énergétiques	xxii
Double critère en résistance/ténacité	xxiii
0.5 Structure générale et enjeux	xxiv
Structure générale et enjeux	xxiv
1 Statique des modèles SCLS1 et LS1	1
1.1 Position du problème	2
1.1.1 Hypothèses et notations	2
1.1.2 Base polynomiale choisie	3
1.1.3 Rappel des équations du problème tridimensionnel	3
1.2 Équations d'équilibre du modèle SCLS1	4
1.2.1 Écriture générique du champ de contraintes du modèle SCLS1	4
1.2.2 Introductions des efforts généralisés du modèle	5
Champs de contraintes membranaires	5
Champs des contraintes de cisaillement hors plan	5
Champs des contraintes d'arrachement hors plan	5
1.2.3 Interprétation physique des efforts généralisés	5

1.2.4	Équations d'équilibre du modèle SCLS1	8
1.2.5	Conditions aux limites	9
1.3	Cinématique du modèle SCLS1	10
1.3.1	Déplacements généralisés du modèle SCLS1	10
	Dualisation des équations d'équilibre	10
	Introduction des déplacements généralisés	12
1.3.2	Déformations généralisées du modèle	12
1.4	Loi de comportement du modèle SCLS1	14
1.4.1	Énergie complémentaire du modèle SCLS1	14
1.4.2	Minimisation de l'énergie élastique dans le cadre du modèle SCLS1	15
	Équation de comportement en membrane et en flexion du pli i	16
	Équation de comportement en cisaillement transverse du pli i et à l'interface $j, j + 1$	16
	Équation de comportement en arrachement de l'interface $j, j + 1$	17
	Équation de comportement pour l'effort généralisé π à l'interface $j, j + 1$	17
1.4.3	Formulation avec introduction des conditions aux limites sous forme faible	17
1.5	Formulation matricielle du modèle SCLS1	19
1.5.1	Expression matricielle des lois de comportement	19
	Vecteurs déplacements, déformations et contraintes généralisés	19
	Vecteur pré-déformations et efforts extérieurs	19
1.5.2	Forme faible sous forme matricielle	20
	Forme faible sous forme matricielle avec multiplicateurs de Lagrange	20
	Forme faible sous forme matricielle sans multiplicateurs de Lagrange	20
1.6	Modèle LS1	20
1.6.1	Champs des contraintes du modèle LS1	21
1.6.2	Équations d'équilibre du modèle LS1	21
1.6.3	Conditions aux limites	22
1.6.4	Cinématique du modèle LS1	22
	Déplacements généralisés du modèle	22
	Déformations généralisées du modèle	23
1.6.5	Loi de comportement du modèle LS1	23
	Énergie complémentaire du modèle LS1	23
	Minimisation de l'énergie complémentaire dans le cadre du modèle LS1	24
	Expression matricielle des lois de comportement	26
1.7	Un modèle LS1 condensé, le L-LS1	27
1.7.1	Modification des contraintes généralisées	27
1.7.2	Écriture des lois de comportement	28
1.7.3	Interprétation de la rigidité approchée comme condensation de la souplesse	29
1.7.4	Condensation de l'arrachement	30
1.7.5	Formulation faible découplée sous forme matricielle	31
1.7.6	Quelques éléments de conclusions et remarques générales	31
	Conclusion sur les modèles SCLS1, LS1 et L-LS1	32
1.8	Application à l'étude de composite : Traction uni-axiale d'un $(0, 90)_s$	32
1.8.1	Présentation du logiciel Open Source FEniCS	32
1.8.2	Position du problème	32
1.8.3	Contraintes de cisaillement au voisinage du bord libre	33
	Représentation du champ de cisaillement dans le cadre SCLS1	34
	Cisaillement avec le modèle LS1 consistant	35
	Utilisation du modèle LS1 condensé	35
1.8.4	Distribution énergétique et dégénérescence des modèles	36
	Distribution générale de l'énergie dans le cadre SCLS1	36
	Suppression du terme de couplage et transfert de l'énergie	37
	Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à π	38
1.8.5	Synthèse de la comparaison	39

2	Extension au cadre dynamique des modèles SCLS1 et LS1	43
2.1	Principes de minimum en régime dynamique	44
2.1.1	Principe de moindre action pour un système discret	44
2.1.2	Principe en déplacements	44
2.1.3	Principe en contraintes	45
2.1.4	Illustration sur le modèle shear lag	46
2.1.5	Méthodologie générale	48
2.2	Extension au cas dynamique du modèle SCLS1	49
2.2.1	Introduction du vecteur « impulsion généralisée »	49
2.2.2	Équations d'équilibre dynamique	50
2.2.3	Formulation variationnelle mixte du modèle SCLS1	50
2.2.4	Relation entre les vecteurs impulsions et vitesses généralisés	51
2.2.5	Cinématiques généralisées et comportement en souplesse	52
2.3	Modèle SCLS1-dynamique simplifié	52
2.3.1	Cinématiques et inerties généralisées, comportement en souplesse	53
2.3.2	Matrice impulsion-vitesse du modèle SCLS1 simplifié	54
2.4	Extension au cas dynamique du modèle LS1	54
2.4.1	Formulation faible du problème dynamique	56
2.5	Modèle de Reissner mono-couche en régime dynamique	57
2.5.1	Modèle SCLS1-monocouche	57
	Champ de contraintes et d'impulsions	57
	Équations d'équilibre	58
	Cinématique généralisée	58
	Exploitation du principe variationnelle dynamique	58
	Adimensionnalisation de la partie couplée de l'inverse de la matrice de masse	59
2.5.2	Modèle LS1-mono-couche	60
	Équations d'équilibre	60
	Cinématique généralisée	60
	Exploitation du principe variationnelle dynamique	60
2.6	Cas test des modèle SCLS1 et LS1 en régime dynamique	61
2.6.1	Analyse modale de plaques encastées	61
	Analyse modale d'une plaque isotrope circulaire encastée	61
	Plaque carrée asymétrique $(0, 90)$	62
	Plaque rectangulaire symétrique $(0, 90, 0)$	63
	Plaque asymétrique $(\theta, -\theta)$	63
	Plaque biaisée	64
2.6.2	Plaque sandwich, mode de pincement, mode de gonflement	64
3	Modélisation du délaminage	69
3.1	Cadre d'étude du délaminage	70
3.1.1	Cadre standard généralisé	70
3.1.2	Délaminage des composites stratifiés	71
3.2	Pseudo-potentiel de dissipation	71
3.2.1	Critère elliptique en mode mixte	72
3.3	Énergie libre de Helmholtz et densité d'énergie élastique	73
3.3.1	Rigidité en présence d'interfaces délaminées	74
3.3.2	Cas d'une ruine à une seule variable	74
3.3.3	Dégradations multiples	75
3.3.4	Utilisation du modèle condensé	75
3.4	Formulation variationnelle incrémentale et résolution	76
3.4.1	Formulation incrémentale	76
3.4.2	Algorithmes de résolution	77
3.4.3	Choix pour les fonctions g , w et notations des différents modèles	78
	Choix pour la fonction g	78
	$w_*(d_*)$ pour les essais pré-fissurés	79

	$w_*(d_*)$ de type « Traction-séparation »	79
	Nomenclature des modèles	79
3.4.4	Loi de « traction-séparation » en mode pur	80
3.4.5	Endommagement en compression et interpénétration	81
3.4.6	Implémentation en statique et en dynamique	82
3.5	Validation numérique des essais d'endommagement	83
3.5.1	Essai de rupture en mode I, l'essai Double Cantilever Beam	83
	Présentation et solution analytique	83
	Modélisation numérique et comparaison des modèles	84
	Essai DCB avec le modèle condensé	85
	Essai DCB avec pilotage de la contrainte critique	86
	Effet d'épaisseur dans l'essai DCB et efforts d'interface	86
3.5.2	Essai ELS	87
	Solution analytique dans le cadre d'Euler Bernoulli	87
	Résultats numériques	87
3.5.3	Essai ENF	88
	Solution analytique	88
	Paramètres d'étude et résultats	89
3.5.4	Utilisation du critère elliptique pour les essais de rupture en mode mixte	89
	The Fixed Ratio Mixed Mode	91
	Mixed Mode Bending	92
3.5.5	Essai de ruine multi-interfaces : L'essai Modified Cantilever Beam	96
3.5.6	Flexion trois points sur un stratifié	97
3.5.7	Flexion sinusoïdale sur une poutre bi-couches	97
4	Rupture intra-laminaire	101
4.1	Cadre d'étude de la ruine intra-laminaire	102
4.1.1	Représentation de la dégradation des plis	102
	Variables d'endommagement	102
	Fissure complètement traversante	102
4.1.2	Le cadre standard généralisé	103
	L'échec des lois de comportement locales non régularisées	103
	Lois de comportement non-locales régularisées par gradient	103
	Lien avec les approches par champ de phase	104
4.1.3	Puissance des efforts intérieurs et équations d'équilibre généralisées	105
4.2	Potentiel de dissipation, énergie libre de Helmholtz, loi d'évolutions	106
4.3	Énergie élastique endommagée	107
4.3.1	Interpolation de la rigidité membranaire	107
4.3.2	Interpolation de la rigidité en cisaillement intra-laminaire	108
4.3.3	Interpolation de la rigidité en cisaillement inter-laminaire	108
4.3.4	Expression de l'énergie élastique endommagée	109
4.3.5	Endommagement en compression pour la rupture intralaminaire	109
4.4	Problème de minimisation et formulation incrémentale	110
4.4.1	Formulation variationnelle incrémentale de la ruine intra-laminaire	110
4.4.2	Variations de l'énergie élastique endommagée	111
4.4.3	Algorithme de résolution	112
4.5	Cas d'étude de ruine intra-laminaire	113
4.5.1	Traction d'une barre 1D	113
4.5.2	Traction sinusoïdale d'une barre	113
4.5.3	Traction d'un $(0, 90)_s$	114
	Essai avec le modèle AT1	115
	Essai avec le modèle AT2	116
	Essai avec le modèle de Wu	117
4.6	Essai d'interaction ruine intra-laminaire/délaminage	120
4.6.1	Description de l'essai de flexion 4 points	120
4.6.2	Rôle du cisaillement intra-laminaire	121

4.6.3	Validation de la pente réaction–déplacement	122
4.6.4	Interaction délaminage-rupture matricielle	122
	Utilisation du modèle $\mathcal{N}^{1,2}$	122
	Utilisation du modèle $\mathcal{N}^{2,2}$	122
5	Application industrielle : impact d’une plaque stratifiée en dynamique lente	127
5.1	Modélisation du contact	128
5.1.1	Prise en compte du contact par pénalisation	128
5.1.2	Essai de validation du contact	129
5.2	Impact d’une plaque $(90, 0)_s$	130
5.2.1	Description du problème	130
5.2.2	Essai élastique	131
5.2.3	Comparaison quasi-statique – dynamique implicite	132
5.2.4	Ruines des deux interfaces	135
	Essai sans précaution supplémentaire	135
	Renforcement en compression	135
	Contact frottant	136
	Non-endommagement en cas de forte compression	139
	Synthèse	139
5.3	Une incursion dans les grands déplacements	140
5.3.1	Retour sur l’impact de la plaque $(90, 0)_s$	141
	Conclusion	145
	Perspectives	146
A	Annexe du corps principal	151
A.1	Écriture matricielle explicite du modèle SCLS1	151
A.1.1	Matrice de souplesse du modèle SCLS1	151
A.1.2	Vecteur pré-déformations et efforts extérieurs	153
A.2	Condensation statique d’un multiplicateur de Lagrange	155
A.3	Tableaux résultats pour l’analyse modale	155
A.4	Matrices d’inerties	158
A.5	Expression de la matrice de rigidité membranaire endommagée	159
A.5.1	Changement de base des déformations et des rigidités	159
A.5.2	Endommagement dans le sens longitudinal et transverse	160
A.5.3	Simplification de l’interpolation pour un matériau orthotrope	161
A.6	Quelques expressions alternatives aux rigidités d’interfaces endommagées	162
A.6.1	Dégradation des rigidités d’interfaces	162
A.6.2	Rigidification des interfaces	162
A.6.3	Discussion	164
B	Tour d’horizon des modèles de plaques multiparticulaires	165
B.1	Les modèles possédant une approximation membranaire de degré 1 par couche	166
B.1.1	Le modèle $M4 - 7n$	166
B.1.2	Modèle LS1 avec prises en compte des couplages	166
B.1.3	Le modèle $M4 - 3nP$	168
B.1.4	Le modèle $M4 - 2n + 1P$	170
B.1.5	Le modèle de Love-Kirchhoff multicouches	172
B.1.6	Synthèse des modèles ayant une approximation membranaire de degré 1	176
B.2	Les modèles possédant une approximation membranaire constante par couche	177
B.2.1	Le modèle SCLS0	177
B.2.2	Le modèle LS0	179
	Condensation de l’effort généralisé π et équations générales	179
	Simplification du modèle	181
B.2.3	Modèle condensé L-LS0 par l’utilisation d’une intégration approchée	181
B.2.4	Le modèle $M4 - 2n + 1m$	182
B.3	Homogénéisation de plusieurs plis	183

B.3.1	Illustration sur un exemple simple	184
C	Déformation uni-axiale : solutions analytiques	187
C.1	Solution analytique 1D	188
C.2	Résultats généraux pour une solution homogène	188
C.2.1	Densité $w(d) = \xi d + (1 - \xi)d^2$	189
	Fonction de fissuration linéaire simple	189
	Fonction de fissuration quadratique simple	190
	Fonction de fissuration géométrique mixte linéaire et quadratique	191
C.2.2	Rupture cohésive	192
C.2.3	Densité d'énergie de fissuration de type « Traction-séparation »	193
	Cas particulier de l'interpolation linéaire $v(d) = d$	193
	Détermination du paramètre κ par une approche semi-analytique	195
C.3	Application à l'étude du délaminage	197
C.4	Extension du critère elliptique	198
D	Méthodologie générale d'obtention de solutions analytiques dans un cas uni-dimensionnel	201
D.1	Hypothèses générales de travail et conséquences sur les modèles à l'étude	201
D.2	Méthodologie générale pour le modèle LS1	202
D.2.1	Rappel des équations du modèle LS1	202
D.2.2	Hypothèse d'invariance suivant x	203
D.2.3	Écriture des relations de comportement sous forme matricielle	204
D.2.4	Inconnues généralisées	204
D.2.5	Élimination des efforts généralisés par les équations algébriques	204
	Élimination des $2n$ efforts généralisés N_{xx}^i, M_{xx}^i	205
	Élimination des $3n - 2$ efforts généralisés $Q_x^i, \tau_x^{j,j+1}, \tau_y^{j,j+1}$	205
	Élimination des $n - 1$ efforts généralisés d'arrachement $\nu^{j,j+1}$	206
D.2.6	Éliminations des efforts généralisés par condensation des équations différentielles	207
	Condensation des efforts membranaires $N_{xy}^i, N_{yy}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i$	207
	Condensation du déplacement vertical	208
D.2.7	Synthèse	209
D.3	Méthodologie générale pour le modèle $M4 - 2n + 1m$	209
D.3.1	Rappel des équations du modèle $M4 - 2n + 1m$	209
D.3.2	Hypothèse d'invariance suivant x	210
D.3.3	Inconnues généralisées	210
D.3.4	Élimination des efforts généralisés par les équations algébriques	211
	Condensation des n efforts généralisés N_{xx}^i	211
	Condensation des $n - 1$ efforts généralisés $\tau_x^{j,j+1}$	211
D.3.5	Cas particulier $W_3 = 0$	211
D.4	Illustration sur le modèle quadri-couches $(0^\circ, 90^\circ)_s$ en traction	211
D.4.1	Points communs aux différentes modélisations	211
D.4.2	Résolution avec le modèle LS1	213
	Position du problème	213
	Réduction du nombre d'inconnues à l'aide des équations algébriques	213
	Résumé intermédiaire	214
	Condensation des équations par les équations différentielles	215
	Conditions aux limites	217
D.4.3	Résolution avec le modèle $M4 - 2n + 1m$	217
	Condensation à l'aide des équations algébriques	217
	Condensation à l'aide des équations différentielles	218
D.4.4	Analyse du cisaillement d'interface	219
D.5	Résolution du système	220
D.5.1	Solution d'un système d'équations différentielles homogène du second ordre	220
D.5.2	Valeur propre simple	221

E	Solution en cas d'interfaces fissurées	223
E.1	Solution à une seule fissure	223
E.1.1	Expression de la matrice délaminée \mathbb{M}_d	224
E.2	Cas où plusieurs interfaces délaminent	225
E.3	Illustration sur l'essai DCB	225
E.3.1	Position du problème	226
E.3.2	Résolution dans la partie saine	226
	Réduction du nombre d'inconnues à l'aide des équations algébriques	226
	Résumé intermédiaire	227
	Condensation du système d'équations différentielles	228
	Résolution du système différentiel	229
E.3.3	Résolution dans la partie délaminée	230
E.3.4	Résolution sur le domaine complet	231
E.3.5	Analyse des résultats	231
	Analyse des champs en statique	232
	Étude analytique du délaminage pour l'essai DCB	232
F	Ruine des modèles LS1 et SCLS1	235
F.1	Délaminage	235
F.1.1	Une expression de l'énergie élastique	235
	Localisation de l'endommagement et formulation variationnelle	235
	Condensation des multiplicateurs de Lagrange	236
	Interpolation forte et rigidité d'interface	236
F.1.2	Une première approximation de l'énergie élastique	237
F.1.3	Une seconde approximation : l'hypothèse des faibles couplages	238
	Erreur commise lors de l'hypothèse des faibles couplages	241
F.1.4	Simplifications numériques	242
F.2	Autour des matrices tridiagonales	242
F.2.1	Rappels mathématiques	242
F.2.2	Une estimation de la décroissance des termes de la matrice de rigidités \mathbb{C}''	245
F.2.3	Application à la matrice de rigidité en arrachement des modèles multi-particulaires	245
F.2.4	Cas particulier	246
F.2.5	Discussion finale sur les modèles condensés	246
F.3	Ruine intralaminare du modèle LS1	247
F.3.1	Interpolation de la rigidité principale en cisaillement	247
	Interpolation de la rigidité principale	247
	Insuffisance du modèle précédent et interpolation des termes croisés	248
F.3.2	Variation de l'énergie élastique endommagée	250
	Bibliographie	252

Introduction générale

Définition Matériaux composites. *Un composite est un matériau fait de plusieurs constituants dont les propriétés mécaniques diverses permettent, par une synergie féconde, de conférer à l'ensemble des propriétés remarquables.*

On peut citer en exemple, dans le domaine du génie civil, le béton armé, dans lequel les faibles caractéristiques en traction du béton sont compensées par, à l'inverse, les remarquables aptitudes des aciers.

En ce qui concerne l'aérospatial, les enjeux de coût de fabrication, critiques pour l'industrie du bâtiment, sont souvent supplantés par la problématique de *la masse*. Une structure légère offrant à la fois, une élégance de conception et une sobriété énergétique marquée. Dans cette optique, l'utilisation de matériaux composites renforcés par fibres de carbone, dont la densité est 3 à 4 fois moindre que celle de l'acier, pour une résistance à la rupture équivalente parut tôt évidente. Ainsi Rolls Royce utilisa ces matériaux prometteurs dès 1963 pour la conception d'aubes des compresseurs. Cependant, force est de constater presque 60 ans plus tard, que la révolution ne s'est pas totalement imposée et qu'une grande partie des structures tant aéronautiques qu'automobiles sont toujours réalisées à partir d'alliages métalliques. Les raisons de l'inertie au développement de pièces entièrement composites sont diverses :

- Tout d'abord, le plus séduisant caractère des matériaux composites, leur comportement anisotrope, peut parfois se révéler être une faiblesse critique notamment lorsque les chargements extérieurs sont mal connus.
- D'autre part, là où les alliages métalliques présentent une forte plasticité synonyme de ductilité, les matériaux composites renforcés par fibres de carbone rompent de manière *fragile*.
- Enfin, la mise en forme des alliages métalliques est un processus parfaitement maîtrisé tandis que l'élaboration de pièces composites, topologiquement complexes, demeure un défi.

0.1 Caractérisation mécanique des fibres de carbonées

0.1.1 Anisotropie des matériaux fibrés

L'anisotropie des matériaux composites renforcés par fibres de carbone se dissimule dans leur micro-structure. L'observation au microscope électronique à balayage d'un échantillon révèle la forme filamentaire des fibres de carbonées. Leur longueur caractéristique est de l'ordre du mètre alors que leur rayon est micrométrique.

La différence des modules d'élasticité entre les sens longitudinal et transverse ($E_L \sim 130\text{GPa}$, $E_T \sim 7.7\text{GPa}$ pour la fibre T700GC/M21 [Hongkarnjanakul et al., 2013]) est extrêmement marquée ce qui explique l'anisotropie du comportement macroscopique du composite fibre matrice. La mise en forme de pièces composées de ces fibres s'effectue en plusieurs temps. D'abord les filaments sont tissés pour former une surface extrêmement mince dont une grande majorité des fibres possède la même orientation. Plusieurs dizaines de ces tissus sont ensuite empilés et une *matrice*, généralement de la résine époxy, est coulée afin de conférer rigidité à l'ensemble. L'assemblage d'un tissu de fibres de carbone, orienté selon une direction, et de la matrice l'enveloppant est appelé un *pli*. Afin de pallier les aléas des chargements qui sollicitent les structures, les plis sont généralement empilés de sorte que les *directions principales* des différentes couches soient distinctes.

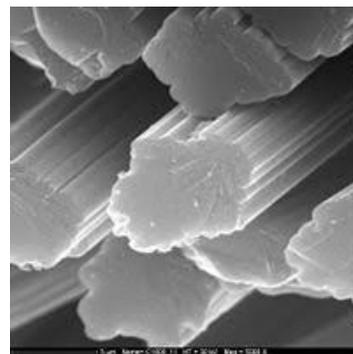


FIGURE 1 – Fibre de carbone observée au microscope électronique à balayage

Par exemple les composites orientés à 0° sont constitués d'une séquence de plis dont la plupart ont leurs fibres orientées dans la direction à 0° . Ce faisant, le mille-feuille résultant possède une résistance accrue dans cette direction. Les composites dits *quasi-isotropes* sont quant à eux obtenus en empilant les feuilles suivant des directions variées, afin d'obtenir une bonne tenue quelle que soit la direction de sollicitation.

Notation Orientations des plis constituant le stratifié. *Les orientations des différentes couches sont précisées en concaténant les directions principales des plis successifs. Le cas échéant, un sous-script « s » est ajouté pour mentionner la symétrisation de tout ou partie d'une séquence de l'empilement. Un « n » désignera quant à lui une succession de n plis orientés dans la même direction. Par exemple, un $[45_2, -45_2, (0_2, 90_2)_s]_s$ désignerait, de manière remarquablement concise, un stratifié comportant 24 plis, successivement orientés à :*

$$[45, 45, -45, -45, 0, 0, 90, 90, 90, 90, 0, 0, 0, 0, 90, 90, 90, 90, 0, 0, -45, -45, 45, 45]$$

Définition Composites stratifiés. *On appelle composite stratifié un matériau dont la micro-structure est semblable à un mille-feuille, la séquence d'empilement des plis, aux caractéristiques mécaniques souvent différentes, explique leur comportement mécanique macroscopique.*

0.1.2 Mécanismes de rupture dans les matériaux composites

L'initiation de la rupture peut être considérée comme la création de fissures à l'échelle microscopique (celle des constituants) à partir d'un défaut. On parlera de micro-fissuration. La propagation de la rupture elle, sera le résultat de la création de nouvelles surfaces de déchirures à l'échelle macroscopique (plusieurs fois celle des constituants), à partir des micro-fissures. On parlera de macro-fissuration. Dans le cas des matériaux composites, l'initiation de la rupture se produit généralement bien avant l'observation d'un changement du comportement macroscopique.

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires (voir figure 2 [p. xi]) :

- la rupture transverse de la matrice,
- la rupture longitudinale de la matrice,
- la décohésion entre deux plis,
- la rupture de l'interface fibre-matrice.
- la rupture de fibres,

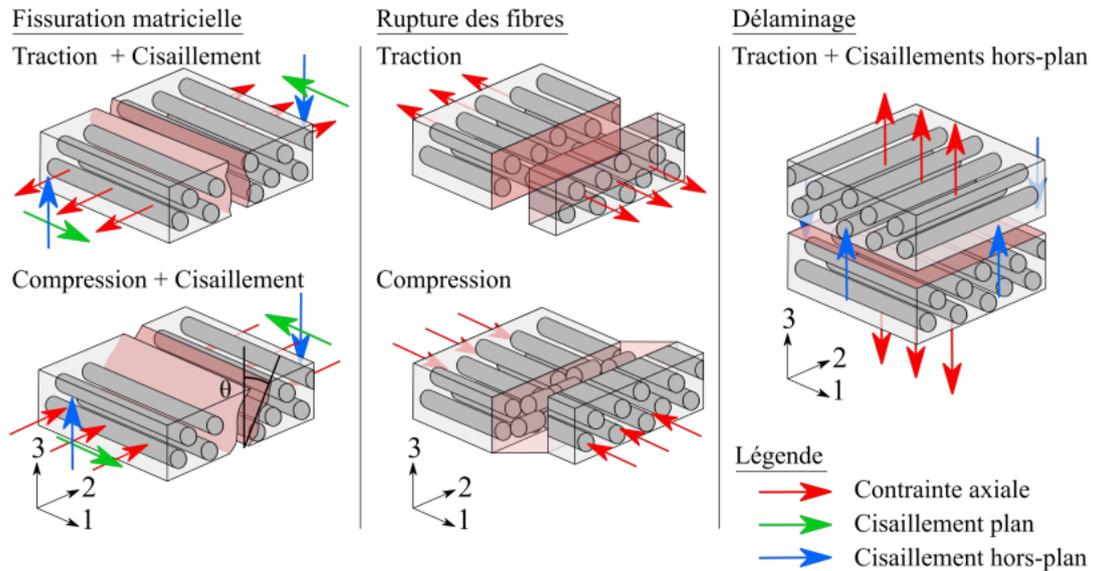


FIGURE 2 – Modes de ruines d'un composite stratifié ([Germain, 2020])

Généralement, un mécanisme élémentaire ne survient pas isolément, mais divers processus co-existent, qui se développent différemment selon la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées. Deux lieux d'apparition des cassures se distinguent : au sein d'un pli, on parlera de mécanisme intra-laminaire, à la frontière entre deux plis consécutifs, on parlera de mécanisme inter-laminaire. Lors d'une sollicitation mécanique, l'un des premiers mécanismes d'endommagement se produisant à de faibles niveaux de contraintes est la fissuration matricielle. Elle correspond à l'apparition d'une fissure dans la matrice, suivant un plan parallèle à la direction des fibres. Le deuxième mécanisme de dégradation observé est le phénomène inter-laminaire nommé délaminage, dans lequel deux plis consécutifs, initialement solidaires, se séparent. Le délaminage est un mécanisme critique pour les structures composites, car il affecte la cohésion des plis de la structure et par conséquent la répartition des efforts dans les différents plis. Le délaminage se produit essentiellement lorsque les contraintes de cisaillement ou d'arrachement entre deux plis consécutifs deviennent trop importantes. Ce mécanisme est aussi sournois que critique, car imperceptible à l'inspection oculaire d'un opérateur (voir [Zhang et al., 2015]).

Une juste évaluation des contraintes de cisaillement entre les plis est donc d'un enjeu clé pour l'anticipation du délaminage et l'évaluation de la résistance des composites stratifiés.

0.2 Dimensionnement de structures en bureau d'étude

Le dimensionnement consiste à définir la géométrie et les matériaux à retenir en composition des différentes parties d'une structure. Pour illustrer ce propos, et justifier la nécessité de disposer d'un modèle capable de simuler la déformation de pièces dans une vaste gamme d'élançements, nous prendrons l'exemple des grandes phases de conception mécanique appliquées en aviation.

La résolution frontale multi-critères y demeure à ce jour inaccessible, pour des raisons techniques et numériques hors de notre sujet. Par conséquent, le problème de dimensionnement doit se concevoir découpé en sous-tâches à mener séquentiellement. Des allers-retours entre les meilleures solutions obtenues pour chacun des sous-problèmes permettent la convergence vers la géométrie et la composition finale de l'objet.

1. La structure pouvant mesurer une dizaine de mètres, est d'abord évaluée selon des critères aérodynamiques. Des simulations prédisent son interaction générale avec le fluide environnant, calculant ainsi les contraintes globales extérieures qui s'appliquent sur elle (par exemple l'effort vertical supporté par la voilure, la résultante des efforts de traînée etc...). À ce stade, établir la mécanique de déformation précise du solide, soumis aux efforts extérieurs, n'est pas essentiel. Seule la partie externe de l'avion est prise en compte pour apprécier l'interaction fluide-structure, et sa déformation est présumée petite. À cette échelle, les forces affectant l'avion ne sont déterminées que de manière très générale.
2. Ensuite, compte-tenu des sollicitations déterminées, débute la phase de conception structurelle à proprement parler. Non seulement la forme générale mais aussi l'architecture interne permettant à l'ensemble de résister aux efforts extérieurs doivent être précisées. Ainsi, sont éventuellement placés dans la voilure les raidisseurs nécessaires à augmenter sa rigidité, des pièces critiques sont épaissies etc... Mais l'échelle d'étude reste encore de l'ordre du mètre et les modèles utilisés demeurent assez grossiers. C'est la tenue en fonctionnement « normal » de l'appareil qui est étudiée.
3. Enfin, pour prédire le comportement de la structure confrontés à des situations inhabituelles, des phénomènes locaux, susceptibles de se produire à des échelles caractéristiques très inférieures, doivent être envisagés. L'impact et ses dégâts résultants s'inscrivent dans cette problématique. Aussi, doit-on alors recourir à des modèles très raffinés qui anticipent, cette fois à des échelles centimétriques, les éventuels phénomènes de ruine. Ces modèles précis imposent d'être d'abord justifiés théoriquement, puis, que leur pertinence expérimentale soit mise à l'épreuve d'essais sur des pièces élémentaires. Leur validité une fois attestée, ces modèles sont employés pour déterminer la mécanique de déformation de la zone d'intérêt représentée finement, et au contour de laquelle s'appliqueront les conditions aux limites issues du calcul global de structure.

Si la première étape mentionnée plus haut sort du cadre de notre étude, les deux suivantes, relevant de calculs de mécanique des solides, s'y inscrivent parfaitement. Ces étapes 2 et 3 se distinguent l'une de l'autre par des échelles caractéristiques très différentes : de l'ordre du mètre pour la deuxième, plutôt du centimètre pour la troisième. L'on comprend alors la nécessité de posséder un modèle mécanique permettant de simuler sobrement des essais dans une large gamme de tailles et d'élancements. En plus de raccourcir notablement le temps de conception, un modèle robuste autorise une réduction des coefficients de sécurité, qui dépendent non seulement de l'incertitude relative aux sollicitations mais également du degré de confiance accordé au modèle mécanique utilisé.

0.3 Modélisation des structures stratifiées

Les structures en mille-feuille sont caractérisées par un élancement, c'est à dire un rapport épaisseur/longueur extrême qui rend leur modélisation analytiquement et numériquement ardue. En effet, l'épaisseur typique d'un pli n'est que de $200\mu\text{m}$, alors que les dimensions transverses de structures fabriquées, elles, sont de l'ordre du mètre. La modélisation tridimensionnelle de la structure à l'aide du modèle 3D de Cauchy avec prédiction de réponse à l'aide d'éléments finis volumiques standards sont donc inenvisageables à grande échelle. Les structures composites peuvent avantageusement être considérées comme des plaques, ou des coques, et donc représentées à l'aide de modèles bidimensionnels. Ainsi, par construction, les modèles de plaques ou de coques usuels réalisent un procédé d'intégration dans l'épaisseur, pour dégénérer le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel. Mais alors, cette réduction s'accompagne le plus souvent d'une perte d'informations quant à la répartition des champs mécaniques dans l'épaisseur de la plaque. Une description exhaustive de tous les modèles existants

pour la caractérisation des structures minces serait illusoire. Aussi, allons-nous nous limiter à la présentation des approches dites axiomatiques et distinguer deux grandes familles : d’une part les modèles de plaques formulés « en contraintes », d’autre part les modèles de plaques « en déplacements », dont nous efforcerons de mettre en lumière les forces et faiblesses respectives.

Un panorama complet, et excellemment présenté, des modèles utilisés pour l’étude des structures multi-couches est donné dans [Altenbach et al., 2010, Bischoff et al., 2018, Carrera, 2002].

Définition Feuillet de référence. Nous appelons feuillet de référence ou plan moyen de la plaque la surface ω autour de laquelle la plaque est géométriquement symétrique.

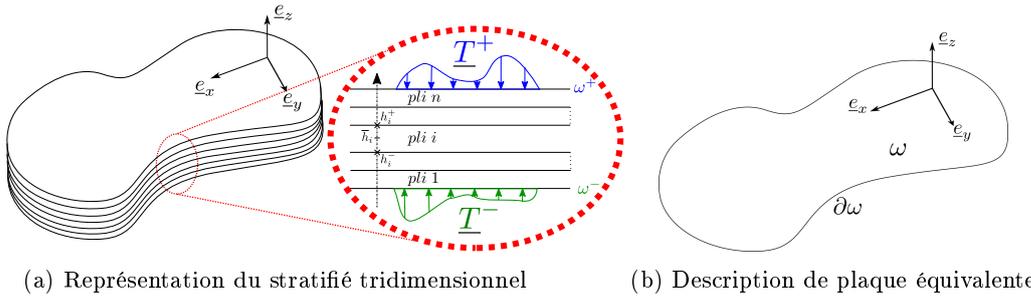


FIGURE 3 – Structure en mille feuilles 3D et sa représentation équivalente à l’aide d’un modèle bidimensionnel

0.3.1 Les modèles axiomatiques en déplacements

Sans doute, pour leur plus grande simplicité conceptuelle et mathématique, les modèles en déplacement ont été l’objet d’une littérature abondante au cours du dernier siècle. Dans ce vaste groupe, que nous allons nous empresser de segmenter, un *postulat* portant sur la cinématique dans l’épaisseur de la plaque est réalisé. Suivant la complexité de cette hypothèse, la variété des champs de déplacements reproductibles donc la finesse de l’approximation, sera extrêmement variable.

Approche mono-couche équivalente en déplacement

Dans ce type d’approche, le multi-couche hétérogène est réduit à une unique couche homogène dont les propriétés matériaux équivalentes se veulent être représentatives de chacun des constituants sous-jacents. Cette théorie puise sa force dans la branche de la mécanique appelée *homogénéisation*, dont le rôle est précisément de déduire d’une hétérogénéité locale complexe, des propriétés globales équivalentes plus simples en « floutant » plus ou moins les grandeurs. Un des avantages évident des modèles mono-couche équivalents est que le nombre d’équations du modèle ne dépend pas du nombre de plis constituant le stratifié. Une routine est effectuée *avant tout calcul* pour déduire des propriétés élastiques équivalentes, qui sont alors utilisées, pour la résolution des équations pilotes.

Modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff Le modèle de « Kirchhoff [1850]–Love [2013] », souvent désigné dans la littérature sous la dénomination « Classical Lamination Theory (CLT) », est le plus simple et le plus ancien modèle de plaque formulé en déplacement. Il postule une répartition des déplacements affines dans chaque couche ainsi que l’orthogonalité de la normale au plan moyen. Il peut être considéré comme le pendant bidimensionnel de la théorie des poutres d’Euler Bernoulli. Une propriété remarquable de ce modèle, qui justifie sa longévité, est la convergence asymptotique du problème tridimensionnel, au fur et à mesure que l’élanissement augmente, vers le modèle de LK pour les solides isotropes. Sur le plan mathématique, Morgenstern [1959] fut le premier à prouver en 1959 que la théorie de LK était correcte pour les plaques minces. Ciarlet and Destuynder [1979], puis Ciarlet [1997] dans sa trilogie

consacrée à l'élasticité, ont établi des estimations rigoureuses de l'erreur entre la solution du problème élastique 3D et sa limite.

Le modèle de plaques épaisses ou modèle de « Reissner Mindlin » Le modèle de « Reissner [1945]–Mindlin [1951] », (souvent désigné comme « First-order Shear Déformation Theory (FSDT) ») est une version légèrement complexifiée du cas précédent. Elle suppose toujours un déplacement affine par couche, mais autorise une rotation de la normale par rapport au plan moyen de la plaque :

$$u_\alpha(x, y, z) = U_\alpha(x, y) + z\phi_\alpha(x, y), \quad u_3(x, y, z) = U_3(x, y)$$

La déformation résultante $\varepsilon_{\alpha\beta} = U_{\alpha,\beta} + z\phi_{\alpha,\beta}$ est affine en z , tandis que les déformations $\varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2}(\phi_\alpha + U_{3,\alpha})$ sont constantes en z . Par conséquent, d'après la loi de comportement tridimensionnel, les contraintes dans le plan $\sigma_{\alpha\beta}$ et en cisaillement transverse $\sigma_{\alpha z}$ sont elles-mêmes respectivement affine et constante par couche. Il s'agit là d'une mauvaise approximation, car une contrainte membranaire $\sigma_{\alpha\beta}$ affine en z devrait, en toute rigueur, d'après les équations d'équilibre, induire une contrainte de cisaillement $\sigma_{\alpha z}$ quadratique en z . De plus, le modèle prévoit une déformation normale nulle $\varepsilon_{zz} = 0$, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse classique des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$). De tout cela résulte que le modèle prédit relativement mal le comportement en cisaillement transverse et qu'il lui faut introduire la notion d'un coefficient correcteur pour améliorer la prise en compte des effets de cisaillement hors plan. Ce coefficient habituellement retenu avec pour valeur $\kappa = 5/6$ est quelque peu arbitraire, et de nombreuses études mentionnent le flou qui existe sur sa dépendance à l'empilement et à l'anisotropie. Cette problématique majeure a logiquement donné naissance à une riche littérature, proposant diverses équations pour fixer la « bonne valeur » de κ : [Murthy, 1981, Pai, 1995, Whitney, 1973].

Les modèles d'ordre supérieur Pour améliorer la mauvaise approximation du cisaillement transverse des modèles classiques du premier ordre, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées dans la littérature. La plupart utilisent un développement en série entière tronqué du champ de déplacement sous la forme suivante :

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{U}(x, y) + \sum_{k=1}^n z^k \underline{\phi}_k(x, y), \quad (1)$$

où n détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Le développement polynomial (1) peut être complexifié virtuellement sans aucune limite. Cependant l'augmentation du nombre de degrés de liberté concomitant à l'ajout de chaque terme limite la troncature à des ordres assez faibles. Parmi ces théories, les plus connues sont :

- ★ La « Third-order Shear Deformation Theory (TSDT) » dont le champ de déplacement s'écrit sous forme générique :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, y, z) &= U_\alpha(x, y) - zU_{z,\alpha}(x, y) + f(z)(\phi_\alpha(x, y) + U_{z,\alpha}(x, y)) \\ u_z(x, y, z) &= U_z(x, y) \end{aligned}$$

Les champs inconnus sont les mêmes que ceux considérés dans la théorie de Reissner-Mindlin ($U_\alpha, \varphi_\alpha, U_z$). Par construction, la déformation de cisaillement est égale à $\varepsilon_{\alpha z} = f'(z)(\phi_\alpha(x, y) + u_{z,\alpha})$, si bien que la dérivée de la fonction $f(z)$ donne la distribution de la déformation de cisaillement transverse dans l'épaisseur. Cette fonction est souvent appelée « fonction de cisaillement » et a connu des expressions assez variées dans la littérature [Aydogdu, 2009, Reddy, 1984, Reissner, 1974, Touratier, 1991]. La fonction $f(z)$ est souvent définie en respectant $f'(\pm h/2) = 0$ annulant ainsi la déformation de cisaillement aux bords de la plaque. Par conséquent, les conditions aux limites de bord libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont satisfaites ($\sigma_{\alpha z}(z = \pm h/2) = 0$). Une fonction $f(z)$ cubique en z , induit une expression des contraintes de cisaillement transverse parabolique dans l'épaisseur, plus conforme à la réalité dans des plaques homogènes. Cette approche a remporté un succès assez certain et fut encore récemment

employée pour traiter des problèmes de plaques anisotropes (voir par exemple [Aghabaei and Reddy, 2009, Hashemi et al., 2012, Hosseini-Hashemi et al., 2011]).

- ★ Le modèle cubique de Kant et al. [1982], Kant and Khare [1997] ressemble à celui donné par Reddy [1984] à ceci près que les fonctions, qui constituent les coefficients du développement polynomial, n'ont pas été choisies pour assurer la continuité de la contrainte de cisaillement tangentielle et que la formulation est directement discrétisée pour l'application éléments finis. La cinématique qui comprend 9 degrés de libertés est la suivante :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, y, z) &= U_\alpha(x, y) + z\theta_\alpha(x, y) + z^2U_\alpha^*(x, y) + z^3\theta_\alpha^*(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= U_z(x, y) \end{aligned}$$

Approche cinématique par couche

Les modèles de type mono-couche équivalente donnent une bonne approximation du comportement global de la structure multi-couche et s'avèrent numériquement sobres car le nombre des champs inconnus n'y dépend pas du nombre de plis. Cependant, par essence, ils floutent les grandeurs locales, en proposant un comportement global équivalent et ne peuvent donc être utilisés pour étudier des phénomènes locaux singuliers (discontinuité des contraintes aux interfaces, non-satisfaction des conditions aux limites, ...). Pour les stratifiés élancés, cette erreur peut rester acceptable, en revanche elle devient critique pour les structures multi-couches épaisses. Pour s'affranchir de ces limitations, les approches par couche (*layerwise*) postulent la forme des champs inconnus dans chaque pli constituant le stratifié. Chaque couche est considérée comme une plaque indépendante, si bien que le nombre d'équations, la complexité, et le coût numérique augmentent avec la subdivision. Il faut noter que les champs inconnus sont indépendants dans chaque couche, mais les continuités des déplacements et des contraintes transversales doivent être satisfaites aux interfaces. Ces théories *layerwise* peuvent être basées sur des approches en déplacement, en contrainte ou des approches mixtes.

Le modèle layerwise de Reddy L'un des modèles les plus connus est celui de Reddy [1987] basé sur une approche en déplacement. Dans cette théorie, une interpolation lagrangienne unidimensionnelle est utilisée pour la variation transversale des déplacements. La cinématique proposée induit des déformations dans le plan, continues suivant l'épaisseur, alors que les déformations transversales sont discontinues au niveau des interfaces. Cette discontinuité permet en revanche d'assurer la continuité des contraintes de cisaillement. Le modèle de Reddy est très général et n'importe quel degré d'interpolation peut y être utilisé. Les déplacements de la couche k sont postulés sous la forme [Barbero et al., 1990, Nosier and Bahrami, 2006, Reddy, 1987] :

$$u_\alpha^k(x, y, z) = \sum_{j=1}^m U_\alpha^k(x, y)\phi_j^k(z) \quad u_z^k(x, y, z) = \sum_{j=1}^m U_\alpha^z(x, y)\psi_j^k(z)$$

Les fonctions interpolant le déplacement dans l'épaisseur sont souvent les polynômes d'interpolation de Lagrange. Les approches par couche en déplacement dans lesquelles le déplacement transversal est considéré constant dans l'épaisseur de la plaque (c'est-à-dire lorsque la déformation normale transverse est négligée) donnent des résultats plus précis par rapport aux approches de type mono-couche équivalente. Cependant, ces approches perdent leurs efficacité quand il s'agit de déterminer les contraintes interlaminaires près des discontinuités géométriques, telles que les bords libres, les trous etc. Dans l'étude de ces effets locaux, la prise en compte de la déformation normale transverse, négligeable au milieu de la plaque, devient prédominante.

Solide like-shell

Pour finir, il convient de mentionner les approches dites de coques solides qui prennent leur racine dans la simulation numérique des stratifiés. Partant du constat que les éléments volumiques souffrent du problème de verrouillage lorsque leur élancement est fort, des éléments 3D augmentés d'une hypothèse sur la distribution du champ de déplacements ont été proposés.

Il semblerait que le pionnier en la matière soit [Parisch \[1995\]](#), qui a postulé une interpolation quadratique des déplacements dans un élément solide.

$$\underline{u} = \underline{u}_0(x, y) + z\underline{u}_1(x, y) + (1 - z^2)\underline{u}_2(x, y)$$

Les deux premiers termes représentent la cinématique classique d'une coque, y compris le changement d'épaisseur, le troisième terme est une fonction bulle nécessaire pour obtenir les courbures de flexion dans un cadre 3D. Comparativement aux éléments volumiques standards, les avantages des éléments de coque-solide sont :

- (1) Selon la formulation de coque, l'intégration numérique est réduite à deux dimensions. Les points d'intégration sont situés sur la surface centrale de la coque. Une intégration explicite à travers l'épaisseur de la coque est effectuée au point d'intégration.
- (2) Le verrouillage des éléments standards à 8 nœuds, qui les rendent inutilisables pour les applications de plaque mince est éliminé.
- (3) Le temps de calcul est réduit d'environ un tiers par rapport aux éléments 3D.

Ces modèles ont été utilisés, semble-t-il avec succès, pour l'étude du délaminage (voir par exemple [[Hashagen and de Borst, 2000](#), [Remmers et al., 2003](#)]).

0.3.2 Les modèles axiomatiques formulés en contraintes

A l'inverse, les modèles de plaques formulés « en contraintes » postulent une répartition des efforts dans l'épaisseur du pli ou, tout du moins, se fondent sur les équations d'équilibres. La cinématique « moyenne » est alors obtenue par dualité. La première construction de ce type revient à [Reissner \[1947\]](#) pour les plaques isotropes homogènes et les travaux successifs ultérieurs n'ont fait qu'enrichir et étendre cette brillante idée fondamentale. Selon nous, certains de ces modèles sont les candidats les plus prometteurs pour l'étude des contraintes et des efforts singuliers. En effet, l'étude des coques et des plaques doit se comprendre à l'aune de la dualité. Un modèle postulant un *déplacement avec précision* ne déterminera que des « contraintes moyennes », une théorie en contraintes inversera les rôles. Les efforts inter-laminaire constituant notre grandeur d'intérêt principal, nous utiliserons donc préférentiellement un des modèles de cette section.

Théorie du « bending gradient » Poursuivant le raisonnement de [Reissner \[1945\]](#), [Lebée and Sab \[2011a,b\]](#) ont récemment dérivé un nouveau modèle pour les plaques épaisses hétérogènes, appelé théorie du gradient de flexion. Selon ce modèle, la force de cisaillement hors plan classique de Reissner-Mindlin est remplacée par une force de cisaillement généralisée, liée au premier gradient du moment de flexion. La théorie du « bending gradient » est donc considérée comme une extension aux plaques stratifiées de la théorie de Reissner-Mindlin et ne coïncide avec celle-ci que dans le seul cas d'une plaque homogène. Les comparaisons au modèle de Reissner-Mindlin et à la solution analytique tridimensionnelle de [Pagano \[1969\]](#) dans [[Lebée and Sab, 2011b](#)] ont prouvé l'efficacité du « bending gradient » à prédire la déflexion et la répartition de la contrainte du cisaillement.

Les modèles en contraintes par couche D'autres travaux ont préconisé l'utilisation de modèles de plaques par couches, basés sur les contraintes, pour une description précise des efforts d'interfaces. Ainsi, [Pagano \[1978\]](#), employant la formulation variationnelle mixte de Hellinger-Reissner, a proposé un modèle local, en supposant un développement polynomial de la contrainte membranaire dans chacune des couches. Souffrant d'une certaine lourdeur opérationnelle, des modèles simplifiés inspirés des travaux de Pagano ont ensuite été proposés. Le modèle « M4-2n+1 » [[Chabot, 1997](#), [Diaz and Caron, 2006](#)] ou le modèle plus raffiné « M4-5n » [[Caron et al., 2006](#), [Chabot, 1997](#), [Diaz et al., 2011](#), [Naciri et al., 1998](#)] en sont deux exemples. Le modèle M4-5n, rebaptisé par la suite LS1 (*Layerwise Stress 1*) pour renvoyer au fait que ce modèle Layerwise est basé sur une expansion polynomiale du premier ordre de la contrainte membranaire, sera l'objet d'une grande partie du présent ouvrage. Puis, plus tard, la théorie SCLS1 (*Statically Compatible Layerwise Stress 1*) [[Baroud et al., 2016](#)] appuyée sur les idées

du modèle LS1 pour proposer un champ de contraintes statiquement compatible avec une expression affine des contraintes membranaires par couche. Les nomenclatures LS1 et SCLS1 inscrivent les deux modèles dans la *Carrera Unified Formulation* proposée par Carrera [2002].

La force de ces modèles est, par construction, de fournir une reproduction fidèle du champ des contraintes à l'intérieur de chaque pli constituant le mille-feuille et donc une estimation précise des efforts inter-laminaires. Ils ont été utilisés avec succès pour de nombreux articles au cours des 20 dernières années [Nguyen and Caron, 2009, Saeedi et al., 2012a,b]. Aussi, nous détaillerons la construction de ces deux modèles dans la suite de l'exposé et nous nous efforcerons de souligner leurs pertinences pour l'étude des matériaux composites autant en terme de finesse de résultats qu'en terme de sobriété en temps de calcul. Certes, leur complexité génère nécessairement un coût numérique plus élevé que pour les théories de Love-Kirchhoff, cependant ils offrent néanmoins une excellente alternative au modèle tridimensionnel utilisé jusqu'alors pour capter les phénomènes singuliers produits aux voisinages des bords libres dans les plaques anisotropes. De nombreux autres modèles (M4-3n, SCLS0, LS0...) développés au sein du laboratoire Navier entrent dans la présente section. Une annexe B [p. 165] leur est réservée avec, le cas échéant, des références bibliographiques qui les ont exploitées. En outre, nous présenterons dans cette annexe une formulation unifiée et œuvrerons à montrer que tous se déduisent en réalité du modèle SCLS1.

0.3.3 Les modèles zig-zag

Toute tentative de catégorisation amène son lot d'exception. Aussi, avons-nous jugé utile de séparer les modèles zig-zag des deux grandes familles précédentes, quand bien même certain d'entre eux peuvent se ranger strictement dans l'une ou l'autre.

L'idée principale des modèles zig-zag consiste à postuler la forme des déplacements ou des efforts dans chaque couche, puis d'écrire la continuité des déplacements et des contraintes transversales au niveau des interfaces, afin de réduire le nombre des champs inconnus. Les déplacements sont continus dans toute l'épaisseur du stratifié, mais en raison des ruptures de pentes à chaque interface, les déformations, elles, ne le sont pas. Le nom de ces modèles provient de la forme en zig-zag des champs dans l'épaisseur des structures multi-couches. Ces théories sont rangées dans trois groupes dont nous allons expliciter l'esprit.

Approche de Lekhnitskii-Ren Il semblerait que la première théorie zig-zag ait été proposée par Lekhnitskii [1935] pour l'analyse des poutres composites. Ren [1986] a par la suite étendu son utilisation aux plaques multi-couches. Cette théorie est basée sur une approche en contrainte dans laquelle les efforts de cisaillements transverses sont postulés :

$$\sigma_{\alpha z}^k = \xi_{\alpha}(x, y)a_{\alpha}^k(z) + \eta_{\alpha}(x, y)b_{\alpha}^k(z)$$

Quatre fonctions indépendantes ξ_{α} et η_{α} sont utilisées pour la description des contraintes de cisaillement transverse. Les fonctions $a_{\alpha}^k(z)$, $b_{\alpha}^k(z)$ sont paraboliques en z et assurent la continuité des contraintes $\sigma_{\alpha z}$ aux interfaces. En intégrant les déformations et en imposant la continuité aux interfaces, les déplacements dans le plan induits sont cubiques en z dans chaque couche et continus aux interfaces. On constate que le modèle est constitué de sept champs inconnus.

Approche de Ambartsumian-Whitney-Rath-Das Ambartsumian [1958, 1964], Ambartsumian et al. [1962], Whitney [1969], Rath and Das [1973] ont par la suite développé une théorie en contrainte zig-zag légèrement différente de celle formulée précédemment. Dans la leur, les contraintes de cisaillement transverse sont prises de la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^k &= [Q_{55}^k f(z) + a_{55}^k] \phi_x(x, y) + [Q_{45}^k f(z) + a_{45}^k] \phi_y(x, y) \\ \sigma_{yz}^k &= [Q_{45}^k f(z) + a_{45}^k] \phi_x(x, y) + [Q_{44}^k f(z) + a_{44}^k] \phi_y(x, y)\end{aligned}$$

Les variations dans le plan des contraintes de cisaillement transverse sont liées à deux fonctions indépendantes φ_x et φ_y . Les paramètres a_{55}^k , a_{45}^k , a_{44}^k sont déterminés en imposant la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces, tandis que $f(z)$ assure celle des déplacements. En supposant $\varepsilon_{zz} = 0$, le champ de déplacement s'obtient par intégration :

$$\begin{aligned} u_x^k(x, y, z) &= u_x^0(x, y) - zu_{z,x}(x, y) + G_1^k(z)\phi_x(x, y) + G_2^k(z)\phi_y(x, y) \\ u_y^k(x, y, z) &= u_y^0(x, y) - zu_{z,y}(x, y) + G_3^k(z)\phi_x(x, y) + G_4^k(z)\phi_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= u_z^0(x, y) \end{aligned}$$

On constate que le nombre des champs inconnus dans ce modèle est le même que dans le modèle de Reissner-Mindlin. Ce type d'approche zig-zag a été utilisé dans plusieurs études de recherche notamment dans les travaux de Di Sciuva [1985], Lee et al. [1990].

Approche de Reissner-Murakami-Carrera Il s'agit probablement ici de la théorie zig-zag la plus populaire. Elle fut initialement présentée par Murakami [1986] s'appuyant sur la formulation variationnelle mixte de Reissner [1984]. Le postulat de base est un enrichissement de la cinématique de Reissner-Mindlin à l'aide d'un champ de déplacement dans le plan zig-zag marqué par l'indice Z :

$$u_\alpha(x, y, z) = U_\alpha^0 + z\phi_\alpha + (-1)^k \zeta^k U_\alpha^Z \quad u_z(x, y, z) = U_z^0(x, y)$$

$\zeta^k = 2z^k/e^k$ est une coordonnée adimensionnée (z^k est la coordonnée physique de la couche k dont l'épaisseur est e^k). Le terme $(-1)^k$ change le signe du terme zig-zag dans chaque couche. Cette manipulation permet de reproduire la discontinuité de la déformation, dans la direction transverse, qui provient physiquement de l'anisotropie transversale des structures multicouches.

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{U}(x, y) + \sum_{k=1}^n z^k \underline{\phi}_k(x, y) + u_\alpha^Z(x, y) \underline{e}_\alpha$$

N.B. Quelques références font appel à ce modèle général : Carrera [1998a,b, 1999] Les avantages des modèles de type zig-zag sont divers, ainsi les continuités de déplacements et de contraintes aux interfaces y sont assurées, tandis que le coût numérique demeure contenu pour une précision satisfaisante. Toutefois, l'estimation des contraintes singulières y est mauvaise, tout comme la prévision au voisinage des conditions aux limites.

0.4 Comportement des composites à matrice polymère

Quelques modèles mécanique propices à la mise en équations des composites stratifiés présentés, il convient maintenant de sélectionner une loi de comportement reliant les contraintes subies par la structure aux déformations résultantes. Des lois d'état variées sont utilisées pour représenter finement les caractéristiques des stratifiés. Cette diversité s'explique par la forte anisotropie des constituants sous-jacents, ainsi que par la complexité des phénomènes de fissuration et de leur simulation.

Précisons d'emblée que, comme pour la localisation de la ruine, les lois de comportement se scindent en deux catégories : celles relatives aux plis, et celles quantifiant les interfaces. En fait, cette distinction a peu de réalité physique, car la démarcation entre deux couches consécutives n'est pas *a priori* constituée d'un matériau particulier, justifiant l'utilisation d'une loi d'état propre. Néanmoins, du fait de la représentation numérique de l'interface par des zones/surfaces cohésives, comme détaillé à la section suivante, des caractéristiques mécaniques propres sont généralement prêtées aux interfaces. Le détail exhaustif des lois d'état retenues pour la simulation des composites stratifiés sortant du cadre de ce travail doctoral, nous nous en tiendrons à présenter quelques écarts au « comportement élastique anisotrope classique » que nous pourrions accorder aux matériaux étudiés ici.

Loi particulière de comportement du pli Les couches sont constituées d'un mélange de fibres de carbone et d'une matrice garantissant la cohésion de l'ensemble. Les fibres possèdent des modules d'Young de compression et en traction distincts, conférant à l'ensemble du pli un comportement analogue. Une loi élastique non linéaire est par conséquent occasionnellement utilisée [Boutaous et al., 2006, Yokozeki et al., 2005, 2006] pour modéliser le comportement longitudinal du pli.

Les déformations permanentes consécutives aux essais d'indentation ou sous l'effet de certaines sollicitations cycliques, appellent à l'utilisation de lois de plasticité. Cette non linéarité matériau est principalement apportée par la matrice dans laquelle sont plongées les fibres de carbone (voir [Kenny and Marchetti, 1995, Yokozeki et al., 2005]). La plasticité joue un rôle assez mineur dans les problèmes de ruine que nous évoquerons par la suite.

Loi de comportement des interfaces La modélisation des interfaces par zones cohésives, en vue d'étudier ultérieurement leur rupture, nécessite l'introduction de rigidités en arrachement et en cisaillement artificielles. Afin de ne pas perturber la statique globale des stratifiés, ces raideurs sont habituellement postulées « grandes » devant les autres rigidités mises en jeu [Lu et al., 2019].

Pour rendre compte toujours du phénomène d'indentation permanente, des propriétés de plasticité aux interfaces sont parfois ajoutées, ou substituées, à celles impactant le comportement du pli [Caron et al., 2006, He et al., 2013].

0.4.1 Les outils pour la ruine des matériaux composites

Classification des méthodes de représentation de la fissuration

Au comportement non linéaire des plis et de l'interface, s'ajoutent pour notre étude, les propriétés de rupture de ces deux constituants. Ainsi, les fissures fendant un solide peuvent-elles être modélisées, en utilisant deux grandes classes d'outils que nous présentons maintenant avec leur champ d'application.

Les approches discrètes Les approches dites discontinues ou discrètes représentent les fissures comme des surfaces où le champ de déplacement est autorisé à être discontinu. Les effets de la présence de fissures, sur le comportement du solide, sont par conséquent naturellement pris en compte par l'absence de connectivité de part et d'autres des lèvres de la fissure. Les théories discontinues les plus connues sont : « la mécanique linéaire élastique de la rupture », et « le modèle de zones cohésives (CZM) » qui a été mis au point dans [Barenblatt et al., 1962, Dugdale, 1960].

Numériquement, les discontinuités compliquent très nettement la résolution par éléments finis standards. Elles peuvent être traitées soit :

- 1) aux bords des éléments, en utilisant des nœuds dupliqués et des techniques de remaillage [Bouchard et al., 2003, Ngo and Scordelis, 1967], ou via la technique bien connue des éléments d'interface [Hillerborg et al., 1976, Nguyen, 2014] pour les méthodes de zones cohésives. En ce cas, des éléments « cohésifs », initialement infiniment minces, représentent la séparation de deux plis rigidement liés. Ces éléments doivent être ajoutés *a priori* là où le modélisateur estime qu'une fissure est susceptible de voir le jour (voir figure 4 [p. xx]) À cause de leur épaisseur initiale nulle, les éléments cohésifs ne s'intègrent pas comme des éléments volumiques standard car la notion de « déformation » n'a alors pas de sens. Une loi dite de « traction séparation » [de Oliveira and Donadon, 2020] relie la contrainte appliquée au déplacement relatif, également appelé « saut de déplacement », entre les points initialement confondus.
- 2) Soit directement *dans* l'élément en utilisant l'approche des « discontinuités fortes intégrées » [Armero and Linder, 2009, Belytschko et al., 1988, Wu et al., 2015], et la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [Moës and Belytschko, 2002]. Dans ces méthodes,

la cinématique des éléments finis est enrichie, de sorte que les discontinuités de déplacement puissent être incorporées à l'espace d'approximation. Malgré les progrès récents de ces méthodes, la modélisation numérique de problèmes de ruptures complexes, qui impliquent de nombreuses fissures, reste difficile, particulièrement en trois dimensions. Parmi les approches traitant les discontinuités au sein de l'élément, on peut citer également la méthode des nœuds fantômes [Rabczuk et al., 2008, Song et al., 2006] basée sur l'approche de Hansbo and Hansbo [2004], et la méthode des nœuds flottants [Chen et al., 2014].

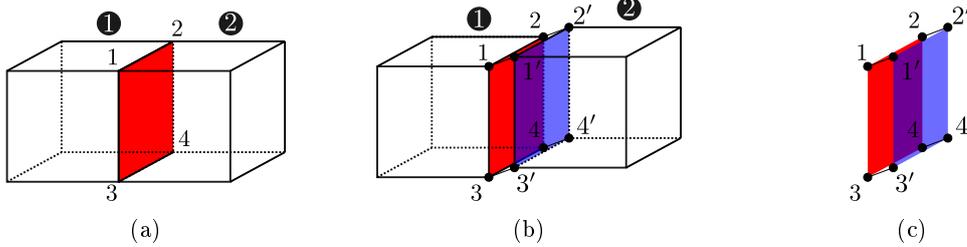


FIGURE 4 – Détail d'un élément cohésif, initialement infiniment mince, ajouté entre deux éléments cubiques

Les approches continues La mécanique de l'endommagement développée par Kachanov [1958] reste probablement la théorie la plus utilisée dans l'approche continue de la fissuration. Chez elle, les déplacements sont continus partout, mais les contraintes sont abattues progressivement pour modéliser le processus de dégradation. Là où les approches discrètes introduisent des frontières nettes entre solide et fissure, synonymes de champs potentiellement singuliers, les approches « continues » glissent « continûment » les champs (comme la rigidité), au moyen de variable(s) d'endommagement, scalaires ou tensorielles, d'une valeur « saine » à une valeur endommagée. Les champs mécaniques sont alors lissés et plus aisément compatibles avec des éléments finis standards.

Toutefois ces théories ne sont pas autonomes, en ceci qu'elles nécessitent des critères supplémentaires pour répondre à la question « quand et où » une fissure nucléée, de « combien » elle avance et « dans quelle direction ». Un bref tour d'horizon sera présenté plus loin des critères habituels qui sont issus de l'expérience du modélisateur souhaitant en incorporer l'effet. Le choix du critère d'initiation et de propagation est réputé fortement influencer le profil de ruine. Les difficultés associées à la modélisation des fissures discontinues (discrètes) motivent d'autres techniques de calcul, dans lesquelles les trajectoires des fissures sont automatiquement déterminées comme partie intégrante de la solution. Deux modèles populaires entrent dans cette catégorie : le modèle de rupture par champ de phase [Aranson et al., 2000, Francfort and Marigo, 1998] et le modèle *péridynamique* de Silling [2000].

Application à la ruine des composites stratifiés

Les mécanismes de ruines dans les composites stratifiés se distinguent en deux catégories suivant leur lieu d'apparition : ceux à l'interface entre deux plis ou ceux au cœur du pli. Logiquement, les méthodes numériques utilisées pour les représenter diffèrent donc en accord avec cette classification.

Délaminage Pour le délaminage, c'est à dire la ruine inter-laminaire, qui se développe le long d'une surface *connue à l'avance*, la théorie des zones cohésives est largement utilisée [Abdullah et al., 2007, Camanho et al., 2003]. Dans ce cadre, le défaut majeur lié à l'obligation d'un placement *a priori* est ici court-circuité par la connaissance du lieu possible d'apparition du délaminage. Les éléments présentent l'avantage de permettre tout à la fois la prédiction de la nucléation du délaminage en utilisant un critère en contrainte, et de sa propagation en retenant un critère énergétique.

Fissuration intra-laminaire La fissuration intra-laminaire des composites stratifiés est, elle, beaucoup plus complexe. En effet, le trajet des fissures possibles y est *a priori inconnu*, si bien que placer des éléments cohésifs, de façon arbitraire, revient à contraindre la fissuration à ne se développer que dans les zones ainsi délimitées. Intercaler des zones cohésives entre chaque élément du maillage serait possible... mais à la fois : excessivement lourd et reflet d’une impuissance à capter des trajectoires complexes. Les méthodes discrètes aux bords de l’élément *1)* sont par conséquent à proscrire. Pour surmonter cette difficulté, la fissuration intra-laminaire est donc plus habituellement modélisée par les méthodes discrètes au sein de l’élément *2)*, ou encore par l’approche continue et plus particulièrement la méthode par champ de phase, laquelle converge vers la solution de la mécanique élastique linéaire de la rupture.

La simulation complète de la ruine suppose de coupler les méthodes précédentes. La plupart des auteurs utilisent pour ce faire de coûteuses modélisations 3D, ou se limitent à des problèmes plans et à leurs éléments associés. Le maillage tridimensionnel de composites stratifiés fortement élancés limite donc logiquement les simulation fines à des structures de tailles très modestes empêchant par conséquent leur extension à une modélisation globale. En outre, malgré l’emploi d’éléments tridimensionnels et d’éléments cohésifs, séparément réputés pour leur robustesse, le dialogue entre les différents modes de ruine reste une problématique qui, sans précaution particulière, peut conduire à une sous-estimation parfois très importante de l’activation de l’un ou l’autre des mécanismes.

À notre connaissance, assez rare sont les tentatives d’utilisation des modèles de plaque pour rendre compte des phénomènes de ruine, délaminage ou fissuration intra-laminaire, dans les composites stratifiés. Nous évoquerons néanmoins :

- Eijo et al. [2014], qui mettent à l’épreuve un modèle de plaque enrichi par des fonctions Zig-Zag pour prendre en compte le délaminage.
- Barbero and Reddy [1991] qui eux utilisent eux le modèle layerwise de Reddy dans le même but.
- McElroy [2017] qui avec un modèle de plaque enrichie parvient à capter la migration du délaminage entre deux interfaces adjacentes.
- Enfin, nous mentionnerons [Brouzoulis and Fagerström, 2015, Brouzoulis et al., 2016, Hosseini et al., 2015].

L’originalité de ce travail de doctoral, prétendons nous, résidera donc dans l’adoption de modèles de plaque formulées en contrainte, pour la prédiction de phénomènes résolument tri-dimensionnels. Nous y choisissons sciemment de contourner toute la complexité des lois de comportement, pour n’en conserver que des formes relativement simples. Il sera cependant loisible au lecteur de complexifier ces mêmes lois en y ajoutant des non linéarités, en abattant d’autres rigidités que nous aurions laissées intactes lors du processus de rupture, ou encore en affectant d’autres variables d’endommagement pour capter des phénomènes laissés ici de côté...

0.4.2 Les différents critères retenus pour l’étude du délaminage

Afin de faciliter l’appréhension des notations utilisées dans la partie suivante, nous rappelons que la rupture d’un solide peut s’effectuer selon *trois modes*. Le mode I, est un mode d’ouverture dans lequel le déplacement relatif des lèvres se produit perpendiculairement au plan de fissure, cela du fait d’un effort normal au plan de fissure trop important. Les modes II et III, sont des modes de rupture en cisaillement, le déplacement relatif des lèvres y est parallèle au plan de fissure. Mais en réalité, une fissure se propage dans un matériau sous une combinaison de ces trois modes de rupture.

Pour une bibliographie exhaustive des différents critères habituellement rencontrés, nous renvoyons le lecteur à l’ouvrage de Orifici et al. [2008]. Pour une étude générale des méthodes numériques mises en œuvre à la modélisation du délaminage, c’est la revue de Tabiei and Zhang [2018] qui retiendra l’attention.

Les critères utilisés dans la littérature pour la prédiction du délaminage sont très variés mais peuvent cependant être regroupés dans les catégories suivantes :

- * Critères en contrainte
- * Critères en facteur d'intensité de contrainte
- * Critères énergétiques
- * Double critère en contrainte/énergie

Les critères en déplacement d'ouverture de fissure sont occasionnellement rencontrés mais semblent préférentiellement réservés à l'étude de la rupture ductile [Cottrell, 1962, Sutton et al., 2000, Wells, 1961, Werner, 2012, Xia et al., 1996].

Notre propre étude bibliographique demeurera, là encore, une nouvelle fois non-exhaustive. Elle n'aura pour but que de mettre en avant les grandes idées permettant de prédire la propagation des fissures dans les structures.

Critères en contrainte

Les contraintes interlaminaires 3D sont souvent singulières aux bords libres et aux pointes de fissures [Leguillon et al., 2001, Ting and Chou, 1981, Wang, 1983]. Par conséquent, il est impossible de définir un critère portant sur la valeur maximale de contrainte. Pour surmonter cette difficulté, Whitney and Nuismer [1974] ont introduit une longueur caractéristique qui correspond à la distance par rapport au bord libre, ou à la pointe de fissure, à laquelle les contraintes (ou leurs moyennes) sont mesurées. Le critère en contrainte le plus simple, respectant cette idée est :

$$\left(\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xz}^D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{yz}^D}\right)^2 + \left(\frac{\langle\sigma_{zz}\rangle_+}{\sigma_{zz}^D}\right)^2 = 1$$

où σ_{xz} et σ_{yz} sont les contraintes interlaminaires de cisaillement, et où $\langle\sigma_{zz}\rangle_+$ est la partie positive de la contrainte normale. σ_{xz}^D , σ_{yz}^D et σ_{zz}^D sont les résistances interlaminaires, en modes III, II et I respectivement (propagation dans la direction y). Un critère plus général permettant de distinguer les résistances inter-laminaires en traction et en compression σ_{zz}^{DT} et σ_{zz}^{DC} a par la suite été proposé par Kim and Soni [1986].

Critères en facteur d'intensité de contrainte

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^\beta + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^\gamma = 1$$

où K_I , K_{II} et K_{III} sont les facteurs d'intensité de contrainte, respectivement en modes I, II et III. K_{Ic} , K_{IIc} et K_{IIIc} sont les facteurs d'intensité de contrainte critiques supposés intrinsèques au matériau. Les exposants α , β et γ sont positifs et aussi supposés intrinsèques au matériau.

Critères énergétiques

Notons G_c le taux de restitution en énergie critique, valeur intrinsèque au matériau et correspondant à l'énergie libérée par le processus de fissuration, pour une augmentation unitaire de la surface de fissure.

Fort malheureusement, il a été montré qu'un seul taux de restitution d'énergie n'était pas suffisant pour décrire la rupture en mode mixte [Wang, 1989]. Par conséquent, il est nécessaire d'établir un critère de rupture qui permette de distinguer les différents modes. La plupart des critères énergétiques portent sur la contribution des taux de restitution d'énergie G_I , G_{II} et G_{III} associés respectivement aux modes I, II et III ($G = G_I + G_{II} + G_{III}$). Ces contributions possèdent chacune leur taux de restitution d'énergie critique G_{Ic} , G_{IIc} et G_{IIIc} , qui, comme précédemment pour G_c , sont supposés être des grandeurs intrinsèques au matériau. Différentes méthodes expérimentales ont été proposées pour l'identification de ces ténacités [Benzeggagh and Kenane, 1996, Whitney, 1989]. Malgré une mixité de mode I + II, des critères naïfs ne considérant que l'une ou l'autre des contributions $G_I = G_{Ic}$ [Whitcomb, 1984] ou $G_{II} = G_{IIc}$

[Gillespie Jr et al., 1986] ont été proposés. Pour surmonter leurs lacunes, un critère général, en loi puissance, a par la suite été formulé de la manière suivante :

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\beta = 1 \quad (2)$$

Plusieurs combinaisons pour (α, β) sont possibles comme $(\alpha = 0.5, \beta = 1)$ [Wu and Reuter Jr, 1965], $(\alpha = 1, \beta = 1.5)$ [Donaldson, 1987, Hashemi et al., 1990] ($\alpha = 0.64, \beta = 0.8$). Les valeurs optimales de α et β pour un matériau s'obtiennent en minimisant l'erreur par rapport aux données expérimentales. Dans le cas $\alpha = 1, \beta = 1$, l'équation (2) se réduit au célèbre critère linéaire largement employé dans la littérature [Donaldson, 1985, Jurf and Pipes, 1982, Mall and Kochhar, 1986, Spencer and Barnby, 1976].

De nombreux autres critères plus ou moins complexes ont été proposés. Leur énumération complète est consignée dans Orifici et al. [2008]. Pour leur popularité, nous achevons notre paragraphe en citant les critères de Benzeggagh and Kenane [1996] nécessitant 3 paramètres G_{Ic} , G_{IIc} et η :

$$G = G_c \text{ avec } G_c = G_{Ic} + (G_{IIc} - G_{Ic}) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}}\right)^\eta$$

Et celui de Reeder et al. [2002] (4 données G_{Ic} , G_{IIc} , G_{IIIc} et η).

$$G = G_c \text{ avec } G_c = G_{Ic} + \left[(G_{IIc} - G_{Ic}) + (G_{IIIc} - G_{IIc}) \left(\frac{G_{III}}{G_{II} + G_{III}}\right) \right] \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}}\right)^\eta$$

Double critère en résistance/ténacité

Un des défauts de la théorie de Griffith est de ne pouvoir prédire l'initiation des fissures, en raison de la limite nulle du taux de restitution d'énergie, lorsque la longueur de fissure tend vers zéro (voir [Leguillon, 1999]). Or, les résultats expérimentaux nous prouvent qu'il existe un certain seuil σ_c de chargement, au-delà duquel l'amorçage de fissure se produit. Leguillon [1999, 2002] a expliqué que l'amorçage de fissure est un phénomène brutal, qui se produit avec une longueur minimale d'initiation a^c . Si l'on définit un taux incrémental de restitution en énergie $G_{inc}(a)$, correspondant à la différence d'énergie potentielle pour deux états de fissuration distincts d'une surface $S = b \times a$

$$G_{inc}(a) = \frac{\mathcal{E}_{pot}^\Gamma(a=0) - \mathcal{E}_{pot}^\Gamma(a)}{b \times a}$$

$\mathcal{E}_{pot}^\Gamma(a)$ est l'énergie potentielle de la structure fissurée, avec une longueur de fissure a . Leguillon [1999, 2002] a suggéré que l'amorçage de fissure se produit lorsqu'un double critère contrainte-énergie est vérifié :

- la contrainte doit dépasser une valeur critique σ_c , dans tout un intervalle $y \in [0, a]$: $\sigma(y, F) > \sigma_c$ $y \leq a$, la distance y est mesurée à partir du point de singularité (bord libre). σ_c est la contrainte critique et supposée une caractéristique mécanique du matériau à l'étude.
- Le taux de restitution d'énergie incrémentale doit être égal au taux de restitution d'énergie critique.

Soit :

$$G_{inc}(a^c, F^c) = G_c \quad \sigma(y = a^c, F^c) = \sigma_c$$

En appliquant les deux conditions simultanément, la longueur critique d'amorçage a^c et la charge au moment de l'amorçage F^c sont calculées. A l'initiation, une fissure de longueur a^c apparait brutalement. Ce double critère a été utilisé avec la méthode des éléments finis dans [Martin and Leguillon, 2004, Martin et al., 2008, 2010, 2012]. Plus intéressant pour notre étude, Saeedi et al. [2012b] ont retenu ce double critère pour l'étude du délaminage dans les composites stratifiés avec le modèle LS1.

0.5 Structure générale et enjeux

L'ambition de cette thèse sera donc double : un proposer des modèles plus efficaces que ceux existant pour prédire le comportement et l'endommagement des composites stratifiés ; deux, valider leurs implémentations numériques. Ces modèles devant par ailleurs se montrer souples d'utilisation quant à la gamme de structures correctement simulées. Seront en outre scrutés, leurs coûts numériques et leurs capacités de transfert dans un cadre industriel, afin de souligner leurs pertinences opérationnelles.

- * Les modèles répondant le plus précisément à la problématique initialement posée sont les théories layerwise formulées en contraintes. Aussi, dans le chapitre 1 [p. 1], nous détaillerons la construction statique des modèles SCLS1, LS1 et L-LS1 envisagés comme des cas dégénérés du modèle tridimensionnel de Cauchy, dans lequel nous aurions formulé en plus une hypothèse sur la *distribution de contraintes* dans chaque pli.
- * Nous soulignerons, dans un deuxième chapitre 2 [p. 43], les difficultés d'extension de ces modèles au cadre dynamique et proposerons une nouvelle approche variationnelle permettant de déterminer les inerties généralisées de nos déplacements moyens en vue d'une implémentation numérique.
- * La construction de nos modèles étant achevée, nous exploiterons leurs atouts pour proposer une approche continue, prédictive de la fissuration inter-laminaire (également appelée délaminage) au chapitre 3 [p. 69].
- * Au chapitre 4 [p. 101], nous consoliderons notre méthodologie conceptuelle prédisant le délaminage, en montrant qu'elle s'étend aisément à la fissuration intra-laminaire. Nous détaillerons les modifications à effectuer et conclurons une nouvelle fois par une gamme d'essai.
- * L'impact en dynamique lente des composites stratifiés achèvera notre propos principal, au chapitre 5 [p. 127].

Quelques annexes permettront en outre d'explorer certains aspects qui n'auraient pas trouvé leur place dans l'un des chapitres sus-mentionnés.

- * Une première annexe A [p. 151] complètera immédiatement les chapitres précédents en détaillant exhaustivement des résultats, démonstrations et expressions qui auraient alourdi la lecture du corps principal, sans faciliter sa compréhension.
- * Dans l'annexe B [p. 165], nous détaillerons les différents modèles de plaques multiparticulaires développés au fil des ans au sein du laboratoire Navier, ainsi que leurs forces et faiblesses respectives. Nous nous efforcerons de montrer leurs imbrications successives, en particulier comment ils peuvent sans exception se déduire du modèle SCLS1.
- * L'annexe C [p. 187] approfondira l'essai uni-axiale dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu. Les résultats très généraux qui y figurent s'appliquant également aux chapitre 3 [p. 69] et chapitre 4 [p. 101].
- * Afin de consolider les résultats numériques présentés au long de l'ouvrage, nous mentionnerons dans les annexes D [p. 201] et E [p. 223] comment obtenir des solutions analytiques pour les problèmes invariant dans une certaine direction avec les modèles LS1 et SCLS1.
- * Enfin, l'annexe F [p. 235] précisera enfin les pistes envisagées pour l'incorporation des phénomènes de délaminage et de ruine intra-laminaire aux modèles LS1 et SCLS1, délaissés dans le corps principal, au profit du modèle L-LS1 plus simple.

Statique des modèles SCLS1 et LS1

Introduction

Les modèles bidimensionnels multiparticulaires sont des modèles de plaques enrichis, dans lesquels le nombre de degrés de liberté a été augmenté, pour délivrer des informations relatives à chacune des couches constituant la plaque complète.

Le modèle SCLS1 appartient à cette large famille. Il est dérivé du modèle de Cauchy tridimensionnel, en se restreignant aux champs de contraintes statiquement compatibles, et possédant une approximation des contraintes membranaires polynomiale de degré 1 par couche.

Les efforts généralisés par couche sont ceux d'une plaque de Reissner-Mindlin augmentés : de la contrainte inter-laminaire tranchante, de l'effort normal inter-laminaire et encore, en plus du modèle LS1 décrit comme un cas particulier du modèle SCLS1, de la divergence de la contrainte tangentielle inter-laminaire.

Nous développerons dans ce chapitre l'ensemble des équations de la modélisation statique des structures multicouches, à l'aide des modèles SCLS1 et LS1.

- ★ Les hypothèses et conventions retenues seront tout d'abord mises en avant section 1.1 [p. 2].
- ★ Les équations d'équilibre 3D exactes amèneront à $6n + 1$ équations sur nos efforts généralisés où n désigne le nombre de couches section 1.2 [p. 4].
- ★ La cinématique du modèle SCLS1 obtenue par dualisation des équations d'équilibre possèdera par conséquent $6n + 1$ degrés de libertés en chaque point de la surface moyenne de la plaque section 1.3 [p. 10].
- ★ Nous utiliserons ensuite le principe du minimum de l'énergie complémentaire, pour obtenir les relations de comportement généralisées exprimant nos efforts en fonction de nos déformations section 1.4 [p. 14].
- ★ Par analogie avec la notation ingénieur, également appelée notation de « Voigt », nous proposerons une formulation matricielle des équations de notre problème section 1.5 [p. 19].
- ★ Puis, le modèle LS1 sera dérivé du modèle SCLS1, au prix de plusieurs hypothèses supplémentaires section 1.6 [p. 20].
- ★ Une version plus opérationnelle du modèle LS1, appelée L-LS1 (*Lumped Layerwise Stress 1*), sera ensuite détaillée à la section 1.7 [p. 27]. Elle sera obtenue en réalisant successivement : un changement de paramétrisation, puis une intégration approchée de l'énergie complémentaire.

- ★ Pour conclure ce chapitre, l'application des modèles précédents à la prévision des contraintes inter-laminaires près d'un bord libre sera précisée section 1.8 [p. 32]. Nous y étudierons la traction uni-axiale d'une éprouvette composite $(0, 90)_s$.

Sans nuire à la compréhension globale de la problématique, les section 1.2 [p. 4] –section 1.6 [p. 20] pourront être passées en première lecture. Le lecteur aura tout loisir de directement consulter les applications des modèles qui y sont développés en se référant à la section 1.8 [p. 32].

1.1 Position du problème

1.1.1 Hypothèses et notations

Hypothèse 1.1.1 .

- La plaque occupe le domaine tridimensionnel $\Omega = \omega \times]h_1^- ; h_n^+[$ où ω désigne le feuillet moyen de la plaque.
- La face latérale est décomposée en deux parties (respectivement notées $\partial_N \Omega$ et $\partial_D \Omega$.) où sont appliquées des conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet.
- Les forces de volumes sont négligées.
- La plaque est chargée sur la surface supérieure ω^+ et inférieure ω^- avec une distribution surfacique de force $\underline{T}^+ = (T_k^+)$ et $\underline{T}^- = (T_k^-)$ respectivement.
- La plaque multicouche est constituée de n plis parfaitement collés, constitués de matériaux élastiques orthotropes.

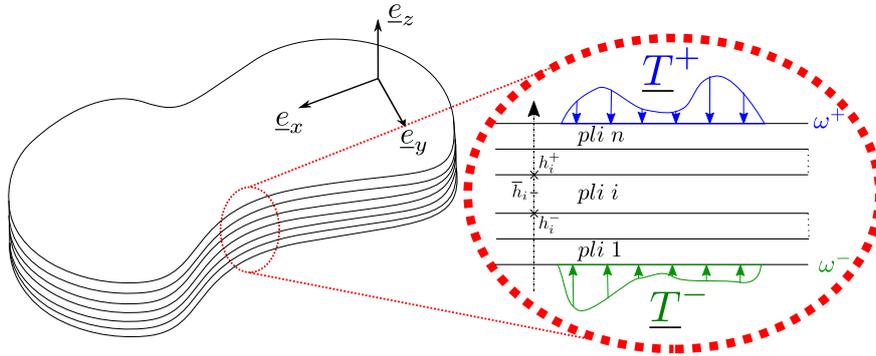


FIGURE 1.1 – Notation et description du multicouche

Notation 1.1.1 .

- Dans la suite, x et y désignent les coordonnées dans le plan, tandis que la coordonnée z désigne la composante hors plan.
- Les exposants i et $j, j+1$ désignent respectivement la couche i et l'interface entre la couche j et $j+1$. Par extension, l'exposant $0, 1$ désigne la face inférieure ω^- et l'exposant $n, n+1$ la face supérieure ω^+ .
- Sauf mention contraire $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- Dans chaque couche i, h_i^-, h_i^+ et \bar{h}_i sont, respectivement : la coordonnée en z basse, haute et du plan moyen de la couche. $e^i = h_i^+ - h_i^-$ désigne l'épaisseur du pli. Nous avons donc $h_j^+ = h_{j+1}^- \forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Par convention, nous fixons également $h_0^+ = h_1^-$ et $h_n^+ = h_{n+1}^-$ (voir figure 1.1 [p. 2]).
- Les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent les composantes dans le plan et prennent les valeurs $\llbracket 1; 2 \rrbracket$
- Les indices latins i, j, k, l désignent les composantes générales et prennent les valeurs $\llbracket 1; 3 \rrbracket$

- \mathbb{S}^i désigne le tenseur de souplesse d'ordre 4 de la couche i et jouit des symétries majeures et mineures.
- La convention de sommation d'Einstein est retenue.

1.1.2 Base polynomiale choisie

Afin d'améliorer significativement la concision et l'élégance du modèle développé par la suite, qui est basé sur une approximation polynomiale de degré 1 du champ de contrainte membranaire, nous allons introduire la base polynomiale retenue pour effectuer nos calculs. Ces polynômes, de degré croissant en z , sont choisis orthogonaux entre eux, au sens du produit scalaire ci-dessous, afin de faciliter plus tard le calcul des énergies élastiques écrites en contraintes :

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z) dz = \delta_\beta^\alpha$$

Notation 1.1.2 . La base polynomiale choisie est la suivante :

$$P_0^i(z) = 1 \quad P_1^i(z) = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \quad P_2^i(z) = -6 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \quad P_3^i(z) = -2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)$$

Cette base est construite à partir des polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} P_0^i(z) &= P_0^L \left(2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \right) & P_1^i(z) &= \frac{1}{2} P_1^L \left(2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \right) \\ P_2^i(z) &= -P_2^L \left(2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \right) & P_3^i(z) &= -\frac{1}{10} P_3^L \left(2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \right) \end{aligned}$$

La famille $(P_n^L)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille à degré étagé. C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Les polynômes de Legendre ont la même parité que n ($P_n^L(-z) = (-1)^n (P_n^L)(z)$) et sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel :

$$\langle P_n^L, P_m^L \rangle = \int_{-1}^1 P_n^L(z) P_m^L(z) dz = \frac{2}{2n+1} \delta_m^n$$

Par conséquent notre famille de polynôme vérifie par construction :

$$\begin{aligned} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^j(z) dz &= 0 \text{ si } \alpha \neq \beta & \text{et} & \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) dz = 0 \text{ si } i \text{ est impaire} \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z) P_0^i(z) dz &= e^i & \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) P_1^i(z) dz &= \frac{e^i}{12} \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_2^i(z) P_2^i(z) dz &= \frac{e^i}{5} & \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_3^i(z) P_3^i(z) dz &= \frac{e^i}{700} \end{aligned}$$

$$(P_0^i(z))' = 0 \quad (P_1^i(z))' = \frac{P_0^i(z)}{e^i} \quad (P_2^i(z))' = \frac{-12}{e^i} P_1^i(z) \quad (P_3^i(z))' = \frac{P_2^i(z)}{e^i} - \frac{P_0^i(z)}{5e^i}$$

$$P_1^i(h_i^+) = \frac{1}{2} \quad P_1^i(h_i^-) = -\frac{1}{2} \quad P_2^i(h_i^+) = -1 \quad P_2^i(h_i^-) = -1 \quad P_3^i(h_i^+) = -\frac{1}{10} \quad P_3^i(h_i^-) = \frac{1}{10}$$

1.1.3 Rappel des équations du problème tridimensionnel

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le problème tridimensionnel consiste à trouver un champ de contrainte statiquement compatible, et un champ de déformation à la fois compatible et satisfaisant la relation de comportement [Salençon, 2012] :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) = \mathbb{S}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \text{ dans } \Omega$$

Définition 1.1.1 Champs de contraintes statiquement admissible. *Un champ de contraintes est statiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre, les conditions aux limites en effort et la continuité de $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$:*

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}^{ad} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \rrbracket = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_3) = -\underline{T}^- & \text{sur } \omega^- \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 = -\underline{T}^+ & \text{sur } \omega^+ \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\nu} = \underline{T} & \text{sur } \partial\omega \times]h_0^-, h_n^+[\end{array} \right\}$$

Définition 1.1.2 Champ de déformation cinématiquement admissible. *Un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est cinématiquement admissible s'il existe un champ de déplacement \underline{u} satisfaisant les conditions aux limites en déplacement $\underline{u} = \underline{u}_D$ sur $\partial_D\Omega$ et tel que :*

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{\operatorname{grad}}}^\top(\underline{u}) \right) (\underline{x}, t)$$

Théorème 1.1.1 Principe du minimum de l'énergie complémentaire. *Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le champ de contrainte solution minimise la fonctionnelle énergie complémentaire parmi tous les champs statiquement admissibles.*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \arg \min_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}^{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^* \, d\Omega - \int_{\partial_D\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \underline{u}_D \, dS$$

L'idée clef du modèle SCLS1 consiste à restreindre le problème de minimisation ci-dessus aux champs statiquement admissibles dont la composante plane $\sigma_{\alpha\beta}$ est une fonction linéaire en z par couche et vérifiant les conditions aux limites 3D. Ces champs définissent l'ensemble des champs statiquement admissibles du modèle SCLS1.

1.2 Équations d'équilibre du modèle SCLS1

1.2.1 Écriture générique du champ de contraintes du modèle SCLS1

Postulat 1.2.1 Champ de contraintes membranaires du modèle SCLS1. *Nous commençons la construction de notre modèle en postulant la forme suivante du champ de contraintes membranaires dans le pli i .*

$$\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) = A'(x, y)P_0^i(z) + B'(x, y)P_1^i(z)$$

Comme les composantes planes $\sigma_{\alpha\beta}$ sont des fonctions linéaires par couche de z , en vertu des équations d'équilibre 3D, en l'absence de forces de volume, les composantes $\sigma_{\alpha 3}$ du tenseur des contraintes de Cauchy seront nécessairement quadratiques par plis, et la contrainte normale σ_{33} cubique par plis en z . Sous forme générique les contraintes s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z) = C'(x, y)P_0^i(z) + D'(x, y)P_1^i(z) + E'(x, y)P_2^i(z) \\ \sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z) = F'(x, y)P_0^i(z) + G'(x, y)P_1^i(z) + H'(x, y)P_2^i(z) + I'(x, y)P_3^i(z) \end{cases}$$

Nous allons supposer que ces 9 fonctions correspondent à de nouveaux efforts généralisés inconnus, dont nous préciserons les interprétations physiques et les équations d'équilibre ultérieurement.

Remarque importante : Rien ne nous oblige, dans notre modèle, à ce que chacun des plis évoqués précédemment soit associé à un pli *physique*, c'est à dire une strate dont les deux couches immédiatement adjacentes possèdent un comportement mécanique différent. Par conséquent, il est tout à fait possible, dans notre modèle, de subdiviser chacun des plis *physiques* en sous couches *mathématiques* afin d'affiner la représentation du champ de contraintes et de mieux capter les éventuelles singularités.

1.2.2 Introductions des efforts généralisés du modèle

Le postulat de base du modèle SCLS1 consiste à prendre une approximation du champ de contraintes membranaires polynomial de degré 1 par couche. Nous allons à présent donner une forme particulière aux 9 fonctions $A', B', C', D', E', F', G', H', I'$ précédemment introduites en les remplaçant par 9 fonctions inconnues $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, Q_\alpha, \tau_\alpha^{i,+}, \tau_\alpha^{i,-}, \nu^{i,-}, \nu^{i,+}, \pi^{i,-}, \pi^{i,+}$ dont l'interprétation physique sera donnée à la prochaine section.

Champs de contraintes membranaires

Nous postulons que notre champ de contraintes membranaires s'écrit :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + M_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \quad (x, y) \in \omega, z \in [h_i^-, h_i^+] \quad (1.1)$$

Champs des contraintes de cisaillement hors plan

L'équation d'équilibre tridimensionnelle nous indique alors que le champ $\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}$ est quadratique en z .

$$\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z) = Q_\alpha^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + [(\tau_\alpha^{i,+} - \tau_\alpha^{i,-})(x, y)] P_1^i(z) + \left[Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,+} + \tau_\alpha^{i,-})(x, y) \right] \frac{P_2^i(z)}{e^i} \quad (1.2)$$

Champs des contraintes d'arrachement hors plan

Par une nouvelle intégration, nous établissons que le champ $\sigma_{33}^{i,3D}$ est cubique en z .

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z) = & \left[\left(\frac{1}{2} (\nu^{i,+} + \nu^{i,-}) + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) \right) (x, y) \right] P_0^i(z) \\ & + \left[\left(\frac{e^i}{10} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + \frac{6}{5} (\nu^{i,+} - \nu^{i,-}) \right) (x, y) \right] P_1^i(z) \\ & + \left[\left(\frac{e^i}{12} (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) \right) (x, y) \right] P_2^i(z) \\ & + \left[\left(\frac{e^i}{2} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + (\nu^{i,+} - \nu^{i,-}) \right) (x, y) \right] P_3^i(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

La forme donnée au champ de contraintes peut paraître assez énigmatique, elle se justifiera à posteriori en simplifiant considérablement les expressions et en permettant une interprétation physique simple des efforts généralisés introduits.

Remarque 1.2.1 Nous obtenons ici la forme la plus générale des champs de contrainte avec une approximation linéaire des contraintes membranaires.

1.2.3 Interprétation physique des efforts généralisés

Interprétation physique de \underline{N}^i . *Le tenseur \underline{N}^i est le tenseur des efforts normaux dans la couche i , rencontré dans les théories classiques de Love-Kirchhoff, Reissner Mindlin :*

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) dz \quad (x, y) \in \omega$$

Démonstration En intégrant l'équation (1.1) dans l'épaisseur nous obtenons que :

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) dz = \frac{N_{\alpha\beta}^i(x, y)}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z) dz + M_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{12}{e^{i2}} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) dz$$

Or nous avons vu que, par construction, l'intégrale sur $[h_i^-, h_i^+]$ d'un polynôme $P_j^i(z)$ de degré j impaire est nulle. Nous trouvons alors que :

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) dz$$

Le tenseur \underline{N}^i correspond donc à la contrainte membranaire moyenne dans le pli i .

Interprétation physique de \underline{M}^i . *Le tenseur \underline{M}^i est le tenseur des moments fléchissants dans la couche i par rapport à son plan médian, rencontré dans les théories classiques de Love-Kirchhoff, Reissner Mindlin et LS1 :*

$$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) dz \quad (x, y) \in \omega$$

Démonstration En intégrant l'équation $(z - \bar{h}_i) \times (1.1)$ dans l'épaisseur nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) dz &= \frac{N_{\alpha\beta}^i(x, y)}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) dz + M_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{12}{e^{i2}} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) P_1^i(z) dz \\ \Rightarrow M_{\alpha\beta}^i(x, y) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) dz \quad (x, y) \in \omega \end{aligned}$$

Interprétation physique de \underline{Q}^i . *Le tenseur \underline{Q}^i est le tenseur des efforts tranchants dans la couche i , rencontré dans la théorie classique des plaques épaisses (plaques de Reissner-Mindlin) :*

$$Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z) dz \quad (x, y) \in \omega$$

Démonstration En intégrant l'équation (1.4) dans l'épaisseur nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z) dz &= Q_{\alpha}^i(x, y) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + (\tau_{\alpha}^{i,+} - \tau_{\alpha}^{i,-})(x, y) \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) dz \\ &\quad + \left(Q_{\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,+} + \tau_{\alpha}^{i,-}) \right) (x, y) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} dz \\ \Rightarrow Q_{\alpha}^i(x, y) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z) dz \quad (x, y) \in \omega \end{aligned}$$

Les trois types d'efforts généralisés introduits précédemment, sont ceux classiquement rencontrés dans les théories de plaques. La particularité des modèles SCLS1 et LS1 réside dans l'interprétation physique des efforts généralisés suivants, qui nous donnent accès à des informations pertinentes pour l'étude de l'endommagement des composites.

Interprétation physique de $\underline{\tau}^{i,+}$. *$\underline{\tau}^{i,+}$ est le tenseur des efforts de cisaillement interlaminaire à l'interface entre les plis i et $i + 1$:*

$$\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, h_i^+) = \tau_{\alpha}^{i,+}(x, y)$$

Démonstration En évaluant (1.4) en $z = h_i^+$ nous obtenons :

$$\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, h_i^+) = Q_{\alpha}^i(x, y) \underbrace{\frac{P_0^i(h_i^+)}{e^i}}_{\frac{1}{e^i}} + (\tau_{\alpha}^{i,+} - \tau_{\alpha}^{i,-})(x, y) \underbrace{P_1^i(h_i^+)}_{\frac{1}{2}} + \left(Q_{\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,+} + \tau_{\alpha}^{i,-}) \right) (x, y) \underbrace{\frac{P_2^i(h_i^+)}{e^i}}_{\frac{-1}{e^i}}$$

C'est à dire que $\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, h_i^+) = \tau_{\alpha}^{i,+}(x, y)$. De la même manière, en évaluant $\sigma_{\alpha 3}^{i+1,3D}(x, y, h_{i+1}^-)$ on a $\tau_{\alpha}^{i+1,-}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}^{i+1,3D}(x, y, h_{i+1}^-)$

La contrainte de cisaillement étant continue à l'interface $\sigma_{\alpha 3}^{i+1,3D}(x, y, h_{i+1}^-) = \sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, h_i^+)$, nous en déduisons l'égalité $\tau_{\alpha}^{i,+} = \tau_{\alpha}^{i+1,-}$. Nous pourrions, donc par la suite, ne plus écrire le sur-script « \pm » et conclure que $\tau_{\alpha}^{i+1,-} = \tau_{\alpha}^{i,+} = \tau_{\alpha}^{i,i+1}$ correspond au cisaillement à l'interface $i, i+1$, sans détailler s'il s'agit du cisaillement supérieur de la couche i , ou à l'inférieur de la couche $i+1$.

Interprétation physique de $\nu^{i,+}$. $\nu^{i,+}$ est le tenseur des efforts d'arrachement inter-laminaire à l'interface entre les plis i et $i+1$:

$$\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, h_i^+) = \nu^{i,+}(x, y)$$

Démonstration Le raisonnement est tout à fait analogue à celui mené pour $\tau^{i,i+1}$, en évaluant cette fois ci (1.5) en h_i^+ . Nous trouvons de même que les exposants « \pm » peuvent être omis. Nous noterons à présent $\nu^{i,i+1} = \nu^{i,+} = \nu^{i+1,-}$ la contrainte d'arrachement à l'interface $i, i+1$.

Interprétation physique de π^{\pm} . Si nous notons M_0^i, M_1^i , la valeur moyenne et le premier moment de la contrainte tridimensionnelle σ_{33}^i , alors π^{\pm} s'interprètent comme une combinaison linéaire de M_0^i, M_1^i et des contraintes inter-laminaires normales :

$$\begin{aligned} \pi^{i,+} &= \frac{1}{(e^i)^2} \left(\frac{60}{e^i} M_1^i + M_0^i \right) + \frac{1}{2e^i} (-13\nu^{i,i+1} + 11\nu^{i-1,i}) \\ \pi^{i,-} &= \frac{1}{(e^i)^2} \left(\frac{60}{e^i} M_1^i - M_0^i \right) + \frac{1}{2e^i} (-11\nu^{i,i+1} + 13\nu^{i-1,i}) \end{aligned}$$

Démonstration

$$M_0^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z) dz \quad M_1^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z) dz = e^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) \sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z) dz$$

Nous pouvons exploiter la forme du champ de contrainte 3D et l'orthogonalité de la famille de polynôme P_j^i pour écrire :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} M_0^i \\ \frac{1}{e^i} M_1^i \end{array} \right\} &= \begin{pmatrix} \frac{e^i}{2} & \frac{e^i}{2} & \frac{(e^i)^2}{120} & -\frac{(e^i)^2}{120} \\ \frac{e^i}{10} & -\frac{e^i}{10} & \frac{(e^i)^2}{120} & \frac{(e^i)^2}{120} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \nu^{i,i+1} \\ \nu^{i-1,i} \\ \pi^{i,+} \\ \pi^{i,-} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_0^i \\ \frac{1}{e^i} M_1^i \end{array} \right\} &= \begin{pmatrix} \frac{e^i}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i} + e^i (\pi^{i,+} - \pi^{i,-})) \\ \frac{e^i}{10} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-})) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} e^i (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) = \frac{2M_0^i}{e^i} - \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \\ e^i (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) = 12 \left(\frac{10M_1^i}{(e^i)^2} - \nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant, prenant la demi-somme des deux équations précédentes, nous en déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^{i,+} = \frac{1}{2e^i} \left(12 \left(\frac{10M_1^i}{(e^i)^2} - \nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i} \right) + \frac{2M_0^i}{e^i} - \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right) \\ \quad = \frac{1}{(e^i)^2} \left(\frac{60}{e^i} M_1^i + M_0^i \right) + \frac{1}{2e^i} (-13\nu^{i,i+1} + 11\nu^{i-1,i}) \\ \pi^{i,-} = \frac{1}{2e^i} \left(12 \left(\frac{10M_1^i}{(e^i)^2} - \nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i} \right) - \frac{2M_0^i}{e^i} + \nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i} \right) \\ \quad = \frac{1}{(e^i)^2} \left(\frac{60}{e^i} M_1^i - M_0^i \right) + \frac{1}{2e^i} (-11\nu^{i,i+1} + 13\nu^{i-1,i}) \end{array} \right.$$

Cette interprétation de $\pi^{i,i+1}$ est ici indépendante de la notion d'équilibre de la structure. Une autre interprétation sera donnée ultérieurement, dans le cas statique, en utilisant l'équation d'équilibre tridimensionnelle. $\pi^{i,i+1}$ s'interprétera alors comme la divergence de l'effort de cisaillement inter-laminaire entre les plis i et $i+1$.

Contrairement à ν et à $\underline{\tau}$, dont la continuité entre deux plis consécutifs est assurée par la continuité de la contrainte inter-laminaire, la continuité de π sera due aux équations d'équilibre statique. À cette condition, l'exposant « \pm » pourra être omis.

Notation 1.2.1 Simplification d'écriture. Dans la suite, étant entendu que les champs \underline{N}^i , \underline{M}^i , \underline{Q}^i , $\underline{\tau}^{j,j+1}$, $\nu^{j,j+1}$, $\pi^{k,k+1}$ sont définis sur le feuillet de référence, nous omettrons de mentionner le couple de variables (x, y) dont ils dépendent.

Par conséquent, nous pouvons réécrire le champ de contraintes tridimensionnel (1.2)–(1.3) :

$$\sigma_{\alpha 3}^{i,3D} = Q_{\alpha}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + [\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}] P_1^i(z) + \left[Q_{\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \right] \frac{P_2^i(z)}{e^i} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{i,3D} = & \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) \right] P_0^i(z) + \left[\frac{e^i}{10} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + \frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] P_1^i(z) \\ & + \left[\frac{e^i}{12} (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) \right] P_2^i(z) + \left[\frac{e^i}{2} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] P_3^i(z) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Remarque 1.2.2 La continuité de la contrainte tangentielle et d'arrachement aux interfaces permet de réduire de 9 à 7 le nombre d'inconnues généralisées de notre problème. Nous n'assurons pas en revanche la continuité de la contrainte membranaire entre deux couches consécutives.

1.2.4 Équations d'équilibre du modèle SCLS1

En l'absence de force de volume, l'équation vectorielle d'équilibre tridimensionnel dans le cadre de Cauchy s'écrit :

$$\operatorname{div}(\underline{\sigma})(x, y, z) = \underline{0}$$

Cette équation projetée sur les vecteurs \underline{e}_{α} et \underline{e}_3 fournit le système :

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{i,3D}(x, y, z) + \sigma_{\alpha 3,3}^{i,3D}(x, y, z) = 0 \quad (1.6)$$

$$\sigma_{33,3}^{i,3D}(x, y, z) + \sigma_{\alpha 3,\alpha}^{i,3D}(x, y, z) = 0 \quad (1.7)$$

Si nous écrivons les deux termes apparaissant dans l'équation (1.6), dans le cadre de l'approximation membranaire du modèle SCLS1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{i,3D}(x, y, z) &= N_{\alpha\beta,\beta}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + M_{\alpha\beta,\beta}^i \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \\ \sigma_{\alpha 3,3}^{i,3D}(x, y, z) &= (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (Q_{\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})) \frac{-12P_1^i(z)}{e^{i2}} \\ \Rightarrow [N_{\alpha\beta,\beta}^i + (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \frac{P_0^i(z)}{e^i} &+ [M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} = 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons les deux premières équations d'équilibre portant sur les efforts généralisés :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i} = 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

De même, la projection de $\operatorname{div}(\underline{\sigma})(x, y, z) = \underline{0}$ sur \underline{e}_3 donne $\sigma_{33,3}^{i,3D}(x, y, z) + \sigma_{\alpha 3,\alpha}^{i,3D}(x, y, z) = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3,\alpha}^{i,3D}(x, y, z) &= Q_{\alpha,\alpha}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) P_1^i(z) + (Q_{\alpha,\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \\ \sigma_{33,3}^{i,3D}(x, y, z) &= \left[\frac{e^i}{10} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + \frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) \frac{-12P_1^i(z)}{e^i} \\ &+ \left[\frac{e^i}{2} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] \left(\frac{P_2^i(z)}{e^i} - \frac{2P_0^i(z)}{10e^i} \right) \\ &= (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \frac{P_0^i(z)}{e^i} - (\pi^{i,+} - \pi^{i,-}) P_1^i(z) + \left[\frac{e^i}{2} (\pi^{i,+} + \pi^{i,-}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors, par somme :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha 3, \alpha}^{i, 3D} + \sigma_{33, 3}^{i, 3D} &= [Q_{\alpha, \alpha}^i + (\nu^{i, i+1} - \nu^{i-1, i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] + [\tau_{\alpha, \alpha}^{i, i+1} - \tau_{\alpha, \alpha}^{i-1, i} - \pi^{i, +} + \pi^{i, -}] P_1^i(z) \\
 &\quad + [-\tau_{\alpha, \alpha}^{i, i+1} - \tau_{\alpha, \alpha}^{i-1, i} + \pi^{i, +} + \pi^{i, -}] \frac{P_2^i(z)}{2} \\
 &= [Q_{\alpha, \alpha}^i + (\nu^{i, i+1} - \nu^{i-1, i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] + [\tau_{\alpha, \alpha}^{i, i+1} - \pi^{i, +}] \left[P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \\
 &\quad - [\tau_{\alpha, \alpha}^{i-1, i} - \pi^{i, -}] \left[P_1^i(z) + \frac{P_2^i(z)}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Dont on tire deux équations supplémentaires, en utilisant la continuité de la contrainte tangentielle (donc aussi de sa dérivée) et en notant $\pi^{k, k+1} = \pi^{k, +} = \pi^{k+1, -}$:

$$\begin{cases} Q_{\alpha, \alpha}^i + \nu^{i, i+1} - \nu^{i-1, i} = 0 \\ \tau_{\alpha, \alpha}^{k, k+1} - \pi^{k, k+1} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation nous confirme l'interprétation physique de l'effort généralisé $\pi^{k, k+1}$ précédemment introduit, lequel correspond bien à la divergence de la contrainte de cisaillement inter-laminaire. La contrainte de cisaillement étant continue, nous en déduisons, en statique, que nous pouvons également enlever l'exposant \pm pour la contrainte généralisée π .

Ces équations, au nombre de $6n+1$, s'écrivent alors sous forme tensorielle, indépendamment du repère retenu pour notre calcul :

$$\underline{0} = \text{div}(\underline{N}^i) + \underline{T}^{i, i+1} - \underline{T}^{i-1, i} \quad (1.9a)$$

$$0 = \text{div}(\underline{Q}^i) + \nu^{i, i+1} - \nu^{i-1, i} \quad (1.9b)$$

$$\underline{0} = \underline{\text{div}}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{T}^{i, i+1} + \underline{T}^{i-1, i}) \quad (1.9c)$$

$$0 = \text{div}(\underline{T}^{k, k+1}) - \pi^{k, k+1} \quad (1.9d)$$

La dernière équation d'équilibre était dans la précédente version du modèle SCLS1 [Baroud et al., 2016] vérifiée seulement pour les interfaces intérieures du multicouche étant donné que dans une simulation statique les efforts $\pi^{0,1}, \pi^{n, n+1}, \nu^{0,1}, \nu^{n, n+1}, \underline{T}^{0,1}, \underline{T}^{n, n+1}$ sont complètement prescrits par les conditions aux limites.

1.2.5 Conditions aux limites

Pour compléter l'admissibilité du champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{3D}$ ainsi construit nous devons à présent écrire les conditions aux limites sur les bords.

Hypothèse 1.2.1 Conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet homogène. Nous supposons par la suite que les faces supérieure ω^+ et inférieure ω^- sont chargées par des efforts. Les bords latéraux $\partial\omega \times [h_1^-, h_n^+]$, quant à eux, sont libres de contrainte.

Nous avons donc sur $\partial\omega \times [h_i^-, h_i^+], \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$\underline{\underline{\sigma}}^{i, 3D} \cdot n_{\alpha} e_{\alpha} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} N_{\alpha\beta}^i n_{\beta} = 0 & M_{\alpha\beta}^i n_{\beta} = 0 \\ Q_{\alpha}^i n_{\alpha} = 0 & \tau_{\alpha}^{i, i+1} n_{\alpha} = 0 & \tau_{\alpha}^{i-1, i} n_{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Les conditions aux limites sur les faces inférieure et supérieure s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \tau_{\alpha}^{0,1} = -T_{\alpha}^{-} & \nu^{0,1} = -T_3^{-} \\ \tau_{\alpha}^{n, n+1} = T_{\alpha}^{+} & \nu^{n, n+1} = T_3^{+} \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous remarquons que les conditions aux limites ci-dessus ne peuvent être simultanément satisfaites, à moins que $T_{\alpha}^{\pm} n_{\alpha} = 0$ sur $\partial\omega_T$, ce que nous supposons par la suite.

Hypothèse 1.2.2 Annulation de l'effort appliqué sur le bord. *Nous supposons que $T_{\alpha}^{\pm} n_{\alpha} = 0$ sur $\partial\omega_T$*

Par ailleurs la dernière équation d'équilibre nous indique que :

$$\pi^{0,1} = -T_{\alpha,\alpha}^- \quad \text{et} \quad \pi^{n,n+1} = T_{\alpha,\alpha}^+ \quad (1.12)$$

Définition 1.2.1 Ensemble SCLS1-statiquement admissible. *Le champ de contraintes tridimensionnel $\underline{\sigma}^{i,3D}$ est SCLS1-statiquement admissible quand il satisfait les équations d'équilibre ci-dessus dans ω , pour i dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ et k dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, ainsi que les conditions aux limites :*

$$\mathcal{S}_{SCLS1}^{ad} = \{ \underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{T}^{k,k+1}, \nu^{k,k+1}, \pi^{k,k+1} \text{ vérifiant (1.9a) - (1.9d), (1.10) - (1.12)} \} \quad (1.13)$$

1.3 Cinématique du modèle SCLS1

1.3.1 Déplacements généralisés du modèle SCLS1

Dualisation des équations d'équilibre

Nous allons à présent obtenir les déplacements généralisés ainsi que les déformations généralisées par dualisation des équations d'équilibre. La formulation faible du problème d'équilibre tridimensionnel s'écrit :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\underline{\sigma}^{3D})(x, y, z) \cdot \underline{u}(x, y, z) \, d\Omega = 0 \quad (1.14)$$

En remplaçant l'expression de la divergence par les champs introduits plus haut nous obtenons alors :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\left(\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{i,3D} + \sigma_{\alpha 3,3}^{i,3D} \right) \underline{e}^{\alpha} + \left(\sigma_{33,3}^{i,3D} + \sigma_{\alpha 3,\alpha}^{i,3D} \right) \underline{e}^3 \right] (x, y, z) \cdot [u_{\alpha} \underline{e}^{\alpha} + u_3 \underline{e}^3] (x, y, z) \, d\Omega = 0$$

Cette équation se réécrit à l'aide des contraintes généralisées de notre modèle :

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha}(x, y, z) \\ & + [M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} u_{\alpha}(x, y, z) \\ & + [Q_{\alpha,\alpha}^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3(x, y, z) \\ & + [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} - \pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}] P_1^i(z) u_3(x, y, z) \\ & + [-\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} + \pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}] P_2^i(z) u_3(x, y, z) \, dz \, d\omega \end{aligned}$$

Les contraintes généralisées étant, par hypothèse, indépendantes de la coordonnée verticale z nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha}(x, y, z) dz \right] d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} u_{\alpha}(x, y, z) dz \right] d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [Q_{\alpha,\alpha}^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})] \left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3(x, y, z) dz \right] d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \pi^{i,i+1}] \underbrace{\left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} [P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2}] u_3(x, y, z) dz \right]}_{\text{noté par la suite } W_-^i} d\omega \\
 &- \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} - \pi^{i-1,i}] \underbrace{\left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} [P_1^i(z) + \frac{P_2^i(z)}{2}] u_3(x, y, z) dz \right]}_{\text{noté par la suite } W_+^i} d\omega
 \end{aligned}$$

Par un changement d'indice la dernière ligne peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \pi^{i,i+1}] W_-^i - [\tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} - \pi^{i-1,i}] W_+^i = \sum_{i=1}^n [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \pi^{i,i+1}] W_-^i - \sum_{i=0}^{n-1} [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \pi^{i,i+1}] W_+^{i+1}$$

Or nous avons vu que les conditions aux limites imposent que :

$$\begin{cases} \tau_{\alpha}^{0,1} = -T_{\alpha}^- & \nu^{0,1} = -T_3^- \\ \tau_{\alpha}^{n,n+1} = T_{\alpha}^+ & \nu^{n,n+1} = T_3^+ \\ \pi^{0,1} = -T_{\alpha,\alpha}^- & \pi^{n,n+1} = T_{\alpha,\alpha}^+ \end{cases}$$

Attention Nous verrons plus loin, dans la partie dynamique, que les conditions aux limites en effort et les équations d'équilibre ne nous permettent plus de déterminer les efforts généralisés $\pi^{0,1}$ et $\pi^{n,n+1}$ en fonction seulement des efforts extérieurs comme dans le cas présent. Nous devons donc, pour la suite, conserver ces efforts comme des inconnues. Les déplacements généralisés et déformations généralisées associés seront également conservés. En statique, les conditions aux limites ne pourront alors plus être satisfaites aisément. C'est pourquoi, nous allons faire le choix d'introduire également les efforts aux limites $\tau_{\alpha}^{0,1}$, $\tau_{\alpha}^{n,n+1}$, $\nu^{0,1}$, $\nu^{n,n+1}$ comme des contraintes généralisées inconnues, et les lier aux efforts extérieurs sous forme faible.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \pi^{i,i+1}] W_-^i - [\tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} - \pi^{i-1,i}] W_+^i &= \sum_{j=1}^{n-1} [\tau_{\alpha,\alpha}^{j,j+1} - \pi^{j,j+1}] [W_-^j - W_-^{j+1}] \\
 &+ [\tau_{\alpha,\alpha}^{n,n+1} - \pi^{n,n+1}] W_-^n - [\tau_{\alpha,\alpha}^{0,1} - \pi^{0,1}] W_+^1
 \end{aligned}$$

Notation 1.3.1 . Afin de clarifier les spécificités des différents modèles (modèle SCLS1 statique, futur modèle SCLS1 dynamique), nous noterons en **rouge** les termes additionnels dus à l'extension au cadre dynamique.

Introduction des déplacements généralisés

Introduisons à présent les déplacements généralisés de notre modèle SCLS1 :

$$\begin{aligned}
 \underline{U}^i &= U_\alpha^i \underline{e}^\alpha \text{ avec } U_\alpha^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_\alpha(x, y, z) dz & U_3^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3(x, y, z) dz \\
 \underline{\Phi}^i &= \Phi_\alpha^i \underline{e}^\alpha \text{ avec } \Phi_\alpha^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} u_\alpha(x, y, z) dz & W_\pm^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(P_1^i(z) \pm \frac{P_2^i(z)}{2} \right) u_3(x, y, z) dz \\
 V^{j,j+1} &= W_-^j - W_+^{j+1} & V^{n,n+1} &= W_-^n \quad V^{0,1} = -W_+^1
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

- \underline{U}^i (resp U_3^i) correspond au déplacement membranaire (resp normal) moyen de la couche i .
- $\underline{\Phi}^i$ correspond à la rotation de la couche i .
- $V^{j,j+1}$ est un déplacement généralisé homogène à une aire, dénué de signification cinématique.

La formulation faible de notre problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_\omega \sum_{i=1}^n [\operatorname{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i}] \cdot \underline{U}^i + [\operatorname{div}(\underline{Q}^i) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}] U_3^i d\omega \\
 &+ \int_\omega \sum_{i=1}^n \left[\operatorname{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right] \cdot \underline{\Phi}^i + \sum_{k=0}^n [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{k,k+1}) - \pi^{k,k+1}] V^{k,k+1} d\omega
 \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 La formulation faible ci-dessous est somme toute naturelle. Elle est simplement obtenue en dualisant chacune des équations d'équilibre (1.9a)–(1.9d) par un champ test. Partir de la formulation faible de l'équation tridimensionnelle de Cauchy nous a permis d'obtenir l'interprétation cinématique (1.15) de chacun des champs tests.

Notation 1.3.2 Dualisation des équations d'équilibre. *Le groupement ci-dessus étant amené à apparaître à des nombreuses reprises au cours de notre exposé, nous allons introduire la notation compacte pour la dualisation des équations d'équilibre :*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SCLS1} &= \sum_{i=1}^n [\operatorname{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i}] \cdot \underline{U}^i + [\operatorname{div}(\underline{Q}^i) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}] U_3^i \\
 &+ \sum_{i=1}^n \left[\operatorname{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right] \cdot \underline{\Phi}^i + \sum_{k=0}^n [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{k,k+1}) - \pi^{k,k+1}] V^{k,k+1}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.3.2 Déformations généralisées du modèle

Afin d'obtenir les déformations généralisées, nous allons à présent intégrer par parties la formulation faible précédente. Par simplicité d'identification, nous supposons provisoirement l'annulation des grandeurs sur le bord :

Hypothèse 1.3.1 Condition aux limites de Dirichlet et de Neumann homogène. *Nous supposons que la plaque est encastree sur $\partial\omega_{D \times}]h_1^-, h_n^+[$ et libre de contraintes sur $\partial\omega_{N \times}]h_1^-, h_n^+[$.*

$$\underline{U}^i = \underline{0} \quad \underline{\Phi}^i = \underline{0} \quad U_3^i = 0 \quad V^{j,j+1} = 0 \text{ sur } \partial\omega_{D \times}]h_1^-, h_n^+[$$

La combinaison de ces deux conditions aux limites annule le terme de bord apparaissant dans l'intégration par parties.

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} -\underline{N}^i : \underline{\text{grad}} U^i + (\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{U}^i - \underline{Q}^i \cdot \underline{\text{grad}} U_3^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) U_3^i \, d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} -\underline{M}^i : \underline{\text{grad}} \Phi^i - \left(\underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{\Phi}^i \, d\omega \\
 &+ \int_{\omega} \sum_{k=0}^n -\underline{\tau}^{k,k+1} \cdot \underline{\text{grad}} V^{k,k+1} - \pi^{k,k+1} V^{k,k+1} \, d\omega
 \end{aligned}$$

Par un changement d'indice par exemple, la seconde partie de la première ligne peut se réécrire

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) U_3^i &= \sum_{i=1}^n \nu^{i,i+1} U_3^i - \sum_{i=1}^n \nu^{i-1,i} U_3^i = \sum_{i=1}^n \nu^{i,i+1} U_3^i - \sum_{i=0}^{n-1} \nu^{i,i+1} U_3^{i+1} \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} \nu^{j,j+1} (U_3^j - U_3^{j+1}) + \nu^{n,n+1} U_3^n - \nu^{0,1} U_3^1
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Après la même manipulation de changement d'indice sur le tenseur $\underline{\tau}^{i,i+1}$ et l'utilisation de la symétrie des tenseurs \underline{N}^i et \underline{M}^i , la forme faible s'écrit :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\omega} \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} + \sum_{k=0}^n \pi^{k,k+1} \lambda^{k,k+1} \, d\omega \\
 &= \int_{\omega} \tau_{\alpha}^{n,n+1} (U_{\alpha}^n + \frac{e^n}{2} \Phi_{\alpha}^n - V_{,\alpha}^{n,n+1}) - \tau_{\alpha}^{0,1} (U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} \Phi_{\alpha}^1 + V_{,\alpha}^{0,1}) + \nu^{n,n+1} U_3^n - \nu^{0,1} U_3^1 \, d\omega
 \end{aligned}$$

Où toutes les fonctions tensorielles ou scalaires sont des fonctions des variables (x, y) , et où nous avons introduit les déformations généralisées fonction des déplacements généralisés, via :

$$\begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} \left(\underline{\text{grad}}(U^i) + \underline{\text{grad}}^{\top}(U^i) \right) & \underline{D}^{j,j+1} &= \underline{U}^{j+1} - \underline{U}^j - \frac{e^{j+1}}{2} \underline{\Phi}^{j+1} - \frac{e^j}{2} \underline{\Phi}^j + \underline{\text{grad}}(V^{j,j+1}) \\
 \underline{\chi}^i &= \frac{1}{2} \left(\underline{\text{grad}}(\Phi^i) + \underline{\text{grad}}^{\top}(\Phi^i) \right) & D_{\nu}^{j,j+1} &= U_3^{j+1} - U_3^j \\
 \underline{\gamma}^i &= \underline{\Phi}^i + \underline{\text{grad}}(U_3^i) & \lambda^{k,k+1} &= V^{k,k+1}
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Les conditions aux limites portant sur les efforts extérieurs (1.11) nous donnent alors :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\omega} \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{i,i+1} D_{\nu}^{j,j+1} + \sum_{k=0}^n \pi^{k,k+1} \lambda^{k,k+1} \, d\omega \\
 &= \int_{\omega} T_{\alpha}^{+} (U_{\alpha}^n + \frac{e^n}{2} \Phi_{\alpha}^n - V_{,\alpha}^{n,n+1}) + T_{\alpha}^{-} (U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} \Phi_{\alpha}^1 + V_{,\alpha}^{0,1}) + T_3^{+} U_3^n + T_3^{-} U_3^1 \, d\omega = 0
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Notation 1.3.3 Densité de puissance des efforts intérieurs et extérieurs. *Le groupement ci-dessus étant amené à apparaître à des nombreuses reprises au cours de notre exposé, nous allons introduire les densités de puissance des efforts extérieurs et intérieurs :*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{SCLS1}^{\text{int}} &= \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{i,i+1} D_{\nu}^{j,j+1} + \sum_{k=0}^n \pi^{k,k+1} \lambda^{k,k+1} \\
 \mathcal{P}_{SCLS1}^{\text{ext}} &= T_{\alpha}^{+} (U_{\alpha}^n + \frac{e^n}{2} \Phi_{\alpha}^n - V_{,\alpha}^{n,n+1}) + T_{\alpha}^{-} (U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} \Phi_{\alpha}^1 + V_{,\alpha}^{0,1}) + T_3^{+} U_3^n + T_3^{-} U_3^1
 \end{aligned}$$

1.4 Loi de comportement du modèle SCLS1

1.4.1 Énergie complémentaire du modèle SCLS1

La construction du modèle SCLS1 est pratiquement achevée. Pour envisager une implémentation numérique, il nous reste à présent à relier la cinématique généralisée aux efforts généralisés. Notre modèle est formulé en contraintes, si bien qu'il nous donne accès naturellement à l'énergie complémentaire restreinte aux champs affine par morceaux. La construction de la loi de comportement s'effectuera donc en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire. La grandeur découlant de ce principe sera la souplesse généralisée qu'il s'agira alors d'inverser pour obtenir la rigidité généralisée.

L'énergie élastique complémentaire ou duale d'un solide élastique est par définition égale à :

$$W_{3D}^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{3D} : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^{3D} d\Omega = \int_{\omega} w^* d\omega \text{ avec } w^* = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^{i,3D} : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^{i,3D} dz$$

Or, nous pouvons décomposer le tenseurs des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ sur ses composantes, afin de faire intervenir le champ SCLS1 postulé aux équations (1.1), (1.4), (1.5) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{i,3D} = \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D} \underline{e}^{\alpha} \otimes \underline{e}^{\beta} + \sigma_{\alpha 3}^{i,3D} \underline{e}^{\alpha} \otimes \underline{e}^3 + \sigma_{3\beta}^{i,3D} \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^{\beta} + \sigma_{33}^{i,3D} \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^3 \quad (1.20)$$

Hypothèse 1.4.1 Matériau monoclinique. *Nous allons nous intéresser, par la suite, seulement à des plis ayant une symétrie monoclinique, c'est à dire pour lesquels $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ est un plan de symétrie. Pour ces matériaux, les coefficients du tenseur de souplesse possédant un nombre impair de 3 sont nuls.*

$$\underline{\underline{\sigma}}^{i,3D} : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^{i,3D} = \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D} \sigma_{\gamma\delta}^{i,3D} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i + 4\sigma_{\alpha 3}^{i,3D} \sigma_{\gamma 3}^{i,3D} S_{\alpha 3\gamma 3}^i + 2\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D} \sigma_{33}^{i,3D} S_{\alpha\beta 33}^i + \sigma_{33}^{i,3D} \sigma_{33}^{i,3D} S_{3333}^i$$

L'énergie complémentaire, dans le cadre de l'hypothèse 1.4.1 [p. 14], est la superposition de 4 termes :

$$w_{SCLS1}^* = \sum_{i=1}^n w_K^{*i} + w_{\nu}^{*i} + w_c^{*i} + w_Q^{*i} \quad (1.21)$$

- w_K^{*i} est la contribution à l'énergie élastique des contraintes dans le plan $\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}$ du pli i (Kirchhoff)

$$w_K^{*i} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z) \sigma_{\gamma\delta}^{i,3D}(x, y, z) S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i dz \quad (1.22)$$

Avec $\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z)$ donné dans (1.1), tous calculs faits nous obtenons :

$$w_K^{*i} = \left(\frac{1}{2e^i} N_{\alpha\beta}^i N_{\gamma\delta}^i + \frac{6}{(e^i)^3} M_{\alpha\beta}^i M_{\gamma\delta}^i \right) S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \quad (1.23)$$

- w_{ν}^{*i} est la contribution à l'énergie élastique de la contrainte normale $\sigma_{33}^{i,3D}$ du pli donnée par (1.5) :

$$\begin{aligned} w_{\nu}^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} (\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z))^2 S_{3333}^i dz \\ w_{\nu}^{*i} &= \frac{e^i}{2} S_{3333}^i \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,i+1} - \pi^{i-1,i}) \right]^2 \\ &\quad + \frac{e^i}{24} S_{3333}^i \left[\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}) \right]^2 \\ &\quad + \frac{e^i}{10} S_{3333}^i \left[\frac{e^i}{12} (\pi^{i,i+1} - \pi^{i-1,i}) \right]^2 + \frac{e^i}{1400} S_{3333}^i \left[(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{2} (\pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}) \right]^2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

- w_Q^{*i} est la contribution à l'énergie élastique de la contrainte de cisaillement $\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}$ du pli donné par (1.4) :

$$\begin{aligned}
 w_Q^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} \times 4\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z)\sigma_{\gamma 3}^{i,3D}(x, y, z)S_{\alpha 3 \gamma 3}^i dz \\
 w_Q^{*i} &= \frac{2}{e^i} S_{\alpha 3 \beta 3}^i Q_\alpha^i Q_\beta^i + \frac{e^i}{6} S_{\alpha 3 \beta 3}^i (\tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i})(\tau_\beta^{i,i+1} - \tau_\beta^{i-1,i}) \\
 &\quad + \frac{2}{5e^i} S_{\alpha 3 \beta 3}^i \left(Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i}) \right) \left(Q_\beta^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\beta^{i,i+1} + \tau_\beta^{i-1,i}) \right)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

- Et enfin w_c^{*i} est la contribution à l'énergie élastique du couplage entre contrainte dans le plan $\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}$ et contrainte normale $\sigma_{33}^{i,3D}$ du pli :

$$\begin{aligned}
 w_c^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} \times 2\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z)\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z)S_{\alpha\beta 33}^i dz \\
 w_c^{*i} &= S_{\alpha\beta 33}^i N_{\alpha\beta}^i \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,i+1} - \pi^{i-1,i}) \right] \\
 &\quad + S_{\alpha\beta 33}^i \frac{M_{\alpha\beta}^i}{e^i} \left[\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}) \right]
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Nous remarquons ici que grâce à l'introduction des nouveaux efforts généralisés, nous n'avons effectué aucune approximation sur l'énergie complémentaire. En particulier nous avons bien pris en compte l'énergie due au pincement des couches et au cisaillement.

1.4.2 Minimisation de l'énergie élastique dans le cadre du modèle SCLS1

Dans le cadre de l'élasticité en petites perturbations, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène, le champ de contraintes solution minimise l'énergie complémentaire sur l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles. Ce qui s'écrit encore :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \arg \min_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}^{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \mathbb{S} : \underline{\underline{\sigma}}^* d\Omega$$

Pour obtenir les lois de comportement des efforts généralisés du modèle SCLS1, nous allons restreindre cette minimisation aux champs de contraintes SCLS1-statiquement compatibles (voir la définition 1.2.1 [p. 10]). Nous devons minimiser l'expression de l'énergie élastique complémentaire $w_{SCLS1}^* = \sum_{i=1}^n w_K^{*i} + w_\nu^{*i} + w_c^{*i} + w_Q^{*i}$ sous la contrainte que les champs soient SCLS1-statiquement admissibles. Pour cela, introduisons le Lagrangien \mathcal{L}_{SCLS1}^* associé au problème de minimisation sous contraintes.

$$\mathcal{L}_{SCLS1}^* = \int_{\omega} w_{SCLS1}^*(\underline{\underline{N}}^i, \underline{\underline{M}}^i, \underline{\underline{Q}}^i, \underline{\underline{\tau}}^{j,j+1}, \nu^{j,j+1}, \pi^{k,k+1}) + \mathcal{L}_{SCLS1} d\omega \tag{1.27}$$

En utilisant une intégration par parties afin de faire apparaître les déformations généralisées nous en déduisons :

$$\mathcal{L}_{SCLS1}^* = \int_{\omega} w_{SCLS1}^* - \mathcal{P}_{SCLS1}^{\text{int}} - \mathcal{P}_{SCLS1}^{\text{ext}} d\omega$$

La première variation $\delta \mathcal{L}_{SCLS1}^*(\underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{\tau}^{j,j+1}, \underline{\nu}^{j,j+1}, \pi^{k,k+1}, \underline{U}^i, \underline{\Phi}^i, U_3^i, V^{k,k+1})$ s'écrit pour des variations $(\delta \underline{N}^i, \delta \underline{M}^i, \delta \underline{Q}^i, \delta \underline{\tau}^{j,j+1}, \delta \underline{\nu}^{j,j+1}, \delta \pi^{k,k+1})$ de chacun de ses arguments :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{SCLS1}^* &= \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{N}^i} - \underline{\varepsilon}^i \right] : \delta \underline{N}^i + \left[\frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{M}^i} - \underline{\chi}^i \right] : \delta \underline{M}^i + \left[\frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{Q}^i} - \underline{\gamma}^i \right] : \delta \underline{Q}^i \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \left[\frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1}} - \underline{D}^{j,j+1} \right] \cdot \delta \underline{\tau}^{j,j+1} + \left[\frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{\nu}^{j,j+1}} - D_{\nu}^{j,j+1} \right] \delta \underline{\nu}^{j,j+1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \left[\frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^{k,k+1}} - \lambda^{k,k+1} \right] \delta \pi^{k,k+1} d\omega \end{aligned}$$

Stationnarité du Lagrangien La stationnarité du Lagrangien implique que les contraintes généralisées réalisant le minimum de l'énergie élastique W_{3D}^* sur l'ensemble des contraintes statiquement admissibles de la forme précédente, sont telles que les dérivées partielles de w_{SCLS1}^* par rapport aux contraintes généralisées, sont les déformations généralisées générées par des déplacements généralisés $U_{\alpha}^i, U_3^i, \phi_{\alpha}^i, V^{k,k+1}$, lesquels sont nuls sur $\partial\omega_D \times]h_1^-, h_n^+]$. Nous en déduisons ainsi que :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^i &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{N}^i} & \underline{\chi}^i &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{M}^i} & \underline{\gamma}^i &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{Q}^i} \\ \underline{D}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1}} & D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \underline{\nu}^{j,j+1}} & \lambda^{k,k+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^{k,k+1}} \end{aligned}$$

et ainsi, les différentes équations de comportement suivantes :

Équation de comportement en membrane et en flexion du pli i :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial N_{\alpha\beta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i + S_{\alpha\beta 33}^i \left(\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,i+1} - \pi^{i-1,i}) \right) \\ \chi_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial M_{\alpha\beta}^i} = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\alpha\beta}^i + \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta 33}^i \left(\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}) \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Équation de comportement en cisaillement transverse du pli i et à l'interface $j, j+1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha}^i &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial Q_{\alpha}^i} = \frac{24}{5e^i} S_{\alpha 3\gamma 3}^i Q_{\gamma}^i - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^i (\tau_{\gamma}^{i,i+1} + \tau_{\gamma}^{i-1,i}) \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}} = -\frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^j Q_{\gamma}^j - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} Q_{\gamma}^{j+1} - \frac{2}{15} e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} \\ &\quad + \frac{8}{15} (e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - \frac{2}{15} e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Équation de comportement en arrachement de l'interface $j, j + 1$:

$$\begin{aligned}
 D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \nu^{j,j+1}} \\
 &= \frac{9}{70} e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{13}{35} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} + \frac{9}{70} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \\
 &\quad - \frac{13}{420} (e^j)^2 S_{3333}^j \pi^{j-1,j} + \frac{11}{210} ((e^j)^2 S_{3333}^j - (e^{j+1})^2 S_{3333}^{j+1}) \pi^{j,j+1} + \frac{13}{420} (e^{j+1})^2 S_{3333}^{j+1} \pi^{j+1,j+2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} + \frac{6}{5e^j} S_{\alpha\beta 33}^j M_{\alpha\beta}^j - \frac{6}{5e^{j+1}} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} M_{\alpha\beta}^{j+1}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Équation de comportement pour l'effort généralisé π à l'interface $j, j + 1$:

$$\begin{aligned}
 \lambda^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^{j,j+1}} \\
 &= -\frac{1}{140} (e^j)^3 S_{3333}^j \pi^{j-1,j} + \frac{1}{105} ((e^j)^3 S_{3333}^j + (e^{j+1})^3 S_{3333}^{j+1}) \pi^{j,j+1} - \frac{1}{140} (e^{j+1})^3 S_{3333}^{j+1} \pi^{j+1,j+2} \\
 &\quad + \frac{13}{420} (e^j)^2 S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{11}{210} ((e^j)^2 S_{3333}^j - (e^{j+1})^2 S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} - \frac{13}{420} (e^{j+1})^2 S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \\
 &\quad + \frac{1}{12} e^j S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j - \frac{1}{12} e^{j+1} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} + \frac{1}{10} S_{\alpha\beta 33}^j M_{\alpha\beta}^j + \frac{1}{10} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} M_{\alpha\beta}^{j+1}
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Toutes ces lois de comportement ont déjà été détaillées dans l'article fondateur de [Baroud et al., 2016]. Anticipant l'extension au cadre dynamique du modèle SCLS1, nous donnons ensuite, les déformations duales de l'effort généralisé π , aux niveaux des interfaces supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned}
 \lambda^{0,1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^{0,1}} = \frac{1}{105} (e^1)^3 S_{3333}^1 \pi^{0,1} - \frac{1}{140} (e^1)^3 S_{3333}^1 \pi^{1,2} - \frac{11}{210} (e^1)^2 S_{3333}^1 \nu^{0,1} \\
 &\quad - \frac{13}{420} (e^1)^2 S_{3333}^1 \nu^{1,2} - \frac{1}{12} e^1 S_{\alpha\beta 33}^1 N_{\alpha\beta}^1 + \frac{1}{10} S_{\alpha\beta 33}^1 M_{\alpha\beta}^1 \\
 \lambda^{n,n+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^{n,n+1}} = -\frac{1}{140} (e^n)^3 S_{3333}^n \pi^{n-1,n} + \frac{1}{105} (e^n)^3 S_{3333}^n \pi^{n,n+1} + \frac{13}{420} (e^n)^2 S_{3333}^n \nu^{n-1,n} \\
 &\quad + \frac{11}{210} (e^n)^2 S_{3333}^n \nu^{n,n+1} + \frac{1}{12} e^n S_{\alpha\beta 33}^n N_{\alpha\beta}^n + \frac{1}{10} S_{\alpha\beta 33}^n M_{\alpha\beta}^n
 \end{aligned}$$

1.4.3 Formulation avec introduction des conditions aux limites sous forme faible

Si l'on choisit d'introduire les multiplicateurs de Lagrange $\mu_3^{n,n+1}$, $\mu_{\alpha}^{0,1}$, $\mu_3^{n,n+1}$, $\mu_{\alpha}^{0,1}$ associés aux conditions aux limites en efforts sur les parties haute et basse respectivement, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\sigma}^{3D})(x, y, z) \cdot \underline{u}(x, y, z) \, d\Omega + \int_{\omega_{\pm}} \underline{\mu} \cdot (\underline{\sigma}^{3D} \cdot \underline{n}^{\pm} - \underline{T}^{D\pm}) \, d\omega = 0 \tag{1.32}$$

Ainsi, la forme faible du modèle SCLS1 est augmentée de termes relatifs aux bords :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\omega} \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} + \sum_{k=0}^n \pi^{k,k+1} \lambda^{k,k+1} \, d\omega \\
 &+ \int_{\omega} \tau_{\alpha}^{n,n+1} (-U_{\alpha}^n - \frac{e^n}{2} \Phi_{\alpha}^n + V_{,\alpha}^{n,n+1}) + \tau_{\alpha}^{0,1} (U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} \Phi_{\alpha}^1 + V_{,\alpha}^{0,1}) - \nu^{n,n+1} U_3^n + \nu^{0,1} U_3^1 \, d\omega \\
 &+ \int_{\omega} \mu_{\alpha}^{n,n+1} (\tau_{\alpha}^{n,n+1} - T_{\alpha}^+) - \mu_{\alpha}^{0,1} (\tau_{\alpha}^{0,1} + T_{\alpha}^-) + \mu_3^{n,n+1} (\nu^{n,n+1} - T_3^+) - \mu_3^{0,1} (\nu^{0,1} + T_3^-) \, d\omega = 0
 \end{aligned}$$

Si l'on pose de plus, par convention :

$$\begin{aligned} D_\alpha^{n,n+1} &= \mu_\alpha^{n,n+1} - U_\alpha^n - \frac{e^j}{2} \Phi_\alpha^n + V_\alpha^{n,n+1} & D_\nu^{n,n+1} &= \mu_3^{n,n+1} - U_3^n \\ D_\alpha^{0,1} &= U_\alpha^1 - \mu_\alpha^{0,1} - \frac{e^1}{2} \Phi_\alpha^1 + V_\alpha^{0,1} & D_\nu^{0,1} &= U_3^1 - \mu_3^{0,1} \end{aligned} \quad (1.33)$$

On obtient alors la forme faible compacte suivante :

$$\begin{aligned} & \int_\omega \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{k=0}^n \underline{\tau}^{k,k+1} \cdot \underline{D}^{k,k+1} + \nu^{k,k+1} D_\nu^{k,k+1} + \pi^{k,k+1} \lambda^{k,k+1} \, d\omega \\ & - \int_\omega \mu_\alpha^{n,n+1} T_\alpha^+ + \mu_\alpha^{0,1} T_\alpha^- + \mu_3^{n,n+1} T_3^+ + \mu_3^{0,1} T_3^- \, d\omega = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Les multiplicateurs de Lagrange μ , étaient absents des travaux antérieurs concernant le SCLS1 ou le LS1. Pourtant, leur introduction est naturelle et leur signification physique intéressante : ils sont les variables duales des contraintes extérieures et peuvent par conséquent s'interpréter comme les déplacements des faces supérieure et inférieure. Ces multiplicateurs permettront, par la suite, d'envisager une procédure plus précise pour la simulation du contact avec les modèles SCLS1 ou LS1, dans la prise en compte de propriétés de symétrie ou encore d'appui simples.

Les lois de comportement reliant les déformations généralisées (1.33) aux efforts d'interfaces $\underline{\tau}^{n,n+1}$, $\nu^{n,n+1}$, $\underline{\tau}^{0,1}$, $\nu^{0,1}$ sont obtenues en exploitant la stationnarité du lagrangien (1.27), ici augmenté de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SCLS1}^* &= \int_\omega w_{SCLS1}^*(\underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{\tau}^{k,k+1}, \nu^{k,k+1}, \pi^{k,k+1}) + \mathcal{L}_{SCLS1} \, d\omega \\ & + \int_\omega \mu_\alpha^{n,n+1} (\tau_\alpha^{n,n+1} - T_\alpha^+) - \mu_\alpha^{0,1} (\tau_\alpha^{0,1} + T_\alpha^-) + \mu_3^{n,n+1} (\nu^{n,n+1} - T_3^+) - \mu_3^{0,1} (\nu^{0,1} + T_3^-) \, d\omega \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} D_\alpha^{0,1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \tau_\alpha^{0,1}} = -\frac{2}{5} S_{\alpha 3 \gamma 3}^1 Q_\gamma^1 + \frac{8}{15} e^1 S_{\alpha 3 \gamma 3}^1 \tau_\gamma^{0,1} - \frac{2}{15} e^1 S_{\alpha 3 \gamma 3}^1 \tau_\gamma^{1,2} \\ D_\alpha^{n,n+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \tau_\alpha^{n,n+1}} = -\frac{2}{5} S_{\alpha 3 \gamma 3}^j Q_\gamma^n - \frac{2}{15} e^n S_{\alpha 3 \gamma 3}^n \tau_\gamma^{n-1,n} + \frac{8}{15} e^n S_{\alpha 3 \gamma 3}^n \\ D_\nu^{0,1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \nu^{0,1}} = \frac{13}{35} e^1 S_{3333}^1 \nu^{0,1} + \frac{9}{70} e^1 S_{3333}^1 \nu^{1,2} - \frac{11}{210} (e^1)^2 S_{3333}^1 \pi^{0,1} + \frac{13}{420} (e^1)^2 S_{3333}^1 \pi^{1,2} \\ & \quad + \frac{1}{2} S_{\alpha \beta 33}^1 N_{\alpha \beta}^1 - \frac{6}{5e^{j+1}} S_{\alpha \beta 33}^1 M_{\alpha \beta}^1 \\ D_\nu^{n,n+1} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \nu^{n,n+1}} = \frac{9}{70} e^n S_{3333}^n \nu^{n-1,n} + \frac{13}{35} e^n S_{3333}^n \nu^{n,n+1} - \frac{13}{420} (e^n)^2 S_{3333}^n \pi^{n-1,n} + \frac{11}{210} (e^n)^2 S_{3333}^n \pi^{n,n+1} \\ & \quad + \frac{1}{2} S_{\alpha \beta 33}^n N_{\alpha \beta}^n + \frac{6}{5e^n} S_{\alpha \beta 33}^n M_{\alpha \beta}^n \end{aligned} \quad (1.35)$$

Notation 1.4.1 . Nous noterons en *vert* les termes liés à l'introduction des conditions aux limites en effort sous forme faible.

1.5 Formulation matricielle du modèle SCLS1

1.5.1 Expression matricielle des lois de comportement

Vecteurs déplacements, déformations et contraintes généralisés

Nous introduisons à présent le vecteur déplacements généralisés de longueur $6n + 7$:

$$\{\mathbf{U}\}^\top = \left\{ \mu_\alpha^{0,1}, \mu_3^{0,1}, U_\alpha^1, U_3^1, \Phi_\alpha^1, \dots, U_\alpha^n, U_3^n, \Phi_\alpha^n, \mu_\alpha^{n,n+1}, \mu_3^{n,n+1}, V^{0,1}, \dots, V^{n,n+1} \right\}$$

Le vecteur des déformations généralisées de taille $12n + 4$:

$$\{\mathbf{E}\}^\top = \{ \{\mathbf{E}^K\}^\top, \{\mathbf{E}^\nu\}^\top, \{\mathbf{E}^Q\}^\top, \{\mathbf{E}^\lambda\}^\top \}$$

$$\{\mathbf{E}^K\}^\top = \{ \varepsilon_{11}^1, \varepsilon_{22}^1, 2\varepsilon_{12}^1, \chi_{11}^1, \chi_{22}^1, 2\chi_{12}^1, \dots, \varepsilon_{11}^n, \varepsilon_{22}^n, 2\varepsilon_{12}^n, \chi_{11}^n, \chi_{22}^n, 2\chi_{12}^n \} \quad (1.36a)$$

$$\{\mathbf{E}^\nu\}^\top = \{ D_\nu^{0,1}, D_\nu^{1,2}, \dots, D_\nu^{n-1,n}, D_\nu^{n,n+1} \} \quad (1.36b)$$

$$\{\mathbf{E}^Q\}^\top = \{ D_1^{0,1}, D_2^{0,1}, \gamma_1^1, \gamma_2^1, D_1^{1,2}, D_2^{1,2}, \dots, D_1^{n-1,n}, D_2^{n-1,n}, \gamma_1^n, \gamma_2^n, D_1^{n,n+1}, D_2^{n,n+1} \} \quad (1.36c)$$

$$\{\mathbf{E}^\lambda\}^\top = \{ \lambda^{0,1}, \lambda^{1,2}, \dots, \lambda^{n-1,n}, \lambda^{n,n+1} \} \quad (1.36d)$$

$\{\mathbf{E}^K\}^\top$ désigne le vecteur déformation généralisée de Kirchhoff de taille $6n$, $\{\mathbf{E}^\nu\}^\top$ désigne le vecteur déformation normale généralisée de taille $n + 1$, $\{\mathbf{E}^Q\}^\top$ désigne le vecteur déformation tranchante généralisée de taille $4n + 2$, enfin $\{\mathbf{E}^\lambda\}$ est la déformation associée à la variable λ de taille $n + 1$. Finalement le $12n + 4$ vecteur des contraintes généralisées $\{\mathbf{\Sigma}\}$ est défini par :

$$\{\mathbf{\Sigma}\}^\top = \{ \{\mathbf{\Sigma}^K\}^\top, \{\mathbf{\Sigma}^\nu\}^\top, \{\mathbf{\Sigma}^Q\}^\top, \{\mathbf{\Sigma}^\pi\}^\top \}$$

$$\{\mathbf{\Sigma}^K\}^\top = \{ N_{11}^1, N_{22}^1, N_{12}^1, M_{11}^1, M_{22}^1, M_{12}^1, \dots, N_{11}^n, N_{22}^n, N_{12}^n, M_{11}^n, M_{22}^n, M_{12}^n \} \quad (1.37a)$$

$$\{\mathbf{\Sigma}^\nu\}^\top = \{ \nu^{0,1}, \nu^{1,2}, \dots, \nu^{n-1,n}, \nu^{n,n+1} \} \quad (1.37b)$$

$$\{\mathbf{\Sigma}^Q\}^\top = \{ \tau_1^{0,1}, \tau_2^{0,1}, Q_1^1, Q_2^1, \tau_1^{1,2}, \tau_2^{1,2}, \dots, \tau_1^{n-1,n}, \tau_2^{n-1,n}, Q_1^n, Q_2^n, \tau_1^{n,n+1}, \tau_2^{n,n+1} \} \quad (1.37c)$$

$$\{\mathbf{\Sigma}^\pi\}^\top = \{ \pi^{0,1}, \pi^{1,2}, \dots, \pi^{n-1,n}, \pi^{n,n+1} \} \quad (1.37d)$$

Si nous choisissons d'introduire les conditions aux limites sous forme faible (donc de conserver les inconnues notées en vert, les équations constitutives du modèle SCLS1 peuvent se réécrire :

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{S}] \cdot \{\mathbf{\Sigma}\} \text{ où } [\mathbf{S}] \text{ désigne la matrice de souplesse généralisée.}$$

Remarque 1.5.1 Par rapport à l'ancienne version du modèle SCLS1 [Baroud et al., 2016], dans laquelle les conditions aux limites étaient traitées sous forme forte, nous notons ici l'absence du vecteur pré-déformations associé aux conditions aux limites.

Vecteur pré-déformations et efforts extérieurs

Si l'on choisit de ne pas introduire les efforts d'interfaces comme de nouvelles inconnues généralisées, les termes en vert et en rouges précédemment notés dans les matrices de souplesse n'existent plus. Il faut alors, pour satisfaire les équations de comportement introduire le vecteur pré-déformations généralisées. $\{\mathbf{E}_0\}$ contient les contributions aux déformations généralisées des efforts surfaciques appliqués \underline{T}^- et \underline{T}^+ . La loi de comportement s'écrit alors :

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{S}] \cdot \{\mathbf{\Sigma}\} + \{\mathbf{E}_0\} \text{ où } [\mathbf{S}] \text{ désigne la matrice de souplesse généralisée sans les termes verts.} \quad (1.38)$$

Plus précisément, une expression explicite de $\{\mathbf{E}_0\}$ est obtenue en utilisant les équations des conditions aux limites (1.11), (1.12), dans les équations de comportement (1.28) à (1.31) tout en annulant tous les coefficients de $\{\mathbf{\Sigma}\}$. Les expressions de la matrice de souplesse et du vecteur pré-déformations sont données dans l'annexe A [p. 151], section A.1 [p. 151]

Remarque 1.5.2 Notons ici que les lois de comportement s'expriment naturellement en souplesse, c'est à dire que la relation linéaire la plus simple exprime les déformations généralisées en fonction des contraintes généralisées et non l'inverse, comme habituellement.

1.5.2 Forme faible sous forme matricielle

La formulation faible, issue du principe de la dualisation des équations d'équilibre par des champs tests, constitue la base de la résolution approchée par la méthode des éléments finis. Les grandeurs entre accolades désigneront des vecteurs, tandis que les grandeurs entre crochets désigneront des matrices. Nous avons jusqu'à présent introduit deux formes variationnelles (1.19) [p. 13], (1.34) [p. 18] selon que l'on choisisse ou non d'introduire les conditions aux limites en efforts sous forme faible.

Forme faible sous forme matricielle avec multiplicateurs de Lagrange

L'équation constitutive ci-dessus peut être inversée afin d'utiliser la méthode des éléments finis en déplacements :

$$\{\Sigma\} = [C] \cdot \{E\}$$

où $[C] = [S]^{-1}$ est la matrice de rigidité généralisée carrée de taille $12n + 4$, qui possède la même structure de blocs que la matrice de souplesse. La forme faible sous forme matricielle s'écrit donc à présent :

$$\int_{\omega} \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^{\top} \cdot \{\Sigma(\{\mathbf{U}\})\} d\omega = \int_{\omega} \{\mathbf{W}\}^{\top} \cdot \{\mathbf{F}\} d\omega \quad (1.39)$$

Ou encore : Trouver le déplacement généralisé $\{\mathbf{U}\}$ satisfaisant les conditions aux limites tel que :

$$\int_{\omega} \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^{\top} \cdot [C] \cdot \{\mathbf{E}(\{\mathbf{U}\})\} d\omega = \int_{\omega} \{\mathbf{W}\}^{\top} \cdot \{\mathbf{F}\} d\omega \quad \forall \{\mathbf{W}\} \in \mathcal{C}^{ad}$$

Ici, $\{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}$ et $\{\mathbf{E}(\{\mathbf{U}\})\}$ désignent respectivement les déformations généralisées associées aux déplacements $\{\mathbf{W}\}$ et $\{\mathbf{U}\}$, via les équations de compatibilité et $\{\mathbf{F}\}$ désigne le vecteur force généralisée donné par :

$$\{\mathbf{F}\}^{\top} = \{T_{\alpha}^{-}, T_3^{-}, 0_{\mathbb{R}^{5n}}, T_{\alpha}^{+}, T_3^{+}, 0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$$

Forme faible sous forme matricielle sans multiplicateurs de Lagrange

Si l'on choisit de ne pas introduire les conditions aux limites sous forme faible, nous avons alors à résoudre la formulation variationnelle suivante :

Trouver le déplacement généralisé $\{\mathbf{U}\}$ satisfaisant les conditions aux limites tel que :

$$\int_{\omega} \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^{\top} \cdot [C] \cdot \{\mathbf{E}(\{\mathbf{U}\})\} d\omega = \int_{\omega} \{\mathbf{W}\}^{\top} \cdot \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^{\top} \cdot [C] \cdot \{\mathbf{E}_0\} d\omega \quad \forall \{\mathbf{W}\} \in \mathcal{C}^{ad} \quad (1.40)$$

où $[C]$ et $\{\mathbf{E}_0\}$ sont définis dans (1.38) et $\{\mathbf{F}\}$ par :

$$\{\mathbf{F}\}^{\top} = \{T_{\alpha}^{-}, T_3^{-}, -\frac{e_1 T_{\alpha}^{-}}{2}, 0, 0_{\mathbb{R}^{5(n-2)}}, T_{\alpha}^{+}, T_3^{+}, \frac{e_n T_{\alpha}^{+}}{2}, 0, T_{\alpha, \alpha}^{-}, 0_{\mathbb{R}^{n-1}}, -T_{\alpha, \alpha}^{+}\}$$

1.6 Modèle LS1

Le modèle le plus général de plaques multicouches possédant une approximation membranaire de degré 1 par couches, est le modèle SCLS1 décrit précédemment. En effet, nous avons été en mesure, en introduisant à priori 9 inconnues généralisées, d'exprimer complètement le champ de contraintes dans chaque pli. Le modèle LS1 [Caron et al., 2006, Naciri et al., 1998], est un cas particulier dégénéré du modèle précédent, pour lequel on choisit de ne pas introduire l'effort généralisé $\pi^{j,j+1}$ dans l'expression du champ des contraintes et en postulant une approximation de l'énergie élastique complémentaire.

1.6.1 Champs des contraintes du modèle LS1

Comme déjà mentionné, nous allons simplement écrire le champ de contraintes de Cauchy tridimensionnel, en remplaçant l'effort généralisé $\pi^{i,i+1}$ précédemment introduit par $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$. Le champ de contraintes membranaires et de cisaillement du modèle LS1 s'écrit exactement comme ceux du modèle SCLS1 (1.1),(1.4) :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D,LS1} &= \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D,SCLS1} \text{ où } \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D,SCLS1} \text{ est donné dans (1.1)} \\ \sigma_{\alpha 3}^{i,3D,LS1} &= \sigma_{\alpha 3}^{i,3D,SCLS1} \text{ où } \sigma_{\alpha 3}^{i,3D,SCLS1} \text{ est donné dans (1.4)}\end{aligned}$$

Le champ $\sigma_{33}^{i,3D}$ est cubique en z , nous l'introduisons en remplaçant dans (1.5) $\pi^{i,+}$ et $\pi^{i,-}$ par $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$ et $\tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}$.

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z) &= \left[\frac{e^i}{12}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) + \frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) \right] P_0^i(z) \\ &+ \left[\frac{e^i}{10}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) + \frac{6}{5}(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] P_1^i(z) \\ &+ \left[\frac{e^i}{12}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right] P_2^i(z) + \left[\frac{e^i}{2}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right] P_3^i(z)\end{aligned}$$

Remarque 1.6.1 Nous avons omis de mentionner que, comme pour le SCLS1, à ce stade, nous devrions indiquer les champs de contraintes τ , ν par i pour mentionner qu'ils sont définis dans la couche i . La continuité des contraintes aux interfaces nous permettrait alors d'enlever l'indice.

1.6.2 Équations d'équilibre du modèle LS1

Le champ de contraintes membranaires et de cisaillement du modèle LS1 sont identiques à ceux du modèle SCLS1. Par conséquent, l'équation (1.6) nous redonne les mêmes équations d'équilibre (1.8) que dans le cas SCLS1. La divergence projetée suivant \underline{e}_3 (1.7) est en revanche plus simple que dans le cas SCLS1 :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 3, \alpha}^{i,LS1} + \sigma_{33,3}^{i,LS1} &= [Q_{\alpha,\alpha}^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] + [\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}] P_1^i(z) \\ &+ [-\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}] \frac{P_2^i(z)}{2} \\ &= [Q_{\alpha,\alpha}^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right]\end{aligned}$$

dont on tire une équation supplémentaire :

$$Q_{\alpha,\alpha}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} = 0 \quad (1.41)$$

En substituant $\pi^{i,i+1}$ à $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$, nous avons supprimé la dernière équation d'équilibre et donc simplifié l'expression de la divergence du champ des contraintes tridimensionnelles.

Les équations d'équilibre statiques du modèle LS1 (1.8) et (1.41) peuvent alors s'écrire sous forme tensorielle $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\underline{0} &= \text{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} \\ 0 &= \text{div}(\underline{Q}^i) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \\ \underline{0} &= \text{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})\end{aligned} \quad (1.42)$$

Remarque 1.6.2 Les équations tridimensionnelles amènent $5n$ équations d'équilibre et donc autant de degrés de liberté cinématique pour le modèle LS1. Ceci justifie l'ancienne appellation accordée à ce modèle : $\mathcal{M}_{4,5n}$

1.6.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites du modèle LS1 sont identiques à celles du modèle SCLS1 sauf en ce qui concerne l'effort généralisé π . Ne resteront pour le modèle LS1 que les équations (1.10), (1.11)

Définition 1.6.1 Ensemble LS1-statiqument admissible. *Le champ de contraintes tridimensionnel $\underline{\underline{\sigma}}^{i,3D}$ est LS1-statiqument admissible quand il satisfait les équations d'équilibre ci-dessus dans ω pour i dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ et k dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ ainsi que les conditions aux limites :*

$$\mathcal{S}_{LS1}^{ad} = \{ \underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{\tau}^{k,k+1}, \nu^{k,k+1}, \text{ vérifiant (1.42), (1.10) - (1.11)} \} \quad (1.43)$$

1.6.4 Cinématique du modèle LS1

Déplacements généralisés du modèle

Nous allons à présent obtenir les déplacements généralisés ainsi que les déformations généralisées par dualisation des équations d'équilibre. La formulation faible du problème d'équilibre tridimensionnel s'écrit différemment, selon que l'on considère les conditions aux limites sous forme faible (1.32), ou non (1.14). En introduisant les contraintes généralisées de notre modèle, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} + [M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \frac{12P_1^i(z)}{e^{i^2}} u_{\alpha} \\ + [Q_{\alpha,\alpha}^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3(x, y, z) dz d\omega \end{aligned}$$

Les contraintes généralisées étant, par hypothèse, indépendantes de la coordonnée verticale z , nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha}(x, y, z) dz \right] d\omega \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i^2}} u_{\alpha}(x, y, z) dz \right] d\omega \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [Q_{\alpha,\alpha}^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})] \left[\int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3(x, y, z) dz \right] d\omega \end{aligned}$$

Introduisons à présent les déplacements généralisés de notre modèle LS1, identiques à ceux du modèle SCLS1 :

$$\begin{aligned} \underline{U}^i = U_{\alpha}^i \underline{e}^{\alpha} \text{ avec } U_{\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha}(x, y, z) dz \quad U_3^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3(x, y, z) dz \\ \underline{\Phi}^i = \Phi_{\alpha}^i \underline{e}^{\alpha} \text{ avec } \Phi_{\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i^2}} u_{\alpha}(x, y, z) dz \end{aligned}$$

\underline{U}^i (resp U_3^i) correspond une nouvelle fois au déplacement membranaire (resp normal) moyen de la couche i , tandis que $\underline{\Phi}^i$ correspond à la rotation de la couche i . La formulation faible de notre problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\text{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i}] \cdot \underline{U}^i + [\text{div}(\underline{Q}^i) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}] U_3^i d\omega \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[\text{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right] \cdot \underline{\Phi}^i d\omega \end{aligned}$$

Les déplacements généralisés s'interprètent comme les champs tests par lesquels nous dualisons chacune des équations d'équilibre du modèle LS1 (1.42).

Déformations généralisées du modèle

Afin d'obtenir les déformations généralisées, nous allons à présent intégrer par parties la formulation faible précédente, en prenant en compte la condition d'encastrement aux limites cinématiques sur $\partial\omega_D \times]h_1^-, h_n^+[$:

$$\underline{U}^i = \underline{0} \quad \underline{\Phi}^i = \underline{0} \quad U_3^i = 0 \text{ sur } \partial\omega_D \times]h_1^-, h_n^+[$$

ainsi que la condition de bord libre sur $\partial\omega_T$. La combinaison de ces deux conditions aux limites annule le terme de bord apparaissant dans l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^n \int_{\omega} -\underline{N}^i : \underline{\text{grad}} \underline{U}^i + (\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{U}^i - \underline{Q}^i \cdot \underline{\text{grad}} U_3^i + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) U_3^i \, d\omega \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} -\underline{M}^i : \underline{\text{grad}} \underline{\Phi}^i - \left(\underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{\Phi}^i \, d\omega \end{aligned}$$

Après la même manipulation de changement d'indice sur les tenseurs $\underline{\tau}^{j,j+1}$, $\nu^{j,j+1}$ que dans (1.17), en utilisant la symétrie des tenseurs \underline{N}^i et \underline{M}^i ainsi que les conditions aux limites sur les faces inférieure et supérieure, nous pourrions réécrire la formulation faible ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} \, d\omega = \\ \int_{\omega} T_{\alpha}^+ \left(U_{\alpha}^n + \frac{e^n}{2} \Phi_{\alpha}^n \right) + T_{\alpha}^- \left(U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} \Phi_{\alpha}^1 \right) + T_3^+ U_3^n + T_3^- U_3^1 \, d\omega \end{aligned} \quad (1.44)$$

où toutes les fonctions tensorielles ou scalaires sont des fonctions des variables (x, y) , et où nous avons introduit les déformations généralisées fonctions des déplacements généralisés, via :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} \left(\underline{\text{grad}}(\underline{U}^i) + \underline{\text{grad}}^{\top}(\underline{U}^i) \right) \quad \underline{D}^{j,j+1} = \underline{U}^{j+1} - \underline{U}^j - \frac{e^{j+1}}{2} \underline{\Phi}^{j+1} - \frac{e^j}{2} \underline{\Phi}^j \\ \underline{\chi}^i &= \frac{1}{2} \left(\underline{\text{grad}}(\underline{\Phi}^i) + \underline{\text{grad}}^{\top}(\underline{\Phi}^i) \right) \quad D_{\nu}^{j,j+1} = U_3^{j+1} - U_3^j \\ \underline{\gamma}^i &= \underline{\Phi}^i + \underline{\text{grad}}(U_3^i) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Notation 1.6.1 Dualisation des équations d'équilibre. *Comme précédemment, nous allons introduire la notation compacte pour la dualisation des équations d'équilibre du modèle LS1 :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LS1} = & \sum_{i=1}^n \left[\text{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} \right] \cdot \underline{U}^i + \left[\text{div}(\underline{Q}^i) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right] U_3^i \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\text{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right] \cdot \underline{\Phi}^i \end{aligned}$$

1.6.5 Loi de comportement du modèle LS1

Énergie complémentaire du modèle LS1

Nous ne considérons, comme précédemment, que des matériaux monocliniques selon l'hypothèse 1.4.1 [p. 14]. L'énergie complémentaire est toujours la superposition de 4 termes (1.21) [p. 14]. Les champs de contraintes membranaires et de cisaillements des modèles SCLS1 et LS1 étant identiques, les énergies complémentaires w_K^{*i} et w_Q^{*i} dans le cadre du modèle LS1 seront égales à celles du modèle SCLS1.

$$w_K^{*i, LS1} = w_K^{*i, SCLS1} \text{ avec } w_K^{*i, SCLS1} \text{ donnée par (1.23)}$$

$$w_Q^{*i, LS1} = w_Q^{*i, SCLS1} \text{ avec } w_Q^{*i, SCLS1} \text{ donnée par (1.25)}$$

- w_ν^{*i} est la contribution à l'énergie élastique de la contrainte normale $\sigma_{33}^{i,3D}$ du pli i :

$$\begin{aligned} w_\nu^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} (\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z))^2 S_{3333}^i dz \\ w_\nu^{*i} &= \frac{e^i}{2} S_{3333}^i \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 \\ &\quad + \frac{e^i}{24} S_{3333}^i \left[\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 \\ &\quad + \frac{e^i}{10} S_{3333}^i \left[\frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 + \frac{e^i}{1400} S_{3333}^i \left[(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 \end{aligned} \quad (1.46)$$

- w_c^{*i} est la contribution à l'énergie élastique du couplage entre contrainte dans le plan $\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}$ et contrainte normale $\sigma_{33}^{i,3D}$ du pli :

$$\begin{aligned} w_c^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} \times 2\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}(x, y, z)\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z)S_{\alpha\beta 33}^i dz \\ w_c^{*i} &= S_{\alpha\beta 33}^i N_{\alpha\beta}^i \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right] \\ &\quad + S_{\alpha\beta 33}^i \frac{M_{\alpha\beta}^i}{e^i} \left[\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right] \end{aligned} \quad (1.47)$$

Les expressions (1.46), (1.47) sont simplement obtenues en remplaçant $\pi^{i,i+1}$ dans l'expression des énergies complémentaires (1.24), (1.26) du modèle SCLS1 par $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$.

Minimisation de l'énergie complémentaire dans le cadre du modèle LS1

Hypothèses simplificatrices Une nouvelle fois, le modèle étant naturellement construit en contrainte, nous allons exploiter le principe tridimensionnel de minimisation de l'énergie complémentaire pour obtenir les lois de comportement du modèle LS1. Afin de ne pas faire intervenir les termes $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$, c'est à dire la divergence de l'effort de cisaillement inter-laminaire, nous allons de plus formuler des hypothèses concernant l'ordre de grandeur des différentes contributions à l'énergie complémentaire.

Postulat 1.6.1 Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à π . *Nous allons négliger les termes en $(e^i)^2(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} \pm \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})$, $(e^i)^3(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} \pm \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})$ dont l'ordre de grandeur est beaucoup plus faible, a priori, que celui des autres contributions.*

Si nous revenons à l'équation (1.46), le postulat 1.6.1 [p. 24] néglige les termes en « $e\tau_{\alpha,\alpha}$ devant ν ». Cette approximation sera tout à fait valable dans les zones où les variations du cisaillement d'interface sont régulières, mais pourra être mise en défaut au voisinage immédiat des bords libres.

Postulat 1.6.2 Découplage membrane-arrachement. *Nous allons négliger les énergies de déformations pour chaque couche traduisant le couplage entre l'effort membranaire et la contrainte d'arrachement. Ceci revient à supposer faible l'énergie de pincement des couches, lors d'une déformation dans le plan.*

Ces deux postulats permettent d'ôter la dépendance de l'énergie complémentaire reliée aux termes $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$, $\tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}$, lesquels auraient rendu l'exploitation du minimum de l'énergie complémentaire, pour l'obtention des lois de comportement, impossible. Par ailleurs, négliger les termes de couplages entre effort membranaire et effort d'arrachement, permet de rendre la matrice de souplesse diagonale par blocs, ce qui facilitera ultérieurement son inversion, pour la

modélisation éléments finis en déplacements.

Pour obtenir les lois de comportement des efforts généralisés du modèle LS1, nous allons restreindre cette minimisation aux champs de contraintes LS1-statiquement compatibles, comme défini par (1.43). Ainsi, devons-nous minimiser l'expression de l'énergie élastique complémentaire w_{LS1}^* , sous la contrainte que les champs soient statiquement admissibles. Pour ce faire, introduisons le Lagrangien \mathcal{L}_{LS1}^* associé au problème de minimisation sous contraintes :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LS1}^* &= \int_{\omega} w_{LS1}^*(\underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{\tau}^{j,j+1}, \underline{\nu}^{j,j+1}) + \mathcal{L}_{LS1} \, d\omega \\ \mathcal{L}_{LS1}^* &= \int_{\omega} w_{LS1}^* - \mathcal{P}_{LS1}^{\text{int}} - \mathcal{P}_{LS1}^{\text{ext}} \, d\omega\end{aligned}$$

La première variation $\delta\mathcal{L}_{LS1}^*$ s'écrit pour des variations $(\delta\underline{N}^i, \delta\underline{M}^i, \delta\underline{Q}^i, \delta\underline{\tau}^{j,j+1}, \delta\underline{\nu}^{j,j+1})$ de chacun de ses arguments :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{LS1}^* &= \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{N}^i} - \underline{\varepsilon}^i \right] : \delta\underline{N}^i + \left[\frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{M}^i} - \underline{\chi}^i \right] : \delta\underline{M}^i + \left[\frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{Q}^i} - \underline{\gamma}^i \right] : \delta\underline{Q}^i \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1}} - \underline{D}^{j,j+1} \right] \cdot \delta\underline{\tau}^{j,j+1} + \left[\frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{\nu}^{j,j+1}} - \underline{D}_{\nu}^{j,j+1} \right] \nu^{j,j+1}\end{aligned}$$

Stationnarité du Lagrangien La stationnarité du Lagrangien entraîne que les contraintes généralisées réalisant le minimum de l'énergie élastique $W_{3D}^{*,LS1}$, sur l'ensemble des contraintes statiquement admissibles de la forme précédente, sont telles que les dérivées partielles de w_{LS1}^* par rapport aux contraintes généralisées, sont les déformations généralisées générées par des déplacements généralisés $U_{\alpha}^i, U_3^i, \phi_{\alpha}^i$, lesquels sont nuls sur $\partial\omega_D \times]h_1^-, h_n^+]$. Nous en déduisons ainsi que :

$$\underline{\varepsilon}^i = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{N}^i} \quad \underline{\chi}^i = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{M}^i} \quad \underline{\gamma}^i = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{Q}^i} \quad \underline{D}^{j,j+1} = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{\tau}^{j,j+1}} \quad \underline{D}_{\nu}^{j,j+1} = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \underline{\nu}^{j,j+1}}$$

Équation de comportement en membrane et en flexion du pli i :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial N_{\alpha\beta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i \quad \text{et} \quad \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial M_{\alpha\beta}^i} = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\alpha\beta}^i \quad (1.48)$$

Les deux lois ci-dessus sont obtenues à partir de (1.28), en négligeant le couplage avec les termes en arrachement ν et en π .

Équation de comportement en cisaillement transverse du pli i et à l'interface $j, j+1$:

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha}^i &= \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial Q_{\alpha}^i} = \frac{24}{5e^i} S_{\alpha 3 \gamma 3}^i Q_{\gamma}^i - \frac{2}{5} S_{\alpha 3 \gamma 3}^i (\tau_{\gamma}^{i,i+1} + \tau_{\gamma}^{i-1,i}) \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}} = -\frac{2}{5} S_{\alpha 3 \gamma 3}^j Q_{\gamma}^j - \frac{2}{5} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1} Q_{\gamma}^{j+1} - \frac{2}{15} e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} \\ &\quad + \frac{8}{15} (e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - \frac{2}{15} e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2}\end{aligned} \quad (1.49)$$

Les lois de comportement en cisaillement (1.49) sont rigoureusement identiques à celles du modèle SCLS1 (1.29).

Équation de comportement en arrachement de l'interface $j, j+1$:

$$D_{\nu}^{j,j+1} = \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial \nu^{j,j+1}} = \frac{9}{70} e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{13}{35} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} + \frac{9}{70} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \quad (1.50)$$

Expression matricielle des lois de comportement

Vecteurs déplacements, déformations et contraintes généralisées Nous introduisons à présent le vecteur déplacements généralisés de longueur $5n$:

$$\{\mathbf{U}\}^\top = \{U_1^1, U_2^1, U_3^1, \Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, U_1^n, U_2^n, U_3^n, \Phi_1^n, \Phi_2^n\}$$

Le vecteur des déformations généralisées est une version simplifiée de celui du modèle SCLS1 :

$$\{\mathbf{E}\}^\top = \{\{\mathbf{E}^K\}^\top, \{\mathbf{E}^\nu\}^\top, \{\mathbf{E}^Q\}^\top\}$$

Les expressions de $\{\mathbf{E}^K\}^\top$, $\{\mathbf{E}^\nu\}^\top$, $\{\mathbf{E}^Q\}^\top$ sont identiques à celles du modèle SCLS1 et sont données dans (1.36a), (1.36b), (1.36c). En prenant toutefois garde au fait que les déformations généralisées du cisaillement d'interfaces dans (1.36c) sont celles données par (1.45) et non par (1.18) (le déplacement généralisé $V^{i,i+1}$ ayant disparu). De même le vecteur des contraintes généralisées $\{\mathbf{\Sigma}\}$ est défini par :

$$\{\mathbf{\Sigma}\}^\top = \{\{\mathbf{\Sigma}^K\}^\top, \{\mathbf{\Sigma}^\nu\}^\top, \{\mathbf{\Sigma}^Q\}^\top\}$$

où les expressions des contraintes généralisées sont déjà données dans (1.37a), (1.37b), (1.37c). Avec ces notations, les équations constitutives du modèle LS1 peuvent se réécrire :

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbb{S}] \cdot \{\mathbf{\Sigma}\} + \{\mathbf{E}_0\}$$

où $[\mathbb{S}]$ désigne la matrice de souplesse généralisée et $\{\mathbf{E}_0\}$ un vecteur de « pré-déformations » dont les expressions sont détaillées ci-dessous.

Matrice de souplesse du modèle LS1 La matrice de souplesse généralisée a une structure diagonale par blocs :

$$[\mathbb{S}] = \begin{pmatrix} [\mathbb{S}_{LS1}^K] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbb{S}_{LS1}^\nu] & 0 \\ & 0 & [\mathbb{S}_{LS1}^Q] \end{pmatrix}$$

Où les souplesses sont identiques au cas SCLS1 :

$$[\mathbb{S}_{LS1}^K] = [\mathbb{S}_{SCLS1}^K] \text{ avec } [\mathbb{S}_{SCLS1}^K] \text{ donnée par (A.1)}$$

$$[\mathbb{S}_{LS1}^\nu] = [\mathbb{S}_{SCLS1}^\nu] \text{ avec } [\mathbb{S}_{SCLS1}^\nu] \text{ donnée par (A.2)}$$

$$[\mathbb{S}_{LS1}^Q] = [\mathbb{S}_{SCLS1}^Q] \text{ avec } [\mathbb{S}_{SCLS1}^Q] \text{ donnée par (A.3)}$$

Vecteur pré-déformations et efforts extérieurs Le vecteur pré-déformations généralisées $\{\mathbf{E}_0\}$ contient les contributions aux déformations généralisées des efforts surfaciques appliqués \underline{T}^- et \underline{T}^+ .

Plus précisément, une expression explicite de $\{\mathbf{E}_0\}$ est obtenue en utilisant les équations des conditions aux limites (1.11), (1.12), dans les équations de comportement (1.28) à (1.31) tout en annulant tous les coefficients de $\{\mathbf{\Sigma}\}$

$$\{\mathbf{E}_0\} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^{6n}} \\ \frac{9}{70} e^1 S_{33}^1 \nu^{0,1} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-3}} \\ \frac{9}{70} e^n S_{33}^n \nu^{n,n+1} \\ \mathbf{E}^{Q^0} \\ 0_{\mathbb{R}^{4n-10}} \\ \mathbf{E}^{Q^{n+1}} \end{pmatrix}$$

Les expressions de \mathbf{E}^{Q^0} et $\mathbf{E}^{Q^{n+1}}$ sont données dans (A.4).

1.7 Un modèle LS1 condensé, le L-LS1

L'inconvénient présenté par le modèle LS1 tient à tous les couplages, notamment en cisaillement et en arrachement, introduits par l'inversion d'une matrice pleine. Historiquement, cette lourdeur opérationnelle n'a jamais été perçue comme une difficulté majeure, car la motivation première des modèles multiparticulaires était de fournir une estimation aussi précise que possible des contraintes d'interfaces singulières. Toutefois, l'étude du délaminage qui sera abordée plus loin s'accompagnera d'une procédure de dégradation progressive de la rigidité en cisaillement. Cette procédure sera d'autant plus aisée à mettre en place, aussi bien numériquement que conceptuellement, que \mathbb{S}^Q et donc \mathbb{C}^Q seront simples. À titre d'exemple, pour la résolution numérique d'un problème concernant un stratifié de 20 couches, l'écriture d'une loi de comportement non-linéaire généralisée nécessiterait, à chaque itération, et en chaque point de Gauss, l'inversion de deux matrices carrées, l'une de taille 19×19 , l'autre de taille 78×78 .

Aussi, comme pour les procédures de condensation utilisées dans le cadre des modèles dynamiques, serait-il intéressant de simplifier la matrice de souplesse en cisaillement \mathbb{S}^Q . Ainsi, après inversion, la rigidité en cisaillement aurait-elle une structure diagonale par bloc. Cependant, les différences d'homogénéité des coefficients de \mathbb{S}^Q dans (A.3) ne permettent pas le recours à un simple procédé de sommation sur les lignes et les colonnes. C'est pourquoi, nous allons à présent proposer une nouvelle forme du champ des contraintes, qui, doublée d'une astucieuse intégration approchée lors du calcul de l'énergie complémentaire, fournira une souplesse \mathbb{S}_{lumped}^Q diagonale, plus propice à l'étude du délaminage.

1.7.1 Modification des contraintes généralisées

Afin d'obtenir une matrice de souplesse \mathbb{S}^Q dont tous les coefficients aient la même homogénéité, nous choisissons de paramétrer le champ de contrainte $\sigma_{\alpha 3}$, non plus à l'aide du champ de cisaillement moyen \underline{Q}_α , mais en fonction du cisaillement $\underline{\tau}_0$ au niveau du plan médian. Ceci est évidemment possible car $\sigma_{\alpha 3}$, fonction quadratique de la coordonnée hors plan z , est entièrement définie par 3 champs indépendants.

$$\tau_{0\alpha}^i = \sigma_{\alpha 3}(x, y, \bar{h}_i) = \frac{Q_\alpha^i}{e^i} (P_0^i(\bar{h}_i) + P_2^i(\bar{h}_i)) + \tau_\alpha^+ \left(P_1^i(\bar{h}_i) - \frac{P_2^i(\bar{h}_i)}{2} \right) - \tau_\alpha^- \left(P_1^i(\bar{h}_i) + \frac{P_2^i(\bar{h}_i)}{2} \right)$$

$$\tau_{0\alpha}^i = \frac{3}{2} \frac{Q_\alpha^i}{e^i} - \frac{1}{4} \tau_\alpha^+ - \frac{1}{4} \tau_\alpha^- \quad (1.51)$$

$$\underline{Q}^i = \frac{e^i}{6} (4\underline{\tau}_0^i + \underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \quad (1.52)$$

Cette dernière égalité s'interprète aisément : Q_α^i est la valeur moyenne du champ $\sigma_{\alpha 3}$ sur la couche. Ce champ puisque quadratique, est intégrable exactement par la méthode de Simpson qui fournit alors exactement l'égalité (1.52). Ainsi, avec cette nouvelle paramétrisation, le champ $\sigma_{\alpha 3}$ de contrainte 3D est obtenu sans difficulté en remplaçant les occurrences de Q_α^i dans (1.4) par (1.52).

Les équations d'équilibre sont modifiées en remplaçant toutes les occurrences de \underline{Q}^i dans (1.42) [p. 21] par (1.52) :

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} \\ 0 &= \frac{2e^i}{3} \operatorname{div}(\underline{\tau}_0^i) + \frac{e^i}{6} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1}) + \frac{e^i}{6} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i-1,i}) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \\ 0 &= \operatorname{div}(\underline{M}^i) - \frac{2e^i}{3} \underline{\tau}_0^i + \frac{e^i}{3} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \end{aligned}$$

La forme faible, toujours compacte, est obtenue en insérant l'expression de \underline{Q}^i (1.52) dans

(1.44). Dans ce cas, les termes fonction du cisaillement sont égaux à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} &= \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{6} (4\tau_{0\alpha}^i + \tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \cdot (\Phi_{\alpha}^i + U_{3,\alpha}^i) + \sum_{j=1}^{n-1} \tau_{\alpha}^{j,j+1} D_{\alpha}^{j,j+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_{0\alpha}^i \frac{2e^i}{3} (\Phi_{\alpha}^i + U_{3,\alpha}^i) + T_{\alpha}^+ \frac{e^n}{6} (\Phi_{\alpha}^n + U_{3,\alpha}^n) - T_{\alpha}^- \frac{e^1}{6} (\Phi_{\alpha}^1 + U_{3,\alpha}^1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \tau_{\alpha}^{j,j+1} \left(D_{\alpha}^{j,j+1} + \frac{e^{j+1}}{6} (\Phi_{\alpha}^{j+1} + U_{3,\alpha}^{j+1}) + \frac{e^j}{6} (\Phi_{\alpha}^j + U_{3,\alpha}^j) \right) \end{aligned}$$

De sorte que la forme faible s'écrit en définitive :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{\tau}_0^i \cdot \underline{D}_0^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{\tau}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} \, d\omega = \\ \int_{\omega} T_{\alpha}^+ \left(U_{\alpha}^n + \frac{e^n}{3} \Phi_{\alpha}^n - \frac{e^n}{6} U_{3,\alpha}^n \right) + T_{\alpha}^- \left(U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{3} \Phi_{\alpha}^1 + \frac{e^1}{6} U_{3,\alpha}^1 \right) + T_3^+ U_3^n + T_3^- U_3^1 \, d\omega \end{aligned}$$

Les déformations généralisées $\underline{\varepsilon}^i$, $\underline{\chi}^i$, $D_{\nu}^{j,j+1}$ sont identiques aux précédentes. Les déformations $\underline{D}^{j,j+1}$, \underline{D}_0^i , duales des cisaillements d'interfaces $\underline{\tau}^{j,j+1}$ et « milieux » $\underline{\tau}_0^i$, sont quant à elles modifiées :

$$D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j + \frac{e^{j+1}}{6} (U_{3,\alpha}^{j+1} - 2\Phi_{\alpha}^{j+1}) + \frac{e^j}{6} (U_{3,\alpha}^j - 2\Phi_{\alpha}^j) \quad \text{et} \quad D_{0\alpha}^i = \frac{2e^i}{3} (\Phi_{\alpha}^i + U_{3,\alpha}^i)$$

1.7.2 Écriture des lois de comportement

Le découplage que nous ambitionnons est induit par une approximation supplémentaire lors du calcul de l'énergie complémentaire. Cette approximation est tout à fait similaire à celle d'une opération de condensation sur la matrice de souplesse, opération que nous ne pouvons pas effectuer à cause des différences d'homogénéité des termes de la matrice \mathbb{S}^Q . Nous évaluons le terme w_Q^{*i} (1.25) [p. 15] de manière approchée, en utilisant la méthode de Simpson :

$$\begin{aligned} w_Q^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} \times 4\sigma_{\alpha 3}^{i,3D}(x, y, z) \sigma_{\gamma 3}^{i,3D}(x, y, z) S_{\alpha 3 \gamma 3}^i \, dz \\ w_Q^{*i} &\approx 2S_{\alpha 3 \gamma 3}^i \frac{e^i}{6} \left(\sigma_{\alpha 3}^{i,3D} \sigma_{\gamma 3}^{i,3D}(x, y, h_i^+) + \sigma_{\alpha 3}^{i,3D} \sigma_{\gamma 3}^{i,3D}(x, y, h_i^-) + 4\sigma_{\alpha 3}^{i,3D} \sigma_{\gamma 3}^{i,3D}(x, y, \bar{h}_i) \right) \quad (1.53) \\ w_Q^{*i} &\approx 2S_{\alpha 3 \gamma 3}^i \frac{e^i}{6} (\tau_{\alpha}^{i,+} \tau_{\gamma}^{i,+}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i,-} \tau_{\gamma}^{i,-}(x, y) + 4\tau_{0\alpha}^i \tau_{0\gamma}^i(x, y)) \end{aligned}$$

Remarque 1.7.1 L'erreur *erf* commise par la méthode de Simpson pour l'intégration sur le segment $[a, b]$ d'une fonction de classe C^4 $f(z)$ vaut :

$$erf = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \times 90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

La quadrature de Simpson est donc exacte pour les polynômes de degrés inférieurs ou égaux à trois. Ici, la seule approximation est imputable au terme d'ordre 4. Plus précisément, l'erreur est égale à :

$$erf = 2S_{\alpha 3 \gamma 3}^i \frac{\left(Q_{\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,+} - \tau_{\alpha}^{i,-}) \right) \left(Q_{\gamma}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\gamma}^{i,+} - \tau_{\gamma}^{i,-}) \right)}{(e^i)^2} \epsilon$$

Où ϵ désigne l'erreur d'intégration du terme en z de degré 4 :

$$\epsilon = \left| \int_{h_i^-}^{h_i^+} 36 \left(\frac{z}{e^i} \right)^4 \, dz - \left(36 \left(\frac{h_i^+}{e^i} \right)^4 + 36 \left(\frac{h_i^-}{e^i} \right)^4 + 144 \left(\frac{\bar{h}_i}{e^i} \right)^4 \right) \right| = \frac{36 \times 24}{2880} e^i = \frac{3}{10} e^i$$

Lorsque nous reprenons l'expression explicite de l'énergie complémentaire, nous constatons que cette erreur est loin d'être négligeable.

$$erf = S_{\alpha 3 \gamma 3}^i \frac{3 \left(Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,+} - \tau_\alpha^{i,-}) \right) \left(Q_\gamma^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\gamma^{i,+} - \tau_\gamma^{i,-}) \right)}{5e^i}$$

En effet, elle s'élève au même ordre de grandeur que la contribution du terme en P_2^i à l'énergie complémentaire. Nous ne pouvons donc pas conclure, à ce stade, sur la qualité de l'approximation.

Si nous retenons tout de même cette hypothèse, nous obtenons alors une dépendance quadratique, sans terme croisé, de l'énergie complémentaire en fonction des efforts généralisés $\underline{\tau}_0^i$, $\underline{\tau}^{i,i+1}$, $\underline{\tau}^{i-1,i}$:

$$w_Q^{*i} \approx \frac{e^i S_{\alpha 3 \gamma 3}^i}{3} \left(\tau_\alpha^{i,i+1} \tau_\gamma^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i} \tau_\gamma^{i-1,i} + 4\tau_{0\alpha}^i \tau_{0\gamma}^i \right)$$

L'énergie w_Q^{*i} découplant naturellement les efforts généralisés, nous obtenons alors, après utilisation de la stationnarité, une rigidité en cisaillement diagonale par blocs :

$$\mathbb{S}_{lumped}^Q = \begin{pmatrix} \frac{2e^1 \mathbb{S}_{cis}^1}{3} & & & & \\ & 0 & & & \\ & \frac{e^1 \mathbb{S}_{cis}^1 + e^2 \mathbb{S}_{cis}^2}{6} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \frac{2e^2 \mathbb{S}_{cis}^2}{3} & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbb{S}_{cis}^k = \begin{pmatrix} S_{44}^k & S_{45}^k \\ S_{45}^k & S_{55}^k \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

La rigidité \mathbb{C}_{lumped}^Q , après inversion de \mathbb{S}_{lumped}^Q , est également diagonale par blocs et, par conséquent, beaucoup plus facile à abattre pour la modélisation du délaminage. Par ailleurs, cette forme nous permet plus aisément de distinguer les contributions des modes II et III, que nous avons, par simplicité, sciemment floutées. Pour finir, la loi de comportement ne fait intervenir ici que le champ de contrainte $\underline{\sigma}$, évalué en certains points du stratifié. Elle sera par conséquent plus facile à manipuler dans le cadre d'une extension des modèles multicouches à un comportement non linéaire.

1.7.3 Interprétation de la rigidité approchée comme condensation de la souplesse

Si nous reprenons l'expression (1.25) de l'énergie complémentaire en cisaillement exacte, nous pouvons l'écrire, dans chaque couche, comme une forme quadratique :

$$\begin{aligned} w_Q^{*i} &= \frac{2}{e^i} S_{\alpha 3 \beta 3}^i Q_\alpha^i Q_\beta^i + \frac{e^i}{6} S_{\alpha 3 \beta 3}^i (\tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i}) (\tau_\beta^{i,i+1} - \tau_\beta^{i-1,i}) \\ &\quad + \frac{2}{5e^i} S_{\alpha 3 \beta 3}^i \left(Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i}) \right) \left(Q_\beta^i - \frac{e^i}{2} (\tau_\beta^{i,i+1} + \tau_\beta^{i-1,i}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \underline{\Sigma}_i^Q \cdot \mathbb{S}_i^Q \cdot \underline{\Sigma}_i^Q \end{aligned}$$

avec :

$$\underline{\Sigma}_i^Q = \begin{Bmatrix} \tau_\alpha^{i,i+1} \\ Q_\alpha^i \\ \tau_\alpha^{i-1,i} \end{Bmatrix} \text{ et } \mathbb{S}_i^Q = \frac{1}{60} \mathbb{S}_{cis}^i \otimes \begin{pmatrix} 8e^i & -6 & -2e^i \\ -6 & 72 & -6 \\ -2e^i & -6 & 8e^i \end{pmatrix}$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons utilisé, par concision, le produit de Kronecker ([Weinstein et al., 2004]) \otimes de deux matrices. La souplesse généralisée globale \mathbb{S}^Q alors obtenue par un procédé d'assemblage, similaire à celui utilisé dans la méthode des éléments finis. Les termes principaux, relatifs à $\tau_\alpha^{i,i+1}$ et $\tau_\alpha^{i-1,i}$, étant partagés par deux couches consécutives.

Le vecteur Σ_i^Q peut également être exprimé à l'aide d'un vecteur Σ_i^τ , contenant nos nouveaux efforts généralisés $\tau_\alpha^{0,i}$, $\tau_\alpha^{+,i}$, $\tau_\alpha^{-,i}$, par une relation linéaire de la forme :

$$\Sigma_i^Q = \mathbb{B}^i \cdot \Sigma_i^\tau \text{ avec } \mathbb{B}^i = \mathbb{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^i & 2e^i & e^i \\ 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma_i^\tau = \begin{pmatrix} \tau_\alpha^{+,i} \\ \tau_\alpha^{0,i} \\ \tau_\alpha^{-,i} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, l'énergie s'exprime de manière exacte sous la forme :

$$w_Q^{*i} = \frac{1}{2} \Sigma_i^\tau \cdot \mathbb{S}_i^\tau \cdot \Sigma_i^\tau \text{ avec } \mathbb{S}_i^\tau = \frac{1}{60} \mathbb{S}_{cis}^i \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^i}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2e^i}{3} & 0 \\ 0 & \frac{e^i}{6} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8e^i & -6 & -2e^i \\ -6 & \frac{72}{e^i} & -6 \\ -2e^i & -6 & 8e^i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{e^i}{6} & \frac{2e^i}{3} & \frac{e^i}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La nouvelle souplesse locale en cisaillement s'écrit alors :

$$\mathbb{S}_i^\tau = \frac{1}{60} \mathbb{S}_{cis}^i \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^i}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2e^i}{3} & 0 \\ 0 & \frac{e^i}{6} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7e^i & -4e^i & -3e^i \\ 6 & 48 & 6 \\ -3e^i & -4e^i & 7e^i \end{pmatrix} = \frac{e^i}{30} \mathbb{S}_{cis}^i \otimes \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Similairement au procédé de condensation nodale des matrices de masse en dynamique, pour approcher l'énergie complémentaire, nous posons la matrice condensée suivante :

$$w_Q^{*i} \approx \frac{1}{2} \Sigma_i^\tau \cdot \mathbb{S}_i^{\tau,lumped} \cdot \Sigma_i^\tau \text{ avec } \mathbb{S}_i^{\tau,lumped} = \frac{e^i}{6} \mathbb{S}_{cis}^i \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

En assemblant la matrice locale (1.55), nous obtenons alors la matrice de souplesse globale diagonale (1.54).

1.7.4 Condensation de l'arrachement

Comme précédemment, nous proposons une approximation de l'énergie complémentaire, afin de rendre diagonale la souplesse en arrachement, et donc, après inversion, la rigidité associée. Il s'agit ainsi, pour le calcul de l'énergie complémentaire en arrachement, de retenir uniquement les termes de bords, avec l'utilisation d'une méthode des trapèzes. Alors, les calculs sont absolument immédiats :

$$w_\nu^{*i} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} (\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z))^2 S_{3333}^i dz \approx \frac{e^i S_{3333}^i}{4} ((\nu^{i,i+1})^2 + (\nu^{i-1,i})^2) \quad (1.56)$$

Avec cette approximation, la souplesse généralisée en arrachement est :

$$\mathbb{S}_{lumped}^\nu = \begin{pmatrix} \frac{e^1 S_{3333}^1 + e^2 S_{3333}^2}{2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{e^{n-1} S_{3333}^{n-1} + e^n S_{3333}^n}{2} \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Notons qu'ici, la matrice de souplesse diagonale est très simplement la version condensée en sommant les lignes et les colonnes de la souplesse « consistante » de l'équation (A.2).

La souplesse résultant de la condensation en cisaillement et en arrachement est donc diagonale par bloc, avec la forme générale suivante :

$$\mathbb{S}_{lumped} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{LS1}^K & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{S}_{lumped}^\nu & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{S}_{lumped}^Q \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \mathbb{S}_{LS1}^K, \text{ comme précédemment donnée par (A.1)} \\ \mathbb{S}_{lumped}^\nu \text{ définie dans (1.57)} \\ \mathbb{S}_{lumped}^Q \text{ définie dans (1.54)} \end{cases} \quad (1.58)$$

Les deux approximations, indépendantes, conduisent à une matrice de souplesse généralisée, diagonale par blocs, remarquablement simple. À ce stade, ne pouvant établir une évaluation analytique de l'erreur commise, nous scruterons la pertinence des résultats fournis par le modèle L-LS1 sur quelques essais. Nous anticipons que l'erreur y sera faible en dehors des points où le cisaillement d'interface est fortement singulier.

1.7.5 Formulation faible découplée sous forme matricielle

La rigidité du modèle L-LS1 est remarquablement creuse. Anticipant sur nos développements, nous pouvons écrire la forme faible, sous forme matricielle, en profitant de l'ensemble des découplages.

Notation 1.7.1 Rigidité de membranaire, en moment fléchissant, en arrachement et en cisaillement.

- Nous notons \mathbb{C}^{N^i} et \mathbb{C}^{M^i} , les rigidités membranaire et en moment fléchissant du pli i , inverses des souplesses données à l'équation (A.1).
- Nous désignons par $c_\nu^{i,i+1} = \frac{2}{e^i \mathbb{S}_{3333}^i + e^{i+1} \mathbb{S}_{3333}^{i+1}}$ la rigidité en arrachement de l'interface entre les plis i et $i+1$. Cette rigidité correspond au coefficient diagonal de la matrice \mathbb{C}_{lumped}^ν , inverse de (1.57).
- Nous notons pour finir :

$$\mathbb{C}^{\tau_0^i} = \left(\frac{2e^i \mathbb{S}_{cis}^i}{3} \right)^{-1} \text{ et } \mathbb{C}^{\tau^{i,i+1}} = \left(\frac{e^i \mathbb{S}_{cis}^i + e^{i+1} \mathbb{S}_{cis}^{i+1}}{6} \right)^{-1}$$

Avec ces quelques notations, nous pouvons écrire la forme faible sous une forme certes plus lourde, mais laissant voir les découplages :

$$\begin{aligned} \int_\omega \sum_{i=1}^n \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \cdot \mathbb{C}^{N^i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i + \widehat{\boldsymbol{\chi}}^i \cdot \mathbb{C}^{M^i} \cdot \boldsymbol{\chi}^i + \widehat{\mathbf{D}}_0^i \cdot \mathbb{C}^{\tau_0^i} \cdot \mathbf{D}_0^i + \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{\mathbf{D}}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} + c_\nu^{j,j+1} \widehat{\mathbf{D}}_\nu^{j,j+1} \mathbf{D}_\nu^{j,j+1} \, d\omega \\ = \int_\omega \widehat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{F} \, d\omega \quad \forall \widehat{\mathbf{U}} \in \mathcal{C}^{ad} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Avec :

$$\mathbf{F} = \left\{ T_\alpha^-, -\frac{e^1}{3} T_\alpha^-, T_3^- - \frac{e^1}{6} T_{\alpha,\alpha}^-, 0_{\mathbb{R}_{5(n-2)}}, T_\alpha^+, \frac{e^n}{3} T_\alpha^+, T_3^+ + \frac{e^n}{6} T_{\alpha,\alpha}^+ \right\}$$

Notons que le découplage de la souplesse supprime la « pré-déformation » \mathbf{E}_0 .

1.7.6 Quelques éléments de conclusions et remarques générales

Enrichissement du modèle Lors de notre étude précédente, nulle contrainte n'oblige le modélisateur à représenter effectivement chacun des plis *physiques* par un pli *mathématique*. Nous pouvons donc, à souhait, subdiviser chacun des plis réels en un certain nombre de couches. Cette manipulation permet d'enrichir les champs de contraintes que notre modèle peut capter. D'une certaine manière, utiliser une unique couche par pli physique limite la contrainte de cisaillement à la forme parabolique. Scinder ce même pli permet de représenter un champ de contrainte parabolique par morceaux, plus riche, et donc plus à même d'épouser la « vraie » distribution de contrainte. Cet enrichissement se paie d'une élévation substantielle de la complexité du modèle.

Dégradation du modèle À rebours de l'idée précédente, il peut, dans certaines conditions, être intéressant de réaliser la procédure inverse.

Le principe n'est pas complètement trivial et revient à coller plusieurs modèles de plaques multiparticulaires de complexités variables afin de flouter les champs dans les zones d'intérêts limités. Le développement de cette procédure est donné à titre d'ouverture dans l'annexe B.3 [p. 183].

Conclusion sur les modèles SCLS1, LS1 et L-LS1

L'intérêt du modèle LS1 relativement au modèle SCLS1, tient à la plus grande simplicité de sa résolution par la méthode des éléments finis. En effet, nous avons établi précédemment que sa matrice de souplesse, et donc par inversion sa matrice de rigidité, est naturellement diagonale par blocs, contrairement à celle du modèle SCLS1 qui, elle, est relativement pleine, donc d'un temps de calcul significativement plus long.

Le modèle L-LS1 fait progresser d'un pas la simplification conceptuelle mais au prix de la précision. L'approximation de l'énergie complémentaire induite par la quadrature de Simpson, n'entraîne en pratique qu'une très faible erreur si bien que ce modèle apparaît comme un compromis remarquable précision-temps de calcul.

Ainsi, dorénavant, en raison de leurs fortes similarités, nous étudierons conjointement ces 3 modèles, en comparant leurs résultats et les temps de calculs afférents. Le modèle SCLS1 assure un champ de contraintes statiquement compatible et pourrait donc, à première vue, être considéré comme « meilleur ». Nous allons voir cependant, que la correction apportée par l'effort généralisé $\pi^{j,j+1}$ pour assurer l'équilibre statique, pour aussi souvent négligeable qu'elle soit, se traduit néanmoins par une augmentation importante du temps de calcul, qui rend tout aussi intéressant l'utilisation du modèle LS1, et plus encore du L-LS1, pour l'étude des structures.

1.8 Application à l'étude de composite : Traction uni-axiale d'un $(0, 90)_s$

1.8.1 Présentation du logiciel Open Source FEniCS

Le logiciel FEniCS¹ est un outil numérique utilisé pour résoudre des équations aux dérivées partielles. L'interface utilisateur s'exprime en langage Python pour sa simplicité d'utilisation, tandis que le compilateur génère un code en C++ pour son efficacité calculatoire. Les équations aux dérivées partielles sont introduites sous forme faible, puis résolues par une méthode éléments finis en déplacements standard. De par son haut degré de généricité et sa souplesse d'utilisation, nous utiliserons donc ce logiciel FEniCS pour conduire nos simulations dans tout notre travail.

Les éléments utilisés sont des triangles à interpolation quadratique, possédant autant de degrés de liberté par nœud que le nombre d'équations d'équilibre ($6n + 1$ pour le modèle SCLS1, $5n$ pour les modèles LS1 et L-LS1). Afin de surmonter les problèmes de verrouillage en cisaillement [Rakowski, 1990], nous retenons une intégration réduite pour la partie en cisaillement de la forme faible [Smith, 2009].

1.8.2 Position du problème

L'intérêt majeur, pour notre sujet, des modèles de plaques enrichies LS1 et SCLS1 réside dans leur remarquable capacité à prévoir les efforts inter-laminaires entre deux plis aux comportements mécaniques différents. L'expérience nous enseigne que la résistance d'une structure en composites, est limitée par les phénomènes de délaminage qui se produisent lorsque la contrainte de cisaillement ou d'arrachement entre deux plis consécutifs devient trop élevée.

1. <https://fenicsproject.org/>

Or, les modèles classiques de plaques, tels que ceux de Love-Kirchhoff, Reissner Mindlin ne fournissent pas les informations nécessaires à l'étude des contraintes inter-laminaires, tandis que les modèles tridimensionnels pèchent par leurs lourds coûts de calculs. Les modèles LS1 et SCLS1 offrent par conséquent une excellente réponse alternative à cette problématique.

Comme expliqué dans Saeedi et al. [2012b], il apparait qu'une stratégie de raffinement hors plan, avec progression géométrique des épaisseurs des sous plis mathématiques, est optimale pour la convergence de l'effort inter-laminaire. Nous utiliserons donc cette procédure; les raffinements précisés par la lettre p désigneront le nombre de couches *mathématiques* utilisées pour modéliser chacun des plis *physiques*.

Nous allons valider le comportement de notre théorie précédemment développée, en nous appuyant sur un cas test similaire à celui proposé dans Baroud et al. [2016]. La solution analytique pour ce test, dans le cadre de plusieurs modèles de plaques multiparticulaires est donnée en annexe D [p. 201] à la section D.4 [p. 211].

Le multicouche étudié est un $(0, 90)_s$ que nous soumettons à une traction uni-axiale dans la direction x . Le problème est invariant dans la direction x , si bien que nous n'utilisons qu'un seul élément dans cette direction. Les paramètres matériaux d'un pli composite unidirectionnel, de type T700G/M21 [Hongkarnjanakul et al., 2013], et géométriques sont mentionnés figure 1.2 [p. 33], tableau 1.1 [p. 33]. Nous supposons pour simplifier, que les modules en traction

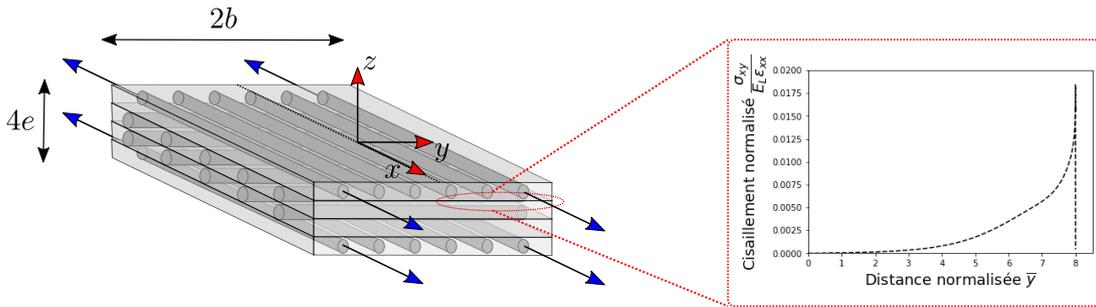


FIGURE 1.2 – Schéma illustrant l'extension uni-axiale d'un $(0, 90)_s$

Paramètres matériaux		Dimensions (mm)	
$E_L = 130 \text{ GPa}$	$E_T = E_N = 7.7 \text{ GPa}$	$e = 0.14$	$b = 8e$
$G_{LT} = G_{LN} = 4.8 \text{ GPa}$	$\nu_{LT} = \nu_{TN} = \nu_{LN} = 0.33$		

TABLE 1.1 – Paramètres matériaux et géométriques

et en compression sont égaux.

1.8.3 Contraintes de cisaillement au voisinage du bord libre

Nous allons d'abord étudier la distribution de la contrainte de cisaillement au voisinage du bord libre dans le cadre des modèles SCLS1, LS1 et L-LS1, avec un nombre de subdivisions par plis croissant de $p = 1$ (un seul pli mathématique par pli physique) à $p = 4$, et une progression géométrique $r_{geom} = 3$ (figure 1.3 [p. 34]). À ce jour, il ne semble pas exister de solution analytique tridimensionnelle à ce problème, par conséquent, les résultats seront comparés à une simulation tridimensionnelle complète sur le logiciel Abaqus CAE². Nous représentons figure 1.4 [p. 34] l'allure de la contrainte de cisaillement inter-laminaire normalisée $\frac{\sigma_{xy}}{E_L \varepsilon_{xx}}$, en fonction de la distance normalisée au centre de la plaque $\bar{y} = y/e$ pour la solution 3D de référence. Nous remarquons que, pour une distance normalisée supérieure à 1, la convergence s'effectue rapidement. Cependant pour des distances inférieures, la singularité du champ de cisaillement

2. <https://www.3ds.com/fr/produits-et-services/simulia/produits/abaqus/>

1.8 Application à l'étude de composite : Traction uni-axiale d'un $(0, 90)_s$

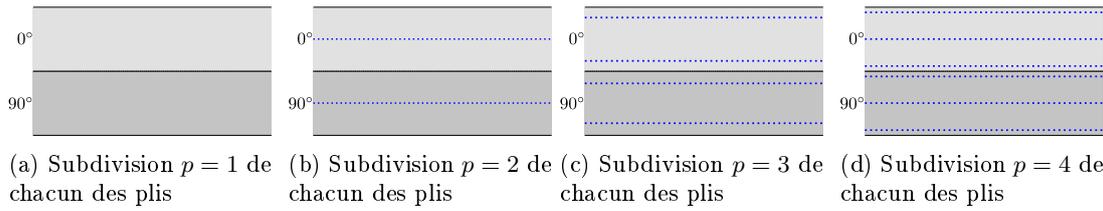


FIGURE 1.3 – Subdivision progressive des plis « physiques » en sous-plis « mathématiques »

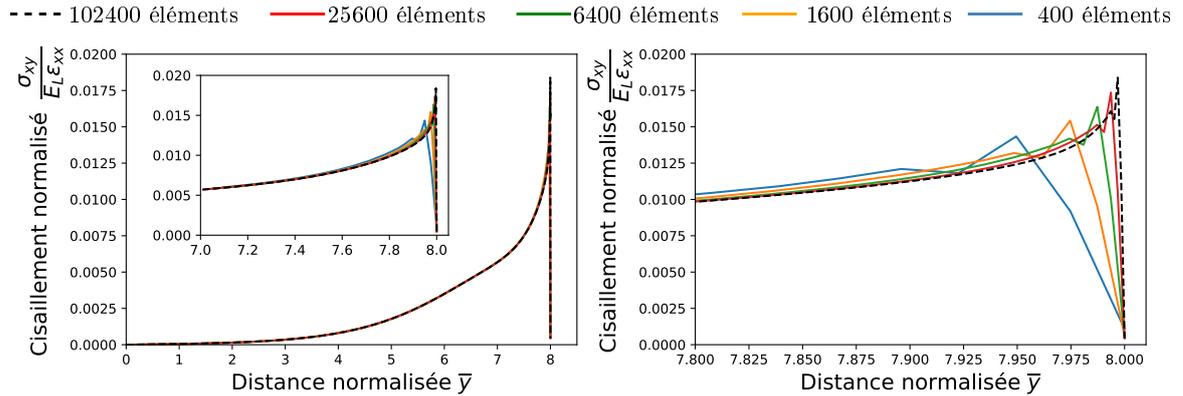


FIGURE 1.4 – Solution de référence obtenue avec un calcul complet tridimensionnel.

ralentit la convergence et nécessite de raffiner le maillage pour évaluer plus pertinemment les contraintes.

Remarque 1.8.1 Le champ des contraintes étant par essence singulier, les raffinements successifs n'ont pas vocation à faire converger le cisaillement vers une valeur finie.

Nous comparons ensuite cette solution à notre modélisation multiparticulaire. Nous utilisons 200 éléments dans le plan et une subdivision géométrique dans l'épaisseur, avec $r_{geom} = 3$.

Représentation du champ de cisaillement dans le cadre SCLS1

La contrainte de cisaillement d'interface calculée numériquement avec le modèle SCLS1 est tout d'abord représentée à la figure 1.5 [p. 34]. Les courbes se superposent jusqu'à une distance

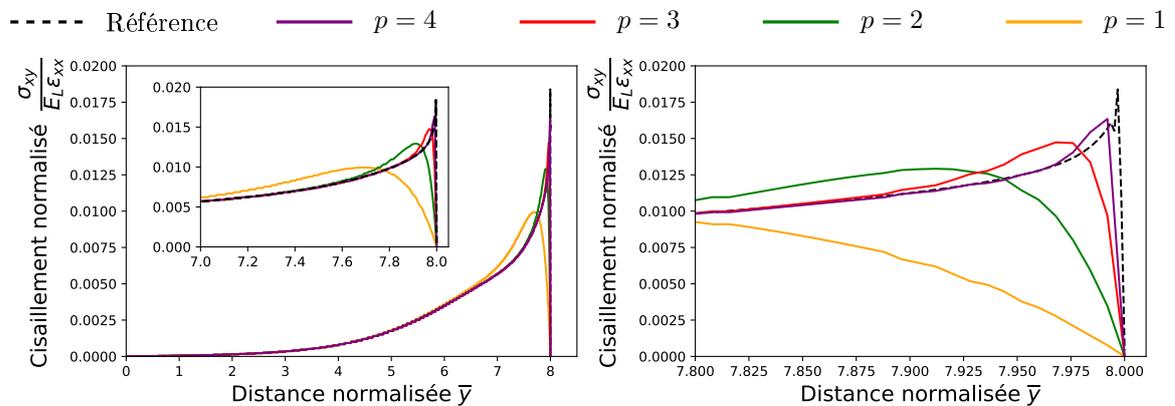


FIGURE 1.5 – Solution obtenue avec le modèle SCLS1

normalisée supérieure à 1. Pour des distances inférieures, nous remarquons que les discrétisations successives convergent rapidement vers le modèle tridimensionnel. Pour $p = 4$ l'accord

est quasiment parfait. Les résultats numériques présentés ici confortent le caractère « statiquement compatible » du champ de contraintes calculé. En effet, conformément au modèle tridimensionnel, le cisaillement d'interface s'annule rigoureusement au niveau du bord libre.

Cisaillement avec le modèle LS1 consistant

À nouveau, nous représentons, figure 1.6 [p. 35], la distribution du cisaillement interlaminaire au voisinage du bord libre, cette fois-ci en utilisant le modèle complet LS1 complet. L'accord général est excellent, nous remarquons qu'à une distance normalisée supérieure à 1,

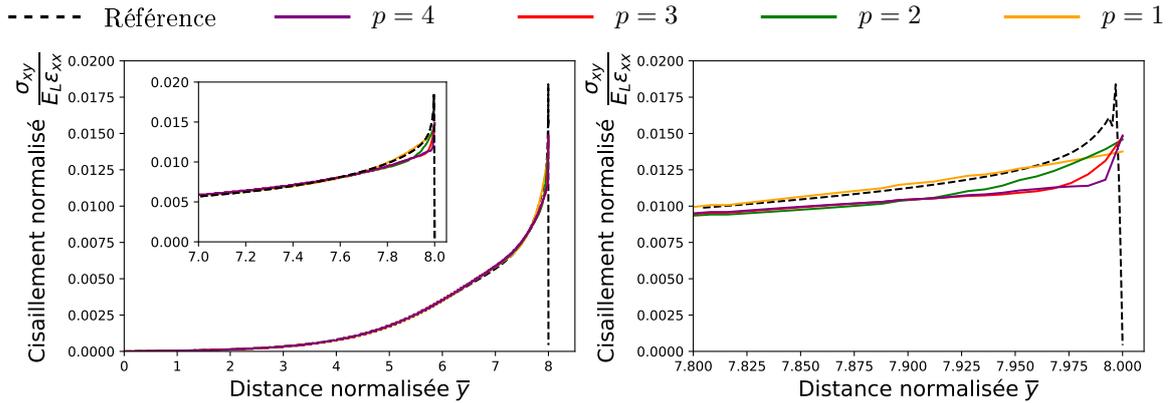


FIGURE 1.6 – Solution obtenue avec le modèle LS1

les modèles coïncident parfaitement, même lorsqu'une seule couche est utilisée pour modéliser chacun des plis physiques. Pour des distances inférieures, nous remarquons encore une bonne prédiction des contraintes. Contrairement au cas précédent, le raffinement dans l'épaisseur n'améliore pas significativement la prédiction de la contrainte de cisaillement au bord. Celle-ci est tout à fait satisfaisante dès lors qu'elle est évaluée à une distance supérieure à $e/20$ ou e représente l'épaisseur du pli.

Remarque 1.8.2 La recherche du champ de contrainte exact au voisinage immédiat de la frontière n'a en réalité que peu d'intérêt. En effet, il est entendu qu'à des distances au bord inférieures à une fraction de l'épaisseur d'un pli, l'homogénéisation du matériau et sa représentation à l'aide d'un milieu anisotrope équivalent perdent leur sens. Pour obtenir une « vraie » estimation des contraintes, une modélisation plus fine des constituants (fibres et matrices) serait à envisager.

Remarque 1.8.3 Par construction, la contrainte dans le cadre du modèle LS1 figure 1.6 [p. 35] ne s'annule pas nécessairement au voisinage du bord libre, contrairement au cas du modèle SCLS1 présenté figure 1.5 [p. 34].

Utilisation du modèle LS1 condensé

Pour conclure, nous présentons les résultats obtenus à l'aide du modèle condensé. La prédiction des contraintes est excellente. Toutefois, par rapport aux deux modèles précédents la zone, voisine du bord libre, dans laquelle modèle 3D raffiné et modélisation multiparticulaire L-LS1 équivalente ne s'accordent pas, est un peu plus large. En effet sa taille est ici de l'ordre de $e/5$. Nous pouvons arguer que ceci n'est pas un problème en soi compte-tenu de la remarque 1.8.2 [p. 35]. Le modèle L-LS1 confirme donc son statut de candidat privilégié quant au rapport performances-sobriété numérique.

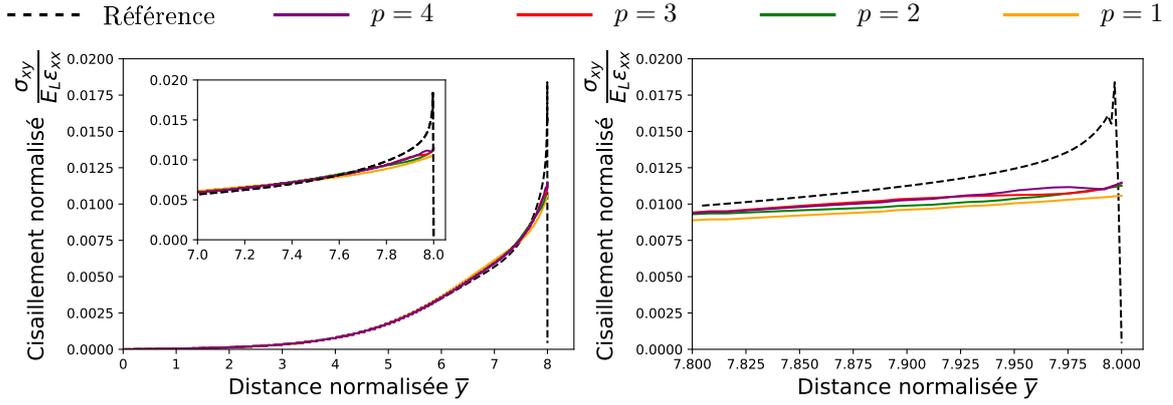


FIGURE 1.7 – Solution obtenue avec le modèle LS1 condensé

1.8.4 Distribution énergétique et dégénérescence des modèles

La comparaison des cisaillements achevée, nous abordons une brève étude énergétique qui mette en évidence la consistance de nos différents modèles. Cette étude se scindera en deux parties.

Dans une première, nous approfondirons les conséquences du postulat 1.6.2 [p. 24], négligeant le couplage membrane-arrachement dans le calcul de l'énergie complémentaire. Nous contesterons la légitimité de ce postulat, car l'énergie de couplage n'est pas négligeable dans le cas considéré. Nous verrons cependant que si on supprime ce terme, l'énergie membranaire en est modifiée et que la variation induite compense, au moins qualitativement, l'énergie négligée. Ce point mérite approfondissement dans un cadre plus général. En effet, il est important, car il implique qu'il n'est pas nécessaire de prouver qu'une énergie élastique non prise en compte dans la fonctionnelle donnant le comportement soit négligeable dans la solution d'un problème élastique. On peut sans doute se contenter d'établir qu'au passage d'un modèle à un plus simple, les énergies qui disparaissent sont convenablement « transférées » sur d'autres composantes.

Puis, nous analyserons la pertinence de la simplification « obligatoire » dégénérant le modèle SCLS1 vers le modèle LS1, à savoir la suppression des termes en $\text{div } \underline{\tau}$ proposée au postulat 1.6.1 [p. 24]. En calculant cette contribution après résolution, nous montrerons qu'elle n'est significative qu'à un voisinage absolument immédiat du bord et que sa norme reste, dans toute mesure, très faible.

Pour notre étude donc, rappelons tout d'abord qu'elles sont, dans le cadre SCLS1, les 4 contributions à l'énergie complémentaire, en fonction des efforts généralisés :

$$\begin{aligned} w_K^* &= \frac{1}{2} \underline{\Sigma}^K \cdot \mathbb{S}^K \cdot \underline{\Sigma}^K \\ w_Q^* &= \frac{1}{2} \underline{\Sigma}^Q \cdot \mathbb{S}^Q \cdot \underline{\Sigma}^Q \\ w_\nu^* &= \frac{1}{2} (\underline{\Sigma}^\nu \cdot \mathbb{S}^\nu \cdot \underline{\Sigma}^\nu + \underline{\Sigma}^\pi \cdot \mathbb{S}^\pi \cdot \underline{\Sigma}^\pi + 2\underline{\Sigma}^\nu \cdot \mathbb{S}^{\nu\pi} \cdot \underline{\Sigma}^\pi) \\ w_c^* &= \underline{\Sigma}^K \cdot \mathbb{S}^{K\nu} \cdot \underline{\Sigma}^\nu + \underline{\Sigma}^K \cdot \mathbb{S}^{K\pi} \cdot \underline{\Sigma}^\pi \end{aligned}$$

L'hypothèse fondamentale de réduction du modèle SCLS1 vers le modèle LS1 consiste à négliger le terme $\underline{\Sigma}^\pi \cdot \mathbb{S}^\pi \cdot \underline{\Sigma}^\pi + 2\underline{\Sigma}^\nu \cdot \mathbb{S}^{\nu\pi} \cdot \underline{\Sigma}^\pi$ dans le calcul de w_ν^* et $\underline{\Sigma}^K \cdot \mathbb{S}^{K\pi} \cdot \underline{\Sigma}^\pi$ dans w_c^* .

L'hypothèse additionnelle de découplage revient à négliger $\underline{\Sigma}^K \cdot \mathbb{S}^{K\nu} \cdot \underline{\Sigma}^\nu$.

Distribution générale de l'énergie dans le cadre SCLS1

Nous représentons la distribution, le long de la frontière, des énergies complémentaires sous forme normalisée $w^*/eE_L\varepsilon_{xx}^2$ à la figure 1.8 [p. 37].

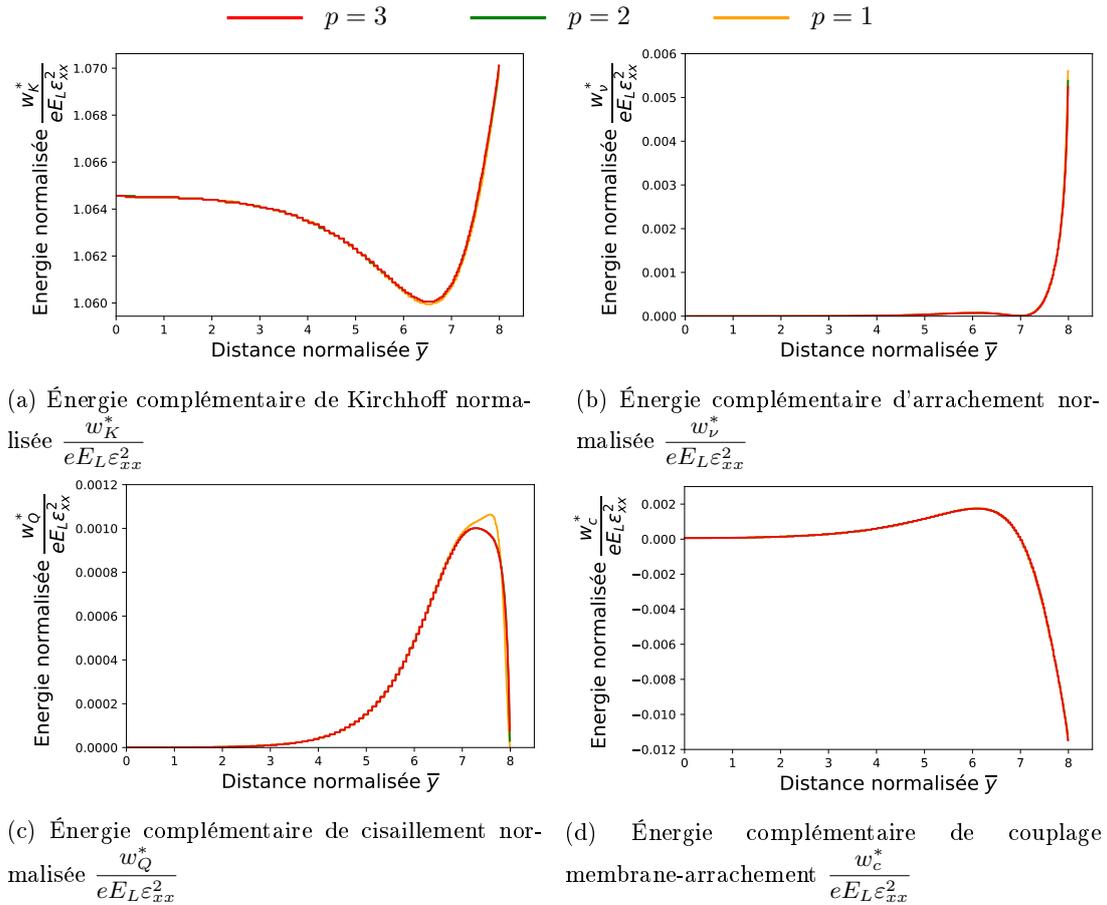


FIGURE 1.8 – Énergies complémentaires normalisées dans le cadre du modèle SCLS1

« Loin des bords », la densité surfacique d'énergie d'interface est nulle et la densité surfacique d'énergie de chacune des couches correspond à la prévision du modèle de Kirchhoff-Love. Au voisinage des bords, les densités surfaciques des énergies de couche décroissent alors que l'énergie d'interface augmente, d'abord celle de cisaillement, puis celle de couplage, et ultimement l'énergie d'arrachement. On peut noter le résultat important suivant : La longueur d'action de l'effet de bord s'élève à environ 4 fois l'épaisseur d'une couche, c'est à dire l'épaisseur du quadri-couches.

Nous remarquons en outre que l'énergie de couplage w_c^* n'est pas, et de très loin, négligeable. À cause de l'écrasante suprématie des termes membranaires, w_c^* est 2 fois supérieure au terme d'arrachement pur et d'un ordre de grandeur supérieur au cisaillement. Nous pourrions alors hâtivement conclure que le postulat 1.6.2 [p. 24] est faux. Ce n'est pourtant pas le cas, comme nous allons maintenant le voir, grâce à un étonnant « phénomène de transfert ».

Suppression du terme de couplage et transfert de l'énergie

Intéressons nous à l'énergie de Kirchhoff prévue par les modèles LS1 et SCLS1, d'abord en représentant naïvement figure 1.9 [p. 38] les deux contributions :

Les énergies complémentaires semblent très différentes si bien que l'on pourrait croire que l'approximation est totalement erronée. Pourtant, il serait insensé de confronter directement ces distributions d'énergies élémentaires, car l'énergie de couplage w_c^* n'est même pas définie pour le LS1. Pour une comparaison utile, nous devons procéder à certains regroupements. Ainsi, nous proposons de scinder la distribution surfacique de l'énergie de la plaque bornée en deux parties.

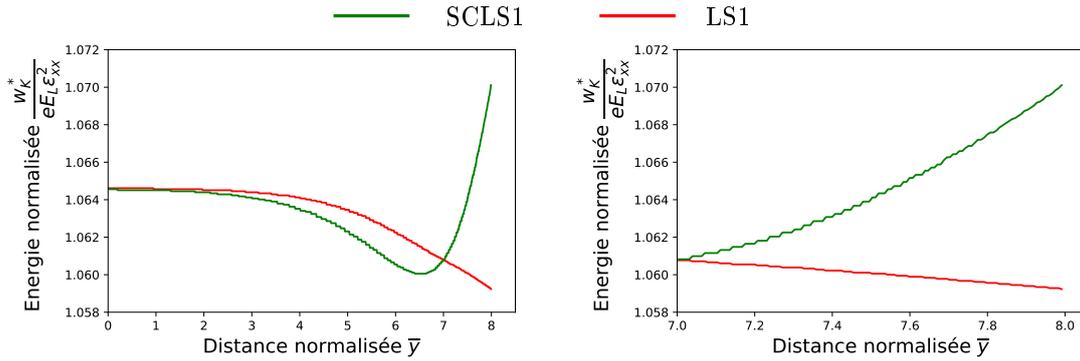


FIGURE 1.9 – Comparaison des énergies complémentaires de Kirchhoff normalisées $\frac{w_K^*}{eE_L \varepsilon_{xx}^2}$ pour les modèles LS1 et SCLS1

- ★ Une première partie représentera la somme pour chacune des couches des énergies membranaires w_K^{*i} et des énergies de couplage w_c^{*i} contraintes membranaires–effort normal (les énergies w_c^{*i} ne sont non nulles que pour le modèle SCLS1). Nous appellerons ces sommes « énergie de couche », par un abus de langage assez légitime, et les noterons w_p^* .
- ★ La dernière énergie sommera les énergies de cisaillements w_Q^{*i} et les énergies d'effort normal w_ν^{*i} . Par un autre abus de langage, cette énergie sera appelée « énergie d'interface ».

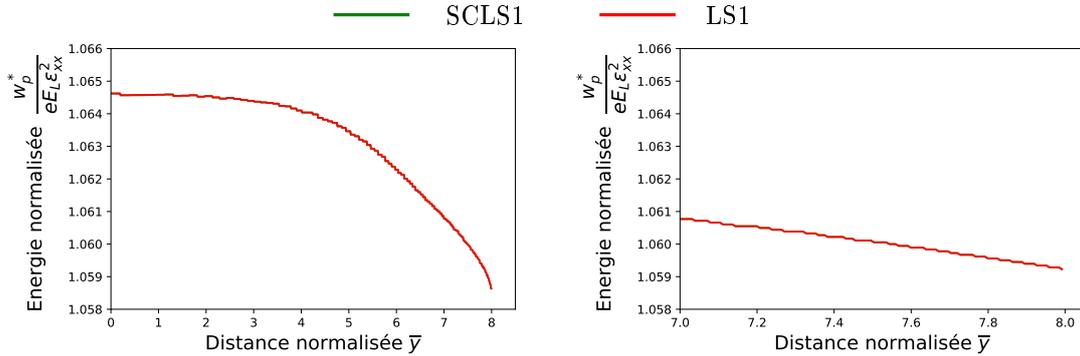
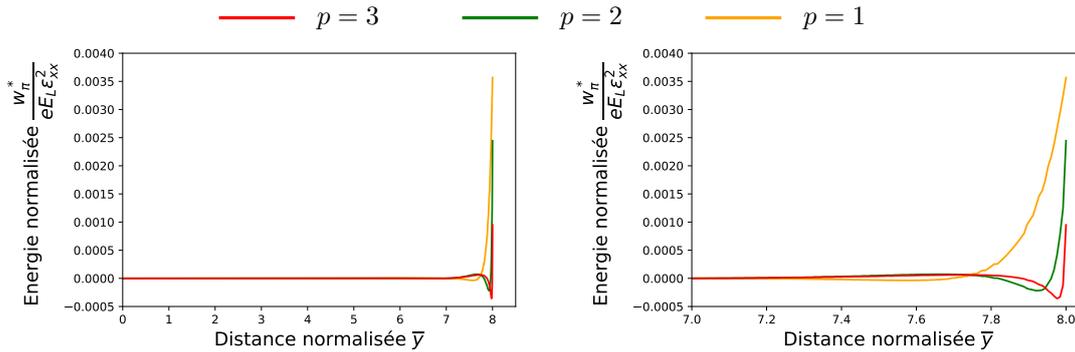


FIGURE 1.10 – Comparaison des énergies complémentaires de couche $\frac{w_p^*}{eE_L \varepsilon_{xx}^2}$ pour les modèles LS1 et SCLS1

Si nous représentons l'énergie de couche pour les modèles SCLS1 et LS1 (voir figure 1.10 [p. 38]), nous remarquons cette fois que les courbes sont indiscernables. Ainsi, négliger la composante de couplage w_c^* dans la fonctionnelle, a conduit à un « transfert » de cette énergie vers celle de Kirchhoff correspondant aux efforts membranaires.

Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à π

Afin de justifier le faible écart de résultat entre les modèles LS1 et SCLS1, nous pouvons extraire la contribution de l'énergie complémentaire associée à π négligée dans le modèle LS1. Cette contribution, probablement faible, explique rationnellement pourquoi il est souvent avantageux, en terme de temps de calcul, d'utiliser le modèle simplifié. En raffinant dans l'épaisseur le modèle SCLS1, nous observons figure 1.11 [p. 39] la localisation de l'énergie négligée au voisinage du bord. Sa contribution générale à l'énergie complémentaire devient minimale et valide, au moins sur cet exemple, l'intérêt du modèle LS1. Ce constat est naturel, le champ π assure uniquement l'annulation de la contrainte de cisaillement afin de respecter le bord libre. Le


 FIGURE 1.11 – Contribution énergétique normalisée $\frac{w_\pi^*}{eE_L\epsilon_{xx}^2}$ négligée par le modèle LS1

cisaillement étant par essence singulier, son retour s'effectue de plus en plus rapidement au fur et à mesure des raffinements successifs. Par conséquent, l'énergie associée ne prend une valeur significative qu'au voisinage immédiat du bord.

Énergie	LS1 $p = 1$	LS1 $p = 4$	L-LS1 $p = 1$	L-LS1 $p = 4$	SCLS1 $p = 1$	SCLS1 $p = 4$
w_p^*	2427.49	2427.44	2427.4	2427.44	2427.34	2427.43
w_Q^*	0.61	0.58	0.62	0.58	0.59	0.58
w_ν^*	0.26	0.29	0.27	0.29	0.32	0.3

 TABLE 1.2 – Répartition des énergies pour une subdivision $p = 1, p = 4$

L'étude précédente nous a montré que les profils des contraintes étaient sensiblement différents au voisinage immédiat du bord libre. Nous notons néanmoins, que les énergies de cisaillement et d'arrachement prévues par les deux modèles coïncident (voir tableau 1.2 [p. 39]). L'utilisation ultérieure d'un critère d'endommagement énergétique laissera donc la porte ouverte à l'usage des modèles LS1 et L-LS1, plus avantageux en terme de coût de calcul.

	LS1	L-LS1	SCLS1
$p = 1$	0.28	0.28	0.4
$p = 2$	1.44	1.45	2.27
$p = 3$	4.42	4.26	7.28
$p = 4$	9.85	9.06	16.38

TABLE 1.3 – Comparaison des temps de calcul (en secondes), en fonction de la discrétisation dans l'épaisseur, et pour un maillage comportant 50 éléments.

1.8.5 Synthèse de la comparaison

Les modèles de plaque LS1 et SCLS1 prédisent efficacement la contrainte de cisaillement inter-laminaire, même à proximité du bord libre. Notre solution de référence comportait 2.16×10^6 degrés de liberté là où le SCLS1, avec 200 éléments dans le plan et une subdivision $p = 4$, en comportait 9.62×10^4 . Bien plus performant, le LS1 avec $p = 1$ optimise sa solution sur 2.4×10^4 degrés de liberté. Le gain est appréciable. Il est à noter que ce nombre de degrés de liberté aurait pu être encore abaissé d'un facteur 2 si nous avions tiré avantage de la symétrie du problème suivant z .

Le champ de contrainte du modèle SCLS1 est tout à la fois plus riche ... et excessivement contraint, de sorte que les champs mécaniques nécessitent un raffinement supplémentaire dans l'épaisseur pour converger. À l'inverse, le modèle LS1, simple, fournit rapidement d'excellents

résultats, lesquels ne sont pas significativement améliorés par un couteux raffinement dans l'épaisseur. Cependant, asymptotiquement, le modèle SCLS1 est connu pour converger vers le modèle 3D puisqu'il en est une simple discrétisation dans l'épaisseur ; par conséquent les raffinements successifs conduisent à la solution 3D de référence « exactement », tandis qu'aucune preuve de convergence n'est possible pour le modèle LS1.

Enfin, si à des distances de l'ordre de $e/10$ du bord libre, là où l'effort de cisaillement est fortement singulier, les LS1 et SCLS1 se montrent légèrement plus performants, sa très faible erreur de solution tridimensionnelle ne freine en rien l'utilisation du modèle L-LS1. Ainsi ce dernier modèle, qui prédit les efforts de cisaillement aux interfaces avec une remarquable précision, s'avère pour nous le plus opérationnel, et c'est lui que nous retiendrons comme candidat privilégié pour la suite de notre étude.

En bref

- ★ Nous avons construit les modèles SCLS1 et LS1 en discrétisant la plaque tridimensionnelle en n plis, dans lesquels les champs de contrainte membranaire sont *postulés* affines. En vertu des équations d'équilibre 3D, le cisaillement $\sigma_{\alpha 3}$ est quadratique par pli et l'effort d'arrachement cubique. Les efforts généralisés de nos modèles correspondent aux coefficients de ce développement polynomial (1.1), (1.4) et (1.5).
- ★ Les équations d'équilibre 3D amènent à $6n + 1$ équations d'équilibre (1.9a)–(1.9d) qui, complétées par les conditions aux limites associées (1.10), (1.11) et (1.12), forment l'ensemble des champs « SCLS1 et LS1 statiquement compatibles » (1.13).
- ★ Les déplacements généralisés associés à chacun de nos efforts généralisés (1.15), sont obtenus en particulierisant la forme faible du modèle 3D de Cauchy aux champs de contrainte précédemment construits. La cinématique généralisée est *moyenne* au sens où les déplacements en dualité avec nos efforts généralisés, sont des intégrales des déplacements 3D.
- ★ Les déformations généralisées sont obtenues en intégrant par parties la forme faible (1.18).
- ★ Afin de compléter le modèle, les lois de comportements de chacun de nos efforts généralisés sont obtenues en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire (1.28)–(1.35), la minimisation, elle, s'effectuant sur l'ensemble des champs « SCLS1 et LS1 statiquement compatibles ».
- ★ En inversant cette loi de comportement naturellement formulée en *souplesse*, nous obtenons la rigidité du modèle SCLS1. Cette rigidité peut être employée pour résoudre un problème de structure, via une méthode par éléments finis en déplacements standard.
- ★ Le modèle L-LS1 est un modèle simplifié dérivé du LS1, en approchant astucieusement l'énergie complémentaire (1.53)–(1.56). La matrice de souplesse qui en résulte est diagonale par bloc (1.58). Ce modèle semble particulièrement propice à l'étude des problèmes de grandes tailles et au délaminage.



Wolfgang Amadeus Mozarts *Requiem in d-Moll* (KV 626)

Synthèse : Équations du modèle L-LS1

† Formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \widehat{\varepsilon}^i \cdot \mathbb{C}^{N^i} \cdot \varepsilon^i + \widehat{\chi}^i \cdot \mathbb{C}^{M^i} \cdot \chi^i + \widehat{D}_0^i \cdot \mathbb{C}^{\tau_0^i} \cdot D_0^i \, d\omega \\ & + \int_{\omega} \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot D^{j,j+1} + c_{\nu}^{j,j+1} \widehat{D}_{\nu}^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} \, d\omega \\ & = \int_{\omega} \widehat{U}^1 \cdot \mathbf{F}^- + \widehat{U}^n \cdot \mathbf{F}^+ \, d\omega \quad \forall \widehat{U} \in \mathcal{C}^{ad} \end{aligned}$$

Avec les efforts extérieurs et déplacements généralisés :

$$\mathbf{F}^- = \{T_{\alpha}^-, -\frac{e^1}{3}T_{\alpha}^-, T_3^- - \frac{e^1}{6}T_{\alpha,\alpha}^-\}, \mathbf{F}^+ = \{T_{\alpha}^+, \frac{e^n}{3}T_{\alpha}^+, T_3^+ + \frac{e^n}{6}T_{\alpha,\alpha}^+\} \text{ et } \mathbf{U}^i = \{U_{\alpha}^i, \phi_{\alpha}^i, U_z^i\}$$

† Équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i) \\ \chi_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} (\Phi_{\alpha,\beta}^i + \Phi_{\beta,\alpha}^i) \\ D_{0\alpha}^i &= \frac{2e^i}{3} (\Phi_{\alpha}^i + U_{3,\alpha}^i) \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j + \frac{e^{j+1}}{6} (U_{3,\alpha}^{j+1} - 2\Phi_{\alpha}^{j+1}) + \frac{e^j}{6} (U_{3,\alpha}^j - 2\Phi_{\alpha}^j) \\ D_{\nu}^{j,j+1} &= U_3^{j+1} - U_3^j \end{aligned}$$

† Rigidités généralisées :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{N^i} &= e^i \mathbb{C}_{cp}^i & \mathbb{C}^{M^i} &= \frac{(e^i)^3}{12} \mathbb{C}_{cp}^i & \mathbb{C}^{\tau_0^i} &= \frac{3}{2e^i} (\mathbb{S}_{cis}^i)^{-1} \\ \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} &= \left(\frac{e^j \mathbb{S}_{cis}^j + e^{j+1} \mathbb{S}_{cis}^{j+1}}{6} \right)^{-1} & c_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{2}{e^j \mathbb{S}_{3333}^j + e^{j+1} \mathbb{S}_{3333}^{j+1}} \end{aligned}$$

 avec les rigidités en contrainte plane \mathbb{C}_{cp}^i et soupleses en cisaillements \mathbb{S}_{cis}^i définies par :

$$\mathbb{C}_{cp}^i = \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{pmatrix}^{-1} \text{ et } \mathbb{S}_{cis}^i = \begin{pmatrix} S_{44}^i & S_{45}^i \\ S_{45}^i & S_{55}^i \end{pmatrix}$$

† Interprétations physiques des champs :

\mathbf{N}^i	$= \mathbb{C}^{N^i} \cdot \varepsilon^i$	Contraintes membranaires moyennes
\mathbf{M}^i	$= \mathbb{C}^{M^i} \cdot \chi^i$	Premiers moments des contraintes membranaires
τ_0^i	$= \mathbb{C}^{\tau_0^i} \cdot D_0^i$	Cisaillements hors plan au niveau des feuillets de référence
$\tau^{j,j+1}$	$= \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot D^{j,j+1}$	Cisaillements hors plan au niveau des interfaces
$\nu^{j,j+1}$	$= c_{\nu}^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1}$	Contraintes d'arrachement au niveau des interfaces

Extension au cadre dynamique des modèles SCLS1 et LS1

Introduction

Dans le cadre de la mécanique tridimensionnelle de Cauchy, l'équation d'équilibre en régime dynamique s'écrit :

$$\operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho f = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (2.1)$$

La difficulté de l'extension des modèles SCLS1 et LS1 au régime dynamique vient du membre de droite de cette égalité. En effet, l'accélération est, par essence, un paramètre purement cinématique. Or, la construction des modèles telle que nous l'avons vue au chapitre précédent, s'appuie sur un postulat de la distribution des contraintes aboutissant, après dualisation, à une cinématique généralisée *moyenne* par couche. Aucune reconstruction du déplacement tridimensionnel \underline{u} , en fonction des déplacements généralisés des modèles, n'est donc envisageable.

Plus précisément, le problème consiste à relier l'accélération $\ddot{\underline{u}}$ ci-dessus, aux dérivées secondes de nos déplacements généralisés et à attribuer une masse généralisée à chacun d'eux.

Nous allons en réalité dans ce chapitre dériver deux « modèles SCLS1 » en régime dynamique. Nous avons vu que dans le régime statique, la continuité de la contrainte tangentielle inter-laminaire entraîne celle de l'effort généralisé π . Cette assertion ne sera plus vraie en régime dynamique. Aussi nous construirons un modèle possédant $7n$ degrés de liberté relaxant cette condition. Nous détaillerons également un modèle assurant la continuité de π , plus proche de ce que nous connaissons dans le cas statique.

- * D'abord, section 2.1 [p. 44], nous prendrons pour point de départ de la construction des modèles SCLS1 et LS1 dynamique, non plus l'équation d'équilibre de Cauchy, mais la formulation intégrale d'Hamilton également appelée principe de moindre action. Ce postulat, plus général, habituellement posé comme un problème en déplacement, sera modifié pour devenir un principe en contraintes et en impulsions, en postulant une distribution cohérente de ces deux champs.
- * Nous utiliserons ce principe dans les sections 2.2 [p. 49], 2.3 [p. 52] et 2.4 [p. 54] pour établir les équations dynamiques portant sur chacun de nos efforts généralisés. Ces équations feront intervenir un vecteur « impulsion généralisée », relié à la dérivée temporelle des déplacements généralisés par une matrice de masse.
- * La particularisation de nos modèles au cas d'une plaque constituée d'une unique couche fera l'objet de la section 2.5 [p. 57]. Nous y montrerons le lien existant avec les modèles de plaques « classiques ».
- * Nous concluons section 2.6 [p. 61] par quelques cas tests d'analyse modale sur des plaques anisotropes, afin de valider l'ensemble de la démarche précédemment menée.

2.1 Principes de minimum en régime dynamique

2.1.1 Principe de moindre action pour un système discret

Le principe de moindre action, ou principe d'Euler Lagrange, postule que la dynamique d'un système fini de N particules est entièrement déterminé par un Lagrangien $\mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}})$, dépendant de la position, de la vitesse, et, éventuellement, explicitement du temps. La trajectoire physique est sélectionnée par le fait que l'action entre deux instants voisins est stationnaire [Bedford, 1985] :

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}) dt$$

Par analogie avec ce principe, strictement équivalent à celui des puissances virtuelles, nous prendrons comme point de départ le principe d'Hamilton, extension au cas de la mécanique des milieux continus du principe de moindre action.

Remarque 2.1.1 Il est important de souligner que le principe d'Hamilton n'est pas déduit du postulat valable pour un nombre fini de particules.

Nous allons montrer que les équations locales d'équilibre sont des conditions *nécessaires* à la vérification du principe.

Nous cherchons donc le déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t)$ qui rend stationnaire l'intégrale :

$$\mathcal{A}(\underline{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}) dt$$

où les extrémités $\underline{u}(\underline{x}, t_1), \underline{u}(\underline{x}, t_2)$ sont fixes.

2.1.2 Principe en déplacements

Le Lagrangien d'un milieu continu non dissipatif s'interprète comme la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Pour un milieu caractérisé par :

- une énergie libre $\Psi(\underline{\varepsilon}[\underline{u}])$,
- soumis à des forces de volumes de densité massique $\underline{f}(\underline{x}, t)$ sur son domaine Ω ,
- soumis à des forces de surfaces sur une partie $\partial_N \Omega$ de sa frontière,

le Lagrangien est de la forme :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}) = \int_{\Omega} (\Psi(\underline{\varepsilon}[\underline{u}]) - k(\dot{\underline{u}}) - \rho \underline{f} \cdot \underline{u}) d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \underline{T}^D \cdot \underline{u} d\omega \quad (2.2)$$

où $k(\dot{\underline{u}}) = \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}}$ désigne la densité d'énergie cinétique, et \underline{u} le vecteur déplacement s'annulant sur $\partial_D \Omega$. Si nous supposons qu'il existe une solution, le vrai champ de déplacements, que nous notons $\underline{U}(\underline{x}, t)$, nous pouvons alors considérer un champ de déplacements infiniment voisin $\underline{u}(\underline{x}, t)$, égal à $\underline{U}(\underline{x}, t_1)$ en t_1 et $\underline{U}(\underline{x}, t_2)$ en t_2 :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \eta \underline{w}(\underline{x}, t) \quad \dot{\underline{u}}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{U}}(\underline{x}, t) + \eta \dot{\underline{w}}(\underline{x}, t)$$

$$\dot{\underline{w}}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{w}(\underline{x}, t)}{\partial t} \quad \underline{w}(\underline{x}, t_1) = \underline{w}(\underline{x}, t_2) = \underline{0} \quad \text{par hypothèse} \quad \underline{w}(\underline{x}, t) = \underline{0} \text{ sur } \partial_D \Omega$$

Notation 2.1.1 Ensemble des champs dynamiquement admissibles à zéro. Nous notons pour la suite $\mathcal{C}_{t=0}^{ad,0} = \{v \in \mathcal{C}^{ad,0} | v(\underline{x}, t_1) = \underline{0}, v(\underline{x}, t_2) = \underline{0}\}$

Alors nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 Stationnarité de l'action. *Le champ de déplacement qui rend stationnaire l'action est solution du problème d'équilibre :*

$$\forall \underline{w} \in \mathcal{C}_{t=0}^{ad,0} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\underline{U}(\underline{x}, t) + \eta \underline{w}(\underline{x}, t)) - \mathcal{A}(\underline{U}(\underline{x}, t))}{\eta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{f} = \rho \ddot{\underline{U}} \text{ dans } \Omega \\ \underline{T}^D - \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \partial_N \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

où l'action est définie par :

$$\mathcal{A}(\underline{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\Psi(\underline{\varepsilon}[\underline{u}]) - \frac{1}{2} \rho \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\dot{u}} - \rho \underline{f} \cdot \underline{u} \right) d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \underline{T}^D \cdot \underline{u} d\omega dt$$

Par conséquent le principe d'Hamilton, avec l'hypothèse supplémentaire $\underline{w}(\underline{x}, t_1) = \underline{w}(\underline{x}, t_2) = \underline{0}$, implique les relations fondamentales de la dynamique. Nous prendrons donc, comme nouveau postulat de base, le principe de moindre action. Celui-ci étant naturellement un principe en déplacements, nous allons tout d'abord lui trouver une formulation équivalente en contraintes, plus adaptée au modèle SCLS1.

2.1.3 Principe en contraintes

Définition 2.1.1 Champs de contraintes-impulsions dynamiquement admissibles. On définit l'ensemble des tenseurs des contraintes et de vecteurs impulsions dynamiquement admissibles par :

$$\underline{\sigma}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna}^{ad} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma})(\underline{x}, t) + \rho \underline{f}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{p}}(\underline{x}, t) \text{ dans } \Omega \\ \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{T}^D(\underline{x}, t) \text{ sur } \partial_N \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

Définition 2.1.2 Champs de contraintes-impulsions dynamiquement admissibles à zéro. On définit l'ensemble des tenseurs des contraintes et de vecteurs impulsions dynamiquement admissibles par à zéro :

$$\underline{\sigma}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna,0}^{ad} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) = 0 \text{ sur } \partial_N \Omega \\ \underline{p}(\underline{x}, t_0) = \underline{p}(\underline{x}, t_1) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

Théorème 2.1.2 Formulation variationnelle dynamique en contraintes. Les champs de contraintes et d'impulsions, solutions de notre problème d'équilibre dynamique, rendent stationnaire la fonctionnelle ci-dessous, sur l'ensemble des champs dynamiquement admissibles.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \Psi^*(\underline{\sigma}) - \frac{1}{2\rho} \underline{p} \cdot \underline{p} d\Omega dt \quad \underline{\sigma}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna}^{ad} \quad (2.6)$$

Cette version en contrainte du principe de moindre action est connue sous le nom de principe élastodynamique complémentaire de Toupin [Fraeijns de Veubeke, 1971, Tabarrok, 1984]. Il a été historiquement formulé comme un principe à un seul champ. En effet, si l'on introduit l'impulsion de contraintes $\underline{T}(t) = \underline{T}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\sigma}(u) du$, le principe affirme alors que la fonctionnelle suivante est stationnaire :

$$\mathcal{F}[\underline{T}] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left(\Psi^*(\dot{\underline{T}}) - \frac{1}{2\rho} \|\operatorname{div} \underline{T}\|^2 \right) d\Omega dt \quad (2.7)$$

pour tout \underline{T} tel que $\dot{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \underline{t}$ sur $\partial\Omega_N$.

Un principe équivalent à deux champs peut être obtenu en introduisant la densité d'impulsion \underline{p} comme une inconnue indépendante, c'est-à-dire $\underline{p} = \operatorname{div} \underline{T}$. Le principe élastodynamique complémentaire est donc équivalent à la stationnarité fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}[\underline{\sigma}, \underline{p}] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left(\Psi^*(\underline{\sigma}) - \frac{1}{2\rho} \|\underline{p}\|^2 \right) d\Omega dt \quad \forall \underline{\sigma}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna}^{ad} \quad (2.8)$$

Démonstration Ce principe variationnel, en contraintes, peut se reformuler sous une forme mixte avec l'introduction du déplacement \underline{u} , multiplicateur de Lagrange associé à l'équation d'équilibre tridimensionnelle. Nous introduisons ainsi la fonctionnelle \mathcal{M} définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{F}[\underline{\sigma}, \underline{p}] + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left(\operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{f} - \dot{\underline{p}} \right) \cdot \underline{u} \, d\Omega \, dt \quad \forall \underline{\sigma}, \text{ tel que } \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ sur } \partial_N \Omega \\ \mathcal{M} &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left(\Psi^*(\underline{\sigma}) - \frac{1}{2\rho} \|\underline{p}\|^2 \right) + \left(\operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{f} - \dot{\underline{p}} \right) \cdot \underline{u} \, d\Omega \, dt \quad \forall \underline{\sigma}, \text{ tel que } \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ sur } \partial_N \Omega\end{aligned}\tag{2.9}$$

La première variation de \mathcal{M} , pour des incréments $\delta \underline{u} \in \mathcal{C}_{t=0}^{ad,0}$, $(\delta \underline{\sigma}, \delta \underline{p}) \in \mathcal{S}_{dyna,0}^{ad}$ s'écrit par conséquent :

$$\delta \mathcal{M}(\underline{\sigma}, \underline{p}, \underline{u}, \delta \underline{\sigma}, \delta \underline{p}, \delta \underline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \underline{\sigma}} : \delta \underline{\sigma} - \frac{1}{\rho} \underline{p} \cdot \delta \underline{p} + \left(\operatorname{div}(\delta \underline{\sigma}) - \delta \dot{\underline{p}} \right) \cdot \underline{u} + \left(\operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{f} - \dot{\underline{p}} \right) \cdot \delta \underline{u} \, d\Omega \, dt$$

L'annulation de $\delta \mathcal{M}$, pour une variation du déplacement quelconque $\delta \underline{u}$, nous confirme l'équation d'équilibre dynamique :

$$\operatorname{div}(\underline{\sigma})(\underline{x}, t) + \rho \underline{f}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{p}}(\underline{x}, t) \text{ dans } \Omega$$

Par ailleurs, une intégration par parties, en temps sur $\delta \dot{\underline{p}}$, et en espace concernant $\operatorname{div} \underline{\sigma}$, transforme $\delta \mathcal{M}$:

$$\delta \mathcal{M} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \underline{\sigma}} - \underline{\nabla} \underline{u}^s \right) : \delta \underline{\sigma} + \left(\dot{\underline{u}} - \frac{1}{\rho} \underline{p} \right) \cdot \delta \underline{p} + \left(\operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{f} - \dot{\underline{p}} \right) \cdot \delta \underline{u} \, d\Omega \, dt$$

Les termes de bord s'annulent grâce au choix de l'espace de définition pour $(\delta \underline{\sigma}, \delta \underline{p})$. La stationnarité de la fonctionnelle, au regard d'une variation de la contrainte $\delta \underline{\sigma}$, nous rappelle la loi de comportement, exprimée en souplesse :

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\nabla} \underline{u}^s$$

Tandis qu'une variation élémentaire de l'impulsion $\delta \underline{p}$ induit l'égalité :

$$\underline{p} = \rho \dot{\underline{u}}$$

2.1.4 Illustration sur le modèle shear lag

Une revue bibliographique exhaustive des méthodes shear-lag pour l'analyse des composites stratifiés est réalisée par Nairn and Mendels [2001]

Le modèle « shear-lag » [Cox, 1952, Hedgepeth, 1961] est souvent utilisé pour modéliser la redistribution des contraintes résultant de l'interaction entre deux couches élastiques liées sous traction longitudinale. Considérons le bi-matériau de la figure 2.1 [p. 47] à l'état de contrainte plane dans le plan (x_1, x_2) constitué d'un noyau central d'épaisseur e_2 entouré de deux peaux symétriques d'épaisseur $e_1/2$. Chaque matériau (peaux et noyau) est isotrope élastique avec un module d'Young E_i et un module de cisaillement μ_i pour $i = 1, 2$. Supposons que la densité du matériau dans les deux couches soit décrite par une fonction générique $\rho(x_2)$. Nous considérons un domaine rectangulaire $\Omega = \omega \times [-e/2; e/2]$ où $e = e_1 + e_2$. Le modèle shear-lag est obtenu en postulant la forme suivante pour le champ de contrainte 2D local $\sigma(x_1, x_2)$ (voir à nouveau la figure 2.1) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(x_1, x_2) &= \begin{cases} \sigma_1(x_1) & \text{si } |x_2| > e_2/2 \\ \sigma_2(x_1) & \text{si } |x_2| < e_2/2 \end{cases} \\
 \sigma_{12}(x_1, x_2) &= \begin{cases} \frac{2\tau x_2}{e_2} & \text{si } |x_2| < e_2/2 \\ (\pm e - 2x_2) \frac{\tau}{e_1} & \text{si } \pm x_2 \geq e_2/2 \end{cases} \\
 \sigma_{22}(x_1, x_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

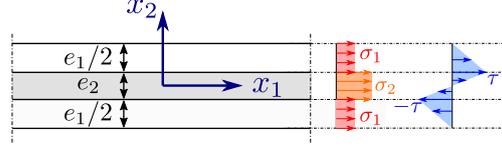


FIGURE 2.1 – Géométrie du bi-matériau et hypothèses du modèle shear-lag

L'équation dynamique dans la direction longitudinale peut s'écrire :

$$\dot{p}(x_1, x_2) = \begin{cases} \sigma'_1(x_1) - \frac{2\tau(x_1)}{e_1} & \text{si } |x_2| > e_2/2 \\ \sigma'_2(x_1) + \frac{2\tau(x_1)}{e_2} & \text{si } |x_2| < e_2/2 \end{cases}$$

Une utilisation cohérente du principe variationnel (2.8) nécessite donc de choisir un vecteur impulsion constant par morceaux par rapport à x_2 :

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} p_1(x_1) & \text{si } |x_2| > e_2/2 \\ p_2(x_1) & \text{si } |x_2| < e_2/2 \end{cases} \tag{2.11}$$

ce qui donne les équations dynamiques généralisées suivantes pour $x_1 \in \omega$:

$$\dot{p}_1(x_1) = \sigma'_1(x_1) - \frac{2\tau(x_1)}{e_1} \tag{2.12a}$$

$$\dot{p}_2(x_1) = \sigma'_2(x_1) + \frac{2\tau(x_1)}{e_2} \tag{2.12b}$$

L'introduction des développement polynomiaux (2.10) et (2.11) dans (2.8) donne la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}[\sigma_1, \sigma_2, \tau, p_1, p_2] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{e_i}{2E_i} \sigma_i^2 + \frac{e_i}{6\mu_i} \tau^2 - e_i \left\langle \frac{1}{2\rho} \right\rangle_i p_i^2 \right) dx_1 dt$$

qui doit être stationnaire pour tous les σ_i, τ, p_i satisfaisants (2.12) et où $\langle \star \rangle_1$ (resp. $\langle \star \rangle_2$) indique la valeur moyenne sur la couche 1 (resp. 2).

En introduisant λ_i comme multiplicateurs de Lagrange associés à (2.12), les conditions d'optimalité par rapport à σ_i et τ rapportent respectivement :

$$\begin{aligned}
 e_i \frac{\sigma_i}{E_i} - \lambda'_i &= 0 \quad i = 1, 2 \\
 \left(\frac{e_1}{3\mu_1} + \frac{e_2}{3\mu_2} \right) \tau + 2 \left(\frac{\lambda_2}{e_2} - \frac{\lambda_1}{e_1} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

alors que la condition d'optimalité en ce qui concerne les impulsions p_i :

$$-e_i \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_i p_i + \dot{\lambda}_i = 0$$

En définissant $u_i = \lambda_i/e_i$, cette quantité peut être interprétée comme le déplacement généralisé de la couche i avec les lois constitutives généralisées suivantes et la relation impulsion/vitesse :

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= E_i u'_i \\
 \tau &= \kappa(u_1 - u_2) \\
 p_i &= \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_i^{-1} \dot{u}_i
 \end{aligned}$$

où $\kappa = \frac{6}{\frac{e_1}{\mu_1} + \frac{e_2}{\mu_2}}$ est une rigidité d'interaction de cisaillement entre les deux couches.

On peut remarquer que cette approche donne $m_i = 1/\langle 1/\rho \rangle_i$ comme inertie généralisée associée au mouvement de la couche i . Des fausses inerties ad-hoc ont été utilisées par Liu et al. [2018] pour l'étude dynamique du modèle shear-lag. Nous retrouvons ainsi des résultats communs aux méthodes classiques d'homogénéisation : une approche « en contrainte » conduit à des estimations de type « Reuss » ($m_i = 1/\langle 1/\rho \rangle_i$), tandis qu'une approche cinématique, en supposant le déplacement constant par couche, fournit une estimation de type « Voigt » $m_i = \langle \rho \rangle_i$.

2.1.5 Méthodologie générale

Nous nous limitons ici au cas de la dérivation d'un continuum généralisé à partir d'un continuum 3D par réduction dimensionnelle le long de la coordonnée x_3 , comme ce sera le cas pour les modèles de plaques stratifiées étudiés par la suite. À cette fin, nous introduisons $\Omega = \omega \times \mathcal{I}$ où ω est le plan de référence de la plaque et \mathcal{I} l'intervalle d'épaisseur le long de x_3 . La méthodologie peut cependant être directement étendue à d'autres situations comme la dérivation de modèles de poutres généralisées (réduction le long de x_2, x_3) par exemple.

Nous supposons que la contrainte 3D locale $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ peut être exprimée linéairement en fonction d'un vecteur de contraintes généralisées $\boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2)$ par un développement le long de la direction x_3 . Nous supposons en outre que cette expansion conduit à l'expression suivante pour la divergence des contraintes 3D :

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) = \sum_k (\mathcal{L}_i^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2)) f_i^{(k)}(x_3) \quad \forall i \quad (2.13)$$

où $\mathcal{L}_i^{(k)}$ sont des opérateurs différentiels par rapport à (x_1, x_2) et $f_i^{(k)}$ des fonctions de forme de la variable x_3 formant une base indépendante. Dans des conditions statiques, l'équilibre 3D local se traduirait par les équations d'équilibre généralisées suivantes :

$$\mathcal{L}_i^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2) = 0 \quad \forall i, k, \quad \forall (x_1, x_2) \in \omega$$

Comme dans l'exemple du shear-lag, les multiplicateurs de Lagrange $U_i^{(k)}(x_1, x_2)$ associés à ces équations peuvent être interprétés comme les déplacements généralisés du modèle. Ils peuvent être mis en relation avec les déplacements 3D locaux comme suit :

$$U_i^{(k)}(x_1, x_2) = \int_{\mathcal{I}} u_i(\mathbf{x}) f_i^{(k)}(x_3) dx_3$$

Là encore, dans les modèles formulés en contrainte, on ne connaît qu'une relation moyenne entre les déplacements locaux et généralisés, et non une expansion complète. En suivant la même approche que dans la section précédente, nous proposons l'extension à un cadre dynamique en supposant une expansion similaire à (2.13) pour le champ d'impulsion $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, à savoir :

$$p_i(\mathbf{x}) = \sum_k \mathbf{P}_i^{(k)}(x_1, x_2) f_i^{(k)}(x_3) \quad \forall i \quad (2.14)$$

Les équations dynamique généralisées sont donc :

$$\mathcal{L}_i^{(k)} \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2) = \dot{\mathbf{P}}_i^{(k)}(x_1, x_2) \quad \forall i, k, \quad \forall (x_1, x_2) \in \omega \quad (2.15)$$

et sont strictement équivalentes à la satisfaction de l'équation dynamique 3D locale.

Avec ces développements, la fonctionnelle (2.8) devient sous forme générique :

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{P}] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} \left(w^*(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2} \mathbf{P}_i^{(k)} \int_{\mathcal{I}} \frac{1}{\rho} f_i^{(k)} f_i^{(j)} dx_3 \mathbf{P}_i^{(j)} \right) d\omega dt \quad (2.16)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} \left(w^*(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{P} \right) d\omega dt \quad (2.17)$$

où $w^*(\Sigma) = \int_{\mathcal{I}} \Psi^*(\sigma) dx_3$ est la densité d'énergie de contrainte généralisée obtenue à partir de l'expansion de contrainte 3D locale et dans laquelle nous avons exprimé le terme cinétique quadratique sous une forme condensée impliquant le vecteur d'impulsions généralisées \mathbf{P} et une matrice symétrique définie positive \mathbb{D} . Les éléments de cette matrice impliquent le calcul de l'intégrale des produits des fonctions de formes $f_i^{(k)}$ avec l'inverse de la densité sur \mathcal{I} .

Enfin, rappelons que les conditions de stationnarité de \mathcal{F} sont contraintes par les équations dynamiques généralisées (2.15), que nous réécrivons sous la forme condensée suivante :

$$\mathcal{L}\Sigma = \dot{\mathbf{P}} \quad (2.18)$$

Les conditions d'optimalité par rapport à \mathbf{P} donnent alors :

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbb{D} \cdot \mathbf{P}$$

reliant le vecteur de la quantité de mouvement généralisée à la vitesse généralisée. La matrice de masse généralisée du système est donc donnée par \mathbb{D}^{-1} .

2.2 Extension au cas dynamique du modèle SCLS1

2.2.1 Introduction du vecteur « impulsion généralisée »

Nous avons vu dans la section précédente, que les contraintes solutions rendaient extrême la fonctionnelle \mathcal{F} , sur l'ensemble des contraintes dynamiquement admissibles définies par :

$$\underline{\sigma}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna}^{ad} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma})(\underline{x}, t) + \rho \underline{f}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{p}}(\underline{x}, t) \text{ dans } \Omega \\ \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{T}^D(\underline{x}, t) \text{ sur } \partial_N \Omega \end{cases}$$

Nous allons, comme dans le chapitre précédent, négliger les efforts de volume. L'équation d'équilibre dynamique du modèle s'écrit donc :

$$\operatorname{div}(\underline{\sigma})(x, y, z, t) = \dot{\underline{p}}(x, y, z, t) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\alpha 3, 3}^{i, 3D}(x, y, z, t) + \sigma_{\alpha \beta, \beta}^{i, 3D}(x, y, z, t) = \dot{p}_{\alpha}^i(x, y, z, t) \\ \sigma_{33, 3}^{i, 3D}(x, y, z, t) + \sigma_{\alpha 3, \alpha}^{i, 3D}(x, y, z, t) = \dot{p}_3^i(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Avec l'approximation du champs de contraintes SCLS1 (1.3), (1.4), (1.5) :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha \beta, \beta}^{i, 3D} + \sigma_{\alpha 3, 3}^{i, 3D} = [N_{\alpha \beta, \beta}^i + (\tau_{\alpha}^{i, i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1, i})] \frac{P_0^i(z)}{e^i} + [M_{\alpha \beta, \beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i, i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1, i})] \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \\ \sigma_{\alpha 3, \alpha}^{i, 3D} + \sigma_{33, 3}^{i, 3D} = [Q_{\alpha, \alpha}^i + (\nu^{i, i+1} - \nu^{i-1, i})] \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] + [\tau_{\alpha, \alpha}^{i, i+1} - \pi^{i, +}] \left[P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \\ \quad - [\tau_{\alpha, \alpha}^{i-1, i} - \pi^{i, -}] \left[P_1^i(z) + \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \end{cases} \quad (2.20)$$

Postulat 2.2.1 Distribution du vecteur impulsions généralisées. *Afin d'assurer la cohérence de notre modèle, nous pouvons supposer que l'impulsion r_{α} est affine par morceaux dans l'épaisseur, et que r_3 est quadratique dans l'épaisseur.*

$$\dot{p}_{\alpha}^i = \dot{r}_{\alpha}^{i, 0}(x, y, t) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \dot{r}_{\alpha}^{i, 1}(x, y, t) \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \quad (2.21)$$

$$\dot{p}_3^i = \dot{r}_3^i(x, y, t) \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] + \dot{r}_3^{i, +}(x, y, t) \left[P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2} \right] - \dot{r}_3^{i, -}(x, y, t) \left[P_1^i(z) + \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \quad (2.22)$$

2.2.2 Équations d'équilibre dynamique

Nous déduisons de (2.19) les équations d'équilibre dynamique du modèle SCLS1 :

$$N_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y, t) + \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y, t) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y, t) = \dot{r}_{\alpha}^{i,0}(x, y, t) \quad (2.23a)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y, t) - Q_{\alpha}^i(x, y, t) + \frac{e^i}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})(x, y, t) = \dot{r}_{\alpha}^{i,1}(x, y, t) \quad (2.23b)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^i(x, y, t) + \nu^{i,i+1}(x, y, t) - \nu^{i-1,i}(x, y, t) = \dot{r}_3^i(x, y, t) \quad (2.23c)$$

$$\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}(x, y, t) - \pi^{i,+}(x, y, t) = \dot{r}_3^{i,+}(x, y, t) \quad (2.23d)$$

$$\tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}(x, y, t) - \pi^{i,-}(x, y, t) = \dot{r}_3^{i,-}(x, y, t) \quad (2.23e)$$

En dynamique la continuité de la contrainte tangentielle inter-laminaire, et donc de sa divergence, ne permet plus d'obtenir la continuité de la contrainte généralisée π . La formulation rigoureuse du modèle SCLS1 en dynamique comporte donc a priori $7n$ champs d'efforts généralisés et par dualité autant d'inconnues cinématiques.

Notation 2.2.1 Simplification d'écriture. Dans la suite, étant entendu que les champs \underline{N}^i , \underline{M}^i , \underline{Q}^i , $\underline{\tau}^{j,j+1}$, $\underline{\nu}^{j,j+1}$, $\pi^{i,\pm}$, $r_{\alpha}^{i,0}$, $r_{\alpha}^{i,1}$, r_3^i , $r_3^{i,\pm}$ sont définis sur le feuillet de référence et dépendent maintenant, dans le cadre dynamique, du temps, nous omettons de mentionner le triplet de variables (x, y, t) dont ils dépendent.

Les conditions aux limites sur les faces latérales $\partial\omega \times [h_i^-, h_i^+]$ et sur les faces supérieures et inférieures ω^{\pm} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{i,3D}(x, y, z, t) \cdot n_{\alpha} e_{\alpha} = \underline{0} &\quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta}^i n_{\beta} = 0 & M_{\alpha\beta}^i n_{\beta} = 0 \\ Q_{\alpha}^i n_{\alpha} = 0 & \tau_{\alpha}^{j,j+1} n_{\alpha} = 0 \end{cases} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{n,3D}(x, y, h_n^+, t) \cdot e_3 = \underline{T}^+ & \\ \underline{\underline{\sigma}}^{1,3D}(x, y, h_1^-, t) \cdot (-e_3) = \underline{T}^- &\quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tau_{\alpha}^{0,1} = -T_{\alpha}^- & \nu^{0,1} = -T_3^- \\ \tau_{\alpha}^{n,n+1} = T_{\alpha}^+ & \nu^{n,n+1} = T_3^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2.3 Formulation variationnelle mixte du modèle SCLS1

Nous prenons pour point de départ la formulation variationnelle mixte (2.9). Le déplacement \underline{u} est ici supposé être égal au déplacement tridimensionnel. L'expression de la divergence de la contrainte tridimensionnelle $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})$ peut être remplacée à l'aide de (2.20). Comme précédemment, nous identifierons les multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des équations d'équilibre, comme les déplacements généralisés du modèle.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{SCLS1} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[w_{SCLS1}^* - \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2\rho^i} \underline{p}^i \cdot \underline{p}^i dz \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\text{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} - \dot{r}^{i,0}] \cdot \underline{U}^i(x, y, t) d\omega \right] dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\text{div} \underline{Q}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} - \dot{r}_3^{i,0}] U_3^i(x, y, t) d\omega \right] dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\text{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) - \dot{r}^{i,1}] \cdot \underline{\Phi}^i(x, y, t) d\omega \right] dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1}) - \pi^{i,+} - \dot{r}_3^{i,+}] W_-^i - [\text{div}(\underline{\tau}^{i-1,i}) - \pi^{i,-} - \dot{r}_3^{i,-}] W_+^i d\omega \right] dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

Puis en utilisant le même changement d'indice que dans la (1.17), et après une intégration par parties temporelle et spatiale, en éliminant de la même façon les termes tout intégrés en temps, qui seraient sans influence, lors de la minimisation vis à vis d'un incrément d'impulsion

vérifiant $\delta \underline{p}(t_1) = \delta \underline{p}(t_2) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{SCLS1} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[w_{SCLS1}^* - \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\underline{\varepsilon}}^i + \underline{M}^i : \underline{\underline{\chi}}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\underline{\gamma}}^i - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2\rho^i} \underline{p}^i \cdot \underline{p}^i dz \right] d\omega dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \underline{T}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} + \sum_{i=1}^n \pi^{i,+} W_-^i - \pi^{i,-} W_+^i \right] d\omega dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n r_{\alpha}^{i,0} \dot{U}_{\alpha}^i + r_3^{i,0} \dot{U}_3^i + p_{\alpha}^{i,1} \dot{\Phi}_{\alpha}^i + r_3^{i,+} \dot{W}_-^i - r_3^{i,-} \dot{W}_+^i \right] d\omega dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[T_{\alpha}^+ \left(U_{\alpha}^n + \frac{e^n}{2} \Phi_{\alpha}^n - W_{+, \alpha}^n \right) + T_3^+ U_3^n + T_{\alpha}^- \left(U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} \Phi_{\alpha}^1 + W_{-, \alpha}^1 \right) + T_3^- U_3^1 \right] d\omega dt
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.2.4 Relation entre les vecteurs impulsions et vitesses généralisés

Les inerties généralisées seront obtenues en utilisant la stationnarité de la fonctionnelle (2.26) par rapport à un incrément d'impulsion. Cette expression se simplifie si nous calculons les deux termes de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2\rho^i} \underline{p}^i \cdot \underline{p}^i dz &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2\rho^i} (p_{\alpha}^i(x, y, z, t))^2 + (p_3^i(x, y, z, t))^2 dz \\
 \int_{h_i^-}^{h_i^+} (p_{\alpha}^i)^2 dz &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(r_{\alpha}^{i,0} \frac{P_0^i(z)}{e^i} + r_{\alpha}^{i,1} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \right)^2 dz \\
 \int_{h_i^-}^{h_i^+} (p_3^i)^2 dz &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(r_3^i \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] + r_3^{i,i+1} \left[P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2} \right] + r_3^{i-1,i} \left[-P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \right)^2 dz
 \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité des polynômes de Lagrange et leur norme $\int_{h_i^-}^{h_i^+} (P_j^i(z))^2 dz$ rappelée (1.1.2) [p. 3], nous obtenons que l'intégrale, sur la $i^{\text{ème}}$ densité d'impulsion, s'écrit comme une forme quadratique du vecteur impulsion de cette même couche :

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2\rho^i} \underline{p}^i \cdot \underline{p}^i dz = \{\mathbf{r}^i\}^{\top} \cdot [\mathbb{D}^i] \cdot \{\mathbf{r}^i\}$$

avec

$$\{\mathbf{r}^i\} = \begin{Bmatrix} r_1^{i,0} \\ r_2^{i,0} \\ r_1^{i,1} \\ r_2^{i,1} \\ r_3^i \\ r_3^{i,+} \\ r_3^{i,-} \end{Bmatrix} \text{ et } [\mathbb{D}^i] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^i e^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^i e^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{\rho^i e^{i3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{\rho^i e^{i3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5e^i \rho^i} & \frac{-1}{10\rho^i} & \frac{-1}{10\rho^i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{10\rho^i} & \frac{2e^i}{15\rho^i} & \frac{-e^i}{30\rho^i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{10\rho^i} & \frac{-e^i}{30\rho^i} & \frac{2e^i}{15\rho^i} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Si nous posons le vecteur déplacement généralisé de la couche i , $\{\mathbf{U}^i\}^{\top} = \{U_1^i, U_2^i, \Phi_1^i, \Phi_2^i, U_3^i, W_-^i, -W_+^i\}$, nous remarquons que la fonctionnelle mixte (2.26) peut se mettre sous la forme générique :

$$\mathcal{M}_{SCLS1} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} \left(w_{SCLS1}^*(\boldsymbol{\Sigma}) - \{\boldsymbol{\Sigma}\} \cdot \{\mathbf{E}\} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{\mathbf{r}^i\} \cdot [\mathbb{D}^i] \cdot \{\mathbf{r}^i\} + \{\dot{\mathbf{U}}^i\} \cdot \{\mathbf{r}^i\} \right) d\omega dt \tag{2.28}$$

La stationnarité de \mathcal{M}_{SCLS1} par rapport à un incrément d'impulsion, nous donne alors la relation linéaire liant nos vitesses et nos impulsions généralisées :

$$\{\dot{\mathbf{U}}^i\} = [\mathbb{D}^i] \cdot \{\mathbf{r}^i\} \quad [\mathbb{D}^i] \text{ et } \{\mathbf{r}^i\} \text{ donné par (2.27)}$$

Premièrement, on peut observer que l'inertie dans le plan et l'inertie angulaire (liées respectivement à \dot{U}_α^i et $\dot{\Phi}_\alpha^i$) sont données par les valeurs classiques $\rho^i e^i$ et $\rho^i (e^i)^3/12$. Cependant, l'inertie hors plan est plus complexe puisque le modèle SCLS1 comprend les degrés de liberté supplémentaires W_\pm^i en plus de U_3^i . Après inversion du bloc correspondant, on obtient :

$$\begin{pmatrix} r_3^i \\ r_3^{i,+} \\ r_3^{i,-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^i e^i & \rho^i & \rho^i \\ \rho^i & \frac{9\rho^i}{e^i} & \frac{3\rho^i}{e^i} \\ \rho^i & \frac{3\rho^i}{e^i} & \frac{9\rho^i}{e^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_3^i \\ \dot{W}_-^i \\ -\dot{W}_+^i \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

On peut noter que l'inertie hors plan standard $\rho^i e^i$ d'une plaque Reissner-Mindlin [Belou-nar et al., 2019, Nguyen-Thoi et al., 2014] est récupérée si on annule des degrés de liberté supplémentaires $W_\pm^i = 0$.

2.2.5 Cinématiques généralisées et comportement en souple

Les interprétations cinématiques des multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des équations (2.23a), (2.23b), (2.23c), (2.30), c'est à dire les déplacements généralisés du modèle SCLS1, sont les mêmes que dans le cas statique. Nous devons prendre garde cependant à conserver les « W », car la non continuité de π ne nous permet plus aussi simplement d'introduire les déplacements généralisés V . Sept degrés de liberté par couche décrivent la cinématique.

En effet, on remarque, dans la formulation mixte (2.25) [p. 50], que les déplacements généralisés introduits sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des équations de (2.23a), (2.23b), (2.23c), (2.30). Leurs expressions en fonction du déplacement tridimensionnel sont identiques au cas statique, à la dépendance au temps t près :

$$\begin{aligned} U_\alpha^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_\alpha(x, y, z, t) dz & \Phi_\alpha^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} u_\alpha(x, y, z, t) dz \\ U_3^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3(x, y, z, t) dz & W_\pm^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(P_1^i(z) \pm \frac{P_2^i(z)}{2} \right) u_3(x, y, z, t) dz \end{aligned}$$

Par ailleurs, la stationnarité, vis à vis d'une variation des contraintes généralisées dans la formulation mixte (2.25) [p. 50], nous redonne les lois de comportement en souple déjà obtenues dans la partie statique, avec cependant une souple dé耦lée pour la variable π .

En effet, une intégration par parties de la formulation mixte (2.25) [p. 50] permet de faire apparaître les déformations généralisées du modèle. La stationnarité, compte tenu d'une variation des efforts généralisés, nous redonne alors les lois de comportement de la section 1.4 [p. 14]

2.3 Modèle SCLS1-dynamique simplifié

Afin de conserver une version plus simple, similaire à celle du cas statique, *i.e.* avec le même nombre de degrés de libertés et les mêmes interprétations, étant entendu que l'effet de l'effort généralisé π est faible, nous imposons la condition supplémentaire :

Hypothèse 2.3.1 Distribution de l'impulsion. *Nous imposons que $\dot{r}_3^{i-1,+} = \dot{r}_3^{i,-}$ de sorte que nous notons à présent $\dot{r}_3^{i-1,i} = \dot{r}_3^{i-1,+} = \dot{r}_3^{i,-}$ l'impulsion de l'interface.*

Si l'on écrit le système (2.23d)–(2.23e) pour la $i-1$ ^{ème} couche, nous observons qu'il n'y a plus lieu de distinguer $\pi^{k,+}$ et $\pi^{k+1,-}$ et nous notons plus simplement $\pi^{k,k+1} = \pi^{k,+} = \pi^{k+1,-}$. L'Hypothèse 2.3.1 [p. 52] mène donc à la continuité de la contrainte π comme dans le cas statique. Il ne reste par conséquent que $6n+1$ équations d'équilibre, $5n$ sont données par (2.23a)–(2.23c) tandis que les $2n$ équations (2.23d)–(2.23e) sont remplacés par $n+1$ équations :

$$\tau_{\alpha,\alpha}^{k,k+1}(x, y, t) - \pi^{k,k+1}(x, y, t) = \dot{r}_3^{k,k+1}(x, y, t) \quad (2.30)$$

Définition 2.3.1 Ensemble des champs de contraintes « SCLS1 dynamiquement admissibles ». L'ensemble $\mathcal{S}_{dyna, SCLS1}^{ad}$ des champs admissibles du modèle SCLS1 est défini par :

$$\mathcal{S}_{dyna, SCLS1}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{\tau}^{i,i+1}, \nu^{i,i+1} \text{ vérifiant les équations d'équilibre (2.23a)-(2.23c), (2.30)} \\ \pi^{k,k+1}, r_\alpha^{i,0}, r_\alpha^{i,1}, r_3^i, r_3^{k,k+1} \text{ et les conditions aux limites (2.24)} \end{array} \right\}$$

La formulation faible mixte est simplement obtenue en remplaçant dans (2.26) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi^{i,+} W_-^i - \pi^{i,-} W_+^i &\text{ par } \sum_{k=0}^n \pi^{k,k+1} \lambda^{k,k+1} \\ \sum_{i=1}^n r_3^{i,+} \dot{W}_-^i - r_3^{i,-} \dot{W}_+^i &\text{ par } \sum_{k=0}^n r_3^{k,k+1} \dot{V}^{k,k+1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3.1 Cinématiques et inerties généralisées, comportement en souplesse

Les interprétations cinématiques des multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des équations (2.23a), (2.23b), (2.23c), (2.30), c'est à dire les déplacements généralisés du modèle SCLS1, sont les mêmes que dans le cas statique.

Dans la formulation mixte (2.25) [p. 50], les déplacements généralisés introduits sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des équations de (2.23a), (2.23b), (2.23c), (2.30). Leurs expressions en fonction du déplacement tridimensionnel sont identiques au cas statique, à la dépendance au temps t près :

$$\begin{aligned} U_\alpha^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_\alpha(x, y, z, t) dz & \Phi_\alpha^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} u_\alpha(x, y, z, t) dz \\ U_3^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3(x, y, z, t) dz & W_\pm^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(P_1^i(z) \pm \frac{P_2^i(z)}{2} \right) u_3(x, y, z, t) dz \\ V^{j,j+1} &= W_-^j - W_+^{j+1} & V^{n,n+1} &= W_-^n \quad V^{0,1} = -W_+^1 \end{aligned}$$

La stationnarité, vis à vis d'une variation des contraintes généralisées dans la formulation mixte (2.25) [p. 50], nous redonne les lois de comportement en souplesse déjà obtenues dans la partie statique.

En effet, une intégration par parties de la formulation mixte (2.25) [p. 50] permet de faire apparaître les déformations généralisées du modèle. La stationnarité, compte tenu d'une variation des efforts généralisés, nous redonne alors les lois de comportement de la section 1.4 [p. 14]

Proposition 2.3.1 Inerties généralisées. La stationnarité de la fonctionnelle (2.26) [p. 51] avec les modifications (2.31) [p. 53], donne les inerties généralisées du modèle simplifié. Les inerties affectant les déplacements membranaires et les rotations sont égales à celles du modèle complet

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}^{j,j+1} = \dot{W}_-^j - \dot{W}_+^{j+1} \\ \quad = -\frac{1}{10\rho^j} r_3^{j,0} - \frac{1}{10\rho^{j+1}} r_3^{j+1,0} + r_3^{j,j+1} \left[\frac{2e^j}{15\rho^j} + \frac{2e^{j+1}}{15\rho^{j+1}} \right] - \frac{e^j}{30\rho^j} r_3^{j-1,j} - \frac{e^{j+1}}{30\rho^{j+1}} r_3^{j+1,j+2} \\ \dot{V}^{0,1} = -\dot{W}_+^1 = \frac{2e^1}{15\rho^1} r_3^{0,1} - \frac{1}{10\rho^1} r_3^1 - \frac{e^1}{30\rho^1} r_3^{1,2} \\ \dot{V}^{n,n+1} = \dot{W}_-^n = \frac{2e^n}{15\rho^n} r_3^{n,n+1} - \frac{1}{10\rho^n} r_3^n - \frac{e^n}{30\rho^n} r_3^{n-1,n} \end{array} \right. \quad (2.32)$$

2.3.2 Matrice impulsion-vitesse du modèle SCLS1 simplifié

Si nous posons le vecteur *déplacements généralisés* suivant :

$$\{\mathbf{U}\}^\top = \{U_1^1, U_2^1, U_3^1, \Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, U_1^n, U_2^n, U_3^n, \Phi_1^n, \Phi_2^n, V^{0,1}, \dots, V^{n,n+1}\}$$

nous pouvons relier celui-ci au vecteur *impulsions généralisées* :

$$\{\mathbf{R}\}^\top = \{r_1^{1,0}, r_2^{1,0}, r_3^{1,0}, r_1^{1,1}, r_2^{1,1}, \dots, r_1^{n,0}, r_2^{n,0}, r_3^{n,0}, r_1^{n,1}, r_2^{n,1}, r_3^{n,1}, \dots, r_3^{n,n+1}\}$$

par une relation linéaire de la forme $\{\dot{\mathbf{U}}\} = [\mathbb{D}] \cdot \{\mathbf{R}\}$, où la matrice locale $[\mathbb{D}]$ est définie par blocs.

$$\{\dot{\mathbf{U}}\} = [\mathbb{D}] \cdot \{\mathbf{R}\} \quad [\mathbb{D}] = \left(\begin{array}{c|c} [\mathbb{D}_{U,\phi}] & [\mathbb{D}_{U_3,r_3^{i,i+1}}] \\ \hline [\mathbb{D}_{U_3,r_3^{i,i+1}}]^\top & [\mathbb{D}_V] \end{array} \right) \quad (2.33)$$

Les expressions des matrices $[\mathbb{D}_{U,\phi}]$, $[\mathbb{D}_{U_3,r_3^{i,i+1}}]$, $[\mathbb{D}_V]$ sont données (A.8) [p. 158], (A.9) [p. 158], (A.10) [p. 158] dans la section A.4 [p. 158]. L'inversion numérique d'une matrice étant une opération coûteuse en terme de temps de calcul, nous serons amenés, par simplicité, à condenser la matrice impulsions-vitesse (2.33). Il n'existe pas de moyen rigoureux et unanimement reconnu pour ce faire, mais l'utilisation de méthode heuristique telle que la sommation sur la diagonale est monnaie courante et c'est cette approche que nous utiliserons par la suite. Une difficulté ici tient dans la « non homogénéité » de la matrice de masse consistante. En effet les vitesses généralisées n'étant pas toutes réellement homogènes à des vitesses, les coefficients de la matrice n'ont pas tous la même dimension. Nous supposons que la relation linéaire peut être approchée en condensant les termes :

$$\{\dot{\mathbf{U}}\} = [\mathbb{D}]^{\text{lumped}} \cdot \{\mathbf{R}\} \quad [\mathbb{D}]^{\text{lumped}} = \left(\begin{array}{cc} [\mathbb{D}_{U,\phi}^{\text{lumped}}] & 0 \\ 0 & [\mathbb{D}_V^{\text{lumped}}] \end{array} \right) \quad (2.34)$$

$[\mathbb{D}_{U,\phi}]$ est une matrice similaire à celle donnée dans (A.8) à ceci près que le coefficient sur la diagonale pondérant le déplacement vertical est cette fois ci 1 et non plus 6/5. Les expressions de $[\mathbb{D}_{U,\phi}^{\text{lumped}}]$, $[\mathbb{D}_V^{\text{lumped}}]$ sont données une nouvelle fois (A.11) [p. 159], (A.12) [p. 159] dans la section A.4 [p. 158].

2.4 Extension au cas dynamique du modèle LS1

L'extension du modèle LS1 au régime dynamique est un peu plus délicate. En effet il ne suffirait pas de remplacer, dans l'expression du champs de contraintes du modèle SCLS1, l'effort généralisé $\pi^{i,i+1}$ par $\text{div } \underline{\tau}^{i,i+1}$ car cette équation d'équilibre n'est plus vérifiée! Nous allons, à la place, proposer une approche mixte dans laquelle le modèle LS1 est déduit du modèle SCLS1 par une hypothèse cinématique. Nous verrons que cette méthode peut être utilisée également dans le cas statique au prix de changements mineurs.

Hypothèse 2.4.1 Champ de déplacements. *Nous supposons que le champ de déplacements dans la couche i par lequel nous dualisons est de la forme :*

$$\begin{aligned} \underline{u}^i &= u_\alpha^i(x, y, z, t) \underline{e}_\alpha + \left(\frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} u_3(x, y, z, t) dz \right) P_0^i(z) \underline{e}_3 \\ &= u_\alpha^i(x, y, z, t) \underline{e}_\alpha + \tilde{U}_3^i P_0^i(z) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Le second membre correspond à la valeur moyenne du champ de déplacement tridimensionnel.

Hypothèse 2.4.2 Répartition du champ d'impulsion. *Nous supposons que le champ d'impulsion est de la forme :*

$$p_\alpha^i \text{ donné par (2.21) et } p_3^i = r_3^i \frac{P_0^i(z)}{e^i}$$

En revanche, nous postulons que le champ de contrainte LS1 est identique à celui du modèle SCLS1! Cette approche est radicalement différente de celle proposée dans le cas statique, en effet, plutôt que de condenser l'effort π , nous allons faire disparaître les équations d'équilibre, en postulant une cinématique moyenne. Si nous injectons dans (2.9) la forme du champ de déplacement tridimensionnel (hypothèse 2.4.1 [p. 54]), l'expression de la divergence (2.20) [p. 49], et l'expression du champ d'impulsion (hypothèse 2.4.2 [p. 54]), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{LS1} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[w_{LS1}^* - \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2\rho^i} \underline{p}^i \cdot \underline{p}^i dz \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} - \underline{r}^{i,0}] \cdot \underline{U}^i(x, y, t) \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) - \underline{r}^{i,1}] \cdot \underline{\Phi}^i(x, y, t) \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div} \underline{Q}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} - \dot{r}_3^{i,0}] \tilde{U}_3^i(x, y, t) \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div} \underline{Q}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}] \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} \tilde{U}_3^i P_0^i(z) dz \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1}) - \pi^{i,+}] \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[P_1^i(z) - \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \tilde{U}_3^i P_0^i(z) dz \right] d\omega dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div}(\underline{\tau}^{i-1,i}) - \pi^{i,-}] \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[P_1^i(z) + \frac{P_2^i(z)}{2} \right] \tilde{U}_3^i P_0^i(z) dz \right] d\omega dt \end{aligned}$$

Une nouvelle fois l'orthogonalité, des polynômes de Legendre permet de simplifier l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{LS1} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[w_{LS1}^* - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ \mathbf{r}^i \} \cdot [\mathbb{D}^i] \cdot \{ \mathbf{r}^i \} \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} - \underline{r}^{i,0}] \cdot \underline{U}^i(x, y, t) \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div}(\underline{M}^i) - \underline{Q}^i + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) - \underline{r}^{i,1}] \cdot \underline{\Phi}^i(x, y, t) \right] d\omega dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[\sum_{i=1}^n [\text{div} \underline{Q}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} - \dot{r}_3^{i,0}] \tilde{U}_3^i(x, y, t) \right] d\omega dt \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec :

$$\{ \mathbf{r}^i \} = \begin{Bmatrix} r_1^{i,0} \\ r_2^{i,0} \\ r_1^{i,1} \\ r_2^{i,1} \\ r_3^i \end{Bmatrix} \text{ et } [\mathbb{D}^i] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^i e^i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^i e^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{\rho^i e^{i3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{\rho^i e^{i3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho^i e^i} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Proposition 2.4.1 Équations d'équilibre du modèle LS1. *La stationnarité par rapport aux déplacements généralisés de la fonctionnelle mixte nous redonne les équations d'équilibre*

du modèle LS1

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i} &= \dot{r}_\alpha^{i,0} \\ M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_\alpha^i + \frac{e^i}{2}(\tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i}) &= \dot{r}_\alpha^{i,1} \\ Q_{\alpha,\alpha}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} &= \dot{r}_3^i \end{aligned}$$

Ces équations sont identiques aux trois premières (2.23a)–(2.23c) du modèle SCLS1.

Définition 2.4.1 Ensemble des champs LS1-dynamiquement admissibles. Ceci nous permet de définir par la même équation l'ensemble des champs LS1-dynamiquement admissibles :

$$\mathcal{S}_{dyna, LS1}^{ad} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i, \underline{\tau}^{i,i+1}, \nu^{i,i+1} \text{ vérifiant les équations d'équilibre (2.23a)–(2.23c)} \\ r_\alpha^{i,0}, r_\alpha^{i,1}, r_3^i \text{ et les conditions aux limites (2.24)} \end{array} \right\}$$

Théorème 2.4.1 Inerties généralisées. Si nous posons comment précédemment le vecteur déplacements généralisés suivant :

$$\{\mathbf{U}\}^\top = \{U_1^1, U_2^1, U_3^1, \Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, U_1^n, U_2^n, U_3^n, \Phi_1^n, \Phi_2^n\}$$

nous pouvons le relier au vecteur impulsions généralisées :

$$\{\mathbf{R}\}^\top = \{r_1^{1,0}, r_2^{1,0}, r_3^1, r_1^{1,1}, r_2^{1,1}, \dots, r_1^{n,0}, r_2^{n,0}, r_3^n, r_1^{n,1}, r_2^{n,1}\}$$

par une relation linéaire de la forme $\{\dot{\mathbf{U}}\} = [\mathbb{D}_{U,\phi}^{\text{lumped}}] \cdot \{\mathbf{R}\}$, où la matrice locale $[\mathbb{D}_{U,\phi}^{\text{lumped}}]$ est définie comme dans (A.11). Contrairement au modèle SCLS1, l'inverse de la matrice de masse locale du modèle LS1 est immédiatement diagonale, ce qui facilite son inversion pour la résolution éléments finis.

2.4.1 Formulation faible du problème dynamique

Suivant le modèle adopté, la formulation faible des modèles LS1 est obtenue en dualisant les équations d'équilibre :

- * (2.23a)–(2.23e) pour le modèle SCLS1 complet
- * (2.23a)–(2.23c), (2.30) pour le modèle SCLS1 simplifié.
- * (2.23a)–(2.23c) pour le modèle LS1

En intégrant par parties, et en suivant le même raisonnement que celui tenu dans la partie statique, nous trouvons que cette expression peut s'écrire sous forme générique :

$$\int_\omega \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^\top \cdot \{\boldsymbol{\Sigma}(\{\mathbf{U}\})\} - \{\mathbf{W}\}^\top \cdot \{\mathbf{F}\} - \{\mathbf{W}\}^\top \cdot \{\dot{\mathbf{R}}\} d\omega = 0$$

Où l'on a introduit le vecteur impulsion généralisée $\{\mathbf{R}\}$. L'utilisation de la matrice de masse généralisée $[\mathbb{M}]$, inverse de la matrice $[\mathbb{D}]$ reformule le problème :

Trouver le vecteur déplacement généralisé $\{\mathbf{U}\}$ tel que pour tout déplacement virtuel $\{\mathbf{W}\}$ cinématiquement admissible :

$$\int_\omega \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^\top \cdot \{\boldsymbol{\Sigma}(\{\mathbf{U}\})\} - \{\mathbf{W}\}^\top \cdot \{\mathbf{F}\} - \{\mathbf{W}\}^\top \cdot [\mathbb{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{U}}\} d\omega = 0 \quad (2.37)$$

La résolution éléments finis de ce problème variationnel peut se résoudre en utilisant un schéma d'intégration temporelle.

Remarque 2.4.1 La résolution de notre problème dynamique explicite requiert l'inversion de la matrice de masse généralisée globale. Or, notre modèle fournit naturellement la matrice $[\mathbb{D}]$ inverse de la matrice de masse généralisée. Pour être parfaitement rigoureux, il serait donc nécessaire d'inverser une première fois cette matrice pour obtenir $[\mathbb{M}]$, puis d'assembler celle-ci pour obtenir la matrice de masse globale $[\mathbb{M}]$ et enfin de ré-inverser cette dernière. Après avoir condensé la matrice $[\mathbb{D}]$ pour faciliter l'inversion, nous utilisons un procédé d'assemblage permettant de conserver le caractère diagonal de la matrice de masse. Ce procédé est une variante de l'intégration de Gauss-Lobatto.

Remarque 2.4.2 Le pas de temps critique, nécessaire au bon fonctionnement du schéma d'intégration explicite, tend cependant à devenir extrêmement faible. Ceci est imputable aux capacités des modèles SCLS1 et LS1 à capter des phénomènes tridimensionnels comme le pincement des couches.

2.5 Modèle de Reissner mono-couche en régime dynamique

Dans cette section, nous allons décrire la simplification des modèles SCLS1 et LS1, dans le cas où la structure serait en réalité constituée d'une unique couche homogène, dans laquelle nous postulons une répartition de contrainte membranaire affine. Les efforts généralisés $\underline{\tau}^+$, $\underline{\tau}^-$, ν^+ , ν^- correspondent à ceux appliqués sur les faces supérieure et inférieure et sont immédiatement remplacés par les efforts extérieurs \underline{T}^+ , \underline{T}^- , de manière à satisfaire, par construction, les conditions aux limites.

2.5.1 Modèle SCLS1-monocouche

Les équations du problème sont obtenues en particulierisant les équations précédentes pour $n = 1$ (dans ce cas, les sommes portant sur l'indice j sont vides).

Champ de contraintes et d'impulsions

Dans notre plaque, nous postulons le champ de contraintes-impulsions suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^{3D}(x, y, z, t) = N_{\alpha\beta} \frac{P_0(z)}{e} + M_{\alpha\beta} \frac{12P_1(z)}{e^2} \quad z \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right] \\ \sigma_{\alpha 3}^{3D}(x, y, z, t) = Q_{\alpha} \frac{P_0(z)}{e} + (T_{\alpha}^+ + T_{\alpha}^-) P_1(z) + \left[Q_{\alpha} - \frac{e}{2} (T_{\alpha}^+ - T_{\alpha}^-)\right] \frac{P_2(z)}{e} \\ \sigma_{33}^{3D}(x, y, z, t) = \left[\frac{1}{2}(T_3^+ - T_3^-) + \frac{e}{12}(\pi^+ - \pi^-)\right] P_0(z) + \left[\frac{e}{10}(\pi^+ + \pi^-) + \frac{6}{5}(T_3^+ + T_3^-)\right] P_1^i(z) \\ \quad + \left[\frac{e}{12}(\pi^+ - \pi^-)\right] P_2^i(z) + \left[\frac{e}{2}(\pi^+ + \pi^-) + (T_3^+ + T_3^-)\right] P_3^i(z) \end{array} \right. \quad (2.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{\alpha}(x, y, z, t) = \dot{r}_{\alpha}^0 \frac{P_0(z)}{e} + \dot{r}_{\alpha}^1 \frac{12P_1(z)}{e^2} \\ \dot{p}_3(x, y, z, t) = \dot{r}_3^0 \left[\frac{P_0(z)}{e} + \frac{P_2(z)}{e}\right] + \dot{r}_3^+ \left[P_1(z) - \frac{P_2(z)}{2}\right] - \dot{r}_3^- \left[P_1(z) + \frac{P_2(z)}{2}\right] \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Une modélisation purement statique permettrait de remplacer les efforts généralisés π^+ et π^- par $T_{\alpha,\alpha}^+$ et $T_{\alpha,\alpha}^-$ immédiatement. Cependant, nous avons vu dans l'exemple du « multicouche dynamique » précédent, que les contributions de ces termes de bords n'étaient pas rigoureusement nulles. Par conséquent, nous allons conserver ces efforts généralisés comme inconnues ainsi que les deux déplacements généralisés associés.

Équations d'équilibre

Un champ de contraintes-impulsions est dynamiquement admissible s'il vérifie la définition 2.1.1 [p. 45]. En réinjectant les champs précédemment construits dans (2.4), nous trouvons qu'un champ est « SCLS1 dynamiquement admissible à une couche » s'il vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + T_{\alpha}^{+} + T_{\alpha}^{-} = \dot{r}_{\alpha}^0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + \frac{e}{2}(T_{\alpha}^{+} - T_{\alpha}^{-}) = \dot{r}_{\alpha}^1 \\ Q_{\alpha,\alpha} + T_3^{+} + T_3^{-} = \dot{r}_3^0 \\ T_{\alpha,\alpha}^{+} - \pi^{+} = \dot{r}_3^{+} \\ -T_{\alpha,\alpha}^{-} - \pi^{-} = \dot{r}_3^{-} \end{cases}$$

Les trois premières équations se réduisent, en statique (impulsion nulle), aux équations classiques des plaques de Reissner Mindlin. Par construction du champ de contraintes, les conditions aux limites en efforts sur les faces supérieure et inférieure de la plaque sont automatiquement satisfaites.

Cinématique généralisée

En remplaçant dans la forme faible tridimensionnelle (2.4) l'approximation du champ de contrainte précédemment construite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (N_{\alpha\beta,\beta} + T_{\alpha}^{+} - T_{\alpha}^{-} - \dot{r}_{\alpha}^0) U_{\alpha} + (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + \frac{e}{2}(T_{\alpha}^{+} + T_{\alpha}^{-}) - \dot{r}_{\alpha}^1) \Phi_{\alpha} \, d\omega \\ + \int_{\omega} (T_{\alpha,\alpha}^{+} - \pi^{+} - \dot{r}_3^{+}) W_{-} + (T_{\alpha,\alpha}^{-} - \pi^{-} - \dot{r}_3^{-}) W_{+} + (Q_{\alpha,\alpha} + T_3^{+} - T_3^{-} - \dot{r}_3^0) U_3 \, d\omega = 0 \end{aligned}$$

Avec les déplacements généralisés maintenant bien connus :

$$\begin{aligned} U_{\alpha}(x, y, t) &= \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} u_{\alpha}(x, y, z, t) \, dz & \Phi_{\alpha}(x, y, t) &= \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{12z}{e^2} u_{\alpha}(x, y, z, t) \, dz \\ U_3(x, y, t) &= \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(\frac{1}{e} + \frac{P_2(z)}{e} \right) u_3(x, y, z, t) \, dz & W_{\pm}(x, y, t) &= \mp \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(P_1(z) \pm \frac{P_2(z)}{2} \right) u_3(x, y, z, t) \, dz \end{aligned}$$

Exploitation du principe variationnelle dynamique

Exploitions maintenant le principe variationnelle (2.6). La solution de notre problème rend stationnaire (2.6) sous la contrainte que notre champ soit « SCLS1 dynamiquement admissible monocouche ». Le problème se reformule donc sous la forme suivante :

Trouver les champs d'efforts et d'impulsions généralisés rendant stationnaire la quantité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[w_{SCLS1}^{*} - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{2\rho} \underline{p} \cdot \underline{p} \, dz \right] \, d\omega \, dt \quad \underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}, \pi^{+}, \pi^{-}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna, SCLS1}^{ad} \quad (2.40) \\ \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{p} \cdot \underline{p} \, dz &= \frac{1}{e} \left((r_1^0)^2 + (r_2^0)^2 + \frac{6}{5}(r_3^0)^2 \right) + \frac{12}{e^3} \left((r_1^1)^2 + (r_2^1)^2 \right) + \frac{2e}{15} \left((r_3^+)^2 + (r_3^-)^2 - \frac{r_3^- r_3^+}{2} \right) - \frac{1}{5} r_1^0 [r_3^- + r_3^+] \end{aligned}$$

Si l'on introduit le Lagrangien associé :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{SCLS1} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[w_{SCLS1}^{*}(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}, \pi^{+}, \pi^{-}) - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{2\rho} \underline{p} \cdot \underline{p} \, dz \right] \, d\omega \, dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[(N_{\alpha\beta,\beta} + T_{\alpha}^{+} + T_{\alpha}^{-} - \dot{r}_{\alpha}^0) U_{\alpha} + (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + \frac{e}{2}(T_{\alpha}^{+} - T_{\alpha}^{-}) - \dot{r}_{\alpha}^1) \Phi_{\alpha} \right] \, d\omega \, dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left[(T_{\alpha,\alpha}^{+} - \pi^{+} - \dot{r}_3^{+}) W_{-} + (-T_{\alpha,\alpha}^{-} - \pi^{-} - \dot{r}_3^{-}) W_{+} + (Q_{\alpha,\alpha} + T_3^{+} + T_3^{-} - \dot{r}_3^0) U_3 \right] \, d\omega \, dt \end{aligned} \quad (2.41)$$

La stationnarité, au regard d'une variation de chacun de nos efforts généralisés, nous redonne les lois de comportement en souplesse :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial N_{\alpha\beta}} = \frac{1}{e} S_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta 33} \left(\frac{1}{2} (T_3^+ + T_3^-) + \frac{e}{12} (\pi^+ - \pi^-) \right) \\
 \chi_{\alpha\beta} &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial M_{\alpha\beta}} = \frac{12}{e^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\alpha\beta} + \frac{1}{e} S_{\alpha\beta 33} \left(\frac{6}{5} (T_3^+ - T_3^-) + \frac{e}{10} (\pi^+ + \pi^-) \right) \\
 \gamma_\alpha &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial Q_\alpha} = \frac{24}{5e} S_{\alpha 3\gamma 3} Q_\gamma - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3} (T_\gamma^+ + T_\gamma^-) \\
 W_+ &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^-} = S_{3333} \left(\frac{e^3}{105} \pi^- - \frac{e^3}{140} \pi^+ - \frac{11e^2}{210} T_3^- - \frac{13e^2}{420} T_3^+ \right) - S_{\alpha\beta 33} \left(\frac{e}{12} N_{\alpha\beta} - \frac{1}{10} M_{\alpha\beta} \right) \\
 W_- &= \frac{\partial w_{SCLS1}^*}{\partial \pi^+} = S_{3333} \left(\frac{e^3}{105} \pi^+ - \frac{e^3}{140} \pi^- + \frac{13e^2}{420} T_3^- + \frac{11e^2}{210} T_3^+ \right) + S_{\alpha\beta 33} \left(\frac{e}{12} N_{\alpha\beta} + \frac{1}{10} M_{\alpha\beta} \right)
 \end{aligned}$$

La stationnarité, au regard d'une variation d'impulsion, nous donne la relation vitesses généralisées-impulsions :

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_\alpha &= \frac{1}{\rho e} r_\alpha^0 & \dot{\Phi}_\alpha &= \frac{12}{\rho e^3} r_\alpha^1 & \dot{U}_3 &= \frac{6}{5\rho e} r_3^0 - \frac{1}{10\rho} (r_3^+ + r_3^-) \\
 -\dot{W}_+ &= \frac{2e}{15\rho} r_3^- - \frac{1}{10\rho} r_3^0 - \frac{e^1}{30\rho} r_3^+ & \dot{W}_- &= \frac{2e}{15\rho} r_3^+ - \frac{1}{10\rho} r_3^0 - \frac{e}{30\rho} r_3^-
 \end{aligned}$$

Qui peut elle-même se traduire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_\alpha \\ \dot{\Phi}_\alpha \\ \dot{U}_3 \\ \dot{W}_- \\ \dot{W}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{\rho e^3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{6}{5\rho e} & -\frac{1}{10\rho} & -\frac{1}{10\rho} \\ & \text{Sym} & & \frac{2e}{15\rho} & -\frac{e}{30\rho} \\ & & & & \frac{2e}{15\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\alpha^0 \\ r_\alpha^1 \\ r_3^0 \\ r_3^+ \\ r_3^- \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Nous voyons donc que, même pour une seule couche, la dynamique d'une plaque formulée en contrainte fait intervenir les impulsions des peaux. Ce résultat est radicalement différent des approches cinématiques pour les plaques Reissner-Mindlin dans lesquelles la matrice impulsion vitesse a une structure diagonale avec un coefficient pondérant le déplacement vertical égal à 1 (voir [Belouнар et al., 2019, Nguyen-Thoi et al., 2014]).

Adimensionnalisation de la partie couplée de l'inverse de la matrice de masse

Pour pouvoir procéder à la condensation, il faudrait que les termes couplés aient la même dimension. Le cas pour une couche étant particulièrement simple, nous allons brièvement montrer les manipulations à effectuer pour obtenir une matrice cohérente.

Si nous introduisons l'effort généralisé $\hat{\pi}^+ = e\pi^+$, $\hat{\pi}^- = e\pi^-$, $\hat{W}_+ = \frac{1}{e}W_+$, $\hat{W}_- = \frac{1}{e}W_-$, $\hat{r}_3^+ = er_3^+$, $\hat{r}_3^- = er_3^-$ alors la relation impulsions-vitesses sous forme matricielle devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_\alpha \\ \dot{\Phi}_\alpha \\ \dot{U}_3 \\ \dot{\hat{W}}_- \\ \dot{\hat{W}}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{\rho e^3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{6}{5\rho e} & -\frac{1}{10\rho e} & -\frac{1}{10\rho e} \\ & \text{Sym} & & \frac{2}{15\rho e} & -\frac{1}{30\rho e} \\ & & & & \frac{2}{15\rho e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\alpha^0 \\ r_\alpha^1 \\ r_3^0 \\ \hat{r}_3^+ \\ \hat{r}_3^- \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Dont on peut déduire une matrice vitesses-impulsions découplée telle que :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_\alpha \\ \dot{\Phi}_\alpha \\ \dot{U}_3 \\ \dot{\hat{W}}_- \\ \dot{\hat{W}}_+ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{\rho e^3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{\rho e} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & \frac{1}{10\rho e} & 0 \\ & & & & \frac{1}{10\rho e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\alpha^0 \\ r_\alpha^1 \\ r_3^0 \\ \hat{r}_3^+ \\ \hat{r}_3^- \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

2.5.2 Modèle LS1-mono-couche

Les équations du problème sont obtenues en particulierisant celles du LS1 pour $n = 1$. Si nous postulons la même répartition de contrainte (2.38) que dans le modèle SCLS1 et la répartition suivante pour le champ d'impulsion :

$$\dot{p}_\alpha(x, y, z, t) = \dot{r}_\alpha^0 \frac{P_0(z)}{e} + \dot{r}_\alpha^1 \frac{12P_1(z)}{e^2} \quad \dot{p}_3(x, y, z, t) = \dot{r}_3^0 \frac{P_0(z)}{e} \quad (2.45)$$

Équations d'équilibre

Un champ de contraintes-impulsions est dynamiquement admissible s'il vérifie la définition 2.1.1 [p. 45]. En réinjectant les champs précédemment construits dans (2.4), nous trouvons qu'un champ est « LS1 dynamiquement admissible à une couche » s'il vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + T_\alpha^+ + T_\alpha^- = \dot{r}_\alpha^0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{e}{2}(T_\alpha^+ - T_\alpha^-) = \dot{r}_\alpha^1 \\ Q_{\alpha,\alpha} + T_3^+ + T_3^- = \dot{r}_3^0 \end{cases}$$

Les trois premières équations se réduisent en statique (impulsion nulle) aux équations classiques des plaques de Reissner Mindlin. De même, par construction du champ de contraintes, les conditions aux limites en efforts sur les faces supérieure et inférieure de la plaque sont automatiquement satisfaites.

Cinématique généralisée

En remplaçant, dans la forme faible tridimensionnelle (2.4), l'approximation du champ de contrainte précédemment construite, nous obtenons :

$$\int_\omega (N_{\alpha\beta,\beta} + T_\alpha^+ + T_\alpha^- - \dot{r}_\alpha^0) U_\alpha + \left(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{e}{2}(T_\alpha^+ - T_\alpha^-) - \dot{r}_\alpha^1 \right) \Phi_\alpha + (Q_{\alpha,\alpha} + T_3^+ + T_3^- - \dot{r}_3^0) U_3 \, d\omega = 0$$

Avec les déplacements classiques de Reissner-Mindlin

$$U_\alpha = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} u_\alpha(x, y, z, t) \, dz \quad \Phi_\alpha = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{12z}{e^2} u_\alpha(x, y, z, t) \, dz \quad U_3 = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} u_3(x, y, z, t) \, dz$$

Exploitation du principe variationnelle dynamique

Toujours en exploitant le principe variationnel (2.6), nous devons trouver les champs d'efforts et d'impulsions généralisés rendant stationnaire la quantité :

$$\mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega \left[w_{LS1}^* - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{2\rho} \underline{p} \cdot \underline{p} \, dz \right] \, d\omega \, dt \quad \underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}, \underline{p} \in \mathcal{S}_{dyna, LS1}^{ad} \quad (2.46)$$

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{p} \cdot \underline{p} \, dz = \frac{1}{e} ((r_1^0)^2 + (r_2^0)^2) + \frac{12}{e^3} ((r_1^1)^2 + (r_2^1)^2) + \frac{1}{e} (r_3^0)^2$$

Si l'on introduit le Lagrangien associé :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{LS1} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega \left[w_{LS1}^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}) - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{1}{2\rho} \underline{p} \cdot \underline{p} \, dz \right] \, d\omega \, dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega \left[(N_{\alpha\beta,\beta} + T_\alpha^+ + T_\alpha^- - \dot{r}_\alpha^0) U_\alpha + \left(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{e}{2}(T_\alpha^+ - T_\alpha^-) - \dot{r}_\alpha^1 \right) \Phi_\alpha \right] \, d\omega \, dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_\omega \left[(Q_{\alpha,\alpha} + T_3^+ + T_3^- - \dot{r}_3^0) U_3 \right] \, d\omega \, dt \end{aligned}$$

La stationnarité vis à vis d'une variation de chacun de nos efforts généralisés nous redonne les lois de comportement en souplesse :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial N_{\alpha\beta}} = \frac{1}{e} S_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial M_{\alpha\beta}} = \frac{12}{e^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\alpha\beta} \\ \gamma_\alpha &= \frac{\partial w_{LS1}^*}{\partial Q_\alpha} = \frac{24}{5e} S_{\alpha 3\gamma 3} Q_\gamma - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3} (T_\gamma^+ + T_\gamma^-)\end{aligned}$$

La stationnarité vis à vis d'une variation d'impulsion nous donne la relation vitesses généralisées-impulsion :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_\alpha \\ \dot{\Phi}_\alpha \\ \dot{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho e} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{\rho e^3} & 0 \\ & & \frac{1}{\rho e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\alpha^0 \\ r_\alpha^1 \\ r_\alpha^0 \end{pmatrix}$$

2.6 Cas test des modèle SCLS1 et LS1 en régime dynamique

2.6.1 Analyse modale de plaques encastrees

Afin de tester la dynamique de nos modèles, nous allons réaliser dans un premier temps des analyses modales sur des structures composites stratifiées. Nous rappelons à ce titre, que la détermination des modes propres d'une structure par la méthode des éléments finis, se ramène au problème aux valeurs propres généralisées suivant [Bonnet and Frangi, 2007] :

$$[\mathbb{K}] \cdot \{U\} = \omega^2 [\mathbb{M}] \cdot \{U\}$$

Où $[\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{M}]$ désignent les matrices de rigidités et de masses obtenues après assemblage. Une étude préliminaire a permis de montrer que la discrétisation dans l'épaisseur de chacun des plis n'était pas avantageuse pour le calcul des modes propres. Nous maillerons chaque pli *physique* par un pli *mathématique*.

Afin de simplifier la comparaison entre plusieurs modèles, issus de constructions différentes (3D, layerwise, plaque homogène équivalent), nous considérons uniquement des conditions aux limites d'encastrement.

Le maillage pour tous nos essais est constitué de 20×20 éléments quadrilatéraux à interpolation quadratique. La grandeur d'intérêt est l'écart relatif $(X_{ref} - X_{FEM})/X_{ref} \times 100$ par rapport à la solution de référence, obtenue par un modèle tridimensionnel complet réalisé avec le logiciel Abaqus. Nous tacherons d'adopter un maillage suffisamment fin dans le cas 3D pour assurer la convergence (quelques dizaines de milliers d'éléments quadratiques). Pour l'élanement de 1000, incompatible avec une modélisation tridimensionnelle, nous ne prendrons pas de référence et nous nous limiterons à mentionner les résultats obtenus.

Analyse modale d'une plaque isotrope circulaire encastree

L'enjeu de cette section est de valider la dynamique d'un mono-couche développée dans la section 2.5 [p. 57]. La plaque circulaire de rayon a est constituée d'un matériau isotrope dont les propriétés mécaniques sont celles d'un acier standard $E = 210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$. La plaque est encastree sur toute sa frontière. La solution de référence obtenue par la « differential quadrature method » [Liew et al., 1997] est donnée pour des élanements de $h/a \in \{0.001, 0.05, 0.1, 0.25\}$. Pour les élanements, $h/a \in \{0.001, 0.25\}$ les résultats de Liew et al. [1997] coïncident exactement avec la solution fournie dans [Irie et al., 1980] Cette excellente concordance valide les expressions de nos inerties généralisées et l'implémentation numérique de notre modèle.

2.6 Cas test des modèle SCLS1 et LS1 en régime dynamique

Source	h/a			
	0.001	0.05	0.100	0.250
Liew et al. [1997]	10.216	10.145	9.9408	8.8068
SCLS1	10.256 (-0.39%)	10.156 (-0.11%)	9.9570 (-0.16%)	8.8453(-0.44%)

TABLE 2.1 – Fréquence adimensionnée du disque isotrope

Plaque carrée asymétrique (0, 90)

Nous allons étudier les 8 premières fréquences propres adimensionnées $\omega^* = \omega a^2 \sqrt{\rho/(E_T h^2)}$ d'une plaque carrée asymétrique (0, 90) encadrée en faisant varier son élancement. Nos résultats seront comparés à ceux trouvés dans [Shi et al., 2004] fondés sur une approche de Galerkin conventionnelle et la théorie des plaques de Reissner-Mindlin. Les résultats exhaustifs sont donnés dans le tableau A.1 [p. 156] tandis que l'écart à la solution 3D de référence est illustré figure 2.2 [p. 62]. La différence entre les modèles « SCLS1 » et « SCLS1 lumped » réside dans l'utilisation de la matrice d'impulsion $[\mathbb{D}]$, consistante (2.33) pour le premier, ou condensée (2.34) pour le second.

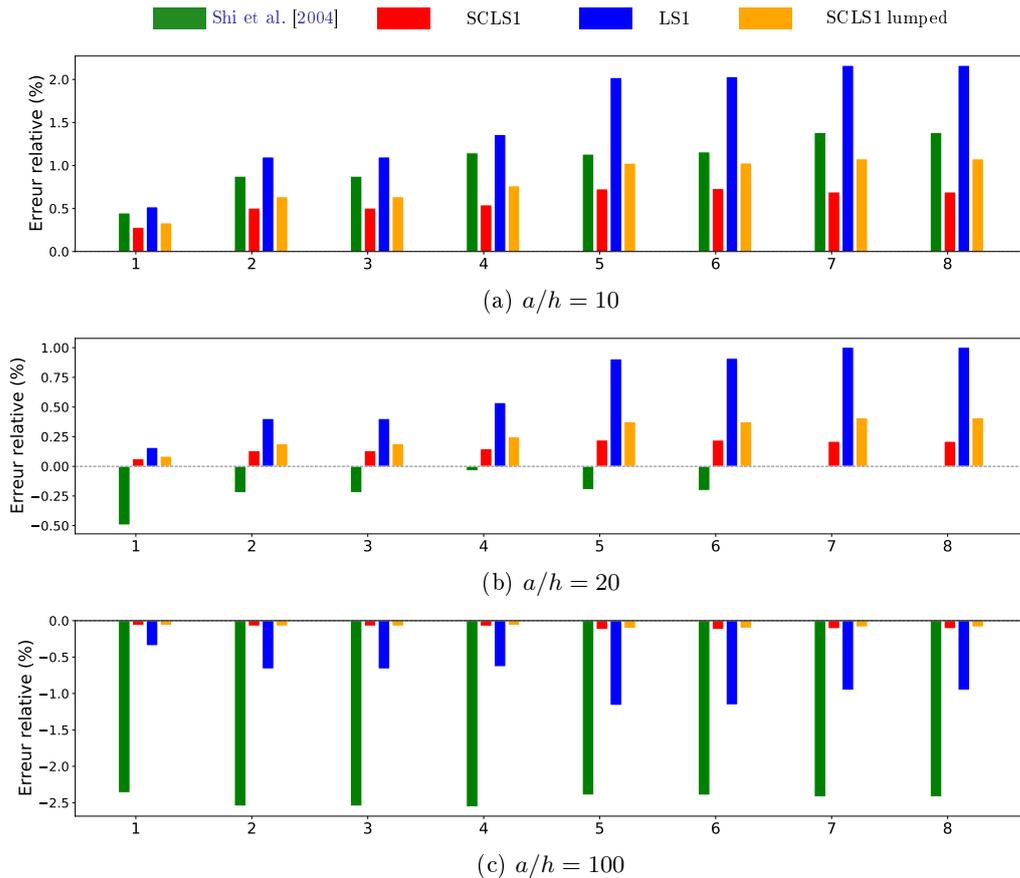


FIGURE 2.2 – Erreur relative par rapport au modèle tridimensionnel du paramètre de fréquence $\omega^* = \omega a^2 \sqrt{\rho/(E_T h^2)}$ pour une plaque antisymétrique (0, 90) encadrée. Les propriétés matérielles utilisées pour le calcul sont $E_L/E_T = 25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_T$, $G_{23} = 0.2E_T$, $\nu_{12} = 0.25$.

Plaque rectangulaire symétrique (0, 90, 0)

Similairement, nous nous intéressons aux 8 premières fréquences propres adimensionnées $\bar{\omega} = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{(\rho h / D_0)}$ d'une plaque rectangulaire (0, 90, 0) encastrée pour des élancements variés. Nos résultats sont cette fois ci comparés à ceux trouvés dans [Liew, 1996] utilisant une méthode p -Ritz avec un modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Pour l'élancement de 1000, incompatible avec une modélisation tridimensionnelle, nous ne prendrons pas de référence et nous limiterons à mentionner les résultats obtenus. Les résultats exhaustifs sont décrit dans tableau A.2 [p. 156] tandis que l'écart à la solution 3D de référence est imagé figure 2.3 [p. 63].

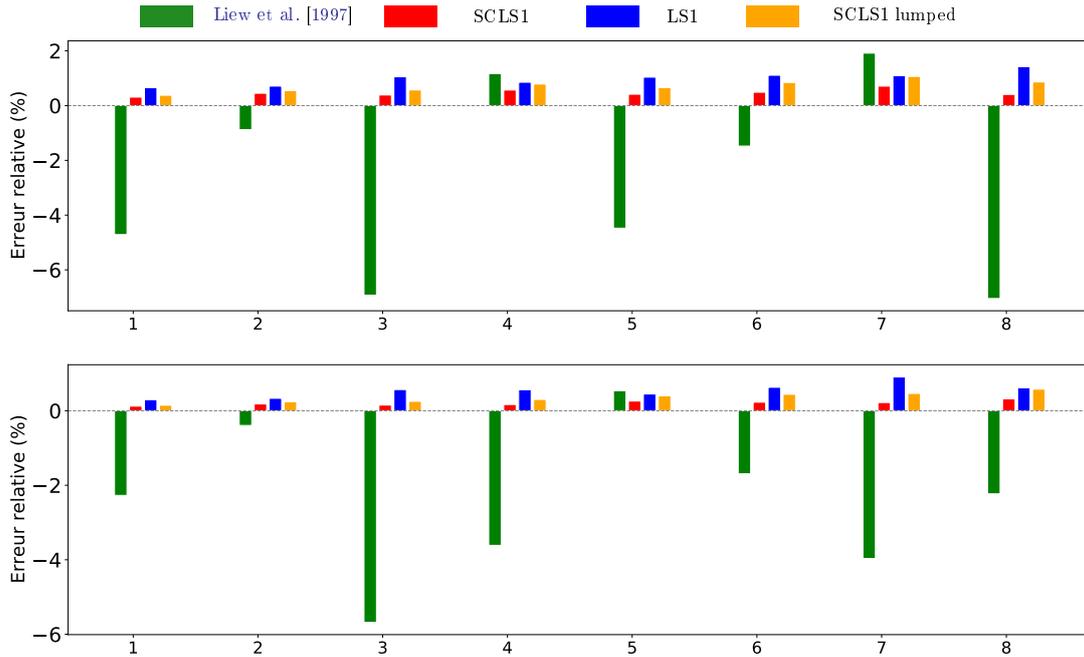


FIGURE 2.3 – Erreur relative par rapport au modèle tridimensionnel du paramètre de fréquence $\bar{\omega} = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{(\rho h / D_0)}$ ($D_0 = \frac{E_T h^3}{12(1-\nu_{21}\nu_{12})}$) pour un 3-couches (0, 90, 0) encastré. $a/h = 5$ en haut et $a/h = 10$ en bas

Plaque asymétrique ($\theta, -\theta$)

De même, nous relevons la première fréquence propre adimensionnée $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}$ d'une plaque carrée ($\theta, -\theta$) encastrée en prenant $\theta \in \{0, 15, 30, 45\}$. Celle-ci est comparée avec celle mentionnée dans [Shi et al., 2004, Soldatos and Messina, 2001] et celle obtenue par un modèle 3D. Les paramètres sont les suivants $a/h = 20$, $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$. Il y a une erreur dans la légende de Shi et al. [2004], la vraie fréquence adimensionnée est donnée par $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}$. De manière générale nos modèles semblent sous-estimer très légèrement les pulsations propres des différents stratifiés. Cela est dû à notre approche en contraintes, concomitante à un assouplissement de la structure, par rapport à une approche purement en déplacement. La figure 2.4 [p. 64] montre à nouveau l'efficacité du modèle SCLS1 par rapport à ces références pour toutes les situations, sauf pour le cas à 10 couches avec $\theta = \pm 45^\circ$ où il est un peu moins précis.

Dans l'ensemble, ces trois comparaisons différentes donnent des résultats extrêmement convaincants, puisque les erreurs sont inférieures à 2% sur l'ensemble des études. Cela confirme la validité de notre approche pour déterminer l'inertie pertinente à attribuer à chacune des vitesses généralisées.

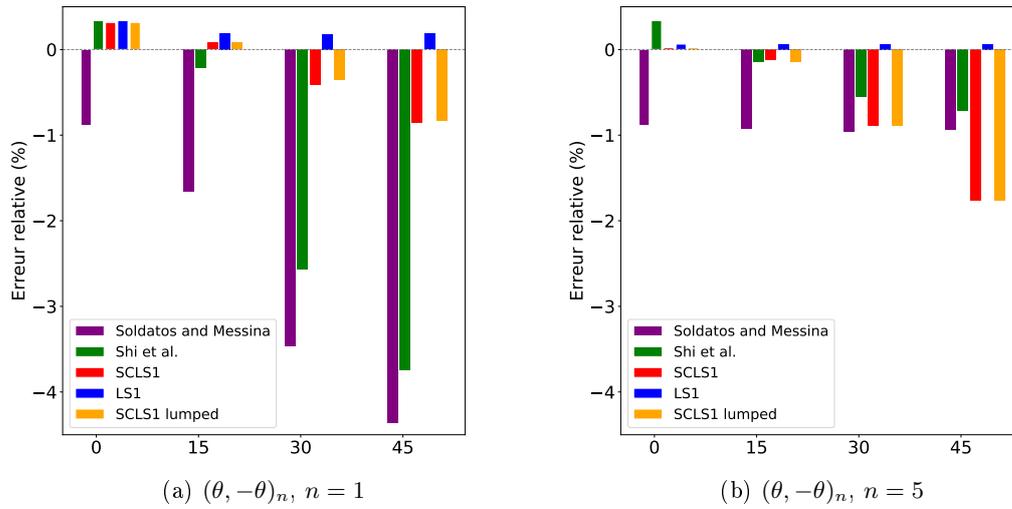


FIGURE 2.4 – Erreur relative par rapport au modèle tridimensionnel du paramètre de fréquence $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$ pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique; $a/h = 20$, $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$

Plaque biaisée

Nous allons conclure avec un essai d'analyse modale beaucoup plus exigeant. La plaque considérée est asymétrique, constituée de 4 couches orientées à $(45/-45/45/-45)$ et est déformée dans son plan d'un angle ψ . Cette configuration biaisée visualisée figure 2.5 [p. 64] porte le nom de « skew laminates » dans la littérature. Nos résultats seront comparés à ceux

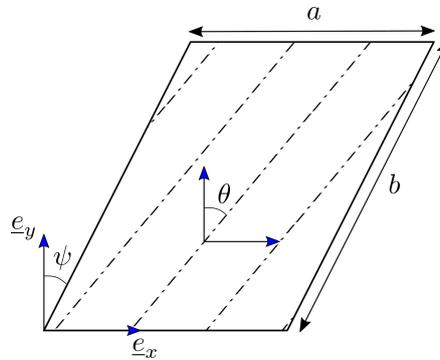


FIGURE 2.5 – Géométrie de la plaque tordue, dans notre étude numérique $\theta = 45^\circ$

détaillés dans [Wang, 1997], celui ci utilisant la « B-spline Rayleigh-Ritz method (RRM) » et un modèle de plaque de Reissner Mindlin. Par ailleurs nous mentionnerons également les résultats issus d'un modèle de plaque Higher Order Shear Theory (HOST) trouvés dans [Garg et al., 2006]. Une nouvelle fois la comparaison est visuellement illustrée sur la figure 2.6 [p. 65], tandis que les résultats numériques sont consignés dans le tableau A.4 [p. 157]. Cet essai, beaucoup plus complexe, discrimine fortement l'approche plus grossière de Wang [1997], basée sur une théorie de déformation au premier ordre. En revanche le modèle enrichi HOST fourni des résultats de la même qualité que nos modèles layerwise avec une erreur sur toute la gamme d'étude de l'ordre de 4%.

2.6.2 Plaque sandwich, mode de pincement, mode de gonflement

L'enjeu de cette section est de mettre en évidence les capacités de modélisations tridimensionnelles des modèle SCLS1 et LS1. Nous allons, à ce titre, visualiser des modes de « pin-

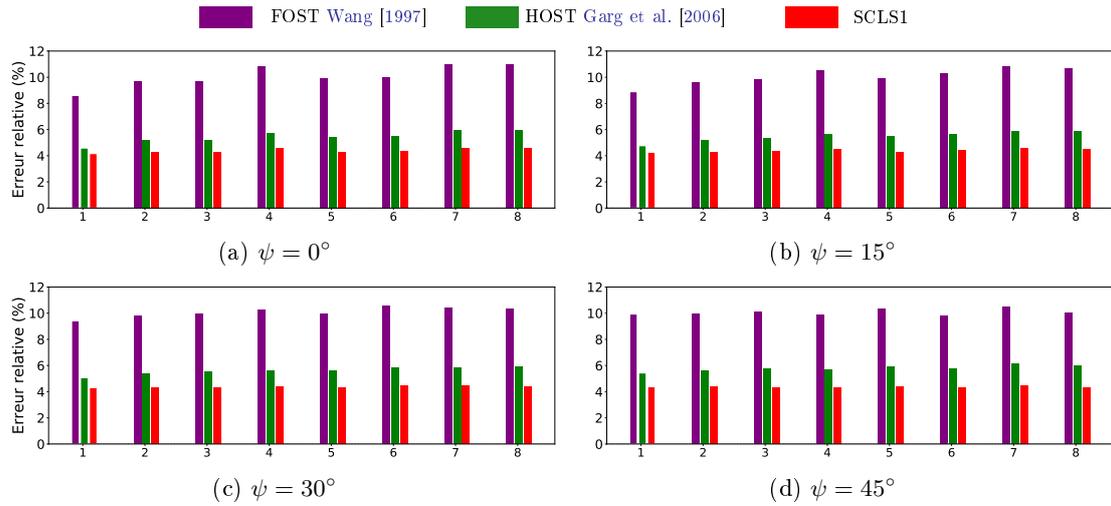


FIGURE 2.6 – Erreur relative par rapport au modèle tridimensionnel du paramètre de fréquence $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ pour une plaque carrée tordue de 4 couches orientées à $(45^\circ - 45^\circ/45^\circ - 45^\circ)$; $a/h = 10$, $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = 0.6E_2$, $G_{13} = G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$

« cement », ou de gonflement, donc purement tridimensionnels, invisibles si l'on se restreint à l'utilisation de modèles de plaque conventionnels. Par simplicité, nous considérons une plaque

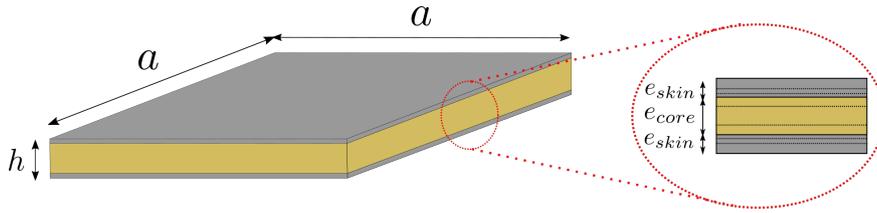


FIGURE 2.7 – Géométrie de la plaque sandwich

sandwich constituée d'une âme isotrope souple, encadrée par deux peaux isotropes beaucoup plus rigides figure 2.7 [p. 65]. Nous anticipons qu'à la limite $E_{core}/E_{skin} \rightarrow 0$ se produisent des modes de pincements de mêmes pulsations que les modes fondamentaux des deux peaux. Nous retenons les paramètres matériaux [Fam and Sharaf, 2010] et géométriques [Tuwair et al., 2015] correspondant à un panneau sandwich acier-polyuréthane classique :

Matériaux	$E_{skin} = 210\text{GPa}$	$E_{core} = 9.7\text{MPa}$	$\nu_{skin} = \nu_{core} = 0.33$
	$\rho_{skin} = 7.8 \times 10^3\text{kg/m}^3$	$\rho_{core} = 64.2\text{kg/m}^3$	
Géométrie	$a=250\text{mm}$	$e_{skin} = 2.41\text{mm}$	$e_{core} = 54.1\text{mm}$

La comparaison s'effectue une nouvelle fois avec le logiciel Abaqus, via une modélisation tridimensionnelle complète. L'erreur relative par rapport aux premières fréquences propres est résumée figure 2.8 [p. 66], tandis que les valeurs exhaustives sont détaillées tableau A.5 [p. 157]. Les mode propres 4,5,6,8 correspondent à des modes propres tridimensionnels figure 2.9 [p. 66] et sont parfaitement captés par nos modèles SCLS1 et LS1. Nous remarquons une nouvelle fois la convergence du modèle SCLS1 vers le modèle tridimensionnel. Le fait que le champ de contrainte soit très singulier dans l'épaisseur de la plaque entraine qu'une seule couche mathématique, bien que donnant des résultats satisfaisant (erreur relative de 4%), ne suffit pas à assurer la convergence, même au prix d'un raffinement dans le plan. En revanche, si nous choisissons de discrétiser dans l'épaisseur le stratifié avec plusieurs couches par plis, nous observons que le champ de contraintes est bien mieux représenté, et les modes propres sont affinés.

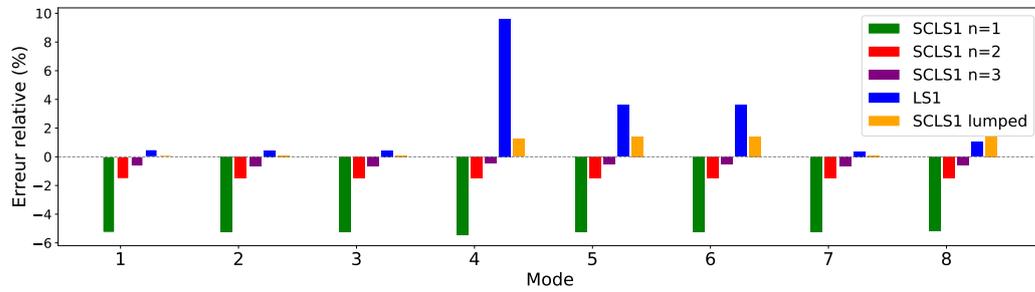


FIGURE 2.8 – Erreur relative des 8 premières fréquences propres par rapport à la solution de référence tridimensionnelle

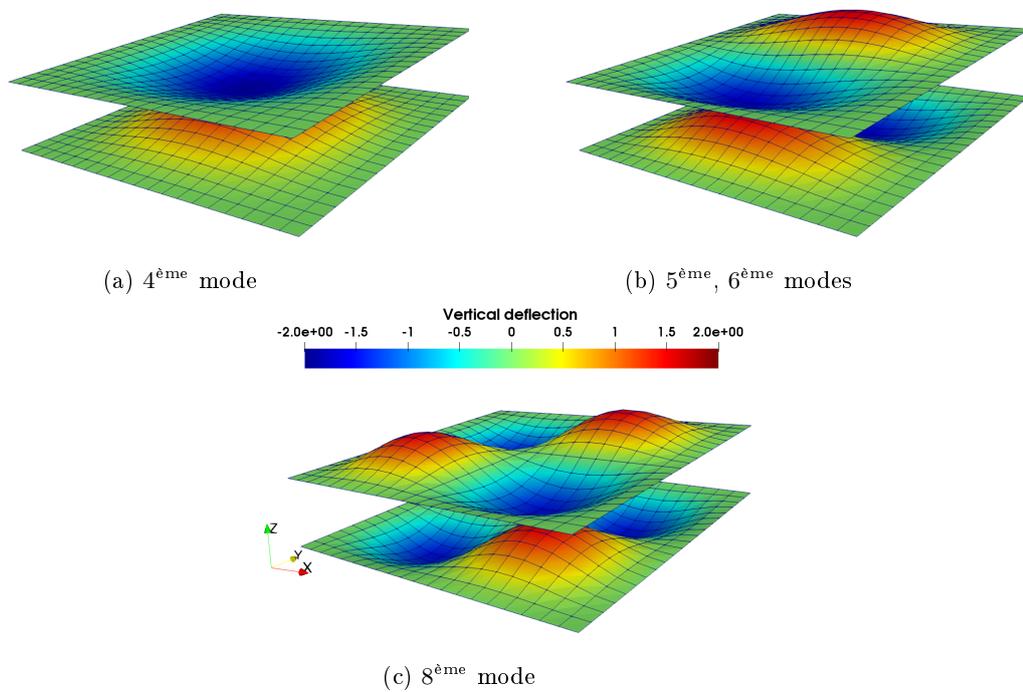


FIGURE 2.9 – Modes de gonflement plaque sandwich

En bref

- ★ Afin d'étendre les modèles SCLS1 et LS1 au régime dynamique, une formulation « en contraintes » de l'équation d'équilibre dynamique de Cauchy (2.1) est nécessaire. En prenant pour point de départ la formulation intégrale d'Hamilton (2.3), nous avons montré que le problème d'équilibre dynamique se ramenait à la recherche d'un *couple* contrainte-impulsion rendant stationnaire une certaine fonctionnelle (2.6). Ce vecteur impulsion est le multiplicateurs de Lagrange assurant que la vitesse est la dérivée temporelle du vecteur déplacement.
- ★ Nous avons alors *postulé* une répartition du champ d'impulsion (2.21)–(2.22), cohérente avec notre champ de contraintes précédemment construit, pour aboutir aux équations d'équilibre *dynamique* du modèle SCLS1 (2.23a)–(2.23e).
- ★ La stationnarité de la fonctionnelle par rapport à une variation du vecteur impulsion nous a par la suite permis d'explicitier le lien entre le vecteur impulsion et la dérivée des déplacements généralisés des modèles SCLS1 et LS1 (2.32). Cette relation linéaire s'effectue à l'aide d'une matrice $[\mathbb{D}]$ dont l'inverse $[\mathbb{M}]$ s'interprète comme une matrice de masse.
- ★ Une formulation faible en déplacements est alors utilisée pour résoudre le problème dynamique (2.37)
- ★ La validité des inerties généralisées a été attesté par une analyse modale sur des plaques anisotropes sous-section 2.6.1 [p. 61]. La capacité des modèles SCLS1 à capter des effets tridimensionnels de pincement et de gonflement a été vérifiée à la sous-section 2.6.2 [p. 64].



Franz Schubert *Fantasie in f-Moll*

Synthèse : Dynamique du modèle L-LS1

† Formulation variationnelle :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \cdot \mathbb{C}^{N^i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i + \widehat{\boldsymbol{\chi}}^i \cdot \mathbb{C}^{M^i} \cdot \boldsymbol{\chi}^i + \widehat{\boldsymbol{D}}_0^i \cdot \mathbb{C}^{\tau_0^i} \cdot \boldsymbol{D}_0^i \, d\omega \\
 & + \int_{\omega} \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{\boldsymbol{D}}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \boldsymbol{D}^{j,j+1} + c_{\nu}^{j,j+1} \widehat{\boldsymbol{D}}_{\nu}^{j,j+1} \boldsymbol{D}_{\nu}^{j,j+1} \, d\omega \\
 & = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \widehat{\boldsymbol{U}}^i \cdot \mathbb{M}^i \cdot \ddot{\boldsymbol{U}}^i + \widehat{\boldsymbol{U}}^1 \cdot \boldsymbol{F}^- + \widehat{\boldsymbol{U}}^n \cdot \boldsymbol{F}^+ \, d\omega \quad \forall \widehat{\boldsymbol{U}} \in \mathcal{C}^{ad}
 \end{aligned}$$

avec les matrices de masses généralisées :

$$\mathbb{M}^i = \begin{pmatrix} \rho^i e^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i e^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^i e^{i3}}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^i e^{i3}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^i e^i \end{pmatrix}$$

Modélisation du délaminage

Introduction

Le délaminage est un mode de ruine catastrophique traduisant la propagation d'une fissure à l'interface entre deux plis. Ce phénomène s'initie dans les zones de fortes contraintes inter-faciales comme : les bords libres, les trous, ou la verticale d'une fissuration intra-laminaire. La prévision de l'initiation et de la propagation du délaminage constitue un enjeu majeur pour le bon dimensionnement de structures composites stratifiées, car la tenue résiduelle en cisaillement et en compression est fortement affaiblie par ce mode de ruine.

Dans le cadre tridimensionnel, le délaminage est en général modélisé par l'intermédiaire d'éléments de zone cohésive, à l'interface entre 2 plis. Les modèles L-LS1, LS1 et SCLS1, mettant naturellement en jeu les contraintes inter-laminaires, nous proposerons dans ce chapitre une modélisation alternative, reposant sur la mécanique de l'endommagement. En particulier, nous n'introduirons pas de rigidité supplémentaire liée à l'insertion d'un élément cohésif. Nous dégraderons plutôt, de manière appropriée, la rigidité généralisée du multi-couche, au travers de variables d'endommagement. Deux facteurs seront déterminants dans l'élaboration de notre modèle, qui s'inscrit dans le cadre des matériaux standard généralisés :

- le pseudo potentiel de dissipation, témoin de l'énergie dissipée par le processus de rupture,
- et la densité d'énergie élastique endommagée, qui pilote l'évolution de la rigidité tout au long du processus de fissuration.

Les efforts inter-laminaires sont consubstantiels de nos modèles layerwise, maintenant bien familiers. Par conséquent, postuler une expression de la rigidité endommagée, fonction de la dégradation d'interface, sera assez naturel.

Pour cela, le cheminement de notre argumentaire comptera cinq sections.

- ★ La section 3.1 [p. 70] posera le cadre d'étude du délaminage dans les composites stratifiés. L'approche par endommagement continu et le comportement standard généralisé qui y seront détaillés présupposeront la donnée de deux grandeurs : le pseudo-potentiel de dissipation et l'énergie libre de Helmholtz .
- ★ À la section 3.2 [p. 71], nous postulerons l'expression d'un pseudo-potentiel qui satisfasse aux exigences minimales de convexité, positivité, et homogénéité attendues.
- ★ Dans la section 3.3 [p. 73], nous nous intéresserons au second ingrédient nécessaire à la prédiction de l'endommagement : la densité d'énergie élastique endommagée. Et c'est dans le cadre du modèle condensé L-LS1 que nous proposerons une forme de cette densité d'énergie.
- ★ Les équations d'états du cadre standard généralisé et l'équilibre déterminent le problème non linéaire à résoudre afin de prédire l'état d'endommagement de la structure. Une formulation variationnelle incrémentale équivalente, et sa résolution, est donnée section 3.4 [p. 76].

★ « *Aujourd'hui les scientifiques ont substitué les mathématiques aux expériences. Alors ils errent d'équation en équation, créant éventuellement une structure qui n'a aucun lien avec la réalité.* » *Nikola Tesla*. Notre théorie concernant le délaminage, aussi séduisante semble-t-elle, ne saurait être achevée sans confrontation avec des essais. Nous détaillerons à la section 3.5 [p. 83] une batterie de tests permettant de valider notre démarche.

3.1 Cadre d'étude du délaminage

Afin de simuler la délaminage, est communément utilisée la mécanique de l'endommagement continu dans laquelle un champ vectoriel \mathbf{d}^{intf} représente la dégradation des interfaces. Le champ \mathbf{d}^{intf} doit traduire l'assouplissement induit par la présence d'une fissure et une équation pilotant ses variations doit être proposée. Le comportement matériau qui en découle doit rester cohérent avec les principes de la thermodynamique, pierre angulaire de la mécanique. Dans la section à suivre, nous détaillerons le cadre standard généralisé (GSM) [Halphen and Nguyen, 1975, Nguyen, 2000b] qui permet de créer, à souhait, des lois d'états thermodynamiquement admissibles.

3.1.1 Cadre standard généralisé

L'état thermodynamique du milieu considéré est caractérisé en tout point par deux types de variables d'état : les variables d'état externes, ici la température T et la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et les variables internes, notées α . Conformément à l'approche thermodynamique présentée par Maitournam [2013], nous écrivons la dissipation intrinsèque \mathcal{D}_{int} comme le produit de forces thermodynamiques dissipatives par les taux des variables internes qui leurs sont associées :

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \mathcal{F}^d \cdot \dot{\chi} \text{ avec } \dot{\chi} = (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\alpha}) \quad (3.1)$$

Les forces thermodynamiques dissipatives $\mathcal{F}^d = (\underline{\underline{\sigma}}^d, \mathbf{Y}^d)$ correspondent aux forces motrices des taux de variables internes. Une façon de construire une loi complémentaire thermodynamiquement admissible consiste à s'assurer que la dissipation intrinsèque dans (3.1) est toujours positive. Ceci est acquis lorsque les forces thermodynamiques \mathcal{F}^d dérivent d'un potentiel de dissipation convexe par rapport aux taux $\dot{\chi}$. Ce résultat crucial, dont Maitournam [2013] donne la démonstration, est rappelé dans le théorème suivant

Théorème 3.1.1 Lois normales et potentiel de dissipation. *Soit $\Phi(\dot{\chi})$ une fonction convexe différentiable, non négative, nulle en $\dot{\chi} = 0$, appelée (pseudo-)potentiel de dissipation. Si l'on pose la force thermodynamique \mathcal{F}^d suivante, dépendant aussi éventuellement des variables d'état :*

$$\mathcal{F}^d = \frac{\partial \Phi(\dot{\chi})}{\partial \dot{\chi}} \quad (3.2)$$

alors la dissipation intrinsèque est positive.

Une généralisation des relations (3.2) consiste à utiliser le sous-différentiel $\partial \Phi(\dot{\chi})$, en place du gradient de Φ par rapport aux flux, et à poser :

$$\mathcal{F}^d \in \partial \Phi(\dot{\chi}) \quad (3.3)$$

La définition des matériaux standards généralisés ([Nguyen, 2000a]), dans le cadre isotherme, consiste en la donnée de deux potentiels :

- une énergie libre Ψ dépendant des variables d'état actuelles $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)$ qui permet de définir les lois d'état :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{nd} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \mathbf{Y}^{nd} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (3.4)$$

- un potentiel de dissipation Φ , minimum en $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \mathbf{0}, \dot{\alpha} = \mathbf{0})$, fonction convexe des flux $(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\alpha})$, et dépendant éventuellement des variables d'état ; qui permet de définir les lois complémentaires reliant les flux aux forces thermodynamiques par la relation :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^d, \mathbf{Y}^d) \in \partial_{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\alpha}} \Phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\alpha}; \alpha, \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (3.5)$$

La définition du comportement de notre matériau est par conséquent pilotée par deux choix : celui des expressions de l'énergie libre de Helmholtz et d'un pseudo-potentiel de dissipation.

Postulat 3.1.1 Cadre d'étude. *Notre étude se limite au cadre isotherme et simplifie la modélisation en supposant que la vitesse de déformation $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ n'est pas une variable dissipative. Les champs dissipatifs et non-dissipatifs vérifient donc ici :*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{nd}, \underline{\underline{\sigma}}^d = \underline{\underline{0}} \text{ et } \mathbf{Y}^{nd} + \mathbf{Y}^d = \mathbf{0}$$

Les lois d'états et complémentaires se simplifient par conséquent comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \mathbf{Y} = -\frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \text{ et } \mathbf{Y} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \Phi(\dot{\boldsymbol{\alpha}}; \boldsymbol{\alpha}, \underline{\underline{\varepsilon}})$$

où $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^d = -\mathbf{Y}^{nd}$ désigne la force thermodynamique associée au taux $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$

3.1.2 Délaminage des composites stratifiés

Postulat 3.1.2 Dégradation des interfaces. *Nous supposons que la dégradation de chacune des interfaces, entre deux plis physiques, est matérialisée par deux variables d'endommagement d_ν et d_τ , quantifiant respectivement la dégradation en arrachement et en cisaillement de l'interface. Le délaminage de la structure peut se représenter à l'aide d'un vecteur endommagement \mathbf{d}^{intf} concaténant les variables associées à chacune des interfaces.*

$$\mathbf{d}^{\text{intf}} = (d_\nu^{1,2}, d_\tau^{1,2}, \dots, d_\nu^{n-1,n}, d_\tau^{n-1,n})$$

L'endommagement n'est pas caractérisé par un simple scalaire. Ceci nous permettra d'envisager des mécanismes de dégradation variés, chacun étant déterminé à l'aide d'une variable différente (cette stratégie a notamment été mentionnée par Corigliano [1993]). En particulier, nous souhaitons distinguer la propagation en mode I (ouverture, associée à d_ν), de celle en mode II (cisaillement, associée à d_τ). Par ailleurs, pour la prédiction de l'endommagement, nous ne distinguerons pas les deux directions de cisaillement aux interfaces. Les modes II et III seront donc traités de manière identique, et se verront affecter le même taux de restitution d'énergie critique.

Ce choix d'attribuer deux variables d'endommagement à chacune des interfaces relève du constat que le délaminage d'une interface dans un composite stratifié, se produit à des niveaux énergétiques distincts, selon que l'on sollicite l'interface en arrachement ou en cisaillement. Il convient par ailleurs de noter que du délaminage au sein d'un pli a déjà été observé sur les matériaux composites de dernières générations. Nous pourrions donc, le cas échéant, autoriser le stratifié à délaminer au sein d'un pli, quitte à y affecter un taux de restitution d'énergie plus fort.

3.2 Pseudo-potentiel de dissipation

Nous considérons un pseudo-potentiel de dissipation Φ fonction du taux d'endommagement $\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}$, éventuellement paramétré par \mathbf{d}^{intf} . Chaque interface contribue de manière similaire et indépendante au potentiel de dissipation de sorte que :

$$\Phi(\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}; \mathbf{d}^{\text{intf}}) = \sum_{j=1}^{n-1} \phi(\dot{\mathbf{d}}^{j,j+1}; \mathbf{d}^{j,j+1}) + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}) \quad (3.6)$$

où $\mathbf{d}^{j,j+1} = (d_\nu^{j,j+1}, d_\tau^{j,j+1})$ est la variable interne associée à l'interface $j,j+1$, et $\phi(\dot{\mathbf{d}}^{j,j+1}; \mathbf{d}^{j,j+1})$ le pseudo-potentiel de dissipation de l'interface que nous supposons convexe, positivement homogène de degré 1 en $\dot{\mathbf{d}}^{j,j+1}$ (comportement indépendant du taux). $I_{\mathbb{R}^+}$ désigne la fonction

indicatrice, garantit la stricte croissance de l'endommagement $\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}} \geq 0$, mais induit la non-différentiabilité au sens classique (voir aussi [Frémond and Shitikova, 2002]).

Dans le cadre des matériaux standards généralisés, nous obtenons facilement les lois d'évolution de l'endommagement :

$$\mathbf{Y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}^{\text{intf}}} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{Y} \in \partial_{\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}} \Phi(\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}; \mathbf{d}^{\text{intf}}) \quad (3.8)$$

où \mathbf{Y} est la force thermodynamique conjuguée à \mathbf{d}^{intf} et $\partial_{\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}} \Phi$ désigne le sous-différentiel de Φ .

En considérant le découplage de chacune des interfaces dans (3.6), pour chacune d'elles les équations d'évolutions s'écrivent :

$$\mathbf{Y}^{j,j+1} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{d}}^{j,j+1}} \leq \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{d}}^{j,j+1}} \quad (3.9)$$

si ϕ est différentiable par rapport à $\dot{\mathbf{d}}^{j,j+1}$. Ceci définit le critère d'endommagement dans l'espace des forces thermodynamiques \mathbf{Y} .

3.2.1 Critère elliptique en mode mixte

L'expérience nous enseigne que, dans des essais de rupture mêlant mode I et II, la propagation du délaminage ne se produit pas systématiquement lorsque l'un, ou l'autre, des taux de restitution critique est atteint. Une interaction a lieu entre les deux modes de ruines, rendant l'estimation du taux de restitution en énergie critique non triviale. L'article de Benzeggagh and Kenane [1996] illustre excellemment le phénomène et nous invitons à sa lecture. Lorsque les deux modes coexistent, il est nécessaire de postuler *un critère*, dans l'espace des taux de restitution, qui doive s'accommoder des égalités $G_I = G_{Ic}$ et $G_{II} = G_{IIc}$, correspondant aux cas de propagations en mode pur. Nous allons nous intéresser, dans la suite, au critère loi puissance ([Donaldson, 1987, Hashemi et al., 1990, Wu and Reuter Jr, 1965]), qui présente l'avantage d'être déduite d'un potentiel de dissipation astucieusement choisi.

On cherche à reproduire le critère en loi-puissance de propagation en mode mixte suivant :

$$\left(\frac{G_I^{j,j+1}}{G_{Ic}^{j,j+1}} \right)^\gamma + \left(\frac{G_{II}^{j,j+1}}{G_{IIc}^{j,j+1}} \right)^\gamma \leq 1 \quad (3.10)$$

pour lequel le cas particulier $\gamma = 1$ correspond au célèbre critère linéaire ([Donaldson, 1985, Jurf and Pipes, 1982, Mall and Kochhar, 1986, Spencer and Barnby, 1976]). Supprimons, par concision, l'exposant $^{j,j+1}$ et introduisons la fonction suivante, appelée densité d'énergie de fissuration :

$$\varphi(\mathbf{d}) = \varphi(d_\nu, d_\tau) = ((G_{Ic} w_\nu(d_\nu))^\beta + (G_{IIc} w_\tau(d_\tau))^\beta)^{1/\beta} \quad \beta \geq 1 \quad (3.11)$$

Les fonctions $w_\star(d_\star)$, continues, positives, croissantes, vérifient $w_\star(0) = 0$ et $w_\star(1) = 1$ et constituent l'objet de la sous-section 3.4.3 [p. 78].

Postulat 3.2.1 Pseudo-potentiel de dissipation couplé. *Nous définissons alors le pseudo-potentiel de dissipation pour chaque interface par :*

$$\phi(\dot{\mathbf{d}}; \mathbf{d}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{d}}} \cdot \dot{\mathbf{d}} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{\mathbf{d}}) = \overline{\varphi(\dot{\mathbf{d}})} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{\mathbf{d}}) \quad (3.12)$$

Ce pseudo-potentiel de dissipation est convexe, positivement homogène de degré un par rapport à $\dot{\mathbf{d}}$.

Les choix faits jusqu'ici conduisent au critère d'endommagement suivant :

$$\mathbf{Y} \leq \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{d}}$$

Ce qui s'écrit encore, en distinguant les modes d'arrachement et de cisaillement :

$$\begin{aligned} Y_\nu &\leq (G_{\text{Ic}})^\beta w'_\nu(d_\nu) w_\nu(d_\nu)^{\beta-1} S^{1/\beta-1} \\ Y_\tau &\leq (G_{\text{IIc}})^\beta w'_\tau(d_\tau) w_\tau(d_\tau)^{\beta-1} S^{1/\beta-1} \end{aligned} \text{ avec } S = (G_{\text{Ic}} w_\nu(d_\nu))^\beta + (G_{\text{IIc}} w_\tau(d_\tau))^\beta$$

En combinant ces deux équations, nous obtenons le critère :

$$\left(\frac{Y_\nu/w'_\nu(d_\nu)}{G_{\text{Ic}}} \right)^\gamma + \left(\frac{Y_\tau/w'_\tau(d_\tau)}{G_{\text{IIc}}} \right)^\gamma \leq 1 \text{ avec } \gamma = \beta/(\beta-1) \quad (3.13)$$

Notons qu'il est toujours possible de re-paramétriser le problème, en remplaçant les variables d'endommagement $\mathbf{d} = (d_\nu, d_\tau)$ par $\tilde{\mathbf{d}} = (w_\nu(d_\nu), w_\tau(d_\tau))$. Dans ce cas, les forces thermodynamiques associées de (3.7) s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{d}}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \tilde{\mathbf{d}}}$$

Soit encore :

$$\tilde{Y}_\nu = \frac{Y_\nu}{w'_\nu(d_\nu)} \text{ et } \tilde{Y}_\tau = \frac{Y_\tau}{w'_\tau(d_\tau)}$$

Par conséquent, nous récupérons en utilisant (C.41) le critère de délaminage en loi puissance (3.10) avec les taux de restitution en énergie en mode I et II :

$$G_{\text{I}} = \tilde{Y}_\nu = \frac{Y_\nu}{w'_\nu(d_\nu)} \text{ et } G_{\text{II}} = \tilde{Y}_\tau = \frac{Y_\tau}{w'_\tau(d_\tau)}$$

Finalement, dans le cas limite $\beta \rightarrow \infty$, (3.11) devient :

$$\varphi(\mathbf{d}) = \max\{G_{\text{Ic}} w_\nu(d_\nu); G_{\text{IIc}} w_\tau(d_\tau)\}$$

et est associé au critère linéaire $\frac{G_{\text{I}}}{G_{\text{Ic}}} + \frac{G_{\text{II}}}{G_{\text{IIc}}} \leq 1$. Pareillement si $\beta = 1$, (3.11) se réduit à :

$$\varphi(\mathbf{d}) = G_{\text{Ic}} w_\nu(d_\nu) + G_{\text{IIc}} w_\tau(d_\tau) \quad (3.14)$$

et nous retrouvons un critère de délaminage sans interaction entre les modes : $G_{\text{I}} \leq G_{\text{Ic}}$ et $G_{\text{II}} \leq G_{\text{IIc}}$. La densité d'énergie de fissuration découplée (3.14) sera privilégiée pour l'étude des essais de ruine en modes purs. Des solutions analytiques, pour l'endommagement, seront par ailleurs accessibles dans ce cadre (voir sous-section 3.4.4 [p. 80]).

3.3 Énergie libre de Helmholtz et densité d'énergie élastique

Postulat 3.3.1 Forme de l'énergie libre de Helmholtz. *Nous postulons que notre matériau est défini par l'énergie libre de Helmholtz suivante :*

$$\Psi(\underline{\varepsilon}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) = \psi_{\text{el}}^\omega(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + I_{[0,1]}(\mathbf{d}^{\text{intf}}) \quad (3.15)$$

Cette énergie libre est somme de deux contributions. La première $I_{[0,1]}(\mathbf{d}^{\text{intf}})$ assure que chacune des variables endommagement est astreinte à prendre des valeurs dans $[0, 1]$. La seconde, $\psi_{\text{el}}^\omega(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{\text{intf}})$, correspond à la densité d'énergie élastique endommagée, dont l'expression est une hypothèse particulière au modèle mécanique. Il serait possible d'intuiter un tel postulat pour un modèle formulé en déplacement, cependant nous soulignerons que les modèles formulés en contraintes, et incluant les forces interlaminaires dans le vecteur de contrainte généralisée, s'accompagnent d'une approche systématique pour dériver l'expression de la densité d'énergie élastique endommagée.

3.3.1 Rigidité en présence d'interfaces délaminées

Pour déterminer comment la rigidité généralisée \mathbb{C} est dégradée par le délaminage, supposons qu'une interface, indiquée par $j, j+1$ dans la séquence d'empilement, rompt entièrement en un point donné $(x, y) \in \omega$. Les contraintes inter-laminaires doivent s'y annuler : $\nu^{j, j+1}(x, y) = \tau_\alpha^{j, j+1}(x, y) = 0$. Nous notons formellement ces conditions $\mathbb{T}^\top \cdot \boldsymbol{\Sigma} = 0$, où \mathbb{T} est une matrice rectangulaire, dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Cette écriture compacte permet de généraliser les conditions précédentes aux cas où plusieurs interfaces délamineraient simultanément.

Lorsque nous dérivons la déformation élastique \mathbf{E}^{el} de l'énergie complémentaire élastique généralisée $\Psi^*(\boldsymbol{\Sigma})$ en présence de telles contraintes internes, un multiplicateur de Lagrange associé $\boldsymbol{\mu}$ apparaît, tel que :

$$\mathbf{E}^{\text{el}} = \frac{\partial w^*}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial (\mathbb{T}^\top \cdot \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbb{T} \cdot \boldsymbol{\mu} \quad (3.16)$$

Le multiplicateur de Lagrange, associé à la condition limite de bord libre, peut être condensé *a posteriori* afin d'obtenir la *rigidité rompue*. Elle correspond à la rigidité généralisée qu'aurait la structure, si une (ou plusieurs) interface avait complètement délaminée. Pour ce faire, nous utilisons la condition limite de bord libre :

$$\mathbb{T}^\top \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot (\mathbf{E} - \mathbb{T} \cdot \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad (3.17a)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} = (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{E} \quad (3.17b)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{\text{d}} \cdot \mathbf{E} \text{ avec } \mathbb{C}^{\text{d}} = \mathbb{C} - \mathbb{C} \cdot \mathbb{T} \cdot (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \quad (3.17c)$$

3.3.2 Cas d'une ruine à une seule variable

Hypothèse 3.3.1 Ruine à une seule variable. *Pour introduire notre démarche, nous supposons qu'un seul mécanisme, piloté par une variable d'endommagement notée simplement d , est activé.*

Postulat 3.3.2 Interpolation de la rigidité. *La rigidité endommagée de l'empilement est exprimée par une interpolation qui fait glisser continuellement la rigidité « saine » vers la rigidité « rompue », au moyen d'une fonction g dite de « dégradation générique » :*

$$\mathbb{C}(d) = g(d)\mathbb{C} + (1 - g(d))\mathbb{C}^{\text{d}} \quad (3.18)$$

$g(d) : [0, 1] \rightarrow [1, 0]$ quantifie l'assouplissement de la structure et joue un rôle important puisqu'elle relie l'endommagement et les champs mécaniques. Elle détermine précisément la manière dont l'énergie stockée réagit aux changements de l'endommagement. La fonction de dégradation énergétique doit remplir les conditions suivantes :

1. $g(0) = 1$ (état intact) et $g(1) = 0$ (état complètement rompu) ;
2. $g'(d) < 0$ c'est-à-dire que $g(d)$ est une fonction monotone décroissante ;
3. $g'(1) = 0$

Quelques choix possibles concernant la fonction de dégradation énergétique sont donnés dans le tableau 3.1 [p. 79].

Les modèles formulés en contraintes, possédant les efforts inter-laminaires dans leur vecteur contrainte généralisée, permettent ainsi d'évaluer précisément la rigidité rompue \mathbb{C}^{d} et de postuler l'interpolation précédente. L'expression de la densité d'énergie élastique endommagée en découle :

Théorème 3.3.1 Densité d'énergie élastique endommagée. *La densité d'énergie élastique endommagée peut être obtenue simplement en utilisant la matrice de rigidité endommagée en place de la matrice saine :*

$$\psi_{\text{el}}^\omega(\mathbf{U}, d) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{U}) \cdot \mathbb{C}(d) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U})$$

3.3.3 Dégradations multiples

La forme (3.18) de rigidité endommagée se généralise facilement au cas de plusieurs modes de ruine, associés à des variables d'endommagement différentes, lorsque ces dernières agissent sur des blocs distincts de la matrice de rigidité saine \mathbb{C} . Dans ce cas, chacun des blocs \mathbb{C}_m de la matrice \mathbb{C} prend la forme (3.18) associée à une variable d'endommagement distincte d_m . La densité d'énergie élastique endommagée s'écrit alors simplement :

$$\psi_{el}^\omega(\mathbf{U}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \sum_m \mathbf{E}_m \cdot (g(d_m)\mathbb{C}_m + (1 - g(d_m))\mathbb{C}_m^d) \cdot \mathbf{E}_m$$

En particulier, cette hypothèse de découplage de la rigidité généralisée est valable en ce qui concerne les endommagements d'arrachement d_ν , vis-à-vis des endommagements de cisaillement d_τ . En revanche, dans le cas des modèles SCLS1 et LS1, les rigidités généralisées en arrachement et en cisaillement sont pleines, et ne jouissent donc pas d'une structure par bloc d'une interface à l'autre.

La formulation d'une rigidité (en arrachement ou en cisaillement) endommagée, et entièrement couplée entre toutes les interfaces, n'est pas aisée. Nous en avons initialement développé une telle (annexe F [p. 235]), prenant en compte correctement la dégradation des différents couplages, mais relativement lourde à présenter et à mettre en œuvre numériquement. Notons qu'une formulation de modèle d'endommagement, directement à partir de la souplesse généralisée, aurait été plus simple. Cependant cela aura, encore une fois, nécessité l'inversion, à chaque écriture de la loi de comportement élastique-endommageable, d'une matrice de taille importante ... ce que nous souhaitons précisément éviter pour des questions d'efficacité numérique.

L'ensemble de ces difficultés nous a donc conduits à construire au chapitre 1 [p. 1] le modèle « L-LS1 » qui bénéficie d'une structure beaucoup plus simple et se prêtant facilement à une formulation de type endommagement.

3.3.4 Utilisation du modèle condensé

Pour le modèle condensé, le délaminage s'interprète et se modélise aisément. La matrice \mathbb{C}^Q est diagonale par blocs avec des blocs de taille 2×2 , par conséquent, si nous ne distinguons pas les modes II et III, alors nous pouvons abattre de manière isotrope le bloc de rigidité relatif à chacune des interfaces. Plus précisément, nous postulons que la matrice de rigidité $\mathbb{C}^Q(\mathbf{d}^{intf})$ s'écrit :

$$\mathbb{C}^Q(\mathbf{d}^\tau) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\tau_0^1} & & & & & \\ & g(d_\tau^{1,2})\mathbb{C}^{\tau^{1,2}} & & & & \\ & & \mathbb{C}^{\tau_0^2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{C}^{\tau_0^{n-1}} & \\ & & & & & g(d_\tau^{n-1,n})\mathbb{C}^{\tau^{n-1,n}} \\ & & & & & & \mathbb{C}^{\tau_0^n} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Notons que la rigidité $\mathbb{C}^{\tau_0^i}$, associée au cisaillement du milieu de la couche i n'est pas dégradée. En pondérant $\mathbb{C}^{\tau_0^i}$ d'une variable d'endommagement, nous serions donc en mesure de simuler un délaminage au milieu de la couche i , effet que nous avons ici interdit. De même, nous dégradons la matrice diagonale de rigidité en arrachement, en pondérant les coefficients diagonaux par les fonctions de dégradations :

$$\mathbb{C}^\nu(\mathbf{d}^\nu) = \text{diag}(g(d_\nu^{1,2})c_\nu^{1,2}, \dots, g(d_\nu^{n-1,n})c_\nu^{n-1,n}) \quad (3.20)$$

Chaque variable d'endommagement impacte donc un bloc distinct de la matrice de rigidité généralisée \mathbb{C} . Avec le découplage très particulier du modèle L-LS1, nous en déduisons par

conséquent l'expression de la densité d'énergie élastique endommagée :

$$\begin{aligned}
 2\psi_{el}^\omega(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \mathbb{C}^{N^i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i + \boldsymbol{\chi}^i \cdot \mathbb{C}^{M^i} \cdot \boldsymbol{\chi}^i + \mathbf{D}_0^i \cdot \mathbb{C}^{\tau_0^i} \cdot \mathbf{D}_0^i \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} g(d_\tau^{j,j+1}) \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} + g(d_\nu^{j,j+1}) c_\nu^{j,j+1} (D_\nu^{j,j+1})^2
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ainsi que ses variations par rapport aux variables d'endommagement $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_{el}^\omega(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}})}{\partial d_\nu^{j,j+1}} &= g'(d_\nu^{j,j+1}) \frac{1}{2} c_\nu^{j,j+1} (D_\nu^{j,j+1})^2 = g'(d_\nu^{j,j+1}) \psi_{\nu, \text{intf}}^{j,j+1}(\mathbf{U}) \\
 \frac{\partial \psi_{el}^\omega(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}})}{\partial d_\tau^{j,j+1}} &= g'(d_\tau^{j,j+1}) \frac{1}{2} \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} = g'(d_\tau^{j,j+1}) \psi_{\tau, \text{intf}}^{j,j+1}(\mathbf{U})
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les grandeurs ψ_{intf} désignent, par un abus de langage assez légitime, les énergies des d'interfaces.

3.4 Formulation variationnelle incrémentale et résolution

Dans cette section, nous détaillerons les aspects numériques liés aux stratégies de résolution du problème couplé élasticité-endommagement.

3.4.1 Formulation incrémentale

Étant donné un chargement \mathbf{U}^D imposé sur la frontière $\partial\Omega_D$, et des efforts surfaciques \mathbf{T}^D appliqués sur $\partial\Omega_N$. Le champ de déplacement généralisé \mathbf{U} et l'état d'endommagement \mathbf{d}^{intf} sont obtenus par une procédure incrémentale. Un temps fictif, $t = t_0, \dots, t_n$ découpe les chargements finaux \mathbf{U}^D et \mathbf{T}^D en une succession de chargements $\mathbf{U}_1^D, \dots, \mathbf{U}_n^D$ et $\mathbf{T}_1^D, \dots, \mathbf{T}_n^D$, pour lesquels des solutions intermédiaires en déplacement et en endommagement vont être trouvées.

Le problème d'élasticité endommageable induit par le pseudo potentiel de dissipation et la densité d'énergie élastique est fortement non linéaire. L'équation d'évolution du système entre les temps t_k et t_{k+1} est alors obtenue en recourant à la minimisation du potentiel incrémentiel pour les systèmes indépendants du taux [Miehe, 2002, Mielke, 2005, Ortiz and Stainier, 1999] :

$$(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}) = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) \tag{3.23}$$

où le potentiel énergétique sur cet incrément de charge est la somme de l'énergie potentielle et d'une contribution du pseudo-potential de dissipation donnée par :

$$\mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{intf}}) \tag{3.24}$$

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) = \int_{\omega} \psi_{el}^\omega(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) \, d\omega - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}) \tag{3.25}$$

$$\mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = \int_{\omega} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}}; \mathbf{d}^{\text{intf}}) \, dt \, d\omega \tag{3.26}$$

où \mathcal{W}_{ext} désigne le travail des forces extérieures, Φ le pseudo potentiel de dissipation postulé aux équations (3.6) et (3.12), on obtient alors :

$$(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{\text{intf}}) = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{intf}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) \text{ avec } \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}) \, d\omega \tag{3.27}$$

où la condition d'irréversibilité $\dot{\mathbf{d}}^{\text{intf}} \geq 0$ a été remplacée par la condition incrémentale $\mathbf{d}^{\text{intf}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{intf}}$ et où nous avons supprimé le terme constant $\varphi(\mathbf{d}_k^{j,j+1})$ au temps t_k dans l'expression de

\mathcal{D}_k , étant donné qu'il n'a pas d'impact sur la minimisation de l'énergie.

Du point de vue numérique, le calcul des minimiseurs globaux de la fonction énergétique discrétisée en temps, qui est séparément convexe pour le champ de déplacement \mathbf{u} et pour la variable d'endommagement d (dans le cas scalaire), est problématique. L'usage d'un algorithme de minimisation alternée privilégie ici la robustesse par rapport à la vélocité, et tout particulièrement lors de phases de propagation instables. Cet algorithme présente en outre l'avantage de s'étendre très naturellement à la résolution de problème incluant la ruine intra-laminaire, comme envisagé dans le chapitre suivant.

Après une phase d'initialisation, étant donnée la solution $(\mathbf{U}_k, \mathbf{d}_k^{\text{intf}})$ au pas de temps k , le couple suivant $(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{\text{intf}})$ est calculé en vérifiant la stationnarité de l'énergie \mathcal{E}_k .

- La stationnarité par rapport à \mathbf{U} nous donne un problème d'élasticité à \mathbf{d}^{intf} fixé.
- La stationnarité par rapport à \mathbf{d}^{intf} se traduit par la minimisation sous contrainte d'inégalité :

$$\min_{\mathbf{d}^{\text{intf}} \text{ tq } \mathbf{d}^{\text{intf}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{intf}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}})$$

Le problème de minimisation sous contraintes de l'énergie totale peut se résoudre en introduisant le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\omega} \psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}) - \boldsymbol{\lambda}^{j,j+1} \cdot (\mathbf{d}^{j,j+1} - \mathbf{d}_k^{j,j+1}) \, d\omega - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\lambda}^{j,j+1} \geq 0$$

Les problèmes relatifs à chacune des interfaces sont découplés grâce à la structure particulière des matrices de rigidités du modèle L-LS1. La stationnarité du Lagrangien s'écrit alors, par rapport à chacune des variables d'endommagement $d_{\star}^{j,j+1}$, $\star \in \{\nu, \tau\}$ et pour chacune des interfaces :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \star \in \{\nu, \tau\} \quad \forall \widehat{d}_{\star}^{j,j+1} \quad \int_{\omega} \left[\frac{\partial (\psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}))}{\partial d_{\star}^{j,j+1}} - \lambda_{\star}^{j,j+1} \right] \widehat{d}_{\star}^{j,j+1} \, d\omega = 0$$

Nous en déduisons les équations à satisfaire :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \star \in \{\nu, \tau\} \quad \begin{cases} \frac{\partial (\psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}))}{\partial d_{\star}^{j,j+1}} - \lambda_{\star}^{j,j+1} = 0 \\ \frac{\partial (\psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}))}{\partial d_{\star}^{j,j+1}} = \lambda_{\star}^{j,j+1} \geq 0 \\ d_{\star,k+1}^{j,j+1} \geq d_{\star,k}^{j,j+1} \quad \lambda_{\star}^{j,j+1} (d_{\star,k+1}^{j,j+1} - d_{\star,k}^{j,j+1}) = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

La résolution s'opère interface par interface, en calculant le prédicteur d'endommagement $\mathbf{d}^{*,j,j+1}$ solution de :

$$\frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial \mathbf{d}^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{*,j,j+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{d}^{j,j+1}}(\mathbf{d}^{*,j,j+1}) = 0 \quad (3.29)$$

Nous obtenons alors une évolution ($\widehat{\mathbf{d}}^{j,j+1} > 0$) : $\mathbf{d}_{k+1}^{j,j+1} > \mathbf{d}_k^{j,j+1}$ si la solution de (3.29) est telle que $\mathbf{d}^{*,j,j+1} > \mathbf{d}_k^{j,j+1}$, sinon $\mathbf{d}_{k+1}^{j,j+1} = \mathbf{d}_k^{j,j+1}$ et $\boldsymbol{\lambda}^{j,j+1} \geq \mathbf{0}$.

3.4.2 Algorithmes de résolution

La recherche du couple déplacements-endommagements réalisant la stationnarité de l'énergie totale peut s'opérer à l'aide de deux grandes classes d'algorithmes, dont nous allons souligner les forces et les faiblesses pour justifier notre choix.

Résolution monolithique La minimisation (3.23) traduit un problème non linéaire couplé entre les champs de déplacement et d'endommagement. Sa résolution d'un bloc est souvent appelée résolution monolithique et peut s'effectuer à l'aide du schéma standard de Newton-Raphson, incluant au point matériel, l'intégration de la loi de comportement. Cependant, il a été relevé que ce schéma pêche, dans certaines circonstances, par des difficultés de convergence, car la fonctionnelle énergie totale sous-jacente n'est pas convexe par rapport à l'ensemble des inconnues (c'est-à-dire les déplacements et endommagements). Plusieurs alternatives, telles que le schéma de Newton modifié [Heister et al., 2015, Wick, 2017], la méthode « arc length », etc. ont été proposées pour renforcer la robustesse du solveur monolithique. Récemment, les travaux de Wu et al. [2020], Kristensen and Martínez-Pañeda [2020] ont suggéré que l'utilisation du schéma monolithique avec un solveur quasi-Newton est viable et accélère significativement la convergence. Mais ce dernier schéma a été formulé dans le cadre classique de l'approche phase-field à une variable, si bien qu'à notre connaissance, aucune étude n'a prouvé son efficacité dans le cas de ruine multi-mécanismes avec une variable d'endommagement vectorielle. Nous laisserons donc de côté, dans un premier temps, ce schéma de résolution, pour nous concentrer sur un algorithme plus simple, et relativement robuste, objet du prochain paragraphe.

Algorithme échelonné Bien que non convexe par rapport au couple endommagement-déplacement, la fonctionnelle énergie totale à minimiser est quadratique et convexe par rapport à ces deux champs considérés séparément. Les équations-pilotes peuvent être résolues en fixant le champ de phase et le déplacement alternativement [Bourdin et al., 2000, 2008]. Ce principe dit « de minimisation alternée (AM) » (« *staggered scheme* ») est très robuste, au prix d'une lenteur numérique du calcul. Nous postulons la convergence, lorsque la norme $\|\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k\|_\infty$, entre deux valeurs successives de l'endommagement, devient inférieure à une certaine tolérance, fixée ici à $1e^{-3}$. Le faible taux de convergence peut être accéléré par l'utilisation de la stratégie de « sur relaxation » [Farrell and Maurini, 2017, Ramière and Helfer, 2015]. Pour sa très grande simplicité d'implémentation, nous utilisons cette stratégie uniquement sur le prédicteur d'endommagement. Aussi, actualisons nous \mathbf{d}^* , après son calcul, à la valeur $\mathbf{d}^* = \mathbf{d}^* + \omega(\mathbf{d}^* - \mathbf{d}_k)$. Le paramètre de sur-relaxation ω est pris égal à $\omega = 1.4$, après quelques études de sensibilités préliminaires.

Schéma d'intégration Enfin, le schéma d'intégration et l'utilisation d'éléments structurels grossiers détaillés par Russo and Chen [2020] ouvrent une perspective très prometteuse en terme de réduction de temps de calcul, qui n'est par ailleurs nullement incompatible avec les précédentes pistes d'accélération. L'idée générale de ce schéma adaptatif prend racine dans la séparation du solide en deux types de zones :

- une première localise des événements fortement singuliers, en endommagement, et en contraintes. Là, le nombre de points d'intégration, pour la loi de comportement, est augmenté afin de capter finement les phénomènes locaux.
- une seconde rassemble les parties saines ou complètement endommagées, dont le seul rôle est structurel. Le nombre de points d'intégration y est alors réduit.

3.4.3 Choix pour les fonctions g , w et notations des différents modèles

Une grande collection de modèles peut être construite, en se fondant sur 3 choix : l'exposant β du pseudo-potentiel de dissipation ainsi que de la fonction w , et celle d'une interpolation de la rigidité endommagée accompagnée par sa fonction g .

Choix pour la fonction g

La fonction de dégradation énergétique, pilotant l'assouplissement de la structure, doit simplement respecter les trois conditions 1-3 [p. 74]. Nous limiterons ici notre étude à :

$$g(d) = (1 - d)^p$$

Quelques alternatives sont consignées dans le tableau 3.1 [p. 79]

$g(d)$	auteurs
$(1-d)^2$	Bourdin et al. [2000]
$3(1-d)^2 - 2(1-d)^3$	Karma et al. [2001]
$4(1-d)^3 - 3(1-d)^4$	Kuhn et al. [2015]
$\frac{(1-d)^p}{(1-d)^p + Q(d)}, Q(d) = a_1d + a_1a_2d^2 + a_1a_2a_3d^3$	Wu [2017]

TABLE 3.1 – Fonctions de dégradation énergétique $g(d)$ couramment rencontrées.

$w_*(d_*)$ pour les essais pré-fissurés

Lorsque le délaminage est induit par une pré-fissure, sa propagation se prédit correctement suivant des considérations purement énergétiques, fonction en particulier des taux de restitution d'énergie critique G_{Ic} et G_{IIc} . Dans ce cadre, la contrainte à la rupture de l'interface a peu d'influence et nous pouvons alors restreindre w à des formes simples :

$$w_*(d_*) = d_*^q, \quad q \geq 0 \quad (3.30)$$

Plus particulièrement, nous nous limiterons aux exposants $q \in \{1, 2\}$.

$w_*(d_*)$ de type « Traction-séparation »

La densité d'énergie de fissuration à un paramètre présentée précédemment est tout à fait satisfaisante pour prédire la propagation des fissures pilotée par un critère énergétique. En revanche, au regard des constatations expérimentales elle peut échouer à prédire la nucléation des fissures. Afin de surmonter ce problème, nous pouvons enrichir le modèle en proposant une densité d'énergie de fissuration à deux paramètres, l'un traduisant la conservation énergétique, l'autre l'existence d'une contrainte critique à l'initiation. À ce titre, nous proposons la fonction w_* , inspirée de la loi d'endommagement élastique fragile du code Aster [de France, 1989–2017] :

$$w_*(d_*) = \frac{(\kappa_* - 1)v_*(d_*)}{\kappa_* - v_*(d_*)} \text{ avec } v_*(d_*) = d_*^q, q \in \{1, 2\} \quad (3.31)$$

Le lien avec les paramètres présentés dans [de France, 1989–2017] est $\kappa = 1 + \gamma$. Cette fonction, moins triviale que les précédentes, possède les caractéristiques minimales attendues. Elle est nulle lorsque l'endommagement l'est aussi, elle atteint la valeur unitaire lorsque $d = 1$. De plus :

$$w'_*(d_*) = \frac{\kappa_* v'_*(d_*)(\kappa_* - 1)}{(\kappa_* - v_*(d_*))^2}$$

Par conséquent, il s'agit d'une fonction strictement croissante sur l'intervalle d'étude, dès lors que $\kappa_*(\kappa_* - 1) > 0$, ce qui est vérifié. Le comportement est adoucissant d'après [de France, 1989–2017] si $\gamma > 0$, où encore dans notre cas si $\kappa_* > 1$. En étudiant un essai de traction uni-axiale, le paramètre κ_* peut être relié à une propriété matériau : une contrainte critique d'initiation σ_c . La loi $\kappa_* = f(\sigma_c)$, non analytique dans le cas général, sera spécifique à l'interpolation choisie. Les expressions de κ_* pour les différents modèles sont données dans l'annexe C [p. 187] à la sous-section C.2.3 [p. 193].

Nous remarquons qu'à la limite :

$$\lim_{\kappa_* \rightarrow \infty} w_*(d_*) = v_*(d_*)$$

si bien que l'expression (3.31) est équivalente à (3.30).

Nomenclature des modèles

Nous allons brièvement introduire des notations pour qualifier chacune de ces combinaisons, afin qu'aucune ambiguïté ultérieure n'altère notre propos.

Notation 3.4.1 Choix de la densité d'énergie de fissuration. Nous désignerons par la lettre \mathcal{M} , un modèle construit à partir de la densité d'énergie de fissuration découplée (3.14), c'est à dire le cas limite $\beta \rightarrow \infty$.

La lettre \mathcal{N} fera référence aux modèles fondés sur la densité d'énergie de fissuration couplée de l'équation (3.11) induisant un critère elliptique. Ces modèles seront à privilégier pour l'étude de phénomènes de ruine en mode mixte.

Pour finir, la lettre \mathcal{T} fera référence aux modèles basés sur la densité d'énergie de fissuration (3.31) compatibles avec le pilotage de la contrainte critique.

Notation 3.4.2 Exposant concernant les fonctions g et d . L'exposant p, q sera employé pour rappeler, de manière compacte, l'emploi des fonctions g et w suivantes : $\{g(d) = (1 - d)^p; w(d) = d^q\}$. Pour le modèle \mathcal{T} , l'exposant q référera à l'utilisation de $v(d) = d^q$.

Pour illustrer ces notations, le modèle $\mathcal{N}^{1,2}$ réfère à une énergie de fissuration non linéaire, induisant le critère elliptique avec $\beta \in [1, \infty[$, une interpolation de degré 2 concernant la densité $w(d) = d^2$, ainsi qu'une interpolation de degré 1, pour la rigidité $g(d) = 1 - d$.

3.4.4 Loi de « traction-séparation » en mode pur

Si nous retenons une densité d'énergie de fissuration découplée, c'est à dire de la forme donnée dans (3.14), et avec des fonctions de pondération simples g et w , nous pouvons obtenir des prédicteurs d'endommagement explicites. Ces prédicteurs se déduisent des équations générales (C.14)–(C.19) présentées dans l'annexe C [p. 187], en prenant $a = G_c$, $\frac{1}{2}c\varepsilon^2 = \psi_{intf}$.

Théorème 3.4.1 Loi d'évolution. Les lois concernant les prédicteurs d'endommagement en arrachement $\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} d_\nu &= 1 - \frac{G_{Ic}}{\psi_{\nu, intf}(\mathbf{U}) + G_{Ic}} & \text{Modèle } \mathcal{M}^{2,2} & \quad d_\nu = 1 - \frac{G_{Ic}}{2\psi_{\nu, intf}(\mathbf{U})} & \text{Modèle } \mathcal{M}^{2,1} \\ d_\nu &= \text{Heav}(\psi_{\nu, intf}(\mathbf{U}) - G_{Ic}) & \text{Modèle } \mathcal{M}^{1,1} & \quad d_\nu = \frac{\psi_{\nu, intf}(\mathbf{U})}{2G_{Ic}} & \text{Modèle } \mathcal{M}^{1,2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les prédicteurs en cisaillement sont tout à fait analogues, en remplaçant $\psi_{\nu, intf}$ par $\psi_{\tau, intf}$ et G_{Ic} par G_{IIc} .

En insérant ces endommagements dans les relations contrainte d'interface T – déformation généralisée δ , associées par une rigidité C , nous obtenons les lois de « traction-séparation » des interfaces, en arrachement, et en cisaillement. Nous présentons à la figure 3.1 [p. 80] ces liens

sous forme adimensionnée $\bar{T} = \frac{T}{\sqrt{CG_c}} = f(\bar{\delta})$, avec $\bar{\delta} = \delta \sqrt{\frac{C}{G_c}}$.

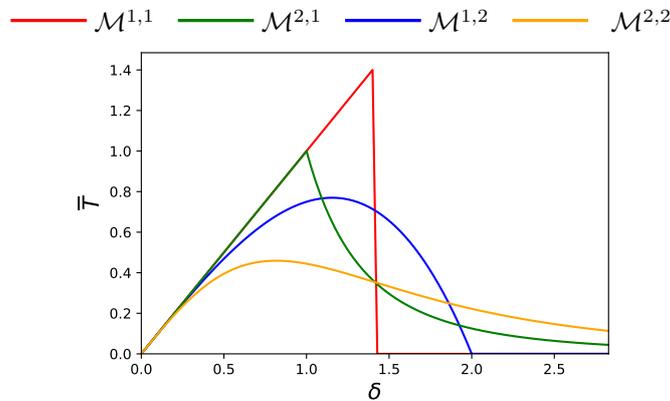


FIGURE 3.1 – Lois de traction-séparation adimensionnées dans un essai en mode pur.

3.4.5 Endommagement en compression et interpénétration

Un des défauts majeurs de l'approche proposée ici, est qu'elle ne permet pas de distinguer, *a priori*, les phénomènes de compression et de traction aux interfaces, et l'asymétrie comportementale qui en découle. Pourtant, nous devrions assurer les deux constatations expérimentales suivantes :

- 1) Les fissures apparaissent de manière privilégiée lorsque le matériau est sollicité en traction.
- 2) Une fissure, même bien développée, empêche néanmoins les deux bords de part et d'autre de s'interpénétrer.

Plusieurs méthodes, regroupées sous l'appellation générique « *modèle anisotrope* », ont été proposées pour assurer ces deux exigences. Parmi elles, nous pouvons citer le modèle de Amor et al. [2009], la décomposition spectrale des déformations de Miehe et al. [2010], l'opérateur de projection de Nguyen et al. [2015]. Ces théories reposent sur la décomposition des déformations et jouissent d'une structure variationnelle consistante. La scission des déformations scalaires généralisées D_ν , sur leurs parties positives et négatives, ne pose ici aucune difficulté : $D_\nu = \langle D_\nu \rangle_+ + \langle D_\nu \rangle_-$. Nous postulons ensuite que la variable d'endommagement en arrachement d^ν laisse inchangée la rigidité en traction. L'expression de la densité d'énergie élastique endommagée devient alors :

$$\begin{aligned}
 2\psi_{el}^\omega(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{intf}) = & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \mathbb{C}^{\mathbf{N}^i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i + \boldsymbol{\chi}^i \cdot \mathbb{C}^{\mathbf{M}^i} \cdot \boldsymbol{\chi}^i + \mathbf{D}_0^i \cdot \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}_0^i} \cdot \mathbf{D}_0^i + \sum_{j=1}^{n-1} g(d_\tau^{j,j+1}) \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} \\
 & + \sum_{j=1}^{n-1} g(d_\nu^{j,j+1}) c_\nu^{j,j+1} \langle D_\nu^{j,j+1} \rangle_+^2 + c_\nu^{j,j+1} \langle D_\nu^{j,j+1} \rangle_-^2
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Cette méthode induit un problème en déplacement non linéaire, même dans le cadre d'une résolution alternée, synonyme d'inefficacité numérique. Perdant la structure variationnelle du problème, Ambati et al. [2015] proposent une formulation hybride, rétablissant la linéarité du problème en déplacement. Pour sa simplicité, nous allons implémenter cette méthode et mettre à l'épreuve sa performance.

Numériquement, lors du calcul en déplacement, nous dégradons la rigidité en arrachement *totale* par une variable d'endommagement effective d_ν^{eff} . Cette variable est simplement égale à la majoration du « vrai » endommagement d_ν par un champ η dit « statut », égal à 0 ou 1 : $d_\nu^{eff} = \min(\eta, d_\nu)$. Le statut de l'interface, pour le calcul de \mathbf{U}_{k+1} , s'obtient à partir du déplacement solution à la $k^{\text{ème}}$ itérations : $\eta = \mathcal{H}eav(\nu(\mathbf{U}_k))$.

Cette procédure garantit qu'une fissure, même développée, transmette l'intégralité des efforts $\nu < 0$, tout en conservant un cisaillement d'interface nul. Toutefois, notons que l'influence d'une contrainte de compression sur la tenue en mode II n'est pas d'une problématique évidente. Physiquement, en cas de compression, un frottement à l'interface autorise la transmission d'efforts de cisaillement, malgré le délaminage. Des critères de type Mohr-Coulomb pourraient par conséquent être utilisés pour modéliser l'interaction entre les deux plis séparés par l'interface délaminée. Plus simplement, ne pas conserver rigoureusement $d_\tau = 1$ si $\nu < 0$ ouvrirait une piste intéressante.

En outre, de nombreuses publications mentionnent le flou qui existe concernant l'évolution du taux de restitution en énergie et de la contrainte critique à la rupture en mode II (G_{IIc} , σ_c^τ) en présence de compression [Christensen and DeTeresa, 2004, Cui et al., 1994, DeTeresa et al., 2004, Li et al., 2008]. L'ensemble des auteurs s'accorde à considérer que ces deux grandeurs sont relevées par la compression, de sorte que que négliger le phénomène induit une sous-estimation, parfois importante, de la résistance à la rupture de la structure. Pour prendre en compte le renforcement en compression, des lois augmentant linéairement G_{IIc} , σ_c^τ en fonction

de la contrainte de compression $\langle \nu \rangle_-$ sont à l'occasion retenues :

$$G_{\text{IIC}}^{\text{eff}} = G_{\text{IIC}}(1 - \alpha \langle \nu \rangle_-) \text{ et } \sigma_c^{\tau, \text{eff}} = \sigma_c^\tau(1 - \beta \langle \nu \rangle_-) \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.34)$$

3.4.6 Implémentation en statique et en dynamique

La solution du problème de délaminage réside dans la recherche d'un couple endommagement-déplacement, rendant stationnaire la fonctionnelle énergie totale. Il s'agit d'un problème non linéaire, nécessairement résolu par une méthode itérative. Nous faisons le choix de trouver le couple (\mathbf{U}, \mathbf{d}) par une méthode de minimisation alternée. À chaque itération, nous effectuons un calcul élastique, puis nous calculons une nouvelle valeur d'endommagement. Si les endommagements prédits à deux itérations successives sont proches au regard d'une tolérance pré-fixée, nous considérons que la structure est à l'équilibre avec cette valeur de \mathbf{d} , et nous engageons un nouveau pas de calcul.

Algorithme 1 : Algorithme de calcul du délaminage en statique

Entrées : Maillage, paramètres physiques et géométriques, chargement $\mathbf{U}^D, \mathbf{T}^D$
 Découpage du chargement en N pas $\mathbf{U}_n^D, \mathbf{T}_n^D$
pour $n \in \{1, \dots, N\}$ **faire**
 $k = 0$ /* compteur de l'itération */
 $\mathbf{d}_0^{\text{intf}} = \mathbf{d}_n^{\text{intf}}$ /* initialisation de l'endommagement */
 tant que *evol* **faire**
 Entrées : Endommagements $\mathbf{d}_k^\nu, \mathbf{d}_k^\tau$
 Résolution du problème d'élasticité à $\mathbf{d}_k^\nu, \mathbf{d}_k^\tau$ fixé.
 Sorties : Déplacement \mathbf{U}_{k+1}
 Entrées : Endommagement $\mathbf{d}_k^\nu, \mathbf{d}_k^\tau$, déplacement \mathbf{U}_{k+1}
 Résolution du problème d'endommagement.
 Sorties : Predicteur d'endommagement $\mathbf{d}^{\nu,*}, \mathbf{d}^{\tau,*}$
 pour toute interface faire
 Entrées : Endommagements $\mathbf{d}^{\nu,*}, \mathbf{d}^{\tau,*}, \mathbf{d}_k^\nu, \mathbf{d}_k^\tau$
 Actualisation des endommagements :
 $\mathbf{d}_{k+1}^\nu = \min(\max(\mathbf{d}^{\nu,*}, \mathbf{d}_k^\nu), 1)$ et $\mathbf{d}_{k+1}^\tau = \min(\max(\mathbf{d}^{\tau,*}, \mathbf{d}_k^\tau), 1)$
 Sorties : Endommagements actualisés $\mathbf{d}_{k+1}^\nu, \mathbf{d}_{k+1}^\tau$
 Entrées : Endommagements $\mathbf{d}_{k+1}^\nu, \mathbf{d}_{k+1}^\tau$
 $\tau_{\text{fiss}} = \{0 \text{ si } \mathbf{d}_{k+1}^\tau < \text{seuil} \mid 1 \text{ sinon}\}, \nu_{\text{fiss}} = \{0 \text{ si } \mathbf{d}_{k+1}^\nu < \text{seuil} \mid 1 \text{ sinon}\},$
 $\eta = \{0 \text{ si } D^\nu < 0 \mid 1 \text{ sinon}\}$
 $\mathbf{d}_{k+1}^{\nu, \text{eff}} = \min(\eta, \max(\mathbf{d}_{k+1}^\nu, \tau_{\text{fiss}}))$ et $\mathbf{d}_{k+1}^\tau = \max(\mathbf{d}_{k+1}^\tau, \nu_{\text{fiss}})$
 Sorties : Endommagements actualisés $\mathbf{d}_{k+1}^{\nu, \text{eff}}, \mathbf{d}_{k+1}^\nu, \mathbf{d}_{k+1}^\tau$
 fin
 si $\|\mathbf{d}_{k+1}^{\text{intf}} - \mathbf{d}_k^{\text{intf}}\| < \text{Tol}$ **alors**
 | *evol* = *False*, $\mathbf{d}_n^{\text{intf}} = \mathbf{d}_{k+1}^{\text{intf}}$
 sinon
 | *evol* = *True*, $k+ = 1$
 fin
 fin
fin

L'algorithme en dynamique, explicite et implicite, ne diffère du schéma classique [Bonnet and Frangi, 2007] que par l'ajout d'un bloc dans la boucle d'incrémentation temporelle. Ce bloc calcule l'endommagement courant et, le cas échéant, l'actualise.

3.5 Validation numérique des essais d'endommagement

Nous avons construit une myriade de modèles d'endommagement, en postulant tour à tour la forme de la densité d'énergie de fissuration, puis l'expression de la densité d'énergie élastique endommagée. Nous allons à présent confronter les différentes approches aux cas tests fréquemment rencontrés dans la littérature.

Dans notre premier essai, sous-section 3.5.1 [p. 83], nous opérerons un tri parmi nos différents modèles. Nous ne conserverons par la suite que les plus prometteurs en mentionnant le cas échéant leurs limitations ou leurs forces.

3.5.1 Essai de rupture en mode I, l'essai Double Cantilever Beam

Présentation et solution analytique

L'essai « Double Cantilever Beam », abrégé DCB, est un cas d'étude classique, permettant de valider les modèles de fissuration en mode I. Il s'agit d'étudier la rupture en ouverture d'une éprouvette pré-entallée, sur l'extrémité de laquelle un déplacement vertical est imposé figure 3.5.1 [p. 83]. La courbe déplacement vertical/effort nécessaire est tracée.

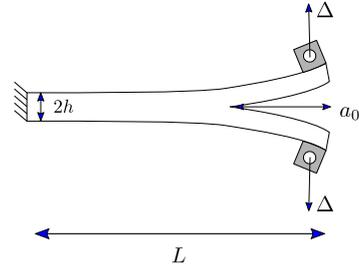


FIGURE 3.2 – Schéma de l'essai DCB

Pour une poutre de Timoshenko, avant la propagation du délaminage, le déplacement vertical et l'effort appliqué sont reliés par la formule analytique suivante [Škec et al., 2019] :

$$\Delta(F) = \frac{2Fa_0^3}{3EI_a} \left(1 + \frac{3EI_a}{a_0^2\mu A_s} + \frac{3}{a_0} \sqrt{\frac{EI_a}{\mu A_s}} \right), \quad F \leq F_{\max} = \frac{\sqrt{EI_a b G_{Ic}}}{a_0 + \sqrt{\frac{EI_a}{\mu A_s}}} \quad (3.35)$$

où, F_{\max} désigne l'effort critique à partir duquel le délaminage progresse, a_0 désigne la longueur initiale de la pré-fissure, A_s est la surface effective de la poutre, donnée par $A_s = 5/6bh$, I_a désigne le moment d'inertie d'un des bras, μ le module de cisaillement.

Lorsque la fissure progresse, les expressions du déplacement vertical et de la force, en fonction de la position du front de fissure dans (3.35), sont simplement actualisées, en prenant, non plus la taille initiale de la pré-fissure, mais sa taille actuelle.

$$\Delta(a) = \frac{2F(a)a^3}{3EI_a} \left(1 + \frac{3EI_a}{a^2\mu A_s} + \frac{3}{a} \sqrt{\frac{EI_a}{\mu A_s}} \right) \quad F(a) = \frac{\sqrt{EI_a b G_{Ic}}}{a + \sqrt{\frac{EI_a}{\mu A_s}}} \quad (3.36)$$

Remarque 3.5.1 Si nous adoptons un modèle plus simple de Bernoulli pour la poutre, l'expression de la relation $\Delta = f(F)$ (3.35) se simplifie.

$$\Delta = \frac{2Fa^3}{3EI_a} = C(a)F$$

Le taux de restitution en énergie du modèle d'Euler Bernoulli, défini comme $G = \frac{F^2}{2b} \frac{dC}{da}$, devient :

$$G_{DCB} = \frac{F^2 a^2}{EI_a b} \quad (3.37)$$

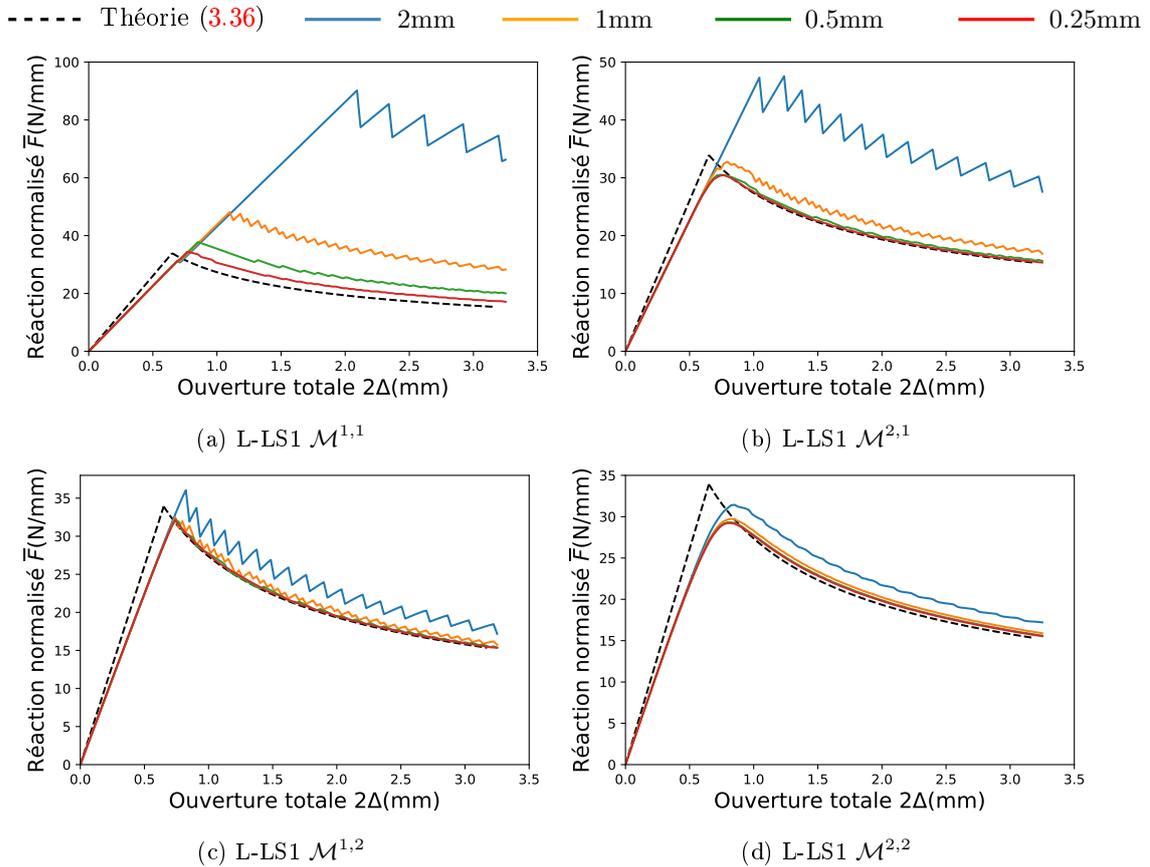
Modélisation numérique et comparaison des modèles

Les paramètres retenus sont donnés tableau 3.2 [p. 84] et sont identiques à ceux utilisés dans [Škec et al., 2019]. La poutre est supposée suffisamment longue pour éviter les effets de bords (numériquement $L = 100\text{mm}$, $b = 1\text{mm}$). Nous traçons l'effort normalisé par la largeur $\bar{F}(a) = F/b$ en fonction de l'ouverture totale 2Δ .

Paramètres matériaux	Dimensions(mm)
$E = 70\text{GPa}$ $\nu = 1/3$ $G_{\text{Ic}} = G_{\text{IIc}} = 1\text{J/m}^2$	$h = 6$ $a_0 = 30$

TABLE 3.2 – Paramètres d'étude pour l'essai DCB isotrope

Nous représentons ci-dessous la courbe force-déplacement pour le modèle L-LS1, comparée à la solution de référence.


 FIGURE 3.3 – Convergence, en fonction de la taille de maille, pour les différents modèles $\mathcal{M}^{\bullet,*}$ dans le cadre LS1

Le modèle $\mathcal{M}^{1,1}$, fortement dépendant de la taille de maille, semble surestimer la contrainte tout au long de l'essai, en délaminant trop tardivement. Ceci est dû à son caractère de loi à seuil. Il serait nécessaire de fortement raffiner le maillage, afin que le délaminage se produise immédiatement après que le taux de restitution d'énergie critique soit dépassé. Ce modèle « tout ou rien » est utile pour la compréhension du phénomène, mais ne fournit des résultats d'une qualité acceptable, qu'au prix d'un raffinement très important au voisinage du front de

fissure.

Les modèles $\mathcal{M}^{*,2}$ sont certainement les plus prometteurs de notre banc d'essai. Pour chacun d'eux, la courbe déplacement-force est de bonne qualité. Nous notons au passage la forte régularité du $\mathcal{M}^{2,2}$, qui entraîne une convergence rapide vers la solution théorique, même pour un maillage grossier. La phase « piquée » en revanche, juste avant la propagation du délaminage, est lissée, car la loi d'évolution ne comporte pas de partie rigoureusement élastique. Le modèle $\mathcal{M}^{1,2}$ quant à lui, estime bien mieux la contrainte maximale avant rupture, en n'adoucissant pas artificiellement le pic de contrainte. Selon que l'on souhaite une convergence rapide, ou une bonne estimation de la contrainte admissible maximale, nous serons amenés à choisir l'un ou l'autre de ces modèles. Par la suite, nous nous contenterons de présenter les résultats de ces deux modèles avec, chaque fois et le maillage grossier minimal suffisant à assurer la convergence, et un maillage fin montrant la convergence asymptotique.

Essai DCB avec le modèle condensé

Le modèle L-LS1, présenté à la sous-section 3.3.4 [p. 75] est remarquable, car il est tout à la fois plus simple d'implémentation et plus sobre numériquement. Son développement est nouveau et nous devons le confronter au modèle « consistant » précédemment utilisé. Notre courbe d'intérêt est identique à la précédente. Nous superposons les résultats obtenus dans le cadre des modèles condensé et consistant à la figure 3.4 [p. 85].

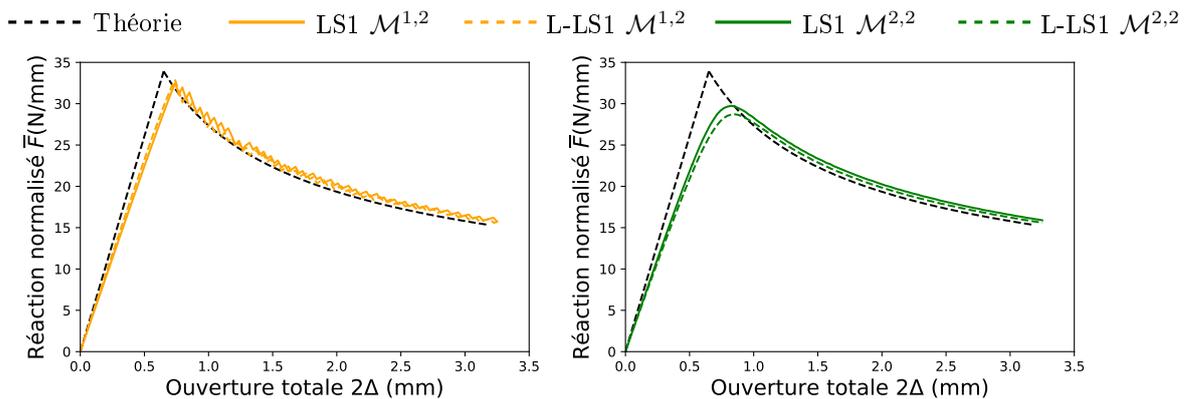


FIGURE 3.4 – Comparaison des modèles consistant et condensé dans le cadre LS1 $\mathcal{M}^{*,2}$, taille de maille 1mm

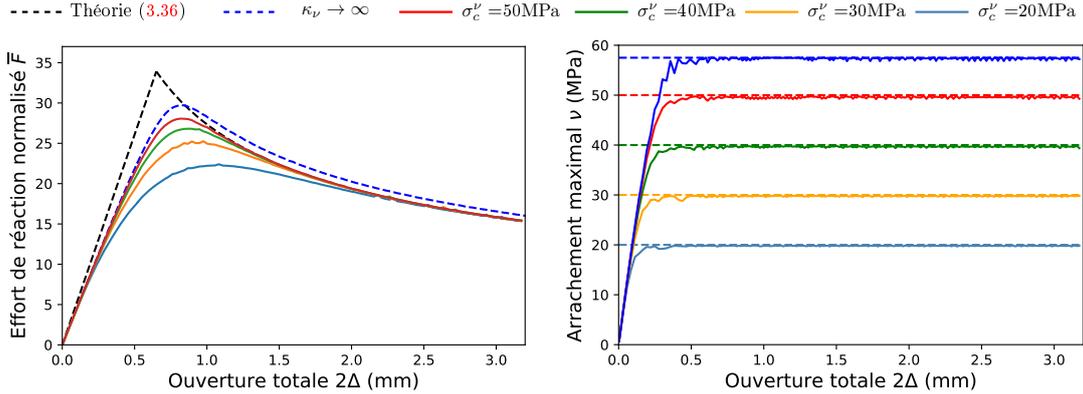
Nous n'observons qu'un écart parfaitement mineur entre les prédictions des deux modèles, et les deux courbes forces-déplacements sont pratiquement indiscernables. Cependant, les contraintes maximales prédites par les deux modèles sont légèrement distinctes (de l'ordre de 10%) car les rigidités d'interfaces associées diffèrent d'autant.

En dépit des erreurs concernant la rigidité en arrachement, il ressort de l'expérience numérique que les écarts induits ne produisent qu'un effet assez négligeable sur les champs globaux, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, nous n'avons pas prêté de rigidité aux interfaces et les coefficients intervenant dans la matrice de rigidité \mathbb{C}^ν sont uniquement dus aux propriétés élastiques hors plan des plis, en soit une approximation assez forte. D'autre part, les efforts hors plan d'arrachement n'ont d'influence significative qu'au voisinage immédiat des bords libres, soit dans une zone où de toute façon, les efforts sont singuliers. Pour finir, initiation mise à l'écart, les phénomènes de délaminage sont essentiellement pilotés par des considérations énergétiques, lesquelles demeurent peu influencées par la valeur exacte de \mathbb{C}^ν .

Les excellents résultats du modèle condensé confirmés, nous l'utiliserons par la suite dans nos simulations.

Essai DCB avec pilotage de la contrainte critique

Pour l'étude de problèmes dans lesquels le taux de restitution d'énergie et la contrainte critique d'initiation sont déterminants, nos modèles de « zones cohésives » vont à présent être mis à l'épreuve. Nous distinguerons en réalité deux catégories de modèles : ceux issus de l'enrichissement de la fonction w_* comme présenté à l'équation (3.31), et le modèle de zones cohésives de Wu détaillé à la sous-section C.2.1 [p. 189]. Nous présentons les courbes forces-déplacements pour une large gamme de contraintes critiques d'initiation, avec en parallèle la contrainte d'arrachement maximale mesurée en pointe de fissure.



(a) $\mathcal{T}^{2,2}$, Courbe force-déplacements pour différentes valeurs de la contrainte critiques d'arrachement σ_c^ν , taille de maille 1mm

(b) $\mathcal{T}^{2,2}$, Courbe arrachement maximal à l'interface-déplacement pour différentes valeurs de la contrainte critiques d'arrachement σ_c^ν

Effet d'épaisseur dans l'essai DCB et efforts d'interface

Lorsque nous amincissons les deux bras de l'essai DCB, nous observons une localisation des contraintes accompagnée d'un effort d'arrachement discontinu. Si un maillage trop grossier est utilisé, la singularité des contraintes échappe à la solution numérique, de sorte que la simulation surestime le seuil d'apparition du délaminage... ou ne le perçoit pas du tout ! Pour pallier ce problème, des méthodes adaptatives ont été proposées par Russo and Chen [2020]. Prometteuses, ces stratégies sont difficilement applicables au logiciel FEniCS que nous utilisons actuellement.

Pour étudier l'effet de localisation, nous travaillons en statique et approfondissons l'influence de l'épaisseur des bras sur la contrainte d'arrachement. La solution analytique pour le modèle LS1, détaillée à la section E.3 [p. 225], prédit que cet effort décroît exponentiellement avec une longueur caractéristique, elle-même proportionnelle à l'épaisseur. Par une autre résolution analytique, employant un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, Xie et al. [2016], Hermes [2010] calculent une process zone dont la taille caractéristique évolue suivant une loi puissance, $h^{3/4}$ et $h^{1/4}$ respectivement. Škec et al. [2019] prédisent, en accord avec notre étude, une décroissance exponentielle en $\exp(-y/h)$. Une étude numérique complète, avec des éléments en déformation plane, pourrait trancher concernant la pertinence des propositions. Nous nous limiterons ici à observer numériquement, et analytiquement, le phénomène de localisation du champ $\nu^{1,2}$, en diminuant progressivement l'épaisseur h . Les résultats pour $h = 4\text{mm}$, $h = 1\text{mm}$, et $h = 0.25\text{mm}$ sont représentés à la figure 3.6 [p. 87] :

Un écart plus marqué à la solution analytique est observable pour la plaque mince $h = 0.25\text{mm}$. Cette aberration numérique semble liée à l'existence d'un champ de cisaillement parasite, probablement causé par un phénomène de verrouillage en cisaillement résiduel, lequel n'est pas rigoureusement résolu par la procédure d'intégration réduite.

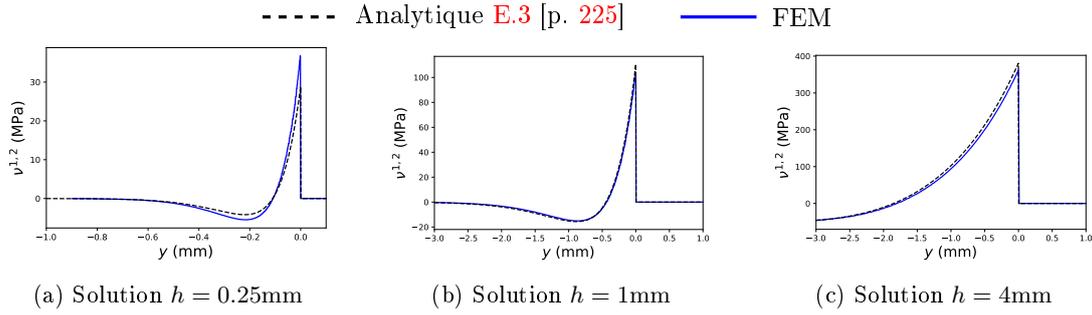


FIGURE 3.6 – Contrainte d’arrachement pour des épaisseur variables

3.5.2 Essai ELS

De manière analogue à l’essai DCB, l’expérience « End loaded split » abrégée « ELS » permet l’étude de la rupture en cisaillement, c’est à dire en mode II. Le schéma expérimental correspondant est donné dans la figure 3.5.2 [p. 87]. Mis à part la longueur de la pré-fissure, les paramètres géométriques et matériaux y sont identiques à ceux pris dans la sous-section 3.5.1 [p. 83].

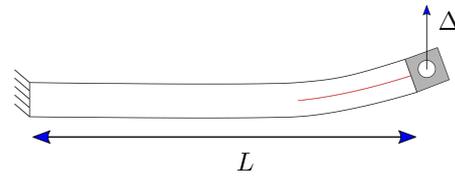


FIGURE 3.7 – Schéma Ended loaded split

Solution analytique dans le cadre d’Euler Bernoulli

Avant propagation	Pendant propagation
$\Delta(F) = \frac{L^3 + 3a^3}{24EI_a} F$	$\Delta(F) = \frac{FL^3}{24EI_a} + \frac{1}{F^2} 8\sqrt{EI} \left(\frac{bG_{IIc}}{3} \right)^{3/2}$

TABLE 3.3 – Solution analytique d’Euler Bernoulli pour l’essai End Loaded Split [Allix et al., 1995]

Remarque 3.5.2 Le cas asymptotique permet de s’assurer des résultats ci-dessus. Lorsque $a = 0$, le comportement est celui d’une poutre d’épaisseur $2h$ d’inertie $I_t = 8I_a$, où I_a désigne l’inertie d’un des bras. La formule est alors bien retrouvée

L’essai ELS n’est stable que lorsque la pré-fissure mesure plus de $0.55L$. La limite élastique est obtenue lorsque les 2 déplacements sont égaux dans le Tableau 3.3 [p. 87]. Pour une pré-fissure a_0 nous trouvons que la force maximale vérifie :

$$\frac{L^3 + 3a_0^3}{24EI} F_{max} = \frac{F_{max}L^3}{24EI} + \frac{1}{F_{max}^2} 8\sqrt{EI} \left(\frac{bG_{IIc}}{3} \right)^{3/2} \Rightarrow F_{max} = \frac{4}{a_0} \sqrt{\frac{EIbG_{IIc}}{3}}$$

Lorsque la fissure progresse, l’expression de la force est simplement actualisée en prenant la longueur actuelle a de la fissure.

Résultats numériques

Les paramètres matériaux et géométriques retenus sont identiques à ceux du paragraphe précédent, à ceci près que $L = 200\text{mm}$, et que nous étudions successivement : un cas où la pré-fissure mesure $a_0 = 120\text{mm} = 0.6L$, induisant une propagation stable, et un cas où $a_0 = 80\text{mm} = 0.4L$ synonyme d’instabilité. Les courbes force-déplacement dans ces deux cas sont données figure 3.8 [p. 88]. L’accord quantitatif est excellent, remarquons cependant la chute brutale de force lors du début de propagation. À cause de notre minimisation alternée, la

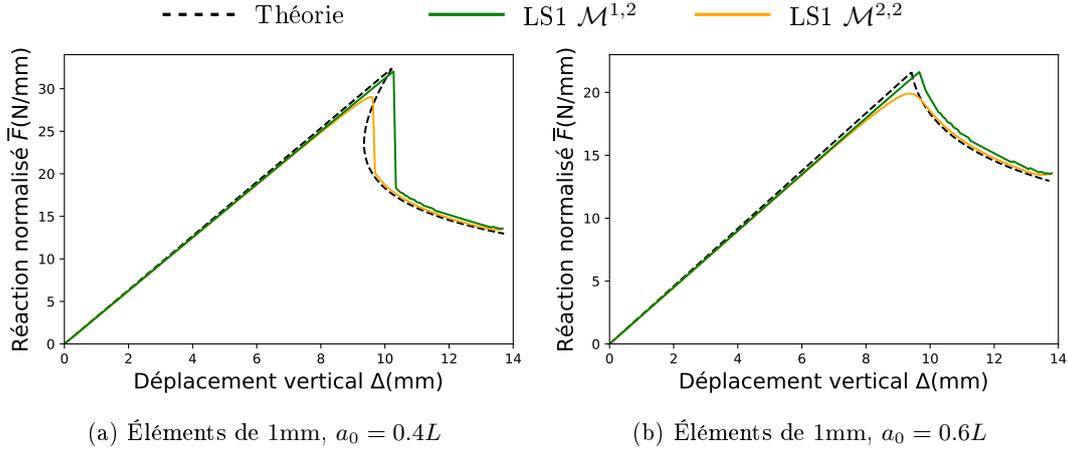


FIGURE 3.8 – Courbe force-déplacement pour le modèle LS1 avec $a_0 = 0.6L$ (propagation stable), $a_0 = 80\text{mm}$ (propagation instable)

capture de ce phénomène s'est faite au prix d'un grand nombre d'itérations, mais sans aucun problème de convergence. Une stratégie Arc-length ([Crisfield, 1981, Riks, 1972, Wempner, 1971]) aurait permis de suivre exactement la courbe force-déplacement.

3.5.3 Essai ENF

L'essai End Notched Flexure permet également de valider notre modèle d'endommagement en mode II. Un déplacement vertical est imposé au milieu de l'éprouvette entaillée figure 3.5.3 [p. 88]. La courbe déplacement vertical/effort nécessaire est tracée. L'essai ENF ne présente aucune complexité supplémentaire comparativement à l'essai ELS, en terme de validation d'endommagement.

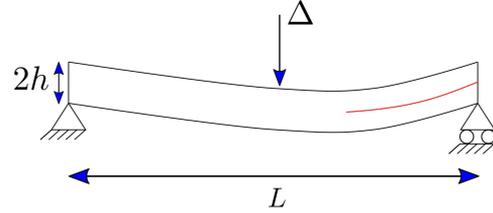


FIGURE 3.9 – Schéma End Notched Flexure

Solution analytique

Pour une poutre d'Euler Bernoulli (la solution pour une poutre de Timoshenko est donnée dans [Valvo, 2018]), le déplacement vertical et l'effort appliqué sont reliés ([Allix et al., 1995]) par les formules analytiques présentées dans le Tableau 3.4 [p. 89].

Remarque 3.5.3 Comme pour l'essai DCB, nous pouvons en déduire l'expression du taux de restitution en énergie pour l'essai ENF lorsque $a \leq L/2$:

$$\Delta = \frac{L^3 + 12a^3}{384EI_a} F \Leftrightarrow G_{ENF} = \frac{F^2}{2b} \frac{dC_{ENF}}{da} = \frac{3F^2 a^2}{64EI_a b} \quad (3.38)$$

Il est montré, toujours dans Allix et al. [1995], que dans le cas d'un déplacement imposé, la pré-fissure doit être choisie de longueur au moins égale à $0.327L$ pour l'essai ENF soit stable en déplacement imposé.

Pré-fissure a	Avant propagation	Pendant propagation
$a \leq L/2$	$\Delta(F) = \frac{L^3 + 12a^3}{384EI_a} F$	$\Delta(F) = \frac{FL^3}{384EI_a} + \frac{1}{F^2} 16\sqrt{EI_a} \left(\frac{bG_{IIc}}{3} \right)^{3/2}$
$L/2 \leq a$	$\Delta(F) = \frac{L^3 - 3(L-a)^3}{96EI_a} F$	$\Delta(F) = \frac{FL^3}{96EI_a} - \frac{1}{F^2} 16\sqrt{EI_a} \left(\frac{bG_{IIc}}{3} \right)^{3/2}$

TABLE 3.4 – Solution analytique ENF

Si $0 \leq a_0 \leq L/2$, alors l'expression de la force, en fonction de la longueur de fissure, est donnée par :

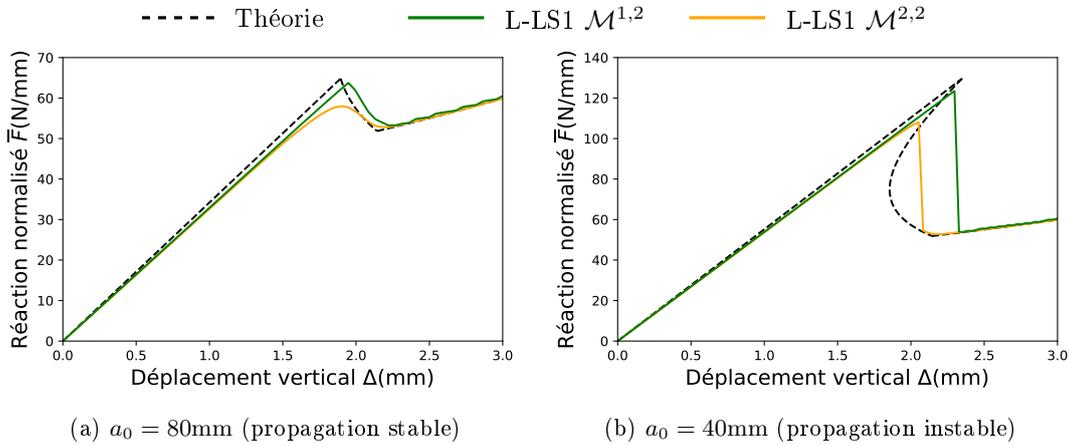
$$\frac{L^3 + 12a^3}{384EI_a} F_{max} = \frac{F_{max}L^3}{384EI_a} + \frac{1}{F_{max}^2} 16\sqrt{EI_a} \left(\frac{bG_{IIc}}{3} \right)^{3/2} \Rightarrow F_{max} = \frac{8}{a} \sqrt{\frac{EI_a b G_{IIc}}{3}}$$

La force maximale pour un $0 \leq a \leq L/2$ est simplement obtenue en insérant la taille initiale de la fissure a_0 . L'effort F_{crit} de changement de régime (correspondant au basculement de $a \leq L/2$ à $a \geq L/2$) est obtenu en prenant $a = L/2$ dans la formule précédente $F_{crit} = \frac{16}{L} \sqrt{\frac{bEI_a G_{IIc}}{3}}$.

La force pour $a \geq L/2$ est quant à elle exprimée via : $F = \frac{8}{L-a} \sqrt{\frac{EI_b G_{IIc}}{3}}$

Paramètres d'étude et résultats

Pour notre simulation, nous prendrons les pré-fissures de longueurs $0.4L$ (propagation stable) et $0.2L$ (propagation instable). Les autres paramètres géométriques et matériaux sont identiques à ceux pris dans la sous-section 3.5.1 [p. 83]. Comme précédemment, le modèle



$\mathcal{M}^{2,2}$ prédit un effort et plus régulier, et plus faible. La perte de stabilité s'avère également plus précoce, comparativement au modèle $\mathcal{M}^{1,2}$.

3.5.4 Utilisation du critère elliptique pour les essais de rupture en mode mixte

En mode mixte, la propagation de la fissure se produit lorsque le taux de restitution d'énergie G atteint sa valeur critique G_c . G_c est une fonction qui dépend des taux de restitution critique en mode I et II, de la mixité de mode, et du critère retenu. Le choix d'une densité d'énergie de fissuration couplée (3.11) a mené à un critère elliptique de la forme :

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}} \right)^\gamma + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right)^\gamma = 1$$

3.5 Validation numérique des essais d'endommagement

L'enjeu de cette introduction est de déterminer le taux de restitution d'énergie critique G_c , en fonction de la mixité de mode θ , supposée constante lors de la propagation, des taux de restitution critique en mode I et II purs, ainsi que du paramètre elliptique γ . Le système de trois équations à résoudre pour déterminer G_c est :

$$\begin{cases} G_I + G_{II} = G & \text{taux de restitution total} \\ \left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\gamma + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\gamma = 1 & \text{critère elliptique} \\ G_I = \theta G_{II} & \text{mixité de l'essai} \end{cases} \quad (3.39)$$

Lors de la propagation, $G = G_c$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\left. \begin{cases} G_{II}(1 + \theta) = G_c \\ G_{II}^\gamma \left(\frac{\theta}{G_{Ic}}\right)^\gamma + G_{II}^\beta \left(\frac{1}{G_{IIc}}\right)^\gamma = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow G_c = \frac{(1 + \theta)}{\left(\left(\frac{\theta}{G_{Ic}}\right)^\gamma + \left(\frac{1}{G_{IIc}}\right)^\gamma\right)^{1/\gamma}} \quad (3.40)$$

Lorsque la mixité de mode est connue, il est donc possible de trouver une expression analytique du taux de restitution d'énergie critique. La moindre condition de validation de notre critère elliptique impose de vérifier sa capacité à re-simuler les essais DCB et ELS précédents. Nous allons brièvement présenter les résultats obtenus avec utilisation du critère elliptique $\beta = 2$. Ensuite, nous nous intéresserons à deux essais classiques en mode mixte. Le premier, le « FRMM », est simpliste, car il ne permet de valider qu'une mixité $\theta = 4/3$ fixée. Le second, l'essai « Mixed Mode Bending », beaucoup plus riche, nous permettra d'envisager une grande variété de mixités de modes par l'intermédiaire d'un paramètre géométrique c .

Les paramètres matériaux et géométriques pour le DCB et l'ELS sont identiques à ceux utilisés dans leurs sections respectives. Nous utilisons les modèles LS1 $\mathcal{N}^{1,2}$ avec le critère elliptique $\beta = 2$.

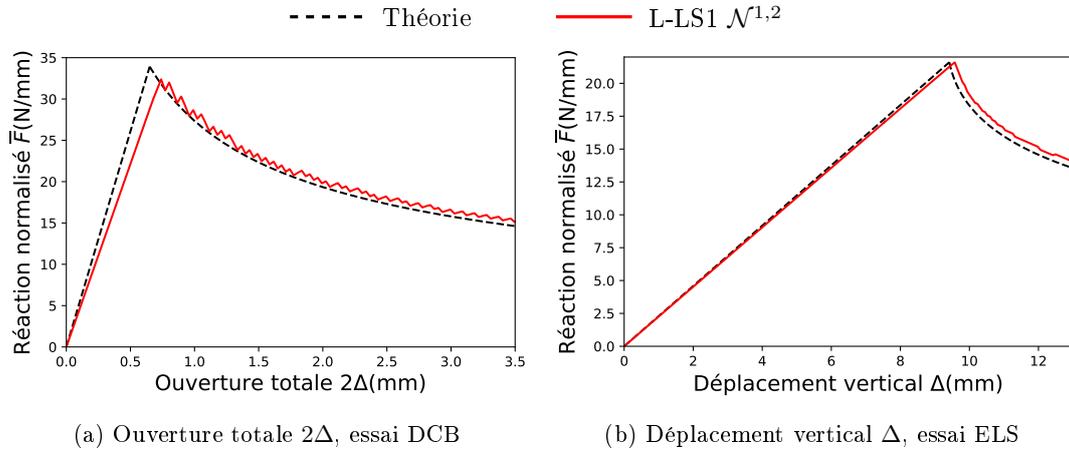
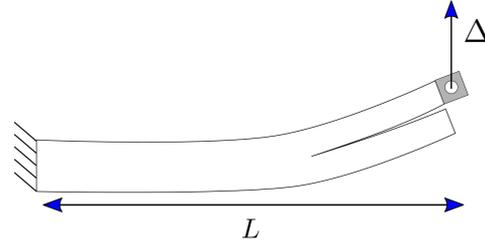


FIGURE 3.11 – Courbe force-déplacement de l'essai DCB et ELS pour le LS1 avec le modèle $\mathcal{N}^{1,2}$, taille des mailles 1mm

The Fixed Ratio Mixed Mode

Le « Fixed Ratio Mixed Mode », abrégé FRMM, est un essai en mode mixte, dans lequel $\theta = 4/3$ tout au long de l'expérience. Il s'agit d'un essai ELS (ou DCB) dans lequel le déplacement est appliqué uniquement sur un bras. Le schéma simplifié est donné figure 3.5.4 [p. 91]. Il existe une solution analytique, donnée par Chen [1999], dans le cadre du modèle de poutre d'Euler Bernoulli et de la mécanique linéaire de la rupture :



$$\Delta(F) = \frac{L^3 + 7a^3}{3EI_t} F$$

FIGURE 3.12 – Géométrie de l'essai FRMM

avec $a = a_0$ avant la phase de propagation et a donnée par (3.41) pendant la phase de propagation :

$$G_I + G_{II} = G_c = 7F^2 a^2 / 2bEI_t \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2bEI_t G_c}{7F^2}} \quad (3.41)$$

Pour déterminer G_c , nous utilisons (3.40) avec la donnée de la mixité de mode $\theta = \frac{4}{3}$. La force maximale avant propagation F_{max} et la force critique à partir duquel la fissure atteint le bout sont données par :

$$F_{max} = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{2bEI_t G_c}{7}} \quad F_{crit} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2bEI_t G_c}{7}}$$

Une nouvelle fois, l'essai FRMM n'est stable que dans une certaine gamme de longueur pour la pré-fissure a_0 . Pour connaître la valeur limite, nous exploitons le cas pivot $\Delta'(F_{max}) = 0$, frontière entre le régime stable et instable. En notant $\alpha = \frac{2bEI_t G_c}{7}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \frac{1}{3EI_t} \left(L^3 F + \frac{7\alpha^{3/2}}{F^2} \right) \\ \Delta'(F) &= \frac{1}{3EI_t} \left(L^3 - \frac{14\alpha^{3/2}}{F^3} \right) \\ \Delta'(F_{max}) &= \frac{1}{3EI_t} \left(L^3 - \frac{14\alpha^{3/2} a_0^3}{\alpha^{3/2}} \right) = 0 \\ a_0 &= \sqrt[3]{\frac{1}{14}} \end{aligned}$$

Attention, ici I_t désigne l'inertie totale de la poutre, et non plus celle d'un seul bras. Les paramètres géométriques et matériaux sont identiques à ceux du paragraphe sous-section 3.5.1 [p. 83], avec cette fois-ci, des pré-fissures de $a_0 = 60\text{mm}$ et $a_0 = 120\text{mm}$. nous représentons figure 3.13 [p. 92] les résultats obtenus lors d'un essai stable et d'un essai instable, pour différentes valeurs de β . La comparaison quantitative est excellente. La valeur maximale de l'effort avant endommagement est correctement évaluée et la phase adoucissante bien reproduite. L'exposant β influe fortement sur ces deux points, ainsi nous pouvons déduire de la fidélité de ces deux courbes, que l'interpolation elliptique induite par notre densité d'énergie de fissuration couplée est correcte.

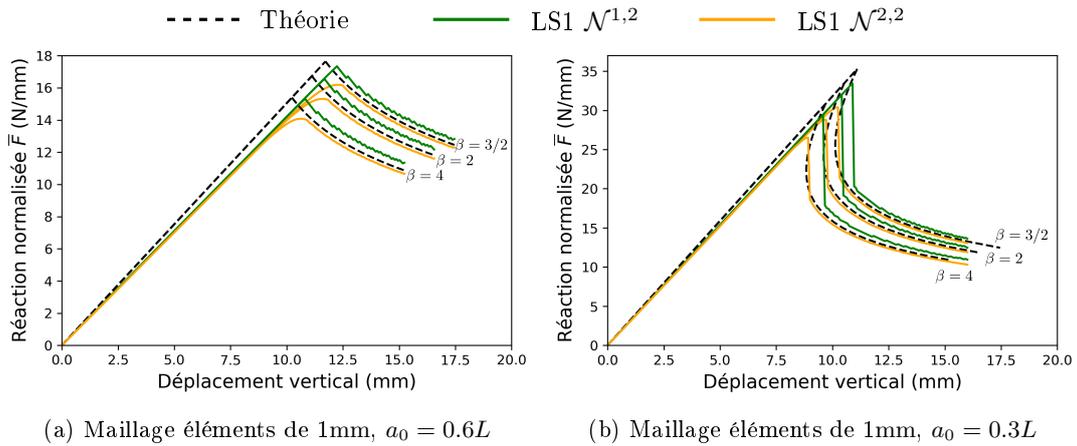


FIGURE 3.13 – Courbe force-déplacement pour le modèle L-LS1 avec $a_0 = 120\text{mm}$ et $a_0 = 60\text{mm}$

Mixed Mode Bending

L'essai « Mixed Mode Bending » est un cas test plus complexe de validation des modèles d'endommagement. Il couple les modes I et II en fonction d'un paramètre de longueur c , comme décrit dans la figure 3.14 [p. 92]. Une des difficultés de ce test réside dans son implémentation

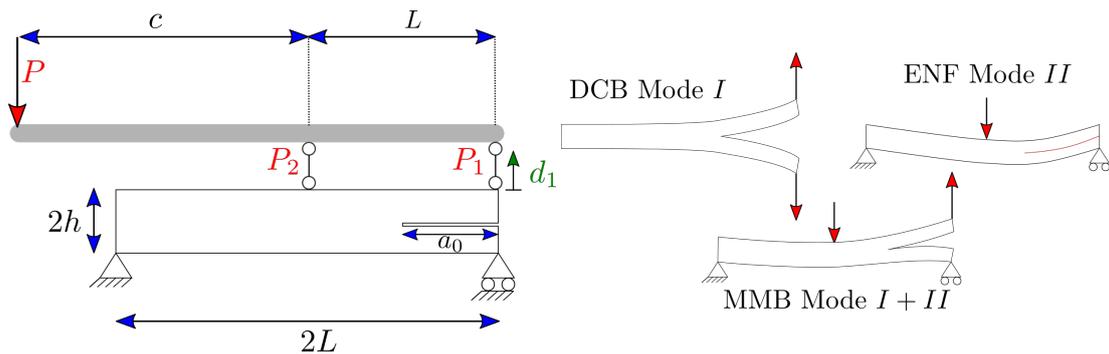


FIGURE 3.14 – Schéma MMB

numérique. En effet, il est nécessaire de pouvoir modéliser la présence d'un corps infiniment rigide en interaction avec la plaque. Lorsque le bras de levier a une longueur nulle, l'essai MMB se ramène à l'essai ENF précédent. Lorsque le bras de levier tend vers l'infini, la mixité G_I/G_{II} tend vers $\frac{27}{4}$ d'après (3.42), et toutes les valeurs intermédiaires peuvent être balayées en faisant varier c .

Dans l'hypothèse des petites perturbations, les forces appliquées sur le corps rigide sont entièrement déterminées par l'équilibre en effort et en moment global de la pièce. Plus précisément, si on note P_1 la force imposée sur l'extrémité gauche, P_2 la force exercée au centre, et P la force donnée par l'opérateur, le système suivant doit être vérifié :

$$\begin{cases} P_1 + P = P_2 \\ cP = LP_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = \left(1 + \frac{c}{L}\right) P \\ P_1 = \frac{cP}{L} \end{cases}$$

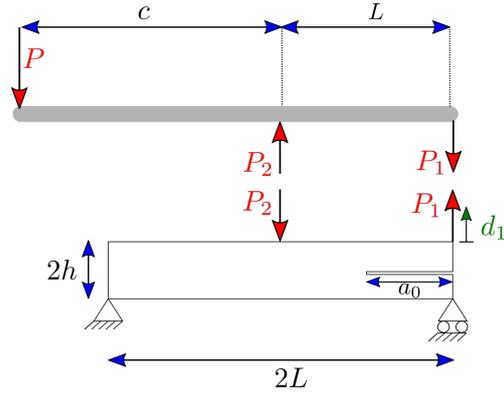


FIGURE 3.15 – Équilibre de la pièce et convention d'orientation

Solution analytique pour $a \leq L$ Lorsque la fissure est d'une longueur inférieure à la demi-longueur $a \leq L$, l'essai MMB peut se décomposer linéairement en un essai DCB et un essai ENF, avec les chargements décrits dans la figure 3.16 [p. 93] :

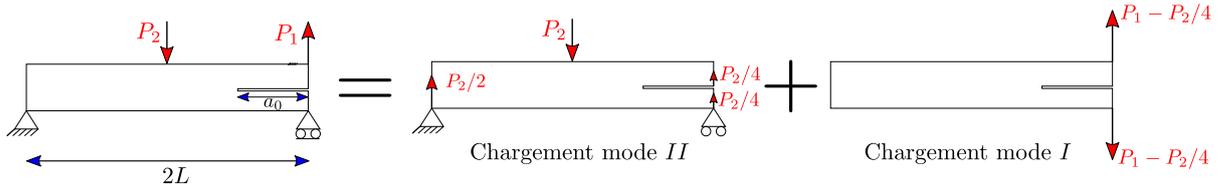


FIGURE 3.16 – Décomposition MMB

Les chargements $Q_I = P_1 - \frac{P_2}{4}$ et $Q_{II} = P_2$ apparaissant dans les essais DCB et ENF équivalents, sont donnés par [Reeder and Crews Jr, 1990, Tenchev and Falzon, 2007] :

$$Q_I = \frac{3c - L}{4L} P \text{ et } Q_{II} = \frac{c + L}{L} P$$

Les taux de restitution en mode I et II s'obtiennent à partir de ceux des essais DCB (3.37) et ENF (3.38), en remplaçant l'effort appliqué respectivement par Q_I et Q_{II} :

$$G_I = \frac{Q_I^2 a^2}{EI_a b} \quad G_{II} = \frac{3Q_{II}^2 a^2}{64EI_a b}$$

La mixité θ de l'essai est indépendante de la longueur de la fissure a , lorsque $a \leq L$.

$$\theta = G_I/G_{II} = \frac{64Q_I^2}{3Q_{II}^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{3c - L}{c + L} \right)^2 \quad (3.42)$$

Une estimation plus précise de la mixité, prenant en compte des facteurs de correction, est proposée par Blanco et al. [2006]. La propagation a lieu lorsque le taux de restitution $G = G_I + G_{II}$ atteint sa valeur critique $G_c(\theta)$, donnée par (3.40) :

$$G_I + G_{II} = \frac{a^2}{EI_a b} \left(Q_I^2 + \frac{3}{64} Q_{II}^2 \right) = G_c(\theta) \quad (3.43)$$

Ce qui nous donne l'expression de la longueur de fissure a , en fonction de l'effort appliqué P , lors de la propagation :

$$\frac{a^2 P^2}{16L^2 EI_a b} \left((3c - L)^2 + \frac{3}{4}(c + L)^2 \right) = G_c \Leftrightarrow a = \frac{L}{P} \sqrt{\frac{16EI_a b G_c}{(3c - L)^2 + \frac{3}{4}(c + L)^2}} \quad (3.44)$$

Courbe force-déplacement pour l'essai DCB équivalent La courbe force-déplacement à l'extrémité de la poutre, est donnée dans Goyal et al. [2004]. Elle s'obtient en considérant simplement une DCB sous effort imposé Q_I :

$$\Delta_1 = \frac{2Q_I a^3}{3EI} = \frac{P(a)}{EI_a} \frac{a^3(3c-L)}{6L} \quad (3.45)$$

La limite élastique est obtenue en remplaçant a par a_0 dans (3.44) :

$$P_{max} = \frac{L}{a_0} \sqrt{\frac{16EI_a b G_c}{\frac{3}{4}(c+L)^2 + (3c-L)^2}} \quad \Delta_1^{max} = \frac{a_0^2(3c-L)}{6EI_a} \sqrt{\frac{16EI_a b G_c}{\frac{3}{4}(c+L)^2 + (3c-L)^2}}$$

Pour $F < F_{max}$, $a = a_0$ et la partie élastique est obtenue en remplaçant $a = a_0$ dans (3.45). Pendant la propagation, la courbe force-déplacement est simplement obtenue en actualisant la taille de la fissure grâce à (3.44) :

$$\Delta_1 = \frac{(3c-L)L^2}{6EI_a P^2} \left(\frac{16EI_a b G_c}{(3c-L)^2 + \frac{3}{4}(c+L)^2} \right)^{3/2} \quad (3.46)$$

Ce régime se poursuit jusqu'à ce que la longueur de fissure atteigne la valeur $a = L$. L'expression de la force critique F_c et du déplacement critique associé est obtenue en prenant $a = L$ dans (3.44) :

$$P_{crit} = \sqrt{\frac{16EI_a b G_c}{\frac{3}{4}(c+L)^2 + (3c-L)^2}} \quad \Delta_1^c = \frac{P_{crit} L^2 (3c-L)}{6EI_a}$$

Validation numérique Nous reprenons les paramètres matériaux et géométriques de la poutre composite étudiée dans la sous-section 3.5.4 [p. 91]. Nous nous limiterons au cas où $a \leq L$ pour que la mixité ne change pas au cours de l'essai. On définit la mixité de manière plus usuelle avec $\lambda = G_{II}/G = 1/(1+\theta)$. Nous obtenons alors la longueur bras de levier c en inversant (3.42) :

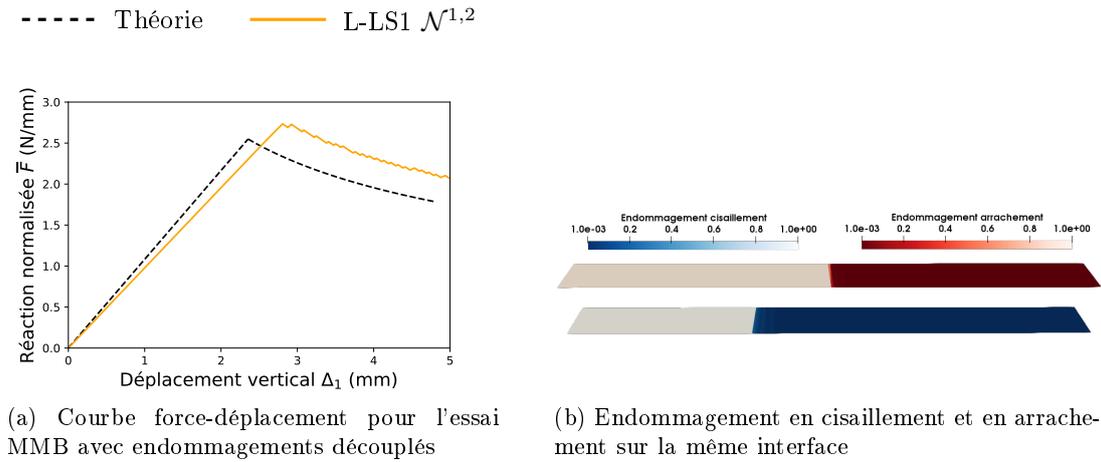
$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{4}{3} \left(\frac{3c-L}{c+L} \right)^2 \\ \lambda &= \frac{1}{1+\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = L \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{4}(\frac{1}{\lambda}-1)}}{3 - \sqrt{\frac{3}{4}(\frac{1}{\lambda}-1)}}$$

Mixité λ	80%	65%	50%	20%
c/L	0.56	0.69	0.87	2.15

La grandeur d'intérêt pour notre validation numérique est la courbe $P = f(\Delta_1)$. Sa formule analytique est obtenue en combinant les équations (3.44) et (3.45). Nous allons réaliser 4 essais balayant une large gamme de mixité.

Essai sans égalisation des prédicteurs d'endommagement Sans prendre de précaution particulière, nous utilisons le modèle $\mathcal{N}^{1,2}$ pour simuler l'essai MMB. La courbe force-déplacement obtenue, pour $\lambda = 20\%$, est alors représentée figure 3.17a [p. 95]. Nous relevons une très mauvaise adéquation entre la courbe théorique et notre simulation numérique. Celle-ci s'explique en extrayant au cours du temps le profil des endommagements en cisaillement et en arrachement le long de l'interface figure 3.17b [p. 95]. La formulation précédente, découplant les modes d'ouvertures et de cisaillement, présente un problème de taille. Rien n'interdit, *a priori*, aux endommagements d'évoluer de manière complètement indépendante, induisant ainsi des situations absurdes, dans lesquelles une interface aurait complètement rompu selon uniquement l'un, ou l'autre des modes. Sur la figure 3.17b [p. 95], les fronts d'endommagement ne coïncident pas spatialement.

Cet inconvénient majeur est évoqué par Alfano and Crisfield [2001] dont l'approche permet d'éviter le phénomène. Corigliano [1993], quant à lui, impose expressément la condition que les endommagements soient égaux lorsque l'une ou l'autre des variables atteint la valeur 1.



Égalisation des endommagements pour une rupture complète Nous retiendrons par la suite le choix de Corigliano [1993]. Dans notre algorithme par point fixe, nous imposons donc, après le calcul des prédicteurs indépendants d_ν^* et d_τ^* , que, si l'un des deux dépasse une valeur seuil proche de 1, alors l'autre prédicteur prenne également cette valeur.

Autrement dit, nous imposons que $d_\nu^* > \text{seuil} \Rightarrow d_\nu^* = d_\tau^*$ et réciproquement. Augmenté de cette hypothèse, les solutions numériques sont données en figure 3.18 [p. 95].

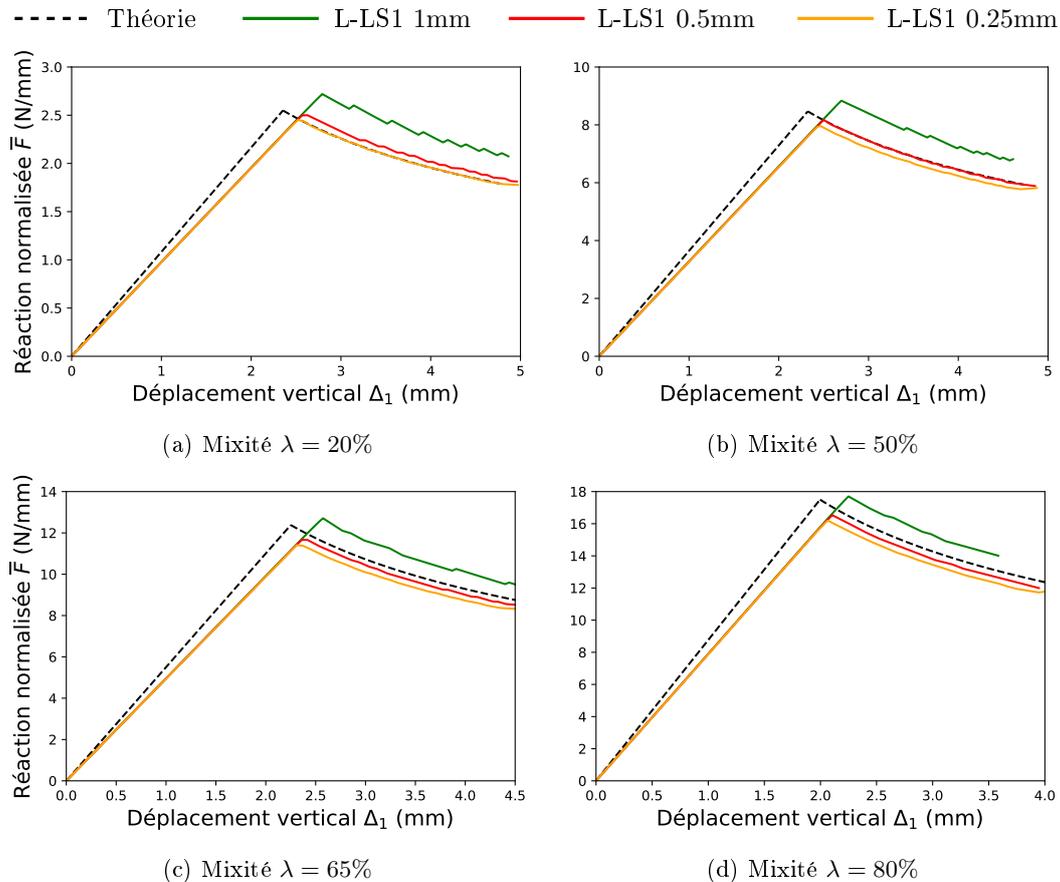


FIGURE 3.18 – Convergence pour les différents modèles $\mathcal{N}^{1,2}$ dans le cadre L-LS1

3.5.5 Essai de ruine multi-interfaces : L'essai Modified Cantilever Beam

Dans cette section, nous éprouvons la modélisation du délaminage à plusieurs interfaces. Il n'existe, à notre connaissance, aucun test standardisé répondant à cette problématique. C'est pourquoi nous comparerons nos résultats à ceux présentés dans [Alfano and Crisfield, 2001, Iarve and Mollenhauer, 2015], reproduisant les essais expérimentaux de Robinson et al. [2000]. Ainsi, une poutre DCB comme schématisée figure 3.5.5 [p. 96] sera pré-entaillée à deux endroits, et nous nous intéresserons une fois encore à la courbe force-déplacement.

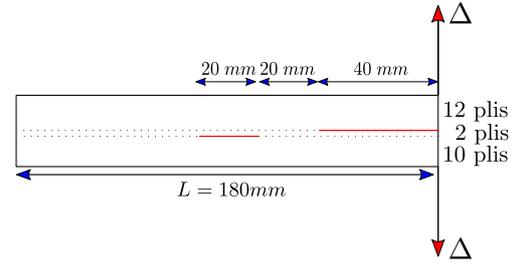


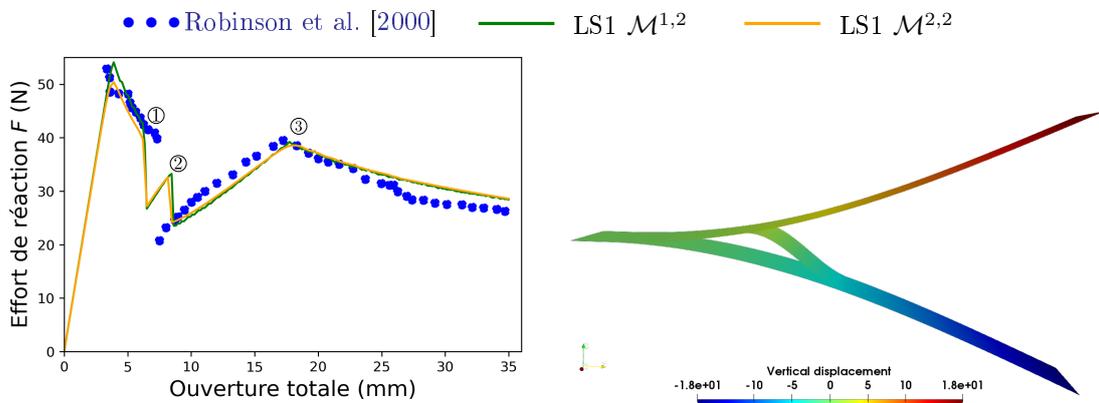
FIGURE 3.19 – Schéma de la poutre doublement entaillée

La poutre est constituée de 24 plis orientés à 0° dont les paramètres matériaux sont les suivants [Robinson et al., 2000] :

Paramètres matériaux			
$E_L = 115\text{GPa}$	$E_T = 9.5\text{GPa}$	$G_{LT} = G_{TN} = G_{LN} = 4.5\text{GPa}$	
$\nu_{LT} = \nu_{LN} = 0.29$	$\nu_{TN} = 0.3$	$G_{Ic} = 330\text{J/m}^2$	$G_{IIc} = 800\text{J/m}^2$

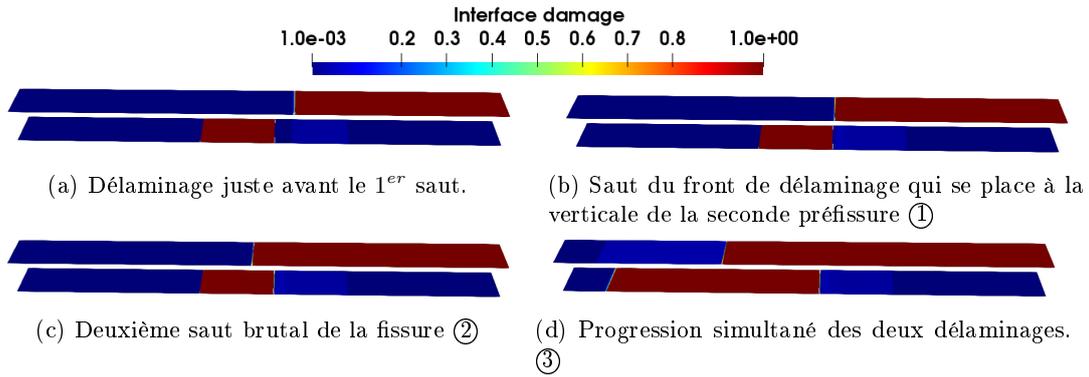
Selon Alfano and Crisfield [2001] Iarve and Mollenhauer [2015]), deux chutes de l'effort sont observables numériquement, tandis que le modèle de Robinson et al. [2000], Russo and Chen [2020] ne prévoit qu'une seule instabilité.

Résultats numériques Nous avons représenté la courbe force-déplacement dans le cas du modèle découplé figure 3.20a [p. 96]. Bien qu'une interaction existe entre les deux modes, la rupture se produit essentiellement en mode I. En accord avec le modèle numérique de Iarve and Mollenhauer [2015], notre propre modèle, utilisant seulement 3 couches équivalentes, prévoit deux instabilités. Sur la figure 3.21a [p. 97], la première chute d'effort ① correspond au saut de la première pré-fissure, laquelle vient se placer à la verticale de la seconde. Le saut suivant ② correspond à la propagation brutale de la première pré-fissure jusqu'au milieu de la seconde. A partir de ③ sur le dessin, le délaminage progresse entre la première et la deuxième couche plus vite qu'entre la deuxième et la troisième. A cause du couplage des différentes couches, nous remarquons que la rupture d'une interface induit un léger endommagement de l'interface adjacente (de l'ordre de 5%).



(a) Courbe force-déplacement pour l'essai « modified cantilever beam »

(b) Déformée dans la configuration finale.



3.5.6 Flexion trois points sur un stratifié

L'essai de flexion trois points est un cas d'étude classique de ruine d'un composite stratifié. Les mécanismes de ruptures sont en général complexes et mêlent phénomènes intra-laminaire et délaminage.

Notre première étude concerne la flexion d'un stratifié à 7 couches [45, 0, 90, 0, 90, 0, 45], dont les propriétés matériaux sont celles de la fibre de carbone T300/977-2 [Morais et al. \[2000\]](#) (voir tableau 3.5 [p. 97]). En plus des propriétés précédemment induites, nous ajoutons deux contraintes critiques d'initiations $\sigma_c^v = 70\text{MPa}$, $\sigma_c^r = 100\text{MPa}$ conformément aux valeurs proposées par [Quintanas-Corominas et al. \[2020\]](#) ou [Huchette et al. \[2015\]](#) pour le modèle de traction-séparation.

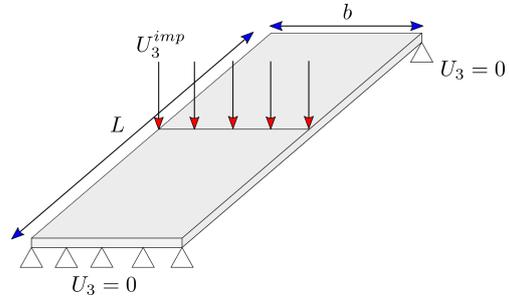


FIGURE 3.22 – Schéma de la poutre doublement entaillée

Paramètres matériaux			
$E_L = 150\text{GPa}$	$E_T = E_N = 8\text{GPa}$	$G_{LT} = G_{LN} = 6\text{GPa}$	$G_{TN} = 3.7\text{GPa}$
$\nu_{LT} = \nu_{LN} = 0.25$	$\nu_{TN} = 0.45$	$G_{Ic} = 352\text{J/m}^2$	$G_{IIc} = 1450\text{J/m}^2$

TABLE 3.5 – Propriétés mécaniques de la fibre de carbone T300/977-2 [Morais et al. \[2000\]](#)

Interfaces délaminées Le pli supérieur est soumis à une forte compression due au déplacement imposé. Par conséquent, suivre la procédure détaillée à la sous-section 3.4.5 [p. 81] s'avère essentiel, afin d'éviter un profil de ruine non physique. La première plaque à l'étude, longue de $L = 30\text{mm}$, large de 10mm , est subdivisée en 7 plis mesurant chacun 0.192mm d'épaisseur. La première rupture apparaissant est induite par un fort cisaillement au voisinage du bord libre, entre les deux plis supérieurs. Après une phase relativement stable, pendant laquelle grossissent deux lobes d'endommagement asymétriques, reflets de l'orientation du pli à 45° , se produit une phase instable. Lors de cette phase d'instabilité, 4 interfaces rompent brutalement, avec un endommagement partant des appuis. S'en suit alors une nouvelle propagation du délaminage relativement stable, lors de laquelle les fronts progressent vers le milieu de la plaque. Finalement, après quelques incréments, une asymétrisation du profil de délaminage apparaît.

3.5.7 Flexion sinusoïdale sur une poutre bi-couches

Cette section n'a pour ambition que de montrer la validité de la procédure de non-endommagement en compression et de non-interpénétration. Pour cela, nous étudions la flexion d'une poutre constituée de deux couches et simplement appuyée à ses deux extrémités (voir figure 3.24a

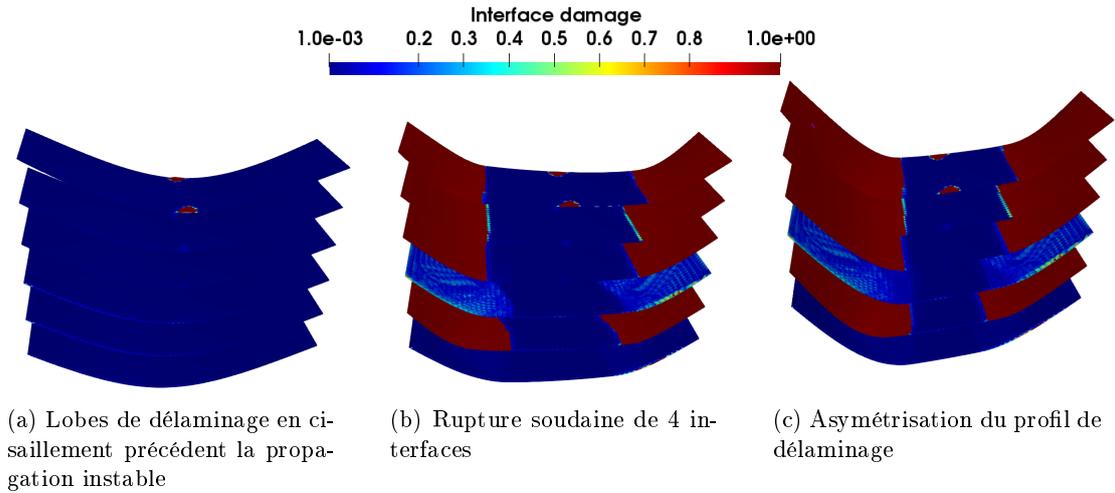


FIGURE 3.23 – Déformée de la structure et endommagement des interfaces du stratifié

[p. 98]). Nous imposons un déplacement vertical-sinusoïdal (figure 3.24b [p. 98]) à la poutre du dessus et étudions la courbe force-déplacement ainsi que la déformée. Le taux de restitution en cisaillement est choisi grand, devant celui en arrachement, de sorte que l'interface s'endommage en mode I. La poutre mesure 20mm de long, 1mm de large et est à nouveau faite du matériau de la sous-section 3.5.1 [p. 83]. L'épaisseur retenue pour chacun des bras est de 1mm. Lors de la première phase ①, l'interface entre les deux poutres est comprimée,

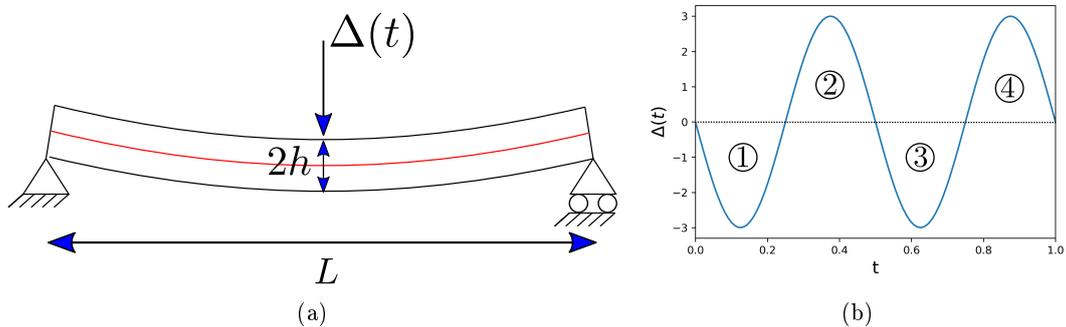


FIGURE 3.24 – Géométrie et déplacement imposée au bras supérieur de la poutre

si bien qu'aucun endommagement n'apparaît. Lors de la phase ②, associée à de la traction, le délaminage brutal de l'interface vient ramener le bras inférieur à l'horizontale, tandis que le bras supérieur continue son oscillation. En phase ③, l'interface se retrouve à nouveau en compression et notre procédure s'active pour annuler la variable d'endommagement $d^{\nu,eff}$, tandis que la variable d'endommagement en cisaillement reste égale à 1. Ce faisant, l'endommagement en cisaillement rappelle que l'interface a rompu, bien qu'elle soit toujours capable de transmettre des contraintes de compression. Lors de la phase ascendante ④, l'interface est de nouveau soumise à de la traction, et la variable d'endommagement $d^{\nu,eff}$ retourne à sa valeur unitaire. La réaction associée au déplacement, lors de la première phase de compression, puis avant le délaminage en traction, est celle d'une poutre d'épaisseur totale $e = 2\text{mm}$. Après le délaminage brutal, et pendant la phase de traction, la réaction calculée est celle d'une poutre de largeur égale à un seul des bras $e = 1\text{mm}$. Lors de la seconde phase de compression, lorsque les deux poutres ne s'interpénètrent pas, mais qu'aucun effort de cisaillement n'est transmis par l'interface, le système est équivalent à deux poutres superposées d'épaisseur $e = 1\text{mm}$. La comparaison aux solutions données par la théorie des poutres, est représentée sur la figure 3.26 [p. 99], qui montre un accord parfait témoignant du bon fonctionnement de notre procédure.

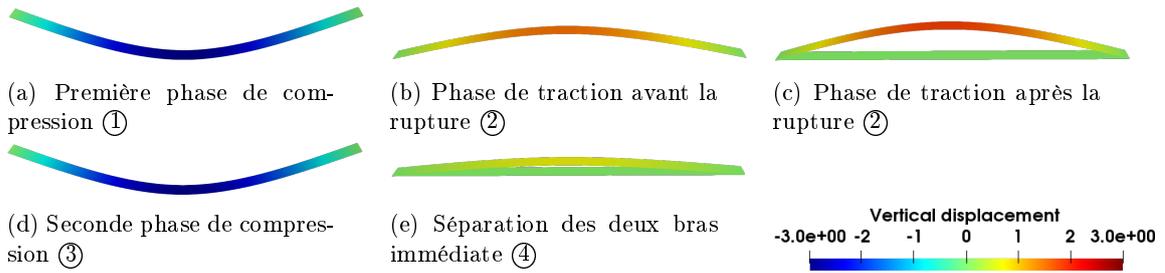


FIGURE 3.25 – Déformée de la poutre bi-appuyée soumise à un déplacement sinusoïdal.

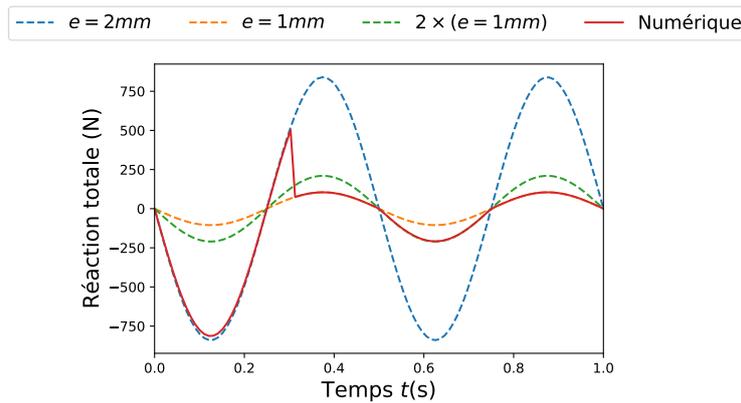


FIGURE 3.26 – Effort de réaction associé au déplacement imposé, comparaison aux solutions fournies par la théorie d'Euler Bernoulli

En bref

La modélisation du délaminage s'est ici appuyée sur plusieurs postulats fondamentaux.

- ★ Tout d'abord, l'adoption du cadre standard généralisé pour décrire les lois de comportement généralisées de notre stratifié. Ce cadre impose le postulat de deux grandeurs énergétiques (3.4), (3.5).
- ★ Un pseudo potentiel de dissipation induisant un critère elliptique, à l'usage de l'endommagement en mode mixte, a été proposé (3.11)–(3.12). Un potentiel plus simple (3.14), cas limite du précédent lorsque $\beta \rightarrow \infty$, découple les endommagements en cisaillement et en arrachement et sera à privilégier pour les essais en mode pur.
- ★ Puis, nous avons détaillé le choix de la densité d'énergie élastique endommagée dans le cadre du modèle L-LS1 (3.33). La structure diagonale par blocs de \mathbb{C}_{L-LS1} a rendu quasi-triviale l'expression de la rigidité généralisée en fonction des variables d'endommagement aux interfaces (3.19), (3.20).
- ★ Plusieurs modèles peuvent être construits en choisissant successivement le paramètre elliptique d'interpolation β , la fonction de fissuration w et la fonction de dégradation g intervenant dans (3.11) et (3.19)–(3.20).
- ★ Les comparaisons numériques avec les essais de ruines en mode I, II et mixte montrent d'excellents résultats quantitatifs. Les fonctions g et w les plus prometteuses sont obtenues pour $p \in \{1, 2\}$ et $q = 2$ (3.30)–(3.31) et (3.19)–(3.20).

In girum imus nocte ecce et consumimur igni

Synthèse : Délaminage avec le L-LS1

† Minimisation incrémentale :

$$(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{\text{intf}}) = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{intf}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) \text{ avec } \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) + \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{intf}})$$

Où les énergies sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) &= \int_{\omega} \psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) d\omega - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}) \\ \psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \mathbb{C}^{N^i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i + \boldsymbol{\chi}^i \cdot \mathbb{C}^{M^i} \cdot \boldsymbol{\chi}^i + \mathbf{D}_0^i \cdot \mathbb{C}^{\tau_0^i} \cdot \mathbf{D}_0^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} g(d_{\tau}^{j,j+1}) \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} g(d_{\nu}^{j,j+1}) c_{\nu}^{j,j+1} \langle D_{\nu}^{j,j+1} \rangle_+^2 + c_{\nu}^{j,j+1} \langle D_{\nu}^{j,j+1} \rangle_-^2 \\ \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}) &= \int_{\omega} \mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{F}^- + \mathbf{U}^n \cdot \mathbf{F}^+ d\omega \\ \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{intf}}) &= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\omega} \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}) d\omega \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varphi(\mathbf{d}^{j,j+1}) = ((G_{\text{Ic}} w_{\nu}(d_{\nu}^{j,j+1}))^{\beta} + (G_{\text{IIc}} w_{\tau}(d_{\tau}^{j,j+1}))^{\beta})^{1/\beta} \quad \beta \geq 1$$

† Choix classique concernant les fonctions de dégradation et de fissuration :

$$g(d) = (1 - d)^2 \text{ et } w(d) = d^2$$

† Résolution alternée déplacement-endommagement :

‡ Résolution en déplacement, stationnarité de l'énergie potentielle :

$$\delta_{\mathbf{U}} \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}_k^{\text{intf}}) = 0$$

‡ Résolution en endommagement, interface par interface :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial \mathbf{d}^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{*,j,j+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{d}^{j,j+1}}(\mathbf{d}^{*,j,j+1}) &= 0 \\ \text{avec } \frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial \mathbf{d}^{j,j+1}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \left(g(d_{\tau}^{j,j+1}) \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} + g(d_{\nu}^{j,j+1}) c_{\nu}^{j,j+1} \langle D_{\nu}^{j,j+1} \rangle_+^2 \right)}{\partial \mathbf{d}^{j,j+1}} \end{aligned}$$

Introduction

La problématique de rupture dans le plan d'un stratifié s'impose à l'étude comme une suite logique à celle du délaminage. Les méthodes employées ici s'inspireront largement de celles établies au chapitre 3 [p. 69], ainsi que des développements récents des méthodes dites de *champs de phase* ou de *gradient d'endommagement* qui ajoutent des propriétés de régularisation aux solutions issues des modèles d'endommagement locaux.

- ★ D'abord, nous préciserons le cadre d'étude de la ruine intra-laminaire à la section 4.1 [p. 102]. Comme au chapitre traitant du délaminage, nous adopterons le cadre standard généralisé pour justifier thermodynamiquement la consistance des lois retenues.
- ★ La section 4.2 [p. 106] précisera successivement nos choix concernant : le potentiel de dissipation puis l'énergie libre de Helmholtz. Les lois d'évolutions découlant de ces postulats concluront ce paragraphe.
- ★ La densité d'énergie élastique endommagée, témoin de la variation de rigidité de la structure résultant de la dégradation des plis, sera étudiée section 4.3 [p. 107].
- ★ La section 4.4 [p. 110] convertira les lois précédemment énoncées dans un cadre variationnel rassurant. Le problème élasto-endommageable s'énoncera comme équivalent à la minimisation d'une énergie.
- ★ Dans la section 4.5 [p. 113], nous mettrons à l'épreuve notre modélisation, au travers d'essais variés, avec des comparaisons numériques et analytiques.
- ★ L'interaction entre ruine intra-laminaire et délaminage marquera le dernier jalon de la modélisation de ruine des composites stratifiés par les modèles multi-particulaires. Ainsi, section 4.6 [p. 120], nous aborderons cette interaction, et nous illustrerons, au travers d'un exemple simple la capacité des modèles de plaques multicouches formulés en contrainte à modéliser quantitativement cette interaction.

4.1 Cadre d'étude de la ruine intra-laminaire

4.1.1 Représentation de la dégradation des plis

Variables d'endommagement

La rupture matricielle et la rupture fibre sont deux mécanismes de ruine intra-ply, fréquents dans les matériaux composites. Ces deux mécanismes se produisent à des niveaux énergétiques très différents, car la résistance à la rupture de la résine époxy, constituant la matrice dans laquelle sont plongées les fibres de carbone, est bien souvent inférieure à celle de ces dernières. Dans ce chapitre, nous distinguerons donc réellement ces deux mécanismes physiques de rupture. Le premier surviendra lorsque l'énergie élastique longitudinale sera trop importante, conduisant à une cassure simultanée, et des fibres, et de la matrice. Le second se déclenchera lorsque l'énergie élastique dans le sens transverse, franchissant un certain seuil, provoquera une rupture de la matrice seule. Cette situation est résumée sur la figure 4.1 [p. 102]

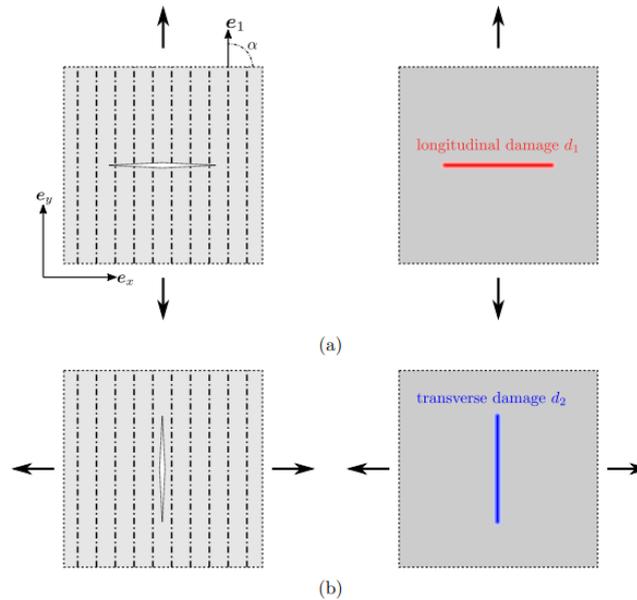


FIGURE 4.1 – Modes de ruine d'un plan du composite ([Bleyer and Alessi, 2018])

Postulat 4.1.1 Variables d'endommagement pour la fissuration d'un pli. Nous supposons que la dégradation de chacun des plis anisotropes est matérialisée par deux variables d'endommagement indépendantes d_L et d_T , quantifiant respectivement la dégradation des fibres de la structure et la ruine de la matrice dans le sens transverse.

Un vecteur \mathbf{d}^{pli} concatène les variables d'endommagement d_L^n , d_T^n relatives à chacun des plis :

$$\mathbf{d}^{\text{pli}} = (d_L^1, d_T^1, \dots, d_L^n, d_T^n)$$

Il est crucial de se rappeler que les endommagements affectent les rigidités longitudinale et transverse du pli *dans son propre repère d'orthotropie*. Il sera donc nécessaire, le cas échéant, de tourner les contraintes exprimées dans le repère global, pour pouvoir les estimer dans le repère local du pli.

Fissure complètement traversante

Un pli est une entité physiquement tridimensionnelle, réduite à une structure plane par notre modélisation multi-particulaire. Contrairement au cas du délaminage, dans lequel la fissure suit *a priori* l'interface séparant deux plis adjacents, celles qui apparaissent au sein d'une

couche peuvent emprunter des trajets particulièrement complexes. Notre approche intégrale du problème consiste à *flouter* les champs tridimensionnels, en réalisant une intégration dans chaque pli, donc en ne considérant que des champs *moyens*. Dès lors, il serait vain d’espérer capter une trajectoire de fissure « alambiquée ». Aussi, nous postulons d’emblée une simplification concernant le trajet de fissure :

Hypothèse 4.1.1 Fissure complètement traversante. *Nous supposons qu’une fissure fendant un pli d’indice m , le traverse complètement (voir figure 4.2 [p. 103]). Sa surface est donc donnée par $S = e^m \ell$, où ℓ désigne sa longueur dans le plan ($\underline{e}_L, \underline{e}_T$).*

Cette hypothèse pourrait sembler simpliste au regard de l’orientation des fissures matricielles

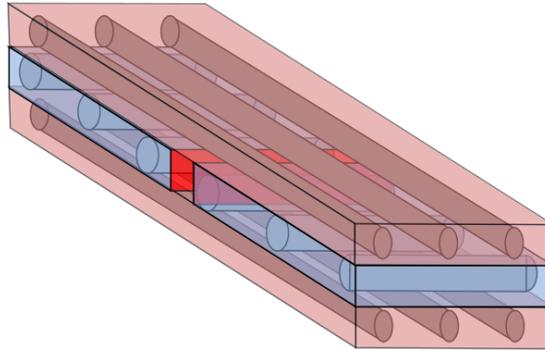


FIGURE 4.2 – Fissure transversale fendant complètement le pli bleu.

réellement relevées dans les essais de migration [Gong et al., 2018, McElroy, 2017, Ratcliffe et al., 2013]. Elle semble pourtant bien avoir permis de capter de tels phénomènes avec succès [Higuchi et al., 2017].

Notre travail consiste à approcher la rupture grâce à une méthode régularisée, par laquelle la dégradation de la structure s’opère au moyen de variables d’endommagements définies sur tout le domaine, et non seulement sur la fissure. La zone intra-laminaire endommagée aura cette fois la dimension d’un volume, au lieu d’une simple surface comme c’était le cas lors du délaminage.

Remarque 4.1.1 Dans les paragraphes qui vont suivre, nous devons bien retenir que les directions nécessairement à distinguer pour l’endommagement, correspondent aux directions d’orthotropie du pli. Aussi, nous supposons que les fibres seront orientées selon \underline{e}_L , c’est-à-dire alignées suivant la direction longitudinale.

4.1.2 Le cadre standard généralisé

L’échec des lois de comportement locales non régularisées

Nous utilisons de nouveau la mécanique de l’endommagement continu, associée au cadre standard généralisé, afin de construire une loi de comportement thermodynamiquement cohérente. Pour cela, une inclination bien naturelle aurait pu nous conduire à reprendre les lois (3.4)–(3.5) en y remplaçant simplement le vecteur endommagement \mathbf{d}^{intf} par une variable \mathbf{d}^{pli} qui traduise la dégradation des plis de notre composite, puis en conservant une énergie libre de Helmholtz simple, comme dans l’équation (3.15), complétée d’un potentiel de dissipation (3.6). Mais cet amalgame échoue dans le cas présent, à cause du caractère adoucissant de la loi de comportement. Le problème à l’étude nécessite en effet une régularisation, sans quoi un phénomène de localisation et une dépendance au maillage polluent la solution numérique.

Lois de comportement non-locales régularisées par gradient

Pour surmonter les lacunes des modèles locaux à prédire la rupture dans le plan, des versions *régularisées* ajoutant tantôt un terme en gradient de la déformation, tantôt en gradient

d'endommagement ont été proposées. Une comparaison pratique et théorique de ces deux approches a été détaillée par [Le et al. \[2018\]](#). La régularisation par gradient d'endommagement en est ressortie physiquement et mathématiquement plus légitime, c'est pourquoi nous l'utiliserons par la suite.

Lien avec les approches par champ de phase

Formellement, dans le cadre de nos modèles multiparticulaires, simuler la rupture d'un pli revient à modéliser une fissure dans un milieu plan anisotrope. Pour cela, la théorie de [Griffith \[1921\]](#) prédit la propagation de la fissure lorsque le taux de restitution d'énergie atteint une valeur critique, le long d'un chemin préétabli. Ce type de critère requiert d'évaluer la variation de l'énergie potentielle de la structure à l'équilibre, pour un incrément de longueur de la fissure. Cependant, ce modèle ne permet pas de prédire la création ex-nihilo d'une fissure, car une singularité de contrainte pré-existante est nécessaire pour initier la dégradation. Récemment, les modèles variationnels à champ de phase (*phase-field*) [[Bourdin et al., 2000](#)], basés sur l'approche variationnelle de la rupture de [Francfort and Marigo \[1998\]](#), également connus sous le nom de modèles d'endommagements à gradient [[de Borst and Verhoosel, 2016](#)], ont montré leur robustesse pour numériquement prédire l'initiation et la propagation de l'endommagement. Ces modèles permettent de s'affranchir du problème lié à la connaissance de la trajectoire de la fissure *a priori*. De plus, des résultats mathématiques ont montré la consistance de cette méthode à converger vers le modèle de Griffith, lorsque le paramètre de régularisation ℓ_0 tend vers 0.

Dans la théorie de Griffith, une fissure dans un matériau fragile est une surface de discontinuité pour le champ de déplacement, avec une contrainte nulle tout son long. En supposant que la trajectoire de la fissure est connue *a priori*, elle se propage lorsque la dérivée première de l'énergie potentielle, par rapport à sa longueur à l'équilibre, atteint un seuil critique. Cette limite, appelée ténacité, est une propriété du matériau. Le génie de Griffith a été de lier la longueur de la fissure à l'énergie de surface, de sorte que la condition de propagation de la fissure revienne à une compétition entre l'énergie de surface et l'énergie globale récupérable. Par essence, ce critère est variationnel et peut être refondu en un principe de minimalité. L'idée de [Francfort and Marigo \[1998\]](#) dans leur *approche variationnelle de la rupture*, est de conserver la vision de Griffith et de l'étendre à toute géométrie de fissure possible, et à toute évolution temporelle complexe.

Si l'on présume l'existence et l'unicité d'une évolution régulière des fissures, alors le critère de Griffith suppose implicitement que l'énergie \mathcal{E} définie par :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}), \Gamma) \, d\Omega + \int_{\Gamma} G_c \, dS - \mathcal{W}_{\text{ext}}$$

soit une fonction convexe de la surface de fissuration Γ (voir [[Bourdin et al., 2008](#)]). La surface de la fissure $\Gamma(t)$ minimise la fonction d'énergie \mathcal{E} parmi tous les $\Gamma \supseteq \Gamma(t)$, le long du chemin prédéfini de la fissure. Motivés par les faits ci-dessus, [Francfort and Marigo \[1998\]](#) ont considéré la rupture fragile comme un problème de minimisation de l'énergie sans condition sur la trajectoire. Le couple $(\underline{u}(t), \Gamma(t))$ est supposé être un minimiseur global de la fonctionnelle énergie \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} (\underline{u}(t), \Gamma(t)) = \arg \min_{\Gamma \supseteq \Gamma(t)} \mathcal{E}(\underline{u}, \Gamma) \\ \underline{u} = \underline{u}^D(t) \text{ sur } \partial\Omega_D \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dans cette approche variationnelle de la rupture fragile, les fissures se propagent le long du chemin de moindre énergie de sorte que l'initiation peut être traitée dans un solide initialement parfaitement intact.

Une excellente revue bibliographique des modèles régularisés par champ de phase, que nous adopterons pour toute l'étude de la rupture, a été réalisée par [Wu et al. \[2018\]](#). Nous renvoyons le lecteur à cet ouvrage pour plus de détails.

L'équation (4.1) est un problème de discontinuité libre ([Braides et al., 1998]), dans lequel le déplacement \underline{u} et les ensembles Γ (où se produisent les sauts de \underline{u}) sont tous deux inconnus *a priori*. Afin d'implémenter numériquement le problème qui en résulte, Bourdin et al. [2000] ont proposé d'utiliser le modèle dit *de rupture variationnelle régularisée*, basé sur la régularisation d'Ambrosio and Tortorelli [1990], dans la segmentation d'images. L'approche consiste à approximer la fissure par un champ d'endommagement d'épaisseur non nulle dégradant continûment la rigidité du matériau. Ce modèle est mal posé mathématiquement (voir [Comi et al., 1995]), en raison de l'absence d'un terme minorant l'épaisseur sur laquelle se localise l'endommagement. En effet, puisque l'énergie de surface est proportionnelle à l'épaisseur de la zone endommagée, il est possible de construire, dans une expérience de traction unidimensionnelle, une barre complètement rompue sans payer d'énergie, c'est-à-dire en concentrant la zone endommagée sur une épaisseur tendant vers 0. Pour surmonter ce problème, l'idée est de régulariser l'énergie de fissuration. La régularisation adoptée prend ses racines dans les fonctions d'Ambrosio and Tortorelli [1992], Ambrosio et al. [1988], inspirées des travaux de Mumford and Shah [1989] sur la segmentation d'images. Les modèles par *gradient d'endommagement* sont étroitement liés aux fonctions d'Ambrosio-Tortorelli et ont été adaptés à la rupture fragile. Les fissures infiniment fines sont remplacées par un endommagement diffus d aussi appelé *champ de phase*, de largeur finie, paramétré par une longueur caractéristique ℓ_0 . Chambolle [2004], dans le cas de l'élasticité linéarisée, a prouvé que la solution régularisée obtenue Γ -converge [Braides et al., 2002] vers celle du problème singulier.

4.1.3 Puissance des efforts intérieurs et équations d'équilibre généralisées

Le gradient ∇d est un terme non local introduit pour traduire l'influence de l'endommagement sur le voisinage du point considéré. Nous définissons le vecteur $\nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}$ qui contient les gradients de chacune des variables scalaires de \mathbf{d}^{pli} :

$$\nabla \mathbf{d}^{\text{pli}} = (\nabla d_L^1, \nabla d_T^1, \dots, \nabla d_L^n, \nabla d_T^n)$$

L'endommagement est produit par des mouvements microscopiques qui brisent les liaisons entre les particules. À l'échelle macroscopique, ces mouvements sont décrits par les taux d'endommagement $\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}$ et $\nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}$.

Postulat 4.1.2 Expression de la puissance des efforts intérieurs. *Nous supposons que les puissances de ces taux doivent être également prises en compte dans la puissance des efforts intérieurs :*

$$\mathcal{P}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}, \nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}) = \int_{\omega} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}} + \mathbf{H} \cdot \nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}} \, d\omega \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) définit les champs généralisés, $\boldsymbol{\Sigma}$, \mathbf{V} , et \mathbf{H} , comme duaux de respectivement \mathbf{E} , $\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}$ et $\nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}$. La puissance des efforts extérieurs elle, demeure inchangée. En appliquant le principe des puissances virtuelles, sont obtenues les équations d'équilibre généralisé, portant sur la contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$, mais également concernant les micro-forces \mathbf{V} et \mathbf{H} :

$$\text{div } \mathbf{H} - \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ dans } \omega \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \quad (4.4)$$

Hypothèse 4.1.2 Variables dissipatives. *Nous supposons ici que les contraintes généralisées $\boldsymbol{\Sigma}$ et \mathbf{H} ne sont pas des variables dissipatives : $\boldsymbol{\Sigma}^d = \mathbf{H}^d = 0$.*

L'admissibilité thermodynamique est alors garantie en supposant que :

$$\mathbf{V}^d \in \partial_{\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}} \Phi(\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}, \nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}; \mathbf{d}^{\text{pli}}, \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}})$$

où $\Phi(\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}, \nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}; \mathbf{d}^{\text{pli}}, \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}})$ désigne le potentiel de dissipation, associé aux phénomènes de ruine intra-laminaire, lequel doit être convexe et positivement homogène de degré 1 par rapport aux taux $(\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}, \nabla \dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}})$. Les lois d'état des variable non dissipatives s'écrivent, dans le

cadre standard généralisé, comme la variation de l'énergie libre de Helmholtz par rapport aux endommagements \mathbf{d}^{pli} et leurs gradients $\nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}$:

$$\mathbf{V}^{nd} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}^{\text{pli}}} \text{ et } \mathbf{H}^{nd} = \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}} \quad (4.5)$$

La loi complémentaire, relative à la seule variable dissipative \mathbf{V}^d , s'obtient en combinant les lois d'états (4.5) et l'équation d'équilibre (4.3)

$$\mathbf{V} = \text{div } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{H}^{nd} = \text{div} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}} \right) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{V}^d = \mathbf{V} - \mathbf{V}^{nd} = \text{div} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{d}^{\text{pli}}} \in \partial_{\mathbf{d}^{\text{pli}}} \Phi(\mathbf{d}^{\text{pli}}, \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}; \mathbf{d}^{\text{pli}}, \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}) \quad (4.7)$$

La loi complémentaire non-locale (4.7) généralise (3.3), exposée dans le cadre du délaminage, en considérant la dépendance de l'énergie libre Ψ en fonction du gradient de l'endommagement $\nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}$.

Point clé 4.1.1. *L'élaboration du modèle d'endommagement intra-laminaire repose une nouvelle fois sur deux choix fondamentaux :*

- ★ *La donnée d'un potentiel de dissipation Φ thermodynamiquement cohérent.*
- ★ *L'expression de l'énergie libre Ψ , en fonction des variables d'endommagement intra-laminaire, empêchant les phénomènes de localisation, et qui comportera maintenant un terme dépendant du gradient de l'endommagement.*

4.2 Potentiel de dissipation, énergie libre de Helmholtz, loi d'évolutions

Postulat 4.2.1 Potentiel de dissipation. *Nous postulons que chacun des plis, et chacun des modes (rupture longitudinale ou transverse), contribue de façon découplée au potentiel de dissipation total :*

$$\Phi(\mathbf{d}^{\text{pli}}; \mathbf{d}^{\text{pli}}) = \sum_{m=1}^n e^m \left(\phi(\dot{d}_L^m; G_{Lc}^m, \ell_L^m, d_L^m) + \phi(\dot{d}_T^m; G_{Tc}^m, \ell_T^m, d_T^m) \right) \quad (4.8)$$

avec $\phi(\dot{d}; G_c, \ell, d) = \frac{G_c}{\ell c_w} w'(d) \dot{d} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{d})$

ϕ est un potentiel convexe par rapport au taux \dot{d} , paramétré par les taux de restitution G_c , l'état d'endommagement d et les longueurs de régularisation ℓ .

- G_{Lc} , G_{Tc} désignent les taux de restitution en énergie critique longitudinal et transverse.
- ℓ_L , ℓ_T désignent des longueurs de régularisation, paramètres numériques pilotant la longueur caractéristique de l'étalement de l'endommagement. Les longueurs caractéristiques ℓ_L , ℓ_T , peuvent être interprétées comme des paramètres matériaux dans le cadre des modèles AT1 et AT2 présentés dans la suite. Elles seront donc prises différentes pour la matrice et pour les fibres. En effet, la solution analytique homogène d'un problème quasi-statique unidimensionnel, permet de lier le paramètre d'échelle de longueur à une contrainte critique du matériau [Borden et al., 2012, Zhang et al., 2017]. Ainsi, les modèles PF variationnels sont uniquement caractérisés par des paramètres physiques.
- $w(d)$ est une fonction analogue à celle présentée à l'équation (3.30) dans le chapitre 3 [p. 69] relatif au délaminage.
- c_w désigne des constantes de normalisation assurant que pour une fissure pleinement développée, l'énergie dissipée est égale aux taux de restitution en énergie critique. Elles dépendent des fonctions w retenues.

Toutes ces grandeurs concernent le $m^{\text{ème}}$ pli.

Le potentiel de dissipation (4.8) satisfait bien les propriétés attendues. Il est convexe, positivement homogène de degré 1 par rapport au taux $\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}}$. Chaque potentiel de dissipation élémentaire $\phi(\dot{d}; d)$ peut également s'écrire en fonction d'une densité ϑ comme au chapitre 3 [p. 69] qui précède :

$$\phi(\dot{d}, d) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{d}} \dot{d} + I_{\mathbb{R}^+}(d) = \overline{\vartheta(d)} + I_{\mathbb{R}^+}(d)$$

Postulat 4.2.2 Énergie de Helmholtz régularisée. *Nous postulons que le gradient de l'endommagement intra-laminaire contribue à l'énergie libre de Helmholtz de notre mille-feuille. De manière générique, nous exprimons Ψ sous la forme :*

$$\Psi = \psi_{el}^\omega(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}} \cdot \mathbb{E} \cdot \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}} + I_{[0,1]}(\mathbf{d}^{\text{pli}}) \quad (4.9)$$

avec :

$$\mathbb{E} = \text{diag} \left(\frac{e^1 \ell_L^1 G_{Lc}^1}{c_w} \mathbb{I}_2, \frac{e^1 \ell_T^1 G_{Tc}^1}{c_w} \mathbb{I}_2, \dots, \frac{e^n \ell_L^n G_{Lc}^n}{c_w} \mathbb{I}_2, \frac{e^n \ell_T^n G_{Tc}^n}{c_w} \mathbb{I}_2 \right)$$

La loi complémentaire (4.7), non locale, pilotant l'évolution de nos variables d'endommagement s'écrit alors, $\forall \bullet \in \{L, T\}$, $\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$e^m \frac{\ell_{c\bullet}^m G_{c\bullet}^m}{c_w} \Delta d_{\bullet}^m - \frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_{\bullet}^m} \leq \frac{G_{c\bullet}^m e^m}{\ell_{c\bullet} c_w} w'(d_{\bullet}^m) \Leftrightarrow -\frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_{\bullet}^m} \leq e^m \frac{G_{c\bullet}^m}{\ell_{c\bullet} c_w} (w'(d_{\bullet}^m) - (\ell_{\bullet}^m)^2 \Delta d_{\bullet}^m) \quad (4.10)$$

Si nous notons $Y_{\bullet}^m = -\frac{\partial \psi_{el}^\omega(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{\text{pli}})}{\partial d_{\bullet}^m}$ le taux de restitution pour le $m^{\text{ème}}$ pli et le $\bullet^{\text{ème}}$ mode, et $\overline{Y_{\bullet}^m} = e^m \frac{G_{c\bullet}^m}{\ell_{c\bullet} c_w} (w'(d_{\bullet}^m) - (\ell_{\bullet}^m)^2 \Delta d_{\bullet}^m)$, alors la loi d'évolution de la variable d_{\bullet}^m s'écrit encore :

$$\begin{aligned} Y_{\bullet}^m - \overline{Y_{\bullet}^m} &\leq 0 \\ \dot{d}_{\bullet}^m &\geq 0 \\ \dot{d}_{\bullet}^m (Y_{\bullet}^m - \overline{Y_{\bullet}^m}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.3 Énergie élastique endommagée

L'expression de la densité d'énergie élastique endommagée traduit comment la rigidité de la structure évolue, lorsque l'endommagement progresse. L'étude de la ruine intra-laminaire, dans le cadre du modèle SCLS1, serait trop complexe à cause des nombreux couplages entre les comportements membranaires de chacune des couches, rendant l'interpolation de la rigidité infernale. Nous nous limiterons donc par la suite au modèle LS1, et plus spécifiquement à sa version condensée le L-LS1.

Les deux phénomènes à l'étude dans ce chapitre, la ruine longitudinale ou « rupture fibre », et la ruine transverse aussi appelée fissuration matricielle, se conçoivent nettement plus facilement lorsque nous les considérons dans le repère matériau du pli. C'est pourquoi, nous travaillerons ensuite essentiellement dans ce repère et préciserons ultérieurement comment transformer les relations obtenues dans le repère global.

4.3.1 Interpolation de la rigidité membranaire

La rigidité membranaire du modèle L-LS1 a ceci de remarquable qu'elle découple naturellement les différents plis. En effet, la matrice de rigidité \mathbb{C}^K est diagonale par blocs, et simplement la concaténation des rigidités élémentaires \mathbb{C}^{N^m} , \mathbb{C}^{M^m} . Si l'on considère une fissure fendante le pli m , cette fissure est matérialisée par deux variables d_L^m , et d_T^m , impactant seulement les blocs \mathbb{C}^{N^m} et \mathbb{C}^{M^m} pour la partie membranaire. L'interpolation se réalisera pli par pli, dès lors que

nous aurons déterminé une expression explicite des matrices de rigidité rompues, $\mathbb{C}_{L,d}^{*m}$ et $\mathbb{C}_{T,d}^{*m}$, où $*$ $\in \{\mathbf{N}, \mathbf{M}\}$ associées aux fissurations transverse et longitudinale. Les calculs complets, et simplifications légitimes, sont donnés dans l'annexe A [p. 151] à la section A.5 [p. 159]

Il convient de rappeler que, par commodité, tous les tenseurs et vecteurs de cette partie sont exprimés dans le repère matériau. Nous introduirons, dans un second temps, la collection de matrices de rotations, permettant le passage des repères matériaux de chacun des plis au repère global.

Postulat 4.3.1 Rigidité membranaire endommagée locale. *Nous proposons ci-dessous l'expression des rigidités membranaires $\mathbb{C}_{loc}^{\mathbf{N}^m}$, $\mathbb{C}_{loc}^{\mathbf{M}^m}$, du pli m de notre structure, dans son propre repère d'orthotropie :*

$$\mathbb{C}_{loc}^{\mathbf{N}^m}(d_L^m, d_T^m) = e^m \mathbb{C}_{cp}^m(d_L^m, d_T^m) \text{ et } \mathbb{C}_{loc}^{\mathbf{M}^m}(d_L^m, d_T^m) = \frac{(e^m)^3}{12} \mathbb{C}_{cp}^m(d_L^m, d_T^m)$$

$$\text{avec } \mathbb{C}_{cp}^m(d_L^m, d_T^m) = \frac{1}{1 - \nu_{LT}^m \nu_{TL}^m} \begin{pmatrix} g(d_L^m) E_L^m & g(d_L^m) g(d_T^m) \nu_{LT}^m E_T^m & 0 \\ g(d_L^m) g(d_T^m) \nu_{LT}^m E_T^m & g(d_T^m) E_T^m & 0 \\ 0 & 0 & g(d_L^m) g(d_T^m) G_{LT}^m \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Les matrices de rigidités $\mathbb{C}_{loc}^{*m}(d_L^m, d_T^m)$ associées à \mathbf{N} et \mathbf{M} se déduisent naturellement en pondérant les coefficients de la matrice de rigidité en contrainte plane matrice \mathbb{C}_{cp}^m , puis en la multipliant par e^m ou $\frac{(e^m)^3}{12}$ respectivement.

Une fois obtenue la rigidité dans le repère locale du pli, nous la tournons à l'aide des matrices de rotations :

$$\mathbb{C}_{glob}^{*m} = \mathbb{R}_3(-\theta_m)^\top \cdot \mathbb{C}_{loc}^{*m} \cdot \mathbb{R}_3(-\theta_m) \text{ avec } \mathbb{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 2\cos(\theta) \sin(\theta) & -2\cos(\theta) \sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

4.3.2 Interpolation de la rigidité en cisaillement intra-laminaire

Le choix de la rigidité en cisaillement intra-laminaire ne pose aucune difficulté. Dans le repère local du pli m , la matrice de rigidité $\mathbb{C}\tau_0^m$ est diagonale :

$$\mathbb{C}\tau_0^m = \left(\frac{2e^m \mathbb{S}_{cis}^m}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{2e^m} \begin{pmatrix} G_{LT}^m & 0 \\ 0 & G_{LN}^m \end{pmatrix}$$

Par conséquent, sa version endommagée par les variables longitudinale et transverse est :

$$\mathbb{C}\tau_0^m(d_L^m, d_T^m) = \frac{3}{2e^m} \begin{pmatrix} g(d_L^m) G_{LT}^m & 0 \\ 0 & g(d_T^m) G_{LN}^m \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Les déformations \mathbf{D}_0^m , associées aux efforts de cisaillement intra-laminaire τ_0^m , sont de simples vecteurs, dont la rotation s'effectue grâce aux matrices orthogonales usuelles du plan :

$$\mathbb{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

4.3.3 Interpolation de la rigidité en cisaillement inter-laminaire

Il existe deux mécanismes distincts susceptibles de dégrader le cisaillement d'interface τ : le délaminage ou la fissuration des plis adjacents. À l'état tridimensionnel, la rupture d'un pli complètement traversant se produit sur une surface. À l'interface, cette cassure est donc perçue comme une ligne sur laquelle le cisaillement doit s'annuler. La logique impose par conséquent, étant entendu que cette ligne est de mesure nulle, de négliger son influence sur le cisaillement d'interface global.

Pourtant, ce sont bien les caractéristiques d'élasticité 3D des plis adjacents aux interfaces qui confèrent à ces dernières leurs rigidités. Aussi bien pour l'arrachement $\nu^{j,j+1}$ que pour le cisaillement $\tau^{m,m+1}$, les souplesses d'interfaces sont issues du calcul de l'énergie complémentaire, intégrée sur la hauteur de chacun des plis. Par conséquent, la ruine intra-laminaire devrait nécessairement également abattre les propriétés de l'interface.

Néanmoins, cette interaction est particulièrement complexe, et nous postulons ici simplement que les propriétés élastique de l'interface demeurent inchangées, indépendamment des fissurations intra-laminaire. Nous asseyons le couplage fissuration intra-laminaire–délaminage sur un effet purement structurel. Une cassure du pli induit une annulation brutale des efforts membranaires, qui en retour, en vertu des équations d'équilibres, induit une singularité de contraintes d'interfaces. Nous scruterons, à la section 4.6 [p. 120] si cette singularité est suffisante pour initier le délaminage. Quelques pistes alternatives, concernant la dépendance des rigidités d'interfaces en fonction de la ruine intra-laminaire, sont mentionnées à la section A.6 [p. 162].

4.3.4 Expression de l'énergie élastique endommagée

Les rigidités, fonction de l'état courant d'endommagement, maintenant précisées (4.12), (4.13), (4.14), nous exhibons l'expression de la densité d'énergie élastique endommagée :

$$2\psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) = \sum_{m=1}^n \varepsilon^m \cdot \mathbb{C}^{\mathbf{N}^m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \varepsilon^m + \chi^m \cdot \mathbb{C}^{\mathbf{M}^m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \chi^m + \mathbf{D}_0^m \cdot \mathbb{C}^{\tau_0^m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \mathbf{D}_0^m + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\tau^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} + c_{\nu}^{j,j+1} (D_{\nu}^{j,j+1})^2 \quad (4.15)$$

Cette densité d'énergie élastique s'exprime linéairement selon les fonctions de dégradation g . Le choix de la prise en compte du cisaillement transverse pour la prédiction de l'endommagement n'est ici pas évident. Par simplicité, nous convenons d'approcher le cisaillement transverse dans le pli par sa seule valeur au milieu du pli. L'expression simple de la dérivée de l'énergie élastique se déduit de (4.15) :

$$2 \frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial \mathbf{d}^{\bullet}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) = \varepsilon^m \cdot \frac{\partial \mathbb{C}^{\mathbf{N}^m}}{\partial \mathbf{d}^{\bullet}}(d_L^m, d_T^m) \cdot \varepsilon^m + \chi^m \cdot \frac{\partial \mathbb{C}^{\mathbf{M}^m}}{\partial \mathbf{d}^{\bullet}}(d_L^m, d_T^m) \cdot \chi^m + \mathbf{D}_0^m \cdot \frac{\partial \mathbb{C}^{\tau_0^m}}{\partial \mathbf{d}^{\bullet}}(d_L^m, d_T^m) \cdot \mathbf{D}_0^m \quad (4.16)$$

Insérée dans l'équation (4.11), elle fournit le système non linéaire, non local, couplé, à résoudre.

Remarquons ici que nous ne distinguons, ni pour la rupture fibre, ni pour la fissuration matricielle, les contributions des modes I et II. Un unique taux de restitution en énergie *équivalent*, ainsi qu'une unique contrainte critique à la rupture, caractérisent l'activation de chacun de ces mécanismes. Pourtant, concernant la fissuration matricielle, est souvent utilisé le critère de Hashin [1980], lequel postule l'existence de plusieurs contraintes critiques d'initiation, suivant le mode de sollicitation. Dès lors, il serait intéressant d'évaluer la pertinence de ce critère et de voir si le dédoublement de la représentation de l'endommagement de la ruine matricielle, comme pour l'étude du délaminage, ne permettrait pas une meilleure représentation de ce phénomène.

4.3.5 Endommagement en compression pour la rupture intralaminare

Tout comme nous l'avions déjà souligné à la sous-section 3.4.5 [p. 81], le modèle, maintenu en l'état actuel, n'opère aucune distinction traction-compression lors du calcul de l'endommagement. Aussi allons-nous reprendre, pour la ruine intra-laminaire, l'approche de Ambati et al. [2015], adaptée une première fois avec succès lors de l'étude du délaminage.

Répétons qu'empêcher le développement des fissures en compression ne pose aucune difficulté particulière et reprend l'idée déjà exposée à la sous-section 3.4.5 [p. 81]. C'est à dire que la densité d'énergie élastique figurant dans notre principe de minimisation ne comportera que la partie positive des déformations membranaires ε_{LL} et ε_{TT} . Dans l'équation (4.15), postulons que la contribution membranaire s'écrive :

$$\psi_{el}^{\omega, N} = \frac{1}{2} \langle \varepsilon_{loc}^m \rangle \cdot \mathbb{C}_{loc}^{N^m} \cdot \langle \varepsilon_{loc}^m \rangle \quad (4.17)$$

avec la déformation locale suivante :

$$\langle \varepsilon_{loc}^m \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle \varepsilon_{LL}^m \rangle_+ \\ \langle \varepsilon_{TT}^m \rangle_+ \\ 2\varepsilon_{LT}^m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \langle \cos^2(\theta_m)\varepsilon_{11}^m + \sin^2(\theta_m)\varepsilon_{22}^m + 2\cos(\theta_m)\sin(\theta_m)\varepsilon_{12}^m \rangle_+ \\ \langle \sin^2(\theta_m)\varepsilon_{11}^m + \cos^2(\theta_m)\varepsilon_{22}^m - 2\cos(\theta_m)\sin(\theta_m)\varepsilon_{12}^m \rangle_+ \\ -2\cos(\theta_m)\sin(\theta_m)\varepsilon_{11}^m + 2\cos(\theta_m)\sin(\theta_m)\varepsilon_{22}^m + 2(\cos^2(\theta_m) - \sin^2(\theta_m))\varepsilon_{12}^m \end{array} \right\}$$

Par ce choix, nous assurons la première condition 1) [p. 81].

La validation de la seconde condition, 2) [p. 81] est moins immédiate dans le cas présent, car nous ne disposons pas de deux variables couplées, abattant la rigidité, comme c'était le cas dans l'étude du délaminage. Pour l'étude de la ruine inter-laminaire en effet, la variable d'endommagement en cisaillement \mathbf{d}^r jouait, en quelque sorte, le rôle de mémoire, en conservant la trace des interfaces rompues. En revanche, pour l'étude de la fissuration intra-laminaire, une telle variable ne nous est pas encore offerte. Toutefois, nous disposons d'une candidate idéale pour cela. Les rigidités en cisaillement hors plan \mathbb{C}^{τ^0} , et dans le plan G_{LT}^m , sont en effet abattues par d_T^m et d_L^m , et n'ont en outre aucune raison de se voir restaurées en cas de compression. Nous allons par conséquent artificiellement dédoubler les variables d'endommagement d_T^m et d_L^m , en leur associant deux variables $d_T^{\tau^0, m}$ et $d_L^{\tau^0, m}$, qui leurs soient égales lorsque les fissures sont en traction, et qui conservent trace de la rupture lorsqu'elles sont comprimées. Ces variables pondéreront le cisaillement intra-laminaire. Nous interpolons les rigidités de Kirchhoff avec les variables d_T^m et d_L^m , et la rigidité en cisaillement avec $d_T^{\tau^0, m}$ et $d_L^{\tau^0, m}$. La résolution s'effectue à l'aide de l'algorithme 2.

Concernant le renforcement en compression, les mêmes remarques qu'à la sous-section 3.4.5 [p. 81] s'appliquent.

4.4 Problème de minimisation et formulation incrémentale

4.4.1 Formulation variationnelle incrémentale de la ruine intra-laminaire

La formulation incrémentale est tout à fait analogue à celle détaillée dans le chapitre consacré au délaminage. Une difficulté technique supplémentaire apparaît cependant lors du calcul de la dérivée directionnelle de l'énergie libre par rapport à l'endommagement. La solution $(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{pli})$ au $k+1$ ème pas de chargement est obtenue en minimisant la fonctionnelle énergie totale \mathcal{E}_k :

$$(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{pli}) = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{d}^{pli}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{pli}) \quad (4.18)$$

où \mathcal{E}_k , sur ce pas de chargement, est la somme de l'énergie potentielle et d'une contribution du pseudo-potentiel de dissipation donnée par :

$$\mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{pli}) = \mathcal{E}_{pot}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{pli}) + \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{pli}) \quad (4.19)$$

$$\mathcal{E}_{pot}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{pli}) = \int_{\omega} \psi_{el}^{\omega}(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{pli}) d\omega - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{U}) \quad (4.20)$$

$$\mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{pli}) = \int_{\omega} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(\mathbf{d}^{pli}; \mathbf{d}^{pli}) dt d\omega \quad (4.21)$$

\mathcal{W}_{ext} désigne le travail des forces extérieures, et Φ le pseudo-potentiel de dissipation postulé à l'équation (4.8), nous obtenons alors :

$$(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{\text{pli}}) = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{pli}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{pli}}) = \sum_{m=1}^n \int_{\omega} \vartheta(d_L^m) + \vartheta(d_T^m) d\omega \quad (4.22)$$

où la condition d'irréversibilité $\dot{\mathbf{d}}^{\text{pli}} \geq 0$ a été remplacée par la condition incrémentale $\mathbf{d}^{\text{pli}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{pli}}$ et où nous avons supprimé le terme constant $\vartheta(d_{L,k}^m) + \vartheta(d_{T,k}^m)$ au temps t_k dans l'expression de \mathcal{D}_k étant donné qu'il n'a pas d'impact sur la minimisation de l'énergie.

Pour accorder avec les notations du cadre standard généralisé et de l'approche par champ de phase, nous définissons la densité d'énergie de fissuration :

$$\varphi(\mathbf{d}^{\text{pli}}, \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}) = \sum_{m=1}^n e^m (\varphi(d_L^m) + \varphi(d_T^m)) \quad \text{avec} \quad \varphi(d) = \frac{G_c}{\ell c_w} (w(d) + \ell^2 \nabla d \cdot \nabla d)$$

Le problème se résume alors à rechercher, de manière incrémentale, le minimum de la fonctionnelle énergie suivante :

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) = \int_{\omega} \psi_{el}^{\omega}(\mathbf{E}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) + \varphi(\mathbf{d}^{\text{pli}}, \nabla \mathbf{d}^{\text{pli}}) d\omega - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}) \quad (4.23)$$

À nouveau, nous utilisons un algorithme de minimisation alternée :

- La stationnarité par rapport à \mathbf{U} nous donne un problème d'élasticité à \mathbf{d}^{pli} fixé.
- La stationnarité par rapport à \mathbf{d}^{pli} se traduit par la minimisation sous contrainte d'inégalité :

$$\mathbf{d}_{k+1}^{\text{pli}} = \arg \min_{\mathbf{d}^{\text{pli}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{pli}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) \quad (4.24)$$

La minimisation (4.24) est, en composantes, strictement équivalente aux équations non locales (4.11).

En pratique, l'évolution est assurée ($\dot{d} > 0$) si la solution d_{\bullet}^{m*} de (4.25)

$$-\frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial d_{\bullet}^m}(d_{\bullet}^{m*}) = e^m \frac{G_{c\bullet}^m}{\ell_{\bullet}^m c_w} (w'(d_{\bullet}^{m*}) - (\ell_{\bullet}^m)^2 \Delta d_{\bullet}^{m*}) \quad (4.25)$$

est telle que $d_{\bullet}^{m*} > d_{\bullet,k}^m$ sinon $d_{\bullet,k+1}^m = d_{\bullet,k}^m$.

4.4.2 Variations de l'énergie élastique endommagée

Pour l'étude du délaminage, le cadre L-LS1 découplait naturellement les énergies élastiques endommagées associées à chacun des modes. Ici en revanche, tous les modes endommagements sont couplés, à la fois transverses et longitudinaux, et entre plis. Plus précisément, les rigidités membranaires couplent les deux variables d'endommagement dans le pli, tandis que les rigidités d'interfaces couplent les variables d'endommagement de deux plis adjacents. En résulte alors une interaction à priori extrêmement complexe. L'enjeu est de conserver une modélisation simple et opérationnelle, c'est pourquoi nous proposons d'utiliser les simplifications suivantes : Toutes les rigidités précédemment présentées s'exprimeront linéairement par rapport aux fonctions de dégradation de chacune des variables d'endommagement. Par conséquent, les dérivées de l'énergie élastique par rapport à chacune des variables d'endommagement d_{\bullet} pourront s'écrire symboliquement :

$$\frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial d_{\bullet}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) = g'(d_{\bullet}) \Psi_{\bullet}(\mathbf{U}, \widehat{\mathbf{d}}^{\text{pli}})$$

expression dans laquelle $\widehat{\mathbf{d}}$ désigne le vecteur endommagement \mathbf{d} privé de d_{\bullet} .

Hypothèse 4.4.1 « Linéarisation » de la dérivée de l'énergie élastique endommagée. Nous supposons, pour le calcul des prédicteurs d'endommagement (4.25), que les énergies $\Psi_{\bullet}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}})$ sont évaluées aux endommagements calculés à l'itération précédente :

$$\frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial \mathbf{d}_{\bullet}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^*) \approx g'(\mathbf{d}_{\bullet}^*) \Psi_{\bullet}(\mathbf{U}, \mathbf{d}_k^{\text{pli}}) \quad (4.26)$$

D'autres choix auraient été possibles. Par exemple, nous aurions pu calculer chaque fois l'endommagement associé à un mécanisme et utiliser cette nouvelle valeur pour calculer l'endommagement suivant. Cependant, ceci aurait attribué une « hiérarchie », ou tout du moins un « ordre », aux mécanismes. En calculant d'un bloc tous les prédicteurs d'endommagement, selon l'état à l'itération précédente, nous nous sommes refusés à un tel choix physiquement peu justifiable.

4.4.3 Algorithme de résolution

Algorithme 2 : Algorithme de calcul de la ruine intra-laminaire en statique

Entrées : Maillage, paramètres physiques et géométriques, chargement $\underline{U}^D, \underline{T}^D$
 Découpage du chargement en N pas $\underline{U}_n^D, \underline{T}_n^D$
pour $n \in \{1, \dots, N\}$ **faire**
 $k = 0$ /* compteur de l'itération */
 $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_n$ /* initialisation de l'endommagement */
 tant que *evol* **faire**
 Entrées : Endommagements $\mathbf{d}_{T,k}, \mathbf{d}_{L,k}, \mathbf{d}_{L,k}^{\tau_0}, \mathbf{d}_{T,k}^{\tau_0}$
 Résolution du problème d'élasticité à $\mathbf{d}_{L,k}, \mathbf{d}_{T,k}, \mathbf{d}_{L,k}^{\tau_0}, \mathbf{d}_{T,k}^{\tau_0}$ fixés.
 Sorties : Déplacement \mathbf{U}_{k+1}
 Entrées : Endommagement $\mathbf{d}_{T,k}, \mathbf{d}_{L,k}$, déplacement \mathbf{U}_{k+1}
 Résolution du problème d'endommagement.
 Sorties : Prédicteur d'endommagement $\mathbf{d}_{T,k}^*, \mathbf{d}_{L,k}^*$
 Entrées : Endommagements $\mathbf{d}_{T,k}^*, \mathbf{d}_{L,k}^*, \mathbf{d}_{L,k}^{\tau_0}, \mathbf{d}_{T,k}^{\tau_0}, \mathbf{d}_{T,k}, \mathbf{d}_{L,k}$
 Actualisation des endommagements :
 $\mathbf{d}_{T,k+1} = \min(\max(\mathbf{d}_{T,k}^*, \mathbf{d}_{T,k}), 1)$ et $\mathbf{d}_{L,k+1} = \min(\max(\mathbf{d}_{L,k}^*, \mathbf{d}_{L,k}), 1)$
 $\mathbf{d}_{T,k+1}^{\tau_0} = \min(\max(\mathbf{d}_{T,k}^*, \mathbf{d}_{T,k}^{\tau_0}), 1)$ et $\mathbf{d}_{L,k+1}^{\tau_0} = \min(\max(\mathbf{d}_{L,k}^*, \mathbf{d}_{L,k}^{\tau_0}), 1)$
 Sorties : Endommagements actualisés $\mathbf{d}_{T,k+1}, \mathbf{d}_{L,k+1}, \mathbf{d}_{T,k+1}^{\tau_0}, \mathbf{d}_{L,k+1}^{\tau_0}$
 Entrées : Endommagements $\mathbf{d}_{T,k+1}, \mathbf{d}_{L,k+1}, \mathbf{d}_{T,k+1}^{\tau_0}, \mathbf{d}_{L,k+1}^{\tau_0}$
 $\mathcal{H}eav(\varepsilon_{TT}) = \{0 \text{ si } \varepsilon_{TT} < 0 \mid 1 \text{ sinon}\}$ et $\mathcal{H}eav(\varepsilon_{LL}) = \{0 \text{ si } \varepsilon_{LL} < 0 \mid 1 \text{ sinon}\}$
 $\mathbf{d}_{T,k+1}^{eff} = \min(\max(\mathbf{d}_{T,k+1}, \mathbf{d}_{T,k+1}^{\tau_0}), \mathcal{H}eav(\varepsilon_{TT}))$
 $\mathbf{d}_{L,k+1}^{eff} = \min(\max(\mathbf{d}_{L,k+1}, \mathbf{d}_{L,k+1}^{\tau_0}), \mathcal{H}eav(\varepsilon_{LL}))$
 Sorties : Endommagements actualisés $\mathbf{d}_{T,k+1}, \mathbf{d}_{L,k+1}, \mathbf{d}_{T,k+1}^{eff}, \mathbf{d}_{L,k+1}^{eff}$
 si $\|\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k\| < Tol$ **alors**
 | *evol* = *False*, $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{k+1}$
 sinon
 | *evol* = *True*, $k+ = 1$
 fin
 fin
fin

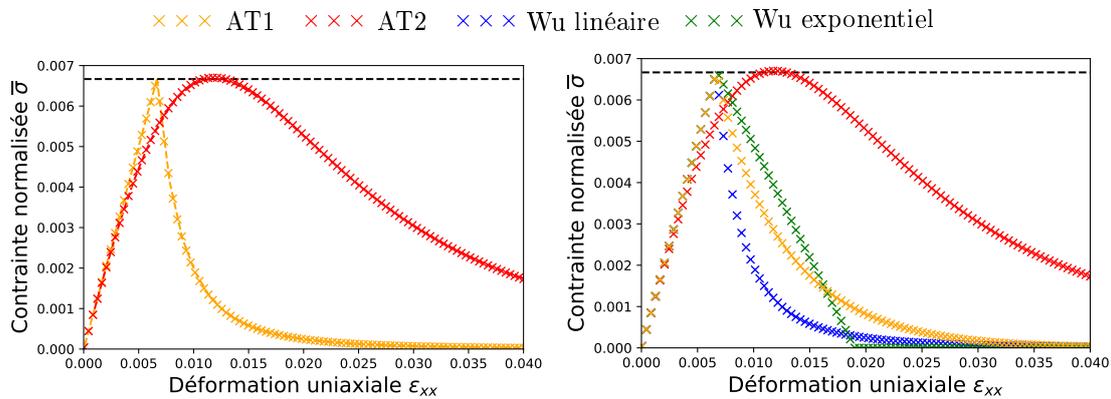
4.5 Cas d'étude de ruine intra-laminaire

La validation de notre modèle d'endommagement intra-laminaire se scindera en deux étapes. Tout d'abord, comme dans le cas du délaminage, nous mettrons à l'épreuve notre modélisation de ruine intra-laminaire considérée seule. La confrontation s'opérera avec des solutions de références analytiques. Puis, nous solliciterons à la fois la ruine intra-laminaire et inter-laminaire dans des essais plus complexes, reproduisant des situations réalistes de composites stratifiés. Nous validerons à cette occasion les interactions importantes entre fissuration matricielle et délaminage.

4.5.1 Traction d'une barre 1D

Pour notre premier essai, étudions la traction uni-axiale d'une barre homogène isotrope endommageable de longueur L , de largeur b , d'épaisseur h . Dans ce cas simple, la densité d'énergie élastique endommagée s'écrit $\Psi(\varepsilon, d) = g(d)E\frac{\varepsilon^2}{2}$. Les symétries et propriétés d'isotropies induisent l'existence de solutions homogènes, dont les différentes expressions, suivant le choix des fonctions g et w , sont données dans l'annexe C [p. 187].

En pratique, ces solutions homogènes ne sont stables que dans la phase ascendante, c'est-à-dire $\varepsilon \leq \varepsilon_c$. Pour les observer, nous maillons naïvement l'éprouvette, avec un seul élément dans la longueur, afin de prévenir tout phénomène de localisation. Nous présentons l'évolution de la contrainte normalisée $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{E_L} = \frac{N}{E_L b}$ en fonction de la déformation longitudinale ε_{xx} . Les paramètres retenus sont les suivants : $G_c = 300\text{J/m}^2$, $\sigma_c = 1000\text{MPa}$. Les courbes forces-



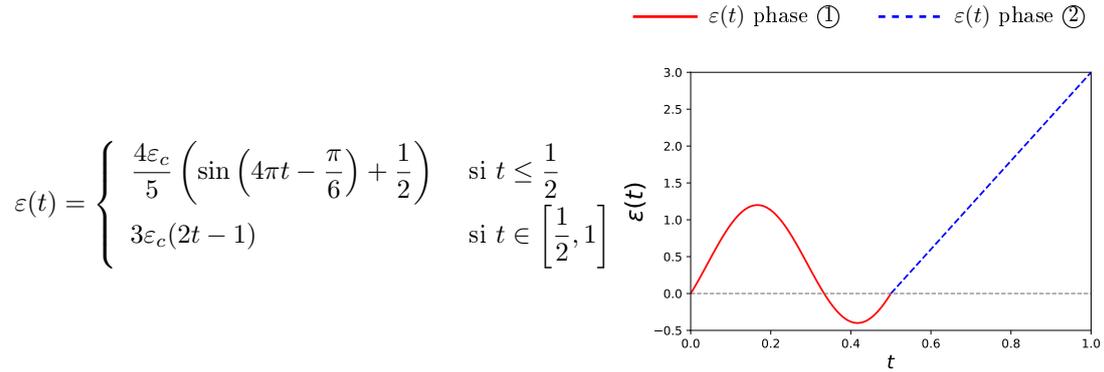
(a) Comparaison analytique numérique des solutions homogènes pour les modèles AT1 et AT2 (b) Comparaison numérique des différentes courbes d'adoucissement pour les modèles AT1, AT2 et de Wu

FIGURE 4.3 – Solutions homogènes pour les modèles AT1 et AT2 comparées aux solutions analytiques figure 4.3a [p. 113] et courbes d'adoucissement figure 4.3b [p. 113] pour les modèles de Wu linéaire et exponentielle

déplacements, pour l'ensemble des modèles à l'étude, sont tout à fait satisfaisantes. La valeur de la contrainte critique d'initiation est respectée, et la seule différence marquée, modèle AT2 mis à part, concerne l'allure de la courbe d'adoucissement.

4.5.2 Traction sinusoïdale d'une barre

Afin de valider notre comportement distinguant traction et compression, évoqué à la sous-section 4.3.5 [p. 109], étudions une barre soumise à une déformation d'amplitude et de sens variables :



Les paramètres matériaux et géométriques sont identiques à ceux considérés à la sous-section 4.5.1 [p. 113]. La contrainte normalisée, fonction de la déformation appliquée, est représentée figure 4.4 [p. 114]. Lors d'une première phase, la barre s'endommage progressivement en traction. Lorsque le sens de sollicitation s'inverse, et que la fissure est refermée, la restauration de la rigidité s'opère et la barre retrouve un module de compression égal à sa valeur saine. Notons qu'avec la forme de l'énergie élastique retenue (4.17), la contribution énergétique de la compression est nulle et ne peut logiquement pas induire d'endommagement. L'ajout d'une partie, prenant en compte la partie négative de la déformation membranaire, permettrait de surmonter ce problème. Finalement, lorsque la barre est de nouveau sollicitée en traction, l'endommagement retrouve instantanément sa valeur précédente, grâce au rôle mémoire de la variable d'endommagement en cisaillement intra-laminaire $d_L^{\tau_0, m}$. Notre algorithme est efficace.

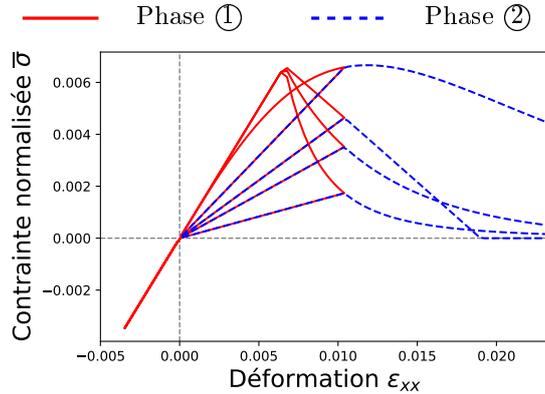
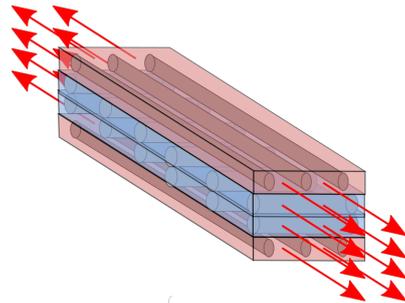


FIGURE 4.4 – Courbe contrainte-déformation pour une sollicitation sinusoïdale, avec les modèles AT1, AT2 de Wu linéairement et exponentiellement adoucis.

4.5.3 Traction d'un $(0, 90)_s$

Intéressons nous à un stratifié constitué de 3 couches, orientées à $(0_2, 90_4)_s$, similaire à celui utilisé dans la sous-section 1.8.3 [p. 33]. Nous imposons une traction uni-axiale dans le sens fibre des plis orientés à 0° . Le taux de restitution en énergie de la matrice étant beaucoup plus faible que celui des fibres, nous anticipons une multi-fissuration du pli à 90° , concomitante à l'apparition de singularités de cisaillement aux interfaces.

La référence de cette partie est la simulation numérique menée par Quintanas-Corominas et al. [2019] s'attardant sur les essais présentés dans Reiner et al. [2017]. Les paramètres matériaux



	Paramètres matériaux			
Mécaniques	$E_L = 171\text{GPa}$	$E_T = 9.08\text{GPa}$	$G_{LT} = 5.29\text{GPa}$	
	$\nu_{LT} = 0.32$	$\nu_{LN} = 0.45$		
Rupture du pli	$G_{Lc} = 97.8\text{N/mm}^2$	$G_{Tc} = 0.277\text{N/mm}^2$	$\sigma_c^L = 2325\text{MPa}$	$\sigma_c^T = 62.3\text{MPa}$

TABLE 4.1 – Propriétés mécaniques de la fibre de carbone HTA/6376

d'un pli IM7/8852 sont donnés dans le tableau 4.2 [p. 121].

Les longueurs caractéristiques ℓ sont propres au modèle (AT1 ou AT2) retenu. Elles sont déduites des contraintes critiques à la rupture, via la formule donnée dans le tableau C.1 [p. 191], en prenant $a = \frac{G_c}{c_w \ell}$. Par exemple pour le modèle AT2, cette relation est :

$$\ell = \frac{27}{256} \frac{G_c E}{\sigma_c^2}$$

L'épaisseur d'un pli est de 0.125mm, la surface de l'éprouvette est de 20mm × 20mm. La déformation maximale à la rupture de l'éprouvette est mesurée égale à 1.4%.

Essai avec le modèle AT1

Le couple (L-LS1, AT1) prévoit une fissuration matricielle assez satisfaisante. L'initiation, obtenue lorsque la contrainte atteint son seuil critique, est correctement captée (voir figure 4.5 [p. 115]). Au fur et à mesure de la traction, de nouvelles fissures apparaissent jusqu'à une

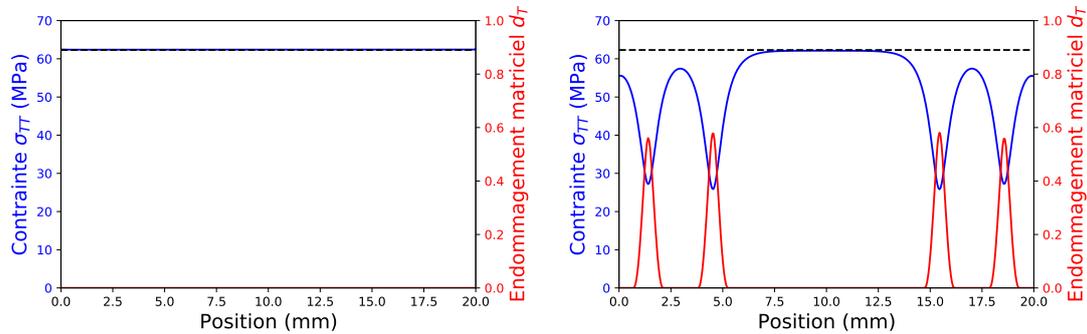
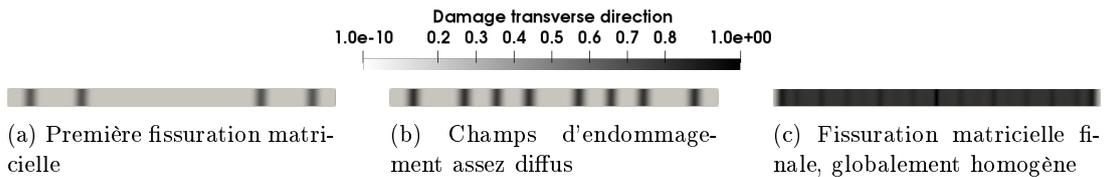


FIGURE 4.5 – Contrainte transverse dans le pli à 90° juste avant (à gauche) et après (à droite) l'initiation de la fissuration

forme de saturation représentée figure 4.6b [p. 115]. Au delà, entre deux fissures, grandit une solution globalement homogène (figure 4.6c [p. 115]), car la distance entre deux fissures n'est pas suffisante pour en permettre la nucléation de nouvelle. Ce phénomène est inévitable et inhérent aux modèles AT1 et AT2, dans lesquels la longueur de régularisation pilote tout à la fois : la contrainte critique d'initiation et la taille caractéristique d'étalement des fissures.



(a) Première fissuration matricielle (b) Champs d'endommagement assez diffus (c) Fissuration matricielle finale, globalement homogène

FIGURE 4.6 – Champ d'endommagement matriciel dans le pli orienté à 90° pour la combinaison L-LS1-AT1

L'endommagement traduisant la première fissuration matricielle est tracé figure 4.7 [p. 116]. La solution uni-axiale analytique, dans le cadre AT1, prévoit que la solution localisée s'étale sur une distance égale à 4 fois la longueur de régularisation. Compte-tenu des paramètres matériaux et des contraintes critiques à la rupture, cette distance est chiffrée ici à $\delta_T = 4\ell_T = 0.972\text{mm}$. Étonnamment, nous relevons une distance réelle bien plus grande : $\delta \simeq 1.3\text{mm}$. Cet écart est probablement dû au cisaillement d'interface qui éloigne le pli du milieu d'un simple essai de traction uni-axiale.

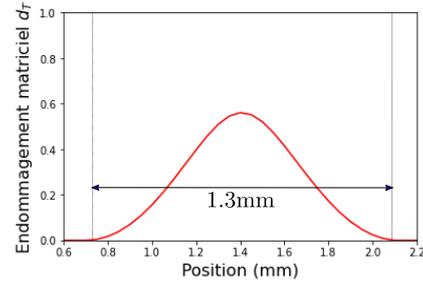
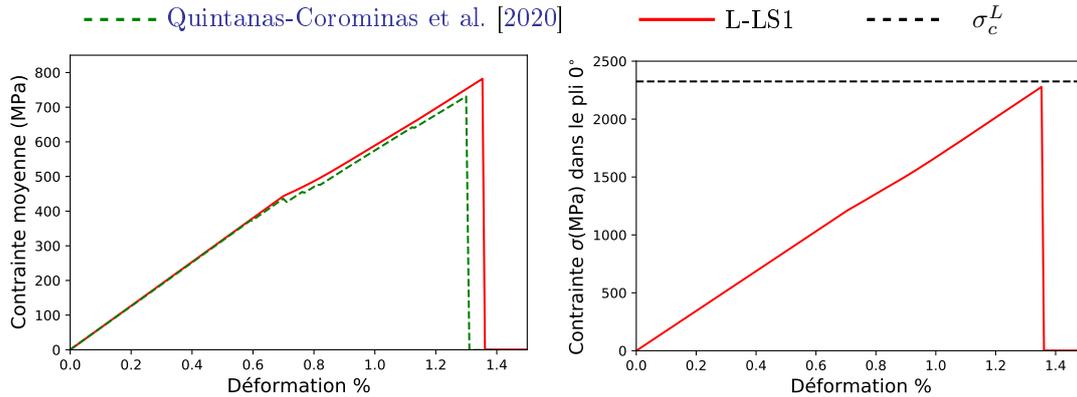


FIGURE 4.7 – Étalement du champ d'endommagement de l'une des premières fissures matricielles.

Nonobstant cela, la donnée la plus importante demeure la bonne prise en compte de la contrainte critique d'initiation, qui, elle, a été validée à la figure 4.5 [p. 115].

Les tracés « contrainte moyenne-déformation » ainsi que « contrainte dans le pli orienté à 0° -déformation » sont également intéressants à l'étude. Le premier permet une comparaison à l'essai numérique de Quintanas-Corominas et al. [2019], tandis que le second atteste de la bonne prise en compte de la contrainte critique d'initiation dans le sens fibre. Ces courbes figure 4.8 [p. 116] ne dépendent, finalement, que peu de l'état de la fissuration matricielle dans le pli à 90° car une écrasante proportion de la rigidité longitudinale est apportée par le pli à 0° . Nous observons bien un accord quantitatif avec les essais de Quintanas-Corominas et al.



(a) Relation contrainte moyenne-déformation pour le modèle AT1 avec le L-LS1 (b) Relation contrainte dans le pli à 0° -déformation pour le modèle AT1 avec le L-LS1

FIGURE 4.8 – Relation contraintes déformations pour le L-LS1, en mariage avec le modèle de rupture AT1

[2019]. La valeur critique à la rupture est cependant plus élevée dans notre cas.

À la figure 4.9b [p. 117], nous représentons l'endommagement relatif à la fissuration fibre qui induit la rupture totale de l'éprouvette. Cette fois, la largeur de l'étalement $\delta = 4.62\text{mm}$ est cohérente avec l'expérience de traction uni-axiale $\delta_L = 4\ell_L = 4.64\text{mm}$. Ceci se comprend aisément car les plis orientés à 0° sont peu influencés par le pli adjacent, qui, orienté à 90° , lui, est particulièrement souple.

Essai avec le modèle AT2

Recourons à présent au modèle AT2, notamment employé dans l'article de Quintanas-Corominas et al. [2019]. Ce modèle est le « pendant en champ de phase » du modèle $\mathcal{M}^{2,2}$ utilisé pour le délaminage. Ce modèle est connu pour régulariser fortement la solution, en adoucissant les pics de contrainte.

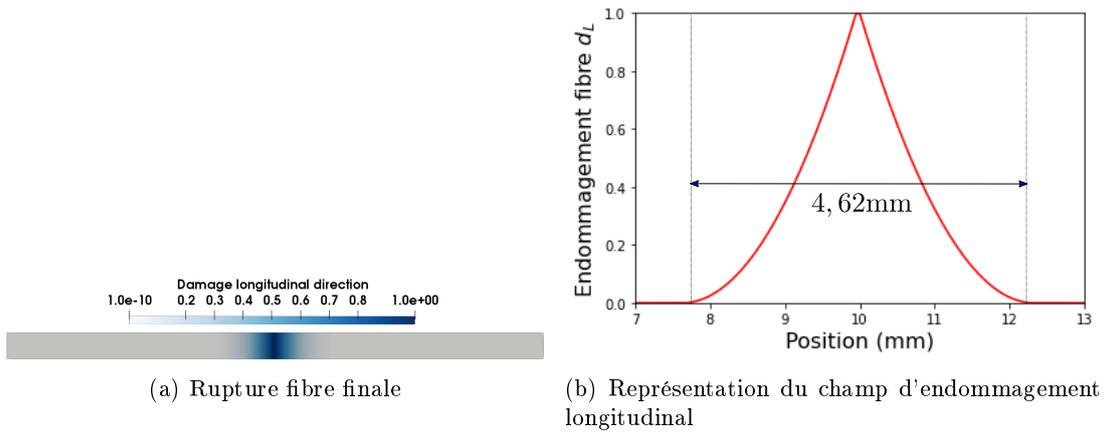


FIGURE 4.9 – Champ d’endommagement longitudinal, correspondant à la rupture fibre, dans le pli orienté à 0° pour la combinaison L-LS1–AT1

En l’état actuel, nous ne pouvons utiliser ce modèle parce qu’il induit une réponse homogène excessive, due à la régularisation importante de la solution. Dans ce cadre, sans l’utilisation d’une hétérogénéité matériau, introduite par exemple de manière stochastique, la solution tend à grossir de manière homogène sans localisation. Les courbes contraintes – déformation, représentées figure 4.10 [p. 117], montrent bien ainsi l’inefficacité du modèle car, en plus de l’adoucissement de la solution pour la matrice, s’opère une régularisation du champ de phase longitudinal. Un endommagement homogène dégrade continûment la rigidité dans le sens fibre, éloignant résolument la courbe contrainte moyenne – déformation de sa valeur cible.

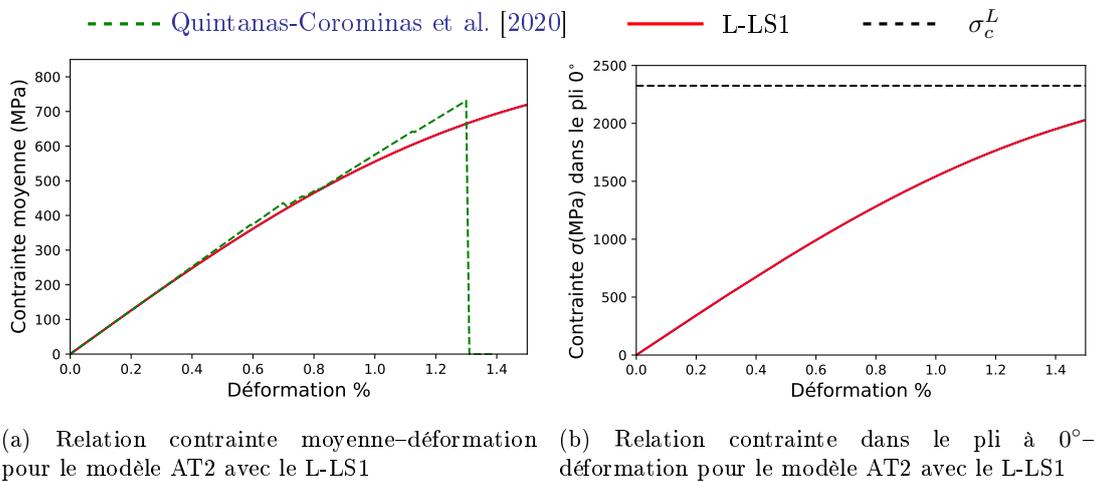


FIGURE 4.10 – Relation contrainte–déformation pour la combinaison L-LS1–AT2

Essai avec le modèle de Wu

Retour sur la longueur de régularisation Dans le cadre des modèles AT1 et AT2, le paramètre de régularisation ℓ , initialement présenté comme un artefact numérique, a été relié à une contrainte critique caractéristique, c’est-à-dire à une propriété matériau. Dans certaines applications cependant, ce lien rassurant peut se révéler gênant. En effet, un ℓ fixé physiquement par une contrainte critique, déterminerait par la même occasion la taille d’étalement de la fissure régularisée. Aussi, il semble impossible d’assurer simultanément : une convergence vers une fissure infiniment fine lorsque $\ell \rightarrow 0$, et l’existence d’une contrainte critique d’initiation caractéristique du matériau. Le modèle de Wu [2017], Wu et al. [2020] ne souffre pas d’un

tel dilemme. Par un enrichissement des fonctions $g(d)$ et $w(d)$, il permet, tout à la fois, de conserver un paramètre numérique ℓ pilotant la largeur de la fissure, et une contrainte critique. En outre, par le jeu de nombreux paramètres, il englobe les modèles précédemment évoqués, et bien d'autres, en donnant accès à de nombreux modèles d'adoucissement (voir [Bui and Hu, 2021]).

Contrairement aux deux essais précédents, le modèle de Wu permet de piloter indépendamment, la longueur de régularisation ℓ sur laquelle s'étale la fissure, et la contrainte critique d'initiation. Nous pouvons donc anticiper, en abaissant la longueur de régularisation, que des solutions localisées plus nombreuses apparaîtront.

Essai avec un étalement identique Wu-AT1 Pour ce premier essai, nous choisissons arbitrairement les longueurs de régularisation de manière à obtenir un étalement identique pour les modèles de Wu et AT1. Nous calculons ℓ^{Wu} , à la fois pour l'endommagement longitudinal et transverse, en vertu de l'égalité :

$$\pi\ell^{Wu} = 4\ell^{AT1}$$

Comme précédemment, après la nucléation de fissures correctement localisées figure 4.11a [p. 118], une solution homogène vient perturber la nôtre figure 4.11b [p. 118] jusqu'à une solution homogène totale figure 4.11c [p. 118]. Notons toutefois que la transition, entre les premières solutions localisées et la solution globalement homogène figure 4.11c [p. 118], s'effectue par un élargissement progressif des 6 premières fissures localisées, sans nucléation supplémentaire, contrairement au modèle AT1 qui prévoyait l'apparition de pseudo-fissures.

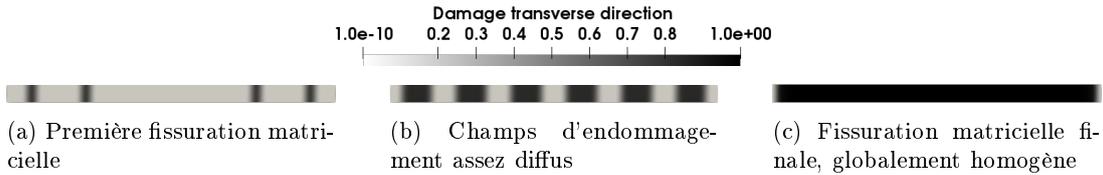


FIGURE 4.11 – Champ d'endommagement matriciel dans le pli orienté à 90° pour la combinaison L-LS1-Wu avec $\pi\ell^{Wu} = 4\ell^{AT1}$

Une des premières fissurations matricielles est représentée figure 4.12 [p. 118]. Là encore, nous remarquons que l'étalement se montre plus important, $d = 1.2\text{mm}$, que la valeur analytique $d = 0.972\text{mm}$, tout en restant remarquablement cohérent avec celui du modèle AT1. L'endommagement dépassant ici très légèrement celui prédit par le modèle AT1, l'étalement correspondant s'avère quant à lui logiquement plus faible.

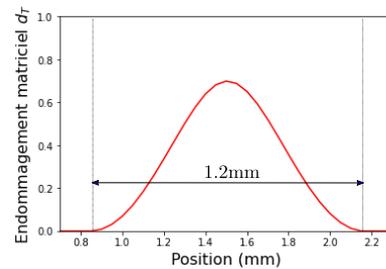


FIGURE 4.12 – Étalement du champ d'endommagement de l'une des premières fissures matricielles.

Diminution progressive de la longueur de régularisation Nous allons par la suite successivement diminuer ℓ^{Wu} d'un facteur 2, et observer l'évolution de la fissuration matricielle. Nous anticipons qu'au-delà d'un certain seuil, de nouvelles fissures bien localisées pourront se former entre deux cassures préalables, en place de la solution homogène. Nous dessinons la fissuration matricielle finale pour les longueurs de régularisation successives $\ell^{Wu} = \frac{2}{\pi}\ell^{AT1}$ figure 4.13a [p. 119], $\ell^{Wu} = \frac{1}{\pi}\ell^{AT1}$ figure 4.13b [p. 119], $\ell^{Wu} = \frac{1}{2\pi}\ell^{AT1}$ figure 4.13c [p. 119]. La densité de fissuration se stabilise pour des fissures espacées d'environ 1mm. Nous relevons en outre, lors de nos diminutions successives de la longueur de régularisation, réalisées en

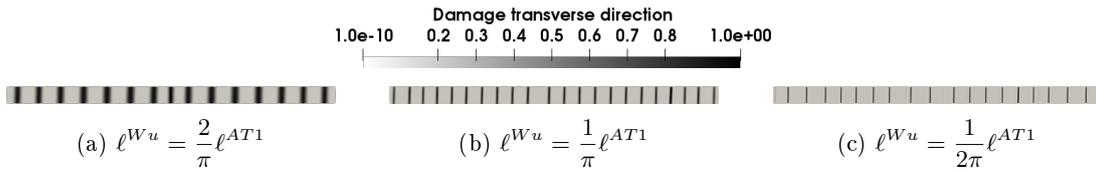
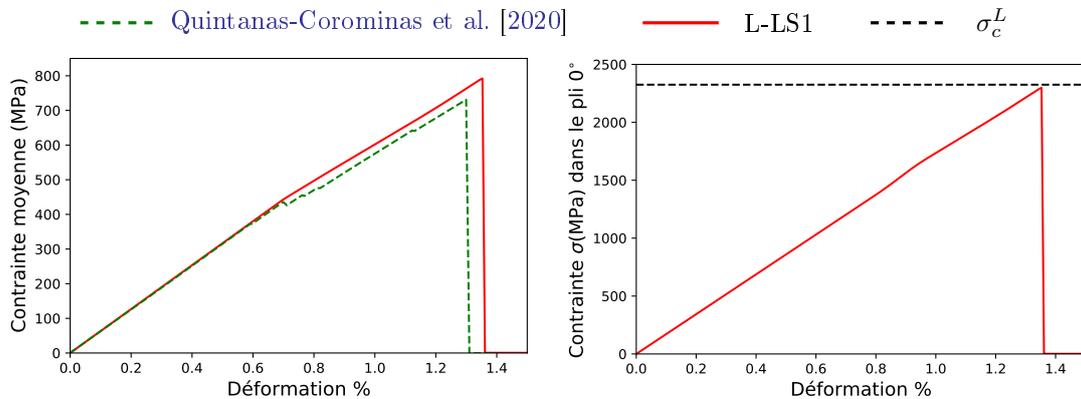


FIGURE 4.13 – Champ d’endommagement matriciel dans le pli orienté à 90° pour la combinaison L-LS1–Wu en diminuant successivement la longueur de régularisation

parallèle d’un raffinement du maillage, que la solution homogène globale devient de plus en plus stable, si bien que de légères perturbations (introduites comme des distributions aléatoires de la contrainte critiques σ_c^T) s’avèrent nécessaires afin de localiser les fissures. Nous n’approfondirons pas ici cette observation.



(a) Relation contrainte moyenne–déformation pour le modèle de Wu avec le L-LS1 (b) Relation contrainte dans le pli à 0° –déformation pour le modèle de Wu avec le L-LS1

FIGURE 4.14 – Relation contrainte–déformation pour la combinaison L-LS1–Modèle de Wu $\ell_T^{Wu} = \frac{1}{2\pi} \ell_T^{AT1}$ et $\ell_L^{Wu} = \ell_L^{AT1}$

Les comparaisons avec les résultats de Quintanas prévoient à nouveau une contrainte maximale moyenne à la rupture supérieure de l’ordre de 8% (788MPa contre 730MPa). La contrainte dans le pli à 0° est cependant cohérente avec la valeur critique de la contrainte à la rupture. On peut en effet, voir figure 4.14b [p. 119], où nous représentons la contrainte moyenne du pli à 0° $\sigma = N/e$, que la rupture se produit lorsque cette valeur atteint la contrainte critique σ_c de la fibre.

Rôle de la longueur de régularisation Nous autorisons, en diminuant ℓ , l’apparition d’une solution localisée entre deux fissures précédemment formées. Nous mettons ainsi en évidence un rapport entre deux longueurs caractéristiques : ℓ_f qui dénote la distance entre deux fissures, et ℓ la longueur de régularisation. Si $\ell \ll \ell_f$, de nouvelles solutions localisées peuvent se former. Dans le cas contraire, si $\ell \approx \ell_f$, c’est une solution globalement homogène qui tend à grossir. La longueur ℓ_f dépend du chargement et de la nature de l’empilement. En effet, le phénomène de saturation observé dans les stratifiés, traduit le fait que pour une certaine densité de fissuration matricielle, les contraintes ne sont plus suffisantes pour faire nucléer de nouvelles fissures. Il s’agit donc d’un effet de structure. Ceci ne devrait pas être influencé par la longueur de régularisation. Le modèle de Wu présente donc un avantage évident : si, *a posteriori*, nous constatons une saturation et l’apparition d’une solution homogène, pour la sollicitation appliquée et le stratifié d’étude, alors le modèle AT1 n’est plus nécessairement pertinent et le modèle de Wu devra être considéré. À l’inverse, si les efforts appliqués induisent que ℓ_f reste grand devant la longueur de régularisation, les modèles AT1 et de Wu donnent des résultats très proches.

Ne connaissant pas « a priori » la longueur caractéristique de la structure ℓ_f , pour débiter nos simulations, nous pouvons employer le modèle AT1 plus simple. Puis, nous devons évaluer la présence de solutions homogènes, lesquelles traduisent que des nouvelles fissures n'ont pas eu « assez de place » pour se développer.

Ce constat est à rapprocher de l'impuissance du modèle AT1 à modéliser l'évolution de la fissuration dans les bétons pour de petites structures. En effet, si l'on retient les valeurs suivantes [Feng and Wu, 2018] pour l'évaluation de la longueur de régularisation : $E = 37\text{GPa}$, $\sigma_c = 3.5\text{MPa}$, $G_c = 100\text{J/m}^2$, la longueur de régularisation du modèle AT1 est égale à :

$$\ell^{AT1} = \frac{EG_c}{\sigma_c^2 c_w} = 11\text{cm}$$

Le modèle AT1 se révèle donc incapable de modéliser des fissures à une échelle inférieure à 11cm ! Si une telle taille caractéristique peut s'avérer suffisante pour la modélisation d'une structure massive comme un barrage, il n'en va pas du tout de même dans le cas d'une traction d'éprouvette en laboratoire.

4.6 Essai d'interaction ruine intra-laminaire/délamination

Jusqu'à présent, nos essais n'ont jamais offert l'opportunité d'étudier les couplages des modes de ruine intra-laminaire et inter-laminaire. Pourtant, l'expérience enseigne que les interactions entre ces modes de fissurations sont très nombreuses. Dans la plupart des situations, une fissuration matricielle, débutant à un niveau énergétique assez bas, induit une singularité de contraintes aux interfaces, singularité qui elle-même devient source de délamination. Le stratifié dégradé de la sorte est alors susceptible de voir l'un de ses plis rompre dans le sens longitudinal, c'est à dire de voir certaines de ses fibres casser.

4.6.1 Description de l'essai de flexion 4 points

L'essai de cette section reproduit la validation numérique traitée dans Quintanas-Corominas et al. [2020] et Reiner et al. [2017] de l'essai expérimental décrit dans Mortell et al. [2014]

Un essai de flexion quatre points est conduit pour asseoir les capacités du cadre actuel à modéliser le délamination induit par la fissuration de la matrice. Le spécimen considéré est un stratifié $[90_4/0_7/90_4]$, constitué de plis renforcés de fibres de carbone HTA/6376. Ce type de stratifié a été étudié expérimentalement par Mortell et al. [2014]. La géométrie est présentée en figure 4.15 [p. 120], l'épaisseur de chaque pli est de 0.125mm, la profondeur de l'éprouvette est de 7mm. Les propriétés mécaniques d'une couche unidirectionnelle et d'une interface sont énumérées dans le tableau 4.2 [p. 121]. La valeur du taux de restitution d'énergie critique

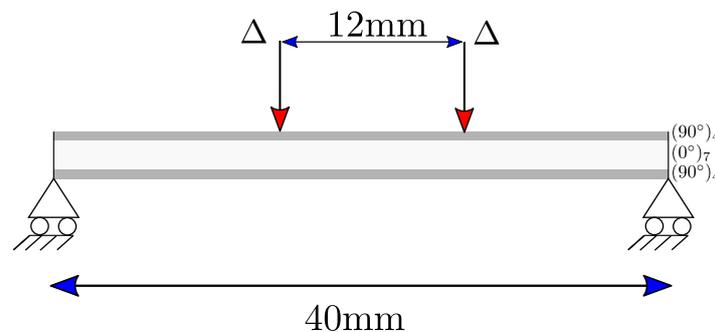


FIGURE 4.15 – Description géométriques de l'essai issu de Quintanas-Corominas et al. [2020]

en rupture transverse n'est pas explicitement donnée, nous reprenons la valeur précédente $G_{Tc} = 0.277\text{N/mm}^2$. Tout comme dans l'essai de référence, nous interdisons le délamination des

	Paramètres matériaux		
Mécaniques	$E_L = 140\text{GPa}$	$E_T = 10\text{GPa}$	$G_{LT} = 5.2\text{GPa}$
	$\nu_{LT} = 0.3$	$\nu_{LN} = 0.42$	
Rupture du pli	$G_{Tc} = 0.277\text{N/mm}^2$	$\sigma_c^T = 70\text{MPa}$	
Rupture de l'interface	$G_{Ic} = 0.432\text{N/mm}^2$	$G_{IIc} = 1.002\text{N/mm}^2$	

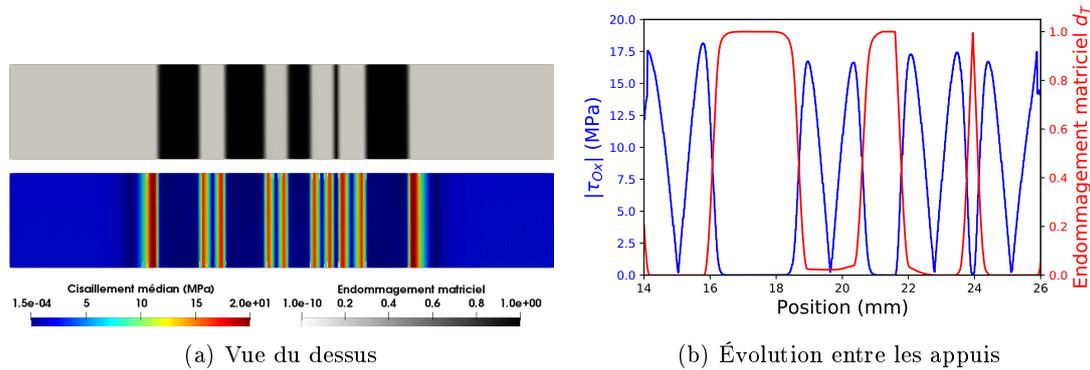
TABLE 4.2 – Propriétés mécaniques de la fibre de carbone HTA/6376

appuis en affectant, aux bords, un taux de restitution en énergie plus important. La référence Quintanas-Corominas et al. [2020] utilise le critère de Benzeggagh ; nous lui préférons pour notre propre simulation le critère elliptique avec $\beta = 2$. La symétrie du problème permettrait de limiter notre étude à une moitié de poutre, en imposant une translation horizontale et une rotation nulle au niveau de l'axe de symétrie. Cependant, les erreurs d'arrondis numériques induisent une très légère asymétrisation du profil de délaminage conforme à l'expérience. Nous choisissons par conséquent de modéliser la poutre dans son ensemble.

Expérimentalement, des fissures matricielles, espacées de $\ell = 2\text{mm}$, criblent le pli inférieur. Le modèle AT1, dont la petite longueur de régularisation est égale ici à $\ell_T \approx 0.212\text{mm}$, peut donc a priori reproduire une telle répartition, car $\delta_T = 4\ell_T^{AT1} = 0.848\text{mm} < \ell$. La longueur δ_T n'étant pas très petite devant la taille caractéristique ℓ , nous examinerons particulièrement la présence de solutions homogènes entre deux solutions localisées, et conduirons en parallèle une simulation avec le modèle de Wu et une longueur caractéristique $\ell_T^{Wu} = 0.135\text{mm}$, laquelle assure un étalement deux fois moindre $\delta_T^{Wu} = \pi\ell_T^{Wu} \approx 0.424\text{mm}$. Les modèles non linéaires $\mathcal{N}^{1,2}$ et $\mathcal{N}^{2,2}$ sont à l'étude concernant le délaminage. Le choix entre ces deux modèles n'est pas anodin. En effet, le modèle $\mathcal{N}^{2,2}$, plus régulier, favorise le délaminage au détriment de la ruine matricielle et induit des résultats numériques plus proches de l'expérience.

4.6.2 Rôle du cisaillement intra-laminaire

Nous résolvons dans un premier temps le problème, tel qu'il a été formulé précédemment, compte pris de la contribution du cisaillement intra-laminaire au taux de restitution d'énergie total (4.16). Nous observons alors des solutions aberrantes, dans lesquelles les fissurations matricielles s'étendent à partir des solutions localisées précédemment formées (figure 4.16 [p. 121]). Ceci n'est pas étonnant car, au niveau des fissures matricielles, le cisaillement intra-laminaire


 FIGURE 4.16 – Endommagement matriciel et cisaillement médian $\Delta = 2.68\text{mm}$

singulier, tout comme son homologue d'interface, tend à élargir les cassures déjà développées. Gageons que l'introduction de nouvelles variables d'endommagement indépendantes, modélisant les fissures inclinées, typiques des ruines de cisaillement, ouvrirait une perspective intéressante. Pour la suite, nous simplifions la modélisation en conservant l'annulation des champs \mathbf{N} , \mathbf{M} et $\boldsymbol{\tau}_0$ par les variables d'endommagement intra-laminaires \mathbf{d}^{pli} . Toutefois, nous postulons que seul l'effort membranaire contribue à la nucléation des fissures intra-laminaire. C'est à dire

que nous conservons l'expression de la rigidité (4.12), (4.13), (4.14), tandis que pour le calcul du prédicteur (4.25), nous simplifions (4.16) en ne retenant que la contribution de (4.17).

4.6.3 Validation de la pente réaction–déplacement

La première courbe d'intérêt correspond à la réaction totale (aux deux appuis) en fonction de la flèche. Nos résultats numériques sont comparés aux données expérimentales Mortell et al. [2014] sur la figure 4.17 [p. 122].

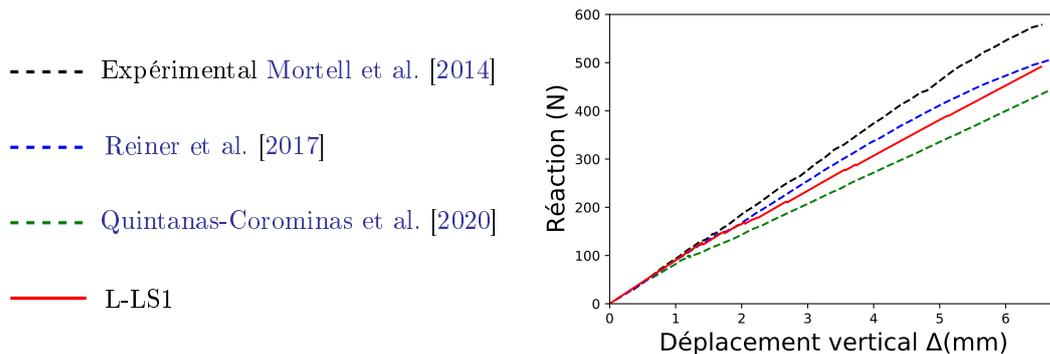


FIGURE 4.17 – Comparaison expérimental-numérique de la courbe force déplacements pour l'essai de flexion 4 points

Nous y constatons qu'après une phase élastique parfaitement reproduite, les résultats numériques et expérimentaux diffèrent. Ceci n'est guère étonnant, Mortell et al. [2014] évoquent en effet à ce propos un phénomène de pontage entre les fibres, augmenté d'un effet de raidissement de la matrice, expliquant une plus grande rigidité apparente de l'échantillon. Notre courbe force-déplacement est d'une qualité tout à fait équivalente à celles présentées par Quintanas-Corominas et al. [2020] ou Reiner et al. [2017].

4.6.4 Interaction délamination-rupture matricielle

Nous représentons ensuite l'évolution du champ d'endommagement d_T , ainsi que l'endommagement inter-laminaire.

Utilisation du modèle $\mathcal{N}^{1,2}$

Au cours de la flexion, le délamination et la fissuration matricielle entrent en étroite compétition pour abaisser la contrainte membranaire dans le pli inférieur, orienté à 90° . Si, par un choix peu astucieux de modèle, la ruine matricielle est légèrement mise en avant, alors la simulation tend à fracturer le pli du dessous en créant des fissurations transverses supplémentaires. Là, en conséquence de contraintes critiques du délamination trop élevées, une multitude de fissurations matricielles crible le pli du dessous. La contrainte membranaire ainsi relaxée, les efforts inter-laminaires sont abaissés, et le délamination moins étendu.

Utilisation du modèle $\mathcal{N}^{2,2}$

Le profil fissuration matricielle-délamination pour le modèle $\mathcal{N}^{2,2}$ est représenté figure 4.18 [p. 123] à différentes étapes du chargement et à la figure 4.19 [p. 123] pour l'état final. À l'inverse du $\mathcal{N}^{1,2}$, le modèle $\mathcal{N}^{2,2}$ étale un peu plus le front de délamination via une sorte de « process zone ». Cette étalement d'origine numérique a pour effet de très légèrement diminuer les contraintes membranaires et empêche par la même occasion la nucléation d'une nouvelle coupure matricielle. Le nombre de fissures concorde cette fois-ci parfaitement avec les résultats expérimentaux.

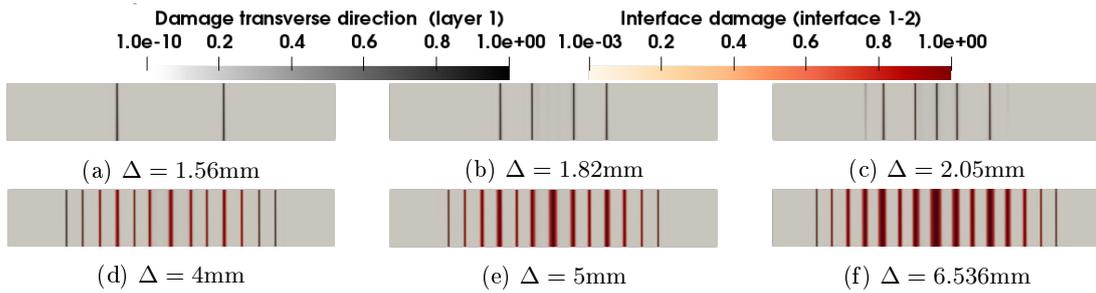


FIGURE 4.18 – Représentation de la fissuration matricielle (en noir) et du délaminage (en rouge) sur la poutre en flexion vue de dessus, modèle $\mathcal{N}^{2,2}$ – Wu.

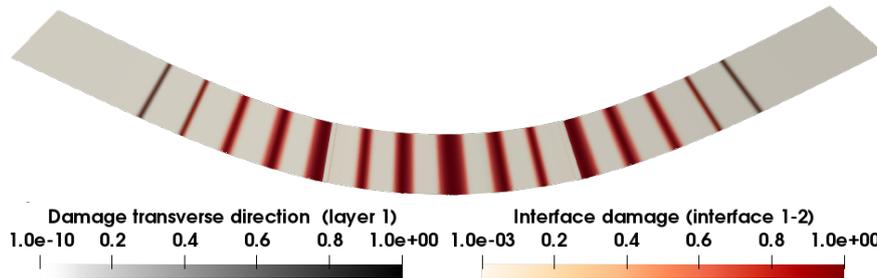


FIGURE 4.19 – Profil final du délaminage et de la fissuration matricielle dans le cadre du modèle $\mathcal{N}^{2,2}$ – Wu.

L'étendue du délaminage (« Local Delamination Ratio »), normalisé par l'épaisseur moyenne de la couche à 90° , est représenté figure 4.20 [p. 123]. Nous repérons le délaminage par la condition (arbitraire) $d_T \geq 0.8$.

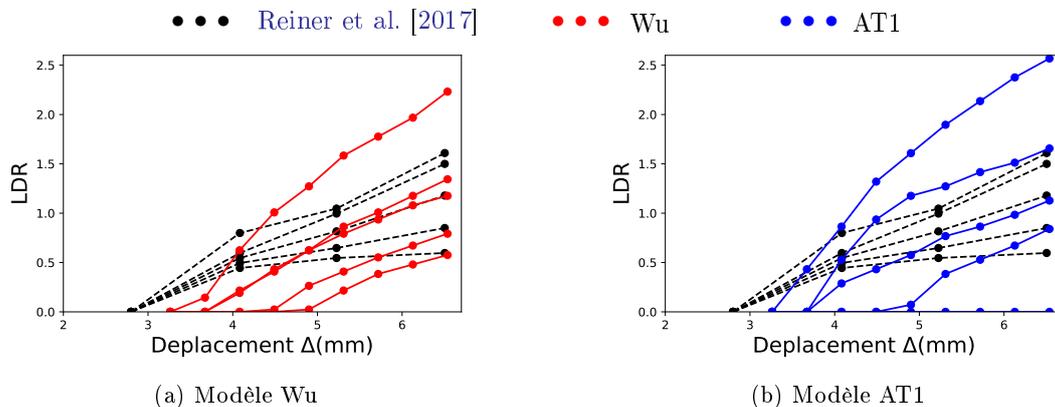


FIGURE 4.20 – Étendue du délaminage normalisée par l'épaisseur du pli à 90° pour le modèle $\mathcal{N}^{2,2}$

En dépit d'un retard à l'amorçage, l'accord numérique expérimental est très bon. L'asymétrie inhérente à l'expérience est captée par notre modèle et les étendues du délaminage sont tout à fait comparables. Le modèle AT1 fournit des résultats d'une qualité inférieure (non développement d'un des délaminages et sur-représentation d'un autre) car une répartition légèrement erronée de l'endommagement matriciel altère celle du cisaillement intra-laminaire. En effet, la localisation de la cassure centrale s'effectue alors dans une zone confinée, quasi homogène $d_T \approx 0.15$, entre deux fissures précédentes (voir figure 4.21b [p. 124]). Le modèle de Wu, quant à lui, permet d'éviter cet écueil, et la répartition des cassures matricielles y est bien plus satisfaisante (voir figure 4.21a [p. 124]).

Pour finir, il convient de souligner que notre critère elliptique de délamination n'a été l'objet d'aucun recalage particulier. Enrichir la description de la ruine au moyen de modèles plus sophistiqués pourrait éventuellement permettre à notre simulation de mieux reproduire l'expérience.

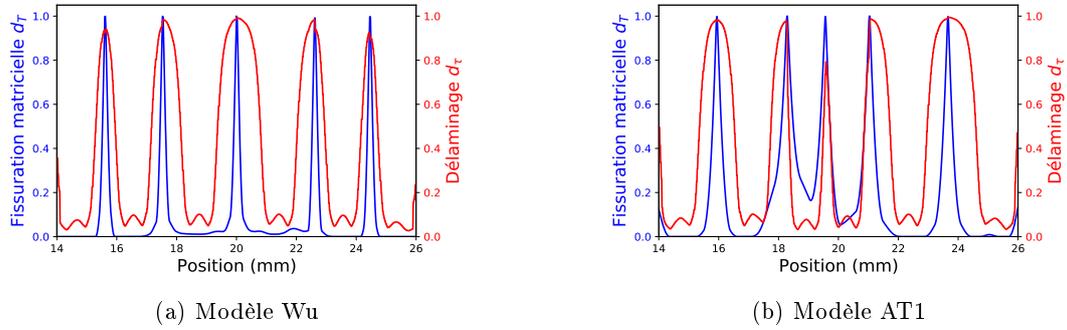


FIGURE 4.21 – Représentation des champs d'endommagement matriciel et du délamination entre les appuis

Observation	Expérimental	Quintanas-Corominas et al. [2020]	L-LS1 $\mathcal{N}^{2,2}$	Unités
σ_c première fissure	62	67.5	63.7	MPa
Nombre total fissures	15	14	15	-
Distance moyenne entre fissures	2	2.25	2	mm

En bref

La modélisation de la fissuration intra-laminaire (fibre et matrice), complétant celle du délaminage, a été abordée dans cette partie.

- ★ Nous avons d'abord retenu le cadre standard généralisé, employé avec succès au chapitre précédent, pour assurer la consistance de notre démarche. Contrairement au cas du délaminage, le choix de l'énergie libre de Helmholtz (4.9) comporte un terme en « ∇d ». Son ajout prévient la localisation de l'endommagement et une dépendance pathologique au maillage.
- ★ L'énergie libre de Helmholtz (4.9) associée au potentiel de dissipation (4.8) induit les équations d'évolution de l'endommagement (4.10).
- ★ Afin de compléter notre modélisation, nous avons souligné comment les rigidités étaient abattues par l'endommagement (4.12), (4.13), (4.14).
- ★ La problématique du non-endommagement en compression a été brièvement évoquée, et résolue, en ne retenant que la partie positive des déformations membranaires (4.17) pour le calcul de l'endommagement.
- ★ Le problème mécanique a ensuite été refondu sous une forme variationnelle incrémentale rassurante. La solution en « endommagement-déplacement » réalise la stationnarité d'une certaine fonctionnelle énergie totale (4.23).
- ★ Pour conclure ce chapitre, de nombreux essais attestent la qualité des résultats obtenus. Des configurations limitant l'étude à la ruine intra-laminaire considérée seule ont d'abord montré la robustesse de nos modèles à prédire les seuils de rupture, et de la matrice et des fibres. L'interaction entre ruine intra et inter-laminaire a ensuite été validée par un essai de flexion 4 points. L'étendue du délaminage induit par la fissuration matricielle y a été quantitativement vérifiée.



Ludwig van Beethoven *Die Klaviersonate Nr. 14 op. 27 Nr. 2 in cis-Moll*

Synthèse : Ruine intra-laminaire avec le L-LS1

 † **Minimisation incrémentale :**

$$(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}^{\text{pli}}) = \arg \min_{\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}} \geq \mathbf{d}_k^{\text{pli}}} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) \text{ avec } \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) + \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{pli}})$$

Où les énergies sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) &= \int_{\omega} \psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) d\omega - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}) \\ 2\psi_{el}^{\omega}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{pli}}) &= \sum_{m=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}^m \cdot \mathbb{C}^{\mathbf{N}^m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\chi}^m \cdot \mathbb{C}^{\mathbf{M}^m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \boldsymbol{\chi}^m + \mathbf{D}_0^m \cdot \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}_0^m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \mathbf{D}_0^m \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} c_{\nu}^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} + \mathbf{D}^{j,j+1} \cdot \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}^{j,j+1}} \cdot \mathbf{D}^{j,j+1} \\ \mathcal{W}_{\text{ext}}(\mathbf{U}) &= \int_{\omega} \mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{F}^- + \mathbf{U}^n \cdot \mathbf{F}^+ d\omega \\ \mathcal{D}_k(\mathbf{d}^{\text{pli}}) &= \sum_{m=1}^n \int_{\omega} \varphi(d_L^m) + \varphi(d_T^m) d\omega \text{ avec } \varphi(d) = \frac{G_c}{\ell c_w} (w(d) + \ell^2 \nabla d \cdot \nabla d) \end{aligned}$$

 † **Rigidités membranaires endommagées, repère local :**

$$\mathbb{C}_{loc}^{\mathbf{N}^m}(d_L^m, d_T^m) = e^m \mathbb{C}_{cp}^m(d_L^m, d_T^m) \text{ et } \mathbb{C}_{loc}^{\mathbf{M}^m}(d_L^m, d_T^m) = \frac{(e^m)^3}{12} \mathbb{C}_{cp}^m(d_L^m, d_T^m)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{cp}^m(d_L^m, d_T^m) &= \frac{1}{1 - \nu_{LT}^m \nu_{TL}^m} \begin{pmatrix} g(d_L^m) E_L^m & g(d_L^m) g(d_T^m) \nu_{LT}^m E_T^m & 0 \\ g(d_L^m) g(d_T^m) \nu_{LT}^m E_T^m & g(d_T^m) E_T^m & 0 \\ 0 & 0 & g(d_L^m) g(d_T^m) G_{LT}^m \end{pmatrix} \\ \mathbb{C}_{loc}^{\boldsymbol{\tau}_0^m}(d_L^m, d_T^m) &= \frac{3}{2e^m} \begin{pmatrix} g(d_L^m) G_{LT}^m & 0 \\ 0 & g(d_T^m) G_{LN}^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

 † **Choix classique concernant les fonctions de dégradation et de fissuration :**

$$g(d) = (1 - d)^2 \text{ et } w(d) = d$$

 † **Résolution alternée déplacement-endommagement :**

 ‡ **Résolution en déplacement, stationnarité de l'énergie potentielle :**

$$\delta_{\hat{\mathbf{U}}} \mathcal{E}_{\text{pot}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}_k^{\text{pli}}) = 0$$

 ‡ **Résolution en endommagement, pli par pli, mode par mode :**

$$-\frac{\partial \psi_{el}^{\omega}}{\partial d_{\bullet}^m}(d_{\bullet}^{m*}) = e^m \frac{G_{c\bullet}^m}{\ell_{\bullet}^m c_w} (w'(d_{\bullet}^{m*}) - (\ell_{\bullet}^m)^2 \Delta d_{\bullet}^{m*})$$

Application industrielle : impact d'une plaque stratifiée en dynamique lente

Introduction

L'utilisation croissante de stratifiés composites renforcés par fibres longues, dans plusieurs secteurs industriels (automobile, aérospatial, naval et ferroviaire), nécessite une connaissance parfaite de leurs comportements mécaniques et de leurs tenues résiduelles suite à des chocs inopinés. S'il est entendu que ces matériaux possèdent des caractéristiques exceptionnelles de rigidité et de résistance en régime normal, ils pèchent cependant par leurs performances médiocres en matière de résistance aux phénomènes d'impact [Reid and Zhou, 2000].

Les chocs, et les dommages classiques qui en résultent, se distinguent en deux catégories, selon la vitesse de l'objet incident. Concernant les impacts à grande vitesse, les dégradations conséquentes sont générées à proximité immédiate de la zone de contact et se propagent ensuite à travers l'épaisseur [Varas et al., 2013, Wang et al., 2013], toujours sur une étendue limitée. À l'inverse, les impacts à faible vitesse génèrent des dommages qui ne se localisent pas nécessairement à proximité de la surface d'impact, mais peuvent s'étendre sur une très large zone, compromettant ainsi la capacité de charge résiduelle des composants structurels.

Il est entendu que les impacts à hautes vitesses passent rarement inaperçus et leur survenue entraîne immédiatement le remplacement de la pièce rompue. À l'inverse les impacts à basse vitesse, comme la chute d'un outil lors d'une opération de maintenance, peuvent engendrer des défauts presque imperceptibles à l'inspection oculaire, communément appelés BVID (*Barely visible impact damage*). Des procédés complexes tels que le C-Scan, ou la tomographie s'avèrent alors nécessaires pour prendre la mesure de la dégradation structurelle.

Ce chapitre ambitionne d'appliquer les méthodes précédemment développées, à l'étude de l'impact en dynamique lente.

- ★ Dans une première section 5.1 [p. 128], nous préciserons notre stratégie pour modéliser le contact entre un identeur supposé infiniment rigide et un composite stratifié, représenté avec le modèle L-LS1.
- ★ Puis, section 5.2 [p. 130], nous réaliserons une première étude d'impact sur un stratifié $(90_3/0_3)_s$. Les rôles des différents paramètres seront ici élucidés. Plusieurs modifications, concernant le critère d'endommagement en compression, seront scrutées.
- ★ Enfin, à la section 5.3 [p. 140], nous présenterons brièvement une extension possible de nos modèles multicouche au cadre des grands déplacements. Inspirés du modèle de plaque de Von-Karman, nous augmenterons la déformation membranaire d'un terme non-linéaire, étendant les capacités du L-LS1 à la simulation d'essais incluant des flexions modérées.

5.1 Modélisation du contact

5.1.1 Prise en compte du contact par pénalisation

Il existe plusieurs façons de traiter les problèmes de contact en mécanique des solides. Pour sa simplicité d'implémentation, nous retiendrons la méthode de pénalisation. La condition de contact y est introduite en ajoutant un terme élastique dans la formulation variationnelle du modèle SCLS1 (1.19) [p. 13] ou (1.34) [p. 18], terme correspondant à la pénalisation de la différence de position impacteur/dernière couche. Si nous supposons que la surface en contact avec la plaque est repérée par une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et que la plaque a une demi-

$$x \mapsto h(x, y)$$

épaisseur $\frac{e}{2}$, nous introduisons un terme élastique :

$$\int_{\omega} k_{\text{pen}} < \frac{e}{2} + U_3^{n,n+1} - h >_+ \tilde{U}_3^{n,n+1} d\omega \quad (\text{formulation sans multiplicateur de Lagrange})$$

$$\int_{\omega} k_{\text{pen}} < \frac{e}{2} + \mu_3^{n,n+1} - h >_+ \tilde{\mu}_3^{n,n+1} d\omega \quad (\text{formulation avec multiplicateurs de Lagrange})$$

La pénalisation s'interprète comme l'interposition d'un ressort fictif de constante de raideur k_{pen} entre la surface de la plaque et la surface en contact, mis à l'œuvre lorsque l'impacteur pénètre la plaque. Le choix de k_{pen} doit interdire la pénétration non physique de l'impacteur dans la dernière couche. Par conséquent, k_{pen} doit être comparée à la rigidité verticale de la dernière couche au pincement, c'est à dire la rigidité hors plan de la dernière interface. Numériquement, nous sélectionnons $k_{\text{pen}} \sim 10c_v^{n-1,n}$. Nous verrons que le choix d'une constante de raideur trop élevée peut induire des situations embarrassantes, où le pas de temps doit être fortement diminué pour éviter des oscillations parasites.

Notation 5.1.1 Puissance de l'effort de contact. *Nous notons \mathcal{P}^{pen} la puissance due au contact avec l'impacteur. Selon que l'on considèrera ou non les conditions aux limites sous forme faible nous aurons donc :*

$$\mathcal{P}^{\text{pen},N} = k_{\text{pen}} < \frac{e}{2} + U_3^{n,n+1} - h >_+ \tilde{U}_3^{n,n+1}$$

$$\mathcal{P}^{\text{pen},L} = k_{\text{pen}} < \frac{e}{2} + \mu_3^{n,n+1} - h >_+ \tilde{\mu}_3^{n,n+1}$$

Dans le cas statique, l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange sera avantageuse. En effet, nous avons vu que ces multiplicateurs s'interprétaient comme les déplacements généralisés faisant travailler les efforts extérieurs. Ils correspondent donc physiquement aux déplacements des surfaces supérieures et inférieures. La formulation variationnelle du problème, avec ou sans multiplicateur de Lagrange, s'écrit sous forme générique :

$$\int_{\omega} \mathcal{P}^{\text{int},*} + \mathcal{P}^{\text{pen},*} - \mathcal{P}^{\text{ext},*} d\omega = 0$$

Cette expression peut se formuler comme une variante de (1.39) [p. 20] dans laquelle nous aurions ajouté un terme élastique :

$$\int_{\omega} \{\mathbf{E}(\{\mathbf{W}\})\}^{\top} \cdot \{\boldsymbol{\Sigma}(\{\mathbf{U}\})\} + \{\mathbf{W}\}^{\top} \cdot \{\mathbf{Pen}(\{\mathbf{U}\})\} - \{\mathbf{W}\}^{\top} \cdot \{\mathbf{F}\} d\omega = 0 \quad (5.1)$$

avec

$$\{\mathbf{Pen}(\{\mathbf{U}\})\} = \{0_{\mathbb{R}^{5n-3}}, \underbrace{k_{\text{pen}} < \frac{e}{2} + U_3^{n,n+1} - h >_+, 0, 0, 0_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{\text{terme en regard du } U_3^n}\} \text{ sans multiplicateur} \quad (5.2)$$

$$\{\mathbf{Pen}(\{\mathbf{U}\})\} = \{0_{\mathbb{R}^{7n+6}}, k_{\text{pen}} < \frac{e}{2} + \mu_3^{n,n+1} - h >_+\} \text{ avec multiplicateurs} \quad (5.3)$$

L'extension au cas dynamique s'avère un peu plus délicate, car il n'est pas physique d'attribuer une inertie aux multiplicateurs de Lagrange. Il convient donc d'utiliser soit la formulation sans multiplicateurs (5.2), soit de les condenser via les résultats de la section A.2 [p. 155] par exemple.

5.1.2 Essai de validation du contact

Nous validons ici l'implémentation du contact avec la pénalisation du déplacement vertical de la dernière couche. Pour cela, nous étudions une poutre bi-appuyée de longueur $L = 100\text{mm}$, largeur ℓ et d'épaisseur $e = L/12.5$, constituée d'un matériau isotrope dont les propriétés $E = 70\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ sont semblables à celles d'un aluminium standard. L'impacteur est un cylindre de rayon $r = 3\text{mm}$, de masse $m = \rho_\ell \ell$ avec $\rho_\ell = 25\text{kg/m}$. Nous ne conservons qu'un seul élément dans la largeur, de manière à considérer le système invariant.

Essai d'impact dynamique La poutre est impactée par une masse se déplaçant à une vitesse initiale $v_0 = 2\text{m/s}$. La réponse générale de la poutre n'est pas triviale, néanmoins nous pouvons attester de la conservation de l'énergie tout au long de l'essai, afin de valider la bonne prise en compte du contact. L'observation de la cohérence de la déformée est également envisageable. Nous représentons l'évolution de la répartition des différentes énergies normalisées (élastique, cinétique pour la poutre et l'impacteur) à la figure 5.1 [p. 129]. L'énergie normalisée totale $\bar{W} = \bar{W}^{elast} + \bar{W}^{kin} + \frac{1}{2}\rho_\ell v^2$ doit, elle, rester constante. La cinétique de l'impact est

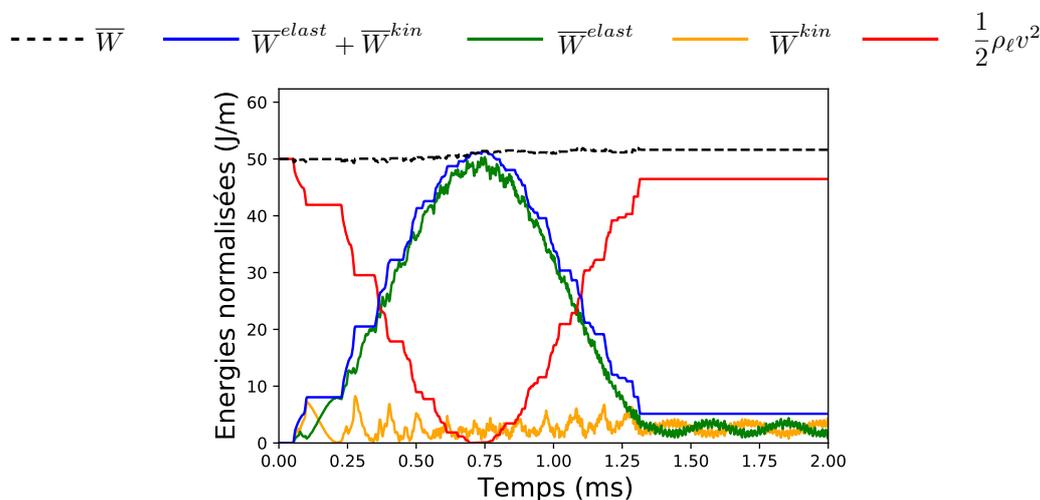


FIGURE 5.1 – $\alpha = 100$

parfaitement capturée. La poutre étant relativement souple en flexion, ses oscillations locales sont nombreuses. L'échange d'énergie entre les deux pièces est fidèlement reproduit et l'éjection de l'impacteur, avec une vitesse légèrement plus faible que sa vitesse incidente, est également marquée. Enfin, nous pouvons attester de la bonne conservation de l'énergie totale tout au long de l'essai.

Influence du coefficient de pénalisation sur le pas de temps critique Nous avons retenu, pour notre résolution, un schéma d'intégration dynamique implicite de type Newmark, lequel est théoriquement inconditionnellement stable. Numériquement, nous observons toutefois que la méthode de pénalisation employée pour représenter le contact peut induire des solutions erronées si le pas de temps est sélectionné trop grossièrement. Pour illustrer ce phénomène, nous étudions à la figure 5.2 [p. 130], la réponse de la structure, en faisant varier, et le coefficient de pénalisation $k_{pen} = \alpha c_\nu^{n-1, n}$, $\alpha \in \{2.5, 10, 100\}$ et le pas de temps. Nous remarquons qu'un coefficient α élevé induit une instabilité pour les pas de temps trop larges, car la plaque est violemment repoussée par la pénétration de l'impacteur dans la dernière couche. Une discrétisation temporelle assez fine peut alors devenir nécessaire pour capter la cinétique globale. Pour $\alpha = 100$, ou $\alpha = 10$ et $\Delta t = 8e^{-3}\text{ms}$, nous notons même que l'énergie totale ne se conserve pas au cours de l'impact ! Cette instabilité est probablement due à la nature implicite-explicite de notre schéma. En effet ici, la position de l'impacteur, au pas de temps $k + 1$, n'est pas introduite comme une inconnue du problème, mais déduite de sa position et de

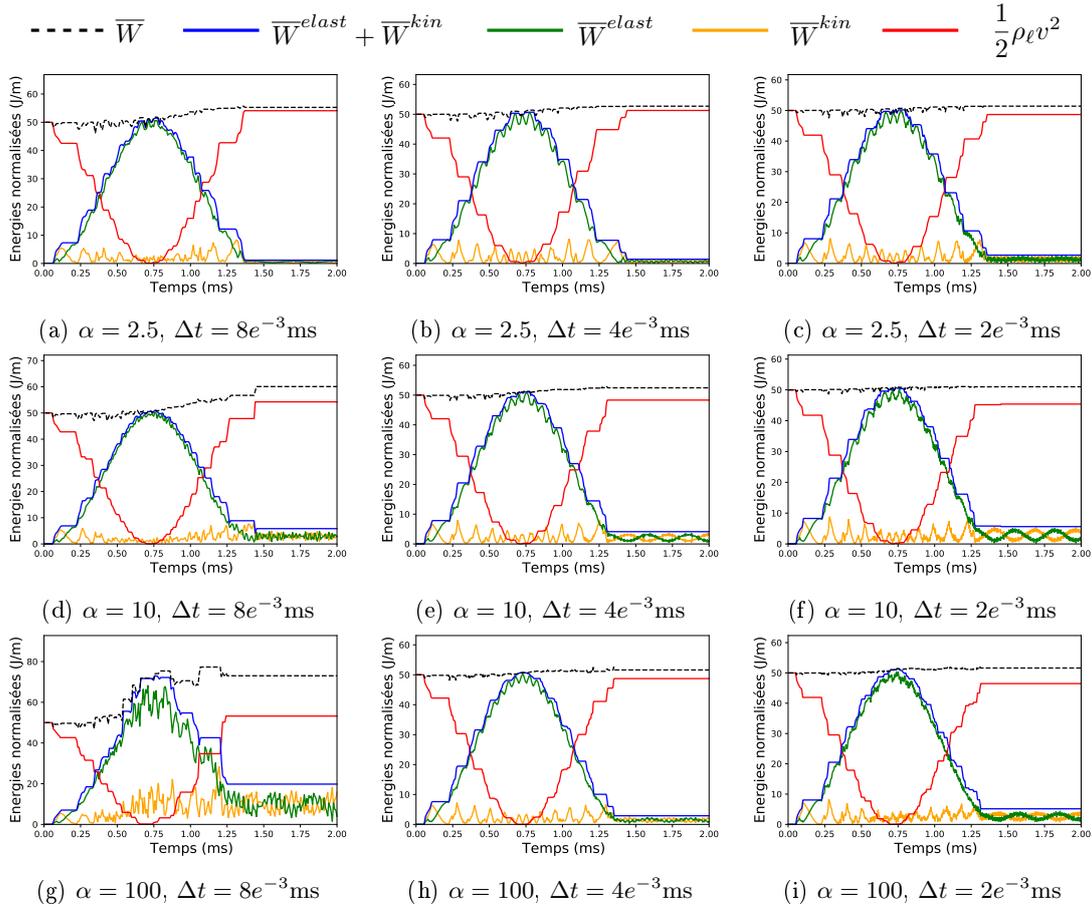


FIGURE 5.2 – Représentation des différentes énergies normalisées

sa vitesse au pas k . L'introduction de la position de l'impacteur comme variable supplémentaire aurait très certainement adouci le problème de contact et la solution en résultant.

En cas de convergence, la mécanique globale de la déformation est satisfaisante, attestant du bon fonctionnement de notre procédure de représentation du contact et de dynamique implicite.

5.2 Impact d'une plaque $(90, 0)_s$

Nous poursuivons la complexification des essais simulés, en étudiant l'impact, en dynamique lente, d'une plaque symétrique $(90_3, 0_6, 90_3)$, comme décrit expérimentalement par Aymerich et al. [2009] puis reproduit numériquement par Zhang and Zhang [2015]. Cette comparaison sera l'occasion de faire dialoguer toutes les non-linéarités introduites dans ce travail de doctorat, et d'étudier plus en détail l'effet de la compression sur le délaminage.

5.2.1 Description du problème

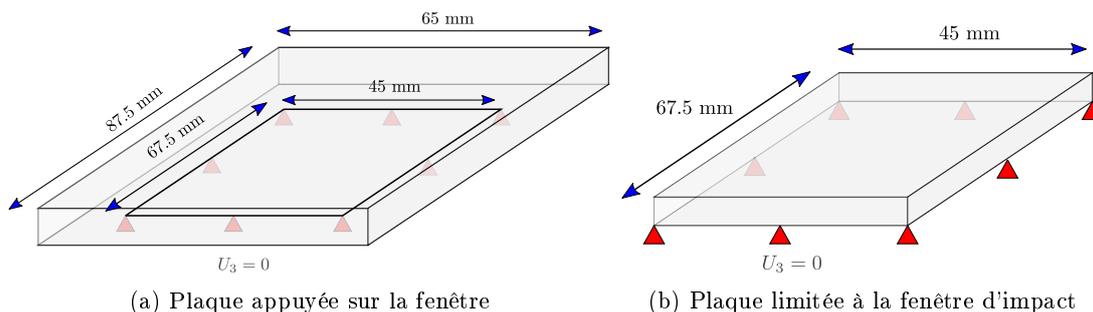
La plaque de $87.5 \times 65 \text{mm}^2$ est appuyée sur une fenêtre rigide d'ouverture $67.5 \times 45 \text{mm}^2$. Les 12 plis sont épais ensemble de 2mm. L'impacteur pèse 2.3kg et son diamètre mesure 12.5mm. Les paramètres matériaux et de rupture d'un pli composite HS160/REM sont spécifiés dans le tableau 5.1 [p. 131] :

Le taux de restitution d'énergie critique de la matrice n'est pas mentionné par [Aymerich et al., 2009, Zhang and Zhang, 2015]. Nous prendrons comme précédemment $G_{Tc} = 0.277 \text{N/mm}^2$

	Paramètres matériaux	
Mécaniques	$E_L = 93.7\text{GPa}$	$E_T = 7.45\text{GPa}$
Rupture de la matrice	$G_{LT} = G_{TN} = G_{LN} = 3.97\text{GPa}$	$\nu_{LT} = \nu_{LN} = \nu_{TN} = 0.261$
Rupture de l'interface	$G_{Tc} = ?$	$\sigma_c^T = 30\text{MPa}$
	$G_{Ic} = 0.52\text{N/mm}^2$	$G_{IIc} = 0.97\text{N/mm}^2$
	$\sigma_c^v = 30\text{MPa}$	$\sigma_c^r = 80\text{MPa}$

TABLE 5.1 – Propriétés mécaniques d'un pli composite HS160/REM

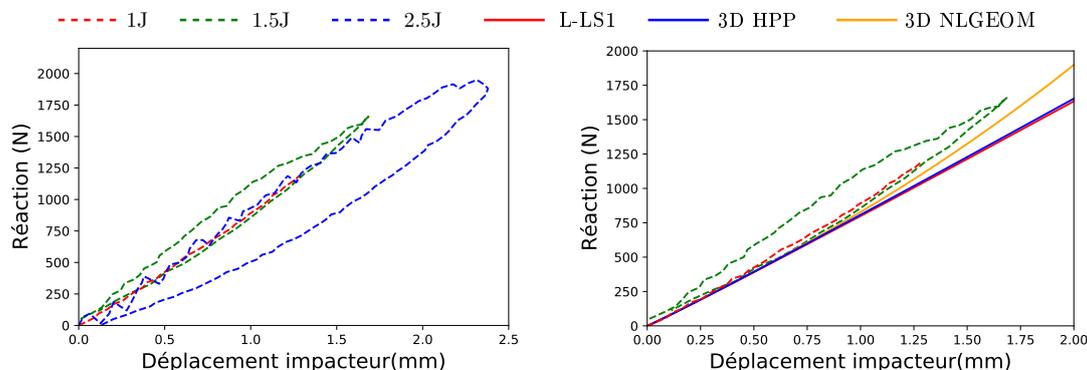
5.2.2 Essai élastique



Nous éprouvons tout d'abord notre modélisation par un essai statique simple, afin de valider les pentes élastiques. Les courbes expérimentales pour les essais d'impact à 1J, 1.5J et 2.5J sont représentées à la figure 5.4a [p. 131]. Nous remarquons une probable erreur dans notre relevé. En effet, nous constatons que si les pentes élastiques des essais à 1J, 2.5J coïncident, il n'en va pas de même pour l'impact à 1.5J, qui semble plus raide.

À la figure 5.4b [p. 131], nous ajoutons les pentes prévues par le L-LS1, ainsi que celles issues d'un calcul tridimensionnel complet, avec et sans non-linéarités géométriques. Nous notons, pour des déplacements faibles, un bon accord entre nos propres pentes et celles des essais à 1J et 2.5J. Pour un déplacement de l'impacteur supérieur à 1.5mm, la prise en compte des non-linéarités géométriques s'avère critique.

La raideur de l'essai à 2.5J semble quasi-linéaire, mais cache en réalité la compensation de deux phénomènes : les non-linéarités géométriques d'une part, qui tendent à rigidifier la plaque, et les fissurations d'autre part qui tendent à l'assouplir. Nous anticipons donc que notre essai, restreint au cadre HPP, prédira une chute de rigidité plus importante qu'expérimentalement.



(a) Courbes force-déplacement expérimentales

(b) Représentation des différentes pentes pour une modélisation élastique

Nous pouvons, de ce premier essai, tirer deux conclusions :

1. les essais aux énergies $> 1\text{J}$ nécessitent probablement l'usage de non-linéarités en grands déplacements pour traduire le renforcement apparent de la plaque.
2. Nos données ne coïncident pas exactement avec celle d'Aymerich si bien que les résultats fournis ne seront à regarder que comme des tendances.

5.2.3 Comparaison quasi-statique – dynamique implicite

Il est communément admis que les efforts de contact et le délaminage induit par un essai en dynamique lente sont assez proches de ceux obtenus par une simulation quasi-statique (voir par exemple [Luo and Lee, 2011, Sutherland and Soares, 2012, Yokozeki et al., 2010]). En effet, l'influence de l'inertie des structures, dont la masse volumique est remarquablement faible, se montre bien souvent négligeable. Pour notre première validation, nous allons par conséquent simplement prescrire le déplacement de l'impacteur jusqu'à une valeur totale $\Delta = 2.5\text{mm}$, et représenter également les résultats obtenus en dynamique. Seul le pli inférieur est autorisé à rompre par des fissures transverses. De même nous n'affectons de variables d'endommagement inter-laminaire qu'à l'interface entre le pli inférieur et le pli médian. Nous sélectionnons le modèle $\mathcal{N}^{2,2}$ pour le délaminage et l'AT1 pour la fissuration matricielle.

Comparaison du délaminage Nous présentons figure 5.5 [p. 132] les étendues du délaminage, presque identiques, produites par les simulations statique et dynamique.

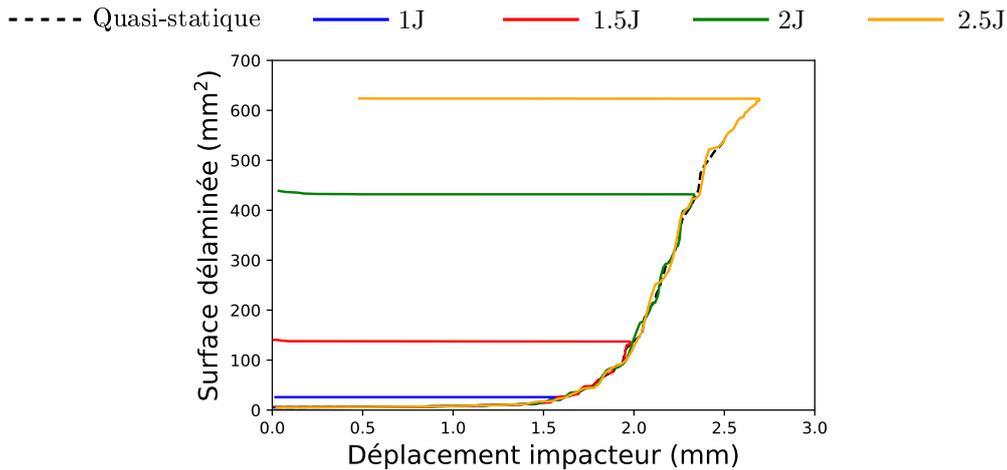


FIGURE 5.5 – Évolution de la surface du délaminage pour l'interface inférieure en statique et en dynamique

La surface délaminée est ici obtenue en intégrant le champ d'endommagement sur la surface :

$$S_{delam} = \int_{\omega} d_{\tau}^{1,2} d\omega$$

Courbe force-déplacement Les courbes forces-déplacements, distinguées par les énergies incidentes, et comparées à la solution quasi-statique, sont représentées aux figures 5.6a–5.6d.

Nous notons encore la similarité entre les essais dynamiques et l'évolution quasi-statique. Cependant, la non-prise en compte du renforcement induit par les non-linéarités géométriques, entraîne une saturation de la réaction à 1400N, indépendante de l'enfoncement de l'impacteur. Cette valeur reste très inférieure à la réaction maximale de l'essai à 2.5J qui est, elle, évaluée à 2000N. Notre modélisation, en l'état, ne sera donc en mesure de reproduire que des essais à faibles énergies, induisant une déflexion modeste.

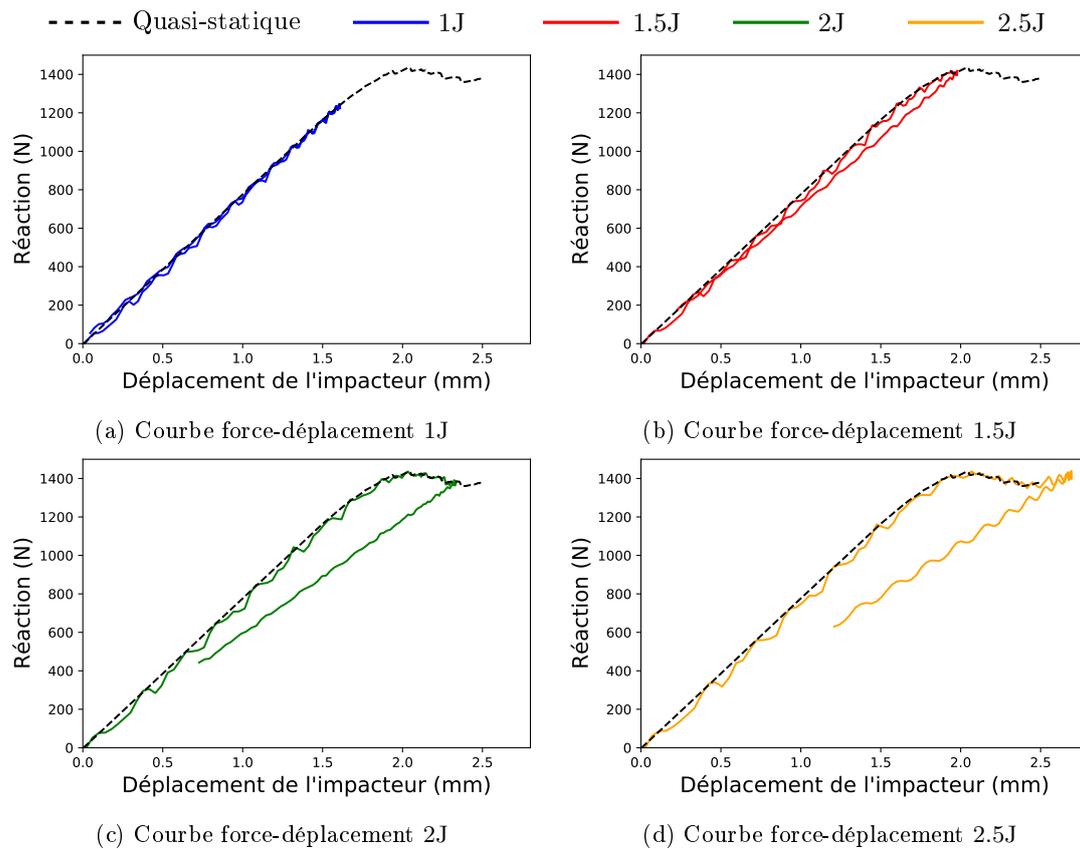


FIGURE 5.6 – Courbe force-déplacement pour différentes énergies d'impact

Étendue du délaminage et de la fissuration intra-laminaire Malgré cette imprécision critique, nous représentons maintenant :

- la surface délaminée figure 5.7a [p. 134],
- la longueur (figure 5.7b [p. 134]) et la largeur (figure 5.7c [p. 134]) des lobes délaminés,
- et enfin l'étendue de la fissuration matricielle figure 5.7d [p. 134],

le tout en fonction des énergie incidentes.

Même si les courbes sont tout à fait satisfaisantes, nous ne les conservons que pour asseoir une tendance, car l'erreur commise par l'utilisation du cadre HPP est bien trop importante au regard de la précision exigée. Notons simplement que la longueur de la fissuration matricielle est sous-estimée, dans l'essai à 2.5J, à cause de l'apparition d'une seconde fissuration matricielle, parallèle à la première (voir figure 5.8b [p. 134]) et polluant la solution.

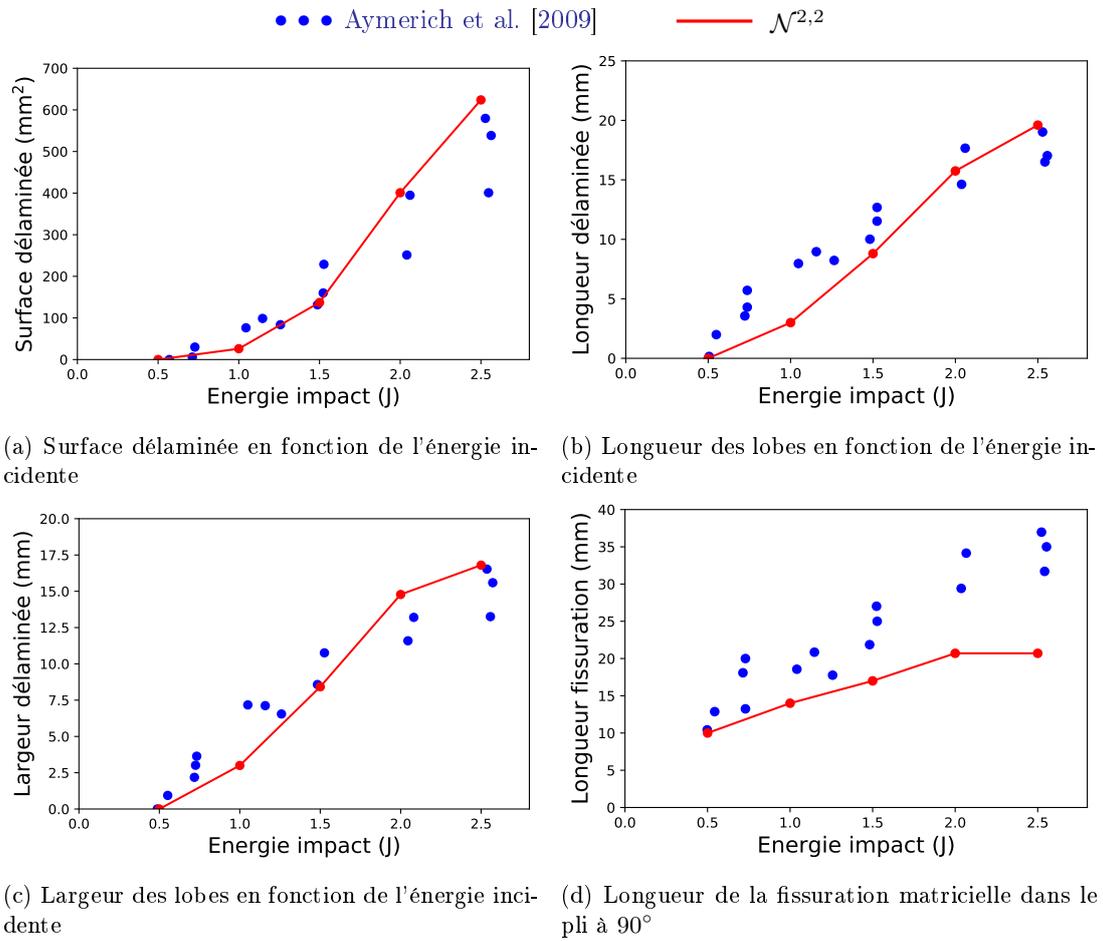


FIGURE 5.7 – Évolution des grandeurs relatives aux modes de ruine en fonction des énergies incidentes, seule l'interface du dessous peut délaminer.

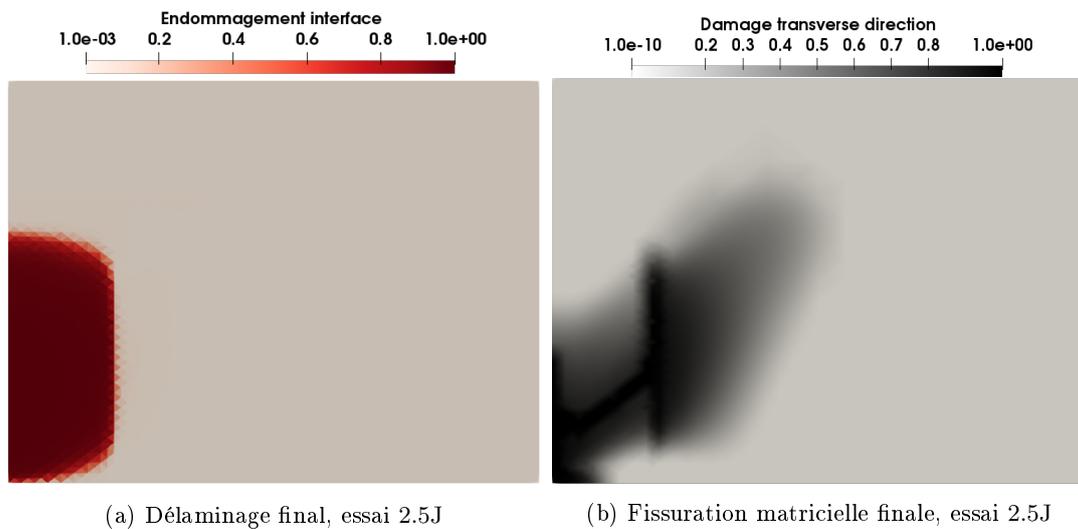


FIGURE 5.8 – Fissuration matricielle et délamination

5.2.4 Ruines des deux interfaces

Nous abordons maintenant la simulation de la dégradation complète de la plaque. Nous accordons une variable d'endommagement d_T au pli supérieur, ainsi que la capacité à délaminer à l'ensemble des interfaces.

Essai sans précaution supplémentaire

Nous représentons aux figure 5.9 [p. 135] les surfaces délaminées obtenues, sans stratégie particulière de traitement du délaminage en présence de contraintes de compression.

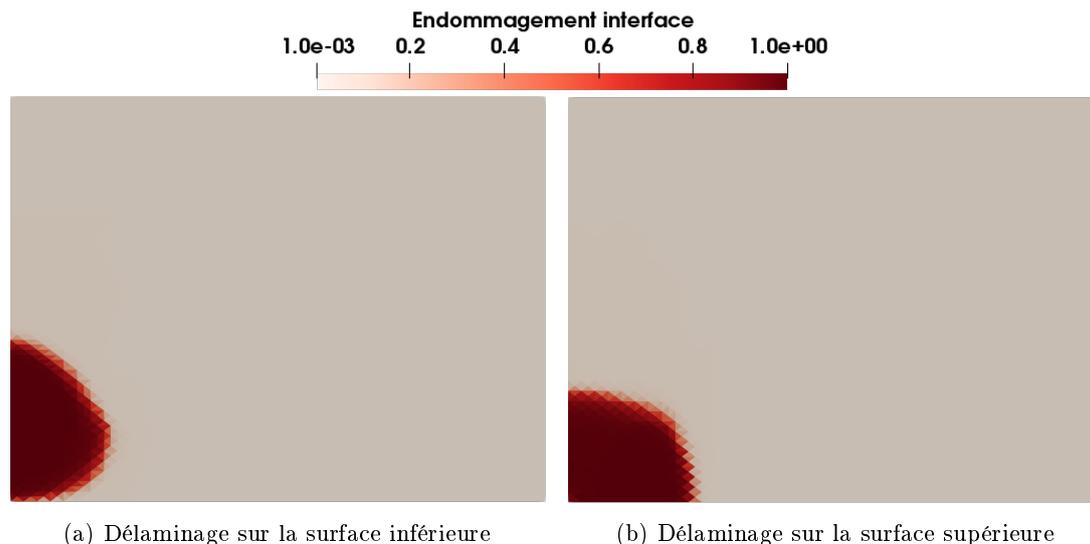


FIGURE 5.9 – Surfaces délaminées pour l'essai complet sans procédure de renforcement en compression

Nous relevons ici un problème majeur, car Aymerich et al. [2009] ne mentionnent pas de délaminage à l'interface supérieure dans leur essai expérimental! Numériquement pourtant, les contraintes de cisaillement entre le pli médian et le pli supérieur sont très élevées, et devraient en toute logique induire la cassure de l'interface. Il doit donc exister un phénomène qui restreint le délaminage.

L'interface supérieure en son centre est le siège de fortes contraintes de compression lesquelles ont pour effet, voir sous-section 3.4.5 [p. 81], d'augmenter la résistance des structures au délaminage. Aymerich et al. [2009] dans leurs simulations suppriment l'endommagement interlaminaire lorsque le quotient entre contraintes de compression et de cisaillements s'abaisse sous le seuil empirique $\frac{1}{\sqrt{8}}$. Cette procédure sera étudiée plus bas. Zhang and Zhang [2015] suggèrent quant à eux la nécessité d'introduire un frottement résiduel, afin d'inhiber la propagation du délaminage au niveau de l'interface supérieure.

Aucune de ces méthodes n'a pour le moment été déployée dans notre travail. L'objet des parties suivantes est de mettre à l'épreuve trois stratégies qui permettent d'éviter le développement du délaminage à l'interface supérieure.

Renforcement en compression

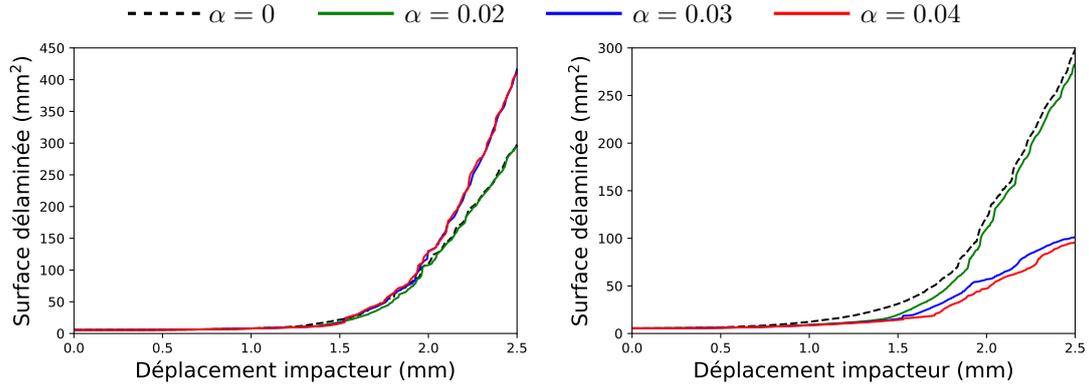
Notre choix concernant l'énergie élastique endommagée (3.33) [p. 81] interdit déjà tout développement du délaminage en mode I, consécutivement à des contraintes compressives. Nous choisissons par ailleurs, conformément à la sous-section 3.4.5 [p. 81] et aux références afférentes, d'élever le taux de restitution d'énergie critique en mode II, en présence de contraintes normales

négatives. Plus précisément, nous choisissons une évolution linéaire de la forme :

$$G_{IIc}^{eff} = G_{IIc}(1 - \alpha \langle \nu \rangle_-) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

L'emploi du $\mathcal{N}^{2,2}$ fixe une contrainte critique d'initiation dépendant uniquement de G_c , de paramètres géométriques et matériaux (voir tableau C.1 [p. 191]). Par conséquent, élever le taux de restitution d'énergie critique induit sans détour une augmentation de la contrainte d'initiation.

Nous représentons aux figures 5.10a–5.10b, les surfaces délaminées, inférieure et supérieure, pour différentes valeurs du paramètres α . Le cas $\alpha = 0$ correspondant au cas dégénéré où G_{IIc} demeure inchangé, induisant un résultat identique à celui de la partie précédente.



(a) Surface inférieure délaminée pour différentes valeurs du paramètre α . (b) Surface supérieure délaminée pour différentes valeurs du paramètre α .

FIGURE 5.10 – Délaminages pour différentes valeurs du paramètre α .

Nous remarquons que le choix de $\alpha = 0.02$ induit très peu de changement par rapport à la solution précédente. Le délaminage de la surface supérieure se développe sans difficulté. Une observation attentive des figures révèle que si $\alpha = 0.02$, une différence parfaitement mineure s'observe au dessous immédiat de l'impacteur.

En revanche, pour $\alpha = 0.03$ et $\alpha = 0.04$, nous relevons une diminution assez franche de la surface rompue supérieure. L'interface demeure parfaitement intacte en dessous de l'impacteur grâce aux fortes contraintes compressives et y permet, par la même occasion, la « fixation » de la singularité de cisaillement. La stratégie de renforcement en compression présentée ici permet donc l'inhibition partielle du phénomène de délaminage sur la partie supérieure.

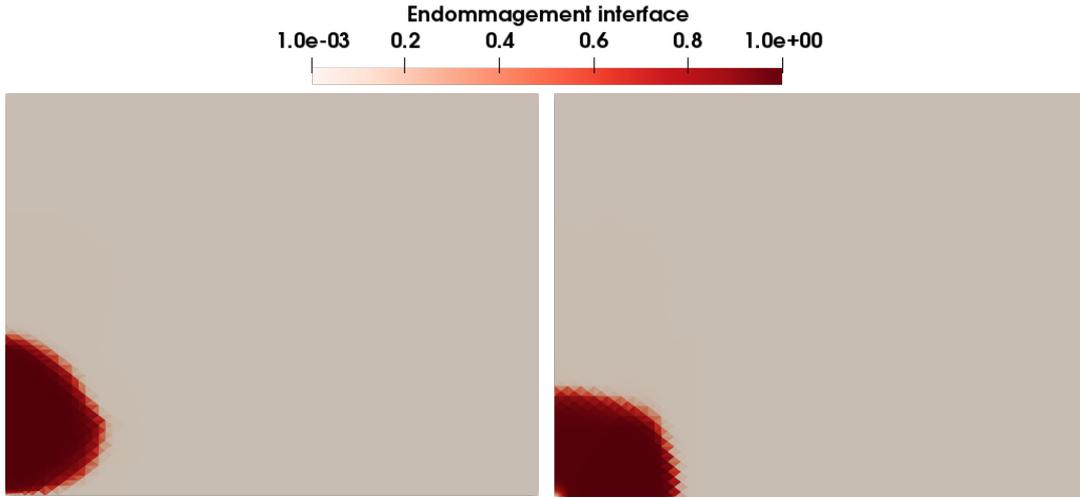
Contact frottant

Suivant notre stratégie actuelle, les fissures sont refermées lorsqu'elles sont soumises à de la compression, de manière à interdire l'interpénétration des couches, mais aucun cisaillement n'est transmissible de part et d'autre. Par conséquent, l'endommagement en mode II peut s'y propager de manière erronée du fait d'une mauvaise répartition des efforts de cisaillement inter-laminaires.

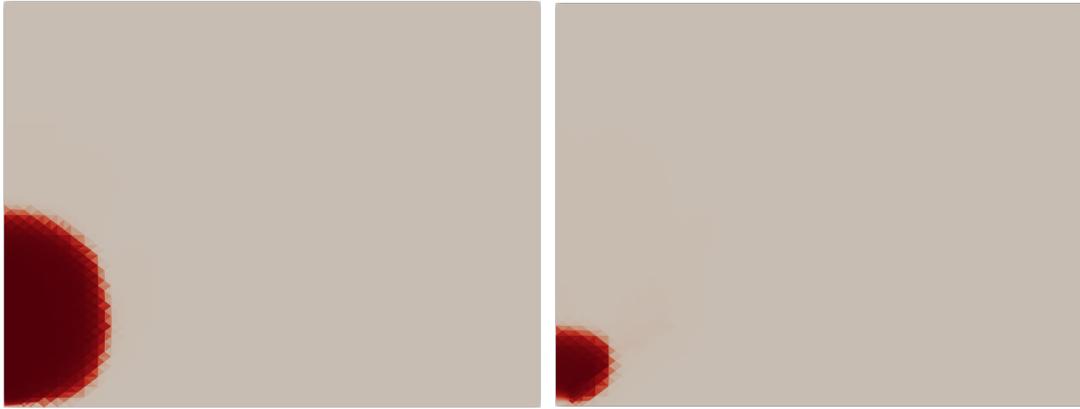
Zhang and Zhang [2015], pourtant, relèvent la nécessité d'introduire un contact frottant au niveau des zones de compression, afin de ralentir la propagation du délaminage. Les zones comprimées transmettront alors un cisaillement non nul, relaxant quelque peu les contraintes au niveau du front de délaminage.

Nous étudions maintenant une modélisation de contact, de type Mohr-Coulomb, au niveau des interfaces délaminées soumises à des efforts de compression. Ainsi, nous souhaitons qu'une interface rompue puisse transmettre un effort de cisaillement vérifiant :

$$\tau^{max} \leq -\mu \langle \nu \rangle_- \quad (5.5)$$



(a) Délaminage sur la surface inférieure $\alpha = 0.02$. (b) Délaminage sur la surface supérieure $\alpha = 0.02$.



(a) Délaminage sur la surface inférieure $\alpha = 0.04$. (b) Délaminage sur la surface supérieure $\alpha = 0.04$.

où μ désigne le coefficient de frottement à l'interface.

Lorsque l'endommagement d_τ est unitaire, le cisaillement est nul. Il s'agit donc de restaurer d_τ , à une valeur intermédiaire, dans $[0, 1]$, pour saturer l'inégalité (5.5) :

$$g(d_{frott}) = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = -\mu \langle \nu \rangle_-$$

Par exemple, pour les modèles $\mathcal{N}^{1,2}$ et $\mathcal{N}^{2,2}$, nous pouvons calculer l'endommagement :

$$d_{frott}^{\mathcal{N}^{1,2}} = 1 - \frac{-\mu \langle \nu \rangle_-}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} \text{ et } d_{frott}^{\mathcal{N}^{2,2}} = 1 - \sqrt{\frac{-\mu \langle \nu \rangle_-}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}}} \quad (5.6)$$

Nous actualisons alors l'endommagement après calcul, mais avant la résolution en déplacement suivante, avec une valeur *effective* :

$$d_\tau^{eff} = \min(d_\tau, d_{frott}) \quad (5.7)$$

De la sorte, si $\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$, norme du cisaillement dans un cas sain, est plus petite que $-\mu \langle \nu \rangle_-$ alors cette effort peut être « transmis ». Dans ce cas, $d_{frott} < 0$ et le cisaillement égalise sa valeur saine. En revanche si $\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \geq -\mu \langle \nu \rangle_-$ alors l'endommagement d_τ^{eff} est calculé de manière à satisfaire exactement $\tau^{max} = -\mu \langle \nu \rangle_-$.

Pour nos essais, nous allons employer $\mu = 0.3$, $\mu = 0.6$ et $\mu = 0.9$, en accord avec les valeurs classiques habituellement rencontrées dans la littérature [Li and Wisnom, 1970, Schön, 2000, Zhang and Zhang, 2015]

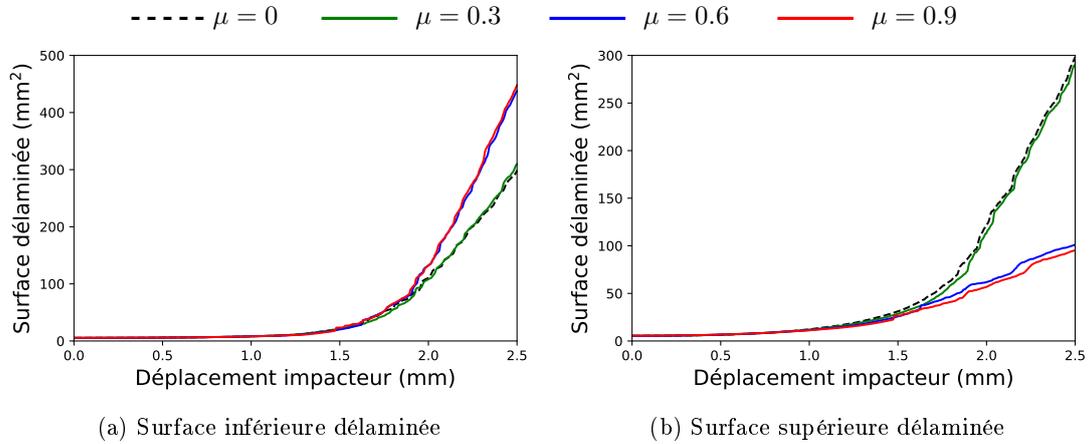


FIGURE 5.13 – Surfaces délaminiées, $\mu \in \{0, 0.3, 0.6, 0.9\}$

Nous représentons alors, figure 5.14 [p. 138], le délaminage des deux surfaces :

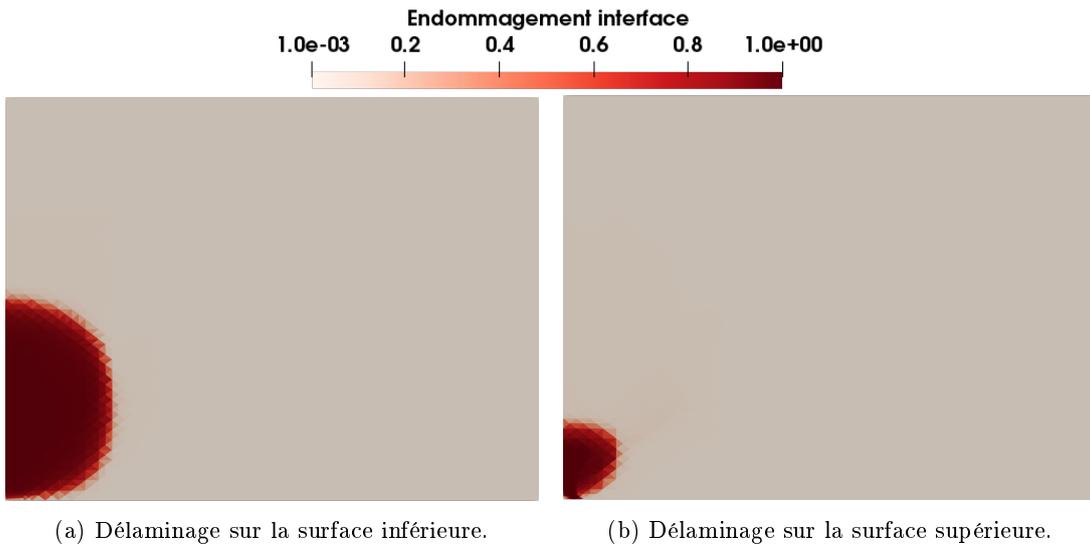
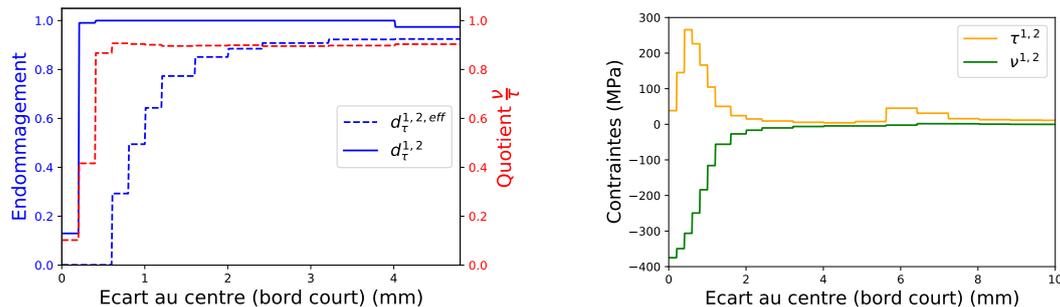


FIGURE 5.14 – Délaminage $\mu = 0.9$.

Nous remarquons, de nouveau, une sorte de « phénomène de seuil », concernant l'inhibition du délaminage sur la surface supérieure. Lorsque $\mu = 0.3$, le délaminage se propage sans réel frein, tandis que, comme noté par Zhang and Zhang [2015], les résultats s'avèrent similaires lorsque μ est choisi supérieur à 0.6.

Au niveau du plan de symétrie, le long du bord court, nous représentons figure 5.15a [p. 139] l'évolution de l'endommagement réel et effectif ainsi que le quotient $\frac{-\langle \nu \rangle_-}{\|x\|}$. Sous l'impacteur, à la surface supérieure, l'endommagement effectif s'adapte pour garantir que le quotient entre les contraintes de compression et le cisaillement égale exactement la valeur prescrite μ . Ainsi figure 5.15b [p. 139], une singularité de cisaillement demeure, malgré la rupture de l'interface, relaxant alors quelque peu les contraintes de cisaillement au niveau du front de délaminage.



(a) Endommagements effectif et réel, superposés au quotient de la contrainte de compression sur le cisaillement.

(b) Représentation du cisaillement et de l'arrachement d'interface attestant de la bonne prise en compte du contact frottant.

Non-endommagement en cas de forte compression

Nous allons ici étudier l'effet du critère de non endommagement utilisé par Aymerich et al. [2008] se fondant eux-mêmes sur les travaux de Hou et al. [2001] :

$$\text{Pas de délaminage si } \nu < -\sqrt{\frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{\beta}} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

Notons simplement que ce critère s'interprète comme une version « plus forte » du renforcement en compression induit par l'augmentation du taux G_{IIc} .

Pour satisfaire cette condition, nous mettons simplement à jour les prédicteurs d'endommagement, en les pondérant par un champ booléen, tel que :

$$\eta = \text{Heav} \left(\nu + \sqrt{\frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{\beta}} \right) \quad (5.9)$$

$\eta = 0$ là où la contrainte de compression est trop forte, tandis que $\eta = 1$ aux points où l'inégalité n'est pas vérifiée (5.8). Pour nos simulations, nous prendrons les valeurs $\beta = 4, 8, 16$. Plus le coefficient β est élevé, plus le délaminage en compression est restreint. Aymerich et al. [2008] dans leur travail utilisent $\beta = 8$.

Cette correction, après calcul de l'endommagement, est tout à fait légitime, car le calcul des prédicteurs d'endommagement est *local*. Si bien que contraindre *a posteriori* les prédicteurs à respecter certaines conditions, n'a aucune influence sur les autres valeurs de l'endommagement déterminées. Dans l'ensemble des simulations, une forte diminution du délaminage est relevée au niveau de la surface supérieure figure 5.16b [p. 140]. L'interface demeure intacte sur une zone circulaire, plus ou moins grande suivant la valeur de β .

Synthèse

Les trois stratégies présentées sont toutes légitimes et employées dans la littérature. Il conviendrait dès lors d'étudier plus en détail si celles-ci doivent être utilisées conjointement ou non, et quelles valeurs accorder aux variables qui leurs sont associées :

- coefficient d'augmentation du taux de restitution d'énergie critique : α , défini dans (5.4)
- coefficient de frottement aux interfaces : μ , (5.5)
- seuil d'inhibition du délaminage : β , (5.8)

Les approches d'augmentation de G_{IIc} et d'utilisation d'un seuil d'inhibition sont similaires, si bien que leur utilisation simultanée ne nous semble pas pertinente. Zhang and Zhang [2015] retiennent eux les méthodes 2 et 3. Il est certain toutefois que ces stratégies opèrent toutes dans le sens favorable d'une diminution du délaminage au voisinage des zones comprimées, et donc,

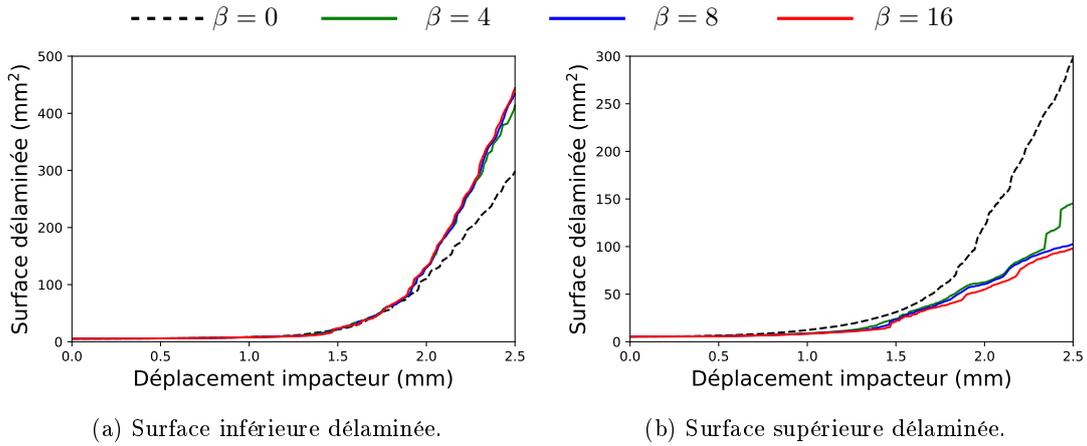


FIGURE 5.16 – Délaminages pour différentes valeurs du paramètre β .

par transfert de charges, à la rupture des interfaces soumises à de la traction. L'évolution du délaminage dans une simulation $\alpha = 0.02$, $\mu = 0.6$, $\beta = 8$ est représentée figure 5.17 [p. 140]. L'effet simultané des trois procédures se révèle minime concernant la surface inférieure mais

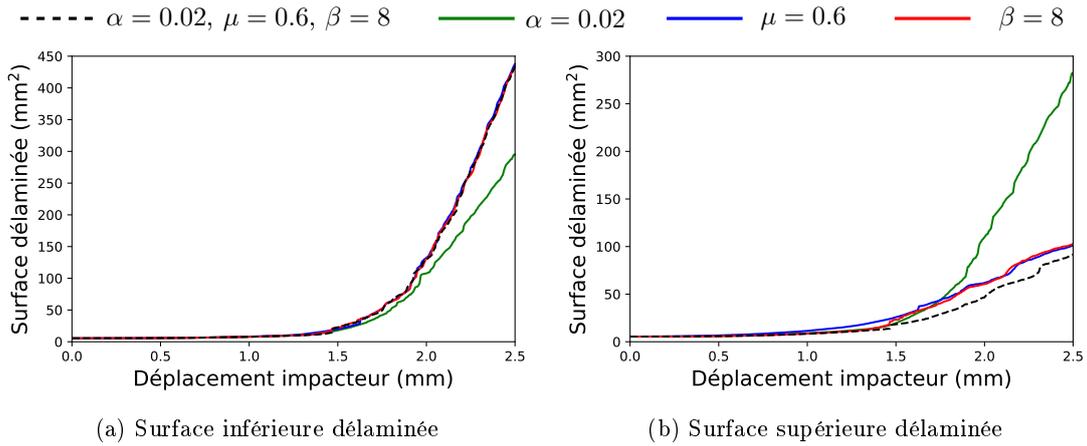


FIGURE 5.17 – Surfaces délaménées, $\alpha = 0.02$, $\mu = 0.6$, $\beta = 8$

bien visible sur la supérieure. Une étude plus fine du recalage expérimental des coefficients α , β et μ devrait maintenant être menée.

5.3 Une incursion dans les grands déplacements

L'étude précédente montre que la prise en compte des grands déplacements s'avère critique, sans cela, aucun renforcement ne s'oppose à l'assouplissement progressif de la plaque induit par le délaminage. La présente section aura pour enjeu de proposer une extension, aussi minimale qu'efficace, au cadre des non-linéarités géométriques.

Le modèle de Von-Karman [Ciarlet and Gratie, 2006, Hale et al., 2018] est le plus « faiblement » non-linéaire des modèles de plaque. Il s'obtient en augmentant la déformation membranaire d'un terme quadratique, traduisant le couplage membrane-flexion. Ce modèle se confirme pertinent appliqué à la mécanique de plaques, qui faiblement déformées, sont soumises à des « rotations modérées ».

Hypothèse 5.3.1 Déformation membranaire non linéaire. *Nous postulons que les déformations membranaires sont à présent augmentées d'un terme relatif au gradient du déplacement*

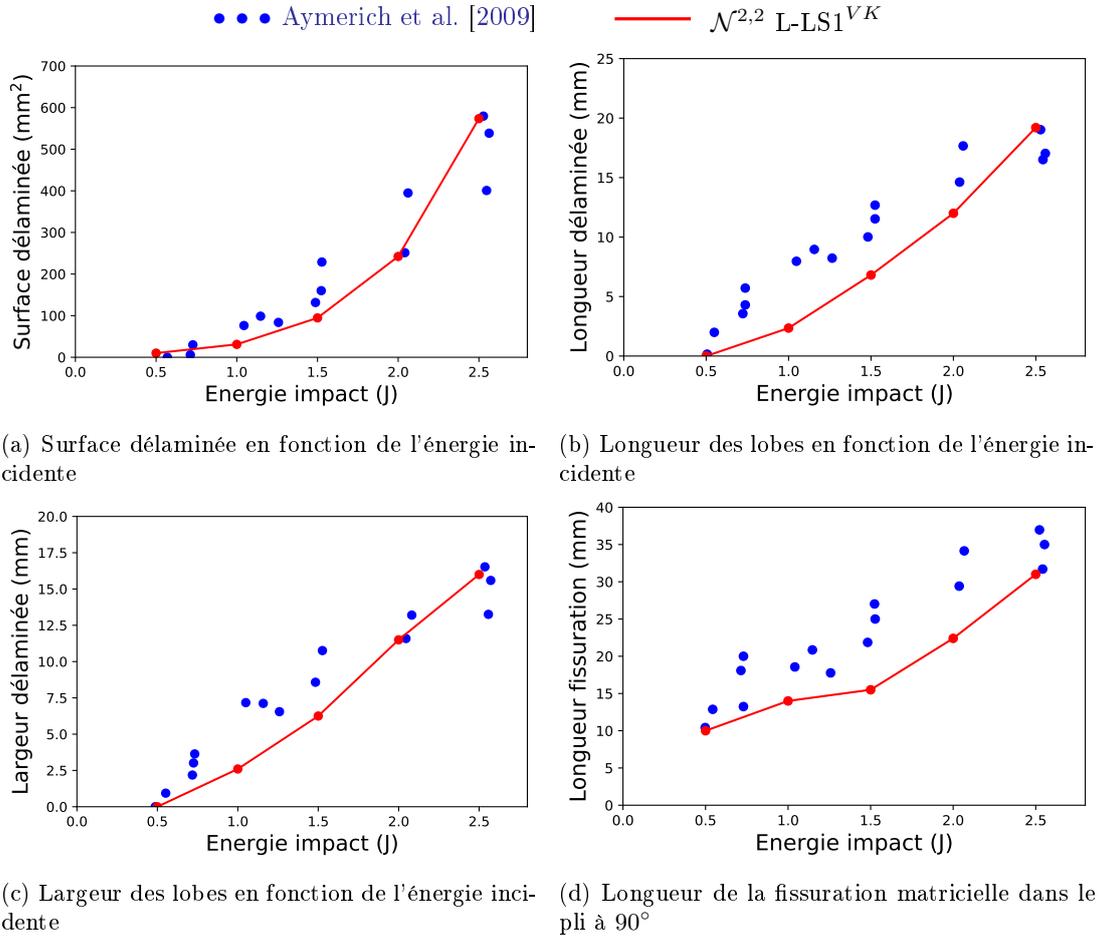


FIGURE 5.19 – Évolution des grandeurs relatives aux modes de ruine en fonction des énergies incidentes, les deux interfaces peuvent délaminer.

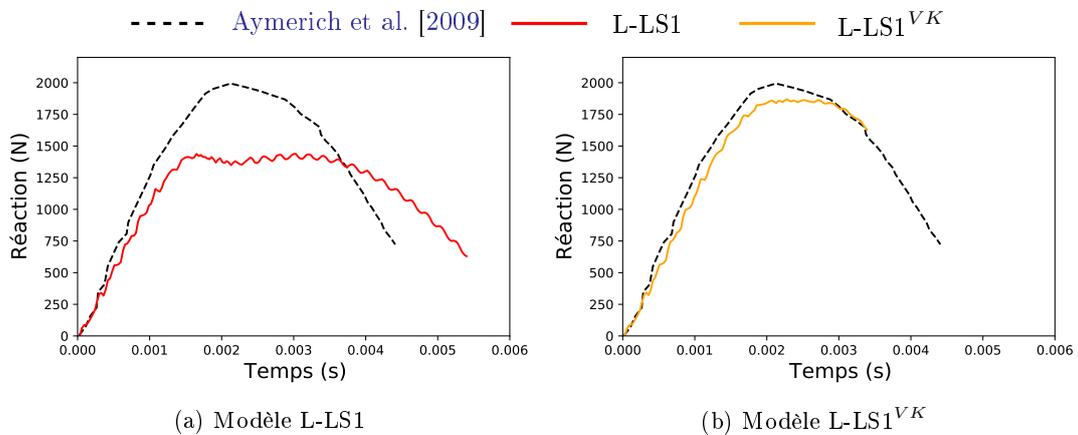


FIGURE 5.20 – Courbe force-temps pour l'essai dynamique à 2.5J

En bref

Ce chapitre, illustratif, a mis en évidence les capacités certaines des modèles multicouche à simuler la ruine des composites stratifiés lors d'un impact en dynamique lente.

- ★ La stratégie de modélisation du contact par pénalisation a été détaillée : il s'est agit simplement d'augmenter la forme faible du modèle par un terme élastique correspondant à la différence de position entre l'impacteur et celle de la dernière couche (5.1).
- ★ L'impact d'une plaque simple a permis de sélectionner les phénomènes pertinents à considérer pour la prédiction des endommagements :
 - Le rôle important des grands déplacements a d'abord été souligné sous-section 5.2.2 [p. 131]. Sans eux, aucun phénomène ne rigidifie la plaque au cours de l'impact de sorte qu'un assouplissement excessif se trouve prédit.
 - Afin de faciliter l'étude paramétrique, nous avons justifié, sous-section 5.2.3 [p. 132], la pertinence de l'usage de simulations quasi-statiques. Dans ce régime, les endommagements et courbes caractéristiques sont très proches de ceux issues du cadre dynamique.
 - La nécessaire prise en compte du renforcement en compression concernant l'étude du délaminage a ensuite été illustrée. Il ressort de cela qu'en plus d'augmenter la tenue au délaminage, la compression d'une interface, même délaminée, permet une interaction résiduelle en cisaillement entre deux couches. Nous avons alors proposé trois stratégies complémentaires afin d'éviter la propagation de la rupture au voisinage de zones comprimées :
 - ♣ Une augmentation linéaire du taux de restitution d'énergie critique en mode II (5.4).
 - ♣ L'introduction de frottements aux interfaces (5.5), induits par le calcul d'un endommagement effectif (5.6)–(5.7), plus réduit que le réel.
 - ♣ L'inhibition totale du délaminage, là où les contraintes vérifient une certaine inégalité (5.8), via une pondération « d'Heavyside » (5.9) des prédicteurs d'endommagement.
- ★ Une extension de nos modèles, au cadre des grands déplacements, a été réalisée en actualisant la déformation membranaire de chacune des couches, par un terme quadratique relatif au gradient du déplacement hors plan (5.10). Cette modification se solde par des résultats très prometteurs, et prédit correctement la dynamique d'une plaque impactée.



Rimski-Korsakov *Le récit du prince Kalender*

Conclusion

Aussi résistants que l'acier, pour des masses 4 à 5 fois inférieures, les polymères renforcés de fibres de carbone promettent un tournant radical à la conception de structures robustes et légères. Cependant, soixante ans de développement n'ont pas permis de répandre autant qu'envisageable leur emploi, cela notamment à cause de leur défaut majeur : une rupture « fragile ». Ce frein à leur utilisation sera possiblement levé lorsque, soit :

- la conception même des composites, par exemple via un renforcement des interfaces ou de la matrice, induira un semblant de ductilité, qui permette de mieux contrôler la rupture ;
- soit les ingénieurs disposeront d'outils de simulation performants, à prédire avec précision la survenue des modes de ruine ... afin de les éviter.

C'est comme une contribution au second de ces deux objectifs que s'est construit notre travail de doctorat. Il s'est agi pour nous de renforcer les capacités des modèles *layerwise* formulés en contraintes, et présentés comme autant d'alternatives aux coûteuses simulations tridimensionnelles afin de représenter la rupture des composites stratifiés. L'enjeu était clair : proposer une version opérationnelle, permettant d'en prédire sobrement, et l'initiation, et la propagation. Notre appréhension de ce problème complexe a défini plusieurs sous-tâches à mener séquentiellement :

1. Parfaire le modèle mécanique retenu pour représenter le stratifié.
2. Déterminer comment l'endommagement dégrade les rigidités généralisées.
3. Établir, à partir des champs mécaniques prédits, l'étendue des différentes fissurations.

Le chapitre 1 a vu l'émergence d'un nouveau modèle *layerwise* formulé en contraintes : le L-LS1, particulièrement performant pour la simulation de stratifié complexe. Les contraintes généralisées y comportaient l'ensemble des informations pertinentes pour l'étude de la ruine. L'extension au cadre dynamique des modèles *layerwise* a été traitée au chapitre 2, des essais variés ont permis d'asseoir la pertinence des inerties généralisées, non triviales, déduites d'un principe élasto-dynamique là encore formulé en contraintes. À l'issue de ces deux premières parties, le point 1 était donc entièrement traité.

Nous avons ensuite retenu de représenter, par la mécanique de l'endommagement continu, l'ensemble des ruptures possibles, en intégrant l'état de dégradation de la structure via une variable vectorielle \mathbf{d} . Variable vectorielle dont chacune des coordonnées, comprise entre 0 et 1, traduisait l'activation d'un des mécanismes. L'impact de cette variable \mathbf{d} sur la rigidité généralisée du modèle L-LS1 a été précisé au début des chapitres 3 et 4. La structure découplée de la souplesse généralisée a grandement facilité la mise en place du modèle ainsi que son interprétation physique. Par conséquent, ce modèle, qui nous semble mature, a satisfait pleinement la problématique 2.

Poursuivant, pour calculer les endommagements, consécutifs à une sollicitation trop intense, nous avons conservé un cadre variationnel rassurant par l'utilisation de la la théorie des matériaux standard généralisés et l'endommagement continu. Un parallèle, entre notre stratégie établie pour étudier la fissuration intra-laminaire et les méthodes par champ de phase, a été dressé au chapitre 4. Il insérerait notre démarche dans le cadre d'une théorie maintenant bien documentée. Notre modèle a ainsi d'abord été testé au moyen d'essais de référence simples, activant tout ou partie des modes de rupture possibles. Les résultats en ont été tout à fait remarquables, malgré des maillages grossiers qui comportaient de quelques centaines à quelques milliers d'éléments. Enfin, l'essai de flexion 4 points sur un $(90, 0)_s$ a achevé notre validation, en attestant la bonne représentation de l'interaction entre ruine intra-laminaire et délaminage.

Cependant, la cruelle complexité des phénomènes étudiés a parfois induit des imprécisions, notamment lors des essais d'impact. Au chapitre 5, nous n'avons pas manqué de cerner les lacunes de notre modèle, notamment en ce qui concerne le rôle de la compression.

Nous avons également mentionné, sans plus de détour, que notre étude portait d'avantage sur la modélisation théorique des composites stratifiés, c'est-à-dire sur les points 1 et 2, en conservant des lois de comportement simples, que sur l'immense difficulté du choix des critères de rupture et donc du calcul de l'endommagement. Il n'est en conséquence pas étonnant de noter un écart à l'expérience au cours d'essais enchevêtrant l'ensemble des mécanismes de ruine. Une loi de rupture bien établie, recalée par des campagnes expérimentales d'essais, s'accommoderait très bien à l'usage de nos modèles *layerwise*, et tout particulièrement du L-LS1, car ce dernier délivre l'ensemble des informations nécessaires à l'évaluation des critères usuels d'initiation et de propagation.

Soulignons enfin, que les modèles de plaques multicouches formulées en contrainte s'adaptent sans difficulté à d'autres matériaux que les composites polymères renforcés de fibres de carbone majoritairement évoqués ici. Ainsi, le verre feuilleté, les plaques de béton armé renforcées, sont autant de structures que le L-LS1 pourrait, sans ajout, correctement simuler.

Perspectives

L'ultime volet de notre étude, consacré à l'impact sur des composites stratifiés, nous a remis en perspective toute la complexité de la modélisation et des interactions des modes de ruine. Une étude plus fine que la nôtre, concernant l'évolution du taux de restitution d'énergie critique, de la contrainte critique d'initiation, en présence de compression, serait appréciable. Elle succéderait au constat déjà bien établi que des contraintes normales négatives retardent le délaminage voir même suspendent entièrement son apparition. De même, le rôle du frottement aux interfaces délaminées ouvre une piste intéressante à une meilleure prise en compte de la répartition des efforts de cisaillement au voisinage des zones délaminées.

La mise en forme des composites stratifiés nécessite l'application de cycles complexes de température et de pression, au cours desquels de nombreuses réactions chimiques et thermiques pré-contraignent les plis et les interfaces [Barnes and Byerly, 1994, Sicot et al., 2003]. Ces contraintes s'expliquent notamment par la diversité des coefficients de dilatation thermique, associés à des plis orientés différemment. Ces contraintes résiduelles, de magnitudes non négligeables, dépendent de la géométrie du stratifié, des propriétés du matériau et du processus de cuisson utilisé. Leur prise en compte peut s'avérer critique car elles génèrent dans la matrice des fissures qui elles-mêmes enclenchent la propagation du délaminage. L'intégration de pré-contraintes dans la loi élastique de notre modèle perfectionnerait donc la représentation des stratifiés.

Nous avons par ailleurs conservé une modélisation de la ruine intra-laminaire relativement simple interdisant la rupture en compression de la matrice et des fibres de carbone. Ceci entre en flagrante contradiction avec le phénomène de *kinking* (figure 5.21) [Budiansky and Fleck,

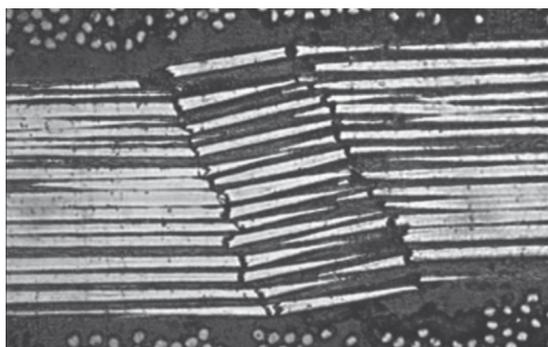


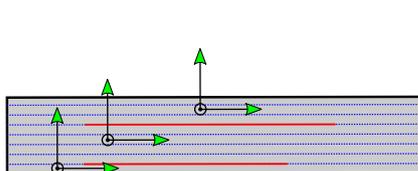
FIGURE 5.21 – *Kinking* de fibres [Pinho et al., 2006]

1993, Evans and Adler, 1978, Pinho et al., 2006], c'est-à-dire la rupture en compression longitudinale. L'ajout d'une variable d'endommagement, dégradant la rigidité longitudinale, calculée à partir de la partie compressive des déformations membranaires, serait appréciable.

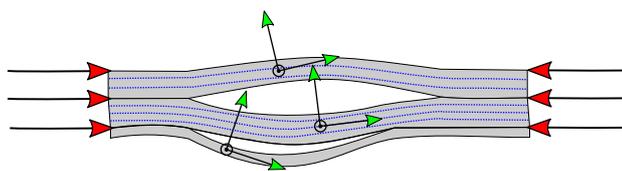
L'étude des dommages consécutifs à l'impact a illustré l'insuffisance de notre modélisation actuelle à interdire la propagation de fissurations matricielles non alignées avec la direction fibre. L'utilisation de modélisations « anisotropes », comme celles présentées par [Nguyen et al., 2017, Teichtmeister et al., 2017], permettrait de pallier à cette carence.

Une extension, au cadre des grands déplacements, des modèles *layerwise* formulés en contraintes aurait aussi naturellement dû prolonger notre travail. Cette extension était initialement incluse dans notre calendrier prévisionnel de thèse, mais des contraintes de temps ont recentré notre propos sur la rupture. Toutefois, nous avons bien envisagé quelques pistes concernant cette extension. ainsi tout d'abord, le choix de l'approche co-rotationnelle, la plus naturelle, car, si de grandes rotations induisent des déplacements finis, les déformations du stratifié demeurent quant à elles petites.

Ladite approche co-rotationnelle présuppose le choix d'un repère local à partir duquel les déformations sont calculées. L'intuition conduirait alors naturellement à affecter à chaque portion du stratifié, délimitée par une interface délaminée, un repère co-rotationnel local autonome (voir figures 5.22a, 5.23b). Ce choix permettrait de simuler la tenue en compression d'une structure préalablement délaminée, car il donnerait la capacité à nos modèles de représenter le comportement de sous-structures rendues indépendantes les unes des autres par le délaminage.



(a) Éprouvette délaminée, insertion de repères co-rotationnels locaux pour chaque sous-structure indépendante.



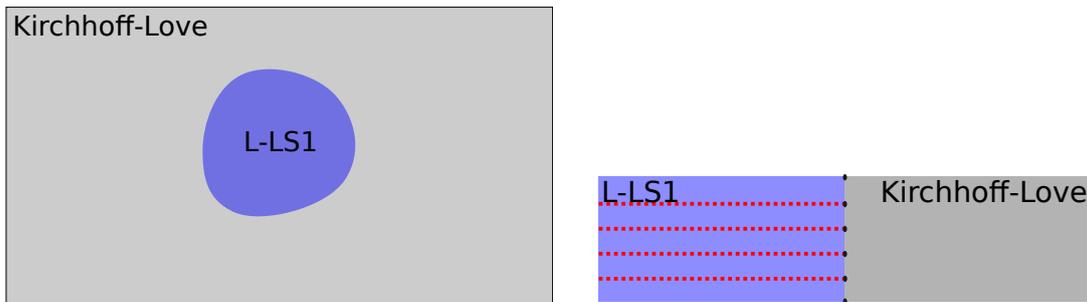
(b) Flambement local capté par l'approche co-rotationnelle

Pour finir, le L-LS1 s'insère entre le coûteux modèle tridimensionnel de Cauchy et la théorie excessivement simplifiée de plaque homogène équivalente. Ces deux cas limite présentent l'avantage d'être quasi-optimaux dans leurs domaines d'application : à l'échelle centimétrique, afin de prédire des phénomènes locaux très singuliers concernant le premier, pour le comportement global de structures mesurant plusieurs mètres quant au second. L'intérêt de « coller » ces deux modèles est apparu très tôt évident. Cependant, au moins deux raisons expliquent la difficulté de leur jonction :

1. les maillages utilisés sont de natures différentes, volumique et plan respectivement ;

2. le couplage des degrés de liberté distincts (3 translations contre 3 translation et deux rotations) à l'interface entre les modèles s'avère non trivial.

L'emploi du modèle L-LS1, coordonné avec une plaque de Kirchoff-Love (figure 5.23a) s'affranchit au moins de la difficulté 2 car les maillages sont tous deux bidimensionnels. En outre, les déplacements généralisés respectifs sont nettement plus semblables, si bien qu'il nous semble plus aisé de les adjoindre à l'interface. L'emploi de méthode « Arlequin » [Dhia, 1998, Hu et al., 2008, Rateau, 2003] ouvre ainsi la voie à une réduction importante du temps de calcul.



(a) Partition en deux du domaine, vue du dessus. Une région d'intérêt représentée finement par le modèle L-LS1 est juxtaposée à une zone au rôle structural décrit par la théorie de K-L

(b) Recollement dans le plan du modèle riche L-LS1, à une plaque de Kirchhoff-Love.



Arnold Böcklin *Die Toteninsel* 1883 (Berlin, Alte Nationalgalerie)

Annexe du corps principal

Cette annexe complète le corps principal du manuscrit et se scinde en plusieurs parties indépendantes.

- ★ La première section [A.1](#) [p. 151] explicite l'écriture matricielle de la formulation faible détaillée à la section [1.5](#) [p. 19].
- ★ La condensation générale d'un multiplicateur de Lagrange est abordée en section [A.2](#) [p. 155].
- ★ En troisième partie, section [A.3](#) [p. 155], les résultats numériques des analyses modales du chapitre [2](#) [p. 43] sont exhaustivement fournis.
- ★ Les inverses des matrices de masse des modèles consistant et condensé sont données dans la quatrième section [A.4](#) [p. 158].
- ★ Nous justifierons, section [A.5](#) [p. 159], la forme accordée aux matrices de rigidité membranaire donnée au chapitre [4](#) [p. 101].
- ★ Pour conclure, nous détaillerons à la section [A.6](#) [p. 162] deux couplages possibles entre la fissuration intra et inter-laminaire.

A.1 Écriture matricielle explicite du modèle SCLS1

A.1.1 Matrice de souplesse du modèle SCLS1

La matrice de souplesse généralisée, carré de taille $12n + 4$ (ou de taille $12n - 2$), s'écrit par blocs sous la forme :

$$[\mathbb{S}] = \begin{pmatrix} [\mathbb{S}^K] & [\mathbb{S}^{K\nu}] & [\mathbb{S}^{K\pi}] & 0 \\ & [\mathbb{S}^\nu] & [\mathbb{S}^{\nu\pi}] & 0 \\ & Sym & [\mathbb{S}^\pi] & 0 \\ & & & [\mathbb{S}^Q] \end{pmatrix}$$

Avec la souplesse de Kirchoff $[\mathbb{S}^K]$ diagonale par blocs, chacun d'eux étant de dimension 3×3 :

$$[\mathbb{S}^K] = \begin{pmatrix} [\mathbb{S}_1^K] & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & [\mathbb{S}_2^K] & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & [\mathbb{S}_n^K] \end{pmatrix}, \quad [\mathbb{S}_k^K] = \begin{pmatrix} \frac{S_{11}^k}{e^k} & \frac{S_{12}^k}{e^k} & \frac{S_{16}^k}{e^k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_{21}^k}{e^k} & \frac{S_{22}^k}{e^k} & \frac{S_{26}^k}{e^k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_{16}^k}{e^k} & \frac{S_{26}^k}{e^k} & \frac{S_{66}^k}{e^k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12S_{11}^k}{(e^k)^3} & \frac{12S_{12}^k}{(e^k)^3} & \frac{12S_{16}^k}{(e^k)^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12S_{12}^k}{(e^k)^3} & \frac{12S_{22}^k}{(e^k)^3} & \frac{12S_{26}^k}{(e^k)^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12S_{16}^k}{(e^k)^3} & \frac{12S_{26}^k}{(e^k)^3} & \frac{12S_{66}^k}{(e^k)^3} \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix}
 \mathbf{E}^{K^0} \\
 0_{\mathbb{R}^{6(n-2)}} \\
 \mathbf{E}^{K^{n+1}} \\
 \frac{9}{70}e^1 S_{3333}^1 \nu^{0,1} - \frac{13}{420}(e^1)^2 S_{3333}^1 \pi^{0,1} \\
 0_{\mathbb{R}^{n-3}} \\
 \frac{9}{70}e^n S_{3333}^n \nu^{n,n+1} - \frac{13}{420}(e^n)^2 S_{3333}^n \pi^{n,n+1} \\
 \mathbf{E}^{Q^0} \\
 0_{\mathbb{R}^{4n-10}} \\
 \mathbf{E}^{Q^{n+1}} \\
 -\frac{11}{210}e^{12} S_{3333}^1 \nu^{0,1} \\
 \frac{13}{420}e^{12} S_{3333}^1 \nu^{0,1} - \frac{e^{13}}{140} S_{3333}^1 \pi^{0,1} \\
 0_{\mathbb{R}^{n-3}} \\
 -\frac{13}{420}e^{n2} S_{3333}^n \nu^{n,n+1} - \frac{e^{n3}}{140} S_{3333}^n \pi^{n,n+1} \\
 \frac{11}{210}e^{n2} S_{3333}^n \nu^{n,n+1}
 \end{pmatrix}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^{K^0} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}S_{13}^1 \nu^{0,1} - \frac{e^1}{24}S_{13}^1 \pi^{0,1} \\ \frac{1}{4}S_{23}^1 \nu^{0,1} - \frac{e^1}{24}S_{23}^1 \pi^{0,1} \\ \frac{1}{4}S_{36}^1 \nu^{0,1} - \frac{e^1}{24}S_{36}^1 \pi^{0,1} \\ -\frac{3}{5e^1}S_{13}^1 \nu^{0,1} + \frac{1}{20}S_{13}^1 \pi^{0,1} \\ -\frac{3}{5e^1}S_{23}^1 \nu^{0,1} + \frac{1}{20}S_{23}^1 \pi^{0,1} \\ -\frac{3}{5e^1}S_{36}^1 \nu^{0,1} + \frac{1}{20}S_{36}^1 \pi^{0,1} \end{pmatrix} & \mathbf{E}^{K^{n+1}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}S_{13}^n \nu^{n,n+1} - \frac{e^1}{24}S_{13}^1 \pi^{n,n+1} \\ \frac{1}{4}S_{23}^1 \nu^{n,n+1} - \frac{e^1}{24}S_{23}^1 \pi^{n,n+1} \\ \frac{1}{4}S_{36}^1 \nu^{n,n+1} - \frac{e^1}{24}S_{36}^1 \pi^{n,n+1} \\ -\frac{3}{5e^1}S_{13}^1 \nu^{n,n+1} + \frac{1}{20}S_{13}^1 \pi^{n,n+1} \\ -\frac{3}{5e^1}S_{23}^1 \nu^{n,n+1} + \frac{1}{20}S_{23}^1 \pi^{n,n+1} \\ -\frac{3}{5e^1}S_{36}^1 \nu^{n,n+1} + \frac{1}{20}S_{36}^1 \pi^{n,n+1} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{E}^{Q^0} &= \begin{pmatrix} -\frac{e^1}{30}(S_{55}^1 \tau_x^{0,1} + S_{54}^1 \tau_y^{0,1}) \\ -\frac{e^1}{30}(S_{45}^1 \tau_x^{0,1} + S_{44}^1 \tau_y^{0,1}) \\ -\frac{1}{10}(S_{55}^1 \tau_x^{0,1} + S_{54}^1 \tau_y^{0,1}) \\ -\frac{1}{10}(S_{45}^1 \tau_x^{0,1} + S_{44}^1 \tau_y^{0,1}) \end{pmatrix} & \mathbf{E}^{Q^{n+1}} &= \begin{pmatrix} -\frac{e^n}{30}(S_{55}^n \tau_x^{n,n+1} + S_{54}^n \tau_y^{n,n+1}) \\ -\frac{e^n}{30}(S_{45}^n \tau_x^{n,n+1} + S_{44}^n \tau_y^{n,n+1}) \\ -\frac{1}{10}(S_{55}^n \tau_x^{n,n+1} + S_{54}^n \tau_y^{n,n+1}) \\ -\frac{1}{10}(S_{45}^n \tau_x^{n,n+1} + S_{44}^n \tau_y^{n,n+1}) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2 Condensation statique d'un multiplicateur de Lagrange

L'introduction des multiplicateurs de Lagrange nous a permis, par dualité, d'exprimer les déformations des surfaces supérieure et inférieure de notre stratifié. En effet la formulation faible (1.34) [p. 18] clarifie la signification physique des multiplicateurs de Lagrange. Ceux-ci font travailler les efforts extérieurs et s'interprètent donc bien comme les déformations des interfaces. Cependant, ces déplacements généralisés ne sont, par construction, associés à aucune équation d'équilibre dynamique et donc ne disposent pas d'inertie. Préparant l'extension à ce cas plus général, nous allons à présent voir comment il est possible de condenser ces déplacements en vue de l'implémentation dynamique.

Les résultats de cette section constituent une simple généralisation de la démarche présentée au chapitre 3 [p. 69] concernant la dérivation de la rigidité endommagée.

Supposons ici que les contraintes généralisées Σ vérifient une condition de la forme :

$$\mathbb{T}^\top \cdot \Sigma = \mathbf{T}^D \text{ où } \mathbf{T}^D \text{ s'identifie à des efforts généralisés imposés} \quad (\text{A.5})$$

Lorsque nous dérivons la déformation élastique généralisée $\Psi^*(\Sigma)$ en présence de telles contraintes internes, un multiplicateur de Lagrange associé μ apparaît et la loi de comportement en souplisse devient à nouveau (3.16) [p. 74]. Le multiplicateur de Lagrange, lié à la condition limite, peut être condensé *a posteriori* afin d'obtenir la *rigidité corrigée* \mathbb{C}^{corr} et l'*effort extérieur généralisé corrigé* \mathbf{F}^{corr} :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^\top \cdot \Sigma &= \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot (\mathbf{E} - \mathbb{T} \cdot \mu) = \mathbf{T}^D \\ \Leftrightarrow \mu &= (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T}^D) \\ \Leftrightarrow \Sigma &= \mathbb{C}^{corr} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{F}^{corr} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{avec } \mathbb{C}^{corr} = \mathbb{C} - \mathbb{C} \cdot \mathbb{T} \cdot (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \text{ et } \mathbf{F}^{corr} = -\mathbb{C} \cdot \mathbb{T} \cdot (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot \mathbf{T}^D$$

Une formulation faible de la forme :

$$\int_{\Omega} \left(\widehat{\mathbf{E}} + \mathbb{T} \cdot \widehat{\mu} \right)^\top \cdot \Sigma \, d\omega = \int_{\Omega} \widehat{\mu}^\top \cdot \mathbf{T}^D \, d\omega$$

deviendra alors, en utilisant l'égalité simplificatrice (A.5) :

$$\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{E}}^\top \cdot \mathbb{C}^{corr} \cdot \mathbf{E} \, d\omega = \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{E}}^\top \cdot \mathbf{F}^{corr} \, d\omega \quad (\text{A.7})$$

Appliquée à la condensation du modèle LS1, \mathbf{E} désigne simplement les déformations généralisées dans lesquelles on remplace les multiplicateurs de Lagrange par des 0. Il est crucial de rappeler ici que la dimension des matrices demeure inchangée. Par exemple, la matrice de rigidité en arrachement corrigée par la procédure (A.6) est toujours carré de taille $n + 1$, et non $n - 1$ comme dans le cas où l'on n'aurait pas introduit les multiplicateurs de Lagrange. Les matrices rectangulaires \mathbb{T}^Q sont égales à :

$$\mathbb{T}^Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4n+2,4} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,2}$$

A.3 Tableaux résultats pour l'analyse modale

A.3 Tableaux résultats pour l'analyse modale

a/h	Modèle	Mode sequence number :							
		1	2	3	4	5	6	7	8
10	3D	15.587	27.289	27.289	35.730	42.569	42.744	48.803	48.803
	Shi et al. [2004]	15.517	27.050	27.050	35.320	42.087	42.249	48.128	48.128
	SCLS1 full	15.544	27.153	27.153	35.538	42.262	42.435	48.467	48.467
	SCLS1 lumped	15.542	27.144	27.144	35.52	42.239	42.412	48.434	48.434
	LS1	15.525	27.095	27.095	35.482	42.112	42.285	48.357	48.357
20	3D	18.812	36.196	36.196	48.548	61.243	61.459	70.120	70.120
	Shi et al. [2004]	18.905	36.276	36.276	48.566	61.363	61.584	70.119	70.119
	SCLS1 full	18.802	36.153	36.153	48.481	61.115	61.332	69.98	69.98
	SCLS1 lumped	18.801	36.148	36.148	48.47	61.098	61.315	69.955	69.955
	LS1	18.788	36.105	36.105	48.431	60.983	61.198	69.872	69.872
100	3D	20.406	41.979	41.979	57.485	77.278	77.452	88.484	88.484
	Shi et al. [2004]	20.888	43.048	43.048	58.955	79.129	79.308	90.624	90.624
	SCLS1 full	20.418	41.997	41.997	57.509	77.317	78.392	88.527	88.527
	SCLS1 lumped	20.418	41.995	41.995	57.505	77.309	77.483	88.516	88.516
	LS1	20.418	41.973	41.973	57.476	77.264	77.438	88.468	88.468

TABLE A.1 – Paramètres de fréquence $\omega^* = \omega a^2 \sqrt{\rho/(E_T h^2)}$ Pour une plaque carrée antisymétrique 0/90. Les paramètres matériaux utilisés sont $E_L/E_T = 25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_T$, $G_{23} = 0.2E_T$, $\nu_{12} = 0.25$.

b/h	Modèle	1	2	3	4	5	6	7	8
0.001	Liew [1996]	5.105	10.527	10.583	14.324	19.567	19.701	22.148	22.237
	SCLS1 full	5.107	10.528	10.588	14.329	19.572	19.715	22.155	22.25
	SCLS1 lumped	5.107	10.528	10.588	14.328	19.571	19.713	22.153	22.247
	LS1	5.105	10.527	10.583	14.324	19.569	19.702	22.149	22.237
0.100	3D	4.049	6.591	7.905	9.550	10.021	12.236	13.138	13.812
	Liew [1996]	4.141	6.617	8.354	9.895	9.967	12.443	13.659	14.120
	SCLS1 full	4.045	6.579	7.894	9.534	10.0	12.209	13.112	13.769
	SCLS1 lumped	4.045	6.578	7.893	9.532	9.994	12.205	13.107	13.764
	LS1	4.038	6.572	7.866	9.507	9.988	12.181	13.046	13.759
0.200	3D	2.908	4.211	5.417	5.975	6.255	7.576	7.880	8.572
	Liew [1996]	3.045	4.248	5.792	5.905	6.535	7.688	7.729	9.176
	SCLS1 full	2.9	4.193	5.397	5.941	6.23	7.539	7.824	8.539
	SCLS1 lumped	2.899	4.192	5.394	5.939	6.227	7.534	7.82	8.531
	LS1	2.89	4.185	5.367	5.934	6.201	7.512	7.817	8.478

TABLE A.2 – Paramètre de fréquence $\bar{\omega} = (\omega b^2/\pi^2)\sqrt{(\rho h/D_0)}$ pour une plaque rectangulaire $a/b = 2$ de 3-couches (0, 90, 0) encastree.

Layup	Modèle	Lamination angle			
		0	15	30	45
[$\theta, -\theta$]	3D	4.737	3.743	3.347	3.253
	Soldatos and Messina [2001]	4.779	3.805	3.463	3.395
	Shi et al. [2004]	4.721	3.751	3.433	3.375
	SCLS1 full	4.722	3.74	3.361	3.281
	SCLS1 lumped	4.722	3.74	3.359	3.28
	LS1	4.721	3.736	3.341	3.247
[$\theta, -\theta$] ₅	3D	4.737	4.770	4.905	5.036
	Soldatos and Messina [2001]	4.779	4.814	4.952	5.036
	Shi et al. [2004]	4.721	4.776	4.932	5.025
	SCLS1 full	4.736	4.777	4.949	5.077
	SCLS1 lumped	4.736	4.777	4.949	5.076
	LS1	4.734	4.767	4.902	4.986

TABLE A.3 – Comparaison du paramètre de fréquence $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$ pour une plaque carrée stratifiée antisymétrique ; $a/h = 20$, $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$

Skew angle ψ	Modèle	Mode								
			1	2	3	4	5	6	7	8
0	3D	2.115	3.549	3.549	4.787	5.228	5.291	6.275	6.275	
	FOST	2.296	3.892	3.892	5.304	5.745	5.820	6.965	6.965	
	HOST	2.212	3.734	3.734	5.062	5.513	5.581	6.647	6.647	
	SCLS1	2.199	3.695	3.695	5.004	5.439	5.508	6.555	6.555	
15	3D	2.205	3.517	3.839	4.764	5.412	5.646	6.057	6.652	
	FOST	2.401	3.856	4.217	5.264	5.949	6.227	6.714	7.363	
	HOST	2.31	3.7	4.044	5.032	5.709	5.965	6.413	7.043	
	SCLS1	2.299	3.667	4.005	4.977	5.644	5.895	6.333	6.951	
30	3D	2.506	3.754	4.467	4.933	6.021	6.137	6.591	7.289	
	FOST	2.742	4.122	4.913	5.44	6.618	6.784	7.275	8.043	
	HOST	2.633	3.955	4.713	5.211	6.358	6.495	6.976	7.718	
	SCLS1	2.614	3.916	4.659	5.15	6.280	6.411	6.883	7.608	
45	3D	3.132	4.385	5.526	5.682	6.684	7.305	7.794	8.479	
	FOST	3.443	4.822	6.085	6.241	7.372	8.024	8.623	9.332	
	HOST	3.302	4.629	5.842	6.004	7.079	7.727	8.273	8.987	
	SCLS1	3.269	4.576	5.766	5.925	6.978	7.620	8.140	8.843	

TABLE A.4 – Comparaison du paramètre de fréquence $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$ pour une plaque rectangulaire stratifiée antisymétrique (45/-45/45/-45) ; $a/h = 10$, $E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = 0.6E_2$, $G_{13} = G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$. FOST [Garg et al., 2006, Wang, 1997], HOST [Garg et al., 2006]

Source	Mode sequence number :							
	1	2	3	4	5	6	7	8
3D	12.673	24.078	24.078	27.255	32.635	32.635	34.478	40.166
SCLS1 complet $n = 1$	13.341	25.347	25.347	28.737	34.344	34.344	36.295	42.253
SCLS1 complet $n = 2$	12.866	24.445	24.445	27.653	33.119	33.119	35.005	40.771
SCLS1 complet $n = 3$	12.755	24.235	24.235	27.380	32.808	32.808	34.704	40.398
SCLS1 condensé	12.658	24.051	24.051	26.915	32.179	32.179	34.439	39.590
LS1	12.610	23.975	23.975	24.631	31.462	31.462	34.354	39.753

TABLE A.5 – 8 premières fréquences propres $\omega/2\pi$ de la plaque sandwich maillage.

La matrice $\mathbb{R}_3(-\theta)$, permettant le passage du repère local matériau au repère global, n'est pas une matrice de rotation au sens où elle n'est pas orthogonale. Son inverse est simplement donné par $(\mathbb{R}_3(-\theta))^{-1} = \mathbb{R}_3(\theta)$. Fort de cette relation, nous pouvons également en déduire le lien entre les matrices de rigidités exprimées dans les deux repères, désormais indicés par *loc* et *glob* :

$$\{\varepsilon\}_{glob}^\top \cdot \mathbb{C}_{glob} \cdot \{\varepsilon\}_{glob} = \{\varepsilon\}_{loc}^\top \cdot \mathbb{C}_{loc} \cdot \{\varepsilon\}_{loc} = \{\varepsilon\}_{loc}^\top \cdot \mathbb{R}_3^\top(-\theta) \cdot \mathbb{C}_{loc} \cdot \mathbb{R}_3(-\theta) \cdot \{\varepsilon\}_{glob}$$

d'où : $\mathbb{C}_{glob} = \mathbb{R}_3^\top(-\theta) \cdot \mathbb{C}_{loc} \cdot \mathbb{R}_3(-\theta)$

Les relations inverses entre les deux repères, s'obtiennent naturellement en prenant la rotation d'angle θ :

$$\{\varepsilon\}_{loc} = \mathbb{R}_3(\theta) \cdot \{\varepsilon\}_{glob} \text{ et } \mathbb{C}_{loc} = \mathbb{R}_3^\top(\theta) \cdot \mathbb{C}_{glob} \cdot \mathbb{R}_3(\theta)$$

A.5.2 Endommagement dans le sens longitudinal et transverse

Notation A.5.1 Repère local, $m^{\text{ème}}$ pli. *Toutes les grandeurs de cette partie sont exprimées dans le repère local d'orthotropie du pli et sont relatives au pli indicé par m . Par concision, nous omettrons de rappeler ces deux dépendances.*

Postulat A.5.1 Préservation de la rigidité dans le sens transverse. *Nous supposons que des fissures dans le plan $(O, \underline{e}_L, \underline{e}_3)$ n'affectent pas la rigidité selon \underline{e}_T , et ce, même lorsque le pli est complètement rompu par des fissures de normales $\underline{n} = \underline{e}_L$, c'est à dire endommagé sur toute sa surface, de sorte que la rigidité dans la direction \underline{e}_T demeure préservée. Nous adoptons la même hypothèse pour un endommagement dans le sens transverse.*

Au niveau d'une fissure de sens longitudinal, s'annulent les composantes $N_{LL}, N_{LT}, M_{LL}, M_{LT}$ des champs d'effort membranaire et des moments fléchissants, ainsi que le cisaillement τ_L et τ_L^0 .

Nous posons, par convention, \mathbf{E}^* le vecteur déformations généralisées, auquel on aurait enlevé les multiplicateurs de Lagrange associés aux efforts membranaires. L'indice « * » indique que l'on considère, la déformation associée soit à la contrainte membranaire \mathbf{N} , soit au moment membranaire \mathbf{M} . L'indice †, quant à lui, indique en outre que la ruine à l'étude est : soit la fissuration matricielle (sens transverse), soit la cassure des fibres (sens longitudinal).

$$\Sigma^* = \mathbb{C}^* \cdot \mathbf{E}^* = \mathbb{C}^* \cdot (\mathbf{E}^* + \mathbb{T}_{K,\dagger} \cdot \boldsymbol{\mu}_\dagger^*)$$

$\mathbb{T}_{K,\dagger}$ est une matrice de taille 3×2 qui ne dépend ni du pli m ni de l'effort à l'étude (\mathbf{N} ou \mathbf{M}), $\boldsymbol{\mu}_\dagger^*$ un 2-vecteur collectant les multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{Bmatrix} \mu_{1,L}^* \\ 0 \\ \mu_{2,L}^* \end{Bmatrix} = \mathbb{T}_{K,L} \cdot \boldsymbol{\mu}_L^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{1,L}^* \\ \mu_{2,L}^* \end{Bmatrix} \text{ de même } \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_{1,T}^* \\ \mu_{2,T}^* \end{Bmatrix} = \mathbb{T}_{K,T} \cdot \boldsymbol{\mu}_T^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{1,T}^* \\ \mu_{2,T}^* \end{Bmatrix}$$

La condition de bord libre, sur le front de fissure, nous permet alors d'isoler le vecteur $\boldsymbol{\mu}_\dagger^*$ et de ré-exprimer la contrainte Σ^* puis d'en déduire la rigidité membranaire corrigée :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{K,\dagger}^\top \cdot \Sigma^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &\Leftrightarrow \mathbb{T}_{K,\dagger}^\top \cdot (\mathbb{C}^* \cdot \mathbf{E}^* + \mathbb{C}^* \cdot \mathbb{T}_{K,\dagger} \cdot \boldsymbol{\mu}_\dagger^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\mu}_\dagger^* = -(\mathbb{T}_{K,\dagger}^\top \cdot \mathbb{C}^* \cdot \mathbb{T}_{K,\dagger})^{-1} \cdot \mathbb{T}_{K,\dagger}^\top \cdot \mathbb{C}^* \cdot \mathbf{E}^* \end{aligned}$$

Notation A.5.2 Rigidité membranaire rompue, sens †. *On note*

$$\mathbb{C}_\dagger^{d,*} = \mathbb{C}^* - \mathbb{C}^* \cdot \mathbb{T}_{K,\dagger} \cdot (\mathbb{T}_{K,\dagger}^\top \cdot \mathbb{C}^* \cdot \mathbb{T}_{K,\dagger})^{-1} \cdot \mathbb{T}_{K,\dagger}^\top \cdot \mathbb{C}^* \quad (\text{A.15})$$

Cette rigidité correspond à la rigidité locale en membrane (ou en moment fléchissant) qu'aurait la structure si une fissure avait coupé le pli, affectant ainsi sa tenue dans le sens longitudinal (ou transverse).

Notation A.5.3 Fonction de dégradation. Nous notons pour plus de concision : $g_L^m = g(d_L^m)$, $g_T^m = g(d_T^m)$, $g_L^m = 1 - g_L^m$, $g_T^m = 1 - g_T^m$.

Postulat A.5.2 Interpolation de la rigidité membranaire. Nous proposons ci-dessous l'expression de la rigidité membranaire de notre structure :

$$\mathbb{C}^*(d_L^m, d_T^m) = g_L^m g_T^m \mathbb{C}^* + g_L^m g_T^m \mathbb{C}_L^{d,*} + g_L^m g_T^m \mathbb{C}_T^{d,*} \quad (\text{A.16})$$

La matrice de rigidité rompue obtenue, est exprimée dans le repère matériau du pli m . Afin de la traduire dans le repère global, il est nécessaire de la « tourner d'un angle $-\theta_m$ ». En accord avec les résultats de la sous-section A.5.1 [p. 159] :

$$\mathbb{C}_{glob}^{*,m}(d_L^m, d_T^m) = \mathbb{R}_3(-\theta_m)^\top \cdot \mathbb{C}_{loc}^{*,m}(d_L^m, d_T^m) \cdot \mathbb{R}_3(-\theta_m) \quad (\text{A.17})$$

La matrice $\mathbb{R}_3(-\theta_m)$ dont l'expression est fournie (A.14) [p. 159] n'est pas, à proprement parler, une matrice de rotation car non orthogonale. Son inverse n'est pas sa transposée, mais $\mathbb{R}_3(\theta_m)$.

A.5.3 Simplification de l'interpolation pour un matériau orthotrope

Les rigidités de Kirchoff en membrane et en moment fléchissant, dans le repère local $\mathbb{C}_{sain,loc}^{*,m}$, sont simplement des multiples par un pré-facteur, e ou $\frac{e^3}{12}$, de la matrice de rigidité en contrainte plane \mathbb{C}_{cp} . Pour trouver les expressions des matrices endommagées dans (A.16), nous travaillerons plus simplement sur la rigidité en contrainte plane et étudierons comment celle-ci est dégradée.

Hypothèse A.5.1 Matériau orthotrope. Si nous considérons un composite orthotrope classique, sa souplesse et sa rigidité en contrainte plane, dans son repère local d'orthotropie, s'expriment sous la forme :

$$\mathbb{S}^{cp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \quad \mathbb{C}_{cp} = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{pmatrix} E_L & \nu_{LT}E_T & 0 \\ \nu_{TL}E_L & E_T & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Les matrices de rigidité en contrainte plane (A.18), rompues par la procédure (A.15), sont alors :

$$\mathbb{C}_{cp}^{L,d} = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_T(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_{cp}^{T,d} = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{pmatrix} E_L(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Par suite, la rigidité en contrainte plane locale endommagée avec l'interpolation complète (A.16) s'exprime :

$$\mathbb{C}_{cp}(d_L, d_T) = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{pmatrix} g_L E_L (1 - g_T \nu_{LT}\nu_{TL}) & g_L g_T \nu_{LT} E_T & 0 \\ g_L g_T \nu_{LT} E_T & g_T E_T (1 - g_L \nu_{LT}\nu_{TL}) & 0 \\ 0 & 0 & g_L g_T G_{LT} \end{pmatrix}$$

En cas de rupture totale dans le sens transverse ($g_T = 1$), la rigidité longitudinale n'est corrigée que d'un facteur $\nu_{LT}\nu_{TL}$, très faible dans la pratique. En effet, si nous étudions du pli composite T300/977-2 [Morais et al., 2000] tableau 3.5 [p. 97], la correction est de l'ordre de $0.25^2 \times \frac{8}{150} = 1/3 \times 10^{-3}$. Nous pouvons donc, par commodité, supposer que la rigidité corrigée du matériau s'exprime plus simplement sous la forme :

$$\mathbb{C}_{cp}(d_L, d_T) = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{pmatrix} g_L E_L & g_L g_T \nu_{LT} E_T & 0 \\ g_L g_T \nu_{LT} E_T & g_T E_T & 0 \\ 0 & 0 & g_L g_T G_{LT} \end{pmatrix}$$

La matrice de rigidité endommagée s'exprime raisonnablement en pondérant son pendant sain. Le couplage transverse-longitudinal est dû à l'effet Poisson, et plus celui-ci est important, plus la chute de rigidité l'est aussi. Pour un matériau isotrope classique avec $\nu = 1/3$, la correction correspondante peut être significative. Mais, à l'inverse, elle est négligeable pour les stratifiés carbonés à l'étude. C'est par conséquent, cette dernière hypothèse que nous retiendrons par la suite.

A.6 Quelques expressions alternatives aux rigidités d'interfaces endommagées

A.6.1 Dégradation des rigidités d'interfaces

Les propriétés élastiques des interfaces sont, dans nos modèles multicouches, issues des propriétés d'élasticité tridimensionnelle des plis. Par conséquent il semble assez naturel de dégrader simultanément les raideurs des plis et des interfaces lorsqu'une fissuration intra-laminaire vient fendre le stratifié.

Postulat A.6.1 Expression de la rigidité en cisaillement endommagée. *Nous abattons de façon isotrope l'ensemble des rigidités associées aux efforts de cisaillement inter-laminaire ;*

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\boldsymbol{\tau}^{m,m+1}(\mathbf{d}^{\text{pli}}) &= g(d_T^m)g(d_L^m)g(d_T^{m+1})g(d_L^{m+1})\mathbb{C}\boldsymbol{\tau}^{m,m+1} \\ c_\nu^{m,m+1}(\mathbf{d}^{\text{pli}}) &= g(d_T^m)g(d_L^m)g(d_T^{m+1})g(d_L^{m+1})c_\nu^{m,m+1}\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Notons toutefois que cette approche induit un délaminage concomitant et systématique à la fissuration matricielle, ce qui est en désaccord avec les constatations expérimentales ([Reiner et al., 2017]). Cependant ce type de stratégie est accepté et utilisé par [Quintanas-Corominas et al., 2020] afin de faire correctement communiquer fissuration matricielle et délaminage.

Les équations (A.20) traduisent le couplage structurel existant entre les dégradations intra et inter-laminaires. Numériquement, les dialogues entre ces modes de ruine, et plus spécifiquement entre les méthodes de modélisation qui leur sont associées, sont assez compliqués. Il a en effet été noté que l'utilisation conjointe et des zones cohésives pour la dégradation des interfaces, et de l'endommagement continu pour la dégradation des plis, souffre d'un manque de précision. Le transfert de charge entre les éléments associés à ces méthodes, lorsque les fissurations matricielles atteignent une interface, est alors incorrectement calculé [De Carvalho et al., 2015, Maimi et al., 2008] induisant une sous-estimation, parfois importante, de la surface délaminée [Quintanas-Corominas et al., 2020]. Diverses solutions ont été proposées pour surmonter ce problème, lesquelles supposent généralement un abattement, soit des propriétés élastiques de l'interface [Quintanas-Corominas et al., 2020], soit du taux de restitution d'énergie critique comme dans (A.21) [Yun et al., 2019].

$$G_c^{eff,m,m+1} = G_c (1 - \max(d_L^m, d_T^m d_L^{m+1}, d_T^{m+1})) \quad (\text{A.21})$$

En outre, numériquement, nous remplaçons le produit particulièrement lourd $g(d_T^m)g(d_L^m)g(d_T^{m+1})g(d_L^{m+1})$ dans (A.20), en calculant des endommagements « équivalents », qui s'exprimeront comme le maximum des endommagements abattant la rigidité concernée, soit :

$$d_{equiv}^{m,m+1} = \max(d_T^m, d_L^m, d_T^{m+1}, d_L^{m+1}, d_\tau^{m,m+1})$$

Et nous poserons alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\boldsymbol{\tau}^{m,m+1}(\mathbf{d}^{\text{pli}}) &= g(d_{equiv}^{m,m+1})\mathbb{C}\boldsymbol{\tau}^{m,m+1} \\ c_\nu^{m,m+1}(\mathbf{d}^{\text{pli}}) &= g(d_{equiv}^{m,m+1})c_\nu^{m,m+1}\end{aligned}$$

Si nous étudions le phénomène de ruine intra-laminaire seul, la variable d'endommagement $d_\tau^{m,m+1}$ est ôtée du calcul du maximum.

A.6.2 Rigidification des interfaces

À la sous-section A.6.1 [p. 162], nous avons postulé un abattement isotrope des propriétés des interfaces, par les endommagements intra-laminaires des plis adjacents. Cette première approximation, somme toute assez grossière, nous conduit à proposer maintenant une estimation plus fine des rigidités d'interface, en calculant l'impact de la ruine intra-laminaire sur l'énergie complémentaire.

Maintenant, encore par commodité, nous envisageons seulement la fissuration matricielle transverse d'un pli générique m .

Postulat A.6.2 Négligeabilité de la contribution en arrachement et en cisaillement. Nous supposons que les composantes σ_{33} et σ_{T3} s'annulent au niveau de la fissure. Les termes associés disparaissent conséquemment de l'énergie complémentaire w_{L-LS1}^* .

Rigidité d'arrachement en présence d'un pli rompu La contribution du pli m à l'énergie w_ν^{*m} disparaît, si bien qu'après dérivation, la loi de comportement en arrachement rompue de l'interface devient :

$$D_\nu^{m,m+1} = s_{d_T^m, \nu}^{m,m+1} \nu^{m,m+1}$$

où la souplesse dégradée par le mode d_T^m est simplement égale à :

$$s_{d_T^m, \nu}^{m,m+1} = \frac{e^{m+1} S_{3333}^{m+1}}{2} \Leftrightarrow c_{d_T^m, \nu}^{m,m+1} = \frac{2}{e^{m+1} S_{3333}^{m+1}}$$

Ainsi la fissuration matricielle affecte le comportement, car elle annule la partie de l'énergie complémentaire dont la dérivation induit la souplesse, puis la rigidité. Par suite, l'interface paraît « plus raide ».

Pour interpréter physiquement ce résultat, supposons que les deux plis étudiés sont constitués du même matériau et de même épaisseur. Alors la ruine d'un pli diminue d'un facteur deux la souplesse, donc double la rigidité. Si la déformation reste fixée, la contrainte d'interface puis le taux de restitution d'énergie élastique sont également multipliés par 2. Ce phénomène s'assimile à un report de charge. La raideur « apparente » de l'interface plus élevée va induire sa propre ruine.

Ici, au lieu de diminuer G_c comme il est couramment admis, la fissuration intra-laminaire augmente le taux de restitution d'énergie, de sorte que le délaminage dissipe toujours la même quantité d'énergie! Cette approche est radicalement différente de la précédente, par laquelle la fissuration intra-laminaire dégradait automatiquement les propriétés de l'interface. Ici donc, au contraire, la fissuration matricielle augmente la rigidité et conséquemment favorise la rupture. Cette dernière vue nous semble plus satisfaisante, c'est pourquoi nous l'adoptons par la suite.

Postulat A.6.3 Interpolation de la rigidité en arrachement. Nous postulons, pour la rigidité en arrachement $c_\nu^{m,m+1}(d_\nu^{m,m+1}, d_T^m, d_T^{m+1})$ de l'interface entre les plis m et $m+1$, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} c_\nu^{m,m+1} = g(d_\nu^{m,m+1}) & \left(g(d_T^m) g(d_T^{m+1}) c_{sain, \nu}^{m,m+1} + (1 - g(d_T^m)) g(d_T^{m+1}) c_{d_T^m, \nu}^{m,m+1} \right. \\ & \left. + g(d_T^m) (1 - g(d_T^{m+1})) c_{d_T^{m+1}, \nu}^{m,m+1} + (1 - g(d_T^m)) (1 - g(d_T^{m+1})) c_{\infty, \nu}^{m,m+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Expression dans laquelle les rigidités saines et endommagées sont données par :

$$c_{sain, \nu}^{m,m+1} = \frac{2}{e^m S_{3333}^m + e^{m+1} S_{3333}^{m+1}}, \quad c_{d_T^m, \nu}^{m,m+1} = \frac{2}{e^{m+1} S_{3333}^{m+1}} \quad \text{et} \quad c_{d_T^{m+1}, \nu}^{m,m+1} = \frac{2}{e^m S_{3333}^m} \quad (\text{A.23})$$

La raideur $c_{\infty, \nu}^{m,m+1}$ s'applique lorsque les deux plis adjacents à l'interface, qui n'a plus de sens physique, cassent au même endroit, annulant la souplesse de cette interface, et faisant donc diverger sa rigidité. Numériquement, nous prendrons $c_{\infty, \nu}^{m,m+1} = 10 c_{sain, \nu}^{m,m+1}$.

La dégradation du pli m modifie également la rigidité de l'interface $m-1, m$.

Rigidité de cisaillement en présence d'un pli rompu Pour le cisaillement, la procédure retenue est tout à fait analogue, à ceci près qu'il est alors nécessaire d'abattre les souplesses dans les repères d'orthotropie propres à chacun des plis. Si nous supposons la couche m fendue par une fissuration matricielle, sa contribution à w_{L-LS1}^* s'écrit :

$$w_Q^{*m} \approx \frac{1}{2} \Sigma_m^\tau \cdot S_{m, d_T^m}^{\tau, lumped} \cdot \Sigma_m^\tau \quad \text{avec} \quad S_{m, d_T^m}^{\tau, lumped} = \frac{e^m}{6} \begin{pmatrix} G_{LT}^m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Cette expression est à comparer avec sa version « saine » (1.55) [p. 30].

Après rotation, nous en déduisons la souplesse de l'interface entre m et $m+1$, endommagée par l'activation du mécanisme de fissuration transverse du $m^{\text{ème}}$ pli, dans le repère global :

$$\mathbb{C}_{d_T^m}^{\tau^{m,m+1}} = \left(\frac{e^m \mathbb{S}_{d_T^m, cis}^m + e^{m+1} \mathbb{S}_{cis}^{m+1}}{6} \right)^{-1}$$

avec :

$$\mathbb{S}_{d_T^m, cis}^m = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2(\theta_m)}{G_{LT}} & -\frac{\cos(\theta_m) \sin(\theta_m)}{G_{LT}} \\ -\frac{\cos(\theta_m) \sin(\theta_m)}{G_{LT}} & \frac{\sin^2(\theta_m)}{G_{LT}} \end{pmatrix}$$

Postulat A.6.4 Interpolation de la rigidité en cisaillement d'interface. *Nous proposons, comme pour l'arrachement, l'expression de la rigidité en cisaillement d'interface $\mathbb{C}^{\tau^{m,m+1}}(d_\tau^{m,m+1}, d_T^m, d_T^{m+1})$ suivante :*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\tau^{m,m+1}} = g(d_\nu^{m,m+1}) & \left(g(d_T^m) g(d_T^{m+1}) \mathbb{C}_{sain}^{\tau^{m,m+1}} + (1 - g(d_T^m)) g(d_T^{m+1}) \mathbb{C}_{d_T^m}^{\tau^{m,m+1}} \right. \\ & \left. + g(d_T^m) (1 - g(d_T^{m+1})) \mathbb{C}_{d_T^{m+1}}^{\tau^{m,m+1}} + (1 - g(d_T^m)) (1 - g(d_T^{m+1})) \mathbb{C}_\infty^{\tau^{m,m+1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Les interpolations (A.22), (A.25), se révèlent ici plutôt lourdes. Une comparaison des résultats obtenus, soit avec augmentation de la rigidité, soit avec une simple pondération du taux de restitution d'énergie critique de l'interface de la forme :

$$G_c^{eff} = \frac{G_c}{e^m + e^{m+1}} (g(d_T^m) e^m + g(d_T^{m+1}) e^{m+1}) \quad (\text{A.26})$$

serait donc intéressante à mener. L'expression du taux de restitution d'énergie critique (A.26) se justifie considérant que : si le stratifié est constitué d'un unique matériau de souplesse hors plan S_{33} , alors la rupture du pli m induit une augmentation de la rigidité, et donc du taux de restitution d'énergie G_I d'un facteur $\frac{e^{m+1} + e^m}{e^{m+1}}$ (voir (A.23)). Il est donc semblable, au moins conceptuellement, de laisser invariant G_I tout en abaissant le taux G_{Ic} d'un facteur $\frac{e^{m+1}}{e^{m+1} + e^m}$. De fait, cette réduction est précisément appliquée par l'interpolation (A.26).

Il est probable que les différences résultantes se révéleraient minimales car les modifications locales de rigidité n'ont qu'une influence limitée sur la répartition des champs de contrainte. Abaisser simplement le taux de restitution d'énergie critique s'avérerait en outre plus avantageux numériquement parlant, car la résolution en déplacement, qui constitue de loin la partie la plus coûteuse des simulations, n'en serait pas affectée.

A.6.3 Discussion

L'interaction ruine intra/inter-laminaire pose un problème hautement complexe, tout particulièrement dans le cadre de nos modèles multi-couches. Si le découplage proposé dans le corps principal du texte, section 4.6 [p. 120], semble d'ores et déjà tout à fait satisfaisant, pour autant, les deux « nouvelles » interpolations (A.20) et (A.22)–(A.25) ne relèvent que de « pistes ouvertes » dans l'hypothèse où des simulations plus poussées révéleraient un mauvais dialogue entre les modes de ruines. Quoi qu'il en soit, ici, nos simulations sur l'essai de flexion 4 points, avec les deux interpolations proposées n'ont montré que des différences assez mineures avec celle conduite à la section 4.6 [p. 120] nous laissant penser que le couplage intra/inter « dur » peut être évité.

Tour d'horizon des modèles de plaques multiparticulaires

Introduction

Pour le calcul de stratifiés, de nombreux modèles de plaques multiparticulaires ont été développés au fil des années par le laboratoire Navier à l'ENPC. Ces modèles, de richesses variables, ont été majoritairement formulés en contraintes et se distinguent à deux niveaux :

- dans la construction du champ de contraintes tridimensionnel ;
- dans l'approximation des termes de l'énergie complémentaire, induisant la loi de comportement formulée en souplesse.

Notre étude principale a mis en évidence que le modèle *le plus général*, obtenu *sans aucune approximation*, de plaques stratifiées possédant une approximation membranaire de degré 1 par couche, est le modèle SCLS1. Dans ce cadre, $6n + 1$ équations d'équilibre liant $12n - 2$ efforts généralisés ont été détaillées. Dans l'annexe ci-après, nous montrerons que de surcroît, tous les modèles multiparticulaires peuvent s'interpréter comme des cas particuliers dégénérés du modèle SCLS1. Afin d'en clarifier le sens, rappelons d'abord quelles sont l'expression du champ de contraintes et les équations d'équilibre du modèle SCLS1 :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D} &= N_{\alpha\beta}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + M_{\alpha\beta}^i \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \\
 \sigma_{\alpha 3}^{i,3D} &= Q_{\alpha}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + [(\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] P_1^i(z) + \left[Q_{\alpha}^i - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \right] \frac{P_2^i(z)}{e^i} \\
 \sigma_{33}^{i,3D} &= \left[\left(\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\pi^{i,i+1} - \pi^{i-1,i}) \right) \right] P_0^i(z) \\
 &\quad + \left[\left(\frac{e^i}{10} (\pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}) + \frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right) \right] P_1^i(z) \\
 &\quad + \left[\left(\frac{e^i}{12} (\pi^{i,i+1} - \pi^{i-1,i}) \right) \right] P_2^i(z) + \left[\left(\frac{e^i}{2} (\pi^{i,i+1} + \pi^{i-1,i}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right) \right] P_3^i(z)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Les équations d'équilibre obtenues à l'aide du modèle tridimensionnel de Cauchy sont alors :

$$0 = \operatorname{div}(\underline{N}^i)(x, y) + \underline{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \underline{\tau}^{i-1,i}(x, y) \tag{B.2a}$$

$$0 = \operatorname{div}(\underline{Q}^i)(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \tag{B.2b}$$

$$0 = \operatorname{div}(\underline{M}^i)(x, y) - \underline{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \underline{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \tag{B.2c}$$

$$0 = \operatorname{div}(\underline{\tau}^{k,k+1})(x, y) - \pi^{k,k+1}(x, y) \tag{B.2d}$$

C'est de là, par condensation arbitraire de certaines de ses variables généralisées, que d'autres modèles multi-particulaires découlent du SCLS1. On y parvient en explicitant l'un des efforts à l'aide d'une des équations d'équilibre, puis en remplaçant son expression dans le champ de contraintes. Enfin, les termes de l'énergie complémentaire faisant intervenir cet effort généralisé sont négligés.

Ainsi, par exemple, le modèle LS1 est-il un cas dégénéré du SCLS1, dans lequel nous avons fait le *choix de condenser* la variable généralisée π , et pour que n'intervienne pas de terme en $\text{div } \underline{\tau}$, nous avons supprimé les termes de l'énergie complémentaire les faisant apparaître.

Remarque B.0.1 Notons, que les concepteurs du modèle LS1 sont allés plus loin encore, en négligeant complètement le couplage entre l'effort membranaire et l'effort d'arrachement, et non pas seulement les termes $\text{div } \underline{\tau}$ problématiques. Il est donc possible de construire un modèle « médian » possédant les mêmes degrés de libertés que le modèle LS1 mais dont la matrice de souplesse prendrait la forme suivante :

$$[\mathbb{S}]_{LS1}^{median} = \begin{pmatrix} [\mathbb{S}^K] & [\mathbb{S}^{K\nu}] & [0] \\ & [\mathbb{S}^\nu] & [0] \\ Sym & & [\mathbb{S}^Q] \end{pmatrix}$$

Passons à présent en revue les différents modèles historiquement développés, avec leurs spécificités et désavantages respectifs.

Notation B.0.1 Notation des différents modèles.

- * *Le préfixe « M4 » pour « Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches » a été largement utilisé pour désigner les modèles multiparticulaires du laboratoire Navier.*
- * *A la suite du « M4 », le nombre de degrés de libertés en chaque point est mentionné. Ce nombre dépend de manière affine du nombre de couches.*
- * *Enfin une lettre est éventuellement ajoutée pour caractériser une spécificité supplémentaire du modèle.*

Il convient de souligner qu'une majorité de ces modèles fût obtenue à l'aide de la méthode mixte d'approximation d'Hellinger-Reissner. Certains ne peuvent donc pas être complètement qualifiés de modèles « en contraintes ».

B.1 Les modèles possédant une approximation membranaire de degré 1 par couche

B.1.1 Le modèle M4 – 7n

Le modèle, présenté par Pagano [1978], est le plus riche de la famille M4. Il comporte 7n équations d'équilibre et autant de déplacements généralisés. Cependant, ce modèle semble aujourd'hui *caduc* car sa complexité est importante et il présente de graves limitations concernant les conditions aux bords; aussi a-t-il été efficacement supplanté par le modèle SCLS1 précédemment développé.

B.1.2 Modèle LS1 avec prises en compte des couplages

L'effort généralisé d'interprétation physique la plus obscure est évidemment la contrainte d'interfaces $\pi^{i,i+1}$. Aussi prenons nous le parti de l'éliminer de notre champ de contrainte, en utilisant son équation d'équilibre.

Postulat B.1.1 Condensation de l'effort généralisé $\pi^{i,i+1}$. *Nous choisissons de condenser l'effort généralisé $\pi^{i,i+1}$ apparaissant dans le champ de contrainte, en utilisant (B.2d).*

Le champ de contrainte tridimensionnel s'écrit à présent simplement en remplaçant $\pi^{i,i+1}$ par $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$ dans (B.1). Le déroulement du modèle a déjà été présenté au chapitre 1 [p. 1]. En revanche, lors de l'écriture de la loi de comportement en souplesse, obtenue en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire, une approximation inutile a été effectuée.

L'expression de l'énergie complémentaire est la superposition de 4 termes $w^{*i} = w_{K,LS1}^{*i} + w_{Q,LS1}^{*i} + w_{c,LS1}^{*i} + w_{\nu,LS1}^{*i}$. Parmi eux, deux sont communs aux modèles SCLS1 :

$$w_{K,LS1}^{*i} = w_{K,SCLS1}^{*i} \text{ et } w_{Q,LS1}^{*i} = w_{Q,SCLS1}^{*i}$$

Les deux autres diffèrent par le remplacement de $\pi^{i,i+1}$ par $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$. $w_{\nu,LS1}^{*i}$ est la contribution à l'énergie élastique de la contrainte normale $\sigma_{33}^{i,3D}$ du pli i :

$$\begin{aligned} w_{\nu,LS1}^{*i} &= \frac{e^i}{2} S_{3333}^i \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 \\ &+ \frac{e^i}{24} S_{3333}^i \left[\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 \\ &+ \frac{e^i}{10} S_{3333}^i \left[\frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 + \frac{e^i}{1400} S_{3333}^i [(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})]^2 \end{aligned}$$

$w_{c,LS1}^{*i}$ est la contribution à l'énergie élastique du couplage entre contrainte dans le plan $\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D}$ et contrainte normale $\sigma_{33}^{i,3D}$ du pli :

$$\begin{aligned} w_{c,LS1}^{*i} &= S_{\alpha\beta 33}^i N_{\alpha\beta}^i \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right] \\ &+ S_{\alpha\beta 33}^i \frac{M_{\alpha\beta}^i}{e^i} \left[\frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right] \end{aligned}$$

À ce stade, une approximation inutile a été proposée. Le terme réellement problématique dans l'énergie complémentaire est celui de la divergence de l'effort de cisaillement. En effet, nous ne pourrions pas en l'état utiliser la stationnarité de la fonctionnelle pour déduire les lois de comportement. L'hypothèse *minimale* nécessaire à la poursuite de notre travail de modélisation est donc la suivante :

Postulat B.1.2 Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à l'effort π . *Nous allons supprimer les termes en $(e^i)^2 (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} \pm \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})$, $(e^i)^3 (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} \pm \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})$ dont l'ordre de grandeur est beaucoup plus faible, a priori, que celui des autres contributions.*

Les calculs sont immédiats. Il suffit de prendre les relations de comportement du modèle SCLS1 et de rayer tous les termes faisant intervenir l'effort généralisé π . Nous en déduisons alors les lois de comportement du modèle LS1 enrichi :

Équation de comportement en membrane et en flexion du pli i :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial N_{\alpha\beta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i + S_{\alpha\beta 33}^i \frac{\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}}{2} \\ \chi_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial M_{\alpha\beta}^i} = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\alpha\beta}^i + \frac{6}{5e^i} S_{\alpha\beta 33}^i (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \end{aligned} \tag{B.3}$$

Équation de comportement en cisaillement transverse du pli i et à l'interface $j, j+1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha}^i &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial Q_{\alpha}^i} = \frac{24}{5e^i} S_{\alpha 3\gamma 3}^i Q_{\gamma}^i - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^i (\tau_{\gamma}^{i,i+1} + \tau_{\gamma}^{i-1,i}) \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}} = -\frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^j Q_{\gamma}^j - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} Q_{\gamma}^{j+1} - \frac{2}{15} e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} \\ &+ \frac{8}{15} (e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - \frac{2}{15} e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \end{aligned}$$

Équation de comportement en arrachement de l'interface $j, j + 1$:

$$\begin{aligned}
 D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial \nu^{j,j+1}} \\
 &= \frac{9}{70} e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{13}{35} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} + \frac{9}{70} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \quad (\text{B.4}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} + \frac{6}{5e^j} S_{\alpha\beta 33}^j M_{\alpha\beta}^j - \frac{6}{5e^{j+1}} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} M_{\alpha\beta}^{j+1}
 \end{aligned}$$

Le modèle « LS1 » développé ci-dessus semble plus complet que celui utilisé ordinairement. Il possède en effet un nombre de degrés de liberté égal au modèle LS1 de référence, mais sans négliger le couplage entre l'effort membranaire et l'effort d'arrachement. Toutefois il est admis que ce terme n'a qu'un effet limité, de sorte qu'il paraît raisonnable, dans la plupart des cas, de le supposer nul, afin de simplifier la matrice de souplesse et d'accélérer les calculs. Ce modèle implémenté sous la dénomination « full LS1 » dans le programme MFEAP, Baroud [2016], page 53, signalant n'y déceler aucune différence de résultats avec le modèle LS1 « simple », ne présente donc d'intérêt que dans peu de cas, au prix d'un allongement des calculs. En outre, notre discussion énergétique sur l'étude de la traction du $(0/90)_s$ menée au premier chapitre, a déjà montré que l'énergie complémentaire négligée est correctement transférée aux autres contraintes généralisées si bien que distinguer ces modèles est inutile.

B.1.3 Le modèle $M4 - 3nP$

Ce modèle est obtenu en poursuivant la philosophie de dégénérescence du modèle SCLS1 vers le LS1. Nous éliminons l'effort tranchant à partir du LS1 précédent, c'est à dire que nous exploitons la relation :

$$\underline{Q}^i = \underline{\text{div}}(\underline{M}^i) + \frac{e^i}{2} (\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})$$

pour remplacer chaque apparition de \underline{Q}^i dans l'expression du champ de contrainte.

Postulat B.1.3 du modèle $M4 - 3nP$: Condensation de l'effort généralisé \underline{Q} . *Nous choisissons de condenser l'effort généralisé \underline{Q} apparaissant dans le champ de contrainte, en utilisant (B.2a).*

Le champs de contrainte tridimensionnel s'obtient immédiatement par substitution :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D M4-3nP} &= \sigma_{\alpha\beta}^{i,3D LS1} \\
 \sigma_{\alpha 3}^{i,3D M4-3nP} &= M_{\alpha\beta,\beta}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta,\beta}^i \frac{P_2^i(z)}{e^i} \\
 \sigma_{33}^{i,3D M4-3nP} &= \left(\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right) P_0^i(z) \\
 &\quad + \left(\frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) + \frac{6}{5} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right) P_1^i(z) \\
 &\quad + \left(\frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right) P_2^i(z) + \left(\frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \right) P_3^i(z)
 \end{aligned}$$

En exploitant l'équation d'équilibre 3D, nous en déduisons les $3n$ équations reliant nos efforts généralisés :

$$\underline{0} = \underline{\text{div}}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} \quad (\text{B.5})$$

$$0 = \text{div}(\underline{\text{div}}(\underline{M}^i)) + \frac{e^i}{2} (\text{div}(\tau^{i,i+1}) + \text{div}(\tau^{i-1,i})) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant l'expression de la divergence par les champs introduits plus haut dans la formulation faible tridimensionnelle, nous obtenons alors $0 = \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}^{3D}) \cdot \underline{u} \, d\Omega$:

$$0 = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})](x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \\ + [M_{\alpha\beta,\beta\alpha}^i + \frac{e^i}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})](x, y) \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3 \, dz \, d\omega$$

Une nouvelle fois, remarquons que, par construction, nous avons éliminé une équation d'équilibre et donc un déplacement généralisé. En dualité, il en existe $3n$:

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \quad U_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3 \, dz$$

Ainsi la condensation de l'effort tranchant a eu pour effet de supprimer le déplacement généralisé de rotation de la normale. Le modèle $M4-3nP$ se rapproche donc de celui de Love-Kirchhoff détaillé plus loin. La rotation de la normale n'est ici pilotée que par le gradient du déplacement vertical U_3 . Les déformations généralisées s'obtiennent en intégrant par parties :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{M4-3nP}^i = \underline{\underline{\varepsilon}}_{LS1}^i \quad D_{\nu, M4-3nP}^{j,j+1} = D_{\nu, LS1}^{j,j+1} \\ \underline{\underline{\chi}}^i = -\underline{\underline{\text{grad}}}_E \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_E(U_3^i) \right) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j + \frac{e^{j+1}}{2} U_{3,\alpha}^{j+1} + \frac{e^j}{2} U_{3,\alpha}^j$$

Le seul changement, par rapport à l'énergie complémentaire du modèle LS1, réside dans l'expression de w_Q^{*i} :

$$w_{K, M4-3nP}^{*i} = w_{K, LS1}^{*i} \quad w_{\nu, M4-3nP}^{*i} = w_{\nu, LS1}^{*i} \quad w_{c, M4-3nP}^{*i} = w_{c, LS1}^{*i} \\ w_Q^{*i} = \frac{2}{e^i} S_{\alpha 3\beta 3}^i \left(M_{\alpha\delta,\delta}^i + \frac{e^i}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \right) \left(M_{\beta\delta,\delta}^i + \frac{e^i}{2}(\tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \right) \\ + \frac{e^i}{6} S_{\alpha 3\beta 3}^i (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}) (\tau_{\beta}^{i,i+1} - \tau_{\beta}^{i-1,i}) + \frac{2}{5e^i} S_{\alpha 3\beta 3}^i M_{\alpha\delta,\delta}^i M_{\beta\delta,\delta}^i$$

Postulat B.1.4 Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à l'effort $\underline{\underline{M}}$.

Nous allons négliger les termes en $M_{\beta\delta,\delta}^i$. Ceci revient à dire que l'énergie associée aux contraintes de cisaillements perpendiculaires au plan de la couche, peut valablement être approchée à l'aide des seules contraintes de cisaillement d'interface. On peut dire aussi que l'on se contente d'une approximation constante par morceaux des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ lorsqu'il s'agit de déterminer cette partie de l'énergie élastique.

Le calcul est une nouvelle fois immédiat, et consiste simplement à remplacer, dans la loi du LS1 en souplesse précédente, les termes en Q_{α}^i , par la demi-somme $\frac{e^i}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})$.

Remarque B.1.1 L'argument de négligeabilité ci-dessus peut sembler quelque peu introduit *ad-hoc*. Il s'agit d'une hypothèse « allègrement » admise, sans justification, dans les précédentes versions des modèles.

Les lois de comportement sont identiques aux cas LS1 pour les déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^i, \underline{\underline{\chi}}^i$ données par (B.3) et $D_{\nu}^{j,j+1}$ donnée par (B.4). En revanche le comportement de cisaillement aux interfaces est changé :

$$D_{\alpha}^{j,j+1} = -\frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^j \frac{e^j}{2} (\tau_{\gamma}^{j,j+1} + \tau_{\gamma}^{j-1,j}) - \frac{2}{5} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \frac{e^{j+1}}{2} (\tau_{\gamma}^{j+1,j+2} + \tau_{\gamma}^{j,j+1}) - \frac{2}{15} e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} \\ + \frac{8}{15} (e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - \frac{2}{15} e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \\ D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{1}{3} \left(-e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} + (e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \right) \quad (\text{B.7})$$

Remarque B.1.2 Historiquement le modèle $M4 - 3nP$ a été formulé en négligeant par ailleurs les termes de couplages membrane-arrachement. Nous remarquons une nouvelle fois que cette approximation n'est nullement nécessaire

B.1.4 Le modèle $M4 - 2n + 1P$

Le modèle $M4 - 2n + 1P$ dérive du $M4 - 3nP$ en condensant l'effort d'arrachement. Cette simplification n'est pas absurde, dans la mesure où dans de nombreuses applications, l'essentiel de l'information recherchée pour la prédiction du délaminage, réside dans les efforts de cisaillement d'interface. L'élimination de l'effort d'arrachement, un peu plus difficile, s'opère à partir de l'équation (B.6).

Postulat B.1.5 du modèle $M4 - 2n + 1P$: Condensation de l'effort d'arrachement.
Afin de faire jouer un rôle symétrique aux conditions aux limites en efforts, nous sommes (B.6) de $j = 1$ à $i - 1$ pour en déduire $\nu^{i-1,i}$ puis de $i + 1$ à n pour trouver $\nu^{i,i+1}$:

$$\nu^{i-1,i} = -T_3^- - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \quad (\text{B.8a})$$

$$\nu^{i,i+1} = T_3^+ + \sum_{j=i+1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \quad (\text{B.8b})$$

$$\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} = T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \quad (\text{B.8c})$$

En remplaçant $\nu^{i,i+1}$ et $\nu^{i-1,i}$, dans les équations ci-dessous, par les expressions (B.8a)–(B.8b), nous obtenons le champ de contrainte $3D \sigma_{\alpha i}^{i,3D M4-2n+1P} = \sigma_{\alpha i}^{i,3D M4-3nP}$ et :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{i,3D M4-2n+1P} &= \frac{1}{2} \left[T_3^+ + \sum_{j=i+1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \right] P_0^i(z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[T_3^- + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \right] P_0^i(z) \\ &\quad + \frac{e^i}{12} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})] P_0^i(z) + \frac{e^i}{10} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})] P_1^i(z) \\ &\quad + \frac{6}{5} \left[T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \right] P_1^i(z) \\ &\quad + \frac{e^i}{12} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})] P_2^i(z) + \frac{e^i}{2} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})] P_3^i(z) \\ &\quad + \left[T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \underline{M}^j \right] \right] P_3^i(z) \end{aligned}$$

$\underline{\operatorname{div}}(\underline{\sigma}^{3D}) = \underline{0}$ nous donne alors les $2n + 1$ équations vérifiées par nos contraintes généralisées :

$$\underline{0} = \underline{\operatorname{div}}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} \quad (\text{B.9a})$$

$$0 = \sum_{j=1}^n \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}}(\underline{M}^j) + \frac{e^j}{2} (\operatorname{div}(\tau^{j,j+1}) + \operatorname{div}(\tau^{j-1,j})) + T_3^+ + T_3^- \quad (\text{B.9b})$$

La cinématique généralisée est obtenue en exploitant la formulation faible tridimensionnelle $0 = \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}^{3D}) \cdot \underline{u} \, d\Omega$, dans laquelle nous introduisons le champ de contrainte tridimensionnel :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})](x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \, d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\sum_{j=1}^n \underline{\text{div}} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{M}}^j) + \frac{e^j}{2} (\text{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j})) + T_3^+ + T_3^- \right) \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3 \, dz \, d\omega \\
 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \right) d\omega \\
 &+ \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^n \underline{\text{div}} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{M}}^j) + \frac{e^j}{2} (\text{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j})) + T_3^+ + T_3^- \right) \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3 \, dz \right) d\omega
 \end{aligned}$$

Car la dernière somme étant indépendante de l'indice i , nous pouvons la sortir de l'intégrale.

Notation B.1.1 Déplacement normal moyen. *On note comme précédemment*

$$U_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3 \, dz$$

le déplacement normal moyen de chaque couche.

Nous en déduisons ainsi les déplacements généralisés du modèle $M4 - 2n + 1P$:

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \quad W_3(x, y) = \sum_{i=1}^n U_3^i(x, y)$$

Le déplacement généralisé W_3 est la somme des déplacements moyens de toutes les couches. Il correspond au déplacement normal de la plaque. Le modèle $M4 - 2n + 1P$ « floute » le pincement de la plaque, en ne distinguant plus les déplacements normaux de chaque couche.

Remarque B.1.3 Une nouvelle fois, nous notons ici une différence avec le modèle formulé historiquement, qui considérait que l'effort en dualité de (B.9b) était simplement le déplacement moyen des faces supérieure et inférieure.

$$W_3 = \frac{U_3(x, y, h_n^+) + U_3(x, y, h_1^-)}{2}$$

La variable de sommation j étant muette, nous pouvons réécrire la forme faible pour expliciter les déformations généralisées :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] U_{\alpha}^i(x, y) \, d\omega \\
 &+ \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^n \underline{\text{div}} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{M}}^j) + \frac{e^j}{2} (\text{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j})) + T_3^+ + T_3^- \right) W_3 \, d\omega \\
 \Rightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})] U_{\alpha}^i(x, y) \, d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[\underline{\text{div}} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{M}}^i) + \frac{e^i}{2} (\text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})) + T_3^+ + T_3^- \right] W_3(x, y) \, d\omega
 \end{aligned}$$

D'où $\underline{\underline{\varepsilon}}_{M4-2n+1P}^i = \underline{\underline{\varepsilon}}_{M4-3n P}^i$ et $\underline{\underline{\chi}}^i = -\underline{\text{grad}}_E(\underline{\text{grad}}_E(W_3))$, $D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j + \left(\frac{e^{j+1}}{2} + \frac{e^j}{2} \right) W_{3,\alpha}$
 Toutes les déformations généralisées associées aux moments membranaires sont égales.

Postulat B.1.6 Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à l'effort ν . Afin de ne pas faire intervenir de dérivées dans l'énergie complémentaire, nous négligeons cette fois-ci complètement l'énergie associée à l'effort d'arrachement ν . Cela revient en quelque sorte à considérer la plaque infiniment rigide dans la direction 3.

Par conséquent, nous postulons que $w_\nu^{*i} \ll w_K^{*i}, w_Q^{*i}$ et $w_c^{*i} \ll w_K^{*i}, w_Q^{*i}$. La minimisation de l'énergie complémentaire nous donne alors les lois de comportement simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial N_{\alpha\beta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i \\ \chi_{\alpha\beta}^i &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial M_{\alpha\beta}^i} = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\alpha\beta}^i \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}} = \frac{1}{3} \left(-e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} + (e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \right)\end{aligned}\tag{B.10}$$

B.1.5 Le modèle de Love-Kirchhoff multicouches

Le prochain et dernier modèle imbriqué de notre liste est le modèle de Kirchhoff Love multicouche. Ce modèle est obtenu en condensant l'effort de cisaillement.

Postulat B.1.7 du modèle de Love-Kirchhoff : Condensation de l'effort de cisaillement. Nous condensons l'effort de cisaillement inter-laminaire à l'aide de l'équation (B.9a). Afin encore une fois de faire jouer un rôle symétrique aux efforts sur les faces supérieure et inférieure, nous sommes de $k = i + 1$ à n puis de 1 à $i - 1$ pour obtenir :

$$\tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) = -T_{\alpha}^{-}(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta}^j(x, y)\tag{B.11}$$

$$\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) = T_{\alpha}^{+}(x, y) + \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta,\beta}^j(x, y)\tag{B.12}$$

Le champ de contrainte résultant est alors, une nouvelle fois, obtenu par simple substitution et réorganisation des termes :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D LK} &= N_{\alpha\beta}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} + M_{\alpha\beta}^i \frac{12P_1^i(z)}{e^{i2}} \\ \sigma_{\alpha 3}^{i,3D LK} &= M_{\alpha\beta,\beta}^i + \frac{e^i}{2} \left(T_{\alpha}^{+} + \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta,\beta}^j - T_{\alpha}^{-} - \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta}^j \right) \frac{P_0^i(z)}{e^i} \\ &\quad + \left(T_{\alpha}^{+} + T_{\alpha}^{-} \sum_{j=1, j \neq i}^n N_{\alpha\beta,\beta}^j \right) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta,\beta}^i \frac{P_2^i(z)}{e^i}\end{aligned}\tag{B.13}$$

Le champ de contrainte d'arrachement a une expression un peu plus lourde :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{i,3D LK} = & \frac{1}{2} \left[T_3^+ + \sum_{j=i+1}^n \left[\frac{e^j}{2} \left(T_{\alpha,\alpha}^+ + \sum_{k=j+1}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k - T_{\alpha,\alpha}^- - \sum_{k=1}^{j-1} N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k \right) + M_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right] \right] P_0^i(z) \\
 & - \frac{1}{2} \left[T_3^- + \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{e^j}{2} \left(T_{\alpha,\alpha}^+ + \sum_{k=j+1}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k - T_{\alpha,\alpha}^- - \sum_{k=1}^{j-1} N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k \right) + M_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right] \right] P_0^i(z) \\
 & + \frac{e^i}{12} \left[\left(T_{\alpha,\alpha}^+ + T_{\alpha,\alpha}^- \sum_{j=1, j \neq i}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right) \right] P_0^i(z) + \frac{e^i}{10} \left[\left(T_{\alpha,\alpha}^+ + \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j - T_{\alpha,\alpha}^- - \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right) \right] P_1^i(z) \\
 & + \frac{6}{5} \left[T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{e^j}{2} \left(T_{\alpha,\alpha}^+ + \sum_{k=j+1}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k - T_{\alpha,\alpha}^- - \sum_{k=1}^{j-1} N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k \right) + M_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right] \right] P_1^i(z) \\
 & + \frac{e^i}{12} \left[\left(T_{\alpha,\alpha}^+ + T_{\alpha,\alpha}^- \sum_{j=1, j \neq i}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right) \right] P_2^i(z) + \frac{e^i}{2} \left[\left(T_{\alpha,\alpha}^+ + \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j - T_{\alpha,\alpha}^- - \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right) \right] P_3^i(z) \\
 & + \left[T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{e^j}{2} \left(T_{\alpha,\alpha}^+ + \sum_{k=j+1}^n N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k - T_{\alpha,\alpha}^- - \sum_{k=1}^{j-1} N_{\alpha\beta,\beta\alpha}^k \right) + M_{\alpha\beta,\beta\alpha}^j \right] \right] P_3^i(z)
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

$\text{div}(\underline{\sigma}^{3D}) = \underline{0}$ nous donne alors les 2 équations vérifiées par nos contraintes généralisées. Celles-ci sont obtenues en remplaçant $\underline{T}^{i,i+1}$ et $\underline{T}^{i,i+1}$ dans (B.9a) et (B.9b) à l'aide de (B.11) (B.12).

$$\begin{aligned}
 \underline{0} = \text{div} \left(\sum_{i=1}^n \underline{N}^i \right) + \underline{T}^+ + \underline{T}^- \\
 0 = \sum_{j=1}^n \text{div} \text{div} (\underline{M}^j) + \frac{e^j}{2} \left(\text{div} \text{div} \left(\sum_{k=j+1}^n \underline{N}^k \right) + \text{div} \underline{T}^+ - \text{div} \text{div} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \underline{N}^k \right) - \text{div} \underline{T}^- \right) + T_3^+ + T_3^-
 \end{aligned}$$

Simplification non triviale. Dans l'expression ci-dessus, nous avons la simplification suivante :

$$\sum_{j=1}^n \frac{e^j}{2} \left(- \sum_{k=1}^{j-1} \underline{N}^k + \sum_{k=j+1}^n \underline{N}^k \right) = \sum_{j=1}^n (\bar{h}_j - \bar{h}) \underline{N}^j \tag{B.15}$$

où $\bar{h}_j = \frac{h_j^+ + h_j^-}{2}$ désigne la côte moyenne de la couche j et $\bar{h} = \frac{h_n^+ + h_1^-}{2}$ la côte moyenne du stratifié.

Démonstration Pour le voir, intéressons-nous au coefficient devant \underline{N}^j , dans le membre de gauche de (B.15). L'inversion des sommations fournit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \frac{e^j}{2} \left(- \sum_{k=1}^{j-1} \underline{N}^k + \sum_{k=j+1}^n \underline{N}^k \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \underline{N}^k \sum_{j=k+1}^n - \frac{e^j}{2} + \sum_{k=2}^n \underline{N}^k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{e^j}{2} \\
 &= \sum_{k=2}^{n-1} \underline{N}^k \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{e^j}{2} - \sum_{j=k+1}^n \frac{e^j}{2} \right) + N^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{e^j}{2} - N^1 \sum_{j=2}^n \frac{e^j}{2} \\
 &= \sum_{j=1}^n \underline{N}^j \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{e^k}{2} - \sum_{k=j+1}^n \frac{e^k}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Avec la convention, qu'une somme vide est nulle. Ce coefficient est égal à $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{e^k}{2} - \sum_{k=j+1}^n \frac{e^k}{2}$. Or

$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{e^k}{2}$ correspond à la demi-épaisseur des couches sous la $j^{\text{ème}}$ et $-\sum_{k=j+1}^n \frac{e^k}{2}$ à l'opposé de la demi-épaisseur des couches au-dessus de la $j^{\text{ème}}$. Le coefficient pondérant \underline{N}^j , dans le membre

de droite de (B.15), vaut :

$$\bar{h}_j - \bar{h} = \frac{h_j^+ + h_j^-}{2} - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} = -\frac{h_n^+ - h_j^+}{2} + \frac{h_j^- - h_1^-}{2}$$

Ce qui nous donne une nouvelle fois la demi-épaisseur des couches au-dessous, à laquelle on soustrait la demi-épaisseur des couches au-dessus. Les deux expressions, de droite et de gauche, de (B.15) coïncident bien.

Les équations d'équilibre peuvent alors se réécrire :

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{\text{div}} \left(\sum_{i=1}^n \underline{N}^i \right) + \underline{T}^+ + \underline{T}^- \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \underline{\text{div}} \underline{\text{div}} (\underline{M}^j) + (\bar{h}_j - \bar{h}) \underline{\text{div}} \underline{\text{div}} (\underline{N}^j) + \frac{e^j}{2} (\underline{\text{div}}(\underline{T}^+ - \underline{T}^-)) + T_3^+ + T_3^- \end{aligned}$$

Notation B.1.2 Moments et efforts membranaires totaux. *Nous notons pour simplifier :*

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^n \underline{N}^i \quad \text{et} \quad \underline{M} = \sum_{j=1}^n \underline{M}^j + (\bar{h}_j - \bar{h}) \underline{N}^j$$

Le terme $(\bar{h}_j - \bar{h}) \underline{N}^j$ s'interprète comme le moment de la contrainte membranaire par rapport à la position moyenne de la plaque. Les équations d'équilibre prennent alors la forme finale assez compacte :

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{\text{div}} \underline{N} + \underline{T}^+ + \underline{T}^- \\ 0 &= \underline{\text{div}} \underline{\text{div}} \underline{M} + \frac{e}{2} (\underline{\text{div}}(\underline{T}^+ - \underline{T}^-)) + T_3^+ + T_3^- \end{aligned}$$

La cinématique généralisée est obtenue en exploitant la formulation faible tridimensionnelle,

$0 = \int_{\Omega} \underline{\text{div}} (\underline{\sigma}^{3D}) \cdot \underline{u} \, d\Omega$, à l'aide des champs introduits plus haut :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (\underline{\text{div}} \underline{N} + \underline{T}^+ + \underline{T}^-) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \, d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\underline{\text{div}} \underline{\text{div}} \underline{M} + \frac{e}{2} (\underline{\text{div}}(\underline{T}^+ - \underline{T}^-)) + T_3^+ + T_3^- \right) \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3 \, dz \, d\omega \\ 0 &= \int_{\omega} \underline{\text{div}} \underline{N} + \underline{T}^+ + \underline{T}^- \left(\sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \right) \, d\omega \\ &+ \int_{\omega} \left(\underline{\text{div}} \underline{\text{div}} \underline{M} + \frac{e}{2} (\underline{\text{div}}(\underline{T}^+ - \underline{T}^-)) + T_3^+ + T_3^- \right) \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right] u_3 \, dz \, d\omega \end{aligned}$$

Les deux expressions sont indépendantes de i , nous pouvons les sortir de l'intégrale dans l'épaisseur. Nous en déduisons ainsi les déplacements généralisés du modèle de Love-Kirchhoff.

Notation B.1.3 Déplacements moyens. *On note comme précédemment*

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \quad U_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{P_2^i(z)}{e^i} \right) u_3 \, dz$$

Les déplacements généralisés sont alors les sommes des déplacements moyens :

$$W_{\alpha}(x, y) = \sum_{i=1}^n U_{\alpha}^i(x, y) \quad W_3(x, y) = \sum_{i=1}^n U_3^i(x, y) \quad (\text{B.16})$$

Et la forme faible se réécrit :

$$0 = \int_{\omega} (\underline{\text{div}} \underline{N} + \underline{T}^+ + \underline{T}^-) \cdot \underline{W}(x, y) + \left(\underline{\text{div}} \underline{\text{div}} \underline{M} + \frac{e}{2} (\underline{\text{div}}(\underline{T}^+ - \underline{T}^-)) + T_3^+ + T_3^- \right) W_3(x, y) \, d\omega$$

Au moyen d'une intégration par parties, nous en déduisons les déformations généralisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\chi}}$, duales des efforts généralisés totaux $\underline{\underline{N}}$ et $\underline{\underline{M}}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega} -\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\text{grad}}}^s(W) - \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(W_3)) + (\underline{\underline{T}}^+ + \underline{\underline{T}}^-) \cdot \underline{\underline{W}} + \left(\frac{e}{2} (\text{div}(\underline{\underline{T}}^+ - \underline{\underline{T}}^-)) + T_3^+ + T_3^- \right) W_3 \, d\omega \\ 0 &= \int_{\omega} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \, d\omega - \mathcal{P}_{KL}^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

où $\mathcal{P}_{KL}^{\text{ext}}$ désigne la puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{KL}^{\text{ext}} = (\underline{\underline{T}}^+ + \underline{\underline{T}}^-) \cdot \underline{\underline{W}} + \left(\frac{e}{2} (\text{div}(\underline{\underline{T}}^+ - \underline{\underline{T}}^-)) + T_3^+ + T_3^- \right) W_3 \, d\omega$$

Nous pouvons alors redévelopper les expressions des efforts généralisés puis regrouper les termes en $\underline{\underline{N}}^i$ et $\underline{\underline{M}}^i$ pour expliciter les déformations généralisées associées à chacun de ces termes :

$$\mathcal{P}^{\text{int}} = \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n \underline{\underline{N}}^i \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} + \left(\sum_{i=1}^n \underline{\underline{M}}^i + (\bar{h}_i - \bar{h}) \underline{\underline{N}}^i \right) : \underline{\underline{\chi}} \, d\omega = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \underline{\underline{N}}^i : \underline{\underline{\varepsilon}}^i + \underline{\underline{M}}^i : \underline{\underline{\chi}}^i \, d\omega$$

Expression dans laquelle nous avons posé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^i = \underline{\underline{\varepsilon}} + (\bar{h}_i - \bar{h}) \underline{\underline{\chi}} \quad \underline{\underline{\chi}}^i = \underline{\underline{\chi}} \quad (\text{B.18})$$

Postulat B.1.8 Simplification de l'énergie complémentaire. *Afin de ne pas faire intervenir de dérivées dans le calcul de l'énergie complémentaire, nous négligeons toutes les énergies hormis celles associées aux efforts membranaires.*

Nous supposons donc que $W^* = \sum_{i=1}^n w_K^{*i}$ et les lois de comportement qui s'en déduisent :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial N_{\gamma\delta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\gamma\delta}^i \quad \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial M_{\gamma\delta}^i} = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\gamma\delta}^i \quad (\text{B.19})$$

Ces lois (B.19) sont identiques aux deux premières équations de (B.10). Par inversion, les lois de comportement en rigidités locales sont obtenues :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i &= e^i \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \varepsilon_{\gamma\delta}^i & M_{\alpha\beta}^i &= \frac{(e^i)^3}{12} \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \chi_{\gamma\delta}^i \\ N_{\alpha\beta}^i &= e^i \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} (\varepsilon_{\gamma\delta} + (\bar{h}_i - \bar{h}) \chi_{\gamma\delta}) & M_{\alpha\beta}^i &= \frac{(e^i)^3}{12} \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \chi_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Les relations (B.20) font intervenir les inverses des parties planes de la souplesse, c'est à dire en l'occurrence les rigidités en contraintes planes. Nous déduisons alors, des propriétés locales (B.20), les relations globales reliant nos grandeurs généralisées :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \left[\sum_{i=1}^n e^i \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \right] \varepsilon_{\gamma\delta} + \left[\sum_{i=1}^n e^i (\bar{h}_i - \bar{h}) \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \right] \chi_{\gamma\delta} \\ M_{\alpha\beta} &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{(e^i)^3}{12} + e^i (\bar{h}_i - \bar{h})^2 \right) \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \right] \chi_{\gamma\delta} + \left[\sum_{i=1}^n e^i (\bar{h}_i - \bar{h}) \left(S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \right)^{-1} \right] \varepsilon_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Quelques manipulations algébriques permettent ensuite de donner une forme plus commune à ces lois. Ainsi, si l'on suppose que la plaque est centrée, alors $\bar{h} = 0$, et nous pouvons simplifier comme suit :

$$\begin{aligned} e^i (\bar{h}_i - \bar{h}) &= e^i \bar{h}_i = (h_i^+ - h_i^-) \frac{h_i^+ + h_i^-}{2} = \frac{(h_i^+)^2 - (h_i^-)^2}{2} \\ \frac{(e^i)^3}{12} + e^i (\bar{h}_i - \bar{h})^2 &= \frac{(h_i^+ - h_i^-)^3}{12} + (h_i^+ - h_i^-) \left(\frac{h_i^+ + h_i^-}{2} \right)^2 = \frac{(h_i^+)^3 - (h_i^-)^3}{3} \end{aligned}$$

Le comportement de plaque exprimé comme ci-dessus est très « classique » (voir [Berthelot \[2010\]](#)). Il ne fait intervenir que la partie plane de la souplesse des couches $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i$, alors que les couches ne sont pas dans un état de contrainte plane. Voilà ce qui fait toute l'importance du concept. Ainsi de fait, nous avons négligé les énergies associées aux contraintes hors plan.

Il n'est pas étonnant de retrouver ici le modèle de Kirchhoff-Love « standard ». En effet, deux visions peuvent expliquer l'essence du modèle SCLS1 :

- Il peut d'une part être perçu comme discrétisation dans l'épaisseur du modèle de Cauchy tridimensionnel. En effet, l'ensemble des champs affines par morceaux est dense dans L^2 , par conséquent en raffinant suffisamment dans l'épaisseur un solide à l'aide du modèle SCLS1, le résultat converge nécessairement vers celui obtenu avec le modèle 3D.
- D'autre part, le modèle SCLS1 peut être vu comme une sorte d'extension du modèle de Kirchhoff Love. Ainsi, la seule hypothèse pour dégénérer le modèle de Love-Kirchhoff du modèle 3D est de ne considérer que l'énergie complémentaire de membrane lors de la minimisation de W^* [[Sab and Lebée, 2015](#)]. Alors, le champ de contrainte solution est nécessairement affine et prend la forme [\(B.13\)](#). Le modèle SCLS1 est par conséquent construit, avec le même champ de contrainte membranaire, affine par morceaux, si bien que si l'on dégénère successivement les énergies complémentaire, nous retombons sur le modèle de Kirchhoff-Love. Toute la partie précédente n'était donc que formalité puisqu'il était attendu qu'en remplaçant tous les termes dans le champ de contrainte par des fonctions de \underline{N} et \underline{M} puis en ne conservant que la partie plane de l'énergie complémentaire, nous devions nécessairement récupérer le modèle de Kirchhoff-Love.

Finalement, ces lois [\(B.21\)](#) peuvent donc s'écrire de manière tensorielle assez compacte comme :

$$\begin{aligned}\underline{N} &= \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \mathbb{B} : \underline{\underline{\chi}} \\ \underline{M} &= \mathbb{B} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \mathbb{D} : \underline{\underline{\chi}}\end{aligned}$$

En notation ingénieur, la matrice associée au tenseur \mathbb{A} est couramment appelée « matrice des rigidités membranaires ». La matrice associée au tenseur \mathbb{D} est couramment appelée « matrice des rigidités de flexion ». La matrice associée au tenseur \mathbb{B} est simplement appelée « matrice de couplage membrane-flexion », cette dernière est par ailleurs nulle dans le cas d'un empilement à symétrie miroir.

Le modèle de Love-Kirchhoff est assez séduisant par sa simplicité et la quantité d'informations qu'il est théoriquement capable de fournir. La résolution ne s'effectue que sur deux déplacements généralisés [\(B.16\)](#), mais les déformations généralisées [\(B.18\)](#) de chacune des couches et les efforts peuvent en être déduits [\(B.19\)](#). Par conséquent il est même possible de remonter aux efforts d'interfaces, y compris ceux de cisaillement et d'arrachement, en utilisant successivement [\(B.11\)](#), [\(B.12\)](#) puis [\(B.8a\)](#), [\(B.8b\)](#). Cependant ne nous leurrions pas, la simplification extrême de l'énergie complémentaire ne peut, par essence, donner des résultats satisfaisants pour cette prédiction.

B.1.6 Synthèse des modèles ayant une approximation membranaire de degré 1

Mis à part le $M4 - 7n$, qui semble inutile, nous venons de voir que tous les modèles se déduisent du modèle SCLS1 en venant successivement (voir aussi [figure B.1 \[p. 177\]](#)) :

- Condenser un effort généralisé à l'aide des équations d'équilibre du modèle SCLS1 (sans jusque-là aucune approximation supplémentaire) ;
- négliger le terme correspondant lors du calcul de l'énergie complémentaire.

Historiquement, d'autres approximations ont été postulées lors de l'écriture de la loi de comportement en souplesse, afin de simplifier les expressions. Ces approximations ont une motivation physique, mais ne sont nullement obligatoires. Nous espérons que la démarche précédente a permis au lecteur de percevoir le caractère « imbriqué » des modèles de plaques multiparticulaires possédant une approximation de degré 1 par couche. L'ensemble étant chapeauté par le

modèle SCLS1 qui s'avère plus consistant.

Ces modèles, celui de Kirchhoff-Love exclu, sont adaptés à l'étude des plaques stratifiées épaisses, car ils caractérisent le stratifié par une succession de plaques de Reissner-Mindlin couplées.

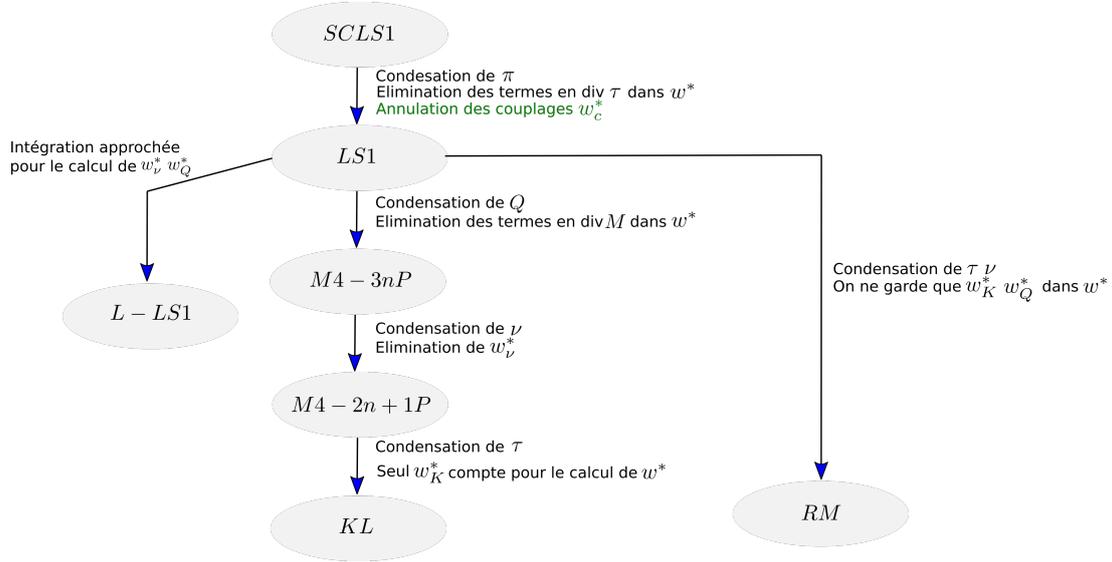


FIGURE B.1 – Schéma illustrant les dégénérescences des différents modèles. Une des hypothèses destinée à passer du modèle SCLS1 au LS1 est représentée en vert car non obligatoire.

B.2 Les modèles possédant une approximation membranaire constante par couche

Lorsque l'éclatement des différentes couches constituant le stratifié devient très faible, les moments fléchissant dans chacune des couches ont une influence négligeable sur la réponse de la structure. Le comportement de chacune des couches est donc celui d'une membrane. Cette approximation n'a aucune légitimité dans l'étude des plaques épaisses, mais peut néanmoins être tout à fait acceptable pour l'étude des composites stratifiés élancés comportant un nombre élevé de couches, chacune de faible épaisseur.

B.2.1 Le modèle SCLS0

Il s'agit de la forme la plus aboutie de modèle multiparticulaire dans lequel le champ de contrainte membranaire est postulé constant par couche. Les modèles LS0 et $M4 - 2n + 1m$, historiquement utilisés au laboratoire Navier, en sont des cas particuliers. Comme dans les situations précédentes, nous commençons par postuler un champ de contrainte membranaire, ici constant par couche :

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^{i,3D SCLS0} &= N_{\alpha\beta}^i \frac{P_0^i(z)}{e^i} \\ \sigma_{\alpha 3}^{i,3D SCLS0} &= \frac{1}{2} [\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}] P_0^i(z) + [\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}] P_1^i(z) \\ \sigma_{33}^{i,3D SCLS0} &= \left[\frac{1}{2} (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} \pi^i \right] P_0^i(z) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) P_1^i(z) + \frac{e^i}{12} \pi^i P_2^i(z)\end{aligned}$$

Ce champ de contrainte conduit à $4n$ équations d'équilibre :

$$0 = \operatorname{div}(\underline{N}^i)(x, y) + \underline{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \underline{\tau}^{i-1,i}(x, y) \quad (\text{B.22a})$$

$$0 = \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \quad (\text{B.22b})$$

$$0 = \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})(x, y) - \pi^i(x, y) \quad (\text{B.22c})$$

La cinématique généralisée est obtenue en exploitant la formulation faible tridimensionnelle, à l'aide des champs introduits plus haut :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})](x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \, d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right] (x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_3 \, dz \, d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i}) - \pi^i] (x, y) P_1^i(z) u_3 \, dz \, d\omega \end{aligned}$$

Nous introduisons par conséquent les déplacements suivants :

$$\bar{U}_{\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \quad \bar{U}_3^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_3 \, dz \quad V^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) u_3 \, dz$$

ainsi que les déformations généralisées :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2}(U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i) & \lambda^i &= V^i \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j - \frac{e^{j+1}}{2} U_{3,\alpha}^{j+1} - \frac{e^j}{2} U_{3,\alpha}^j - V_{,\alpha}^{j+1} + V_{,\alpha}^j & D_{\nu}^{j,j+1} &= U_3^{j+1} - U_3^j \end{aligned}$$

La donnée explicite du champ de contrainte permet de calculer l'énergie complémentaire du modèle SCLS0 :

$$\begin{aligned} w_K^* &= \frac{1}{2e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i N_{\gamma\delta}^i \\ w_{\nu}^* &= \frac{e^i}{2} S_{3333}^i \left(\left[\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} \pi^i \right]^2 + \frac{1}{12} [\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}]^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{e^i}{12} \pi^i \right]^2 \right) \\ w_c^* &= S_{\alpha\beta 33}^i N_{\alpha\beta}^i \left[\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12} \pi^i \right] \\ w_{\tau}^* &= \frac{e^i}{2} S_{\alpha 3 \beta 3}^i \left((\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i})(\tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\beta}^{i-1,i}) + \frac{1}{3}(\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})(\tau_{\beta}^{i,i+1} - \tau_{\beta}^{i-1,i}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Dont nous déduisons par dérivation les lois de comportement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i + S_{\alpha\beta 33}^i \left(\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{6} \pi^i \right) \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} + \frac{4}{3} (e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \\ D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{1}{3} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \\ &+ \frac{1}{24} (e^j)^2 S_{3333}^j \pi^j + \frac{1}{24} (e^{j+1})^2 S_{3333}^{j+1} \pi^{j+1} + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} \\ \lambda^i &= \frac{1}{120} (e^i)^3 S_{3333}^i \pi^i + \frac{1}{24} (e^i)^3 S_{3333}^i (\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^i N_{\alpha\beta}^i \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Théorème B.2.1 Équilibre des puissances. *Nous pouvons traduire la condition d'équilibre de la structure comme l'égalité entre puissance des efforts intérieur et extérieur :*

$$\int_{\omega} \mathcal{P}_{SCLS0}^{int,*} - \mathcal{P}_{SCLS0}^{ext,*} d\omega = 0$$

où $*$ = L si les conditions aux limites en efforts sont satisfaites sous forme faible et $*$ = N , si elles le sont sous forme forte

Notation B.2.1 Densité de puissance des efforts intérieurs et extérieurs sans multiplicateur de Lagrange. *Le groupement ci-dessus étant amené à apparaître à des nombreuses reprises au cours de notre exposé, nous allons introduire les densités de puissance des efforts extérieurs et intérieurs sans multiplicateur de Lagrange :*

$$\mathcal{P}_{SCLS0}^{int,N} = \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \pi^i \lambda^i + \sum_{j=1}^{n-1} \underline{T}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{i,i+1} D_{\nu}^{j,j+1} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{P}_{SCLS0}^{ext,N} = T_{\alpha}^{+}(U_{\alpha}^n - \frac{e^n}{2} U_{3,\alpha}^n - V_{\alpha}^{n,n+1}) + T_{\alpha}^{-}(U_{\alpha}^1 - \frac{e^1}{2} U_{3,\alpha}^1 + V_{\alpha}^{0,1}) + T_3^{+} U_3^n + T_3^{-} U_3^1$$

Si nous choisissons d'introduire les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions aux limites en efforts

Notation B.2.2 Densité de puissance des efforts intérieurs et extérieurs avec multiplicateur de Lagrange. *Le groupement ci-dessus étant amené à apparaître à des nombreuses reprises au cours de notre exposé, nous allons introduire les densités de puissance des efforts extérieurs et intérieurs avec multiplicateurs de Lagrange :*

$$\mathcal{P}_{SCLS0}^{int,L} = \sum_{i=1}^n \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \pi^i \lambda^i + \sum_{k=0}^n \underline{T}^{k,k+1} \cdot \underline{D}^{k,k+1} + \nu^{k,k+1} D_{\nu}^{k,k+1} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{P}_{SCLS0}^{ext,L} = \mu_{\alpha}^{n,n+1} T_{\alpha}^{+} + \mu_{\alpha}^{0,1} T_{\alpha}^{-} + \mu_3^{n,n+1} T_3^{+} + \mu_3^{0,1} T_3^{-}$$

Nous remarquons que la matrice de rigidité en cisaillement d'interface \mathbb{C}_{τ} est ici tridiagonale par blocs et « propre ». Cette propriété remarquable nous permet d'envisager une solution analytique pour la décroissance des coefficients extra-diagonaux, comme donnée par Meurant [1990] dans la seconde partie de son article.

B.2.2 Le modèle LS0

Le modèle LS0, anciennement appelé $M4 - 3nM$, est à bien des égards, le modèle qui aurait le plus mérité de rejoindre le corps principal du manuscrit se rapportant aux modèles multi-particulaires. Il présente à nos yeux plusieurs avantages le rendant attractif pour la modélisation des composites stratifiés.

Tout d'abord, il est le modèle *minimal* délivrant l'ensemble des informations indispensables à l'étude du délaminage et de la fissuration intra-laminaire. En effet, il compte dans ses efforts généralisés : l'effort normal membranaire, le cisaillement et l'arrachement d'interface. Si le souci premier du modélisateur est d'obtenir un modèle simple permettant de capter ces modes de ruines, le LS0 s'impose comme un très bon candidat. Les déplacements généralisés du modèle ne sont constitués que de simples translations. En particulier, la rotation de la normale, artefact de modélisation des modèles de plaques, en est absente.

Condensation de l'effort généralisé π et équations générales

Comme précédemment, nous condons l'effort un peu énigmatique π^i via l'équation d'équilibre (B.22c).

Postulat B.2.1 du modèle LS0 : condensation de l'effort généralisé π^i . *Nous utilisons (B.22c) pour condenser l'effort généralisé π^i*

Le champ de contrainte $\sigma_{\alpha j}^{i,3D LS0} = \sigma_{\alpha j}^{i,3D SCLS0}$ est inchangé tandis que l'arrachement est à présent donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{i,3D LS0} &= \left[\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12}(\text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})) \right] P_0^i(z) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})P_1^i(z) \\ &+ \frac{e^i}{12} \text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})P_2^i(z) \end{aligned}$$

Ce champ de contrainte postulé conduit à $3n$ équations d'équilibre :

$$\underline{0} = \text{div}(\underline{N}^i)(x, y) + \underline{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \underline{\tau}^{i-1,i}(x, y) \quad (\text{B.27})$$

$$0 = \frac{e^i}{2} \text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i})(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) \quad (\text{B.28})$$

Dont la formulation faible associée est :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})](x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \, d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\frac{e^i}{2} \text{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right] (x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_3 \, dz \, d\omega \end{aligned}$$

L'essentiel des déplacements et déformations généralisés est commun au SCLS0 :

$$U_{\alpha}^{i,SCLS0} = U_{\alpha}^{i,LS0}, \quad U_3^{i,SCLS0} = U_3^{i,LS0}, \quad \underline{\varepsilon}_{LS0}^i = \underline{\varepsilon}_{SCLS0}^i, \quad D_{\nu,LS0}^{j,j+1} = D_{\nu,SCLS0}^{j,j+1}.$$

La seule distinction concerne la déformation généralisée associée au cisaillement, impactée par la disparition du déplacement généralisé V :

$$D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j - \frac{e^{j+1}}{2} U_{3,\alpha}^{j+1} - \frac{e^j}{2} U_{3,\alpha}^j$$

De même, les énergies complémentaires se déduisent simplement de celles du modèle SCLS0 :

$$w_{K,SCLS0}^{*i} = w_{K,LS0}^{*i}, \quad w_{\tau,SCLS0}^{*i} = w_{\tau,LS0}^{*i} \text{ donnés dans (B.23)}$$

$$\begin{aligned} w_{\nu}^{*i} &= \frac{e^i}{2} S_{3333}^i \left(\left[\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 + \frac{1}{12} [(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})]^2 \right) \\ &+ \frac{e^i}{2} S_{3333}^i \left(\frac{1}{5} \left[\frac{e^i}{12}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right]^2 \right) \\ w_c^{*i} &= S_{\alpha\beta 33}^i N_{\alpha\beta}^i \left[\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) + \frac{e^i}{12}(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i}) \right] \end{aligned}$$

Postulat B.2.2 Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à l'effort π . *Nous allons négliger les termes en $(e^i)^2(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} \pm \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})$, $(e^i)^3(\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1} \pm \tau_{\alpha,\alpha}^{i-1,i})$ dont l'ordre de grandeur est beaucoup plus faible, à priori, que celui des autres contributions.*

Dont nous déduisons par dérivation les lois de comportement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i + S_{\alpha\beta 33}^i \left(\frac{1}{2}(\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}) \right) \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} + \frac{4}{3} (e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \\ D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{1}{3} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Ces lois sont donc obtenues par simple suppression du terme en π dans (B.24).

Simplification du modèle

Négligeabilité des couplages membrane–arrachement Comme dans le cadre LS1, la négligeabilité du couplage membrane arrachement a été postulée par le passé. Le modèle résultant était alors appelé « $M4 - 3n$ membrane ». Sous cette approximation supplémentaire (non nécessaire), les termes de couplage dans la loi de comportement en membrane et en arrachement disparaissent, les lois de comportement devenant telles que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\alpha\beta}^i \\ D_{\alpha}^{j,j+1} &= \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} + \frac{4}{3} (e^j S_{\alpha 3\gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \quad (\text{B.30}) \\ D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + \frac{1}{3} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2} \end{aligned}$$

Simplification de la rigidité en arrachement La structure des matrices de souplesses du modèle LS0 apparait alors assez similaire à celle du modèle LS1. En particulier, la matrice de souplesse en arrachement y est tri-diagonale. Nous pouvons donc lui appliquer les mêmes remarques qu'à la section F.2.2 [p. 245]. Ainsi, dans l'étude d'un stratifié dont tous les plis seraient constitués du même matériau, et de mêmes épaisseurs, $\mathbb{S}^{\nu} = \frac{S_{3333}}{e} T_2^+$, où T_2^+ désignerait la matrice de Toeplitz de paramètre 2. Justement, ce cas particulier est traité dans [Meurant, 1990] : la décroissance des termes extra-diagonaux y est un peu plus lente, mais l'expérience numérique prouve que leurs annulations n'ont que peu d'effet sur le comportement global de la structure.

B.2.3 Modèle condensé L-LS0 par l'utilisation d'une intégration approchée

Comme pour le modèle L-LS1, nous pouvons utiliser une intégration approchée dans le calcul de l'énergie complémentaire, afin de rendre la matrice de souplesse, par construction, diagonale par bloc. Le champ de contrainte de cisaillement $\sigma_{\alpha 3}$ est ici affine. Par conséquent, nous utilisons une intégration au moyen de la méthode des trapèzes, afin de calculer : et w_{ν}^{*i} , et w_{τ}^{*i} .

$$\begin{aligned} w_{\tau}^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} 4 \sigma_{\alpha 3}^{i,3D} \sigma_{\gamma 3}^{i,3D}(x, y, z) 2 S_{\alpha 3\gamma 3}^i dz \approx e^i S_{\alpha 3\gamma 3}^i \left(\tau_{\alpha 3}^{i,i+1} \tau_{\gamma 3}^{i,i+1} + \tau_{\alpha 3}^{i-1,i} \tau_{\gamma 3}^{i-1,i} \right) \\ w_{\nu}^{*i} &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{2} (\sigma_{33}^{i,3D}(x, y, z))^2 S_{3333}^i dz \approx \frac{e^i S_{3333}^i}{4} ((\nu^{i,i+1})^2 + (\nu^{i-1,i})^2) \end{aligned}$$

La matrice de souplesse généralisée condensée d'en déduit alors simplement :

$$[\mathbb{S}]_{L-LS0}^{\text{lumped}} = \begin{pmatrix} [\mathbb{S}^K] & & \\ & [\mathbb{S}_{\text{lumped}}^{\nu}] & \\ & & [\mathbb{S}_{\text{lumped}}^{\tau}] \end{pmatrix}$$

avec $[\mathbb{S}_{\text{lumped}}^{\tau}]$ une matrice diagonale par blocs, chacun de taille 2×2 :

$$[\mathbb{S}_{\text{lumped}}^{\tau}] = \begin{pmatrix} \frac{e^1 \mathbb{S}_{cis}^1 + e^2 \mathbb{S}_{cis}^2}{2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{e^{n-1} \mathbb{S}_{cis}^{n-1} + e^n \mathbb{S}_{cis}^n}{2} & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbb{S}_{cis}^k = \begin{pmatrix} S_{44}^k & S_{45}^k \\ S_{45}^k & S_{55}^k \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

et $[\mathbb{S}_{\text{lumped}}^{\nu}] = \text{diag} \left(\frac{e^1 S_{3333}^1 + e^2 S_{3333}^2}{2}, \dots, \frac{e^{n-1} S_{3333}^{n-1} + e^n S_{3333}^n}{2} \right)$ une simple matrice diagonale.

Le modèle construit ici est particulièrement simple et appelle à sa confrontation aux résultats expérimentaux de flexion et de traction. Son nombre de degrés de liberté plus restreint, ainsi que sa largeur de bande contenue, en font un excellent candidat à la simulation de composites possédant un nombre élevé de plis physiques.

B.2.4 Le modèle $M4 - 2n + 1m$

Ce dernier modèle a connu un certain succès d'emploi par le passé, et fait l'objet de plusieurs articles : [Chabot, 1997, Diaz and Caron, 2006]. Sa simplicité a permis de mettre à jour des solutions analytiques dans plusieurs cas d'étude.

Postulat B.2.3 du modèle $M4 - 2n + 1m$: Condensation de l'effort d'arrachement.

Afin de faire jouer un rôle symétrique aux conditions aux limites en efforts, nous sommes (B.6) de $k = 1$ à $i - 1$ pour en déduire $\nu^{i-1,i}$ puis de $i + 1$ à n pour trouver $\nu^{i,i+1}$:

$$\nu^{i-1,i}(x, y) = -T_3^-(x, y) - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j})(x, y) \right] \quad (\text{B.32a})$$

$$\nu^{i,i+1}(x, y) = T_3^+(x, y) + \sum_{j=i+1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j})(x, y) \right] \quad (\text{B.32b})$$

Le champ de contrainte devient par conséquent $\sigma_{\alpha j}^{i,3D M4-2n+1m} = \sigma_{\alpha j}^{i,3D SCLS0}$ et :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{i,3D M4-2n+1m} &= \frac{1}{2} \left[T_3^+ + \sum_{j=i+1}^n \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) - T_3^- - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) \right] P_0^i(z) \\ &+ \frac{e^i}{12} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})] P_0^i(z) \\ &+ \frac{1}{2} \left[T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) \right] - \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right] P_1^i(z) \\ &+ \frac{e^i}{12} [\operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i})] P_2^i(z) \end{aligned}$$

Ce champ de contrainte mène à $2n + 1$ équations d'équilibre :

$$\underline{0} = \underline{\operatorname{div}}(\underline{N}^i) + \underline{\tau}^{i,i+1} - \underline{\tau}^{i-1,i} \quad 0 = T_3^+ + T_3^- + \sum_{i=1}^n \left[\frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right]$$

dont la formulation faible s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} [N_{\alpha\beta,\beta}^i - (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i})](x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \, d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[T_3^+ + T_3^- + \sum_{j=1}^n \left[\frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{j,j+1} + \underline{\tau}^{j-1,j}) \right] \right] (x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_3 \, dz \, d\omega \end{aligned}$$

Les déplacements généralisés sont les mêmes que dans le modèle $M4 - 2n + 1P$:

$$U_{\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} u_{\alpha} \, dz \quad W_3 = \sum_{i=1}^n U_3^i$$

D'où, après intégration par parties :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j + \left(\frac{e^{j+1}}{2} + \frac{e^j}{2} \right) W_{3,\alpha}$$

Toutes les déformations généralisées associées aux moments membranaires sont égales.

Postulat B.2.4 Négligeabilité de l'énergie complémentaire associée à l'effort ν . Afin de ne pas faire intervenir de dérivées dans l'énergie complémentaire, nous négligeons complètement l'énergie associée à l'effort d'arrachement ν . Cela revient en quelque sorte à considérer la plaque infiniment rigide dans la direction 3.

Par conséquent nous postulons que $w_\nu^{*i} \ll w_K^{*i}, w_\tau^{*i}$ et $w_c^{*i} \ll w_K^{*i}, w_\tau^{*i}$. La minimisation de l'énergie complémentaire nous donne alors les lois de comportement simplifiées suivantes :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial N_{\alpha\beta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\gamma\delta}^i$$

$$D_\alpha^{j,j+1} = \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial \tau_\alpha^{j,j+1}} = \frac{1}{3} \left(-e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j \tau_\gamma^{j-1,j} + (e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1}) \tau_\gamma^{j,j+1} - e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1} \tau_\gamma^{j+1,j+2} \right)$$

Le modèle $M4 - 2n + 1m$ possède le même nombre de degrés de libertés que le modèle $M4 - 2n + 1P$. Cependant, il est plus opérationnel dans la mesure où le nombre de déformations et de contraintes généralisées y est plus faible.

B.3 Homogénéisation de plusieurs plis

Les développements auxquels nous venons de nous livrer, ouvrent de remarquables perspectives afin d'enrichir progressivement la modélisation d'un stratifié, ou à l'inverse la simplifier. En effet, nous pouvons utiliser les différents modèles présentés dans ce chapitre, pour représenter le multi-couche, et dans le plan et dans l'épaisseur, avec des degrés de précision variés.

Le recollement dans le plan de plusieurs modèles au moyen des méthodes type Arlequin ([Dhia, 1998, Hu et al., 2008, Rateau, 2003]) est tout à fait envisageable, les transitions entre les zones pouvant se faire via une pondération astucieuse des différents modèles. Toutefois, cette perspective n'a pas été explorée ici.

Sont concevables encore, des méthodes mixtes dans la profondeur du pli via des recollements de modèles. Prenons l'exemple de la figure B.2 [p. 183], si nous considérons que certains groupements de strates du multicouche ne présentent pas d'intérêt majeur à l'étude, nous pouvons choisir de les représenter à l'aide d'un modèle plus pauvre. L'idée peut même être poussée à l'extrême, en choisissant de représenter tout un bloc via le modèle de Kirchhoff-Love multicouche, comme dans la sous-section B.1.5 [p. 172]. Alors une grande partie des champs sera floutée et ne seront retenus que trois degrés de libertés globaux, pour représenter l'empilement. Cette idée est présentée sur la figure B.2 [p. 183] : là, dans les zone 1 et 3, est considéré un champ de contrainte de type KL (B.13)–(B.14). Ce champ est statiquement admissible, et les lois de comportement associées obtenues en supposant que l'énergie complémentaire ne dépend que de la partie plane du champ de contrainte 3D. Ensuite, dans la partie 2, nous considérons un champs de contrainte plus riche, par exemple de type LS1. Notre minimisation s'effectuera alors en réalisant l'approximation suivante :

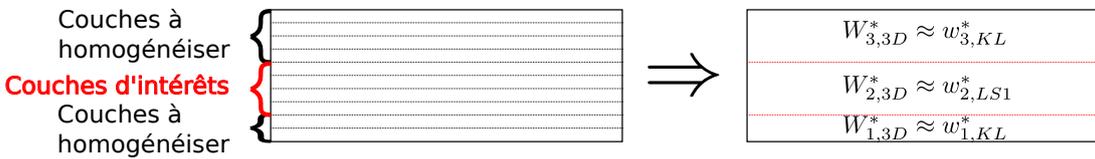


FIGURE B.2 – Homogénéisation d'un pli

$$W_{3D}^* = W_{1,KL}^* + W_{3,KL}^* + W_{2,LS1}^*$$

En toute rigueur, tout le développement de cette section ne relève donc pas à proprement parler d'homogénéisation, c'est à dire que nous ne représentons par le stratifié à l'aide d'un matériau dont les propriétés équivalentes seraient astucieusement choisies. Nous préférons simplement représenter le stratifié par des modèles de complexités variables afin de capter avec une certaine précision les phénomènes mécaniques.

B.3.1 Illustration sur un exemple simple

Reprenons l'exemple illustré à la figure B.2 [p. 183] de deux modèles de Kirchhoff-Love, encadrant un modèle plus complexe de type LS1. Supposons que les couches en soient numérotées de 1 à n avec la subdivision suivante : Kirchhoff-Love de 1 à p puis de $q + 1$ à n , modèle LS1 de $p + 1$ à q . La forme faible, en postulant les champs de contrainte adéquats et en concaténant (B.17), s'écrira :

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{\omega} \underline{N}^- : \underline{\varepsilon}^- + \underline{M}^- : \underline{\chi}^- d\omega - (\tau_{\alpha}^{p,p+1} + T_{\alpha}^-) \cdot W_{\alpha}^- + \left(\frac{e^-}{2} (\tau_{\alpha,\alpha}^{p,p+1} - T_{\alpha,\alpha}^-) + \nu^{p,p+1} + T_3^- \right) W_3^- d\omega \\
 & + \int_{\omega} \underline{N}^+ : \underline{\varepsilon}^+ + \underline{M}^+ : \underline{\chi}^+ d\omega - (\tau_{\alpha}^{q,q+1} + T_{\alpha}^+) \cdot W_{\alpha}^+ + \left(\frac{e^+}{2} (T_{\alpha,\alpha}^+ - \tau_{\alpha,\alpha}^{q,q+1}) + \nu^{q,q+1} + T_3^+ \right) W_3^+ d\omega \\
 & + \int_{\omega} \sum_{i=p+1}^q \underline{N}^i : \underline{\varepsilon}^i + \underline{M}^i : \underline{\chi}^i + \underline{Q}^i \cdot \underline{\gamma}^i + \sum_{j=p+1}^{q-1} \underline{T}^{j,j+1} \cdot \underline{D}^{j,j+1} + \nu^{j,j+1} D_{\nu}^{j,j+1} d\omega \\
 & - \int_{\omega} \tau_{\alpha}^{q,q+1} \left(U_{\alpha}^q + \frac{e^q}{2} \Phi_{\alpha}^q \right) + \tau_{\alpha}^{p,p+1} \left(U_{\alpha}^{p+1} - \frac{e^{p+1}}{2} \Phi_{\alpha}^{p+1} \right) + \nu^{q,q+1} U_3^q + \nu^{p,p+1} U_3^{p+1} d\omega
 \end{aligned}$$

Les champs avec les exposants notés \pm sont relatifs aux modèles de Kirchhoff Love dans la plaque du dessous (resp du dessus). La stationnarité de l'énergie complémentaire approchée par rapport aux contraintes généralisées induit les lois de comportement en souplesse. Dans les parties « purement LS1 » ou purement « KL » ces lois sont immédiates. La nouveauté tient aux conditions de raccord entre les modèles. Nous avons par exemple, pour la déformation généralisée $D_{\alpha}^{p,p+1}$ associée à l'effort d'interface en cisaillement entre la plaque du bas et celle du milieu :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha}^{p,p+1} &= U_{\alpha}^{p+1} - W_{\alpha}^- - \frac{e^{p+1}}{2} \phi_{\alpha}^{p+1} - \frac{e^p}{2} W_{3,\alpha}^{p+1} \\
 D_{\alpha}^{p,p+1} &= \frac{\partial w_{3D}^*}{\partial \tau_{\alpha}^{p,p+1}} = -\frac{2}{5} S_{p+1}^{\alpha 3 \gamma 3} Q_{\gamma}^{p+1} + \frac{8}{15} e^{p+1} S_{p+1}^{\alpha 3 \gamma 3} \tau_{\gamma}^{p,p+1} - \frac{2}{15} e^{p+1} S_1^{\alpha 3 \gamma 3} \tau_{\gamma}^{p+1,p+2}
 \end{aligned}$$

Cette loi est obtenue en remarquant que seul le LS1 accorde une contribution énergétique aux efforts aux interfaces $p, p + 1$ et $q, q + 1$. Par conséquent les souplesses aux interfaces $p, p + 1$ et $q, q + 1$ sont identiques à celles avec utilisation des multiplicateurs de Lagrange comme déjà évoqué dans le premier chapitre, à l'équation (1.35).

Rien ne nous empêche, *a priori*, d'intercaler d'autre modèles qui réalisent une transition plus douce, car les modèles trop simples tendent à artificiellement rigidifier la structure. L'intérêt majeur de la méthode présentée ici tient à ce qu'elle s'affranchit de toute méthode de recollement de maillage complexe. Ici, un unique maillage 2D suffit.

D'autres raccords sont à envisager concernant la loi de comportement de l'interface. En effet, la partie inférieure ne contribue en aucune façon à la souplesse d'interface, de sorte que l'interface pourra sembler trop raide en première estimation. Ceci devra être vérifié, et éventuellement, soit l'on ajoutera de manière ad hoc une souplesse induite par la plaque de Love Kirchhoff du dessous, soit on éloignera un peu la zone recollée par la procédure de Kirchhoff, en adjoignant quelques couches « tampon » supplémentaires dans le seul but de lisser un peu les variations des champs.

En bref

- ★ Il revient au modélisateur, suivant son objectif et son intuition, de choisir parmi les différents modèles évoqués dans cette annexe. Le modèle SCLS1 s'affirme résolument comme le modèle multiparticulaire le plus consistant, autant que le plus gourmand en terme de temps de calculs. Une application industrielle suppose un compromis entre la richesse du modèle et son efficacité calculatoire, pour cela elle doit prendre en compte la grandeur d'intérêt, et évidemment les éventuelles limites du modèle retenu. Ainsi par exemple, il serait peu judicieux, bien que possible, d'utiliser le modèle $M4 - 2n + 1m$ pour analyser les contraintes d'arrachement entre deux couches, tandis que choisir le modèle SCLS1 pour prédire le mouvement d'une plaque mince isotrope serait absurde.
- ★ Les modèles imbriqués se déduisent très simplement les uns des autres. Si nous avons fait le choix dans cet ouvrage, de concentrer nos efforts de recherche sur le SCLS1, le LS1 et le L-LS1, il sera pareillement loisible au lecteur de dériver les notions d'inertie ou d'endommagement, suivant la démarche systématique présentée, afin d'obtenir leur pendant pour les modèles LS1 enrichi, LS0, $M4 - 2n + 1m$ etc. . .
- ★ Si une partie du stratifié, présente peu d'intérêt à l'étude, nous pouvons simplifier la résolution en attribuant à cette portion un modèle plus pauvre. Dans ce cas, nous postulons un champ des contraintes faisant intervenir un nombre d'efforts généralisés contenu, puis nous négligeons les termes pathologiques dans le calcul de l'énergie complémentaire. Le modèle mécanique qui en résulte revient alors à la superposition, *dans l'épaisseur*, de plusieurs modèles de plaques multiparticulaires aux précisions variées.



Déformation uni-axiale : solutions analytiques

Introduction

L'étude d'une barre de rigidité c , soumise à une déformation ε et une contrainte σ toutes deux généralisées est riche d'enseignement. Cette expérience peut représenter l'arrachement d'une interface initialement saine, ou encore la rupture d'un pli soumis à une extension dans le sens fibre, ou matrice.

L'ambition de ce chapitre sera de proposer une résolution générale, et d'en éclairer les applications potentielles aux essais de délaminage ainsi que de ruine intra-laminaire. La rupture de cette barre sera qualifiée, comme précédemment, par la donnée de deux quantités :

1. une énergie élastique, dépendant d'une fonction de dégradation notée $g(d)$:

$$\psi_{el}^\omega(d) = \frac{1}{2}g(d)c\varepsilon^2 \quad (C.1)$$

2. une densité d'énergie de fissuration notée sous forme générique :

$$\varphi(d) = a(w(d) + b\nabla d \cdot \nabla d) \quad (C.2)$$

La solution du problème élasto-endommageable minimise la fonctionnelle énergie totale donnée par :

$$\mathcal{E}(\underline{u}, d) = \int_{\omega} \psi_{el}^\omega(\underline{u}, d) + \varphi(d) \, d\omega - \mathcal{W}_{\text{ext}}(\underline{u}) \quad (C.3)$$

Nous supposons que la sollicitation s'effectue selon une direction notée x . La densité d'énergie de fissuration $\varphi(d)$, proposée ci-dessous, recouvre les deux « modèles » que nous allons étudier par la suite.

- En prenant $b = 0$, et $a = G_c$, nous retrouvons la forme usuelle donnée aux densités d'énergie de fissuration pour la mécanique de l'endommagement continu.
- En prenant $a = \frac{G_c}{c_0 \ell_0}$ et $b = \ell_0^2$, nous retrouverons les densités d'énergie de fissuration des approches par champs de phases.

La résolution présentée dans ce chapitre s'inspire largement de celle donnée par Wu et al. [2018], dont elle est le prolongement.

- * Dans un premier mouvement, section C.1 [p. 188], nous exhiberons les traits communs à nos modèles concernant l'étude de la rupture uniaxiale.
- * Puis, section C.2 [p. 188], nous étudierons plus en détail le cas particulier de la solution homogène.
- * Pour finir, section C.3 [p. 197], une synthèse des différents modèles appliqués au délaminage, soulignant leurs caractéristiques, forces et faiblesses respectives.

C.1 Solution analytique 1D

En exploitant la stationnarité de l'énergie totale (C.1) par rapport au champ d'endommagement, l'emploi des densités d'énergie (C.1)–(C.2) induit les équations du problème :

$$\sigma_{,x} = 0 \quad (\text{C.4a})$$

$$a(w'(d) - 2bd_{,xx}) = -\frac{1}{2}g'(d)c\varepsilon^2 \quad (\text{C.4b})$$

$$\sigma = g(d)c\varepsilon \quad (\text{C.4c})$$

Comme on peut le voir, le champ de contrainte $\sigma(x)$ est homogène le long de la barre. Pour faciliter les calculs, introduisons une fonction monotone croissante $\vartheta(d)$, telle que :

$$\vartheta(d) = \frac{1}{g(d)} - 1 \Rightarrow g(d) := \frac{1}{1 + \vartheta(d)}, \quad g'(d) = -g^2(d)\vartheta'(d) < 0 \quad (\text{C.5})$$

car $\vartheta'(d) = -\frac{g'(d)}{g^2(d)} > 0$. En remplaçant $g'(d)$ à l'aide de (C.5) dans la loi d'évolution (C.4b) et la relation de comportement (C.4c), nous trouvons :

$$a(w'(d) - 2bd_{,xx}) = \frac{1}{2}g^2(d)\vartheta'(d)c\varepsilon^2 \Leftrightarrow 2ac[w'(d) - 2bd_{,xx}] = \vartheta'(d)g^2(d)c^2\varepsilon^2$$

Ce qui nous donne l'équation, particulièrement compacte, reliant le champs de contrainte à l'état courant d'endommagement :

$$\sigma^2\vartheta'(d) - 2ca(w'(d) - 2bd_{,xx}) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Mais également l'expression de la déformation :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{g(d)c} = \frac{\sigma}{c}(1 + \vartheta(d)) \quad (\text{C.7})$$

Les lois précédentes sont très générales et n'incluent aucune hypothèse, mis à part la forme des expressions des densités d'énergie.

C.2 Résultats généraux pour une solution homogène

Hypothèse C.2.1 Solution homogène. *Considérons d'abord la solution homogène pour laquelle le champ de d'endommagement et le champ de déformation sont tous deux uniformes le long de la barre.*

Dans ce cas, $d_{,xx} = 0$, et l'équation pilote (C.6) devient :

$$\sigma^2\vartheta'(d) - 2caw'(d) = 0 \quad (\text{C.8})$$

ce qui nous donne l'expression de la contrainte σ et de la déformation ε , en vertu de (C.7) :

$$\sigma = \sqrt{2ca\frac{w'(d)}{\vartheta'(d)}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{c}\sqrt{-2ca\frac{w'(d)}{g'(d)}} \quad (\text{C.9})$$

Les résultats ci-dessus constituent la relation contrainte/déplacement (ou déformation) paramétrée par le champ d'endommagement d .

1. Si l'on suppose $w'(0) = 0$.
 - Si $g'(0) < 0$ (ou, de manière équivalente, $\vartheta'(0) > 0$) alors le critère d'endommagement est activé dès le début de la charge, et le champ d'endommagement d croît sans phase élastique initiale.
 - Si $g'(0) = \vartheta'(0) = 0$ alors il existe une phase élastique initiale.

Dans les deux cas, la contrainte atteint sa valeur maximale $\sigma(d_c)$ à la déformation $\varepsilon(d_c)$:

$$\sigma_c = \sqrt{2ca \frac{w'(d_c)}{\vartheta'(d_c)}} \quad \varepsilon_c = \frac{1}{c} \sqrt{-2ca \frac{w'(d_c)}{g'(d_c)}} \quad (\text{C.10})$$

L'endommagement critique d_c est obtenu en utilisant l'optimalité de $\sigma(d)$, ou de manière équivalente celle de $\sigma^2(d)$:

$$\sigma^2 = 2ca \frac{w'}{\vartheta'} \Rightarrow \frac{\partial \sigma^2}{\partial d}(d_c) = 2ca \frac{w''(d_c)\vartheta'(d_c) - w'(d_c)\vartheta''(d_c)}{(\vartheta'(d_c))^2} = 0 \quad (\text{C.11})$$

2. Sinon, si $w'(0) > 0$, existe une phase élastique initiale, dans laquelle le matériau demeure intact avec $d = 0$. La contrainte maximale σ_c , et la déformation correspondante ε_c , sont données par :

— pour $g'(0) < 0$ (ou, de manière équivalente, $\vartheta'(0) > 0$) :

$$\sigma_c = \sqrt{2ca \frac{w'(0)}{\vartheta'(0)}}, \quad \varepsilon_c = \sqrt{-2ca \frac{w'(0)}{g'(0)}} \quad (\text{C.12})$$

En effet partant d'un endommagement nul, l'inégalité d'évolution devient par saturation l'équation (C.8), lorsque la contrainte atteint la valeur donnée dans l'équation (C.12).

Nous détaillerons les résultats analytiques d'abord pour des fonctions caractéristiques génériques $w(d)$ et $g(d)$ (ou, de façon équivalente, $\vartheta(d)$), puis nous les appliquerons à plusieurs exemples particuliers fréquemment étudiés dans la littérature. La section va se scinder en deux parties :

- ★ La première C.2.1 concerne des densités d'énergie de fissuration quadratiques simples, couplées à des fonctions de dégradation g élémentaires puis élaborées.
- ★ La seconde partie C.2.3 étudie plus en profondeur une densité d'énergie de fissuration w enrichie, à deux paramètres, appariée à des fonctions g triviales.

C.2.1 Densité $w(d) = \xi d + (1 - \xi)d^2$

Hypothèse C.2.2 Fonction de fissuration. *Nous supposons dans tout ce paragraphe que la densité w est de la forme générique $w(d) = \xi d + (1 - \xi)d^2$ avec $\xi \in \mathbb{R}$.*

Dans ce cadre, la loi (C.11) permettant de déterminer d_c se simplifie. Le numérateur de la fraction (C.11) est en effet nul lorsque :

$$\begin{aligned} w''(d_c)\vartheta'(d_c) - w'(d_c)\vartheta''(d_c) &= 2\vartheta'(d_c) - 2d_c\vartheta''(d_c) \\ &= -2 \frac{g'(d_c)}{g^2(d_c)} + 2d_c \frac{g''(d_c)g^2(d_c) - 2(g'(d_c))^2 g(d_c)}{g^4(d_c)} \\ &= \frac{-2}{g^2(d_c)} \left[g'(d_c) - d_c \left(g''(d_c) - 2 \frac{(g'(d_c))^2}{g(d_c)} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'optimalité de la contrainte $\sigma(d)$ est donc satisfaite lorsque l'endommagement atteint la valeur critique d_c , déterminée par l'équation :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial d}(d_c) = 0 \rightarrow (g(d_c) \cdot g''(d_c) - 2(g'(d_c))^2) d_c = g'(d_c) \cdot g(d_c) \quad (\text{C.13})$$

Fonction de fissuration linéaire simple

Hypothèse C.2.3 Densité de fissuration linéaire. *Nous retenons tout d'abord la fonction de fissuration géométrique linéaire :*

$$w(d) = d \Rightarrow \xi = 1$$

Ce choix induit une partie élastique initiale, car il satisfait la condition du point 2 [p.189]

Fonction de dégradation linéaire $g(d) = 1 - d$ En remplaçant les expressions de g et de w , dans le critère d'évolution (C.4b), nous obtenons :

$$a - \frac{1}{2}c\varepsilon^2 = 0$$

Dès que $\frac{1}{2}c\varepsilon^2$ atteint la valeur a , $\dot{d} > 0$ avec une infinité de solutions. Il s'agit donc d'une évolution brutale de d jusqu'à 1. Ce modèle « 0-1 », tout ou rien, est donc caractérisé par une évolution élastique, à laquelle succède immédiatement une annulation de la contrainte σ . Le champ d'endommagement d et $\sigma(\varepsilon)$ s'expriment naturellement en introduisant la fonction de Heaviside :

$$d = \mathcal{H}\text{eav}\left(\frac{1}{2}c\varepsilon^2 - a\right) \quad \sigma(\varepsilon) = \mathcal{H}\text{eav}\left(a - \frac{1}{2}c\varepsilon^2\right)\varepsilon \quad (\text{C.14})$$

Fonction de dégradation quadratique $g(d) = (1 - d)^2$ Une phase élastique précède à nouveau le début de l'endommagement. L'évolution de d est conditionnée par :

$$a - (1 - d)c\varepsilon^2 = 0 \Leftrightarrow d = 1 - \frac{a}{c\varepsilon^2} \quad (\text{C.15})$$

avec la minoration toujours entendue $d \geq 0$. Dans ce cadre, la contrainte généralisée $\sigma(\varepsilon)$ est définie par morceaux :

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} c\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \sqrt{\frac{a}{c}} \\ \frac{a^2}{c\varepsilon^3} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Fonction de fissuration quadratique simple

Hypothèse C.2.4 Densité de fissuration quadratique. *Nous retenons tout d'abord la fonction de fissuration géométrique quadratique :*

$$w(d) = d^2 \Rightarrow \xi = 0$$

Plusieurs fonctions de dégradation $g(d)$ sont alors successivement choisies :

Fonction de dégradation linéaire $g(d) = 1 - d$ Il n'existe pas de phase élastique. L'endommagement d au cours de l'évolution est obtenu en remplaçant les expressions de g et de w dans (C.4b) :

$$\frac{1}{2}g'(d)c\varepsilon^2 + aw'(d) = 0 \Rightarrow d = \frac{c\varepsilon^2}{4a} \quad (\text{C.17})$$

L'endommagement critique est obtenu en résolvant (C.13) :

$$-2d_c = -(1 - d_c) \Rightarrow d_c = \frac{1}{3}$$

La fonction ϑ est ici égale à $\vartheta(d) = \frac{d}{1 - d}$, sa dérivée est $\vartheta'(d) = \frac{1}{(1 - d)^2}$, ce qui nous permet de déduire la contrainte et la déformation critique :

$$\vartheta'(d_c) = 9/4, \quad w'(d_c) = 2/3 \quad \Rightarrow \sigma_c = \sqrt{2ca \frac{2}{3} \frac{4}{9}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{ca}{3}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_c = \sqrt{\frac{4a}{3c}}$$

L'évolution de la contrainte généralisée σ , en fonction de l'état courant d'endommagement d , s'obtient par la combinaison de (C.4c) et (C.17) :

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \left(1 - \frac{c\varepsilon^2}{4a}\right)c\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq 2\sqrt{\frac{a}{c}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Fonction quadratique $g(d) = (1-d)^2$ Il n'existe pas de phase élastique. L'endommagement critique est obtenu en résolvant (C.13) :

$$(2(1-d_c)^2 - 8(1-d_c)^2) d_c = -2(1-d_c)^3 \Leftrightarrow d_c = \frac{1}{3}(1-d_c) \Leftrightarrow d_c = \frac{1}{4}$$

La fonction ϑ est ici égale à $\vartheta(d) = \frac{1-(1-d)^2}{(1-d)^2}$, sa dérivée est $\vartheta'(d) = \frac{2}{(1-d)^3}$. Nous en déduisons grâce à (C.10), l'expression de la contrainte ainsi que de la déformation critique :

$$\vartheta'(d_c) = 128/27, \quad w'(d_c) = 1/2 \Rightarrow \sigma_c = \frac{3}{16}\sqrt{6ca}, \quad \varepsilon_c = \sqrt{\frac{2a}{3c}}$$

La réponse globale correspondante est donnée à partir de l'équation (C.9) :

$$\sigma = \left(\frac{2a}{2a + c\varepsilon^2} \right)^2 c\varepsilon, \quad d = \frac{c\varepsilon^2}{2a + c\varepsilon^2} = 1 - \frac{2a}{2a + c\varepsilon^2} \quad (\text{C.19})$$

$w(d)$	$g(d)$	σ_c	ε_c	Nom
d^2	$(1-d)$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{ca}{3}}$	$\sqrt{\frac{4a}{3c}}$	-
d^2	$(1-d)^2$	$\frac{9}{16}\sqrt{\frac{2ca}{3}}$	$\sqrt{\frac{2a}{3c}}$	AT2
d	$(1-d)^2$	\sqrt{ca}	$\sqrt{\frac{a}{c}}$	AT1
d	$(1-d)$	$\sqrt{2ca}$	$\sqrt{\frac{2a}{c}}$	Heaviside

TABLE C.1 – Contrainte critique σ_c et déformation critique correspondante ε_c pour divers couples $(w(d)-g(d))$.

Fonction de fissuration géométrique mixte linéaire et quadratique

Une classe plus générale de modèles est obtenue, suivant les travaux de Wu [2017], en considérant les fonctions caractéristiques génériques :

$$w(d) = \xi d + (1-\xi)d^2 \quad (\text{C.20})$$

$$g(d) = \frac{(1-d)^p}{(1-d)^p + Q(d)}, \quad \vartheta(d) = \frac{Q(d)}{(1-d)^p} \quad (\text{C.21})$$

$Q(d)$ est une fonction polynomiale, sans terme constant, dont les coefficients sont :

$$Q(d) = a_1 d + a_1 a_2 d^2 + a_1 a_2 a_3 d^3 + \dots = a_1 d \cdot P(d)$$

$$P(d) = 1 + a_2 d + a_2 a_3 d^2 + \dots$$

où l'exposant $p > 0$, et les coefficients $a_1 > 0$, a_2, a_3, \dots , sont tous des paramètres à déterminer. Dans le cadre ci-dessus, $g'(0) < 0$ (ou, de manière équivalente, $\vartheta'(0) > 0$) et le matériau se comporte de manière élastique jusqu'à ce que la contrainte σ atteigne la valeur critique σ_c

$$\sigma_c = \sqrt{2ca \frac{\vartheta'(0)}{w'(0)}} = \sqrt{\frac{2\xi ca}{a_1}}$$

- Si le paramètre a_1 est fixé indépendamment de a , il s'ensuit que $\sigma_c \propto a^{1/2}$.
- A l'inverse, si la contrainte critique constante σ_c est considérée comme une propriété intrinsèque du matériau (c'est-à-dire une résistance à la rupture σ_c), le quotient a_1/a doit être fixé :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\xi ca}{a_1}} = \sigma_c \Rightarrow a_1/a = \frac{2\xi c}{\sigma_c^2}$$

Le modèle générique de Wu est très général, il permet par exemple de reproduire, la fonction de dégradation quadratique $g(d) = (1-d)^2$ précédente, en choisissant correctement les paramètres p , a_1 , a_2 et a_3 :

$$g(d) = (1-d)^2 \Rightarrow Q(d) = 2d - d^2, P(d) = 1 - \frac{1}{2}d$$

ou, de manière équivalente, $p = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ et $a_3 = 0$. Dans ce cas, la contrainte critique σ_c est donnée par :

$$\sigma_c = \begin{cases} \sqrt{ca} & w(d) = d \\ \sqrt{2ca} & w(d) = 2d - d^2 \end{cases}$$

En fonction des valeurs données aux autres paramètres a_2 et a_3 , différentes courbes d'adoucissement peuvent être modélisées, voir aussi [Wu, 2017]. Contrairement au paramètre a_1 qui est proportionnel à a , les coefficients a_2 et a_3 en sont indépendants, tout comme la fonction $P(d)$.

C.2.2 Rupture cohésive

Wu [2017] particularise la fonction de fissuration géométrique donnée dans l'équation (C.20) avec $\xi = 2$ et la fonction de dégradation énergétique donnée dans l'équation (C.21) avec $p \geq 2$:

$$w(d) = 2d - d^2 \quad \Rightarrow c_0 = \pi \quad (\text{C.22a})$$

$$g(d) = \frac{(1-d)^p}{(1-d)^p + Q(d)}, \quad p \geq 2 \text{ et } Q(d) = a_1 d (1 + a_2 d (1 + a_3 d)) \quad (\text{C.22b})$$

Le paramètre a_1 est fixé à partir d'une contrainte critique σ_c , intrinsèque au matériau :

$$a_1 = \frac{4ac}{\sigma_c^2}$$

Les autres paramètres a_2 et a_3 sont, eux, calibrés pour obtenir une courbe d'adoucissement cible :

- Courbe d'adoucissement linéaire :

$$p = 2, a_2 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_3 = 0$$

- Courbe d'adoucissement exponentiel :

$$p = \frac{5}{2}, a_2 = 2^{5/3} - 3 \text{ et } a_3 = 0$$

- Courbe d'adoucissement hyperbolique :

$$p = 4, a_2 = 2^{7/3} - 4.5 \text{ et } a_3 = 0$$

Pour l'étude de la ruine intra-laminaire, en plus des paramètres mentionnés ci-dessus, la constante de normalisation c_0 , dépendant de notre choix concernant la fonction $w(d)$, doit être précisée :

$$c_w = 4 \int_0^1 \sqrt{w(s)} ds = \int_0^1 \sqrt{2s - s^2} ds = \pi$$

Les modèles présentés dans cette partie ont pour point commun une densité d'énergie de fissuration quadratique $w(d)$ simple, associée à une grande variété de fonctions de dégradation énergétique $g(d)$. L'enjeu de la section à suivre est d'étudier le choix inverse : enrichir la fonction densité d'énergie de fissuration, tout en conservant une fonction de dégradation énergétique commune.

C.2.3 Densité d'énergie de fissuration de type « Traction–séparation »

Hypothèse C.2.5 Fonction de dégradation. *Dans toute cette section, nous ne considérons que des fonctions de dégradation simples, de la forme :*

$$g(d) = (1 - d)^p \quad (\text{C.23})$$

Hypothèse C.2.6 Densité d'énergie de fissuration de type « Traction–séparation ». *Nous étudions dans toute cette partie une densité d'énergie de fissuration, à deux paramètres, de la forme :*

$$w(d) = \frac{(\kappa - 1)v(d)}{\kappa - v(d)} \quad v(d) = d^q \text{ avec } q \in \{1, 2\} \quad (\text{C.24})$$

Remarquons d'emblée qu'à la limite $\kappa \rightarrow \infty$, la densité d'énergie de fissuration dégénère vers les modèles $w(d) = d$ ou $w(d) = d^2$ déjà présenté. L'ambition de cette section est de proposer la loi reliant le paramètre numérique κ au paramètre matériau σ_c . Comme nous allons le voir, cette relation dépend du modèle $\mathcal{T}^{p,q}$ employé, nous le rappellerons en notant : $\kappa^{\bullet,*}$. Lorsque les équations seront génériques et applicables à l'ensemble des modèles, le paramètre sera simplement noté κ .

Notation C.2.1 Paramètre α . *Dans la suite, le groupement $a\kappa(\kappa - 1)$ apparaîtra à de multiples reprises. Nous le noterons α . Il est entendu que le groupement α dépend de κ , lui-même propre au modèle, c'est pourquoi nous ajouterons l'exposant $\bullet,*$ le cas échéant, pour éviter toute ambiguïté : $\alpha^{\bullet,*} = ca\kappa^{\bullet,*}(\kappa^{\bullet,*} - 1)$.*

La dérivée de cette fonction de fissuration est :

$$w'(d) = \frac{(\kappa - 1)v'(d)(\kappa - v(d)) + v'(d)(\kappa - 1)v(d)}{(\kappa - v(d))^2} = \frac{\kappa(\kappa - 1)v'(d)}{(\kappa - v(d))^2}$$

Le critère d'endommagement, déduit de (C.4b), s'écrit sous forme générique :

$$-a \frac{\kappa(\kappa - 1)v'(d)}{(\kappa - v(d))^2} - \frac{1}{2}g'(d)c\varepsilon^2 \leq 0 \quad (\text{C.25})$$

Partant d'un état d'endommagement nul, ce critère s'écrit alors :

$$-g'(0)\frac{1}{2}c\varepsilon^2 - \frac{a\kappa(\kappa - 1)v'(0)}{(\kappa - v(0))^2} \leq 0$$

Deux cas se distinguent donc ici. Si $v'(0) \neq 0$, se produit alors une phase élastique. Dans le cas contraire, $v'(0) = 0$, l'endommagement évolue dès l'application d'une déformation ε non nulle.

Lors de l'évolution de l'endommagement, l'inégalité (C.25) est saturée ce qui donne :

$$-g'(d)\frac{1}{2}c\varepsilon^2 - \frac{a\kappa(\kappa - 1)v'(d)}{(\kappa - v(d))^2} = 0$$

La contrainte, fonction l'état courant d'endommagement, est d'après (C.9) :

$$\sigma = g(d)c\varepsilon = \sqrt{\frac{2ca}{g'(d)} \frac{\kappa(\kappa - 1)v'(d)}{(\kappa - v(d))^2}} \quad (\text{C.26})$$

Cas particulier de l'interpolation linéaire $v(d) = d$

Modèle $\mathcal{T}^{1,1}$ Avec interpolation linéaire de la rigidité, et dans le cas particulier où $v(d) = d$, le critère d'évolution (C.25) se résume à :

$$\frac{1}{2}c\varepsilon^2 - \frac{a\kappa^{1,1}(\kappa^{1,1} - 1)}{(\kappa^{1,1} - d)^2} \leq 0 \quad (\text{C.27})$$

Partant d'un état d'endommagement nul, nous observons une phase élastique qui se prolonge jusqu'à ce que la déformation ε atteigne la valeur critique ε_c saturant l'inégalité précédente : $\frac{1}{2}c\varepsilon_c^2 - \frac{a(\kappa^{1,1} - 1)}{\kappa^{1,1}} = 0$. Ceci met en lumière une contrainte critique $\sigma_c = c\varepsilon_c$, fonction de notre seconde inconnue $\kappa^{1,1}$:

$$\sigma_c^2 = c^2\varepsilon_c^2 = \frac{2ca(\kappa^{1,1} - 1)}{\kappa^{1,1}} \Rightarrow \kappa^{1,1} = \frac{2cG_c}{2cG_c - \sigma_c^2} = 1 + \frac{\sigma_c^2}{2cG_c - \sigma_c^2} \quad (\text{C.28})$$

Pour que notre problème soit bien posé, nous devons satisfaire la condition $\kappa^{1,1} > 1$ ou $\kappa^{1,1} < 0$. Une étude rapide de (C.28), nous enseigne que cela est toujours vérifié. En effet, soit $2cG_c - \sigma_c^2 > 0$ auquel cas $\kappa^{1,1} > 1$, soit $2cG_c - \sigma_c^2 < 0$ et alors $\kappa^{1,1} < 0$. Le paramètre $\kappa^{1,1}$ nous permettra donc de piloter la contrainte critique, identifiée sur un essai de traction uni-axiale, à laquelle s'amorce la ruine.

La contrainte critique σ_c , fonction de $\kappa^{1,1}$, est une fonction strictement croissante, σ_c est donc astreint à évoluer dans l'intervalle $[0, \sigma_{max}^{1,1}]$ dans lequel $\sigma_{max}^{1,1}$ désigne la contrainte maximale du modèle $\mathcal{M}^{1,1}$. Ceci est dû au fait que les modèles $\mathcal{T}^{\bullet,*}$ convergent vers les modèles $\mathcal{M}^{\bullet,*}$ lorsque le paramètre $\kappa \rightarrow \infty$

Lors de la phase de propagation, nous pouvons utiliser la loi (C.27) et en déduire la relation entre déformation et endommagement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c\varepsilon^2 - \frac{a\kappa(\kappa^{1,1} - 1)}{(\kappa^{1,1} - d)^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{ca\kappa^{1,1}(\kappa^{1,1} - 1)}{c^2(\kappa^{1,1} - d)^2} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{2a\alpha^{1,1}}}{c(\kappa^{1,1} - d)} \\ &\Leftrightarrow d = \kappa^{1,1} - \frac{\sqrt{2a\alpha^{1,1}}}{c\varepsilon} \end{aligned}$$

Dont nous déduisons la loi contrainte-déformation lors de l'endommagement :

$$\sigma = (1 - d)c\varepsilon = \left(1 - \kappa^{1,1} + \frac{\sqrt{2a\alpha^{1,1}}}{c\varepsilon}\right)c\varepsilon = (1 - \kappa^{1,1})c\varepsilon + \sqrt{2a\alpha^{1,1}}$$

C'est une relation affine dont la pente est égale à :

$$\Delta^{1,1} = -c(\kappa^{1,1} - 1) \quad (\text{C.29})$$

La déformation finale, associée à l'endommagement complet $d = 1$, a pour valeur :

$$\varepsilon_f^{1,1} = \frac{\sqrt{2a\alpha^{1,1}}}{c(\kappa^{1,1} - 1)} = \sqrt{\frac{2a\kappa^{1,1}}{c(\kappa^{1,1} - 1)}} \quad (\text{C.30})$$

Nous pouvons utiliser l'expression de $\gamma_c^{1,1}$ (C.28) afin de réécrire la fonction de fissuration (C.24), dépendant uniquement de paramètres matériaux bien identifiés :

$$w^{1,1}(d) = \frac{(\kappa^{1,1} - 1)d}{\kappa^{1,1} - d} \text{ avec } \kappa^{1,1} \text{ donné par (C.28)} \quad (\text{C.31})$$

Modèle $\mathcal{T}^{2,1}$ Par le même raisonnement, si nous choisissons à présent une interpolation de degré 2 sur la rigidité, c'est-à-dire $g(d) = (1 - d)^2$, le critère d'évolution (C.25) se résume à :

$$(1 - d)c\varepsilon^2 - \frac{a\kappa^{2,1}(\kappa^{2,1} - 1)}{(\kappa^{2,1} - d)^2} \leq 0 \quad (\text{C.32})$$

Partant d'un état d'endommagement nul, nous observons alors de nouveau une phase élastique qui s'achève lorsque la déformation ε atteint la valeur critique $\varepsilon_c^{2,1}$ saturant l'inégalité

précédente : $c(\varepsilon_c^{2,1})^2 - \frac{a(\kappa^{2,1} - 1)}{\kappa^{2,1}} = 0$. Ceci met en lumière une contrainte critique $\sigma_c = c\varepsilon_c^{2,1}$, fonction de notre seconde inconnue $\kappa^{2,1}$:

$$\sigma_c^2 = c^2\varepsilon_c^2 = \frac{ca(\kappa^{2,1} - 1)}{\kappa^{2,1}} \Rightarrow \kappa^{2,1} = \frac{cG_c}{cG_c - \sigma_c^2} = 1 + \frac{\sigma_c^2}{cG_c - \sigma_c^2} \quad (\text{C.33})$$

Détermination du paramètre κ par une approche semi-analytique

En dehors du cas particulier de l'interpolation linéaire $v(d)$, qui fournissait naturellement une estimation de la contrainte critique d'initiation en fin de phase élastique, le choix de l'interpolation quadratique $v(d) = d^2$ ne permet pas de déterminer aussi simplement le lien entre κ et σ_c . L'approche ici retenue pour déterminer le paramètre κ consiste en une résolution semi-analytique du problème, en cel que où nous allons successivement :

1. déterminer la valeur de l'endommagement noté d_c , pour laquelle la contrainte est maximale.
2. Puis recalcr le paramètre κ , pour que la contrainte maximale en d_c soit égale à la contrainte critique σ_c .

L'approche est *semi-analytique*, car ce recalage implique la résolution d'un problème non linéaire, scalaire, résolu numériquement.

Dans la suite, nous ne considérons que le cas $v(d) = d^2$ induisant l'absence de phase élastique. Dans ce cadre, la contrainte critique est $\sigma_c = \sigma(d_c)$, dans lequel d_c est défini via $\sigma'(d_c) = 0$. Pour trouver d_c , nous caractérisons l'extrémalité de σ^2 :

$$\begin{aligned} \sigma^2(d) &= \frac{-2\alpha g^2(d)v'(d)}{g'(d)(\kappa - v(d))^2} \text{ avec } \alpha = ca\kappa(\kappa - 1) \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= -2\alpha \left(\frac{g(d)(2g'(d)v'(d) + g(d)v''(d)) [g'(d)(\kappa - v(d))^2]}{[g'(d)(\kappa - v(d))^2]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2(d)v'(d)(\kappa - v(d)) [g''(d)(\kappa - v(d)) - 2g'(d)v'(d)]}{[g'(d)(\kappa - v(d))^2]^2} \right) \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= -\frac{2\alpha g(\kappa - v)}{[g'(\kappa - v)]^2} ((2g'v' + gv'')g'(\kappa - v) - [gv'(g''(\kappa - v) - 2g'v')]) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

L'extrémalité de la contrainte d'arrachement est à chercher aux valeurs d'endommagement d_c annulant la quantité :

$$[(2g'v' + gv'')g'(\kappa - v)] - [gv'(g''(\kappa - v) - 2g'v')]$$

Les cas particulier $g(d) = 1 - d$ et $g(d) = (1 - d)^2$ vont être à présent examinés plus en détail.

Cas $\mathcal{T}^{1,2}$ Nous particularisons l'équation (C.34) aux interpolations $g(d) = 1 - d$, $v(d) = d^2$.

$$\begin{aligned} \sigma^2(d) &= \frac{4\alpha^{1,2}(1-d)^2d}{(\kappa^{1,2} - d^2)^2} \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= 4\alpha^{1,2} \frac{[(1-d)((1-d) - 2d)] [(\kappa^{1,2} - d^2)^2] - [2(\kappa^{1,2} - d^2)(-2d)] [(1-d)^2d]}{(\kappa^{1,2} - d^2)^4} \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= 4\alpha^{1,2} \frac{(1-d)(\kappa^{1,2} - d^2) [(1-3d)(\kappa^{1,2} - d^2) + 4(1-d)d^2]}{(\kappa^{1,2} - d^2)^4} \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= 4\alpha^{1,2} \frac{(1-d)(\kappa^{1,2} - d^2) [-d^3 + d^2 - 3d\kappa^{1,2} + \kappa^{1,2}]}{(\kappa^{1,2} - d^2)^4} \end{aligned}$$

Le $d_c^{1,2}$ réalisant la stationnarité de la contrainte, est obtenu en résolvant l'équation du troisième ordre :

$$-d^3 + d^2 - 3d\kappa^{1,2} + \kappa^{1,2} = 0$$

Dont l'unique solution analytique réelle, notée $d_c^{1,2}$, est :

$$d_c^{1,2} = \frac{1 - \kappa^{1,2}}{\zeta^{1,2}} + \zeta^{1,2} + 1 \text{ avec } \zeta^{1,2} = \sqrt[3]{\sqrt{(\kappa^{1,2})^3 - 2(\kappa^{1,2})^2 + \kappa^{1,2}} - \kappa^{1,2} + 1} = \sqrt[3]{(\sqrt{\kappa^{1,2}} - 1)(\kappa^{1,2} - 1)} \quad (\text{C.35})$$

La contrainte maximale fonction $d_c^{1,2}$ est alors donnée par :

$$\sigma_c = \sigma(d_c^{1,2}) = \frac{1 - d_c^{1,2}}{\kappa^{1,2} - (d_c^{1,2})^2} \sqrt{4\alpha^{1,2} d_c^{1,2}} \quad (\text{C.36})$$

(C.36) est une équation non linéaire en $\kappa^{1,2}$ qui peut être résolue numériquement afin de trouver le $\kappa^{1,2}$ assurant que le pic de la contrainte d'arrachement σ soit exactement σ_c .

Numériquement, nous trouvons une nouvelle fois que la contrainte maximale est une fonction monotone croissante de $\kappa^{1,2}$. Pour trouver sa valeur maximale, nous étudions la valeur limite de $d_c^{1,2}$ lorsque $\kappa^{1,2} \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} d_c^{1,2} &= \frac{1 - \kappa^{1,2}}{\sqrt{\kappa^{1,2}} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}}\right) \left(1 - \frac{1}{\kappa^{1,2}}\right) \right]^{1/3}} + \sqrt{\kappa^{1,2}} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}}\right) \left(1 - \frac{1}{\kappa^{1,2}}\right) \right]^{1/3} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}} - \sqrt{\kappa^{1,2}} \right) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}} - \frac{1}{\kappa^{1,2}} + \frac{1}{(\kappa^{1,2})^{3/2}} \right]^{-1/3} + \sqrt{\kappa^{1,2}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}} - \frac{1}{\kappa^{1,2}} + \frac{1}{(\kappa^{1,2})^{3/2}} \right]^{1/3} + 1 \end{aligned}$$

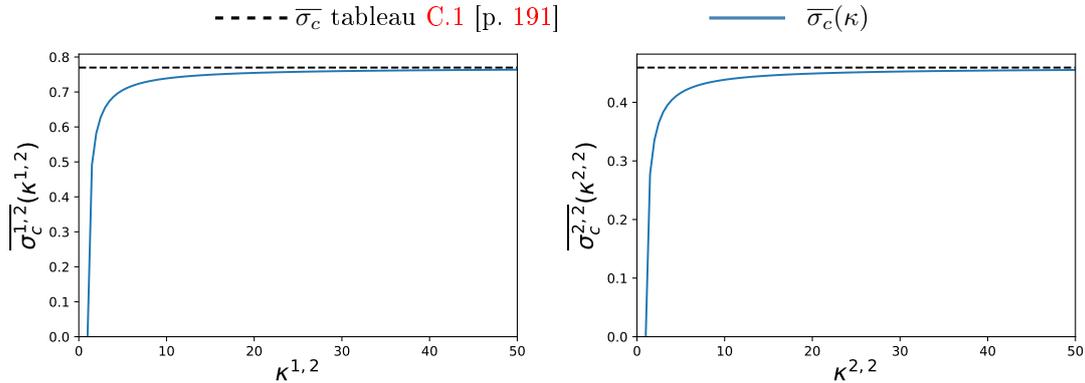
En posant $X = -\frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}} - \frac{1}{\kappa^{1,2}} + \frac{1}{(\kappa^{1,2})^{3/2}}$, nous trouvons à l'ordre le plus bas en $\frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}}$: $X \approx -\frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}}$ d'où :

$$d_c^{1,2} = \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa^{1,2}}} - \sqrt{\kappa^{1,2}} \right) \left[1 + \frac{1}{3\sqrt{\kappa^{1,2}}} \right] + \sqrt{\kappa^{1,2}} \left[1 - \frac{1}{3\sqrt{\kappa^{1,2}}} \right] + 1 = \frac{1}{3} + \dots$$

Dont nous déduisons la contrainte critique maximale théorique :

$$\lim_{\kappa^{1,2} \rightarrow \infty} \sigma_c^{1,2} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sqrt{ca}$$

Cette contrainte critique est, à nouveau, celle du modèle purement énergétique coïncidant. Cette convergence est illustrée à la figure C.1 [p. 196] où nous représentons la contrainte adimensionnée $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sqrt{ac}$.



(a) Contrainte critique adimensionnée $\bar{\sigma}_c^{1,2}$ en fonction du paramètre $\kappa^{1,2}$ (b) Contrainte critique adimensionnée $\bar{\sigma}_c^{2,2}$ en fonction du paramètre $\kappa^{2,2}$

FIGURE C.1 – Contrainte critique adimensionnée $\bar{\sigma}_c$ en fonction du paramètre κ pour les fonction $g(d) = 1 - d$ figure C.1a [p. 196] et $g(d) = (1 - d)^2$ figure C.1b [p. 196], $v(d) = d^2$

Cas $\mathcal{T}^{2,2}$ Nous particularisons la forme générale de la contrainte (C.26), aux interpolations $g(d) = (1-d)^2$, $v(d) = d^2$, $\vartheta'(d) = \frac{2}{(1-d)^3}$.

$$\begin{aligned}\sigma^2(d) &= \frac{2\alpha^{2,2}(1-d)^3 d}{(\kappa^{2,2} - d^2)^2} \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= 2\alpha^{2,2} \frac{[(1-d)^2((1-d) - 3d)] [(\kappa^{2,2} - d^2)^2] - [-4d(\kappa^{2,2} - d^2)] [(1-d)^3 d]}{(\kappa^{2,2} - d^2)^4} \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= 2\alpha^{2,2} \frac{(1-d)^2(\kappa^{2,2} - d^2) [(1-4d)(\kappa^{2,2} - d^2) + 4(1-d)d^2]}{(\kappa^{2,2} - d^2)^4} \\ \frac{d\sigma^2(d)}{dd} &= 2\alpha^{2,2} \frac{(1-d)^2(\kappa^{2,2} - d^2) [3d^2 - 4d\kappa^{2,2} + \kappa^{2,2}]}{(\kappa^{2,2} - d^2)^4}\end{aligned}$$

Nous en déduisons les deux solutions :

$$d_{\pm}^{2,2} = \frac{2\kappa^{2,2} \pm \sqrt{2\kappa^{2,2}(2\kappa^{2,2} - \frac{3}{2})}}{3}$$

Dont la racine $d_c^{2,2}$ correspond au premier maximum de la contrainte d'arrachement. La contrainte maximale, fonction de $d_c^{2,2}$, est alors :

$$\sigma_c^{2,2} = \sigma(d_c^{2,2}) = \frac{\sqrt{2\alpha^{2,2}(1-d_c^{2,2})^3 d_c^{2,2}}}{\left(\kappa^{2,2} - (d_c^{2,2})^2\right)^2} = \frac{1-d_c^{2,2}}{\kappa^{2,2} - (d_c^{2,2})^2} \sqrt{2\alpha^{2,2} d_c^{2,2} (1-d_c^{2,2})} \quad (\text{C.37})$$

Nous obtenons une nouvelle fois une équation non linéaire scalaire en $\kappa^{2,2}$ que l'on peut résoudre numériquement pour obtenir $\kappa^{2,2}$.

Numériquement, nous trouvons que la fonction $\sigma_c^{2,2}$ est une fonction croissante de $\kappa^{2,2}$. Sa valeur asymptotique lorsque $\kappa^{2,2} \rightarrow \infty$ est donnée en remarquant d'une part que :

$$\lim_{\kappa^{2,2} \rightarrow \infty} d_c^{2,2} = 1/4 \text{ et } \lim_{\kappa^{2,2} \rightarrow \infty} \alpha^{2,2} = ca (\kappa^{2,2})^2$$

donc (C.37) donne :

$$\lim_{\kappa^{2,2} \rightarrow \infty} \sigma_c^{2,2} = \lim_{\kappa^{2,2} \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4}}{\kappa^{2,2}} \sqrt{2ca \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{9}{16} \sqrt{\frac{2ca}{3}}$$

Nous trouvons donc que la contrainte critique maximale est bien celle obtenue via le « modèle purement énergétique ». Ceci était tout à fait prévisible, compte tenu de la convergence de notre modèle de traction séparation vers le modèle énergétique lorsque le paramètre $\kappa \rightarrow \infty$. Cette convergence est illustrée à la figure C.1b [p. 196].

La force de nos modèles de « traction-séparation » est donc ici de balayer toutes les contraintes critique possibles entre 0 et celles fournies par les modèles purement énergétiques. Le paramètre κ correspondant est obtenu en résolvant numériquement les équations (C.36)–(C.37) non linéaires (quelques dizaines d'itérations d'une procédure par dichotomie suffisent).

C.3 Application à l'étude du délaminage

L'ouverture en mode I, ou le cisaillement en mode II, d'une interface initialement saine peuvent s'assimiler à une expérience de traction uni-axiale sur une barre homogène aux propriétés mécaniques bien choisies.

La propagation d'une fissure peut être raisonnablement approchée par une approche énergétique pure. Cependant, la phase de nucléation se produit elle à un niveau de contrainte bien défini.

Pour illustrer notre propos, si l'on considère la nucléation d'une fissure en mode I, et si l'on retient pour cela un critère purement énergétique à un paramètre, la contrainte critique d'initiation est elle-même également fixée en fonction de la rigidité d'interface et du taux de restitution d'énergie critique par les relations du tableau C.1 [p. 191]. Relations dans lesquelles nous aurions remplacé c par la rigidité d'interface et a par le taux de restitution d'énergie critique G_c relatif au mode de sollicitation.

Si nous souhaitons pouvoir choisir indépendamment, l'énergie critique de fissuration, qui pilote la phase de propagation d'une part et la contrainte critique d'initiation, caractéristique de la nucléation de fissure d'autre part, nous devons logiquement considérer une énergie de fissuration à, au moins deux paramètres.

Notre étude précédente a permis d'établir que nous pouvions choisir entre deux grandes classes de modèles :

- soit les modèles dit $\mathcal{T}^{\bullet,*}$, détaillés à la sous-section C.2.3 [p. 193], pour lesquels les deux paramètres sont portés par la densité d'énergie de fissuration ;
- soit les modèles de zones cohésives de Wu et al. [2018] (voir aussi sous-section C.2.2 [p. 192]), pour lesquels la fonction de dégradation g est enrichie de sorte à introduire, à la fois contrainte critique d'initiation et variété de courbes d'adoucissement.

Par construction, les modèles \mathcal{T} ne peuvent pas s'accommoder de n'importe quelle contrainte critique d'initiation, mais seulement de celles comprises entre 0 et la valeur asymptotique du \mathcal{M} purement énergétique, dont les valeurs sont rappelées dans le tableau C.1 [p. 191].

Les modèles $\mathcal{T}^{\bullet,*}$ ne peuvent donc balayer qu'un spectre limité de contraintes critiques d'initiation, lequel demeure néanmoins largement suffisant pour les composites usuels. Toutefois, si la contrainte critique sortait du champ des possibles, nous devrions employer en place des précédents le modèle de Wu, certes plus lourd, mais qui, lui, permettrait de simuler une contrainte critique d'initiation quelconque.

C.4 Extension du critère elliptique

Nous présentons ici une extension du critère elliptique figurant dans le chapitre consacré au délaminage. Pour cela, nous postulons que l'énergie élastique s'exprime sous la forme :

$$\psi_{el}^{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d_1, d_2) = \frac{1}{2} (g(d_1)c_1\varepsilon_1^2 + g(d_2)c_2\varepsilon_2^2) \quad (C.38)$$

Les deux contraintes généralisées σ_1 , σ_2 s'obtiennent en exploitant la stationnarité de l'énergie élastique, par rapport aux variables de déformation :

$$\sigma_1 = g(d_1)c_1\varepsilon_1 \text{ et } \sigma_2 = g(d_2)c_2\varepsilon_2 \quad (C.39)$$

Nous supposons par ailleurs l'existence d'une densité d'énergie de fissuration couplant les deux variables d'endommagement d_1 et d_2 . Par analogie avec la densité d'énergie de fissuration couplée du délaminage, et celles utilisées dans la théorie *phase-field*, nous l'écrivons sous forme générique :

$$\varphi(d_1, d_2) = \left((a_1 (w(d_1) + b_1 \nabla d_1 \cdot \nabla d_1))^\beta + (a_2 (w(d_2) + b_2 \nabla d_2 \cdot \nabla d_2))^\beta \right)^{1/\beta} \quad (C.40)$$

Limitons nous tout d'abord aux solutions homogènes, correspondant à des endommagements spatialement constants, et annulant par conséquent les termes en gradient. Par un raisonnement similaire à celui conduit au chapitre 3 [p. 69], nous obtenons les majorations des forces motrices thermodynamiques Y_1 et Y_2 associées aux taux \dot{d}_1 et \dot{d}_2 :

$$Y_1 \leq (a_1)^\beta w'(d_1) w_1(d_1)^{\beta-1} S^{1/\beta-1} \\ Y_2 \leq (a_2)^\beta w'(d_2) w_2(d_2)^{\beta-1} S^{1/\beta-1} \text{ avec } S = (a_1 w(d_1))^\beta + (a_2 w_2(d_2))^\beta$$

qui, une fois combinées, induisent le critère elliptique généralisé suivant :

$$\left(\frac{Y_1/w'_1(d_1)}{a_1} \right)^\gamma + \left(\frac{Y_2/w'_2(d_2)}{a_2} \right)^\gamma \leq 1 \text{ avec } \gamma = \beta/(\beta-1) \quad (C.41)$$

Appliqué à $a = G_c$, comme c'était le cas pour le délaminage, ce critère elliptique est de nature énergétique. En introduisant plus classiquement les taux de restitution en énergie, il s'écrit :

$$\left(\frac{G_I}{G_{Ic}}\right)^\gamma + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIc}}\right)^\gamma \leq 1$$

Ici, les variables « 1 et 2 » correspondent à l'arrachement ν et au cisaillement à l'interface τ .

Si nous nous plaçons dans le cadre de modélisation de la ruine intra-laminaire, alors $a = \frac{G_c}{c_0 \ell_0}$, le critère elliptique (C.41) devient :

$$\left(\frac{Y_1/w'_1(d_1)c_0\ell_0}{G_{c1}}\right)^\gamma + \left(\frac{Y_2/w'_2(d_2)c_0\ell_0}{G_{c1}}\right)^\gamma \leq 1 \text{ avec } \gamma = \beta/(\beta - 1)$$

L'interprétation énergétique n'est ici plus du tout évidente.

En revanche, les forces thermodynamique Y_1, Y_2 peuvent se ré-exprimer en fonction des contraintes généralisées σ_1 et σ_2 :

$$Y_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_1} = -\frac{1}{2}g'(d_1)c_1\varepsilon_1^2 = -g'(d_1)\frac{\sigma_1^2}{2g^2(d_1)c_1} = \frac{\vartheta'(d_1)\sigma_1}{2c_1} \quad (\text{C.42})$$

Le critère (C.42) se réécrit :

$$\left(\frac{\vartheta'(d_1)\sigma_1}{2c_1a_1w'_1(d_1)}\right)^\gamma + \left(\frac{\vartheta'(d_2)\sigma_2}{2c_2a_2w'_2(d_2)}\right)^\gamma \leq 1 \text{ avec } \gamma = \beta/(\beta - 1)$$

Si nous supposons que les équations d'équilibre portant sur nos contraintes généralisées sont de la forme $\sigma'_i = 0$, alors, en vertu de la relation (C.10) donnant l'expression analytique de la contrainte critique d'initiation, identifiée sur un essai uni-axial, l'inégalité précédente s'interprète comme :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c^I}\right)^\gamma + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c^II}\right)^\gamma \leq 1 \text{ avec } \gamma = \beta/(\beta - 1)$$

Le critère elliptique, dans le cadre de la rupture intra-laminaire porte donc naturellement sur les contraintes.

L'utilisation de la densité d'énergie intra-laminaire couplée permettrait la distinction des contributions des modes I et II pour la fissuration matricielle. Précédemment, nous avons représenté cette dégradation par une unique variable d'endommagement, abattant tout à la fois : la traction dans le plan, c'est à dire le tenseur des efforts membranaires \mathbf{N} , et les efforts de cisaillement hors plan intralaminaire $\boldsymbol{\tau}_0$.

Nous gardons en mémoire qu'il est possible de dédoubler les variables d'endommagement transverse, en posant par exemple pour chaque pli :

- d_T^I , impactant la partie normale σ_{TT} de \mathbf{N} , associée à une contrainte critique à la rupture $\sigma_c^{T,I}$ et G_{Tc}^I ,
- d_T^{II} , impactant $\boldsymbol{\tau}_0$ et la partie en cisaillement σ_{LT} de \mathbf{N} , associée à une contrainte critique à la rupture $\sigma_c^{T,II}$ et G_{Tc}^{II} ,

Cet alourdissement du modèle pourra se révéler indispensable lors d'une sollicitation mixte en traction-cisaillement de la matrice.

En bref

- ★ Dans cette annexe, nous avons donné plusieurs solutions analytiques au le problème de la sollicitation uni-axiale. Nous en avons pris prétexte pour détailler deux approches distinctes qui établissent des lois de traction–séparation, c’est à dire des lois d’endommagement paramétrées par : une contrainte d’initiation et un taux de restitution d’énergie critique.
- ★ La première loi est ainsi induite dans un enrichissement de la fonction de dégradation g (C.22b), tout en maintenant la loi w « simple » (C.22a), il s’agit des modèles de Wu et al. [2018].
- ★ La seconde loi, opérant exactement l’inverse, conserve g simple (C.23), mais enrichit la fonction densité d’énergie de fissuration w (C.24). Cette seconde démarche souffre des limites inhérentes à sa formulation : la contrainte critique y est majorée par celle du modèle purement énergétique associé. Toutes les contraintes critiques entre 0 et la limite de la mécanique élastique linéaire de la rupture peuvent être balayées. Les paramètres numériques permettant d’obtenir la contrainte critique désirée sont donnés, suivant le modèle employé, par des relations non linéaires, résolues numériquement (C.36), (C.37).



Méthodologie générale d'obtention de solutions analytiques dans un cas unidimensionnel

Introduction

À cause de la faible puissance des ordinateurs de l'époque, les scientifiques des années 1980 ont établi, puis consolidé de nombreuses solutions analytiques quelques peu tombées en désuétude face à la force brute de la méthode des éléments finis opérée sur une machine moderne. Pourtant, il est certain que ces solutions analytiques sont des gardes fous utiles, permettant de rigoureusement valider une démarche numérique.

Aussi, dans ce chapitre, présentons-nous un cadre général d'obtention de solutions analytiques, à destination des modèles LS1 et $M4 - 2n + 1m$, et pour des problèmes *plans*. Pour ce faire, nous considérons seulement des situations dans lesquelles une invariance dans la direction x permet de réduire l'étude au domaine Oyz . Il sera alors possible de trouver des solutions *semi analytiques*, dans la mesure où, la résolution complète du problème passera par une inversion linéaire non triviale, résolue numériquement. L'ambition ici est de fournir un cadre très général.

- ★ Section [D.1](#) [p. [201](#)], nous avancerons les conséquences communes de l'hypothèse plane aux différents modèles. Nous y détaillerons la structure générale de la recherche de solutions analytiques dans notre cadre multi-particulaire.
- ★ Section [D.2](#) [p. [202](#)], nous développerons une méthode systématique appliquée au modèle LS1 consistant.
- ★ Le modèle $M4 - 2n + 1m$ est le modèle le plus simple, théorie de Love-Kirchhoff exclue, des plaques multiparticulaires. Nous détaillerons dans la section [D.3](#) [p. [209](#)] la méthodologie générale dans le cadre de ce modèle.
- ★ La section [D.4](#) [p. [211](#)] illustrera notre routine de calcul sur l'essai de traction $0 - 90$ symétrique.
- ★ Enfin, la section [D.5](#) [p. [220](#)] tout entière sera consacrée à la résolution du problème différentiel matriciel posé par la méthode décrite précédemment aux sections [D.2](#) [p. [202](#)] et [D.3](#) [p. [209](#)]. Nous y rappellerons les stratégies de résolution de problèmes aux valeurs propres et leurs applications présentes.

D.1 Hypothèses générales de travail et conséquences sur les modèles à l'étude

Hypothèse D.1.1 Invariance dans la direction x . *Nous supposons donc dans ce qui suit que le problème est invariant dans la direction x . Ceci permet de réduire l'étude à une tranche située dans le plan Oyz , et partant, la dépendance spatiale de certains champs par rapport à la variable x .*

Hypothèse D.1.2 Inconnues de notre problèmes. *Nous choisissons de retenir les déplacements et les efforts généralisés comme inconnues principales du problème.*

Ces nombreuses inconnues sont reliées par autant d'équations que l'on peut scinder en deux sous-ensembles :

- le premier constitué d'équations algébriques linéaires, c'est à dire ne faisant pas intervenir de dérivées. Ces équations permettant, par substitution, de diminuer le nombre de champs principaux inconnus ;
- le second constitué d'équations différentielles linéaires du premier degré particulièrement simples, permettant d'écrire les équations du problème sous la forme :

$$\underline{f}'(y) = \underline{P} \cdot \underline{f}(y) + \underline{g} \quad (\text{D.1})$$

où $\underline{f}(y)$ est le vecteur dont les composantes sont les champs inconnus principaux (après élimination de certains champs à l'aide des équations algébriques). Ce système d'équations différentielles peut dans la plupart des situations se ramener à un système du second ordre portant sur un nombre plus faible de variables.

Par conséquent, nous pouvons *choisir* de résoudre notre problème par rapport à des inconnues principales, que nous utiliserons *a posteriori* pour reconstruire les autres champs.

Les sections suivantes partagent une structure commune, que nous précisons afin de faciliter lecture et compréhension.

1. Dans un premier temps, nous rappellerons les équations du modèle mécanique à l'étude, en explicitant éventuellement sous forme matricielle ces relations.
2. Puis, nous utiliserons l'hypothèse D.1.1 [p. 201] d'invariance afin de simplifier les équations d'équilibre et de compatibilité.
3. Les équations algébriques seront alors pleinement exploitées afin de réduire, par relation linéaire, le nombre d'inconnues.
4. Pour finir, les équations différentielles seront manipulées pour diminuer, une ultime fois, la dimension du système à résoudre.

D.2 Méthodologie générale pour le modèle LS1

La démarche exposée dans ce chapitre s'appuie largement sur les travaux de thèse de Saeedi et al. [2012a,b, 2013], reprenant lui-même les travaux du Pr Ehrlacher.

D.2.1 Rappel des équations du modèle LS1

Les contraintes généralisées, vérifient les $5n$ équations d'équilibre suivantes :

$$N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.2a})$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) - Q_{\alpha}^i = 0 \quad (\text{D.2b})$$

$$Q_{\beta,\beta}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.2c})$$

Les déformations généralisées associées s'écrivent pour la couche i :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i), \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (\Phi_{\alpha,\beta}^i + \Phi_{\beta,\alpha}^i) \text{ et } \gamma_{\alpha}^i = \Phi_{\alpha}^i + U_{z,\alpha}^i \quad (\text{D.3})$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}^i$, $\chi_{\alpha\beta}^i$ et γ_{α}^i sont, respectivement, les déformations dans le plan, les courbures et les déformations de cisaillement. Pour l'interface $^{j,j+1}$, les déformations de cisaillement et d'arrachement sont :

$$D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j - \left(\frac{e^j}{2} \Phi_{\alpha}^j + \frac{e^{j+1}}{2} \Phi_{\alpha}^{j+1} \right), D_{\nu}^{j,j+1} = U_z^{j+1} - U_z^j \quad (\text{D.4})$$

Les relations de comportement, en souplesse, relient les contraintes généralisées aux déformations généralisées :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\gamma\delta}^i \quad (\text{D.5a})$$

$$\chi_{\alpha\beta}^i = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\gamma\delta}^i \quad (\text{D.5b})$$

$$\gamma_{\alpha}^i = \frac{6}{5e^i} Q_{\beta}^i - \frac{1}{10} 4S_{\alpha 3\beta 3}^i (\tau_{\beta}^{i-1,i} + \tau_{\beta}^{i,i+1}) \quad (\text{D.5c})$$

Les déformations pour l'interface $j, j+1$ sont reliées aux efforts associés par :

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{j,j+1} &= -\frac{1}{10} (4S_{\alpha 3\beta 3}^j Q_{\beta}^j + 4S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} Q_{\beta}^{j+1}) - \frac{1}{30} (e^j 4S_{\alpha 3\beta 3}^j \tau_{\beta}^{j-1,j} + e^{j+1} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \tau_{\beta}^{j+1,j+2}) \\ &\quad + \frac{2}{15} (e^j 4S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1}) \tau_{\beta}^{j,j+1} \\ D_{\nu}^{j,j+1} &= \frac{9}{70} (e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2}) + \frac{13}{35} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} \end{aligned}$$

où $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^j, 4S_{\alpha 3\beta 3}^j$ et S_{3333}^j sont les composantes de la matrice de souplesse de la couche j .

D.2.2 Hypothèse d'invariance suivant x

L'hypothèse D.1.1 [p. 201] permet de réduire la dépendance spatiale de certains champs par rapport à la variable x :

$$\begin{aligned} U_x^i(x, y) &= U_x^i(y) + f(x); & U_y^i(x, y) &= U_y^i(y); & U_z^i(x, y) &= U_z^i(y) \\ \Phi_x^i(x, y) &= \phi_x^i(y); & \Phi_y^i(x, y) &= \phi_y^i(y) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$f(x)$ est une fonction caractéristique du problème à l'étude. Elle est égale par exemple à $\frac{\Delta}{\ell}x$ dans le cas de la traction uniaxiale d'amplitude Δ étudié à la section D.4 [p. 211].

En injectant ces champs de déplacement dans les équations de compatibilités (D.3) et (D.4), nous obtenons une simplification des déformations généralisées :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= f'(x); & \varepsilon_{yy}^i &= U_y^{i'}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} U_x^{i'}; & \gamma_x^i &= \phi_x^i; \\ \chi_{xx} &= 0; & \chi_{yy}^i &= \phi_y^{i'}; & \chi_{xy}^i &= \frac{1}{2} \phi_x^{i'}; & \gamma_y^i &= \phi_y^i + U_z^{i'} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

et pour les déformations de l'interface $j, j+1$:

$$\begin{aligned} D_x^{j,j+1} &= U_x^{j+1} - U_x^j - \left(\frac{e^j}{2} \phi_x^j + \frac{e^{j+1}}{2} \phi_x^{j+1} \right) \\ D_y^{j,j+1} &= U_y^{j+1} - U_y^j - \left(\frac{e^j}{2} \phi_y^j + \frac{e^{j+1}}{2} \phi_y^{j+1} \right) \\ D_z^{j,j+1} &= U_z^{j+1} - U_z^j \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

où le ' indique la dérivation par rapport à y . Les équations d'équilibre de chaque couche ($1 \leq i \leq n$) deviennent de simples équations différentielles :

$$N_{xy}^{i'} + \tau_x^{i,i+1} - \tau_x^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.9a})$$

$$N_{yy}^{i'} + \tau_y^{i,i+1} - \tau_y^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.9b})$$

$$M_{xy}^{i'} + \frac{e}{2} (\tau_x^{i,i+1} + \tau_x^{i-1,i}) - Q_x^i = 0 \quad (\text{D.9c})$$

$$M_{yy}^{i'} + \frac{e}{2} (\tau_y^{i,i+1} + \tau_y^{i-1,i}) - Q_y^i = 0 \quad (\text{D.9d})$$

$$Q_y^{i'} + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.9e})$$

D.2.3 Écriture des relations de comportement sous forme matricielle

Pour la couche i les équations de comportement (D.5a)–(D.5c) en souplesse s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} f^{i'}(x) \\ U_y^{i'} \\ U_x^{i'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{e^i} \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx}^i \\ N_{yy}^i \\ N_{xy}^i \end{Bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_y^{i'} \\ \phi_x^{i'} \end{Bmatrix} = \frac{12}{(e^i)^3} \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx}^i \\ M_{yy}^i \\ M_{xy}^i \end{Bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_x^i \\ \phi_y^i + U_z^{i'} \end{Bmatrix} = \frac{6}{5e^i} \begin{pmatrix} S_{44}^i & S_{45}^i \\ S_{45}^i & S_{55}^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x^i \\ Q_y^i \end{Bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} S_{44}^i & S_{45}^i \\ S_{45}^i & S_{55}^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_x^{i-1,i} + \tau_x^{i,i+1} \\ \tau_y^{i-1,i} + \tau_y^{i,i+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Pour l'interface $j, j+1$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_x^{j+1} - U_x^j - \left(\frac{e^j}{2} \phi_x^j + \frac{e^{j+1}}{2} \phi_x^{j+1} \right) \\ U_y^{j+1} - U_y^j - \left(\frac{e^j}{2} \phi_y^j + \frac{e^{j+1}}{2} \phi_y^{j+1} \right) \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{10} \left[\begin{pmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x^j \\ Q_y^j \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} S_{44}^{j+1} & S_{45}^{j+1} \\ S_{45}^{j+1} & S_{55}^{j+1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x^{j+1} \\ Q_y^{j+1} \end{Bmatrix} \right] \\ &\quad - \frac{1}{30} \left[e^j \begin{pmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_x^{j-1,j} \\ \tau_y^{j-1,j} \end{Bmatrix} + e^{j+1} \begin{pmatrix} S_{44}^{j+1} & S_{45}^{j+1} \\ S_{45}^{j+1} & S_{55}^{j+1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_x^{j+1,j+2} \\ \tau_y^{j+1,j+2} \end{Bmatrix} \right] \\ &\quad + \frac{2}{15} \left[e^j \begin{pmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{pmatrix} + e^{j+1} \begin{pmatrix} S_{44}^{j+1} & S_{45}^{j+1} \\ S_{45}^{j+1} & S_{55}^{j+1} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \tau_x^{j,j+1} \\ \tau_y^{j,j+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$U_z^{j+1} - U_z^j = \frac{9}{70} (e^j S_{3333}^j \nu^{j-1,j} + e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \nu^{j+1,j+2}) + \frac{13}{35} (e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}) \nu^{j,j+1} \quad (\text{D.14})$$

D.2.4 Inconnues généralisées

Hypothèse D.2.1 Inconnues de notre problème. Nous choisissons de retenir les $5n$ déplacements et les $11n - 3$ efforts généralisés comme inconnues du problème. Il s'agit de déterminer les champs : $N_{xx}^i, N_{xy}^i, N_{yy}^i, M_{xx}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i, Q_x^i, Q_y^i, \tau_x^{j,j+1}, \tau_y^{j,j+1}, \nu^{j,j+1}, U_x^i, U_y^i, U_z^i, \phi_x^i, \phi_y^i$.

Le système générique (D.1) comportera dans le cadre LS1 $10n$ équations différentielles du premier ordre, que l'on pourra ramener à $5n$ équations du second ordre.

Notation D.2.1 Inconnues principales de notre problème. Nous choisissons de retenir $Q_y^i, U_x^i, U_y^i, \phi_x^i, \phi_y^i$ comme inconnues principales de notre problème. Nous posons provisoirement le vecteur Y des inconnues principales :

$$\mathbf{X}(y) = \left(\underbrace{U_x^1, \dots, U_x^n}_n, \underbrace{U_y^1, \dots, U_y^n}_n, \underbrace{\phi_x^1, \dots, \phi_x^n}_n, \underbrace{\phi_y^1, \dots, \phi_y^n}_n, \underbrace{Q_y^1, \dots, Q_y^n}_n \right)^\top$$

Pour des raisons de conditionnement, il est plus intéressant d'adimensionner nos grandeurs. Nous poserons par conséquent ultérieurement un autre vecteur « inconnues principales ». Ce vecteur, concaténant les inconnues principales de notre problème, ne présuppose à ce stade aucune simplification supplémentaire liée à des propriétés de symétries. Dans certains cas particuliers, où d'autres efforts auraient une signification plus aisée, nous serons amenés à le modifier.

D.2.5 Élimination des efforts généralisés par les équations algébriques

En utilisant les premières équations de (D.10), (D.11), (D.12) ($3n$ équations), puis les équations (D.13) (D.14) ($3n - 3$ équations), nous pouvons éliminer les $6n - 3$ efforts généralisés $N_{xx}^i, M_{xx}^i, Q_x^i, \tau_x^{j,j+1}, \tau_y^{j,j+1}, \nu^{j,j+1}$ simplifiant de ce fait la résolution.

Élimination des $2n$ efforts généralisés N_{xx}^i, M_{xx}^i

(D.10), (D.11) relie N_{xx}^i, M_{xx}^i aux autres grandeurs d'intérêt :

$$\begin{aligned} N_{xx}^i &= -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} N_{yy}^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} N_{xy}^i + \frac{e^i}{S_{11}^i} f'(x) \\ M_{xx}^i &= -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} M_{yy}^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} M_{xy}^i \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

N_{xx}^i et M_{xx}^i n'interviennent pas dans les équations différentielles de notre problème. Le système (D.15) n'aura pour raison d'être que de reconstruire N_{xx}^i et M_{xx}^i après résolution.

Élimination des $3n - 2$ efforts généralisés $Q_x^i, \tau_x^{j,j+1}, \tau_y^{j,j+1}$

La première équation de (D.12) fournit n relations entre $Q_x^i, \tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1}$ et nos inconnues principales :

$$\begin{aligned} \phi_x^i &= \frac{6}{5e^i} (S_{44}^i Q_x^i + S_{45}^i Q_y^i) - \frac{1}{10} (S_{44}^i (\tau_x^{i,i+1} + \tau_x^{i-1,i}) + S_{45}^i (\tau_y^{i,i+1} + \tau_y^{i-1,i})) \\ \phi_x^i - \frac{6}{5e^i} S_{45}^i Q_y^i &= \frac{6}{5e^i} S_{44}^i Q_x^i - \frac{1}{10} (S_{44}^i (\tau_x^{i,i+1} + \tau_x^{i-1,i}) + S_{45}^i (\tau_y^{i,i+1} + \tau_y^{i-1,i})) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Ces n équations sont complétés par les $2n - 2$ relations de (D.13). Nous pouvons alors exprimer $Q_x^i, \tau_x^{i,i+1}, \tau_y^{i,i+1}$ en fonction de $U_x^i, U_y^i, \phi_x^i, \phi_y^i, Q_y^i$ par une relation linéaire :

$$\mathbf{B} = \mathbb{N} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E}_0^Q \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbb{N}^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{E}_0^Q) \quad (\text{D.17})$$

où \mathbf{E}_0^Q est un vecteur de pré-déformation associé aux efforts extérieurs de cisaillement, sur les parties supérieure et inférieure de la plaque et :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\top &= \underbrace{\{Q_x^1, \dots, Q_x^n\}}_n, \underbrace{\{\tau_x^{1,2}, \dots, \tau_x^{n-1,n}\}}_{n-1}, \underbrace{\{\tau_y^{1,2}, \dots, \tau_y^{n-1,n}\}}_{n-1} \\ \mathbf{B}^\top &= \underbrace{\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}}_n, \underbrace{\{\beta^{1,2}, \dots, \beta^{n-1,n}\}}_{n-1}, \underbrace{\{\gamma^{1,2}, \dots, \gamma^{n-1,n}\}}_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \phi_x^i - \frac{6}{5e^i} S_{45}^i Q_y^i \\ \beta^{i,i+1} &= U_x^{i+1} - U_x^i - \left(\frac{e^i}{2} \phi_x^i + \frac{e^{i+1}}{2} \phi_x^{i+1} \right) + \frac{1}{10} (S_{45}^i Q_y^i + S_{45}^{i+1} Q_y^{i+1}) \\ \gamma^{i,i+1} &= U_y^{i+1} - U_y^i - \left(\frac{e^i}{2} \phi_y^i + \frac{e^{i+1}}{2} \phi_y^{i+1} \right) + \frac{1}{10} (S_{55}^i Q_y^i + S_{55}^{i+1} Q_y^{i+1}) \end{aligned}$$

La matrice \mathbb{N} de taille $3n - 2 \times 3n - 2$ reliant les vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} se décompose en plusieurs blocs :

$$\mathbb{N}_{(3n-2) \times (3n-2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{N}_{n \times n}^1 & \mathbb{N}_{n \times n-1}^2 & \mathbb{N}_{n \times n-1}^3 \\ & \mathbb{N}_{n-1 \times n-1}^4 & \mathbb{N}_{n-1 \times n-1}^5 \\ \text{Sym} & & \mathbb{N}_{n-1 \times n-1}^6 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les sous matrices ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{N}_{ij}^1 &= \frac{6}{5} \frac{S_{44}^i}{e^i} \delta_{i,j} \quad \text{matrice diagonale} \\
 \mathbb{N}_{ij}^2 &= -\frac{1}{10} S_{44}^i (\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}) \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure} \\
 \mathbb{N}_{ij}^3 &= -\frac{1}{10} S_{45}^i (\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}) \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure} \\
 \mathbb{N}_{ij}^4 &= -\frac{1}{30} [e^i S_{44}^i \delta_{i,j+1} - 4(e^i S_{44}^i + e^{i+1} S_{44}^{i+1}) \delta_{ij} + e^{i+1} S_{44}^{i+1} \delta_{i,j-1}] \quad \text{matrice tri-diagonale symétrique} \\
 \mathbb{N}_{ij}^5 &= -\frac{1}{30} [e^i S_{45}^i \delta_{i,j+1} - 4(e^i S_{45}^i + e^{i+1} S_{45}^{i+1}) \delta_{ij} + e^{i+1} S_{45}^{i+1} \delta_{i,j-1}] \quad \text{matrice tri-diagonale symétrique} \\
 \mathbb{N}_{ij}^6 &= -\frac{1}{30} [e^i S_{55}^i \delta_{i,j+1} - 4(e^i S_{55}^i + e^{i+1} S_{55}^{i+1}) \delta_{ij} + e^{i+1} S_{55}^{i+1} \delta_{i,j-1}] \quad \text{matrice tri-diagonale symétrique}
 \end{aligned}$$

D'autre part, pour la suite nous définissons également la matrice \mathbb{T} reliant le vecteur \mathbf{B} à notre vecteur inconnues principales $\mathbf{B} = \mathbb{T} \cdot \mathbf{X}$

$$\mathbb{T} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & \mathbb{I}_n & 0 & \mathbb{T}^1 \\ \hline \mathbb{T}^2 & 0 & \mathbb{T}^3 & 0 & \mathbb{T}^4 \\ \hline 0 & \mathbb{T}^2 & 0 & \mathbb{T}^3 & \mathbb{T}^5 \end{array} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_{ij}^1 &= -\frac{6}{5} \frac{S_{45}^i}{e^i} \delta_{ij} \quad \text{matrice diagonale} \\
 \mathbb{T}_{ij}^2 &= -\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1} \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure} \\
 \mathbb{T}_{ij}^3 &= e^i \delta_{i,j} + e^{i+1} \delta_{i,j+1} \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure} \\
 \mathbb{T}_{ij}^4 &= \frac{1}{10} (S_{45}^i \delta_{i,j} + S_{45}^{i+1} \delta_{i,j+1}) \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure} \\
 \mathbb{T}_{ij}^5 &= \frac{1}{10} (S_{55}^i \delta_{i,j} + S_{55}^{i+1} \delta_{i,j+1}) \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure}
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Par conséquent, ne reste en définitive que :

$$\mathbf{A} = \mathbb{N}^{-1} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{X} - \mathbb{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0^Q \tag{D.20}$$

Élimination des $n - 1$ efforts généralisés d'arrachement $\nu^{j,j+1}$

D'après la loi de comportement en arrachement (D.14), l'effort généralisé ν peut être relié à la différence des déplacements verticaux de deux couches adjacentes, par une relation matricielle déjà présentée dans le premier chapitre 1 [p. 1]

$$\boldsymbol{\Sigma}^\nu = \mathbb{C}^\nu \cdot (\mathbf{E}^\nu - \mathbf{E}_0^\nu) \tag{D.21}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}^\nu$ et \mathbf{E}^ν sont deux vecteurs concaténant respectivement les efforts d'arrachement et leurs déformations associées, \mathbf{E}_0^ν est un vecteur de pré-déformation et \mathbb{C}^ν la matrice de rigidité en arrachement :

$$(\mathbf{E}_0^\nu)^\top = \left\{ \frac{9}{70} e^1 S_{3333}^1 T_z^-(y), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-3}, \frac{9}{70} e^n S_{3333}^n T_z^+(y) \right\}$$

Le vecteur \mathbf{E}_0^ν sera présent lorsque des conditions aux limites verticales en effort seront appliquées sur la surface inférieure ou supérieure. Il est utile par ailleurs de nommer le vecteur des déplacements normaux :

$$\mathbf{U}_z^\top = \{U_z^1, U_z^2, \dots, U_z^n\} \tag{D.22}$$

Ce vecteur est relié à \mathbf{E}^ν via la matrice \mathbb{T}^2 déjà exhibée (D.19) :

$$\mathbf{E}^\nu = \mathbb{T}^2 \cdot \mathbf{U}_z$$

Jusque-là, en utilisant des équations algébriques, ont été éliminés les $6n - 3$ champs inconnus : $N_{xx}^i, M_{xx}^i, Q_x^i, \tau_x^{j,j+1}, \tau_y^{j,j+1}, \nu^{j,j+1}$. Nous poursuivrons notre simplification en manipulant maintenant certaines équations différentielles linéaires du premier ordre pour diviser par deux le nombre d'inconnues.

D.2.6 Éliminations des efforts généralisés par condensation des équations différentielles

Il reste $10n$ équations différentielles du premier ordre, exprimées en termes de :

$$N_{xy}^i, N_{yy}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i, Q_y^i, U_x^i, U_y^i, U_z^i, \phi_x^i, \phi_y^i$$

Nous allons condenser les efforts généralisés $N_{xy}^i, N_{yy}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i, U_z^i$, pour obtenir un système différentiel du second ordre de taille réduite.

Condensation des efforts membranaires $N_{xy}^i, N_{yy}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i$

Les équations de comportement des efforts membranaires, dérivées par rapport à y , se traduisent par :

$$\begin{cases} f^{i''}(x) = 0 \\ U_y^{i''} \\ U_x^{i''} \end{cases} = \frac{1}{e^i} \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{pmatrix} \begin{cases} N_{xx}^{i'} \\ N_{yy}^{i'} \\ N_{xy}^{i'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ \phi_y^{i''} \\ \phi_x^{i''} \end{cases} = \frac{12}{(e^i)^3} \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{pmatrix} \begin{cases} M_{xx}^{i'} \\ M_{yy}^{i'} \\ M_{xy}^{i'} \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} (U_x^i)'' = \frac{1}{e^i} [c^i (N_{xy}^i)' + b^i (N_{yy}^i)'] \\ (U_y^i)'' = \frac{1}{e^i} [b^i (N_{xy}^i)' + a^i (N_{yy}^i)'] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\phi_x^i)'' = \frac{12}{(e^i)^3} [c^i (M_{xy}^i)' + b^i (M_{yy}^i)'] \\ (\phi_y^i)'' = \frac{12}{(e^i)^3} [b^i (M_{xy}^i)' + a^i (M_{yy}^i)'] \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

avec les coefficients de souplesse réduits suivants :

$$a^i = \left(S_{22} - \frac{(S_{12})^2}{S_{11}} \right)^i \quad b^i = \left(S_{26} - \frac{S_{12}S_{16}}{S_{11}} \right)^i, \quad c^i = \left(S_{66} - \frac{(S_{16})^2}{S_{11}} \right)^i \quad (\text{D.24})$$

En remplaçant les dérivées des efforts généralisés $N_{xy}, N_{yy}, M_{xy}, M_{yy}$ à l'aide des équations d'équilibres (D.9a)–(D.9e), nous obtenons :

$$(U_x^i)'' = \frac{1}{e^i} [c^i (\tau_x^{i-1,i} - \tau_x^{i,i+1}) + b^i (\tau_y^{i-1,i} - \tau_y^{i,i+1})] \quad (\text{D.25a})$$

$$(U_y^i)'' = \frac{1}{e^i} [b^i (\tau_x^{i-1,i} - \tau_x^{i,i+1}) + a^i (\tau_y^{i-1,i} - \tau_y^{i,i+1})] \quad (\text{D.25b})$$

$$(\phi_x^i)'' = \frac{12}{(e^i)^3} \left[c^i \left(Q_x^i - \frac{e^i}{2} (\tau_x^{i-1,i} + \tau_x^{i,i+1}) \right) + b^i \left(Q_y^i - \frac{e^i}{2} (\tau_y^{i-1,i} + \tau_y^{i,i+1}) \right) \right] \quad (\text{D.25c})$$

$$(\phi_y^i)'' = \frac{12}{(e^i)^3} \left[b^i \left(Q_x^i - \frac{e^i}{2} (\tau_x^{i-1,i} + \tau_x^{i,i+1}) \right) + a^i \left(Q_y^i - \frac{e^i}{2} (\tau_y^{i-1,i} + \tau_y^{i,i+1}) \right) \right] \quad (\text{D.25d})$$

Nous pouvons en déduire une relation matricielle faisant disparaître les efforts membranaires :

$$\begin{Bmatrix} U_x'' \\ U_y'' \\ \phi_x'' \\ \phi_y'' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{L}^1 & \mathbb{L}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}^2 & \mathbb{L}^3 & 0 \\ \mathbb{L}^4 & \mathbb{L}^7 & \mathbb{L}^8 & \mathbb{L}^5 \\ \mathbb{L}^5 & \mathbb{L}^8 & \mathbb{L}^9 & \mathbb{L}^6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ \tau_x \\ \tau_y \\ Q_y \end{Bmatrix}$$

avec les expressions suivantes pour les blocs :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{ij}^1 &= \frac{c^i}{e^i} (\delta_{i,j-1} - \delta_{i,j}) & \mathbb{L}_{ij}^2 &= \frac{b^i}{e^i} (\delta_{i,j-1} - \delta_{i,j}) & \mathbb{L}_{ij}^3 &= \frac{a^i}{e^i} (\delta_{i,j-1} - \delta_{i,j}) \\ \mathbb{L}_{ij}^4 &= \frac{12c^i}{(e^i)^3} & \mathbb{L}_{ij}^5 &= \frac{12b^i}{(e^i)^3} & \mathbb{L}_{ij}^6 &= \frac{12a^i}{(e^i)^3} \\ \mathbb{L}_{ij}^7 &= \frac{6c^i}{(e^i)^2} (\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j}) & \mathbb{L}_{ij}^8 &= \frac{6b^i}{(e^i)^2} (\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j}) & \mathbb{L}_{ij}^9 &= \frac{6a^i}{(e^i)^2} (\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j}) \end{aligned}$$

$\mathbb{L}^1, \mathbb{L}^2, \mathbb{L}^3, \mathbb{L}^7, \mathbb{L}^8, \mathbb{L}^9$ matrice diagonale+ sous-diagonale inférieure (attention pas carré) tandis que $\mathbb{L}^4, \mathbb{L}^5, \mathbb{L}^6$ sont des matrices diagonales. Si nous posons en outre :

$$\mathbb{G} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \mathbb{L}^1 & \mathbb{L}^2 \\ 0 & \mathbb{L}^2 & \mathbb{L}^3 \\ \mathbb{L}^4 & \mathbb{L}^7 & \mathbb{L}^8 \\ \mathbb{L}^5 & \mathbb{L}^8 & \mathbb{L}^9 \end{array} \right) \quad \mathbb{H} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{L}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{L}^6 \end{array} \right)$$

Nous avons alors, en utilisant la relation (D.20) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x'' \\ \mathbf{U}_y'' \\ \phi_x'' \\ \phi_y'' \end{Bmatrix} = \mathbb{G} \cdot \mathbf{A} + \mathbb{H} \cdot \mathbf{X} = (\mathbb{G} \cdot \mathbb{N}^{-1} \cdot \mathbb{T} + \mathbb{H}) \cdot \mathbf{X} - \mathbb{G} \cdot \mathbb{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0^Q \quad (\text{D.26})$$

Condensation du déplacement vertical

Enfin, la deuxième equation de (D.12) donne :

$$(\mathbf{U}_z^i)' = -\phi_y^i + \frac{6}{5e^i} \left(S_{45}^i [Q_x^i - \frac{e^i}{12} (\tau_x^{i-1,i} + \tau_x^{i,i+1})] + S_{55}^i [Q_y^i - \frac{e^i}{12} (\tau_y^{i-1,i} + \tau_y^{i,i+1})] \right) \quad (\text{D.27})$$

C'est à dire avec la notation \mathbf{U}_z déjà introduite (D.22) :

$$\mathbf{U}_z' = -\mathbb{I}_n \cdot \phi_y + (\mathbb{W}^1 \quad \mathbb{W}^2 \quad \mathbb{W}^3) \begin{Bmatrix} Q_x \\ \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} + \mathbb{W}^4 \cdot Q_y \quad (\text{D.28})$$

Où nous avons posé :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{ij}^1 &= \frac{6}{5} \frac{S_{45}^i}{e^i} \delta_{ij} & \mathbb{W}_{ij}^4 &= \frac{6}{5} \frac{S_{55}^i}{e^i} \delta_{ij} & & \text{matrice diagonale} \\ \mathbb{W}_{ij}^2 &= \frac{1}{10} S_{45}^i (\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}) & \mathbb{W}_{ij}^3 &= \frac{1}{10} S_{55}^i (\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}) & & \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure} \end{aligned}$$

Par conséquent, en notant :

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{O}_n \quad \mathbb{O}_n \quad \mathbb{O}_n \quad \mathbb{I}_n \quad \mathbb{W}^4) \quad \mathbb{W} = (\mathbb{W}^1 \quad \mathbb{W}^2 \quad \mathbb{W}^3)$$

nous pouvons éliminer U_z^i de (D.28) en dérivant le système (D.21) selon y , puis en remplaçant la valeur de $(U_z^i)'$ dans $(\mathbf{E}^\nu)'$ grâce à (D.27). Nous obtenons alors :

$$(\mathbf{E}^\nu)' = \mathbb{T}^2 \cdot (\mathbb{Q} \cdot \mathbf{X} + \mathbb{W} \cdot \mathbf{A})$$

Nous trouvons alors l'expression de $(\nu^{i,i+1})'$ via :

$$(\boldsymbol{\Sigma}^\nu)' = \mathbf{C}^\nu \cdot ((\mathbf{E}^\nu)' - (\mathbf{E}_0^\nu)') \quad (\text{D.29})$$

La dérivation de la dernière équation d'équilibre (D.9e) s'écrit :

$$(Q_y^i)'' = (\nu^{i-1,i})' - (\nu^{i,i+1})'$$

Puis, en injectant l'expression (D.29), nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_y'' &= \mathbb{V} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^\nu)' \\ &= \mathbb{V} \cdot \mathbf{C}^\nu \cdot [\mathbb{T}^2 \cdot (\mathbb{W} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}) - (\mathbf{E}_0^\nu)'] \\ &= \mathbb{V} \cdot \mathbf{C}^\nu \cdot \mathbb{T}^2 \cdot (\mathbf{Q} + \mathbb{W} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{X} - \mathbb{V} \cdot \mathbf{C}^\nu \cdot (\mathbf{E}_0^\nu)' \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

avec \mathbb{V} une matrice de taille $n \times n - 1$:

$$\mathbb{V}_{ij} = \delta_{i,j-1} - \delta_{i,j} \quad \text{matrice diagonale+ sur-diagonale supérieure}$$

D.2.7 Synthèse

Nous trouvons en définitive, en concaténant (D.26) et (D.30) :

$$\mathbf{X}'' = \left(\begin{array}{c} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbb{T} + \mathbf{H} \\ \mathbb{V} \cdot \mathbf{C}^\nu \cdot \mathbb{T}^2 \cdot (\mathbb{W} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbb{T} + \mathbf{Q}) \end{array} \right) \cdot \mathbf{X} - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0^Q \\ \mathbb{V} \cdot \mathbf{C}^\nu \cdot (\mathbf{E}_0^\nu)' \end{array} \right\}$$

De cette manière, la résolution se ramène à un système du second ordre de $5n$ équations :

$$\mathbf{Y}''(y) = \mathbb{M} \cdot \mathbf{Y}(y) + \mathbf{F}(y) \quad (\text{D.31})$$

où le vecteur \mathbf{Y} est le vecteur inconnues généralisées de taille $5n$:

$$\mathbf{Y}(y) = \left(\underbrace{\bar{u}_x^1, \dots, \bar{u}_x^n}_n, \underbrace{\bar{u}_y^1, \dots, \bar{u}_y^n}_n, \underbrace{\phi_x^1, \dots, \phi_x^n}_n, \underbrace{\phi_y^1, \dots, \phi_y^n}_n, \underbrace{\bar{Q}_y^1, \dots, \bar{Q}_y^n}_n \right)^\top$$

il est composé des variables adimensionnées suivantes :

$$\bar{u}_x^i = \frac{U_x^i}{\bar{e}}, \quad \bar{u}_y^i = \frac{U_y^i}{\bar{e}}, \quad \phi_x^i, \quad \phi_y^i, \quad \bar{Q}_y^i = \frac{Q_y^i}{\bar{e}\bar{G}} \quad \text{avec} \quad \bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^i, \quad \bar{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{G_{LN}^i + G_{TN}^i}{2} \quad (\text{D.32})$$

Tout problème plan se ramène à la résolution d'un système d'équation du second ordre (D.31) de taille $5n$. A priori, sa résolution fera apparaître $10n$ constantes d'intégrations que l'on peut déterminer à l'aide d'autant de conditions aux limites. Celles-ci ne porteront pas nécessairement sur les grandeurs que nous avons identifiées comme nos inconnues principales. C'est pourquoi il sera souvent nécessaire de résoudre une série de systèmes linéaires pour remonter aux constantes d'intégrations. Cette ultime manipulation justifie l'expression de *semi-analytique* car il n'est pas possible d'écrire, dans un cas général, les expressions des solutions.

Remarquons également, qu'à ce stade, nous n'avons réalisé aucune simplification additionnelle à l'hypothèse d'invariance suivant x . Pour certaines configurations, des symétries supplémentaires permettront une résolution plus efficace du système différentiel, ou motiveront un choix différent concernant nos inconnues principales.

D.3 Méthodologie générale pour le modèle $M4 - 2n + 1m$

D.3.1 Rappel des équations du modèle $M4 - 2n + 1m$

Dans ce modèle, le champ de contraintes postulé amène $2n + 1$ équations d'équilibre :

$$0 = N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i} \quad 0 = T_3^+ + T_3^- + \sum_{i=1}^n \left[\frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\underline{\tau}^{i,i+1} + \underline{\tau}^{i-1,i}) \right]$$

Les déformations généralisées sont données par :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j + \left(\frac{e^{j+1}}{2} + \frac{e^j}{2} \right) W_{3,\alpha} \quad (\text{D.33})$$

Les lois de comportement sont :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial w_{M4-2n+1m}^*}{\partial N_{\alpha\beta}^i} = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\gamma\delta}^i \quad (\text{D.34a})$$

$$D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{\partial w_{M4-2n+1m}^*}{\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}} = \frac{1}{3} \left(-e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j \tau_{\gamma}^{j-1,j} + (e^j S_{\alpha 3 \gamma 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1}) \tau_{\gamma}^{j,j+1} - e^{j+1} S_{\alpha 3 \gamma 3}^{j+1} \tau_{\gamma}^{j+1,j+2} \right) \quad (\text{D.34b})$$

D.3.2 Hypothèse d'invariance suivant x

L'hypothèse D.1.1 [p. 201] permet de réduire la dépendance spatiale de certains champs par rapport à la variable x :

$$U_x^i(x, y) = U_x^i(y) + f(x); \quad U_y^i(x, y) = U_y^i(y); \quad W_3(x, y) = W_3(y)$$

En injectant ces champs de déplacements dans les équations de compatibilités (D.33), les déformations généralisées se simplifient :

$$\varepsilon_{xx}^i = f'(x); \quad \varepsilon_{yy}^i = U_y^{i'}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} U_x^{i'}; \quad (\text{D.35a})$$

$$D_x^{j,j+1} = U_x^{j+1} - U_x^j \quad (\text{D.35b})$$

$$D_y^{j,j+1} = U_y^{j+1} - U_y^j - \left(\frac{e^j}{2} + \frac{e^{j+1}}{2} \right) W_{3,y} \quad (\text{D.35c})$$

où le ' indique la dérivation par rapport à y . Les équations d'équilibre de chaque couche ($1 \leq i \leq n$) se réduisent à de simples équations différentielles :

$$N_{xy}^{i'} + \tau_x^{i,i+1} - \tau_x^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.36a})$$

$$N_{yy}^{i'} + \tau_y^{i,i+1} - \tau_y^{i-1,i} = 0 \quad (\text{D.36b})$$

$$T_3^+ + T_3^- + \sum_{i=1}^n \left[\frac{e^i}{2} (\tau_y^{i,i+1} + \tau_y^{i-1,i})' \right] = 0 \quad (\text{D.36c})$$

La loi de comportement en membrane est exactement la même que dans le cadre LS1, il n'est pas utile de rappeler sa forme matricielle. La loi de comportement en cisaillement à l'interface s'écrit pour sa part :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x^{j+1} - U_x^j \\ U_y^{i+1} - U_y^i - \left(\frac{e^j}{2} + \frac{e^{j+1}}{2} \right) W_{3,y} \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \left[e^j \begin{pmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tau_x^{j-1,j} \\ \tau_y^{j-1,j} \end{array} \right\} + e^{j+1} \begin{pmatrix} S_{44}^{j+1} & S_{45}^{j+1} \\ S_{45}^{j+1} & S_{55}^{j+1} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tau_x^{j+1,j+2} \\ \tau_y^{j+1,j+2} \end{array} \right\} \right] \\ + \frac{1}{3} \left[e^j \begin{pmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{pmatrix} + e^{j+1} \begin{pmatrix} S_{44}^{j+1} & S_{45}^{j+1} \\ S_{45}^{j+1} & S_{55}^{j+1} \end{pmatrix} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tau_x^{j,j+1} \\ \tau_y^{j,j+1} \end{array} \right\} \quad (\text{D.37})$$

D.3.3 Inconnues généralisées

Hypothèse D.3.1 Inconnues de notre problème. Nous choisissons de retenir les $2n + 1$ déplacements et les $5n - 2$ efforts généralisés comme inconnues du problème. Nous devons donc déterminer les champs : $N_{xx}^i, N_{xy}^i, N_{yy}^i, \tau_x^{j,j+1}, \tau_y^{j,j+1}, U_x^i, U_y^i, W_3$.

Le système générique (D.1) comportera, dans le cadre $M4-2n+1m$, $5n$ équations différentielles du premier ordre.

Notation D.3.1 Inconnues principales de notre problème. Les champs $U_x^i, U_y^i, N_{xy}^i, N_{yy}^i, \tau_y^{j,j+1}, W_3$, sont choisies comme inconnues principales de notre problème. Nous posons provisoirement le vecteur \mathbf{X} :

$$\mathbf{X}(y) = \left(\underbrace{U_x^1, \dots, U_x^n}_n, \underbrace{U_y^1, \dots, U_y^n}_n, \underbrace{N_{xy}^1, \dots, N_{xy}^n}_n, \underbrace{N_{yy}^1, \dots, N_{yy}^n}_n, \underbrace{\tau_y^{1,2}, \dots, \tau_y^{n-1,n}}_{n-1}, W_3 \right)^\top$$

D.3.4 Élimination des efforts généralisés par les équations algébriques

Le travail réalisé pour le modèle LS1, dont le $M4 - 2n + 1m$ est une version simplifiée à l'extrême, va être largement réemployé.

Condensation des n efforts généralisés N_{xx}^i

La loi de comportement en membrane du modèle $M4 - 2n + 1m$ est tout à fait identique à celle du modèle LS1 (D.10). Nous renvoyons à l'équation (D.15) pour la condensation des n efforts membranaires N_{xx}^i .

Condensation des $n - 1$ efforts généralisés $\tau_x^{j,j+1}$

La loi de comportement liant $\tau_y^{j,j+1}$ aux déplacements généralisés est cette fois une équation différentielle. Elle ne pourra en conséquence pas être utilisée pour condenser $\tau_y^{j,j+1}$. En revanche la loi, (D.34b) et (D.35b), reliant $\tau_x^{j,j+1}$ aux déplacements généralisés demeure une équation algébrique :

$$\mathbf{D}_x = [\mathbb{S}_{\tau_x}] \cdot \boldsymbol{\tau}_x \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{D}_x = \top = \{U_x^2 - U_x^1, \dots, U_x^n - U_x^{n-1}\} \\ \boldsymbol{\tau}_x^\top = \{\tau_x^{1,2}, \dots, \tau_x^{n-1,n}\} \end{cases} \quad (\text{D.38})$$

et la partie de la souplesses en cisaillement d'interface :

$$[\mathbb{S}_{\tau_x}]_{ij} = \frac{1}{3} [-e^i S_{44}^i \delta_{i,j+1} + (e^i S_{44}^i + e^{i+1} S_{44}^{i+1}) \delta_{ij} - e^{i+1} S_{44}^{i+1} \delta_{i,j-1}] \quad \text{matrice tri-diagonale symétrique}$$

Se maintiennent alors $5n$ inconnues généralisées que l'on peut relier par autant d'équations différentielles du premier ordre. Plus précisément : $2n + 1$ équations d'équilibres, $2n$ équations de comportement en membrane, et $n - 1$ équations de comportement en cisaillement d'interface.

Remarque D.3.1 Il arrive dans de nombreuses situation, pour des raisons de symétrie par exemple, que le déplacement vertical moyen W_3 soit nul. Dans ce cas, la seconde équation de comportement concernant le cisaillement devient également une équation algébrique rendant possibles la condensation des $n - 1$ efforts $\tau_y^{j,j+1}$

D.3.5 Cas particulier $W_3 = 0$

1 inconnue, (W_3) est soustraite dans ce cas. Avec sa disparition, la condensation des efforts d'interfaces $\tau_y^{j,j+1}$ est possible. Il nous reste alors $4n$ inconnues et un système d'équations linéaires du premier ordre, qui peut être condensé pour former $2n$ équations différentielles linéaire du second ordre.

D.4 Illustration sur le modèle quadri-couches $(0^\circ, 90^\circ)_s$ en traction

D.4.1 Points communs aux différentes modélisations

Hypothèse D.4.1 Description du problème. L'empilement des quatre couches se fait suivant z . Nous numérotions les couches de 1 à 4 du bas vers le haut. Les couches 1 et 4 sont

des couches à 0° (par rapport à Ox) et les couches 2 et 3 à 90° . Nous étudions deux géométries. La première est une plaque bornée. Dans ce cas, le domaine occupé par le multicouche est $x \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$, $y \in [-b, b]$, $z \in [-2e, 2e]$ où e est l'épaisseur de chaque couche (voir figure D.1 [p. 212]) :

La seconde géométrie est une plaque semi-infinie. Dans ce cas $x \in]-\infty, +\infty[$, $y \in [0, +\infty[$ et

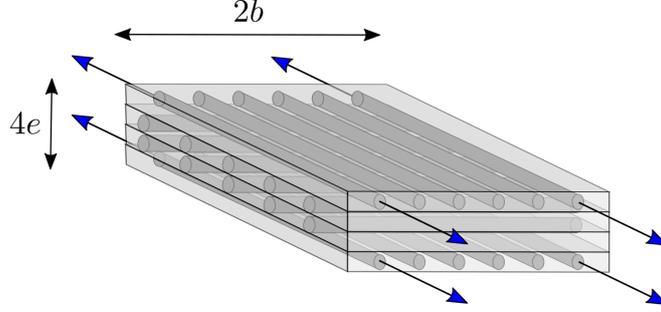


FIGURE D.1 – Schéma du quadri-couches $(0^\circ, 90^\circ)_s$ en traction

$z \in [-2e, 2e]$. Le deuxième problème se présente comme une limite du premier lorsque la largeur est grande ($b \rightarrow \infty$). Il permet l'étude générale d'un effet de bord dans une pièce aussitôt que la dimension perpendiculaire au bord est supérieure à environ $8e$. En effet, au delà de cette distance l'effet de bord n'est plus sensible à la géométrie réelle de la plaque.

La matrice de souplesse d'un pli dans son repère d'orthotropie est égale à :

$$[\mathbb{S}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{TN}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{TN}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu_{TN}}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix}$$

La traction est effectuée suivant x . Nous utilisons ci-dessous l'invariance par translation suivant x du problème.

1. Champ $U_x^i(x, y)$: Dans le cas de la plaque bornée, le déplacement dans la direction x est de $-d/2$ en $x = -\ell/2$ et $+d/2$ en $x = \ell/2$. Donc, l'invariance par translation et les symétries du problème permettent de déduire que $U_x^i(x, y) = \varepsilon x$ où $\varepsilon = \frac{d}{\ell} \forall i \in \{1, \dots, 4\}$ pour tous les modèles. Dans le cas de la plaque semi-infinie, l'invariance par translation et les symétries du problème permettent de déduire que $U_x^i(x, y) = \varepsilon x$, $\forall i \in 1, 4$ où ε est une déformation d'allongement suivant x imposée.
2. Autres champs : Tous les autres champs sont indépendants de x et ne sont donc fonction que de la variable y . La symétrie de l'empilement et du chargement par rapport au plan $z = 0$ nous conduit à nous intéresser seulement aux champs des couches 1 et 2 et à ceux des interfaces 1, 2 et 2, 3. Ceci diminue sensiblement la taille du problème.

Dans le cas de la plaque bornée, d'autres considérations de symétrie par rapport au plan $y = 0$ permettent de montrer que les champs cherchés sont pairs ou impairs ce qui permet de restreindre l'étude au domaine $y \in [0, b]$. Dans le cas de la plaque semi-infinie, les efforts d'interface décroissent vers zéro à l'infini.

Le système à résoudre, comme dans (D.31), est de la forme générique suivante :

$$\mathbf{Y}''(y) = \mathbb{M} \cdot \mathbf{Y}(y)$$

où les composantes de \mathbf{Y} sont des champs inconnus, en nombre bien plus restreint que dans la forme initiale du problème. Dans le cas de la plaque semi-infinie, les conditions de décroissance lorsque $y \rightarrow +\infty$ nous incitent à considérer $\mathbf{Y}(y)$ sous la forme :

$$\mathbf{Y}(y) = \sum_p b_p \mathbf{Y}_p \exp(-\sqrt{\lambda_p} y)$$

Les conditions aux limites en $y = 0$ permettent le calcul des coefficients b_p . Pour disposer d'un système mieux conditionné, il est préférable d'écrire le problème sous forme adimensionnelle, en particulier, nous changeons la variable y en $u = \frac{y}{b}$, où b est une longueur arbitrairement choisie, par exemple l'épaisseur totale $4e$ de la plaque. Pourvu que l'on prenne ces deux précautions, le calcul quasi-analytique des solutions, ne pose pas de difficulté.

D.4.2 Résolution avec le modèle LS1

Position du problème

Concernant le champ de déplacement, par rapport à la modélisation générale présentée en (D.6), nous pouvons préciser les expressions :

$$U_x^i(x, y) = \varepsilon x; \quad U_y^i(x, y) = v^i(y); \quad U_z^i(x, y) = w^i(y); \quad \Phi_x^i(x, y) = 0; \quad \Phi_y^i(x, y) = \varphi^i(y)$$

Les efforts intérieurs généralisés $N_{\alpha\beta}^i, M_{\alpha\beta}^i, Q_{\alpha}^i, \tau_{\alpha}^{j,j+1}, \nu^{j,j+1}$ ne sont fonction que de la variable y . La symétrie par rapport au plan $z = 0$ permet de réduire le nombre d'inconnues d'intérêts. Nous avons en effet trivialement :

$$U_y^1 = U_y^4; \quad U_y^2 = U_y^3; \quad U_z^1 = -U_z^4; \quad U_z^2 = -U_z^3; \quad \Phi_y^1 = -\Phi_y^4; \quad \Phi_y^2 = -\Phi_y^3; \quad (\text{D.39})$$

Notre étude se restreint aux grandeurs suivantes pour les couches $i = 1$ et $i = 2$:

$$N_{xx}^i, N_{xy}^i, N_{yy}^i, M_{xx}^i, M_{xy}^i, M_{yy}^i, Q_x^i, Q_y^i, U_y^i, U_z^i, \Phi_y^i,$$

Les efforts d'interfaces inconnus, entendu que $\underline{\tau}^{2,3} = \underline{0}$ sont :

$$\tau_x^{1,2}, \tau_y^{1,2}, \nu^{1,2}, \nu^{2,3}$$

Soit au total 26 inconnues.

Réduction du nombre d'inconnues à l'aide des équations algébriques

Condensation des efforts membranaires Tout comme à la section D.3.4 [p. 211], il est possible de condenser un grand nombre de ces fonctions. En effet, nous pouvons appliquer la loi de comportement membranaire (D.10), (D.11) aux couches 1 et 2 et utiliser la forme particulière de la souplesse pour obtenir :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ (v^1)'(y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx}^1 \\ N_{yy}^1 \\ N_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ (\varphi^1)' \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{12}{e^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx}^1 \\ M_{yy}^1 \\ M_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.40})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ (v^2)'(y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx}^2 \\ N_{yy}^2 \\ N_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ (\varphi^2)' \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{12}{e^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx}^2 \\ M_{yy}^2 \\ M_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.41})$$

De ces relations matricielles, nous déduisons que les efforts $N_{xy}^1, N_{xy}^2, M_{xy}^1, M_{xy}^2$ sont nuls. Par ailleurs, les efforts $N_{xx}^1, N_{xx}^2, M_{xx}^1, M_{xx}^2$ n'interviennent pas dans les équations différentielles du problème, car ils se condensent en fonction des inconnues $N_{yy}^1, N_{yy}^2, M_{yy}^1, M_{yy}^2$ et du paramètre de chargement ε :

$$N_{xx}^1 = \nu_{LT} N_{yy}^1 + e E_L \varepsilon; \quad N_{xx}^2 = \nu_{TL} N_{yy}^2 + e E_T \varepsilon; \quad M_{xx}^1 = \nu_{LT} M_{yy}^1; \quad M_{xx}^2 = \nu_{TL} M_{yy}^2 \quad (\text{D.42})$$

Ces deux équations se ramènent à l'application de la formule (D.15) au quadri-couches d'étude. (D.42) permet de reconstruire le champ de contraintes complet après résolution sur nos inconnues principales.

Nous avons, ici, été plus performants que ne permettait de l'anticiper la sous-section D.2.5 [p. 205] consacrée à la condensation des efforts membranaires. En effet, nous avons, en plus, pu tirer parti de la forme de la matrice de souplesse pour annuler les efforts généralisés N_{xy}^i et M_{xy}^i .

Condensation des efforts de cisaillement Q_x et $\tau_x^{1,2}, \tau_y^{1,2}$. Abordons maintenant la condensation de l'effort tranchant Q_x et des efforts inter-laminaires $\tau_x^{1,2}, \tau_y^{1,2}$ voir aussi la section D.2.5 [p. 205]. Pour cela, remarquons que la rigidité en cisaillement, dans le repère d'isotropie transverse du matériau, s'écrit :

$$\mathbb{S}_{cis}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_{TN} & 1 \\ 0 & G_{LT} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{S}_{cis}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_{LT} & 1 \\ 0 & G_{TN} \end{pmatrix} \quad (\text{D.43})$$

L'absence de terme extra-diagonaux simplifie grandement la relation matricielle (D.17), dont les deux premières lignes sont en réalité les relations (D.16). En effet, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), si bien que (D.16) se réduit à :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{6}{5e^1} S_{44}^1 Q_x^1 - \frac{1}{10} S_{44}^1 \tau_x^{1,2} \\ 0 &= \frac{6}{5e^2} S_{44}^2 Q_x^2 - \frac{1}{10} S_{44}^2 \tau_x^{1,2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_x^{1,2} = \frac{12Q_x^1}{e} \text{ et } Q_x^1 = Q_x^2 \quad (\text{D.44})$$

En outre, toujours dans l'équation matricielle (D.17), la nullité du coefficient $\beta^{1,2}$ fournit alors :

$$0 = -\frac{1}{10} (S_{44}^1 Q_x^1 + S_{44}^2 Q_x^2) + \frac{2e}{15} (S_{44}^1 + S_{44}^2) \tau_x^{1,2} \quad (\text{D.45})$$

La combinaison des équations (D.44) et (D.45), induit la nullité de toutes les grandeurs $\tau_x^{1,2}, Q_x^1$ et Q_x^2 . Pour finir, l'évaluation de $\gamma^{1,2}$ dans (D.17) (qui n'est rien d'autre que la seconde ligne de (D.13)) nous donne :

$$\frac{2e}{15} (S_{55}^1 + S_{55}^2) \tau_y^{1,2} = \frac{2e}{15} \left(\frac{1}{G_{LT}} + \frac{1}{G_{TN}} \right) \tau_y^{1,2} = U_y^2 - U_y^1 - \frac{e}{2} (\phi_y^2 + \phi_y^1) + \frac{1}{10} (S_{55}^1 Q_y^1 + S_{55}^2 Q_y^2) \quad (\text{D.46})$$

Condensation des efforts d'arrachements Pour conclure cette partie, ajoutons que la condensation des efforts d'arrachement aux interfaces s'effectue de manière analogue à la démarche menée sous-section D.2.5 [p. 206]. Les simplifications sont ici remarquables, grâce aux symétries du champ de déplacement vertical (D.39) :

$$D_\nu^{2,3} = 2U_z^2 \text{ et } D_\nu^{1,2} = U_z^2 - U_z^1$$

En utilisant l'équation de comportement en arrachement (D.14), nous relierons alors le déplacement vertical aux efforts d'arrachements ν :

$$D_\nu^{2,3} = \frac{9e}{70E_T} (\nu^{1,2} + \nu^{3,4}) + \frac{26e}{35E_T} \nu^{2,3} \text{ et } D_\nu^{1,2} = \frac{9e}{70E_T} \nu^{2,3} + \frac{26e}{35E_T} \nu^{1,2} \quad (\text{D.47})$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} D_\nu^{1,2} \\ D_\nu^{2,3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_T} \begin{pmatrix} \frac{26}{35} & \frac{9}{70} \\ \frac{18}{70} & \frac{26}{35} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \nu^{1,2} \\ \nu^{2,3} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \nu^{1,2} \\ \nu^{2,3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_T} \frac{2450}{1271} \begin{pmatrix} \frac{26}{35} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{18}{70} & \frac{26}{35} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_\nu^{1,2} \\ D_\nu^{2,3} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.48})$$

Résumé intermédiaire

La condensation réalisée à l'aide des équations algébriques a, jusqu'ici, permis de montrer que :

- les 7 inconnues $N_{xy}^i, M_{xy}^i, Q_x^i, \tau_x^{1,2}$ sont nulles ;
- les 7 autres champs $N_{xx}^i, M_{xx}^i, \tau_y^{1,2}, \nu^{1,2}, \nu^{2,3}$ peuvent s'exprimer simplement à l'aide de nos inconnues principales.

Nous restent à l'étude 12 grandeurs :

$$N_{yy}^i, M_{yy}^i, Q_y^i, U_y^i, U_z^i, \Phi_y^i$$

reliées par autant d'équations différentielles. Plus précisément, 6 équations d'équilibre (D.9b), (D.9d), (D.9e) et 6 équations de comportement : les deuxièmes lignes de (D.40), (D.41) et (D.12).

La condensation vise, au moyen des équations différentielles, à diviser par deux la taille du système différentiel. Mais ceci ne s'obtient qu'au prix d'une élévation du degré d'équation !

Aussi, avant d'aborder la dernière partie, réécrivons-nous nos équations en profitant des simplifications déjà obtenues.

Nos 6 équations d'équilibre (D.9b), (D.9d), (D.9e) s'expriment sous forme explicite comme suit :

$$(N_{yy}^1)' + \tau_y^{1,2} = 0 \quad (\text{D.49a})$$

$$(N_{yy}^2)' - \tau_y^{1,2} = 0 \quad (\text{D.49b})$$

$$(M_{yy}^1)' + \frac{e}{2}\tau_y^{1,2} - Q_y^1 = 0 \quad (\text{D.49c})$$

$$(M_{yy}^2)' + \frac{e}{2}\tau_y^{1,2} - Q_y^2 = 0 \quad (\text{D.49d})$$

$$(Q_y^1)' + \nu^{1,2} = 0 \quad (\text{D.49e})$$

$$(Q_y^2)' + \nu^{2,3} - \nu^{1,2} = 0 \quad (\text{D.49f})$$

En combinant les deux premières équations (D.49a)–(D.49b), nous obtenons l'égalité $N_{yy}^1 = -N_{yy}^2$. Par conséquent, nous notons par la suite $N = N_{yy}^1$ et abaissons d'une unité le nombre d'inconnue. Par ailleurs, le déplacement selon y des différentes couches n'intervient dans les équations restantes qu'au travers de la différence $U_y^2 - U_y^1$. Par conséquent, nous notons simplement $v = U_y^2 - U_y^1$.

Dans le cas de la plaque bornée : nous avons de plus, par symétrie relativement au plan $y = 0$, $v(y)$, $\varphi^1(y)$ et $\varphi^2(y)$ impairs et $U_z^1(y)$ et $U_z^2(y)$ pairs.

Conformément à l'équation (D.32), en remarquant ici que $\bar{e} = e$ et $\bar{G} = \frac{G_{LT} + G_{TN}}{2}$, nous posons les vecteurs : \mathbf{Y} inconnues principales et $\tilde{\mathbf{Y}}$ inconnues secondaires suivants :

$$\mathbf{Y}(u) = \left(\frac{v}{e}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{Q^1}{eE_T}, \frac{Q^2}{eE_T} \right) (bu) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{Y}}(u) = \left(\frac{N}{eE_T}, \frac{M^1}{e^2E_T}, \frac{M^2}{e^2E_T}, \frac{U_z^1}{e}, \frac{U_z^2}{e} \right) (bu)$$

où b est la demi-largeur de la plaque dans le cas de la plaque bornée, et une valeur arbitraire (par exemple $4e$) dans le cas de la plaque infinie.

Condensation des équations par les équations différentielles

L'utilisation des équations de comportement en membrane (D.40)–(D.41) donne alors :

$$(v^1)'(y) = \frac{1}{eE_T} (-\nu_{TL}N_{xx}^1 + N_{yy}^1) = \varepsilon\nu_{LT} + \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}{eE_T} N_{yy}^1 \quad (\text{D.50a})$$

$$(v^2)'(y) = \varepsilon\nu_{TL} + \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}{eE_L} N_{yy}^2 \quad (\text{D.50b})$$

$$(\varphi^1)'(y) = \frac{12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}{e^3E_T} M_{yy}^1 \quad (\text{D.50c})$$

$$(\varphi^2)'(y) = \frac{12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}{e^3E_L} M_{yy}^2 \quad (\text{D.50d})$$

En combinant (D.50a) et (D.50b), et en ajoutant (D.50c), (D.50d), (D.49e), (D.49f), dans lesquelles les inconnues ν sont remplacées à l'aide de (D.48), nous obtenons un premier système différentiel simple :

$$\mathbf{Y}' = \mathbb{A} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{F} \quad (\text{D.51})$$

dans lequel :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -f \frac{E_L + E_T}{E_L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12f \frac{E_T}{E_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1820 b}{1271 e} & \frac{-2450 b}{1271 e} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2450 b}{1271 e} & \frac{1820 b}{1271 e} \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e} \varepsilon(\nu_{TL} - \nu_{LT}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } f = \frac{(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})b}{e}.$$

Le dernier bloc est obtenu en remarquant que (D.49e)–(D.49f) s'écrit avec (D.48) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (Q_y^1)' \\ (Q_y^2)' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^{1,2} \\ \nu^{2,3} \end{pmatrix} = \frac{2450}{1271} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{26}{35} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{18}{70} & \frac{26}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\nu^{1,2} \\ D_\nu^{2,3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2450}{1271} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{26}{35} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{18}{70} & \frac{26}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_z^1 \\ U_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2450}{1271} \begin{pmatrix} \frac{26}{35} & -\frac{17}{35} \\ \frac{35}{35} & -\frac{17}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_z^1 \\ U_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1820}{1271} & -\frac{1190}{1271} \\ -\frac{2450}{1271} & \frac{1820}{1271} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_z^1 \\ U_z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puis, nous pouvons rappeler le lien existant entre cisaillement τ et les inconnues principales, (D.46) s'écrit en effet :

$$\begin{aligned} \frac{2e}{15} \frac{G_{LT} + G_{TN}}{G_{LT}G_{TN}} \tau &= v - \frac{e}{2} (\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{10} \left(\frac{Q_y^1}{G_{TN}} + \frac{Q_y^2}{G_{LT}} \right) \\ \frac{\tau b}{aE_T} &= v - \frac{e}{2} (\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{10} \left(\frac{Q_y^1}{G_{TN}} + \frac{Q_y^2}{G_{LT}} \right) \quad \text{avec } a = \frac{15b}{2e} \frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{1}{E_N} \end{aligned}$$

En outre, les trois équations d'équilibre (D.49a), (D.49b) et (D.49c), ainsi que les deux lois de comportements (D.13) écrites pour $i = 1, 2$ donnent :

$$\tilde{\mathbf{Y}}' = \mathbb{B} \cdot \mathbf{Y} \quad (\text{D.52})$$

avec :

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{-aE_N}{10G_{TN}} & \frac{-aE_N}{10G_{LN}} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} & \frac{b}{e} - \frac{-aE_N}{10G_{TN}} & \frac{-aE_N}{20G_{LN}} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} & \frac{aE_N}{20G_{TN}} & \frac{b}{e} - \frac{aE_N}{20G_{LN}} \\ \frac{-aE_N}{10G_{TN}} & -\frac{b}{e} + \frac{aE_N}{10G_{TN}} & \frac{aE_N}{20G_{TN}} & \frac{6bE_N}{5eG_{TN}} - \frac{aE_N^2}{100G_{TN}^2} & -\frac{aE_N^2}{100G_{TN}G_{LN}} \\ \frac{-aE_N}{10G_{LN}} & \frac{aE_N}{10G_{LN}} & -\frac{b}{e} + \frac{aE_N}{20G_{LN}} & -\frac{aE_N^2}{100G_{TN}G_{LN}} & \frac{6bE_N}{5eG_{LN}} - \frac{aE_N^2}{100G_{LN}^2} \end{pmatrix}$$

En combinant les équations (D.51) et (D.52) nous trouvons en définitive un système matriciel, de taille 5×5 , différentiel, du second ordre :

$$\mathbf{Y}'' = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbf{Y}$$

Le vecteur \mathbf{F} , traduisant les conditions aux limites en traction, n'apparaît pas ici mais tiendra un rôle primordial dans la détermination des constantes d'intégrations.

Conditions aux limites

Théorème D.4.1 Conditions aux limites. *Les conditions aux limites dans le cas de la traction uniaxiale sont des conditions de bord libre sur les faces en $\pm b$:*

$$N_{xy}^i(\pm b) = 0 \quad N_{yy}^i(\pm b) = 0, \quad M_{xy}^i(\pm b) = 0 \quad M_{yy}^i(\pm b) = 0, \quad Q_y^i(\pm b) = 0$$

Utilisant les lois de comportement, nous en déduisons les conditions aux limites pour nos inconnues principales :

$$(U_x^i)'(\pm b) = \frac{\Delta S_{16}^i}{\ell S_{11}^i}, \quad (U_y^i)'(\pm b) = \frac{\Delta S_{12}^i}{\ell S_{11}^i}, \quad (\phi_x^i)'(\pm b) = 0, \quad (\phi_y^i)'(\pm b) = 0, \quad Q_y^i(\pm b) = 0$$

Pour écrire les conditions aux limites, nous distinguons le cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

1. Cas de la plaque bornée. Avec les conditions de parité, en fonction des champs inconnus \mathbf{Y} et $\tilde{\mathbf{Y}}$, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{Y}(0) = 0 \\ Y_4(1) = 0 \\ Y_5(1) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{Y}}_1(1) = 0 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2(1) = 0 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_3(1) = 0 \end{array} \right.$$

avec $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbb{A}^{-1} \cdot [\mathbf{Y}' - \mathbf{F}]$

2. Cas de la plaque semi-infinie. En fonction des champs inconnus \mathbf{Y} et $\tilde{\mathbf{Y}}$, on obtient les conditions aux limites suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{Y}(u) = 0 \\ Y_4(0) = 0 \\ Y_5(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{Y}}_1(0) = 0 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2(0) = 0 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_3(0) = 0 \end{array} \right.$$

D.4.3 Résolution avec le modèle $M4 - 2n + 1m$

Les champs inconnus principaux sont les déplacements et efforts généralisés :

$$\begin{cases} u^i(x, y) = \varepsilon x \\ v^i(x, y) = v^i(y) \end{cases}; \quad W_3(x, y) = w(y); \quad N_{\alpha\beta}^i(x, y) = N_{\alpha\beta}^i(y); \quad \tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) = \tau_{\alpha}^{j,j+1}(y) \quad (\text{D.53})$$

La symétrie par rapport au plan $z = 0$, analogue de (D.39), permet de réduire l'étude au demi-stratifié inférieur et garantit $W_3 = 0$.

Condensation à l'aide des équations algébriques

Nous condensons les efforts membranaires N_{xx}^i exactement de la même manière que dans le cadre LS1 (D.42). Par ailleurs, l'égalité des déplacements longitudinaux $u^i(x, y) = \varepsilon x$ dans (D.53) montre, combinée avec la loi de comportement (D.38), que le cisaillement $\tau_x^{1,2}$ est nul.

En l'absence d'un déplacement vertical W_3 , la loi de comportement en cisaillement (D.37) sur $\tau_y^{1,2}$ devient également une équation algébrique. Nous avons alors la relation :

$$v^2 - v^1 = \frac{e}{3} (S_{55}^1 + S_{55}^2) \tau_y^{1,2} = \frac{e}{3} \left(\frac{1}{G_{LT}} + \frac{1}{G_{TN}} \right) \tau_y^{1,2}$$

Les déplacements transverses v^i n'apparaissent qu'au travers de la différence $v^2 - v^1$, nous notons donc à présent $v = v^2 - v^1$:

$$v = \frac{e}{3} \frac{G_{LT} + G_{TN}}{G_{LT}G_{TN}} \tau_y^{1,2} \quad (\text{D.54})$$

Condensation à l'aide des équations différentielles

Les équations d'équilibres sont dans le cadre de la simplification (D.53) :

$$N_{xy}^{1'} = 0 \quad (\text{D.55a})$$

$$N_{xy}^{2'} = 0 \quad (\text{D.55b})$$

$$N_{yy}^{1'} + \tau_y^{1,2} = 0 \quad (\text{D.55c})$$

$$N_{yy}^{2'} - \tau_y^{1,2} = 0 \quad (\text{D.55d})$$

$$T_3^+ + T_3^- + \sum_{i=1}^n \left[\frac{e^i}{2} (\tau_y^{i,i+1} + \tau_y^{i-1,i})' \right] = 0 \quad (\text{D.55e})$$

Des deux premières équations d'équilibres, se déduit la nullité de N_{xy}^i . Nous condons les deux équations suivantes en posant :

$$N' + \tau = 0 \quad (\text{D.56})$$

équation dans laquelle $N = N_{yy}^1 = -N_{yy}^2$ se réfère aux efforts membranaires et $\tau = \tau_y^{1,2}$ désigne l'unique contrainte de cisaillement d'interface non nulle.

La différence des déplacements transverses dans (D.23) se simplifie ainsi :

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{N}{e} (a^1 + a^2) \text{ avec } a^1 \text{ et } a^2 \text{ défini par (D.24)} \\ v'' &= \frac{N}{e} \left(\frac{1}{E_T} (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) + \frac{1}{E_L} (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \right) \\ v'' &= \frac{N}{e} \frac{E_T + E_L}{E_T E_L} (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

En combinant les équations (D.54), (D.56) et (D.57), nous trouvons :

$$v'' = 3 \left(\frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}{e^2} \right) \left(\frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left(\frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) v$$

Dans le cas de la plaque bornée : nous avons de plus, par symétrie relativement au plan $y = 0$, $v(y)$ impair. Il reste à exprimer les conditions aux limites. Distinguons le cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

1. Cas de la plaque bornée. Avec la condition de parité, les conditions aux limites s'écrivent :

$$v'(b) = \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \quad v(0) = 0$$

L'équation différentielle ci dessus s'intègre facilement en posant :

$$\lambda = 3 \left(\frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}{e^2} \right) \left(\frac{G_{TN}G_{LN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left(\frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right)$$

Nous en déduisons la fonction inconnue $v(y)$ en notant $\mu = \sqrt{\lambda}$:

$$v(y) = \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \frac{\text{sh}(\mu y)}{\mu \text{ch}(\mu b)}$$

Soit encore, en vertu de l'équation algébrique (D.54) :

$$\tau(y) = \frac{3}{e} \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{\text{sh}(\mu y)}{\mu \text{ch}(\mu b)} \quad (\text{D.58})$$

Notons que dans ce modèle, une seule distance caractéristique de l'effet de bord apparaît $\left(\frac{1}{\mu} \right)$. Lorsque les modules d'Young E_L et E_T sont très différents et les modules de cisaillements proches (notés G), la distance caractéristique est de l'ordre de $e\sqrt{\frac{2E_T}{3G}}$, ce qui, pour les matériaux composites courants, reste de l'ordre de grandeur de e .

2. Cas de la plaque semi-infinie. En prenant l'origine au bord, les conditions aux limites s'écrivent :

$$v'(0) = \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}); \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} v(y) = 0$$

On en déduit, la différence des déplacements v et la contrainte de cisaillement :

$$v(y) = \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \frac{\exp(\mu y)}{\mu}$$

$$\tau(y) = \frac{3}{e} \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{\exp(-\mu y)}{\mu}$$

Le cisaillement maximal est évaluée au bord :

$$\tau^{\max} = \frac{3}{\mu c} \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}}$$

D.4.4 Analyse du cisaillement d'interface

Nous nous intéressons principalement au cisaillement à l'interface $0^\circ - 90^\circ$. Les courbes dans les cadres SCLS1, LS1 et L-LS1, ont déjà été données au chapitre 1 [p. 1] (figures 1.5, 1.6, 1.7 [p. 34, 35, 36]). Nous ajoutons à la celle issue du modèle $M4 - 2n + 1m$ (D.58). Si les différents

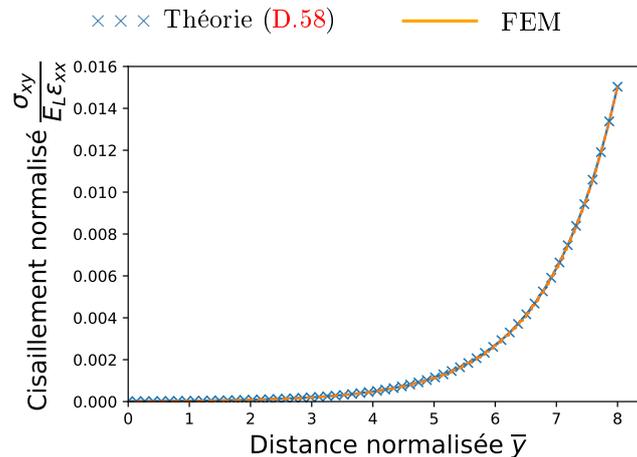


FIGURE D.2 – Comparaison des courbes analytique-numérique, paramètres matériaux identiques à ceux de la sous-section 1.8.3 [p. 33]

modèles prédisent des efforts très similaires loin du bord libre, les écarts sont particulièrement marqués à son voisinage immédiat. En effet pour les modèles LS0 et SCLS1, une condition aux limites impose à $\underline{\tau} \cdot \underline{n}$ de s'annuler au bord. Ce n'est pas le cas dans les modèles LS1 et $M4 - (2n + 1)m$.

Une interprétation beaucoup plus riche de ces courbes mène à considérer celles de cisaillement du LS1 et $M4 - (2n + 1)m$ discontinues à l'extrémité et telles que l'on ait $\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$ au bord. Essayons de nous en convaincre, par exemple pour le modèle $M4 - (2n + 1)m$, qui est le cas limite du LS0 lorsque le module d'Young hors plan E_N tend vers l'infini (la souplesse $S_{3333} = \frac{1}{E_N} \rightarrow 0$). Nous traçons à la figure D.3 [p. 220] les différentes solutions en cisaillement d'interface des modèles LS0 avec les raideurs normales E_N , $10E_N$, $100E_N$ et $1000E_N$. Progressivement, les courbes des modèles LS0 épousent la solution analytique du $M4 - (2n + 1)m$, avec un retour de cisaillement à zéro au bord, de plus en plus raide. C'est là un argument important en faveur de l'interprétation de la courbe de cisaillement du $M4 - (2n + 1)m$ faisant intervenir une discontinuité à l'extrémité $y = b$.

En fait, des remarques semblables auraient pu être mentionnées à chacune des simplifications des modèles décrits dans l'annexe B [p. 165]. Par exemple, le passage du modèle SCLS1 au modèle LS1 s'effectue en faisant disparaître les efforts $\pi^{j,j+1}$. Cela entraîne :

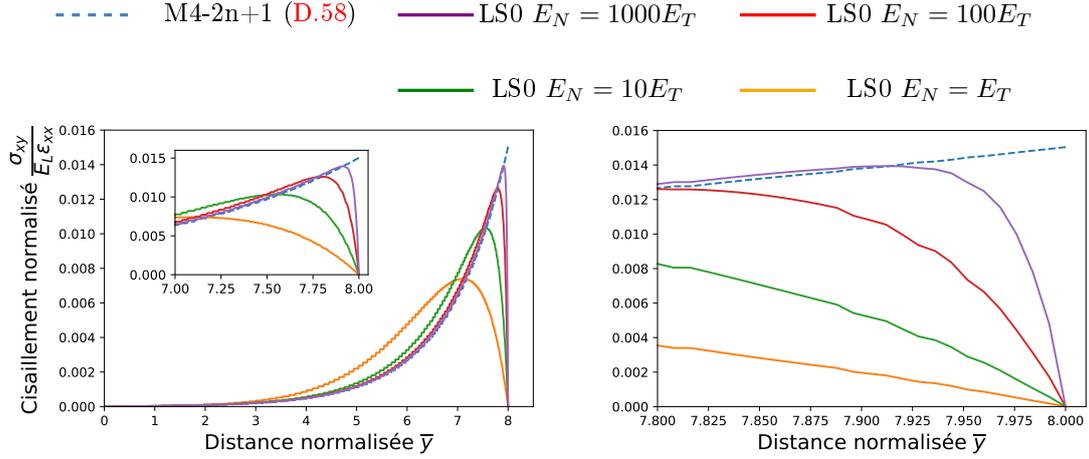


FIGURE D.3 – Solution obtenue avec le modèle LS0

1. la disparition des $V^{j,j+1}$
2. la suppression des équations d'équilibre dans lesquelles apparaissent ces efforts et qui sont associées à ces déplacements généralisés.
3. l'apparition de discontinuités de cisaillement τ car celles-ci ne sont plus pénalisées, énergétiquement parlant, dans l'écriture de la loi de comportement.

Pour interpréter ceci, nous pouvons postuler que :

- $\underline{\tau} \cdot \underline{n}$ est nul au bord mais peut être discontinu ;
- $\pi^{j,j+1}$ peuvent être définis dans le modèle LS1, à l'aide de l'équation d'équilibre (1.9d) [p. 9] du modèle SCLS1 comprise au sens des distributions ;

Chaque simplification revient à regarder les champs « de manière floue » au voisinage du bord, et à considérer qu'une distribution d'effort intérieur intense à son voisinage peut être schématisée par un effort localisé sur la frontière.

D.5 Résolution du système

Nous allons à présent détailler la méthode de résolution du système (D.31). Celle-ci n'est nullement triviale. En effet, sans précaution particulière, les termes intervenant dans nos matrices peuvent se disperser sur plusieurs ordres de grandeurs et induire des erreurs numériques.

D.5.1 Solution d'un système d'équations différentielles homogène du second ordre

Considérons un système d'équations différentielles du second ordre :

$$\mathbf{Y}''(y) = \mathbb{M} \cdot \mathbf{Y}(y) \quad (\text{D.59})$$

La résolution de ce système s'effectue en calculant les éléments propres de la matrice \mathbb{M} :

$$(\mathbb{M} - \lambda_p \mathbb{I}) \cdot \mathbf{Y}_p = \underline{0} \quad (\text{D.60})$$

où λ_p est une valeur propre de la matrice \mathbb{M} et \mathbf{Y}_p le vecteur propre correspondant. Les valeurs propres peuvent être simples ou multiples, réelles ou complexes.

D.5.2 Valeur propre simple

Théorème D.5.1 Solution cas réel. Si λ_p est une valeur propre réelle (non nulle), le système admet les deux solutions données par :

$$\begin{aligned} \lambda_p \in \mathbb{R} > 0 & \xrightarrow{\text{solutions}} \mathbf{Y}(y) = \mathbf{Y}_p(C_1 e^{\sqrt{\lambda_p} y} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda_p} y}) \\ \lambda_p \in \mathbb{R} < 0 & \xrightarrow{\text{solutions}} \mathbf{Y}(y) = \mathbf{Y}_p(C_1 \cos(\sqrt{|\lambda_p|} y) + C_2 \sin(-\sqrt{|\lambda_p|} y)) \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et \mathbf{Y}_p un vecteur propre réel.

Si $\lambda = a + bi$ est une valeur propre complexe associée au vecteur propre \mathbf{Y}_p , alors $\bar{\lambda} = a - bi$ est également une valeur propre de la matrice associée au vecteur propre $\bar{\mathbf{Y}}_p$. L'ensemble des solutions associées à chacune des valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ forme un espace vectoriel de dimension 4.

Théorème D.5.2 Solution, cas complexe. Les quatre solutions correspondant à λ et $\bar{\lambda}$ peuvent être écrites sous forme réelle comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(y) = & C_1 e^{cy} [\mathbf{U} \cos(dy) - \mathbf{V} \sin(dy)] + C_2 e^{cy} [\mathbf{U} \sin(dy) + \mathbf{V} \cos(dy)] \\ & + C_3 e^{-cy} [-\mathbf{U} \cos(dy) + \mathbf{V} \sin(dy)] + C_4 e^{-cy} [\mathbf{U} \sin(dy) - \mathbf{V} \cos(dy)] \end{aligned}$$

où $\sqrt{\lambda_p} = \pm(c + id)$ et $\mathbf{Y}_p = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$ et $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Théorème D.5.3 Solutions générales. Dans tous les cas, en notant les valeurs propres λ_p et les vecteurs propres \mathbf{Y}_p de la matrice \mathbb{M} , le vecteur $\mathbf{Y}(y)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$\mathbf{Y}(y) = \sum_p (a_p \mathbf{Y}_p \exp(\sqrt{\lambda_p} y) + b_p \mathbf{Y}_p \exp(-\sqrt{\lambda_p} y))$$

où $\sqrt{\lambda_p}$ est la racine carrée éventuellement complexe de λ_p dont la partie réelle est positive.

L'inverse de la partie réelle de $\sqrt{\lambda_p}$ est une distance caractéristique de l'effet de bord. Les coefficients a_p et b_p sont donnés par les conditions aux limites et donc par inversion d'un système linéaire. Dans le cas de la plaque bornée, dans la pratique pour que \mathbb{M} soit bien conditionnée, il est utile d'écrire le problème sous forme adimensionnelle (y compris sur la variable y remplacée par bu , $u \in [0, 1]$). Sinon, les différents coefficients de la matrice peuvent prendre sinon des valeurs dispersées sur plusieurs ordres de grandeur. Pour que la matrice « des conditions aux limites » servant au calcul de a_p et b_p soit bien conditionnée, il est en outre utile de chercher $\mathbf{Y}(y)$ sous la forme :

$$\mathbf{Y}(u) = \sum_p c_p \mathbf{Y}_p (\exp(\sqrt{\lambda_p} b(u-1)) + p^\varepsilon \exp(-\sqrt{\lambda_p} b(u+1)))$$

où $p^\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est choisi en fonction de considération de symétrie des composantes $\mathbf{Y}(y)$ par rapport à y . La parité des solutions est ainsi « forcée ». Le facteur $(u-1)$, dans les exponentielles, permet en outre d'écrire les conditions aux limites en $y = b$ sans avoir des coefficients démesurément grands ou petits dans la matrice permettant le calcul des constantes c_p .

Solution en cas d'interfaces fissurées

Dans le chapitre **D** [p. 201] a été mise en place une méthodologie systématique permettant d'obtenir des solutions analytiques, dans les cadres multiparticulaires, et pour des problèmes plans. Nous allons ici étendre cette méthodologie à un solide stratifié, fendu par une interface endommagée.

- ★ Nous débuterons, section **E.1** [p. 223], par le cas simple d'une unique interface rompue. Nous montrerons alors, que la solution est obtenue en résolvant d'abord séparément le problème mécanique posé dans la zone saine d'une part, et celle délamainée d'autre part, puis en appliquant des conditions de raccord à la jonction entre ces deux domaines.
- ★ Dans un deuxième temps, nous étendrons section **E.2** [p. 225] la démarche précédente au cas d'un solide comportant plusieurs interfaces fissurées. Nous soulignerons à cette occasion que la résolution se ramène à la concaténation de problèmes élémentaires, posés sur plusieurs sous-domaines, puis raccordés.
- ★ Pour terminer, la section **E.3** [p. 225], illustrative, permettra de déterminer les solutions en déplacements et en contraintes à l'interface de l'essai classique DCB.

E.1 Solution à une seule fissure

Hypothèse E.1.1 Solide possédant une unique fissure. *On suppose qu'un front de délamination dégrade l'interface indiquée $k, k+1$. Cette fissure, de longueur a , se propage dans la direction y à partir du bord libre $y = b$. Pour respecter la propriété d'invariance suivant x , le front de délamination s'étend sur toute la longueur du stratifié (voir figure **E.1** [p. 223]).*

Pour résoudre ce problème, les expressions des champs inconnus dans la zone I (non délamainée)

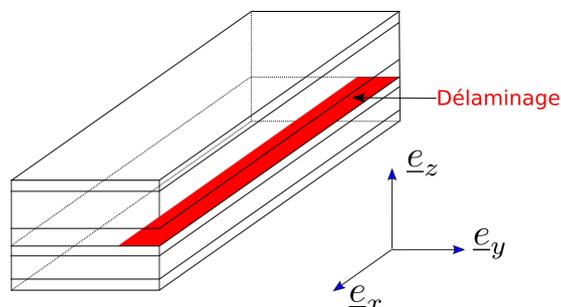


FIGURE E.1 – Délamination d'une unique interface séparant le stratifié en deux dans la zone II

et II (délamainée) sont trouvées séparément ; ensuite, en imposant la continuité des déplacements et les conditions limites, nous obtenons la solution générale du problème. La solution pour la partie saine de la plaque (zone I) peut, elle, être trouvée à l'aide des résultats du chapitre **D** [p. 201]. Dans cette section, nous allons détailler la solution de la plaque délamainée (zone II).

Hypothèse E.1.2 Délaminage de l'interface $k, k+1$. Dans la zone II, nous supposons que l'interface $k, k+1$ est complètement rompue. Ainsi les trois conditions de bords libres sont ajoutées :

$$\tau_x^{k,k+1} = 0 \quad \tau_y^{k,k+1} = 0 \quad \nu^{k,k+1} = 0$$

Les relations de comportements en souplesse, à l'interface délaminée sont inchangées si nous augmentons les déformations généralisées des interfaces avec les multiplicateurs de Lagrange assurant la condition de bord libre :

$$\begin{aligned} D_\alpha^{k,k+1} - \mu_\alpha^{k,k+1} &= -\frac{1}{10}(4S_{\alpha 3\beta 3}^k Q_\beta^k + 4S_{\alpha 3\beta 3}^{k+1} Q_\beta^{k+1}) - \frac{1}{30}(e^k 4S_{\alpha 3\beta 3}^k \tau_\beta^{k-1,k} + e^{k+1} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{k+1} \tau_\beta^{k+1,k+2}) \\ &\quad + \frac{2}{15}(e^k 4S_{\alpha 3\beta 3}^k + e^{k+1} 4S_{\alpha 3\beta 3}^{k+1}) \tau_\beta^{k,k+1} \\ D_\nu^{k,k+1} - \mu_\nu^{k,k+1} &= \frac{9}{70}(e^k S_{3333}^k \nu^{k-1,k} + e^{k+1} S_{3333}^{k+1} \nu^{k+1,k+2}) + \frac{13}{35}(e^k S_{3333}^k + e^{k+1} S_{3333}^{k+1}) \nu^{k,k+1} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

où μ désigne les champs de discontinuité de déplacement à l'interface. En écrivant les équations du modèle LS1 et en appliquant la même méthode que celle utilisée dans l'état non délaminé, un système similaire de $5n$ équations différentielles du second ordre est obtenu :

$$\mathbf{Y}'' = \mathbb{M}_d \cdot \mathbf{Y} \quad (\text{E.2})$$

\mathbf{Y} est un vecteur inconnu de dimension $5n$, avec la même expression et \mathbb{M}_d est un $5n \times 5n$ matrice qui dépend des propriétés mécaniques du matériau, de l'orientation, de l'épaisseur des couches et aussi de la position de la fissure. Il convient de noter que le système d'équations dans l'état non délaminé (D.31) et l'état délaminé (E.2) a la même forme, à cela près que la matrice \mathbb{M} dans l'état non délaminé devient \mathbb{M}_d .

E.1.1 Expression de la matrice délaminée \mathbb{M}_d

Les contraintes interlaminaires sont nulles, donc connues, au niveau de l'interface délaminée. Elles doivent en conséquence être éliminées. D'abord du système (D.17) par une procédure analogue à la condensation des multiplicateurs de Lagrange de la section A.2 [p. 155]. Puis la contrainte d'arrachement doit être éliminée du système (D.21) qui devient :

$$\boldsymbol{\Sigma}^\nu = \mathbb{C}_d^\nu \cdot (\mathbf{E}^\nu - \mathbf{E}_0^\nu) \quad (\text{E.3})$$

La matrice \mathbb{C}_d^ν se déduit de la matrice \mathbb{C}^ν en condensant le multiplicateur de Lagrange correspondant à $\nu^{k,k+1}$. En substituant les matrices saines par leurs « versions endommagées » dans les équations (D.25a)–(D.25d) et (D.27), nous obtenons le système de l'équation (E.2). Il est à noter que l'expression du vecteur \mathbf{Y} ici, est la même que (D.31). Enfin, les équations de comportement correspondant à l'interface (E.1) peuvent être utilisées afin de calculer les champs de déplacement de discontinuité.

Pour trouver la solution générale du problème, il est nécessaire d'appliquer les bonnes conditions de raccord. Il existe deux systèmes de $5n$ équations d'ordre 2, il y aura $2 \times 10n$ constantes d'intégration ; nous avons besoin d'autant de conditions aux limites pour déterminer ces constantes inconnues. Il y a $10n$ conditions limites aux bords libres $y = \pm b$. Les $10n$ autres conditions sont déduites de la continuité des déplacements et des contraintes généralisées entre les zones I et II. La continuité du déplacement amène $5n$ équations :

$$\begin{aligned} (U_x^i(y_p))^I &= (U_x^i(y_p))^{II}; & (U_y^i(y_p))^I &= (U_y^i(y_p))^{II}; & (U_z^i(y_p))^I &= (U_z^i(y_p))^{II} \\ (\phi_x^i(y_p))^I &= (\phi_x^i(y_p))^{II}; & (\phi_y^i(y_p))^I &= (\phi_y^i(y_p))^{II}; \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

La continuité de $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_y$ en $y = y_p$ entraîne celle de $\underline{N} \cdot \underline{e}_y$, $\underline{M} \cdot \underline{e}_y$, $\underline{Q} \cdot \underline{e}_y$. Nous avons donc par conséquent :

$$\begin{aligned} (N_{xy}^i(y_p))^I &= (N_{xy}^i(y_p))^{II}; & (N_{yy}^i(y_p))^I &= (N_{yy}^i(y_p))^{II}; & (Q_y^i(y_p))^I &= (Q_y^i(y_p))^{II} \\ (M_{xy}^i(y_p))^I &= (M_{xy}^i(y_p))^{II}; & (M_{yy}^i(y_p))^I &= (M_{yy}^i(y_p))^{II}; \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

En utilisant les lois de comportement, ces expressions peuvent être exprimées sur les inconnues principales afin d'établir $10n$ conditions aux limites.

E.2 Cas où plusieurs interfaces délaminent

Hypothèse E.2.1 Multi-fissures. *Nous nous intéressons maintenant au cas où plusieurs interfaces délaminent.*

Le problème est comparable au précédent, en revanche, cette fois, il existe plusieurs fissures d'interfaces de longueurs différentes, comme le montre la figure E.2 [p. 225]. L'approche consiste



FIGURE E.2 – Délaminage de plusieurs interfaces

ici à généraliser la méthode appliquée dans la section E.1 [p. 223]. Dans le cas d'une seule fissure, le stratifié a été divisé en deux zones dont la pointe de fissure constitue la frontière. De même, en présence de plusieurs fissures, le stratifié est segmenté suivant la direction y à chaque pointe de fissure, comme le montre la figure E.3 [p. 225]. Le système d'équations régissant

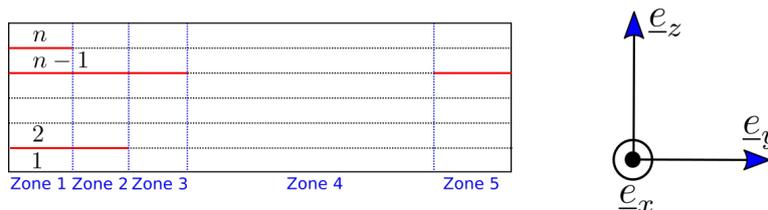


FIGURE E.3 – Délaminage de plusieurs interfaces séparant le stratifié en une multitude de zone

chaque zone est le même qu'en (D.31) pour les zones non délaminées ou (E.2) pour les zones délaminées, sachant que l'expression de la matrice \mathbb{M}_d est modifiée en fonction du nombre et de la position des fissures. Pour q zones, il y aura donc $5n \times q$ équations différentielles du second ordre à résoudre. Ces équations sont complétées par $10n \times q$ conditions limites permettant de déterminer les constantes d'intégration inconnues.

Ces conditions aux limites sont scindées en deux groupes :

1. Les conditions de bord libre aux bords $y = \pm b$ donnent $10n$ conditions limites.
2. Les $10n$ conditions de continuité, cinq conditions de continuité en déplacement par couche comme (E.4) et cinq conditions de continuité des contraintes par couche comme (E.5) entre chaque zones adjacentes.

Par conséquent, nous obtenons au total $10n + 10n \times (q - 1) = 10n \times q$ conditions limites. Ces conditions constituent un système d'équations algébriques linéaires de $10n \times q$ avec $10n \times q$ des constantes inconnues qui peuvent être facilement résolues.

E.3 Illustration sur l'essai DCB

L'enjeu de cette section est de fournir la solution analytique, dans le cadre LS1, de l'essai très classique « Double Cantilever Beam ». En plus du résultat classique « forces-déplacement », il s'agit ici de fournir l'expression des champs de contraintes aux interfaces. Cet essai peut sembler trivial au regard de la généralité de la démarche proposée. Pourtant la littérature concernant ce cas simple est abondante ... tout en restant parfois incomplète. Ainsi la solution analytique est parfois proposée dans le cadre d'Euler Bernoulli, en supposant les deux bras de la partie droite encastree en $y = 0$. Ce point de vue n'est pas satisfaisant. Améliorant cette solution, Škec et al. [2019] détaille la résolution complète dans le cadre de Timoshenko.

E.3.1 Position du problème

Nous étudions une poutre stratifiée, dont les deux couches sont constituées du même matériau isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . L'épaisseur de chacune des couches est notée e . La longueur des bras dans la partie délaminée est notée L . Dans la partie saine la poutre est semi-infinie.

E.3.2 Résolution dans la partie saine

Considérons le milieu semi-infini plan occupant le domaine $y \in]\infty, 0[$, $z \in [-e, e]$, figure E.4 [p. 226]. La symétrie du problème autorise la réduction à l'étude de la moitié inférieure. Concernant le champ de déplacement, par rapport à la modélisation générale présentée (D.6)

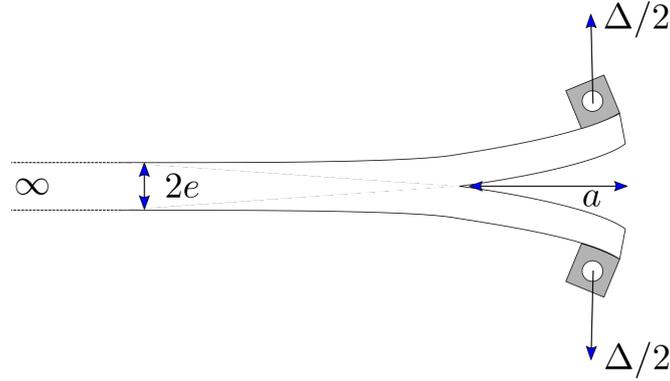


FIGURE E.4 – Schéma de la poutre DCB

[p. 203], nous pouvons préciser les expressions :

$$U_x^1(x, y) = 0; \quad U_y^1(x, y) = v(y); \quad U_z^1(x, y) = w(y); \quad \Phi_x^1(x, y) = 0; \quad \Phi_y^1(x, y) = \varphi(y) \quad (\text{E.6})$$

Les efforts intérieurs généralisés $N_{\alpha\beta}^1$, $M_{\alpha\beta}^1$, Q_α^1 , $\tau_\alpha^{1,2}$, $\nu^{1,2}$ ne sont fonction que de la variable y . La symétrie par rapport au plan $z = 0$ permet de réduire la nombre d'inconnue d'intérêt. Nous avons en effet trivialement :

$$U_y^1 = U_y^2; \quad U_z^1 = -U_z^2; \quad \Phi_y^1 = -\Phi_y^2; \quad Q_y^1 = -Q_y^2 \quad (\text{E.7})$$

Notre étude peut donc se restreindre aux inconnues définies sur la couche inférieure :

$$N_{xx}^1, N_{xy}^1, N_{yy}^1, M_{xx}^1, M_{xy}^1, M_{yy}^1, Q_x^1, Q_y^1, v(y), w(y), \varphi(y)$$

Étant entendu que $\tau_x^{1,2} = 0$, les efforts d'interfaces sont :

$$\tau_y^{1,2}, \nu^{1,2}$$

soit au total 13 inconnues.

Réduction du nombre d'inconnues à l'aide des équations algébriques

Condensation des efforts membranaires Tout comme à la section D.3.4 [p. 211], nous pouvons condenser un grand nombre de champs. En effet, nous pouvons utiliser la loi de comportement membranaire (D.10), (D.11) pour les couches 1 et 2, et utiliser la forme particulière de la souplesse pour obtenir :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v'(y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx}^1 \\ N_{yy}^1 \\ N_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi'(y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{12}{e^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx}^1 \\ M_{yy}^1 \\ M_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

De ces relations matricielles, nous déduisons que les efforts N_{xy}^1, M_{xy}^1 sont nuls. Par ailleurs, les efforts N_{xx}^1, M_{xx}^1 n'interviennent pas dans les équations différentielles du problème, ils peuvent se condenser en fonctions des inconnues $N_{yy}^1, N_{yy}^2, M_{yy}^1, M_{yy}^2$:

$$N_{xx}^1 = \nu N_{yy}^1 \text{ et } M_{xx}^1 = \nu M_{yy}^1$$

Ces deux équations ne sont rien d'autre que le produit d'application de la formule (D.15) au bi-couche d'étude. Elles permettront de reconstruire le champ de contraintes complet après résolution sur nos inconnues principales.

Nous avons donc ici été plus performants qu'anticipée dans la sous-section D.2.5 [p. 205] consacrée à la condensation des efforts membranaires. En effet, nous avons, en plus, tiré parti de la forme de la matrice de souplesse pour annuler les efforts généralisés N_{xy}^1 et M_{xy}^1 .

Condensation des efforts de cisaillement Q_x^1 et $\tau_x^{1,2}, \tau_y^{1,2}$. Condensons maintenant l'effort tranchant Q_x^1 et les efforts inter-laminaires $\tau_x^{1,2}, \tau_y^{1,2}$ (voir aussi la section D.2.5 [p. 205]). Pour cela, remarquons que la rigidité en cisaillement du matériau isotrope est :

$$\mathbb{S}_{cis}^i = \begin{pmatrix} \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Cette forme simplifie grandement la relation matricielle (D.17). Les deux premières lignes, étant donné que $\alpha_i = \phi_x^i - \frac{6}{5e^i} S_{45}^i Q_y^i = 0$, se réduisant à :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{6}{5e^1} S_{44}^1 Q_x^1 - \frac{1}{10} S_{44}^1 \tau_x^{1,2} \\ 0 &= \frac{6}{5e^2} S_{44}^2 Q_x^2 - \frac{1}{10} S_{44}^2 \tau_x^{1,2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_x^{1,2} = \frac{12Q_x^1}{e} \text{ et } Q_x^1 = Q_x^2 \quad (\text{E.10})$$

Par ailleurs, toujours dans l'équation matricielle (E.9), $\beta^{1,2} = 0$ fournit alors :

$$0 = -\frac{1}{10} (S_{44}^1 Q_x^1 + S_{44}^2 Q_x^2) + \frac{2e}{15} (S_{44}^1 + S_{44}^2) \tau_x^{1,2} \Rightarrow \frac{1}{5} Q_x^1 = \frac{4e}{15} \tau_x^{1,2} \quad (\text{E.11})$$

La combinaison des équations (E.10) et (E.11), induit la nullité de toutes les grandeurs $\tau_x^{1,2}, Q_x^1$ et Q_x^2 . Pour finir, l'évaluation de $\gamma^{1,2}$ dans (D.17) nous donne :

$$\frac{2e}{15} (S_{55}^1 + S_{55}^2) \tau_y^{1,2} = U_y^2 - U_y^1 - \frac{e}{2} (\phi_y^2 + \phi_y^1) + \frac{1}{10} (S_{55}^1 Q_y^1 + S_{55}^2 Q_y^2) \Rightarrow \frac{4e}{15} \tau_y^{1,2} = \frac{1}{10} (Q_y^1 + Q_y^2) = 0$$

Nous avons utilisé ici les conditions d'antisymétries mentionnées à l'équation (E.7)

Condensation de l'effort d'arrachement Pour conclure cette partie, la condensation de l'unique effort d'arrachement à l'interface peut être menée de manière analogue à la sous-section D.2.5 [p. 206]. Les simplifications ici sont remarquables, grâce aux symétries du champ de déplacement vertical :

$$D_\nu^{1,2} = -2w(y) = \frac{26e}{35E} \nu^{1,2} \quad (\text{E.12})$$

Résumé intermédiaire

La condensation à l'aide des équations algébriques a, jusqu'ici, permis de montrer que :

- les 4 inconnues $N_{xy}^1, M_{xy}^1, Q_x^1, \tau_y^{1,2}$ sont nulles ;
- les 3 autres champs $N_{xx}^1, M_{xx}^1, \nu^{1,2}$ s'expriment simplement à l'aide de nos inconnues principales.

Il reste à l'étude 6 grandeurs :

$$N_{yy}^1, M_{yy}^1, Q_y^1, v, w, \varphi$$

reliées par autant d'équations différentielles. Plus précisément, 3 équations d'équilibre (D.9b), (D.9d), (D.9e) et 3 équations de comportement : les deuxièmes lignes de (E.8) et (D.12).

Rappelons comment, à ce stade, s'écrivent nos équations simplifiées.

— Les 3 équations d'équilibre, sous forme explicite, en fonction de nos inconnues principales s'annotent comme suit :

$$(N_{yy}^1)' = 0 \quad (\text{E.13a})$$

$$(M_{yy}^1)' - Q_y^1 = 0 \quad (\text{E.13b})$$

$$(Q_y^1)' - \frac{35E}{13e}w = 0 \quad (\text{E.13c})$$

— Tandis que les équations de comportement s'écrivent ici :

$$v' = \frac{1}{eE} (N_{yy}^1 - \nu N_{xx}^1) = \frac{1}{eE} (1 - \nu^2) N_{yy}^1 \quad (\text{E.14a})$$

$$\varphi' = \frac{12}{e^3 E} (M_{yy}^1 - \nu M_{xx}^1) = \frac{12}{e^3 E} (1 - \nu^2) M_{yy}^1 \quad (\text{E.14b})$$

$$\varphi + w' = \frac{6}{5eG} Q_y^1 \quad (\text{E.14c})$$

Condensation du système d'équations différentielles

Nous pouvons à présent condenser les 6 équations différentielles d'ordre 1 pour former un système d'ordre 2 de taille 3. La combinaison des équations (E.13a) et (E.14a) exprime l'annulation de la dérivée second du champ de déplacement v :

$$v'' = 0$$

Les équations (E.13b), (E.14b) fournissent pas ailleurs :

$$\varphi'' = \frac{12}{e^3 E} (1 - \nu^2) Q_y^1$$

Enfin (E.13c) et (E.14c) s'assemblent pour donner :

$$\varphi + \frac{13e}{35E} (Q_y^1)'' = \frac{6}{5eG} Q_y^1$$

Ces trois équations se mettent sous la forme du système adimensionné suivant :

$$\begin{aligned} \bar{v}'' &= 0 \\ \varphi'' &= \frac{6}{e^2} (1 - \nu) \bar{Q}_y^1 \quad \text{avec } Q_y^1 = \bar{Q}_y^1 eG \\ \frac{13e^2}{70(1 + \nu)} (\bar{Q}_y^1)'' &= \frac{6}{5} \bar{Q}_y^1 - \varphi \end{aligned}$$

La solution de ce système différentiel est \bar{v} affine en y et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'' \\ (\bar{Q}_y^1)'' \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6(1 - \nu)}{e^2} \\ -\frac{70(1 + \nu)}{13e^2} & \frac{84(1 + \nu)}{13e^2} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \bar{Q}_y^1 \end{array} \right\} = \frac{2}{13e^2} \begin{pmatrix} 0 & 39(1 - \nu) \\ -35(1 + \nu) & 42(1 + \nu) \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \bar{Q}_y^1 \end{array} \right\}$$

Cette expression est donc de la forme :

$$\mathbf{Y}''(y) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}(y) = \frac{2}{13e^2} \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Y}(y) \quad \text{avec } \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 39(1 - \nu) \\ -35(1 + \nu) & 42(1 + \nu) \end{pmatrix}$$

Résolution du système différentiel

Valeurs propres et racines carrées Les valeurs propres $\widehat{\lambda}_+$, $\widehat{\lambda}_-$ de $\widehat{\mathbb{M}}$ sont :

$$\widehat{\lambda}_{\pm} = 21(1 + \nu) \pm \sqrt{42}\sqrt{(\nu + 1)(43\nu - 22)}$$

Pour un coefficient de Poisson thermodynamiquement admissible, $\nu \in [-1; 1/2]$, la racine carrée au second membre n'est pas définie. Les valeurs propres sont, par conséquent, complexes conjuguées :

$$\widehat{\lambda}_{\pm} = 21(1 + \nu) \pm i\sqrt{42}\sqrt{(\nu + 1)(22 - 43\nu)}$$

Les valeurs propres de la matrice \mathbb{M} sont simplement les multiples des valeurs propres de $\widehat{\mathbb{M}}$:

$$\lambda_{\pm} = \frac{2}{13e^2} (\widehat{\lambda}_{\pm})$$

Nous les notons plus simplement $\lambda = \lambda_+ \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda_-$. Les racines carrées complexes de $\widehat{\lambda}$ sont obtenues en résolvant :

$$\begin{cases} \widehat{\delta} = \widehat{a} + i\widehat{b} \\ \widehat{\delta}^2 = \widehat{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{a}^2 - \widehat{b}^2 = 21(1 + \nu) \\ 2\widehat{a}\widehat{b} = \sqrt{42}\sqrt{(\nu + 1)(22 - 43\nu)} \\ \widehat{a}^2 + \widehat{b}^2 = |\widehat{\lambda}| = \sqrt{1365}\sqrt{(1 - \nu)(1 + \nu)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{a} = \sqrt{\frac{\sqrt{1365}\sqrt{(1 - \nu)(1 + \nu)} + 21(1 + \nu)}{2}} \\ \widehat{b} = \sqrt{\frac{\sqrt{1365}\sqrt{(1 - \nu)(1 + \nu)} - 21(1 + \nu)}{2}} \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

Celles associées à λ sont donc :

$$\begin{cases} \delta = a + ib \\ \delta^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\sqrt{1365}\sqrt{(1 - \nu)(1 + \nu)} + 21(1 + \nu)}{13}} \\ b = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\sqrt{1365}\sqrt{(1 - \nu)(1 + \nu)} - 21(1 + \nu)}{13}} \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

Le vecteur propre $\mathbf{Y}_{\widehat{\lambda}}$ associé à $\widehat{\lambda}$ pour la matrice $\widehat{\mathbb{M}}$ est identique au vecteur propre \mathbf{Y}_{λ} associé à λ pour la matrice \mathbb{M} :

$$\begin{pmatrix} -\widehat{\lambda} & 39(1 - \nu) \\ -35(1 + \nu) & 42(1 + \nu) - \widehat{\lambda} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = \frac{39(1 - \nu)}{\lambda} x_2 \Leftrightarrow \mathbf{Y}_{\lambda} = \begin{Bmatrix} \frac{39(1 - \nu)}{\lambda} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Décomposons à présent ce vecteur propre sur sa partie réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\lambda} &= \begin{Bmatrix} \frac{39(1 - \nu)\bar{\lambda}}{|\lambda|^2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{39(1 - \nu) \left(21(1 + \nu) - i\sqrt{42}\sqrt{(\nu + 1)(22 - 43\nu)} \right)}{1365(1 - \nu)(1 + \nu)} \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{Y}_{\lambda} &= \begin{Bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} \frac{-\sqrt{42}\sqrt{(\nu + 1)(22 - 43\nu)}}{35(1 + \nu)} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{Y}_{\lambda} &= \begin{Bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{U} + i\mathbf{V} \text{ avec } \alpha = -\sqrt{\frac{6(22 - 43\nu)}{175(1 + \nu)}} \end{aligned}$$

Avec ces notations, en accord avec les résultats de la sous-section D.5.2 [p. 221], est obtenue la solution suivante pour φ et Q_y^1 , concaténées dans le vecteur \mathbf{Y} :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(y) &= \begin{Bmatrix} \varphi \\ Q_y^1 \end{Bmatrix} = C_1 e^{ay} [\mathbf{U} \cos(by) - \mathbf{V} \sin(by)] + C_2 e^{ay} [\mathbf{U} \sin(by) + \mathbf{V} \cos(by)] \\ &\quad + C_3 e^{-ay} [-\mathbf{U} \cos(by) + \mathbf{V} \sin(by)] + C_4 e^{-ay} [\mathbf{U} \sin(by) - \mathbf{V} \cos(by)] \end{aligned}$$

où a, b ont été défini comme la partie réelle et imaginaire de δ à l'équation (E.16). La solution ne diverge pas lorsque $y \rightarrow -\infty$, ceci induit la nullité des coefficients C_3 et C_4 :

$$\mathbf{Y}(y) = \left\{ \frac{\varphi}{Q_y^1} \right\} = (C_1[\mathbf{U} \cos(by) - \mathbf{V} \sin(by)] + C_2[\mathbf{U} \sin(by) + \mathbf{V} \cos(by)]) e^{ay}$$

Ce qui nous donne le champ de cisaillement :

$$\overline{Q_y^1} = (C_1 \cos(by) + C_2 \sin(by)) e^{ay} \quad (\text{E.17})$$

La rotation de la fibre moyenne est, en notant :

$$\varphi = \left(C_1 \left[\frac{3}{5} \cos(by) - \alpha \sin(by) \right] + C_2 \left[\frac{3}{5} \sin(by) + \alpha \cos(by) \right] \right) e^{ay} \quad (\text{E.18})$$

Le champ des moments fléchissants, en notant $\beta = \frac{e^3 E}{12(1 - \nu^2)}$ dans l'équation (E.14b) s'obtient en dérivant la rotation :

$$M_{yy}^1 = \beta \varphi' = \beta \left(a\varphi + be^{ay} \left[C_1 \left(-\frac{3}{5} \sin(by) - \alpha \cos(by) \right) + C_2 \left(\frac{3}{5} \cos(by) - \alpha \sin(by) \right) \right] \right) \quad (\text{E.19})$$

Le déplacement vertical, en notant $\gamma = \frac{13e^2}{70(1 + \nu)}$ dans l'équation (E.13c) :

$$w = \gamma \overline{Q_y^1}' = \gamma \left(a\overline{Q_y^1} + be^{ay} (-C_1 \sin(by) + C_2 \cos(by)) \right) \quad (\text{E.20})$$

E.3.3 Résolution dans la partie délaminée

La résolution dans la partie délaminée est beaucoup plus simple. Chacun des bras se comporte comme une poutre de Timoshenko classique. Tous les arguments de la section précédente s'appliquent à nouveau et le système d'équation à résoudre est simplement donné par les équations (E.13a)–(E.14c), dans lesquelles nous aurions de surcroît supprimé la contrainte d'arrachement $\nu^{1,2}$

$$(N_{yy}^1)' = 0 \quad (\text{E.21a})$$

$$(M_{yy}^1)' - Q_y^1 = 0 \quad (\text{E.21b})$$

$$(Q_y^1)' = 0 \quad (\text{E.21c})$$

$$v' = \frac{1}{eE} (1 - \nu^2) N_{yy}^1 \quad (\text{E.21d})$$

$$\varphi' = \frac{12}{e^3 E} (1 - \nu^2) M_{yy}^1 = \frac{M_{yy}^1}{\beta} \quad (\text{E.21e})$$

$$\varphi + w' = \frac{6}{5eG} Q_y^1 \quad (\text{E.21f})$$

Il est inutile ici de condenser le système, nous pouvons simplement le résoudre en cascade :

$$(N_{yy}^1)' = 0 \quad \Rightarrow N_{yy}^1 = 0, \text{ avec bord libre à l'extrémité} \quad (\text{E.22})$$

$$v' = \frac{1}{eE} (1 - \nu^2) N_{yy}^1 \quad \Rightarrow v(y) = v_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{E.23})$$

$$(Q_y^1)' = 0 \quad \Rightarrow Q_y^1(y) = Q_0 \in \mathbb{R}, y \in [0, L] \quad (\text{E.24})$$

$$(M_{yy}^1)' = Q_y^1 \quad \Rightarrow M_{yy}^1(y) = Q_0(y - L) \text{ avec bord libre à l'extrémité} \quad (\text{E.25})$$

$$\varphi' = \frac{M_{yy}^1}{\beta} \quad \Rightarrow \varphi(y) = \varphi_L + \frac{Q_0(y - L)^2}{2\beta} \quad (\text{E.26})$$

$$w' = \frac{6}{5eG} Q_y^1 - \varphi \quad \Rightarrow w(y) = \frac{6}{5eG} Q_0(y - L) - \varphi_L(y - L) - \frac{Q_0(y - L)^3}{6\beta} + \Delta/2 \quad (\text{E.27})$$

E.3.4 Résolution sur le domaine complet

La continuité de la contrainte de cisaillement s'écrit (E.17)–(E.24) :

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \bar{Q}_y^1 = C_1 = \frac{Q_0}{eG}$$

Puis, nous exprimons la continuité du tenseur des moments fléchissants : (E.19)–(E.25) :

$$M_{yy}^1(0) = \beta \left[a \left(\frac{3C_1}{5} + \alpha C_2 \right) + b \left(-\alpha C_1 + \frac{3C_2}{5} \right) \right] = -Q_0 L$$

Ensuite, nous utilisons la continuité de la rotation φ (E.18)–(E.26) :

$$\varphi(0) = \frac{3C_1}{5} + \alpha C_2 = \varphi_L + \frac{Q_0 L^2}{2\beta}$$

Pour conclure, la continuité du déplacement vertical (E.20)–(E.27) impose :

$$w(0) = \gamma (aC_1 + bC_2) = -\frac{6}{5eG} Q_0 L + \varphi_L L + \frac{Q_0 L^3}{6\beta} + \Delta/2$$

Ce système s'écrit sous la forme d'un système 4×4 , simple à inverser :

$$\begin{pmatrix} 1 & -eG & 0 & 0 \\ \frac{L}{\beta} & \frac{3a}{5} - \alpha b & a\alpha + \frac{3b}{5} & 0 \\ -\frac{L^2}{2\beta} & \frac{3}{5} & \alpha & -1 \\ -\frac{L^3}{6\beta} + \frac{6L}{5eG} & \gamma a & \gamma b & -L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \varphi_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta/2 \end{Bmatrix}$$

Par sa structure, le système se résout aisément en cascade, c'est à dire en substituant progressivement les variables identifiées. Si nous notons pour simplifier $\mu_1 = \frac{1}{eG} \left(\alpha b - \frac{3a}{5} \right)$ et $\mu_2 = \frac{1}{\left(a\alpha + \frac{3b}{5} \right)}$, nous obtenons ainsi :

$$C_1 = \frac{Q_0}{eG} \tag{E.28}$$

$$C_2 = \mu_2 \left(-\frac{L}{\beta} + \mu_1 \right) Q_0 \tag{E.29}$$

$$\varphi_L = \left[-\frac{L^2}{2\beta} + \frac{3}{5eG} + \alpha \mu_2 \left(-\frac{L}{\beta} + \mu_1 \right) \right] Q_0 \tag{E.30}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2}(Q_0) &= \left(-L \left[-\frac{L^2}{2\beta} + \frac{3}{5eG} + \alpha \mu_2 \left(-\frac{L}{\beta} + \mu_1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{L^3}{6\beta} + \frac{6L}{5eG} + \frac{\gamma a}{eG} + \gamma b \mu_2 \left(-\frac{L}{\beta} + \mu_1 \right) \right) \right) Q_0 \\ \frac{\Delta}{2}(Q_0) &= \left(\frac{L^3}{3\beta} + \frac{\gamma a}{eG} + \frac{3L}{5eG} + \mu_2 (\gamma b - \alpha L) \left(-\frac{L}{\beta} + \mu_1 \right) \right) Q_0 \end{aligned} \tag{E.31}$$

E.3.5 Analyse des résultats

Validons maintenant nos résultats : d'abord, en comparant les champs analytiques à la simulation éléments finis du problème dans un cadre statique, puis en incluant la mécanique élastique linéaire de la rupture afin de prévoir l'évolution la longueur de fissuration L , et en tirer la courbe contrainte–déplacement lors de la propagation du délaminage.

Analyse des champs en statique

En utilisant (E.31) pour déterminer l'effort tranchant en fonction du chargement extérieur, puis (E.28)–(E.30), nous pouvons construire l'ensemble des champs mécaniques de l'essai DCB. La grandeur principal d'intérêt est l'arrachement à l'interface $\nu^{1,2}$. Les représentations des autres courbes : de cisaillement Q_y^1 , de rotation de la normale ϕ_y^1 , et du champ de déplacement vertical w ont simplement vocation à asseoir la bonne implémentation de notre solution. Notre simulation conforte la pertinence du modèle LS1 pour simuler de l'essai DCB. Tout

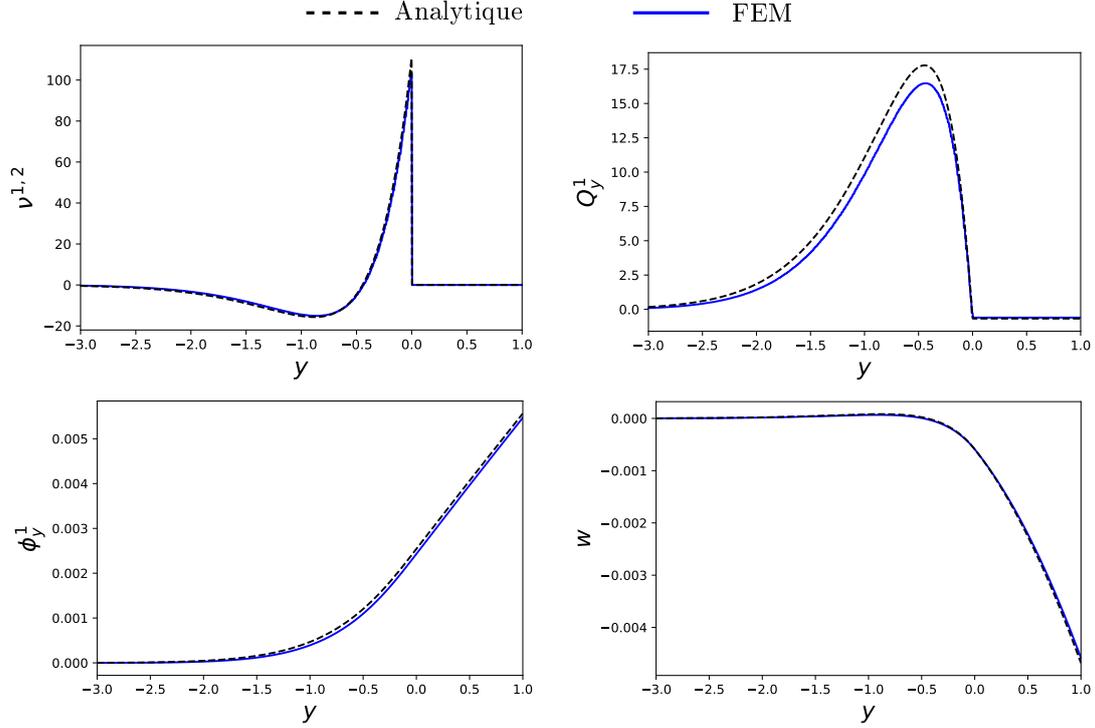


FIGURE E.5 – Courbes comparant les solutions analytiques et éléments finis, pour les champs : de déplacement vertical w , de rotation ϕ_y^1 , de cisaillement Q_y^1 et d'arrachement $\nu^{1,2}$. $E = 70\text{GPa}$, $\nu = 1/3$, $L = 30\text{mm}$, $e = 1\text{mm}$.

d'abord, la zone de compression ([Alfano and Crisfield, 2001, Dimitri et al., 2017]), en arrière de la singularité de traction, est parfaitement captée. En outre, la valeur finie de la contrainte d'arrachement, au voisinage immédiat du front de fissure, constitue une information clé pour pouvoir étudier le délaminage.

Étude analytique du délaminage pour l'essai DCB

Force et contrainte de cisaillement moyenne sont multiplicativement liées : $F = Q_0 \ell$. Par conséquent, la dernière égalité (E.31) traduit la relation effort-déplacement dans le cadre LS1 :

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \frac{2}{\ell} \left(\frac{L^3}{3\beta} + \frac{\gamma a}{eG} + \frac{3L}{5eG} + \mu_2(\gamma b - \alpha L) \left(-\frac{L}{\beta} + \mu_1 \right) \right) F = C(L)F \\ \frac{dC}{dL} &= \frac{2}{\ell} \left(\frac{L^2}{\beta} + \frac{3}{5eG} + \mu_2 \left(\frac{2\alpha L}{\beta} - \frac{\gamma b}{\beta} - \alpha \mu_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

Le premier terme dans la parenthèse $\frac{2L^3}{\ell 3\beta}$ correspond à la raideur standard dans le cadre d'Euler-Bernoulli. Le taux de restitution d'énergie est définie dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture par :

$$G = \frac{F^2}{2\ell} \frac{dC}{dL}$$

À la limite de propagation, le taux de restitution égalise la valeur critique G_c , si bien que nous en déduisons l'expression de la force maximale en fonction de la longueur L de la fissure :

$$F(L) = \sqrt{\frac{2\ell G_c}{\frac{dC}{dL}}} = \ell \sqrt{\frac{G_c}{\frac{L^2}{\beta} + \frac{3}{5eG} + \mu_2 \left(\frac{2\alpha L}{\beta} - \frac{\gamma b}{\beta} - \alpha\mu_1 \right)}} \quad (\text{E.33})$$

Au cours de la propagation, la force est mise à jour en prenant la longueur actuelle de la fissure. Nous traçons à la figure E.6 [p. 233] la solution analytique (E.32), (E.33) comparée à celle proposée par Škec et al. [2019], nous constatons que les différences sont tout à fait minimes.

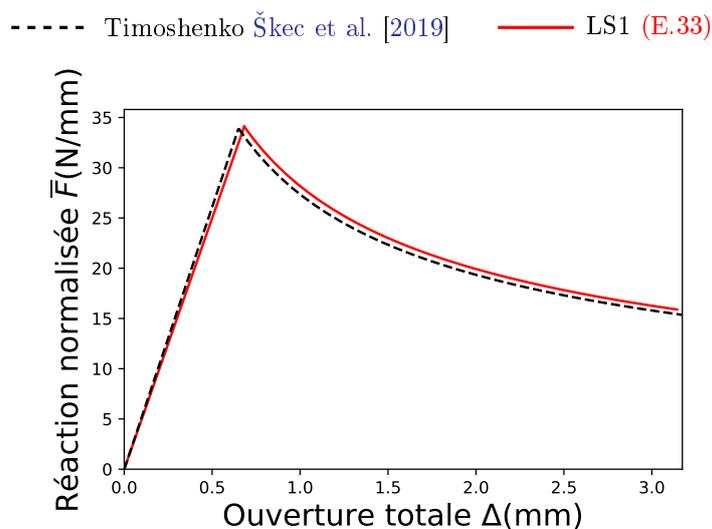


FIGURE E.6 – Comparaison des courbes force-déplacement pour les modèles LS1 et de Timoshenko [Škec et al., 2019]. $E = 70\text{GPa}$, $\nu = 1/3$, $L = 30\text{mm}$, $e = 6\text{mm}$, $G_c = 1\text{N/mm}^2$.

En bref

- ★ Nous avons étendu, ici, la méthodologie générale présentée au chapitre D [p. 201] afin d'obtenir les solutions analytiques d'essais uni-dimensionnel appliqués à une structure éventuellement *multi-délaminée*. La résolution complète du problème mécanique repose sur :
 - la scission du solide en sous-domaines distincts, caractérisés par un état de fissuration constant, figure E.3 [p. 225]
 - la résolution du problème aux valeurs propres (E.2) sur chacun des sous-domaines,
 - puis le raccord des solutions obtenues (E.4), (E.5) afin de faire disparaître les constantes d'intégrations.
- ★ Cette procédure a été appliquée à l'essai classique « Double Cantilever Beam ». Là, en plus de la relation non triviale déplacement-réaction (E.32), nous avons détaillé l'expression analytique du champ de contrainte d'arrachement (E.20), (E.12), lequel présente une décroissance exponentielle.

F.1 Délaminage

À la section 3.3 [p. 73], nous avons souligné que l'étude du délaminage présuppose une expression postulée de la rigidité d'interface, fonction de l'état courant d'endommagement et d'autant plus aisée à obtenir que la matrice de rigidité associée est simple. Or dans le cadre de nos modèles multi-particulaires, l'inversion de la matrice de souplesse \mathbb{S}^Q , creuse mais non diagonale, induit une matrice de rigidité en cisaillement pleine! L'expression de son évolution lors de l'endommagement est donc difficile. C'est pourquoi, au chapitre 3 [p. 69], nous avons avantageusement recouru au modèle L-LS1, construit afin de surmonter le défaut majeur de ses homologues LS1 et SCLS1.

Chronologiquement pourtant, le L-LS1 a été construit assez tardivement dans ce travail de doctorat et plusieurs approches ont été proposées pour prédire tout de même le délaminage avec les modèles LS1 et SCLS1. Ces méthodes constituent l'objet de cette annexe.

F.1.1 Une expression de l'énergie élastique

Dans cette partie, nous dériverons précisément la densité d'énergie élastique endommagée des modèles SCLS1 et LS1, à partir de la formulation tridimensionnelle complète.

Localisation de l'endommagement et formulation variationnelle

Une surface délaminée sépare la plaque en deux sous-structures indépendantes. Les faces inférieure de la plaque du dessus et supérieure de la plaque du dessous devenant autant d'interfaces ouvertes à l'environnement extérieur et susceptibles d'être elles-mêmes chargées.

Hypothèse F.1.1 Fissures libres de contraintes. *Nous supposons pour simplifier que les lèvres sont libres de contraintes.*

Nous supposons donc, que m interfaces sont susceptibles de rompre et introduisons le multiplicateur de Lagrange associé à cette condition de bord libre, au niveau des fissures. L'étude qui suit va nous permettre d'établir la « vraie rigidité » de la structure endommagée. Comme dans la partie statique, nous savons que la formulation faible est modifiée de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}^{3D}) \cdot \underline{u} \, d\Omega + \sum_m \int_{\omega} \underline{\mu}^{m,m+1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{3D} \cdot \underline{n} \, d\omega = 0$$

Après introduction de notre expression du champ de contraintes SCLS1, nous en déduisons une formulation faible identique à (1.19) [p. 13], avec les déformations généralisées modifiées suivantes :

$$\begin{cases} D_{\alpha}^{j,j+1} = U_{\alpha}^{j+1} - U_{\alpha}^j - \frac{e^{j+1}}{2} \Phi_{\alpha}^{j+1} - \frac{e^j}{2} \Phi_{\alpha}^j + V_{,\alpha}^{j,j+1} + \delta_j^m \mu_{\alpha}^{j,j+1} \\ D_{\nu}^{j,j+1} = U_3^{j+1} - U_3^j + \delta_j^m \mu_3^{j,j+1} \end{cases}$$

Les lois de comportements sont inchangées. En revanche, le nombre de déplacements généralisés lui est augmenté. Les multiplicateurs de Lagrange $\mu^{m,m+1}$ s'interprètent comme la discontinuité de déplacements aux interfaces. Ces sauts de déplacements ont, par le passé, (voir [Diaz et al., 2011]), été ajoutés de manière ad-hoc, lors de l'étude du délaminage. Nous voyons ci-dessus, qu'ils apparaissent naturellement lorsque l'on suppose les lèvres de la fissure libres de contraintes.

Condensation des multiplicateurs de Lagrange

Par la même manipulation algébrique qu'à la sous-section 3.3.1 [p. 74], nous pouvons condenser les multiplicateurs de Lagrange associés à ces conditions de bord libre, en posant :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_d^\nu &= \mathbb{C}^\nu - \mathbb{C}^\nu \cdot \mathbb{T}_{\nu,m} (\mathbb{T}_{\nu,m}^\top \cdot \mathbb{C}^\nu \cdot \mathbb{T}_{\nu,m})^{-1} \cdot \mathbb{T}_{\nu,m}^\top \cdot \mathbb{C}^\nu \\ \mathbb{C}_d^Q &= \mathbb{C}^Q - \mathbb{C}^Q \cdot \mathbb{T}_{Q,m} (\mathbb{T}_{Q,m}^\top \cdot \mathbb{C}^Q \cdot \mathbb{T}_{Q,m})^{-1} \cdot \mathbb{T}_{Q,m}^\top \cdot \mathbb{C}^Q\end{aligned}\tag{F.1}$$

Les matrices $\mathbb{T}_{\nu,m}$ et $\mathbb{T}_{Q,m}$ sont respectivement de taille $n-1 \times m$ et $4n-2 \times 2m$. Elles comportent des termes unitaires en regard des contraintes généralisées impactées par la condition de bord libre.

La rigidité actualisée avec les matrices \mathbb{C}_d^ν , \mathbb{C}_d^Q ci-dessus, correspond à la rigidité que conserverait la structure si les m interfaces avaient complètement délaminé. L'enjeu de la modélisation consistera alors à postuler une interpolation physiquement et mathématiquement raisonnable, glissant continûment la rigidité de la structure « saine », pour laquelle $\mathbf{d}^{\text{intf}} = \mathbf{0}$, vers la structure endommagée dont la rigidité est donnée (F.1).

Notation F.1.1 Matrice de rigidité endommagée. Nous notons $[\mathbb{C}_{*,d}]$, où « * » désigne la liste des interfaces rompues, la matrice de rigidité obtenue avec la formule (F.1) .

Notation F.1.2 Fonctions de pondération et produit. Pour la $i^{\text{ème}}$ variable d'endommagement, nous notons $g_i = g(d_i)$ et $g_{\bar{i}} = 1 - g_i$. En outre, $g_{ij} = g_i g_j$ désigne le produit de plusieurs fonctions de pondération. Nous étendons par récurrence la notation au produit de m fonctions de pondérations : $\prod_{k=1}^m g_k = g_{\prod_{k=1}^m k}$.

Interpolation forte et rigidité d'interface

La généralisation à plusieurs surfaces délaminées s'avère difficile. En effet, pour $n-1$ interfaces, il faut interpoler la matrice de rigidité avec l'ensemble des matrices de rigidité corrigées correspondant à toutes les façons de délaminer le composite. Chacune des interfaces étant susceptible de rompre ou non, ceci conduit à $2 \times 2^{n-1}$ combinaisons possibles et autant de matrices « \mathbb{C}^d » à calculer.

Postulat F.1.1 Interpolation forte de la rigidité. Nous postulons que la rigidité endommagée est égale à :

$$\mathbb{C}^\nu(\mathbf{d}^\nu) = \sum_A g_A(\mathbf{d}^\nu) \mathbb{C}_{A,d}^\nu \quad \mathbb{C}^Q(\mathbf{d}^r) = \sum_A g_A(\mathbf{d}^r) \mathbb{C}_{A,d}^Q \quad \text{chacune des sommes comporte } 2^{n-1} \text{ termes.}\tag{F.2}$$

où A désigne l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

Dérivation de la densité d'énergie élastique. La dérivation de la densité surfacique d'énergie élastique s'en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_\nu^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) &= g'(d_\nu^{j,j+1}) \frac{1}{2} \{\mathbf{E}(\mathbf{U})\}^\top \cdot \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d_\nu^{j,j+1}}(\mathbf{d}^\nu) \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{U})\} = g'(d_\nu^{j,j+1}) \psi_{\nu,\text{intf}}^{j,j+1} \\ \frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_\tau^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) &= g'(d_\tau^{j,j+1}) \frac{1}{2} \{\mathbf{E}(\mathbf{U})\}^\top \cdot \frac{\partial \mathbb{C}^Q}{\partial d_\tau^{j,j+1}}(\mathbf{d}^r) \cdot \{\mathbf{E}(\mathbf{U})\} = g'(d_\tau^{j,j+1}) \psi_{\tau,\text{intf}}^{j,j+1}\end{aligned}\tag{F.3}$$

Cette modélisation séduisante de simplicité, présente, en revanche, l'inconvénient critique de ne pas réellement partager le stratifié en deux sous-structures, comme le ferait une « vraie » fissure. En effet, cette expression de la densité d'énergie élastique ne supprime pas les couplages des interfaces de part et d'autre de la fissure. Elle mènerait ainsi éventuellement à des résultats aberrants, dans les cas de fissurations à multiples interfaces, en préservant des « liens attractifs » entre deux couches lointaines séparées par une fissure. Elle ne pourrait donc être utilisée que dans les structures à une seule interface.

F.1.3 Une seconde approximation : l'hypothèse des faibles couplages

Afin de ne pas devoir calculer les 2^{n-1} matrices de rigidités endommagées, nous allons dans cette section soumettre une hypothèse supplémentaire, de « faible couplage », qui, nous le verrons, permettra de réduire considérablement le coût numérique, en s'affranchissant du calcul des matrices \mathbb{C}^d .

Postulat F.1.3 Faible couplage. *Nous négligeons l'influence d'une surface délaminée sur la rigidité des surfaces adjacentes.*

Cette hypothèse simplificatrice est stricto sensu « inexacte » dans nos modèles multiparticulaires. Numériquement en effet, nous trouvons que le délaminage d'une surface abaisse la rigidité des 2 couches adjacentes d'environ 3%. Une majoration de l'erreur commise par l'adoption de ce postulat est discutée dans un cas simple à la section F.1.3 [p. 241]. Si nous acceptons tout de même cette idée, le délaminage d'une surface $m, m+1$ a pour effet de séparer la matrice de rigidité en deux blocs, comme schématisé ci-dessous :

$$\mathbb{C}_{sain}^{\nu} = \begin{pmatrix} c_{11}^{\nu} & c_{12}^{\nu} & c_{13}^{\nu} & c_{14}^{\nu} & c_{15}^{\nu} \\ & c_{22}^{\nu} & c_{23}^{\nu} & c_{24}^{\nu} & c_{25}^{\nu} \\ & & c_{33}^{\nu} & c_{34}^{\nu} & c_{35}^{\nu} \\ & & & c_{44}^{\nu} & c_{45}^{\nu} \\ & & & & c_{55}^{\nu} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{C}_{3,d}^{\nu} = \begin{pmatrix} c_{11}^{\nu} & c_{12}^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^{\nu} & c_{45}^{\nu} \\ & & & & c_{55}^{\nu} \end{pmatrix}$$

Formellement, cette hypothèse des faibles couplages se traduit mathématiquement ainsi :

Hypothèse F.1.2 Hypothèse des faibles couplages. *Nous considérons une des matrices $\mathbb{C}_{*,d}$ de l'interpolation complète, où * désigne la liste des interfaces endommagées. Alors, nous postulons que ses coefficients sont :*

$$[\mathbb{C}_{*,d}]_{jk} = [\mathbb{C}_{*,d}]_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i \in *, j \leq i \text{ et } k \geq i \\ [\mathbb{C}_{sain}]_{jk} & \text{sinon} \end{cases}$$

L'hypothèse ci-dessus conjecture tout naturellement que la rigidité de couplage entre deux couches j et k est nulle, si ces deux couches sont séparées par une (ou plusieurs) interface(s) délaminée(s).

Forme de la matrice endommagée de taille n . *Considérons une matrice \mathbb{M} carrée de taille p . Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \leq p$, soit A_n l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n\}$. Alors la matrice $\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}})$ interpolée par la procédure d'interpolation forte (F.2), et dans le cadre de l'hypothèse F.1.2 [p. 238] des faibles couplages s'écrit :*

$$\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = \begin{pmatrix} g_1 m_{11} & \dots & \dots & g_{1\dots n} m_{1n} & g_{1\dots n} m_{1,n+1} & \dots & g_{1\dots n} m_{1,p} \\ & \ddots & & & g_{2,\dots,n} m_{2,n+1} & \dots & g_{2,\dots,n} m_{2,p} \\ & & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ & & & g_n m_{nn} & g_n m_{n,n+1} & \dots & g_n m_{n,p} \\ & & & & m_{n+1,n+1} & \dots & m_{n+1,p} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & m_{p,p} \end{pmatrix} \quad (\text{F.5})$$

Démonstration Pour démontrer ce théorème, procédons par récurrence sur l'entier n .

★ Pour $n = 1$, l'interpolation forte est triviale et se réduit à :

$$\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = g_1 \mathbb{M}_{\text{sain}} + g_{\bar{1}} \mathbb{M}_{1,d}$$

Dans le cadre de l'hypothèse des faibles couplages, la matrice endommagée est simplement obtenue à partir de la matrice saine \mathbb{M}_{sain} , en annulant les termes sur la première ligne et la première colonne.

$$\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = g_1 \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & \dots & m_{1,p} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{p,p} \end{pmatrix} + g_{\bar{1}} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ & m_{22} & \dots & m_{1,p} \\ & & \ddots & \\ & & & m_{p,p} \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $g_1 + g_{\bar{1}} = 1$, nous en déduisons (F.5)

★ Considérons à présent $n \in \mathbb{N}$ tel que le théorème F.1.3 p. 238 soit vrai, et tel que $n + 1 \leq p$. L'interpolation forte de la matrice \mathbb{M} s'effectue à présent sur l'ensemble A_{n+1} des partitions de $\{1, \dots, n+1\}$. Nous pouvons scinder cet ensemble en deux, en remarquant que $A_{n+1} = A_n \cup (A_n \cup \{n+1\})$, dans lequel $(A_n \cup \{n+1\})$ désigne l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n\}$ réunies à chaque fois avec le singleton $\{n+1\}$. L'interpolation forte de la matrice de $\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}})$ s'écrit alors :

$$\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = \sum_{A_{n+1}} g_{A_{n+1}} \mathbb{M}_{A_{n+1},d} = g_{n+1} \sum_{A_n} g_{A_n} \mathbb{M}_{A_n,d} + g_{\overline{n+1}} \sum_{A_n} g_{A_n} \mathbb{M}_{A_n,n+1,d}$$

Notons alors que la seconde somme correspond simplement à l'interpolation sur l'ensemble A_n des partitions de $\{1, \dots, n\}$ de la matrice $\mathbb{M}_{n+1,d}$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur ces deux sommes pour en déduire :

$$\mathbb{M}(\mathbf{d}^{\text{intf}}) = g_{n+1} \begin{pmatrix} g_1 m_{11} & \dots & \dots & g_{1\dots n} m_{1n} & g_{1\dots n} m_{1,n+1} & \dots & g_{1\dots n} m_{1,p} \\ & \ddots & & & g_{2\dots n} m_{2,n+1} & \dots & g_{2\dots n} m_{2,p} \\ & & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ & & & g_n m_{nn} & g_n m_{n,n+1} & \dots & g_n m_{n,p} \\ & & & & m_{n+1,n+1} & \dots & m_{n+1,p} \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & m_{p,p} \end{pmatrix} + g_{\overline{n+1}} \begin{pmatrix} g_1 m_{11} & \dots & \dots & g_{1\dots n} m_{1n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & g_n m_{nn} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & m_{n+2,n+2} & \dots & m_{n+2,p} & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & m_{p,p} \end{pmatrix}$$

En sommant, les deux matrices précédentes nous montrons bien la propriétés au rang $n + 1$.

Matrice de rigidité en arrachement corrigée à $n - 1$ interfaces. Dans le cadre du Postulat F.1.3 [p. 238], la matrice de rigidité en arrachement interpolée s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^\nu(\mathbf{d}^\nu) = \begin{pmatrix} g_1 c'_{11} & g_{12} c'_{12} & \dots & \dots & g_{1\dots(n-1)} c'_{1(n-1)} \\ & g_2 c'_{22} & g_{23} c'_{23} & \dots & g_{2\dots(n-1)} c'_{2(n-1)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & Sym & & \ddots & \vdots \\ & & & & g_{n-1} c'_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

encore vrai pour l'interpolation complète), la rigidité dépend linéairement des fonctions de pondérations de sorte que le calcul des dérivées est immédiat :

$$\frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_\nu^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{intf}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(\mathbf{U}) \}^\top \cdot \frac{\partial \mathbb{C}(\mathbf{d}^{intf})}{\partial d_\nu^{j,j+1}} \cdot \{ \mathbf{E}(\mathbf{U}) \} = g'(d_\nu^{j,j+1}) \frac{1}{2} (\mathbf{E}^\nu)^\top \cdot \mathbb{C}_{j,j+1}^{\nu,intf}(\mathbf{d}^\nu) \cdot \mathbf{E}^\nu$$

Dans l'expression ci-dessus, la matrice $\mathbb{C}_{j,j+1}^{\nu,intf}$, qui correspond à la rigidité en arrachement de l'interface, est obtenue de la façon suivante :

$$\mathbb{C}_{j,j+1}^{\nu,intf} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & g_{1\dots(j-1)}c_{1,j} & g_{1\dots(j-1)(j+1)}c_{1,j+1} & \dots & g_{1\dots(n-1)\setminus\{j\}}c_{1,n-1} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & 0 & g_{(j-1)}c_{j-1,j} & g_{(j-1)(j+1)}c_{j-1,j+1} & \dots & g_{(j-1)(j+1)\dots(n-1)}c_{j-1,n-1} \\ & & & & c_{j,j} & g_{(j+1)}c_{j,j+1} & \dots & g_{j+1\dots(n-1)}c_{j,n-1} \\ & & & & & & & \\ & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

En procédant de même pour la variable d'endommagement en cisaillement, nous trouvons en synthèse la dérivée suivante pour le modèle de Lagrange avec faible couplage :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_\nu^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{intf}) &= g'(d_\nu^{j,j+1}) \frac{1}{2} (\mathbf{E}^\nu)^\top \cdot \mathbb{C}_{j,j+1}^{\nu,intf}(\mathbf{d}^\nu) \cdot \mathbf{E}^\nu = g'(d_\nu^{j,j+1}) \psi_{\nu,intf}^{j,j+1} \\ \frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d_\tau^{j,j+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{intf}) &= g'(d_\tau^{j,j+1}) \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}^Q \}^\top \cdot \mathbb{C}_{j,j+1}^{Q,intf}(\mathbf{d}^\tau) \cdot \{ \mathbf{E}^Q \} = g'(d_\tau^{j,j+1}) \psi_{\tau,intf}^{j,j+1} \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Pour finir, l'interpolation dans le cadre des faibles couplages présente une ultime caractéristique rassurante : la matrice de rigidité locale, tout au long de l'endommagement reste définie positive. En effet, le critère de Sylvester assure que tous les mineurs principaux d'une matrice symétrique définie positive sont également des matrices symétriques définies positives. Par conséquent, lorsque les matrices de rigidités sont scindées en deux, les deux blocs résultants sont les mineurs principaux de la matrice et de cette matrice « inversée », c'est à dire obtenue en ordonnant les plis du dessus vers ceux du dessous.

Erreur commise lors de l'hypothèse des faibles couplages

Maintenant, quantifions l'erreur commise par l'hypothèse des faibles couplages sur la rigidité en arrachement \mathbb{C}^ν . L'influence de la rupture d'une interface sur les rigidités adjacentes est toujours soustractive. En effet, lorsqu'un mécanisme est activé, la rigidité « saine » glisse vers sa valeur rompue donnée par (F.1). En plus d'abattre la rigidité concernée, le délaminage d'une interface diminue également la raideur des interfaces adjacentes. Nous illustrons ici l'effet de la condensation des multiplicateurs de Lagrange dans le cas où un unique mécanisme serait activé.

Dans ce cas, \mathbb{T} est un simple vecteur contenant un 1 en $i^{\text{ème}}$ composante. La rigidité endommagée associée est alors :

$$\mathbb{C}^d = \mathbb{C} - \mathbb{C} \cdot \mathbb{T} \cdot (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C}$$

Par suite, $\mathbb{C} \cdot \mathbb{T}$ correspond simplement à la $i^{\text{ème}}$ colonne de \mathbb{C} , si bien que :

$$[\mathbb{C} \cdot \mathbb{T} \cdot (\mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{T})^{-1} \cdot \mathbb{T}^\top \cdot \mathbb{C}]_{kl} = \frac{c_{ki}c_{li}}{c_{ii}}$$

Par construction, nous observons donc que la soustraction de cette matrice aura pour effet d'annuler la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de rigidité. Les corrections sur les termes c_{jj} sont alors $c_{jj} - \frac{c_{j,i}^2}{c_{ii}}$. La plus forte variation, en raison de l'évanescence des $c_{j,i}$ au fur et à

mesure que l'on s'éloigne de la diagonale, s'observe alors sur les coefficients diagonaux adjacents à l'interface délaminée. La correction est de l'ordre de $100 \times \frac{c_{i-1,i}^2}{c_{ii}^2} \approx 100 \times \left(\frac{1}{5.6}\right)^2 \approx 3.2\%$ dans le cadre d'une matrice de Toeplitz régulière. Cette valeur, peut être considérée ici comme assez faible pour justifier *a posteriori* le postulat F.1.3 [p. 238], toutefois une estimation plus précise dans un cadre général de multi-fissuration serait à envisager.

F.1.4 Simplifications numériques

Dans toutes les interpolations des rigidités précédemment présentées postulat F.1.1 [p. 236], postulat F.1.2 [p. 237], postulat F.1.3 [p. 238], la rigidité endommagée s'exprime linéairement par rapport aux fonctions de dégradation de chacune des variables d'endommagements. Par conséquent, les dérivées de l'énergie élastique par rapport à chacune des variables d'endommagement $d^{\ell,\ell+1}$ peuvent s'écrire symboliquement :

$$\frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d^{\ell,\ell+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) = g'(d^{\ell,\ell+1}) \psi_{intf}^{\ell,\ell+1}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}}) \quad (\text{F.10})$$

A priori, toutes les interfaces sont couplées. Il serait possible de résoudre ce système d'un bloc par l'intermédiaire d'un solveur non linéaire. Nous allons néanmoins proposer quelques approximations, permettant une réduction du coût numérique, et dans certain cas, l'obtention d'expressions explicites pour l'endommagement.

Hypothèse F.1.3 « Linéarisation » de la dérivée de l'énergie d'interface. *Nous supposons pour le calcul des prédicteurs d'endommagement (F.10) que les énergies d'interfaces $\psi_{intf}^{\ell,\ell+1}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^{\text{intf}})$ sont fonction uniquement des endommagements calculés à l'itération précédente.*

$$\frac{\partial \psi_{el}^\omega}{\partial d^{\ell,\ell+1}}(\mathbf{U}, \mathbf{d}^*) \approx g'(d^{*,\ell,\ell+1}) \psi_{intf}^{\ell,\ell+1}(\mathbf{U}, \mathbf{d}_k^{\text{intf}}) \quad (\text{F.11})$$

D'autres choix auraient été possibles. Par exemple, nous aurions pu calculer chaque fois l'endommagement associé à un mécanisme et utiliser cette nouvelle valeur pour calculer l'endommagement suivant. Cependant, ceci aurait attribué une « hiérarchie », ou tout du moins un « ordre », aux mécanismes. En calculant d'un bloc tous les prédicteurs d'endommagement, selon l'état à l'itération précédente, nous nous sommes refusés à un tel choix physiquement peu justifiable. Le modèle est explicite dans la mesure où la connaissance de \mathbf{U} et de $\mathbf{d}_k^{\text{intf}}$, valeurs de l'endommagement à la $k^{\text{ème}}$ itération et du déplacement, permet de déterminer le prédicteur \mathbf{d}^* et donc l'endommagement à la $k+1^{\text{ème}}$ itération.

F.2 Autour des matrices tridiagonales

Cette section présente quelques résultats mathématiques concernant l'étude des matrices tridiagonales avec pour application une méthode alternative de condensation de la matrice de rigidité en arrachement du modèle LS1.

F.2.1 Rappels mathématiques

Nous nous intéressons ici à la recherche de formules pour l'inverse d'une matrice symétrique tri-diagonale T d'ordre n :

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & -b_2 & & & \\ -b_2 & a_1 & -b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{n-1} & a_{n-1} & -b_n \\ & & & -b_n & a_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } b_i \neq 0 \ \forall i \geq 2$$

Le signe « - » n'est qu'une facilité technique et n'a pas de signification particulière. Pour notre application ultérieure, les coefficients extra-diagonaux seront positifs. Il suffira de remplacer dans les formules toutes les occurrences de b_i par $(-b_i)$.

Théorème F.2.1 Structure de T^{-1} . T^{-1} est factorisable, c'est à dire qu'il existe deux vecteurs de taille n , $u = (u_1, \dots, u_n)^\top$ et $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ tels que :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \dots & u_2 v_n \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & \dots & u_3 v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & u_n v_3 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

Ceci est bien compatible avec la nécessaire symétrie de l'inverse de T

Définition F.2.1 Deux suites utiles pour calculer l'inverse de T . On définit à présent deux suites par récurrences, l'une montante, l'autre descendante :

$$\begin{aligned} d_n &= a_n & \text{et } \forall i \in \{n-1, \dots, 1\} & \quad d_i = a_i - \frac{b_{i+1}^2}{d_{i+1}} \\ \delta_1 &= a_1 & \text{et } \forall i \in \{2, \dots, n\} & \quad \delta_i = a_i - \frac{b_i^2}{\delta_{i-1}} \end{aligned} \tag{F.12}$$

Théorème F.2.2 Coefficients des vecteurs u et v . Avec les deux suites précédemment définies, nous pouvons trouver les coefficients des deux vecteurs u et v intervenant dans la factorisation de T^{-1} :

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{d_1}, & v_i &= \frac{b_2 \dots b_i}{d_1 \dots d_{i-1} d_i}, & i &= 2, \dots, n \\ u_n &= \frac{1}{\delta_n v_n}, & u_{n-i} &= \frac{b_{n-i+1} \dots b_n}{\delta_{n-i} \dots \delta_n v_n}, & i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{F.13}$$

Théorème F.2.3 Coefficient de la matrice T^{-1} . Pour le cas général, avec les notations précédentes, nous avons :

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{-1} &= u_i v_j = b_{i+1} \dots b_j \frac{d_{j+1} \dots d_n}{\delta_i \dots \delta_n}, & \forall i, \forall j > i \\ T_{i,i}^{-1} &= \frac{d_{j+1} \dots d_n}{\delta_i \dots \delta_n}, & \forall i \end{aligned}$$

La formule précédente offre une procédure itérative simple pour calculer l'inverse d'une matrice tri-diagonale. Néanmoins le résultat particulièrement précieux de ce chapitre réside dans le corollaire ci-dessous.

Corollaire F.2.1 Relations entre les coefficients de T^{-1} . Forts du théorème précédent, nous pouvons à présent caractériser la relation entre les coefficients de T^{-1} au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la diagonale :

$$\frac{T_{i,j}^{-1}}{T_{i,j+1}^{-1}} = \frac{d_{j+1}}{b_{j+1}} \Rightarrow T_{i,j+\ell}^{-1} = \frac{b_{j+1} \dots b_{j+\ell}}{d_{j+1} \dots d_{j+\ell}} T_{i,j}^{-1} \tag{F.14}$$

La formule (F.14) est très générale. Pour nos modèles, elle permet de quantifier les rigidités de couplages.

Théorème F.2.4 Décroissance des coefficients dans le cas d'une matrice à diagonale dominante. On suppose que T est à diagonale dominante, c'est à dire que $\forall i |a_i| > |b_{i+1}| + |b_i|$, on montre alors par récurrence que l'on a $\forall i d_i > b_i$, si bien que la relation (F.14) traduit une décroissance en norme.

Le résultat ci-dessus est crucial, il affirme que pour une matrice tri-diagonale à diagonale dominante (comme c'est le cas pour la matrice S^ν), les coefficients de l'inverse décroissent en s'éloignant de la diagonale. Il traduit mathématiquement le constat physique évident que les couplages doivent s'amenuiser au fur et à mesure que l'on considère des interfaces de plus en plus distantes.

Les formules précédentes sont très générales et s'appliquent aux matrices tri-diagonales symétriques d'ordre n quelconques. Des simplifications supplémentaires sont possibles, dans le cadre très particuliers des matrices de Toeplitz :

Définition F.2.2 Matrice de Toeplitz. On appelle matrice de Toeplitz T_a^\pm , les matrices de la forme :

$$T_a^\pm = \begin{pmatrix} a & \pm 1 & & & \\ \pm 1 & a & \pm 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \pm 1 & a & \pm 1 \\ & & & \pm 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Habituellement les matrices de Toeplitz sont uniquement utilisées avec un « - » car elles apparaissent naturellement dans la résolution de problèmes aux différences centrées [Fischer and Usmani \[1969\]](#). Ici, anticipant sur nos applications, nous détaillerons les résultats pour l'indice « + ». Dans le cas particulier des matrices de Toeplitz (« + » ou « - »), il est possible de trouver une solution analytique pour les deux suites (d_i) et (δ_i) de la définition [F.2.1](#) [p. [243](#)].

Lemme F.2.1 . On considère la suite (δ_i) définie par :

$$\delta_1 = a \text{ et la relation de récurrence } \delta_i = a - \frac{1}{\delta_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n$$

alors, si $a \neq 2$ on a $\delta_i = \frac{r_+^{i+1} - r_-^{i+1}}{r_+^i - r_-^i}$ où $r_\pm = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ sont les deux solutions de l'équation

du second degré $r^2 - ar + 1 = 0$. Si $a = 2$, alors $\delta_i = \frac{i+1}{i}$

On en déduit par ailleurs

$$d_{n-i+1} = \delta_i = \frac{r_+^{i+1} - r_-^{i+1}}{r_+^i - r_-^i}$$

Corollaire F.2.2 Vecteurs u et v de l'inverse d'une matrice de Toeplitz « + ». En particulierisant les formules du [Théorème [F.2.2](#) p. [243](#)] avec les expressions des suites (d_i) et (δ_i) , nous obtenons :

$$v_i = (-1)^i \frac{r_+^{n-i+1} - r_-^{n-i+1}}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}, \quad u_i = (-1)^i \frac{r_+^i - r_-^i}{r_+ - r_-}$$

Théorème F.2.5 Estimation de la décroissance des coefficients. Nous pouvons majorer la décroissance des coefficients extra-diagonaux :

$$|(T_a^+)^{i,j}| < (r_+)^{j-i} (T_a^+)^{i,i}, \quad \forall i, \forall j \geq i$$

où r^+ est la plus grande racine de l'équation $r^2 - ar + 1 = 0$.

Nous pensons qu'une faute de frappe s'est ici glissée dans le manuscrit de [Meurant \[1990\]](#), le coefficient majorant la décroissance est r^+ et non r^- .

Anticipant sur la suite de notre exposé, nous donnons les expressions explicites des coefficients de l'inverse d'une matrice de Toeplitz de paramètre a :

$$(T_a^{-1})_{i,j} = \frac{\sinh(i\psi)\sinh((n-j+1)\psi)}{\sinh(\psi)\sinh((n+1)\psi)}, \quad \text{avec } \cosh(\psi) = \frac{a}{2}$$

Dans le cas où $a = 2$ la formule est plus simple :

$$(T_a^{-1})_{i,j} = i \frac{n-j+1}{n+1}$$

F.2.2 Une estimation de la décroissance des termes de la matrice de rigidités \mathbb{C}^ν

Nous allons ici tirer parti de la caractéristique tri-diagonale de la matrice de souplesse en arrachement \mathbb{S}^ν pour proposer une approximation de la matrice de rigidité en arrachement et un estimateur de la qualité de cette approximation.

Les matrices tri-diagonales ont été l'objet de nombreuses études, notamment pour leur intérêt dans la résolution de problèmes aux différences finies (voir [Barrett, 1979, Meurant, 1990]). Mathématiquement, l'inversion d'une matrice tri-diagonale fournit une matrice pleine. Mécaniquement, appliquée à nos modèles multi-particulaires, l'inversion de la matrice de souplesse en arrachement \mathbb{S}^ν a pour effet de coupler toutes les couches via des rigidités quelque peu artificielles. Cependant, nous allons voir que sous réserve de certaines hypothèses supplémentaires, il est possible de donner une estimation de la décroissance des termes extra-diagonaux de la matrice inverse. Cette estimation ouvre la voie à une réduction importante du temps de calcul, en imposant la nullité des couplages entre certaines couches, si la rigidité associée est faible au regard d'une rigidité « principale ». Nous obtiendrons alors une approximation physiquement raisonnable de la matrice de rigidité en arrachement, lorsque le nombre de couches devient important.

F.2.3 Application à la matrice de rigidité en arrachement des modèles multi-particulaires

La matrice de souplesse en arrachement du modèle LS1 a la forme suivante :

$$[\mathbb{S}^\nu] = \begin{pmatrix} \frac{13e^1 S_{3333}^1}{35} & \frac{9e^1 S_{3333}^1}{70} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{9e^1 S_{3333}^1}{70} & \frac{13(e^1 S_{3333}^1 + e^2 S_{3333}^2)}{35} & \frac{9e^2 S_{3333}^2}{70} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{9e^{n-1} S_{3333}^{n-1}}{70} & \frac{13(e^{n-1} S_{3333}^{n-1} + e^n S_{3333}^n)}{35} & \frac{9e^n S_{3333}^n}{70} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{9e^n S_{3333}^n}{70} & \frac{13e^n S_{3333}^n}{35} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est tri-diagonale à diagonale strictement dominante, nous pouvons donc lui appliquer les théorèmes de la section F.2 [p. 242] afin d'estimer la décroissance en norme des coefficients extra-diagonaux de la matrices \mathbb{C}^ν . En effet il existe une formule analytique quantifiant le rapport $c_{i,j}^\nu / c_{i,i}^\nu < \varepsilon$ entre la rigidité de couplage et la rigidité principale de l'interface i . Cette formule analytique s'obtient en calculant deux suites d_i et δ_i données par l'équation (F.12). Une fois ces deux suites explicitées, nous pouvons utiliser l'équation (F.14) pour obtenir un critère d'arrêt et tronquer la matrice de rigidité une fois que $c_{i,j}^\nu / c_{i,i}^\nu < \varepsilon$ est satisfait pour une tolérance ε (il faudra procéder ainsi pour toutes les lignes de la matrice afin de savoir en définitive combien d'interfaces nous devons coupler). Ce faisant, nous éliminons les couplages n'ayant qu'une influence limitée sur le comportement global de la structure.

Cette majoration de la norme des coefficients extra-diagonaux fournit une estimation de l'erreur en rigidité mais également en énergie. En effet, si l'on s'intéresse à la contribution à l'énergie élastique globale des interfaces i et j , nous pouvons expliciter celle-ci sous la forme :

$$\psi_\nu^{el,i,j} = \frac{1}{2} (c_{i,i}^\nu (D_\nu^{i,i+1})^2 + c_{j,j}^\nu (D_\nu^{j,j+1})^2 + 2c_{i,j}^\nu D_\nu^{i,i+1} D_\nu^{j,j+1}) + \dots$$

où les « ... » désignent simplement des termes de couplages avec d'autres interfaces. La majoration de $c_{i,j}^\nu$ par rapport à $c_{i,i}^\nu$ (mais également par rapport à $c_{j,j}^\nu$ compte tenu de la symétrie de \mathbb{C}^ν), permet donc une estimation de l'erreur en énergie commise en négligeant le terme de couplages $c_{i,j}^\nu$

F.2.4 Cas particulier

Le résultat précédent est satisfaisant mais dissimule une simplification pratique. Dans la plupart des applications, les composites stratifiés sont constitués d'un empilement de plusieurs couches faites du même matériau, de mêmes épaisseurs, mais orientées différemment. Dans ce cas, en l'absence des multiplicateurs de Lagrange, dans la matrice de souplesse en arrachement, le terme S_{3333}^i et les épaisseurs peuvent être factorisés pour obtenir une forme compacte :

$$[\mathbb{S}^\nu] = \begin{pmatrix} \frac{13(e^1 S_{3333}^1 + e^2 S_{3333}^2)}{35} & \frac{9e^2 S_{3333}^2}{70} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \text{Sym} & \ddots & \\ & & & \frac{9e^{n-1} S_{3333}^{n-1}}{70} & \\ & & & \frac{13(e^{n-1} S_{3333}^{n-1} + e^n S_{3333}^n)}{35} & \end{pmatrix} = \frac{9e S_{3333}}{70} \begin{pmatrix} \frac{52}{9} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \text{Sym} & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \frac{52}{9} \end{pmatrix} \quad (\text{F.15})$$

La matrice factorisée a une forme particulière, c'est une matrice de Toeplitz de paramètre $a = \frac{52}{9}$ comme définie à la définition F.2.2 [p. 244]. Pour ce type de matrice, il est possible de donner une estimation analytique simple de la décroissance des coefficients diagonaux car les suites récurrentes d_i et δ_i ont une expression explicite!

Théorème F.2.6 . *Si l'on considère un stratifié dont les plis sont constitués du même matériau et sont de mêmes épaisseurs, alors la matrice de souplesse en arrachement est une matrice de Toeplitz $T_{\frac{52}{9}}^+$*

Nous pouvons alors calculer le coefficient r^+ majorant la décroissance des coefficients :

$$r^2 - \frac{52}{9}r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^+ = \frac{\frac{52}{9} + \sqrt{\left(\frac{52}{9}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{52 + \sqrt{52^2 - 4 \times 81}}{18} = \frac{26 + \sqrt{595}}{9} \approx 5.6$$

Majoration de la décroissance des coefficients de la matrice de rigidité \mathbb{C}^ν . *En norme, les coefficients de la matrice de rigidités \mathbb{C}^ν sont divisés par 5.6 à chaque fois que l'on s'écarte de la diagonale. La demi-largeur de bande de la matrice de rigidité \mathbb{C}^ν assurant une bonne estimation de la rigidité couplée à ε près, est donc de $m > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 5.6}$.*

F.2.5 Discussion finale sur les modèles condensés

Dans la pratique, les stratifiés utilisés sont composés d'un empilement important de couches (de l'ordre de la vingtaine) si bien qu'utiliser la matrice de rigidité pleine peut entraîner un coût numérique réhibitoire. Le résultat précédent fournit une estimation de l'erreur concernant la rigidité de la structure en négligeant certains couplages. Dans le cas particulier d'un composite stratifié dont les plis sont constitués du même matériau, et de mêmes épaisseurs, l'estimation de l'erreur est indépendante de la séquence d'empilement. Une décroissance rapide en $\left(\frac{1}{5,6}\right)^m$ (où m désigne la demi-largeur de bande) de la rigidité de couplage, permet d'envisager une simplification de la matrice \mathbb{C}^ν . Par exemple une erreur de 1% de la rigidité est satisfaite si l'on couple chaque interface avec les quatre interfaces supérieures et inférieures.

Une question ouverte est de savoir si une telle majoration est envisageable concernant la matrice de cisaillement aux interfaces \mathbb{C}^Q . Numériquement, nous constatons une décroissance rapide des coefficients extra-diagonaux. Cependant, la structure déca-diagonale de la matrice de souplesse \mathbb{S}^Q rend peut crédible la mise à jour d'une formulation explicite de cette décroissance. Par ailleurs, une factorisation comme celle opérée à l'équation (F.15) est impossible car la souplesse en cisaillement dépend de l'orientation globale de chacun des plis. Lorsque le coût numérique s'avèrera réhibitoire, nous postulerons par conséquent la négligeabilité des couplages en cisaillement par cohérence avec celle des couplages en arrachement. Par exemple, si nous choisissons de ne coupler en arrachement chacune des interfaces qu'avec les m qui la précèdent et les m qui la suivent (en mettant à zéro les rigidité en arrachement entre interfaces plus lointaines), nous opérerons de même sur la matrice de rigidité en cisaillement.

F.3 Ruine intralaminare du modèle LS1

Le modèle LS1 complet, et sa version L-LS1, partagent la même rigidité de Kirchoff \mathbb{C}^K . Cette annexe, consacrée à la modélisation de la ruine intra-laminare à l'aide du modèle LS1, ne s'attardera donc que sur le choix de l'interpolation de la rigidité en cisaillement. Comme précédemment, celle-ci est rendue difficile par les différences d'homogénéité des coefficients de \mathbb{C}^Q , et par le caractère non diagonal de la souplesse en cisaillement.

F.3.1 Interpolation de la rigidité principale en cisaillement

L'interpolation de la rigidité en cisaillement est plus complexe. Similairement au délaminage, le comportement en cisaillement de chacune des couches est couplé, car la matrice de rigidité \mathbb{C}^Q est *a priori* pleine. Une expression parfaitement rigoureuse de la rigidité en cisaillement interpolée impliquerait de nombreux produits avec des fonctions de pondérations, car il existe 2^{2n} manières de rompre le stratifié. L'interpolation complète s'accompagnerait donc d'un coût numérique conséquent. C'est pourquoi, nous en proposerons une approximation raisonnable.

Interpolation de la rigidité principale

De nouveau, nous étudions le problème dans le repère local du pli. Les rotations permettant le passage au repère global sont simples, car la déformation de cisaillement est un simple vecteur et non la représentation de Voigt d'un champ tensoriel.

Postulat F.3.1 Négligeabilité des couplages pour le cisaillement intra-laminare.

Nous supposons que la contrainte de cisaillement intra-laminare $\{\Sigma^Q\}^m$ est correctement évaluée par la grandeur :

$$\{\Sigma^Q\}^m = \mathbb{C}^{Q,m} \cdot \{\mathbf{E}^Q\}^m \quad (\text{F.16})$$

en lieu et place des m et $m+1$ ^{ème} composantes du vecteur $\mathbb{C}^Q \cdot \{\mathbf{E}^Q\}$. Dans l'équation (F.16) $\mathbb{C}^{Q,m}$ désigne la matrice tournée d'un angle θ_m du bloc 2×2 , apparaissant sur la diagonale de \mathbb{C}^Q , et est relatif au cisaillement intra-laminare. De même, $\{\mathbf{E}^Q\}^m = \mathbb{R}_2(\theta_m) \{\mathbf{E}^Q\}_{glob}^m$ désigne la déformation de cisaillement intra-laminare dans le repère local.

Cette fois, $\mathbb{R}_2(\theta_m)$ est bien une matrice orthogonale, il s'agit de la matrice de rotation du plan :

$$\mathbb{R}_2(\theta_m) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix}$$

Nous posons par convention $\{\mathbf{E}_{old}^Q\}^m$, le vecteur déformations généralisées, dans lequel on aurait enlevé les multiplicateurs de Lagrange $\mu_{3,\dagger}^{Q,m}$:

$$\{\Sigma^Q\}^m = \mathbb{C}^{Q,m} \cdot \{\mathbf{E}^Q\}^m = \mathbb{C}^{Q,m} \cdot \left(\{\mathbf{E}_{old}^Q\}^m + \mathbb{T}_{Q,\dagger} \mu_{3,\dagger}^m \right)$$

La condition de bord libre s'écrit alors : $\mathbb{T}_{Q,\dagger}^\top \{\Sigma^Q\}^m = 0$. $\mathbb{T}_{Q,\dagger}$ désigne un vecteur avec un 0 et un 1 en regard de l'effort de cisaillement intra-laminare longitudinal ou transverse. Nous pouvons isoler $\mu_{3,\dagger}^{Q,m}$, exprimer la contrainte $\{\Sigma^Q\}^m$ en fonction des efforts extérieurs puis obtenir la matrice de rigidité avec la même routine de calcul que précédemment.

Notation F.3.1 Rigidité en cisaillement corrigée, sens \dagger . On note $\mathbb{C}_{d,\dagger}^{Q,m}$ la matrice de rigidité en cisaillement, rompue pour le mode \dagger :

$$\mathbb{C}_{d,\dagger}^{Q,m} = \mathbb{C}^{Q,m} - \mathbb{C}^{Q,m} \cdot \mathbb{T}_{Q,\dagger} \cdot \left(\mathbb{T}_{Q,\dagger}^\top \cdot \mathbb{C}^{Q,m} \cdot \mathbb{T}_{Q,\dagger} \right)^{-1} \cdot \mathbb{T}_{Q,\dagger}^\top \cdot \mathbb{C}^{Q,m} \quad (\text{F.17})$$

La matrice $\mathbb{C}^{Q,m}$ est carrée de taille 2, si bien que l'on peut aisément obtenir des expressions analytiques simples pour les matrices rompues $\mathbb{C}_{d,\dagger}^{Q,m}$, en notant comme à l'habitude $c_{\alpha\beta}^{Q,m}$ les coefficients de $\mathbb{C}^{Q,m}$:

$$\mathbb{C}_{d,L}^{Q,m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^{Q,m} - \frac{(c_{12}^{Q,m})^2}{c_{11}^{Q,m}} \end{pmatrix} \quad \mathbb{C}_{d,T}^{Q,m} = \begin{pmatrix} c_{11}^{Q,m} & -\frac{(c_{12}^{Q,m})^2}{c_{22}^{Q,m}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.18})$$

Postulat F.3.2 Interpolation de la matrice de cisaillement associée à la $m^{\text{ème}}$ couche.
 Le bloc de la matrice de rigidité endommagée, situé sur la diagonale, est postulé sous la forme :

$$\mathbb{C}^{Q,m}(d_L^m, d_T^m) = g_{LT} \mathbb{C}^{Q,m} + g_{\bar{L}T} \mathbb{C}_{d,L}^{Q,m} + g_{L\bar{T}} \mathbb{C}_{d,T}^{Q,m}$$

Par conséquent, nous faisons le choix de n'affecter par la rupture que le bloc diagonal de rigidité en cisaillement intra-laminare. En particulier, nous ne dégradons ni les couplages, ni le cisaillement d'interface. La matrice de rigidité en cisaillement endommagée est obtenue en réalisant l'interpolation forte sur n blocs de taille 2×2 .

La matrice endommagée locale $\mathbb{C}^{Q,m}$ peut, comme précédemment, être exprimée dans le repère global par produit avec les matrices de rotations $\mathbb{R}_2(\theta_m)$, qui, elles, sont orthogonales.

Insuffisance du modèle précédent et interpolation des termes croisés

Il semblerait, par l'expérience numérique, que même dans un cas simple (traction sur un bi-couche (0, 90) avec condition de symétrie), le modèle ci-dessus ne fournisse pas des résultats satisfaisants. En effet, la matrice de rigidité obtenue, annulant seulement les rigidités principales, n'est pas nécessairement définie positive, et les valeurs propres négatives polluent à la fois l'efficacité algorithmique de résolution et les résultats. Nous devons donc simultanément dégrader la rigidité « principale » comme évoquée précédemment, mais également les rigidités de couplage.

Une nouvelle expression de la rigidité endommagée $\mathbb{C}^Q(\mathbf{d})$ La rigidité en cisaillement de la structure saine a une structure par blocs de la forme :

$$\mathbb{C}_{glob}^Q = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{glob}^{Q_1} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_1, \tau_{1,2}} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_1, Q_2} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_1 \tau_{2,3}} & \dots & \\ & \mathbb{C}_{glob}^{\tau_{1,2}} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_2, \tau_{1,2}} & \mathbb{C}_{glob}^{\tau_{1,2} \tau_{2,3}} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_3, \tau_{1,2}} & \\ & & \mathbb{C}_{glob}^{Q_2} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_2 \tau_{2,3}} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbb{C}_{glob}^{Q_n} \end{pmatrix}$$

Tous les blocs de cette matrice sont carrés de taille 2×2 .

- Les matrices $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j}$ désignent les rigidités en cisaillement intra-laminare « principales ». Elles sont les seules que nous abattions dans notre précédente procédure.
- Les matrices $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, \tau_{k,k+1}}$ et $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, \tau_{k,k+1}}$ désignent la rigidité de couplage entre les contraintes intra-laminare dans le pli j et la contrainte de cisaillement à l'interface des plis $k, k + 1$, elle doit être affectée par la ruine du pli j seulement.
- La matrice $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}$ désigne la rigidité de couplage entre les contraintes intra-laminaires dans les plis j et k . Elle doit être affectée à la fois par la ruine du pli j et par celle du pli k .

La matrice de rigidité \mathbb{C}_{glob}^Q peut être tournée dans le repère local du pli 1, en la multipliant à gauche par $\mathbb{R}(\theta_1)^\top$ et à droite par $\mathbb{R}(\theta_1)$, où $\mathbb{R}(\theta_1)$ est une matrice diagonale par blocs concaténant des matrices de rotations dans le plan d'un angle θ_1 . C'est à dire $\mathbb{C}_{loc1}^Q = \mathbb{R}(\theta_1)^\top \cdot \mathbb{C}_{glob}^Q \cdot \mathbb{R}(\theta_1)$ avec $\mathbb{R}(\theta_1) = \text{diag}(\mathbb{R}_2(\theta_1), \dots, \mathbb{R}_2(\theta_1))$:

$$\mathbb{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Pour les rigidités de couplage intra-laminare $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}$ avec $k > j$, nous effectuons cette fois trois rotations successives : repère global– repère local pli j – repère local du pli k – repère global. La matrice endommagée finale $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}(\mathbf{d}^j, \mathbf{d}^k)$, est obtenue à partir de la matrice initiale $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}$ par les opérations matricielles :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}(\mathbf{d}^j, \mathbf{d}^k) &= \mathbb{R}(-\theta_k)^\top \cdot \mathbb{D}^k \cdot \mathbb{R}(\theta_k - \theta_j)^\top \cdot \mathbb{D}^j \cdot \mathbb{R}(\theta_j)^\top \cdot \mathbb{C}_{glob}^{Q_j, \tau_{k, k+1}} \cdot \mathbb{R}(\theta_j) \cdot \mathbb{R}(\theta_k - \theta_j) \cdot \mathbb{R}(-\theta_k) \\ \mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}(\mathbf{d}^j, \mathbf{d}^k) &= \mathbb{R}(-\theta_k)^\top \cdot \mathbb{D}^k \cdot \mathbb{R}(\theta_k - \theta_j)^\top \cdot \mathbb{D}^j \cdot \mathbb{R}(\theta_j)^\top \cdot \mathbb{C}_{glob}^{Q_j, \tau_{k, k+1}}\end{aligned}\tag{F.21}$$

Enfin, nous symétrisons la demi-matrice obtenue (car nous avons soigneusement précisé $j \leq k$ pour le calcul des $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, \tau_{k, k+1}}$ et $j < k$ pour $\mathbb{C}_{glob}^{Q_j, Q_k}(\mathbf{d}^j, \mathbf{d}^k)$) et, de ce fait, uniquement sélectionné la partie supérieure de \mathbb{C}^Q . Ainsi, obtenons-nous pour conclure une interpolation de la forme :

$$\mathbb{C}^Q(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{glob}^{Q_1}(\mathbf{d}^1) & \mathbb{C}_{glob}^{Q_1, \tau_{1,2}}(\mathbf{d}^1) & \mathbb{C}_{glob}^{Q_1 Q_2}(\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2) & \dots & \\ & \mathbb{C}_{glob}^{\tau_1} & \mathbb{C}_{glob}^{Q_2, \tau_1}(\mathbf{d}^2) & \mathbb{C}_{glob}^{\tau_{1,2} \tau_{2,3}} & \dots \\ & & \ddots & & \\ & Sym & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{C}_{glob}^{Q_n}(\mathbf{d}^n) \end{pmatrix}$$

avec les expressions (F.19), (F.20), (F.21), pour les différents blocs.

En procédant de la sorte, il apparaît que lorsqu’une variable d’endommagement générique d atteint une valeur proche de 1, dans le repère local, alors la rigidité est abattue, si bien que le couplage devient nul quel que soit l’état d’endommagement de l’autre pli. Ainsi, la norme de chacun des coefficients des matrices de couplages est décroissante, suivant les fonctions de pondération des couches.

F.3.2 Variation de l’énergie élastique endommagée

La dérivée de la densité d’énergie élastique par rapport aux variables d’endommagement va se décomposer en deux contributions : la première est liée aux efforts membranaires, la seconde aux efforts de cisaillement. La première contribution est exacte, elle se calcule facilement grâce à la propriété de découplage des efforts membranaires. La seconde est plus délicate, dans la mesure où nous avons auparavant effectué plusieurs approximations pour obtenir la rigidité endommagée en cisaillement de notre modèle. Nous proposons néanmoins d’inclure une contribution des termes diagonaux du cisaillement à la variation d’énergie élastique :

Postulat F.3.3 Négligeabilité de la contribution du couplage des efforts tranchants.

Nous supposons que seuls les termes de cisaillement intra-laminare non croisés influent significativement sur la variation d’énergie élastique endommagée.

Nous postulons donc qu’il existe une deuxième contribution à la restitution d’énergie élastique égale à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{el}^{\omega, Q}}{\partial d_L^m}(\mathbf{U}, \mathbf{d}) &= \frac{1}{2} g'(d_L^m) \{\mathbf{E}^Q\}^m \cdot \left(g(d_T^m) \mathbb{C}_{sain}^{Q, m} + (1 - g(d_T^m)) \mathbb{C}_{d, T}^{Q, m} - g(d_T^m) \mathbb{C}_{d, L}^{Q, m} \right) \cdot \{\mathbf{E}^Q\}^m \\ \frac{\partial \psi_{el}^{\omega, Q}}{\partial d_T^m}(\mathbf{U}, \mathbf{d}) &= \frac{1}{2} g'_T(d_T^m) \{\mathbf{E}^Q\}^m \cdot \left(g(d_L^m) \mathbb{C}_{sain}^{Q, m} + (1 - g(d_L^m)) \mathbb{C}_{d, L}^{Q, m} - g(d_L^m) \mathbb{C}_{d, T}^{Q, m} \right) \cdot \{\mathbf{E}^Q\}^m\end{aligned}$$

Cette approximation permettrait automatiquement de découpler la rupture des différents plis (hypothèse très raisonnable) au niveau macroscopique. Nous considérons donc, que la fissuration d’une couche est essentiellement due aux contraintes membranaires (flexion et moment) ainsi qu’aux efforts tranchants intra-laminaires, tandis que nous tenons pour négligeable les couplages, quelque peu artificiels, introduits par notre modélisation LS1.



Napoléon, *Les aristochats* 1970 Walt Disney Productions

*Attends un peu, c'est moi qui suis le chef.
Je dirais quand ce sera la fin. C'est la fin*

Napoléon

Bibliographie

- E. Abdullah, J.-F. Ferrero, J.-J. Barrau, and J.-B. Mouillet. Development of a new finite element for composite delamination analysis. *Composites Science and Technology*, 67(10) : 2208–2218, 2007. [Cité page [xx](#).]
- R. Aghababaei and J. Reddy. Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*, 326(1-2) : 277–289, 2009. [Cité page [xv](#).]
- G. Alfano and M. Crisfield. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7) :1701–1736, 2001. [Cité pages [94](#), [96](#), and [232](#).]
- O. Allix, P. Ladeveze, and A. Corigliano. Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1) :61–74, 1995. [Cité pages [87](#) and [88](#).]
- J. Altenbach, H. Altenbach, and V. A. Eremeyev. On generalized cosserat-type theories of plates and shells : a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*, 80(1) : 73–92, 2010. [Cité page [xiii](#).]
- S. Ambartsumian. On a general theory of anisotropic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22(2) :305–319, 1958. [Cité page [xvii](#).]
- S. Ambartsumian. *Theory of anisotropic shells*, volume 118. National Aeronautics and Space Administration, 1964. [Cité page [xvii](#).]
- S. Ambartsumian et al. Contributions to the theory of anisotropic layered shells. *Applied Mechanics Reviews*, 15(4) :245–249, 1962. [Cité page [xvii](#).]
- M. Ambati, T. Gerasimov, and L. De Lorenzis. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 55(2) :383–405, 2015. [Cité pages [81](#) and [109](#).]
- L. Ambrosio and V. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. 1992. [Cité page [105](#).]
- L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8) : 999–1036, 1990. [Cité page [105](#).]
- L. Ambrosio et al. Existence theory for a new class of variational problems. 1988. [Cité page [105](#).]

- H. Amor, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) :1209–1229, 2009. [Cité page 81.]
- I. Aranson, V. Kalatsky, and V. Vinokur. Continuum field description of crack propagation. *Physical Review Letters*, 85(1) :118, 2000. [Cité page xx.]
- F. Armero and C. Linder. Numerical simulation of dynamic fracture using finite elements with embedded discontinuities. *International Journal of Fracture*, 160(2) :119, 2009. [Cité page xix.]
- M. Aydogdu. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 89(1) :94–101, 2009. [Cité page xiv.]
- F. Aymerich, F. Dore, and P. Priolo. Prediction of impact-induced delamination in cross-ply composite laminates using cohesive interface elements. *Composites science and technology*, 68(12) :2383–2390, 2008. [Cité page 139.]
- F. Aymerich, F. Dore, and P. Priolo. Simulation of multiple delaminations in impacted cross-ply laminates using a finite element model based on cohesive interface elements. *Composites Science and Technology*, 69(11-12) :1699–1709, 2009. [Cité pages 130, 134, 135, and 142.]
- E. Barbero and J. Reddy. Modeling of delamination in composite laminates using a layer-wise plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, 28(3) :373–388, 1991. [Cité page xxi.]
- E. Barbero, J. Reddy, and J. Teply. General two-dimensional theory of laminated cylindrical shells. *AIAA journal*, 28(3) :544–553, 1990. [Cité page xv.]
- G. I. Barenblatt et al. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7(1) :55–129, 1962. [Cité page xix.]
- J. Barnes and G. Byerly. The formation of residual stresses in laminated thermoplastic composites. *Composites Science and Technology*, 51(4) :479–494, 1994. [Cité page 146.]
- R. Baroud. *Development and implementation of numerical models for the study of multilayered plates*. PhD thesis, Paris Est, 2016. [Cité page 168.]
- R. Baroud, K. Sab, J.-F. Caron, and F. Kaddah. A statically compatible layerwise stress model for the analysis of multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures*, 96 : 11–24, 2016. [Cité pages xvi, 9, 17, 19, and 33.]
- W. W. Barrett. A theorem on inverse of tridiagonal matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 27 :211–217, 1979. [Cité page 245.]
- A. Bedford. *Hamilton's principle in continuum mechanics*, volume 139. Pitman advanced publishing program Boston, MA, 1985. [Cité page 44.]
- A. Belouinar, S. Benmebarek, M. N. Houhou, and L. Belouinar. Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based reissner–mindlin elements. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 11(2) :211–230, 2019. [Cité pages 52 and 59.]
- T. Belytschko, J. Fish, and B. E. Engelman. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(1) :59–89, 1988. [Cité page xix.]
- M. L. Benzeggagh and M. Kenane. Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus. *Composites Science and Technology*, 56(4) :439–449, 1996. [Cité pages xxii, xxiii, and 72.]
- J.-M. Berthelot. Mécanique des matériaux et structures composites. *Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés*, 2010. [Cité page 176.]

- M. Bischoff, E. Ramm, and J. Irslinger. Models and finite elements for thin-walled structures. *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, pages 1–86, 2018. [Cité page [xiii](#).]
- N. Blanco, A. Turon, and J. Costa. An exact solution for the determination of the mode mixture in the mixed-mode bending delamination test. *Composites Science and Technology*, 66(10) :1256–1258, 2006. [Cité page [93](#).]
- J. Bleyer and R. Alessi. Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture including several damage mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 336 :213–236, 2018. [Cité page [102](#).]
- d. M. Bonnet and A. Frangi. Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 16(5) :667–668, 2007. [Cité pages [61](#) and [82](#).]
- M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. Hughes, and C. M. Landis. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217 :77–95, 2012. [Cité page [106](#).]
- P.-O. Bouchard, F. Bay, and Y. Chastel. Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(35-36) :3887–3908, 2003. [Cité page [xix](#).]
- B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4) :797–826, 2000. [Cité pages [78](#), [79](#), [104](#), and [105](#).]
- B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1-3) :5–148, 2008. [Cité pages [78](#) and [104](#).]
- A. Boutaous, B. Peseux, L. Gornet, and A. Bélaidi. A new modeling of plasticity coupled with the damage and identification for carbon fibre composite laminates. *Composite Structures*, 74(1) :1–9, 2006. [Cité page [xix](#).]
- A. Braides et al. *Approximation of free-discontinuity problems*. Number 1694. Springer Science & Business Media, 1998. [Cité page [105](#).]
- A. Braides et al. *Gamma-convergence for Beginners*, volume 22. Clarendon Press, 2002. [Cité page [105](#).]
- J. Brouzoulis and M. Fagerström. An enriched shell element formulation for efficient modeling of multiple delamination propagation in laminates. *Composite Structures*, 126 :196–206, 2015. [Cité page [xxi](#).]
- J. Brouzoulis, M. Fagerström, and E. Svenning. An enriched shell element formulation for modeling of inter-and intralaminar crack propagation in laminates. *Composite Structures*, 136 :616–625, 2016. [Cité page [xxi](#).]
- B. Budiansky and N. A. Fleck. Compressive failure of fibre composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1) :183–211, 1993. [Cité page [146](#).]
- T. Q. Bui and X. Hu. A review of phase-field models, fundamentals and their applications to composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, page 107705, 2021. [Cité page [118](#).]
- P. P. Camanho, C. G. Davila, and M. De Moura. Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 37(16) :1415–1438, 2003. [Cité page [xx](#).]
- J.-F. Caron, A. D. Diaz, R. P. Carreira, A. Chabot, and A. Ehrlacher. Multi-particle modeling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, 66(6) :755–765, 2006. [Cité pages [xvi](#), [xix](#), and [20](#).]

- E. Carrera. Layer-wise mixed models for accurate vibrations analysis of multilayered plates. 1998a. [Cité page xviii.]
- E. Carrera. Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis. *Composite Structures*, 43(1) :57–70, 1998b. [Cité page xviii.]
- E. Carrera. Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description, part 2 : Numerical evaluations. *AIAA journal*, 37(9) :1117–1124, 1999. [Cité page xviii.]
- E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2) :87–140, 2002. [Cité pages xiii and xvii.]
- A. Chabot. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)*. PhD thesis, 1997. [Cité pages xvi and 182.]
- A. Chambolle. An approximation result for special functions with bounded deformation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 83(7) :929–954, 2004. [Cité page 105.]
- A. K. Chen, M. Crisfield. Predicting progressive delamination of composite material specimens via interface elements. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 6(4) :301–317, 1999. [Cité page 91.]
- B. Chen, S. Pinho, N. De Carvalho, P. Baiz, and T. Tay. A floating node method for the modelling of discontinuities in composites. *Engineering Fracture Mechanics*, 127 :104–134, 2014. [Cité page xx.]
- R. M. Christensen and S. J. DeTeresa. Delamination failure investigation for out-of-plane loading in laminates. *Journal of Composite Materials*, 38(24) :2231–2238, 2004. [Cité page 81.]
- P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity : Volume II : Theory of Plates*. Elsevier, 1997. [Cité page xiii.]
- P. G. Ciarlet and P. Destuynder. Justification of the two-dimensional linear plate model. *J Mec*, 18(2) :315–344, 1979. [Cité page xiii.]
- P. G. Ciarlet and L. Gratie. From the classical to the generalized von kármán and marguerre-von kármán equations. *Journal of Computational and applied Mathematics*, 190(1-2) :470–486, 2006. [Cité page 140.]
- C. Comi, Y. Berthaud, and R. Billardon. On localisation in ductile-brittle materials under compressive loadings. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14(1) :19–43, 1995. [Cité page 105.]
- A. Corigliano. Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 30(20) :2779–2811, 1993. [Cité pages 71, 94, and 95.]
- A. Cottrell. Theoretical aspects of radiation damage and brittle fracture in steel pressure vessels. *Ing. Nucleare*, 4, 1962. [Cité page xxii.]
- H. Cox. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British Journal of Applied Physics*, 3(3) :72, 1952. [Cité page 46.]
- M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*, pages 55–62. Elsevier, 1981. [Cité page 88.]
- W. Cui, M. R. Wisnom, and M. Jones. Effect of through thickness tensile and compressive stresses on delamination propagation fracture energy. *Journal of Composites, Technology and Research*, 16(4) :329–335, 1994. [Cité page 81.]

- R. de Borst and C. V. Verhoosel. Gradient damage vs phase-field approaches for fracture : Similarities and differences. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 : 78–94, 2016. [Cité page 104.]
- N. De Carvalho, B. Chen, S. Pinho, J. Ratcliffe, P. Baiz, and T.-E. Tay. Modeling delamination migration in cross-ply tape laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 71 :192–203, 2015. [Cité page 162.]
- E. de France. Finite element *code_aster*, analysis of structures and thermomechanics for studies and research. Open source on www.code-aster.org, 1989–2017. [Cité page 79.]
- L. A. de Oliveira and M. V. Donadon. Delamination analysis using cohesive zone model : A discussion on traction-separation law and mixed-mode criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, 228 :106922, 2020. [Cité page xix.]
- S. J. DeTeresa, D. C. Freeman, and S. E. Groves. The effects of through-thickness compression on the interlaminar shear response of laminated fiber composites. *Journal of Composite Materials*, 38(8) :681–697, 2004. [Cité page 81.]
- H. B. Dhia. Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, 12(326) :899–904, 1998. [Cité pages 148 and 183.]
- M. Di Sciuva. Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. *Computers & Structures*, 21(4) :789–796, 1985. [Cité page xviii.]
- A. D. Diaz and J.-F. Caron. Interface plasticity and delamination onset prediction. *Mechanics of Materials*, 38(7) :648–663, 2006. [Cité pages xvi and 182.]
- A. D. Diaz, S. Chataigner, J.-F. Caron, et al. A layerwise finite element for multilayers with imperfect interfaces. *Composite Structures*, 93(12) :3262–3271, 2011. [Cité pages xvi and 236.]
- R. Dimitri, P. Cornetti, V. Mantič, M. Trullo, and L. De Lorenzis. Mode-i debonding of a double cantilever beam : a comparison between cohesive crack modeling and finite fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 124 :57–72, 2017. [Cité page 232.]
- S. Donaldson. Fracture toughness testing of graphite/epoxy and graphite/peek composites. *Composites*, 16(2) :103–112, 1985. [Cité pages xxiii and 72.]
- S. L. Donaldson. The effect of interlaminar fracture properties on the delamination buckling of composite laminates. *Composites Science and Technology*, 28(1) :33–44, 1987. [Cité pages xxiii and 72.]
- D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2) :100–104, 1960. [Cité page xix.]
- A. Eijo, E. Oñate, and S. Oller. Delamination in laminated plates using the 4-noded quadrilateral qlrz plate element based on the refined zigzag theory. *Composite Structures*, 108 : 456–471, 2014. [Cité page xxi.]
- A. Evans and W. Adler. Kinking as a mode of structural degradation in carbon fiber composites. *Acta Metallurgica*, 26(5) :725–738, 1978. [Cité page 147.]
- A. Fam and T. Sharaf. Flexural performance of sandwich panels comprising polyurethane core and gfrp skins and ribs of various configurations. *Composite Structures*, 92(12) :2927–2935, 2010. [Cité page 65.]
- P. Farrell and C. Maurini. Linear and nonlinear solvers for variational phase-field models of brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(5) : 648–667, 2017. [Cité page 78.]

- D.-C. Feng and J.-Y. Wu. Phase-field regularized cohesive zone model (czm) and size effect of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 197 :66–79, 2018. [Cité page 120.]
- C. F. Fischer and R. A. Usmani. Properties of some tridiagonal matrices and their application to boundary value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 6(1) :127–142, 1969. [Cité page 244.]
- B. Fraeijns de Veubeke. The dual principles of elastodynamics : finite element applications. Technical report, LTAS, 1971. [Cité page 45.]
- G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998. [Cité pages xx and 104.]
- M. Frémond and M. Shitikova. Non-smooth thermomechanics. *Appl. Mech. Rev.*, 55(5) : B99–B100, 2002. [Cité page 72.]
- A. K. Garg, R. K. Khare, and T. Kant. Free vibration of skew fiber-reinforced composite and sandwich laminates using a shear deformable finite element model. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 8(1) :33–53, 2006. [Cité pages 64, 65, and 157.]
- J. Germain. *Évaluation des capacités prédictives d’un modèle avancé pour la prévision de la tenue de plaques stratifiées perforées*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2020. [Cité page xi.]
- J. W. Gillespie Jr, L. A. Carlsson, R. B. Pipes, R. Rothschilds, B. Trethewey, and A. Smiley. Delamination growth in composite materials. 1986. [Cité page xxiii.]
- Y. Gong, B. Zhang, S. Mukhopadhyay, and S. R. Hallett. Experimental study on delamination migration in multidirectional laminates under mode ii static and fatigue loading, with comparison to mode i. *Composite Structures*, 201 :683–698, 2018. [Cité page 103.]
- V. K. Goyal, E. R. Johnson, and C. G. Davila. Irreversible constitutive law for modeling the delamination process using interfacial surface discontinuities. *Composite Structures*, 65(3-4) : 289–305, 2004. [Cité page 94.]
- A. A. Griffith. Vi. the phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582-593) :163–198, 1921. [Cité page 104.]
- J. S. Hale, M. Brunetti, S. P. Bordas, and C. Maurini. Simple and extensible plate and shell finite element models through automatic code generation tools. *Computers & Structures*, 209 :163–181, 2018. [Cité page 140.]
- B. Halphen and Q. S. Nguyen. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 :39–63, 1975. [Cité page 70.]
- A. Hansbo and P. Hansbo. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(33-35) :3523–3540, 2004. [Cité page xx.]
- F. Hashagen and R. de Borst. Numerical assessment of delamination in fibre metal laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185(2-4) :141–159, 2000. [Cité page xvi.]
- S. Hashemi, A. Kinloch, and J. Williams. Mechanics and mechanisms of delamination in a poly (ether sulphone)—fibre composite. *Composites Science and Technology*, 37(4) :429–462, 1990. [Cité pages xxiii and 72.]
- S. H. Hashemi, S. R. Atashipour, and M. Fadaee. An exact analytical approach for in-plane and out-of-plane free vibration analysis of thick laminated transversely isotropic plates. *Archive of Applied Mechanics*, 82(5) :677–698, 2012. [Cité page xv.]

- Z. Hashin. Failure criteria for unidirectional fiber composites. 1980. [Cité page 109.]
- W. He, Z. Guan, X. Li, and D. Liu. Prediction of permanent indentation due to impact on laminated composites based on an elasto-plastic model incorporating fiber failure. *Composite Structures*, 96 :232–242, 2013. [Cité page xix.]
- J. M. Hedgepeth. *Stress concentrations in filamentary structures*. National Aeronautics and Space Administration, 1961. [Cité page 46.]
- T. Heister, M. F. Wheeler, and T. Wick. A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290 :466–495, 2015. [Cité page 78.]
- F. Hermes. Process zone and cohesive element size in numerical simulations of delamination in bi-layers. *Department of Mechanical Engineering*, 2010. [Cité page 86.]
- R. Higuchi, T. Okabe, and T. Nagashima. Numerical simulation of progressive damage and failure in composite laminates using xfem/czm coupled approach. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 95 :197–207, 2017. [Cité page 103.]
- A. Hillerborg, M. Mod er, and P.-E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6) :773–781, 1976. [Cité page xix.]
- N. Hongkarnjanakul, C. Bouvet, and S. Rivallant. Validation of low velocity impact modelling on different stacking sequences of cfrp laminates and influence of fibre failure. *Composite Structures*, 106 :549–559, 2013. [Cité pages x and 33.]
- S. Hosseini, J. J. Remmers, C. V. Verhoosel, and R. De Borst. Propagation of delamination in composite materials with isogeometric continuum shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3-4) :159–179, 2015. [Cité page xxi.]
- S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, and H. R. D. Taher. Exact solutions for free flexural vibration of l vy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 35(2) :708–727, 2011. [Cité page xv.]
- J. Hou, N. Petrinic, and C. Ruiz. A delamination criterion for laminated composites under low-velocity impact. *Composites science and technology*, 61(14) :2069–2074, 2001. [Cité page 139.]
- H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, et al. Multi-scale modelling of sandwich structures using the arlequin method part i : Linear modelling. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45 (1) :37–51, 2008. [Cité pages 148 and 183.]
- C. Huchette, T. Vandellos, and F. Laurin. Influence of intralaminar damage on the delamination crack evolution. In *Damage growth in aerospace composites*, pages 107–140. Springer, 2015. [Cité page 97.]
- E. Iarve and D. Mollenhauer. Mesh-independent matrix cracking and delamination modeling in advanced composite materials. In *Numerical modelling of failure in advanced composite materials*, pages 227–264. Elsevier, 2015. [Cité page 96.]
- T. Irie, G. Yamada, and S. Aomura. Natural frequencies of mindlin circular plates. 1980. [Cité page 61.]
- R. A. Jurf and R. B. Pipes. Interlaminar fracture of composite materials. *Journal of Composite Materials*, 16(5) :386–394, 1982. [Cité pages xxiii and 72.]
- L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions, izy akad. *Nank SSR Otd Tech Nauk*, 8 :26–31, 1958. [Cité page xx.]

- T. Kant and R. K. Khare. A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(24) :4477–4499, 1997. [Cité page [xv](#).]
- T. Kant, D. Owen, and O. Zienkiewicz. A refined higher-order c plate bending element. *Computers & Structures*, 15(2) :177–183, 1982. [Cité page [xv](#).]
- A. Karma, D. A. Kessler, and H. Levine. Phase-field model of mode iii dynamic fracture. *Physical Review Letters*, 87(4) :045501, 2001. [Cité page [79](#).]
- J. Kenny and M. Marchetti. Elasto-plastic behavior of thermoplastic composite laminates under cyclic loading. *Composite Structures*, 32(1-4) :375–382, 1995. [Cité page [xix](#).]
- R. Kim and S. Soni. Failure of composite laminates due to combined interlaminar normal and shear stresses. *Composites*, 86 :341–350, 1986. [Cité page [xxii](#).]
- G. Kirchhoff. *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. 1850. [Cité page [xiii](#).]
- P. K. Kristensen and E. Martínez-Pañeda. Phase field fracture modelling using quasi-newton methods and a new adaptive step scheme. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 107 :102446, 2020. [Cité page [78](#).]
- C. Kuhn, A. Schlüter, and R. Müller. On degradation functions in phase field fracture models. *Computational Materials Science*, 108 :374–384, 2015. [Cité page [79](#).]
- D. T. Le, J.-J. Marigo, C. Maurini, and S. Vidoli. Strain-gradient vs damage-gradient regularizations of softening damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 340 :424–450, 2018. [Cité page [104](#).]
- A. Lebée and K. Sab. A bending-gradient model for thick plates. part i : Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :2878–2888, 2011a. [Cité page [xvi](#).]
- A. Lebée and K. Sab. A bending-gradient model for thick plates, part ii : Closed-form solutions for cylindrical bending of laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :2889–2901, 2011b. [Cité page [xvi](#).]
- K. Lee, N. Senthilnathan, S. Lim, and S. Chow. An improved zig-zag model for the bending of laminated composite plates. *Composite Structures*, 15(2) :137–148, 1990. [Cité page [xviii](#).]
- D. Leguillon. A method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates. *International Journal of Fracture*, 100(1) :105–120, 1999. [Cité page [xxiii](#).]
- D. Leguillon. Strength or toughness ? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21(1) :61–72, 2002. [Cité page [xxiii](#).]
- D. Leguillon, G. Marion, R. Harry, and F. Lecuyer. The onset of delamination at stress-free edges in angle-ply laminates—analysis of two criteria. *Composites Science and Technology*, 61(3) :377–382, 2001. [Cité page [xxii](#).]
- S. Lekhnitskii. Strength calculation of composite beams. *Vestnik Inzhen i Tekhnikov*, 9 :137–148, 1935. [Cité page [xvii](#).]
- D. Li and M. Wisnom. Modelling damage initiation and propagation in composites using interface elements. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 4, 1970. [Cité page [138](#).]
- X. Li, S. R. Hallett, and M. R. Wisnom. Predicting the effect of through-thickness compressive stress on delamination using interface elements. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(2) :218–230, 2008. [Cité page [81](#).]
- K. Liew. Solving the vibration of thick symmetric laminates by reissner/mindlin plate theory and thep-ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3) :343–360, 1996. [Cité pages [63](#) and [156](#).]

- K. Liew, J.-B. Han, and Z. Xiao. Vibration analysis of circular mindlin plates using the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 205(5) :617–630, 1997. [Cité pages 61, 62, and 63.]
- J. Liu, W. Zhu, Z. Yu, and X. Wei. Dynamic shear-lag model for understanding the role of matrix in energy dissipation in fiber-reinforced composites. *Acta Biomaterialia*, 74 :270–279, 2018. [Cité page 48.]
- A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press, 2013. [Cité page xiii.]
- X. Lu, M. Ridha, B. Chen, V. Tan, and T. Tay. On cohesive element parameters and delamination modelling. *Engineering Fracture Mechanics*, 206 :278–296, 2019. [Cité page xix.]
- G.-M. Luo and Y.-J. Lee. Quasi-static simulation of constrained layered damped laminated curvature shells subjected to low-velocity impact. *Composites Part B : Engineering*, 42(5) : 1233–1243, 2011. [Cité page 132.]
- P. Maimi, J. Mayugo, and P. Camanho. A three-dimensional damage model for transversely isotropic composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 42(25) :2717–2745, 2008. [Cité page 162.]
- H. Maitournam. *Mécanique des structures anélastiques*. 2013. [Cité page 70.]
- S. Mall and N. Kochhar. Criterion for mixed mode fracture in composite bonded joints. 1986. [Cité pages xxiii and 72.]
- E. Martin and D. Leguillon. Energetic conditions for interfacial failure in the vicinity of a matrix crack in brittle matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 41(24-25) :6937–6948, 2004. [Cité page xxiii.]
- E. Martin, B. Poitou, D. Leguillon, and J. Gatt. Competition between deflection and penetration at an interface in the vicinity of a main crack. *International Journal of Fracture*, 151 (2) :247–268, 2008. [Cité page xxiii.]
- E. Martin, D. Leguillon, and N. Carrère. A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 47(9) :1297–1305, 2010. [Cité page xxiii.]
- E. Martin, D. Leguillon, and N. Carrère. A coupled strength and toughness criterion for the prediction of the open hole tensile strength of a composite plate. *International Journal of Solids and Structures*, 49(26) :3915–3922, 2012. [Cité page xxiii.]
- M. McElroy. Use of an enriched shell finite element to simulate delamination-migration in a composite laminate. *Composite Structures*, 167 :88–95, 2017. [Cité pages xxi and 103.]
- G. Meurant. Sur l'inverse des matrices tridiagonales et tridiagonales par blocs. Technical report, 1990. [Cité pages 179, 181, 244, and 245.]
- C. Miehe. Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(11) :1285–1322, 2002. [Cité page 76.]
- C. Miehe, M. Hofacker, and F. Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48) :2765–2778, 2010. [Cité page 81.]
- A. Mielke. Evolution of rate-independent systems. *Evolutionary Equations*, 2 :461–559, 2005. [Cité page 76.]
- R. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18 :31–38, 1951. [Cité page xiv.]

- N. Moës and T. Belytschko. X-fem, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Eléments*, 11(2-4) :305–318, 2002. [Cité page [xix](#).]
- A. Morais, A. Marques, and P. de Castro. Estudo da aplicação de ensaios de fractura interlaminar de modo i a laminados compostos multidireccionais. In *Proceedings of the 7as jornadas de fractura, Sociedade Portuguesa de Materiais, Portugal*, pages 90–95, 2000. [Cité pages [97](#) and [161](#).]
- D. Morgenstern. Herleitung der plattentheorie aus der dreidimensionalen elastizitätstheorie. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 4(1) :145–152, 1959. [Cité page [xiii](#).]
- D. Mortell, D. Tanner, and C. McCarthy. In-situ sem study of transverse cracking and delamination in laminated composite materials. *Composites Science and Technology*, 105 :118–126, 2014. [Cité pages [120](#) and [122](#).]
- D. B. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989. [Cité page [105](#).]
- H. Murakami. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. 1986. [Cité page [xviii](#).]
- M. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. 1981. [Cité page [xiv](#).]
- T. Naciri, A. Ehrlacher, and A. Chabot. Interlaminar stress analysis with a new multiparticle modelization of multilayered materials (m4). *Composites Science and Technology*, 58(3-4) :337–343, 1998. [Cité pages [xvi](#) and [20](#).]
- J. A. Nairn and D.-A. Mendels. On the use of planar shear-lag methods for stress-transfer analysis of multilayered composites. *Mechanics of Materials*, 33(6) :335–362, 2001. [Cité page [46](#).]
- D. Ngo and A. C. Scordelis. Finite element analysis of reinforced concrete beams. In *Journal Proceedings*, volume 64, pages 152–163, 1967. [Cité page [xix](#).]
- Q.-S. Nguyen. Stabilité et mécanique non linéaire. *Revue Française de Génie Civil*, 4(1) :149–149, 2000a. [Cité page [70](#).]
- Q. S. Nguyen. *Stability and nonlinear solid mechanics*. Wiley, 2000b. [Cité page [70](#).]
- T. T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.-Z. Zhu, M. Bornert, and C. Chateau. A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure. *Engineering Fracture Mechanics*, 139 :18–39, 2015. [Cité page [81](#).]
- T.-T. Nguyen, J. Réthoré, J. Yvonnet, and M.-C. Baietto. Multi-phase-field modeling of anisotropic crack propagation for polycrystalline materials. *Computational Mechanics*, 60(2) :289–314, 2017. [Cité page [147](#).]
- V. P. Nguyen. Discontinuous galerkin/extrinsic cohesive zone modeling : Implementation caveats and applications in computational fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 128 :37–68, 2014. [Cité page [xix](#).]
- V.-T. Nguyen and J.-F. Caron. Finite element analysis of free-edge stresses in composite laminates under mechanical and thermal loading. *Composites Science and Technology*, 69(1) :40–49, 2009. [Cité page [xvii](#).]
- T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, P. Phung-Van, S. Nguyen-Hoang, and H. Nguyen-Xuan. An edge-based smoothed three-node mindlin plate element (es-min3) for static and free vibration analyses of plates. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 18(4) :1072–1082, 2014. [Cité pages [52](#) and [59](#).]

- A. Nosier and A. Bahrami. Free-edge stresses in antisymmetric angle-ply laminates in extension and torsion. *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23) :6800–6816, 2006. [Cité page [xv](#).]
- A. C. Orifici, I. Herszberg, and R. S. Thomson. Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure. *Composite Structures*, 86(1-3) :194–210, 2008. [Cité pages [xxi](#) and [xxiii](#).]
- M. Ortiz and L. Stainier. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171(3-4) :419–444, 1999. [Cité page [76](#).]
- N. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, 3(3) :398–411, 1969. [Cité page [xvi](#).]
- N. Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14(5) :385–400, 1978. [Cité pages [xvi](#) and [166](#).]
- P. F. Pai. A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 32(16) :2295–2313, 1995. [Cité page [xiv](#).]
- H. Parisch. A continuum-based shell theory for non-linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(11) :1855–1883, 1995. [Cité page [xvi](#).]
- S. T. Pinho, P. Robinson, and L. Iannucci. Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites. *Composites science and technology*, 66(13) :2069–2079, 2006. [Cité page [147](#).]
- A. Quintanas-Corominas, J. Reinoso, E. Casoni, A. Turon, and J. Mayugo. A phase field approach to simulate intralaminar and translaminar fracture in long fiber composite materials. *Composite Structures*, 220 :899–911, 2019. [Cité pages [114](#) and [116](#).]
- A. Quintanas-Corominas, A. Turon, J. Reinoso, E. Casoni, M. Paggi, and J. Mayugo. A phase field approach enhanced with a cohesive zone model for modeling delamination induced by matrix cracking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 358 :112618, 2020. [Cité pages [97](#), [116](#), [117](#), [119](#), [120](#), [121](#), [122](#), [124](#), and [162](#).]
- T. Rabczuk, G. Zi, A. Gerstenberger, and W. A. Wall. A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5) :577–599, 2008. [Cité page [xx](#).]
- J. Rakowski. The interpretation of the shear locking in beam elements. *Computers & Structures*, 37(5) :769–776, 1990. [Cité page [32](#).]
- I. Ramière and T. Helfer. Iterative residual-based vector methods to accelerate fixed point iterations. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(9) :2210–2226, 2015. [Cité page [78](#).]
- J. G. Ratcliffe, M. W. Czabaj, and T. K. O’Brien. A test for characterizing delamination migration in carbon/epoxy tape laminates. 2013. [Cité page [103](#).]
- G. Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2003. [Cité pages [148](#) and [183](#).]
- B. Rath and Y. Das. Vibration of layered shells. *Journal of Sound and Vibration*, 28(4) :737–757, 1973. [Cité page [xvii](#).]
- J. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3(3) :173–180, 1987. [Cité page [xv](#).]

- J. N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. 1984. [Cité pages [xiv](#) and [xv](#).]
- J. Reeder, K. Song, P. Chunchu, and D. Ambur. Postbuckling and growth of delaminations in composite plates subjected to axial compression. In *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, page 1746, 2002. [Cité page [xxiii](#).]
- J. R. Reeder and J. H. Crews Jr. Mixed-mode bending method for delamination testing. *AiAA Journal*, 28(7) :1270–1276, 1990. [Cité page [93](#).]
- S. R. Reid and G. Zhou. *Impact behaviour of fibre-reinforced composite materials and structures*. Elsevier, 2000. [Cité page [127](#).]
- J. Reiner, M. Veidt, M. Dargusch, and L. Gross. A progressive analysis of matrix cracking-induced delamination in composite laminates using an advanced phantom node method. *Journal of Composite Materials*, 51(20) :2933–2947, 2017. [Cité pages [114](#), [120](#), [122](#), [123](#), and [162](#).]
- E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech.*, pages A69–A77, 1945. [Cité pages [xiv](#) and [xvi](#).]
- E. Reissner. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1) :55–68, 1947. [Cité page [xvi](#).]
- E. Reissner. On tranverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. 1974. [Cité page [xiv](#).]
- E. Reissner. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(7) :1366–1368, 1984. [Cité page [xviii](#).]
- J. J. Remmers, G. N. Wells, and R. d. Borst. A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(13) :2013–2040, 2003. [Cité page [xvi](#).]
- J. Ren. Bending theory of laminated plate. *Composites Science and Technology*, 27(3) :225–248, 1986. [Cité page [xvii](#).]
- E. Riks. The application of newton’s method to the problem of elastic stability. 1972. [Cité page [88](#).]
- P. Robinson, T. Besant, and D. Hitchings. Delamination growth prediction using a finite element approach. In *European Structural Integrity Society*, volume 27, pages 135–147. Elsevier, 2000. [Cité page [96](#).]
- R. Russo and B. Chen. Overcoming the cohesive zone limit in composites delamination : modeling with slender structural elements and higher-order adaptive integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(24) :5511–5545, 2020. [Cité pages [78](#), [86](#), and [96](#).]
- K. Sab and A. Lebé. *Homogenization of heterogeneous thin and thick plates*. John Wiley & Sons, 2015. [Cité page [176](#).]
- N. Saeedi, K. Sab, and J.-F. Caron. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. part i : Analytical analysis using a layerwise stress approach. *International Journal of Solids and Structures*, 49(26) :3711–3726, 2012a. [Cité pages [xvii](#) and [202](#).]
- N. Saeedi, K. Sab, and J.-F. Caron. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. part ii : Efficient layerwise mesh strategy for the prediction of delamination onset. *International Journal of Solids and Structures*, 49(26) :3727–3740, 2012b. [Cité pages [xvii](#), [xxiii](#), [33](#), and [202](#).]

- N. Saeedi, K. Sab, and J.-F. Caron. Cylindrical bending of multilayered plates with multi-delamination via a layerwise stress approach. *Composite Structures*, 95 :728–739, 2013. [Cité page 202.]
- J. Salençon. *Handbook of continuum mechanics : General concepts thermoelasticity*. Springer Science & Business Media, 2012. [Cité page 3.]
- J. Schön. Coefficient of friction of composite delamination surfaces. *Wear*, 237(1) :77–89, 2000. [Cité page 138.]
- J. W. Shi, A. Nakatani, and H. Kitagawa. Vibration analysis of fully clamped arbitrarily laminated plate. *Composite Structures*, 63(1) :115–122, 2004. [Cité pages 62, 63, 156, and 157.]
- O. Sicot, X.-L. Gong, A. Cherouat, and J. Lu. Determination of residual stress in composite laminates using the incremental hole-drilling method. *Journal of Composite Caterials*, 37 (9) :831–844, 2003. [Cité page 146.]
- S. A. Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1) :175–209, 2000. [Cité page xx.]
- L. Škec, G. Alfano, and G. Jelenić. Complete analytical solutions for double cantilever beam specimens with bi-linear quasi-brittle and brittle interfaces. *International Journal of Fracture*, 215(1-2) :1–37, 2019. [Cité pages 83, 84, 86, 225, and 233.]
- M. Smith. Abaqus/standard user’s manual, version 6.9. 2009. [Cité page 32.]
- K. P. Soldatos and A. Messina. The influence of boundary conditions and transverse shear on the vibration of angle-ply laminated plates, circular cylinders and cylindrical panels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(18-19) :2385–2409, 2001. [Cité pages 63 and 157.]
- J.-H. Song, P. M. Areias, and T. Belytschko. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(6) :868–893, 2006. [Cité page xx.]
- B. Spencer and J. Barnby. The effects of notch and fibre angles on crack propagation in fibre-reinforced polymers. *Journal of Materials Science*, 11(1) :83–88, 1976. [Cité pages xxiii and 72.]
- L. Sutherland and C. G. Soares. The use of quasi-static testing to obtain the low-velocity impact damage resistance of marine grp laminates. *Composites Part B : Engineering*, 43 (3) :1459–1467, 2012. [Cité page 132.]
- M. A. Sutton, X. Deng, F. Ma, J. C. Newman Jr, and M. James. Development and application of a crack tip opening displacement-based mixed mode fracture criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 37(26) :3591–3618, 2000. [Cité page xxii.]
- B. Tabarrok. Complementary variational principles in elastodynamics. *Computers & Structures*, 19(1-2) :239–246, 1984. [Cité page 45.]
- A. Tabiei and W. Zhang. Composite laminate delamination simulation and experiment : A review of recent development. *Applied Mechanics Reviews*, 70(3), 2018. [Cité page xxi.]
- S. Teichtmeister, D. Kienle, F. Aldakheel, and M.-A. Keip. Phase field modeling of fracture in anisotropic brittle solids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 97 :1–21, 2017. [Cité page 147.]
- R. T. Tenchev and B. Falzon. A correction to the analytical solution of the mixed-mode bending (mmb) problem. *Composites Science and Technology*, 67(3-4) :662–668, 2007. [Cité page 93.]

- T. Ting and S. Chou. Edge singularities in anisotropic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 17(11) :1057–1068, 1981. [Cité page [xxii](#).]
- M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8) :901–916, 1991. [Cité page [xiv](#).]
- H. Tuwair, M. Hopkins, J. Volz, M. A. ElGawady, M. Mohamed, K. Chandrashekhara, and V. Birman. Evaluation of sandwich panels with various polyurethane foam-cores and ribs. *Composites Part B : Engineering*, 79 :262–276, 2015. [Cité page [65](#).]
- P. S. Valvo. The effects of shear on mode ii delamination. *Frattura ed Integrita Strutturale*, 12(44) :123–139, 2018. [Cité page [88](#).]
- D. Varas, J. Artero-Guerrero, J. Pernas-Sánchez, and J. López-Puente. Analysis of high velocity impacts of steel cylinders on thin carbon/epoxy woven laminates. *Composite Structures*, 95 :623–629, 2013. [Cité page [127](#).]
- A. Wang. Fracture analysis of interlaminar cracking. In *Composite Materials Series*, volume 5, pages 69–109. Elsevier, 1989. [Cité page [xxii](#).]
- B. Wang, J. Xiong, X. Wang, L. Ma, G.-Q. Zhang, L.-Z. Wu, and J.-C. Feng. Energy absorption efficiency of carbon fiber reinforced polymer laminates under high velocity impact. *Materials & Design*, 50 :140–148, 2013. [Cité page [127](#).]
- S. Wang. Fracture mechanics for delamination problems in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 17(3) :210–223, 1983. [Cité page [xxii](#).]
- S. Wang. Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory. *Computers & Structures*, 63(3) :525–538, 1997. [Cité pages [64](#), [65](#), and [157](#).]
- E. W. Weisstein et al. "kronecker product." from mathworld—a wolfram web resource, 2004. [Cité page [29](#).]
- A. Wells. Unstable crack propagation in metals : cleavage and fast fracture. In *Proceedings of the crack propagation symposium*, volume 1, 1961. [Cité page [xxii](#).]
- G. A. Wempner. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11) :1581–1599, 1971. [Cité page [88](#).]
- K. Werner. The fatigue crack growth rate and crack opening displacement in 18g2a-steel under tension. *International Journal of Fatigue*, 39 :25–31, 2012. [Cité page [xxii](#).]
- J. D. Whitcomb. *Analysis of instability-related growth of a through-width delamination*, volume 86301. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1984. [Cité page [xxii](#).]
- J. Whitney. The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *Journal of Composite Materials*, 3(3) :534–547, 1969. [Cité page [xvii](#).]
- J. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. 1973. [Cité page [xiv](#).]
- J. M. Whitney. Experimental characterization of delamination fracture. In *Composite Materials Series*, volume 5, pages 161–250. Elsevier, 1989. [Cité page [xxii](#).]
- J. M. Whitney and R. J. Nuismer. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials*, 8(3) :253–265, 1974. [Cité page [xxii](#).]
- T. Wick. Modified newton methods for solving fully monolithic phase-field quasi-static brittle fracture propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 325 :577–611, 2017. [Cité page [78](#).]

- E. M. Wu and R. Reuter Jr. Crack extension in fiberglass reinforced plastics. Technical report, Illinois univ at urbana dept of theoretical and applied mechanics, 1965. [Cité pages [xxiii](#) and [72](#).]
- J.-Y. Wu. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 103 :72–99, 2017. [Cité pages [79](#), [117](#), [191](#), and [192](#).]
- J.-Y. Wu, F.-B. Li, and S.-L. Xu. Extended embedded finite elements with continuous displacement jumps for the modeling of localized failure in solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285 :346–378, 2015. [Cité page [xix](#).]
- J.-Y. Wu, V. P. Nguyen, C. T. Nguyen, D. Sutula, S. Bordas, and S. Sinaie. Phase field modeling of fracture. *Advances in Applied Mechanics : multi-scale theory and computation*, 52, 2018. [Cité pages [104](#), [187](#), [198](#), and [200](#).]
- J.-Y. Wu, Y. Huang, and V. P. Nguyen. On the bfgs monolithic algorithm for the unified phase field damage theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 360 : 112704, 2020. [Cité pages [78](#) and [117](#).]
- L. Xia, T. Hyde, and A. Becker. An assessment of the crack tip opening displacement criterion for predicting creep crack growth. *International Journal of Fracture*, 77(1) :29–40, 1996. [Cité page [xxii](#).]
- J. Xie, A. M. Waas, and M. Rassaian. Estimating the process zone length of fracture tests used in characterizing composites. *International Journal of Solids and Structures*, 100 :111–126, 2016. [Cité page [86](#).]
- T. Yokozeki, T. Ogasawara, and T. Ishikawa. Effects of fiber nonlinear properties on the compressive strength prediction of unidirectional carbon–fiber composites. *Composites Science and Technology*, 65(14) :2140–2147, 2005. [Cité page [xix](#).]
- T. Yokozeki, T. Ogasawara, and T. Ishikawa. Nonlinear behavior and compressive strength of unidirectional and multidirectional carbon fiber composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(11) :2069–2079, 2006. [Cité page [xix](#).]
- T. Yokozeki, A. Kuroda, A. Yoshimura, T. Ogasawara, and T. Aoki. Damage characterization in thin-ply composite laminates under out-of-plane transverse loadings. *Composite Structures*, 93(1) :49–57, 2010. [Cité page [132](#).]
- K. Yun, S. Kwak, Z. Wang, M. Chang, J. Kim, J. Liu, and C. Ri. A damage model reflecting the interaction between delamination and intralaminar crack for failure analysis of frp laminates. *Applied Sciences*, 9(2) :314, 2019. [Cité page [162](#).]
- H. Zhang, E. Bilotti, and T. Peijs. The use of carbon nanotubes for damage sensing and structural health monitoring in laminated composites : a review. *Nanocomposites*, 1(4) : 167–184, 2015. [Cité page [xi](#).]
- J. Zhang and X. Zhang. Simulating low-velocity impact induced delamination in composites by a quasi-static load model with surface-based cohesive contact. *Composite Structures*, 125 : 51–57, 2015. [Cité pages [130](#), [135](#), [136](#), [138](#), and [139](#).]
- X. Zhang, C. Vignes, S. W. Sloan, and D. Sheng. Numerical evaluation of the phase-field model for brittle fracture with emphasis on the length scale. *Computational Mechanics*, 59 (5) :737–752, 2017. [Cité page [106](#).]