Conception d'un nano-drone à ailes vibrantes

Mathieu Colin

▶ **To cite this version:**

Mathieu Colin. Conception d'un nano-drone à ailes vibrantes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Arts et Métiers, 2021. Français. NNT : 2021HESAE021 . tel-03676852

HAL Id: tel-03676852
https://pastel.hal.science/tel-03676852

Submitted on 24 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HESAM UNIVERSITÉ

Région Hauts-de-France

Arts Sciences et Technologies et Métiers

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET MÉTIERS DE L'INGÉNIEUR

LISPEN - Campus de Lille

THÈSE

présentée par : **Mathieu COLIN**

soutenue le : **18 juin 2021**

pour obtenir le grade de : **Docteur d'HESAM Université**

préparée à : **École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

Spécialité : **Conception**

Conception et optimisation d'un nano-drone à ailes vibrantes

THÈSE dirigée par :
Olivier THOMAS et **Sébastien GRONDEL**

Jury

M. Yves GOURINAT,	PU, Institut Clément Ader, Isaé-Supéaero	Président
M. Morvan OUISSE,	PU, Femto-ST, ENSMM	Rapporteur
M. Benjamin THIRIA,	MCF HDR, PMMH, ESPCI	Rapporteur
M. Emmanuel DE LANGRE,	PU, LadHyX, École Polytechnique	Examinateur
M. Xavier AMANDOLESE,	MCF HDR, LMSSC, CNAM	Examinateur
Mme Rose-Marie SAUVAGE,	Responsable Innovation, Pôle MCM, AID	Examinatrice
M. Olivier THOMAS,	PU, LISPEN, Arts et Métiers	Examinateur
M. Sébastien GRONDEL,	PU, IEMN-DOAE, UPHF	Examinateur
M. Éric CATTAN,	PU, IEMN-DOAE, UPHF	Invité

THÈSE

Remerciements

Sigognac, resté seul, éprouva la sensation des gens qui s'embarquent et que leurs amis quittent sur la jetée du port ; c'est peut-être le moment le plus amer du départ ; le monde où vous viviez se retire, et vous vous hâtez de rejoindre vos compagnons de voyage, tant l'âme se sent dénuée et triste, et tant les yeux ont besoin d'un visage humain [...].

Théophile Gaultier, *Le Capitaine Fracasse*

Mes premiers remerciements s'adressent à mon équipe de direction de thèse. Je les remercie pour la confiance qu'ils m'ont accordée lors de mon recrutement outre-atlantique puis tout au long de mon projet de recherche (comme à l'occasion de ce que je pourrais appeler les « lâchers solo » en conférence (inter)nationale ou pour la prolongation liée au contexte sanitaire). Je ne pourrais faire la liste exhaustive de l'ensemble des connaissances et compétences acquises sous la direction d'Olivier, car son contact, son implication et sa rigueur ont été des plus enrichissants ; je lui suis sincèrement reconnaissant. Je souhaite manifester ma plus chaleureuse gratitude à Sébastien pour son suivi infaillible et son soutien très humain, en particulier à l'occasion de traversées de « zones de turbulences »... J'aurais pu commencer en remerciant Éric, puisque c'est l'initiateur du projet OVMI. J'ai apprécié son pragmatisme, qui fut souvent un élément moteur dans mon travail. Il m'a introduit dans le monde passionnant de la microfabrication, et je l'en remercie.

Je souhaite remercier aussi l'ensemble de mon jury de thèse, pour l'intérêt montré et l'implication consacrée à mon projet de recherche. L'enthousiasme et l'entrain d'Yves Gourinat ont lancé et entretenu une soutenance dynamique (malgré une certaine chaleur) dont je garderai un excellent souvenir, et je lui en suis reconnaissant. Les échanges lors de la séance de questions ont témoigné de la relecture minutieuse des rapporteurs, Morvan Ouisse et Benjamin Thiria, que je remercie vivement. Plusieurs pistes et suggestions ont été proposées lors de la soutenance, notamment de la part d'Emmanuel de Langre et Xavier Amandolèse, qui ont apporté une expertise en aérodynamique bienvenue pour l'étude de la force aérodynamique générée par les ailes d'insectes et de l'OVMI. Comme relevé lors de la soutenance, je suis convaincu de l'intérêt stratégique du projet, et je tiens à souligner l'importance de son financement par la DGA, auquel la mobilisation de Rose-Marie Sauvage a largement contribué.

Mon travail s'est inscrit dans la continuité d'un ensemble de travaux précédents, menés par plusieurs stagiaires et doctorants et, tout en étant reconnaissant envers ces personnes, je souhaite saluer en particulier Damien, mon prédécesseur direct, pour m'avoir formé aux processus spécifiques de salle blanche, et plus généralement d'avoir été à la source de nombreuses interrogations scientifiques qui m'ont accompagnées pendant ma thèse.

Même si le travail de recherche en thèse a la réputation d'être fait de façon solitaire, j'ai eu la chance d'avoir une aide précieuse sur des aspects expérimentaux (de François-Xavier,

Frédéric, Pascal et David) ou numériques (de Théophile et Boris), qui ont significativement contribué à ma productivité. De plus, j'ai été amené à collaborer dans le cadre de mon projet avec plusieurs personnes (Sofiane et Roméo en particulier), et ces interactions ont souvent mené à des discussions très intéressantes, et je les remercie pour les moments de travail détendus partagés.

Ensuite, je voudrais gentiment remercier les personnels de l'ENSAM et de l'IEMN (au LCI mais aussi au DOAE), pour l'accueil qui m'a été fait ; et plus encore Richard, Christophe, Adel, Anthony, Emmanuelle, Sabine et Éric N., pour leur suivi de doctorant (plus ou moins officiellement), aide administrative ou parfois informatique... Je salue amicalement mes camarades doctorants (dont la plupart sont déjà docteurs !) de l'ENSAM et de l'IEMN. Je souhaite exprimer ma reconnaissance en particulier à Emmanuel, David, Alexandre, Arthur, Michel, Lamine, François et, bien sûr, Eddy (merci à toi d'avoir été là !), sans oublier Doan, Lauréline et Vadim du DAOE, pour m'avoir appris beaucoup de choses utiles, notamment en début de thèse, pour leur écoute et leurs critiques constructives.

Je profite également de l'opportunité unique présente pour remercier l'ensemble des enseignants et enseignantes qui ont démontré tout leur talent en m'apprenant toujours beaucoup et qui m'ont amené à me passionner pour des sujets variés (en particulier Mme Ducourant, MM. Gutierez, Ruel et Seddiki du collège et lycée Joffre, Mmes Walter et Pajot du lycée Jean-Baptiste Say et MM. Jérôme et Koutiri de l'ENSAM Paris). De surcroît, je souhaiterais remercier l'équipe d'encadrement de mon PJM de l'Institut de Biomécanique Humaine Georges Charpak du campus de l'ENSAM à Paris, ainsi que le *Professor* Alam à UC Berkeley, pour m'avoir conduit sur le chemin de la « Recherche » et ainsi – indirectement – à cette thèse.

Ma passion pour l'aéronautique a été une formidable source d'inspiration pendant mes études. Cette passion a été nourrie par des échanges extraordinaires avec mon instructeur de vol pendant ma formation au PPL, Claude Masson ; je lui adresse toute mon amitié. Je rends aussi hommage à Renaud Écalle, « l'extra-terrestre » pourtant si humain, et à sa famille.

Enfin je voudrais remercier mes amis et ma famille pour les encouragements et le soutien continu, en premier lieu mes parents à qui je dois tant... Je voudrais aussi remercier ma sœur et mon frère pour leur bienveillance et pour m'avoir montré l'exemple avec tant de brio.

Je remercie enfin Sophie pour sa patience et sa compréhension.

Le voile de tristesse qui couvrait la figure de Sigognac se déchira comme un nuage traversé d'un rayon de soleil, lorsque la jeune fille vint réclamer l'appui de son bras afin de faire quelques pas sur la route unie en cet endroit.

Théophile Gaultier, *Le Capitaine Fracasse*

Table des matières

Remerciements i

Table des matières iii

Table des figures vii

Liste des tableaux xi

Glossaire et liste des acronymes xiii

1 Introduction 1
- 1.1 Contexte . . . 1
  - 1.1.1 Bref panorama des drones . . . 1
  - 1.1.2 Nanodrones : quelle définition ? . . . 4
  - 1.1.3 Analyse de Robobee . . . 5
- 1.2 Les points-clefs du projet OVMI . . . 8
  - 1.2.1 La combinaison modale . . . 8
  - 1.2.2 Actionneur . . . 10
  - 1.2.3 Microfabrication . . . 12
- 1.3 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit . . . 14

I Interaction fluide-structure pour nanodrones 17

2 Vibrations de structures en grande amplitude 19
- 2.1 Introduction . . . 21
- 2.2 Theory . . . 24
  - 2.2.1 Linear beam model . . . 24
  - 2.2.2 Obtaining large amplitude vibrations . . . 26
  - 2.2.3 Nonlinear beam model: geometric nonlinearities . . . 28
- 2.3 Nonlinear damping . . . 29
  - 2.3.1 Quadratic damping model . . . 29
  - 2.3.2 Identification methods . . . 31
  - 2.3.3 Higher order damping models . . . 32
  - 2.3.4 Numerical validation of the identification methods . . . 33
- 2.4 Experimental setup . . . 36
  - 2.4.1 Specimens . . . 36
  - 2.4.2 Measurement process and materials . . . 37

2.5 Experimental results . . . 40
2.5.1 Cantilever beams . . . 40
2.5.2 Beam assemblies . . . 41
2.5.3 Damping comparison . . . 44

3 Aerodynamic force model for nanodrones 47
3.1 Introduction . . . 49
3.2 Aerodynamic force model . . . 51
3.2.1 Steady model . . . 51
3.2.2 Unsteady effects . . . 52
3.2.3 Determination of the lift and drag coefficients . . . 54
3.2.4 Proposed force model . . . 55
3.3 Application of the model to rigid plates . . . 56
3.3.1 2-D motion: pitch & plunge . . . 56
3.3.2 3-D motion: revolving plate . . . 61
3.3.3 Conclusion . . . 67
3.4 Aerodynamic force of an OVMI wing . . . 68
3.4.1 Calculation of the velocity of the wing . . . 69
3.4.2 Deriving the force . . . 71
3.4.3 Results . . . 72
3.4.4 Force as a function of time . . . 74
3.4.5 Force as a function of space . . . 75
3.5 Conclusion . . . 75

II Optimisation de nanodrones à ailes vibrantes 79

4 Code OVMI Design Tool 81
4.1 Présentation de l'ODT . . . 82
4.1.1 Principe . . . 82
4.1.2 Définition de la structure géométrique . . . 83
4.1.3 Mise en équation des conditions aux limites . . . 86
4.1.4 Justification de la modification . . . 88
4.1.5 Analyse modale . . . 88
4.2 Validation de l'ODT . . . 91
4.2.1 Structures simples . . . 92
4.2.2 Validation successive de structures plus complexes . . . 93
4.2.3 Conclusion sur la validité . . . 95
4.3 Pertinence de l'ODT pour la prédiction de la dynamique réelle . . . 98
4.3.1 Comparaison des fréquences propres avant/après modification . . . 98
4.3.2 Origine de l'écartement des fréquences propres expérimentales . . . 101
4.4 Contrainte mécanique . . . 103
4.5 Conclusion . . . 104

5 Optimisation paramétrique de nanodrone 107
5.1 Démarche de la campagne d'optimisation . . . 108
5.1.1 Présentation générale . . . 108
5.1.2 Mise en place de l'optimisation . . . 109

5.2 Présentation des résultats numériques . . . 115
5.2.1 Résultats de la campagne d'optimisation effectuée avec l'ODT . . . 116
5.2.2 Ajustements des géométries VO pour fabrication . . . 119
5.2.3 Modélisation par éléments-finis des versions fabriquées . . . 121
5.3 Mesure de la dynamique des prototypes fabriqués . . . 125
5.3.1 Précisions sur l'assemblage des prototypes . . . 125
5.3.2 Protocole de mesure . . . 127
5.3.3 Extraction des modes par le logiciel M+P . . . 129
5.3.4 Prise en compte des parties massives du GLR en simulation . . . 131
5.3.5 Mesure du déplacement en fonction de l'intensité du courant . . . 132
5.4 Conclusion . . . 134

6 Conception d'une nouvelle génération de nanodrones 137
6.1 Modèles analytiques discrets de nanodrones . . . 138
6.1.1 Système avec battement imposé . . . 138
6.1.2 Système avec battement et rotation résonants . . . 142
6.2 Conception d'ailes sous l'hypothèse de solides rigides . . . 154
6.2.1 Aile en L . . . 154
6.2.2 Aile bio-inspirée . . . 157
6.3 Transposition vers un modèle avec liaisons souples . . . 161
6.3.1 Raideur d'une liaison souple . . . 161
6.3.2 Dimensionnement des liaisons souples . . . 164
6.3.3 Proposition d'une géométrie . . . 170
6.4 Conclusion . . . 175

7 Bilan et perspectives 177
7.1 Bilan . . . 178
7.2 Perspectives . . . 180
7.2.1 Perspectives à court terme . . . 180
7.2.2 Perspectives à moyen terme . . . 181
7.2.3 Perspectives à long terme . . . 182

Bibliographie 183

A Annexes du chapitre 1 195
A.1 Photographies supplémentaires . . . 195

B Annexes du chapitre 2 201
B.1 Aerodynamic drag force . . . 201
B.2 Method of multiple scales . . . 201
B.3 Manlab implementation of the nonlinear equations . . . 203
B.4 Phase of the simulated frequency responses with MANlab . . . 204

C Annexes du chapitre 3 205
C.1 Supplementary figures for the 2D motion . . . 205
C.2 Wing OVMI . . . 206
C.2.1 Interpolation quadratique pour le calcul du déplacement et de la normale . . . 206

D Annexes du chapitre 4 **211**
D.1 Déformées du Spider . . . 211
D.2 Déformées du losange barré . . . 212

E Annexes du chapitre 5 **213**
E.1 Figures complémentaires issues de Matlab . . . 213
E.2 Vues complémentaires des prototypes fabriqués . . . 215
E.3 Modélisation Abaqus . . . 216
E.3.1 Modes secondaires du WRR . . . 216
E.3.2 Modes secondaires du GLR . . . 219
E.3.3 Linéarité de l'actionneur . . . 219
E.3.4 Déformées modales complémentaires avec modélisation du thorax . . . 220
E.4 Validation de l'identification modale M+P . . . 221

F Annexes du chapitre 6 **227**
F.1 Aile avec un bord d'attaque rigide et un assemblage de poutres fines . . . 227
F.2 Annexes de Transition . . . 230
F.2.1 Fréquence d'une poutre articulée-libre . . . 230
F.2.2 Calcul systématique de l'ensemble 2 . . . 230
F.3 Annexes de l'optimisation . . . 231

Table des figures

1.1 Deux insectes courants (diptère et hyménoptère) . . . 2
1.2 Plus petits drones commercialisés, civil (a) et militaire (b) . . . 3
1.3 Panorama des drones militaires . . . 4
1.4 Nanodrones . . . 5
1.5 Schéma de Robobee . . . 6
1.6 Actionnement de Robobee . . . 6
1.7 Bio-inspiration : ailes d'insectes et ailes de Robobee . . . 7
1.8 Éclaté de l'OVMI . . . 8
1.9 Schéma de définition des angles de positionnement d'une aile d'insecte (adapté de [Dickinson et Muijres 2016]). . . . 9
1.10 Battement et angle de rotation . . . 10
1.11 Explication de la combinaison modale de flexion et torsion . . . 11
1.12 Substrat post-révélation . . . 13
1.13 Substrat pre-*liftoff* . . . 13
1.14 Wind Rider version Damien . . . 14

2.1 Validation of the identification methods, without geometric nonlinearities . 34
2.2 Validation of the second identification method, with geometric nonlinearities 35
2.3 Photographs of tested specimens . . . 38
2.4 Experimental setup for the measurement of the frequency response curves. . 39
2.5 Damping coefficients extraction for the ruler's first mode . . . 41
2.6 Experimental validation of identification methods and models for a steel ruler-(filt). . . . 41
2.7 Measurement, identification and reconstruction for μ-beam . . . 42
2.8 Measurement, identification and reconstruction for L-beam . . . 43
2.9 Measurement, identification and reconstruction for the Wing skeleton . . . 43
2.10 Measurement, identification and reconstruction for the wing . . . 44
2.11 Reconstructed equivalent damping . . . 45

3.1 Aerodynamic force on a plate . . . 52
3.2 Schematic of a pitching and plunging plate . . . 56
3.3 Mean thrust force for the symmetrically oscillating plate . . . 59
3.4 Mean thrust force for the oscillating plate pitching about the leading edge . 59
3.5 Optimum trajectories 2D . . . 60
3.6 Schematic of a revolving plate . . . 62
3.7 Thrust force for the revolving plate $e_r = -c/2$ . . . 64
3.8 Thrust force for the revolving plate $e_r = 0$ . . . 64

3.9 Comparison of the mean thrust force between the geometrically exact model (in blue) and the linearised model (in red) for the revolving plate. 65
3.10 Identification of the order of the thrust force on the amplitude of stroke . . 65
3.11 Mean force integrand components of a revolving plate 66
3.12 Extracted lift and thrust coefficients 68
3.13 Wing parametrisation 69
3.14 Wing surface at mid-cyle 71
3.15 Prototype geometry and significant mode shapes (seen from the right). . . . 73
3.16 Displacement and force behaviour as a function of the excitation frequency. 73
3.17 Thrust force over a cycle period for different excitation frequencies 74
3.18 Mean thrust force per surface element of OVMI 75
3.19 Experimental data of lift force 77

4.1 Définition de l'angle α_i pour une poutre orientée. 84
4.2 Schéma du GL1 85
4.3 Jonction « Y » élémentaire 88
4.4 Schéma de définition de 2 poutres en L. 94
4.5 Schéma des structures testées 96
4.6 Déformées modales du GL2 - Matlab 99
4.7 Déformées modales du WR - Matlab 100
4.8 Modélisation de l'aimant 102

5.1 Géométries initiales et choisies 110
5.2 Schéma synoptique de la campagne d'optimisation 112
5.3 Déformées modales du WRR - Matlab 117
5.4 FRF du WRR - Matlab 117
5.5 Déformées modales du GLR - Matlab 118
5.6 FRF du GLR - Matlab 118
5.7 WRR et GLR fabriqués 120
5.8 Détails des congés du WRR 121
5.9 Déformées modales Abaqus WRR - S 123
5.10 Déformées modales Abaqus GLR - S 124
5.11 Photographies des prototypes assemblés 126
5.12 Schéma de mesure du Ch. 5 127
5.13 Photo d'un prototype en cours de mesure 127
5.14 Identification des modes principaux du WRR 128
5.15 Identification des modes principaux du GLR 128
5.16 Comparaison des fréquences prédites et mesurées du WRR 129
5.17 Déformées modales Abaqus GLR avec thorax 130
5.18 Comparaison des fréquences prédites et mesurées du GLR 131
5.19 Identification de l'amortissement dû à la membrane 133

6.1 Actionnement à un seul degré de liberté 139
6.2 FRF des déplacements relatif et absolu 140
6.3 Réponses en fréquence du déplacement relatif pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement modal non linéaire 142
6.4 Modèle élémentaire d'une aile de nanodrone avec deux degrés de liberté. . . 142
6.5 Évolution de la différence $\omega_+ - \omega_-$ en fonction de μ et $\bar{\omega}$. 145

6.6 Phase ϕ en fonction de $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}$ et ξ_2. 146
6.7 FRF de X_1, X_r avec désaccord 147
6.8 rapport de masse mini pour amplification 148
6.9 FRFs de X1 fonction de l'amortissement 150
6.10 Amplification pour 4 rapports de masse et amortissements égaux 150
6.11 Amplification pour un rapport de masse 1 pour mille 150
6.12 Influence de μ sur X_1 (trait continu), X_r (trait interrompu) avec $\phi \equiv \circ$. . . 153
6.13 Influence de ξ et η sur les réponses de X_1 et X_r 153
6.14 Schéma de définition de l'aile en L (modèle solide rigide). 154
6.15 Aile bio-inspirée 158
6.16 Schéma de définition géométrique de l'aile de nanodrone de la nouvelle génération. 158
6.17 Déplacement maximal pour une barre avec ressort en torsion à gauche comparé à la flèche d'une poutre encastrée-libre à droite. 163
6.18 Schéma explicitant la condition de non chevauchement des poutres de l'assemblage. 164
6.19 Aile bio-inspirée : modèle avec quatre poutres. 165
6.20 Dimensionnement de l'architecture BI, avec deux propositions. 167
6.21 Modes principaux de BI1 – ODT. 169
6.22 FRF avec $\xi_i = 0$. Un zoom de la FRF entre 130 et 155 Hz, avec différents coefficients d'amortissement, est proposé fig. 6.23. 169
6.23 FRF avec 3 valeurs différentes de coefficients d'amortissements modaux. . . 169
6.24 FRF avec $\xi_i = 0$, pour un forçage quasiment en bout de la première poutre massive. 170
6.25 Schéma de l'architecture bio-inspirée. 171
6.26 Rendu visuel avec largeur des poutres 172
6.27 Modes principaux de BI1 – ODT (91,84 Hz et 94,18 Hz). 173
6.28 FRF de la version BI1 (ODT) à l'extrémité du bord d'attaque, à l'extrémité de la nervure et du déplacement relatif. 173
6.29 Modes de flexion et torsion symétriques de BI1 calculés avec Abaqus avec un modèle de Poutre (91,665 Hz et 94,001 Hz). 174
6.30 FRF de la version BI1 calculée par AEF (modèle de poutre). 174
6.31 Autres modes de BI1 174

A.1.1 *Drosophila melanogaster* 195
A.1.2 *Vespa velutina* 196
A.1.3 Colibri 196
A.1.4 Hubsan Nano Q4 197
A.1.5 Black Hornet 197
A.1.6 Rossignol 198
A.1.7 Goéland 199
A.1.8 Spy'Ranger 199
A.1.9 Patroller 200
A.1.10 A400M 200

B.4.1 Simulated frequency responses with MANlab 204

C.1.1 Optimum trajectories for maximum amplitude 205
C.1.2 Difference of trajectories 206

D.1.1 Déformées modales du Spider – Matlab M1-2 . . . 211
D.1.2 Déformées modales du Spider – Matlab M3-5 . . . 211
D.2.1 Déformées modales du losange barré – Matlab M1-2 . . . 212
D.2.2 Déformées modales du losange barré – Matlab M3-5 . . . 212
D.2.3 Déformées modales du losange barré – Abaqus M1-2 . . . 212
D.2.4 Déformées modales du losange barré – Abaqus M3-5 . . . 212

E.1.1 Déformées modales du WRR – Matlab . . . 213
E.1.2 FRF du WRR – Matlab . . . 213
E.1.3 Déformées modales du GLR – Matlab . . . 214
E.1.4 FRF du GLR – Matlab . . . 214
E.2.1 WRR – Détail des épaisseurs des liaisons . . . 215
E.2.2 WRR VF – vue globale . . . 215
E.3.1 Déformées modales Abaqus WRR – Indéfinies . . . 216
E.3.2 Déformées modales Abaqus WRR – Torsions NM . . . 217
E.3.3 Déformée modale Abaqus WRR – Modes antisymétriques . . . 218
E.3.4 Déformées modales Abaqus GLR – Modes antisymétriques . . . 219
E.3.5 Linéarité de l'actionneur . . . 219
E.3.6 Déformée modale Abaqus GLR avec thorax – Modes antisymétriques . . . 220
E.4.1 FRF expérimentale et reconstruite WRR 2 . . . 221
E.4.2 FRF expérimentale et reconstruite GLR 1 . . . 222
E.4.3 FRF expérimentale et reconstruite GLR 2 . . . 223
E.4.4 FRF expérimentale et reconstruite GLR 4 . . . 224
E.4.5 FRF expérimentale et reconstruite GLR 6 AM . . . 225
E.4.6 FRF expérimentale et reconstruite GLR 6 SM . . . 226

F.1.1 Schéma de définition géométrique de l'aile de nanodrone de la nouvelle génération . . . 229
F.3.1 Modes annexes de BI1 calculés par Matlab . . . 231

Liste des tableaux

2.1 Comparison of different materials with maximum amplitude criteria 27
2.2 Characteristic geometric parameters of the tested structures 37
2.3 Damping coefficients and Reynolds numbers for the different modes of the tested structures 45

3.1 Numeric values of the parameters and variables used in the simulations of the 2-D and 3-D motions. 58

4.1 Exemples de matrices de coordonnées et connectivités. 85
4.2 Validation du code sur une poutre encastrée-libre 92
4.3 Matrices de coordonnées et connectivités pour la poutre en L définie en fig. 4.4. 94
4.4 Validation du code sur une poutre en L 94
4.5 Différence ODT-Abaqus sur les fréquences propres et déformées modales . . 97
4.6 Comparaison des fréquences propres prédites et expérimentales 99
4.7 Comparaison des fréquences propres des différents modes du Wind Rider selon la finesse du modèle utilisé 102

5.1 Objectifs recherchés pour la dernière version de l'optimisation paramétrique 112
5.2 Critères appliqués à la dernière version de l'optimisation paramétrique . . . 114
5.3 Dimensions des prototypes 116
5.4 Tableau des fréquences propres (Matlab vs Abaqus) et amplitudes à l'aimant 122
5.5 Liste des prototypes testés 126

6.1 table 152
6.2 Valeurs et contraintes sur les dimensions géométriques. 165
6.3 Dimensions en microns de la version BI1. 171

F.1 Dimensionnement des 3 ailes 230

Glossaire et liste des acronymes

Nota : Les termes ci-dessus sont repérés en gris dans le texte et sont des liens qui amènent à cette page. Sur la version numérique, pour revenir facilement à la source, appuyer simultanément sur “Alt" et “←". Cette remarque vaut aussi pour les autres éléments écrits en couleur, comme les équations, figures, sections, références bibliographiques et liens URL.

lift-off Opération de microfabrication consistant à séparer les composants fabriqués du substrat en fin de processus. 13, 125

AEF Analyse par éléments-finis. ix, 90, 92–95, 98, 102, 103, 111, 113, 115, 122, 125, 129, 131, 134, 171, 172, 174, 176, 179

architecture Une architecture de prototype désigne une manière unique de disposer les segments d'un prototype. Une architecture est un graphe au sens mathématique du terme, et la connectivité (cf. sous-section 4.1.2) est ce graphe orienté. xiv, 10, 88, 103, 108–111, 113, 115, 116, 134, 137, 164, 168, 170, 175–177, 179, 181, 182

aéronef Engin capable de s'élever et se mouvoir au sein de l'atmosphère terrestre. 1–3

DARPA *Defense Advanced Research Projects Agency*, équivalent américain de la DGA. 2, 4

DGA Direction Générale de l'Armement. 2

FRF Fonction de Réponse en Fréquence. 81, 91, 113, 116, 128, 140, 168, 170

FWNAV *Flapping-Wing Nano Air Vehicle*. 4

IEMN Institut d'Électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie. 1, 8, 12, 119

LISPEN Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques Et Numériques. 1

MAV *Micro Air Vehicle*. 2, 4, 138

MEM Méthode des Échelles Multiples. 19, 20

NAV *Nano Air Vehicle*. 2, 4

ODT OVMI *Design Tool*, code de calcul de la dynamique de treillis de poutres développé au cours de la thèse. 88, 91, 95, 98, 102–105, 107, 111, 113, 115, 121, 122, 134, 135, 137, 138, 168, 170–172, 175, 178–180

OVMI Objet Volant Mimant l'Insecte. 1, 4, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 47, 48, 103, 125, 142, 152, 177–180, 182

Parylène-C Polymère utilisé pour la fabrication de la membrane du nanodrone pour ses caractéristiques mécaniques proches de celles de membranes d'insectes. 8, 13, 125, 182

PFD Principe Fondamental de la Dynamique. 86, 87

SU-8 Polymère utilisé pour la fabrication des poutres du nanodrone du fait de (i) ses caractéristiques mécaniques proches de celles des veines des ailes d'insectes et (ii) sa compatibilité avec le procédé de lithographie. 8, 12, 13, 20, 98, 102, 104, 119, 176, 180

substrat Plaque circulaire (avec un méplat) de silicium, utilisé comme support de dépôt en lithographie notamment. xiii, 12, 13, 119, 125

tournette Machine de salle blanche permettant de contrôler l'épaisseur d'une couche de résine déposée, grâce par l'effet de la force centripète d'une rotation à vitesse contrôlée. 12, 119

version Une version d'une architecture de prototype donnée correspond aux dimensions des longueurs, angles, épaisseurs et largeurs de tous les poutres pour cette architecture. En général, une seule version (voire exceptionnellement deux) est construite par architecture, puisqu'elle correspond en théorie à un optimum. 115, 117, 122, 126, 133, 138, 168, 170, 175, 176, 181

Chapitre 1

Introduction

Comme menaces ou comme outils de renseignement,
nul doute que les drones acquerront dans les prochaines
années une place centrale.

O. Brun, dans le *Dictionnaire du renseignement*

La présente thèse porte sur la conception et l'optimisation d'un nanodrone à ailes vibrantes, appelé OVMI [1] pour Objet Volant Mimant l'Insecte. Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre l'IEMN (Institut d'Électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie) et le LISPEN (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques Et Numériques) des Arts et Métiers visant à faire décoller le plus léger drone du monde.

On présente en section 1.1 le contexte de la thèse en précisant le terme de « nanodrone » et en présentant les projets existants par ailleurs. On donne ensuite en section 1.2 les caractéristiques propres du projet OVMI, issues des avancées successives au cours de thèses précédentes. On indique enfin le plan de la thèse en section 1.3.

Sommaire du chapitre

1.1 Contexte 1
1.1.1 Bref panorama des drones 1
1.1.2 Nanodrones : quelle définition ? 4
1.1.3 Analyse de Robobee 5
1.2 Les points-clefs du projet OVMI 8
1.2.1 La combinaison modale 8
1.2.2 Actionneur 10
1.2.3 Microfabrication 12
1.3 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit 14

1.1 Contexte

1.1.1 Bref panorama des drones

Le drone – ou aéronef téléguidé – est un outil en plein essor dans une multitude de domaines, comme les loisirs, la sécurité ou encore l'industrie agro-alimentaire. Ces nombreux usages ont des spécifications propres et génèrent naturellement une grande diversité de formes et performances. Afin de mieux visualiser les dimensions évoquées, la figure 1.3

1. Les termes repérés en gris dans le texte sont des liens qui amènent au glossaire.

présente un panorama sélectif d'aéronefs (principalement à usage militaire) et de la faune volante, dont des photographies en grand format sont disponibles en annexe, figs. A.1.1-A.1.10. On représente ici deux insectes communs, la drosophile et le frelon asiatique en figure 1.1 ainsi que les deux plus petits drones commercialisés (le Nano Q4 et le Black Hornet) fig. 1.2. On positionne sur la figure 1.3 les différents éléments selon leur masse (en abscisse) et leur envergure (en ordonnée), sachant que pour la faune il s'agit de données moyennes chez un spécimen adulte, et que la masse indiquée pour les aéronefs est la masse maximale au décollage (communément appelée MTOW pour *maximum take-off weight* en anglais et qui inclue le carburant et la charge utile). On peut noter plusieurs points intéressants :

— une corrélation quasi linéaire apparaît entre la masse et l'envergure, dans le domaine log-log. Cette corrélation a déjà été plusieurs fois mise en évidence (ex. [Norberg 1990 ; Ho et al. 2003]), pour les oiseaux en particulier. Ces études montrent aussi d'autres corrélations de la masse avec la vitesse, ou encore avec la fréquence réduite (ratio entre vitesse d'avance et vitesse de battement d'ailes). Ces corrélations s'expliquent avec des analyses dimensionnelles des lois aérodynamiques ;
— les traits noirs délimitent la zone de définition des *Nano Air Vehicles* [NAV] de la DARPA (*Defense Advanced Research Projects Agency*), équivalent américain de la DGA (Direction Générale de l'Armement). L'appellation NAV a été introduite à l'occasion de l'appel à projet de 2005 émis par la DARPA, faisant suite à celui sur les *Micro Air Vehicles* [MAV] ;
— on peut remarquer que la distance sur le graphique séparant le goéland du Robobee (dont on parlera plus en détail par la suite) est identique à celle séparant le goéland de l'A400M. Ceci permet d'appréhender le défi d'ingénierie lié à la réalisation d'un nanodrone ;
— le Hubsan Nano Q4, le plus petit drone grand public en 2018, est à la limite de la définition des nanodrones ;
— dans l'ensemble de ce panorama, plusieurs mécanismes de création de portance peuvent être distingués. Nous insistons, dans ce qui suit, sur ces mécanismes.

Un aéronef est conçu pour une mission donnée qui impose une charge utile. Or, comme on le voit sur la figure 1.3, celle-ci contraint les dimensions de l'aéronef. Pour une vitesse d'évolution donnée, le régime de vol est alors imposé par le nombre de Reynolds. On peut

(a) *Drosophila melanogaster* – Mouche drosophile (b) *Vespa velutina* – Frelon asiatique

Figure 1.1 – Deux insectes courants (diptère et hyménoptère)

(a) Hubsan Nano Q4

(b) FLIR Black Hornet

Figure 1.2 – Plus petits drones commercialisés, civil (a) et militaire (b)

distinguer trois mécanismes de création de portance, qui sont chacun privilégiés par des éléments à différentes échelles :

- voilure fixe (qui s'applique pour les aéronefs allant du Spy'Ranger à l'A400m, voire aussi au goéland lorsqu'il est en vol plané) : ce mécanisme est prédominant pour les avions. De fait, les premiers aéronefs fabriqués avec succès imitaient le vol plané des oiseaux. Ces systèmes opèrent dans des écoulements dont le nombre de Reynolds est globalement situé entre 10^6 et 10^8 ;
- voilure tournante (utilisé par le Hubsan et le Black Hornet) : mécanisme majoritaire pour les aéronefs de petite et moyenne taille [2] (par exemple les hélicoptères) qui a l'avantage sur la voilure fixe de permettre le vol stationnaire [3]. On distingue deux configurations principales selon le nombre de rotors : (i) 2 rotors, contrarotatifs ou combinant un rotor principal et un rotor de queue ; (ii) 4 rotors, configuration dominante chez les drones grand public modernes (par ex. Hubsan). Ces systèmes opèrent dans la même plage de valeur du nombre de Reynolds que les aéronefs à voilure fixe ;
- ailes battantes (qui concerne le reste des éléments du graphique, de la drosophile au rossignol et au goéland en vol battu) : ce mécanisme est associé à la grande majorité de la faune volante, que ce soit chez les oiseaux ou les insectes. A l'instar des voilures tournantes, ce mécanisme permet le vol stationnaire et assure des performances hors du commun en termes de manœuvrabilité. Ces manœuvres incluent les atterrissages inversés (i.e. sur un plafond) ainsi que des esquives brusques [Muijres et al. 2014], au prix d'une certaine consommation énergétique. Cette consommation est généralement réduite pour des bas nombres de Reynolds – mais ce n'est pas toujours vérifié, comme le montre le cas de la libellule [May 1991]. Ceci explique partiellement l'adoption du vol plané (et une morphologie associée) chez les oiseaux de grande taille, à l'instar du goéland. Les nombres de Reynolds correspondant aux insectes sont situés entre 10 et 10^4, et ceux des oiseaux de 10^4 à 10^6 (i.e. entre les insectes et les voilures tournantes et fixes). Précisons que pour le vol battu, le nombre de Reynolds varie en fonction de la vitesse pendant le cycle de battement,

2. On peut considérer que les avions à décollage et atterrissage vertical comme le Hawker Harrier alternent entre voilure fixe et voilure tournante.

3. Avec l'exception anecdotique de certains avions de voltige https://www.youtube.com/watch?v=3n4WtPBV8ro.

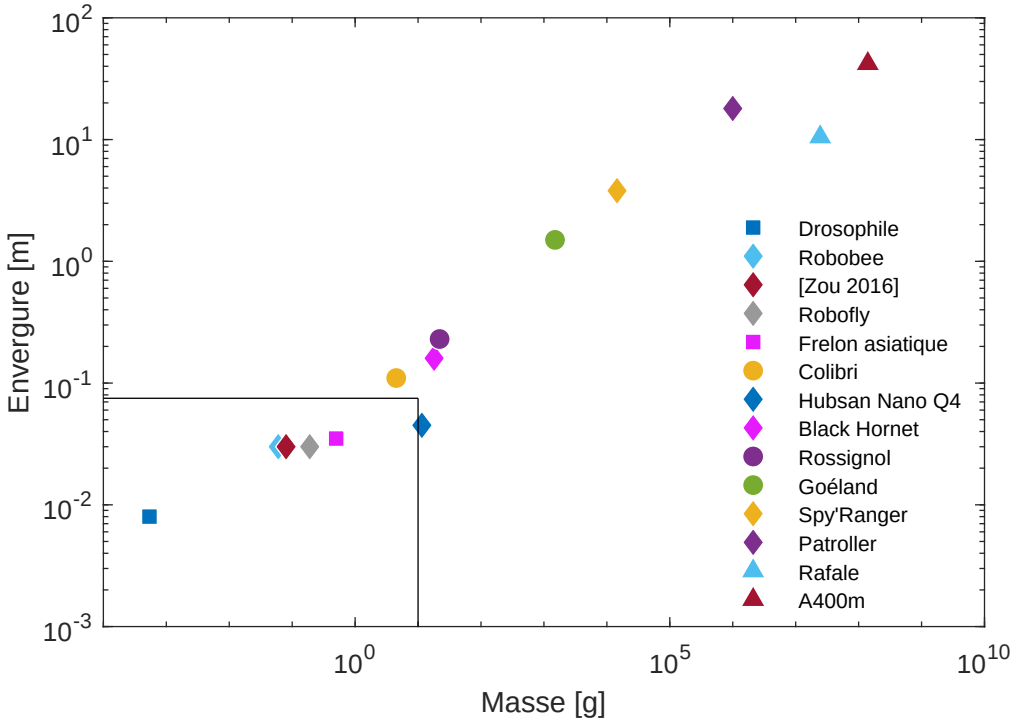


Figure 1.3 – Panorama sélectif de la faune volante et d'aéronefs. ■ ≡ insecte, ● ≡ oiseau, ♦ ≡ drone et ▲ ≡ avion

et qu'il est donc généralement ramené à une valeur moyenne.

On note enfin que les NAV sont pour leur grande majorité à ailes battantes, d'où le terme récurrent de FWNAV pour *flapping-wing nano air vehicle*.

1.1.2 Nanodrones : quelle définition ?

Dans la communauté anglo-saxonne, la dénomination de référence est NAV. Pourtant, les dimensions proposées par la DARPA définissant les NAV n'ont pas de pertinence propre ; elles sont juste issues d'une redéfinition en regard de l'appel à projet précédent sur les MAV (*Micro Air Vehicles*). Robert J. Wood, professeur à l'Université Harvard et initiateur du projet Robobee, a proposé l'appellation « *pico air vehicles* » dont la masse maximale au décollage est de 500 mg et l'envergure maximale de 5 cm. Ces dimensions sont cohérentes avec celles de la plupart des insectes volants [Wood et al. 2012]. On définit donc les « nanodrones » comme des aéronefs téléguidés dans cette gamme de dimensions ; le terme nanodrone est préféré à picodrone afin d'éviter de surenchérir dans des appellations qui s'éloignent de plus en plus des échelles effectives des drones (10^3 pm = 1 nm). Par extension, on considère que l'OVMI est un nanodrone.

On dénombre à l'heure actuelle trois projets de nanodrones ayant réussi à décoller :

1. Robobee, développé à l'Université de Harvard, qui a décollé en 2007 [Wood 2007b] ;
2. un drone développé à l'Université de Shanghai, avec un décollage publié dans [Zou et al. 2016] ;
3. Robofly, développé à l'Université de Washington, ayant décollé en 2018 et qui est le premier nanodrone à avoir décollé « *untethered* », c'est-à-dire sans lien (ou câble)

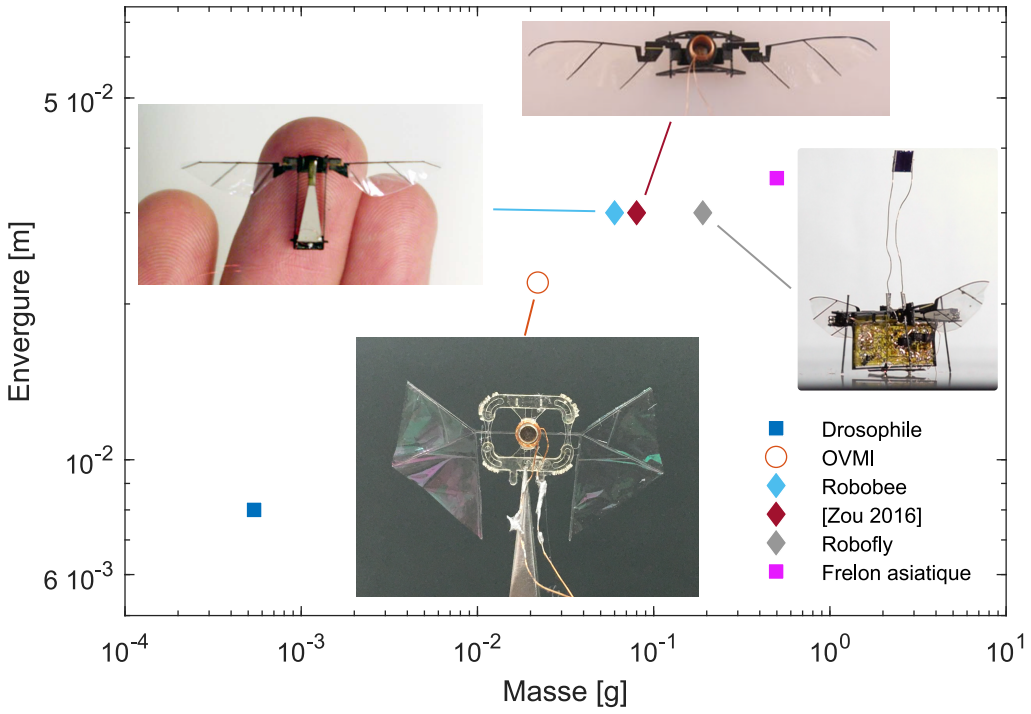


Figure 1.4 – Positionnement et visuels des principaux nanodrones.

avec un objet quelconque [James et al. 2018], en utilisant un récepteur laser embarqué.

Ce faible nombre illustre la difficulté à faire décoller un nanodrone. On reporte sur la figure 1.4 ces 3 drones (les dimensions indiquées correspondent à celles des premiers prototypes ayant réussi à décoller et non celles des versions ultérieures). Pour avoir une meilleure idée des échelles, on indique aussi les points correspondants à la drosophile, au frelon asiatique et à l'OVMI. On remarque une forte ressemblance entre Robobee, le drone présenté dans [Zou et al. 2016] et Robofly. En effet, le système d'actionnement des ailes a été reproduit à l'identique par l'équipe de l'Université de Shanghai, avec une adaptation de l'actionneur électromagnétique développé dans le projet OVMI [Bontemps et al. 2013], avec succès [Zou et al. 2016]. On peut mentionner aussi une contribution notable de ce projet de l'Université de Shanghai au processus de fabrication, désormais « monolithique », c'est-à-dire consistant en une fabrication additive sur une seule plaque, repliée ensuite sur elle-même [Zou et al. 2018]. Dans le cas de Robofly, Sawyer Fuller, à l'origine du projet, a effectué sa thèse et son post-doc auprès de Wood et a repris tel quel l'actionnement. On se propose par la suite d'étudier plus en détail le drone Robobee.

1.1.3 Analyse de Robobee

Robobee est non seulement le premier drone à avoir réussi à décoller, mais aussi le plus avancé à l'heure actuelle, étant parvenu à effectuer un vol contrôlé sans fil (mais toujours avec une source d'énergie externe), pour une masse de 90 mg [Jafferis et al. 2019]. Pour comparaison, la masse du Robofly est de 180 mg tandis que la masse de la première version du Robobee était de 60 mg (sans inclure les fils d'alimentation). Le projet Robobee a

démarré avec le recrutement de R. Wood à Harvard, qui avait travaillé pendant sa thèse, soutenue en 2004 à l'Université de Californie Berkeley, sur le *Micromechanical Flying Insect* (MFI) *Project*. Ce projet MFI avait débuté en 1998 avec un contrat initial de 2,5 millions de dollars, et regroupait des professeurs à la pointe de la recherche en robotique et en entomologie, notamment Ronald S. Fearing et Michael H. Dickinson. L'apport d'expérience du MFI auprès de Robobee est significatif ; l'actionneur piézoélectrique, le système d'actionnement des ailes à 4 barres et le processus de fabrication avec matériaux composites en sont fortement inspirés. Compte tenu de l'impact de Robobee sur les nanodrones, une étude du fonctionnement de l'actionnement paraît opportune. Un schéma représentant la première version à avoir décollé est proposé figure 1.5, issue de [Wood 2008].

L'actionneur du Robobee est une poutre encastrée-libre de 13 mm de longueur, pour une masse de 40 mg. Composée en partie de matériaux piézoélectriques, elle se déforme sous l'application d'un champ électrique et la déflexion générée est de l'ordre d'un demi-millimètre, pour une force de l'ordre de 135 mN (grandeurs crête-crête). Cet actionneur bilame est alimenté par l'intermédiaire de trois fils en cuivre de 25 microns de diamètre. Cette dimension a été choisie afin de limiter la force élastique et le poids associés aux câbles ; il est possible que ce diamètre de câble ait été modifié au fil des différentes itérations

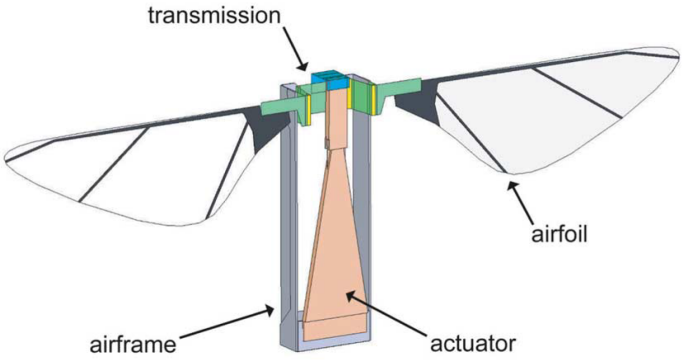


Figure 1.5 – Schéma de Robobee [Wood 2008]. L'actionneur, en orange, se déforme par effet piezoélectrique. Les liaisons souples sont en jaune, le reste des pièces en couleur constituant la transmission sont rigides.

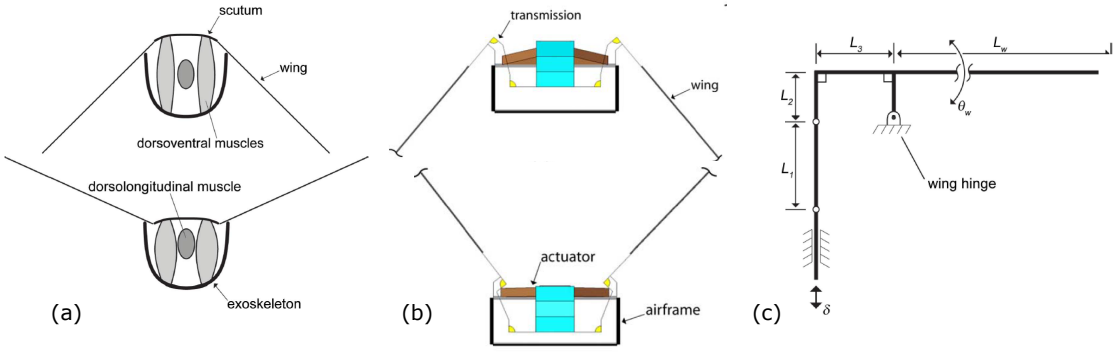


Figure 1.6 – Principe de l'actionnement des ailes du Robobee. (a) Diagramme simplifié de l'actionnement des ailes de diptères [Wood 2007a], (b) schéma de principe de l'actionnement à quatre barres [Wood 2008] et (c) schéma cinématique de l'actionnement du Robobee [Wood 2007a].

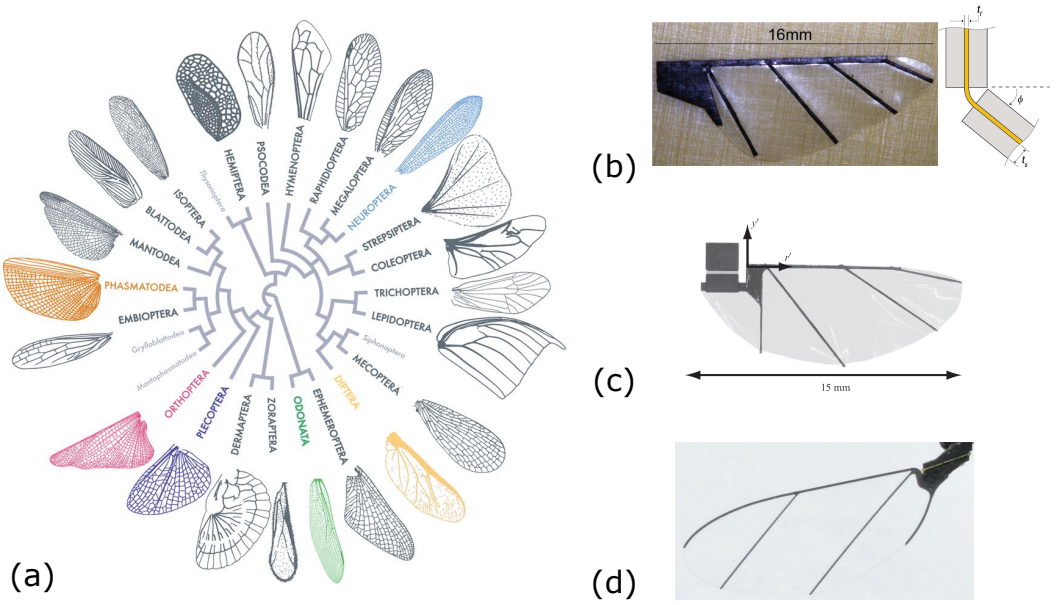


Figure 1.7 – Bio-inspiration : ailes d'insectes et ailes de Robobee. (a) Ailes d'insectes [Salcedo et al. 2019], (b, c, d) Ailes des prototypes successifs de Robobee [Wood 2007a ; Whitney et Wood 2010 ; Jafferis et al. 2019].

des prototypes.

Comme l'illustre la figure 1.6 issue de [Wood 2007a], le mécanisme d'actionnement des ailes est bio-inspiré. Il présente l'avantage de décupler l'amplitude du mouvement de l'actionneur de façon géométrique. Il transforme ainsi le mouvement d'oscillation de l'actionneur en mouvement de battement d'aile, avec des amplitudes de crête à crête de l'ordre de 90°, soit comparables à celles observées chez certains insectes. Ce mécanisme est composé de trois liaisons souples coplanaires reliées par des barres, cf. fig. 1.6(b). Il est construit par des techniques de superposition de couches de différents matériaux (dont fibre de carbone et époxy). Le plan du mécanisme (donc le plan de battement) est orthogonal au plan des ailes. Sur la dernière barre de ce mécanisme est disposée encore une autre liaison souple. Celle-ci permet la rotation de l'aile autour de son bord d'attaque, avec une amplitude légèrement supérieure à celle de battement [Whitney et Wood 2010]. Ce mouvement-ci n'étant pas excité directement par un actionneur, ce type d'actionnement est communément appelé *passive rotation* ou encore *under-actuated*. Notons enfin que cette rotation est limitée en amplitude par un mécanisme de butée : la liaison souple est conçue pour avoir un angle limite intrinsèque qui correspond à la coïncidence des arêtes des poutres, voir fig. 1.7(b).

Les ailes du Robobee sont constituées d'une membrane et d'un matériau plus rigide pour les nervures, voir fig. 1.7(b-d). Ces ailes sont elles aussi bio-inspirées ; on peut observer qu'elles sont visuellement proches des ailes typiques de diptères, représentées sur la fig. 1.7(a). On notera qu'une espèce de diptère prisée par les biologistes pour différentes études est la *Drosophila melanogaster*, dont M. H. Dickinson a exhaustivement étudié le vol ces vingt-cinq dernières années [Dickinson et al. 1993-Dickerson et al. 2019]. La cinématique obtenue des ailes de Robobee est ainsi similaire à celle des drosophiles.

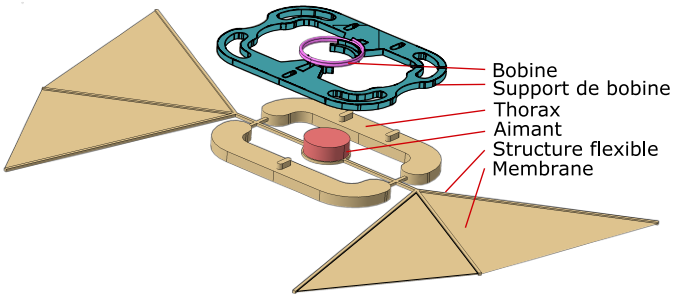


Figure 1.8 – Vue éclatée de l'OVMI (génération WindRider) (adaptée de [Faux 2018]).

1.2 Les points-clefs du projet OVMI

Dans le cadre du projet Objet Volant Mimant l'Insecte démarré il y a une dizaine d'année par Éric Cattan à l'IEMN, un concept différent de nanodrone est développé. Le principe originel de ce projet était d'utiliser des techniques de microfabrication développées à l'IEMN pour construire des nanodrones de faibles dimensions à un coût relativement faible, éventuellement en grand nombre. Ces techniques rendent plus accessible leur miniaturisation ; le prototype le plus évolué ayant été fabriqué avant la présente thèse pesait 22 mg, soit environ trois fois moins que Robobee (version 2007). Cette section ne vise pas une présentation exhaustive de l'ensemble des démarches et progrès des travaux précédents mais une synthèse de l'état du projet lorsque la présente thèse a été engagée.

Grâce aux travaux conduits par l'équipe, le projet a fait émerger des prototypes aux caractéristiques originales suivantes : un actionneur électromagnétique excite une microstructure entièrement flexible fabriquée en matériaux polymères, qui entre en résonance avec un mouvement des ailes correspondant à une combinaison de mouvements de battement et de rotation des ailes. Les prototypes sont constitués de 4 pièces représentées chacune d'une couleur différente sur la figure 1.8 : le squelette (en beige), le support de bobine (en bleu-vert), la bobine (en violet) et l'aimant (en rouge). Les deux premières pièces sont obtenues par microfabrication et les deux autres forment l'actionneur électromagnétique. Le squelette englobe le thorax rigide et la structure flexible qui regroupe les ailes et les liaisons souples. Les ailes sont réalisées en déposant un film de 400 nm de Parylène-C sur les nervures des ailes. Le support de bobine, le thorax, les liaisons souples et les nervures des ailes sont en SU-8. L'assemblage d'un prototype se fait en deux temps : d'abord l'aimant est collé sur le squelette et la bobine sur le support de bobine, puis ces deux ensembles sont collés l'un sur l'autre (le support de bobine est positionné par des plots de centrage sur le squelette).

1.2.1 La combinaison modale

Le mécanisme très particulier de génération de portance de l'OVMI a été mis au point lors de la thèse précédente [Faux 2018]. À l'origine, il est issu d'une interprétation de la cinématique des ailes d'insectes. Avant de l'expliquer, rappelons brièvement la terminologie utilisée pour les angles instantanés donnant la position d'une aile d'un insecte et représentés sur la figure 1.9 (et auxquels on pourrait ajouter l'angle entre la direction du mouvement et l'axe longitudinal de l'animal pour un positionnement univoque) :

— *stroke angle* ou angle de battement autour de $\vec{z}_0$;

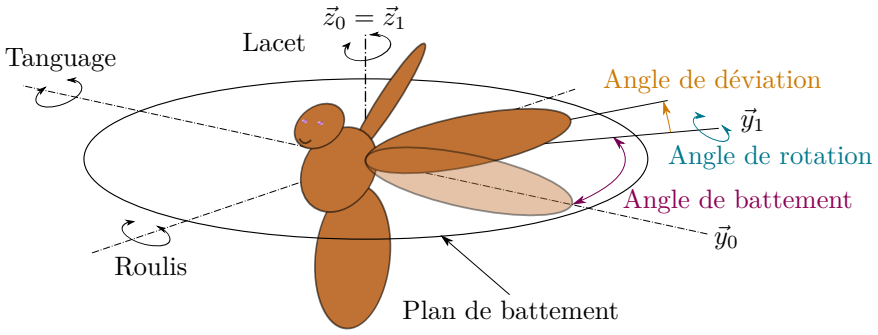


Figure 1.9 – Schéma de définition des angles de positionnement d'une aile d'insecte (adapté de [Dickinson et Muijres 2016]).

— *angle-of-attack*, que l'on appellera par la suite angle de rotation plutôt qu'angle d'attaque, afin d'éviter toute confusion avec l'angle instantané formé entre l'aile et le flux d'air ambiant, formé par la rotation autour de $\vec{y}_1$;
— *deviation angle* ou angle de déviation, qui dévie l'axe longitudinal de l'aile du plan de battement (autour de $\vec{x}_1$, c'est-à-dire de $\vec{y}_1$ vers $\vec{z}_1$).

On trouve aussi dans la littérature les termes *positional*, *feathering* et *elevation angles*, empruntés aux études sur le vol battu des oiseaux [Shyy et al. 2007]). Précisons que la force aérodynamique générée est parallèle à l'axe de lacet, c'est-à-dire orthogonale au plan de battement.

La figure 1.10 issue de [Fry 2005] présente l'allure des évolutions temporelles de ces trois angles pour une drosophile en vol stationnaire (*hover*). Une brève analyse de ce graphe est riche d'enseignements :

— les trois angles sont périodiques (ou quasi ; les déviations légères s'expliquant par des corrections éventuelles) ;
— l'angle de battement est quasi-sinusoïdal ;
— l'angle de déviation a une amplitude très faible devant celle des deux autres, et sera systématiquement négligé par la suite (malgré une importance non négligeable pour la faune volante) ;
— l'angle de rotation n'est pas franchement sinusoïdal. Cependant, on remarque une propriété tout à fait intéressante : cet angle est à son extremum lorsque l'angle de battement est nul. L'angle de battement et l'angle de rotation sont donc en quadrature de phase.

Ce dernier point est à l'origine du concept d'actionnement de l'OVMI. En effet, cette cinématique particulière génère de la portance et l'objectif des drones à ailes battantes est de reproduire ces caractéristiques. Le parti pris de l'OVMI n'est pas d'imiter à l'identique cette cinématique mais de se concentrer sur l'obtention de deux mouvements sinusoïdaux en quadrature de phase. Ainsi, plutôt que d'utiliser une résonance sur un mode et une rotation passive de l'aile à l'instar de Robobee [4], l'idée est de concevoir une structure entièrement flexible telle qu'elle présente deux modes particuliers. Le premier a une déformée modale correspondant à une flexion des ailes (voir fig. 1.11(a)) et le deuxième mode a une déformée modale correspondant à une torsion des ailes, fig. 1.11(b). Ces deux modes sont dits symétriques puisque la déformée de l'aile gauche est identique à celle de l'aile droite.

4. Il faut noter que, pour l'équipe de Wood, le mode excité est le *flapping mode* ; on verra que ce n'est pas notre interprétation au chapitre 6.

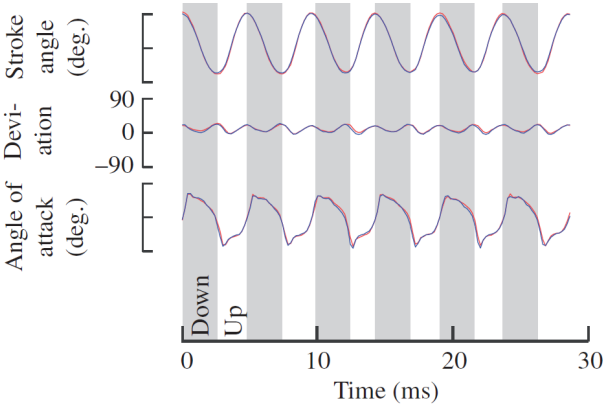


Figure 1.10 – Évolution des angles pour une drosophile (adapté de [Fry 2005]).

La structure possède nécessairement d'autres modes, comme les modes antisymétriques de flexion et de torsion (où la déformée de l'aile gauche est de signe opposé à celle de l'aile droite) ainsi que d'autres modes d'ordres plus élevés qui ne contribuent pas à la génération de portance (et ne la détériorent pas non plus).

Ainsi, les déformations ne sont plus concentrées au niveau même des liaisons mais sur la totalité de la structure flexible. On substitue alors des déformations en flexion et torsion des ailes à des mouvements de solide rigide. La cinématique particulière d'un battement d'aile de drosophile en vol stationnaire est reproduite en combinant ces déformées fig. 1.11(e-h). En excitant la structure par un forçage ponctuel harmonique (comme un aimant sous l'action d'une bobine), cette combinaison particulière s'observe lorsque la fréquence d'excitation coïncide avec une fréquence pour laquelle les deux modes sont en quadrature, fig. 1.11(c). De plus, lorsque les fréquences propres des deux modes sont proches, les amplitudes modales sont élevées et correspondent ainsi à un mouvement résonant.

La pertinence de ce principe a été démontrée par Damien Faux [Faux 2018 ; Faux et al. 2018]. Il a développé au cours de sa thèse un outil de calcul de structure linéaire pour l'obtention de modes combinés de flexion et torsion. Cet outil, couplé avec une optimisation paramétrique, lui a permis de proposer des nouvelles architectures de prototypes, testés ensuite sur un banc de mesure de portance original. Un modèle aérodynamique quasi-stationnaire a aussi été initié.

1.2.2 Actionneur

L'actionneur est composé d'une bobine en cuivre et d'un aimant en alliage de néodyme, de fer et de bore (NdFeB-N48), aimant aux terres rares parmi les plus puissants actuellement. Le dimensionnement de l'actionneur, présenté dans la thèse d'Alexandre Bontemps [Bontemps 2013], est resté inchangé. L'aimant a un diamètre de 1,5 mm, pour une masse de l'ordre de 6 mg. Il est collé sur une surface aménagée du squelette, délimitée par une sur-épaisseur permettant son centrage. Par conception, l'aimant est donc centré par rapport à la bobine. Celle-ci a un diamètre légèrement supérieur, de l'ordre de 1,6 mm. Elle est assemblée à la main avec un fil de cuivre de 80 microns de diamètre, sur deux étages, pour un total d'une douzaine de spires. Les bobines ainsi fabriquées ont une masse d'environ 5 mg. L'élément limitant de l'actionneur est le revêtement isolant du fil de la bobine, qui fond à une température relativement basse, atteinte par des valeurs de courant supérieures à 400 mA.

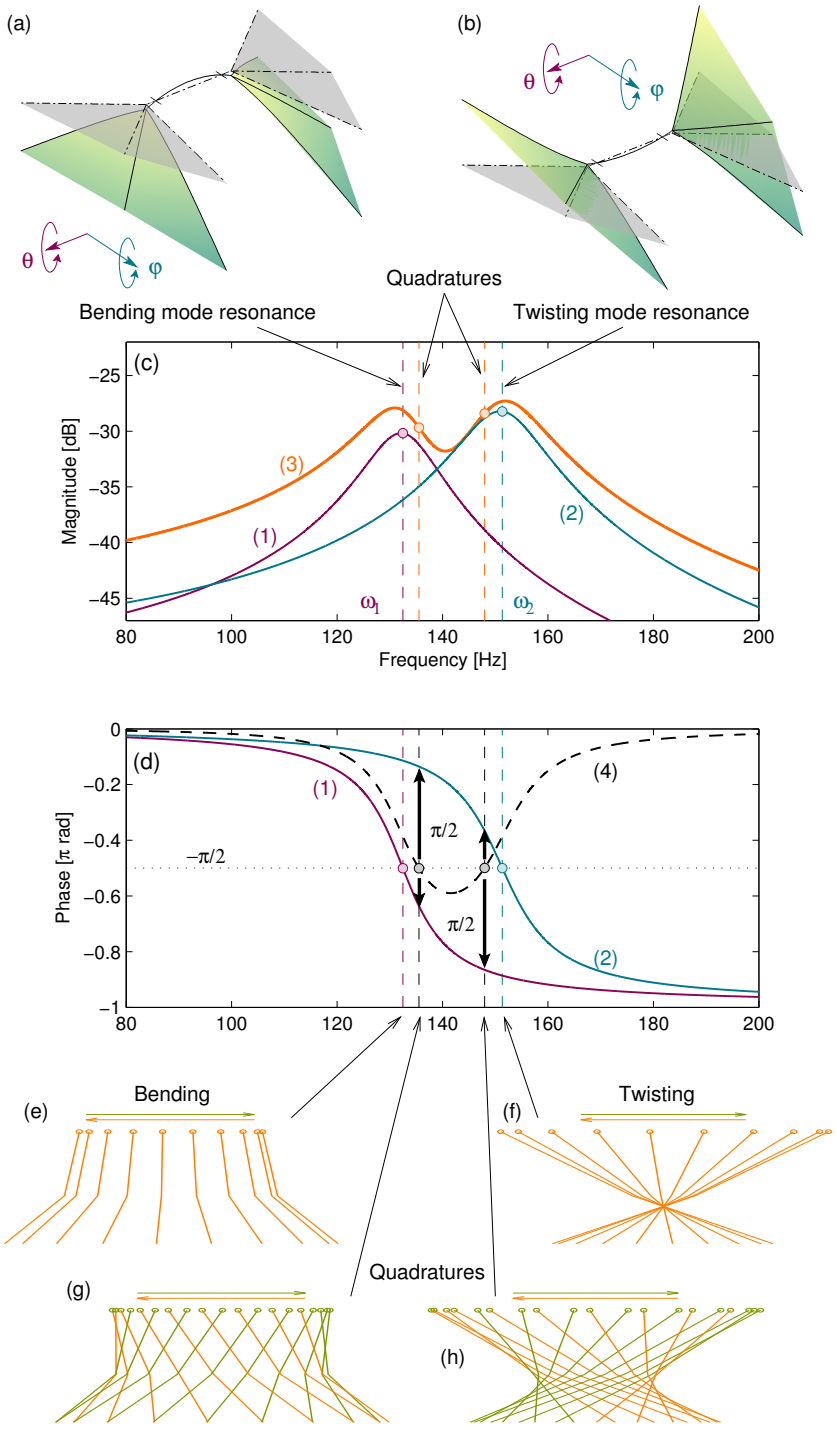


Figure 1.11 – Explication de la combinaison modale [Faux et al. 2018]. (a) Déformée du mode de flexion, (b) déformée du mode de torsion, (c) gain de la FRF théorique, (d) phase de la FRF théorique et (e-h) mouvement d'une section de l'aile (le point représente le bord d'attaque).

Le courant électrique est acheminé vers cette bobine par des fils reliés à un générateur basse-fréquence couplé à un amplificateur de courant. Ces fils ont un diamètre de 50 microns et sont soudés à l'étain avec les fils de la bobine avant collage sur le support de bobine. Les avantages de cet actionneur sont la simplicité de fabrication, une bande passante englobant toute la bande fréquentielle d'intérêt potentiel et la facilité de réglage de la fréquence d'excitation.

1.2.3 Microfabrication

Le processus de fabrication de l'OVMI a été mis au point au cours des thèses précédentes [Dargent 2010 ; Bontemps 2013 ; Vanneste 2013 ; Faux 2018]. Une spécificité de l'OVMI est d'avoir été le premier nanodrone fabriqué par techniques de microfabrication avec une structure entièrement en polymère. Le processus étant détaillé dans [Faux 2018], on en donne ici une description synthétique. La microfabrication s'effectue dans la salle blanche de l'IEMN. Elle est scindée en deux grandes étapes : la stéréo-lithographie et l'obtention de la membrane.

La stéréo-lithographie consiste tout d'abord à déposer une couche de matière polymère sous forme liquide sur une plaque de silicium, appelée *wafer* en anglais et que l'on désigne sous le nom de substrat. Le dépôt est effectué alors que le substrat est immobile, posé sur une tournette. Cette machine est ensuite mise en rotation à une vitesse contrôlée, ce qui permet d'ajuster l'épaisseur de la couche de polymère déposé par centrifugation, selon sa viscosité et les paramètres de rotation. Puis, une fraction de la surface de polymère déposé est insolée, c'est-à-dire exposée à une lumière de longueur d'onde donnée pendant une certaine durée. Enfin, l'étape de « révélation » consiste à retirer la matière inutile du substrat. Il est possible de faire plusieurs opérations de dépôt-insolation avant révélation.

Pour l'OVMI, le dépôt initial est une couche sacrificielle (en Omnicoat) qui permet de récupérer les squelettes en fin de fabrication. Ce dépôt est dit « pleine plaque » – c'est-à-dire que la matière recouvre entièrement le substrat. Ensuite, le thorax et les nervures sont faits d'un seul et même matériau, le SU-8, disponible en plusieurs versions différant par leur viscosité. Cette variabilité permet d'obtenir des plages d'épaisseurs différentes, par exemple la SU-8 2075 est la plus visqueuse et permet de faire les couches les plus épaisses sur un seul dépôt. Une fois le dépôt effectué, il y a généralement une opération de cuisson de la résine avec des montées en température contrôlées et des paliers dont la durée dépend de l'épaisseur déposée.

L'opération d'insolation nécessite un masque optique superposé au substrat dont la position est ajustée avant chaque insolation par une opération dite « d'alignement ». L'exposition est réalisée avec une lumière ultraviolette de longueur d'onde 365 nm, pendant une durée dépendant de l'épaisseur recherchée (par exemple 16 secondes pour 40 microns de SU-8-2035) Le masque optique utilisé pour l'insolation de SU-8 est un film translucide où les zones correspondant aux surfaces de matière que l'on cherche à enlever à la révélation sont recouvertes d'une encre opaque (le SU-8 étant une résine dite « négative »). On pourrait confondre un masque optique avec un transparent pour rétroprojecteur passé par une imprimante jet d'encre banale ; si ce n'est que la résolution de l'imprimante est au dixième de micron près et qu'il est possible d'imprimer un trait de largeur aussi faible que 10 microns. Pour des processus de fabrication industriels, les masques sont généralement en quartz et les résolutions sont bien supérieures (et en constante progression : de 10 microns dans les années 1970 à 5 nm en 2020).

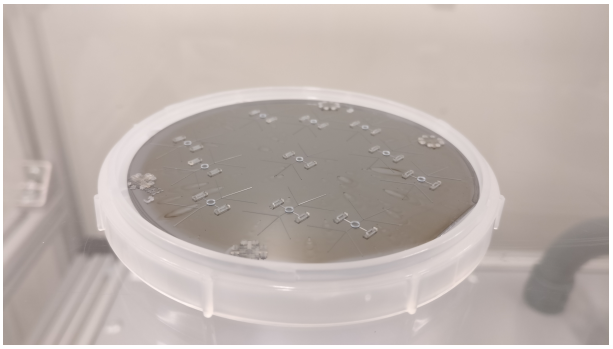


Figure 1.12 – Aperçu d'un substrat après révélation du SU-8, avant dépôt de Parylène-C.

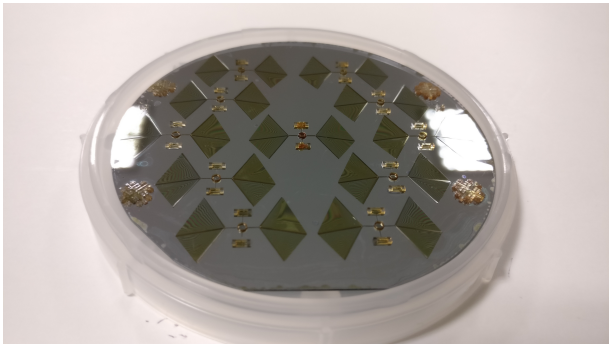


Figure 1.13 – Aperçu d'un substrat avant *lift-off*.

Une deuxième cuisson systématique après insolation assure la réticulation de la résine SU-8. A l'issue de cette cuisson, la frontière entre le polymère réticulé et non-réticulé est visible, cette frontière permet l'alignement du masque sur le substrat, permettant de facto de révéler une seule fois après avoir déposé toutes les couches. La révélation s'effectue à l'aide du solvant *SU-8 Developer* ; il est bon de procéder délicatement pour éviter un décollement intempestif des pièces en SU-8. La figure 1.12 permet de visualiser l'aspect du substrat à cette étape.

La membrane est en Parylène-C, qui est déposé par la technique dite d'évaporation. Le matériau initial, du Galxyl en poudre, est introduit dans un four où il passe en phase gazeuse et se recombine en Parylène-C, avant d'entrer dans la chambre de dépôt, refroidie à l'azote liquide. Le Parylène-C se dépose sur l'ensemble des surfaces de la chambre, et donc entre autres sur un substrat – ou plusieurs. L'épaisseur recherchée, à savoir 400 nm, est obtenue en ajustant la quantité de poudre introduite initialement. Le Parylène-C superflu sur le substrat doit être ensuite gravé dans un plasma. Pour cela, on dépose en lithographie un masque de protection en résine (à ne pas confondre avec un masque optique) sur les ailes afin de ne pas graver les zones correspondant aux membranes des prototypes. Après la gravure et la révélation du masque de protection, les prototypes sont prêts à être « décollés » de la plaque fig. 1.13. On appelle l'opération associée *lift-off*. Cette opération est critique : une minutie extrême doit être déployée pour éviter d'arracher les membranes, voire de casser les liaisons des squelettes.

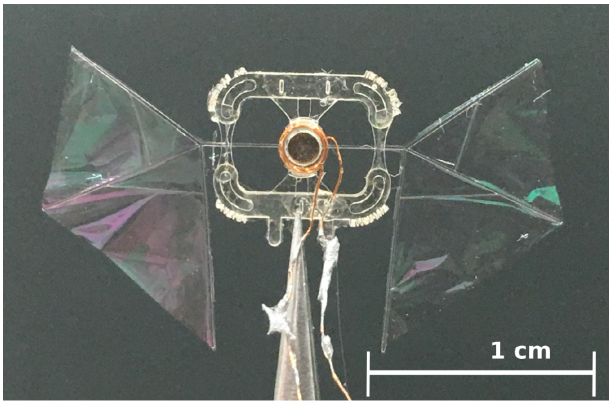


Figure 1.14 – Wind Rider de D. Faux [Faux 2018].

1.3 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit

Cette thèse s'inscrit dans la continuité directe de celle de Damien Faux [Faux 2018]. Grâce à ses contributions, les prototypes les plus performants fabriqués avaient une envergure de 22 mm pour une masse de 22 mg, dont une photographie est présentée fig 1.14. La cinématique bio-inspirée recherchée a été observée expérimentalement au vibromètre laser et à la caméra rapide. Les ailes ont ainsi généré une force maximale mesurée correspondant à 110 % du poids du drone (sans les fils d'alimentation). Cette force était limitée par le courant maximal admissible par la bobine. De plus, au-delà d'une valeur donnée de courant, une diminution de la croissance de la force a été observée empiriquement par D. Faux (non mesurée quantitativement). Compte-tenu de cette preuve de concept, l'objectif de ma thèse était de reprendre la conception des nanodrones OVMI et de l'optimiser sur ses différentes étapes pour parvenir augmenter la force de portance.

Le but principal du projet étant de faire décoller un nanodrone OVMI, la portance qu'il génère doit être augmentée. Une première étude [Fernandez 2016] avait montré que la force de portance était proportionnelle au carré de la fréquence d'excitation, et au cube de l'amplitude de mouvement des ailes. Ceci a motivé une étude approfondie de l'interaction entre les ailes et l'air, et constitue la première partie de ce manuscrit.

Dans le chapitre 2, on détermine comment obtenir de grandes amplitudes de vibration de solides flexibles ainsi que l'effet de l'amortissement dû à l'air. Pour cela, on reprend un modèle d'amortissement non-linéaire [Malatkar et Nayfeh 2003] qui fait intervenir un terme proportionnel au produit de la vitesse et de sa valeur absolue. On en déduit une méthode d'identification paramétrique expérimentale que l'on applique dans un second temps à diverses structures (poutres encastrées libres de différentes échelles, treillis de poutres et même des ailes de nanodrones). Ce modèle est aussi comparé à d'autres modèles d'amortissement non-linéaires plus répandus dans la littérature, ce qui permet de montrer que c'est bien ce modèle qui s'applique à la majorité des mesures effectuées. Il faut cependant préciser que son application est conditionnée par une excitation harmonique d'une structure sur un unique mode, et n'est donc pas adaptée aux ailes de nanodrones qui sont justement conçues pour avoir une réponse combinant deux modes. Ces travaux ont été publiés dans le *Journal of Fluids and Structures*, et ce chapitre reprend le texte à l'identique.

Le chapitre 3 se place dans une perspective plus aérodynamique. On présente une expression très simple de la force aérodynamique, dont la forme est similaire à celle du

modèle d'amortissement du chapitre 2. Cette formulation est appliquée dans un premier temps à des plaques rectangulaires rigides animées de mouvements similaires à ceux d'ailes d'insectes ; ces structures sont en effet particulièrement faciles à modéliser. On démontre ainsi l'importance de la quadrature de phase entre les mouvements pour la génération de force – ce qui justifie bien la démarche d'OVMI – et on retrouve des résultats bien connus par ailleurs, souvent démontrés avec des outils plus évolués. Dans un second temps, cette expression est appliquée au cas d'un solide flexible, pour calculer la force générée par une aile de nanodrone. On montre que la force est maximale aux voisinages des quadratures, et on démontre la pertinence du modèle analytique simple. Ces travaux sont en cours de rédaction pour la soumission d'un article, ce qui explique que le chapitre soit aussi rédigé en anglais.

Forts des enseignements de la première partie, on peut procéder à l'optimisation des nanodrones dans la seconde partie. Pour cela, le code de calcul de structure développé au cours de la thèse précédente a été revu pour permettre une meilleure intégration de nouvelles fonctionnalités (prise en compte de masses ponctuelles, gauchissement des poutres, définition simplifiée de la géométrie de nouveaux prototypes et calcul de la contrainte équivalente de von Mises). Les explications associées à la modification et la validation de ce code grâce à une comparaison systématique avec des résultats d'analyses par éléments-finis (effectuées sur Abaqus) forment le chapitre 4.

Cette nouvelle version de code est mise à profit pour la mise en place d'un processus d'optimisation paramétrique de la géométrie de deux configurations. Cette optimisation utilise la fonction Matlab *fminsearch*, un algorithme de recherche de minimum local d'une fonction non-linéaire à plusieurs variables qui n'utilise pas de calcul du gradient. La démarche est de calculer la fonction de réponse en fréquence de la structure correspondant au jeu de paramètres proposé, puis d'établir des critères quantitatifs sur cette dynamique pour caractériser la pertinence de ce jeu. De nombreux critères sont implémentés et sont présentés au chapitre 5, avec les résultats numériques et expérimentaux de ces géométries optimisées ainsi que leur interprétation critique.

Enfin, le chapitre 6 présente une nouvelle approche pour la conception du prochain nanodrone OVMI à la suite de l'échec de l'itération précédente. L'objectif de combiner deux mouvements en quadrature de phase est toujours primordial, mais un changement de paradigme concernant la structure permet une simplification poussée de la structure. Une analyse d'un système discret à deux degrés de liberté est proposée pour le dimensionnement d'une structure à deux barres et deux ressorts. Les outils mis en place précédemment sont ensuite utilisés pour le dimensionnement des liaisons souples modélisées par des poutres fines. Une nouvelle géométrie est ainsi analysée et les résultats initiaux des simulations numériques valident la pertinence de cette nouvelle approche.

Enfin, une brève conclusion propose un bilan des différents aspects des travaux effectués et présente les perspectives pour le projet ANR ASTRID 0023-02-2019 NANOFLY.

Première partie

Interaction fluide-structure pour nanodrones

Chapitre 2

Vibrations de structures en grande amplitude

Que dîtes-vous ?... C'est inutile ?... Je le sais !
Mais on ne se bat pas dans l'espoir du succès !
Non ! Non ! c'est bien plus beau lorsque c'est inutile !

E. Rostand, *Cyrano de Bergerac*

Ce chapitre présente l'analyse de l'influence de l'air sur la structure sous la forme d'un amortissement modal non-linéaire. Il reprend l'article publié, au cours de la thèse, dans le *Journal of Fluids and Structures*. On donne, dans les lignes qui suivent, les principaux éléments de ce chapitre pour en guider la lecture.

Après une revue de littérature des modèles non-linéaires proposée dans la section 2.1, la section 2.2 rappelle le modèle linéaire d'une poutre encastrée-libre, ce qui permet de dégager les paramètres déterminant l'obtention de grandes amplitudes de vibration, Eqs. (2.12-2.13). Dans la mesure où ce modèle peut être étendu à toute structure mince, on peut facilement transposer ces paramètres au cas du nanodrone. On précise ensuite ce modèle en incluant les non-linéarités géométriques du modèle bien connu de poutre en grande rotation initialement proposé dans [Crespo da Silva et Glynn 1978a,b]. L'équation du mouvement est donnée à l'équation (2.19) sous forme adimensionnnée, puis projetée dans la base modale à l'équation (2.21).

Dans la section 2.3, on inclut à cette dernière équation un terme d'amortissement modal linéaire, représentant l'ensemble des dissipations se produisant à petite amplitude, et un terme d'amortissement modal supplémentaire, faisant intervenir le produit de la vitesse par sa valeur absolue, Eq. (2.23). Un tel modèle d'amortissement a été proposé dans les travaux du Professeur Nayfeh [T. J. Anderson et al. 1996 ; Krauss et Nayfeh 1999 ; Malatkar et Nayfeh 2003]. On reprend la méthode de résolution analytique qu'il propose, la méthode des échelles multiples (MEM), qui permet de construire les réponses en fréquences avec l'équation (2.27). Pour cela, on suppose que la structure est excitée au voisinage d'un mode et que les contributions des autres modes dans la réponse est négligeable. On peut alors montrer, en première approximation, que l'effet de l'amortissement non-linéaire peut être considéré équivalent à un amortissement dépendant linéairement de l'amplitude de vibration, comme le montre l'équation (2.29). En effet, l'amplitude maximale de vibration évolue avec la racine carrée de l'amplitude d'excitation.

Ce constat permet de déduire une méthode d'identification expérimentale des coefficients d'amortissement (appelée M2), que le système présente ou non des non-linéarités

géométriques (se manifestant par un effet assouplissant ou raidissant de la réponse en fréquence). Cette technique peut s'appliquer à une structure pour laquelle on dispose d'un modèle structurel analytique (variante M2a), ou pour une structure particulièrement complexe pour laquelle on ne dispose pas d'un modèle analytique (variante M2b) – on mesure dans ce cas les déformées modales expérimentales et le coefficient d'amortissement à très faible amplitude avec la méthode de la bande passante à -3dB. La méthode d'identification proposée est validée grâce à un logiciel de continuation appelé MANlab, développé sous la forme d'une *toolbox* Matlab [Guillot et al. 2019]. MANlab permet de calculer, entre autres, les orbites périodiques de systèmes dynamiques, soit, plus simplement ici, les réponses en fréquences de l'oscillateur non-linéaire, à l'aide de la méthode de la balance harmonique (HBM en anglais). Les solutions numériques ainsi calculées servent de référence pour les identifications. On teste dans un premier temps la pertinence de la méthode de la bande passante à -3dB utilisée pour identifier l'amortissement équivalent. On montre que cette méthode a tendance à surestimer le coefficient d'amortissement quadratique, alors que la méthode d'identification proposée permet de reconstruire fidèlement les réponses en fréquence avec la MEM. La méthode est aussi testée sur un oscillateur de Duffing à grande amplitude présentant un comportement assouplissant avec des sauts. Pour ce cas, la validité de la MEM est limitée : cela s'observe sur la reconstruction des réponses en fréquence avec les coefficients d'amortissement implémentés dans MANlab. Pour autant, la méthode d'identification couplée à une reconstruction avec la MEM donne des résultats assez proches des réponses en fréquence de référence. On considère que la méthode est validée et on l'utilise sur des mesures expérimentales présentées dans la section suivante.

Par ailleurs, on utilise la méthode des échelles multiples pour analyser des modèles d'amortissement d'ordre supérieur existant dans la littérature. On montre que ces modèles amènent à un amortissement équivalent qui évolue avec le carré de l'amplitude de vibration, Eq. (2.38).

La section 2.4 décrit les structures testées, le montage expérimental et le protocole de mesure. Des structures encastrées en un point de cinq types différents ont été testées :

— un réglet en acier (poutre macro) ;
— une poutre en SU-8 de 12 mm de long (poutre micro) ;
— une poutre en L en SU-8 ;
— une structure d'aile de nanodrone (en SU-8 et sans membrane), appelée *Wing Skeleton* ;
— une aile de nanodrone avec sa membrane, récupérée sur un prototype existant.

La section 2.5 présente les résultats des identifications de ces structures, avec les réponses en fréquences mesurées sur lesquelles sont superposées les réponses en fréquence reconstruites. Les poutres simples ont été identifiées grâce à la première variante de la méthode d'identification (M2a), et les assemblages avec la variante M2b, du fait de légères différences entre les fréquences propres prédites et expérimentalement observées. Dans l'ensemble, on trouve une bonne corrélation entre ces courbes, permettant de valider l'identification. Pour les structures en forme d'aile cependant, dans la mesure où elles sont conçues pour avoir un mode de flexion et un mode de torsion assez proches, le modèle ne s'applique qu'aux voisinages immédiats des deux fréquences propres. De ce fait, comme les amplitudes de vibration testées sont restées très faibles pour l'aile avec membrane, les coefficients identifiés pour cette structure ont une incertitude forte. Pour les autres structures, on compare les valeurs des coefficients d'amortissement et on reconstruit, dans la figure 2.11, l'amortissement équivalent. On démontre la pertinence du modèle

d'amortissement quadratique puisque l'amortissement équivalent est linéaire en fonction de l'amplitude de vibration.

Sommaire du chapitre

2.1 Introduction 21
2.2 Theory 24
2.2.1 Linear beam model 24
2.2.2 Obtaining large amplitude vibrations 26
2.2.3 Nonlinear beam model : geometric nonlinearities 28
2.3 Nonlinear damping 29
2.3.1 Quadratic damping model 29
2.3.2 Identification methods 31
2.3.3 Higher order damping models 32
2.3.4 Numerical validation of the identification methods 33
2.4 Experimental setup 36
2.4.1 Specimens 36
2.4.2 Measurement process and materials 37
2.5 Experimental results 40
2.5.1 Cantilever beams 40
2.5.2 Beam assemblies 41
2.5.3 Damping comparison 44

2.1 Introduction

When a flexible structure is subjected to large amplitude vibrations, numerous nonlinear phenomena take place. The vast literature on geometric nonlinearities helps to understand the peculiar effects (such as coexisting possibly stable and unstable solutions, bifurcations, strong exchanges of energy between vibration modes and chaotic responses, see [Nayfeh and Mook 1979; Thomas et al. 2007; Touzé et al. 2011; Cadot et al. 2016]), through the use of various models. However, most of the available studies include linear only damping models, whereas nonlinear damping effects, associated with large amplitude vibrations, are often observed experimentally and have been – relatively – overlooked. In this context, this work presents the theoretical background and identification procedure of a nonlinear modal damping model adapted to thin structures undergoing very large amplitude vibrations.

The recrudescence of studies on nonlinear damping stresses the interest in this topic, regarding structures of all sizes. In the field of micro/nano-electro-mechanical systems (M/NEMS), nonlinear damping effects have been observed for some time [Younis 2010; Eichler et al. 2011], with only a handful of studies delving into modelling the experimental observations (e.g. [Zaitsev et al. 2012]). In the case of macro-scale structures, the dependance of the damping on the amplitude has been previously reported in the literature for plates and shells (see e.g. the experiments reported in [Alijani et al. 2016; Amabili et al. 2016] and Figs. 14, 15, 16 of [Thomas et al. 2007] in which a model with a linear viscous damping becomes inaccurate at large amplitude). In a recent series of studies, this effect is attributed to the joint contribution of viscoelasticity and geometrical nonlinearities, addressed both theoretically and experimentally in the case of plate and shells in [Balasubramanian et al. 2018; Amabili 2018a,b, 2019].

On the other side of the size spectrum for man-made structures, a few studies in the field of civil engineering illustrate that including the aerodynamic damping in the design of high-rise buildings is critical [Zhang et al. 2019]. Structures for which a nonlinear damping model could be valuable (but has not yet been studied) are micro and nano aerial vehicles (M/NAV). As the size of the system decreases, the ratio of the surface forces over body forces increases [Rhoads et al. 2008]; air interaction has to be accounted for, thus justifying the need for a nonlinear damping model for air-induced damping in micro scale structures.

The motivation for this work is the design of a structure for which vibrations are desired: we aim to make a NAV take-off. This nanodrone is described hereunder. It differentiates itself from the other NAVs with two main features. The first is the use of microfabrication techniques [Bontemps et al. 2013], that produce a fully flexible polymer structure (SU-8 for the frame and Parylene-C for the membrane). Its second characteristic is the lift generation mechanism, which does not rely on passive wing rotation, but on the combination of two vibration modes, a bending one and a twisting one, excited in phase quadrature by a harmonic point forcing [Faux et al. 2018]. The peculiar wing trajectory thus created replicates the dipteras' wing motion [Fry et al. 2003] and generates lift. Therefore, this nanodrone is making use of an entirely flexible structure to activate the wings vibration, which justifies the novel denomination "vibrating-wing nano air vehicle" [VWNAV] [Doan et al. 2016]. The current prototypes achieve substantial vibrations amplitudes – around 30° of peak-to-peak flapping angle – and generate a lift equivalent to the drone's weight before the saturation of the actuator. Aiming at increasing this flapping amplitude, a refinement of our existing design model and a deeper understanding of the damping effects of the surrounding fluid are needed. This article addresses these points by considering structures with a gradual complexity, from simple cantilever beams of various sizes to VWNAV wing prototypes.

Damping is the manifestation of the effects of various phenomena dissipating energy within an oscillating system: internal dissipation within the material (thermoelastic and viscoelastic damping [Chaigne and Lambourg 2001; Schmid and Hierold 2008; Amabili 2019]), fluid-structure interaction (squeeze-film [Hosaka et al. 1995], air flow damping [Hosaka and Itao 1999; Nouira et al. 2007], and acoustic radiation [Chaigne and Lambourg 2001]), or imperfect boundary conditions (such as clamping loss [Hao et al. 2003; Chouvion et al. 2012] or friction in joints [Dion et al. 2013]). Due to its many possible sources, including damping in a model is not straightforward and many models include linear modal terms which coefficients are experimentally estimated. This uncoupled modal model is theoretically justified if the damping is low, for linear (low amplitude) vibrations (see e.g. [Géradin and Rixen 1994]). In the case of the tested structures of this article, we assume that for small amplitude vibrations those assumptions are valid and that a linear damping term embeds all the above physical sources of damping. This is further justified by the weakly viscoelastic behaviour of the materials of the tested structures (high-yield steel and SU-8, which has a loss modulus about 40 times smaller than the storage modulus at the frequency and temperature ranges of interest [Schmid and Hierold 2008; Le Rouzic et al. 2009]). For larger amplitude of vibrations, we identified that the interaction with the surrounding fluid, which leads to quadratic nonlinear terms in the equations, is a predominant damping effect. Other nonlinear damping sources, such as viscoelastic effects combined with geometrical nonlinearities can also have an effect, but at a higher (cubic) order. This article mainly addresses the use and the effect of a quadratic damping term due to the interaction of the structure vibrations with the air flow, and verify experimentally

that it is predominant for the tested structures.

Many models for air interaction exist, with varying degrees of complexity. A basic approach is to consider that the force applied to the structure by the fluid can be separated into two components: (i) a conservative *added mass* term, proportional to an acceleration term (which effect is mainly to decrease the natural frequency), and (ii) a *drag damping* term, depending on the velocity [Keulegan and Carpenter 1958]. The underlying hypothesis for this "structural" approach is to consider a steady (or quasi-steady) flow for the surrounding fluid. When this hypothesis is not verified, more advanced approaches are required. Indeed, as unsteady flows produce complex phenomena (such as the *Wagner effect* or the *Magnus effect*, related to respectively the delayed stall and the rotational circulation – two lift generating mechanisms for insects during the flapping cycle [Dickinson et al. 1999]), the corresponding fluid loads are very diverse [Bidkar et al. 2009]. In this approach, the vast majority of the models requires a numerical solver for the Navier-Stokes equations [Aureli and Porfiri 2010; Phan et al. 2013]. The analytical models proposed in [Ansari, Knowles, et al. 2006; Pedersen and Żbikowski 2006] are noteworthy as they provide analytical aerodynamic models accounting for quasi-steady and unsteady flows (in the context of the development of a MAV). The simulations perform well on the experimental data from [Sane and Dickinson 2001], but the model applies to rigid plates.

A general expression of fluid-induced damping is in the form: $c|v^{n-1}(t)|v(t)$, with c a scalar and v the velocity of the structure with respect to the surrounding media. The case $n = 1$ is the linear – or Stokes – model and $n = 0$ can be related to dry friction [Géradin and Rixen 1994]. The most usual model for the aerodynamic drag is $n = 2$ [T. J. Anderson et al. 1996; Malatkar and Nayfeh 2003; Egorov et al. 2018]. The case $n = 3$ (equivalent to cv^3) can also be found in the literature to model the damping due to air on a structure [Gottlieb and Habib 2012; Zaitsev et al. 2012]. It originates in investigations on ship roll damping equivalents (see [Haddara 1973; Dalzell 1976; Bikdash et al. 1993]), as the case $n = 2$ is mathematically strenuous to use when the structure's dynamic response involves more than one mode (which is the case for the random excitation of waves on a ship). Although independent of fluid-induced damping, the study [Elliott et al. 2015] provides a detailed analytical and numerical study on the general $c_n|v^{n-1}(t)|v(t)$ model. It proposes several examples in the literature and formulates an equivalent damping obtained by retaining the fundamental term in a harmonic balance analysis.

The topic of identification of nonlinear systems is vast and covers many applications [Kerschen et al. 2006], but there are few techniques to identify nonlinear damping in the steady state, and even fewer techniques use the frequency domain [Doughty et al. 2002]. Model-based frequency-domain identification techniques are mostly due to Pr. Nayfeh's team work. For cantilever beams, one can refer to [Nayfeh 1985] and especially [Krauss and Nayfeh 1999; Malatkar and Nayfeh 2003], applied to single-mode responses of weakly nonlinear structures. The model includes nonlinear damping in the form of $cv|v|$, and measurements are made on third and fourth modes of a macroscopic steel beam. In [Malatkar and Nayfeh 2003], the parametric identification consists in a frequency response curve-fitting, whereas in [Krauss and Nayfeh 1999], the technique is based on curve-fitting fixed points of the system. These studies are of utmost importance since they present a model that distinguishes the linear and quadratic modal damping coefficients, and take into account geometric nonlinearities that arise when the amplitude of motion is large.

The geometric nonlinearities of a cantilever beam have been studied analytically in the seminal article [Crespo da Silva and Glynn 1978a]. It establishes the equations of motion

of bending (about two principal axes) and torsion of an inextensional beam through an expansion in Taylor series truncated at order 3. From there, [Pai and Nayfeh 1990] demonstrated that the first mode presents a slightly hardening behaviour, which was confirmed later on in several publications. This hardening behaviour manifests itself by a shift of the frequency response towards the high frequencies as the amplitude increases. Yet, the critical review [Sabater and Rhoads 2017] apprises of the possible errors that third-order geometric nonlinearity approximation can engender on parametric system identification techniques using perturbation methods in resonant micro/nano systems. In particular, for a linearly damped microresonator, fifth-order simulations show that the normalised amplitude at resonance decreases as the forcing amplitude increases, which would be caused by the geometric nonlinearities.

The core contributions of this work are the determination of a nonlinear damping model for the effect of air-induced damping in the steady-state vibration of cantilever structures and the presentation of a novel identification technique. This paper is organised as follows. Section 2.2 presents the linear beam model, which serves to identify key parameters in obtaining large amplitude vibration, as well as the nonlinear beam model including the geometric nonlinearities. The second section presents the nonlinear damping model, inspired from [Krauss and Nayfeh 1999; Malatkar and Nayfeh 2003], comparing it in subsection 2.3.3 to other nonlinear damping models in use, and validating its parametric identification in subsection 2.3.4. Next, section 2.4 presents the materials and methods used for the experimental identification. The section 2.5 presents the experimental results and discusses the identified damping coefficients and the procedure.

2.2 Theory

In this section, we consider a cantilever beam because analytical models, either for linear and geometrically nonlinear vibrations, are at hand and very realistic. Our purpose is to introduce all our methodology and highlight all parameters relevant to obtain very large amplitudes of vibration. We first recall the linear model of the beam, which is then enriched with nonlinear terms accounting for geometric nonlinearities before adding nonlinear damping terms in the next section.

We consider a straight cantilever beam of length L with a uniform cross-section of area S and second moment of area I, made of a homogeneous and isotropic elastic material of density ρ and Young's modulus E. We restrict our attention to transverse vibrations in one direction only. The considered models are based on the classical Euler-Bernoulli kinematics, for which each cross-section is rigid and remains orthogonal to the neutral line. The transverse displacement of the cross-section at abscissa x and time t is written $w(x,t)$.

2.2.1 Linear beam model

In this section, we first consider the classical linear model for the cantilever beam. In this case, $w(x,t)$ verifies the following equation:

$$EIw'''' + \rho S\ddot{w} = p, \tag{2.1}$$

where p is the load per unit length and $\bullet' = \partial \bullet / \partial x$ and $\dot{\bullet} = \partial \bullet / \partial t$. It is then convenient to rewrite Eq. (2.1) in a dimensionless form. For that, we decide to set the length of

the beam L as the characteristic length, leading to the following dimensionless quantities denoted by overbars:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{w} = \frac{w}{L}; \quad \bar{p} = \frac{pL^3}{EI} \quad \text{and} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0} = \frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{2.2}$$

Introducing Eqs. (2.2) into Eq. (2.1) yields:

$$\bar{w}'''' + \ddot{\bar{w}} = \bar{p}, \tag{2.3}$$

where, when applied to dimensionless quantities, $\bar{\bullet}' = \partial\bar{\bullet}/\partial\bar{x}$ and $\dot{\bar{\bullet}} = \partial\bar{\bullet}/\partial\bar{t}$.

The natural modes of the beam $(\omega_k, \Phi_k(\bar{x}))$ are solutions of the eigenvalue problem:

$$\Phi'''' - \omega_k^2\Phi = 0. \tag{2.4}$$

with the following boundary conditions in the case of the cantilever beam:

$$\Phi(0) = 0; \quad \Phi'(0) = 0; \quad \Phi''(1) = 0; \quad \Phi'''(1) = 0. \tag{2.5}$$

The mode shapes are written as follows:

$$\Phi_k(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left(\cosh(\beta_k\,\bar{x}) - \cos(\beta_k\,\bar{x}) + \frac{\cos\beta_k + \cosh\beta_k}{\sin\beta_k + \sinh\beta_k}(\sin(\beta_k\,\bar{x}) - \sinh(\beta_k\,\bar{x}))\right), \tag{2.6}$$

and the dimensionless natural frequencies are $\omega_k = \beta_k^2$, where β_k is the k-th solution of $\cos\beta_k\cosh\beta_k + 1 = 0$. The first 4 values are:

$$\beta_1 = 1.8751, \quad \beta_2 = 4.6941, \quad \beta_3 = 7.8548, \quad \beta_4 = 10.996. \tag{2.7}$$

Besides, the normalisation of the mode shapes in Eq. (2.6) leads to $|\Phi_k(1)| = 1$, $\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 1/4$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Using the time constant t_0 of Eq. (2.2), the k-th. dimensioned frequency, in [Hz], verifies:

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi t_0} = \frac{\beta_k^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{\beta_k^2}{4\sqrt{3}\pi}\frac{h}{L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2.8}$$

where the last equation is valid in the case of a rectangular cross section of thickness h.

We expand the transverse displacement of the beam on the natural modes basis:

$$\bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Phi_k(\bar{x})q_k(\bar{t}). \tag{2.9}$$

Substituting Eq. (2.9) into Eq. (2.3) and using the orthogonality properties of the modes leads to the following equations, for all $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = Q_k, \tag{2.10}$$

where ξ_k is a linear modal damping factor added *a posteriori* and with

$$Q_k(\bar{t}) = \frac{\int_0^1 \Phi_k(\bar{x})\,\bar{p}(\bar{x},\bar{t})\,\mathrm{d}\bar{x}}{\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}}. \tag{2.11}$$

2.2.2 Obtaining large amplitude vibrations

We address in this section the parameters of the considered thin structures that limit their maximum amplitude in vibration. This point is relevant in the case of our VWNAV, for which we want to increase as much as possible the vibrations amplitude in operating conditions. It is also of interest when designing a specific experimental test of vibrations of thin structures in very large amplitude, to estimate the limits under which one has to stay in order to avoid damaging or breaking the tested specimen. To obtain simple criteria, we focus on the linear model introduced in the previous section. Even if a cantilever beam is considered, the obtained results can be extended to more complex structures, provided they are thin, such as the beam assemblies of our VWNAV considered in the experimental sections 2.4, 2.5 of the present article and fully described in [Faux et al. 2019].

2.2.2.1 Maximum resonant amplitude criterion

Considering a beam of rectangular cross section (width b and thickness h), excited by a sine point forcing of dimensioned amplitude F_e (in [N]) at abscissa $\bar{x}_e$, and assuming a single-mode response for the displacement in Eq. (2.9), Eq. (2.10) leads to the expression of the modal coordinate amplitude at resonance ($\Omega \approx \omega_k$) and thus to the tip displacement of the beam (at $\bar{x} = 1$) as a function of the applied force:

$$\frac{w_{k,\max}}{L} = \underbrace{\frac{6\,\Phi_k(1)}{\beta_k^4 \int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}}}_{\text{Modal}} \underbrace{\frac{L^2}{bh^3}}_{\text{Geo.}} \underbrace{\frac{1}{E}}_{\text{Mat.}} \underbrace{\frac{1}{\xi_k}}_{\text{Damp.}} \underbrace{\Phi_k(\bar{x}_e) F_e}_{\text{Forcing}}, \tag{2.12}$$

where the expression of $\bar{p}$ in Eq. (2.2) has been used.

Eq. (2.12) presents five independent terms originating from different types of contributions: the modal properties (that are inherent to the shape of the structure itself regardless of the dimensions), the geometric parameters (length and geometry of the cross-section), the material's properties, the damping ratio and the forcing itself. Moreover, even if the present equations are valid for a single cantilever beam, if the material is homogeneous, all interpretation can be easily extended to beam assemblies subjected to a point forcing (e.g. the VWNAV with its electromagnetic actuator [Faux et al. 2019]).

As a consequence, in order to maximise the tip (maximum) displacement of the structure at resonance, one can act on several of these contributions. First is the design of the geometry: the more slender the geometry is, the higher the vibrations amplitude is ($L \gg h, b$). The second lever is the choice of an appropriate material: it should be flexible (E low) but its intrinsic material damping should be low as well, to reduce ξ_k as much as possible. The damping ratio ξ_k also includes the effects of imperfect boundary conditions and air interaction; one has thus to limit the clamping losses by designing proper boundary conditions, the air losses being the subject of the remaining of this paper. The last lever is to maximise the forcing and select a forcing point $\bar{x}_e$ where the amplitude is high. In addition, one can remark that the index k of the mode has also an influence, gathered in the value of β_k (for the beam, $\Phi_k(1)$ and $\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}$ are independent of k), that increases with the value of k (see Eqs. (2.7)). Consequently, for a given geometry, material, and damping ratio, the lower the mode is, the higher its amplitude at resonance is.

	E [GPa]	ξ	σ_e [MPa]	Resonant criterion Eq. (2.12)	Yield criterion Eq. (2.13)
S235 steel	210	0.1%	235	1	1
Aluminium	70	0.1%	110 - 300*	3	1.4-3.8
High yield steel	175†	0.1%†	850 - 1200*	1.2	4.34-6.13
Silicon	170‡	0.1-1%‡	170 - 1700*	0.12-1.23	0.89-8.9
SU-8	4.88†	1%†	50 - 80*	**5.22**	**9.16-14.6**

Table 2.1 – Comparison of different materials with maximum amplitude criteria. †-noted values are extracted from measurements detailed in sections 2.4-2.5 assuming a perfect clamp boundary condition. ‡-noted values are extracted from [Naeli and Brand 2009]. (* Yield strength values are estimated from manufacturers data sheets).

2.2.2.2 Yield limit criterion

When considering large amplitude vibrations, one should verify that the maximum stress in the beam domain σ is lower than the yield strength of the material σ_e, to avoid a non-reversible change of shape due to plasticity. Basic strength of material theory, based on the Euler-Bernoulli kinematics used in the model, gives $\sigma = -Mh/(2I)$, with the bending moment $M = EIw''$. Substituting into these equations the displacement from Eq. (2.9) on which is used the single-mode approximation, one can write the maximum displacement of a beam before yield:

$$\frac{w_{k,\text{yield}}}{L} = \underbrace{\frac{2\Phi_k(1)}{\max_{\bar{x}}(\Phi_k'')}}_{\text{Modal}} \underbrace{\frac{L}{h}}_{\text{Geo.}} \underbrace{\frac{\sigma_e}{E}}_{\text{Mat.}} . \tag{2.13}$$

Similar contributions to those identified in the previous criterion (Eq. (2.12)) can be highlighted here: the structure should be as slender ($L \gg h$) as possible, which concurs with the resonant criterion (although width b is no longer determinant), and the dimensionless ratio σ_e/E should be as high as possible for the selected material.

2.2.2.3 Material selection remarks

The two criteria introduced in the preceding sections stress the importance of the geometric design as well as the choice of the material. To illustrate the pertinence of choosing an apropriate material, we selected four different materials. The first material is a widely used S235 steel, which is chosen as the reference with base index 1. Then, aluminium, that has a smaller Young's modulus and a comparable yield limit, is considered. In addition, a high yield steel is also considered, to assess the benefit of choosing an enhanced material (on the second criterion in particular). As most MEMS are fabricated using silicon, it is interesting to see its potential compared to steel. Finally, the SU-8 – an epoxy-based photoresist polymer commonly used in MEMS – was selected since the elastic structure of our VWNAV is made of this material. It was initially chosen because SU-8 and real insects wing veins show close mechanical properties [Bao et al. 2011].

The materials are compared using the two criteria and results are compiled in Table 2.1. The different values of the resonant criterion show that high yield steel and silicon are not particularly better suited for large amplitude vibrations than structural steel. For the yield criterion, as one could expect, using high yield steel enhances the performance and selecting a high yield silicon can be useful as well. Aluminium is a suitable choice that yields satisfactory results for both the resonant and the yield criteria. Overall, SU8 is a

material that will enhance the large amplitude vibrations of a flexible structure as it is a better material than all the other classical materials in the comparison.

2.2.3 Nonlinear beam model: geometric nonlinearities

In the above sections, a linear model for the cantilever beam has been considered, valid for small displacements only. If the transverse displacement is increased, one has to consider geometrical nonlinearities. In the case of restrained ends in the axial direction, the geometrical nonlinearities come from an axial / bending coupling and a von Kármán model is enough, necessary if $w(x,t)$ is of the order of magnitude of the thickness h of the beam. In the present case of a cantilever beam, one has to consider higher-order models that take into account the effects of large rotations of the cross-section, necessary for higher transverse amplitude if $w(x,t)$ is of the order of magnitude of the length L of the beam (see e.g. [Lacarbonara and Yabuno 2006; Thomas et al. 2016]). The dimensionless variables of Eqs. (2.2) have been chosen accordingly. We use here a so-called geometrically exact equation of motion of an inextensible cantilever beam in transverse motion, valid with no restriction on the rotation amplitude of the cross-sections of the beam [Thomas et al. 2016]:

$$\rho S\ddot{w} + EI\frac{\theta'''}{(\cos\theta)'} - \rho S\left(\tan\theta\int_L^x \ddot{u}\,\mathrm{d}x\right)' = p \tag{2.14}$$

with u the axial displacement, θ the rotation of the cross-section and other notations previously defined. Using the inextensionality constraints $(1+u')^2+(w')^2=1$ and $\tan\theta = w'/(1+u')$, and expanding Eq. (2.14) in Taylor series truncated at order three in w, leads to:

$$EIw'''' + \rho S\ddot{w} + EI(w'w''^2 + w'^2w''')' + \frac{\rho S}{2}\left[w'\int_L^x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^x w'^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right]' = p, \tag{2.15}$$

which is the well-known model of a cantilever beam in nonlinear vibrations, first introduced in [Crespo da Silva and Glynn 1978a].

We consider the case of a base excitation. One can decompose the total displacement of a cross-section of the structure $w(x,t)$ as:

$$w(x,t) = w_e(t) + w_r(x,t), \tag{2.16}$$

where $w_e(t)$ is the base displacement and $w_r(x,t)$ is the relative displacement of the cross-section with respect to its base. Substituting Eq. (2.16) into Eq. (2.15) gives:

$$EIw_r'''' + \rho S\ddot{w}_r + EI(w_r'w_r''^2 + w_r'^2w_r''')' + \frac{\rho S}{2}\left[w_r'\int_L^x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^x w_r'^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right]' = -\rho S\ddot{w}_e. \tag{2.17}$$

Note that Eq. (2.17) is similar to Eq. (2.15) with $p = -\rho S\ddot{w}_e$. For a harmonic base excitation, it is possible to write the prescribed acceleration

$$\ddot{w}_e = \gamma_e\cos(2\pi f_e t), \tag{2.18}$$

with γ_e and f_e the amplitude and frequency of excitation. Using the dimensionless form presented in Eqs. (2.2), Eq. (2.17) becomes:

$$\bar{w}_r'''' + \ddot{\bar{w}}_r + (\bar{w}_r'\bar{w}_r''^2 + \bar{w}_r'^2\bar{w}_r''')' + \frac{1}{2}\left[\bar{w}_r'\int_1^{\bar{x}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}\left(\int_0^{\bar{x}} \bar{w}_r'^2\mathrm{d}\bar{x}\right)\mathrm{d}\bar{x}\right]' = -\bar{\gamma}_e\cos(\Omega\bar{t}), \tag{2.19}$$

where

$$\bar{\gamma}_e = \gamma_e \frac{t_0^2}{L} = \gamma_e \frac{\rho S L^3}{EI}, \quad \Omega = \frac{2\pi f_e}{t_0} = \frac{2\pi f_e}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \tag{2.20}$$

One can see that this is the linear equation of motion Eq. (2.3) appended with 2 nonlinear terms stemming from the geometrical nonlinearities. Then, expanding $\bar{w}_r(\bar{x},\bar{t})$ onto the natural modes basis as in Eq. (2.9), substituting this equation into Eq. (2.19) and using the orthogonality properties of the modes, one obtains the following set of equations for the modal coordinates, for all $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\left[\Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l + \Pi_{ijl}^k(\ddot{q}_j q_l + \dot{q}_j \dot{q}_l) q_i\right] = -\bar{\gamma}_e R_k \cos(\Omega\bar{t}), \tag{2.21}$$

with

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{\int_0^1 \Phi_k(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}}{\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}},\ \Gamma_{ijl}^k = \frac{\int_0^1 \Phi_k\left(\Phi_i'\Phi_j''\Phi_l'' + \Phi_i'''\Phi_j'\Phi_l'\right)'\mathrm{d}\bar{x}}{\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}} \\ \text{and}\Pi_{ijl}^k &= \frac{\int_0^1 \Phi_k\left(\Phi_i'\int_1^{\bar{x}}(\int_0^{\bar{x}}\Phi_j'\Phi_l'\mathrm{d}\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\right)'\mathrm{d}\bar{x}}{\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3 Nonlinear damping

2.3.1 Quadratic damping model

The nonlinear beam model introduced in the previous section is conservative. To take into account damping effects, we choose in this article to introduce damping terms directly in the modal oscillators Eq.(2.21). The main interest of using a modal damping model is that it can be easily experimentally identified, as it will be shown in the following. Since the identification procedure is based on a single resonance, we assume that it is possible to consider a single-mode response, valid for harmonic excitation, modes well separated in frequency and no internal resonances; consequently, Eqs. (2.21) are restricted to the k-th. oscillator only.

As in section 2.2.1, we first add a linear modal damping of factor ξ_k. We then add a supplementary quadratic modal damping term $\nu_k\dot{q}_k|\dot{q}_k|$ (with $|\bullet|$ the absolute value of $\bullet$), with coefficient ν_k, equivalent to a modal force proportional to the square of the velocity and always opposite to its direction. It stems from an aeroelastic drag term, restricted to a single mode and thus neglecting the possible couplings with the others (see Appendix B.1). Even if higher order damping terms can be considered (see section 2.3.3), we restrict ourselves to the quadratic case since it will be shown in section 2.5 that this model is sufficient for the highly flexible structures considered in this article. Finally, omitting the k subscripts/superscripts for clarity purpose, Eq. (2.21) becomes:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \nu\dot{q}|\dot{q}| + \omega_0^2 q + \Gamma q^3 + \Pi(\ddot{q}q^2 + \dot{q}^2 q) = -\bar{\gamma}_e R\cos(\Omega\bar{t}), \tag{2.23}$$

where

$$\Gamma = 8\int_0^1 \Phi'^2\Phi''^2\mathrm{d}\bar{x} \quad \Pi = 4\int_0^1\left(\int_0^{\bar{x}}\Phi'^2(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\right)^2\mathrm{d}\bar{x}, \quad R = 4\int_0^1\Phi(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}, \tag{2.24}$$

that can be calculated from Eqs. (2.22) with successive integration by parts (see for example [Arafat 1999) and because $\int_0^1 \Phi_k^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 1/4$ with the mode shape definition in

Eq. (2.6). In Eq. (2.23), the ν parameter is modal, it may depend on the cross-section's width and the fluid mass density [Bidkar et al. 2009; Egorov et al. 2018].

The method of multiple scales [Nayfeh and Mook 1979] [MS], limited to the first order, leads to a pure sine solution:

$$q(\bar{t}) = a\cos(\Omega\bar{t} - \phi). \tag{2.25}$$

The development of calculations covering this case and the one presented in subsection 2.3.3 is given in Appendix B.2. It shows that a and ϕ can be determined in the steady state with the system:

$$\begin{cases} \xi\omega_0 a + \eta\omega_0 a^2 &= -\dfrac{\bar{\gamma}_e R}{2\omega}\sin\phi \\ a\sigma - \dfrac{(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)}{8\omega_0}a^3 &= \dfrac{\bar{\gamma}_e R}{2\omega}\cos\phi, \end{cases} \tag{2.26}$$

where $\eta = 4\nu/3\pi$ and $\sigma = \Omega - \omega_0$, the detuning parameter for a primary resonance. By eliminating ϕ between the two equations in Eq. (2.26), one can obtain the frequency response of the system near resonance [Malatkar and Nayfeh 2003]:

$$\Omega - \omega_0 = \frac{(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)}{8\omega_0}a^2 \pm \sqrt{\frac{(\bar{\gamma}_e R)^2}{4\omega_0^2 a^2} - \omega_0^2\,(\xi + \eta\, a)^2}. \tag{2.27}$$

With this model, valid only in the vicinity of a resonance, one can notice that the the effects of geometric nonlinearities – appearing in the first term with coefficients Γ and Π – and the damping – appearing in the second (square root) term – are independent. At the resonance point, the forcing energy and the damping loss offset each other, the term with the square root is zero and the first term gives the evolution of the frequency at resonance with respect to the amplitude a of the motion, which is here a quadratic relation. Then, the square root term in Eq. (2.27) includes an equivalent damping term:

$$\xi_{\text{eq}} = \xi + \eta a. \tag{2.28}$$

Naturally, ξ is a dimensionless damping factor and thus its numerical value has a general meaning, independent of the structure and the mode considered. On the contrary, the quadratic term ηa is linear in the modal amplitude a of the motion. It thus depends on the mode shape scaling and more generally on the vibration amplitude scaling. For ξ_{eq} to be as general as ξ, the scaling must be defined accordingly. Referring to Eqs. (2.2), (2.9) and (2.25), the transverse displacement $w(x,t)$ and a are scaled with the characteristic length L of the structure, which leads to:

$$\xi_{\text{eq}} = \xi + \frac{\eta}{\Phi_{\max}}\frac{w_{\max}}{L} = \xi + \hat{\eta}\frac{w_{\max}}{L}, \tag{2.29}$$

where $w_{\max}$ is the amplitude of the transverse motion of the structure where the deformed shape is maximum and $\Phi_{\max} = \max_{\bar{x}}|\Phi(\bar{x})|$ is the corresponding value of the latter. The above equation shows that η depends on the mode shape scaling whereas $\hat{\eta} = \eta/\Phi_{\max}$ does not. In this article, to confer a general meaning to the quadratic damping coefficient, we choose to use $\hat{\eta}$ (or η if the mode shapes are scaled such that $\Phi_{\max} = 1$, which is the case for the mode shapes of Eq. (2.6)). As a consequence, the physical meaning of the quadratic damping coefficient $\hat{\eta}$ can be inferred as the equivalent modal damping factor when the maximum amplitude of vibration $w_{\max}$ of the structure is equal to the characteristic length L. Coefficient $\eta = 4\nu/3\pi$ has the same physical meaning, but is less general since it depends on the mode shape normalisation, as explained above.

2.3.2 Identification methods

Equation (2.27) leads to two methods to identify the damping coefficients ξ and $\hat{\eta}$ from the frequency domain: a classical half-power bandwidth identification of the equivalent damping, and a model-based identification technique, that is similar to what is proposed in [Krauss and Nayfeh 1999].

2.3.2.1 Method 1 (M1): half-power bandwidth

In the case of a linear damping model, for small values of the damping factor ξ and well separated resonances, one can use the half-power bandwidth $\Delta\omega$ to identify ξ since $\xi \simeq \Delta\omega/(2\omega_0)$. Consequently, one can extend this method to estimate the equivalent damping factor ξ_{eq} for increasing values of the vibration amplitude, as long as the resonance frequency does not change much with the amplitude. For this, we measure the resonant response of the structure at a point of abscissa $\bar{x}_m$, for several input accelerations, and we estimate w_{res}, which is the amplitude, at resonance, of the displacement $w(\bar{x}_m, \bar{t})$. Then, with Eq. (2.9), $w_{\text{res}} = w_{\max}\Phi(\bar{x}_m)/\Phi_{\max}$ and for each resonance, ξ_{eq} can be written:

$$\xi_{\text{eq}} = \xi + c_0 w_{\text{res}}, \quad \text{and} \quad \hat{\eta} = L\frac{\Phi(\bar{x}_m)}{\Phi_{\max}}c_0. \tag{2.30}$$

On the plot of ξ_{eq} as a function of w_{res}, the intercept and the slope give respectively the linear and quadratic modal damping coefficients $(\xi, \hat{\eta})$. This method will henceforth be referred to as "M1".

Besides, one can notice that the present identification method is independent of any structural model for the structure, since Eqs. (2.30) depend only on the characteristic length L of the structure and the relative amplitude of the deformed shape $\Phi(\bar{x})$ between the point where it is maximum and measurement point $\bar{x}_m$. In practice, one estimates ξ and c_0 with a linear fit of the experimental points $\xi_{\text{eq}} = f(w_{\text{res}})$ and deduces $\hat{\eta}$ with L and a measurement of the mode shape.

2.3.2.2 Method 2 (M2a, M2b): amplitude at resonance

At resonance, the forcing energy and the damping loss offset each other. In other words, the term under the square root in Eq. (2.27) vanishes, which gives an analytical relation between the amplitude at resonance a_{res}, the forcing amplitude and the damping:

$$\frac{\bar{\gamma}_e R}{2\omega_0^2} = \xi a_{\text{res}} + \eta a_{\text{res}}^2, \tag{2.31}$$

that leads to a single meaningful root (positive and strictly decreasing in ξ and η):

$$a_{\text{res}} = \sqrt{\left(\frac{\xi}{2\eta}\right)^2 + \frac{\bar{\gamma}_e R}{2\eta\omega_0^2}} - \frac{\xi}{2\eta}. \tag{2.32}$$

From Eq. (2.31), it is trivial to observe that for a linear modal damping model, the amplitude at resonance increases linearly with the forcing amplitude, whereas Eq. (2.32) demonstrates that when the quadratic damping coefficient is a non-zero value, the amplitude at resonance increases only with the square root of the forcing amplitude. In its dimensional form, Eq. (2.31) can be written:

$$\gamma_e = c_1 w_{\max} + c_2 w_{\max}^2, \tag{2.33}$$

with γ_e the prescribed base acceleration (see Eq. (2.18)), $w_{\max}$ defined in the previous section and with c_1 and c_2 two coefficients that can be extracted from measurements. By identifying Eq. (2.31) with Eq. (2.33) and using Eqs. (2.2), (2.8) and (2.20), one obtains:

$$\xi = \frac{R\Phi(\bar{x}_m)}{8\pi^2 f_k^2} c_1, \quad \text{and} \quad \hat{\eta} = \frac{R\Phi(\bar{x}_m)}{8\pi^2 f_k^2} L \frac{\Phi(\bar{x}_m)}{\Phi_{\max}} c_2, \tag{2.34}$$

with f_k the natural frequency of the considered mode of the structure (measured at low amplitude). One can notice that because $R\Phi(\bar{x}_m)$ (see Eq. (2.22)) does not depend on the mode shape normalisation, the same property logically holds for $(\xi, \hat{\eta})$. As a consequence, one has two alternatives for the identification.

First, if a structural model is known for the structure, one can calculate $\Phi(\bar{x}_m)$ and R from Eqs. (2.6) and Eq. (2.22) respectively. This leads to a model-based identification technique, which is henceforth referred to as "M2a", for which one has to measure the amplitude of the structure at a given point $\bar{x}_m$, at resonance, for several values of the input acceleration γ_e. Then, c_1 and c_2 are identified by a quadratic fit of the experimental points $\gamma_e = f(w_{\text{res}})$ and Eq. (2.34) gives the value of $(\xi, \hat{\eta})$.

Second, if no structural model is available, estimating $\Phi(\bar{x}_m)$ and R experimentally is not straightforward. To overcome this difficulty, it is possible to first estimate ξ with a very low amplitude measurement (through method M1 for instance) and then use it to estimate $\hat{\eta}$ using the identified c_1 and c_2:

$$\hat{\eta} = \frac{c_2}{c_1} L \frac{\Phi(\bar{x}_m)}{\Phi_{\max}} \xi. \tag{2.35}$$

As in method M1, all quantities $(c_1, c_2, L, \Phi(\bar{x}_m)/\Phi_{\max})$ can be estimated through simple experiments. This method will be referred to as "M2b" from now on.

2.3.3 Higher order damping models

A number of nonlinear damping models exist in the literature, as presented in the introduction. To investigate their effects on the dynamics with relation to the quadratic model introduced in the previous section, two additional damping models are considered here. For this, Eq. (2.23) becomes:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q + \nu_1 \dot{q}|\dot{q}| + \nu_2 \dot{q}^3 + \nu_3 q^2 \dot{q} + \Gamma q^3 + \Pi(\ddot{q}q^2 + \dot{q}^2 q) = F\cos(\Omega\bar{t}). \tag{2.36}$$

It corresponds to the oscillator equation studied in the previous section, Eq. (2.23), with a generic dimensionless forcing F and two additional nonlinear damping terms, $\nu_2\dot{q}^3$ and $\nu_3\dot{q}q^2$. The former is introduced in [Gottlieb and Habib 2012] in addition to the linear damping and aerodynamic drag damping to model the effect of air on a forced spherical pendulum. The latter models the viscoelasticity effects for plates in [Amabili 2018a]. The forced response of the system in the steady state can be obtained with the method of multiple scales (cf. Appendix B.2) from:

$$\Omega - \omega_0 = \frac{(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)}{8\omega_0} a^2 \pm \sqrt{\frac{F^2}{4\omega_0^2 a^2} - \omega_0^2 \left(\xi + \frac{4\nu_1}{3\pi} a + \left[\frac{3\omega_0\nu_2}{8} + \frac{\nu_3}{8\omega_0}\right] a^2\right)^2}; \tag{2.37}$$

in which the equivalent damping term is now:

$$\xi_{\text{eq}} = \xi + \eta_1 a + (\eta_2 + \eta_3) a^2 \tag{2.38}$$

with $\eta_1 = 4\nu_1/(3\pi)$; $\eta_2 = 3\omega_0\nu_2/8$ and $\eta_3 = \nu_3/(8\omega_0)$.

One can notice that Eq. (2.37) can also be applied to a nonlinear mode of a non-symmetric structure with quadratic nonlinearities, such as a laminated plate or a shell with geometrical nonlinearities. In this case, $\Pi = 0$ and the sign of Γ gives the hardening / softening behaviour of the considered nonlinear mode. There is no need for an additional quadratic term in Eq. (2.36) since a normal form reduction, restricted to only one invariant nonlinear mode [Touzé et al. 2004; Denis et al. 2018]), shows that a single cubic term embeds the effects of all the non-resonant quadratic terms of the classical modal expansion.

As compared to the drag-like damping term associated to η_1, linear in a, the two additional damping terms linked to (η_2, η_3) are one order higher, quadratic in a. Moreover, it appears that for a given structure, it seems difficult to distinguish the contributions in terms of damping of ν_2 or ν_3, since their effects are additive and appear at the same order. In the present study, those two additional higher order damping terms will not be considered since the experimental results (figures 2.5(c), 2.7(c), 2.8(c), 2.9(c,e)) show that the equivalent damping is well described by a linear function of a, with obviously no quadratic dependency. Consequently, the most pertinent damping term to include is $\nu_1|\dot{q}|\dot{q}$ for the tested structures of this article.

2.3.4 Numerical validation of the identification methods

In this section, we test the validity of the identification methods proposed in subsection 2.3.2. A linear oscillator and a Duffing oscillator – both appended with an aerodynamic drag damping term and both harmonically forced – are used to assess the methods' validity when applied to the numerical simulations of these oscillators. The former could model roughly the first mode of a cantilever beam as it is only slightly hardening. The latter is a simple model of more pronounced geometric nonlinearities effects. The reference numerical simulations are performed using the MANlab software [Cochelin et al. 2007; Lazarus and Thomas 2010; Guillot et al. 2019], which combines periodic solution continuation with the harmonic balance method. More details have been postponed in Appendix B.3.

2.3.4.1 Linear oscillator with aerodynamic drag damping

The first oscillator tested is:

$$\ddot{q} + 2\xi\dot{q} + q + \nu\dot{q}|\dot{q}| = F\cos(\Omega\bar{t}). \tag{2.39}$$

The oscillator's nondimensional natural frequency has been set to 1; it would have been possible to reduce this equation to only 2 independent variables - (ξ, F) or (ξ, η) - by rescaling Eq. (2.39) in amplitude. This would have led to universal results, however, in order to simulate the beams tested experimentally, we chose to keep this formulation with these three coefficients. Indeed, since the damping depends on the vibration amplitude, the simulated frequency responses have (dimensionless) amplitudes in the range similar to that obtained experimentally, thanks to the tuning of the forcing amplitude.

To estimate the accuracy of our identification methods, we work on the simulated frequency responses of Eq. (2.39), plotted in dots (and captioned "MANlab") in Fig. 2.1(a) with the implemented values for the coefficients $(\xi, \hat{\eta}) = (0.001, 0.01)$, through $\nu = 3\pi\hat{\eta}/4$. The phase of the frequency responses is plotted in the graph of Appendix B.4. We use

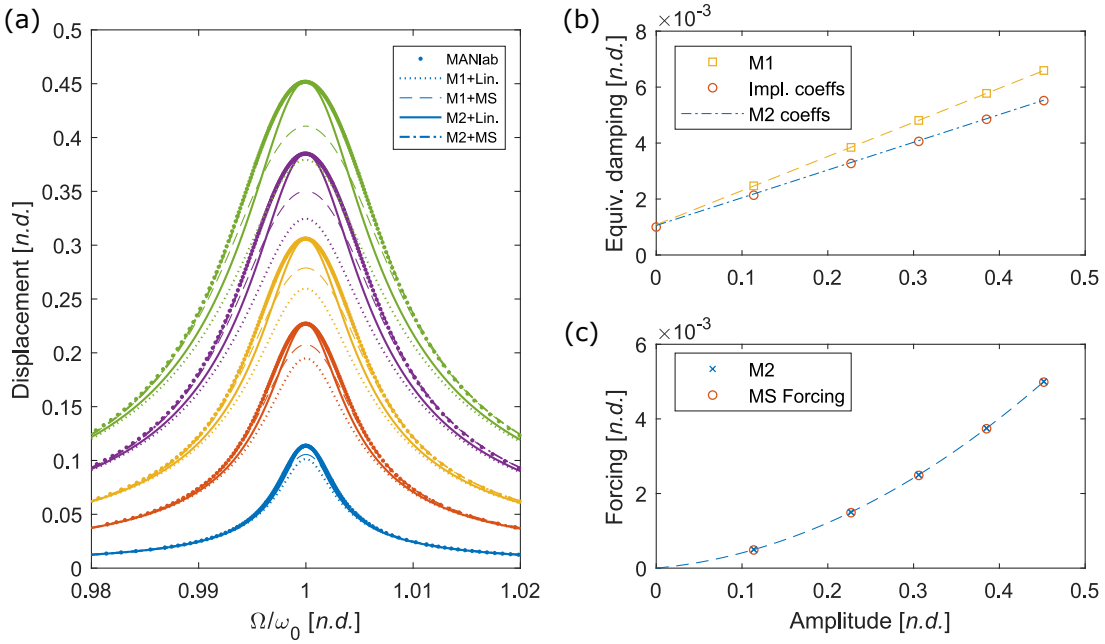


Figure 2.1 – Validation of the identification methods, without geometric nonlinearities. (a) Simulated and reconstructed frequency responses using M1 and M2 combined with a linear or a multiple scales model, (b) Illustration of M1 method, with identified ξ_{eq} values in squares and the fit (dashed line), to be compared with the ξ_{eq} values calculated with (i) the implemented coefficient values (ξ=0.001, $\hat{\eta}$=0.01) in circles and (ii) the coefficients identified using M2a (dash-dotted line), (c) Illustration of M2 method (crosses), with the MS Forcing calculated with Eq. (2.31) and implemented damping coefficients (circles).

these frequency responses to test successively M1, M2a and M2b. First, following M1, we estimate ξ_{eq} using the half-power bandwidth method and plot it with yellow squares in Fig. 2.1(b), as a function of the amplitude at resonance a_{res}. This plot also shows with red circles the different values of ξ_{eq} computed with the implemented values $(\xi, \hat{\eta})$. Following Eq. (2.30), a linear fit gives $(\xi, \hat{\eta}) = (1.08\ 10^{-3}, 1.22\ 10^{-2})$ estimated by the M1 method. Whereas the value of ξ is well recovered, the value of $\hat{\eta}$ is slightly overestimated, which is qualitatively observed in Fig. 2.1(b) since the slopes of the two lines are different. Then, we also tested M2a and M2b by plotting F as a function of a_{res} (Fig. 2.1(c)) and estimating $(\xi, \hat{\eta}) = (1.05\ 10^{-3}, 0.99\ 10^{-2})$ and $(\xi, \hat{\eta}) = (1.08\ 10^{-3}, 1.02\ 10^{-2})$ respectively, with a quadratic fit (Eqs. (2.33), (2.34) and (2.35)). In this latter case, the identifications are much more precise.

Once these coefficients are obtained, one can reconstruct the frequency responses for the five different dimensionless forcing amplitudes (differentiated by colours) on Fig. 2.1(a). We use 2 different models for the reconstruction: a linear model ("Lin") for which we plot the modulus of the following complex function $1/(1 - \Omega^2 + 2i\xi_{\text{eq}}\Omega)$, with $\xi_{\text{eq}} = \xi + \hat{\eta} a_{\text{res}}$, and the MS model of Eq. (2.27). In both cases, the values of $(\xi, \hat{\eta})$ are those estimated with M1 and M2a. All resulting curves are plotted in Fig 2.1(a). The frequency responses using the M1-coefficients underestimate the amplitude at resonance (dotted and dashed lines), which is logical since the damping is overestimated, Fig 2.1(b). Furthermore a linear model using M2a-coefficients does not correlate exactly for high amplitude vibrations (solid lines) contrary to the multiple scales solution, that seems to fit quite well the numerical solution in the frequency range considered (dash-dotted lines).

Overall, this numerical analysis shows that the resonant amplitude-based method seems

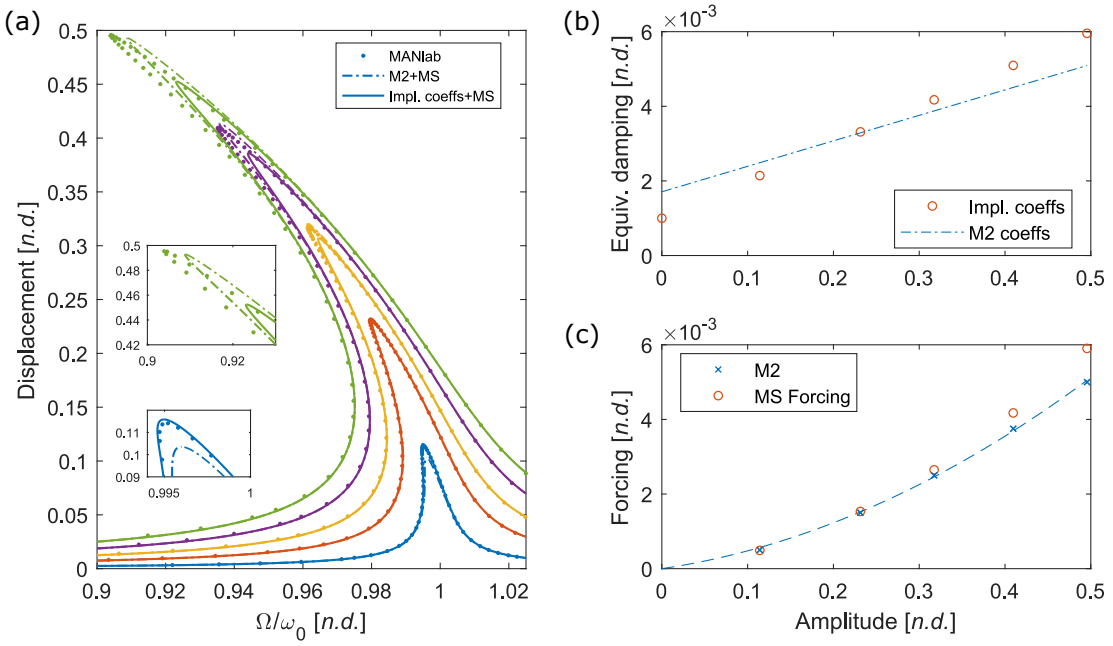


Figure 2.2 – Validation of the second identification method, with geometric nonlinearities. (a) Simulated frequency responses with Γ=-1, superimposed with the frequency responses reconstructed with the damping coefficients identified using M2a or directly the implemented coefficients (ξ=0.001, $\hat{\eta}$=0.01), (b) Comparison of the ξ_{eq} obtained with M2 and the implemented values, (c) Illustration of M2 (crosses), with the forcing calculated with Eq. (2.31) and the implemented damping coefficients (circles).

to be suited for the identification of our systems, and the multiple scales model is a good reconstruction method.

2.3.4.2 Duffing oscillator with aerodynamic drag damping

The structures of interest do not exhibit a significant nonlinear behaviour due to geometric nonlinearities when excited on their first mode (section 2.5). On other modes or structures with more pronounced geometrical nonlinearities, jump phenomena are observed in the frequency responses, which prevent the application of the half-power bandwidth method, thus making the damping identification more complex. It is possible to apply the method at very low amplitude and then use a linear model damping, but this method does not yield optimal results at large amplitude, as the response is overestimated. An example can be found in the experimental frequency responses shown in [Thomas et al. 2003, 2007] for plate and shell vibrations. The proposed identification method M2a may still be applied though, and its validity can be tested numerically. For this purpose, we consider the following oscillator which includes a cubic term:

$$\ddot{q} + 2\xi\dot{q} + q + \nu\dot{q}|\dot{q}| + \Gamma q^3 = F\cos(\Omega\bar{t}). \tag{2.40}$$

Re-scaling this equation can reduce the number of independent variables to 3.

The same process used for the oscillator of the previous section is applied here. The corresponding results are displayed on Fig. 2.2, with the same implemented damping coefficients $(\xi, \hat{\eta}) = (0.001, 0.01)$ and with Γ=-1. These simulations show that the method is still relevant for structures displaying geometric nonlinearities effects, although the equivalent

damping reconstructed with the identified coefficients (dash-dotted line, with $(\xi, \hat{\eta})$=(1.7 10^{-3},6.8 10^{-3})) does not match as well the equivalent damping calculated with the implemented coefficients (solid line) Fig 2.2(b). Indeed, using the identified coefficients on the reconstructed frequency responses (M2a+MS) yields good results at high amplitude Fig 2.2(a). On the other hand reconstruction using the MS model with the implemented coefficients is accurate for amplitudes up to $0.3a$, but underestimates the amplitude beyond that. Overall, the reconstructions with the identified coefficients fit better to the "real" solutions. This standout result is due to the fact that Eq. (2.31) is not accurate for high amplitudes, see Fig. 2.2.(c), which is directly related to the validity limit of first order approximation in the multiple scales .

In addition, MANlab also gives the amplitude of the other harmonics of the solution. In accordance with the theory and the multiple scales development (see Appendix B.2), the amplitudes of the constant value and the second harmonic of the solution are *de facto* null (5 orders of magnitude lower, near the float resolution). The plot is not reproduced here for synthesis purpose. For the oscillator of the previous section, the third harmonic amplitude was also limited; whereas the amplitude of Eq. (2.40) solution's third harmonic is more and more important as the forcing increases, due to the geometric nonlinearities. This may explain the various degrees of accuracy of the MS model, as the approximation of a solution in the form of a pure sine function is verified or not.

However, the correlation for these reconstructions is in much better agreement than a strictly linear damping model, for the values of the damping coefficients that were chosen in the range obtained experimentally. Indeed, for such a model, the amplitude at resonance is inversely proportional to the damping, and since the equivalent damping at high amplitude is around five times the damping at low amplitude Fig. 2.2.(b), this would lead here to an overestimation of the response at high amplitude by a factor 5.

2.4 Experimental setup

The identification techniques proposed in subsection 2.3.2 are used to identify the damping coefficients of several structures, presented in subsection 2.4.1. The whole measurement process is described in subsection 2.4.2.

2.4.1 Specimens

The different structures tested are presented in Fig. 2.3. A photograph of the maximum amplitude obtained is presented as well when it is significant.

The first structure tested is a steel ruler, as it is readily available and easy to measure, which allows validating the identification method and the set-up. Figure 2.3(a) displays the ruler clamped at the desired length, set on the shaker, ready for the measurement, with an accelerometer at its base and a vibrometer targeting the measuring point. Figure 2.3(b) shows the beam vibrating in profile. The trace is in light green and the maximum positions of the beam are highlighted. The second tested structure is a micro beam, hereinafter referred to as μ-beam, made of SU-8 polymer (Figs. 2.3(c,d)). It has a comparable width-to-thickness ratio with the steel ruler. Its testing helps determining the influence of material and scale on damping. A similar set-up is used, however, for the present μ-beam and all the other micro-structures introduced below, the clamping is made by gluing them

Structure	L	h	b
Steel ruler	130	0.5	1.3
μ-beam	12	0.08	1.6
L-beam	8	0.08	0.08
WS	8	0.08	0.08
Wing	8	0.08	0.08

Table 2.2 – Characteristic geometric parameters of the tested structures (Length L, thickness h and width b, in millimetres).

on a flat surface: the head of a given countersunk screw that has a first axial mode much higher than the frequency range of interest.

The other tested structures are micro-scale beam assemblies which are ever more looking alike a wing of our VWNAV. The first beam assembly tested is the simplest possible: it is 2 beams which are assembled perpendicularly (the resulting "L" shape justifies the notation L-beam). Figure 2.3(e) presents the L-beam (and its gluing surface) and an adjacent 1-cent coin, which serves as a scale. The second beam assembly tested is a structure resembling our VWNAV, but without membrane [Faux et al. 2018]. By testing this structure and a "real" VWNAV wing, it is possible to estimate the contribution to damping of the membrane. This "wing skeleton" structure (shortened to "WS") is presented on Figs 2.3(f,g). Each trace of its beams is coloured in light blue, green and pink respectively, and the maximum positions of each beam are again highlighted. The last tested structure is a wing (or simply W), sampled from an existing prototype. Its characterisation can serve the design of future prototypes. Fig. 2.3(h) presents the wing set on the shaker.

The main geometric parameters are detailed in Table 2.2. The recurring characteristic length of 8 millimetres has been chosen specifically for comparison purposes with the VWNAV wing, as well as the cross-sections' geometry.

2.4.2 Measurement process and materials

2.4.2.1 Experimental set-up

A stepped-sine experiment is performed with the set-up presented in Fig. 2.4. The excitation amplitude is set to a given value of acceleration that is maintained constant throughout the measurement to establish a frequency response. The computer generates a signal that a digital-to-analogue converter (DAC) feeds to a power amplifier to activate an electromagnetic shaker (Brüel & Kjær 4808). The base acceleration is measured with an accelerometer and is looped back into a controller to counter the interaction of the structure with the shaker, avoiding force drops off near resonance [Varoto and Oliveira 2002]. The displacement of the beam is measured with a laser Doppler vibrometer (Polytec PSV400 scanning laser vibrometer). Thanks to an ad hoc lense system, the laser beam focus can be made compatible with the structure's small geometry; one can see the laser spot in Figs. 2.3(a,c,d). The amplitudes of the first harmonics of the beam's velocity and base acceleration signals are then extracted using a homodyne detection in the steady state. Then the relative displacement can be calculated and plotted for each tested frequency.

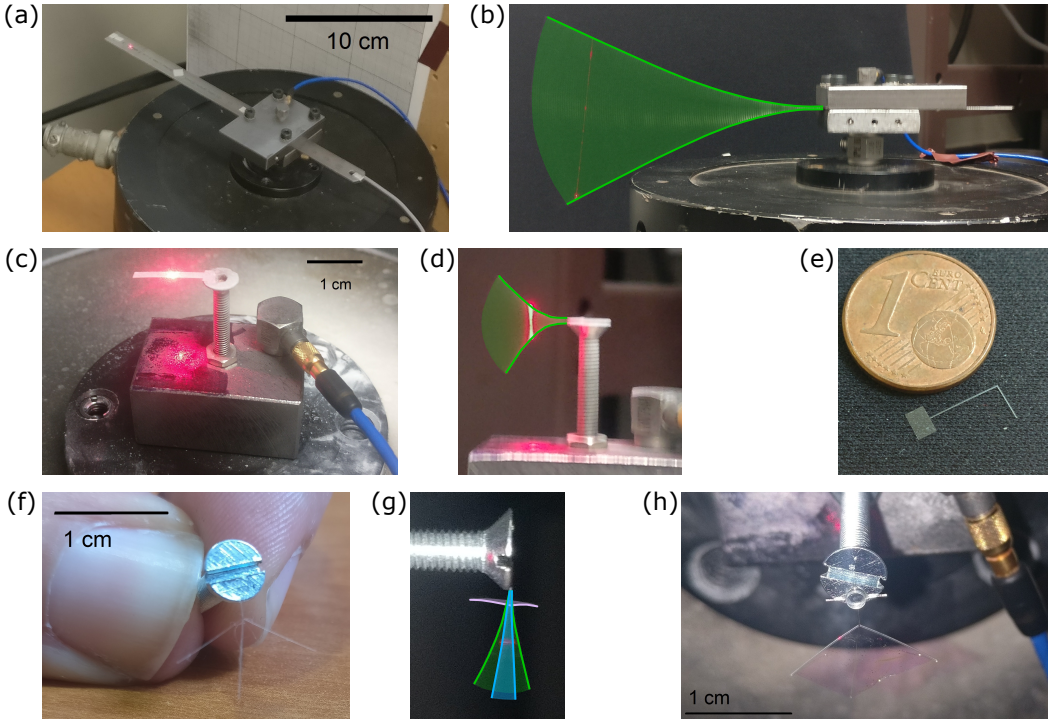


Figure 2.3 – Photographs of tested specimens. (a) Steel ruler at rest, (b) Maximum amplitude obtained for steel ruler, (c) μ-beam at rest, (d) Maximum amplitude obtained for the μ-beam, (e) L-beam at rest, (f) WS (Wing skeleton) at rest, (g) Maximum amplitude obtained for WS, (h) Wing at rest.

2.4.2.2 Homodyne detection

Let $s(t)$ be a given periodic time signal, that one can write $s(t) = s_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(k\omega t + \phi_k)$. We are searching for a_1 and ϕ_1, the amplitude and phase of the first harmonic of that signal (the calculation may be applied to any harmonic). We first multiply $s(t)$ by a cosine and a sine function at the frequency of the first harmonic: $s_c(t) = s(t)\cos(\omega t)$, $s_s(t) = s(t)\sin(\omega t)$. By calculating the mean of each product $\langle s_c(t)\rangle$ and $\langle s_s(t)\rangle$, one can show that $\langle s_c(t)\rangle \approx \sin(\phi_1)\, a_1/2$, $\langle s_s(t)\rangle \approx \cos(\phi_1)\, a_1/2$, if the duration T of the mean is large compared to the largest time period of the signal (i.e. $T \gg 2\pi/\omega$), and the phase is not random. Amplitude and phase are then:

$$a_1 \approx 2\sqrt{\langle s_c(t)\rangle^2 + \langle s_s(t)\rangle^2} \quad \text{and} \quad \phi_1 \approx \arctan\left(\frac{\langle s_c(t)\rangle}{\langle s_s(t)\rangle}\right). \tag{2.41}$$

2.4.2.3 Relative displacement calculation

The displacement w_r is obtained by subtracting the displacement of the base w_e to the total displacement w, according to Eq. (2.16). Using the homodyne detection (detailed in 2.4.2.2) for the first harmonics of the vibrometer signal and the accelerometer signal (respectively noted $v_{\text{vib}}(t) = V\cos(2\pi f_e\, t + \psi_v)$ and $a_e(t) = \gamma_e \cos(2\pi f_e\, t + \psi_a)$) and then integrating them gives:

$$w(t) = \frac{V}{2\pi f_e}\cos(2\pi f_e\, t + \psi_v - \pi/2), \quad \text{and} \quad w_e(t) = \frac{\gamma_e}{(2\pi f_e)^2}\cos(2\pi f_e\, t + \psi_a - \pi). \tag{2.42}$$

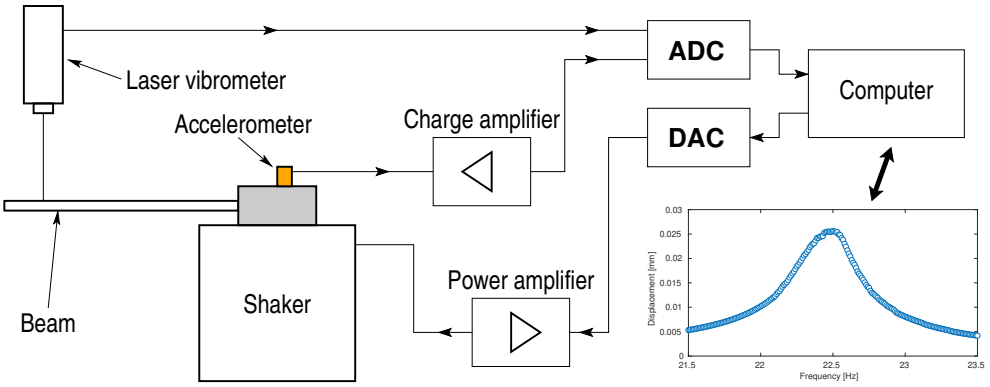


Figure 2.4 – Experimental setup for the measurement of the frequency response curves.

Denoting by W and α the amplitude and phase of the first harmonic of the seeked relative displacement and applying Eq. (2.41) yields:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\pi f_e}\sqrt{V^2 + \frac{\gamma_e^2}{4\pi^2 f_e^2} - \frac{V\gamma_e}{\pi f_e}\cos\left(\psi_v - \psi_a + \pi/2\right)} \\ \alpha &= \arctan\frac{2\pi\, V f_e \sin\left(\psi_v - \pi/2\right) - \gamma_e \sin\left(\psi_a - \pi\right)}{2\pi\, V f_e \cos\left(\psi_v - \pi/2\right) - \gamma_e \cos\left(\psi_a - \pi\right)}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

This process is crucial as the beam total displacement is not measured at the tip to limit the effect of axial displacement at very large transverse amplitude. Therefore, it presents an antiresonance that is marked increasingly with a decreasing abscissa along the beam's length.

2.4.2.4 Data processing for identification and reconstruction

A synoptic description of the data processing is the following:

1. Plot the frequency response of the relative displacement for all tested acceleration amplitudes
2. Plot γ_e as a function of maximum amplitude $w_{\max}$
3. Extract the polynomial coefficients of the fitting curve
4. Extract ξ and $\hat{\eta}$, either using
   - Eq. (2.34), i.e. M2a
   - M1 to identify ξ, and Eq. (2.35) to extract $\hat{\eta}$, i.e. M2b
5. Reconstruction of the frequency responses either using
   - the MS model
   - the linear model

2.5 Experimental results

For all tested structures, the materials properties were determined individually. With the mass of the samples (obtained with a precise balance) and their volume (calculated), one can calculate the density ρ: for the ruler's steel and SU-8, it led to $\rho_S = 7920$ kg.m^{-3} and $\rho_{\text{SU-8}} = 1290$ kg.m^{-3} respectively. Assuming a perfect clamped boundary condition gives Eq. (2.8) for the natural frequencies. By adjusting the slope of the theoretical versus analytical frequencies of the first four modes of the cantilever beams, we find the Young's modulus of the tested beam experimentally (we also assume it does not vary between the different fabricated structures). The identified values of Young moduli are included in Table 2.1. Besides, for all experimental frequency responses processing, a smoothing filter was used to minimise the impact of artefacts of measurements on the identification. The filter used is the Savitzky-Golay algorithm, (Matlab *sgolayfilt* function from the Signal Processing Toolbox). The only plot displaying filtered data is the comparison of the identification methods and reconstruction models on experimental frequency responses (Fig. 2.6), and mentions it explicitly in the caption: -(filt). As explained in section 2.3, since the values of the identified coefficients c_1 and c_2 depend on the scaling, they are not given in this paper. However the identified values of ξ and $\hat{\eta}$ (directly related to c_1 and c_2) are detailed in Table 2.3 for all tested structures.

2.5.1 Cantilever beams

Figure 2.5 presents the identification for the macroscale steel ruler of Figs. 2.3(a,b). Very large amplitudes have been tested, up to 0.3 times the length of the beam, more than half of it for the peak-to-peak amplitude. A few of the measured frequency responses near the first mode are plotted in Figs. 2.5.(a,b). The hardening behaviour predicted analytically is perceptible, but not significant. Furthermore, if the damping was linear, the phase would be independent of the forcing amplitude. In Fig. 2.5.(b), the phase variation at the vicinity of the resonance is reduced – it becomes more and more "flat" – as the forcing increases. This effect is also observable in Appendix B.4, with the plot of the amplitude and the phase of the simulated frequency responses. This effect was noticed in the study [Ramananarivo et al. 2011] as well. Figs 2.5.(c, d) show the fits for the two identification methods M1 and M2a. Both can be well described by a linear or quadratic function of a, depending on the method used.

Figure 2.6 is analogous to Fig. 2.1 with data from experiments, i.e. the different identification methods and reconstruction models are compared on experimental data. Similar observations can be made on the identification techniques: the half-power bandwidth method M1 combined with a linear model does not yield the best correlation, whereas the combination of the second identification technique M2a (or M2b) and the multiple scales model should be the preferred method.

Figures 2.7(a,b) display the frequency responses in the vicinity of the first mode of the micro beam shown on Figs. 2.3(c,d). Very large amplitudes were obtained, with the maximum dimensionless amplitude around 0.4 times the length of the beam, which corresponds to 80% in peak-to-peak amplitude. Figs. 2.7(c,d) illustrate the identification methods 1 and 2 respectively. As M1's accuracy depends on the quality of the frequency response, and the last two frequency responses function present higher experimental error, only the four first points were used for the fit. One can verify that the last two points

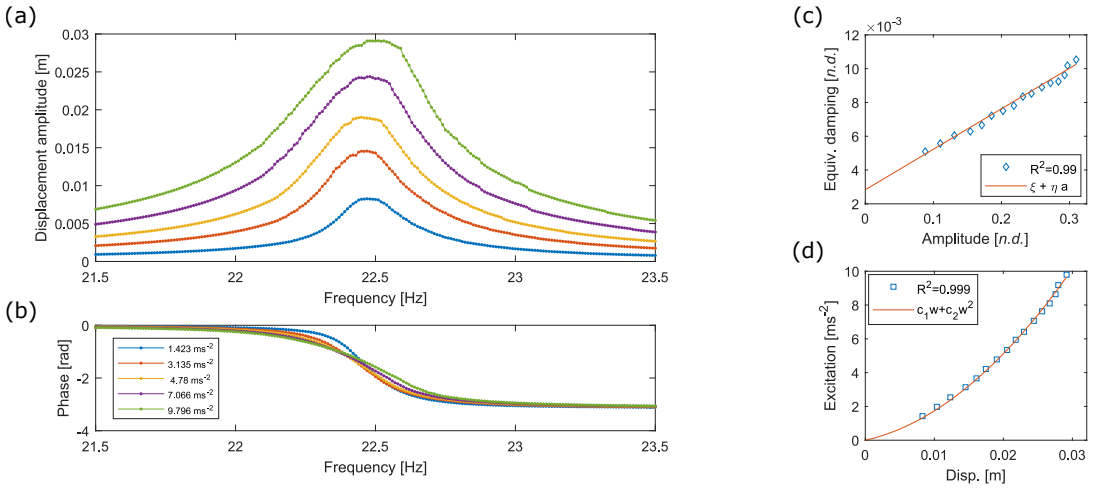


Figure 2.5 – Damping coefficients extraction for the ruler's first mode. (a) Measured frequency responses, (b) Measured phase of the frequency responses, (c) Illustration of M1 applied to the ruler, (d) Illustration of M2a applied to the ruler. R^2 gives the coefficient of determination to confirm the fit.

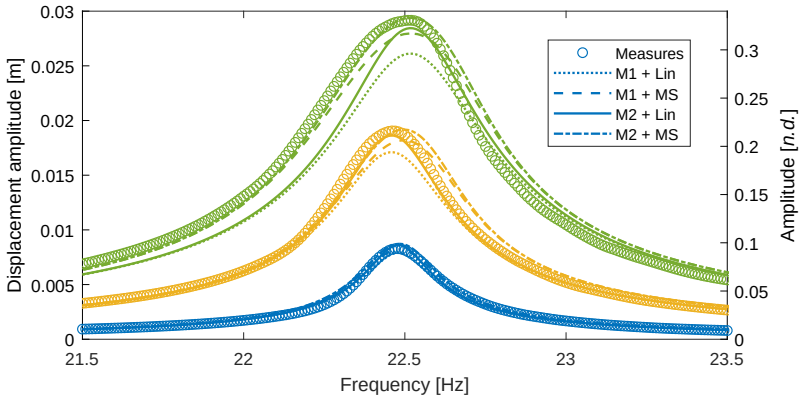


Figure 2.6 – Experimental validation of identification methods and models for a steel ruler-(filt).

do not represent a change in the damping behaviour by examining the results of M2 in Fig. 2.7(d). The reconstructed frequency responses displayed Fig. 2.7(a) use the second identification method (M2a) and the multiple scales model. The correlation is satisfactory up to very high amplitudes.

2.5.2 Beam assemblies

This section addresses the vibratory response of the beam assemblies shown on Figs. 2.3(e-h). As explained in section 2.3.2.2, we need a structural model to apply M2a identification. Since, as it will be shown, the frequency responses of those structures do not show any hardening or softening behaviour, a linear structural model should be accurate enough (Fig. 2.1.(a)), as the one presented in [Faux et al. 2019]. Some discrepancies in the natural frequencies where observed between the measured ones and the ones from the model, attributed to unavoidable imperfections in the geometry and the boundary conditions. Therefore, we prefer here to use the M2b identification method, which does not need any

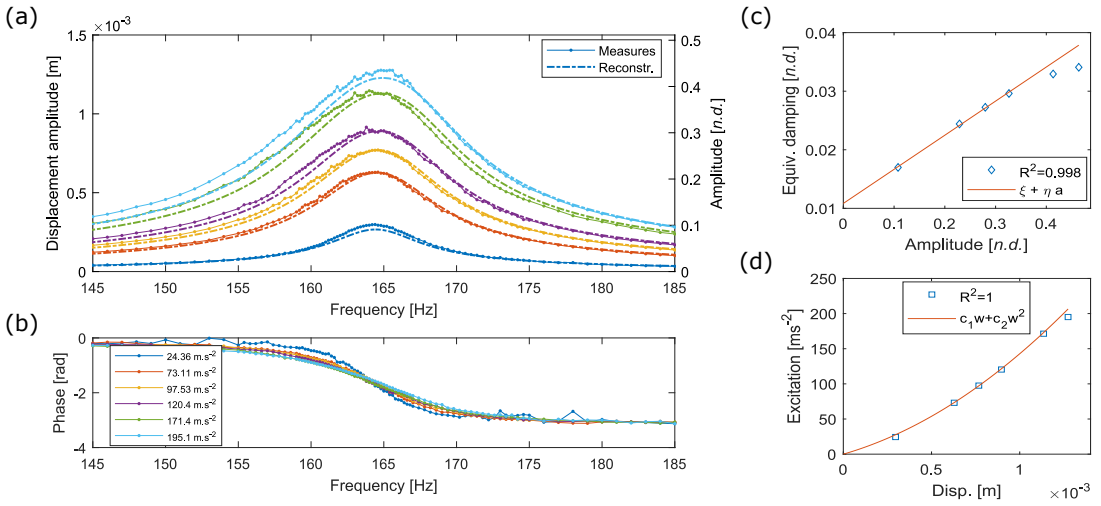


Figure 2.7 – Measurement, identification and reconstruction for μ-beam (mode 1). (a) Measured and reconstructed frequency responses in both dimensional and dimensionless scales, (b) Measured phase of the frequency responses, (c) M1 illustration, (d) M2 illustration.

structural model of the structure.

Besides, the L-beam and the wing skeleton displayed in-plane vibrations that caused a loss of focus of the vibrometer, thus preventing measurements at large amplitude. This explains the weak maximum measured amplitude obtained on the graphs when compared to the photograph Fig 2.3.(g). This may be related to the choice of a square cross-section for these structures [Pai and Nayfeh 1990].

We first consider the L-shaped beam of Fig. 2.3(e), with the main beam of length 8 millimetres and the perpendicular segment of 4 millimetres. The measured and reconstructed frequency responses are displayed on Figs. 2.8(a,b), with the identifications illustrated in Figs. 2.8(c,d). Again, it is shown that the proposed identification method allows to obtain a good correlation between the measured and reconstructed curves which validates its use for the case of single-mode responses of beam assemblies.

Then, we consider the wing skeleton and NAV wing of Figs. 2.3(f,g,h). As compared to the previous structures, these have been designed to have the first two modes very close in frequency [Faux et al. 2018], which is clearly seen on the frequency responses, Figs. 2.9-2.10(a). Therefore, the structural response at frequencies between the two natural frequencies includes the contribution of both modes due to the frequency closeness of the modes, which invalidates the single-mode hypothesis of the damping model proposed here. To circumvent this problem, it could be possible to perform a study of the interaction between these degrees of freedom, but this is out of the scope of this article, as deriving a multi-mode model including a quadratic damping coupling is not straightforward, mainly because of the non-direct modal expansion of the velocity modulus (see Appendix B.1). For these structures, the identification methods have been tested separately on the two resonances considering two separate oscillators. In the immediate vicinity of both resonances, the reconstructed frequency responses of the WS and NAV wing match quite well the measured frequency responses, which would indicate that the damping coefficients are well captured and the single-mode approximation holds at resonance. In addition, the effect of nonlinear damping may be seen clearly on Figs. 2.9(b,f).

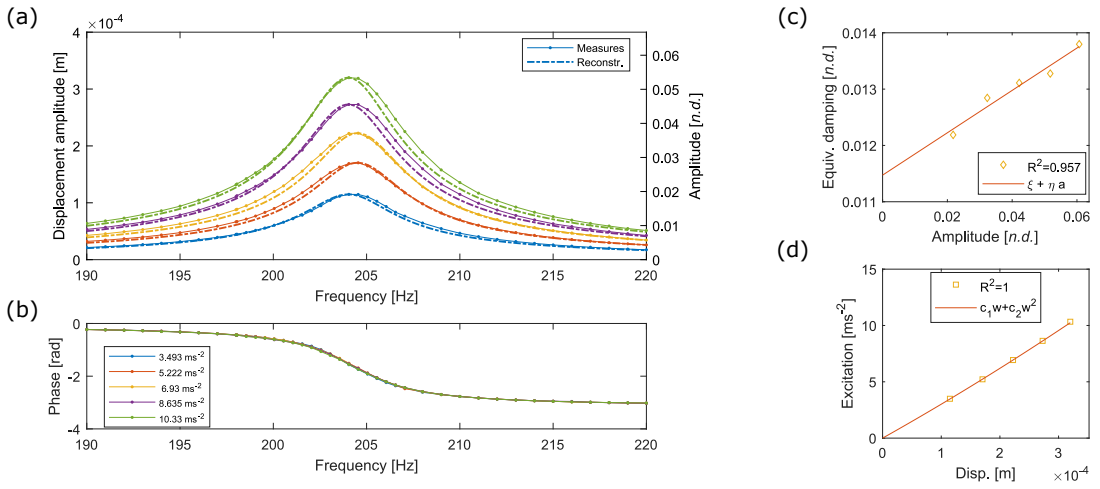


Figure 2.8 – Measurement, identification and reconstruction for L-beam (mode 1). (a) Measured and reconstructed frequency responses in both dimensional and dimensionless scales, (b) Measured phase of the frequency responses, (c) M1 illustration, (d) M2 illustration.

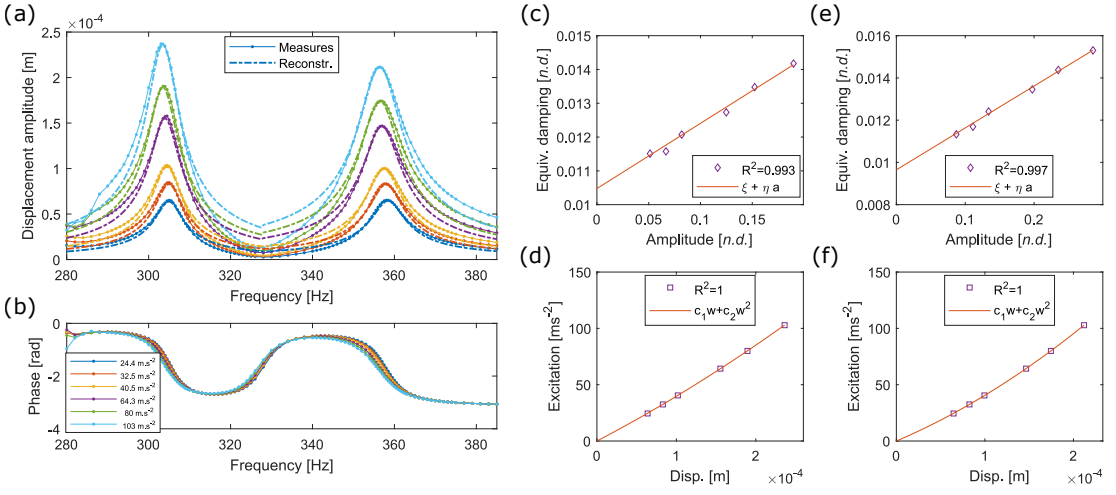


Figure 2.9 – Measurement, identification and reconstruction for the Wing skeleton (bending and twisting modes). (a) Measured and reconstructed frequency responses in the vicinity of both modes, (b). Measured phase of the frequency responses, (c) M1 on twisting mode, (d) M2 on twisting mode, (e) M1 on bending mode, (f) M2 on bending mode.

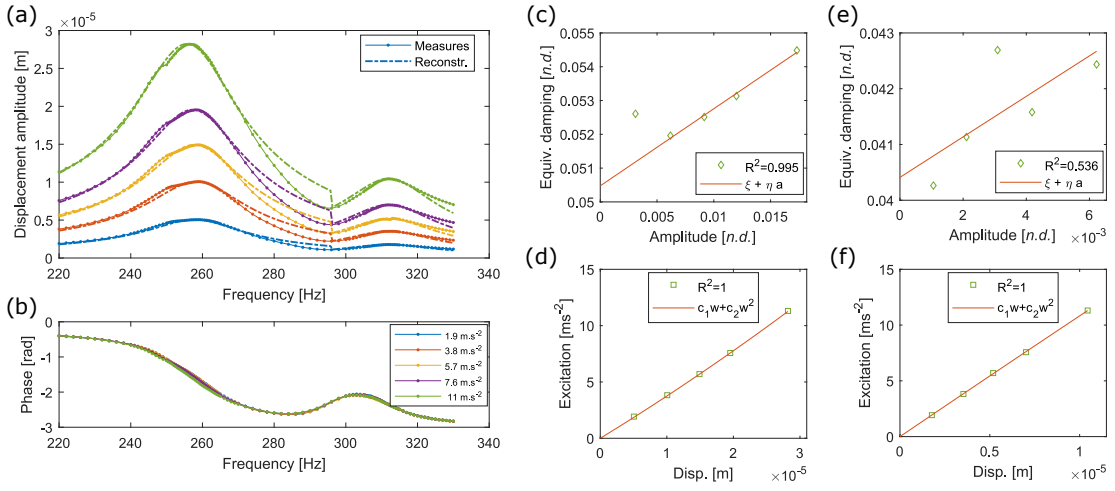


Figure 2.10 – Measurement, identification and reconstruction for the "true" wing (bending and twisting modes). (a) Measured and reconstructed frequency responses in the vicinity of both modes, (b) Measured phase of the frequency responses, (c) M1 on bending mode, (d) M2 on bending mode, (e) M1 on twisting mode, (f) M2 on twisting mode.

Last, for the specific case of the wing removed from a prototype of our VWNAV, one may notice that the two resonances appear for frequencies lower than in the case of the wing skeleton. This may be due to the added mass effect of the surrounding fluid. For the first mode, the first point has been discarded from the fit to improve its quality. The apparent overestimation of the damping for this point may be related to the modal combination. Indeed, at low amplitude, the half-power bandwidth of a mode may be impacted by the other mode. For higher amplitudes, this can still be true for the second mode as its peak is lower. Since Eq. (2.35) uses the linear damping coefficient identified with the half-power bandwidth method, which does not yield good results here (Fig 2.10(c, e)), the validity of the damping coefficients identified is not guaranteed. Moreover, the quadratic damping coefficient of the twisting mode was found negative – the displacement amplitude range is very limited, which reduces the significance of the identification. The addition of the membrane strengthens the coupling of the structure with the fluid, which increases the nonlinear coupling between the modes and renders the assumption of single-mode response less valid.

2.5.3 Damping comparison

The measurements led to the identification of various damping coefficients. Figure 2.11 presents the equivalent damping ξ_{eq} reconstructed with Eq. (2.29) and the identified $(\xi, \hat{\eta})$ coefficients, for the various tested structures, on the amplitude range tested. The first conclusion to be drawn is that the SU-8 structures have a higher linear modal damping than the steel ruler. It may be related to the viscoelasticity of the material. Furthermore, one can notice that the structures with larger widths (the cantilevers) have higher aerodynamic damping which is consistent with the aerodynamic force parameters [Bidkar et al. 2009]. The quadratic damping coefficient is also smaller for the wing skeleton's twisting mode than for the bending mode, which would indicate a priori a lower lift generation for the twisting mode. For weakly damped structures, taking into account a quadratic damping

Structure	Macro	μ-beam	L-beam	WS,b	WS,t	W,b	W,t
ξ %	0.26	1.22	1.15	0.78	1.05	5.05*	4.32*
$\hat{\eta}$ %	2.20	3.24	0.80	1.23	1.00	30.6*	*
Re ($L_c = b$)	2.8 10^3	3.1 10^2	2.01	14.6	11.5	0.85	0.31

Table 2.3 – Damping coefficients and Reynolds numbers at maximum measured amplitude for the different modes of the tested structures. (* Damping coefficient values of W have a low confidence).

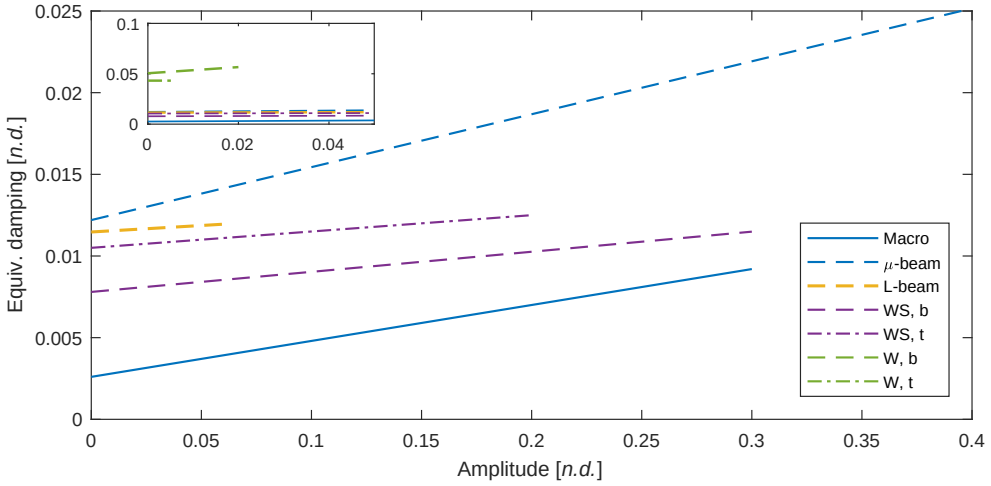


Figure 2.11 – Reconstructed equivalent damping ξ_{eq}, computed with the values identified using M2a (cantilever beams) and M2b (beam assemblies) for the tested modes.

term allows a better correlation, as the equivalent damping varies in the range of tested amplitudes. In the case of the L-beam and the NAV wing second mode, the phase plots (Figs. 2.8, 2.10(b)) do not display a significant dependence on the excitation amplitude, which could be interpreted as a low quadratic damping (with the converse reasoning of section 2.5.1). Hence a linear damping model could be sufficient.

As explained in the previous section, the identification method for the drone wing gives low confidence values. This said, the linear damping coefficient values are localised around 0.04-0.05. It is interesting to note that it is around five times higher than the coefficient in absence of membrane, which was unexpected as the effect of the membrane was believed to increase the quadratic damping coefficient only. It could be due to the limit of the identification method, however the membrane does have an effect even for very small amplitude vibrations, which correspond to the Stokes regime (Re<1), (in which the action of air on the structure is taken into account with a Stokes drag that depends linearly on the velocity [Stokes 1851]). In this regime, the action of air on the structure is then easily translatable into a linear modal damping. Therefore an increase in the linear damping factor may not be absurd.

Conclusion

In this article, we investigated several aspects of a nonlinear quadratic damping term, due to fluid structure interactions, and its application to the large amplitude vibrations of

cantilever highly flexible structures. An initial result was that such a model can be viewed in a certain sense as a classical linear damping model with an equivalent damping coefficient that depends linearly on the amplitude of motion. In order to confer a general meaning to this quadratic damping coefficient, special care was taken to make it dimensionless, so that its influence on the dynamics can be compared from one structure to another one, as it is usually done with a linear damping ratio. It was also demonstrated, in the case of the considered structures, that this model was both necessary – since the equivalent damping values vary significantly in the range of tested amplitudes – and sufficient compared to other nonlinear damping models – as the experimental equivalent damping is well described by a line function of the displacement amplitude.

We also proposed and tested original identification techniques for experimental estimation of the linear and quadratic modal damping coefficients. These techniques are applicable to single-mode responses only, therefore for structures with a weak fluid-structure interaction. A first technique is based on the linear damping model; it uses the half-power bandwidth method to identify the two damping coefficients. The model gives rise to another original technique that is based on the measurement of the amplitude at resonance of the considered mode, for several amplitudes of excitation in the steady state. Two versions were presented: (a) a fully analytical version that uses the structural model, and that has the advantages of being self-sufficient and applicable to structures displaying geometric nonlinearities, and (b) a hybrid version that uses the half-power bandwidth method to determine the linear modal damping factor. These techniques were validated numerically thanks to simulations in the frequency domain as well as with several experimental tests, showing that one of them has a better accuracy. Because our identification technique is based on the measurement of the system nonlinear frequency response in the vicinity of a given resonance, recent experimental continuation techniques (see [Denis et al. 2018] and reference therein) could be more convenient than the stepped sine experiments used in the present study. Their investigation is left for further studies.

Finally, our quadratic air flow model was theoretically compared to other nonlinear damping models of the literature – all cubic – showing that in the case of a complete model, the equivalent damping ratio was a quadratic function of the vibration amplitude. In our experiments, it was shown that the quadratic order was the leading one, since the damping ratio was found linear with respect to the amplitude, demonstrating that our fluid structure damping was predominant over other sources of damping. This was probably due to the cantilever boundary conditions of our structures, which favours their high flexibility and thus very high amplitude displacements for low driving forces. For more constrained structures such as plates and shells, the classical bending / membrane coupling gives rise to geometrical nonlinearities for lower amplitudes of displacement and viscoelastic effects have been identified as the main source of nonlinear damping, with a damping term most of the time identified as cubic (see Fig. 7 of [Amabili 2018a] and [Amabili 2018b, 2019]). It could be interesting to study and identify on such structures both a quadratic – aeroelastic drag like model – in addition to the viscoelastic one, to experimentally verify the contribution of both effects, confirm and explain the predominance of a viscoelastic cubic damping. This is left for further studies.

Chapitre 3

Aerodynamic force model for nanodrones with flexible wings

Enfin j'ai piloté un Spitfire. Qu'il me semble beau, vivant ! Un chef-d'œuvre d'harmonie et de puissance, même tel que je le vois maintenant, immobile.

P. Clostermann, *Le Grand Cirque*

Ce chapitre présente le calcul de la force aérodynamique générée par une aile animée d'un mouvement similaire à ceux de diptères. S'il est possible d'utiliser des solveurs numériques pour déterminer cette force s'appliquant sur une aile rigide, ce calcul est bien plus compliqué lorsque la structure peut se déformer. C'est pourquoi on introduit une formulation de la force aérodynamique, que l'on peut appliquer à des ailes rigides et flexibles. Le chapitre est rédigé en anglais car il va être soumis prochainement ; le détail du plan ainsi que les principaux résultats sont néanmoins indiqués en français ci-dessous.

La section 3.1 donne l'état de l'art des modèles disponibles pour calculer la force générée par une aile de nanodrone. De nombreux modèles ont été développés, avec divers niveaux de complexité. On distingue notamment ceux qui utilisent un écoulement quasi-stationnaire (étendant les propriétés d'un écoulement stationnaire [1] à chaque instant de l'étude, de ceux qui exploitent des écoulements instationnaires (écoulements dont les paramètres varient en fonction du temps), parfois avec des méthodes approchées. En effet, plusieurs mécanismes de génération de portance instationnaires ont été identifiés en étudiant le vol des insectes – une description exhaustive est proposée dans [Sane 2003]. Certains de ces mécanismes sont ainsi pris en compte par ces modèles. Néanmoins, il n'existe pas de modèle simple entièrement analytique qui intègre le calcul linéaire à la fois de la dynamique d'une structure flexible et de la force aérodynamique générée par cette structure.

On passe en revue dans la section 3.2 ces différentes contributions instationnaires et l'on justifie le fait de ne pas les prendre en compte individuellement. On choisit plutôt, compte tenu des caractéristiques de l'OVMI, d'inclure les effets instationnaires globalement, en proposant une formulation du champ de force aérodynamique tel qu'il soit orthogonal à la surface de l'aile et ce quel que soit l'angle instantané formé entre l'écoulement et la surface. On s'inspire de plusieurs articles [Dickson 2004 ; Nabawy et Crowther 2014, 2017] qui ont démontré cette propriété sur différentes ailes d'insectes. Bien que la formulation proposée soit très proche de celle quasi-stationnaire, on peut considérer que ce modèle

1. Écoulement dont on considère que les paramètres ne dépendent pas du temps et pour lequel le champ de vitesse est nécessairement constant.

est plutôt instationnaire, dans la mesure où une plaque disposée avec un angle d'attaque supérieur à 15° dans un écoulement stationnaire ne vérifie pas cette propriété (à cause du décrochage). La formulation proposée, donnée à l'équation (3.4), s'applique bien à une structure flexible. Par ailleurs, en aérodynamique, les forces de portance et de traînée sont définies comme étant les composantes de la force aérodynamique qui sont respectivement orthogonale et parallèle à la vitesse de l'écoulement. Dans le cas d'une aile battante, comme la direction de cette vitesse varie au cours du temps, les directions de ces forces varient aussi. Par commodité, on définit la force de poussée comme étant la composante de la force aérodynamique selon la direction d'intérêt du mouvement.

L'expression de la force aérodynamique est d'abord utilisée sur des plaques rectangulaires rigides dans la section 3.3. On retrouve, par simulation numérique, des résultats qualitatifs de la littérature, on montre ainsi que :

— la force de poussée évolue de façon monotone avec l'amplitude de battement ;
— la force de poussée est maximale pour une amplitude de rotation d'aile de l'ordre de 45° (la valeur exacte de l'optimum dépend des valeurs des autres paramètres cinématiques) ;
— la phase pour laquelle la force de poussée est maximale dépend de la position de l'axe de rotation de la plaque. On teste le cas où l'axe de rotation coïncide avec l'axe médian de la plaque et le cas où il coïncide avec le bord d'attaque. Dans le premier cas, la phase optimale est exactement de $\pi/2$, quelles que soient les amplitudes de battement et rotation. Dans le second cas, elle varie légèrement entre $\pi/3$ et $\pi/2$, une fois encore selon la valeur des autres paramètres cinématiques.

En outre, on reproduit les conditions d'une étude numérique de mécanique des fluides publiée dans un article étudiant le vol des papillons [Suzuki et al. 2015]. Les évolutions des composantes de la force instantanée calculée par le modèle analytique sont en accord avec celles de cette étude, comme l'illustre la figure 3.12. Nous avons démontré la validité du modèle de force aérodynamique proposé ainsi que sa pertinence au vu de sa simplicité de mise en œuvre.

Puis, dans la section 3.4, l'expression de la force aérodynamique est appliquée à une aile d'OVMI. On décrit tout d'abord l'interpolation du déplacement de la membrane à partir du déplacement de chaque nervure de l'aile, obtenu au préalable par l'outil de calcul de structure détaillé au chapitre 4. Ensuite, cette interpolation est utilisée pour déterminer la vitesse et la normale à la membrane. Les simulations sont effectuées sur une géométrie particulière, qui a été choisie pour les propriétés de ses modes. On montre alors que la moyenne de la poussée générée sur un cycle pour une fréquence d'excitation donnée est maximale lorsque la fréquence d'excitation correspond aux fréquences de quadrature, ce qui valide le concept de l'OVMI. On montre aussi que la variation de la poussée en fonction du temps est semblable à celles montrées en section 3.3 pour des ailes rigides. Enfin, on détermine les surfaces de l'aile les plus utiles, c'est-à-dire celles qui génèrent le plus de poussée au cours du cycle afin de mieux dimensionner l'aile.

En conclusion, cette étude démontre la pertinence du modèle proposée malgré sa simplicité. Ce dernier est tout à fait indiqué dans une démarche de dimensionnement de nanodrone. On propose en conclusion une comparaison des calculs de poussée avec des mesures expérimentales proposées par D. Faux [Faux 2018].

Des travaux sont en cours pour établir l'influence de la flexibilité de la structure, à l'aide de ce modèle de force couplé à des non-linéarités géométriques ainsi que l'amortissement non-linéaire proposé au chapitre 2. Pour cela, on choisit un système dont la géométrie est

très simple et dont des mesures ont été proposées dans les études [Thiria et Godoy-Diana 2010 ; Ramananarivo et al. 2011]. On pourrait alors comparer les résultats de calcul et des mesures de la force aérodynamique. En particulier, on pourrait comparer la force produite par deux systèmes (un rigide et un flexible) qui ont une même fréquence d'excitation (voir la figure 6.17).

Sommaire du chapitre

3.1 Introduction 49
3.2 Aerodynamic force model 51
3.2.1 Steady model 51
3.2.2 Unsteady effects 52
3.2.3 Determination of the lift and drag coefficients 54
3.2.4 Proposed force model 55
3.3 Application of the model to rigid plates 56
3.3.1 2-D motion : pitch & plunge 56
3.3.2 3-D motion : revolving plate 61
3.3.3 Conclusion 67
3.4 Aerodynamic force of an OVMI wing 68
3.4.1 Calculation of the velocity of the wing 69
3.4.2 Deriving the force 71
3.4.3 Results 72
3.4.4 Force as a function of time 74
3.4.5 Force as a function of space 75
3.5 Conclusion 75

3.1 Introduction

The development of a drone at the insects scale is challenging. The first difficulty is the fabrication itself with features of the order of 10 μm. Second, the size constraint induces drastic choices for the power supply. The third difficulty is to obtain a wing system able to generate enough lift to take-off. The control is the final issue for achieving an operational drone. Such steps have been undertaken for the state-of-the-art nanodrone Robobee [Wood 2007a,b; Whitney and Wood 2010; Ma et al. 2013]. This drone recently achieved a controlled untethered flight [Jafferis et al. 2019], just as the Robofly from the University of Washington [James et al. 2018]. Actually, there are only three drones that achieved take-off with a mass under 200 milligrams, the last one being the drone of the University of Shanghai [Zou et al. 2016]. It should be noted that all three drones rely on the same "four-bar mechanism" for the wing actuation, which was established for Robobee. The principle is to activate a flapping motion of the wings, that rotate passively around a flexible hinge, mimicking the wing kinematics of Diptera. The unicity of this successful actuation mechanism illustrates that – at this scale – the most critical issue is to generate enough lift for take-off.

Our project called "OVMI" proposes an original design to generate lift; it uses the resonant motion of a fully flexible wing structure combining a bending mode and a twisting mode of the wings. An adapted microfabrication process has been set up [Bontemps et al. 2013] and the concept for the wing actuation and the lift generation has been proposed and validated [Faux et al. 2018]. The dimensioning of this drone is done by considering

only the kinematics of the wings, however it is crucial to be able to estimate the lift that a given drone's geometry may produce as early as the design stage. In this article, we propose a simple but efficient strategy to predict the aerodynamic force generated by the flapping wings of nanodrones with a model accounting for the effects of unsteady mechanisms globally.

The mechanisms for aerodynamic force production of Nano Air Vehicles (NAVs) and of flapping-wing Micro Air Vehicles (FWMAVs) are inspired from a rich literature on the flight of insects, in particular Diptera (such as fruit flies) and Lepidoptera (such as hawk moths). Through a series of experiments, the lift generation for a variety of insects has been interpreted with models of a quasi-steady flow as well as unsteady mechanisms: the clap-and-fling [Lighthill 1973], the leading-edge vortex [Ellington et al. 1996; Dickinson et al. 1999] and the Kramer effect (or rotational lift) [Sane and Dickinson 2002], among others (for an exhaustive review see [Sane 2003]).

Due to the variety of potential lift sources, a number of computation strategies have been established for NAVs (and FWMAVs), and a brief review is proposed below. Given the importance and complexity of the unsteady mechanisms at play in the lift production of a NAV/FWMAV wing, computational fluid dynamics (CFD) simulations of the wing in motion are widely used. The CFD simulations may be performed on rigid wings [Sun and Du 2003] or flexible wings, in which case the fluid computation is coupled with a structural finite-element solver (this process is called the partitioned approach) or alternatively with a beam model [Chimakurthi et al. 2008; Cho et al. 2016; Bluman and Kang 2017]. The CFD simulations can also be used to enhance a quasi-steady model [Nakata et al. 2015; Lee et al. 2016].

However, CFD simulations are related to huge computational time whereas, at the design stage, an analytical formulation has the advantage of enabling faster and easier dimensional analysis, with a sufficient accuracy. In this sense, a few models have been developed, mostly for rigid wings, with varying degrees of unsteady phenomena modelling [Sane and Dickinson 2002; Nabawy and Crowther 2014; Smith et al. 1996; Au et al. 2016; Minotti 2011; Wang et al. 2016; Berman and Wang 2007; Ansari, Knowles, et al. 2006]. For deformable wings, analytical models for the fluid mechanics have been proposed with a framework analogous to the classical partitioned approach, in conjunction with a structural nonlinear finite-element solver [Gogulapati et al. 2013] or with a nonlinear analytical model [Stanford et al. 2012]. Another method to calculate the force generated by a deformable wing is to use the speed of the structure. For example, the study [Whitney and Wood 2010] presents and validates a semi-empirical approach to calculate the force on a wing passively rotating with flexible hinges. Another interesting approach that can be applied to a given beam in a pitch and plunge motion is presented in [Kang and Shyy 2014]. In this model, the force is computed with the speed of the imposed plunge motion. There is a linear damping as well to account for the effect of air on the structure's amplitude of displacement through different coefficients, identified by minimizing the phase lag difference with a high-fidelity numerical simulation. The authors claim this model is then a "two-way coupled fluid-structure interaction system". More work has been proposed lately for flexible wings [Addo-Akoto et al. 2020; Ke et al. 2021] illustrating the enthusiasm on this topic and stressing the interest for a simple analytical aerodynamic model able to predict the lift generated by flexible wing nanodrones.

It is interesting to note that a number of these computation strategies emerge as part of development projects of actual NAVs or FWMAVs (e.g. Robobee, or the Delfly

from TU Delft). The hypotheses of these computation strategies usually depend on the particularities of the corresponding NAVs/FWMAVs (e.g. wing motions, wing shapes or the experimental and numerical resources available). The main characteristics of the OVMI drone are consequences of the design choice for its structure. The inspiration comes from observing that the wings motion of insects such as the *Drosophila* can be essentially reduced to two rotations (defined by the stroke angle and the rotation angle) if one ignores the deviation angle variation. It can be noticed that these two rotations have the following specificity: one angle is at its peak when the other angle is null [Fry et al. 2003, (fig. 2B)], i.e. the two motions are in quadrature phase shift. The concept for the OVMI drone is to make its structure fully flexible such that it presents two vibration modes that correspond each to a stroke motion and a rotation motion (referred-to as the bending mode and the twisting mode). It is possible to have the desired motion when said structure is excited at a frequency for which there is a phase shift quadrature between the two modes. Further information on the matter is provided in [Faux et al. 2018]. Such a choice makes the originality of OVMI and entails simultaneously that the aforementioned models are not applicable as it is. A new computation strategy of the lift generated by the wings of the OVMI drone is then justified.

In this context, we propose an aerodynamic force formulation accounting globally for the unsteady phenomena at play for flapping wings. This model is used on both rigid and flexible wings, demonstrating its validity based on the comparison with the literature and experimental data in the case of the rigid wings. The outline of this work is the following: section 3.2 reports the hypotheses and expression of the proposed aerodynamic force formulation. Then, in section 3.3, this force model is applied to rigid plates that are animated by two motions: a pitch and plunge motion and a revolving motion. This approach has several advantages: (i) it validates the proposed model on well-established systems; (ii) the simple mathematical expression of the equations of motion enables a qualitative study on key parameters determining the useful component of the force; (iii) these two motions can be considered as boundaries for the flapping radius and (iv) it gives a first estimate of the force on a low-fidelity model of a flexible wing. In section 3.4, we demonstrate that the aerodynamic force model can be easily applied to the kinematics of a flexible wing in a resonant motion. Several key aspects of the force generation are pointed out and enable an enhanced design of the nanodrone.

3.2 Aerodynamic force model

We propose in this section a quick review of different contributions to the aerodynamic force formulation that are classically accounted for in existing computation strategies. They usually include a steady, or rather a “quasi-steady” force term, which can be supplemented by others terms modelling unsteady mechanisms of lift generation. Let’s recall that the desired formulation aims at estimating the force due to the action of air on a vibrating system in a resonant motion.

3.2.1 Steady model

In classical aerodynamics theory, a flow is defined as steady if it is not time-varying. Such a flow at velocity V and density ρ_f around a rigid aerofoil of reference area S generates

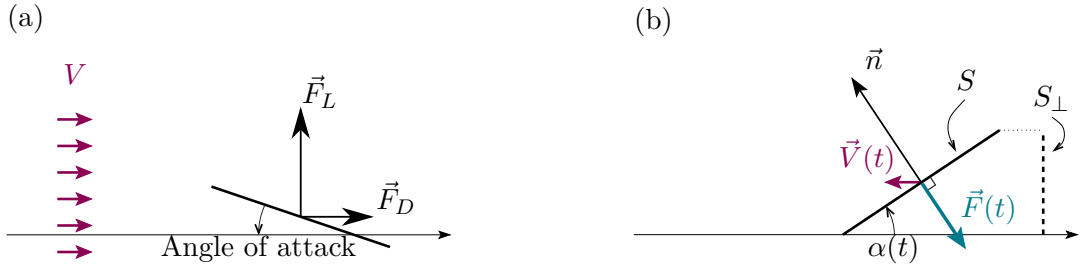


Figure 3.1 – Aerodynamic force on a plate. (a) Classical steady model of the lift and drag forces on a plate at low angle of attack, (b) present model of the instantaneous aerodynamic force on a plate animated by a flapping motion at an angle $\alpha(t)$.

an inline force onto the aerofoil given by:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_f S C_D V^2. \tag{3.1}$$

where C_D is the drag coefficient which is usually determined experimentally as it depends on many parameters, such as the Reynolds number Re, the surface condition of the aerofoil, its shape and the definition of the reference area (e.g. the square of the chord length, or the projected surface onto the flow direction). The force F_D is called drag force, and the force component that is normal to the flow direction, called the lift force, has an analogous expression with the lift coefficient C_L in place of C_D. Both forces are represented in figure 3.1(a). These two components form the aerodynamic force generated by the flow onto the aerofoil.

In the case of an infinitesimally thin plate with a sharp edge and at a small angle of attack α (angle between the plate and the flow) in an inviscid fluid, the lift and drag coefficients can be calculated analytically: $C_L = 2\pi \sin(\alpha)$ and $C_D = 0$ [Wang 2005]. This peculiar value of the drag coefficient is due to the fact that there is an additional suction force that compensates the drag. Besides, for very high values of angle of attack (near 90°), the lift coefficient has a (partial) dependency on $\sin(2\alpha)$ and the drag on $\sin^2(\alpha)$ [Wang 2005].

3.2.2 Unsteady effects

When the aerofoil has a non constant velocity, the flow is unsteady and Eq. (3.1) does not hold. The exact calculation of the force may be performed by computing the Navier-Stokes equation with a numerical solver. However, it is possible to obtain an estimate of the force by including additional terms into Eq. (3.1) in order to account for specific unsteady phenomena. Let's now consider each potential unsteady effect.

3.2.2.1 Added mass

The added mass effect is usually accounted for with the Morison equation, initially applied to determine the instantaneous force of waves on piles. It gives the expression of the inline force acting on a cylinder of length L in an oscillatory flow (i.e. a flow with a speed which amplitude varies sinusoidally):

$$F_D(t) = \frac{1}{2}\rho_f S C_D |V(t)| V(t) + \rho_f S L C_m \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{3.2}$$

where C_m is another dimensionless coefficient that has many dependencies and can be experimentally determined – just as C_D. The first term is usually called the drag term and the second one the inertial term (or added-mass term). One can notice that in this case the square of the velocity has been transformed into the product of the velocity with its absolute value. This ensures that the sign of the force is equal of the sign of the fluid velocity. Although this equation, being semi-empirical, has a number of limitations [Sarpkaya 2010], it is still useful to consider it. The predominance of the drag or inertial term is given by the dimensionless numbers Re and K, the Keulegan-Carpenter number (see [Keulegan and Carpenter 1958; Sarpkaya 1976; Bidkar et al. 2009]). In the case of the insects for which the amplitude of oscillation is up to the wing length, K is between π and 2π, that is at the limit of the inertia-dominated regime ($K < 5$ [Sarpkaya 2010, p. 81]). Therefore the added-mass term cannot be discarded *a priori* and is usually integrated into the aerodynamic models for lift prediction of NAVs/FWMAVs. Nevertheless, the added-mass term produces a force that has a zero net contribution over a cycle for symmetrical half-strokes [Sane and Dickinson 2002] and in the case of a vibrating structure, the added-mass term contributes only to a virtual change in the body's inertia. Since resonant oscillatory motion of the body will be considered in the following, we assume that the effects of the added mass, proportional to the acceleration of the body, restrict themselves to slightly alter the natural frequency of the body. Consequently the added-mass term will be discarded from now on.

3.2.2.2 Rotational force

The rotational force refers to an increase in the lift coefficient experimentally observed for rapidly pitching wings, and has been explained with the unsteady mechanism called Kramer effect [Sane 2003]. A number of existing aerodynamic models for NAVs/FWMAVs include this unsteady effect through a revision of the quasi-steady lift by including a rotational force term. Nonetheless, taking into account the translational component only of the quasi-steady model, $F_L(t) = 1/2\rho_f c_L S|V(t)|V(t)$, achieves a decent prediction of the force produced during a flapping cycle by a robotic wing of a *Drosophila*, see [Dickinson et al. 1999, fig. 1D, E] and [Sane and Dickinson 2002, fig. 3ii, iii] – albeit the time history is not properly captured. Surprisingly, it even yields a better result than the revised model on the specific criterion of averaged force, see [Dickinson and Muijres 2016, fig. 1d]. This force has a zero net contribution over a cycle for symmetrical half-strokes as well [Nabawy and Crowther 2014]. Furthermore, the additional lift through the Kramer effect could be reduced in the case of OVMI. Indeed, this unsteady mechanism is enhanced with high values of acceleration (as demonstrated for the *Drosophila* in [Dickinson et al. 1999] and for mosquitoes in [Bomphrey et al. 2017]). Nevertheless, for OVMI, the rotation angle variation is distributed over a full half-cycle sinusoidally, which corresponds to a lower acceleration value than those in the motions of insects wings or other NAVs/FWMAVs wings.

3.2.2.3 Wake interaction

Wake interaction occurs when a structure manoeuvres within a flow altered by anterior motions of this structure (or another). For hovering insects and flapping-wing drones, this effect plays a significant role. However, it is quite complex to account for this effect with an analytical formulation, so wake interaction is usually discarded in the analytical

models for NAVs/FWMAVs, except in the works of the Cranfield University team, see e.g. [Ansari, Żbikowski, et al. 2006]. We do not include this unsteady phenomena in the proposed model.

3.2.3 Determination of the lift and drag coefficients

Considering only the translational quasi-steady component, the classical methodology in existing models is the determination of the coefficients c_L and c_D of the flapping wings. They are known to depend on Re, which varies during a flapping cycle, but is usually reduced to a mean value [Lehmann and Dickinson 1997]: $Re = \varphi_m f S/\nu$ where S is the wing's surface in this case and ν is the kinematic viscosity of air, f is the flapping frequency and φ_m is the stroke amplitude. In the case of the flying insects, a common range of the Reynolds number is between 10 and 10000, whereas for OVMI, depending on the frequency of motion and maximum vibration amplitude, Re varies from 175 to 1800 with $S = 1$ cm^2 (for φ_m between $\frac{\pi}{12}$ and $\frac{\pi}{3}$ and f between 100 and 250 Hz).

At first sight, to the extent that the OVMI Re range is comprised in that of insects, a number of well-documented studies on the identification of lift and drag coefficients could be utilised. For example, the widely used study [Dickinson et al. 1999] was made through the measurements of the force produced by a robotic wing with the morphological and kinematic parameters of the *Drosophila* and at an equivalent Reynolds number. A study for the hawk-moth has also been proposed in [Zheng et al. 2013]. Both these studies identified the lift and drag coefficients as a function of the angle of attack (up to 45°) with a similar form for c_L and c_D: $c_L = c_{L0} + k_1 \sin((2+\epsilon)\alpha - k_2)$, with c_{L0}, k_1, k_2 and ϵ constants (in [Zheng et al. 2013], this expression is supplemented with a cosine function of α). It is interesting to note that there is almost a $\sin(2\alpha)$ dependency of the lift coefficient, which may be related to the theoretical lift coefficient dependency for high angles-of-attack of an infinitesimally thin plate. However, this approach requires a similitude between the wing shapes and the wing trajectories of the drone and the *Drosophila* (or the hawk-moth) to be able to use the identified coefficients. As a consequence, it cannot be applied to OVMI unless similar experiments are performed with the wings of this drone.

Another way to determine the lift and drag coefficients is to use the orthogonality of the aerodynamic force field with the wing when it is animated by a flapping motion. This property is not valid in a quasi-steady flow for angles-of-attack higher than 15° as aerofoils are subject to stall. However, it has been demonstrated for angles-of-attack superior to 15° for fruit-flies with a variety of advance ratios in [Dickson 2004]. Noting μ the tip velocity ratio [2], the lift and drag coefficients are expressed respectively as $K_0(\mu)\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ and $K_1(\mu)\sin^2(\alpha) + K_2(\mu)$. The fit to experimental data showed that $K_1 = K_2$ for $\mu = 0$ (i.e. for hover). The underlying hypotheses for this model have been summarised in the article [Nabawy and Crowther 2014], and its pertinence has been recently extended for different insects (and birds) in a subsequent study [Nabawy and Crowther 2017], thanks to the comparison of experimental lift coefficients as a function of angle of attack. This is a crucial result, because it enables to take into account the unsteady characteristics of the flow. It could be tempting to add vorticity effects into the translational component, for example with a Polhamus leading edge suction or a trapped vortex model, but this does

2. The tip velocity ratio is defined as "the ratio of the chordwise components of flow velocity at the wing tip due to translation and revolution". It is therefore an instantaneous indicator of the effect of the forward velocity of the drone (or insect).

not lead to a better estimation of the force, as explained in [Nabawy and Crowther 2017]. In this study, different lift models are used and the model that allowed the most accurate fit to the data was:

$$C_L = C_{L\alpha,3\mathrm{D}} \sin(\alpha) \cos(\alpha). \tag{3.3}$$

However, since these expressions depend on the angle of attack itself, they are not the most practical when one calculates the displacements of a dynamic system.

3.2.4 Proposed force model

It is possible to express the aerodynamic force without the angle of attack explicit dependency by calculating instead the scalar product of the velocity with the surface. We consider an infinitesimally thin plate Σ that can be either rigid or flexible. For a flexible plate, one can compute the local velocity with respect to a fixed reference frame and the local normal to the surface at any given point M of Σ, noted $\vec{V}_{M/0}(t)$ and $\vec{n}(M,t)$. Then, we propose the following formulation of the aerodynamic force acting on Σ:

$$\vec{F_a}(t) = -\frac{1}{2}\rho_f c_0 \iint_{M\in\Sigma} \left\|\vec{V}_{M/0}(t)\right\| \left(\vec{V}_{M/0}(t)\cdot\vec{n}(M,t)\right)\vec{n}(M,t)\mathrm{d}S, \tag{3.4}$$

where c_0 is a dimensionless coefficient that depends on the Reynolds number and surface condition (see *infra*).

This expression is equivalent to Eq. (3.2) with the reference area defined as the aerofoil's projected surface onto the direction of the flow $S_\perp$, see fig. 3.1(b). The absolute value is kept to ensure that the force is always opposed to the direction of the motion of the aerofoil. The negative sign arises from expressing the velocity of the structure instead of the flow, and one can verify that the sign of this force does not depend on the sense of the normal vector.

One can verify that Eq. (3.4) also yields an equivalent expression of C_L and C_D as in [Nabawy and Crowther 2017] for a simple plate in a flow such as the one represented in fig. 3.1(b). Indeed, the inline force applied on a flat plate of chord c and span l at an angle[3] α with a velocity flow $v(t)$ would write: $\frac{1}{2}\rho_f c_0 lcV(t)^2\sin^2(\alpha)$, in which case $C_D \equiv c_0\sin^2(\alpha)$. The force perpendicular to the direction of the flow (i.e. the lift) would then be: $-\frac{1}{2}\rho_f c_0 lcV(t)^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$, which yields $C_L \equiv c_0\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

The force component generated onto the direction of the motion of the drone is called the **thrust** force and its mean value over a flapping cycle corresponds to the useful force that drives the drone's body motion, it is denoted T in the following. Our strategy is then to prescribe the motion of the structure and compute T with Eq. (3.4). The two other components of the aerodynamic force are referred-to as drag forces. The proposed formulation could also be used for drones with a non-zero advance ratio, adjusting the reference frame for the velocity calculation, but this is left for further studies.

A comment is due on c_0, as this coefficient accounts for the effects of the wing shape and the Reynolds number. For a rigid wing, the c_0 constant can be determined experimentally by setting the wing at a high angle of attack in a steady flow (which velocity would correspond to the drone's operational Reynolds number). Then one can adjust the c_0 value so the calculated forces match the measured forces. In the case of a flexible wing, the

3. This angle is equivalent to the opposite of the angle of attack, as we consider the motion of the structure in the coordinate system.

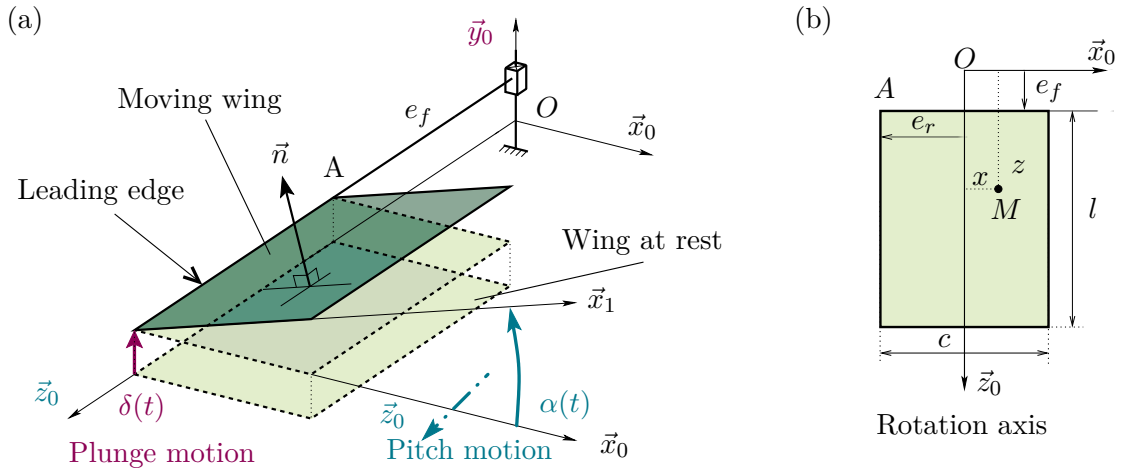


Figure 3.2 – Schematic of a pitching and plunging plate. (a) Motion definition with the leading edge as rotational axis ($e_r = 0$) and (b) parametrisation of the wing at rest, with $e_r = -c/2$.

identification may be more complicated. Indeed, for a wing with given Young's modulus and second moment of area, different flow velocities wing may induce a varying bending of the wing, which would yield different values of c_0. Hence, it is necessary to verify that the considered velocity and rigidity do not induce a significant deformation of the wing. If not, we can only assume that c_0 does not vary greatly throughout the motion.

3.3 Application of the model to rigid plates

In this section, the proposed aerodynamic force formulation is applied to rigid wings. We demonstrate the pertinence and ease of application of the proposed force model and extract some qualitative trends on the thrust generation of rigid plates animated by two distinct motions. The first motion studied is the well-established plunging and pitching [Garrick 1936; J. M. Anderson et al. 1998; Trizila et al. 2011]. Second, a 3-D motion of a thin rigid plate is considered. The plate can rotate about two axes. In both cases, we consider a rectangular plate of chord c and length l.

3.3.1 2-D motion: pitch & plunge

The first motion is the classical pitch and plunge motion, shown in figure 3.2(a). This motion can be reduced to a 2-dimensional (2-D) motion by neglecting the potential side effects along the $\vec{z}_0$ direction. For this motion, the plate is at rest in the plane $(O, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$, fig. 3.2(b). The plate's leading edge is marked by the point A, which abscissa is noted (e_r, ef). Incidentally, the parameter e_f does not alter the force generated by the plate's motion.

The plate plunges – or translates – with an amplitude $\delta(t)$ along the $\vec{y}_0$ direction. It can also swivel around $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ in a pitch – or rotation – motion which angle is noted $\alpha(t)$. The vector $\vec{x}_1$ is defined such that $\alpha(t) = \widehat{(\vec{x}_0, \vec{x}_1)}$. The axis of rotation can be the leading edge as illustrated in fig. 3.2(a), or it can be the mid-chord axis of the plate, see fig. 3.2(b). At any instant, there is a unique normal vector $\vec{n}$ to the plate, as it is rigid.

3.3.1.1 Equations of motion and derivation of the force

Let's define the translation and rotation motions respectively as sine functions with a phase shift ϕ:

$$\delta(x,t) = \delta_0 \sin(\omega_e t), \tag{3.5}$$

and

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_e t - \phi), \tag{3.6}$$

with $\omega_e = 2\pi f_e$ the angular frequency of the motion (and $f_e = 1/T_e$ the corresponding frequency in Hertz and period in second), δ_0 the translational displacement amplitude and α_0 the amplitude of the rotation. The position of a point M of location (x,z) is then written:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x}_1 + \delta\vec{y}_0 + z\vec{z}_0, \tag{3.7}$$

which leads to the following expression of the velocity $\vec{V}_{M/0}(t)$:

$$\vec{V}_{M/0}(t) = \dot{\delta}\vec{y}_0 + x\dot{\alpha}\vec{y}_1. \tag{3.8}$$

Besides, the normal vector is:

$$\vec{n} = \vec{y}_1. \tag{3.9}$$

One can then easily write the aerodynamic force acting on the plate at any given time, according to Eq. (3.4):

$$\vec{F}_a(t) = -\frac{\rho_f c_0 l}{2} \int_{x=e_r}^{e_r+c} ||\vec{V}_{M/0}||(\dot{\delta}\cos(\alpha) + x\dot{\alpha})\vec{y}_1 \, \mathrm{d}x, \tag{3.10}$$

Then, by integrating this force on a cycle, one obtains the mean aerodynamic force:

$$\langle \vec{F}_a \rangle = f_e \int_{T_e} \vec{F}_a(t)\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

We choose to name the components of the mean aerodynamic force as mean thrust force T and mean drag force $\vec{D}$. The thrust is the component along the desired direction (in this case $\vec{x}_0$) and the drag force being the sum of the two other components:

$$\langle \vec{F}_a \rangle = T\vec{x}_0 + D_y\vec{y}_0 + D_z\vec{z}_0. \tag{3.12}$$

In the case of the pitch and plunging plate, since the model neglects eventual edge effects, the drag force is only about the $\vec{y}_0$ direction (i.e. the instantaneous drag force along $\vec{z}_0$ is null and therefore $D_z = 0$). Furthermore, we verify that the drag force in the $\vec{y_0}$ direction has a null mean value (i.e. $D_y = 0$).

The plate can be considered as a left wing of a drone, which would advance along the $-\vec{x}_0$ direction. Therefore the thrust force has a negative sign, given the parametrisation of the plate.

3.3.1.2 Numerical results

The ranges of each variable used in the simulations are given in table 3.1, as well as the values of the constant parameters. In previous studies (e.g. [Trizila et al. 2011]), the displacement amplitude is normalised so that the peak-to-peak displacement is divided by the chord length, i.e. the dimensionless amplitude a is defined as $a = 2\delta_0/c$. The

Parameter	Value
ρ_f [kg/m^3]	1.225
c [cm]	1
l [cm]	1
f_e [Hz]	150
e_r [cm]	$-c/2$ or 0
e_f [cm]	$c/2$
c_0 [-]	1

2-D Motion	
Variables	Range
a [-]	0 - 5
α_0 (rad)	0 - π
ϕ (rad)	0 - π

3-D Motion	
Variables	Range
θ_0 (rad)	0 - $\pi/2$
α_0 (rad)	0 - $\pi/2$
ϕ (rad)	0 - π

Table 3.1 – Numeric values of the parameters and variables used in the simulations of the 2-D and 3-D motions.

geometric dimensions as well as the excitation frequency were selected to match roughly the characteristics of OVMI. For the 2-D motion, we choose the range of the kinematic parameters to be larger than the equivalent range for an insect's wing motion, in order to provide an exhaustive panorama.

Two simulations were performed for plates with identical surfaces but two different abscissa of the leading edge. The first plate has its rotational axis at the middle of its chord, i.e. $e_r = -c/2$, whereas the second plate is pitching about its leading edge, i.e. $e_r = 0$.

Figures 3.3-3.4 present the mean thrust force T as a function of a, α_0 and ϕ, with three plots obtained by fixing one variable to a given value and displaying the dependency on the two others.

There are several relevant points to note here. The results for the plate rotating about its mid-chord axis ($e_r = -c/2$, fig. 3.3) are easier to interpret first:

- if the motion is synchronous, i.e. each point reaches their extrema at the same time ($a = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\phi = 0$ or π), the motion does not generate any thrust force, see figs. 3.3(a-c);
- the thrust force increases monotonously with the amplitude of translation, as demonstrated in figs. 3.3(a, c). This is logical since the frequency of oscillations was fixed throughout the simulation, which entails an increasing speed of translation in the range of the translation amplitude;
- there is an optimum value of the phase shift $\phi_{\text{opt}} = \frac{\pi}{2}$, independent of the translation or rotation amplitude, see figs. 3.3(b, c);
- the optimum angle amplitude varies with the translation amplitude, see fig. 3.3(a), it is about $\alpha_{0,\text{opt}} = 0.292\pi$ for $a = 2$ and $\alpha_{0,\text{opt}} = 0.286\pi$ for $a = 5$. The optimum values can be interpreted as the ones that produce an angle close to $\pi/4$ when the translational speed is at its peak, which explains why this value tends towards $\pi/4$ when the amplitude increases;
- the sign of the force is the sign of the phase. The plots of the force for $\phi \in [-\pi;\ 0]$ are not given, as they are analogous to the given plots with negative values instead of positive values (central symmetry).

The results for the plate pitching about its leading edge are similar, except that the optimum value of phase shift is not constant. The optimum values for the rotation am-

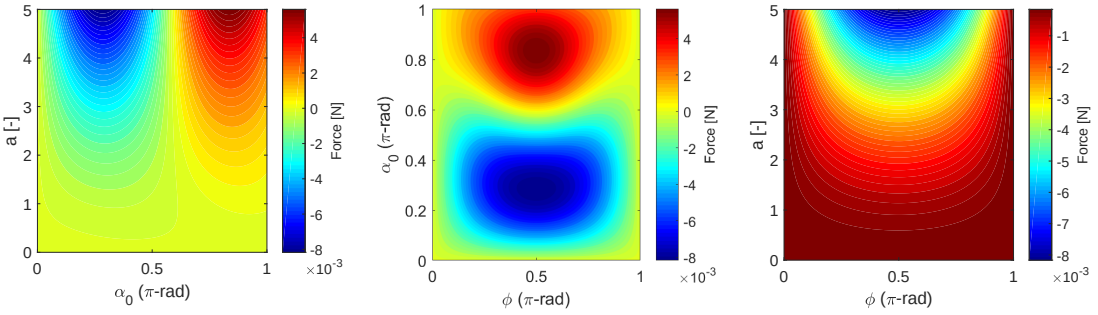


Figure 3.3 – Mean thrust over a cycle for the oscillating plate with $e_r = -c/2$. $T(a, \alpha_0, \phi)$: (a) $\phi = \frac{\pi}{2}$, (b) $a = 5$, (c) $\alpha_0 \approx 0.29\pi$.

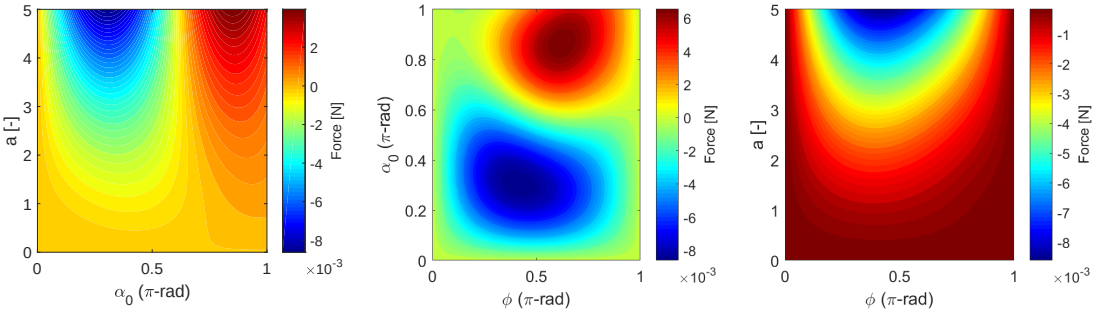


Figure 3.4 – Mean thrust over a cycle for the oscillating plate with $e_r = 0$. $T(a, \alpha_0, \phi)$: (a) $\phi \approx 0.42\pi$, (b) $a = 5$ (c) $\alpha_0 \approx 0.31\pi$.

plitude and phase shift are read in fig. 3.4(b), for a given value of translation amplitude. For $a = 5$, the optimum phase is $\phi_{\text{opt}} = 0.423\pi$ and $\alpha_{0,\text{opt}} = 0.305\pi$, and for $a = 2$ (which is chosen for the fig. 3.5), the values extracted are $\phi_{\text{opt}} = 0.385\pi$ and $\alpha_{0,\text{opt}} = 0.338\pi$ (the corresponding plot is not displayed).

This variation of the optimum parameters can be explained briefly. We chose to define the plate using the abscissa of the leading-edge e_r, so the rotation axis is $(O, \vec{z}_0)$. Conversely, it would have been possible to define the abscissa of the rotation axis at any point of the chord. This parameter would have appeared within the equations of motion instead of the spatial integration boundaries. However, it becomes a superfluous parameter if the motion is linearised so that the axial displacement can be neglected. Indeed, the motion is then completely defined with the translation displacement of any given point, the angle amplitude and the phase. A unique, nonlinear, change of variable can be done to obtain an identical motion with the axis of rotation defined at another point of the chord. Since the optimum values vary with this change of variable, this applies as well for the geometrically exact motion.

The value of the optimum mean thrust generated with $e_r = 0$ (compared to $e_r = -c/2$) is 25 % higher for $a = 2$ and 5.5 % for $a = 5$. In both cases the amplitude of the translation motion is the same, however the maximum transverse displacement is higher when the rotational axis is the leading edge, as can be seen in fig. 3.5. If one computes the mean thrust force divided by this maximum displacement, the value for a plate rotating about its leading edge is actually 19 % lower with $a = 2$ and 7.3 % lower with $a = 5$.

The trajectories of the optimum values of phase and rotation amplitude for a plung-

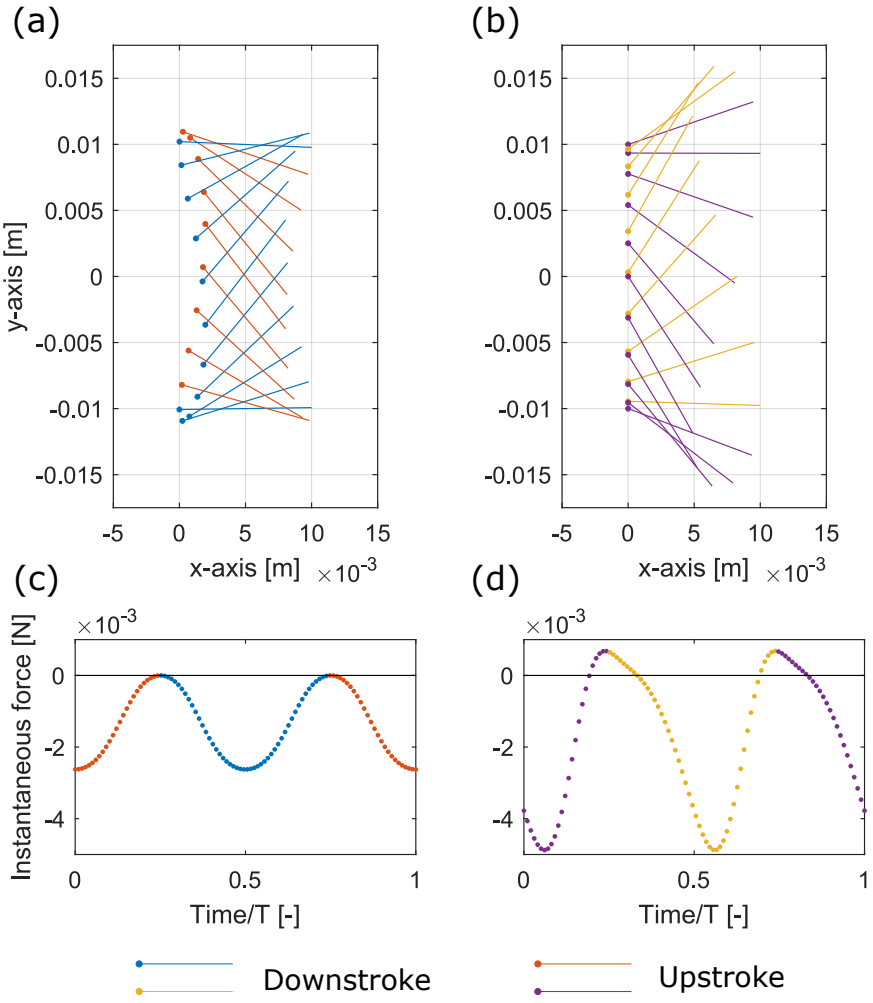


Figure 3.5 – Optimum kinematics and corresponding instantaneous thrust force over a cycle with $a = 2$. (a, c) $e_r = -c/2$, $\phi_{\text{opt}} = 0.5\pi$ and $\alpha_{0,\text{opt}} = 0.292\pi$, (b, d) $e_r = 0$, $\phi_{\text{opt}} = 0.385\pi$ and $\alpha_{0,\text{opt}} = 0.338\pi$.

ing amplitude equal to the chord length (i.e. $a = 2$) are given in figs. 3.5(a-b). The instantaneous thrust force is plotted for each motion below, figs. 3.5(c-d).

It is important to note that both optimum motions generate little negative thrust during the cycle, with a symmetric reversal at the end of each stroke for the case $e_r = c/2$ and a slightly advanced rotation in the case of the $e_r = 0$.

3.3.1.3 Pertinence of the model

One can observe that the thrust force is a periodic signal (period $T/2$), with a quasi-sine function for $e_r = -c/2$ and with more harmonics for $e_r = 0$. The aspect of the instantaneous thrust force as a function of time differs significantly from [Sane and Dickinson 2002] as the displacements functions of time are not sinusoidal in their simulations and experiments. It is noteworthy that almost no thrust is generated during the wing rotation, however a quicker rotation could yield a higher mean force see [Nabawy and Crowther 2015] – not because of the Kramer effect but simply because the wing would be at a more

effective angle during a larger part of the stroke.

The effect of the location of the wing's rotational axis is a recurring question in the literature. In the research paper [Sane and Dickinson 2002], its influence is studied from the point of view of the rotational lift coefficient. The results on the lift force compared to the thrust force obtained with the proposed model match qualitatively: (i) the lift force tends to be higher for a rotational axis near the leading edge and (ii) this effect's importance decreases with a higher translational amplitude – or a lower dimensionless frequency $\hat{\omega}$, defined as the ratio of the motion's frequency multiplied by the chord (averaged) length and divided by the amplitude of the translational velocity, which is equivalent to c/δ_0 or $2/a$ [Sane and Dickinson 2002, fig. 2C]. A recent study proposed an interesting approach on this matter [Veen et al. 2019]. Even if it is much more advanced than our formulation in terms of modelling of the aerodynamic force, it also shows that a rotational axis closer to the leading edge tends to enhance the lift.

3.3.2 3-D motion: revolving plate

Another classical configuration for a rigid wing is a plate revolving about 3 axes [Berman and Wang 2007]. Although the third rotation, usually defined with the "elevation" – or "deviation" – angle (see fig. 1.9) may have an important role in the lift generation in the case of insects (re-orienting the stroke plane such that its direction is different in the forward stroke and in the backward stroke [Wang 2005]), this rotation cannot be performed by OVMI without major changes in its design and is then discarded. Therefore, we consider a plate revolving about only two axes. Such a configuration can be interpreted as a low-fidelity model of the wing of OVMI – or any insect for that matter – by making the assumption it is a thin rigid plate.

We consider once again a rectangular plate, in this case defined in the plane $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ at rest. The plate can be seen as a drone's right wing, which would advance along $-\vec{x}_0$ – as in the 2-D case – given the parametrisation. Therefore the thrust has, once again, a negative sign. The other components of the aerodynamic are assimilated to drag forces. The plate's dimensions are unchanged (chord c and length l). The plate first rotates about $\vec{x}_0$ with θ(t), the stroke or flapping angle, to form the R_1 coordinate system, fig. 3.6(a). Besides, this plate can also rotate about $\vec{y}_1$ by an angle $\alpha(t)$, called the rotation or orientation angle (beware the angle $\alpha(t)$ is negative on the picture). Since this plate is rigid as well, at any given time, the surface also has a unique normal, denoted $\vec{n}(t)$. The definition of the e_r and e_f parameters are unchanged, and now both impact the value of the calculated force. The parametrisation could be modified to account for them in the equations of motion instead of the spatial integration boundaries in Eq. (3.17), but it would be more complex. One can notice that for an infinite value of e_f, this 3-D motion can be reduced to the pitch and plunge motion.

3.3.2.1 Geometrically exact equations

For sinusoidal motions, the expressions of the angles as a function of time are written:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_e t),\ \alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_e t - \phi), \tag{3.13}$$

with θ_0 and α_0 the amplitudes of the flapping and orientation angles respectively, and ϕ the phase shift between both rotations. The position of a point M belonging to the plate

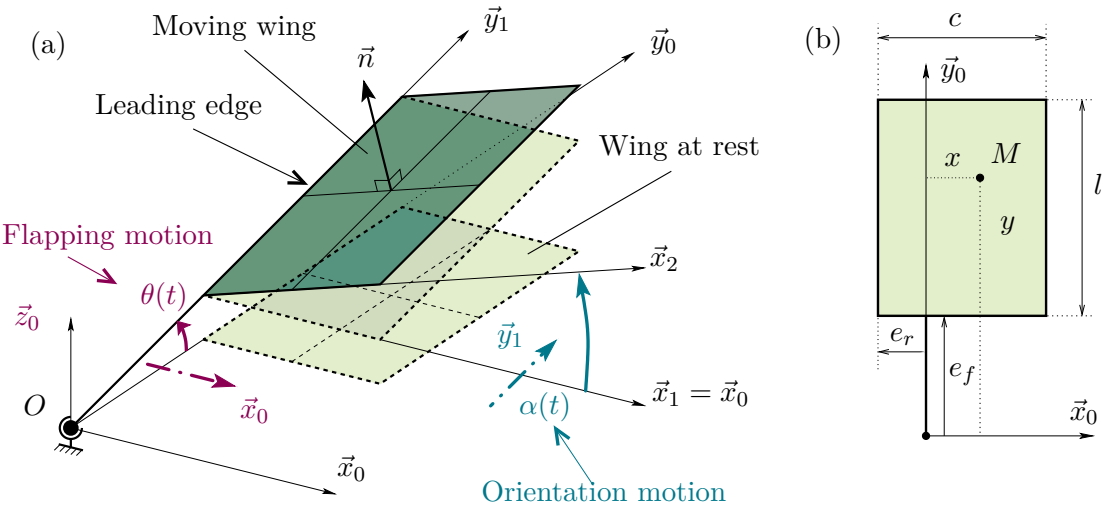


Figure 3.6 – Schematic of a revolving plate. (a) Motion definition and (b) parametrisation.

is then simply written:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x}_2 + y\vec{y}_1, \tag{3.14}$$

which yields the following expression for the velocity at this point:

$$\vec{V}_{M/0}(t) = -y\dot{\theta}\sin(\alpha)\vec{x}_2 + x\dot{\theta}\sin(\alpha)\vec{y}_1 + (y\dot{\theta}\cos(\alpha) - x\dot{\alpha})\vec{z}_2. \tag{3.15}$$

The normal vector to the surface is:

$$\vec{n} = \vec{z}_2. \tag{3.16}$$

The aerodynamic force is then written:

$$\vec{F}_a(t) = -\frac{1}{2}c_0\rho_f \int_{x=e_r}^{e_r+c}\int_{y=e_f}^{e_f+l} ||\vec{V}_{M/0}(t)||(y\dot{\theta}\cos(\alpha) - x\dot{\alpha})\vec{z}_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.17}$$

3.3.2.2 Linearisation

If one considers the motion to be small enough, Eq. (3.15) can be linearised, which entails the motion is only about the vertical axis, i.e. $\vec{V}_{M/0} = \dot{w}_l\vec{z}_0$, with:

$$\begin{aligned} \dot{w}_l(t) &= (y\dot{\theta}(t) - x\dot{\alpha}(t)), \\ \vec{n_l}(t) &= \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ -\theta(t) \\ 1 \end{pmatrix}_{R_0}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

However, the precedent expressions of the normal vector in Eqs. (3.9,3.16) were naturally normalised (i.e. $||\vec{n}|| = 1$); therefore the vector has to be computed now to be unitary:

$$\vec{n}_{l,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2(t)+\theta^2(t)}}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ -\theta(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Let $\vec{Y_l}$ the linearised force integrand (in $[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]$) defined as:

$$\vec{Y_l}(x,y,t) = -|\dot{w}_l|\dot{w}_l\vec{n}_{l,u}, \tag{3.20}$$

then the linearised aerodynamic force is written:

$$\vec{F}_{a\text{lin}}(t) = -\frac{1}{2}c_0\rho_f \int_{x=e_r}^{e_r+c}\int_{y=e_f}^{e_f+l} \vec{Y}_l(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.21}$$

3.3.2.3 Order of magnitudes

A first application of the linearisation is to easily determine the preponderance of the physical effects of the amplitude of the rotations, the frequency and the geometric parameters when considering a motion in small amplitude. To do so, we consider that the maximum angles are of the same order of magnitude and noted A. We also assume that the phase ϕ is equal to $\pi/2$. Consequently, the linearised transverse velocity is written $\dot{w}_l = \omega_e A k_1 \cos(\omega_e t + k_2)$, with $\omega_e = 2\pi f_e$, $k_1 = \sqrt{y^2+x^2}$ and $k_2 = \arctan x/y$. Then, substituting this expression of $\dot{w}_l$ in Eqs. (3.19,3.20) yields:

$$\vec{Y}_l = -A^2\omega_e^2 k_1^2 |\cos(\omega_e t + k_2)| \cos(\omega_e t + k_2) \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \begin{pmatrix} A\sin(\omega_e t - \pi/2) \\ -A\sin(\omega_e t) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

After a Fourier series expansion of the above equation, truncated up to three harmonics, one obtains the linearised expression of the linearised force integrand in the R_0 coordinate system:

$$\vec{Y}_l = -k_1^2\omega_e^2 \begin{pmatrix} A^3 \\ A^3 \\ A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0x} + a_{2x}\cos(2\omega_e t + \varphi_{2x}) \\ a_{0y} + a_{2y}\cos(2\omega_e + \varphi_{2y}) \\ a_{1z}\cos(\omega_e t + \varphi_{1z}) + a_{3z}\cos(3\omega_e t + \varphi_{3z}) \end{pmatrix} + \text{HH}, \tag{3.23}$$

where HH stands for "higher harmonics," and the coefficients a_{ij} and φ_{ij} refer to the amplitude and phase respectively of the i-th harmonic for each component j of the force. These coefficients depend on k_2, i.e. the location of the considered elementary surface on the wing $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. It is possible to verify that $a_{ix}(k_2+\pi/2) = a_{iy}(k_2)$ and $\varphi_{ix}(k_2+\pi/2) = \varphi_{iy}(k_2)$.

The equation (3.23) is quite informative. It shows the dependency of the force on (i) the square of the frequency, (ii) the cube of the amplitude of rotation for the $\vec{x}_0$ and on $\vec{y}_0$ components and (iii) on the square of the amplitude of rotation for the force component along $\vec{z}_0$ (for small amplitudes). For larger amplitudes, the term $\sqrt{1+A^2}^{-1}$ (making sure the normal vector is unitary) is equivalent to $1/A$ instead of just 1, which means that the thrust force is only proportional to the square of the amplitude of rotation. Then these results are consistent with the formulation of the force (proportional to the square of the velocity).

For a drone with two symmetrical wings flapping in unison, the force components of each wing in the $\vec{y}_0$ direction cancel one another out. As a function of time, and neglecting harmonics higher than the third, the drag force in the $\vec{z}_0$ direction oscillates at the same frequency f_e as the wing motion, whereas the thrust force oscillates at twice the frequency of excitation ($2f_e$), with a continuous component that produces the actual thrust.

If one considers that the vibrating wing of the drone is the sum of tiny surface elements behaving like this, then it can be possible to compute the force of a flexible surface. This is the subject of section 3.4.

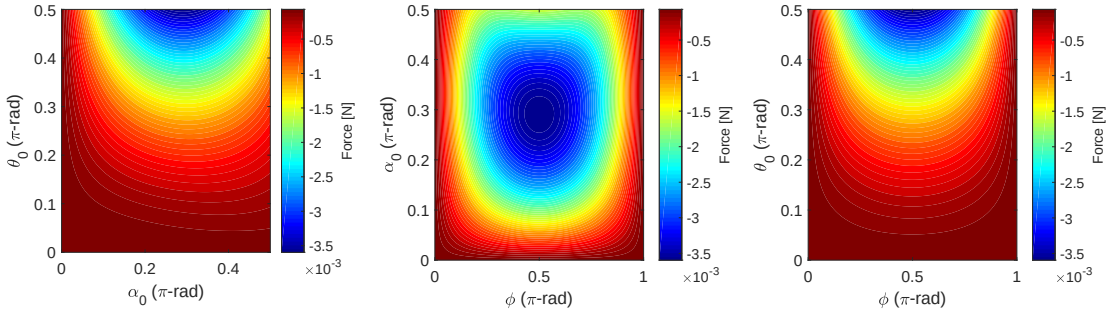


Figure 3.7 – Mean thrust force over a cycle for a plate revolving about its mid-chord axis. $T(\theta_0, \alpha_0, \phi)$: (a) $\phi = \frac{\pi}{2}$, (b) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, (c) $\alpha_0 \approx 0.29\pi$.

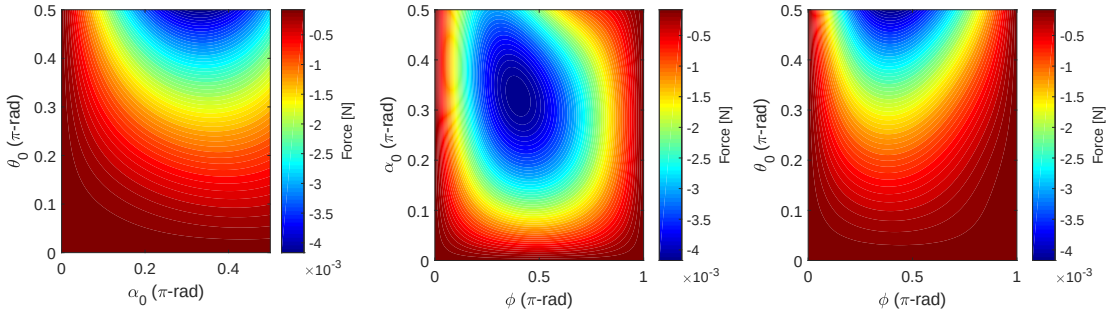


Figure 3.8 – Mean thrust force over a cycle for a plate revolving about its leading-edge. $T(\theta_0, \alpha_0, \phi)$: (a) $\phi \approx 0.4\pi$, (b) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, (c) $\alpha_0 \approx 0.33\pi$.

3.3.2.4 Numerical results

In a similar fashion to the 2-D motion, the simulations are performed for a thin rectangular wing with an identical surface but two different positions of the leading edge: $e_r = -c/2$ and $e_r = 0$. The range of the variables are adjusted to be representative of flapping wings, see Tab. 3.1; this limits the maximum rotation amplitude to $\pi/2$. Unlike the precedent motion, the displacement due to a positive rotation angle is opposed to the stroke-induced displacement; therefore we use $\alpha_{3\text{-D}} = -\alpha$ (the subscript 3-D is discarded)

As expected, the results obtained are very similar to those of the previous motion: figures 3.7-3.8 match figures 3.3-3.4. For the plate rotating about its mid-chord axis, the force is again maximum for a phase lag of $\pi/2$ and a rotation angle slightly higher than $\pi/4$. For the wing rotating about its leading edge, the same attitudes as for the 2-D motion are obtained: the optimum phase varies with the rotation and flapping amplitudes (it decreases with an increasing rotation amplitude and a decreasing flapping amplitude).

In addition, the effect of linearisation is assessed by comparing the mean thrust force for a plate with $e_r = -c/2$ and $\phi = \pi/2$, displayed fig. 3.9. The linearised model (in red) tends to underestimate the thrust force for rotation amplitudes up to 70°, with an error up to 25 %. This comparison is of special interest in the case of OVMI as the structural model used to determine the displacement of the NAV wing is a linear model. Therefore, although the error is important, using a linearised model is impractical but not crippling to estimate the lift produced, from an early design point of view.

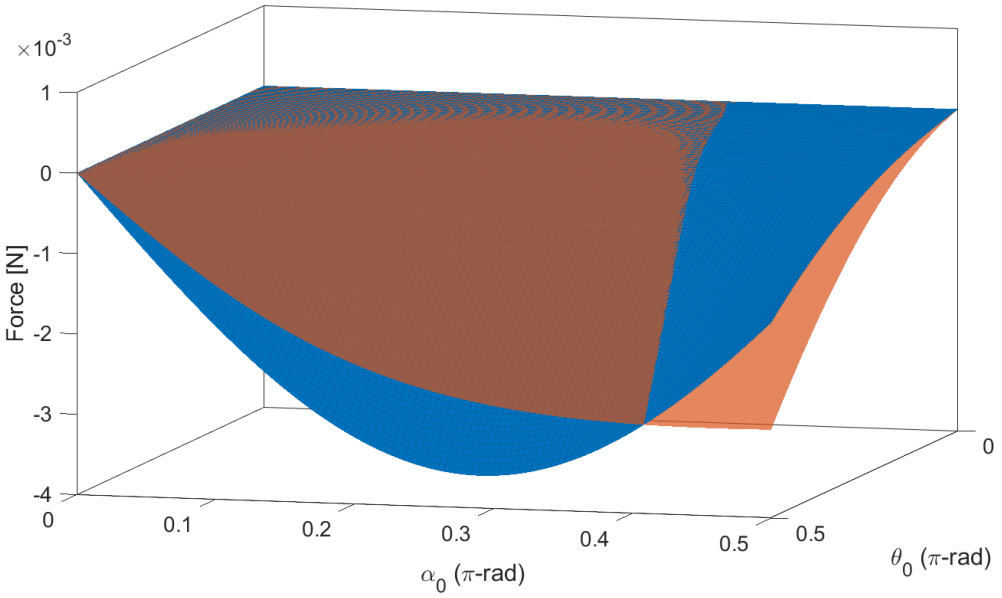


Figure 3.9 – Comparison of the mean thrust force between the geometrically exact model (in blue) and the linearised model (in red) for the revolving plate.

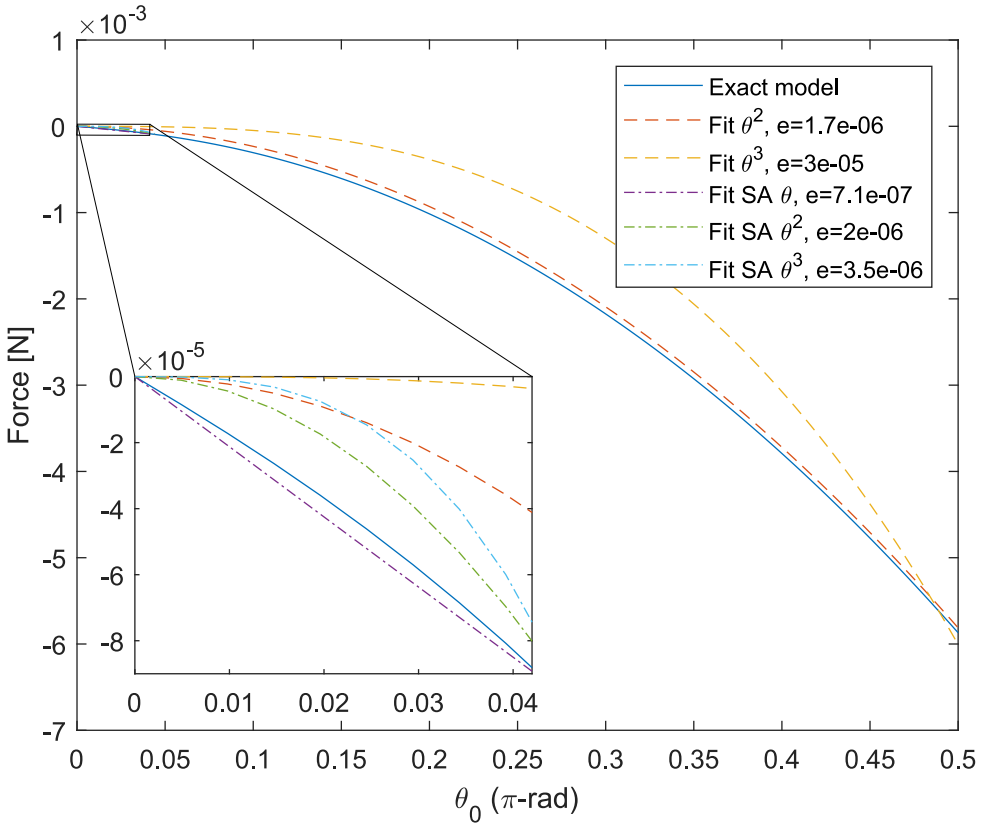


Figure 3.10 – Identification of the order of the thrust force on the amplitude of stroke (with $\alpha_0 = 0.2885\pi$). The first two fits are given for the whole plot (fits of order 2 and 3). The following three curves are given for small amplitudes (SA), i.e. $\theta \in [0;\ 8°]$.

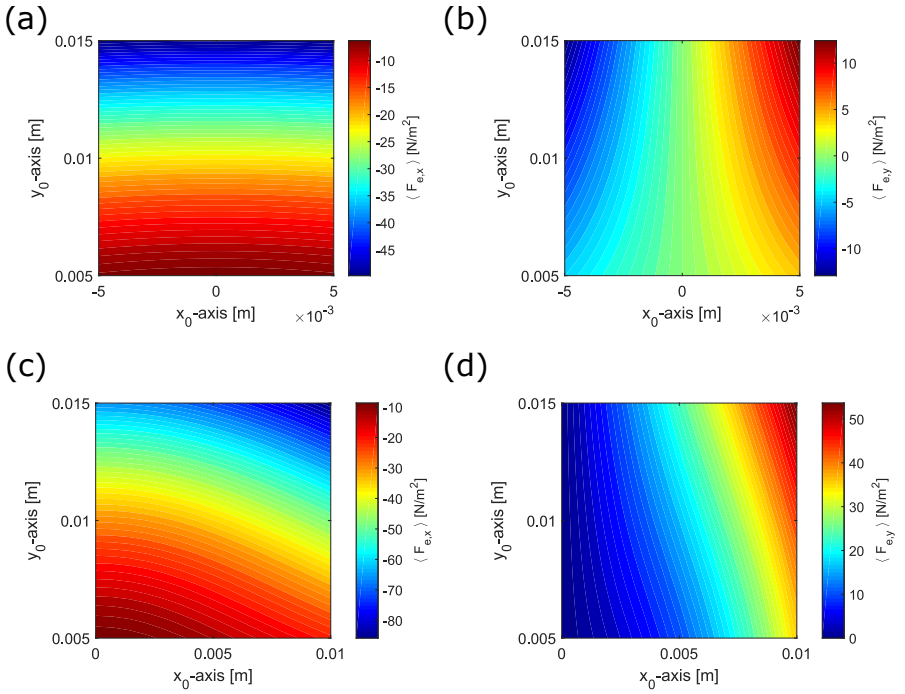


Figure 3.11 – Mean force integrand components of a revolving plate. Thrust (a) and drag (b) with $e_r = -c/2$; thrust (c) and drag (d) with $e_r = 0$.

The assumption of a force proportional to the square of the velocity is proven in fig. 3.10. The order 2 fit (in red) matches well the geometrically exact force value (extracted from the figure 3.9 with $\alpha_0 = 0.2885\pi$). In addition, we test different fit orders for low amplitudes ($\theta_0 \in [0;\ 8°]$), and find that the linear fit gives the better result. This is in contradiction with the order of magnitudes calculation from Eq. (3.23) – that predicted a cubic order – but is more consistent with the Stokes drag model for a sphere oscillating with a small amplitude in a viscous fluid (i.e. with $Re \ll 1$) [Stokes 1851], which is linear in the velocity.

In a dimensioning perspective, it is also interesting to use an adapted set of geometrical parameters, in particular for the determination of an appropriate wing conformation: it is critical for that to understand which part of the wing mostly contributes to the whole thrust. We compute the mean force per surface element as follows:

$$\langle \vec{F}_e(x,y) \rangle = \frac{\rho_f c_0}{2} \int_{T_e} ||\vec{V}(x,y,t)|| \left(\vec{V}(x,y,t) \cdot \vec{n}(x,y,t) \right) \vec{n}(x,y,t) \mathrm{d}t. \tag{3.24}$$

Figure 3.11 gives the mean aerodynamic force per surface element distribution as a function of (x, y) on two wings: for a wing rotating about its mid-chord axis, plots (a, b), and a wing rotating about its leading edge plots (c, d). As the force has two main components, we give the $\vec{x}_0$ component – that is the mean thrust force per surface element – on plots (a, c) and the $\vec{y}_0$ component on plots (b, d). The surfaces located the farthest from the stroke axis tend to generate more thrust, see figs. 3.11(a, c). In addition, at a constant y-coordinate, the force is greater for points located far from the rotation axis. In all cases, the surfaces that produce the most force (thrust – and drag) are the ones with the highest transverse velocity, which is consistent with the force formulation.

The plots of the optimum trajectories and instantaneous thrust are not presented for sake of brevity as they are very similar to the corresponding plots for the pitching and

plunging plate (which are displayed fig. 3.5). This is unsurprising given the resemblance of figs 3.7-3.8 to figs 3.3-3.4.

3.3.3 Conclusion

The focus here is on maximum lift. This is not a ubiquitous objective when designing a drone, as usually the aim is to reach the highest flight efficiency possible [4] [Berman and Wang 2007], in order to maximize flight time. This is not the case however for NAVs and in particular OVMI, as explained in [Nabawy and Crowther 2015]: "[...] the current focus is on achieving the basic requirement of lift greater than or equal to weight. This situation is very similar to the status in the early years of powered flight. As such, any means to achieve higher lift values needs to be exploited."

The proposed aerodynamic force model yields comparable results with the literature. The wing kinematics of hovering fruit-flies, bumblebees and hawk-moths have been studied analytically with a quasi-steady model in [Berman and Wang 2007]. This model is complex: it is applied on elliptical wings, includes an elevation – or deviation – angle, smoothed triangular waveforms for the stroke angle, periodic hyperbolic functions for the rotation angle and the force accounts for circulatory, viscous and added-mass components. For a bumblebee wing with $l = 13$ mm wingspan, $c = 4$ mm, $f_e = 122$ Hz, a flapping amplitude of $\pi/2$ and a rotation amplitude of $\pi/2$ were found to be the optimum kinematic amplitudes. It interesting to note that the calculated mean thrusts (in [Berman and Wang 2007] and in the present study) have the same order of magnitude – about 1 mN – for equivalent parameters wing parameters. The optimum rotation amplitude of the bumblebee is surprisingly high though, it is probably related to its relatively high deviation angle amplitude (12°). For the fruit-fly, this angle's amplitude is of 3° and the optimum rotation angle goes down to 0.4π.

Regarding CFD simulations, in the exhaustive study of the pitch and plunge motion proposed in [Trizila et al. 2011], the results are somewhat comparable; overall the rotation amplitude close to $\pi/4$ generates the highest lift, as well as a high translation amplitude (in this case however Re is held **constant** so this effect is not exactly the same [5]), and the phase has an impact which is not perfectly distinguishable in the case of the 2-D lift model [Trizila et al. 2011, fig. 3].

To better emphasize our results, we have also configured the plate into a wing motion of a butterfly-like flapping wing-body model, studied in [Suzuki et al. 2015]. This motion is quite similar to the revolving motion, with an offset of the rotation angle such that it varies between 0 and a maximum rotation angle, noted α_m in the cited paper. With this modification, the motion generates two non-zero components of the mean aerodynamic force, each characterised by a dimensionless coefficient: C_L and C_T – in figure 3.6, the components would be along the $\vec{z}_0$ and $\vec{x}_0$ directions respectively. The objective of the study [Suzuki et al. 2015] is to investigate the lift and thrust generated by rectangular rigid wings attached to a body that is either fixed or free. The computation strategy used is the immersed boundary-lattice Boltzmann method. The first important parallel to draw with the present work is that the optimum phase is found to be within the same range [Suzuki et al. 2015, fig. 28]. Using similar parameters (with their notations $L = c$, $\alpha_m = \theta_m = 45°$,

4. The highest flight efficiency is obtained with wing kinematics minimising the power necessary to maintain a given lift during a flapping cycle.

5. Remarque : c'est une piste pour une étude future.

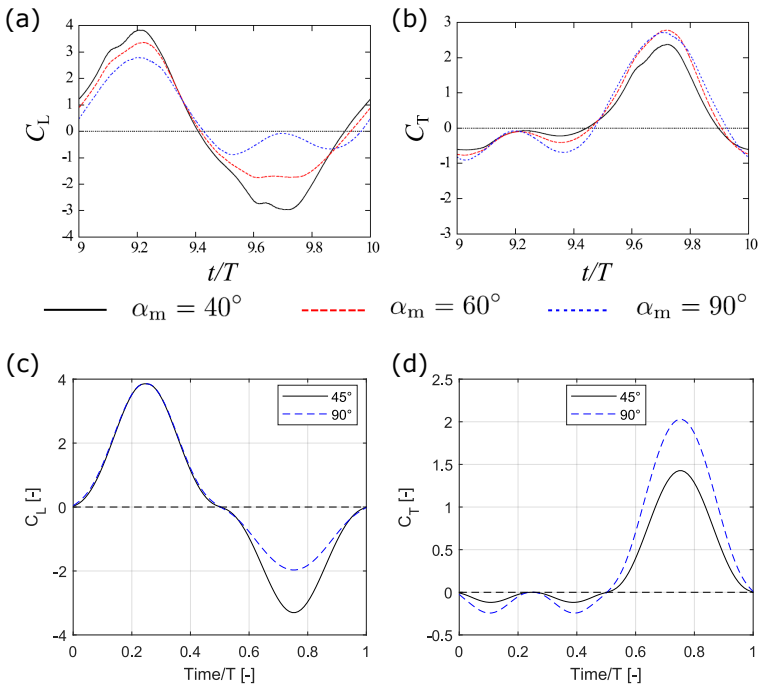


Figure 3.12 – Comparison of lift and thrust coefficients. (a, b) extracted from [Suzuki et al. 2015, fig. 6] and (c, d) computed with similar parameters and updated with $c_0 = 4.75$.

$\gamma = \pi/2$) and the definition of the coefficients:

$$C_L = \frac{\vec{F}_{\text{aero}} \cdot \vec{z}_0}{0.5\rho_f c L^3 (\pi/T)^2}, \qquad C_T = \frac{\vec{F}_{\text{aero}} \cdot \vec{x}_0}{0.5\rho_f c L^3 (\pi/T)^2}, \tag{3.25}$$

we compute the evolution of the lift and thrust coefficients during a stroke cycle, which are displayed fig. 3.12. This figure reveals a good match with the coefficients displayed in [Suzuki et al. 2015, figs. 6(a, b)] and reproduced fig. 3.12(a, b). The overall evolution is quite homogeneous with the numerical model, and for each coefficient, the relative amplitudes of the peaks are in good accordance. We can adjust the value of c_0 to match the first peak of C_L; we find $c_0 = 4.75$ for the Reynolds number used in the original study $Re = 500$. However, for a rotation amplitude of 90°, the lift coefficient maximum does not split into two, and the amplitudes don't match as well as those for $\alpha_m = 45°$, but the resemblance is still quite patent considering the level of accuracy of the CFD simulations and the simplicity of the force model that we use.

3.4 Aerodynamic force of an OVMI wing

The aerodynamic force formulation is now extended onto the case of a flexible solid for which we impose the displacements. As part of the OVMI project, a structural dynamics code has been developped. This code makes use of the Euler-Bernoulli kinematics for a beam truss and is able to predict, for given values of modal damping coefficients, the transverse displacement of each of its beam [Faux et al. 2019]. In this section, we show

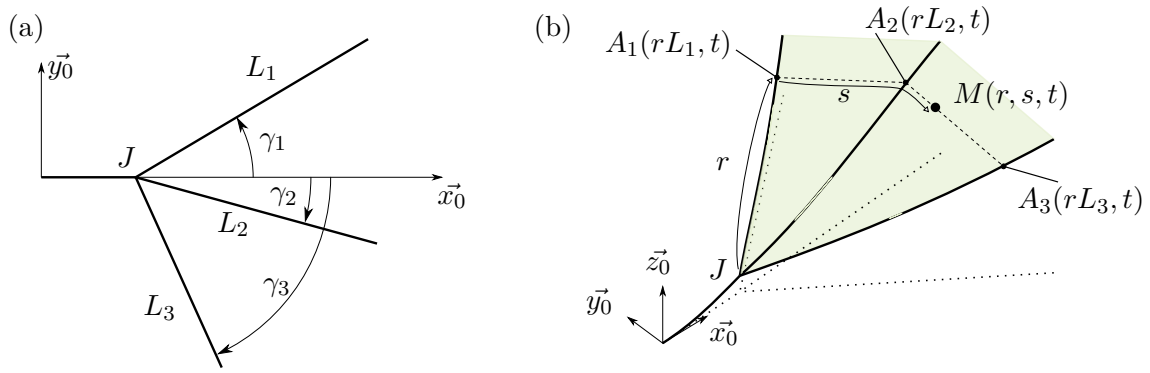


Figure 3.13 – Wing parametrisation. (a) Definition of the geometric dimensions for the wing at rest and (b) parametrisation of the interpolation.

how we use the calculated displacement to determine the velocity and the local normal to the wing for any point on the wing surface, necessary to compute the aerodynamic force. A specific drone geometry is tested: the frequency, time and space dependencies of the force are studied. The wing is at rest in the $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ plane [6], so the thrust direction is $\vec{y}_0$.

3.4.1 Calculation of the velocity of the wing

3.4.1.1 Remark on the damping model and weak coupling

The dynamic model uses a linear damping model. This accounts only for a small contribution of the action of air on the structure, however it is quite valid for small amplitude vibrations. In order to better take into account the effect of air on a flexible structure, and therefore obtain a more precise model, one should include the effects of the aerodynamic force acting on the structure specifically. It can be either computed as a circulation in a fluid mechanics perspective [Bidkar et al. 2009], or as a nonlinear damping with a term that matches Eq. (3.4), as studied in [Sayag and Dowell 2016, 2019]. A first step in this direction was undertaken in [Kang and Shyy 2014], however limited to small amplitude. For large amplitude vibrations, in the case of a single-mode response, it has been demonstrated in a previous study [Colin et al. 2020] that the displacement's amplitude increases with the square-root of the forcing amplitude (as a first approximation) and, in the absence of geometric nonlinearities, there was no shift in the natural frequency. Some experimental identification procedures were proposed on beams and beam assemblies and successfully applied to experimental data. However in the case of OVMI, since there is a modal combination – the response of the structure has two degrees of freedom active – the effective damping is more complex, and precludes the use of the method developed in [Colin et al. 2020].

We restrict the study to a single wing of the nanodrone. The full resultant would be obtained by summing the components of the thrust properly, i.e. the value on the $\vec{y}_0$ direction is doubled and the contributions on the $\vec{x}_0$ direction cancel one another out. The nanodrone wing structure is composed of several beams onto which a 400 nm-thick membrane is deposited. This membrane is neglected in the structural model. We consider

6. Remarque: cette paramétrisation est choisie pour être cohérente avec les chapitres suivants (en particulier le chapitre 4).

the case of a simple wing with three beams linked together at a junction point $J(x_J, y_J)$, see fig. 3.13(a). The beams are defined by their lengths L_i and the angle γ_i they form with the $\vec{x_0}$ axis. The position of a point A_i belonging to a beam i, at its abscissa x_i (ranging from 0 to L_i) and any time t, is:

$$\vec{OA}_i(x_i, t) = \begin{pmatrix} x_J + x_i \cos(\gamma_i) \\ y_J + x_i \sin(\gamma_i) \\ w_i(x, t) \end{pmatrix}, \forall x_i \in [0;\ L_i]. \tag{3.26}$$

3.4.1.2 Interpolation of the displacement

To calculate the position of a point M located on the membrane of the wing, it is necessary to interpolate it with the positions of the beams. To do so, let's define two additional variables r and s, as illustrated in fig. 3.13(b): r is the dimensionless abscissa of the points on the beams ($r = x_i/L_i$), it represents the location of the point M on the axis from point J to the edge of the membrane, and s is some sort of tangential abscissa, that ranges from 0 to 1 (from the leading-edge beam to the trailing edge beam). This parametrisation enables the interpolation of any physical quantity $\mathrm{H}(r, s, t)$, for a point in the membrane, from its local equivalent $\eta_i(x_i, t)$ for the beams:

$$\mathrm{H}(r, \frac{i-1}{2}, t) = \eta_i(rL_i, t), \quad \text{for } i = 1, 2, 3. \tag{3.27}$$

These 3 equations yield a polynomial interpolation of order at most 2 in s. In the specific case of the wings presented here, it could be possible to use a quadratic interpolation (cf. Appendix C.2.1), however it was decided to use a linear only interpolation (cf. Remark on the interpolation order). This is equivalent to having a wing divided into two parts (or triangles), j=1 and j=2 corresponding to $i = 1, 2$ and $i = 2, 3$ respectively, and for which one can define the interpolation function $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I} : \eta_j \longrightarrow \mathrm{H} \\ &\mathrm{H}(r, s, t) = \eta_j(rL_j, t) + 2(s - \frac{j-1}{2}) \left(\eta_{j+1}(rL_{j+1}, t) - \eta_j(rL_j, t)\right), \forall j \in \{1, 2\}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

which gives an equal value of $\mathrm{H}(r, 0.5, t)$, for $j = 1$ and $j = 2$ and is therefore continuous at $s = 0.5$. In addition, for each beam, we set the following notation: $C_i = L_i \cos(\gamma_i)$ and $S_i = L_i \sin(\gamma_i)$, for $i = 1, 2, 3$.

The displacement field forms a surface in space. Let a point M on that surface, the vector $\vec{OM}(t)$ writes:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(r, s, t) = X(r, s, t)\vec{x_0} + Y(r, s, t)\vec{y_0} + Z(r, s, t)\vec{z_0}. \tag{3.29}$$

Then the components of the position vector are, for all j in {1, 2}:

$$\begin{pmatrix} X(r, s, t) \\ Y(r, s, t) \\ Z(r, s, t) \end{pmatrix} = \mathcal{I}(\overrightarrow{OA_i}) = \begin{pmatrix} x_J + rC_j + 2(s - \frac{j-1}{2})r(C_{j+1} - C_j) \\ y_J + rS_j + 2(s - \frac{j-1}{2})r(S_{j+1} - S_j) \\ w_j(x, t) + 2(s - \frac{j-1}{2}) \left(w_{j+1}(r, t) - w_j(r, t)\right) \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

3.4.1.3 Remark on the interpolation order

Depending on the membrane's stiffness and inertia, and underlying coupling of the fluide-structure interaction, the exact formulation of the membrane's displacement may vary. In

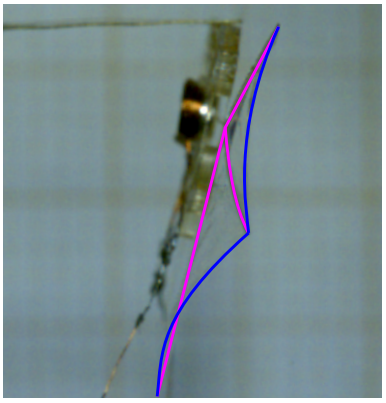


Figure 3.14 – Wing surface of an OVMI prototype during stroke. Photograph captured by a high-speed camera. The beams are highlighted in pink and the membrane edge is highlighted in blue.

fig. 3.14, the wing surface of an OVMI prototype during stroke is presented with highlighted beams and membrane edge. It clearly shows that the displacement of the membrane presents a singular point at the median beam. The displacement of the membrane may correspond to a parabola in each wing part, however it is out of the scope of the article to produce and validate such a complicated interpolation.

3.4.1.4 Obtaining the velocity

In the present case, since the dynamic model does not take into account geometric non-linearities, the velocity has only the transverse component, i.e. $\dot{X} = \dot{Y} = 0$. In addition, in classical vibrations theory, the space and time variables of the displacement can be separated, therefore the transverse velocity of a given point of the membrane is simply derived from Eq. (3.30):

$$\dot{Z}(r,s,t) = \frac{\partial Z}{\partial t} = \mathcal{I}(\dot{w}_i). \tag{3.31}$$

3.4.2 Deriving the force

3.4.2.1 Normal vector value

For any surface, one can calculate its local normal vector by calculating the cross product of two tangent vectors. The two tangent vectors are calculated from Eq. (3.29):

$$\begin{aligned} \vec{t_r} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r}\vec{x_0} + \frac{\partial Y}{\partial r}\vec{y_0} + \frac{\partial Z}{\partial r}\vec{z_0}, \\ \vec{t_s} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial s}\vec{x_0} + \frac{\partial Y}{\partial s}\vec{y_0} + \frac{\partial Z}{\partial s}\vec{z_0}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Applying these expressions to our case yields:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r} &= L_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x} + 2(s - \frac{j-1}{2})\frac{\partial}{\partial x}(L_{j+1}\eta_{j+1} - L_j\eta_j), \\ \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s} &= 2(\eta_{j+1} - \eta_j), \end{aligned} \tag{3.33}$$

i.e. $\dfrac{\partial Z}{\partial r} = \mathcal{I}(L_i w_i')$ and $\dfrac{\partial Z}{\partial s} = 2(w_{j+1} - w_j)$. It should be noted that the partial derivative with respect to s for $r = 0$ cannot be calculated. The (unitary) normal vector to a surface element is then written:

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_r \times \vec{t}_s}{\left\| \vec{t}_r \times \vec{t}_s \right\|}, \tag{3.34}$$

and we note $\vec{n} = n_x \vec{x}_0 + n_y \vec{y}_0 + n_z \vec{z}_0$.

3.4.2.2 Instantaneous force

Following the formulation for the aerodynamic force proposed in Eq. (3.4), the three components of $\vec{F}_a(t)$ are:

$$\begin{aligned}
F_{ax}(t) &= -\frac{\rho_f c_0}{2} \iint_{\Sigma} |\dot{Z}(r,s,t)| \dot{Z}(r,s,t) n_z(r,s,t) n_x(r,s,t) \mathrm{d}S, \\
F_{ay}(t) &= -\frac{\rho_f c_0}{2} \iint_{\Sigma} |\dot{Z}(r,s,t)| \dot{Z}(r,s,t) n_z(r,s,t) n_y(r,s,t) \mathrm{d}S, \\
F_{az}(t) &= -\frac{\rho_f c_0}{2} \iint_{\Sigma} |\dot{Z}(r,s,t)| \dot{Z}(r,s,t) n_z^2(r,s,t) \mathrm{d}S.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

where Σ is the undeformed wing surface. Indeed, with the hypothesis of an inextensible wing, the surface remains constant throughout a flapping cycle and the undeformed surface Σ can be easily defined with $Z(r,s,t) = 0$, $\forall (r,s) \in \mathcal{R}^2$ (this is a simplifying hypothesis as the displacement is considered to be transverse only, which means the area of Σ does increase from this value during the flapping cycle).

Since r et s are independent variables, it is possible to calculate each integral numerically via a double procedure on r and s.

3.4.2.3 Thrust force

With the given parametrisation, the direction of interest is $\vec{y}_0$ axis, therefore the thrust force is computed through the following averaging:

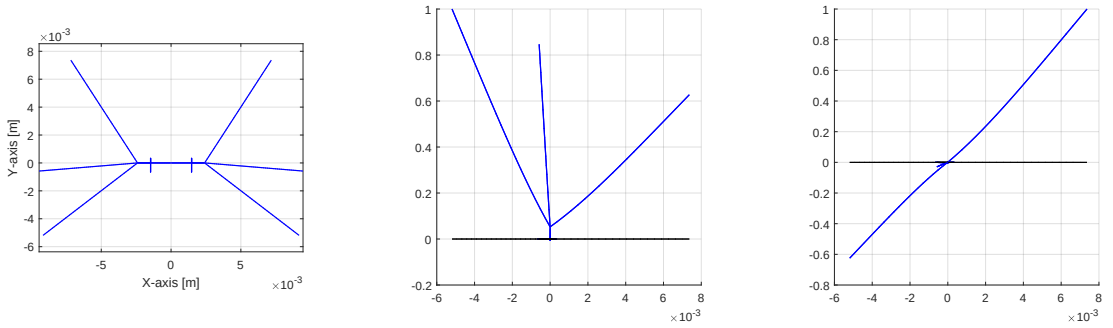
$$T = f_e \int_{t=0}^{1/f_e} F_{ay}(t) \mathrm{d}t, \tag{3.36}$$

i.e.

$$T = -\frac{\rho_f c_0 f_e}{2} \int_{t=0}^{1/f_e} \int_{r=0}^{1} \int_{s=0}^{1} |\dot{Z}(r,s,t)| \dot{Z}(r,s,t) n_z(r,s,t) n_y(r,s,t) \, \mathrm{d}r \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \tag{3.37}$$

3.4.3 Results

The calculations presented in the previous section have been applied to numerous geometries. With a significant number of geometric parameters, as well as a strong dependence on the damping and forcing, there is a high variability in the results. This section gives the results for one specific geometry of nanodrone, presented in Fig. 3.15(a). The design of this geometry has been purposefully chosen to have 2 predominant modes, with neighbouring natural frequencies (118-123 Hz) and with mode shapes corresponding to a bending and a twisting deformation of the wings respectively, as presented in Fig. 3.15(b, c) seen from the right. These mode shapes lead to kinematics of the wings similar to flapping and rotating



(a) Geometry (top view) (b) Bending mode (side view) (c) Twisting mode (side view)

Figure 3.15 – Prototype geometry and significant mode shapes (seen from the right).

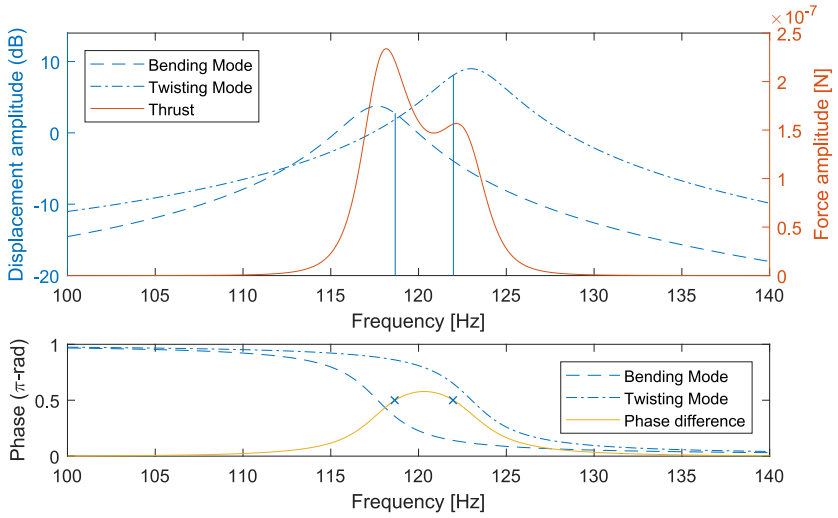


Figure 3.16 – Displacement and force behaviour as a function of the excitation frequency.

motions (although not perfectly those modelled in the previous section as the amplitude of the leading edge vein is noticeably smaller in the bending mode and larger in the twisting mode).

3.4.3.1 Force as a function of frequency

The figure 3.16 is obtained by calculating the mean thrust force for a range of excitation frequencies. The curve is superimposed on the frequency response functions at the tip of the leading-edge vein when the geometry is excited at its centre, the point (0,0) fig. 3.15(a). Each frequency response is obtained by considering only one of the modes. The dynamic part of the plot (the blue curves) shows the proximity of the natural frequencies and displays the phase quadrature frequencies (as signalled by the markers and reported with the vertical lines on the amplitude plot). Each of the phase shift quadrature frequencies nearly matches the thrust peaks, which can be explained by the results on rigid wings rotating about their mid-chord axis, section 3.3. The slight difference between each phase shift quadrature frequency and the peak frequency may be due to the fact that the mode shapes do not exactly match a pure flapping and rotation of the wings, or that the equiv-

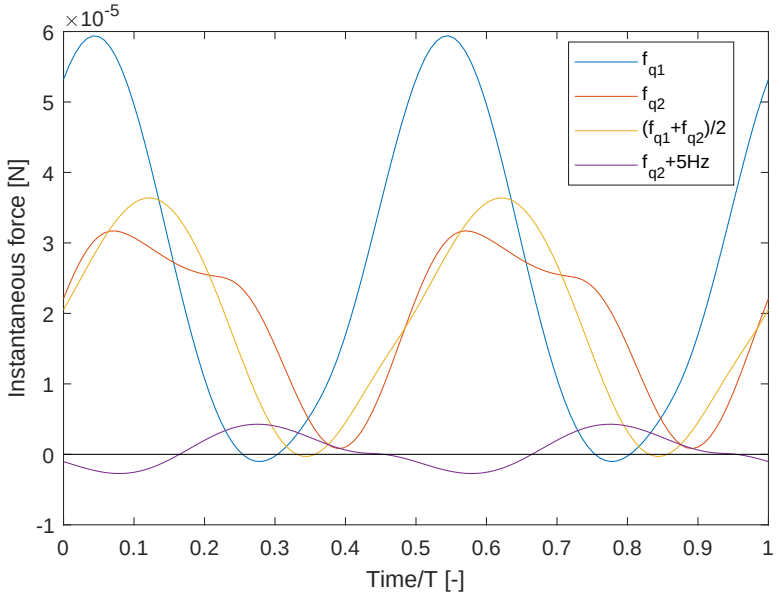


Figure 3.17 – Instantaneous thrust plotted over a cycle period. Given for different excitation frequencies: the two quadrature frequencies, the mean of these frequencies and a frequency slightly superior to the second quadrature frequency.

alent rotational axis is not exactly the mid-chord axis (cf fig. 3.8). Another interesting feature of this plot is that the peak with maximum amplitude in terms of thrust does not correspond to the highest displacement amplitude. This could be related to fig. 3.7 as a motion with a higher flapping amplitude may generate more thrust.

The excitation force was set low and the damping high, ensuring a small amplitude motion, in order to reduce the error due to the geometric linearisation of the problem. Even so, the dynamic response of this specific geometry does not have a significant value *per se* as the peak thrust force generated is around 2.3 ‰ the value of the forcing, which is very low even though the thrust force is quadratic in the excitation force (with a linear damping model). Nonetheless, it is possible to perform a parametric optimisation of the structure in order to maximise the thrust, in a similar approach proposed in the fine work [Stanford et al. 2012] but this is left for future work.

3.4.4 Force as a function of time

We choose four excitation frequencies from fig. 3.16: the first phase shift quadrature frequency (118.68 Hz), the second quadrature frequency (121.98 Hz), the mean of the quadrature frequencies (120.33 Hz) and a frequency 5 Hz greater than the second phase shift quadrature frequency (126.98 Hz). The figure 3.17 displays the instantaneous thrust with the time dependency reduced to the cycle period: the time evolutions present a $T/2$ period with a positive constant value which gives the mean thrust force values displayed in fig. 3.16. The effect of the phase can be seen with purple curve: the instantaneous force amplitude is not negligible (at this frequency there is a response of the structure at the twisting mode) however the mean constant is very small. The figures 3.5(c, d) give a striking perspective on this plot with a high resemblance of the evolution of the instantaneous force.

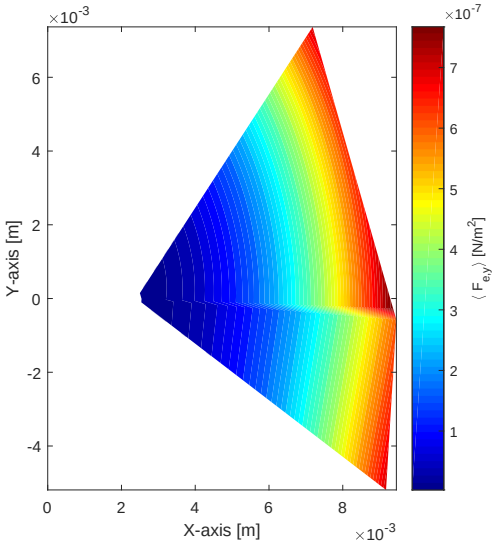


Figure 3.18 – Mean thrust force per surface element of an OVMI wing.

3.4.5 Force as a function of space

The figure 3.18 displays the mean thrust per surface element of the considered OVMI wing. Although the interpolation function $\mathcal{I}$ is continuous in s, we observe a discontinuity at the interface of the two parts; this is due to the different values of the normal calculated in each part. In a similar fashion as fig. 3.11, the surface elements that produce the more thrust are located the farthest from the equivalent stroke axis. It is interesting to note that the wings of Diptera are elongated and slender, which is coherent with this qualitative result.

3.5 Conclusion

This paper introduces a formulation of the aerodynamic force generated on a wing of a NAV based on the hypothesis of an aerodynamic force field orthogonal to the wing. The wing is thin and excited with both a sinusoidal stroke and a sinusoidal pitch motion, although it is known that dual sine excitation is not the most efficient actuation of the wings [Nabawy and Crowther 2015]. This is a consequence of the principle of actuation the drone, based on the combination of two modes in phase shift quadrature [Faux et al. 2018]. The force model is first applied on a thin rigid rectangular wing animated with two classical motions (pitch and plunge and rotation about two axes). For each motion, the wing is either pitching about its leading edge or its mid-chord axis. For both the 2-D and 3-D motions, we study the influence of the kinematic parameters to maximise the thrust force, i.e. the mean component of the force along the desired direction of motion. The optimum kinematics are displayed for the 2-D motion, as well as the evolution of the instantaneous thrust generated by the wing over a full stroke cycle. For the 3-D motion, the surfaces of the wings that generate the most thrust are highlighted. A comparison is proposed with the work of [Suzuki et al. 2015]: we impose a similar motion to a plate and compute the lift and thrust coefficients. Comparing the evolutions of these coefficients over a stroke cycle yields a good enough resemblance to update the c_0 parameter for this

case. We also perform a linearisation of the motion to extract some core features of the aerodynamic force and to evaluate its impact as well on the accuracy of the estimated force compared to the one obtained with geometrically exact equations of motion.

Indeed, we apply the proposed aerodynamic force formulation to compute the thrust generated by a flexible wing which displacement is analytically calculated with a linear structural model developed previously [Faux et al. 2019]. As the thrust is highly dependent on the kinematics of the structure, which in turn depends on its geometry and damping, we present the results for a single drone geometry. This structure is chosen because it presents a bending mode and a twisting mode of the wings that produce a motion relatively close to a flapping motion and a pitching motion of the wings respectively. This model indicates that the peaks of the mean thrust force as a function of the excitation frequency are located in the vicinity of the phase shift quadrature frequencies. The evolution of the instantaneous force as a function of time is presented for different excitation frequencies, revealing a resemblance with the corresponding plot of the 2-D motion. Besides, we also confirm on this structure that the surfaces on the wing that generate the most thrust are located at the farthest from the (equivalent) stroke axis.

These simulations can be compared to experimental data from [Faux et al. 2018], fig. 3.19. The prototype was designed to produce as much lift as possible which explains the amplitude of mean thrust force obtained (called Lift Force on the graph). A measurement set-up able to simultaneously identify two components of the total instantaneous aerodynamic force is in preparation.

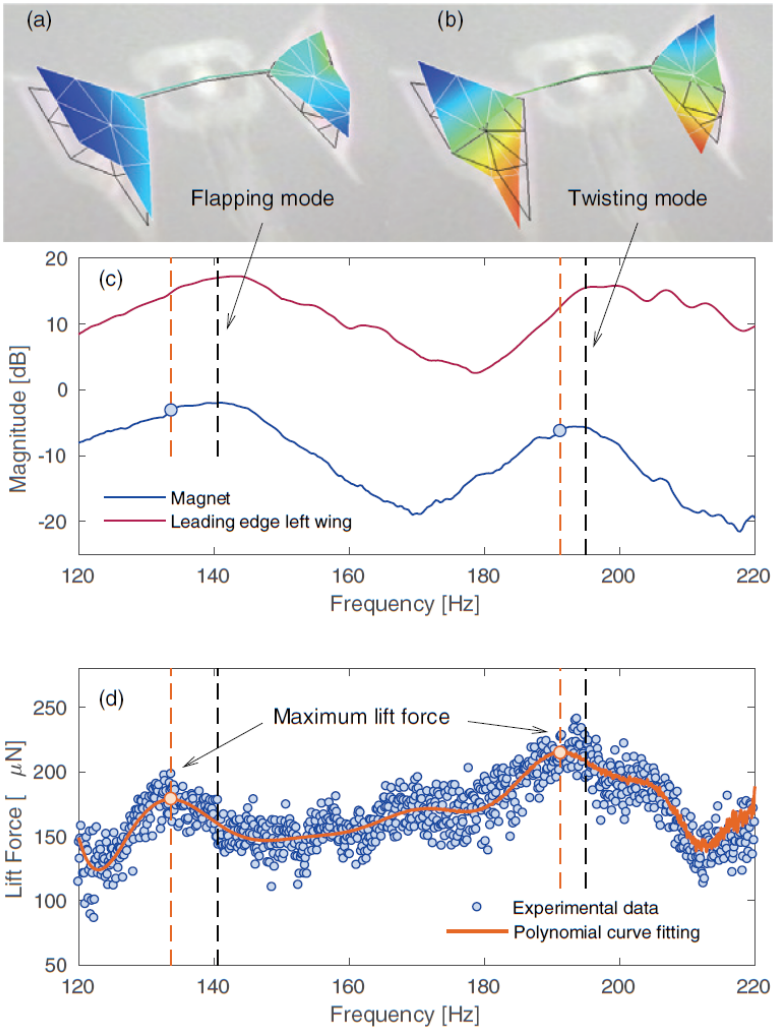


Figure 3.19 – Experimental data of lift force as a function of frequency, obtained for a given prototype of OVMI [Faux et al. 2018]. (a, b) Mode shapes, (c) Frequency Response Function and (d) mean thrust force as a function of frequency.

Deuxième partie

Optimisation de nanodrones à ailes vibrantes

Chapitre 4

Code ODT (*OVMI Design Tool*)

It is a strange fate that we should suffer so much fear and doubt over so small a thing... such a little thing.

J.R.R. Tolkien, *The Fellowship of the ring*

Dans ce chapitre, on décrit le code mis en place pour le calcul de la dynamique des structures considérées, appelé ODT pour *OVMI Design Tool*. La structure est modélisée comme un treillis de poutres avec une cinématique d'Euler-Bernoulli. Dans un premier temps, l'utilisateur définit la position des extrémités de toutes les poutres (appelées nœuds), la connectivité – c'est-à-dire quelles poutres relient quels nœuds – et enfin l'affectation des conditions aux limites de type encastrement aux nœuds correspondants. Le code calcule alors un nombre prédéterminé de fréquences propres et les déformées modales associées. Dans un second temps, en indiquant l'amplitude de forçage et les coefficients d'amortissement modaux, le code détermine les fonctions de réponse en fréquence (FRF [1]) en un point donné pour une excitation harmonique au nœud correspondant à l'aimant.

Ce chapitre est dédié à la présentation de l'ODT et à sa validation : la première section introduit le code de calcul, illustré pour une géométrie donnée. La deuxième section indique l'ensemble des simulations ayant permis de valider le code sur des structures de complexité croissante. La troisième section aborde la pertinence de l'ODT pour la prédiction de la dynamique des prototypes fabriqués. Enfin la quatrième section détaille rapidement le calcul de la contrainte équivalente de von Mises. Le code ODT est utilisé pour l'optimisation de géométries de prototypes, présentée dans le chapitre suivant.

Sommaire du chapitre

4.1 Présentation de l'ODT 82
4.1.1 Principe 82
4.1.2 Définition de la structure géométrique 83
4.1.3 Mise en équation des conditions aux limites 86
4.1.4 Justification de la modification 88
4.1.5 Analyse modale 88
4.2 Validation de l'ODT 91
4.2.1 Structures simples 92
4.2.2 Validation successive de structures plus complexes 93
4.2.3 Conclusion sur la validité 95

1. Pour rappel, les termes repérés en gris dans le texte sont des liens qui amènent au glossaire.

4.3 Pertinence de l'ODT pour la prédiction de la dynamique réelle 98
4.3.1 Comparaison des fréquences propres avant/après modification . . 98
4.3.2 Origine de l'écartement des fréquences propres expérimentales . . 101
4.4 Contrainte mécanique 103
4.5 Conclusion 104

4.1 Présentation de l'ODT

4.1.1 Principe

Le code ODT repose sur le code de calcul de structure développé initialement par D. Faux, lors de sa thèse [Faux 2018]. Ce code a été transformé pour le rendre plus facile d'utilisation et lui implémenter de nouvelles fonctionnalités, comme la prise en compte de l'effet du gauchissement et l'ajout de masses ponctuelles, permettant ainsi de modéliser des aimants collés sur la structure, notamment l'actionneur.

On considère dans cet outil de dimensionnement que les prototypes n'ont pas de membrane sur les ailes ; cela revient à négliger leur contribution du point de vue de la raideur et de la masse. Le système peut alors être modélisé simplement comme un treillis de poutres – c'est-à-dire un assemblage de poutres reliées entre elles en des points appelés nœuds – qui est excité au nœud correspondant à l'aimant par un forçage harmonique dans la direction $\vec{z}_0$, normale au plan du prototype. Toutes les poutres sont constituées d'un même matériau isotrope de module de Young E et de masse volumique ρ. Dans la mesure où toutes les lignes moyennes des poutres sont coplanaires, et bien que chaque poutre puisse avoir des dimensions de section différentes, on considère que le treillis est plan. On restreint alors l'étude aux déplacements dus à la flexion hors plan des poutres ainsi qu'à la torsion. Une option du code permet d'affecter à toutes les poutres de l'assemblage ont une section circulaire ou rectangulaire. Dans le cadre de la conception de nanodrones fabriqués en salle blanche, seul le type de section rectangulaire est utile puisque la fabrication s'effectue par dépôts de résine successifs. À la différence des poutres à sections circulaires, celles à section rectangulaires soumises à de la torsion présentent un gauchissement de leurs sections, qui induit un champ de déplacement axial (négligé par l'ODT) et surtout qui modifie le moment de torsion. Chaque poutre i de l'assemblage vérifie alors deux équations de poutre, pour chaque déplacement. Pour le déplacement transverse d'une section d'abscisse x noté $w_i(x,t)$, dû à la flexion hors plan de la poutre i, on a :

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \rho S_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = p_i, \tag{4.1}$$

où I_i, S_i et p_i sont respectivement le moment quadratique en flexion, la surface de la section et l'effort linéique s'appliquant sur la poutre i. Pour l'angle de torsion $\theta_i(x,t)$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$-G\tilde{J}_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \rho J_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = q_i, \tag{4.2}$$

où J_i désigne le moment quadratique polaire de la poutre i alors que $\tilde{J}_i$ est le moment quadratique de torsion corrigé pour le gauchissement de cette même poutre (pour une poutre circulaire $\tilde{J}_i = J_i$, alors que pour une poutre à section carrée de côté a par exemple, $\tilde{J}_i = 0,1406\, a^4$), G désigne le module de cisaillement $G = E/(2+2\nu)$, où ν est le coefficient

de Poisson du matériau considéré et q_i désigne le moment linéique de torsion s'appliquant sur la poutre i.

On cherche les modes comme solutions du système libre conservatif (p_i nul) ; pour chaque déplacement, on peut procéder à la séparation des variables :

$$\begin{aligned} w_i(x,t) &= \Phi_i(x)q(t), \\ \theta_i(x,t) &= \Psi_i(x)q(t). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ainsi q, Φ_i et Ψ_i, respectivement la coordonnée modale, la déformée modale en flexion et la déformée modale en torsion de la poutre i, vérifient :

$$\ddot{q} = -\omega^2\, q, \tag{4.4}$$

$$\Phi_i'''' - \frac{\rho\, S_i}{E\, I_i}\omega^2\, \Phi_i = 0, \tag{4.5}$$

$$\Psi_i'' + \frac{\rho J_i}{G\tilde{J}_i}\omega^2\, \Psi_i = 0. \tag{4.6}$$

De plus, on définit $\delta_i = \left(\frac{\rho S_i}{E I_i}\right)^{1/4}$ et $\gamma_i = \sqrt{\frac{\rho J_i}{G\tilde{J}_i}}$, ainsi que les solutions générales pour les déformées modales :

$$\begin{cases} \Phi_i(x) = A_i \cos(\delta_i\sqrt{\omega}x) + B_i \sin(\delta_i\sqrt{\omega}x) + C_i \cosh(\delta_i\sqrt{\omega}x) + D_i \sinh(\delta_i\sqrt{\omega}x), \\ \Psi_i(x) = E_i \cos(\gamma_i\, \omega\, x) + F_i \sin(\gamma_i\, \omega\, x), \end{cases} \tag{4.7}$$

que l'on peut aussi écrire sous forme matricielle en regroupant les fonctions trigonométriques dans les vecteurs $\underline{\Phi}_i(x)$ et $\underline{\Psi}_i(x)$:

$$\begin{cases} \Phi_i(x) = \underline{\Phi}_i(x) \cdot [A_i\ B_i\ C_i\ D_i]^{\mathrm{T}}, \\ \Psi_i(x) = \underline{\Psi}_i(x) \cdot [E_i\ F_i]^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{4.8}$$

La détermination des modes du treillis consiste à assembler une matrice $\underline{\underline{K}}(\omega)$ telle que $\underline{\underline{K}}(\omega)[A_1 ... A_i\, B_i\, C_i\, D_i\, E_i\, F_i ...]^{\mathrm{T}} = 0$ à partir des conditions aux limites de toutes les poutres du treillis. La première opération est le calcul des fréquences propres, qui correspondent aux valeurs de ω telles que le déterminant de $\underline{\underline{K}}$ soit nul. On obtient ensuite les déformées modales en trouvant les coefficients $[A_1 ... A_i\ B_i\ C_i\ D_i\ E_i\ F_i ...]^{\mathrm{T}}$, avec l'un des coefficients égal à 1.

4.1.2 Définition de la structure géométrique

On définit la géométrie de façon matricielle, d'une façon assez analogue aux éléments finis :

- l'utilisateur remplit initialement la matrice des nœuds avec leurs coordonnées. Il précise par ailleurs quels nœuds correspondent à des encastrements. La dernière colonne de la matrice des nœuds est compilée *a posteriori* automatiquement pour affecter le bon type de conditions aux limites ;
- l'utilisateur remplit également la matrice de connectivité, où chaque ligne correspond à une poutre donnée, en indiquant le nœud initial et le nœud final de chaque poutre, ainsi que sa largeur et son épaisseur (ou le diamètre dans le cas d'une section circulaire).

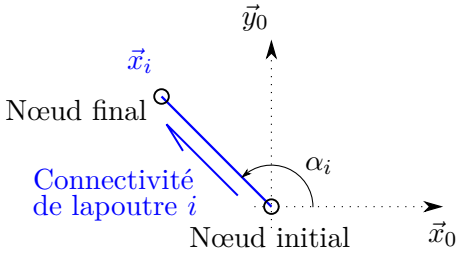


Figure 4.1 – Définition de l'angle α_i pour une poutre orientée.

Grâce à ces trois informations, le code calcule alors automatiquement toutes les grandeurs nécessaires à son fonctionnement. On peut ainsi déterminer les longueurs et angles d'orientation des poutres, que l'on concatène à la matrice de connectivité, formant ainsi ce qui sera stocké en mémoire comme la matrice « Poutres ».

Avec cette définition de la géométrie, chaque poutre a son propre repère, noté R_i qui correspond à $(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_0)$, où $\vec{x}_i$ désigne la direction de la poutre et le vecteur $\vec{y}_i$ est construit pour former un repère direct avec $\vec{x}_i$ et $\vec{z}_0$. Pour l'assemblage de différentes poutres, il est en général plus pratique de projeter les équations de chaque poutre sur le repère fixe R_0. On note α_i l'angle formé entre la poutre et l'axe $\vec{x}_0$: $\alpha_i = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_i})$, cf. fig. 4.1. On peut alors, quels que soient la direction et le sens de la poutre, exprimer dans le repère cartésien (O,$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$), les équations vérifiées par la poutre via la projection :

$$\begin{cases} \vec{x}_i = \cos(\alpha_i)\,\vec{x}_0 + \sin(\alpha_i)\,\vec{y}_0, \\ \vec{y}_i = -\sin(\alpha_i)\,\vec{x}_0 + \cos(\alpha_i)\,\vec{y}_0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Chaque nœud à l'extrémité d'une poutre est soit son nœud initial, soit son nœud final. On verra dans la sous-section suivante que cette distinction amène des changements de signe. L'abscisse d'un nœud initial est zéro et l'abscisse d'un nœud final est L_i, la longueur de la poutre reliant ces nœuds. De plus, on distingue trois types de nœuds :

— nœud « jonction » : c'est-à-dire un nœud sur lequel sont reliées plusieurs poutres ;
— nœud encastré : ce nœud correspond à une extrémité de poutre attachée à une partie massive (comme le thorax) et donc considérée comme encastrée. L'utilisateur doit spécifier les indices des nœuds encastrés, qui doivent aussi être définis, dans la matrice de connectivité, comme des nœuds finaux des poutres (pour simplifier la construction de la matrice de rigidité) ;
— nœud libre : ce type de nœuds est aussi défini sur des nœuds finaux.

Le code reconnaît automatiquement les nœuds jonctions puisque le nombre de poutres qui lui sont liées est strictement supérieur à 1. Il détecte ainsi les indices des poutres liées à chaque nœud jonction. Ensuite, le fait que l'utilisateur précise quelles extrémités sont encastrées discrimine automatiquement les extrémités libres. Pour information, la convention retenue pour repérer le type de condition aux limites dans la dernière colonne de la matrice des nœuds est une valeur scalaire de 1 pour une jonction, 0 pour une extrémité libre et -1 pour une extrémité encastrée. À titre d'exemple, le tableau 4.1 donne les matrices de coordonnées et connectivités pour la géométrie GL1 décrite dans la figure 4.2 (ici $b = h$ = 40 μm). On peut choisir n'importe quel nœud comme origine du repère de la géométrie considérée, mais l'aimant est un bon candidat puisque la structure est symétrique par rapport à l'aimant (sur la figure 4.2 le repère est décalé pour une meilleure lisibilité). On peut commencer le décompte par un nœud jonction proche d'une extrémité libre, comme

dans la figure 4.2, puis procéder pour les nœuds suivants de façon ordonnée en les balayant dans le sens trigonométrique positif et de gauche à droite.

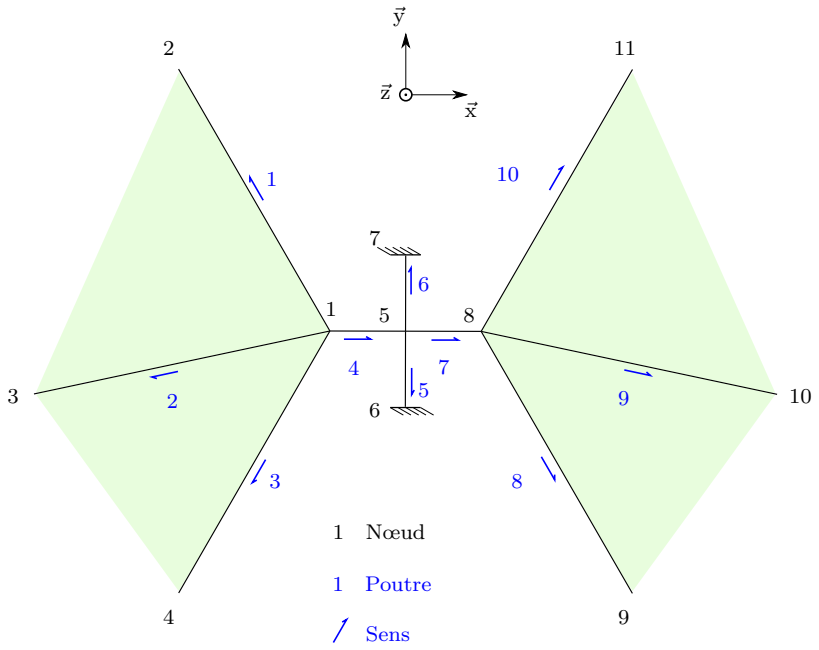


Figure 4.2 – Schéma du GL1, échelle 5 : 1. On indique les nœuds et les connectivités. L'aimant est modélisé éventuellement par une masse ponctuelle ajoutée sur le nœud 5.

$$Coord = \left(\begin{array}{cc|c} -0.002 & 0 & 1 \\ -0.006 & 0.0069 & 0 \\ -0.0098 & -0.0016 & 0 \\ -0.006 & -0.0069 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.002 & -1 \\ 0 & 0.002 & -1 \\ 0.002 & 0 & 1 \\ 0.006 & -0.0069 & 0 \\ 0.0098 & -0.0016 & 0 \\ 0.006 & 0.0069 & 0 \end{array}\right)_{R_0} \quad \& \quad Connec = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2\,b & 2\,h \\ 1 & 3 & 2\,b & 2\,h \\ 1 & 4 & 2\,b & 2\,h \\ 1 & 5 & 2\,b & 2\,h \\ 5 & 6 & 2\,b & 2\,h \\ 5 & 7 & 2\,b & 2\,h \\ 5 & 8 & 2\,b & 2\,h \\ 8 & 9 & 2\,b & 2\,h \\ 8 & 10 & 2\,b & 2\,h \\ 8 & 11 & 2\,b & 2\,h \end{array}\right)$$

Tableau 4.1 – Exemples de matrices de coordonnées et connectivités.

4.1.3 Mise en équation des conditions aux limites

Pour trouver les $[A_i; \ldots; F_i]$, il est nécessaire de construire la matrice $\underline{\underline{K}}$ (qui dépend de ω, δ_i et γ_i) en posant les équations de conditions aux limites de chaque poutre. On détaille ici la construction de cette matrice.

On rappelle les expressions respectives du moment de torsion $M_{\mathrm{t}i}$, du moment de flexion (suivant $\vec{y_i}$) $M_{\mathrm{f}yi}$ et de l'effort tranchant T_i pour une poutre i, en fonction des déplacements :

$$\begin{cases} M_{\mathrm{t}i} = G\tilde{J}_i\theta_i', \\ M_{\mathrm{f}yi} = -EI_i w_i'', \\ T_i = -EI_i w_i'''. \end{cases} \tag{4.10}$$

4.1.3.1 Extrémités libres et encastrées

Dans le cas d'une condition aux limites de type encastrement ou libre en un point de coordonnée x de la poutre i, on a trois équations à vérifier. Pour une extrémité encastrée, le déplacement transverse, la rotation en torsion ainsi que l'angle de flexion sont nuls :

$$\begin{cases} w_i(x) = 0, \\ \theta_i(x) = 0, \\ w_i'(x) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Pour une extrémité libre, le PFD (Principe Fondamental de la Dynamique) appliqué en un nœud sur lequel est accrochée une masse m donne :

$$\begin{cases} M_{\mathrm{t}i}(x) = 0, \\ M_{\mathrm{f}yi}(x) = 0, \\ T_i(x) + m\,\ddot{w}_i(x) = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

4.1.3.2 Continuité entre n_p poutres

Par ailleurs, pour une jonction, le nombre d'équations à vérifier dépend du nombre de poutres reliées à cette jonction, noté n_p (à distinguer du nombre total de poutres p du treillis). Avec la convention usuelle d'isoler le tronçon de gauche, le signe des expressions des efforts intérieurs change pour un nœud initial ou final. Pour un nœud initial, on a :

$$\begin{cases} M_{\mathrm{t}i}(0) = -G\tilde{J}_i\theta_i'(0), \\ M_{\mathrm{f}i}(0) = EI_i w_i''(0), \\ T_i(0) = EI_i w_i'''(0), \end{cases} \tag{4.13}$$

et dans le cas où le nœud considéré est le nœud final d'une poutre i – donc situé à l'abscisse L_i – on a en revanche :

$$\begin{cases} M_{\mathrm{t}i}(L_i) = G\tilde{J}_i\theta_i'(L_i), \\ M_{\mathrm{f}i}(L_i) = -EI_i w_i''(L_i), \\ T_i(L_i) = -EI_i w_i'''(L_i). \end{cases} \tag{4.14}$$

Quelle que soit la poutre i liée au nœud, on choisit une poutre à laquelle on se réfère par l'indice 1. Cette poutre pourrait être arbitraire mais est codée comme étant la première poutre de la jonction. Les équations de continuité du mouvement s'écrivent alors, $\forall i \in [2, n_p]$:

$$\begin{cases} w_i(x_i) = w_1(x_1), \\ (\theta_i(x_i)\vec{x}_i - w_i'(x_i)\vec{y}_i) \cdot \vec{x}_0 = (-w_1'(x_1)\vec{y}_1 + \theta_1(x_1)\vec{x}_1) \cdot \vec{x}_0, \\ (\theta_i(x_i)\vec{x}_i - w_i'(x_i)\vec{y}_i) \cdot \vec{y}_0 = (-w_1'(x_1)\vec{x}_1 + \theta_1(x_1)\vec{x}_1) \cdot \vec{y}_0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Après la séparation des variables introduite pour l'équation (4.3) et en projetant chaque composante de rotation (en torsion et flexion) sur les axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$, on obtient $(n_p - 1)$ systèmes de trois équations, $\forall i \in [2, n_p]$:

$$\begin{cases} \Phi_i(x_i) - \Phi_1(x_1) = 0, \\ \cos(\alpha_i)\Psi_i(x_i) + \sin(\alpha_i)\Phi_i'(x_i) - \cos(\alpha_1)\Psi_1(x_1) - \sin(\alpha_1)\Phi_1'(x_1) = 0, \\ \sin(\alpha_i)\Psi_i(x_i) - \cos(\alpha_i)\Phi_i'(x_i) - \sin(\alpha_1)\Psi_1(x_1) + \cos(\alpha_1)\Phi_1'(x_1) = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Une masse ponctuelle m peut être placée sur un nœud ; le PFD appliqué au nœud s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_p} \vec{M}_i = \vec{0}, \\ \sum_{i=1}^{n_p} \vec{T}_i = -m\vec{a} \end{cases} \tag{4.17}$$

où le moment de la poutre s'écrit $\vec{M}_i = M_{ti}\vec{x}_i + M_{fyi}\vec{y}_i$ et $\vec{a} = \ddot{w}_i\vec{z}_0$ est l'accélération du nœud. On a vu que selon la nature du nœud (initial ou final), les équations pour le moment de flexion et pour l'effort tranchant peuvent avoir des signes opposés. On note P_a et P_p les sous-ensembles complémentaires des poutres arrivant et partant du nœud.

La projection sur l'axe $\vec{x}_0$ du PFD donne :

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in P_p} \Big(-\cos(\alpha_i) G\tilde{J}_i \Psi_i'(0) - \sin(\alpha_i) EI_i \Phi_i''(0) \Big) \\ &+ \sum_{i \in P_a} \Big(\cos(\alpha_i) G\tilde{J}_i \Psi_i'(L_i) + \sin(\alpha_i) EI_i \Phi_i''(L_i) \Big) = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

La projection sur l'axe $\vec{y}_0$ du PFD donne :

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in P_p} \Big(-\sin(\alpha_i) G\tilde{J}_i \Psi_i'(0) + \cos(\alpha_i) EI_i \Phi_i''(0) \Big) \\ &+ \sum_{i \in P_a} \Big(\sin(\alpha_i) G\tilde{J}_i \Psi_i'(L_i) - \cos(\alpha_i) EI_i \Phi_i''(L_i) \Big) = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Enfin, pour le calcul de l'accélération du nœud, on choisit une poutre donnée, notée j. Afin de garder le bon signe, cette poutre est choisie pour être une poutre partante de ce nœud [2]. L'expression de l'équilibre dynamique suivant $\vec{z}_0$ s'écrit alors :

$$\sum_{i \in P_p} \left(EI_i \Phi_i'''(0) \right) + \sum_{i \in P_a} \left(-EI_i \Phi_i'''(L_i) \right) - m\omega^2 \Phi_j(0) = 0. \tag{4.20}$$

On compte $(n_p - 1)$ équations de continuité du mouvement global ; en projetant ces équations sur chacun des 3 axes du repère, on obtient $3(n_p - 1)$ équations. Or, les poutres étant en équilibre dynamique, on a 3 équations supplémentaires (avec la projection du PFD), ce qui porte le total à $3n_p$ équations par jonction. De plus, on a vu que les nœuds correspondant à une extrémité libre ou encastrée ont aussi 3 équations associées. Or, le nombre de poutres de l'assemblage est égal à la moitié du nombre d'extrémités (n_e) additionné de la somme de tous les n_p, puisque chaque poutre a deux nœuds. Par exemple, pour le GL1, il y a 8 extrémités et $\sum n_p = 12$, donc $p = (8 + 12)/2 = 10$. Il y a donc $2\sum(3n_p + 3n_e)$ équations au total pour le treillis, soit $6p$. La matrice $\underline{\underline{K}}$ est construite en attribuant à chaque ligne l'une de ces équations écrites avec le membre de droite nul, puisqu'on cherche – pour rappel – $\underline{\underline{K}}(\omega)[A_1 ... A_i\ B_i\ C_i\ D_i\ E_i\ F_i ... F_p]^{\mathrm{T}}$=0. Chacune des p poutres de l'assemblage a 6 coefficients de déformée modale, la matrice $\underline{\underline{K}}$ a $6p$ colonnes : elle est donc toujours carrée.

2. Il y a toujours au moins une poutre partante à chaque nœud de jonction.

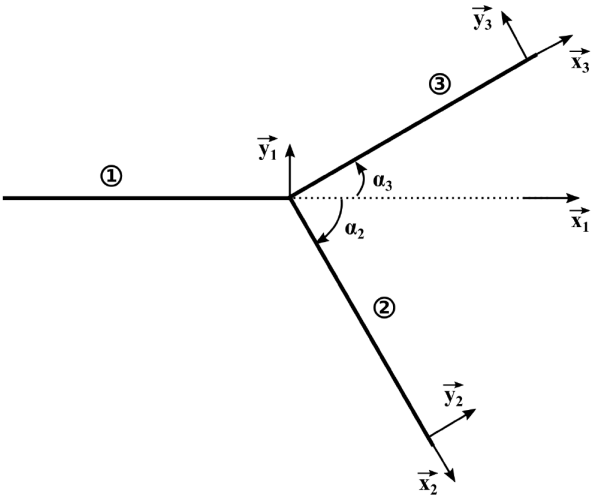


Figure 4.3 – Définition de la jonction élémentaire en Y pour la construction de la matrice de conditions aux limites [Faux 2018].

4.1.4 Justification de la modification

La méthode de [Faux 2018] pour la construction de la matrice $\underline{\underline{K}}(\omega)$ consiste à considérer le système comme une superposition de jonctions « élémentaires en Y », illustrée en figure 4.3. Ce schéma élémentaire en Y a été utilisé par mon prédécesseur pour faire l'analyse modale des géométries des différentes architectures. Toutefois, dans le cas d'une géométrie présentant une jonction avec un nombre de poutres reliées en ce point différent de 3, des « poutres fictives » sont créées ; ce sont des poutres de longueur nulle utilisées pour revenir systématiquement au cas de jonction en Y. Le problème aux valeurs propres est alors complexifié, ce qui allonge le temps de calcul. De plus, il est difficile de visualiser les grandeurs calculées pour un point particulier d'une poutre donnée, ce qui complique l'implémentation de calculs additionnels (contrainte, portance, etc...). Enfin la définition de la géométrie nécessitait une application de règles implicites (liées entre autres à l'orientation des poutres) et donc peu pratique pour l'utilisateur non averti.

Ces contraintes ont justifié la décision initiale de réécrire le code, ce qui a donné l'opportunité d'implémenter les fonctionnalités supplémentaires. La capacité de modéliser la présence de petites masses en bout d'ailes permet notamment d'évaluer la technique d'ajout de masses dans un objectif d'augmentation de l'amplitude de vibration des ailes, au détriment d'une fréquence d'excitation plus basse. En effet, cette technique a été utilisée par le passé [Vanneste 2013] et a contribué à obtenir une amplitude en flexion de l'ordre de 60°.

4.1.5 Analyse modale

Cette sous-section expose la méthode de résolution du problème aux valeurs propres, qui suit la définition du problème géométrique. Cette méthode a été mise en place dans la thèse précédente, et est réutilisée telle quelle dans l'ODT. La résolution s'opère en deux temps. La première opération est le calcul des fréquences propres, en cherchant les valeurs de ω telles que $\det(\underline{\underline{K}}(\omega))=0$. Puis, on détermine les déformées modales en résolvant un système linéaire. Quelques subtilités techniques liées à la manière de procéder pour ces

deux opérations sont explicitées ici pour de futurs utilisateurs de l'ODT.

4.1.5.1 Calcul des fréquences propres

Pour le calcul des fréquences propres, on procède en deux temps car le calcul du déterminant est une opération relativement coûteuse :

1. recherche des passages par zéro du déterminant de $\underline{\underline{K}}$ sur des intervalles de recherche de ω notés I_n. On cherche un nombre de passages égal au nombre de modes désirés n_k – en général la troncature est établie à 4 ;
2. utilisation de la fonction *fzero* de Matlab (qui repose sur un algorithme combinant dichotomie, méthodes de la sécante et d'interpolation quadratique inverse) pour obtenir une estimation précise de la valeur propre ω_k avec une convergence rapide.

Ces deux opérations sont codées dans une fonction développée en interne appelée « *find_det_zer* ». Elle discrétise un premier intervalle (I_1) de ω où, pour chaque valeur discrète prise sur cet intervalle, la fonction calcule le déterminant et détecte tout changement de son signe. Tant que le nombre de passages par zéro détectés n'est pas égal à n_k, un nouvel intervalle adjacent (I_2 ... I_n) au précédent est défini et la recherche continue. Dans le cas où un changement de signe est observé entre une valeur de ω et la suivante, celles-ci définissent un (petit) intervalle J_k où la fonction *fzero* trouve rapidement la valeur précise de ω_k pour laquelle le déterminant s'annule.

Si la discrétisation des intervalles I_n est insuffisante, la fonction risque d'ignorer deux passages par zéro du déterminant et donc d'ignorer 2 modes, puisque le signe du déterminant reste le même. Il faut donc bien veiller à ce que la borne inférieure de I_1 soit suffisamment faible et à une discrétisation suffisante des I_n. Cependant cette discrétisation allonge considérablement le temps de calcul. Ceci peut être gênant lors de l'utilisation du code dans l'algorithme d'optimisation présenté au chapitre 5, d'autant plus que l'objectif est justement de rapprocher les fréquences de quadrature et donc les fréquences propres. À titre d'information, la durée nécessaire pour trouver les six premières fréquences propres du prototype WR est de l'ordre de 20 secondes (avec un processeur i7-8650).

4.1.5.2 Calcul des déformées modales

Après avoir calculé les fréquences propres ω_k, on doit résoudre le système linéaire $\underline{\underline{K}}(\omega_k)\underline{X} = 0$ où $\underline{X} = [A_1...A_i\ B_i\ C_i\ D_i\ E_i\ F_i...F_p]^{\mathrm{T}}$ pour trouver les déformées modales. Le déterminant de $\underline{\underline{K}}(\omega_k)$ étant nul (les modes sont définis à une constante multiplicative près), on retire la dernière ligne puis la dernière colonne de $\underline{\underline{K}}(\omega_k)$ pour former une matrice notée $\underline{\underline{K^*}}$. La colonne retirée est notée $\underline{B}$, de longueur $6p-1$. On définit aussi $\underline{X} = [\underline{X^*}\ 1]^{\mathrm{T}}$, c'est-à-dire $\underline{X^*} = [A_1...A_i\ B_i\ C_i\ D_i\ E_i\ F_i...E_p]^{\mathrm{T}}$. Comme le dernier coefficient de $\underline{X}$ (i.e. F_p) est posé égal à 1 et que $\underline{\underline{K}}\ \underline{X} = 0$, on a :

$$\underline{\underline{K}}^*\ \underline{X}^* = -\underline{B}. \tag{4.21}$$

On résout ce système linéaire à l'aide de la fonction *mldivide* de Matlab qui utilise la méthode LU, compte-tenu des propriétés de $\underline{\underline{K}}^*$ (elle n'est pas symétrique). Cette opération est répétée pour le calcul de chaque déformée modale, donc n_k fois. À titre d'information, la durée nécessaire pour le calcul des six premières déformées modales du WR est de l'ordre de

deux centièmes de seconde. Comme le code n'est pas adimensionné, il est fréquent d'avoir des alertes Matlab de singularité (avec des valeurs de RCOND entre 10^{-16} et 10^{-19} dans le cas général). Pour la quasi-totalité des modes des structures calculés, la méthode est néanmoins validée grâce à des analyses par éléments-finis (AEF) effectuées sur Abaqus.

4.1.5.3 Remarque sur les méthodes spectrales

L'étude de la dynamique de structures dont la géométrie est complexe privilégie en général l'analyse par éléments-finis. Lorsque cette structure peut se modéliser avec un assemblage d'éléments géométriques simples comme des barres, poutres ou plaques, on peut utiliser des méthodes dites « spectrales » pour une multitude d'applications [Lee 2009]. L'ODT est un cas particulier de méthode spectrale. Ces méthodes présentent l'avantage d'être exactes, ce qui signifie que la convergence des grandeurs de calcul est atteinte dès la définition de la géométrie, sans nécessité d'affiner le maillage. L'avantage lié (qui n'est pas déterminant ici) est l'aisance du calcul des modes d'indices élevés (avec une reformulation des déformées modales éventuellement [Gonçalves et al. 2019] pour les indices supérieurs à 12). Le choix initial d'une méthode spectrale pour notre problème relève de deux aspects :

- une approche « physique », bien adaptée à une optimisation paramétrique ;
- la facilité de bridage du modèle, pour calculer seulement les modes nécessaires (i.e. les modes de déplacement transverse des poutres du treillis exclusivement).

D'autres méthodes spectrales que celle proposée ici existent [Lee 2009], et sont de fait prédominantes dans la littérature – en particulier la méthode proposée par Williams et Wittrick [Williams et Wittrick 1970 ; Wittrick et Williams 1971].

Cette méthode pose le problème différemment, puisque la matrice $\underline{\underline{K}}$ n'est pas exprimée en fonction des coefficients des déformées modales, mais des déplacements sur chaque segment directement (w et θ du nœud intial et du nœud final du segment). Grâce à une écriture analogue quel que soit le segment considéré, une « matrice de rigidité dynamique de segment » générique est proposée. Toutes les matrices de segment sont assemblées pour former une matrice de rigidité globale de dimension $2(s+1) \times 2(s+1)$ (où s correspond au nombre de segments de l'assemblage). Elle est ensuite réduite par les contraintes mécaniques imposées au système, de façon similaire à l'analyse par éléments finis, pour donner une matrice $\underline{\underline{K}}$ de taille $s \times s$. Cette matrice présente l'avantage d'être symétrique définie positive, ce qui permet l'utilisation d'algorithmes plus appropriés, comme l'algorithme LDL (ou factorisation de Cholesky alternative). Un autre avantage de cette méthode est la possibilité de connaître *a priori* le nombre de modes de la structure sur une plage de fréquence donnée, ce qui est pratique au regard du problème de discrétisation mentionné plus haut concernant la fonction « *find_det_zer* ».

Une version actualisée dans [Qi et al. 2004] de cette méthode, appelée aussi "*Last Energy Norm*" [Maurini et al. 2006], permet de déterminer les fréquences propres (et déformées modales) plus aisément. Les fréquences propres peuvent être trouvées directement par une méthode de recherche de zéro sur le dernier terme de la matrice $\underline{\underline{D}}$ exprimé en fonction de ω, puisque cette fonction est strictement monotone décroissante sur des intervalles de valeurs allant de $+\infty$ à $-\infty$. Il pourrait être judicieux d'utiliser cette méthode pour s'affranchir des difficultés rencontrées, mais cela nécessiterait une réécriture complète du code ; la méthode n'a pas été implémentée faute de temps.

4.1.5.4 Fonctions de réponses en fréquence

Le code ODT calcule les déformées modales normalisées telles que leur maximum soit égal à un, mais ce n'est pas la normalisation retenue pour le calcul des FRF. Ce calcul est gardé identique à la version proposée par D. Faux. Les déplacements d'une section d'une poutre i donnée s'obtiennent par projection modale :

$$\begin{aligned} w_i(x,t) &= \sum_{k=1}^{n_k} \Phi_{i,k}(x) q(t), \\ \theta_i(x,t) &= \sum_{k=1}^{n_k} \Psi_{i,k}(x) q(t), \end{aligned} \tag{4.22}$$

où $\Phi_{i,k}$ et $\Psi_{i,k}$ désignent respectivement la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la structure pour la poutre i en déplacement transverse et en torsion.

Ensuite, on multiplie chacune des équations (4.5-4.6) par la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la structure de déplacement transverse et de torsion pour chaque poutre i, puis on intègre chacune sur la longueur de chaque poutre et enfin, grâce aux propriétés d'orthogonalité des modes de la structure, on peut identifier la masse modale m_k et la raideur modale k_k correspondante. On obtient finalement :

$$m_k = \rho \sum_{i=1}^{p} \int_{x=0}^{L_i} (S_i \Phi_{i,k}^2(x) + J_i \Psi_{i,k}^2(x)) \mathrm{d}x, \tag{4.23}$$

et

$$m_k \omega_k^2 = \sum_{i=1}^{p} \int_{x=0}^{L_i} (E I_i \Phi_{i,k}''''(x) \Phi_{i,k}(x) + G \tilde{J}_i \Psi_{i,k}''(x) \Psi_{i,k}(x)) \mathrm{d}x. \tag{4.24}$$

Or, comme on a déjà calculé la fréquence propre et la masse modale, on peut s'assurer que le calcul par les dérivées spatiales des déformées modales avec l'équation (4.24) donne une valeur identique (ou presque) de la fréquence propre.

L'expression de la coordonnée modale du mode k du système soumis à un forçage ponctuel harmonique $F\cos(\Omega t)$ au nœud correspondant à l'aimant s'écrit alors :

$$\ddot{q}_k(t) + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{m_k} F \cos(\Omega t) \Phi_{A,k}(x_A), \tag{4.25}$$

où ξ_k est le coefficient d'amortissement modal linéaire du mode considéré et $\Phi_{A,k}(x_A)$ représente la $k^{\text{ème}}$ déformée modale de la structure de la poutre supportant l'aimant. Dans le code, l'aimant est posé sur un nœud initial, donc $x_A = 0$.

A partir des équations (4.22) et (4.25), on exprime la fonction de réponse en fréquence du déplacement transverse en un point donné d'une poutre i pour un forçage F à l'aimant :

$$\frac{W_i(x,\Omega)}{F} = \sum_{k=1}^{n_k} \frac{\Phi_{i,k}(x)\Phi_{A,k}(0)}{m_k} \frac{1}{\Omega^2 - \omega_k^2 + 2j\xi_k\omega_k\Omega}, \tag{4.26}$$

où $W_i(x,\Omega)$ est défini tel que $w_i(x,t) = \mathrm{Re}\left(W_i(x,\Omega)e^{j\Omega t}\right)$.

4.2 Validation de l'ODT

Dans cette section, toutes les structures sont en SU-8, matériau considéré comme homogène et isotrope. Les paramètres matériaux utilisés jusqu'au début de la thèse étaient

	Mode #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Section circulaire	Type	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T
	f_{ODT}	96,7	606	1698	3327	5499	8215	11474	15276	19621	20752
	f_{Abqs}	96,7	606	1698	3327	5499	8215	11474	15276	19621	20752
Section rectangulaire	Type	F	F	F	F	F	F	F	F	T	F
	f_{ODT} (ss gauch)	111,7	700,1	1960	3841	6350	9486	13249	17639	20752	22656
	f_{ODT}	111,7	700,1	1960	3841	6350	9486	13249	17639	19061	22656
	f_{Abqs}	111,7	700,1	1960	3841	6350	9486	13249	17639	19076	22656

Tableau 4.2 – Validation du code sur une poutre encastrée-libre : comparaison des fréquences propres (en Hertz) obtenues par l'ODT et Abaqus. Type : F ≡ Flexion et T ≡ Torsion.

issus des données de la littérature (E=2 GPa, ρ=1220 kg.m^{-3}). Grâce aux mesures faites au chapitre 2, ces valeurs ont pu être déterminées pour des micro poutres (E=4.88 GPa et ρ=1290 kg.m^{-3}). Dans cette section, on utilisera donc systématiquement les valeurs actualisées. Le coefficient de Poisson est de ν=0,22, identique à la valeur indiquée dans [Faux 2018].

4.2.1 Structures simples

On valide initialement le code sur des structures très simples, qui sont construites par l'assemblage de deux poutres (i) alignées dans le cas de la poutre encastrée-libre et (ii) formant un angle droit dans le cas de la poutre en L.

4.2.1.1 Poutre encastrée-libre - effet du gauchissement

Pour une poutre encastrée-libre, les fréquences propres en flexion f_k^{f} et en torsion f_k^{t} s'écrivent simplement en fonction des paramètres géométriques et du matériau de la poutre :

$$f_k^{\mathrm{f}} = \frac{\beta_k^2 h}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad \text{et} \quad f_k^{\mathrm{t}} = \frac{2k-1}{4\gamma_i L}. \tag{4.27}$$

Pour une section circulaire, $\gamma_i = \sqrt{\rho/G}$. Pour une poutre à section rectangulaire :

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{\rho\left(1+\left(\frac{g_i}{p_i}\right)^2\right)}{12Gk_{2,i}}}, \tag{4.28}$$

où $k_{2,i}$ désigne le coefficient de correction du moment quadratique de torsion $\tilde{J}_i = k_{2,i} g_i p_i^2$, et $g_i = \max(b_i, h_i)$, et $p_i = \min(b_i, h_i)$. Les valeurs de $k_{2,i}$ sont extraites de [Fanchon 2012]. Les fréquences des modes de torsion d'une poutre à section rectangulaire ne dépendent donc pas de la taille de la section, mais simplement du ratio g_i/p_i.

Dans le tableau 4.2, on compare les valeurs de fréquence propres prédites par le code avec celles obtenues par AEF pour une poutre de longueur 15 mm. Les structures sont maillées sur Abaqus par des éléments de poutre de type B33 (éléments d'Euler-Bernoulli à deux nœuds et une fonction d'interpolation d'ordre cubique), avec au moins 50 éléments par segment. Les calculs ont été faits avec deux types de section : une section circulaire de 80 μm de diamètre et une section carrée de 80 μm de côté. Pour la poutre à section circulaire, on a une correspondance parfaite des fréquences propres. Pour la poutre à section rectangulaire, on peut voir que si la fréquence du mode de torsion ne correspond pas tout à

fait, la prise en compte du gauchissement de la section permet de réduire significativement l'erreur relative (8,786 % → 0,0786 %). Pour autant, il est possible que le coefficient de correction de torsion implémenté dans Abaqus soit légèrement différent de celui que nous utilisons. Pour cette structure, la flexion et la torsion sont découplées. Dans ce cas de figure, le calcul des déformées modales n'est pas possible avec l'ODT : il faudrait encore enlever une ligne et une colonne à la matrice $\underline{\underline{K}}^*$.

4.2.1.2 Poutre en L : un treillis rudimentaire

Le schéma de définition de la poutre en L est indiqué figure 4.4. Les matrices de coordonnées et de connectivités sont données dans le tableau 4.3. On considère que les deux poutres ont une même section ($b \times h$) et qu'une masse m est accrochée au nœud 3.

On rappelle la notation $\Phi_i(x) = \underline{\Phi}_i(x) \cdot [A_i\ B_i\ C_i\ D_i]^{\mathrm{T}}$ et $\Psi_i(x) = \underline{\Psi}_i(x) \cdot [E_i\ F_i]^{\mathrm{T}}$. La matrice $\underline{\underline{K}}(\omega)$ correspondant à la poutre en L s'écrit :

$$\underline{\underline{K}}(\omega) = \begin{array}{c} \\ \mathrm{CL}_1 \\ \\ w \\ Rot/\vec{x} \\ Rot/\vec{y} \\ M/\vec{x} \\ M/\vec{y} \\ T \\ \\ \mathrm{CL}_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & \ldots & D_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \underline{\Phi}_1(0) \\ \underline{\Phi}_1'(0) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -\underline{\Phi}_1(L_1) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -\underline{\Phi}_1'(L_1) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -EI_1\underline{\Phi}_1''(L_1) \\ -EI_1\underline{\Phi}_1'''(L_1) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & F_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \underline{\Psi}_1(0) \\ 0 & 0 \\ -\underline{\Psi}_1(L_1) \\ 0 & 0 \\ GJ_1\underline{\Psi}_1'(L_1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_2 & \ldots & D_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ \underline{\Phi}_2(0) \\ -\underline{\Phi}_2'(0) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -EI_2\underline{\Phi}_2''(0) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ EI_2\underline{\Phi}_2'''(0) \\ \underline{\Phi}_2''(L_2) \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ -\underline{\Phi}_2'''(L_2) - m\omega^2\underline{\Phi}_2(L_2) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_2 & F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \underline{\Psi}_2(0) \\ 0 & 0 \\ GJ_2\underline{\Psi}_2'(0) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \underline{\Psi}_2'(L_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{4.29}$$

où CL_1 se réfère aux équations liées à l'encastrement et CL_2 à celles liées à l'extrémité libre.

La géométrie de la poutre en L modélisée correspond à celle de la poutre en L testée expérimentalement au Chap. 2 (cf. fig. 2.3(e)) ; on n'ajoute donc pas de masse au nœud 3. Pour rappel, L_1=8 mm, L_2=4 mm, $b = h$=80 μm et m =0. Les fréquences propres sont correctement prédites : pour le mode 2, où l'erreur est maximale, l'erreur relative est de 0,6 ‰ entre la fréquence trouvée par l'ODT et l'AEF (tab. 4.4). Les allures des déformées modales de la poutre en L ont été vérifiées mais ne sont pas reproduites par souci de concision.

4.2.2 Validation successive de structures plus complexes

Dans cette sous-section, les structures de treillis testées ont plus de quatre poutres. Les paramètres de maillage pour l'AEF sont identiques à ceux utilisés pour la validation des structures simples : au moins 50 éléments de poutre de type B33 par segment. L'encastrement est modélisé en imposant des déplacements/rotations nuls suivant l'ensemble des directions et est repéré sur la figure 4.5 par des points marrons apposés aux nœuds correspondants de façon adjacente. La validation est faite par comparaison des fréquences propres mais aussi des valeurs des déformées modales en un point donné, en faisant le

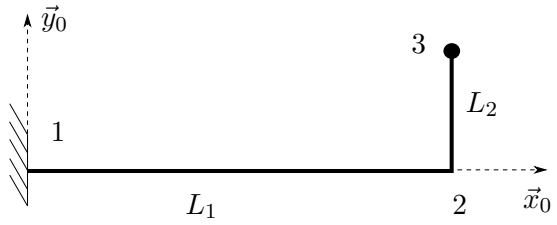


Figure 4.4 – Schéma de définition de 2 poutres en L.

$$Nodes_L = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ L1 & 0 & 1 \\ L1 & L2 & 0 \end{array}\right) \quad \& \quad Connec_L = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & b & h \\ 2 & 3 & b & h \end{array}\right)$$

Tableau 4.3 – Matrices de coordonnées et connectivités pour la poutre en L définie en fig. 4.4.

Mode #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_{ODT}	210,02	654,06	2127,0	5876,5	8750,0	12804	20448	25310	32082	43629
f_{Abqs}	210,04	654,47	2127	5876,5	8750,2	12804	20448	25310	32082	43629

Tableau 4.4 – Validation du code sur une poutre en L. Comparaison des fréquences propres (en Hertz) obtenues par l'ODT et Abaqus.

rapport entre le déplacement en ce point, noté w_1, et le déplacement maximal observé sur le mode considéré, noté w_m. Le nœud ayant servi comme référence pour w_1 est repéré par un point rouge sur toutes les structures représentées en fig. 4.5.

Les fréquences propres et ratios de déformées modales trouvés avec l'ODT et par AEF sont indiqués dans le tableau 4.5. On compare pour chaque structure l'erreur relative entre ces grandeurs pour les six premiers modes de la structure. Certains modes ont une déformée modale typique de flexion ou torsion ; dans ce cas ils sont repérés par les lettres F et T (avec éventuellement la précision supplémentaire S pour symétrique, A pour antisymétrique et NM pour nervure médiane isolée).

4.2.2.1 Aile

La géométrie de l'aile modélisée correspond à celle de l'aile testée expérimentalement au Chap. 2 (cf. fig. 2.3(f)) et représentée en fig. 4.5(a). On observe une excellente prédiction des fréquences propres et déformées modales avec une erreur maximale de 4‰.

4.2.2.2 Wind Rider

La géométrie du Wind Rider [WR] est donnée en fig. 4.5(b) [Faux 2018]. Les fréquences propres et déformées modales sont bien estimées par le code : erreurs de moins de 4 ‰ et

1,1 % respectivement. Néanmoins, on remarque que la précision sur les déformées modales est légèrement dégradée par rapport à l'aile simple.

4.2.2.3 Treillis 1

La géométrie de cette pièce est donnée en fig. 4.5(c). Les nœuds encastrés sont les nœuds (-0,02 ; 0) et (0,18 ; -0,0162). Les fréquences propres et déformées modales trouvées par l'ODT sont très précises, à 1,5 ‰ près.

4.2.2.4 Spider

La géométrie choisie correspond exactement au modèle de prototype Spider [Faux 2018], fig. 4.5(d). Les fréquences des 4 premiers modes ont moins de 1 % d'erreur, contre 4 % pour le sixième. Les déformées modales présentent des erreurs jusqu'à 6,3 %. Ces résultats assez faibles ont motivé l'étude de la structure suivante, présentant deux boucles fermées.

4.2.2.5 Losange barré

Cette structure est représentée en fig. 4.5(e). Le nœud encastré est le nœud (-1 ; 0). Pour cette structure, les éléments B32 (Timoshenko à 2 nœuds d'ordre quadratique) donnent des valeurs plus proches de l'ODT que B33 – on conserve donc ces valeurs, d'autant plus que la convergence avec plus de 1500 éléments B33 par poutre n'était pas atteinte. La précision sur les fréquences propres varie entre 1 ‰ et 2,5 %. Les déformées modales sont ressemblantes pour tous les modes autres que le mode # 2 qui est globalement la torsion de la boucle autour de l'axe horizontal (les figures des déformées modales sont données en annexe, figs. D.2.1-D.2.3). Pour ce mode, la structure étant symétrique, la torsion et la flexion sont découplées, comme dans le cas de la poutre encastrée-libre. Il est donc logique que la déformée soit mal calculée. De plus, il est à noter que les alertes de Matlab de singularité affichent des valeurs de RCOND de 10^{-26} à 10^{-33}.

4.2.2.6 Treillis 2

La géométrie de cette structure est donnée en fig. 4.5(f). Les nœuds encastrés sont les nœuds (-0.09 ; 0.06), (0,02 ; 0,06), et (0,11 ; 0,03). Cette structure est conçue pour être quelconque – ce qui est plus pertinent que la structure précédente – tout en présentant aussi des boucles. Les résultats présentent des erreurs maximales de 3‰ sur les fréquences propres et de 9‰ sur les déformées modales. Pour cette structure, il n'y a aucune alerte de matrice mal conditionnée.

4.2.3 Conclusion sur la validité

L'ODT est validé sur des structures de complexité croissante. Les alertes de singularité sont pourtant à prendre en compte et la vérification par AEF est recommandée pour deux raisons : (i) s'assurer qu'aucun mode n'a été « ignoré » et (ii) vérifier que les fréquences propres et amplitudes modales soient en accord avec celles trouvées par l'ODT.

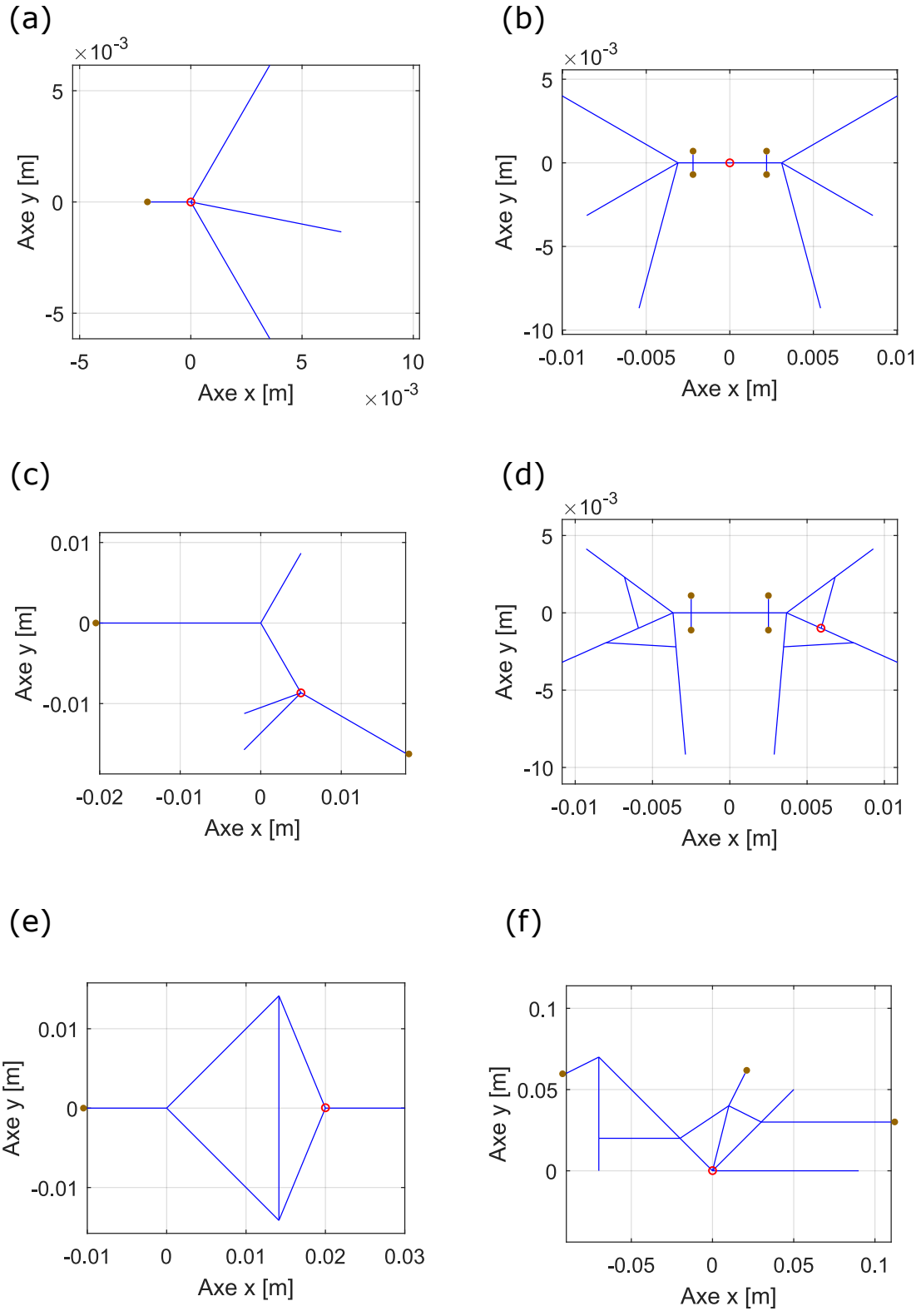


Figure 4.5 – Schéma des structures testées. (a) Aile, (b) WR, (c) Treillis 1, (d) Spider, (e) Losange barré et (f) Treillis 2.

	Mode #	1	2	3	4	5	6
Aile	Type	F	T	F	F	F	F
	f_{ODT}	264,66	286,20	510,22	1755,3	2381,1	3204,7
	f_{Abqs}	264,74	286,28	510,22	1755,3	2381,4	3204,7
	Erreur %	0,03	0,03	0,00	0,00	0,01	0,00
	w_1/w_m ODT	0,0552	0,0526	0,0032	-0,3814	0,0110	0,0020
	w_1/w_m Abqs	0,0554	0,0524	0,0032	-0,3814	0,0110	0,0020
	Erreur %	0,36	0.38	0,00	0,00	0,00	0,00
Wind Rider	Type	FS	TA	TS	FA	TA	TA
	f_{ODT}	202,34	214,37	233,52	267,10	492,14	502,61
	f_{Abqs}	202,60	214,55	234,12	268,09	491,21	501,46
	Erreur %	0,13	0,08	0,26	0,37	0,19	0,23
	w_1/w_m ODT	-0,0289	0	-0,0432	0	-0,0301	0
	w_1/w_m Abqs	-0,0287	0	-0,0437	0	-0,0298	0
	Erreur %	0,70	0,00	1,14	0,00	1,01	0,00
Treillis 1	Type	Déformées quelconques					
	f_{ODT}	42,272	56,923	178,59	228,11	349,87	430,05
	f_{Abqs}	42,290	56,953	178,64	228,11	349,84	430,05
	Erreur %	0,04	0,05	0,03	0,00	0,01	0,00
	w_1/w_m ODT	0,2072	0,2827	-0,2829	-0,6623	-0,0926	0,17
	w_1/w_m Abqs	0,2075	0,2827	-0,2829	-0,6614	-0,0925	0,17
	Erreur %	0,14	0,00	0,00	0,14	0,11	0,00
Spider	Type	TS	TA	TS	TA	TS-NM	TA-NM
	f_{ODT}	173,31	185,51	193,599	234,27	483,29	494,60
	f_{Abqs}	172,07	184,00	194,07	234,92	497,10	516,74
	Erreur %	0,72	0,82	0,24	0,28	2,78	4,28
	w_1/w_m ODT	0,1554	-0,1018	0,3456	-0,3142	-0,0599	0,0416
	w_1/w_m Abqs	0,1462	-0,0975	0,3458	-0,3153	0,0633	0,0443
	Erreur %	6,29	4,41	0,06	0,35	5,37	6,09
Losange	Type	F	T	F	F	F	F
	f_{ODT}	9,7259	20,124	57,700	147,09	186,80	210,91
	f_{Abqs}	10,932	19,595	56,481	145,96	186,57	210,23
	$f_{Abqs,B32}$	9,7032	19,635	56,706	145,98	186,56	210,24
	Erreur %	0,23	2,49	1,75	0,76	0,13	0,32
	w_1/w_m ODT	0,6788	0,6058	0,2247	-0,1035	0,1443	-0,5099
	w_1/w_m Abqs,B32	0,6774	1,3e-6	0,2257	-0,1145	0,1437	-0,5147
	Erreur %	0,21	4,66e7	0,44	9,6	0,42	0,93
Treillis 2	Type	Déformées quelconques					
	f_{ODT}	2,0658	2,9468	6,2550	10,185	12,092	17,750
	f_{Abqs}	2,0662	2,9476	6,2567	10,186	12,094	17,752
	Erreur %	0,02	0,03	0,03	0,01	0,01	0,01
	w_1/w_m ODT	0,2596	-0,5212	-0,4603	-0,1084	-0,3833	0,1782
	w_1/w_m Abqs	0,2595	-0,5214	-0,4601	-0,1094	-0,3834	0,1782
	Erreur %	0,04	0,04	0,04	0,91	0,03	0,00

Tableau 4.5 – Différence ODT-Abaqus sur les fréquences propres (en Hertz) et déformées modales.

4.3 Pertinence de l'ODT pour la prédiction de la dynamique réelle

Dans cette section, on évalue la capacité de l'ODT à prédire la dynamique des prototypes fabriqués, notamment grâce à la précision du modèle par rapport au code de calcul utilisé lors de la précédente thèse.

4.3.1 Comparaison des fréquences propres avant/après modification

Les prototypes Green Lantern ont été testés au cours des premiers mois de ma recherche doctorale, et ont servi de support pour la transmission par D. Faux des procédés de fabrication, assemblage et mesures des nanodrones. Deux versions ont été fabriquées, le GL1 (présenté fig. 4.2), et le GL2 (très proche du GL1, avec des nervures de longueurs légèrement différentes). Les prototypes fabriqués de ces deux versions n'ont pas permis d'obtenir de grandes amplitudes, ce point sera abordé plus en détail au chapitre 5.

Dans un premier temps, on compare les valeurs des fréquences propres des modes de flexion et torsion symétriques et antisymétriques (FS/TS/FA/TA) de deux géométries de prototypes (GL2 et WR) prédites par le code initial, par l'ODT en négligeant la masse et par AEF (modèle de poutre sans masse). Les déformées modales prédites par l'ODT (sans masse) sont données en figures 4.6 et 4.7. Dans un second temps, on intègre la masse de l'aimant dans l'ODT et on compare l'ensemble de ces fréquences prédites avec celles observées expérimentalement. Pour ce calcul, les paramètres matériaux utilisés pour le SU-8 correspondent à ceux proposés par D. Faux [Faux 2018] (i.e. E=2 GPa, ρ=1220 kg.m^{-3}). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.6.

Les prototypes Green Lantern (GL1/GL2) ont l'intérêt d'avoir été conçus avec le code de D. Faux puis fabriqués et testés en début de thèse. On peut ainsi comparer les valeurs prédites par le code de D. Faux et par l'ODT avec les valeurs expérimentales. Les valeurs des fréquences propres du Wind Rider calculées par le code initial et obtenues expérimentalement sont issues de [Faux 2018, Fig. 5.12 [3]]. La masse affectée à l'aimant est 6 mg. Enfin, le modèle Abaqus utilisé pour ce calcul est identique à celui utilisé pour la section précédente (éléments de poutre B33).

Tout d'abord, on observe des différences de fréquences faibles (WR) voire importantes (GL) entre la version initiale et l'ODT (sans masse). On note aussi la bonne correspondance ODT / AEF, qui vient confirmer les validations de la section précédente. On repère que l'ordre des modes est identique entre la prédiction ODT et les mesures (avec le code initial, le mode de flexion symétrique du GL2 est le deuxième mode). Enfin, on note l'absence d'influence de l'ajout de la masse de l'aimant sur le Green Lantern et une influence sensible sur le Wind Rider. Pour les GL2, cet effet limité peut être dû à la faible valeur d'amplitude de la déformée modale au point d'excitation. Pour le GL2, la fréquence mesurée du mode de flexion symétrique est indiquée avec un point d'interrogation ; ce mode étant peu excité, son identification visuelle sur la FRF expérimentale n'est pas certaine. Pour le WR, on peut calculer l'écart relatif des fréquences propres des modes symétriques. Celui-ci est de 13,4% avec l'ODT sans masse, 19,3% avec la masse quand expérimentalement, il est de 27,2%.

3. Il est mentionné que ce sont celles du prototype Spider, mais *a priori* il s'agit d'une confusion dans la mesure où les déformées montrées sont celles d'un Wind Rider et les valeurs en tant que telles sont relativement éloignées de celles prédites avec le code ODT et par AEF mais très proches des Wind Rider.

	GL2				Wind Rider			
	FS	TS	FA	TA	FS	TS	FA	TA
Code initial	172	186.1	115	192	130.6	151,4	-	-
$ODT_{m=0}$	257,1	218,7	157,0	227,2	132,8	153,3	175,3	140,7
Abqs Poutre	257,8	219,2	157,3	227,8	133,2	153,7	175,8	141,1
ODT	257,1	218,7	157,0	227,2	113,3	140,4	175,3	140,7
Exp	335 ?	210	97	244	142	195	-	-

Tableau 4.6 – Comparaison des fréquences propres prédites et expérimentales, en Hertz.

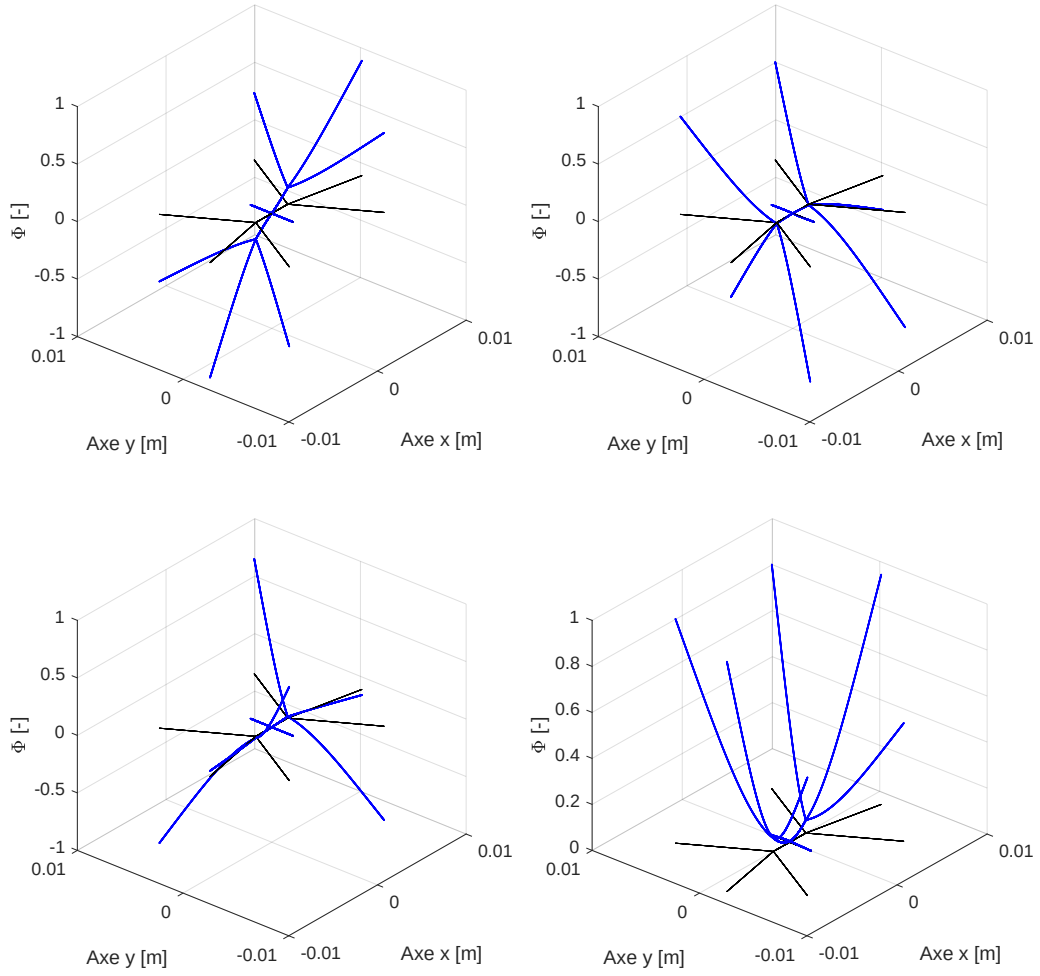


Figure 4.6 – Les quatre premières déformées modales du GL2.

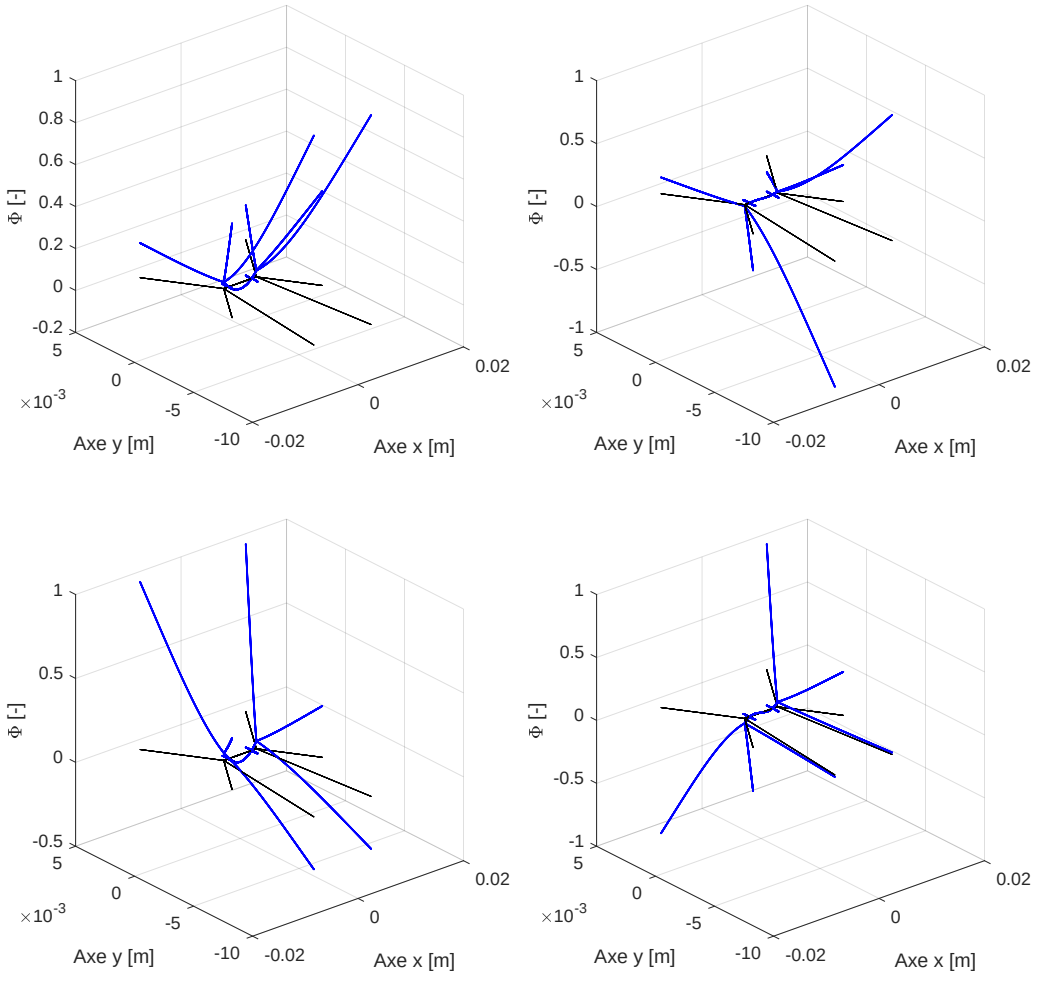


Figure 4.7 – Les quatre premières déformées modales du WR.

4.3.2 Origine de l'écartement des fréquences propres expérimentales

Dans sa thèse [Faux 2018)], D. Faux a montré que le comportement dynamique des drones fabriqués était relativement bien prédit, c'est à dire que l'on retrouve la cinématique prédite pour des fréquences dans la zone d'intérêt. Néanmoins, il observe un écartement des fréquences propres des modes de flexion et torsion symétriques entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales. Ce constat est une source d'amélioration substantielle des performances du drone. En effet, la génération de portance repose sur une amplitude élevée à la fréquence d'excitation qui est une fréquence de quadrature. Or, si les fréquences propres sont plus écartées que prévu, les fréquences de quadrature seront aussi plus éloignées et donc les amplitudes modales à ces fréquences seront plus faibles (cf. fig. 1.11). Maîtriser l'écartement permet de mieux dimensionner les prototypes afin d'obtenir des fréquences propres les plus proches possibles et donc le plus d'amplitude possible.

Les causes de différences entre des valeurs de fréquences propres prédites et expérimentales sont :

— des paramètres matériaux théoriques et réels distincts : avec un matériau homogène, comme le montre les équations (4.4-4.5), les fréquences propres des modes de déplacement transverse ω_k vérifient $\omega_k \propto \sqrt{E/\rho}$. Si les valeurs effectives de ces paramètres matériaux diffèrent de celles utilisées pour le calcul, les fréquences propres prédites et mesurées peuvent être différentes, mais l'écart relatif ne change pas ;
— une divergence entre le modèle et les prototypes réellement fabriqués ;
— les limites du modèle physique choisi (le modèle choisi étant relativement précis, ses limites expliqueraient seulement des différences très faibles).

4.3.2.1 Modélisation de l'aimant

Grâce à la prise en compte de la masse de l'aimant par une masse ponctuelle, l'ODT permet de modéliser l'influence de l'ajout de l'aimant. En effet, comme l'illustre la figure 4.8, il est possible de modéliser avec fidélité l'influence de l'aimant accroché sur une poutre bi-encastrée (comme c'est le cas pour le GL), ou bi-articulée (pour le WR), celui-ci ayant une rigidité bien supérieure aux liaisons souples. Pour le dessin de la géométrie finale, il suffit donc de juxtaposer l'aimant aux poutres supports de longueurs identiques à celles utilisées dans le code. L'influence de cette masse est d'autant plus grande que la section de la poutre est fine (puisque l'inertie de la poutre sera faible). Il se peut que des paramètres matériaux différents donnent des écarts relatifs différents en présence d'une masse. L'écart relatif est supérieur avec la prise en compte de la masse de l'aimant, mais reste inférieur à celui observé expérimentalement. Il y a donc au moins une divergence supplémentaire entre le modèle et les prototypes fabriqués pour expliquer le creusement de l'écart relatif de fréquence. Cette divergence peut être liée aux imperfections de fabrication, à la présence de colle, de la membrane et des congés. L'influence de la présence des congés, à la différences des autres sources potentielles, peut être modélisée et quantifiée.

4.3.2.2 Congés de raccordement

Les congés, illustrés dans la figure 5.8, sont ajoutés sur le dessin des masques de stéréolithographie pour limiter les concentrations de contrainte dans les prototypes et améliorer ainsi leur tenue mécanique. Dans la mesure où les congés ont tendance à augmenter la largeur équivalente des poutres, les congés modifient *grosso modo* les ratios g_i/p_i et donc

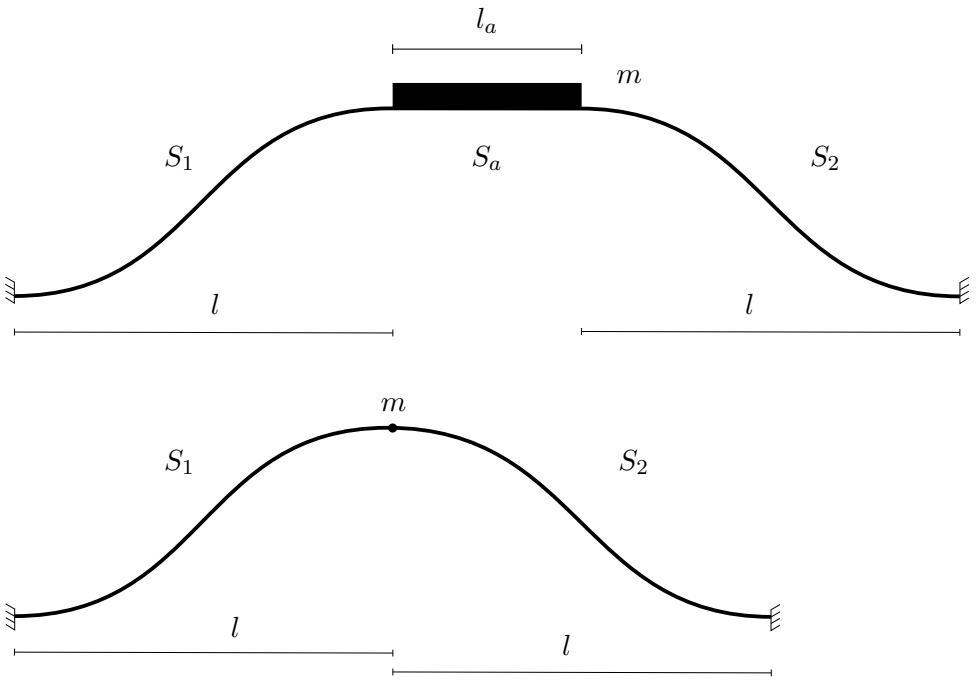


Figure 4.8 – Modélisation de l'aimant. Un segment S_a de masse m et de rigidité très grande devant celle de deux autres segments identiques peut être ramené à une masse ponctuelle.

les fréquences des modes avec une torsion importante des poutres. Nous avons testé ce point par des simulations numériques à complexité incrémentale de modèle :

— le modèle ODT (donc sans congés) ;
— un modèle AEF à trois dimensions (3D) sans congés ;
— un modèle AEF 3D sans congés, mais avec la plaque support ;
— un modèle AEF 3D incluant les congés.

Pour ces calculs, les paramètres de SU-8 utilisés correspondent – de nouveau – aux valeurs identifiées sur les micropoutres.

On compare tout d'abord le modèle ODT et le modèle Abaqus 3D sans congés. De faibles différences sont décelées, plutôt sur les modes de torsion : ceci pourrait provenir du fait que les poutres dans l'ODT partagent leur ligne moyenne sur un même plan, alors que pour le modèle éléments-finis (et les prototypes fabriqués) les poutres ont une largeur décroissante dans le sens de l'épaisseur du fait de la fabrication additive. La simulation

	FS	#	TS	#	Écart %	FA	#	TA	#
$\text{ODT}_{m=0}$	202,34	1	233,52	3	13,4	267,10	4	214,37	2
Abqs 3D	204,01	1	238,41	3	14,4	269,64	4	220,38	2
Abqs 3D + Plaque	209,48	1	239,06	3	12,4	263,53	4	222,66	2
Abqs 3D + Congés	224,51	1	255,41	3	12,1	278,21	4	233,58	2
ODT	174,59	1	214,16	2	18,5	267,10	4	214,37	3
Abqs 3D + Congés + Aim.	196,71	1	244,15	3	19,4	235,85	2	272,93	4

Tableau 4.7 – Comparaison des fréquences propres (en Hetz) des différents modes du Wind Rider selon la finesse du modèle utilisé.

suivante inclut la plaque support de l'aimant entre les poutres : celle-ci ne modifie pas fondamentalement la dynamique, ce qui confirme l'analyse qualitative proposée avec la figure 4.8. En intégrant à ce modèle les congés de raccordement, on observe bien une augmentation entre 10 et 15 Hz des fréquences propres de tous les modes, sans modifier cependant l'ordre des modes ni l'écart fréquentiel.

L'effet combiné de la masse est testé dans un deuxième temps avec deux simulations : d'abord avec l'ODT prenant en compte la masse de l'aimant puis avec un modèle Abaqus avec éléments 3D (tétraèdres C3D10/C3D20R) qui inclut les congés ainsi que l'aimant. La prise en compte d'une masse ponctuelle dans le modèle ODT a un effet significatif : les fréquences diminuent de 10 à 25 Hz, l'ordre des modes est modifié et l'écart augmente d'une petite dizaine de Hertz. L'impact est encore plus net avec la combinaison des 2 effets (congés et masse) dans l'AEF et de plus la dynamique est passablement différente de celle obtenue avec l'ODT.

L'intégration des congés augmente encore l'écart fréquentiel, qui reste sensiblement inférieur à celui observé sur les mesures expérimentales. Comme la conclusion de la section précédente l'indiquait déjà, une attention particulière doit être portée sur les résultats numériques de calculs issus de l'ODT, et ont donc été systématiquement vérifiés avec Abaqus par la suite. Pour autant, compte tenu de la prédiction relativement correcte de la dynamique de l'ODT sur les modes symétriques, l'ODT est conservé comme outil principal de conception pour les nouvelles architectures d'OVMI.

4.4 Contrainte mécanique

La version ODT facilite le calcul de grandeurs en chaque point de la structure. Cette section présente le calcul de la contrainte maximale de von Mises s'appliquant à une section droite ${\sigma_i}^{\mathrm{VM}}$.

Soit une section droite rectangulaire repérée par un point de coordonnée x sur une poutre i, la contrainte normale (due à la flexion) est linéaire dans l'épaisseur. L'expression de la contrainte normale maximale est donnée par :

$$\sigma_i(x) = -\frac{h_i}{2}\frac{M_{fi}(x)}{I_i}, \tag{4.30}$$

où h_i, M_{fi} et I_i sont respectivement l'épaisseur, le moment de flexion et le moment quadratique en flexion de la poutre i. D'après l'expression du moment de flexion indiqué à l'équation 4.10 :

$$\sigma_i(x,t) = -\frac{Eh_i}{2}\, w_i''(x,t). \tag{4.31}$$

Pour la contrainte tangentielle maximale prenant en compte le gauchissement, on part de [Fanchon 2012] :

$$\tau_i = \frac{M_{ti}}{k_1\, g_i\, p_i^2}, \tag{4.32}$$

où k_1 est un coefficient qui dépend du ratio g_i/p_i (0,208 pour une section carrée). En exprimant le moment de torsion avec la rotation $\theta_i(x,t)$ de la section droite, on a :

$$\tau_i(x,t) = kGp_i\theta_i'(x,t), \tag{4.33}$$

avec $k = \frac{k_2}{k_1}$, où k_2 dépend aussi du ratio g_i/p_i (0,1406 pour une section carrée).

À partir des équations (4.22), on peut déduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i''(x,t) &= Re\left(\sum_{k=1}^{n_k} \Phi_{i,k}''(x) A_k(\Omega, x_e)\, e^{j\Omega t}\right), \\ \tilde{\theta}_i'(x,t) &= Re\left(\sum_{k=1}^{n_k} \Psi_{i,k}'(x) A_k(\Omega, x_e)\, e^{j\Omega t}\right), \end{aligned} \tag{4.34}$$

avec $A_k(\Omega, x_e) = \dfrac{\Phi_{e,k}(x_e)}{m_k(\omega_k^2 - \Omega^2 + 2j\xi_k\Omega\omega_k)}$ et $w_i'' = F_e\tilde{w}_i'', \theta_i' = F_e\tilde{\theta}_i'$.

On rappelle que la contrainte de von Mises équivalente sur une section d'une poutre i s'écrit, en fonction des contraintes normale et tangentielle maximales :

$$\sigma_i{}^{\mathrm{VM}} = \sqrt{\sigma_i^2 + 3\tau_i^2}. \tag{4.35}$$

En utilisant les expressions de w_i'' et θ_i' de (4.34), on obtient :

$$\sigma_i{}^{\mathrm{VM}}(x) = \frac{Eh_iF_e}{2}\sqrt{\max(\tilde{w}_i''(x,t))^2 + 3\max(\tilde{\theta}_i'(x,t))^2\left(\frac{kp_i}{h_i(1+\nu)}\right)^2}. \tag{4.36}$$

On peut normaliser la contrainte par le déplacement maximal de la structure, noté $\max(w_M(x_{\mathrm{m}}, t))$, cela permet de s'affranchir de la valeur de la force appliquée :

$$\frac{\sigma_i^{VM}(x)}{\max(w_M(x_{\mathrm{m}},t))} = \frac{Eh_i}{2}\frac{\sqrt{\max(\tilde{w}_i''(x,t))^2 + 3\max(\tilde{\theta}_i'(x,t))^2\left(\frac{kp_i}{h_i(1+\nu)}\right)^2}}{\sum_{k=1}^{n_k}\frac{\Phi_{e,k}(x_e)\Phi_{M,k}(x_{\mathrm{m}})}{m_k(\omega_k^2 - \Omega^2 + 2j\xi_k\Omega\omega_k)}}. \tag{4.37}$$

Ce calcul permet d'identifier les points sur lesquels le maximum de contrainte s'applique, ce qui peut être utile pour une meilleure conception (renforcement structurel à moindre coût). Gardons cependant en mémoire que ce calcul est valable à une distance suffisante des conditions aux limites, d'après le principe de Saint-Venant, et qu'il ne permet pas d'anticiper les concentrations de contrainte ; réduites pas ailleurs par les congés de raccordement. Pour le dimensionnement des générations suivantes, on retient comme critère une contrainte normalisée par le déplacement inférieure à celle calculée sur le prototype Wind Rider, dans la mesure où ce prototype a montré expérimentalement une tenue mécanique acceptable. Enfin, en connaissant la limite élastique et le comportement en fatigue du SU-8, on pourrait établir un critère sur le nombre de cycles de battement d'ailes que l'on souhaite pouvoir tenir afin d'avoir une structure utilisée à pleine charge pendant une durée nominale.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le code de calcul de la dynamique de treillis de poutres, appelé ODT. Cet outil s'inspire de celui développé par D. Faux [Faux 2018] en intégrant de nouveaux éléments de modélisation comme le gauchissement des poutres, d'éventuelles masses ponctuelles ainsi que le calcul de la contrainte équivalente de von Mises. Le code est conçu pour être pris en main par de nouveaux utilisateurs et adapté à l'étude de géométries inédites. Écrit sur Matlab, il peut être facilement couplé à la fonction d'optimisation *fminsearch* ; ceci sera abordé dans le chapitre 5.

La validité de l'outil est testée sur un ensemble de géométries variées en comparant les fréquences propres et les déformées modales calculées avec une analyse par éléments-finis (effectuée avec des éléments de type poutre sur Abaqus). Pour huit structures sur les dix testées, l'erreur maximale sur les fréquences propres est inférieure à 4 ‰ et l'erreur maximale sur les déformées modales est inférieure à 1,1 %. Pour l'une des deux autres structures (le losange barré), la géométrie induit une déformée modale de torsion pure autour de son axe de symétrie, qui ne peut pas être calculée correctement par le code. En effet, les déformées modales sont déterminées par la résolution d'un système linéaire de la forme $\underline{\underline{K}}^* \ \underline{X}^* = -\underline{B}$ et, dans ce cas-ci, la matrice $\underline{\underline{K}}^*$ est singulière. En outre, compte tenu du fait que le code n'est pas adimensionné, il est fréquent que cette matrice soit mal conditionnée, i.e. que certains coefficients aient une valeur numérique négligeable devant d'autres. Ceci engendre des erreurs qui peuvent parfois être significatives, comme pour la dernière structure, le Spider (jusqu'à 6 %).

On évalue par ailleurs la capacité de l'ODT à prédire le comportement dynamique des prototypes de nanodrones. Cette étude est réalisée sur des prototypes déjà fabriqués. Elle consiste à comparer les fréquences propres données par l'ODT et les fréquences propres mesurées. On peut alors calculer deux écarts relatifs de fréquences propres : l'écart relatif simulé et l'écart relatif expérimental. Dans le cas où l'ODT effectue une prédiction exacte des fréquences propres, les deux valeurs d'écart relatif sont identiques. Néanmoins, on observe que l'écart relatif expérimental est supérieur à celui simulé (pour le Wind Rider, 27 % contre 13 %). Or, cet écart relatif est un paramètre clef pour l'obtention de grandes amplitudes de vibration à la fréquence de quadrature. Il est alors critique de chercher à bien estimer cet écart par le modèle. On montre qualitativement que la valeur supérieure de l'écart relatif expérimental peut s'expliquer par les effets combinés de la masse de l'aimant et des congés de raccordement au niveau des liaisons souples.

Cet outil est très utile pour le dimensionnement de structures de nanodrones, et malgré ses limites, peut être utilisé dans une démarche d'optimisation dans la mesure où le code est :

- rapide avec un temps de calcul de l'ordre de 1 minute pour un treillis correspondant à une structure de nanodrone (avec un processeur i7-8650) ;
- précis (en terme de détermination des fréquences propres) pour un treillis donné, bien qu'il ne puisse pas modéliser des congés sans faire une étude exhaustive qui permettrait d'associer un segment de poutre équivalent à un rayon de congé donné.

Il serait envisageable de procéder avec un code éléments-finis commercial comme alternative pour ce dernier point, bien que le critère de rapidité ne soit pas nécessairement validé puisqu'il faudrait utiliser des éléments 3D rallongeant alors drastiquement le temps de calcul.

Chapitre 5

Optimisation paramétrique de nanodrone

Toutes les fois que le sociologue est inconscient de la problématique qu'il engage dans ses questions, il s'interdit de comprendre celle que les sujets engagent dans leurs réponses.

P. Bourdieu, J.-C. Chamboredon et J.-C. Passeron, *Le métier de sociologue*

Ce chapitre présente la campagne d'optimisation paramétrique mise en place pour produire des prototypes capables de vibrer en grande amplitude, tout en conservant le principe de combinaison modale. La section 5.1 introduit la démarche de la campagne d'optimisation. La section 5.2 présente les géométries qui en résultent et celles utilisées pour la fabrication ainsi que les simulations numériques des structures associées. Enfin, on analyse les résultats issus des mesures de caractérisation des nanodrones fabriqués en section 5.3.

Sommaire du chapitre

5.1 Démarche de la campagne d'optimisation 108
5.1.1 Présentation générale 108
5.1.2 Mise en place de l'optimisation 109
5.2 Présentation des résultats numériques 115
5.2.1 Résultats de la campagne d'optimisation effectuée avec l'ODT . 116
5.2.2 Ajustements des géométries VO pour fabrication 119
5.2.3 Modélisation par éléments-finis des versions fabriquées 121
5.3 Mesure de la dynamique des prototypes fabriqués 125
5.3.1 Précisions sur l'assemblage des prototypes 125
5.3.2 Protocole de mesure 127
5.3.3 Extraction des modes par le logiciel M+P 129
5.3.4 Prise en compte des parties massives du GLR en simulation . . . 131
5.3.5 Mesure du déplacement en fonction de l'intensité du courant . . 132
5.4 Conclusion 134

Il est possible de concevoir les géométries des nanodrones par la méthodologie « essai-erreur » grâce au code de calcul de structure détaillé au chapitre 4, appelé ODT. On modifie alors une grandeur après l'autre pour voir si la dynamique obtenue s'approche de celle désirée : un mode de flexion des ailes et de torsion des ailes relativement proches.

Cependant, ce processus peut se révéler long et fastidieux. Par ailleurs, une procédure analogue d'essai-erreur par prototypage n'est pas envisageable. En effet, une campagne de fabrication et mesures est chronophage [1] : il faut compter au moins six semaines entre le démarrage de la fabrication et l'obtention des résultats de mesures. En outre, ces activités expérimentales ne sont pas compatibles avec une parallélisation du travail. Constatant le succès de l'optimisation mise en place au cours de sa thèse par D. Faux [Faux 2018], un des objectifs de ma thèse était la réutilisation de l'optimisation paramétrique pour proposer de nouvelles configurations géométriques mieux adaptées pour un décollage.

5.1 Démarche de la campagne d'optimisation

Cette section se compose de deux sous-sections : la sous-section 5.1.1 rappelle brièvement les principes généraux de l'optimisation et la démarche mise en place par D. Faux. Ensuite la sous-section 5.1.2 précise la mise en place de l'optimisation, à savoir le choix des géométries, la démarche générale et les critères retenus.

5.1.1 Présentation générale

5.1.1.1 Introduction à l'optimisation

Il est essentiel de distinguer la notion de campagne d'optimisation de celle d'optimisation en tant que telle. La campagne d'optimisation désigne le processus complet de mise au point des outils jusqu'à obtention d'une géométrie estimée comme recevable.

Une optimisation est une étude mathématique consistant en la recherche par un algorithme donné d'un extremum d'une fonction admettant un certain nombre de variables. Dans notre cas, les variables sont les grandeurs géométriques de la structure du nanodrone, ce qui relève du domaine de l'optimisation de forme, et plus particulièrement paramétrique plutôt que topologique (on raisonne en terme de dimensions plutôt que de volumes). S'il est possible d'intégrer n'importe quelle dimension du nanodrone comme variable à l'optimisation, la sélection de variables ne peut pas être modifiée pendant une optimisation ; par exemple, il n'est pas possible d'ajouter une poutre à la structure entre une itération et la suivante. La sélection des variables à optimiser forme ce que l'on appelle une architecture ; pour illustrer ce propos, plusieurs exemples d'architectures sont indiqués dans la figure 5.1. Chacune des architectures nécessite alors son propre jeu de variables initial à partir duquel l'algorithme initialise sa recherche d'extremum.

Quelle que soit l'architecture considérée, la fonction-coût est définie *ad hoc* par l'utilisateur selon ses objectifs, c'est-à-dire les grands principes qu'il cherche à appliquer. Ils peuvent provenir du domaine de la dynamique, de l'aérodynamique ou bien de considérations pratiques. Les objectifs sont à distinguer des critères, qui se réfèrent à la manière choisie par la fonction-coût d'atteindre les objectifs et qui sont évalués quantitativement. La fonction-coût s'exprime comme la somme pondérée de tous les critères, avec des coefficients de pondération permettant d'affecter plus ou moins d'importance à certains critères. Dans notre cas, il n'existe pas d'expression explicite de la fonction-coût liant les dimensions géométriques aux critères, ce qui exclut de nombreuses familles d'algorithmes.

1. On peut aussi indiquer qu'une campagne complète représente un coût non négligeable, incluant l'achat des masques optiques et des résines polymères ou encore la location des machines de salle blanche.

Par ailleurs, les algorithmes d'optimisation procèdent par itération sur les variables. On distingue deux classes d'algorithmes selon leur capacité à trouver un maximum local ou global. Une majeure partie des algorithmes capables de trouver des extrema globaux s'inspirent de phénomènes naturels, à l'instar du recuit simulé, de l'évolution (algorithmes génétiques), des colonies de fourmis ou encore des essaims « particulaires ». Ces algorithmes ont une composante aléatoire afin de déterminer de nouveaux jeux de variables initiaux et sont incompatibles avec l'analyse modale effectuée par l'ODT. L'algorithme retenu pour notre problème est donc la méthode de Nelder-Mead sous la forme de la fonction Matlab *fminsearch* [Nelder et Mead 1965 ; Lagarias et al. 1998].

5.1.1.2 Rappel de la démarche de [Faux 2018]

La thèse [Faux 2018] présente différentes architectures de prototypes, chacune s'appuyant sur l'analyse des performances expérimentales de l'architecture précédente. Les deux dernières architectures – les Wind Riders (présentés en introduction) et les Spiders (simulés au Chapitre 4, fig. 4.5(d)) – ont été obtenus via une optimisation paramétrique.

La fonction-coût proposée admet comme variables les longueurs et les angles des poutres des ailes, la longueur de la poutre supportant l'aimant ainsi que la longueur des liaisons souples (cf. [Faux 2018, fig. 4.9]). Son expression est donnée par :

$$C_{\text{Faux}} = \alpha|f_{\text{cible}} - f_{\text{quad1}}| + \beta|f_{\text{quad2}} - f_{\text{quad1}}| + \gamma \left| \frac{\max(A_{\text{flex}}) - \max(A_{\text{tors}})}{\max\left(\max(A_{\text{flex}}), \max(A_{\text{tors}})\right)} \right|, \quad (5.1)$$

où chaque terme est représenté dans la figure 4.10 de [Faux 2018] et expliqué ci-dessous :

- f_{cible} indique une fréquence d'excitation désirée ;
- f_{quad1} et f_{quad2} désignent les deux fréquences de quadrature ;
- A_{flex} et A_{tors} sont les amplitudes modales respectives des modes de flexion et torsion ;
- α, β et γ sont des coefficients de pondération, tous choisis égaux à 1.

Le principe d'implémenter une fréquence cible est d'écarter les solutions en basses fréquences, qui permettent d'obtenir des amplitudes plus élevées mais ne génèrent pas nécessairement plus de portance. Les deux autres termes de C_{Faux} cherchent à rapprocher les modes et maximiser leurs amplitudes tout en conservant une valeur comparable entre les modes.

5.1.2 Mise en place de l'optimisation

5.1.2.1 Sélection des architectures de prototypes

Une optimisation fonctionnant sur une architecture donnée, la première étape de la campagne d'optimisation consiste à choisir celles qui semblent les plus prometteuses. Les quatre architectures candidates au départ (WR, DR, GL et GLDF) et les deux retenues (WRR et GLR), sont illustrées respectivement dans les figures 5.1(a) et (b). Pour les architectures candidates, les poutres ont des sections carrées de dimensions fixes : celles repérées en bleu mesurent 80 microns de côté et celles repérées en orange 40 microns de côté. Plusieurs remarques peuvent être faites :

- le Wind Rider est la première architecture candidate. La version introduite par D. Faux dispose de 4 liaisons souples reliées à la poutre support de l'aimant. Chaque aile a trois nervures : un bord d'attaque (BA), une nervure médiane (NM) et un bord de fuite (BF). Le choix initial du WR est motivé par le fait que ce type de

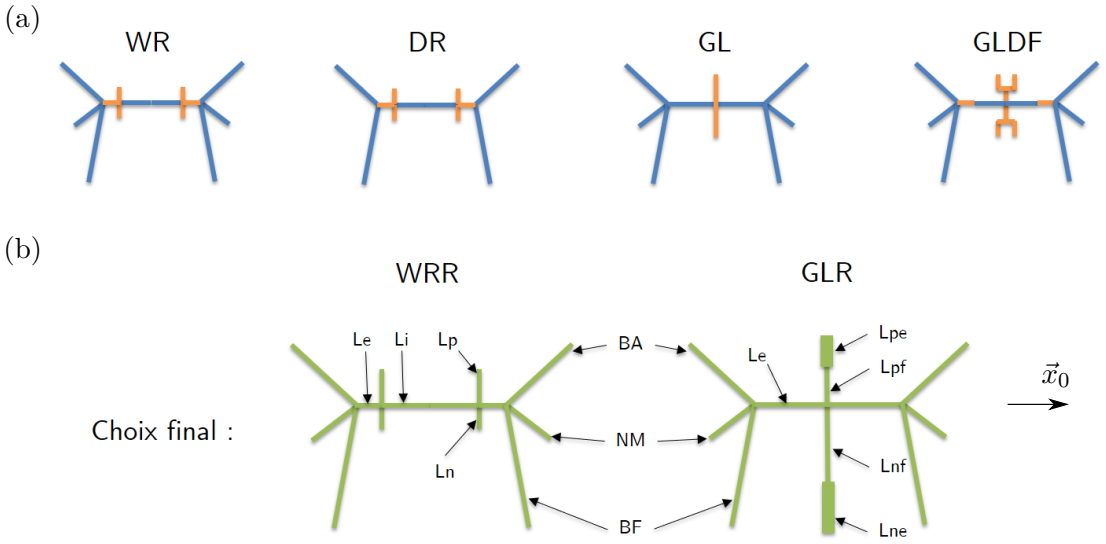


Figure 5.1 – Les différentes architectures (a) candidates et (b) sélectionnées pour la campagne d'optimisation. Chaque segment optimisé est repéré par un symbole pour faciliter la lecture (par exemple BA pour le bord d'attaque).

prototypes ait déjà été fabriqué, il est donc relativement bien connu. Ainsi, on dispose de plusieurs jeux de variables initiaux, ce qui constitue un socle solide de comparaison entre la géométrie initiale et une géométrie optimisée, que ce soit pour des performances simulées ou mesurées expérimentalement. Une petite modification est proposée par rapport à la version de D. Faux : il s'agit de réduire la section de la poutre reliant l'aile aux liaisons souples, afin d'améliorer la capacité des ailes à obtenir des amplitudes de vibration supérieures ;

— la seconde architecture proposée est le DR (Dual Rider), qui reproduit le WR en supprimant la nervure médiane pour simplification. Nous avons renoncé à cette proposition en raison de l'angle important entre les bords d'attaque et de fuite, qui favorisait un déchirement de la membrane localisé à la jonction (phénomène déjà observé par D. Faux). Précisons que le choix de ne pas optimiser ce type de structure a été opéré avant l'obtention des résultats du modèle aérodynamique, qui – pour rappel – inclut le fait que des ailes fines et allongées (donc avec un angle faible) sont préférables pour générer plus de portance ;

— le Green Lantern (GL) est *a priori* un autre bon candidat pour obtenir de grandes amplitudes de vibration en raison de l'absence de liaisons souples branchées à la poutre reliant les ailes à l'aimant (à envergure constante, ces liaisons souples rigidifient fortement les ailes). L'analyse des mesures des GL fabriqués au début de la thèse a prouvé que l'excitation à l'aimant était insuffisante à cause d'une amplitude de la déformée modale trop faible en ce point. Comme l'a montré l'équation (2.12), la réponse d'une structure à une excitation en un point proche d'un de ses noœuds de vibration est très faible. Par la suite, ce concept est désigné comme une mauvaise excitabilité de la structure. Pour améliorer l'excitabilité, il est prévu d'allonger et affiner la poutre bi-encastrée supportant l'aimant ;

— l'architecture GLDF (GL Double Fourche) repose sur une dissymétrie plus marquée de la structure, favorisant ainsi le mode de torsion. Elle dispose pour cela d'un

dédoublement de la poutre bi-encastrée supportant l'aimant. Notons néanmoins que la multiplication des embranchements d'une structure ne favorise pas la génération de grandes amplitudes de vibration [Theckes 2012]. Cette architecture, tout comme le Spider, n'est donc pas retenue.

Pour les deux architectures sélectionnées, il a été décidé de (i) casser la symétrie de la structure par rapport à l'axe $\vec{x}_0$ et (ii) ne pas fixer les épaisseurs et les largeurs des poutres. Le premier choix est motivé par la nécessité d'obtenir plus d'amplitude sur le mode de torsion, et la solution retenue est de donner des longueurs différentes aux liaisons souples du WR et aux segments de la poutre bi-encastrée supportant l'aimant du GL. Pour le second choix, la raison provient des résultats du chapitre 2 : la réduction des épaisseurs est une source potentielle d'augmentation d'amplitude (sous-section 2.2.2).

La campagne d'optimisation a été menée dans un premier temps en lançant une multitude d'optimisations avec un ensemble de valeurs discrètes pour les épaisseurs. Dans un second temps, il a été convenu d'intégrer les épaisseurs comme variables d'optimisation et de laisser les largeurs proportionnelles aux épaisseurs correspondantes. Ce changement est symbolisé sur la figure 5.1 par la couleur verte des segments. Pour faciliter la lecture, on donne un nom à chaque segment « unique », c'est-à-dire chaque segment dont la longueur, l'angle et l'épaisseur sont optimisés [2]. On compte 21 variables dans le cas de l'architecture WRR (WR revue) et 24 variables pour le GLR (GL revue).

5.1.2.2 Réglage de la fonction d'optimisation

Un premier essai avec les objectifs et critères proposés par D. Faux a été effectué sur l'architecture WRR, en utilisant les dimensions du Wind Rider comme jeu de variables initial. Cette optimisation n'a pas donné de résultat satisfaisant ; le bord d'attaque était très long et les deux autres nervures des ailes étaient atrophiées. La surface de l'aile était donc très faible. Il a fallu redéfinir la fonction-coût, ce qui a nécessité de nombreux essais pour déterminer (i) les objectifs d'optimisation pertinents, (ii) la bonne implémentation des critères associés et (iii) le réglage du coefficient de pondération de chaque critère. La figure 5.2 présente la démarche de la campagne d'optimisation.

Le fonctionnement de l'algorithme utilisant la fonction *fminsearch* est décrit dans l'encadré en pointillé. Le code ODT calcule la dynamique de la structure et les données utilisées par les critères, comme les « propriétés » des modes, les fréquences de quadrature ou les amplitudes. On peut donner comme exemple de propriétés des modes le fait qu'il s'agisse d'un mode de flexion ou de torsion ou encore qu'il soit symétrique ou antisymétrique. Un mode est catégorisé comme mode de flexion si le signe de la déformée modale au bout des trois nervures d'une même aile est identique, et comme mode de torsion si ce n'est pas le cas. De plus, un mode est considéré comme symétrique si les déformées modales au bout du bord d'attaque gauche et droit ont une valeur identique.

Après une optimisation, il est nécessaire de vérifier les résultats, en analysant la cinématique de la structure à chaque fréquence de quadrature. Ceci permet d'effectuer des ajustements éventuels, par exemple sur les coefficients de pondération ou les critères. Les géométries des optimisations estimées comme réussies ou partiellement réussies sont intégrées comme jeux de variables initiaux des optimisations suivantes. Pour des géométries satisfaisantes après vérification de la cinématique sur l'ODT, une analyse par éléments-finis (AEF) est réalisée avec le logiciel Abaqus, ce qui peut amener à quelques ajustements

2. Précisons que le segment Li sur la figure 5.1 correspond à une moitié de la poutre supportant l'aimant.

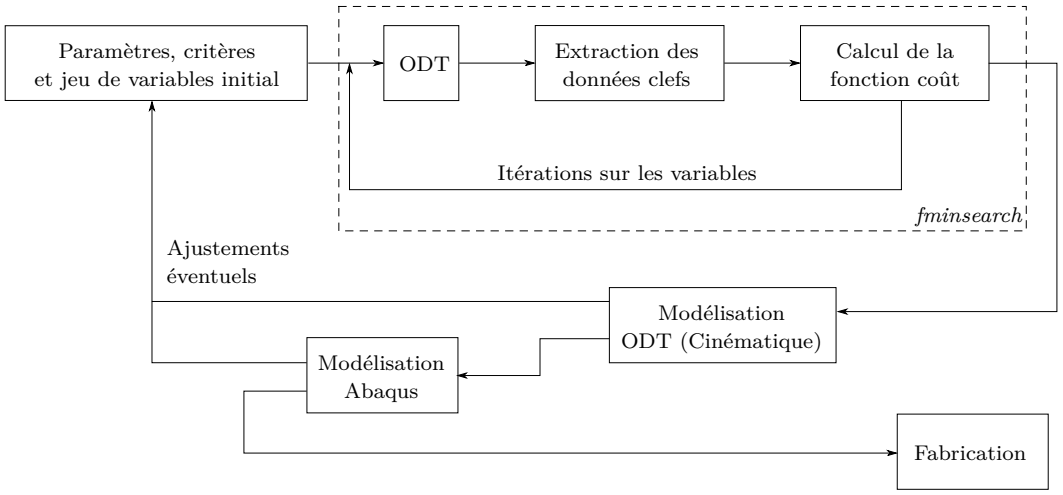


Figure 5.2 – Schéma synoptique de la campagne d'optimisation.

supplémentaires. Au total, plus de cent cinquante optimisations ont été lancées et interprétées pendant la thèse, sachant qu'une optimisation dure en général entre 3 et 8 heures. Au vu de ce nombre très important et de l'intérêt limité des résultats intermédiaires, seules les géométries issues de l'optimisation finale sont présentées.

5.1.2.3 Objectifs et critères retenus

Les objectifs retenus pour la campagne d'optimisation des géométries des nanodrones sont récapitulés dans le tableau 5.1. On peut formuler quelques remarques portant sur certains objectifs.

L'objectif #3 vise à obtenir une cinématique reproduisant des mouvements de solides rigides par les modes de vibration des ailes. Cette cinématique dite « nominale » est obtenue grâce à la combinaison modale suivant le principe exposé en introduction (sous-section 1.2.1). Toutefois, il est également possible d'obtenir cette cinématique de façon « non nominale », à partir d'une combinaison de modes qui ne correspondent pas tout à fait à un battement et une rotation des ailes. On a ainsi observé une telle cinématique avec deux modes correspondant à des torsions d'ailes. Dans ce cas, les déformations de l'aile elle-même sont plus prononcées au cours du mouvement. Cependant, il est *a priori* plus

N°	Objectifs
1	Viser une fréquence d'excitation donnée
2	Avoir un mouvement résonant d'amplitude la plus élevée possible
3	Viser une cinématique nominale
4	Garantir une bonne excitabilité de la structure
5	S'assurer de la bonne tenue mécanique du nanodrone en opération
6	Imposer une géométrie propice à la génération de portance
7	Limiter l'influence de modes parasites

Tableau 5.1 – Objectifs recherchés pour la dernière version de l'optimisation paramétrique.

difficile de traduire ces cas-là sous forme de critères dynamiques, ce qui explique le choix de viser une cinématique nominale pour l'objectif #3.

Ensuite, l'objectif #6 concerne une géométrie propice à la génération de portance ; on ne calcule pas la portance en tant que telle mais on utilise les résultats concernant les surfaces générant le plus de portance sur une aile (sous-section 3.4.5 du chapitre 3). Si la mise en place d'une optimisation concentrée sur l'objectif de la maximisation de portance est logique, il a été décidé de privilégier la recherche d'une combinaison modale. Cet objectif est en effet plus accessible et plus fiable que le modèle de génération de portance, approximé à partir du modèle dynamique.

Enfin, l'objectif #7 vise à limiter l'influence de modes parasites. Il découle de la vérification avec une AEF de la cinématique de structures optimisées par une version intermédiaire de l'algorithme. Ces structures avaient des modes qui perturbaient la cinématique à la fréquence d'excitation alors que ces modes étaient exclus par la troncature de l'ODT, ce qui représente un écart potentiel majeur entre la dynamique modélisée et la dynamique effective des prototypes fabriqués. Afin de réduire la probabilité de non-détection de ce phénomène, le nombre de modes inclus dans la troncature a donc été augmenté de 4 à 6 pour les optimisations suivantes. Il ne s'agit pas là bien entendu d'une solution infaillible.

La nouvelle fonction-coût, comme celle proposée à l'équation (5.1), fait appel à une somme plutôt qu'à un produit de termes puisqu'aucun critère ne peut être sacrifié au profit d'un autre. Les coefficients de pondération sont choisis initialement de telle sorte que les critères vérifiés aient une valeur proche de 1. Ceci est d'autant plus important que les critères peuvent faire intervenir des grandeurs physiques très différentes. Le tableau 5.2 présente tous les critères de la fonction-coût, associés aux objectifs du tableau 5.1 et retenus pour l'optimisation ayant conduit aux géométries des prototypes WRR et GLR fabriqués. On indique de plus la transcription mathématique de chaque critère avec des grandeurs calculées par l'ODT, les notations sont définies ci-après. Dans le tableau 5.2, de façon analogue au Ch. 4, $\Phi_{i,k}$ fait référence à la déformée du mode k de la structure au niveau de la poutre i et $H_{i,k}$ est calculée avec l'équation (4.26) en ne prenant en compte que le mode k, au niveau de la poutre i. On peut donc aussi exprimer $W_i = F \sum_{k=1}^{n_k} H_{i,k}$. L_i et α_i sont les longueurs et angles des poutres i. Pour rappel, les segments sont repérés sur la figure 5.1. On note « F » et « T » les indices des modes de flexion et torsion symétriques dont l'amplitude est la plus élevée sur la FRF et on désigne par « fs » et « ts » les indices de tous les autres modes symétriques de flexion et torsion.

Avant tout, on remarquera que la fonction-coût s'exprime de façon identique, quelle que soit l'architecture considérée, grâce à la définition systématique, dans le code ODT, du point d'excitation et du bout des nervures BA, NM et BF. De plus, notons que la fonction-coût retenue pour l'optimisation paramétrique est estimée à chacune des deux fréquences de quadrature, et que la valeur retenue pour chaque itération correspond au minimum de ces deux estimations. En effet, plutôt que de chercher à obtenir des pics d'amplitudes modales de même valeur pour la flexion et la torsion, les objectifs #2&3 impliquent d'avoir des amplitudes équivalentes à la fréquence d'excitation, c'est-à-dire à une seule des deux fréquences de quadrature. Les pics ont alors nécessairement des amplitudes différentes [3], d'où la formulation du critère #3.

3. Le pic le plus haut correspond au mode dont la fréquence propre est la plus éloignée de la quadrature.

N°	Obj. lié	Description	Transcription avec les grandeurs calculées
1	1	Minimiser la différence entre la fréquence cible et la fréquence de quadrature	$f_{\text{cible}} - f_{\text{quad},i}$
2	2	Minimiser la distance fréquentielle entre les deux fréquences de quadrature	$f_{\text{quad},2} - f_{\text{quad},1}$
3	2 & 3	Maximiser l'amplitude modale de flexion à la fréquence de quadrature et minimiser la différence de cette amplitude avec l'amplitude modale de torsion	$H^{\text{F}}_{\text{BA}}(f_{\text{quad},i}) + \lvert H^{\text{F}}_{\text{BA}}(f_{\text{quad},i}) - H^{\text{T}}_{\text{BA}}(f_{\text{quad},i})\rvert$
4	3 & 6	Minimiser la différence de longueur entre le bord d'attaque et le bord de fuite	$\lvert L_{\text{BA}} - L_{\text{BF}}\rvert$
5	3	Imposer l'allure de la déformée modale de flexion	$\frac{1}{\lvert\Phi_{\text{BA,F}}\rvert} + \lvert\Phi_{\text{BA,F}} - \Phi_{\text{NM,F}}\rvert + \lvert\Phi_{\text{BA,F}} - \Phi_{\text{BF,F}}\rvert$
6	3	Imposer l'allure de la déformée modale de torsion	$\lvert\Phi_{\text{NM,T}}\rvert + \lvert\lvert\Phi_{\text{BA,T}}\rvert - \lvert\Phi_{\text{BF,T}}\rvert\rvert$
7	3 & 4	Minimiser la différence des déplacements du bord d'attaque et de fuite	$\lvert W_{\text{BA}}(f_{\text{quad},i}) - W_{\text{BF}}(f_{\text{quad},i})\rvert$
8	4	Ajuster le ratio de l'amplitude du déplacement à l'aimant sur la somme de celles en bout de nervure	$\begin{cases} 0 \text{ si } 0.025 < A < 0.035 \\ A \text{ si } A > 0.035 \\ 100 \text{ si } A < 0.025 \end{cases}$ avec $A{=}W_{\text{Aimant}}(f_{\text{quad},i}) \left(\frac{1}{W_{\text{BA}}(f_{\text{quad},i})} + \frac{1}{W_{\text{NM}}(f_{\text{quad},i})}\right)$
9	5	Minimiser le ratio de la valeur maximale de la contrainte normalisée par celle calculée sur le WR	$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\max,\text{WR}}}$
10	6	Maximiser les longueurs des poutres	$\frac{1}{L_{\text{BA}}} + \frac{1}{L_{\text{NM}}} + \frac{1}{L_{\text{BF}}}$
11	6	Limiter les angles des nervures	$10^5(\lvert E(\alpha_{\text{BA}} - 0.1)\rvert + \lvert E(\alpha_{\text{NM}} + 0.5)\rvert + \lvert E(\alpha_{\text{BF}} + 1.1)\rvert)$
12	7	Maximiser l'amplitude d'un mode de flexion et d'un mode de torsion symétriques devant celles des autres modes symétriques	$\sum_{\text{fs}} \frac{\max(H^{\text{fs}}_{\text{BA}}, H^{\text{fs}}_{\text{NM}}, H^{\text{fs}}_{\text{BF}})}{\max(H^{\text{F}}_{\text{BA}})} + \sum_{\text{ts}} \frac{\max(H^{\text{ts}}_{\text{BA}}, H^{\text{ts}}_{\text{NM}}, H^{\text{ts}}_{\text{BF}})}{\max(H^{\text{T}}_{\text{BA}})}$

Tableau 5.2 – Critères appliqués à la dernière version de l'optimisation paramétrique.

Plusieurs critères sont associés à l'objectif #3 portant sur une cinématique nominale (critères 3-7). On cherche concrètement à imposer une flexion nominale, i.e. un mode pour lequel la déformée est maximale en bout des trois nervures, et une torsion nominale, avec une déformée de la nervure médiane très faible et une déformée du bord d'attaque opposée à celle du bord de fuite. On s'assure par ailleurs que les amplitudes de déplacement aux bords d'attaque et de fuite sont équivalentes. Notons en outre que les critères liés à l'objectif de génération de portance correspondent à des ailes fines et allongées (critères #10 et 11) et avec un bord d'attaque de longueur proche de celle du bord de fuite (critère #4).

La fonction *fminsearch* n'est pas codée pour imposer des contraintes sur les variables d'optimisation – à la différence de *fmincon* par exemple. On contourne cela en utilisant des conditions « si/alors » et la fonction partie entière. Le fait d'imposer des conditions permet (i) d'exclure immédiatement les jeux de variables dont la dynamique ne présente pas au moins un mode symétrique en flexion et un mode symétrique en torsion, et (ii) « d'ajuster » le ratio de déplacements à l'aimant et en bout de nervure (voir le critère #8). En effet, ce ratio ne doit pas être trop faible, sinon l'excitabilité est insuffisante, ni trop élevée, auquel cas l'amplitude de déplacement à l'aimant est limitée par la course admissible. On vise une amplitude de déplacement en bout d'aile de l'ordre 2 cm pour un déplacement à l'aimant de 500 microns. La fonction partie entière est employée dans le critère #11 pour imposer des valeurs d'angles limites aux nervures.

Le critère #9 de contrainte équivalente de von Mises est implémenté pour s'assurer que les nouvelles géométries ne soient pas plus fragiles que le WR. Ayant préalablement calculé la contrainte équivalente de von Mises sur le WR, puis extrait la valeur maximale, ce critère consiste à comparer à chaque itération cette valeur à celle du prototype correspondant au jeu de variables testé.

Grâce au recul pris pendant la campagne d'optimisation, on pourra utiliser pour d'éventuelles futures optimisations une reformulation des critères 7 et 8. Pour le critère 7, on cherchera plutôt une amplitude de la déformée modale à l'aimant des modes symétriques entre 5 et 10 %. Pour le critère 8, plutôt que de minimiser le ratio de la valeur maximale de la contrainte normalisée par celle calculée sur le WR, on peut mettre en place un critère basé sur la partie entière de ce ratio pour garantir que la contrainte soit inférieure.

5.2 Présentation des résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques des simulations effectuées en amont de la fabrication. Par la suite, on désignera sous l'appellation « version » un jeu de variables d'une architecture donnée, une version pouvant être issue d'une optimisation ou non. La sous-section 5.2.1 donne les géométries des versions optimales des WRR et GLR trouvées, appelées respectivement WRR VO et GLR VO, ainsi que les résultats correspondant de l'ODT. Il doit être précisé cependant que ces géométries ont subi des modifications afin de prendre en compte des contraintes liées à la fabrication. Ces modifications portent sur les épaisseurs – et donc les largeurs – et donnent lieu aux versions fabriquées, désignées par WRR VF et GLR VF. Dans la sous-section 5.2.2, on explique les conséquences des contraintes de fabrication et on donne les géométries effectivement fabriquées. Puis, dans la sous-section 5.2.3, on présente les résultats des AEF de ces structures.

Segment	Poutre	Dimensions			
		L_i [mm]	α_i [rad]	h_i [μm] VO	h_i [μm] VF
WRR	BA	8.707	0,8824	62	55
	NM	5,622	-0,1030	79	80
	BF	8,707	-0,7011	57	55
	Lp	0,309	$\pi/2$	49	40
	Ln	0,828	$-\pi/2$	49	40
	Li	1,758	0	99	100
	Le	0,734	0	42	40
GLR	BA	6,818	0,4760	42	47
	NM	6,718	-0,0679	43	47
	BF	7,118	-0,4356	50	54
	Lpe	2,937	$\pi/2$	66	69
	Lpf	1,140	$\pi/2$	35	40
	Lnf	0,933	$-\pi/2$	35	40
	Lne	2,582	$-\pi/2$	66	69
	Le	2,189	0	86	89

Tableau 5.3 – Dimensions des prototypes optimisés (VO) et fabriqués (VF). cf. Fig. 5.1.

5.2.1 Résultats de la campagne d'optimisation effectuée avec l'ODT

Les dimensions des WRR et GLR VO sont indiquées dans le tableau 5.3, et les vues de dessus – quasiment identiques aux VF – peuvent s'observer fig. 5.7. On trace avec l'ODT les déformées modales utiles pour la combinaison modale (i.e. les déformées de flexion et torsion symétriques), ainsi que les FRF en bout de bord d'attaque pour une excitation au nœud correspondant à l'aimant, pour les deux architectures. Les figures correspondantes sont les figures 5.3-5.4 et les figures 5.5-5.6 respectivement.

Les déformées modales ont une allure proche de celle souhaitée, bien que trois éléments ne donnent pas entière satisfaction : (i) l'amplitude de la nervure médiane est un peu basse pour la flexion du WRR, (ii) les amplitudes à l'aimant sont faibles sauf pour le mode de flexion du GLR et (iii) l'amplitude du bord de fuite est inférieure à celle du bord d'attaque pour les modes de torsion.

Les FRF (figs. 5.4-5.6) sont centrées sur les amplitudes des modes d'intérêt, ce qui explique l'absence des modes antisymétriques, dont les amplitudes sont bien inférieures (versions dézoomées en annexe figs. E.1.2 et E.1.4). Sur chaque figure, on trace les contributions individuelles de chaque mode en couleur, ainsi que la réponse totale en pointillé.

Pour le WRR VO, la fréquence d'excitation serait la première fréquence de quadrature, car les amplitudes modales de la flexion et torsion symétriques sont quasiment égales. On remarque que la fréquence du mode de torsion est inférieure à celle de flexion, ce qui veut dire que la différence de phase est de signe opposée à celle idéale. Cela n'est pas problématique, comme on l'a vu a chapitre 3 ; la force est simplement dans le sens opposé, il faudrait donc disposer le WRR VO « tête en bas » pour que la force générée provoque un décollage. En outre, on peut noter que les modes antisymétriques sont dans la zone fréquentielle d'intérêt. Comme ces modes sont en théorie très peu excités, cela n'est pas un problème significatif. Cependant, cela exige une attention accrue lors de l'assemblage des prototypes pour éviter des imperfections qui engendreraient une excitation parasite.

Pour le GLR VO, la fréquence d'excitation serait choisie cette fois-ci à la seconde fréquence de quadrature. Dans ce cas-là, on observe que les modes antisymétriques ne sont pas dans son voisinage.

On peut relever, pour les deux versions, la valeur de l'amplitude modale de flexion (quasiment identique à celle de torsion). On obtient respectivement 5 et 20 dB (0 dB ≡ 1 m/N), ce qui est supérieur aux amplitudes simulées du WR et motive donc le choix du WRR VO et du GLR VO comme candidats à la fabrication.

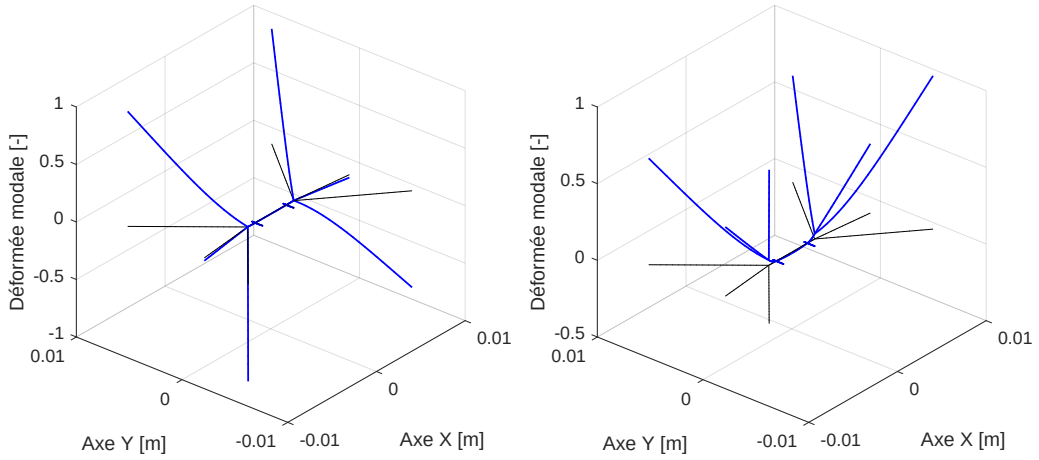


Figure 5.3 – Déformées modales du WRR VO – Torsion et flexion symétriques.

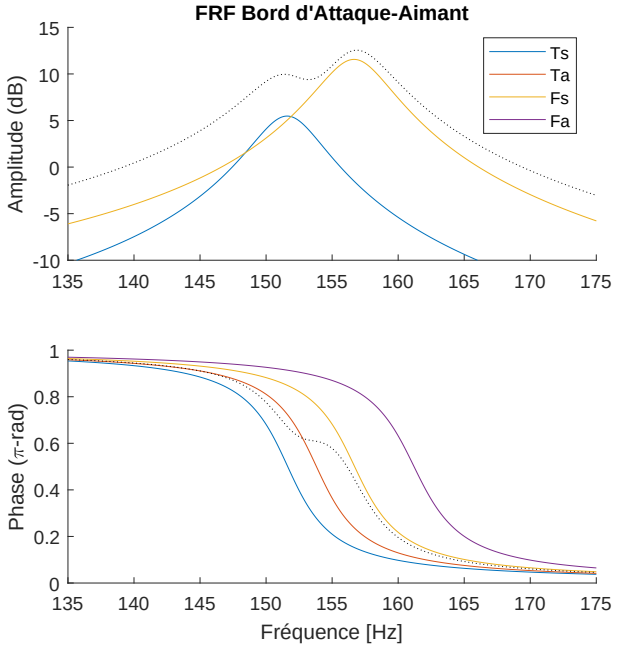


Figure 5.4 – FRF calculée avec l'ODT du WRR VO.

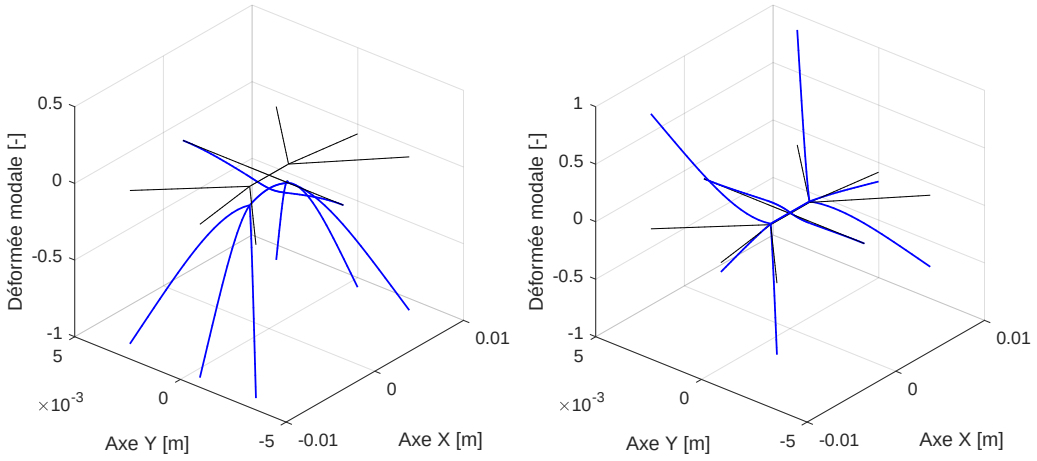


Figure 5.5 – Déformées modales du GLR VO - Flexion et torsion symétriques.

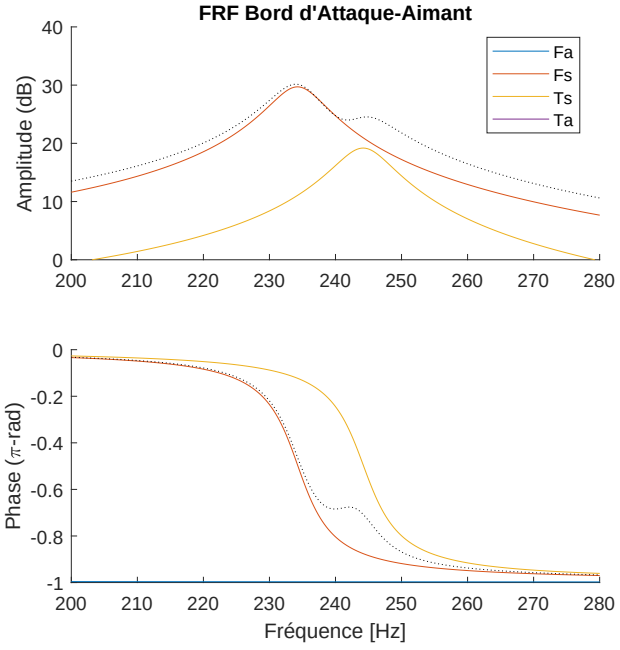


Figure 5.6 – FRF calculée avec l'ODT du GLR VO.

5.2.2 Ajustements des géométries VO pour fabrication

Les géométries des WRR VO et GLR VO ne sont pas compatibles telles quelles avec les procédés standardisés de la microfabrication mis en place et validés au cours des thèses précédentes [Dargent 2010 ; Bontemps 2013 ; Vanneste 2013 ; Faux 2018]. Ces procédés permettent de déposer des couches de 20, 40, 80, 150 ou 215 microns. Une poutre donnée peut par exemple avoir une épaisseur de 120 microns et être fabriquée en deux fois (40+80 ou 80+40), ou plus. Ces procédés sont assez précis ; à titre d'information, une micropoutre fabriquée en deux couches de 40 microns d'épaisseurs nominales a été caractérisée au profilomètre et avait une épaisseur variant de 84,55 à 87,66 microns dans sa longueur (16 mm) tandis qu'elle présentait, dans sa largeur, une variation d'amplitude de 0,5 microns maximum. À l'échelle du substrat sur lequel une trentaine de micropoutres sont disposées, la fluctuation d'épaisseur est plus importante : de 72 à 88 microns. Soulignons ici que la mesure est faite en incluant les parties massives à la base des poutres (fig. 2.3) et que cette variation est principalement observée dans la direction radiale du substrat [Faux 2018, fig. 3.5].

Pour les épaisseurs de couches de résine intermédiaires, comme par exemple 35 microns, il est possible d'ajuster les paramètres de stéréo-lithographie grâce à des tables. Cependant, la marge d'incertitude sur de telles couches est supérieure à celle des couches éprouvées (les épaisseurs des nouvelles couches n'ayant jamais été vérifiées évidemment).

En outre, la version de SU-8 la plus fluide disponible ne permet pas d'obtenir des couches d'épaisseurs inférieures à 10 microns avec les performances des tournettes de l'IEMN. Si les poutres optimales ont toutes des épaisseurs supérieures à 35 microns, ces couches sont néanmoins nécessaires dès que la différence d'épaisseurs entre deux poutres d'un même prototype est inférieure à 10 microns puisque la fabrication du squelette se fait par superposition de couches. C'est le cas par exemple des segments N1 et N2 du GLR dont la différence d'épaisseurs est de 1 micron.

Des essais préliminaires ont donc été menés pour diluer [4] la résine et la déposer avec des paramètres conseillés, puis pour mesurer les épaisseurs obtenues. Un premier dépôt a été réalisé sur silicium directement et un second sur une couche de résine préalablement déposée, afin de déterminer l'influence de l'état de surface avant dépôt. Une épaisseur de 7 microns a été rapidement obtenue. Pour éviter la multiplication de couches d'épaisseurs différentes, et ainsi de l'incertitude, les valeurs des épaisseurs optimales ont donc été arrondies à des valeurs d'épaisseurs de couches déjà fabriquées. Sous forte contrainte de temps, de nouvelles simulations ont été effectuées afin de s'assurer de l'impact limité de ces modifications en termes de fréquences propres uniquement.

Les géométries fabriquées sont représentées en figures 5.7(a-b). On peut remarquer que la poutre supportant l'aimant sur le WRR VF a une largeur relativement importante, or les épaisseurs étant proportionnelles aux largeurs, cette poutre a donc une épaisseur également conséquente. Ceci a l'effet positif de prévenir l'existence d'un mode de vibration où seule cette poutre répondrait en basse fréquence.

4. La dilution s'effectue avec du SU-8-*diluent*.

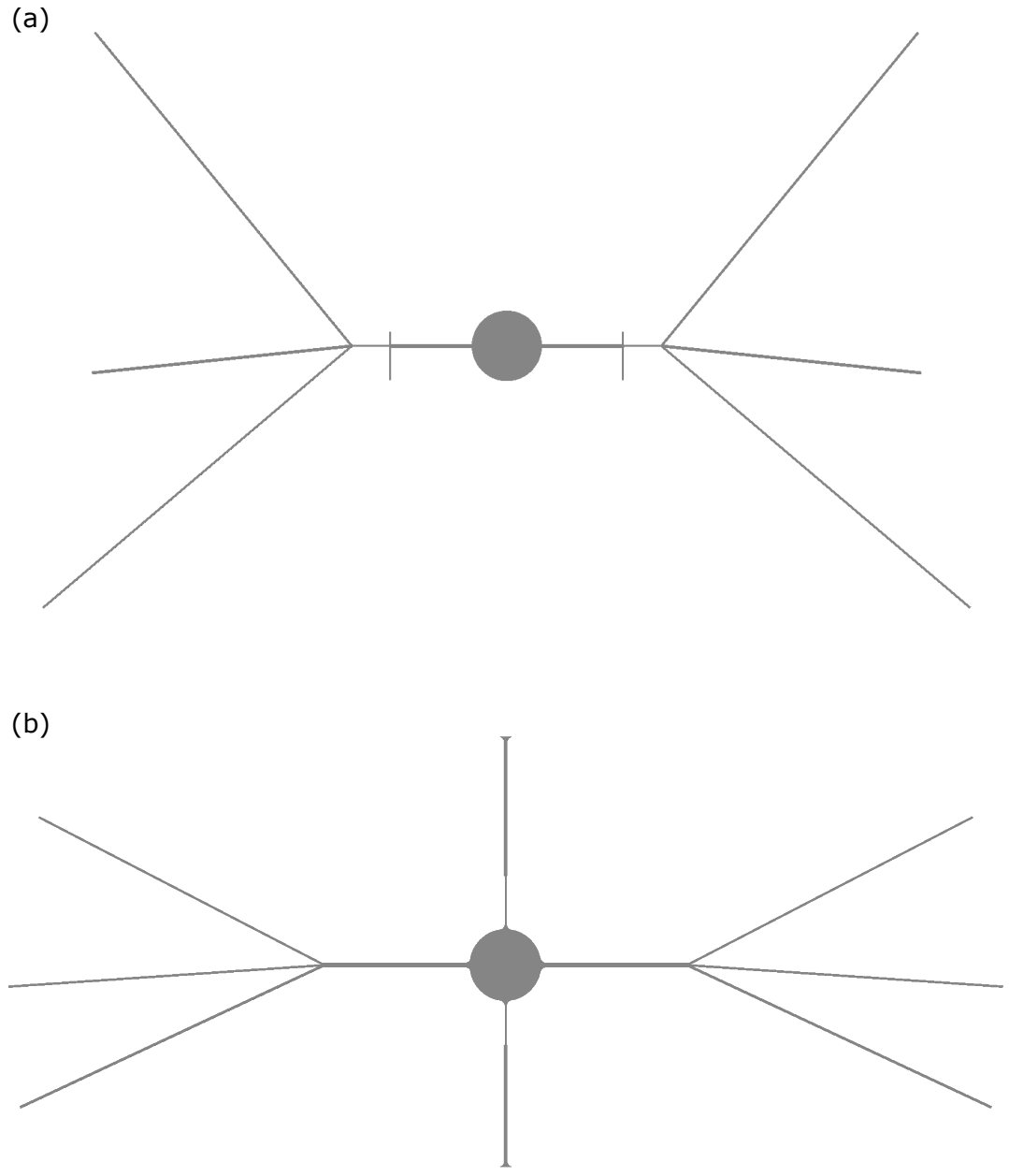


Figure 5.7 – Géométries des prototypes fabriqués. (a) WRR VF et (b) GLR VF. L'échelle est commune, approximativement 6,25 : 1.

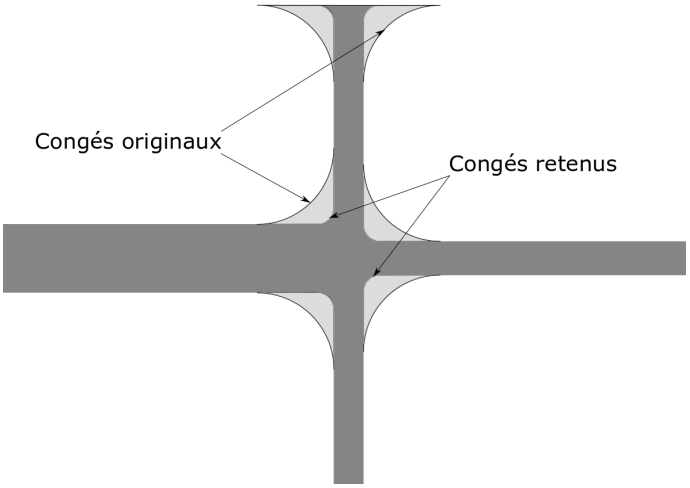


Figure 5.8 – Illustration de la réduction du rayon des congés pour le WRR. Vue de dessus des liaisons souples du WRR VF : on superpose à la géométrie prévue initialement (gris clair) celle fabriquée (gris foncé).

5.2.3 Modélisation par éléments-finis des versions fabriquées

5.2.3.1 Congés

Nous avons montré au chapitre 4 que la présence des congés sur la structure fabriquée pouvait changer la dynamique des modes (sous-section 4.3.2). De cette analyse, nous avons conclu qu'il était essentiel de vérifier systématiquement toute structure candidate avant fabrication, ce qui a été effectué pour les géométries issues de la campagne d'optimisation. L'impact de ces congés sur la dynamique du WRR est important. A contrario, le décalage des fréquences propres sur le GLR n'a pas été jugé absolument incompatible avec la dynamique prévue. Des essais ont été menés en parallèle avec l'ODT et Abaqus pour essayer de compenser la modification des fréquences propres, sans succès. Compte-tenu du temps disponible avant la campagne de fabrication, la solution adoptée pour ce problème a été de réduire le rayon des congés, sa valeur n'ayant pas été dimensionnée en tant que telle précédemment. Cette solution permet d'avoir un compromis entre la tenue mécanique d'une part et la fidélité à la dynamique recherchée d'autre part.

5.2.3.2 Analyse modale et fréquentielle

Les géométries optimales ont été modélisées avec le logiciel de CAO Catia afin d'intégrer les congés, puis exportées sur Abaqus et maillées avec les éléments à trois dimensions (3D) utilisés au chapitre 4 (tétraèdres C3D10/C3D20R). Les résultats montrés ci-après sont issus de l'analyse modale. Une analyse fréquentielle a également été effectuée sur ces géométries, bien que les résultats ne soient pas présentés. On rappelle ici la méthode pour implémenter l'amortissement dans ce modèle. En effet, l'ODT utilisant un modèle d'amortissement modal, on utilise sur Abaqus un modèle d'amortissement proportionnel qui est déduit des deux fréquences propres des modes symétriques d'intérêt. Dans ce but, il est nécessaire d'exprimer la relation entre les coefficients d'amortissement modal et les coefficients d'amortissement proportionnel :

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}. \tag{5.2}$$

Type	WRR				GLR			
Mode	TS	TA	FS	FA	FA	FS	TS	TA
f_{ODT}	151,6	153,8	156,7	161,2	67	234	244	284
f_{Abqs}	137,1	138,7	129,5	131.3	48,10	230,7	243,7	288,1
$\Phi_{\text{aim}}/\Phi_{\text{max}}$	0,01%	-	0,57%	-	-	0,52%	0,84%	-

Tableau 5.4 – Tableau d'évaluation des géométries fabriquées. Comparaison des (i) fréquences propres des WRR et GLR VO (ODT) et des WRR et GLR VF (AEF) et (ii) ratios d'amplitude de déformée modale à l'aimant sur la déformée modale maximale du VF considéré, calculés par AEF.

Ce qui donne pour chacun des coefficients :

$$\alpha = 2\frac{(\xi_1 - \xi_2)\omega_1 - \xi_1(\omega_1 - \omega_2)}{1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}}, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\xi_1}{\omega_1} - \frac{\alpha}{\omega_1^2}. \tag{5.3}$$

Dès lors, la démarche est d'utiliser dans un premier temps l'étape "*Linear perturbation-Frequency*" sur Abaqus et de déterminer les modes, puis dans un second temps, d'utiliser l'étape "*Steady-state dynamics-Modal*" en implémentant les paramètres d'amortissement et de force. On peut alors observer la cinématique de la structure pour une excitation aux environs d'une quadrature et ainsi valider la configuration géométrique pour fabrication.

5.2.3.3 Analyse des résultats de simulations par éléments-finis

La figure 5.9 illustre les deux déformées modales pertinentes pour le WRR VF tandis que la figure 5.10 présente celles du GLR VF. De façon générale, on remarque une certaine ressemblance entre les déformées modales des versions VO (figs. 5.3 et 5.5) et VF ; notamment, on retrouve sur le GLR VF une rotation non négligeable de l'aimant sur chacun des modes. En revanche, le mode de flexion du GLR VF correspond un peu moins à une flexion nominale que celle du GLR VO.

En outre, la figure 5.10(c) représente une déformée modale de la poutre support de l'aimant. Or, ce mode n'est pas trouvé par l'ODT, ce qui est potentiellement gênant dans la mesure où l'aimant est particulièrement excité et où ce mode est en basse fréquence.

Toutefois, on peut remarquer que les modes calculés par l'ODT se retrouvent dans une bande de fréquence assez proche de ceux obtenus par l'AEF. Plus encore, l'écart fréquentiel reste faible : pour le GLR, cet écart est de moins de 15 Hz, comme indiqué dans le tableau 5.4. Pour le WRR, cet écart n'est que de 10 Hz, mais on remarque que l'ordre des modes change entre la VO et la VF du WRR, pour revenir au cas usuel où le mode de flexion est à une fréquence inférieure à celui de torsion. Il n'est alors pas nécessaire de disposer le WRR VF « tête-en-bas ».

Ces résultats encourageants obtenus après de nombreuses itérations ont validé le départ en fabrication. Pourtant, les prototypes n'ont pas démontré d'amplitude supérieure à celle obtenue sur les WR et Spiders. Ceci est à mettre en perspective avec les valeurs des rapports entre l'amplitude de l'aimant et l'amplitude du point des ailes dont la déformée est maximale. Ces valeurs sont données dans la dernière ligne du tableau 5.4 et sont très faibles. La campagne d'optimisation n'a peut-être pas suffisamment pris en compte l'excitabilité, qui a sans nul doute été détériorée par l'influence des congés et des arrondis des épaisseurs.

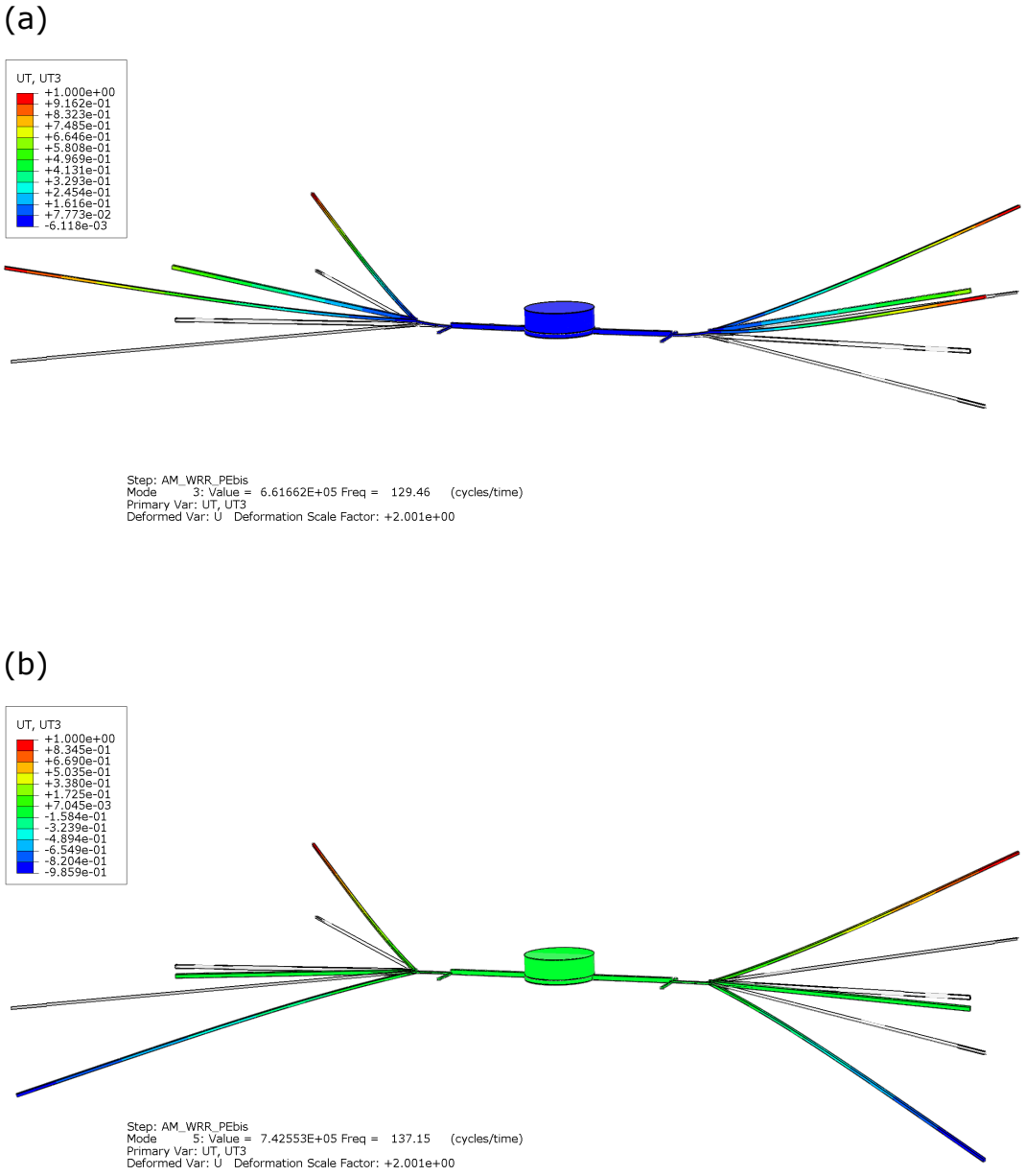


Figure 5.9 – Déformées modales du WRR pertinentes (Abaqus) – Flexion et Torsion Symétriques (FS/TS).

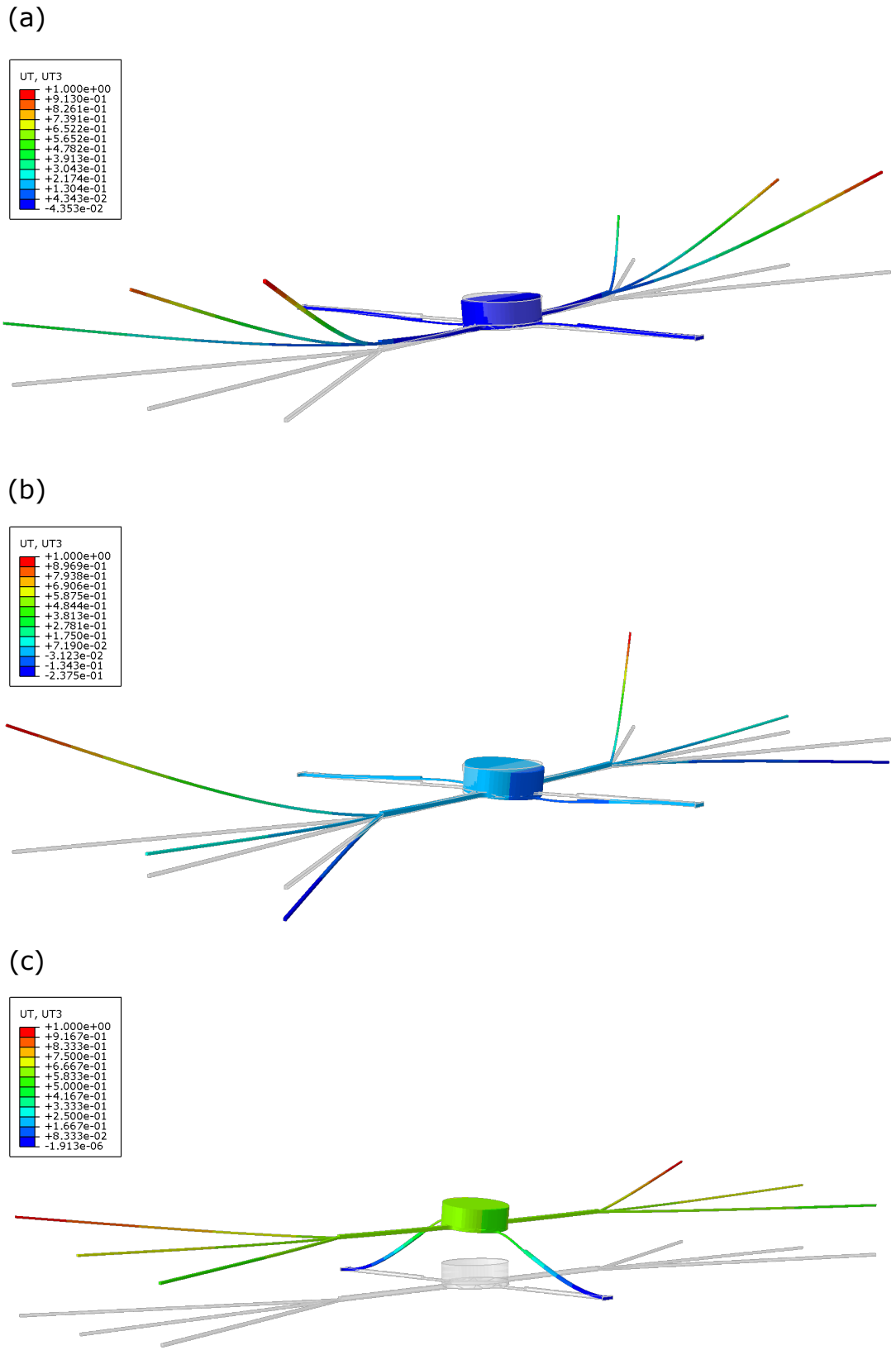


Figure 5.10 – Déformées modales du GLR pertinentes (Abaqus) – Flexion et Torsion Symétriques (FS/TS) et Flexion de l'Aimant (FAim).

5.3 Mesure de la dynamique des prototypes fabriqués

Cette section présente l'analyse des résultats des mesures de caractérisation des prototypes fabriqués. Bien qu'aucun prototype ne donne d'amplitude de vibration supérieure au WR, ces mesures valident en revanche différents points critiques pour le projet. Tout d'abord, la dynamique du WRR VF correspond à celle prédite par la simulation. De plus, dans le cas du GLR VF, la prise en compte dans l'AEF des parties massives du prototype (i.e. le thorax et le support de bobine) présente une bonne corrélation avec les mesures effectuées. Ceci confirme que l'AEF effectue une prédiction correcte de la dynamique des prototypes et permet dès lors d'anticiper le succès des futures générations de prototypes. Enfin, on quantifie l'influence de la membrane sur la dynamique, pour montrer la présence d'un amortissement non-linéaire.

5.3.1 Précisions sur l'assemblage des prototypes

Les procédés de fabrication en salle blanche ont été transposés exhaustivement sous la forme d'une liste de contrôle (i.e. une *check-list*) de 18 pages, afin de limiter les erreurs au cours des différentes étapes et de consigner le savoir-faire et les « astuces » spécifiques à la microfabrication de l'OVMI. Notons que l'épaisseur de Parylène-C déposée a été doublée (800 nm), afin de limiter le phénomène de déchirement des membranes aux jonctions des nervures de l'aile.

Le *lift-off* [5] a endommagé de nombreux prototypes WRR (presque exclusivement). Cette mauvaise tenue de ces prototypes s'explique, entre autres, par la réduction du rayon des congés de raccordement. En effet, lors de l'enlèvement de la couche sacrificielle d'Omnicoat [6] effectué dans un bain de MF319 (développeur de résines photosensibles à base d'ammonium quaternaire), les forces de capillarité retiennent la membrane à la surface du liquide. Toute sortie directe à la pince des squelettes provoque leur fracture ; pour éviter cela, on vient les cueillir en glissant dans le bain un morceau de papier absorbant légèrement plus grand qu'un squelette et on sort délicatement le morceau sur lequel le squelette est posé. Malheureusement, ce papier devient souple lorsqu'il est imbibé et sa déformation induit celle du squelette conduisant potentiellement à la plastification et parfois, de façon très perceptible ou non, à la rupture des liaisons. Ces ruptures se produisent moins pour les GLR, dans la mesure où le rayon de congé n'a pas été modifié et où ils sont intrinsèquement plus souples. Pour contrer cette difficulté, il peut être envisageable de procéder au *lift-off* avec du papier de type sulfurisé, moins susceptible de se déformer en milieu liquide, à condition qu'il ne soit pas attaqué par le MF319.

Un autre problème du *lift-off* est lié à la nécessité du séchage des squelettes, obtenu en les laissant sur leurs morceaux de papier absorbant sous la sorbonne. Les membranes des squelettes secs sont en général fortement collées au papier et se déchirent facilement au niveau des nervures lors de leur décollage. Pour résoudre les deux problèmes de *lift-off* en milieu liquide, une solution évoquée est de graver le substrat plutôt que de dissoudre une couche sacrificielle (i.e. la couche d'Omnicoat) ; cela nécessite cependant une campagne d'essais et un surcoût important.

Une fois les squelettes et les supports de bobine fabriqués en salle blanche, ils assemblés pour former les prototypes, comme expliqué dans la section 1.2. La figure 5.11 présente

5. Opération de séparation des squelettes du substrat en fin de microfabrication présentée en sous-section 1.2.3 du chapitre 1.

6. Pour rappel, il s'agit de la couche séparant les squelettes du substrat.

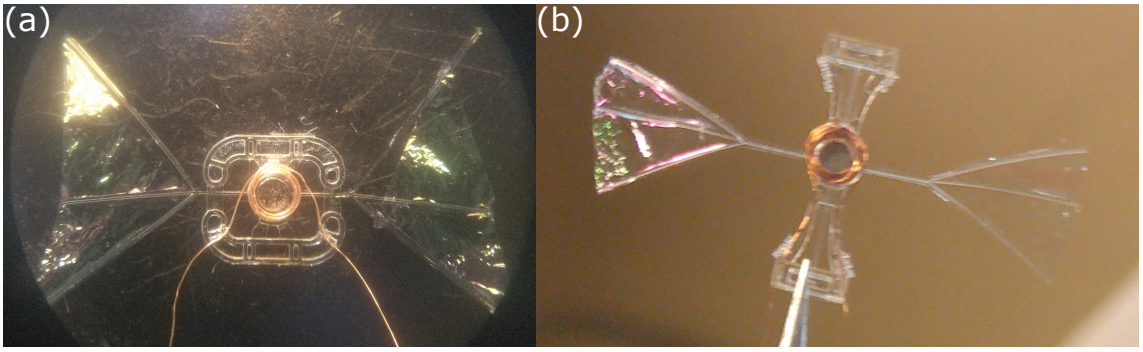


Figure 5.11 – Photographies des prototypes assemblés. (a) WRR en fin d'assemblage, vu au travers d'une binoculaire et (b) GLR prêt à être testé.

Prototype	Nervures	Membranes	Remarques
		Lot 1	
GLR 1	Bon état	Bon état	Mesure
GLR 2	Bon état	Bon état	Mesure, pic inexpliqué à 188Hz
GLR 3	Transversale dissymétrique	OK	Modes FA/TA présents
WRR 1	Liaisons supérieures sectionnées	OK	Modes FA/TA présents
		Lot 2	
GLR 4	Bon état	Bon état	Mesure, échec de suppression de membrane par fusion
GLR 5	Bon état	Bon état	Fils mal collés, détruit en réparation
WRR 2	Bon état	1/2	Mouvements non symétriques
		Lot 3	
GLR 6	Bon état	Bon état	Mesure avec et sans membrane (découpée)

Tableau 5.5 – Liste des prototypes des WRR et GLR VF testés.

un prototype de chaque version. Pour compenser le temps de séchage de la colle, plusieurs prototypes sont assemblés en parallèle, ce qui donne lieu à la constitution de lots de prototypes testés successivement. Ainsi, l'expérience acquise sur chaque lot est utilisée pour l'assemblage du lot suivant.

Le tableau 5.5 identifie les prototypes assemblés de chaque lot et précise l'état de leurs nervures et membranes. Le premier lot était composé de 3 GLR VF et 1 WRR VF. Les prototypes du premier lot étaient sujets à un frottement de l'aimant, même pour des amplitudes modérées, produisant un bruit distinctif. Un soin particulier a donc été apporté au centrage de l'aimant et de la bobine à l'assemblage du deuxième lot, permettant ainsi d'augmenter le seuil d'apparition du frottement pour les 2 GLR VF et le WRR VF de ce lot. Malgré cela, une fois les prototypes GLR VF entièrement montés, le centrage s'est révélé moins précis que prévu ; leurs supports de bobine, légèrement courbes, imposaient une déformation statique aux prototypes complets désaxant l'aimant et la bobine. En conséquence, pour l'unique prototype du troisième et dernier lot (le GLR VF 6), un support de bobine particulièrement plat a été choisi, ce qui a permis l'obtention d'une certaine amplitude de mouvement sans frottement.

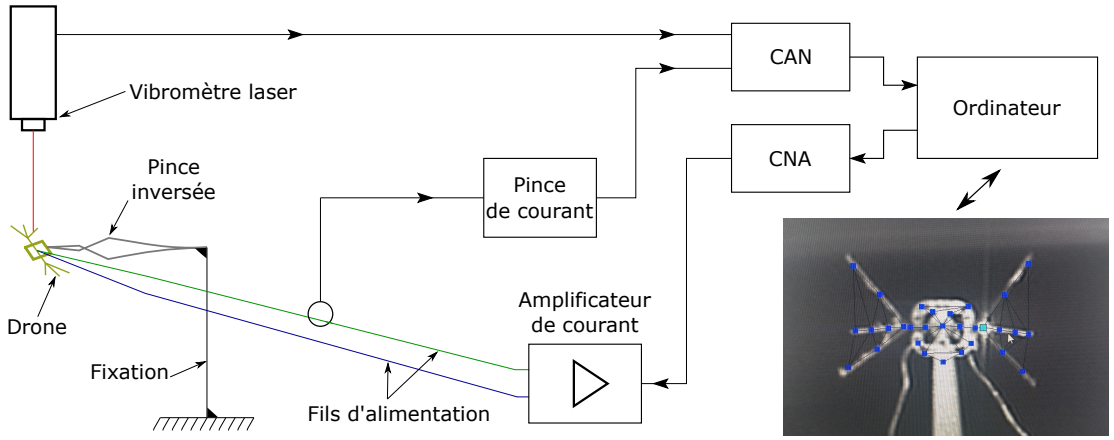


Figure 5.12 – Schéma du dispositif expérimental de mesure.

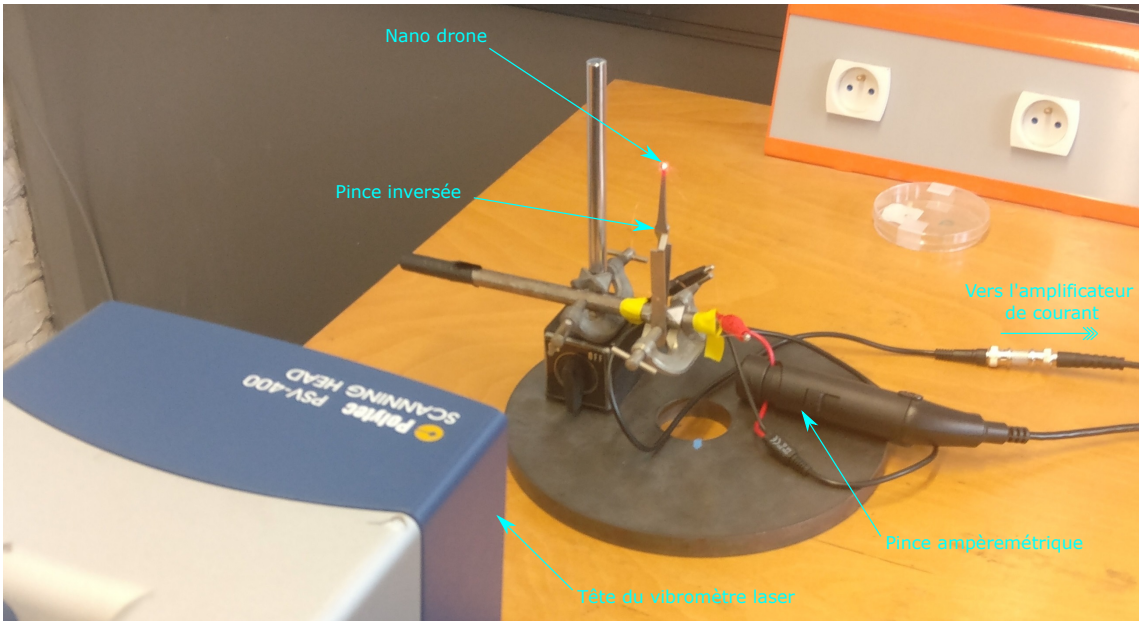


Figure 5.13 – Dispositif expérimental avec un prototype GLR en cours de mesure.

Par ailleurs, on a effectué une étude comparée de l'influence de la membrane sur la cinématique. Pour cela, on a retiré les membranes des prototypes avec deux techniques qui consistaient respectivement à brûler la membrane à l'aide d'un fer à souder et à découper la membrane au niveau des nervures. La première méthode, comme indiqué pour le GLR 4, n'a pas été fructueuse puisque la membrane s'est fortement contractée, ce qui a provoqué la déformation plastique des nervures des ailes.

5.3.2 Protocole de mesure

La figure 5.12 présente le schéma du dispositif expérimental complet pour les mesures de déplacement. Pour l'analyse modale, les prototypes sont tenus par une pince inversée, elle-même encastrée par un système à vis. La figure 5.13 présente la pince ainsi montée et, au premier plan, la tête de mesure du vibromètre laser à balayage – le prototype est

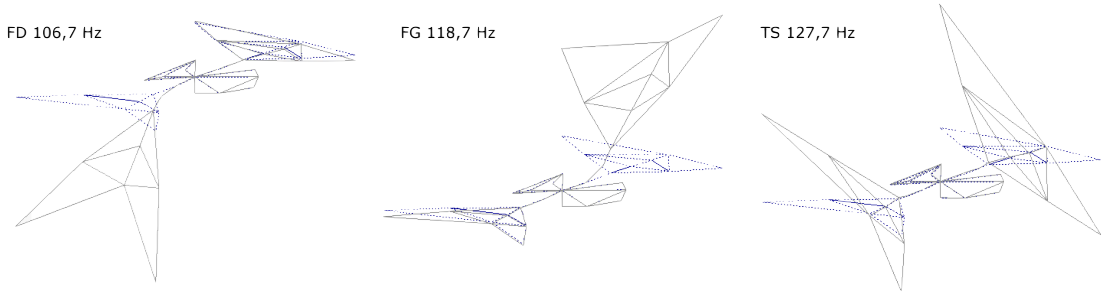


Figure 5.14 – Identification des modes de flexion et torsion symétriques du WRR, avec dédoublement du mode de flexion.

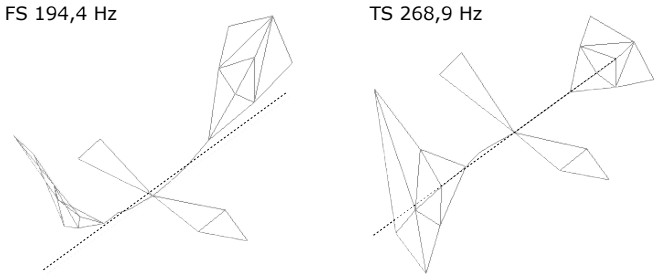


Figure 5.15 – Identification des modes de flexion et torsion symétriques du GLR, malgré le fait que la déformée modale pour le second mode ne soit pas symétrique.

difficile à discerner, il vibrait lorsque la photographie a été prise. Le nanodrone est alimenté par un amplificateur de courant relié au générateur de signal du système de mesure. On mesure le courant d'entrée dans la bobine grâce à une pince ampèremétrique (visible sur la photographie). La mesure du déplacement est effectuée par un vibromètre laser à balayage, en un point donné à chaque instant. Sur la figure 5.13, c'est justement le reflet du faisceau sur l'aimant qui permet de repérer le nanodrone. Les points de mesure peuvent être réglés avant chaque mesure, par l'intermédiaire d'un maillage (visible sur la photographie à droite fig. 5.12), pour pouvoir obtenir les FRF en ces différents points et reconstruire ainsi les déformées opérationnelles. En effet, c'est le logiciel qui pilote l'excitation pour envoyer des *sweeps*, ou balayages en fréquence, qui sont répétés un certain nombre de fois, en chaque point du maillage.

Le vibromètre est équipé d'un analyseur pour obtenir les FRF à partir des mesures. Cependant, pour faire une analyse modale expérimentale correcte, on utilise le logiciel « M+P Analyzer ». Ce logiciel utilise une méthode basée sur l'algorithme LSCF [Van der Auweraer et al. 2001 ; Guillaume et al. 2003] pour reconstruire les réponses en fréquence et déterminer les modes. On peut s'assurer de l'exactitude de l'identification en comparant les courbes de réponses en fréquence mesurées et simulées (ces courbes se trouvent en annexe, figs. E.4.2-E.4.6). Cette méthode présente l'avantage, par rapport à une identification basée sur l'observation de pics d'amplitude et de passage par $\pi/2$ de la phase, d'identifier plus facilement les modes peu excités.

5.3.3 Extraction des modes par le logiciel M+P

Sur les figures 5.14 et 5.15, on présente les modes identifiés avec le logiciel M+P Analyzer pour le GLR 6 avec membrane et le WRR 2. Le choix de la présentation des résultats de ces deux spécimens spécifiques se justifie par la qualité de l'assemblage. Les déformées modales des autres prototypes pertinents pour les mesures (GLR 1-2-4) ne sont pas montrées pour éviter des redondances (les différences sont marginales).

Dans le cas du WRR 2, on remarque un dédoublement du mode de flexion, peut-être dû à la dissymétrie des ailes : le mode à 106 Hz correspond à la vibration de l'aile ayant conservé sa membrane et le mode à 118 Hz correspond à celle dont la membrane a été arrachée en fabrication. On choisit d'affecter, pour ce prototype, la fréquence du mode de flexion à 106 Hz. Même avec cette valeur, on constate que la différence de fréquence entre les modes de flexion et torsion symétriques est de 30 Hz environ, ce qui est particulièrement faible. Enfin, sur la figure 5.16, on trace les fréquences prédites par l'AEF et celles identifiées. Lorsqu'un mode n'est pas identifié expérimentalement, le marqueur est placé sur l'axe des abscisses. Même si elle n'est pas parfaite, la corrélation montre la pertinence du modèle pour le dimensionnement de ce type de prototypes.

Pour le GLR, le mode de flexion symétrique est à 194,4 Hz. Le mode de torsion symétrique est identifié à 268,9 Hz au lieu de 243,7 Hz (d'après la simulation), bien que la déformée expérimentale ne soit pas symétrique. La différence de fréquence est donc importante (supérieure à 70 Hz). En outre, et de manière inattendue, on observe un déplacement significatif des parties massives du prototype. Ce déplacement est dû à une rigidité insuffisante du support de bobine et pourrait expliquer que la dynamique simulée ne soit pas tout à fait retrouvée. La prise en compte de ces parties massives dans l'AEF est présentée dans la sous-section 5.3.4.

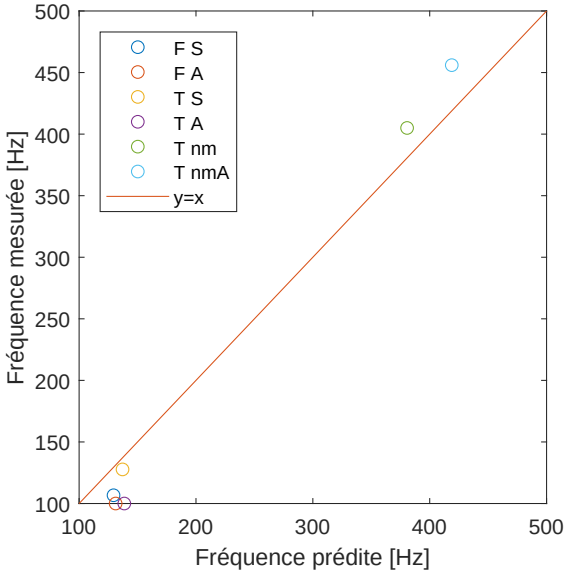


Figure 5.16 – Comparaison des fréquences prédites et mesurées du WRR VF (Prot. WRR 2). Les modes sont représentés par une couleur donnée (ex. Flexion symétrique en bleu foncé).

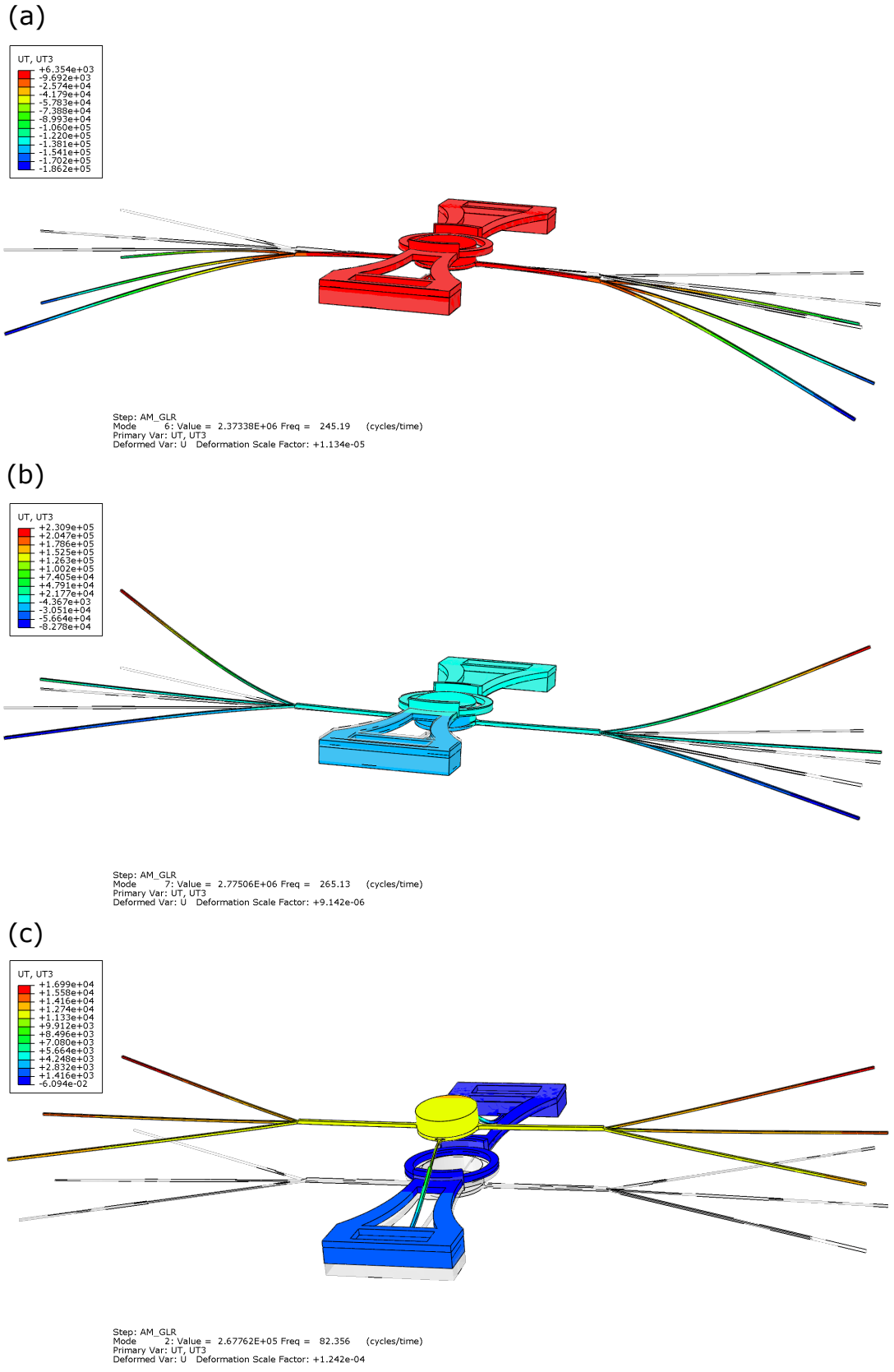


Figure 5.17 – Déformées modales du GLR pertinentes (Abaqus avec thorax) – Flexion et Torsion Symétriques (FS/TS) et Flexion Aimant (FAim).

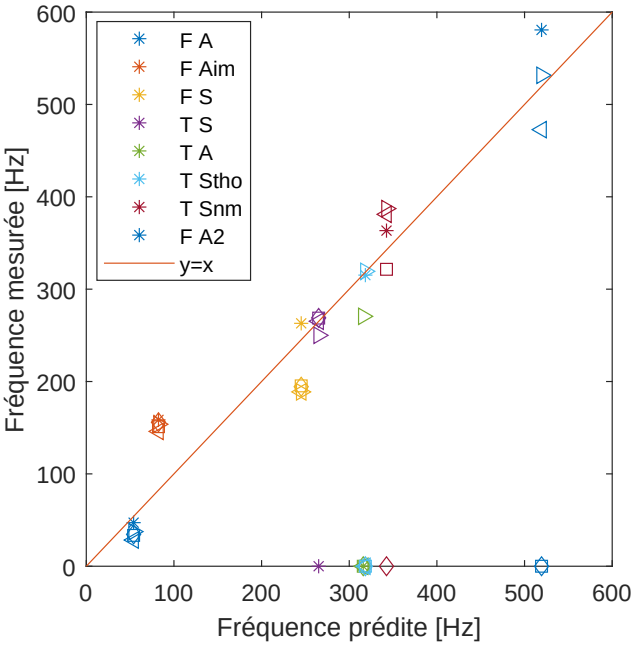


Figure 5.18 – Comparaison des fréquences prédites et mesurées du GLR VF. Les modes sont représentés par une couleur donnée (ex. Flexion Antisymétrique en bleu foncé figs. 5.17-E.3.6). Les prototypes ayant été mesurés sont repérés chacun par des marqueurs différents : ▷ GLR 1, ◁ GLR 2, □ GLR 4, ♢ GLR 6 avec membrane et ∗ GLR 6 sans membrane.

5.3.4 Prise en compte des parties massives du GLR en simulation

Le modèle établi sur Abaqus avant fabrication n'incluait pas les parties massives du prototype car elles étaient considérées comme infiniment rigides. Dans la mesure où ces parties massives se déforment sensiblement pendant les mesures, on décide de les ajouter au modèle des géométries des GLR VF de l'AEF.

Dans la figure 5.17, on donne les déformées modales des modes de flexion et torsion symétriques (FS/TS) du GLR VF, qui sont les modes pertinents pour la génération de portance, et du mode « Flexion Aimant » (FAim). D'autres déformées modales sont indiquées en annexe. La correspondance entre les fréquences propres théoriques et expérimentales est alors meilleure, comme l'illustre la figure 5.18. En particulier, on remarque que les modes du GLR sans membrane sont assez proches de la théorie (les marqueurs proches de la courbe $y = x$). Le seul point encore inexpliqué est la sous-estimation de la fréquence propre du mode Flexion Aimant. En effet, la colle, non prise en compte dans le modèle, ne permet probablement pas d'expliquer à elle-seule une différence de 70 Hz. Par ailleurs, on peut remarquer que les fréquences de mêmes modes mais pour des prototypes différents (GLR 1-2-4-6) sont globalement dans un intervalle restreint, ce qui illustre la répétabilité du processus de fabrication et d'assemblage, une fois qu'il est bien calibré.

Pour les GLR, le support de bobine étant relativement fin, leur prise en compte permet d'obtenir une meilleure corrélation entre les fréquences théoriques et expérimentales.

5.3.5 Mesure du déplacement en fonction de l'intensité du courant

Les mesures précédentes ont été obtenues en sélectionnant une amplitude d'excitation donnée et en mesurant la réponse de la structure en fonction de la fréquence. Dans cette sous-section, on s'intéresse à la mesure, sur deux prototypes (WRR 2 et GLR 6), de l'évolution de l'amplitude de déplacement en fonction du courant d'alimentation de la bobine. Cette mesure est analogue à la mesure du déplacement en fonction de la force appliquée sur la structure puisque la force électromagnétique est proportionnelle au courant. Cette mesure est effectuée en deux temps, tout d'abord sur le prototype GLR 6 avec membrane, puis dans un second temps et après avoir sectionné la membrane, sur le même prototype devenu sans membrane.

Cette mesure est effectuée en choisissant une fréquence d'excitation et une amplitude de tension d'entrée de l'amplificateur de courant. La valeur du courant est prélevée sur la pince ampèremétrique. On effectue une mesure sur une durée suffisante pour pouvoir appliquer une détection synchrone sur l'échantillon. On peut alors calculer l'erreur quadratique moyenne entre le signal mesuré et le sinus reconstitué pour quantifier la pertinence de la détection synchrone : si cette erreur est importante, le signal mesuré ne correspond pas à un signal à une composante harmonique. La comparaison entre la tension appliquée et le courant permet de vérifier la linéarité de l'actionnement sur l'ensemble des mesures faites (exemple du GLR 6 en annexe fig. E.3.5).

Pour la mesure du déplacement, deux points sont pertinents : à l'aimant et en bout d'aile. Toutefois, la mesure d'un point en bout d'aile est délicate du fait de la composante axiale non négligeable du déplacement ; il est préférable de choisir un point plus proche des liaisons, comme le point de jonction des nervures de l'aile. On extrapole alors le déplacement en bout d'aile en multipliant le déplacement à la jonction par le rapport des amplitudes en ces points de la déformée modale expérimentale.

Cette opération est valide si le rapport entre le déplacement à l'aimant et celui au point de jonction reste constant quelle que soit l'amplitude de courant imposé. La valeur de déplacement est obtenue en effectuant aussi une détection synchrone sur le signal issu du vibromètre. Sur la figure 5.19(a), on trace les déplacements à l'aimant et en bout d'aile pour trois structures : le GLR 6 avec et sans membrane ainsi que le WRR 2. Pour ce dernier prototype, dont une aile a eu une membrane arrachée avant assemblage, on mesure le déplacement sur l'aile qui a conservé sa membrane. On choisit d'exciter ces structures sur le mode ayant la réponse la plus élevée : le mode d'aimant pour le GLR (à 156 et 160 Hz respectivement avec et sans membrane) et le mode de flexion de l'aile (à 106 Hz pour l'aile avec membrane) pour le WRR.

Dans le cas du GLR 6 (avec et sans membrane), les amplitudes de déplacement évoluent de façon non linéaire avec le courant, ce qui implique la présence d'un amortissement non-linéaire. De plus, pour une même amplitude d'excitation, on constate que le déplacement en bout d'aile est deux à trois fois inférieur sur le prototype avec membrane par rapport à celui sans membrane. Enfin, on remarque que le ratio d'amplitudes entre le bout d'aile et l'aimant est bien plus faible en présence de la membrane (1,17 par rapport à 2,05 pour un courant de l'ordre de 20 mA). Ces mesures montrent aussi a priori que la présence de la membrane modifie la déformée modale du mode considéré.

Si l'on s'intéresse dorénavant au WRR, on observe que l'évolution de l'amplitude en fonction de l'intensité du courant est linéaire ; on a donc a priori un amortissement linéaire. L'absence d'amortissement non-linéaire pour le WRR est tout de même étonnant, d'au-

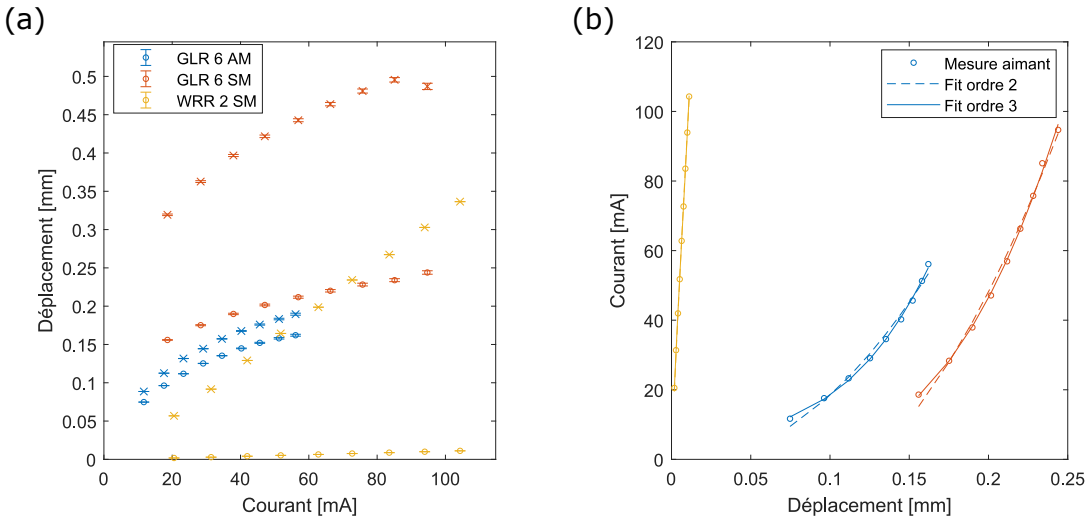


Figure 5.19 – Identification de l'amortissement dû à la membrane. (a) Déplacement à l'aimant (∘) et en bout de nervure (×) en fonction du courant appliqué à la bobine, pour 3 prototypes (3 couleurs, AM/SM : avec/sans membrane). (b) Ajustement d'un modèle d'amortissement (quadratique et cubique) à chaque déplacement à l'aimant pour les trois prototypes (même code couleur).

tant plus que le déplacement de l'aile est dans le même ordre de grandeur que celui des prototypes GLR 6 avec et sans membrane. Or, comme la déformée modale à l'aimant est très faible, il est possible qu'il y ait eu une erreur sur la déformée opérationnelle, surestimant l'amplitude de déplacement en bout d'aile. Dans ce cas, l'amplitude serait peut-être insuffisante pour que l'effet non-linéaire soit perceptible. Des mesures supplémentaires sur ces mêmes versions ou sur d'autres seraient nécessaires pour s'assurer de la répétabilité et de la validité de ces résultats.

D'après les résultats du chapitre 2, on peut évaluer les coefficients d'amortissement modaux sur un prototype donné, en identifiant une parabole sur la courbe de l'amplitude d'excitation en fonction de celle du déplacement. La mesure du déplacement à l'aimant présentant moins d'incertitude, on utilise pour chaque prototype la courbe du déplacement en ce point. L'identification de ces courbes par des polynômes d'ordre 2 et 3 obtenue par la fonction Matlab *polyfit* est présentée sur la figure 5.19(b). On remarque que pour les prototypes GLR 6 avec et sans membrane, l'identification à l'ordre 3 est plus fidèle que celle à l'ordre 2, ce qui aurait tendance à indiquer que le modèle d'amortissement développé dans le chapitre 2 est insuffisant pour ces cas.

Il est important de mentionner que certains coefficients des fonctions polynomiales identifiées sont négatifs, ce qui est incohérent puisque les coefficients d'amortissement sont positifs. En toute rigueur, il serait donc nécessaire modifier la fonction d'identification sur Matlab pour imposer la positivité des coefficients. De plus, le calcul des coefficients d'amortissement nécessite les valeurs de forces imposées ; il faudrait donc identifier la relation entre le courant dans la bobine et la force exercée par l'aimant sur la structure pour en déduire les valeurs effectives des coefficients d'amortissement.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la démarche de la campagne d'optimisation paramétrique utilisée pour deux architectures de prototypes. Le Dual Rider a été écarté au début de la campagne d'optimisation, mais pourrait être reconsidérée au vu des résultats obtenus *a posteriori* dans la partie aérodynamique, présentée au chapitre 3.

L'optimisation utilisée dans ce chapitre repose sur l'utilisation couplée de l'ODT et de la fonction *fminsearch* de Matlab. Des différences notables entre le modèle ODT et les prototypes fabriqués engendrent une dégradation des performances prévues – en effet les prototypes n'ont pas présenté de vibrations en grande amplitude. La présence de congés de raccordement, déjà évoquée au chapitre 4, exige une vérification systématique par AEF des performances de la structure envisagée. Deux alternatives peuvent être envisagées : (i) garder l'ODT et intégrer des petites poutres de raccord modélisant les congés, ou (ii) coupler Abaqus à Matlab afin de calculer la fonction-coût de *fminsearch* via Abaqus, en utilisant des éléments 3D. Dans les deux cas, la mise en œuvre n'est pas triviale.

Quel que soit l'outil de calcul de structure utilisé à terme, trois recommandations peuvent être formulées pour des optimisations futures :

- ne pas inclure les épaisseurs dans les variables d'optimisation :
  - toute optimisation au dixième de micron ou même au micron près est vaine compte tenu de la précision de fabrication,
  - la multiplication des couches nécessaires au dépôt des nervures augmente l'incertitude sur l'épaisseur effective de chaque poutre et augmente aussi le risque d'erreur humaine en fabrication,
  - l'obtention d'épaisseurs optimales non standards exige des tests supplémentaires et une validation des nouveaux procédés/paramètres associés,
  - intégrer les épaisseurs aux variables d'optimisation représente une augmentation drastique du nombre de variables, donc du temps de calcul ;
- en lien avec ce dernier point, limiter le plus possible le nombre de variables pour ne pas dégrader la pertinence du minimum local trouvé par la fonction d'optimisation ;
- prendre soin de suffisamment pondérer le critère d'optimisation sur la bonne excitabilité.

Par ailleurs, deux résultats issus de mesures effectuées sur les prototypes assemblés sont à souligner :

- la modélisation par AEF d'un prototype incluant l'aimant, les congés et les parties massives reproduit fidèlement le comportement dynamique mesuré sur les prototypes. Ceci permet de poursuivre la conception de prototypes et d'anticiper leur succès avant fabrication ;
- la mesure du déplacement de la structure en fonction de l'intensité montre l'existence d'un amortissement non-linéaire. Ce dernier tend à limiter l'augmentation de l'amplitude de déplacement avec une force d'excitation croissante. Cela est logique puisque l'énergie perdue correspond à l'énergie utile pour la génération de portance (à mettre en rapport avec le concept d'énergie active).

Enfin, le point ayant eu le plus de poids dans la campagne d'optimisation paramétrique menée dans ce chapitre est la complexité de la géométrie des structures considérées :

- ces structures présentent de nombreuses jonctions et le fait de coller l'aimant sur une poutre bi-encastrée (ou bi-articulée dans le cas du WRR) limite les amplitudes de vibration ;

— cette complexité accroît le risque de différences entre le modèle de l'ODT et la géométrie et le comportement effectifs des prototypes assemblés.

À l'aune de ces observations, nous avons repris la conception de l'OVMI en essayant de mieux comprendre comment obtenir la cinématique recherchée avec une géométrie la plus simple possible. Cette étude fait l'objet du chapitre 6.

Chapitre 6

Conception d'une nouvelle génération de nanodrones

Mais le dernier mot est-il dit ? L'espérance doit-elle disparaître ? La défaite est-elle définitive ? Non !

C. de Gaulle

Ce chapitre présente une méthodologie de conception d'une nouvelle génération de nanodrones. Le principe de conception de la structure utilisé au chapitre précédent est complexe. Les deux architectures proposées, les WRR et GLR, sont des treillis de 14 et 12 poutres respectivement, qui ont été optimisées en prenant en compte plus de 20 variables. Le code ODT ayant ses propres limites et l'algorithme utilisé n'étant capable de trouver qu'un minimum local au voisinage du jeu de variables initial, une révision complète de la méthodologie de conception et des concepts a été jugée utile. Nous avons abouti à une simplification de la structure du nanodrone, tout en préservant le concept de combinaison de mouvements de battement et de rotation des ailes. Cette simplification a de nombreux avantages : (i) elle permet de mener une partie du calcul de façon analytique et de proposer des valeurs de dimensions qui soient proches – *a priori* – de l'optimum global ; (ii) elle diminue le nombre de variables et donc la complexité de la mise en œuvre de l'optimisation ainsi que son temps de calcul ; (iii) elle facilite dans l'esprit le passage de l'ODT à Abaqus et les modifications pré-fabrication et (iv) elle réduit nécessairement le nombre de branchements sur la structure et de surcroît on choisit de lier la structure souple au thorax rigide en un seul point, ce qui fait que la structure est désormais encastrée-libre, facilitant ainsi l'obtention de grandes amplitudes.

Comme présenté dans l'introduction, tous les nanodrones ayant réussi à décoller ont un actionnement commun, avec une aile quasiment rigide reliée par une simple liaison souple au mécanisme de génération du mouvement de battement (le *4-bar mecanism*), présenté dans [Wood 2007b] et inspiré du MFI [Fearing et al. 2000]. Par la suite, toute conclusion donnée pour le Robobee peut donc être étendue aux autres nanodrones existants. La simplification de la structure peut ainsi être menée en changeant de paradigme : plutôt que de concevoir une structure flexible avec des modes aux propriétés particulières, on cherche, dans ce chapitre, à dimensionner (i) un système discret de deux masses et deux ressorts en translation représentant le battement et la rotation de l'aile ; (ii) une structure de solides rigides générant la cinématique souhaitée pour une fréquence d'excitation donnée, puis (iii) des liaisons souples qui permettent d'obtenir la structure flexible équivalente.

Dans la section 6.1, on étudie l'actionnement des ailes de nanodrones à l'aide de simples

modèles discrets. Dans un premier temps, on analyse d'un point de vue dynamique le système d'actionnement du Robobee dont l'architecture a été présentée en introduction (sous-section 1.1.3). Dans un second temps, on modélise une aile de drone OVMI comme un système rigide dont le mouvement a deux degrés de liberté. On cherche alors les propriétés que doit vérifier le système pour générer la cinématique recherchée.

Dans la section 6.2, on cherche une structure d'aile de nanodrone constituée de solides rigides qui puisse se modéliser comme le système discret de la section 6.1. En accord avec le principe de simplification, on étudie des structures à deux barres et deux ressorts en rotation. On propose une première disposition de ces barres, en L, et une seconde, bio-inspirée, qui reproduit le bord d'attaque et la veine cubitale d'une aile de diptère. On verra qu'il existe une correspondance exacte de cette seconde disposition avec le modèle discret, qui est donc choisie pour être modélisée à l'aide de liaisons souples dans la section suivante.

Dans la section 6.3, on transpose les conditions d'obtention de la cinématique recherchée à un modèle de poutres d'Euler-Bernoulli dans lequel les deux barres sont modélisées comme des poutres épaisses et les deux ressorts en rotation comme des liaisons souples (i.e. des poutres fines). Le dimensionnement est effectué à l'aide d'une feuille de calcul donnant la majorité des dimensions géométriques à partir d'un nombre relativement faible de paramètres initiaux. On valide ce premier dimensionnement du modèle de poutre à l'aide de l'ODT. Ensuite, on modélise la structure complète du drone, avec les deux ailes et la poutre support de l'aimant qui fait office de moteur – en effet cette poutre transmet le mouvement de l'actionneur bobine-aimant au reste de la structure. À l'aide d'une optimisation relativement simple, on propose une géométrie complète. On indique les résultats de l'analyse modale correspondant à cette structure effectuée avec l'ODT et Abaqus. Cette version, bien qu'elle puisse être encore améliorée, permet de valider une partie de la démarche de conception.

Sommaire du chapitre

6.1 Modèles analytiques discrets de nanodrones 138
6.1.1 Système avec battement imposé 138
6.1.2 Système avec battement et rotation résonants 142
6.2 Conception d'ailes sous l'hypothèse de solides rigides 154
6.2.1 Aile en L 154
6.2.2 Aile bio-inspirée 157
6.3 Transposition vers un modèle avec liaisons souples 161
6.3.1 Raideur d'une liaison souple 161
6.3.2 Dimensionnement des liaisons souples 164
6.3.3 Proposition d'une géométrie 170
6.4 Conclusion 175

6.1 Modèles analytiques discrets de nanodrones

6.1.1 Système avec battement imposé

Le mécanisme d'actionnement des ailes du Robobee utilise le principe dit de *passive rotation* [Wood 2007a], que l'on retrouve aussi pour des MAVs ou encore – quoiqu'il s'agit plutôt d'une flexion que d'une rotation – dans le dispositif expérimental de [Thiria et

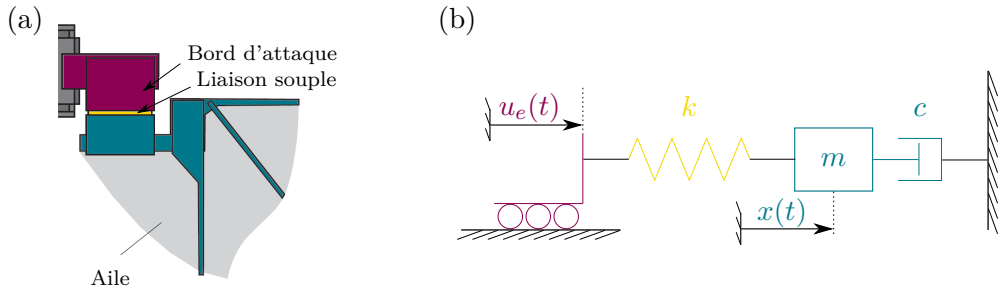


Figure 6.1 – Actionnement à un seul degré de liberté. (a) Schéma de l'articulation du Robobee, adapté de [Whitney et Wood 2010], (b) modèle élémentaire d'une aile de nanodrone avec un seul degré de liberté.

Godoy-Diana 2010 ; Ramananarivo et al. 2011]. En effet, le mouvement de battement généré par l'actionneur est imposé alors que le mouvement de rotation des ailes peut être considéré comme passif. Dans ce mécanisme, le mouvement de rotation est entraîné par le mouvement de battement par l'intermédiaire d'une liaison souple montrée fig. 1.7(b) et fig. 6.1(a). On propose donc de modéliser cette aile par un système discret à un degré de liberté mis en mouvement par l'intermédiaire d'un déplacement imposé, comme illustré en figure 6.1(b). Le battement est représenté par le déplacement du charriot noté $u_e(t)$. La liaison souple qui permet la rotation de l'aile est modélisée par un ressort de raideur k. La masse de l'aile est notée m. Enfin, comme la source principale d'amortissement est l'air, on modélise cette interaction sous la forme d'un amortisseur relié au bâti, dont on note la constante c. On note $x(t)$ le déplacement total de l'aile qui est la somme des mouvements de battement et de rotation. On écrit $x_r(t) = x(t) - u_e(t)$ le déplacement relatif représentatif du mouvement de rotation.

On présente dans cette sous-section l'analyse de ce modèle discret très simple. On utilise d'abord un amortissement linéaire, et l'on détermine la fréquence pour laquelle les mouvements de battement et de rotation sont en quadrature de phase. On considère ensuite un amortissement non-linéaire du même type que celui modélisé au chapitre 2 afin de mieux prendre en compte l'effet de l'air sur la structure.

6.1.1.1 Modèle d'amortissement linéaire

L'équation du mouvement de la masse m du système présenté en fig. 6.1(b) peut s'écrire directement :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ku_e. \tag{6.1}$$

En notant $u_e = x_e \cos(\Omega t)$, on écrit l'équation précédente sous forme canonique :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e \cos(\Omega t). \tag{6.2}$$

La forme de cette équation est analogue à celle d'un système à un degré de liberté forcé – cela provient du fait que l'amortisseur est positionné par rapport au bâti. On peut aussi écrire l'équation (6.2) avec le déplacement relatif :

$$\ddot{x}_r + 2\xi\omega_0\dot{x}_r + \omega_0^2 x_r = -\ddot{u}_e - 2\xi\omega_0\dot{u}_e. \tag{6.3}$$

On cherche la fréquence pour laquelle les déplacements u_e (battement imposé) et x_r (rotation passive) sont en quadrature de phase. Pour cela, on propose de tracer la fonction

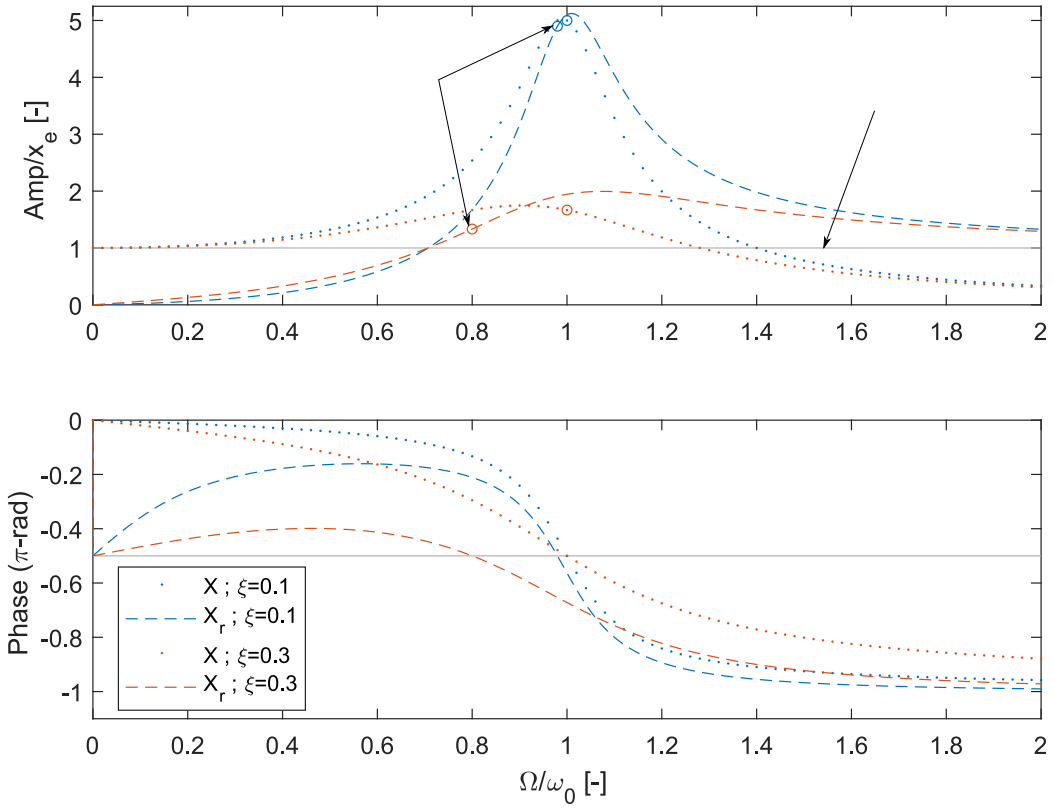


Figure 6.2 – Réponses en fréquence du déplacement absolu (pointillés) et du déplacement relatif (trait interrompu) pour deux valeurs de coefficient d'amortissement modal linéaire.

de réponse en fréquence (FRF) du déplacement relatif pour une amplitude de déplacement imposé x_e donnée. Cette FRF peut s'obtenir directement à partir de l'équation (6.3), mais il est plus aisé de calculer la FRF du déplacement total puis de retrancher le déplacement imposé. On définit donc l'amplitude complexe $X(\Omega) \in \mathbf{C}$ telle que $x(t) = \mathrm{Re}\left(X(\Omega)e^{j\Omega t}\right)$ et, pareillement, l'amplitude complexe $X_r(\Omega)$. On exprime la réponse en fréquence correspondant à Eq. (6.2) sous la forme :

$$X/x_e = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\omega\Omega}, \tag{6.4}$$

ce qui donne

$$X_r/x_e = \frac{\Omega_0^2 - 2j\omega\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\omega\Omega}. \tag{6.5}$$

La réponse en fréquence du déplacement absolu est représentée sur la figure 6.2 en trait pointillé et celle du déplacement relatif en trait interrompu. On observe une réponse très faible du mouvement relatif en basse fréquence et une réponse qui tend vers 1 en haute fréquence. En effet, comme le montre aussi la réponse du déplacement absolu, la masse suit le déplacement imposé en basse fréquence, puis passe par une résonance et ensuite, en haute fréquence, la masse a un déplacement relatif en opposition de phase avec une amplitude correspondant à celle du déplacement imposé (le déplacement absolu de la masse est nul).

On indique par des marqueurs ronds les fréquences pour lesquelles le déplacement relatif est en quadrature de phase avec le déplacement imposé. La FRF montre que la quadrature de phase entre le mouvement de battement et de rotation est à une fréquence différente du pic d'amplitude (la résonance est à une fréquence supérieure à la pulsation propre) et surtout qu'elle varie avec l'amortissement.

Par ailleurs, sur le tracé de l'amplitude, on indique aussi par une ligne en trait fin le niveau au-dessus duquel l'amplitude du déplacement relatif est supérieure à celle du déplacement imposé. Or, comme on l'a démontré au chapitre 3, une amplitude trop importante de rotation peut être préjudiciable pour la génération de portance. De ce fait, l'amortissement peut être favorable à l'obtention d'une cinématique générant de la portance. En outre, dans le cas où l'amplitude relative est trop importante, il est envisageable de disposer des butées pour limiter l'amplitude de rotation ; c'est une solution implémentée sur le Robobee [Wood 2007a], entre autres.

Compte tenu de l'importance de l'amortissement sur le fonctionnement d'un tel système, on propose aussi une analyse de la FRF du déplacement relatif soumis à un amortissement non-linéaire similaire à celui étudié au chapitre 2, pour modéliser plus finement l'action de l'air sur la structure.

6.1.1.2 Modèle d'amortissement non linéaire

On reprend le système précédent en remplaçant le terme d'amortissement linéaire par un terme non linéaire tel qu'introduit au chapitre 2 :

$$\ddot{x} + \eta\dot{x}|\dot{x}| + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a_e \cos(\Omega t). \tag{6.6}$$

On donne aussi, à titre d'information, l'équation du mouvement valable pour le mouvement relatif :

$$\ddot{x}_r + \eta(\dot{u}_e + \dot{x}_r)|\dot{u}_e + \dot{x}_r| + \omega_0^2 x_r = -\ddot{x}_e. \tag{6.7}$$

On trace, à l'aide de MANlab, les réponses en fréquence du déplacement relatif sur la figure 6.3. Le comportement est tout à fait similaire à celui du système linéaire, ce qui est cohérent avec le concept d'amortissement équivalent dépendant de l'amplitude, présenté dans le chapitre 2. Les fréquences de résonance pour chaque valeur d'amortissement sont de nouveau à des fréquences supérieures à la fréquence propre. De plus, on retrouve un décalage vers les basses fréquences de la fréquence de quadrature de phase, ce qui coïncide avec des observations faites dans la littérature d'une fréquence de battement d'aile inférieure aux fréquences de résonance, et en particulier, de l'analyse similaire effectuée dans [Ramananarivo et al. 2011]. On retrouve ainsi l'effet « d'aplanissement » de la courbe de phase, c'est-à-dire que la variation de la phase autour de la résonance est moins prononcée pour des amortissements élevés. Ce constat, déjà visible sur la figure 6.2, permet dans la pratique d'élargir la bande de fréquence dans laquelle on peut exciter la structure et obtenir une cinématique proche de celle recherchée.

Le fait que le battement soit un mouvement imposé sur les nanodrones est permis par la performance du système à quatre barres : il génère en effet une amplitude de battement de l'ordre de 45° pour une amplitude de déplacement de l'actionneur de l'ordre de 200 microns [Wood 2007a]. D'autres mécanismes d'actionnement existent, dont un qui réussit la prouesse de reproduire une cinématique d'aile d'insecte avec variations des trois angles (battement, rotation et déviation), et ce avec un système à quatre barres[Seshadri et al. 2012]. Dans les faits, la difficulté est de miniaturiser ces mécanismes, et pour cela il

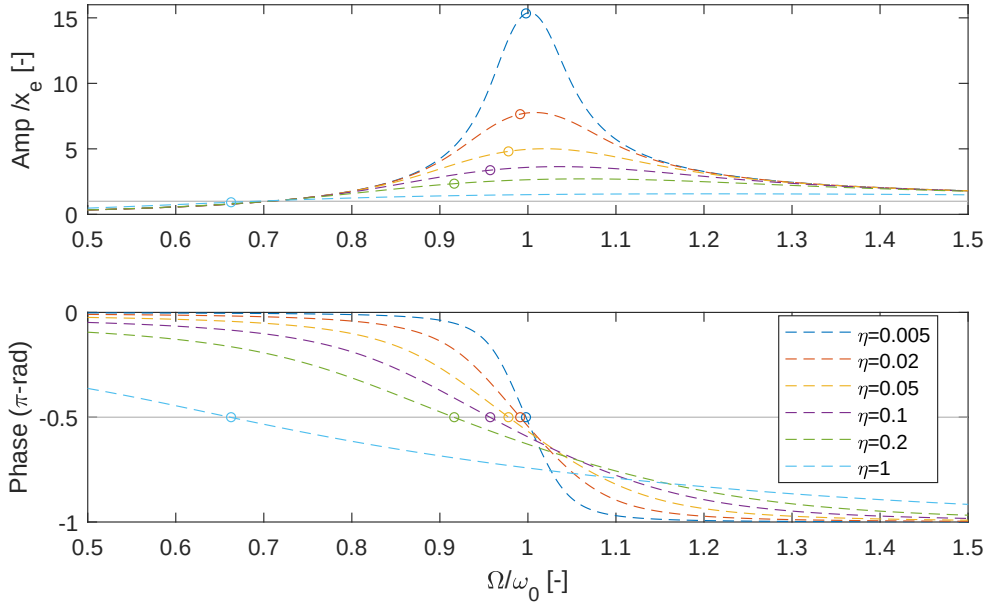


Figure 6.3 – Réponses en fréquence du déplacement relatif pour différentes valeurs de coefficient d'amortissement modal non linéaire. La fréquence de quadrature de phase est repérée par un marqueur rond ∘.

faut qu'ils soient compatibles avec une fabrication additive, ce qui amène naturellement vers des liaisons souples, comme justement le propose Robobee, et d'autres [Zhang et Rossi 2017]. Cependant, ce mécanisme est difficilement réalisable à l'aide des techniques de microfabrication mises en place pour l'OVMI sans opération supplémentaire *a posteriori*[1]. Ainsi, pour l'OVMI, le concept est d'obtenir de l'amplitude sur le mouvement de battement grâce à une résonance. On modélise cela en remplaçant, sur le schéma de la figure 6.1(b), le charriot par une masse et un ressort.

6.1.2 Système avec battement et rotation résonants

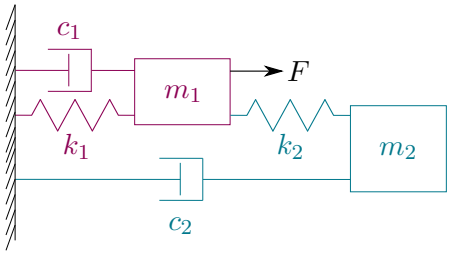


Figure 6.4 – Modèle élémentaire d'une aile de nanodrone avec deux degrés de liberté.

On présente le schéma modifié dans la figure 6.4. Le charriot du déplacement imposé est remplacé par un ensemble « 1 », tracé en magenta, compris d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur. Cet ensemble représente le battement du bord d'attaque qui est

1. Dans le cas du drone proposé dans [Zou et al. 2018], d'autres techniques de fabrication utilisées permettent une fabrication monolithique du *four-bar mechanism*.

excité par un forçage harmonique $F\cos(\Omega t)$. Le déplacement correspondant est noté $x_1(t)$. L'aile est représentée par la masse m_2 et est reliée au bord d'attaque par un ressort k_2. Le déplacement absolu de la seconde masse $x_2(t)$ est freiné par rapport au bâti par un amortisseur c_2, qui représente l'action de l'air sur l'aile. Encore une fois, la rotation est représentée par la différence de déplacements $x_r(t) = x_2(t) - x_1(t)$.

On peut écrire les équations du mouvement des déplacements absolus $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F\cos(\Omega t),\\ &m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

qui permettent d'écrire le système faisant intervenir le déplacement $x_1(t)$ et le déplacement relatif $x_r(t)$:

$$\begin{aligned} &(m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_r + (c_1+c_2)\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_r + k_1x_1 = F\cos(\Omega t),\\ &m_2\ddot{x}_r + m_2\ddot{x}_1 + c_2\dot{x}_r + c_2\dot{x}_1 + k_2x_r = 0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

On note dans le premier cas un couplage de raideur et dans le second cas un couplage de masse et d'amortissement. Ces deux systèmes sont néanmoins strictement équivalents.

On définit un certain nombre de paramètres d'adimensionnement. Le premier est :

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \tag{6.10}$$

que l'on appelle le rapport de masse. On définit aussi les fréquences propres découplées

$$\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \text{et} \quad \omega_{0,2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \tag{6.11}$$

ainsi que les coefficients d'amortissement :

$$\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_{0,1}} \text{ et } \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_{0,2}}. \tag{6.12}$$

On choisit de normaliser l'échelle de temps avec $\bar{t} = \omega_{0,1}t$ et les déplacements par une longueur choisie égale à F/k_1, i.e. $\bar{x} = k_1x/F$. Ces normalisations amènent naturellement au rapport de fréquences propres découplées :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_{0,2}}{\omega_{0,1}}. \tag{6.13}$$

On a alors réduit le nombre de paramètres indépendants à 4 :

$$\begin{aligned} &\ddot{\bar{x}}_1 + 2\xi_1\dot{\bar{x}}_1 + (1+\mu\bar{\omega}^2)\bar{x}_1 - \mu\bar{\omega}^2\bar{x}_2 = \cos(\bar{\Omega}\bar{t}),\\ &\ddot{\bar{x}}_2 + 2\xi_2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}_2 + \bar{\omega}^2\bar{x}_2 - \bar{\omega}^2\bar{x}_1 = 0, \end{aligned} \tag{6.14}$$

ou, avec le déplacement relatif :

$$\begin{aligned} &(1+\mu)\ddot{\bar{x}}_1 + \mu\ddot{\bar{x}}_r + 2(\xi_1+\mu\bar{\omega}\xi_2)\dot{\bar{x}}_1 + 2\xi_2\mu\bar{\omega}\dot{\bar{x}}_r + \bar{x}_1 = \cos(\bar{\Omega}\bar{t}),\\ &\ddot{\bar{x}}_r + \ddot{\bar{x}}_1 + 2\xi_2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}_r + 2\xi_2\bar{\omega}\dot{\bar{x}}_1 + \bar{\omega}^2\bar{x}_r = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ces équations peuvent être écrites dans le domaine fréquentiel, avec les amplitudes complexes notées X_1, X_2 et X_r. On ne donne que le système écrit avec le déplacement absolu :

$$\begin{bmatrix} -\bar{\Omega}^2 + 2j\xi_1\bar{\Omega} + (1+\mu\bar{\omega}^2) & -\mu\bar{\omega}^2 \\ -\bar{\omega}^2 & -\bar{\Omega}^2 + 2j\xi_2\bar{\omega}\bar{\Omega} + \bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

On écrit $D(\bar{\Omega})$ le déterminant qui s'écrit :

$$D(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}^4 - 2j(\xi_1 + \bar{\omega}\xi_2)\bar{\Omega}^3 - (1 + (1+\mu)\bar{\omega}^2 + 4\xi_1\xi_2\bar{\omega})\bar{\Omega}^2 + 2j\bar{\omega}(\xi_1\bar{\omega} + \xi_2(1+\mu\bar{\omega}^2))\bar{\Omega} + \bar{\omega}^2, \tag{6.17}$$

que le système soit exprimé avec le déplacement absolu ou relatif. On applique simplement la règle de Cramer à un système d'ordre 2, pour $D(\bar{\Omega}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} X_1(\bar{\Omega}) &= F\frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\Omega}^2 + 2j\xi_2\bar{\Omega}\bar{\omega}}{D(\bar{\Omega})}, \\ X_2(\bar{\Omega}) &= F\frac{\bar{\omega}^2}{D(\bar{\Omega})}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

ce qui donne pour l'amplitude complexe du déplacement relatif :

$$X_r(\bar{\Omega}) = F\frac{\bar{\Omega}^2 - 2j\xi_2\bar{\Omega}\bar{\omega}}{D(\bar{\Omega})}. \tag{6.19}$$

6.1.2.1 Oscillations libres non amorties

On résout dans un premier temps le système libre non amorti. On omet donc les termes d'amortissement et de forçage dans l'équation (6.16), qui s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} -\bar{\Omega}^2 + (1+\mu\bar{\omega}^2) & -\mu\bar{\omega}^2 \\ -\bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^2 - \bar{\Omega}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{6.20}$$

et le déterminant $D(\bar{\Omega})$:

$$D(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}^4 - (1 + (1+\mu)\bar{\omega}^2)\bar{\Omega}^2 + \bar{\omega}^2. \tag{6.21}$$

On peut donc calculer les expressions des amplitudes complexes, $\forall D(\bar{\Omega}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} X_1(\bar{\Omega}) &= F\frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\Omega}^2}{D(\bar{\Omega})}, \\ X_2(\bar{\Omega}) &= F\frac{\bar{\omega}^2}{D(\bar{\Omega})}, \\ X_r(\bar{\Omega}) &= F\frac{\bar{\Omega}^2}{D(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Par ailleurs, on peut calculer la phase ϕ entre X_1 et X_r :

$$\begin{aligned} \phi &= \arg(X_r) - \arg(X_1) \\ &= \arg(\bar{\Omega}^2) - \arg(\bar{\omega}^2 - \bar{\Omega}^2), \end{aligned} \tag{6.23}$$

or, le premier terme du membre de droite est nul et le second amène : $\forall\bar{\Omega} < \bar{\omega}, \phi = 0$ et $\forall\bar{\Omega} > \bar{\omega}, \phi = -\pi$. Ainsi :

$$\phi = -\pi/2 \iff \bar{\Omega} = \bar{\omega}, \tag{6.24}$$

c'est-à-dire que la quadrature de phase entre le battement et la rotation est obtenue pour $\Omega = \omega_{0,2}$.

Remarquons que le déplacement de la première masse admet une antirésonance à la pulsation $\bar{\omega}$, c'est-à-dire $X_1 = 0$ lorsque $\Omega = \omega_{0,2}$. Cette caractéristique est problématique,

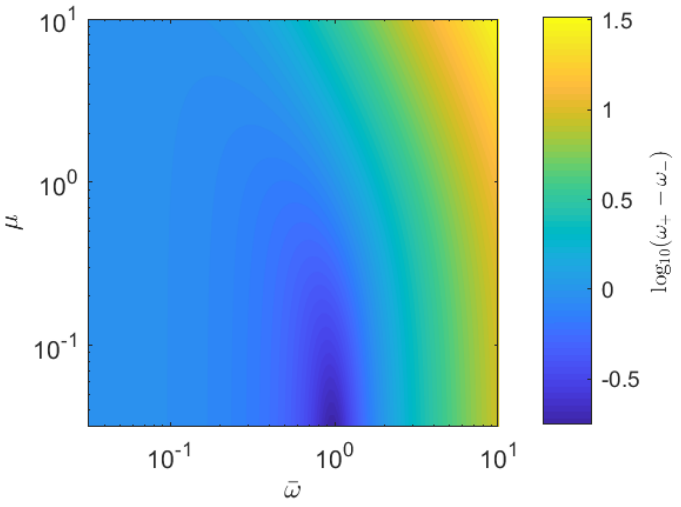


Figure 6.5 – Évolution de la différence $\omega_+ - \omega_-$ en fonction de μ et $\bar{\omega}$.

puisque l'amplitude de battement est représentée par ce déplacement, ce qui signifie que le battement sera nul (ou très faible). Il faut donc chercher à limiter l'influence de cette antirésonance. Comme le montrera l'analyse du système forcé et amorti, il est possible d'accroître l'amplitude en augmentant l'amortissement, mais aussi en rapprochant les fréquences propres du système couplé. Ces fréquences peuvent être déterminées à partir de l'équation (6.21), en calculant les valeurs de $\bar{\Omega}$ telles que $D(\bar{\Omega}) = 0$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \omega_- &= \frac{\sqrt{1 + (1+\mu)\bar{\omega}^2 - \sqrt{(1+(1+\mu)\bar{\omega}^2)^2 - 4\bar{\omega}^2}}}{\sqrt{2}}, \\ \omega_+ &= \frac{\sqrt{1 + (1+\mu)\bar{\omega}^2 + \sqrt{(1+(1+\mu)\bar{\omega}^2)^2 - 4\bar{\omega}^2}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Pour tous μ et $\bar{\omega}$ strictement positifs, on peut montrer que $\omega_+ - \omega_- > 0$ (puisque $\omega_+^- \omega_-^2 > 0$). Plus encore, on peut vérifier numériquement que :

$$\omega_- < 1 < \omega_+, \tag{6.26}$$

or, $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_{0,1}$, donc $\omega_{0,1}$ est comprise entre ω_- et ω_+. De plus, toute antirésonance est toujours comprise entre les deux modes d'un oscillateur couplé, ce qui signifie que $\bar{\omega}$ (et donc $\omega_{0,2}$) est aussi à l'intérieur de cet intervalle. Compte tenu de ces deux éléments, il apparaît que la valeur de $\omega_+ - \omega_-$ peut être diminuée en réduisant la distance entre $\omega_{0,1}$ et $\omega_{0,2}$, qui est minimale pour $\bar{\omega} = 1$. On confirme ce raisonnement en traçant, sur la figure 6.5, le logarithme de la différence de fréquence en fonction des ratios de masse et de fréquences propres découplées. Le minimum est bien trouvé pour $\bar{\omega} = 1$. Avec cette hypothèse, les expressions des fréquences propres de l'équation (6.25) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \omega_- &= \frac{\sqrt{2 + \mu - \sqrt{2\mu + \mu^2}}}{\sqrt{2}}, \\ \omega_+ &= \frac{\sqrt{2 + \mu + \sqrt{2\mu + \mu^2}}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{6.27}$$

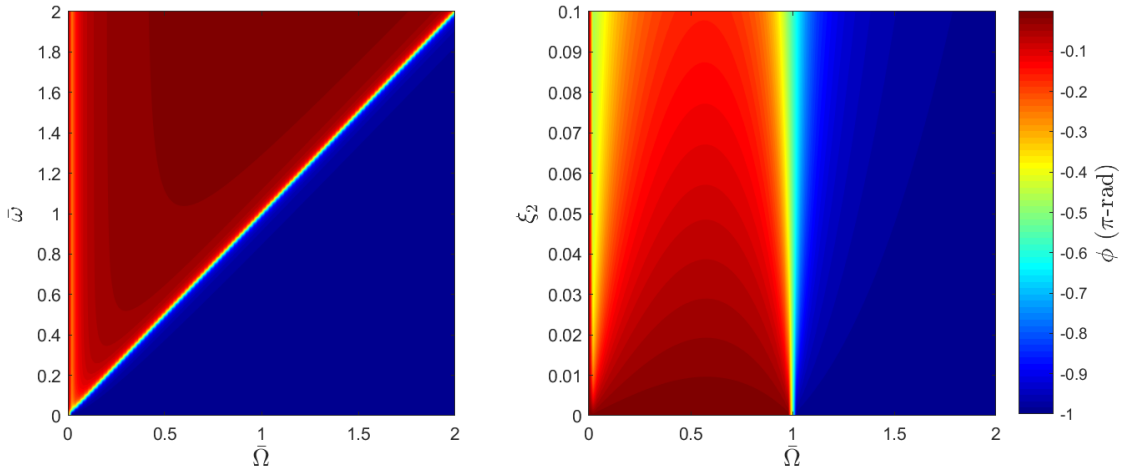
et on peut montrer que $\omega_{\pm} \approx 1 \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2}$ et donc que $\omega_+ - \omega_- \approx \sqrt{\mu}$. La distance entre les fréquences propres du système couplé est donc proportionnelle à $\sqrt{\mu}$ au premier ordre. On peut observer cette évolution qualitativement sur la figure 6.5. On cherchera donc *a priori* une structure ayant un faible rapport de masse.

6.1.2.2 Régime forcé et amorti

L'analyse du système conservatif reste pertinente après la prise en compte des termes d'amortissement pour le système forcé. D'après l'équation (6.18), on peut prévoir que l'amplitude reste minimale au voisinage de $\omega_{0,2}$ (i.e. la fréquence de l'antirésonance ne change pas) et que plus l'amortissement ξ_2 est fort, moins l'antirésonance est marquée. Par ailleurs, la fréquence de la quadrature de phase est influencée très légèrement par la présence de l'amortissement :

$$\begin{aligned}\phi =& \mathrm{Arg}(X_r) - \mathrm{Arg}(X_1) \\ =& \mathrm{Arg}(\bar{\Omega}^2 - 2j\xi_2\bar{\omega}\bar{\Omega}) - \mathrm{Arg}(\bar{\omega}^2 - \bar{\Omega}^2 + 2j\xi_2\bar{\omega}\bar{\Omega}) \\ =& \arctan\left(\frac{-2\xi_2\bar{\omega}}{\bar{\Omega}}\right) - \arctan\left(\frac{2\xi_2\bar{\omega}\bar{\Omega}}{\bar{\omega}^2 - \bar{\Omega}^2}\right).\end{aligned} \tag{6.28}$$

Dans le membre de droite, pour $\bar{\Omega} = \bar{\omega}$, le premier terme est très faible et le second vaut $-\pi/2$, donc $\phi \approx -\pi/2$ est au voisinage de $\bar{\omega}$. On remarque aussi que le premier terme tend vers $-\pi/2$ lorsque $\bar{\Omega} \to 0$ (et le second tend vers 0). On représente la valeur de la phase ϕ sur la figure 6.6. Sur la figure 6.6(a), on trace l'évolution de la phase avec la fréquence d'excitation adimensionnée en abscisse et le rapport de fréquences propres découplées en ordonnées, en choisissant $\xi_2 = 1\%$. Sur la figure 6.6(b), on trace toujours ϕ avec la fréquence d'excitation adimensionnée en abscisse, mais cette fois-ci on fait évoluer l'amortissement ξ_2 en ordonnée, avec $\bar{\omega} = 1$. On repère facilement les deux quadratures qui se visualisent par les lignes vertes, en basse fréquence et pour $\bar{\Omega} = \bar{\omega}$. La figure 6.6(b) confirme la faible variation de la fréquence de quadrature avec l'amortissement : pour un amortissement de $\xi_2 = 0,1$, on trouve $\phi = -\pi/2$ pour $\bar{\Omega} = 0,98\bar{\omega}$.



(a) $\xi_2 = 1\%$ (b) $\bar{\omega} = 1$

Figure 6.6 – Phase ϕ en fonction de $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}$ et ξ_2.

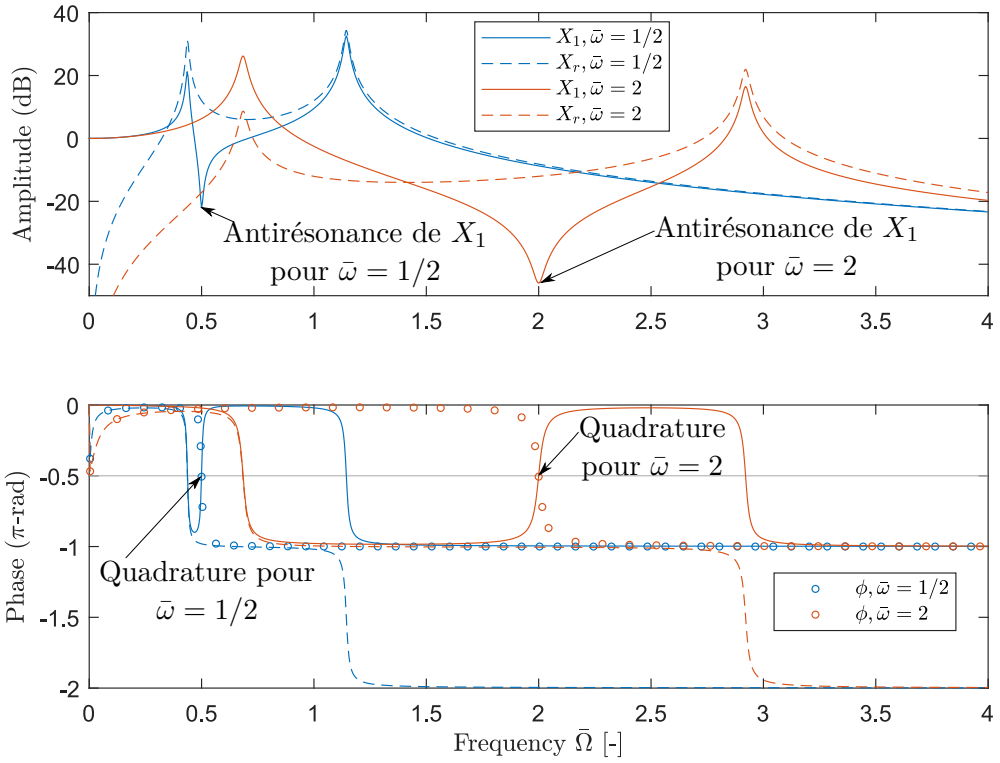


Figure 6.7 – Réponses en fréquence du déplacement de la première masse et du déplacement relatif. $\bar{\omega} = 1/2$ (bleu) et $\bar{\omega} = 2$ (rouge), avec $\xi_1 = \xi_2 = 1\%$ (0dB $\equiv |X| = 1$).

Sur la figure 6.7, on représente les réponses de deux systèmes pour lesquels $\mu = 1$: celles d'un premier système, où $\bar{\omega} = 1/2$, sont tracées en bleu et celle de l'autre système ($\bar{\omega} = 2$) sont en rouge. Le déplacement de la première masse est en trait continu et le déplacement relatif est en trait interrompu. On trace de plus la phase ϕ avec des marqueurs ronds. On confirme la présence de l'antirésonance au voisinage immédiat de la fréquence de quadrature. Remarquons que ces deux systèmes vérifient l'équation (6.26). Afin d'obtenir de l'amplitude à la fréquence propre de quadrature, il faut rapprocher les fréquences propres couplées. Pour cela, on aura remarqué que les fréquences propres découplées sont comprises entre ces fréquences, ce qui signifie que la distance fréquentielle $\omega_+ - \omega_-$ peut être réduite en imposant $\omega_{0,1} = \omega_{0,2}$, soit $\bar{\omega} = 1$ (résultat cohérent avec la figure 6.5). Or, sous cette hypothèse, la distance fréquentielle est proportionnelle au premier ordre à $\sqrt{\mu}$, comme l'a montré l'étude des oscillations libres non amorties.

On peut donc confirmer les analyses précédentes :

— le déplacement X_1 admet une anti-résonance à la fréquence de résonance de la seconde masse découplée : $\Omega = \omega_{0,2}$;

— cette fréquence coïncide quasiment avec la fréquence de quadrature de phase entre X_1 et X_r. En l'absence d'amortissement, on a montré qu'elle est strictement égale à $\omega_{0,2}$, ce qui implique que le mouvement de battement a un amplitude nulle à la quadrature de phase ;

— en présence d'amortissement, la fréquence de quadrature reste quasiment identique à la fréquence d'antirésonance, mais l'amplitude à l'antirésonance évolue avec l'amortissement ;

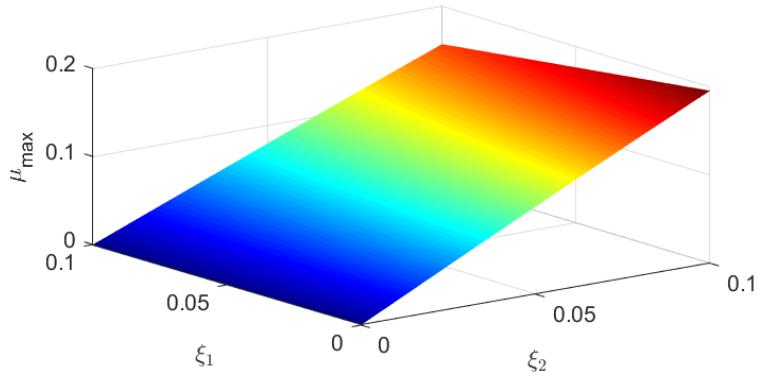


Figure 6.8 – $\mu_{\max}$ en fonction de ξ_1 et ξ_2.

— on peut chercher à rapprocher les fréquences propres du système couplé pour augmenter l'amplitude à la résonance. On a montré que la distance $\omega_+ - \omega_-$ était minimale pour $\bar{\omega} = 1$ et pour un rapport de masse μ faible (sans amortissement).

On peut ensuite chercher à évaluer l'amplitude de X_1 à la quadrature (on prendra $\bar{\Omega} = \bar{\omega} = 1$) selon les différents paramètres, à savoir μ, ξ_1 et ξ_2.

6.1.2.3 Amplification de x_1 à la quadrature

On cherche désormais les conditions nécessaires pour qu'il y ait une amplification du mouvement de battement à la quadrature de phase entre x_1 et x_r. On considère qu'il y a amplification dès lors que la réponse a une amplitude supérieure à la réponse statique, i.e. $|X_1(\bar{\Omega})| > 1$. On se place à la quadrature, donc $\bar{\Omega} = \bar{\omega}$, et de plus on pose $\bar{\omega} = 1$ pour obtenir de l'amplitude. Alors l'équation (6.18) s'écrit :

$$X_1(1) = \frac{2j\xi_2}{-(\mu + 4\xi_1\xi_2) + 2j\xi_2\mu}. \tag{6.29}$$

On peut remarquer que dans le cas où μ tend vers 0, $|X_1(1)|$ tend vers $\dfrac{1}{2\xi_1}$, ce qui indique *a priori* que $\xi_1 < 1/2$ pour avoir $|X_1(1)| > 1$. L'amplification s'exprime alors :

$$|X_1(1)| > 1 \iff 2\xi_2 > \sqrt{(\mu + 4\xi_1\xi_2)^2 + (2\mu\xi_2)^2}, \tag{6.30}$$

or, toutes les variables sont réelles positives, donc :

$$|X_1(1)| > 1 \iff \mu^2(1 + 4\xi_2^2) + 8\mu\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2(4\xi_1^2 - 1) < 0. \tag{6.31}$$

On calcule le déterminant de ce polynôme en μ :

$$\Delta_\mu = 16\xi_2^2(1 + 4\xi_2^2(1 - 4\xi_1^2)). \tag{6.32}$$

On s'assure que $\Delta_\mu > 0$ avec $\xi_1 < 1/2$, ce qui est déjà vérifié après l'équation (6.29). On a donc deux racines en μ pour le polynôme précédent. La première est négative et donc ne présente pas d'intérêt. La seconde est positive si :

$$\sqrt{\Delta_\mu} - 8\xi_1\xi_2 > 0 \iff \sqrt{1 + 4\xi_2^2(1 - 4\xi_1^2)} - 2\xi_1 > 0; \tag{6.33}$$

cette affirmation est vraie pour $\xi_1 < \frac{1}{2}$ (proposition déjà vérifiée). On peut donc calculer la valeur de la racine positive du polynôme en μ en fonction de ξ_1 et ξ_2, et ainsi trouver l'intervalle $[0,\ \mu_{\max}[$ pour lequel il est possible d'avoir une amplification (stricte) de la réponse :

$$\mu_{\max} = \frac{\sqrt{\Delta_\mu} - 8\xi_1\xi_2}{2(1+4\xi_2^2)} = \frac{2\xi_2(\sqrt{1+4\xi_2^2(1-4\xi_1^2)} - 2\xi_1)}{1+4\xi_2^2}. \tag{6.34}$$

Cette valeur est quasiment linéaire avec ξ_2 (au premier ordre $\mu_{\max} = 2\xi_2$) et ne dépend que très peu de ξ_1. Le tracé de cette grandeur est donné en figure 6.8, la variation de $\mu_{\max}$ est bien cohérente avec l'analyse proposée. Ainsi, pour la conception de l'aile, il faut dimensionner le système pour avoir un rapport de masse faible dont la valeur critique dépend de l'amortissement. Plus ce dernier est important (du fait d'une grande amplitude par exemple), plus le rapport de masse peut être grand.

On détermine ainsi une condition sur les paramètres du système pour le fonctionnement voulu. Pour autant, l'influence des paramètres sur la valeur de l'amplitude de $X(1)$ en tant que telle n'a pas encore été montrée. On utilise donc l'expression de l'amplitude complexe de la première masse donnée à l'équation (6.18) pour tracer des réponses en fréquence, en faisant varier l'amortissement (on prend $\xi = \xi_1 = \xi_2$ pour simplifier) sur la figure 6.9. On a choisi $\bar{\omega} = 1$ et $\mu = 0,018$. On retrouve l'antirésonance marquée lorsque l'amortissement est faible (inférieur à $\mu/2$). Plus l'amortissement augmente et plus les amplitudes des pics aux résonances diminuent mais l'amplitude à la quadrature augmente ; on trouve néanmoins un maximum, repéré par une flèche. Il existe donc un amortissement idéal pour un rapport de masse donné. Pour approfondir ce point, on trace sur la figure 6.10 l'amplitude de $X_1(1)$ en fonction de l'amortissement ξ, pour 4 valeurs de rapports de masse. On repère un amortissement optimal pour 3 valeurs sur la plage d'amortissement proposée. Sur cette figure, on remarque aussi que la réduction du rapport de masse permet d'augmenter l'amplification, par exemple, pour $\xi = 1\%$, $|X_1(1)| = 14,28$ pour μ=0,001 et ne vaut plus que 1,923 pour μ=0,01. Pour autant, il n'est pas souhaitable que le rapport de masse soit trop faible puisque le bord d'attaque ne doit pas être trop épais et la nervure trop fine (pour des raisons de microfabrication). On cherchera donc des valeurs de μ comprises entre 0,5 et 5% lors du dimensionnement.

Un autre aspect important à prendre en compte est le ratio entre l'amplitude de x_1 et x_r. Pour rappel, on cherche à avoir un mouvement de battement le plus grand possible et un mouvement de rotation qui ne soit pas trop important (aux alentours de $\pi/4$-$\pi/3$). Or, on peut observer que le ratio $|X_r/X_1|$ (indépendant de μ) est d'autant plus grand que l'amortissement est faible. Cela provient des expressions des déplacements de l'équation (6.18) :

$$\left|\frac{X_r(1)}{X_1(1)}\right| = \frac{\sqrt{1+4\xi_2^2}}{2\xi_2}. \tag{6.35}$$

Ce ratio favorise toujours l'amplitude du mouvement de rotation *a priori*, il faudra donc (i) ajuster les paramètres géométriques pour obtenir des amplitudes équivalentes en terme d'**angles** et/ou (ii) utiliser un système de butées – système retenu pour Robobee. Par ailleurs, on rappelle qu'en présence d'un amortissement non-linéaire, l'amortissement évolue avec l'amplitude du mouvement, ce qui signifie que ce ratio est aussi amené à évoluer avec l'amplitude.

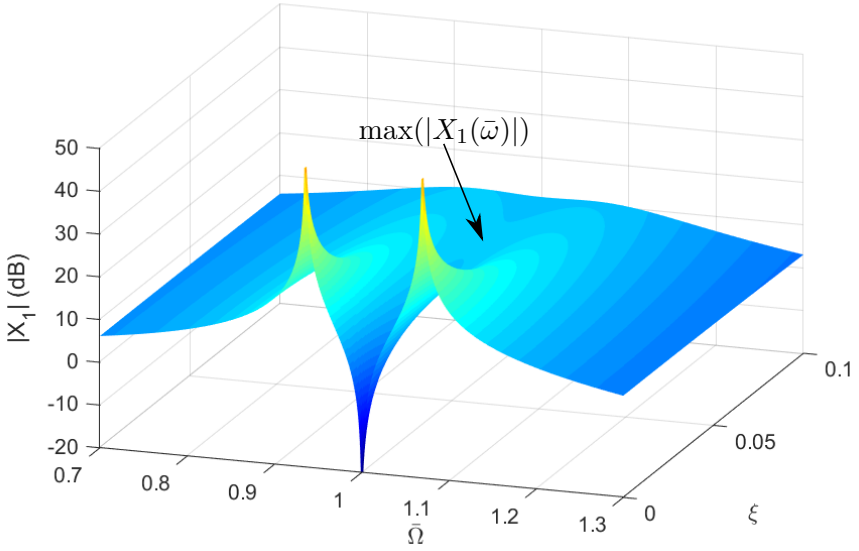


Figure 6.9 – FRF de $|X_1|$ en fonction de $\xi = \xi_1 = \xi_2$, pour $\bar{\omega} = 1$ et $\mu = 0,018$.

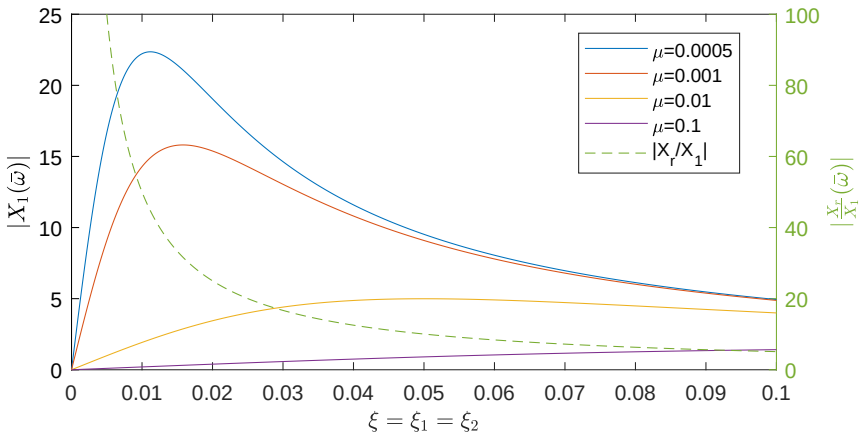


Figure 6.10 – $|X_1(1)|$ selon l'amortissement $\xi_1 = \xi_2$ pour 4 valeurs de μ.

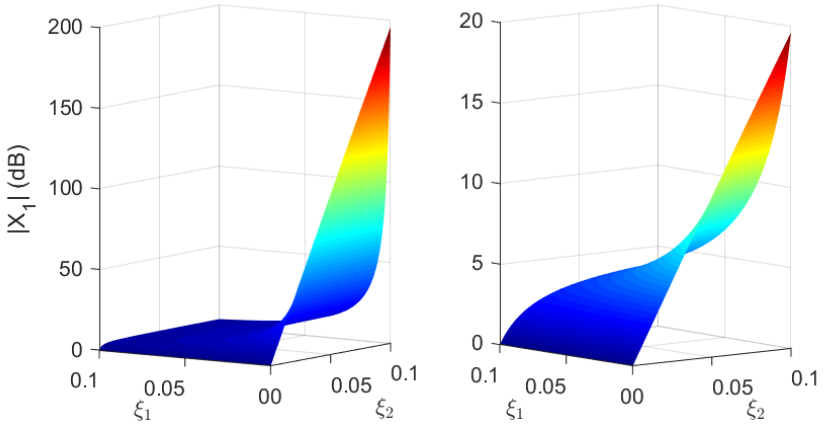


Figure 6.11 – $|X_1(1)|$ en fonction de ξ_1 et ξ_2 avec μ=0.001 et μ=0.01.

Afin de mieux comprendre l'influence de l'amortissement de chaque oscillateur, on utilise l'expression de $|X_1(1)|$ de l'équation (6.29) et on trace son évolution en fonction de ξ_1 et ξ_2, pour des valeurs données de μ. La figure 6.11 présente le cas où μ vaut respectivement 0,001 et 0,01. Ces deux graphiques montrent bien une évolution linéaire de l'amplitude en fonction de ξ_2 et hyperbolique en fonction de ξ_1. De ce fait, les valeurs de coefficients d'amortissement optimales sont $\xi_1 \ll 1$ et $\xi_2 \gg \xi_1$. Ces valeurs permettent en outre d'avoir un ratio X_r/X_1 limité et un intervalle de valeurs admissibles pour le rapport de masse étendue.

6.1.2.4 Amortissement non-linéaire

On prend en compte l'amortissement structurel ainsi que l'effet de l'air sur la structure avec un amortissement linéaire et un amortissement non-linéaire, ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + \nu_1\dot{x}_1|\dot{x}_1| + c_1\dot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F\cos(\Omega t),\\ &m_2\ddot{x}_2 + \nu_2\dot{x}_2|\dot{x}_2| + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0. \end{aligned} \tag{6.36}$$

On donne aussi, pour information, le système d'équations couplées du système écrit avec $x_1(t)$ et $x_r(t)$:

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_r + \nu_1\dot{x}_1|\dot{x}_1| + \nu_2(\dot{x}_1+\dot{x}_r)|\dot{x}_1+\dot{x}_r| \\ +(c_1+c_2)\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_r + k_1x_1 = F\cos(\Omega t),\\ m_2\ddot{x}_r + m_2\ddot{x}_1 + \nu_2(\dot{x}_1+\dot{x}_r)|\dot{x}_1+\dot{x}_r| + c_2\dot{x}_r + c_2\dot{x}_1 + k_2x_r = 0. \end{aligned} \tag{6.37}$$

On effectue les mises à l'échelle de l'espace et du temps déjà présentées (on omet les barres des grandeurs adimensionnées pour plus de clarté) et on utilise les deux coefficients d'amortissement (sans dimension) ci-dessous :

$$\eta_1 = \frac{\nu_1 F}{k_1 m_1},\ \eta_2 = \frac{\nu_2 F}{k_1 m_2}. \tag{6.38}$$

De plus, on simplifie légèrement le problème et on considère désormais que les coefficients d'amortissements sont égaux $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ et $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Alors, le système (6.36) devient :

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + 2\xi\dot{x}_1 + \eta\dot{x}_1|\dot{x}_1| + (1+\mu\bar{\omega}^2)x_1 - \mu\bar{\omega}^2x_2 = \cos(\bar{\Omega}t),\\ &\ddot{x}_2 + 2\xi\bar{\omega}\dot{x}_2 + \eta\dot{x}_2|\dot{x}_2| + \bar{\omega}^2x_2 - \bar{\omega}^2x_1 = 0. \end{aligned} \tag{6.39}$$

On étudie les réponses en fréquence de ce système grâce à MANlab, en prenant $\bar{\omega} = 1$. Sur la figure 6.12, on trace les réponses en fréquence de trois systèmes soumis à un même amortissement ($\xi = \eta = 1$Ğ), pour lesquels μ vaut respectivement 1 ‰, 1% et 10%. On trace $X_1(\bar{\Omega})$ en trait continu et $X_r(\bar{\Omega})$ en trait interrompu. On représente la réponse en amplitude ainsi que la réponse en phase où on indique de surcroît ϕ la différence de phase entre X_r et X_1 avec des petits marqueurs ronds. On retrouve plusieurs constats de l'analyse avec l'amortissement linéaire : (i) si μ est trop élevé alors l'amplitude de X_1 à la quadrature est nulle, (ii) plus μ est faible plus cette amplitude est élevée.

La figure 6.13 correspond à un système conçu avec un rapport de masse très faible (μ=0,001). Ce système est soumis à divers amortissements, notamment certains cas où l'amortissement non linéaire est nul. De façon analogue au cas précédent, si l'amortissement

$(\xi;\eta)$	Fréquence de quadrature	$\lvert X_1\rvert$	$\lvert X_r\rvert$
$(0.01;0.001)$	0.9896	20.6	143.7
$(0.001;0.001)$	0.9883	26.21	173.5

Tableau 6.1 – table
Valeurs des amplitudes de X_1 et X_r à la quadrature sur la fig. 6.13.

n'est pas dans un intervalle compatible, l'antirésonance de la réponse de x_1 peut persister (on a encore deux pics aux fréquences de résonance couplées, cf. courbes bleue et rouge). De plus, on peut voir qu'il existe un amortissement qui correspond à une amplitude supérieure à toutes les autres ($\xi = \eta = 1$Ğ). Pour information, on donne au tableau 6.1 les valeurs des amplitudes de X_1 et X_r à la quadrature (les valeurs de X_r étant trop élevées), ce qui permet d'identifier pour les coefficients d'amortissement retenus les valeurs de ratio $|X_r/X_1|$.

En conclusion de cette section, notons que les modèles discrets précédents ont été proposés en première analyse pour les ailes des nanodrones ayant réussi à décoller. Leur actionnement est étudié par un modèle discret où le battement de l'aile est pris en compte avec un charriot dont le déplacement est imposé, et où l'aile est modélisée par une masse liée par un ressort à ce charriot. Ainsi, la rotation de l'aile correspond au déplacement relatif de la masse par rapport au charriot. On montre que la quadrature de phase entre le battement et la rotation est obtenue à une fréquence diminuant avec l'amortissement, et ce alors que la fréquence de résonance augmente. De plus, l'amplitude de la rotation est supérieure à celle du battement, et le ratio de ces amplitudes diminue avec l'amortissement.

On modélise ensuite l'OVMI avec deux degrés de liberté : le battement est représenté par le déplacement d'une première masse liée au bâti par un ressort, à laquelle est liée une autre masse par un autre ressort. On démontre que la quadrature de phase entre le battement et la rotation s'obtient à la fréquence propre découplée de la seconde masse. Cependant, le déplacement de la première masse admet une antirésonance à cette fréquence. Pour obtenir de l'amplitude résonante sur le battement, il est nécessaire (i) d'accorder les fréquences propres découplées $\omega_{0,1} = \omega_{0,2}$ et (ii) de réduire le rapport de masse μ en dessous d'une valeur maximale qui dépend de l'amortissement. On a aussi montré que l'amplitude du déplacement relatif est globalement toujours supérieure à celle du déplacement primaire – ce ratio diminuant avec l'amortissement, tout comme pour le système à un degré de liberté. Dans la mesure où les fréquences propres découplées sont accordées, ce système peut être étudié comme un amortisseur à masse accordée ou *tuned-mass damper*, système classique en dynamique dont le but consiste à réduire les vibrations d'un système – ce qui est tout à fait paradoxal puisque l'on cherche justement à obtenir une amplification.

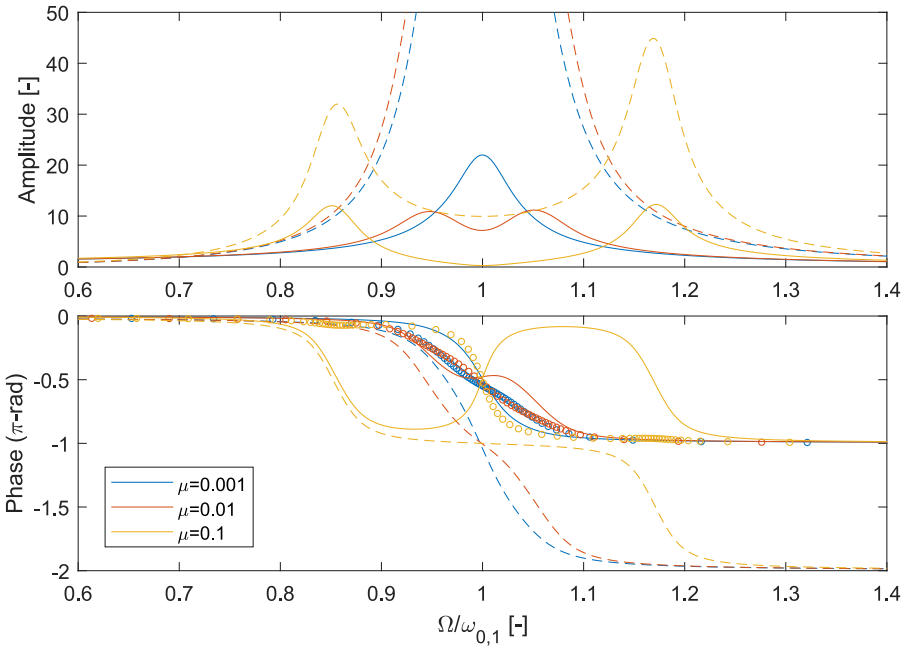


Figure 6.12 – Influence de μ sur X_1 (trait continu), X_r (trait interrompu) avec $\phi \equiv \circ$.

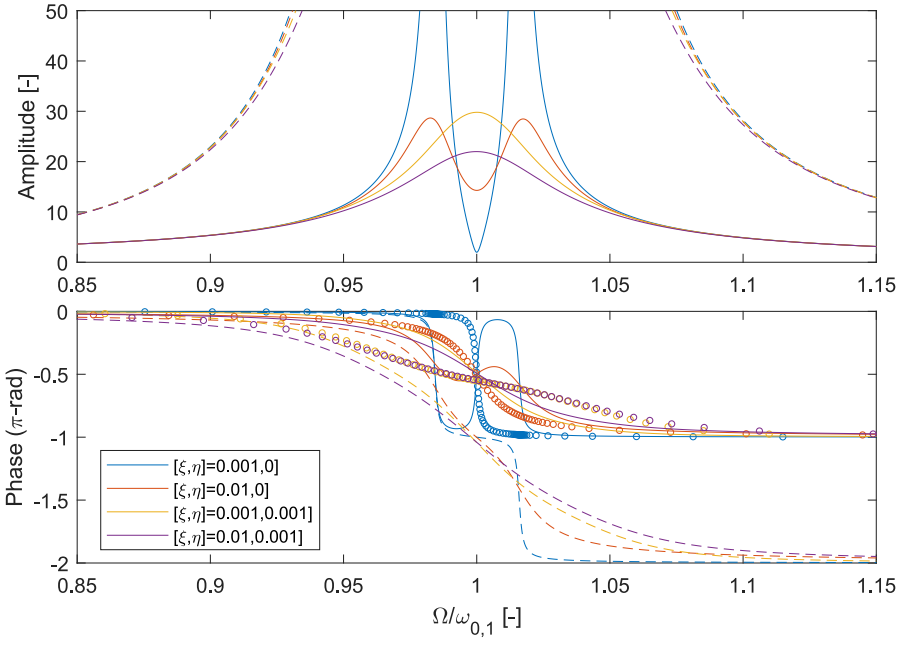


Figure 6.13 – Influence de ξ et η sur les réponses de X_1 (trait continu), X_r (trait interrompu) avec $\phi \equiv \circ$.

6.2 Conception d'ailes sous l'hypothèse de solides rigides

Le principe recherché dans ce chapitre est la simplification de la conception de la structure. Cette simplification s'obtient en limitant le nombre de paramètres géométriques. Pour cela, on choisit une structure d'aile ayant seulement deux barres, animées d'un mouvement de solides rigides. On considère que ces barres sont liées entre elles et au bâti par deux ressorts en rotation. Pour dimensionner ces barres, on s'appuie sur les calculs effectués à la section précédente, ce qui implique que leurs équations du mouvement doivent s'exprimer de façon analogue à celles des deux masses, proposées aux équations (6.8) ou (6.9).

Deux configurations sont étudiées dans cette section : la première étant un assemblage de deux poutres en L, et la seconde étant aussi un assemblage de deux poutres, mais inspirée de la structure d'une aile de diptère. Une troisième aile, bien plus complexe, est proposée en annexe F.1.

On considère donc deux barres, notées 1 et 2, de masses m_{p1} et m_{p2} et de longueurs, largeurs et épaisseurs L, b_1, h_1 et H, b_2, h_2 respectivement. Le centre d'inertie de chaque barre i est noté G_i. Les deux ressorts en rotation, situés en O_1 et O_2, ont chacun une constante de raideur notée Γ_1 et Γ_2.

6.2.1 Aile en L

La première disposition est appelée en L, puisque les deux barres sont orthogonales, la seconde étant liée à la première en son extrémité (voir fig. 6.14). On se place dans un repère galiléen R_0. La première barre tourne autour de l'axe $(O_1, \vec{x}_0)$ par rapport au bâti d'un angle $\theta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. La seconde barre tourne autour de l'axe $(O_2, \vec{y}_1)$ par rapport à la première poutre d'un angle $\alpha(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Les centres d'inertie vérifient alors $\overrightarrow{O_1G_1} = L/2\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{O_2G_2} = H/2\vec{x}_2$.

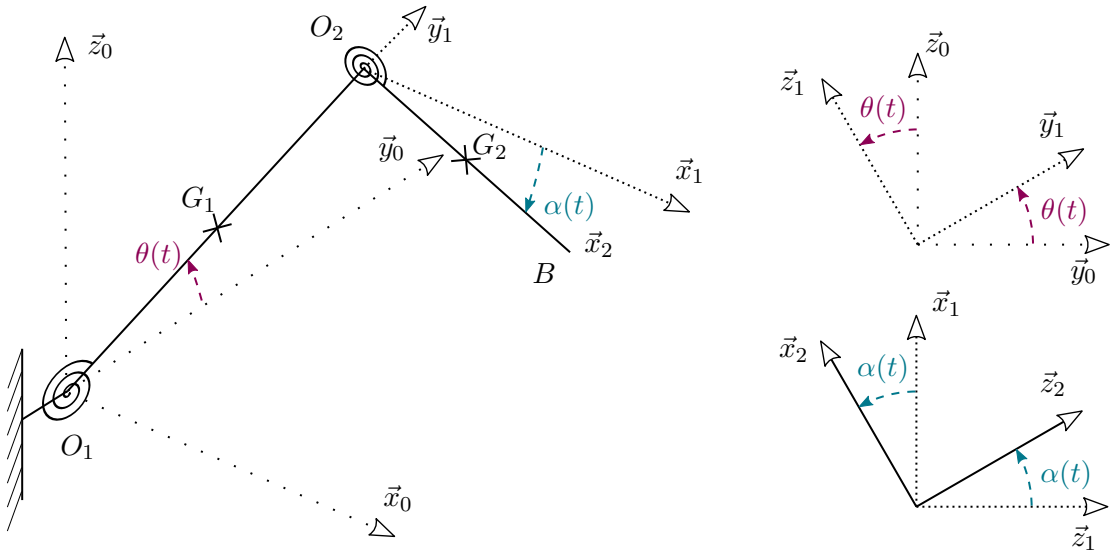


Figure 6.14 – Schéma de définition de l'aile en L (modèle solide rigide).

6.2.1.1 Équations du mouvement de l'aile en L

On calcule l'énergie cinétique du système :

$$\mathcal{T}_{\Sigma/0} = \mathcal{T}_{1/0} + \mathcal{T}_{2/0}, \tag{6.40}$$

sachant que l'énergie cinétique d'un solide i s'écrit de façon générique :

$$\mathcal{T}_{i/0} = \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2_{G_i/0} + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{G_i} \vec{\omega}_{i/0}).\vec{\omega}_{i/0}, \tag{6.41}$$

où $\mathcal{I}_{G_i}$ est l'opérateur d'inertie exprimé en G_i, $\vec{V}_{G_i/0}$ et $\vec{\omega}_{i/0}$ sont respectivement le vecteur vitesse de G_i et le vecteur rotation instantanée par rapport au repère galiléen R_0.

On commence le calcul pour la poutre 1 en calculant la vitesse de son centre d'inertie :

$$\vec{V}_{G_1/0} = \vec{V}_{O_1/0} + \overrightarrow{G_1 O_1} \wedge \vec{\omega}_{1/0} = \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{z}_1. \tag{6.42}$$

On introduit la matrice d'inertie de la poutre 1 :

$$\mathcal{I}_{G_1,1} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}, \tag{6.43}$$

où $I_1 = \frac{m_{p1} L^2}{12}$. L'énergie cinétique de la barre 1 s'écrit alors, en appliquant l'équation (6.41) :

$$\mathcal{T}_{1/0} = \frac{1}{2} m_{p1} \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2. \tag{6.44}$$

Pour la seconde barre, on procède de façon analogue. On obtient pour la vitesse :

$$\vec{V}_{G_2/0} = \begin{pmatrix} -\frac{H}{2} \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ \frac{H}{2} \sin(\alpha) \dot{\theta} \\ L\dot{\theta} - \frac{H}{2} \cos(\alpha) \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}. \tag{6.45}$$

La matrice d'inertie de la poutre 2 dans R_2 s'écrit de façon analogue à celle de 1 :

$$\mathcal{I}_{G_2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}, \tag{6.46}$$

où $I_2 = \frac{m_{p2} H^2}{12}$. L'énergie cinétique de la poutre 2 s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_{2/0} = \frac{1}{2} m_{p2} \left(\frac{H^2}{3} \dot{\alpha}^2 + (L^2 + \frac{H^2}{3} \sin^2(\alpha)) \dot{\theta}^2 - 2L \frac{H}{2} \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} \right). \tag{6.47}$$

Pour les ressorts, on calcule les énergies potentielles respectives :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{1}{2} \Gamma_1 \theta^2, \\ \mathcal{V}_2 &= \frac{1}{2} \Gamma_2 \alpha^2. \end{aligned} \tag{6.48}$$

6.2.1.2 Expression des matrices de masse et raideur

On peut écrire $\mathcal{T}_{\Sigma/0}$ et $\mathcal{V}_{\Sigma/0}$ en fonction des degrés de liberté respectifs (déplacement et vitesse) :

$$\mathcal{T}_{\Sigma/0} = \frac{1}{2}(\dot\theta\ \dot\alpha)\begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}(L^2 + \frac{H^2}{3}\sin^2(\alpha)) & -m_{p2}\frac{LH}{2}\cos(\alpha) \\ -m_{p2}\frac{LH}{2}\cos(\alpha) & m_{p2}\frac{H^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\alpha \end{pmatrix}, \tag{6.49}$$

et

$$\mathcal{V}_{\Sigma/0} = \frac{1}{2}(\theta\alpha)\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{6.50}$$

En notant q_i les degrés de libertés de ce système (donc $\theta \equiv q_1$ et $\alpha \equiv q_2$), on trouve la position d'équilibre en déterminant les q_e solutions de $\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} = 0$, d'où $\theta_e = \alpha_e = 0$. Dès lors, on peut écrire directement les équations du mouvement linéarisées autour de la position d'équilibre sous forme matricielle. La matrice de masse est la matrice de l'équation (6.49) prise à l'équilibre, donc on peut simplement écrire cette matrice avec $\alpha = 0$. Les coefficients de la matrice de raideur, notés k_{ij}, s'écrivent $k_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_e}$. Les matrices de masse et raideur s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}L^2 & -m_{p2}\frac{LH}{2} \\ -m_{p2}\frac{LH}{2} & m_{p2}\frac{H^2}{3} \end{pmatrix}, \\ K &= \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Il faut maintenant s'assurer que ces expressions sont équivalentes à celles des matrices de masse et raideur des équations (6.8-6.9). Compte tenu des expressions de l'équation (6.51), on cherche à écrire M, K sous la forme :

$$\begin{aligned} M_{\text{eq}} &= \begin{pmatrix} m_{\text{eq},1} + m_{\text{eq},2} & m_{\text{eq},2} \\ m_{\text{eq},2} & m_{\text{eq},2} \end{pmatrix}, \\ K_{\text{eq}} &= \begin{pmatrix} k_{\text{eq},1} & 0 \\ 0 & k_{\text{eq},2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Pour cela, on commence par le quatrième terme de chaque matrice, qui conduit à l'égalité :

$$\frac{m_{p2}}{3} = m_{\text{eq},2}, \tag{6.53}$$

d'où $x_r = -H\alpha$, avec le signe moins provenant des termes non-diagonaux. Ces termes définissent x_1, puisque l'on a :

$$-m_{p2}\frac{LH}{2}\dot\alpha\dot\theta = m_{\text{eq},2}\dot x_r \dot x_1, \tag{6.54}$$

d'où

$$\dot x_1 = \frac{3}{2}L\dot\theta \implies x_1 = \frac{3}{2}L\theta. \tag{6.55}$$

On vérifie enfin si le premier terme de M est équivalent ou non au premier terme de M_{eq}, et on identifie l'expression de $m_{\text{eq},1}$:

$$(m_{\text{eq},1} + m_{\text{eq},2})\dot x_1^2 \equiv (m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}L^2)\dot\theta^2 \iff m_{\text{eq},1} = \frac{4}{27}m_{p1} + \underbrace{\frac{1}{3}m_{\text{eq},2}}_{\text{Terme excédent.}}. \tag{6.56}$$

Pour les raideurs, on a :

$$k_{\text{eq},1} = \frac{4\Gamma_1}{9L^2} \quad \text{et} \quad k_{\text{eq},2} = \frac{\Gamma_2}{H^2}. \tag{6.57}$$

On en déduit alors les expressions des fréquences propres découplées (toujours en négligeant le terme supplémentaire de masse) :

$$\omega_{0,i} = \sqrt{\frac{k_{\text{eq},i}}{m_{\text{eq},i}}}. \tag{6.58}$$

On obtient alors :

$$\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{3\Gamma_1}{m_{p1}L^2}} \quad \text{et} \quad \omega_{0,2} = \sqrt{\frac{3\Gamma_2}{m_{p2}H^2}}. \tag{6.59}$$

On peut aussi calculer l'expression de μ :

$$\mu = \frac{m_{\text{eq},2}}{m_{\text{eq},1}} = \frac{m_{p2}}{3}\frac{27}{4m_{p1}} = \frac{9}{4}\frac{b_2h_2H}{b_1h_1L}. \tag{6.60}$$

Pour la disposition en L, il n'y a pas d'équivalence stricte avec les équations (6.8-6.9), puisque la matrice de masse présente un coefficient excédentaire, Eq. (6.56). Néanmoins, en implémentant une matrice M_{eq} avec le terme supplémentaire $\frac{1}{3}m_{\text{eq},2}$ sur Matlab, on trouve des conclusions similaires à celles formulées dans la section précédente, à savoir une fréquence de quadrature égale au voisinage de $\omega_{0,2}$, avec une importance clef du rapport de masse $m_{\text{eq},2}/m_{\text{eq},1}$ pour obtenir de l'amplitude sur x_1 à la quadrature. Dans la mesure où la disposition suivante présente une équivalence stricte, on la privilégiera pour la suite des calculs dans ce chapitre ; la disposition en L pourrait être toutefois envisagée pour les futures conceptions de nanodrones.

6.2.2 Aile bio-inspirée

Cette géométrie est issue d'une interprétation relativement simple d'une aile d'insecte, de diptère en particulier (voir [Ennos 1989] ou plus généralement [Grimaldi et Engel 2005]). Les diptères ont des ailes composées d'un réseau de nervures de rigidité variable appelées veines, mais les deux plus importantes sont, *grosso-modo*, les nervures du bord d'attaque (selon les espèces, les veines costales peuvent être atrophiées et les veines radiales – *radial veins* – plus massives) et la veine cubitale, cf. fig. 6.15(a). Ces veines rigidifient l'aile, même si elle peut se plier ailleurs (par exemple au niveau du sillon claval – *claval furrow*). L'idée est donc de proposer une aile toujours dotée de deux barres principales, avec la première barre correspondant au bord d'attaque et la seconde à la veine cubitale, fig. 6.15(b).

On considère toujours que la première barre peut tourner autour de l'axe $(O_1, \vec{x}_0)$, formant l'angle $\theta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et que la seconde barre peut tourner autour de l'axe $(O_2, \vec{y}_1)$, formant l'angle $\alpha(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Dans cette disposition, on considère que $O_1 = O_2$ dans un premier temps (le cas où l'on crée un petit décalage est abordé dans la sous-sous section 6.2.2.3). On définit l'angle β, constant au cours du mouvement, dans le plan donné par les deux nervures ; au repos, ce plan est le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et, après rotations, $(\vec{x}_2, \vec{y}_1)$. On décide de garder le plan $(\vec{x}_2, \vec{y}_1)$ comme référence pour la suite des calculs, i.e. $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_\beta)$.

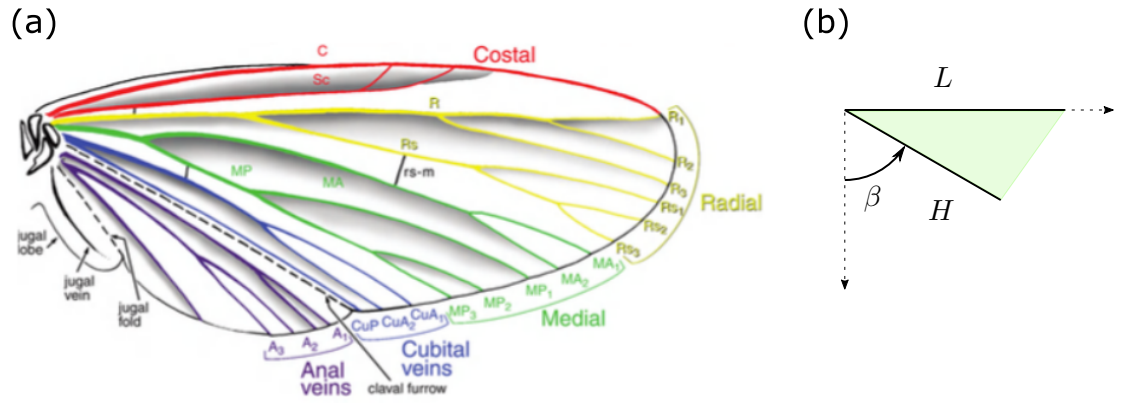


Figure 6.15 – Aile bio-inspirée. (a) schéma de définition des nervures principales des ailes d'insectes [Grimaldi et Engel 2005], (b) modèle simplifié.

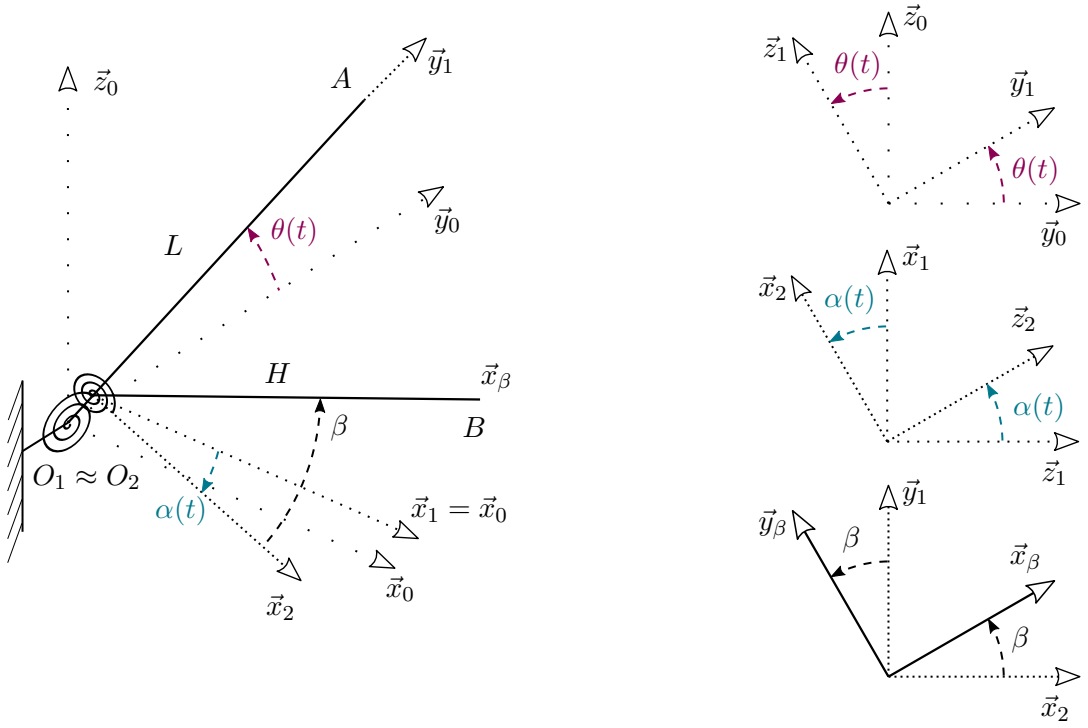


Figure 6.16 – Schéma de définition géométrique de l'aile de nanodrone de la nouvelle génération.

6.2.2.1 Équations du mouvement de l'aile bio-inspirée

De façon analogue au cas de l'aile en L, on calcule d'abord les énergies cinétiques des deux barres. Pour la première, les calculs sont identiques au cas précédent :

$$\vec{V}_{G_1/0} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\vec{z}_1, \quad \vec{\omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{x}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{G_1}\vec{\omega}_{1/0} = \frac{m_{p1}L^2}{12}\dot{\theta}\vec{x}_0, \tag{6.61}$$

d'où :

$$\mathcal{T}_{1/0} = \frac{1}{2}m_{p1}\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2. \tag{6.62}$$

Pour la seconde barre, on exprime la vitesse du centre de gravité :

$$\vec{V}_{G_2/0} = \frac{H}{2}\begin{pmatrix} -\cos(\beta)\sin(\alpha)\dot{\alpha} \\ \cos(\beta)\sin(\alpha)\dot{\theta} \\ \sin(\beta)\dot{\theta} - \cos(\beta)\cos(\alpha)\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_1}. \tag{6.63}$$

Par ailleurs, pour la matrice d'inertie de la seconde poutre, on opère un changement de base :

$$\mathcal{I}_{G_2} = P^{-1}_{\beta\to 2}\mathcal{I}_{G_2,\beta}P_{\beta\to 2}, \tag{6.64}$$

avec :

$$\mathcal{I}_{G_2,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\beta\to 2} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.65}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\mathcal{I}_{G_2,0} = \frac{m_{p2}H^2}{12}\begin{pmatrix} \sin^2(\beta) & -\sin(\beta)\cos(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta)\cos(\beta) & \cos^2(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

Ainsi, l'énergie cinétique de la seconde barre s'écrit :

$$\mathcal{T}_{2/0} = \frac{1}{2}m_{p2}\frac{H^2}{3}\left(\dot{\theta}^2(1-\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)) + \dot{\alpha}^2\cos^2(\beta) - 2\dot{\alpha}\dot{\theta}\cos(\beta)\sin(\beta)\cos(\theta)\right). \tag{6.67}$$

On peut écrire cette équation sous forme matricielle :

$$\mathcal{T}_{2/0} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}\ \dot{\alpha})\begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}\frac{H^2}{3}(1-\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)) & \text{-}m_{p2}\frac{H^2}{3}\cos(\beta)\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \text{-}m_{p2}\frac{H^2}{3}\cos(\beta)\sin(\beta)\cos(\alpha) & m_{p2}\frac{H^2}{3}\cos^2(\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{6.68}$$

Par ailleurs, on calcule les potentiels des ressorts :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{1}{2}\Gamma_1\theta^2, \\ \mathcal{V}_2 &= \frac{1}{2}\Gamma_2(\vec{\omega}_{2/1}\cdot\vec{y}_\beta)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Gamma_2\cos^2(\beta)\alpha^2, \end{aligned} \tag{6.69}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}(\theta\ \alpha)\begin{pmatrix} \Gamma_2 & 0 \\ 0 & \Gamma_2\cos^2(\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{6.70}$$

6.2.2.2 Matrices de masse et raideur de l'aile bio-inspirée

Avec un raisonnement analogue à la disposition en L, on détermine la matrice de masse M :

$$M = \begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}\frac{H^2}{3}\sin^2(\beta) & -m_{p2}\frac{H^2}{3}\cos(\beta)\sin(\beta) \\ -m_{p2}\frac{H^2}{3}\cos(\beta)\sin(\beta) & m_{p2}\frac{H^2}{3}\cos^2(\beta) \end{pmatrix}, \tag{6.71}$$

et la matrice de raideur K :

$$K = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2\cos^2(\beta) \end{pmatrix}. \tag{6.72}$$

Puis, toujours avec une démarche analogue à celle du paragraphe 6.2.1.2, on pose $\dot{x}_r = -\dot{\alpha}H\cos(\beta)$, puis $\dot{x}_1 = \dot{\theta}H\sin(\beta)$, ce qui amène à

$$x_r = -\alpha H\cos(\beta) \quad \text{et} \quad x_1 = \theta H\sin(\beta). \tag{6.73}$$

On remarque que ces expressions des déplacements équivalents correspondent au mouvement linéarisé sur l'axe $\vec{z}_0$ de la seconde barre projetée sur chacun des axes $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$. On a alors la matrice de masse suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{L^2}{H^2\sin^2(\beta)}\frac{m_{p1}}{3} + \frac{m_{p2}}{3} & \frac{m_{p2}}{3} \\ \frac{m_{p2}}{3} & \frac{m_{p2}}{3} \end{pmatrix}, \tag{6.74}$$

et celle de raideur devient :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1}{H^2\sin^2(\beta)} & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma_2}{H^2} \end{pmatrix}. \tag{6.75}$$

On identifie ainsi les valeurs équivalentes :

$$\begin{aligned} m_{\text{eq},1} &= \frac{L^2}{H^2\sin^2(\beta)}\frac{m_{p1}}{3} \quad \text{et} \quad k_{\text{eq},1} = \frac{\Gamma_1}{H^2\sin^2(\beta)}, \\ m_{\text{eq},2} &= \frac{m_{p2}}{3} \quad \text{et} \quad k_{\text{eq},2} = \frac{\Gamma_2}{H^2}, \end{aligned} \tag{6.76}$$

et l'expression de μ suivante :

$$\mu = \sin^2(\beta)\frac{b_2h_2H^3}{b_1h_1L^3}. \tag{6.77}$$

Pour les fréquences propres découplées, on a :

$$\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{3\Gamma_1}{m_{p1}L^2}} \quad \text{et} \quad \omega_{0,2} = \sqrt{\frac{3\Gamma_2}{m_{p2}H^2}}. \tag{6.78}$$

Dans la mesure où les matrices de masse et raideur de la disposition bio-inspirée peuvent s'écrire exactement sous la forme de M_{eq} et K_{eq} recherchées, on peut appliquer à cette structure les calculs de la section 6.1. On utilise donc la disposition bio-inspirée pour la suite des calculs de ce chapitre.

6.2.2.3 Décalage du point de jonction

Dans le cas où la jonction de la seconde poutre est décalée d'une distance λ de la rotule, on écrit la vitesse :

$$\vec{V}_{G_2/0} = \lambda\dot{\theta}\vec{z}_1 - \frac{H}{2}(\cos(\beta)\vec{x}_0 + \sin(\beta)\vec{y}_0) \wedge (\dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\alpha}\vec{y}_1), \tag{6.79}$$

et la matrice de masse :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{m_{p1}}{3}L^2 + \frac{m_{p2}}{3}(H^2\sin^2(\beta) + 3\lambda H\sin(\beta) + 3\lambda^2) & -\frac{m_{p2}}{3}H\cos(\beta)\frac{(2H\sin(\beta)+3\lambda)}{2} \\ -\frac{m_{p2}}{3}H\cos(\beta)\frac{(2H\sin(\beta)+3\lambda)}{2} & \frac{m_{p2}}{3}H^2\cos^2(\beta) \end{pmatrix}. \tag{6.80}$$

On pose $X_r = -\alpha H\cos(\beta)$ et $X_1 = \theta(H\sin(\beta) + \frac{3}{2}\lambda)$. La matrice de masse s'écrit alors :

$$M = \begin{pmatrix} (\frac{2L}{2H\sin(\beta)+3\lambda})^2 m_{p1}/3 + m_{p2}/3(1 + 3(\frac{\lambda}{2H\sin(\beta)+3\lambda})^2) & m_{p2}/3 \\ m_{p2}/3 & m_{p2}/3 \end{pmatrix}, \tag{6.81}$$

et celle de raideur devient :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2\Gamma_1}{(2H\sin(\beta)+3\lambda)} & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma_2}{H\cos(\beta)} \end{pmatrix}. \tag{6.82}$$

On peut vérifier que pour $\lambda = 0$, les matrices M et K correspondent au cas sans décalage. On vérifie aussi que si $\lambda = L$ et $\beta = 0$ alors on retrouve les matrices de la disposition en L. Dans tous les cas, si $\lambda \neq 0$, on perd l'équivalence avec le système d'équations (6.8) ou (6.9), mais encore une fois, on peut montrer que le comportement dynamique d'un tel système reste similaire avec celui de la figure (6.4).

6.3 Transposition vers un modèle avec liaisons souples

On a montré qu'une structure de deux barres disposées de façon à reproduire une aile d'insecte peut se modéliser avec le système représenté fig. 6.4, soit le modèle le plus simple pour une structure animée de deux mouvements de solides rigides résonnants (le battement et la rotation de l'aile). Dans la mesure où le nanodrone est fabriqué avec des techniques de microfabrication, il est difficile de créer des mécanismes, comme des paliers par exemple. Pour obtenir une liaison cinématique pivot, il faut donc choisir une réalisation par liaison souple. On passe donc d'un modèle de deux barres et deux ressorts en rotation (fig. 6.16) à un modèle à quatre poutres (fig. 6.19). L'objet de cette section est le dimensionnement de la géométrie de ces quatre poutres.

6.3.1 Raideur d'une liaison souple

On utilise des équations bien connues de la mécanique des milieux continus pour le modèle de liaison souple. On cherche à exprimer la raideur en flexion d'une liaison souple de longueur l. On considère qu'elle peut se modéliser comme une poutre encastrée-libre, soumise à un couple M constant. Comme cette poutre est à l'équilibre, le moment de flexion M_f vérifie :

$$M_f(x) = M, \forall x \in [0,\ l]. \tag{6.83}$$

Or, l'équation du moment de flexion d'une poutre de moment quadratique en flexion I et de module de Young E est (Eq. (4.10)) :

$$M_f(x) = EIw''(x), \tag{6.84}$$

où $w(x)$ est le déplacement transverse de la section droite d'abscisse x de la liaison souple. En intégrant, on a :

$$w'(x) = \frac{M}{EI}x + cste, \tag{6.85}$$

où la constante est nulle puisque $w'(0) = 0$. Dans la mesure où l'on s'intéresse au mouvement de rotation de la poutre associée à la liaison souple, donné par l'angle de rotation de la section $\theta(l) = w'(l)$, on a :

$$M = \frac{EI}{l}\theta(l). \tag{6.86}$$

D'après cette équation, l'expression de la raideur équivalente d'un ressort en rotation pour une liaison souple vaut :

$$\Gamma = \frac{EI}{l}. \tag{6.87}$$

6.3.1.1 Fréquence propre

La liaison souple sur laquelle est attachée une poutre massive d'une masse donnée se réduit à un système à 1 degré de liberté, dont la fréquence propre s'écrit :

$$\omega_l = \sqrt{\frac{\Gamma}{J}}, \tag{6.88}$$

où J est le moment d'inertie de la poutre massive à sa connexion avec la liaison souple. On considère le cas où le matériau de la poutre massive est identique à celui de la liaison souple, et dont on note la masse volumique ρ. La poutre massive est de longueur L, d'épaisseur h, de largeur b. On exprime sa masse $m = \rho bhL$ et on trouve $J = m\frac{L^2}{3}$. On retrouve alors une expression de fréquence propre obtenue plusieurs fois pour les fréquences découplées des systèmes à deux barres (équations 6.59-6.78) :

$$\omega_l = \sqrt{\frac{3\Gamma}{mL^2}}. \tag{6.89}$$

Pour une liaison souple de section rectangulaire de largeur b_l et d'épaisseur h_l, on peut préciser l'équation (6.88) pour obtenir :

$$\omega_l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{b_l h_l^3}{lbhL^3}}. \tag{6.90}$$

On rappelle que pour pouvoir appliquer cette formule, il faut que la liaison souple soit une poutre, donc : $h_l, b_l \ll l$. De plus, si la liaison souple modélise un ressort en rotation, il peut être intuitif d'essayer de limiter sa longueur, i.e. $l \ll L$ (en prenant garde à ce que l ne soit pas trop faible pour garder une valeur faible de la raideur équivalente Γ de la liaison souple).

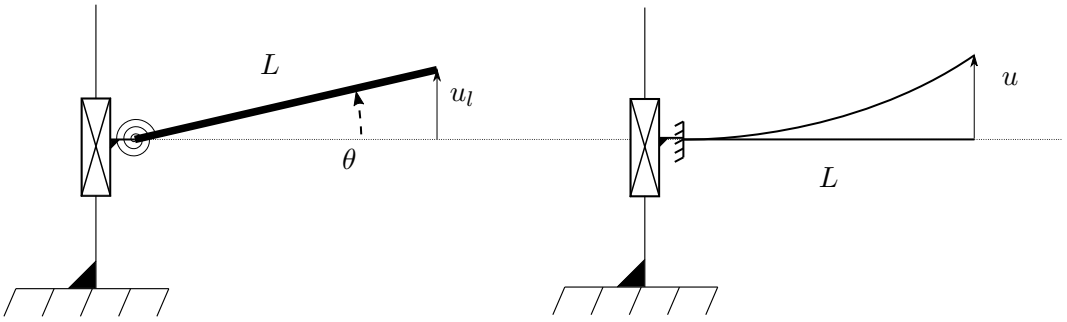


Figure 6.17 – Déplacement maximal pour une barre avec ressort en torsion à gauche comparé à la flèche d'une poutre encastrée-libre à droite.

6.3.1.2 Comparaison de la flèche

On se propose d'évaluer la pertinence d'un mécanisme avec solide rigide, plutôt qu'un système flexible, en comparant le déplacement maximal obtenu pour un effort donné avec une fréquence propre identique. On prend le cas simple décrit en fig. 6.17, où le modèle de solides rigides est constitué d'un ressort et d'une barre et où le modèle flexible consiste en une poutre encastrée-libre de même longueur. On peut considérer que l'on impose le déplacement de la base pour modéliser le battement et que la rotation est modélisée par la rotation de la barre ou par le déplacement transverse de la poutre, selon le modèle. Or, comme on l'a vu à l'équation (2.17) au chapitre 2, une excitation de type déplacement imposé peut se modéliser sous la forme d'une charge $p(t)$ uniformément répartie sur la longueur de la structure ($\rho S\ddot{w}e$). Par souci de simplicité, on se restreint à un modèle de force statique. Pour la barre, on a :

$$u_l = \sin(\theta)L, \tag{6.91}$$

et, par ailleurs, comme le moment appliqué au ressort s'exprime sous la forme $M = \Gamma\theta$, on peut écrire :

$$\theta = \frac{pL^2}{2\Gamma}. \tag{6.92}$$

On a donc, en faisant l'hypothèse de petits déplacements :

$$u_l = \frac{pL^3}{2\Gamma}. \tag{6.93}$$

Pour la poutre encastrée-libre, on peut montrer que la flèche s'écrit :

$$u = \frac{pL^4}{8EI}, \tag{6.94}$$

donc :

$$\frac{u_l}{u} = \frac{4EI}{\Gamma L}. \tag{6.95}$$

Or, l'égalité des fréquences propres s'écrit :

$$\omega_l = \omega_1 \iff \sqrt{\frac{3\Gamma}{mL^2}} = \frac{\beta_1^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \tag{6.96}$$

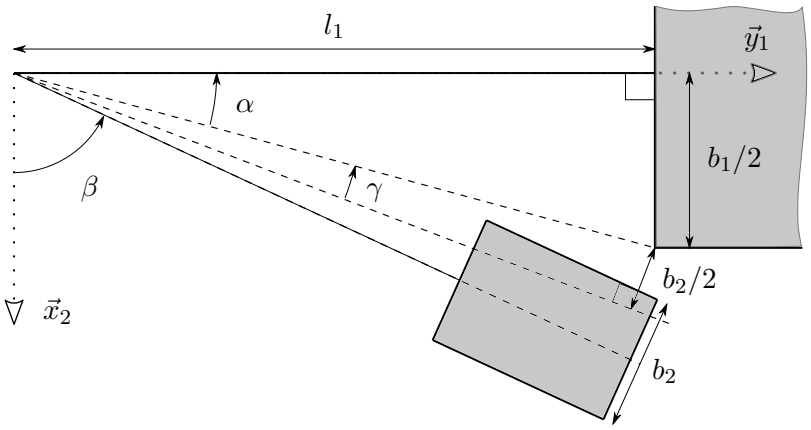


Figure 6.18 – Schéma explicitant la condition de non chevauchement des poutres de l'assemblage.

où, pour rappel, $\beta_1 \approx 1{,}8751$. Donc on peut déterminer Γ :

$$\Gamma = \frac{\beta_1^4 EI}{3L}, \tag{6.97}$$

d'où :

$$\frac{u_l}{u} = \frac{12}{\beta_1^4} \approx 0,97. \tag{6.98}$$

On montre ainsi que la structure à une barre et un ressort (donc à un seul degré de liberté) n'a pas une amplitude supérieure à celle d'une poutre encastrée-libre de même fréquence propre : l'amplitude est sensiblement équivalente. Un calcul similaire, effectué avec un forçage en bout, donne $u_l/u = 0{,}73$. Nonobstant ces performances légèrement inférieures, le mécanisme avec solide rigide ne doit pas être écarté pour autant. En effet, comme on l'a montré au chapitre 3, la force aérodynamique et donc la poussée dépendent de l'angle formé entre la surface et sa vitesse. Dans le cas d'un solide rigide, il est aisé de trouver la configuration optimale, ce qui facilite le dimensionnement. Il n'est pas certain que la poutre flexible génère pourtant une force supérieure (cela fait l'objet de travaux en cours abordés en présentation du chapitre 3).

6.3.2 Dimensionnement des liaisons souples

Avant d'évoquer le dimensionnement en tant que tel, il est utile de préciser que toutes les valeurs des largeurs de poutres et longueurs de liaisons souples ne sont pas compatibles avec le système recherché. Comme le montre la figure 6.18, il peut y avoir un chevauchement des poutres si les liaisons souples sont trop courtes et les largeurs trop importantes. Sur la figure, on présente une méthode pour vérifier le non-chevauchement des poutres épaisses, qui consiste à assurer l'existence d'un espace entre le sommet de la première poutre épaisse et le côté de la seconde. On note α l'angle formé entre ce sommet et l'axe $\vec{y}_1$, et γ l'angle entre le sommet et l'axe fictif situé à $b_2/2$ de ce point. Pour qu'il y ait un espace entre les deux poutres massives, il suffit que $\alpha + \beta + \gamma < \pi/2$.

6.3.2.1 Contraintes

Pour le dimensionnement de l'architecture de nanodrone basée sur le modèle bio-inspiré, que l'on appellera « BI », de nombreuses contraintes ont été formulées, et on

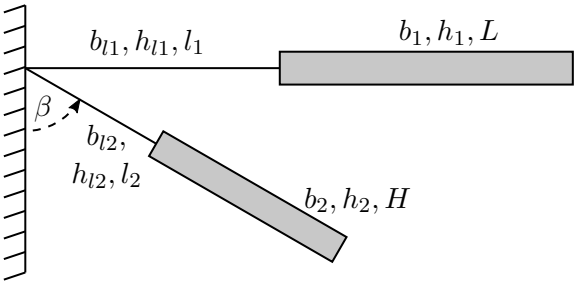


Figure 6.19 – Aile bio-inspirée : modèle avec quatre poutres.

Paramètre	Valeur ou contrainte
L	10 mm
H	10 mm
β	30 ou 45°
h_{li}	$>$ 20 microns
h_1	$<$ 300 microns

Tableau 6.2 – Valeurs et contraintes sur les dimensions géométriques.

propose de les rappeler ici :

1. Égalité des fréquences propres découplées : $\omega_{0,1} = \omega_{0,2}$
2. Rapport de masse faible : $\mu \ll 1$
3. Hypothèse de solide rigide : $I_{li} \ll I_i$
4. Hypothèse de poutre élancée : $h_{li}, b_{li} \ll l_i$
5. Hypothèse de ressort en rotation : $l_i \ll L$, $l_i \ll H$
6. Non-chevauchement des poutres massives : $\alpha + \beta + \gamma < 90°$, cf. figure 6.18
7. Prise en compte du gauchissement par le modèle : ratios b_i/h_i et b_{li}/h_{li} « simples » (i.e. 1 ; 1,5 ; 2 ; 4 ; etc.)
8. Fabrication aisée : valeurs d'épaisseurs h_i et h_{li} correspondant à des valeurs établies en microfabrication (i.e. 20, 40, 80, 150 microns etc.) et limitées (cf. tab. 6.2)
9. Fréquence cible seuil : $f_e > 20$ Hz.

On rappelle que les deux premières contraintes sont nécessaires pour obtenir une résonance sur le déplacement primaire dans le modèle discret en translation. Les contraintes 3, 4 et 5 sont les conditions d'application du modèle à quatre poutres : les poutres épaisses doivent être rigides et les liaisons souples doivent être élancées mais pas trop longues. La contrainte 6 est mise en place pour que le système puisse être effectivement fabriqué, en évitant des impacts entre les poutres en fonctionnement. Les deux contraintes suivantes (7-8), permettent de faciliter la modélisation d'une structure pour laquelle la fabrication sera relativement simple. On choisit en effet de garder des valeurs tabulées des coefficients de gauchissement (k_1 et k_2 présentés section 4.4), issues de [Courbon 1980 ; Fanchon 2012]. On appelle $\mathcal{G}$ l'ensemble des valeurs rationnelles de g_i/p_i utilisées : $\mathcal{G} = \{1\,;1,1\,;1,2\,;1,5\,;1,6\,;1,75\,;2\,;2,5\,;3\,;4\,;5\,;6\}$. Notons qu'il aurait été possible de calculer les coefficients k_1, k_2 directement à l'aide de fonctions analytiques simplifiées, comme

celle proposée pour k_2 dans [Batoz et Dhatt 1990] :

$$k_2(p_i, g_i) = \frac{1}{3} - \frac{p_i}{g_i}\frac{3,36 - 0,28(\frac{p_i}{g_i})^4}{16}. \tag{6.99}$$

La dernière contrainte provient de l'analyse de la force aérodynamique au chapitre 3, puisqu'on sait que la force évolue avec le carré de la fréquence de battement.

Dans la mesure où les contraintes font intervenir un nombre élevé de paramètres, on réduit ce nombre en fixant un certain nombre de grandeurs, comme montré au tableau 6.2. Par exemple, les contraintes sur β étant assez complexes (affiner l'aile tout en maximisant sa surface, influence sur le ratio d'amplitude θ/α, etc...), ce paramètre est fixé à deux valeurs : $\beta = 60°$ (par analogie grossière avec des ailes d'insectes), ou $\beta = 45°$ (pour augmenter un peu plus la surface d'aile).

6.3.2.2 Présentation de la feuille de calcul

Pour dimensionner les grandeurs restantes, on utilise une feuille de calcul d'un tableur, dont deux propositions sont données en fig. 6.20. Cette feuille de calcul est séparée en 4 tableaux différents : les paramètres fixes, les relations entre les dimensions géométriques, les dimensions en tant que telles et les éléments à vérifier.

Les paramètres du matériau sont en gris foncé, car ils ne changeront pas entre deux fabrications. L'utilisateur remplit ensuite les valeurs des cellules colorées en bleu : des paramètres fixes tout d'abord, puisqu'ils constituent le cahier des charges, des relations entre les dimensions ensuite et de quelques dimensions clefs enfin (le raisonnement pour ces choix est présenté dans la sous-sous-section suivante). Le tableur calcule automatiquement les cellules grisées ainsi que les cellules du tableau « Éléments à vérifier ». Les fréquences propres et le rapport de masse sont calculés pour être égaux aux valeurs rentrées en colonne A, mais les ratios de moments quadratiques de l'ensemble 1 et 2 ainsi que le non-chevauchement n'ont pas nécessairement une valeur valide. Pour les cellules I_i/I_{li}, on considère que des valeurs supérieures à 100 suffisent (entre 50 et 100 c'est un peu juste). Pour le non-chevauchement, la cellule « Chev. » donne la valeur de la marge angulaire, soit $90 - \alpha - \beta - \gamma$; on considère qu'une marge supérieure à 5° est valide et des valeurs comprises entre 1 et 5° sont limites.

Dans le cas où l'un de ces trois éléments ne donne pas satisfaction, ou encore si les épaisseurs ne sont pas compatibles avec des épaisseurs de couches connues, l'utilisateur remplit les colonnes C2 et D2 pour ajuster les valeurs des paramètres. Il faut donc vérifier que (i) les fréquences propres soient bien proches (en général en ajustant les longueurs des liaisons souples en accord avec le critère de non-chevauchement), (ii) les trois valeurs des I_i/I_{li} et de la marge angulaire soient valides et (iii) les épaisseurs des liaisons souples soient toujours inférieures au quart de leurs longueurs, vérifiant ainsi l'objectif 5. Le rapport de masse effectif est calculé avec les dimensions choisies, on considère qu'un léger écart avec le rapport cible n'est pas préjudiciable.

6.3.2.3 Détails des calculs

La première étape est de choisir les valeurs des paramètres généraux, comme le rapport de masse ou la fréquence cible (colonne A). Ensuite, on reprend l'équation (6.77), et on

Légende	Fixe	Calculé	Proposition	Choix

Proposition 1

A		B		C1	C2	D1	D2	E1	E2
Paramètres fixes		**Relations dimensions**		**Dimensions géométriques**				**Éléments à vérifier**	
E	4,88E+09	x=h2/h1	3	**Proposition**	**Choix**	**Proposition**	**Choix**	ω1	100,0	98,2
rho	1290	p = b1/h1	3	h1	250	250	hl1	100	100	ω2	100,0	97,9
L	1,00E-02	r = b2/h2	1	b1	750	750	bl1	100	100	I1/Il1	117,2	117,2
μ	0,025	x^2 μ / $\sin(\beta)^2$	0,3	h2	83,3333	80	l1	1277,6	1325	I2/Il2	133,3	128,0
β	60	≈ p/r ?	0,33333	b2	83,3333	80	hl2	20,833	20	Chev.	11,85	12,53
Fréq.	100	a1=h1/hl1	2,5				bl2	40	40	Mueff	0,025	0,0256
		a2=h2/hl2	4				l2	124,77	125			

Proposition 2

A		B		C1	C2	D1	D2	E1	E2
Paramètres fixes		**Relations dimensions**		**Dimensions géométriques**				**Éléments à vérifier**	
E	4,88E+09	x=h2/h1	3	**Proposition**	**Choix**	**Proposition**	**Choix**	ω1	125,0	110,0
rho	1290	p = b1/h1	5	h1	250	250	hl1	100	100	ω2	125,0	109,4
L	1,00E-02	r = b2/h2	1	b1	1250	1250	bl1	150	150	I1/Il1	130,2	130,2
μ	0,01	x^2 μ / $\sin(\beta)^2$	0,18	h2	83,3333	80	l1	735,92	950	I2/Il2	133,3	128,0
β	45	≈ p/r ?	0,2	b2	83,3333	80	hl2	20,833	20	Chev.	2,19	9,64
Fréq.	125	a1=h1/hl1	2,5				bl2	40	40	Mueff	0,01	0,01024
		a2=h2/hl2	4				l2	79,853	100			

Figure 6.20 – Dimensionnement de l'architecture BI, avec deux propositions.

définit $b_1 = ph_1$ et $b_2 = rh_2$, avec p et r appartenant à $\mathcal{G}$:

$$\frac{p}{r} = \frac{h_1}{h_2}\mu / \sin^2(\beta). \tag{6.100}$$

On appelle $x = h_1/h_2$, et on lui associe une valeur (ex. 3). Plus cette valeur est élevée, plus le ratio d'épaisseur diminue mais, à terme, plus l'épaisseur de la liaison souple sera fine. On cherche ensuite des valeurs de p, r dont le ratio vérifie l'équation ci-dessus (avec une certaine tolérance, comme 0,33 vs 0,3). Si p est trop important, la largeur de la première poutre massive sera très grande et donc plus susceptible de provoquer un chevauchement. On choisit ensuite une valeur de h_1 que l'on peut choisir entre 200 et 250 microns [2], voire plus si nécessaire (attention au-delà de 300 microns). On calcule alors les valeurs de b_1, h_2 et b_2, ce qui permet de compléter la colonne C1. Pour les liaisons souples de la colonne C2, les épaisseurs sont déterminées en choisissant un ratio $a_i = h_i/h_{li}$ assez grand pour valider la contrainte de solide rigide, mais pas trop, une fois encore pour garantir une valeur d'épaisseur de liaison souple minimale. On choisit aussi les valeurs des largeurs des liaisons souples (plus ces valeurs sont importantes, plus les valeurs de I_i/I_{li} diminuent). De plus, il est important de vérifier qu'au moins une section de chaque ensemble « liaison souple + poutre épaisse » ne soit pas carrée. On cherche en effet à éviter d'avoir un mode dans le plan à la même fréquence que le mode de flexion transverse. Enfin, les longueurs des liaisons souples sont calculées pour que les fréquences propres découplées soient égales

2. Ces valeurs conduisent à déposer une dernière couche de l'ordre de 100 à 150 microns, ce qui est déjà conséquent.

à la fréquence cible, à partir de l'équation (6.90) :

$$\frac{b_{li}h_{li}^3}{l_i} = 4\omega_{li}^2\frac{\rho}{E}b_i h_i L^3, \tag{6.101}$$

or $\omega_{l1} = \omega_{l2} = 2\pi f_e$, d'où :

$$l_i = b_{li}\frac{E}{4\rho\omega_e^2 L^3}\frac{h_{li}^3}{b_i h_i}. \tag{6.102}$$

Comme indiqué précédemment, ces longueurs doivent en général être ajustées pour vérifier les contraintes 4 et 6 (poutre élancées et non-chevauchement)

6.3.2.4 Validation de la transition grâce à l'ODT

Plusieurs versions de l'architecture illustrée fig. 6.19 ont été modélisées avec l'ODT. Pour obtenir des résultats concordants avec la figure 6.4, il est nécessaire de décaler le point de jonction de la seconde liaison souple sur la première, sinon l'aile revient à deux systèmes découplés. La valeur du décalage minimal n'est pas constante, elle varie selon le rapport de masse et les longueurs des liaisons souples. On présente les déformées modales d'un système où la jonction entre les liaisons souples est située à $l_1/10$ à la figure 6.21.

On propose ci-dessous d'expliciter le calcul de la fonction de réponse en fréquence du déplacement relatif à partir des déplacements transverses des extrémités des poutres massives w_1 et w_2 :

$$w_1 = \theta L \quad \text{et} \quad w_2 = \theta\sin(\beta)H - \alpha\cos(\beta)H, \tag{6.103}$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{\cos(\beta)}\left(\frac{w_1}{L}\sin(\beta) - \frac{w_2}{H}\right), \tag{6.104}$$

donc, d'après l'équation (6.73) et comme $L = H$:

$$w_r = w_2 - w_1\sin(\beta). \tag{6.105}$$

Ensuite, pour exciter la structure, on choisit le nœud initial de la première poutre massive (d'abscisse l_1). Les FRF correspondantes pour w_1 et w_r sont données figs. 6.22-6.23, la première présentant le cas d'un amortissement nul, la seconde présentant trois réponses pour trois valeurs différentes de coefficients d'amortissement. On remarque que cette figure est quasiment équivalente à la fig. 6.13 : si l'amortissement est trop faible devant le rapport de masse, l'antirésonance n'est plus compensée à la quadrature de phase. Il est important de préciser que les courbes d'amplitudes de déplacement ont été multipliées par la valeur de l'amplitude de la déformée au point d'excitation pour le premier mode. En effet, l'amplitude en bout de nervure étant beaucoup plus importante, cela diminue significativement l'amplitude de la FRF. Un autre élément de différence avec le système discret de la figure 6.4 est l'influence de la position du point d'excitation sur la fréquence d'antirésonance. Pour illustration, on donne les FRF de x_1, x_r pour le cas où le forçage est appliqué à un point situé à 9/10 de la longueur de la première poutre massive en figure 6.24. L'antirésonance initialement en basse fréquence est décalée à 132,5 Hz environ, et la fréquence de l'antirésonance d'intérêt décroît de 1,5 Hz.

On montre donc la pertinence de la transition du modèle à 2 barres et 2 ressorts au modèle à 4 poutres, avec quelques subtilités liées au modèle à 4 poutres en lui-même. Cependant, il reste encore à modéliser le drone complet (donc avec l'autre aile) et surtout ajouter l'actionneur électro-magnétique avec une poutre support (comme sur les WRR et GLR), pour laquelle on ne dispose pas d'éléments de dimensionnement a priori.

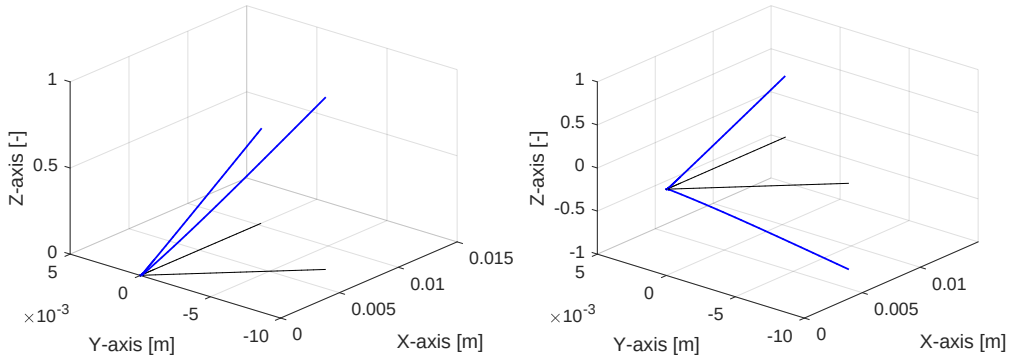


Figure 6.21 – Modes principaux de BI1 – ODT.

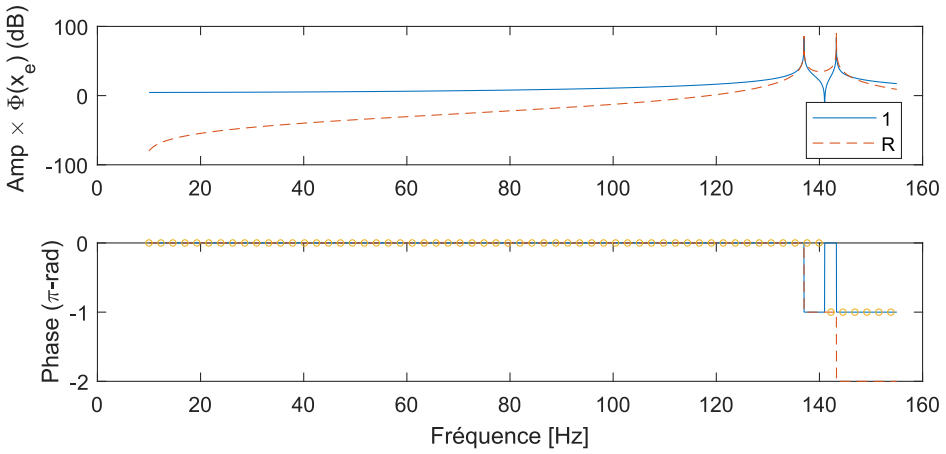


Figure 6.22 – FRF avec $\xi_i = 0$. Un zoom de la FRF entre 130 et 155 Hz, avec différents coefficients d'amortissement, est proposé fig. 6.23.

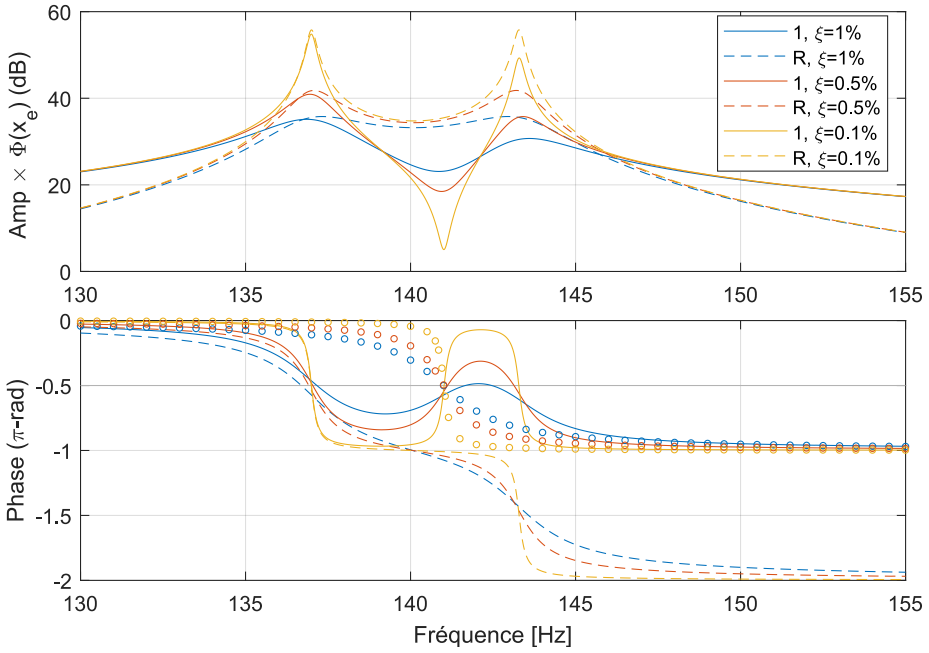


Figure 6.23 – FRF avec 3 valeurs différentes de coefficients d'amortissements modaux.

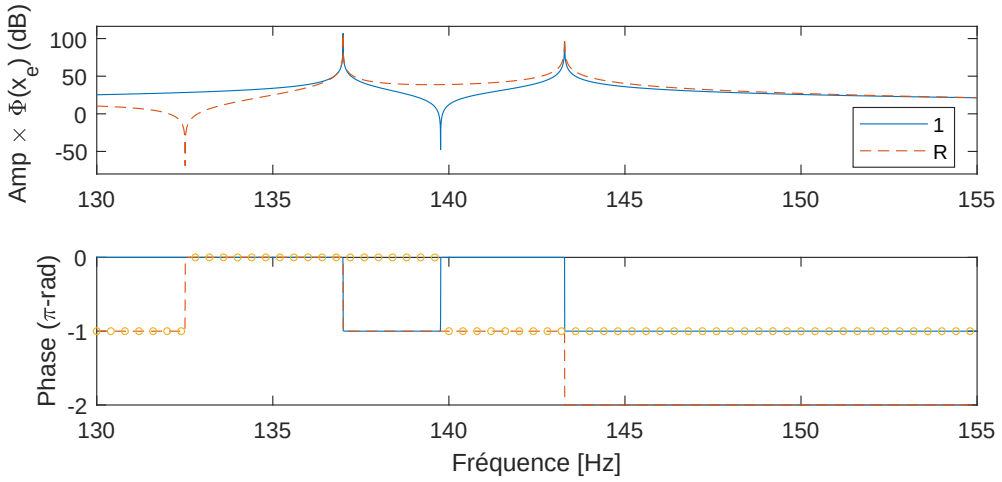


Figure 6.24 – FRF avec $\xi_i = 0$, pour un forçage quasiment en bout de la première poutre massive.

6.3.3 Proposition d'une géométrie

L'architecture complète de nanodrone proposée pour les futures fabrications est illustrée fig. 6.25. Chaque aile est reliée à la poutre supportant l'aimant (en gris), d'une longueur L_e, épaisseur h_e et largeur b_e. Il est nécessaire d'ajuster des paramètres non pris en compte dans la feuille de calcul : la position de l'aimant sur la poutre e, la position de la seconde liaison souple λ et les dimensions de la poutre supportant l'aimant. Selon les dimensions de la poutre support de l'aimant, le premier mode peut être le mode de torsion autour de cette poutre, et comme la structure est symétrique, le calcul de la déformée modale de ce mode par l'ODT est inexact. De plus, à l'inverse des architectures précédentes, il est possible que les modes antisymétriques de flexion et torsion soient excités lors de la modélisation par l'ODT, car ils n'ont pas nécessairement une amplitude nulle de leur déformée au nœud représentant l'aimant sur la poutre support de l'aimant.

Une optimisation très simple sur la longueur de la seconde liaison souple et la longueur de la poutre support de l'aimant a été effectuée. On donne dans le tableau 6.3 les dimensions de la version BI1, et la figure 6.26(a) montre la géométrie avec les largeurs correspondantes, où l'on peut voir le jeu entre la nervure et le bord d'attaque. La figure 6.26(b) montre, pour d'autres valeurs de dimensions, comment sont disposées les poutres, avec un zoom au niveau de la jonction. Les critères de cette optimisation sont : (i) maximiser les amplitudes de la déformée modale à l'aimant sur les deux modes principaux (i.e. flexion et torsion symétriques des ailes (afin de garantir un minimum d'excitabilité) et (ii) maximiser les amplitudes de la fonction de réponse en fréquence à l'extrémité du bord d'attaque et de fuite (BA/BF) à la quadrature de phase.

On effectue une première analyse avec l'ODT : les modes de flexion et torsion symétriques sont donnés fig. 6.27 et les FRF sont représentées fig. 6.28. Il est important de noter que ces FRF sont calculées en enlevant les autres modes de la base modale (voir en annexe fig. F.3.1). On trace 3 réponses en fréquence sur la fig. 6.28 : celles des extrémités des poutres massives ainsi que celle du déplacement relatif donné à l'équation (6.105), en trait interrompu. On peut remarquer que la fréquence de quadrature de phase est identique, que l'on prenne la phase du déplacement relatif ou celle du déplacement de la seconde

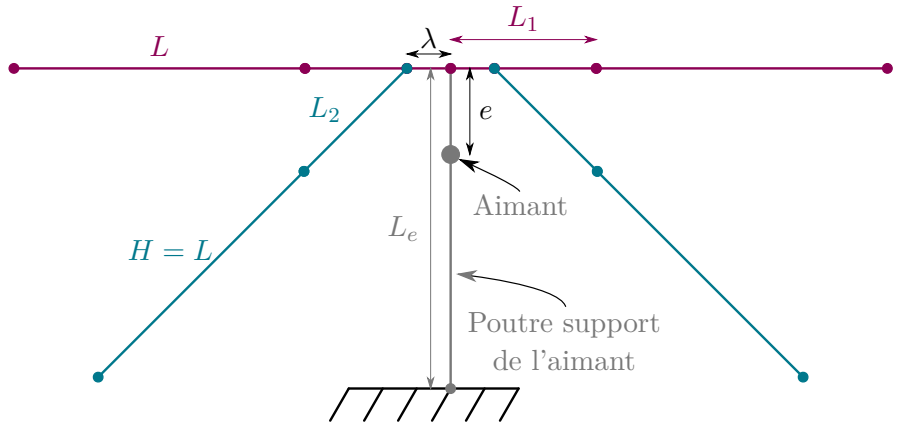


Figure 6.25 – Schéma de l'architecture bio-inspirée.

Poutre support		Bord d'attaque		Nervure		Liaison souple 1		Liaison souple 2	
L_e	8 520	L	10 000	L	10 000	L_1	742	L_2	117
h_e	150	h_1	200	h_2	80	h_{l1}	80	h_{l2}	20
b_e	900	b_1	1000	b_2	80	b_{l1}	160	b_{l2}	40
e	$0{,}1L_e$					λ	$0{,}2L_1$		

Tableau 6.3 – Dimensions en microns de la version BI1.

poutre massive. La cinématique ainsi obtenue est satisfaisante dans l'ensemble : on a bien une quadrature de phase entre le battement et la rotation des ailes mais l'amplitude de la torsion est bien supérieure à la flexion. Ceci est cohérent avec le calcul analytique de la première section, où l'on a montré que le ratio de l'amplitude relative sur l'amplitude primaire à la quadrature était proportionnel à $\frac{1}{2\xi_2}$ et donc en faveur de l'amplitude relative (Eq. (6.35)).

On étudie aussi la version BI1 avec une analyse par éléments-finis (AEF) sur Abaqus, à l'aide d'un modèle de poutre. On représente les modes principaux sur la figure 6.29 (et les deux modes aussi prédits par l'ODT fig. 6.31). La correspondance avec les modes déterminés par l'ODT est bonne, mais on peut remarquer que la déformée modale de torsion symétrique n'est justement pas tout à fait symétrique sur Abaqus, ce qui a aussi été observé sur une analyse avec des éléments 3D (non présentée ici). On peut expliquer cette observation surprenante [3] par le fait que les modes de flexion et torsion d'une seule aile sont à la même fréquence que ceux de l'autre aile. Ensuite, comme les modes de flexion de chaque aile sont couplés par l'intermédiaire de la poutre support, le mode de flexion antisymétrique est décalé ; sa fréquence est légèrement plus basse (87,6 au lieu de 91,67 Hz). Cependant, pour les modes de torsion, comme la seconde liaison souple est liée au bord d'attaque, il n'y a pas vraiment de couplage avec la poutre support : on retrouve donc les deux modes à des fréquences quasiment identiques (93,99 au lieu de 94,00 Hz). Or, dans le cas où deux modes sont situés à une fréquence identique, alors appelés modes « doubles », leurs formes propres sont choisies comme une base du sous-espace vectoriel de dimension 2 associé, non-nécessairement symétriques – ce qui est justement le cas ici. On

3. La structure étant symétrique, on pourrait s'attendre à ce que les modes soient symétriques.

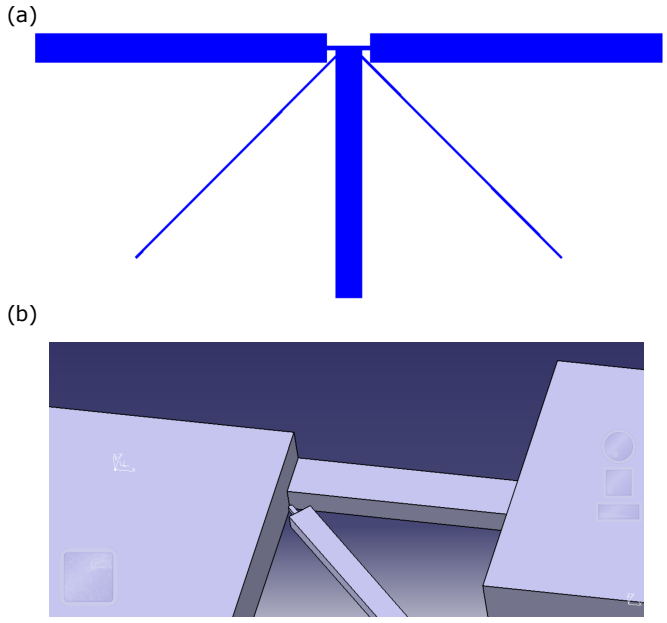


Figure 6.26 – Rendu visuel avec largeur des poutres. (a) Version BI1 modélisée par des poutres sur Abaqus (les liaisons souples de la nervure sont masquées par la poutre support de l'aimant), (b) représentation en 3D (zoom) de la disposition des liaisons souples de l'aile droite sur une version de travail.

pourrait envisager de s'affranchir de ce phénomène en changeant légèrement la jonction des liaisons souples, mais cela est laissé pour de futurs travaux. Par ailleurs, on peut vérifier que la cinématique n'est pas perturbée grâce au tracé du déplacement à la fréquence de quadrature obtenu par AEF. Cette cinématique prédite est, elle aussi, relativement satisfaisante (la torsion des ailes reste très marquée) et correspond à celle trouvée par l'ODT.

On indique aussi les FRF calculées par une analyse fréquentielle sur la figure 6.30. On peut remarquer que cette figure présente une bonne correspondance de tendance avec la figure 6.28. On peut noter que l'amplitude de déplacement du bout de la nervure est plus de trois fois supérieure à la longueur d'une aile, ce qui répond largement au niveau d'amplitude recherché, du moins pour la torsion.

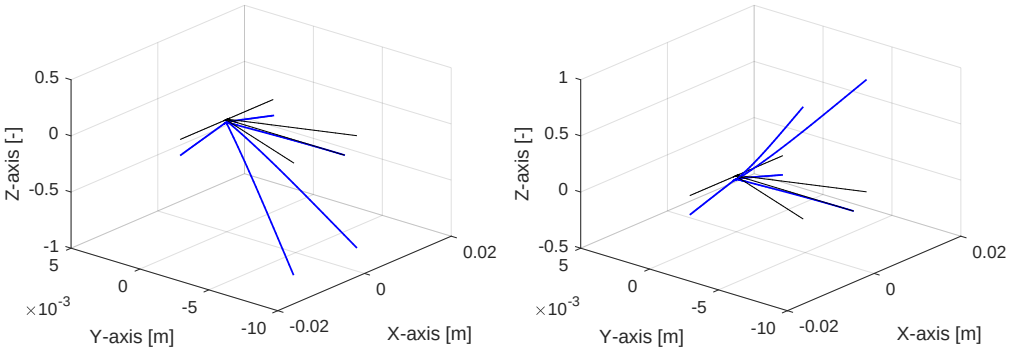


Figure 6.27 – Modes principaux de BI1 – ODT (91,84 Hz et 94,18 Hz).

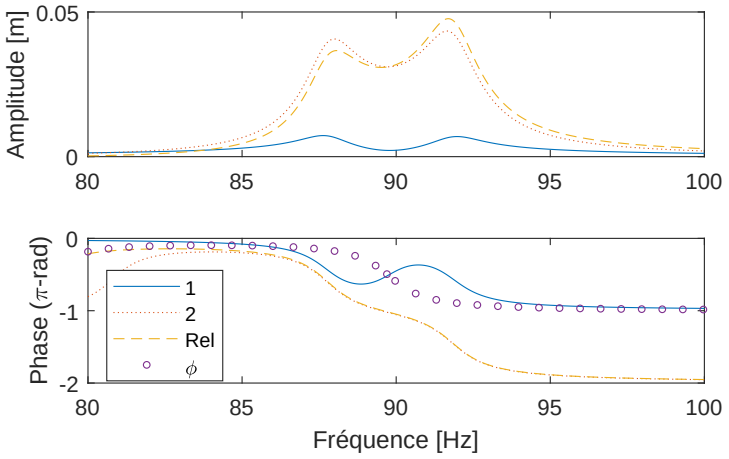


Figure 6.28 – FRF de la version BI1 (ODT) à l'extrémité du bord d'attaque, à l'extrémité de la nervure et du déplacement relatif.

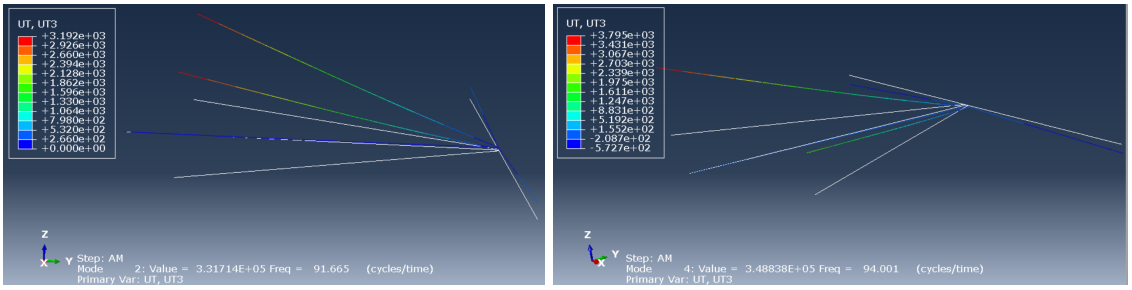


Figure 6.29 – Modes de flexion et torsion symétriques de BI1 calculés avec Abaqus avec un modèle de Poutre (91,665 Hz et 94,001 Hz).

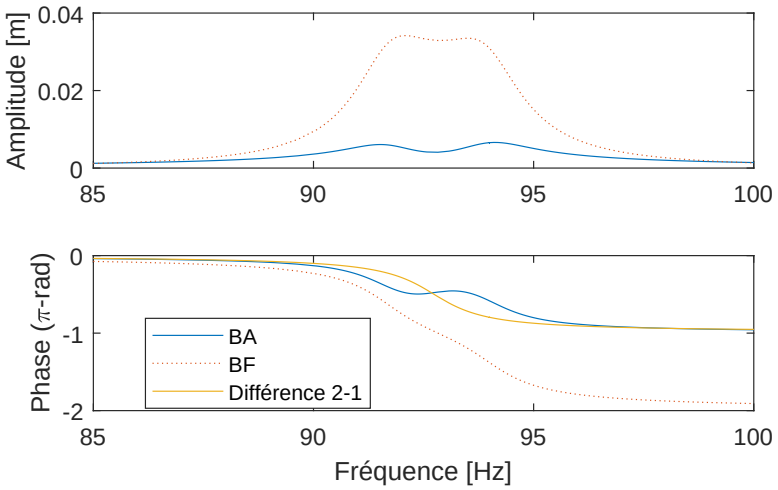


Figure 6.30 – FRF de la version BI1 calculée par AEF (modèle de poutre).

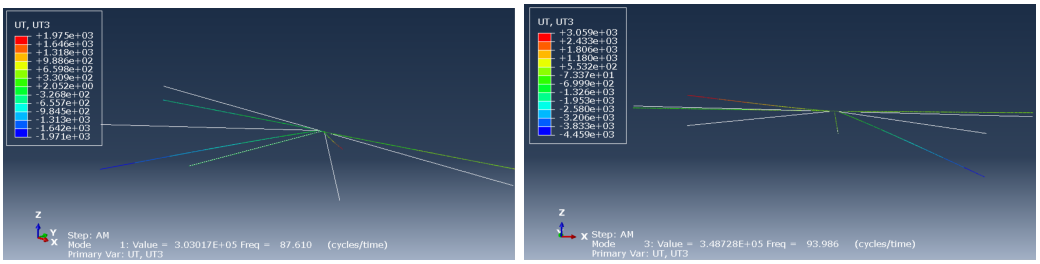


Figure 6.31 – Autres modes de BI1 (flexion et torsion antisymétriques à 87,61 Hz et 93,986 Hz).

6.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'étude de la conception d'une structure minimaliste ayant une cinématique compatible avec la génération de portance. On cherche en effet à réduire autant que possible le nombre de variables à intégrer à l'optimisation.

Cette étude repose tout d'abord sur une analyse d'un système à deux degrés de liberté, qui permet de représenter une aile en battement et rotation. Ce modèle est constitué d'une masse primaire et d'une masse secondaire, reliées à des ressorts en translation. Les calculs démontrent que pour obtenir un mouvement présentant une quadrature de phase entre les deux mouvements, il est nécessaire d'exciter la structure à la fréquence propre découplée de la masse secondaire. Or, le mouvement de battement est très faible à cette fréquence, car celle-ci est au voisinage immédiat d'une antirésonance. Afin d'obtenir une amplitude résonante sur le battement et la rotation, il faut rapprocher les fréquences propres découplées. Pour cela, on accorde les deux fréquences découplées et on réduit le rapport de la masse secondaire sur la masse primaire. On quantifie l'influence de l'amortissement sur l'amplitude du mouvement de la masse primaire, et on calcule l'expression du rapport de masse maximal permettant d'obtenir une amplification de ce mouvement. Au premier ordre, il faut que $\mu < 2\xi_2$.

L'étude consiste ensuite à chercher une structure constituée de deux solides rigides (deux barres) et deux ressorts en rotation, qui peuvent se ramener au modèle à deux degrés de liberté en translation. La première disposition de barres proposée, très simple, consiste à joindre les deux barres pour former un L. Bien qu'elle se ramène quasiment au modèle en translation, on lui préfère une disposition reproduisant le bord d'attaque et la nervure cubitale d'une aile de diptère. Il sera possible, ultérieurement, de chercher des configurations géométriques de poutres en L.

Puis, en prenant en compte un certain nombre de contraintes issues de la microfabrication, on transpose le modèle à deux barres et deux ressorts à un modèle à quatre poutres, dont deux sont suffisamment fines pour être assimilées à des liaisons souples. Une feuille de calcul est présentée pour le calcul des dimensions géométriques de ces poutres, à partir d'un rapport de masse souhaité, permettant d'accorder les fréquences découplées. De nombreuses dimensions sont alors automatiquement déterminées, mais il subsiste encore quelques paramètres qu'il est possible d'ajuster.

Enfin, à partir d'un ensemble donné de dimensions, on propose une version, issue d'une petite optimisation (sur deux variables), d'une architecture complète de nanodrone utilisant la disposition bio-inspirée des poutres. Les simulations montrent que l'amplitude de mouvement sur cette version atteindrait plus de trois fois la longueur des ailes, ce qui est positif.

Cependant, plusieurs points sont à prendre en compte :

— comme l'analyse sur le modèle à deux masses en translation l'a montré, l'amplitude de battement est beaucoup plus faible que celle de rotation (les simulations montrent une amplitude de battement d'un quart, voire d'un tiers de la longueur de l'aile). Or, les calculs présentés au chapitre 3 ont montré que l'amplitude de battement était déterminante pour la génération de portance et qu'une amplitude de rotation trop importante pouvait être contre-productive. Il est possible de réduire cet effet en modifiant certains paramètres géométriques, comme l'angle β, mais cela demande des ajustements relativement fins par ailleurs ;

— le calcul par l'ODT de cette architecture peut être mal pris en charge, ce qui – en

lien avec la conclusion du chapitre précédent – remet en cause l'utilisation exclusive de ce code pour l'optimisation de futures architectures de nanodrones. Pour autant, l'AEF de la version proposée donne des déformées modales difficiles à interpréter par un code d'optimisation, du fait de la présence de modes doubles ;

— cette version est issue d'une optimisation sur un nombre limité de paramètres ; il est possible qu'une meilleure version puisse être proposée une fois l'optimisation mise au point. En particulier, les valeurs de la contrainte calculée par Abaqus au niveau de la liaison souple des nervures est très élevée et largement supérieure à la limite élastique du SU-8. De ce fait, on peut proposer de réduire l'épaisseur de cette nervure et l'allonger, ce qui devra être confirmé par des analyses ultérieures ;
— il est nécessaire d'anticiper une mauvaise tenue de la membrane après fabrication dans la zone de jonction des nervures.

Chapitre 7

Bilan et perspectives

Aujourd'hui, nous avons pris conscience de l'extraordinaire degré de sophistication des phénomènes de la vie végétale et animale. De l'astuce et de l'intelligence qui s'y révèlent à chaque tournant.

H. Reeves, *L'espace prend la forme de mon regard*

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit ont été conduits dans le cadre d'un projet de recherche appelé OVMI, pour « Objet Volant Mimant l'Insecte ». Ce projet consiste à faire décoller le drone le plus léger au monde grâce à la force aérodynamique générée par le mouvement de ses ailes, reproduisant la cinématique des ailes d'insectes. Ce projet porte sur différentes thématiques de recherche (alimentation, actionnement, aérodynamique, mécanique, microfabrication, contrôle), mon travail se concentrant sur la conception et l'optimisation de la structure vibrante du nanodrone, afin de générer une force aérodynamique suffisante pour le décollage.

Plusieurs défis technologiques ont été relevés avec succès au cours des travaux ayant précédé cette thèse, orientant ma recherche. Ainsi, les procédés de microfabrication étaient d'ores et déjà validés, permettant l'obtention de prototypes le plus souvent en bon état (c'est-à-dire avec une structure des nervures intacte) après assemblage des composants (bobine, support de bobine, squelette et aimant). Les prototypes sont alimentés par des fils électriques et n'embarquent ni batterie, ni charge utile, ni électronique de contrôle. Un code de calcul avait été proposé pour la structure flexible du squelette et avait conduit à l'optimisation de deux architectures. Les prototypes correspondants avaient été testés, ayant montré des amplitudes de vibrations équivalentes à 30° de battement des ailes. La force de poussée alors obtenue correspondait au poids du nanodrone (sans les fils d'alimentation).

Cette intensité de force est pourtant insuffisante puisqu'il faut compenser l'action des fils d'alimentation. Cette action inclue le poids de ces fils mais aussi la force de rappel élastique qu'ils exercent sur le drone. Dans la mesure où la masse du drone est déjà relativement minimale, le verrou technologique du décollage, est l'augmentation de la force de sustentation du drone, qui correspond à la composante utile de la force aérodynamique, aussi appelée force de poussée. De ce fait, le premier objectif de ma thèse était de déterminer comment générer plus de force de poussée et donc mieux comprendre l'interaction entre les ailes et l'air environnant. On a étudié cette interaction dans la première partie du manuscrit, constituée des chapitres 2 et 3. Le second objectif de ma thèse était de mettre en place des outils de conception de nanodrones OVMI optimisés. La présentation de ces

outils et les résultats ont été donnés dans la seconde partie du manuscrit, comportant les chapitres 4, 5 et 6.

Cette conclusion propose le bilan de mes travaux dans la section 7.1, puis les perspectives en section 7.2.

Sommaire du chapitre

7.1 Bilan 178
7.2 Perspectives 180
7.2.1 Perspectives à court terme 180
7.2.2 Perspectives à moyen terme 181
7.2.3 Perspectives à long terme 182

7.1 Bilan

Le chapitre 2 a présenté un modèle d'amortissement non-linéaire prenant en compte l'effet de l'air sur une structure de treillis de poutres, pour ensuite l'adapter aux structures des nanodrones OVMI. Ce modèle, initialement proposé dans les travaux de l'équipe du Professeur Nayfeh [T. J. Anderson et al. 1996 ; Krauss et Nayfeh 1999 ; Malatkar et Nayfeh 2003], a été peu étudié. On a montré qu'il était tout à fait pertinent pour l'étude de vibrations en grande amplitude de structures encastrées-libres et qu'il permettait l'identification des coefficients d'amortissement modaux. Les sources d'amortissement sont toutefois nombreuses et certains phénomènes physiques peuvent engendrer un amortissement d'ordre supérieur, comme les vibrations en grandes amplitudes de structures visco-élastiques largement étudiées par l'équipe de M. Amabili [Amabili 2019]. Il est essentiel d'indiquer que le modèle d'amortissement proposé est valide pour une réponse uni-modale de la structure considérée – et donc difficilement adaptable à l'étude de l'OVMI dont le principe est de combiner les réponses de deux modes. Pour autant, cette étude a développé notre connaissance de l'amortissement non-linéaire et ses effets potentiels.

Dans le chapitre 3, on a étudié à l'inverse l'effet de la structure sur l'air, c'est-à-dire la force générée par cette structure se déplaçant dans l'air pour une cinématique de vol battu donnée. Pour cette étude, une expression de la force aérodynamique totale a été proposée à partir de l'hypothèse de son orthogonalité avec la surface d'aile à chaque instant. Cette expression est limitée au cas où le fluide n'engendre pas de déformation significative de la structure – même si ce n'est pas exactement le cas de l'OVMI. Le modèle repose donc sur un couplage faible de la dynamique avec l'aérodynamique. Elle a permis d'identifier les paramètres déterminants pour la génération de force de poussée, pour des structures rigides (par ailleurs déjà étudiées dans la littérature) comme flexibles. On a ainsi justifié l'intérêt de la quadrature de phase de la cinématique de l'OVMI, et validé le modèle aérodynamique, par comparaison avec des résultats de simulations numériques proposées dans [Suzuki et al. 2015].

Le chapitre 4 a détaillé le code de calcul de la dynamique de treillis de poutres modélisant les nanodrones OVMI. Ce code baptisé ODT et développé sur Matlab a été conçu pour être facile à prendre en main par l'utilisateur, dans la mesure où il suffit de spécifier la position des nœuds du treillis ainsi que l'indice des nœuds considérés comme encastrés. Il a aussi été développé dans le but d'être utilisé pour l'optimisation les géométries des nanodrones, en mettant à profit sa rapidité et sa précision. Le calcul complet de la dynamique tronquée à 6 modes d'un treillis de poutre donné représentatif d'une structure de

nanodrone dure environ une minute (avec un processeur i7-8650), et – à l'instar d'autres méthodes spectrales – la précision sur les fréquences propres est excellente sans avoir besoin d'affiner le maillage de la structure. L'ODT a néanmoins trois inconvénients : (i) un réglage minutieux de la recherche des fréquences propres est nécessaire afin de toutes les déceler, (ii) comme les équations régissant le code ne sont pas adimensionnées, il peut y avoir un mauvais conditionnement de la matrice issue des conditions aux limites, et (iii) le modèle de poutre utilisé ne permet pas de modéliser finement les congés de raccordement présents sur la structure des drones fabriqués. Une alternative à cet outil dans une démarche d'optimisation numérique est l'utilisation d'analyses par éléments-finis (AEF), qui peuvent être effectuée avec des éléments de 1 dimension (type poutre) ou bien 3 dimensions (éléments volumiques). Dans le cas des éléments 1D, il serait possible de développer un code *ad hoc* qui présenterait l'avantage d'être rapide et de trouver l'ensemble complet des fréquences propres (à condition de bien définir un maillage avec suffisamment d'éléments par poutre), mais qui serait toujours incapable de prendre en compte les effets des congés sur la dynamique. Dans le cas des éléments 3D, un code commercial pourrait être utilisé avec une géométrie paramétrée. Ceci n'a pas été approfondi faute de temps et il est probable que le temps de calcul associé soit très long, mais il pourrait être intéressant de considérer cette option pour les futures conceptions de nanodrones. Dans tous les cas, l'ODT s'est révélé utile pour proposer une estimation de la force aérodynamique de structures flexibles (chap. 3), et pour dimensionner l'architecture Bio-Inspirée (chap. 6) – en faisant l'hypothèse qu'une simplification de la structure augmente la précision de l'outil.

Le chapitre 5 a exposé la démarche d'optimisation de deux géométries de nanodrones. Cette optimisation repose sur une utilisation couplée de l'ODT et de la fonction *fminsearch* de Matlab. À la suite d'essais successifs et de nombreuses itérations, on a établi un certain nombre de critères d'optimisation relevant de la dynamique, de la tenue mécanique ou encore de considérations aérodynamiques. Dans la mesure où les géométries considérées présentaient de nombreux paramètres et que l'algorithme d'optimisation détermine un optimum local, les configurations trouvées n'étaient pas idéales. De plus, ces configurations ont été modifiées pour tenir compte de contraintes de fabrication. Les prototypes fabriqués ont eu un comportement dynamique sous-optimal et n'ont pas affiché d'amplitude de vibrations supérieure à celles obtenues précédemment sur le projet. Cette méthode a ainsi montré ses limites pour des structures complexes, mais grâce aux mesures effectuées sur les prototypes fabriqués, nous avons pu montrer une bonne corrélation entre le comportement simulé par l'AEF et le comportement expérimental des nanodrones. Ceci est primordial, car cela justifie la poursuite du dimensionnement des drones pour de futures générations dans la mesure où il est possible d'estimer le comportement dynamique effectif des drones avant fabrication.

À l'aune des observations et interprétations des résultats de l'optimisation, on a revu dans le chapitre 6 la conception de l'OVMI, en simplifiant sa structure. Un modèle discret à deux masses et deux ressorts a d'abord été étudié. On a mis en évidence plusieurs caractéristiques déterminantes pour l'obtention d'une cinématique de battement et rotation d'ailes en quadrature de phase, avec une amplification du mouvement due à un effet résonnant. On a ensuite cherché une disposition pour une structure constituée de deux barres et de deux ressorts en rotation pouvant se ramener au modèle discret. Les dimensions géométriques ont alors été spécifiées pour la plupart, notamment en imposant des contraintes d'épaisseurs utiles pour la fabrication. On remplace enfin les deux ressorts en rotation par des liaisons souples. Le comportement dynamique de la structure correspon-

dante peut ainsi être simulé grâce à l'outil de calcul du chapitre 4. On effectue alors une optimisation sur deux variables, qui est ainsi plus simple que celle proposée au chapitre 5. Grâce à cette optimisation, on a trouvé une configuration géométrique dont la dynamique correspond à celle recherchée (battement et rotation des ailes en quadrature de phase), avec une amplitude relativement élevée mais pour laquelle la rotation des ailes est un peu trop importante. Les premiers résultats de cette démarche légitiment son utilisation pour la conception et la fabrication de nouveaux prototypes.

Les principaux résultats de cette thèse sont en adéquation avec les objectifs poursuivis. Tout d'abord, nous avons déterminé les paramètres clefs pour l'obtention de grandes amplitudes de vibration (épaisseur, longueur et excitabilité), ainsi que pour la génération de poussée (rôle des amplitudes de battement et rotation, de la phase entre ces mouvements). La pertinence du choix du matériau SU-8 pour le projet est vérifiée, comme celle du concept de combinaison modale. La compréhension de la génération de force de poussée est donc améliorée pour mieux concevoir les structures des nanodrones OVMI. Ensuite, ces structures peuvent être dimensionnées rapidement avec l'ODT. Si on a montré quelques limites de cet outil pour des structures complexes, l'utilisation d'un logiciel de calcul par éléments-finis (Abaqus) a été validée pour la vérification du comportement dynamique. Il est ainsi possible d'estimer la dynamique avant de commencer une campagne de fabrication, ce qui permet de limiter l'investissement expérimental aux cas les plus prometteurs. Par ailleurs, l'ODT peut aussi être mis à profit pour le dimensionnement de structures simples dans une démarche de conception originale.

7.2 Perspectives

À l'issue de ce travail, différentes pistes de recherche à plus ou moins long terme peuvent être dégagées. En premier lieu, des travaux complémentaires à ceux présentés au chapitre 3 sont envisagés. En deuxième lieu, plusieurs suggestions peuvent être formulées pour la conception des prochaines générations de nanodrones en vue de leur fabrication. Enfin, de nombreux défis persisteront lorsque le nanodrone OVMI sera parvenu à décoller.

7.2.1 Perspectives à court terme

On envisage deux axes de travail sur le modèle de force aérodynamique du chapitre 3.

D'une part, il serait judicieux de renouveler l'étude paramétrique de la force générée par une plaque rigide. Cette étude proposée en section 3.3 a été proposée dans une perspective de dimensionnement de nanodrones OVMI, c'est-à-dire en travaillant à une fréquence donnée (la fréquence d'excitation) pour déterminer les paramètres d'amplitudes optimales. De ce fait, le nombre de Reynolds variait selon les paramètres choisis. Or, le modèle est construit sur l'hypothèse d'un nombre de Reynolds fixe (pour garder un même coefficient c_0). Le renouvellement de cette étude en s'assurant que Re reste constant permettrait de vérifier que les principales conclusions restent valides et éventuellement déceler une prépondérance de l'amplitude de mouvement sur la fréquence dans la force de poussée.

D'autre part, pour démontrer la pertinence du modèle, il serait intéressant de comparer la force aérodynamique générée par une structure flexible entre des valeurs expérimentales issues de la littérature et les valeurs calculées par notre modèle simulant ces expériences. En particulier, les mesures effectuées pour les études [Thiria et Godoy-Diana 2010 ; Ramananarivo et al. 2011] présentent un réel intérêt car le système étudié a une géométrie

simple. Ainsi, sur une telle géométrie, notre modèle pourrait être facilement enrichi par des non-linéarités géométriques et par de l'amortissement quadratique proposé au chapitre 2. Cette étude permettrait notamment de comparer la performance d'un système d'aile flexible par rapport à un système d'aile rigide

7.2.2 Perspectives à moyen terme

Les perspectives à moyen terme renvoient à des pistes de travail portant sur la conception et la fabrication des futures générations de prototypes.

Tout d'abord, concernant les prototypes de l'architecture Bio-Inspirée (BI), il serait intéressant de vérifier la faisabilité de l'intégration d'un actionneur piézoélectrique. La géométrie de cette architecture est particulièrement propice pour cela et un tel actionneur – quoique probablement plus lourd que l'actionneur électromagnétique – n'a besoin que d'un courant de faible intensité, ce qui pourrait faciliter l'usage de fils de 25 microns de diamètre (voire moins) et aider au décollage, à l'instar de Robobee [Wood 2007b]. Par ailleurs, lors du dimensionnement des prochaines versions du BI, il faudra trouver un compromis pour les largeurs des liaisons souples, entre la fréquence cible et le ratio de moments quadratiques en flexion avec la tenue mécanique de ces liaisons souples, notamment en affinant encore plus les liaisons souples (il est possible de déposer des couches de 2 microns). De plus, il faudra étudier la disposition des congés de raccordement sur cette architecture.

Par ailleurs, il pourrait être utile de comparer expérimentalement la force aérodynamique générée par deux géométries différentes :

— un « prototype-papillon », pour lequel l'architecture serait similaire à celle des WR, doté d'ailes relativement grandes, avec une fréquence d'excitation entre 20 et 50 Hz. Le mouvement de l'aile est dans ce cas dû à la déformation des nervures entièrement flexibles ;

— un « prototype-moustique », où l'architecture correspondrait à celle du BI, avec des ailes fines et allongées (à deux nervures), et une fréquence d'excitation entre 150 et 1 kHz. Pour cette géométrie, le mouvement de l'aile est obtenu par rotation autour de liaisons souples.

L'idée est ainsi de tester deux cas distinctifs du spectre de vol des insectes. On pourrait alors comparer les valeurs de force obtenues par le modèle du chapitre 3 avec des mesures de portance, et ainsi déterminer quel est le principe le plus adapté à notre projet. Il faudra toutefois pour cela optimiser efficacement l'architecture WR, en s'appuyant sur les résultats du chapitre 5.

Plus encore, le fait de ne pas prendre en compte la membrane dans le modèle dynamique peut conduire à surestimer la capacité des prototypes à se déformer en grande amplitude. Au repos, la membrane a un certain « mou », c'est-à-dire que sa surface est légèrement supérieure à celle de l'aile. Au cours du battement, la membrane a alors tendance à se gonfler (voir la courbure de la membrane en fonctionnement représentée fig. 3.14). Si la membrane est très peu tendue, ce gonflement peut être contre-productif pour la génération de force de poussée. À l'inverse, si la tension de la membrane est forte, elle peut gêner la déformation des nervures et donc empêcher l'aile de dépasser une certaine amplitude de vibration – particulièrement dans le cas de la torsion. En effet, la torsion de l'aile repose sur une séparation en sens opposé des nervures de bord d'attaque et de fuite, qui est possible tant que la tension dans la membrane est nulle (tant qu'il y a du « mou »). La comparaison des prototypes de type papillon et de type moustique serait utile à cet égard

pour vérifier l'existence et l'incidence de cette limite. Le prototype-moustique devrait être moins affecté par cette limite, dans la mesure où la torsion de son aile repose sur une rotation autour d'une liaison souple.

Le dimensionnement et le procédé de fabrication de la membrane de Parylène-C mériteraient d'être revus pour le succès des futurs prototypes. En effet, la membrane est parfois détériorée au niveau des jonctions entre les nervures, ce qui peut limiter la portance générée par un prototype dont les nervures sont par ailleurs intactes.

Enfin, d'autres travaux de recherche en microfabrication pourraient être utiles afin de diversifier les solutions techniques potentielles pour la conception des nanodrones OVMI. En particulier, pour l'architecture BI, comme le déplacement dû à la rotation de l'aile est largement supérieur au déplacement provoqué par le battement de l'aile, il pourrait être envisagé de recourir à des butées comme proposé dans [Wood 2007a]. Ces butées permettent de limiter, dans les deux sens, l'amplitude de la rotation de l'aile, voir fig. 1.7(b). La mise en place de butées sur les squelettes fabriqués en salle blanche demandera probablement des ajustements selon la hauteur visée. De plus, les procédés dits SCM (*Smart Composite Microstructures*) développés pour le Robobee [Wood et al. 2008] et repris par les équipes des universités de Washington et Shanghai permettent aux nanodrones correspondants d'utiliser le mécanisme d'actionnement à quatre barres. L'équipe chinoise a même réussi à adapter ces procédés pour rendre le drone « monolithique », c'est-à-dire que sa structure est en une seule pièce, repliée sur elle-même [Zou et al. 2018]. Il n'est pas impossible que ce concept puisse être appliqué à l'OVMI en intégrant le savoir-faire accumulé depuis le début du projet, notamment avec [Ishihara et al. 2020].

7.2.3 Perspectives à long terme

À plus long terme, une fois qu'un prototype aura décollé, la problématique du contrôle sera primordiale. Il est pour l'instant envisagé de concevoir des drones intégrant deux aimants. On peut aussi imaginer une superposition de deux (ou plusieurs) prototypes accolés, comme cela a été retenu pour les dernières itérations de Robobee [Jafferis et al. 2019 ; Chen et al. 2021]. Enfin, une étude d'architectures de prototypes dotés de quatre ailes disposées de façon analogue aux hyménoptères pourrait être intéressante.

Le défi le plus lointain est l'emport de la source d'énergie nécessaire au vol en autonomie du drone, car les dispositifs existants (batteries, super-condensateurs et piles à combustible) sont trop lourds de plusieurs ordres de grandeurs. Deux solutions alternatives récentes à l'emport de la source d'énergie ont été proposées dans [James et al. 2018 ; Jafferis et al. 2019] et consistent respectivement à capter l'énergie d'un laser et de puissantes lampes LED et halogènes. Les problématiques du contrôle et de l'alimentation sont en cours d'investigation au sein du projet ANR ASTRID 0023-02-2019 NANOFLY.

Bibliographie

Addo-Akoto, R., J.-S. Han et J.-H. Han (2020). « Aerodynamic performance of flexible flapping wings deformed by slack angle ». *Bioinspiration & Biomimetics* 15.6, p. 066005. DOI : 10.1088/1748-3190/aba8ac (cf. p. 50).

Alijani, F., M. Amabili, P. Balasubramanian, S. Carra, G. Ferrari et R. Garziera (2016). « Damping for large-amplitude vibrations of plates and curved panels, Part 1: Modeling and experiments ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 85, p. 23-40. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.05.003 (cf. p. 21).

Amabili, M. (2018a). « Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments ». *Nonlinear Dynamics* 93.1, p. 5-18. DOI : 10.1007/s11071-017-3889-z (cf. p. 21, 32, 46).

— (2018b). « Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 118, p. 275-292. DOI : 10.1016/j.jmps.2018.06.004 (cf. p. 21, 46).

— (2019). « Derivation of nonlinear damping from viscoelasticity in case of nonlinear vibrations ». *Nonlinear Dynamics* 97.3, p. 1785-1797. DOI : 10.1007/s11071-018-4312-0 (cf. p. 21-22, 46, 178).

Amabili, M., F. Alijani et J. Delannoy (2016). « Damping for large-amplitude vibrations of plates and curved panels, part 2: Identification and comparisons ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 85, p. 226-240. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.05.004 (cf. p. 21).

Anderson, J. M., K. Streitlien, D. S. Barrett et M. S. Triantafyllou (1998). « Oscillating foils of high propulsive efficiency ». *Journal of Fluid Mechanics* 360, p. 41-72. DOI : 10.1017/S0022112097008392 (cf. p. 56).

Anderson, T. J., A. H. Nayfeh et B. Balachandran (1996). « Experimental Verification of the Importance of the Nonlinear Curvature in the Response of a Cantilever Beam ». *Journal of Vibration and Acoustics*, p. 7 (cf. p. 19, 23, 178, 202).

Ansari, S. A., K. Knowles et R. Żbikowski (2006). « A nonlinear unsteady aerodynamic model for insect-like flapping wings in the hover: Part I. Methodology and analysis ». *Journal of Aerospace Engineering* 220.2, p. 61-83 (cf. p. 23, 50).

Ansari, S. A., R. Żbikowski et K. Knowles (2006). « Aerodynamic modelling of insect-like flapping flight for micro air vehicles ». *Progress in Aerospace Sciences* 42.2, p. 129-172. DOI : 10.1016/j.paerosci.2006.07.001 (cf. p. 54).

Arafat, H. N. (1999). « Nonlinear Response of Cantilever Beams ». Thèse de doct. Virginia Tech. 206 p. (cf. p. 29).

Au, L. T. K., H. V. Phan et H. C. Park (2016). « Optimal Wing Rotation Angle by the Unsteady Blade Element Theory for Maximum Translational Force Generation in

Insect-mimicking Flapping-wing Micro Air Vehicle ». *Journal of Bionic Engineering* 13.2, p. 261-270. DOI : 10.1016/S1672-6529(16)60299-8 (cf. p. 50).

Aureli, M. et M. Porfiri (2010). « Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids ». *Applied Physics Letters* 96.16, p. 164102. DOI : 10.1063/1.3405720 (cf. p. 23).

Balasubramanian, P., G. Ferrari et M. Amabili (2018). « Identification of the viscoelastic response and nonlinear damping of a rubber plate in nonlinear vibration regime ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 111, p. 376-398. DOI : 10.1016/j.ymssp.2018.03.061 (cf. p. 21).

Bao, X., A. Bontemps, S. Grondel et É. Cattan (2011). « Design and fabrication of insect-inspired composite wings for MAV application using MEMS technology ». *Journal of Micromechanics and Microengineering* 21.12, p. 125020. DOI : 10.1088/0960-1317/21/12/125020 (cf. p. 27).

Batoz, J.-L. et G. Dhatt (1990). *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 2 : Poutres et plaques*. T. 2. HERMES, Paris (cf. p. 166).

Berman, G. J. et Z. J. Wang (2007). « Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight ». *Journal of Fluid Mechanics* 582, p. 153. DOI : 10.1017/S0022112007006209 (cf. p. 50, 61, 67).

Bidkar, R. A., M. Kimber, A. Raman, A. K. Bajaj et S. V. Garimella (2009). « Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan Carpenter numbers ». *Journal of Fluid Mechanics* 634, p. 269. DOI : 10.1017/S0022112009007228 (cf. p. 23, 30, 44, 53, 69).

Bikdash, M., B. Balachandran et A. H. Nayfeh (1993). « Melnikov analysis for a ship with a general roll-damping model ». *Nonlinear Dynamics* 6, p. 101-124 (cf. p. 23).

Bluman, J. et C.-K. Kang (2017). « Achieving hover equilibrium in free flight with a flexible flapping wing ». *Journal of Fluids and Structures* 75, p. 117-139. DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2017.08.011 (cf. p. 50).

Bomphrey, R. J., T. Nakata, N. Phillips et S. M. Walker (2017). « Smart wing rotation and trailing-edge vortices enable high frequency mosquito flight ». *Nature* 544.7648, p. 92-95. DOI : 10.1038/nature21727 (cf. p. 53).

Bontemps, A. (2013). « Prototypage d'un Objet Volant Mimant l'Insecte ». Thèse de doct. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. 206 p. (cf. p. 10, 12, 119).

Bontemps, A., T. Vanneste, J.-B. Paquet, T. Dietsch, S. Grondel et É. Cattan (2013). « Design and performance of an insect-inspired nano air vehicle ». *Smart Materials and Structures* 22.1, p. 014008. DOI : 10.1088/0964-1726/22/1/014008 (cf. p. 5, 22, 49).

Cadot, O., M. Ducceschi, T. Humbert, B. Miquel, N. Mordant, C. Josserand et C. Touzé (2016). « Wave Turbulence in Vibrating Plates ». In : *Handbook of Applications of Chaos Theory*. Sous la dir. de C. H. Skiadas et C. Skiadas. 1re éd. Boca Ration : Taylor & Francis, 2016.|"A CRC title." : Chapman et Hall/CRC, p. 425-448. DOI : 10.1201/b20232-21 (cf. p. 21).

Chaigne, A. et C. Lambourg (2001). « Time-domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 109.4, p. 1422-1432. DOI : 10.1121/1.1354200 (cf. p. 22).

Chen, Y., S. Xu, Z. Ren et P. Chirarattananon (2021). « Collision Resilient Insect-Scale Soft-Actuated Aerial Robots With High Agility ». *IEEE Transactions on Robotics*, p. 1-13. DOI : 10.1109/TRO.2021.3053647 (cf. p. 182).

Chimakurthi, S. K., J. Tang, R. Palacios, C. E. S. Cesnik et W. Shyy (2008). « Computational Aeroelasticity Framework for Analyzing Flapping Wing Micro Air Vehicles ». In : *49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, p. 23 (cf. p. 50).

Cho, H., N. Lee, J. Y. Kwak, S. J. Shin et S. Lee (2016). « Three-dimensional fluid–structure interaction analysis of a flexible flapping wing under the simultaneous pitching and plunging motion ». *Nonlinear Dynamics* 86.3, p. 1951-1966. DOI : 10.1007/s11071-016-3007-7 (cf. p. 50).

Chouvion, B., S. McWilliam, A. A. Popov et C. H. J. Fox (2012). « Review and comparison of different support loss models for micro-electro-mechanical systems resonators undergoing in-plane vibration ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 226.1, p. 283-295. DOI : 10.1177/0954406211413351 (cf. p. 22).

Cochelin, B., N. Damil et M. Potier-Ferry (2007). *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoisier. 297 p. (cf. p. 33).

Colin, M., O. Thomas, S. Grondel et É. Cattan (2020). « Very large amplitude vibrations of flexible structures: Experimental identification and validation of a quadratic drag damping model ». *Journal of Fluids and Structures* 97, p. 103056. DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103056 (cf. p. 69).

Courbon, J. (1980). « Theorie des poutres ». *Techniques de l'Ingénieur* (cf. p. 165).

Crespo da Silva, M. R. M. et C. C. Glynn (1978a). « Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion ». *Journal of Structural Mechanics* 6.4, p. 437-448. DOI : 10.1080/03601217808907348 (cf. p. 19, 23, 28).

— (1978b). « Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. II. Forced Motions ». *Journal of Structural Mechanics* 6.4, p. 449-461. DOI : 10.1080/03601217808907349 (cf. p. 19).

Dalzell, J. F. (1976). *A note on the form of ship roll damping*. SIT-DL-76-1887. Sevens Institute of Technology (cf. p. 23).

Dargent, T. (2010). « Microsystème à ailes vibrantes: utilisation des technologies MEMS pour la réalisation d'un microdrone bioinspiré ». Thèse de doct. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. 169 p. (cf. p. 12, 119).

Denis, V., M. Jossic, C. Giraud-Audine, B. Chomette, A. Renault et O. Thomas (2018). « Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation and normal form ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 106, p. 430-452. DOI : 10.1016/j.ymssp.2018.01.014 (cf. p. 33, 46).

Dickerson, B. H., A. M. de Souza, A. Huda et M. H. Dickinson (2019). « Flies Regulate Wing Motion via Active Control of a Dual-Function Gyroscope ». *Current Biology* 29.20, 3517-3524.e3. DOI : 10.1016/j.cub.2019.08.065 (cf. p. 7).

Dickinson, M. H., F.-O. Lehmann et K. G. Götz (1993). « The Active Control of Wing Rotation by Drosophila ». *Journal of Experimental Biology* 182, p. 173-189 (cf. p. 7).

Dickinson, M. H., F.-O. Lehmann et S. P. Sane (1999). « Wing Rotation and the Aerodynamic Basis of Insect Flight ». *Science* 284.5422, p. 1954-1960. DOI : 10.1126/science.284.5422.1954 (cf. p. 23, 50, 53-54).

Dickinson, M. H. et F. T. Muijres (2016). « The aerodynamics and control of free flight manoeuvres in Drosophila ». *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 371.1704, p. 20150388. DOI : 10.1098/rstb.2015.0388 (cf. p. 9, 53).

Dickson, W. B. (2004). « The effect of advance ratio on the aerodynamics of revolving wings ». *Journal of Experimental Biology* 207.24, p. 4269-4281. DOI : 10.1242/jeb.01266 (cf. p. 47, 54).

Dion, J.-L., G. Chevallier et N. Peyret (2013). « Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 34.1, p. 106-115. DOI : 10.1016/j.ymssp.2012.08.003 (cf. p. 22).

Doan, L. A., D. Faux, S. Dupont, É. Cattan et S. Grondel (2016). « Modeling and simulation of the vertical take off and energy consumption of a vibrating wing nano air vehicle ». In : *2016 11th France-Japan & 9th Europe-Asia Congress on Mechatronics (MECATRONICS) /17th International Conference on Research and Education in Mechatronics (REM)*. 2016 11th France-Japan & 9th Europe-Asia Congress on Mechatronics (MECATRONICS) /17th Internationall Conference on Research and Education in Mechatronics (REM). Compiègne, France : IEEE, p. 123-128. DOI : 10.1109/MECATRONICS.2016.7547127 (cf. p. 22).

Doughty, T., P. Davies et A. Bajaj (2002). « A Comparison of Three Techniques Using Steady-state Data to Identify Non-linear Modal Behavior of an Externally Excited Cantilever Beam ». *Journal of Sound and Vibration* 249.4, p. 785-813. DOI : 10.1006/jsvi.2001.3912 (cf. p. 23).

Egorov, A., A. Kamalutdinov et A. Nuriev (2018). « Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples ». *Journal of Sound and Vibration* 421, p. 334-347. DOI : 10.1016/j.jsv.2018.02.006 (cf. p. 23, 30).

Eichler, A., J. Moser, J. Chaste, M. Zdrojek, I. Wilson-Rae et A. Bachtold (2011). « Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene ». *Nature Nanotechnology* 6.6, p. 339-342. DOI : 10.1038/nnano.2011.71 (cf. p. 21).

Ellington, C. P., C. Van Den Berg, A. P. Willmott et A. L. R. Thomas (1996). « Leading-edge vortices in insect flight ». *Nature* 384, p. 626-630 (cf. p. 50).

Elliott, S. J., M. G. Tehrani et R. S. Langley (2015). « Nonlinear damping and quasi-linear modelling ». *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373.2051, p. 20140402. DOI : 10.1098/rsta.2014.0402 (cf. p. 23).

Ennos, A. R. (1989). « Comparative functional morphology of the wings of Diptera ». *Zoological Journal of the Linnean Society* 96.1, p. 27-47. DOI : 10.1111/j.1096-3642.1989.tb01820.x (cf. p. 157).

Fanchon, J.-L. (2012). *Guide de mécanique*. OCLC : 855889292. Paris : Nathan (cf. p. 92, 103, 165).

Faux, D. (2018). « Couplage modal pour la reproduction de la cinématique d'une aile d'insecte et la génération de portance d'un nano-drone bio-inspiré ». Thèse de doct. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. 134 p. (cf. p. 8, 10, 12, 14, 48, 82, 88, 92, 94-95, 98, 101, 104, 108-109, 119).

Faux, D., O. Thomas, É. Cattan et S. Grondel (2018). « Two modes resonant combined motion for insect wings kinematics reproduction and lift generation ». *EPL* 121.6. DOI : 10.1209/0295-5075/121/66001 (cf. p. 10-11, 22, 37, 42, 49, 51, 75-77).

Faux, D., O. Thomas, S. Grondel et É. Cattan (2019). « Dynamic simulation and optimization of artificial insect-sized flapping wings for a bioinspired kinematics using a two resonant vibration modes combination ». *Journal of Sound and Vibration*. DOI : 10.1016/j.jsv.2019.114883 (cf. p. 26, 41, 68, 76).

Fearing, R. S., K. H. Chiang, M. H. Dickinson, D. L. Pick, M. Sitti et J. Yan (2000). « Wing Transmission for a Micromechanical Flying Insect ». In : *Proceedings 2000 ICRA*. Millenium Conference IEEE ICRA. T. 2, p. 1509-1516 (cf. p. 137).

Fernandez, P. (2016). *Optimisation d'ailes vibrantes*. Rapport de stage de M2. UPMC, p. 87 (cf. p. 14).

Fry, S. N. (2005). « The aerodynamics of hovering flight in Drosophila ». *Journal of Experimental Biology* 208.12, p. 2303-2318. DOI : 10.1242/jeb.01612 (cf. p. 9-10).

Fry, S. N., R. Sayaman et M. H. Dickinson (2003). « The Aerodynamics of Free-Flight Maneuvers in Drosophila ». *Science* 300.5618, p. 495-498 (cf. p. 22, 51).

Garrick, I. (1936). *Propulsion of a flapping and oscillating airfoil*. 567. Langley Field, VA : National Advisory Committee for Aeronautics (cf. p. 56).

Géradin, M. et D. J. Rixen (1994). *Mechanical Vibrations: Theory and application to structural dynamics*. Wiley. 617 p. (cf. p. 22-23, 230).

Gogulapati, A., P. P. Friedmann et J. Martins (2013). « Optimization of the Kinematics of a Flapping Wing MAV in Hover for Enhanced Performance ». In : *54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Boston, Massachusetts : American Institute of Aeronautics et Astronautics. DOI : 10.2514/6.2013-1646 (cf. p. 50).

Gonçalves, P. J. P., M. J. Brennan, A. Peplow et B. Tang (2019). « Calculation of the natural frequencies and mode shapes of a Euler–Bernoulli beam which has any combination of linear boundary conditions ». *Journal of Vibration and Control* 25.18, p. 2473-2479. DOI : 10.1177/1077546319857336 (cf. p. 90).

Gottlieb, O. et G. Habib (2012). « Non-linear model-based estimation of quadratic and cubic damping mechanisms governing the dynamics of a chaotic spherical pendulum ». *Journal of Vibration and Control* 18.4, p. 536-547. DOI : 10.1177/1077546310395969 (cf. p. 23, 32).

Grimaldi, D. A. et M. S. Engel (2005). *Evolution of the insects*. Cambridge [U.K.] ; New York : Cambridge University Press. 755 p. (cf. p. 157-158).

Guillaume, P., P. Verboven, S. Vanlanduit, H. Van der Auweraer et B. Peeters (2003). « A Poly-reference Implementation of the Least-squares Complex Frequency-domain Estimator ». In : *Proceedings of IMAC*. Conference & Exposition on Structural Dynamics, Society for Experimental Mechanics. T. 21. Kissimmee, Florida, p. 183-192 (cf. p. 128).

Guillot, L., B. Cochelin et C. Vergez (2019). « A Taylor series-based continuation method for solutions of dynamical systems ». *Nonlinear Dynamics* 98, p. 2827-2845. DOI : 10.1007/s11071-019-04989-5 (cf. p. 20, 33).

Guillot, L., A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez et B. Cochelin (2020). « A purely frequency based Floquet-Hill formulation for the efficient stability computation of periodic solutions of ordinary differential systems ». *Journal of Computational Physics* 416. in press. DOI : https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109477 (cf. p. 203).

Haddara, M. (1973). « On nonlinear rolling of ships in random seas ». *International Shipbuilding Progress* 20.230, p. 377-387. DOI : 10.3233/ISP-1973-2023001 (cf. p. 23).

Hao, Z., A. Erbil et F. Ayazi (2003). « An analytical model for support loss in micromachined beam resonators with in-plane flexural vibrations ». *Sensors and Actuators A: Physical* 109.1, p. 156-164. DOI : 10.1016/j.sna.2003.09.037 (cf. p. 22).

Ho, S., H. Nassef, N. Pornsinsirirak, Y.-C. Tai et C.-M. Ho (2003). « Unsteady aerodynamics and flow control for flapping wing flyers ». *Progress in Aerospace Sciences* 39.8, p. 635-681. DOI : 10.1016/j.paerosci.2003.04.001 (cf. p. 2).

Hosaka, H. et K. Itao (1999). « Theoretical and Experimental Study on Airflow Damping of Vibrating Microcantilevers ». *Journal of Vibration and Acoustics* 121.1, p. 64. DOI : 10.1115/1.2893949 (cf. p. 22).

Hosaka, H., K. Itao et S. Kuroda (1995). « Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators ». *Sensors and Actuators A: Physical*, p. 87-95 (cf. p. 22).

Ishihara, D., S. Murakami, N. Ohira, J. Ueo, M. Takagi, K. Urakawa et T. Horie (2020). « Polymer Micromachined Transmission for Insect–Inspired Flapping Wing Nano Air Vehicles* ». In : *2020 IEEE 15th International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular System (NEMS)*. 2020 IEEE 15th International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular System (NEMS). San Diego, CA, USA : IEEE, p. 176-179. DOI : 10.1109/NEMS50311.2020.9265594 (cf. p. 182).

Jafferis, N. T., E. F. Helbling, M. Karpelson et R. J. Wood (2019). « Untethered flight of an insect-sized flapping-wing microscale aerial vehicle ». *Nature* 570.7762, p. 491-495. DOI : 10.1038/s41586-019-1322-0 (cf. p. 5, 7, 49, 182).

James, J., V. Iyer, Y. Chukewad, S. Gollakota et S. B. Fuller (2018). « Liftoff of a 190 mg Laser-Powered Aerial Vehicle: The Lightest Wireless Robot to Fly ». In : 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, p. 8 (cf. p. 5, 49, 182).

Kang, C.-K. et W. Shyy (2014). « Analytical model for instantaneous lift and shape deformation of an insect-scale flapping wing in hover ». *Journal of The Royal Society Interface* 11.101, p. 20140933-20140933. DOI : 10.1098/rsif.2014.0933 (cf. p. 50, 69).

Ke, X., W. Zhang, J. Shi et W. Chen (2021). « The modeling and numerical solution for flapping wing hovering wingbeat dynamics ». *Aerospace Science and Technology* 110, p. 106474. DOI : 10.1016/j.ast.2020.106474 (cf. p. 50).

Kerschen, G., K. Worden, A. F. Vakakis et J.-C. Golinval (2006). « Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 20.3, p. 505-592. DOI : 10.1016/j.ymssp.2005.04.008 (cf. p. 23).

Keulegan, G. H. et L. H. Carpenter (1958). « Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid ». *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 60.5, p. 423-440. DOI : 10.6028/jres.060.043 (cf. p. 23, 53).

Krauss, R. W. et A. H. Nayfeh (1999). « Experimental Nonlinear Identification of a Single Mode of a Transversely Excited Beam ». *Nonlinear Dynamics* 18.1, p. 69-87 (cf. p. 19, 23-24, 31, 178).

Lacarbonara, W. et H. Yabuno (2006). « Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: Theory and experiment ». *International Journal of Solids and Structures* 43.17, p. 5066-5084. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2005.07.018 (cf. p. 28).

Lagarias, J. C., J. A. Reeds, M. H. Wright et P. E. Wright (1998). « Convergence Properties of the Nelder–Mead Simplex Method in Low Dimensions ». *SIAM Journal on Optimization* 9.1, p. 112-147. DOI : 10.1137/S1052623496303470 (cf. p. 109).

Lazarus, A. et O. Thomas (2010). « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Mécanique* 338.9, p. 510-517. DOI : 10.1016/j.crme.2010.07.020 (cf. p. 33).

Le Rouzic, J., P. Delobelle, P. Vairac et B. Cretin (2009). « Comparison of three different scales techniques for the dynamic mechanical characterization of two polymers (PDMS and SU8) ». *The European Physical Journal Applied Physics* 48.1, p. 11201. DOI : 10.1051/epjap/2009124 (cf. p. 22).

Lee, U. (2009). *Spectral element method in structural dynamics*. Singapore ; Hoboken, NJ : J. Wiley & Sons Asia. 454 p. (cf. p. 90).

Lee, Y. J., K. B. Lua, T. T. Lim et K. S. Yeo (2016). « A quasi-steady aerodynamic model for flapping flight with improved adaptability ». *Bioinspiration & Biomimetics* 11.3, p. 036005. DOI : 10.1088/1748-3190/11/3/036005 (cf. p. 50).

Lehmann, F.-O. et M. H. Dickinson (1997). « The Changes in Power Requirements and Muscle Efficiency During Elevated Force Production in the Fruit Fly Drosophila Melanogaster ». *Journal of Experimental Biology* 200, p. 1133-1143 (cf. p. 54).

Lighthill, M. (1973). « On the Weis-Fogh mechanism of lift generation ». *Journal of Fluid Mechanics* 60, p. 1-17 (cf. p. 50).

Ma, K. Y., P. Chirarattananon, S. B. Fuller et R. J. Wood (2013). « Controlled Flight of a Biologically Inspired, Insect-Scale Robot ». *Science* 340.6132, p. 603-607. DOI : 10.1126/science.1231806 (cf. p. 49).

Malatkar, P. et A. H. Nayfeh (2003). « A Parametric Identification Technique for Single-Degree-of-Freedom Weakly Nonlinear Systems with Cubic Nonlinearities ». *Modal Analysis* 9.3, p. 317-336. DOI : 10.1177/107754603030754 (cf. p. 14, 19, 23-24, 30, 178).

Maurini, C., M. Porfiri et J. Pouget (2006). « Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams ». *Journal of Sound and Vibration* 298.4, p. 918-933. DOI : 10.1016/j.jsv.2006.05.041 (cf. p. 90).

May, M. L. (1991). « Dragonfly flight: Power Requirements at high speed and acceleration ». *Journal of Experimental Biology* 158.1, p. 325-342 (cf. p. 3).

Minotti, F. O. (2011). « Determination of the instantaneous forces on flapping wings from a localized fluid velocity field ». *Physics of Fluids* 23.11, p. 111902. DOI : 10.1063/1.3659496 (cf. p. 50).

Muijres, F. T., M. J. Elzinga, J. M. Melis et M. H. Dickinson (2014). « Flies Evade Looming Targets by Executing Rapid Visually Directed Banked Turns ». *Science* 344.6180, p. 172-177. DOI : 10.1126/science.1248955 (cf. p. 3).

Nabawy, M. R. A. et W. J. Crowther (2014). « On the quasi-steady aerodynamics of normal hovering flight part II: model implementation and evaluation ». *Journal of The Royal Society Interface* 11.94, p. 20131197-20131197. DOI : 10.1098/rsif.2013.1197 (cf. p. 47, 50, 53-54).

— (2015). « Aero-optimum hovering kinematics ». *Bioinspiration & Biomimetics* 10.4, p. 044002. DOI : 10.1088/1748-3190/10/4/044002 (cf. p. 60, 67, 75).

— (2017). « The role of the leading edge vortex in lift augmentation of steadily revolving wings: a change in perspective ». *Journal of The Royal Society Interface* 14.132, p. 1-9. DOI : 10.1098/rsif.2017.0159 (cf. p. 47, 54-55).

Naeli, K. et O. Brand (2009). « Dimensional considerations in achieving large quality factors for resonant silicon cantilevers in air ». *Journal of Applied Physics* 105.1, p. 014908. DOI : 10.1063/1.3062204 (cf. p. 27).

Nakata, T., H. Liu et R. J. Bomphrey (2015). « A CFD-informed quasi-steady model of flapping-wing aerodynamics ». *Journal of Fluid Mechanics* 783, p. 323-343. DOI : 10.1017/jfm.2015.537 (cf. p. 50).

Nayfeh, A. H. (1985). « Parametric Identification of Nonlinear Dynamic Systems ». *Computers & Structures* 20.1, p. 487-493 (cf. p. 23).

Nayfeh, A. H. et D. T. Mook (1979). *Nonlinear Oscillations*. Wiley et Sons (cf. p. 21, 30, 201).

Nelder, J. A. et R. Mead (1965). « A Simplex Method for Function Minimization ». *The Computer Journal* 7.4, p. 308-313. DOI : 10.1093/comjnl/7.4.308 (cf. p. 109).

Norberg, U. M. (1990). *Vertebrate Flight: Mechanics, Physiology, Morphology, Ecology and Evolution*. OCLC: 1058112347 (cf. p. 2).

Nouira, H., E. Foltête, L. Hirsinger et S. Ballandras (2007). « Investigation of the effects of air on the dynamic behavior of a small cantilever beam ». *Journal of Sound and Vibration* 305.1, p. 243-260. DOI : 10.1016/j.jsv.2007.04.013 (cf. p. 22).

Pai, P. F. et A. H. Nayfeh (1990). « Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25.5, p. 455-474. DOI : 10.1016/0020-7462(90)90012-X (cf. p. 24, 42).

Pedersen, C. B. et R. Żbikowski (2006). « An indicial-Polhamus aerodynamic model of insect-like flapping wings in hover ». In : *Flow Phenomena in Nature: a Challenge to Engineering Design*. Sous la dir. de R. Liebe. T. 4. WIT Transactions on State of the Art in Science and Engineering. Billerica, MA : WIT Press, p. 606-665. DOI : 10.2495/1-84564-095-0/6e (cf. p. 23).

Phan, C. N., M. Aureli et M. Porfiri (2013). « Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids ». *Journal of Fluids and Structures* 40, p. 52-69. DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2013.03.013 (cf. p. 23).

Qi, Z., D. Kennedy et F. Williams (2004). « An accurate method for transcendental eigenproblems with a new criterion for eigenfrequencies ». *International Journal of Solids and Structures* 41.11, p. 3225-3242. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2004.01.022 (cf. p. 90).

Ramananarivo, S., R. Godoy-Diana et B. Thiria (2011). « Rather than resonance, flapping wing flyers may play on aerodynamics to improve performance ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.15, p. 5964-5969. DOI : 10.1073/pnas.1017910108 (cf. p. 40, 49, 139, 141, 180).

Rhoads, J., S. W. Shaw et K. L. Turner (2008). « Nonlinear Dynamics and its Applications in Micro- and Nanoresonators ». *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 132, p. 31 (cf. p. 22).

Sabater, A. et J. Rhoads (2017). « Parametric system identification of resonant micro/-nanosystems operating in a nonlinear response regime ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 84, p. 241-264. DOI : 10.1016/j.ymssp.2016.06.003 (cf. p. 24).

Salcedo, M. K., J. Hoffmann, S. Donoughe et L. Mahadevan (2019). « Computational analysis of size, shape and structure of insect wings ». *Biology Open* 8.10, bio040774. DOI : 10.1242/bio.040774 (cf. p. 7).

Sane, S. P. (2003). « The aerodynamics of insect flight ». *Journal of Experimental Biology* 206.23, p. 4191-4208. DOI : 10.1242/jeb.00663 (cf. p. 47, 50, 53).

Sane, S. P. et M. H. Dickinson (2001). « The control of Flight Force by a Flapping Wing: Lift and drag production by a flapping wing ». *Journal of Experimental Biology* 204, p. 2607-2626 (cf. p. 23).

— (2002). « The aerodynamic effects of wing rotation and a revised quasi-steady model of flapping flight ». *Journal of Experimental Biology* 205, p. 1087-1096 (cf. p. 50, 53, 60-61).

Sarpkaya, T. (1976). *Vortex shedding and resistance in harmonic flow about smooth and rough circular cylinders at high Reynolds numbers*. NPS-59SL76021. Monterey CA : Naval Postgraduate School, p. 186 (cf. p. 53).

— (2010). *Wave Forces on Offshore Structures*. Cambridge University Press. 338 p. (cf. p. 53).

Sayag, M. R. et E. H. Dowell (2016). « Linear Versus Nonlinear Response of a Cantilevered Beam Under Harmonic Base Excitation: Theory and Experiment ». *Journal of Applied Mechanics* 83.10, p. 101002. DOI : 10.1115/1.4034117 (cf. p. 69).

— (2019). « Nonlinear Structural, Inertial and Damping Effects in an Oscillating Cantilever Beam ». In : *Nonlinear Dynamics*. Sous la dir. de G. Kerschen. T. 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Series Title: Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Cham : Springer, p. 387-400. DOI : 10.1007/978-3-319-74280-9_44 (cf. p. 69).

Schmid, S. et C. Hierold (2008). « Damping mechanisms of single-clamped and prestressed double-clamped resonant polymer microbeams ». *Journal of Applied Physics* 104.9, p. 093516. DOI : 10.1063/1.3008032 (cf. p. 22).

Seshadri, P., M. Benedict et I. Chopra (2012). « A novel mechanism for emulating insect wing kinematics ». *Bioinspiration & Biomimetics* 7.3, p. 036017. DOI : 10.1088/1748-3182/7/3/036017 (cf. p. 141).

Shyy, W., Y. Lian, J. Tang, D. Viieru et H. Liu (2007). *Aerodynamics of Low Reynolds Number Flyers*. Cambridge Aerospace Series 22. 213 p. (cf. p. 9).

Smith, M. J. C., P. J. Wilkin et M. H. Williams (1996). « The Advantages Of An Unsteady Panel Method In Modelling The Aerodynamic Forces On Rigid Flapping Wings ». *Journal of Experimental Biology* 199, p. 1073-1083 (cf. p. 50).

Stanford, B. K., M. Kurdi, P. Beran et A. McClung (2012). « Shape, Structure, and Kinematic Parameterization of a Power-Optimal Hovering Wing ». *Journal of Aircraft* 49.6, p. 1687-1699. DOI : 10.2514/1.C031094 (cf. p. 50, 74).

Stokes, G. G. (1851). « On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums ». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9.2, p. 8-106 (cf. p. 45, 66).

Sun, M. et G. Du (2003). « Lift and power requirements of hovering insect flight ». *Acta Mechanica Sinica* 19.5, p. 458-469. DOI : 10.1007/BF02484580 (cf. p. 50).

Suzuki, K., K. Minami et T. Inamuro (2015). « Lift and thrust generation by a butterfly-like flapping wing–body model: immersed boundary–lattice Boltzmann simulations ». *Journal of Fluid Mechanics* 767, p. 659-695. DOI : 10.1017/jfm.2015.57 (cf. p. 48, 67-68, 75, 178).

Theckes, B. (2012). « Amortissement par le branchement des structures flexibles: une approche bio-inspirée des arbres ». Thèse de doct. Ecole Polytechnique. 101 p. (cf. p. 111).

Thiria, B. et R. Godoy-Diana (2010). « How wing compliance drives the efficiency of self-propelled flapping flyers ». *Physical Review E* 82.1. DOI : 10.1103/PhysRevE.82.015303. arXiv : 1002.4890 (cf. p. 49, 138, 180).

Thomas, O., A. Sénéchal et J.-F. Deü (2016). « Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams ». *Nonlinear Dynamics* 86.2, p. 1293-1318. DOI : 10.1007/s11071-016-2965-0 (cf. p. 28).

Thomas, O., C. Touzé et A. Chaigne (2003). « Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: experiments ». *Journal of Sound and Vibration* 265.5, p. 1075-1101. DOI : 10.1016/S0022-460X(02)01564-X (cf. p. 35).

Thomas, O., C. Touzé et E. Luminais (2007). « Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: Experiments on a 1:1:2 internal resonance ». *Nonlinear Dynamics* 49.1, p. 259-284. DOI : 10.1007/s11071-006-9132-y (cf. p. 21, 35).

Touzé, C., O. Thomas et M. Amabili (2011). « Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates ». *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.1, p. 234-246. DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.09.004 (cf. p. 21).

Touzé, C., O. Thomas et A. Chaigne (2004). « Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes ». *Journal of Sound and Vibration* 273.1, p. 77-101. DOI : 10.1016/j.jsv.2003.04.005 (cf. p. 33).

Trizila, P., C.-K. Kang, H. Aono, W. Shyy et M. Visbal (2011). « Low-Reynolds-Number Aerodynamics of a Flapping Rigid Flat Plate ». *AIAA Journal* 49.4, p. 806-823. DOI : 10.2514/1.J050827 (cf. p. 56-57, 67).

Vakilinejad, M., A. Grolet et O. Thomas (2020). « A comparison of robustness and performance of linear and nonlinear Lanchester dampers ». *Nonlinear Dynamics*. DOI : 10.1007/s11071-020-05512-x (cf. p. 203).

Van der Auweraer, H., P. Guillaume, P. Verboven et S. Vanlanduit (2001). « Application of a Fast-Stabilizing Frequency Domain Parameter Estimation Method ». *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 123.4, p. 651-658. DOI : 10.1115/1.1410369 (cf. p. 128).

Vanneste, T. (2013). « Aeroelastic framework of insect-like flapping-wing applied to the design of a resonant nano air vehicle ». Thèse de doct. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis. 252 p. (cf. p. 12, 88, 119).

Varoto, P. S. et L. P. R. de Oliveira (2002). « On the Force Drop Off Phenomenon in Shaker Testing in Experimental Modal Analysis ». *Shock and Vibration* 9.4, p. 165-175. DOI : 10.1155/2002/675674 (cf. p. 37).

Veen, W. G. van, J. L. van Leeuwen et F. T. Muijres (2019). « A chordwise offset of the wing-pitch axis enhances rotational aerodynamic forces on insect wings: a numerical study ». *Journal of The Royal Society Interface* 16.155, p. 20190118. DOI : 10.1098/rsif.2019.0118 (cf. p. 61).

Wang, Q., J. F. L. Goosen et F. Van Keulen (2016). « A predictive quasi-steady model of aerodynamic loads on flapping wings ». *Journal of Fluid Mechanics* 800, p. 688-719. DOI : 10.1017/jfm.2016.413 (cf. p. 50).

Wang, Z. J. (2005). « Dissecting Insect Flight ». *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1, p. 183-210. DOI : 10.1146/annurev.fluid.36.050802.121940 (cf. p. 52, 61).

Whitney, J. P. et R. J. Wood (2010). « Aeromechanics of passive rotation in flapping flight ». *Journal of Fluid Mechanics* 660, p. 197-220. DOI : 10.1017/S002211201000265X (cf. p. 7, 49-50, 139).

Williams, F. W. et W. H. Wittrick (1970). « An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures ». *International Journal of Mechanical Sciences* 12.9, p. 781-791. DOI : 10.1016/0020-7403(70)90053-6 (cf. p. 90).

Wittrick, W. H. et F. W. Williams (1971). « A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures ». *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 24.3, p. 263-284. DOI : 10.1093/qjmam/24.3.263 (cf. p. 90).

Wood, R. J. (2007a). « Design, fabrication, and analysis of a 3DOF, 3cm flapping-wing MAV ». In : *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. San Diego, CA, USA : IEEE, p. 1576-1581. DOI : 10.1109/IROS.2007.4399495 (cf. p. 6-7, 49, 138, 141, 182).

— (2007b). « Liftoff of a 60mg flapping-wing MAV ». In : *2007 IEEE/RSJ*. International Conference on Intelligent Robots and Systems. San Diego, CA, USA, p. 1889-1894. DOI : 10.1109/IROS.2007.4399502 (cf. p. 4, 49, 137, 181).

— (2008). « The First Takeoff of a Biologically Inspired At-Scale Robotic Insect ». *IEEE Transactions on Robotics* 24.2, p. 341-347. DOI : 10.1109/TRO.2008.916997 (cf. p. 6).

Wood, R. J., S. Avadhanula, R. Sahai, E. Steltz et R. S. Fearing (2008). « Microrobot Design Using Fiber Reinforced Composites ». *J. Mech. Des.* 130.5, p. 052304. DOI : 10.1115/1.2885509 (cf. p. 182).

Wood, R. J., B. M. Finio, M. Karpelson, K. Y. Ma, N. O. Pérez-Arancibia, P. Sreetharan, H. Tanaka et J. P. Whitney (2012). « Progress on 'pico' air vehicles ». *The International Journal of Robotics Research* 31.11, p. 1292-1302. DOI : 10.1177/0278364912455073 (cf. p. 4).

Younis, M. I. (2010). *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*. T. 20. Microsystems. New York ; London : Springer Science+Business Media. 453 p. (cf. p. 21).

Zaitsev, S., O. Shtempluck, E. Buks et O. Gottlieb (2012). « Nonlinear damping in a micromechanical oscillator ». *Nonlinear Dynamics* 67.1, p. 859-883. DOI : 10.1007/s11071-011-0031-5 (cf. p. 21, 23).

Zhang, C. et C. Rossi (2017). « A review of compliant transmission mechanisms for bio-inspired flapping-wing micro air vehicles ». *Bioinspiration & Biomimetics* 12.2, p. 025005. DOI : 10.1088/1748-3190/aa58d3 (cf. p. 142).

Zhang, L., X. Hu et Z. Xie (2019). « Identification method and application of aerodynamic damping characteristics of super high-rise buildings under narrow-band excitation ». *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 189, p. 173-185. DOI : 10.1016/j.jweia.2019.03.027 (cf. p. 22).

Zheng, L., T. L. Hedrick et R. Mittal (2013). « A multi-fidelity modelling approach for evaluation and optimization of wing stroke aerodynamics in flapping flight ». *Journal of Fluid Mechanics* 721, p. 118-154. DOI : 10.1017/jfm.2013.46 (cf. p. 54).

Zou, Y., W. Zhang et Z. Zhang (2016). « Liftoff of an Electromagnetically Driven Insect-Inspired Flapping-Wing Robot ». *IEEE Transactions on Robotics* 32.5, p. 1285-1289. DOI : 10.1109/TRO.2016.2593449 (cf. p. 4-5, 49).

Zou, Y., W. Zhang, S. Zhou, X. Ke, F. Cui et W. Liu (2018). « Monolithic fabrication of an insect-scale self-lifting flapping-wing robot ». *Micro & Nano Letters* 13.2, p. 267-269. DOI : 10.1049/mnl.2017.0730 (cf. p. 5, 142, 182).

Annexe A

Annexes du chapitre 1

A.1 Photographies supplémentaires

Figure A.1.1 – *Drosophila melanogaster* – Mouche drosophile. Source de la photographie : https://en.wikipedia.org/wiki/Drosophila_melanogaster!

Figure A.1.2 – *Vespa velutina* – Frelon asiatique. Source de la photographie : https://www.farago-france.fr/wp-content/uploads/2018/08/800px-Vespa_velutina_nigrithorax_MHNT_ventre.jpg!

Figure A.1.3 – *Colibri serrirostris* – Colibri à ventre blanc. Source de la photographie : https://i.redd.it/ljesg5y58u421.jpg

Figure A.1.4 – Hubsan Nano Q4. Source de la photographie : https://img.tttcdn.com/product/original/p/gu1/R/8/RM7308/RM7308-1-602d-YxSS.jpg

Figure A.1.5 – FLIR Black Hornet. Source de la photographie : https://www.armytimes.com/resizer/RTnb8nadEQhVPoiZvodlp_t5Kyg=/1200x630/filters:quality(100)/arc-anglerfish-arc2-prod-mco.s3.amazonaws.com/public/6LISSYG3WBGWLAXPWN52JBDUAI.jpg

Figure A.1.6 – *Luscinia megarhynchos* – Rossignol philomèle. Source de la photographie : https://1721181113.rsc.cdn77.org/data/images/full/26760/wings-of-nightingale-is-at-risk-to-becoming-shorter-due-to-climate-change.png?w=538?w=650

Figure A.1.7 – *Larus argentatus* – Goéland argenté. Source de la photographie : https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ed/Angreifende_Silberm%C3%B6we_auf_Spiekeroog%2C_Nationalpark_nieders%C3%A4chsisches_Wattenmeer_-_edited.jpg/1280px-Angreifende_Silberm%C3%B6we_auf_Spiekeroog%2C_Nationalpark_nieders%C3%A4chsisches_Wattenmeer_-_edited.jpg

Figure A.1.8 – Spy'Ranger. Source de la photographie : https://www.air-cosmos.com/article/eurosatory-2016-spyranger-le-mini-drone-de-reconnaissance-de-thales-8793

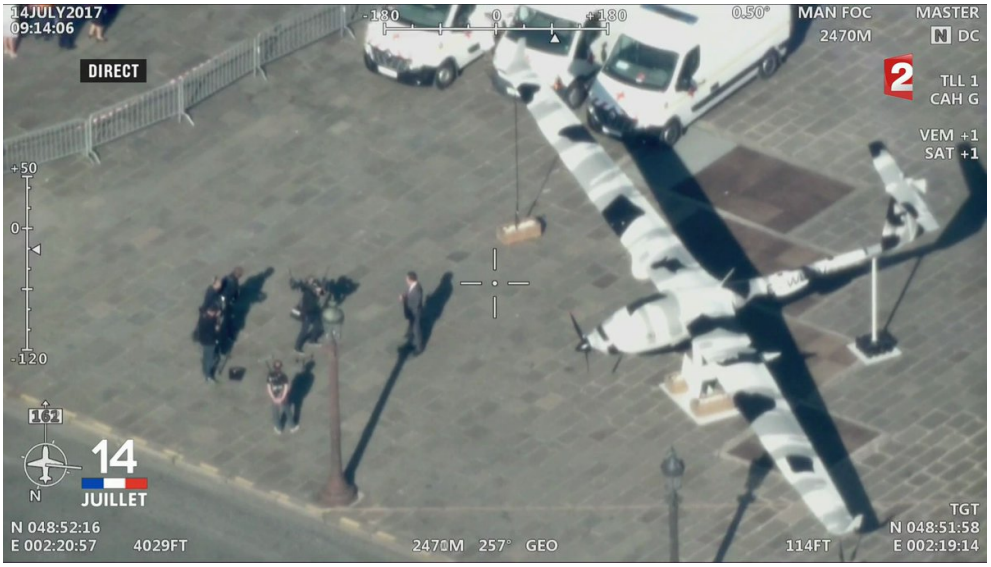


Figure A.1.9 – Patroller. Source de la photographie : https://twitter.com/SafranElecDef/status/885806874666430465/photo/3

Figure A.1.10 – A400M. Source de la photographie : https://www.forcesoperations.com/nouveau-contrat-de-maintenance-inedit-pour-la400m/

Annexe B

Annexes du chapitre 2

B.1 Aerodynamic drag force

In order to account for the action of air on the structure, a local term should be added in Eq. (2.15), of the form $\dot{w}|\dot{w}|$. Assuming $\dot{w}_e$ is negligible compared to $\dot{w}_r$, this term leads in Eq. (2.21) to an additional term of the form:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \dot{q}_i(\bar{t}) \int_0^1 \Phi_k(\bar{x})\Phi_i(\bar{x}) \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \Phi_j(\bar{x})\dot{q}_j(\bar{t}) \right| \mathrm{d}x. \tag{B.1}$$

Using the single-mode approximation, one recovers Eq. (2.23). Otherwise, the drag produces a global nonlinear quadratic coupling between the modes, whose spatial dependence cannot be separated from the time dependence. In the case of base excitation, if the assumption $\dot{w}_e \ll \dot{w}_r$ is not verified, then the excitation motion cannot be pulled out of the absolute value and the term of Eq. (B.1) is even more complex.

B.2 Method of multiple scales

In this section, the oscillator equation is the following:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q + \nu_1\dot{q}|\dot{q}| + \nu_2\dot{q}^3 + \nu_3 q^2\dot{q} + \Gamma q^3 + \Pi(\ddot{q}q^2 + \dot{q}^2 q) = F\cos(\Omega\bar{t}). \tag{B.2}$$

In order to use the method of multiple scales [Nayfeh and Mook 1979], the terms in Eq. (B.2) are adjusted in powers of ϵ, a book-keeping parameter, to have a valid analytical solution:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = -\epsilon 2\xi\omega_0\dot{q} - \epsilon\nu_1\dot{q}|\dot{q}| - \epsilon\nu_2\dot{q}^3 - \epsilon\nu_3 q^2\dot{q} - \epsilon\Gamma q^3 - \epsilon\Pi(\ddot{q}q^2 + \dot{q}^2 q) + \epsilon F\cos(\Omega\bar{t}), \tag{B.3}$$

First, new time variables are introduced:

$$T_n = \epsilon^n \bar{t}, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{B.4}$$

which leads to the following expressions of the partial derivatives with respect to the T_n:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{t}} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + ..., \tag{B.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{t}^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) + ... \tag{B.6}$$

where $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$. Then, q is developed in powers of ϵ:

$$q(\bar{t}) = q_0(T_0, T_1, T_2, ...) + \epsilon q_1(T_0, T_1, T_2, ...) + \epsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2, ...)... \tag{B.7}$$

Substituting Eq. (B.7) into Eq. (B.3) and equating the coefficients of ϵ to zero, we obtain:

$$D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = 0, \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = &- 2D_0 D_1 q_0 - 2\xi\omega_0 D_0 q_0 \\ &- \nu_1 D_0 q_0 |D_0 q_0| - \nu_2 (D_0 q_0)^3 - \nu_3 q_0^2 (D_0 q_0) \\ &- \Gamma q_0^3 - \Pi((D_0 q_0)^2 q_0 + D_0^2 q_0 q_0^2) + F\cos(\Omega T_0). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Equation (B.8) leads to a solution q_0 of the form:

$$q_0 = A(T_1)e^{j\omega_0 T_0} + cc, \tag{B.10}$$

with cc referring to the complex conjugate of what precedes in the right-hand side of the equation. Focusing on the primary resonance of the system, we set the detuning parameter such that $\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$. Substituting Eq. (B.10) into Eq. (B.9) gives:

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = &- A^2\bar{A}(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)e^{j\omega_0 T_0} - 2j\omega_0(D_1 A + A\xi\omega_0 + (\frac{3}{2}\nu_2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\nu_3)A^2\bar{A})e^{j\omega_0 T_0} \\ &- (\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)A^3 e^{3j\omega_0 T_0} + j(\nu_2\omega_0^3 - \nu_3\omega_0)A^3 e^{3j\omega_0 T_0} + \frac{F}{2}e^{j(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + cc \\ &- \omega_0^2\nu_1 j(Ae^{j\omega_0 T_0} - \bar{A}e^{-j\omega_0 T_0})|j(Ae^{j\omega_0 T_0} - \bar{A}e^{-j\omega_0 T_0})|. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Eliminating the secular terms from Eq. (B.11) requires all terms in the right-hand side of the equation proportional to $e^{j\omega_0 T_0}$ to be zero. For the last term of Eq. (B.11), we develop it into Fourier series and calculate the first harmonic's amplitude to set it to zero (we note $\tau = \omega_0 T_0$):

$$\begin{aligned} 0 = &- 2j\omega_0(D_1 A + A\xi\omega_0 + (\frac{3}{2}\nu_2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\nu_3)A^2\bar{A}) - A^2\bar{A}(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi) + \frac{F}{2}e^{j(\sigma T_1)} \\ &- \frac{j\omega_0^2\nu_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Ae^{j\tau} - \bar{A}e^{-j\tau})|j(Ae^{j\tau} - \bar{A}e^{-j\tau})|e^{-j\tau}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Now, expressing A in the polar form ($A(T_1) = \frac{1}{2}ae^{j\beta(T_1)}$) and switching variable $\phi = \tau + \beta$ [T. J. Anderson et al. 1996], yields:

$$\begin{aligned} 0 = &\left(2\omega_0 a\frac{\partial\beta}{\partial T_1} - 2\omega_0 j(\frac{\partial a}{\partial T_1} + a\xi\omega_0 + \frac{a^3}{16}(3\nu_2\omega_0^2 + \nu_3)) - \frac{3\Gamma - 2\Pi\omega_0^2}{8}a^3\right)e^{j\beta} \\ &+ \frac{F}{2}e^{\sigma T_1} + \frac{\omega_0^2\nu_1}{2\pi}a^2\int_\beta^{2\pi+\beta}\underbrace{\sin\phi|\sin\phi|e^{-j\phi}}_{f(\phi)}\mathrm{d}\phi\ e^{j\beta}. \end{aligned}$$

As $f(\phi)$ is 2π-periodic, we have $\int_0^t f(\phi)\mathrm{d}\phi = \int_{2\pi}^{2\pi+t} f(\phi)\mathrm{d}\phi$ and one can calculate $\int_0^{2\pi} f(\phi)\mathrm{d}\phi = -\frac{8j}{3}$. Multiplying by $e^{-j\beta}$, and separating real and imaginary parts in the previous equation leads to:

$$\begin{cases} a\frac{\partial\beta}{\partial T_1} = \frac{3\Gamma - 2\Pi\omega_0^2}{8\omega_0}a^3 - \frac{F}{2\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial T_1} = -a(\xi\omega_0 + \frac{4}{3\pi}\omega_0\nu_1 a + (\frac{3}{8}\omega_0^2\nu_2 + \frac{1}{8}\nu_3)a^2) + \frac{F}{2\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) &= 0 \end{cases} \tag{B.13}$$

Let $\gamma = \sigma T_1 - \beta$. Furthermore, being in steady-state regime comes down to $\frac{\partial a}{\partial T_1} = \frac{\partial \gamma}{\partial T_1} = 0$. Eq. (B.13) is now:

$$\begin{cases} a\sigma - \dfrac{(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)}{8\omega_0}a^3 & = -\dfrac{F}{2\omega_0}\cos\gamma, \\ \xi\omega_0 a + \dfrac{4}{3\pi}\nu_1\omega_0 a^2 + (\dfrac{3}{8}\omega_0^2\nu_2 + \dfrac{1}{8}\nu_3)a^3 & = \dfrac{F}{2\omega_0}\sin\gamma \end{cases}$$

The forced response of the system in steady-state can be obtained from:

$$\Omega - \omega_0 = \frac{(3\Gamma - 2\omega_0^2\Pi)}{8\omega_0}a^2 \pm \sqrt{\frac{F^2}{4\omega_0^2 a^2} - \omega_0^2\left(\xi + \frac{4\nu_1}{3\pi}a + (\frac{3\omega_0\nu_2}{8} + \frac{\nu_3}{8\omega_0})a^2\right)^2}. \tag{B.14}$$

Note: Given the fact that the nonlinear function related to the aerodynamic damping in the oscillator equation (Eq. (B.2)) presents a central symmetry, the constant value and the even harmonics of the solution are zero (see the appendix of [Vakilinejad et al. 2020]), although this term presents a quadratic nonlinearity. Surely, in Eq. (B.11), there are no constant value or harmonic of order 2. Indeed, one can verify that the constant value and the Fourier series coefficient of the second harmonic of the term $-j\omega_0^2\nu_1(Ae^{j\tau} - \bar{A}e^{-j\tau})|(Ae^{j\tau} - \bar{A}e^{-j\tau})|$ are zero.

B.3 Manlab implementation of the nonlinear equations

In the framework of MANlab, the problem to solve must be written under the form of a first-order dynamical system with quadratic nonlinearities only [Guillot et al. 2020]. As Eq. (2.39) is a simplified version of Eq. (2.40), the latter only is detailed here. We introduce $r = \dot{q}$ to transform Eq. (2.40) into the first order dynamical system:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= r \\ \dot{r} &= F\cos(\Omega\bar{t}) - (2\xi r + q + \nu r|r| + \Gamma q^3). \end{aligned} \tag{B.15}$$

We introduce two more variables $s = q^2$ and $u = |\dot{q}| = |r|$. This last equation is non-smooth so we replace it by a regularised version $\delta = r^2 - u^2$, with δ the regularisation parameter chosen as small as possible. In practice, convergence tests demonstrated that $\delta = 0.001$ was low enough. The problem can now be expressed as the following first-order dynamical system with quadratic nonlinearities only:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= r, \\ \dot{r} &= F\cos(\Omega\bar{t}) - 2\xi r - q - \nu r u - \Gamma q s, \\ 0 &= s - q^2, \\ 0 &= \delta - r^2 + u^2. \end{aligned} \tag{B.16}$$

It is necessary to initialise MANlab with a starting point: we choose the linear solution $q_l = F/(1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega)$. We set a starting frequency at $\Omega = 0.01$. The starting point is described with the Fourier coefficients of q, r, s and u: $q_{\cos} = \mathrm{Re}(q_l)$, $q_{\sin} = -\mathrm{Im}(q_l)$, $r_{\cos} = \Omega q_{\sin}$, $r_{\sin} = -\Omega q_{\cos}$, $s_0 = q_{\cos}^2/2 + q_{\sin}^2/2$, $s_{2\cos} = q_{\cos}^2/2 - q_{\sin}^2/2$, $s_{2\sin} = q_{\cos}q_{\sin}$, $u_0 = 2\Omega|q_{\cos}|/\pi$, and $u_{2\cos} = -\Omega|q_{\cos}|4/(3\pi)$. The other parameters values are $\xi = 0.001$, $\nu = 0.03\pi/4$, and F varies between 0.0005 and 0.005.

B.4 Phase of the simulated frequency responses with MANlab

In Fig. B.4.1, the phase variation at the vicinity of the resonance is reduced – it becomes more and more "flat" – as the forcing increases.

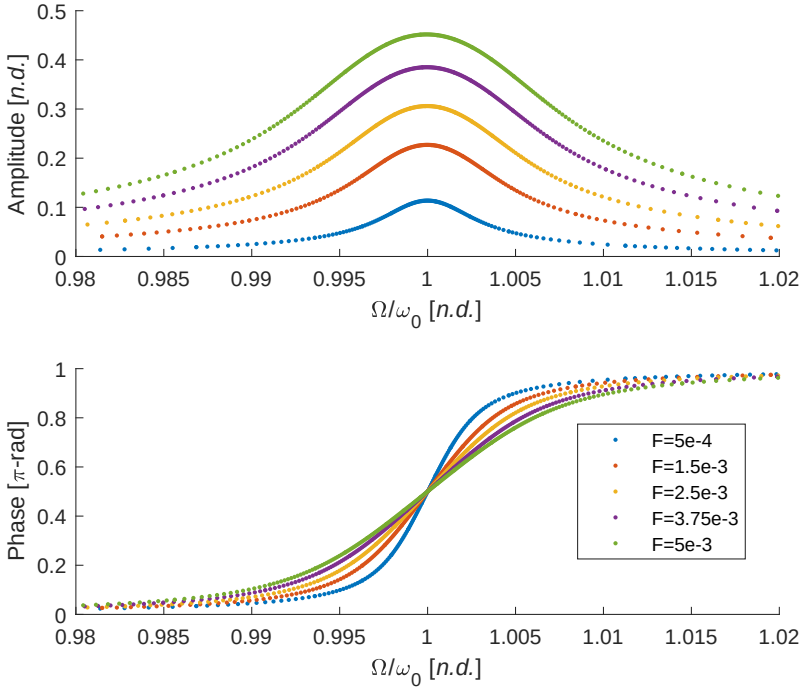


Figure B.4.1 – Simulated frequency responses with MANlab

Appendix C

Annexes du chapitre 3

C.1 Supplementary figures for the 2D motion

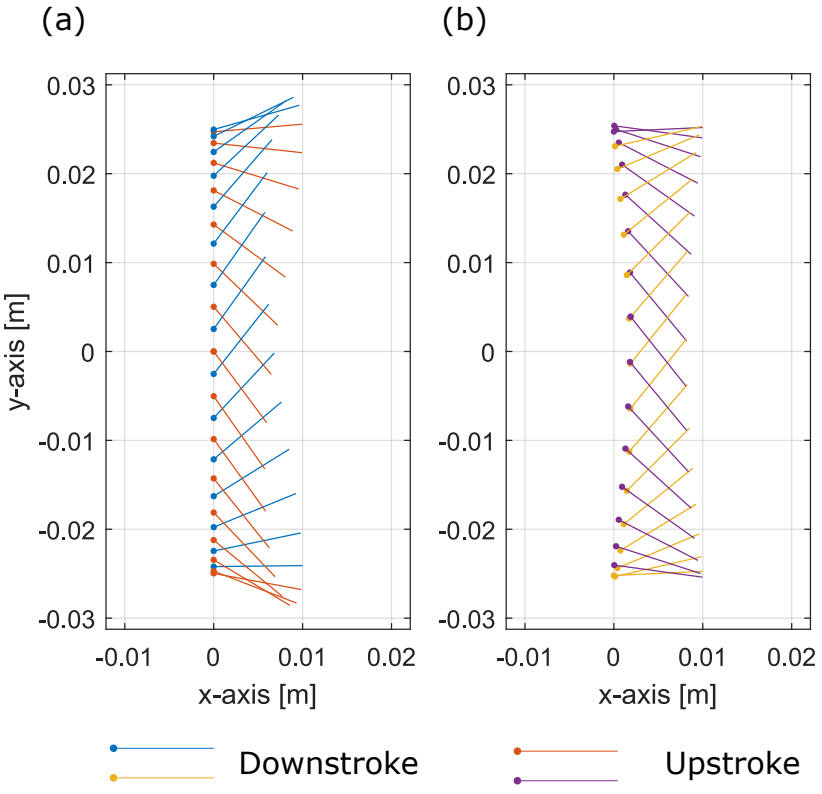


Figure C.1.1 – Optimum trajectories with $a = 5$ for two pitch and plunging plates with a rotation center (a) equal to 0 and (b) equal to $L/2$

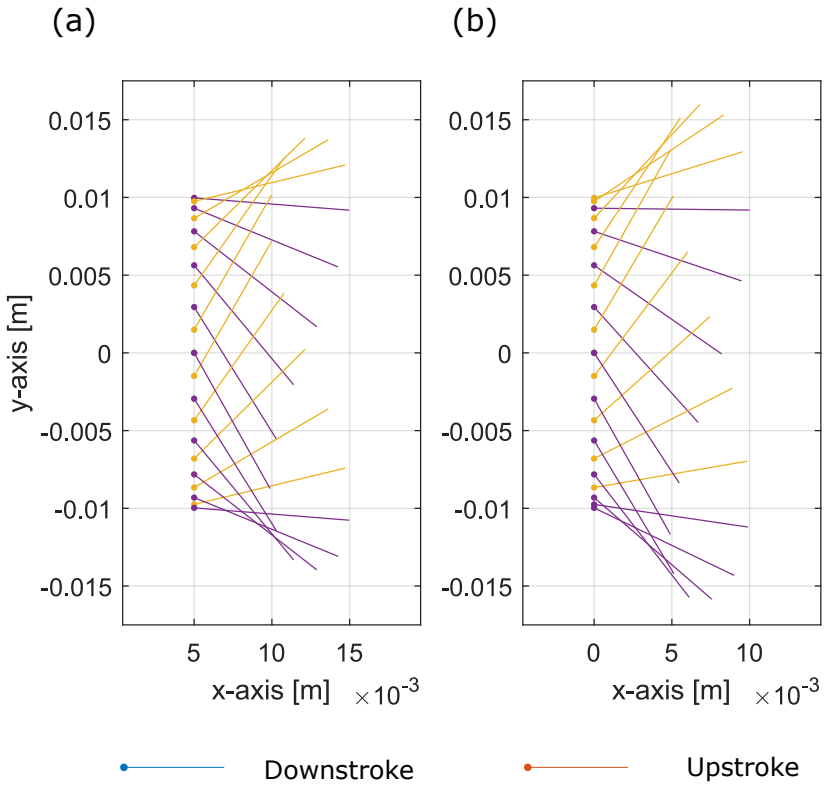


Figure C.1.2 – Trajectories with $a = 2$ for a pitch and plunging plate with a rotation center equal to 0 with a phase shift of (a) optimum (b) equal to $\pi/2$

C.2 Wing OVMI

C.2.1 Interpolation quadratique pour le calcul du déplacement et de la normale

C.2.1.1 Calcul du déplacement

Pour trouver le déplacement en tout point de la structure, l'idée est d'interpoler le déplacement pour tous les points de l'aile qui ne sont pas placés sur une nervure grâce aux déplacements des points qui sont sur les nervures à même abscisse x_i/L_i. On paramétrise donc la surface de l'aile en fonction de 2 variables r et s, qui sont respectivement l'abscisse adimensionnée des nervures ($r = x_i/L_i$) et une abscisse radiale allant de 0 à 1 elle aussi. On pose donc $U(r, s, t)$ en fonction des déplacements connus $w_i(r, t)$:

$$W(r, s, t) = \sum_{i=1}^{N_i} P^{(N_i-1)}(s) w_i(r, t), \tag{C.1}$$

avec N_i le nombre de nervures composant l'aile et $P^{(N_i-1)}(s)$ un polynôme d'interpolation d'ordre $N_i - 1$ de s :

$$P^{(N_i-1)}(s) = \sum_{j=1}^{N_i} a_{ji} s^{j-1}. \tag{C.2}$$

En écrivant simplement que les valeurs de $U(r,s,t)$ prennent celles des $w_i(r,t)$ aux s correspondants, cela se traduit sous la forme de N_i équations :

$$W(r, \frac{i-1}{N_i - 1}, t) = w_i(r,t), \forall i \in \{1, ..., N_i\}. \tag{C.3}$$

Les équations (C.3) forment un système linéaire. En inversant ce système on obtient les coefficients a_{ji} cherchés ; par exemple pour $N_i = 3$:

$$[a_{ji}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{C.4}$$

On a donc l'expression exacte de tout déplacement $W(r,s,t)$ interpolé en fonction de s à partir N_i déplacements $w_i(r,t)$:

$$W(r,s,t) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} a_{ji} s^{j-1} w_i(r,t). \tag{C.5}$$

On peut donc en déduire la vitesse :

$$\vec{V}(r,s,t) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} a_{ji} s^{j-1} \frac{\partial w_i}{\partial t}(r,s,t) \vec{z}_0 \tag{C.6}$$

que l'on peut écrire avec les notations suivantes : $\vec{V}(r,s,t) = V(r,s,t)\vec{z}_0$.

C.2.1.2 Calcul du vecteur normal

À chaque instant, la membrane forme une surface dans l'espace. Soit un point M appartenant à cette surface. Le vecteur position $\vec{OM}(t)$ s'écrit de manière générale :

$$\vec{OM}(t) = \vec{f}(r,s,t) = X(r,s,t)\vec{x}_0 + Y(r,s,t)\vec{y}_0 + Z(r,s,t)\vec{z}_0. \tag{C.7}$$

Avec les notations de notre discrétisation, on a :

$$\begin{aligned} X(r,s,t) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ji} s^{j-1} (x_J + rC_i) \\ Y(r,s,t) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ji} s^{j-1} (y_J + rS_i) \\ Z(r,s,t) &= 0 + W(r,s,t), \end{aligned} \tag{C.8}$$

où x_J, y_J est le point de jonction des trois nervures, et avec $C_i = L_i \cos\alpha_i$ et $S_i = L_i \sin\alpha_i$ (pour $i = 1, 2, 3$).

On peut ensuite calculer 2 vecteurs tangents :

$$\begin{aligned} \vec{t_r} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{x_0} + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{y_0} + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{z_0} \\ \vec{t_s} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s}\vec{x_0} + \frac{\partial y}{\partial s}\vec{y_0} + \frac{\partial z}{\partial s}\vec{z_0}. \end{aligned} \tag{C.9}$$

Les expressions avec nos grandeurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{N_i} C_i \sum_{j=1}^{N_i} a_{ji} s^{j-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial s} = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} (j-1) a_{ji} s^{j-2}(x_0 + rC_i) \\
\frac{\partial Y}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{N_i} S_i \sum_{j=1}^{N_i} a_{ji} s^{j-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial s} = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} (j-1) a_{ji} s^{j-2}(y_0 + rS_i) \\
\frac{\partial Z}{\partial r} &= \sum_{i=1}^{N_i} L_i \sum_{j=1}^{N_i} a_{ji} s^{j-1} w_i'(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} (j-1) a_{ji} s^{j-2} w_i(r,t)
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Il faut noter que la dérivée partielle par rapport à s en $r = 0$ est un point particulier.

C.2.1.3 Définition alternative de U avec w et θ

$$W(r,s,t) = \sum_{i,j=1}^{3} P^{(k)}(s)[w_i(r,t)\ \theta_j(x,t)] \tag{C.11}$$

avec $Q^{(k)}$ un polynôme d'interpolation d'ordre k : $Q^{(k)}(s) = \sum_{i=0}^{k} A_i s^i$, sachant que l'on peut poser

$$\begin{aligned}
&U(x,0,t) = w_1(x,t) \quad \text{et} \quad U(x,0.5,t) = w_2(x,t) \quad \text{et} \quad U(x,1,t) = w_3(x,t) \\
&\frac{\partial U}{\partial s}(x,0,t) = \theta_1(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial s}(x,0.5,t) = \theta_2(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial s}(x,1,t) = \theta_3(x,t).
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Grâce à l'ensemble des équations (C.12), on peut écrire les coefficients $[A_0 ... A_5]$ en fonction des $[w_i(r,t)\ \theta_j(x,t)]$, avec i=1,2,3 et j=1,2,3 :

$$[A_0 ... A_5]^T = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-23 & 16 & 7 & -6 & -8 & -1 \\
66 & -32 & -34 & 13 & 32 & 5 \\
-68 & 16 & 52 & -12 & -40 & -8 \\
24 & 0 & -24 & 4 & 16 & 4
\end{bmatrix} [w_i\ \theta_j]^T \tag{C.13}$$

On peut donc écrire pour la vitesse

$$\vec{V}(r,s,t) = \sum_{i=1}^{3} \left(Q^{(5)}(s) \sum_{m=1}^{4} [\Phi_m^i(x)\ \Psi_m^i(x)] \dot{q}_m(t) \right) \vec{z}_0 \tag{C.14}$$

C.2.1.4 Calcul de la normale

En chaque point de la surface, on a un mouvement de déplacement transverse et de rotation en torsion, qui amène à une orientation d'un petit élément de surface suivant deux angles : l'angle de rotation due à la flexion suivant l'axe local $\vec{y}$, et qui vaut w' et l'angle de rotation due à la torsion suivant l'axe local $\vec{x}$: θ. Sachant qu'initialement la structure est dans le plan ($\vec{x}_0$,$\vec{y}_0$), on peut poser les vecteurs normaux à la surface en flexion $\vec{n}_F$ et en torsion $\vec{n}_T$, en fonction de w' et θ' respectivement :

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} \sin w' \\ 0 \\ \cos w' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-sin}\,\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{C.15}$$

Les vecteurs parallèles aux mouvements de flexion et torsion $\vec{T}_F$ et $\vec{T}_T$ s'écrivent alors en retranchant $\pi/2$ aux angles de rotation :

$$\vec{T}_F = \begin{pmatrix} \cos w' \\ 0 \\ \sin w' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

On peut donc calculer le vecteur normal à chaque petit élément de surface en chaque instant t (appelé $\vec{n}(r,s,t)$) grâce aux valeurs de $w'(x,t)$ et $\theta(x,t)$ interpolées en chaque point de la membrane.

Annexe D

Annexes du chapitre 4

D.1 Déformées du Spider

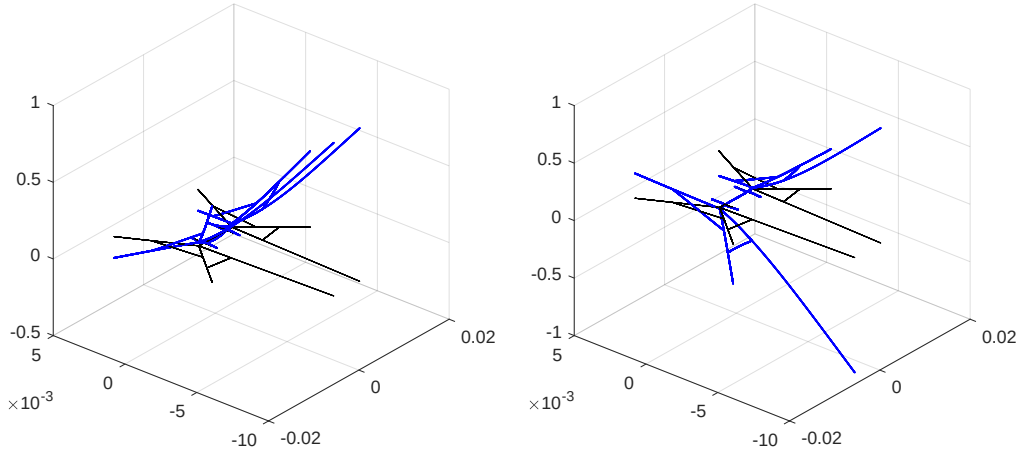


Figure D.1.1 – Déformées modales calculées avec l'ODT du Spider – M1 et M2

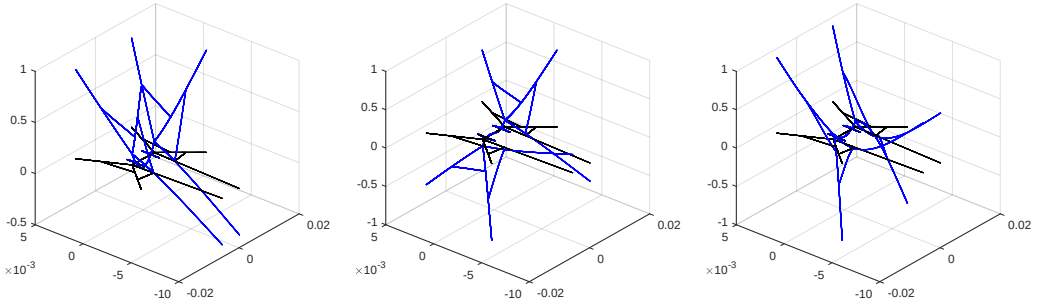


Figure D.1.2 – Déformées modales calculées avec l'ODT du Spider – M3-M5

D.2 Déformées du losange barré

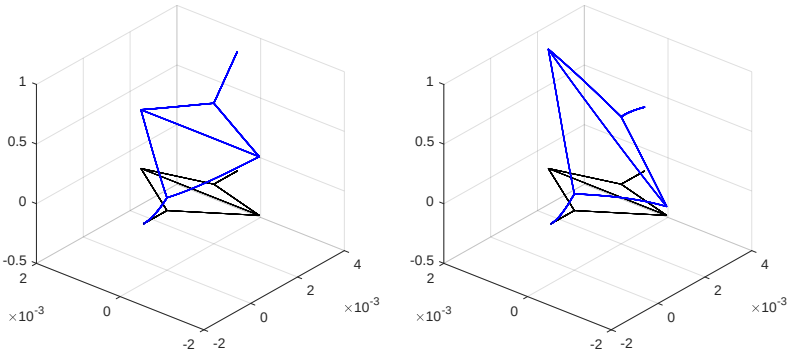


Figure D.2.1 – Déformées modales calculées avec l'ODT du losange barré – M1 et M2

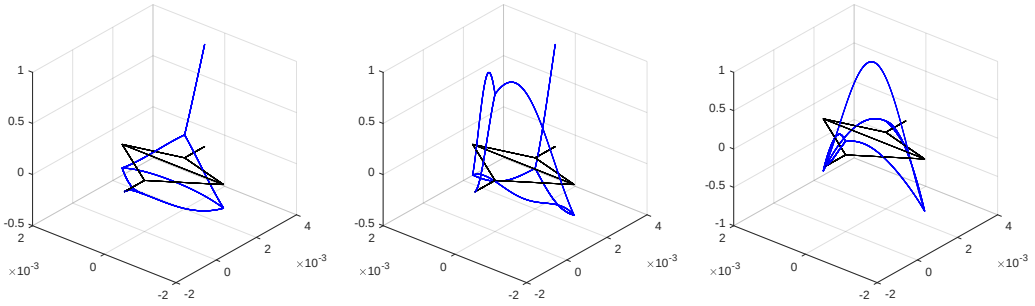


Figure D.2.2 – Déformées modales calculées avec l'ODT du losange barré – M3-M5

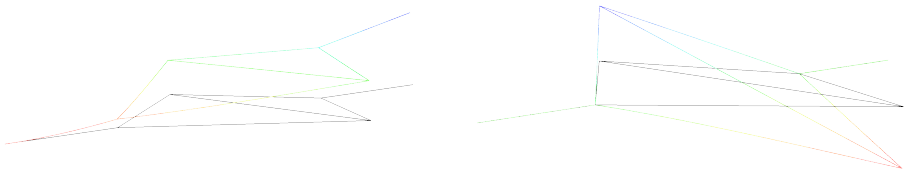


Figure D.2.3 – Déformées modales calculées avec Abaqus du losange barré – M1 et M2

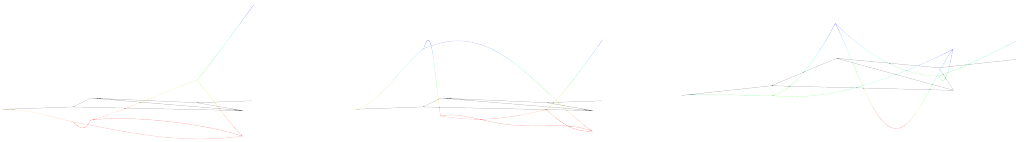


Figure D.2.4 – Déformées modales calculées avec Abaqus du losange barré – M3-M5

Annexe E

Annexes du chapitre 5

E.1 Figures complémentaires issues de Matlab

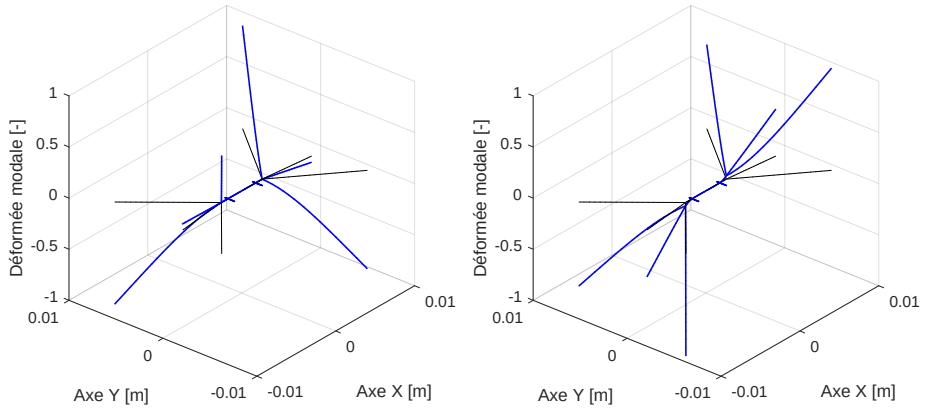


Figure E.1.1 – Déformées modales supplémentaires calculées avec Matlab du WRR optimal

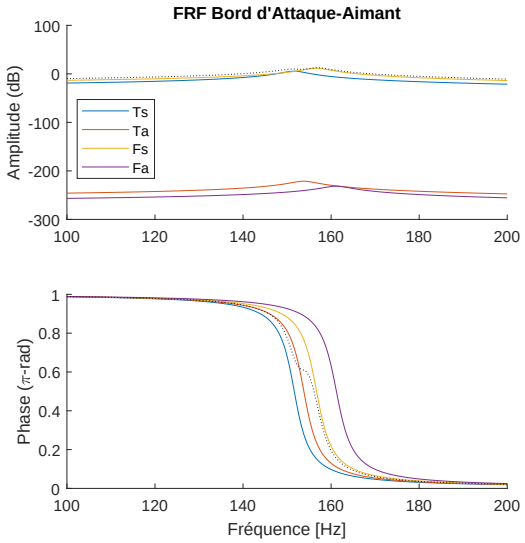


Figure E.1.2 – FRF calculée avec Matlab du WRR optimal

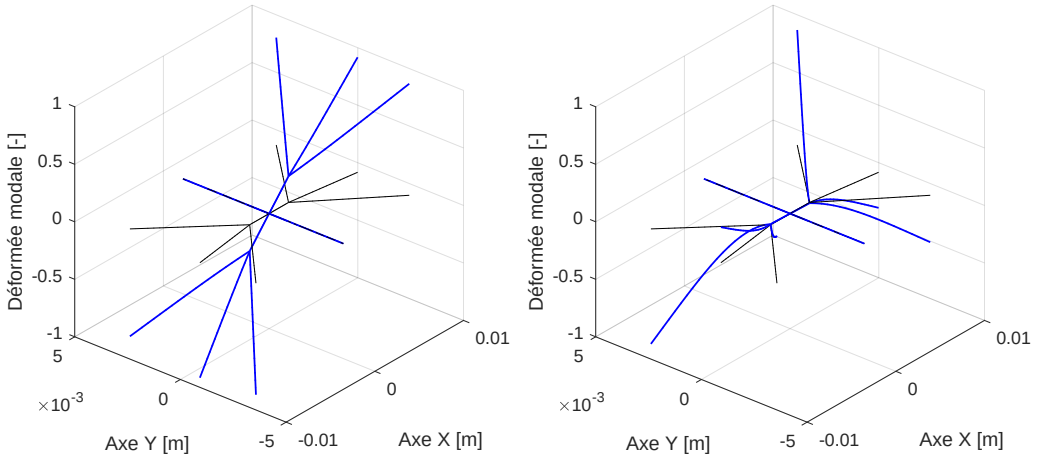


Figure E.1.3 – Déformées modales supplémentaires calculées avec Matlab du GLR optimal

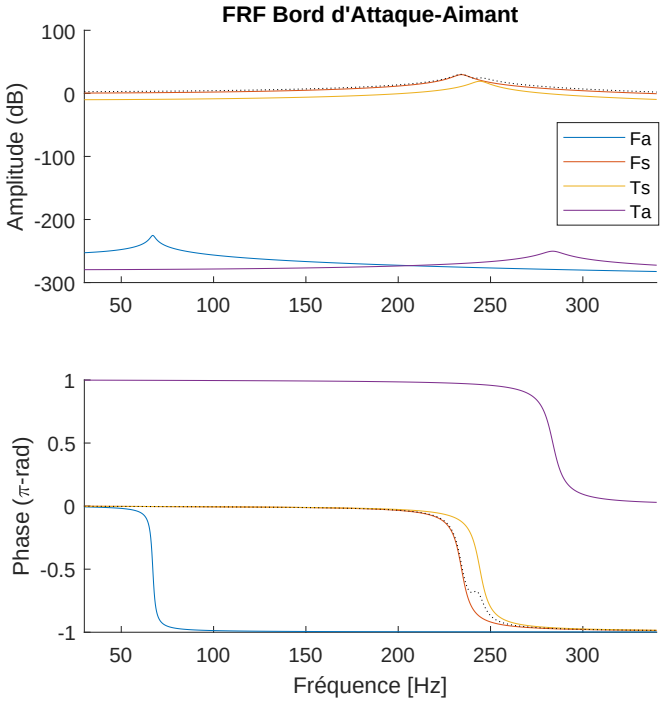


Figure E.1.4 – FRF calculée avec Matlab du GLR optimal

E.2 Vues complémentaires des prototypes fabriqués

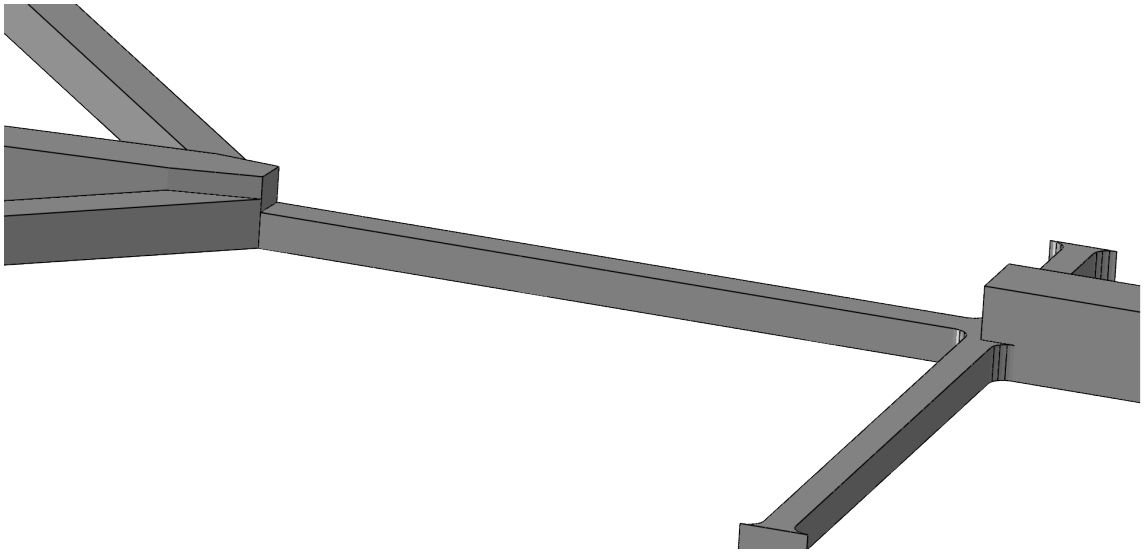


Figure E.2.1 – WRR – Détail des épaisseurs des liaisons

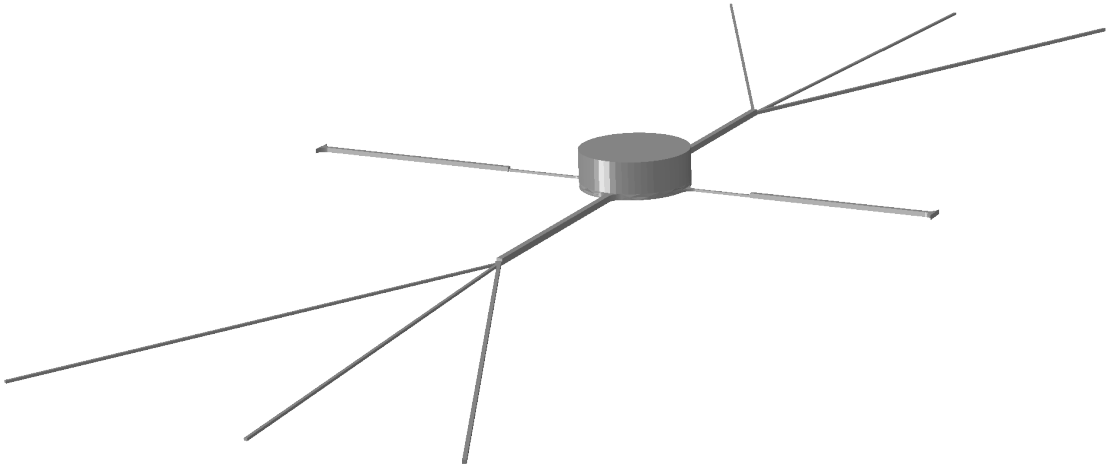
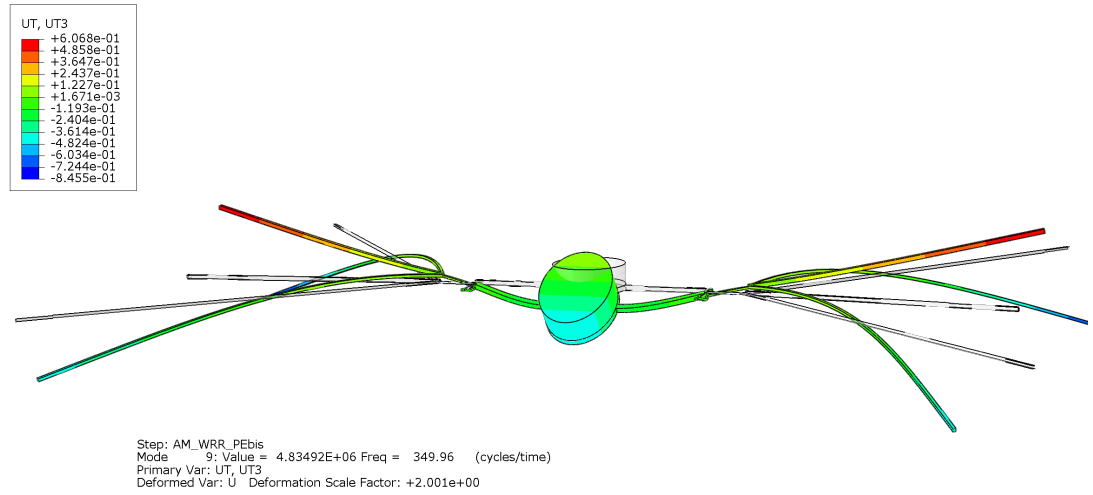


Figure E.2.2 – WRR VF – vue globale

E.3 Modélisation Abaqus

E.3.1 Modes secondaires du WRR

(a)



(b)

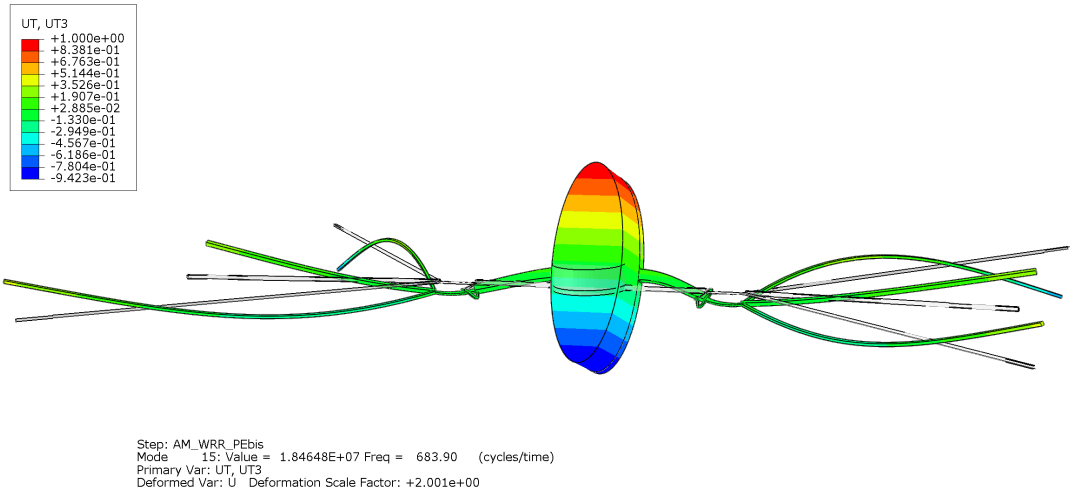


Figure E.3.1 – Déformées modales Abaqus WRR - Indéfinies

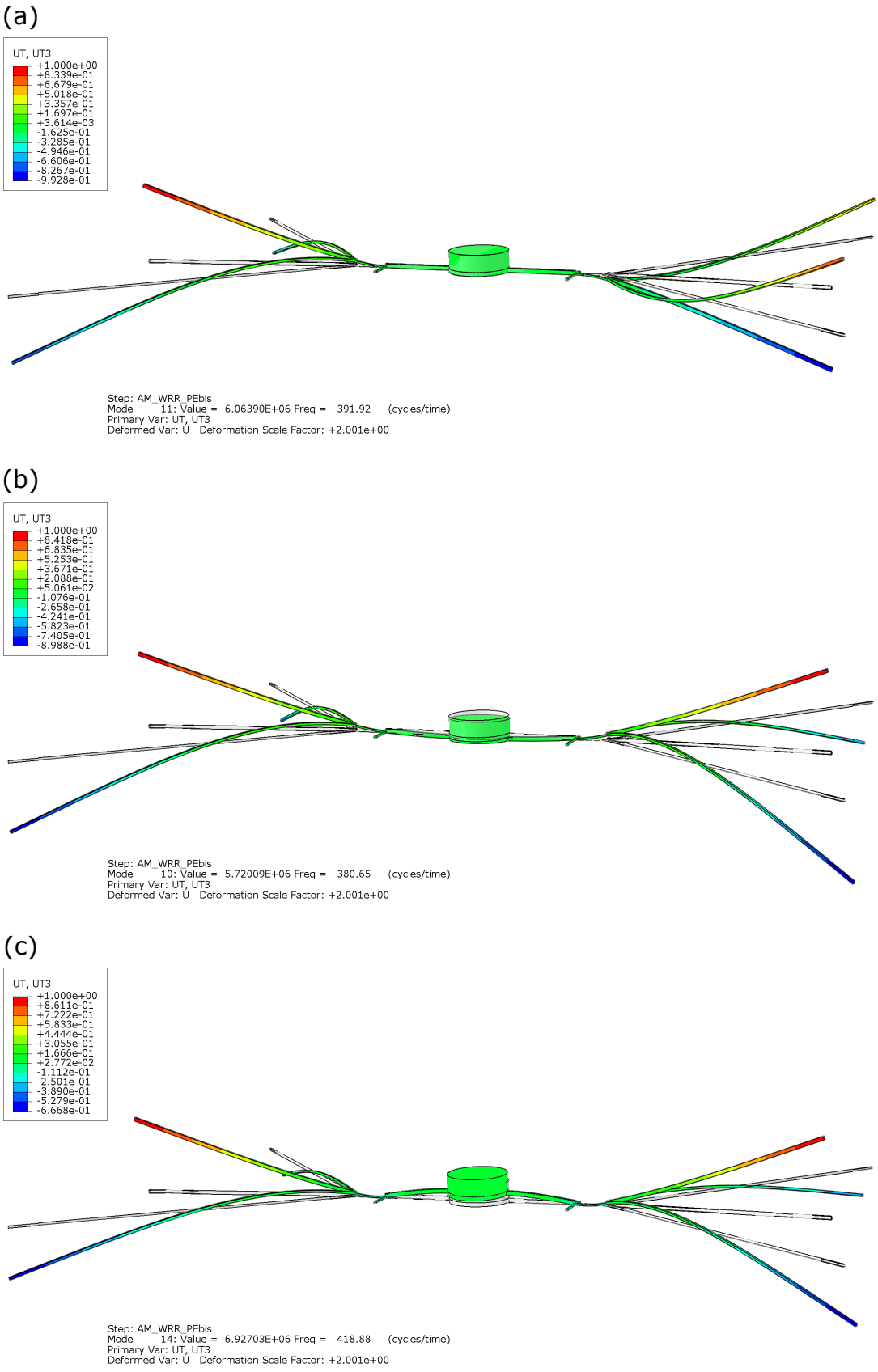


Figure E.3.2 – Déformées modales Abaqus WRR - Torsions de la nervure médiane

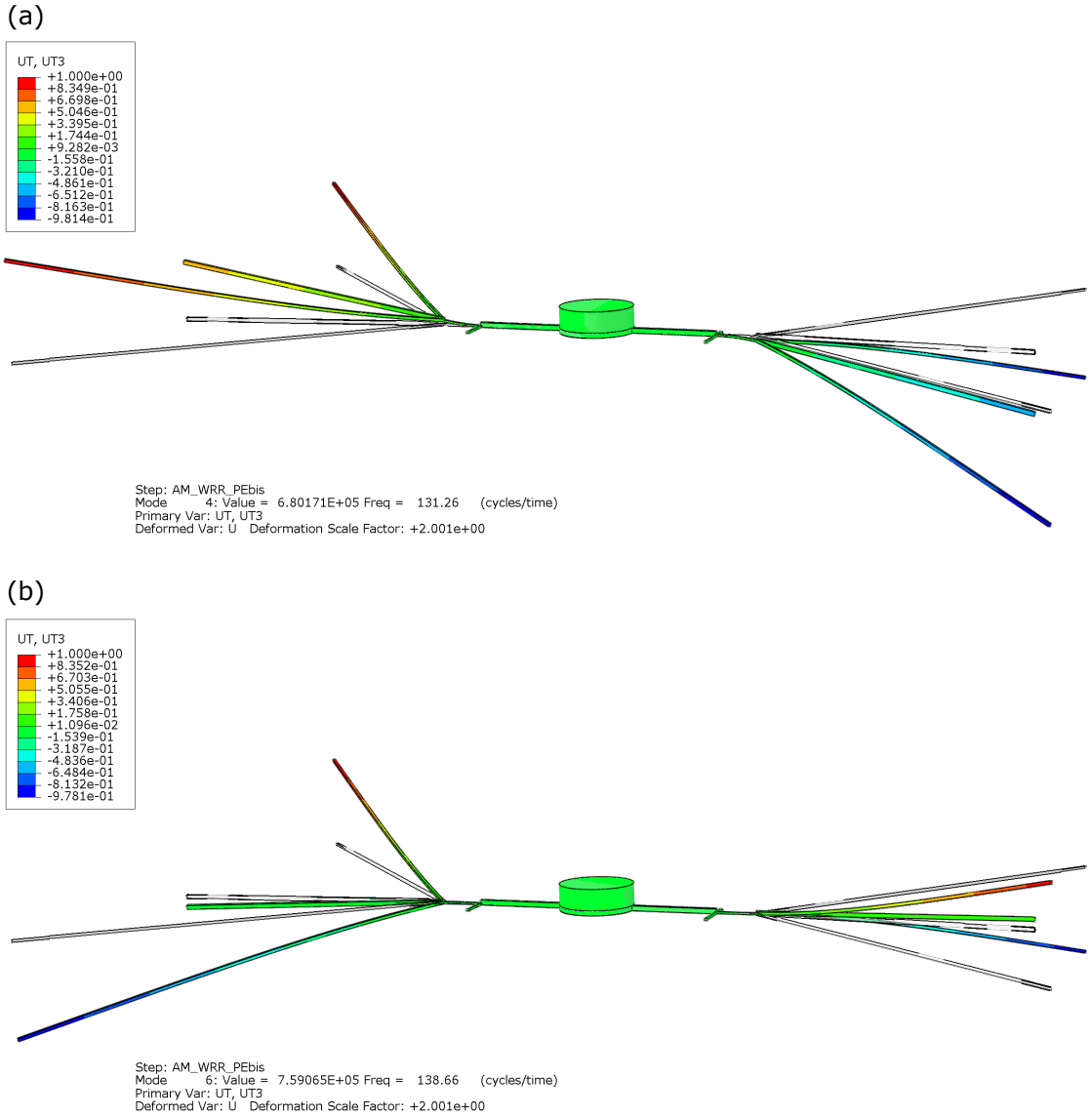


Figure E.3.3 – Déformées modales Abaqus WRR – Modes de flexion et torsion antisymétriques

E.3.2 Modes secondaires du GLR

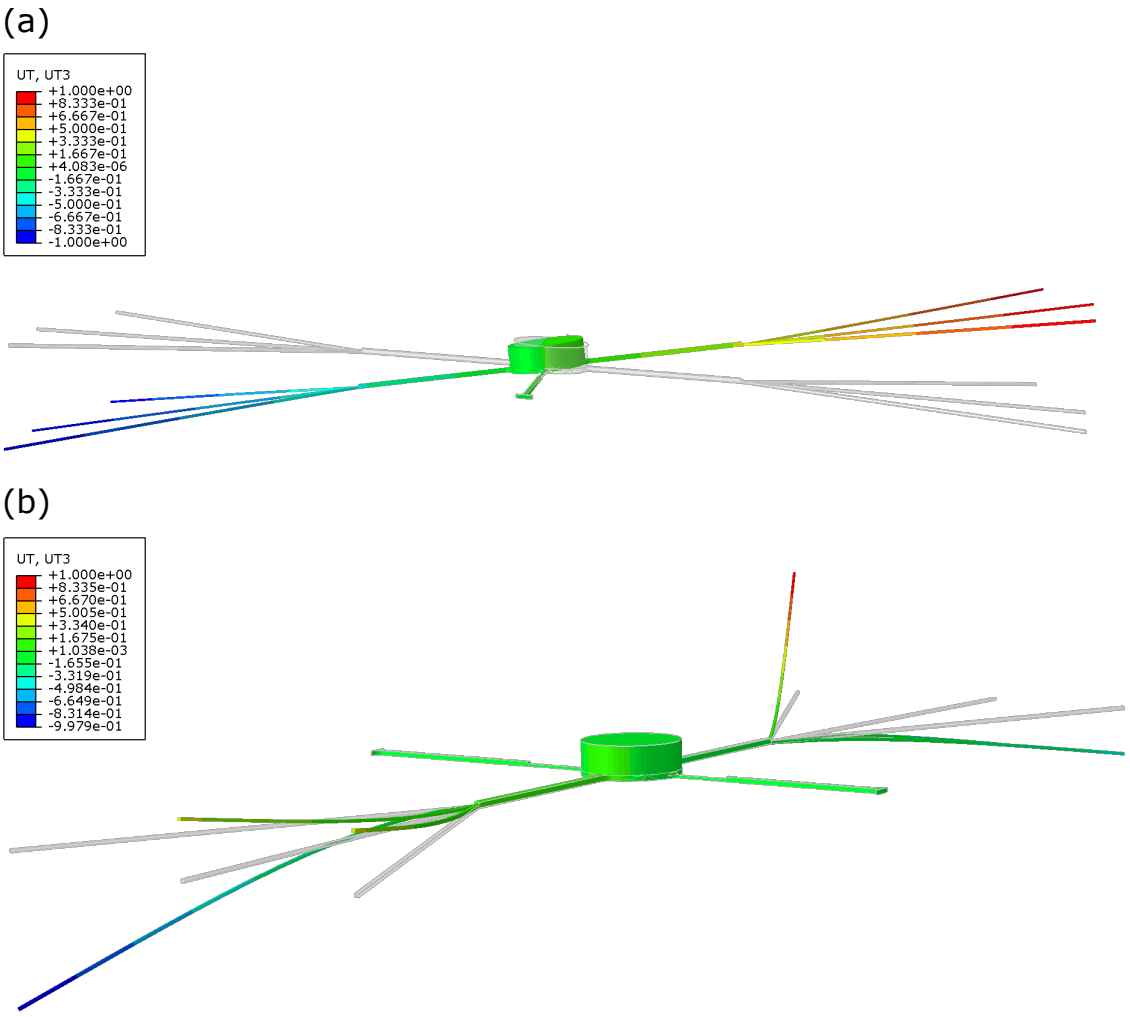


Figure E.3.4 – Déformées modales Abaqus GLR – Modes de flexion et torsion antisymétriques

E.3.3 Linéarité de l'actionneur

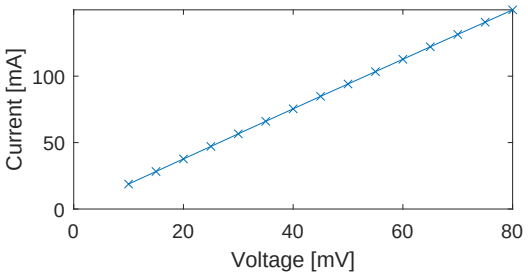


Figure E.3.5 – Vérification de la linéarité de l'actionneur pour la mesure de la relation force-déplacement du prototype GLR 6 SM

E.3.4 Déformées modales complémentaires avec modélisation du thorax

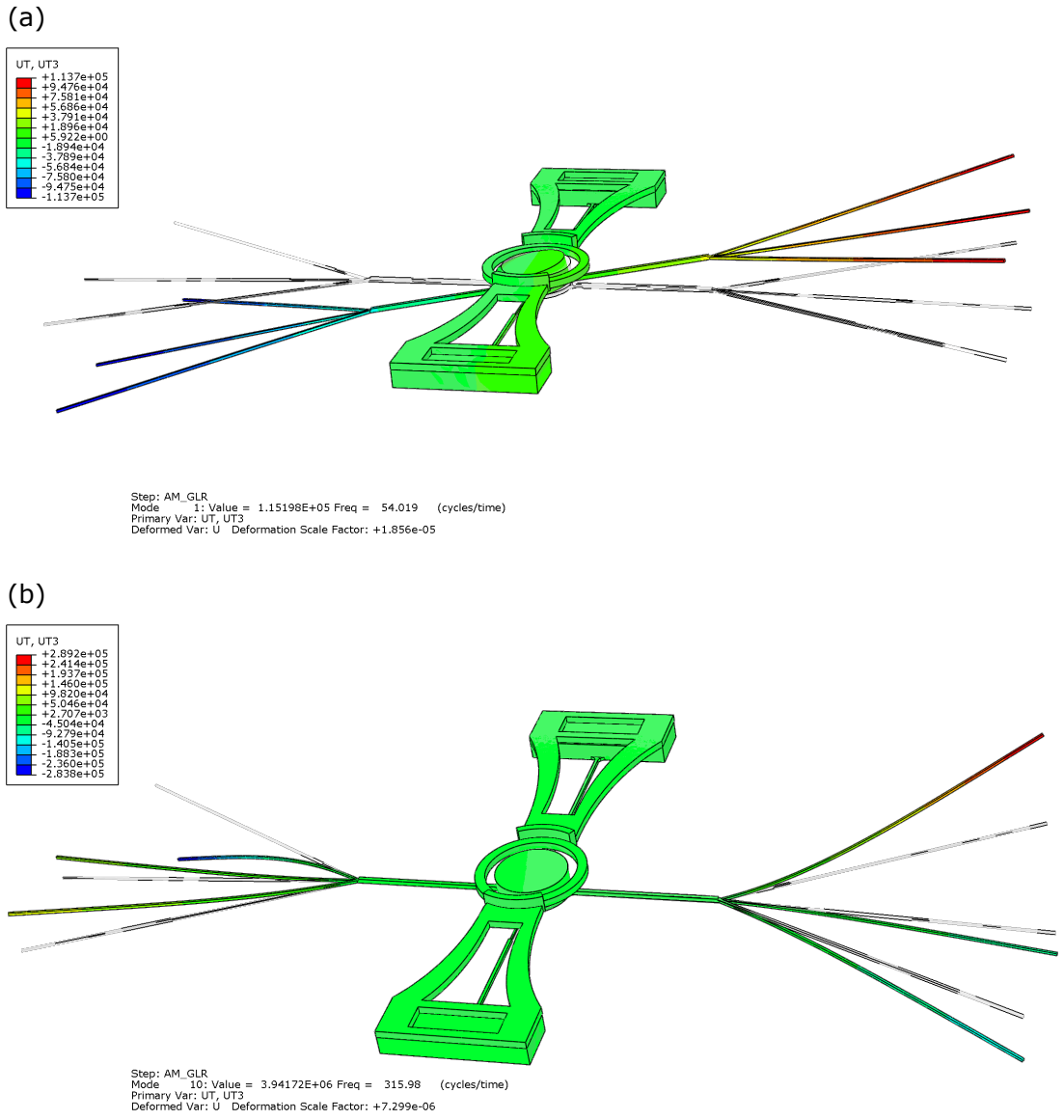


Figure E.3.6 – Déformée modale Abaqus GLR avec thorax – Modes de flexion et torsion antisymétriques

E.4 Validation de l'identification modale M+P

Pour toutes les courbes suivantes, les courbes LE correspondent au bord d'attaque (*Leading Edge*), les courbes TE au bord de fuite (Trailing Edge) et Magnet à l'aimant.

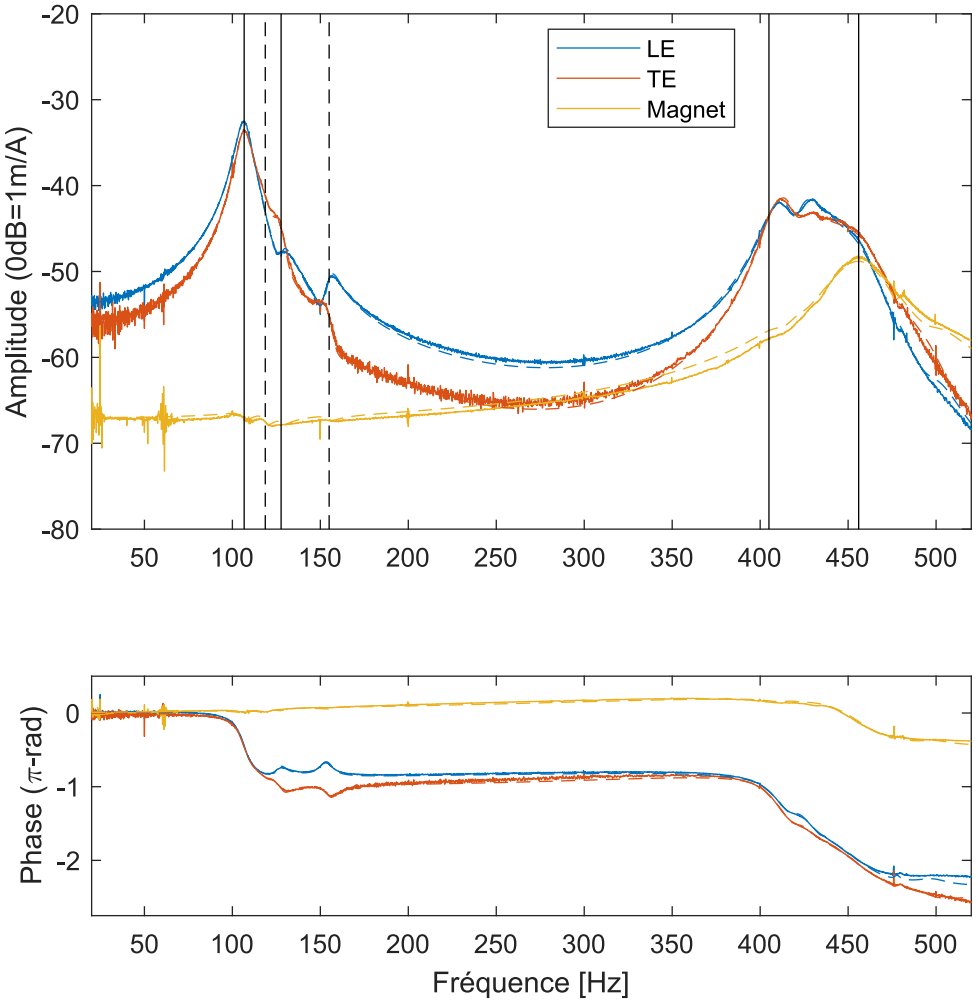


Figure E.4.1 – Superposition des FRF expérimentales et reconstruites en différents points du WRR 2

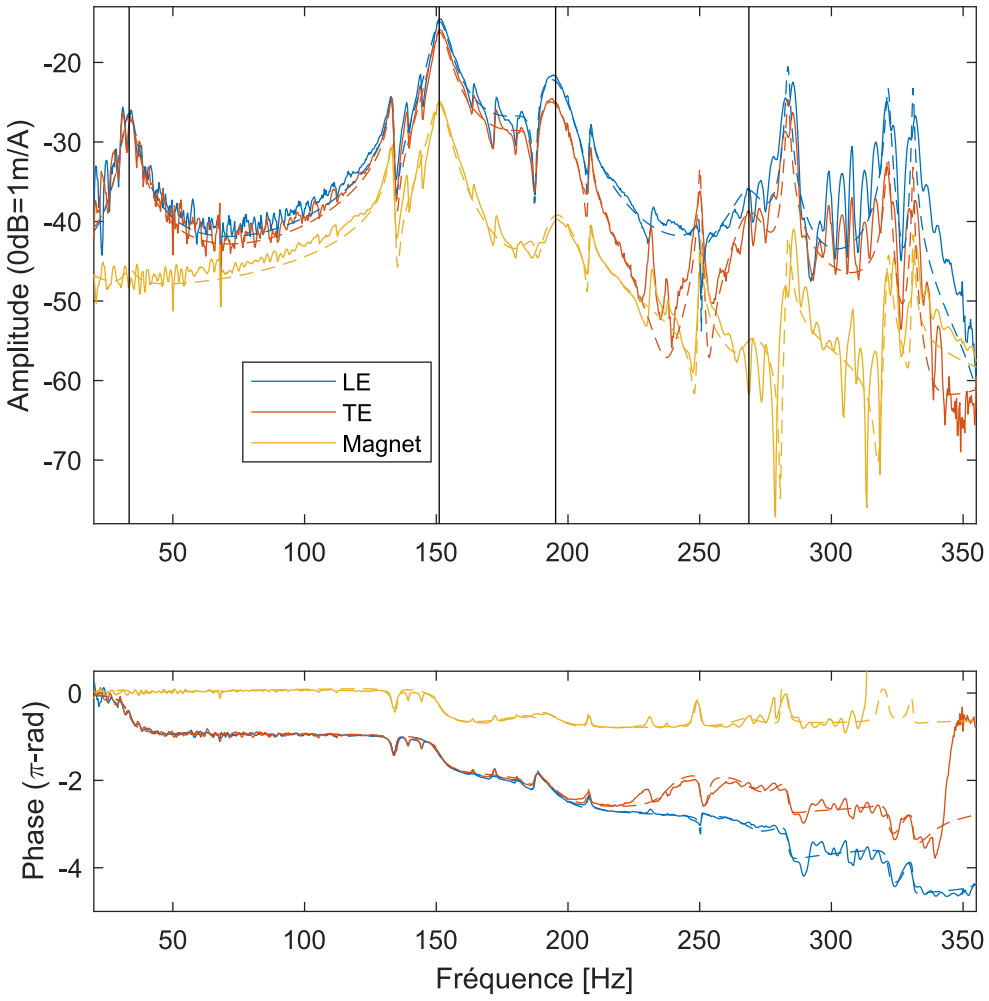


Figure E.4.2 – Superposition des FRF expérimentales et reconstruites en différents points du GLR 1

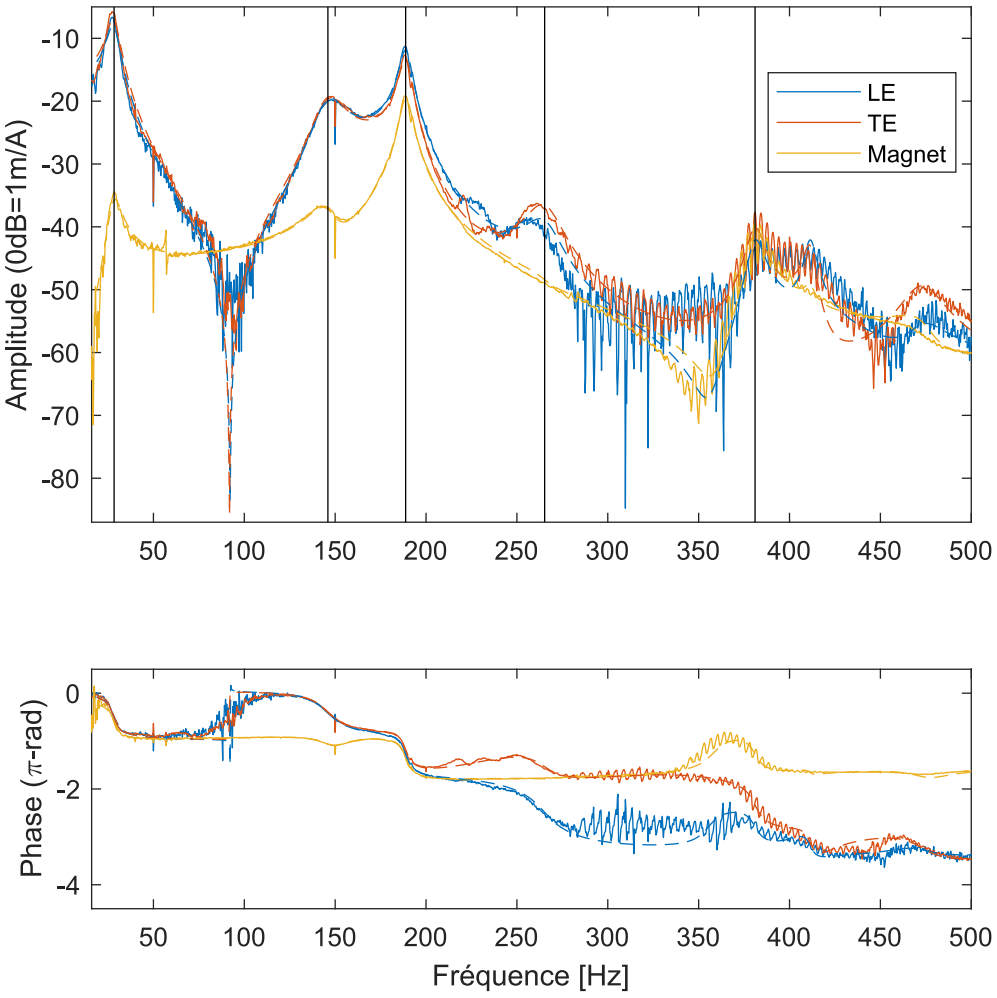


Figure E.4.3 – Superposition des FRF expérimentales et reconstruites en différents points du GLR 2

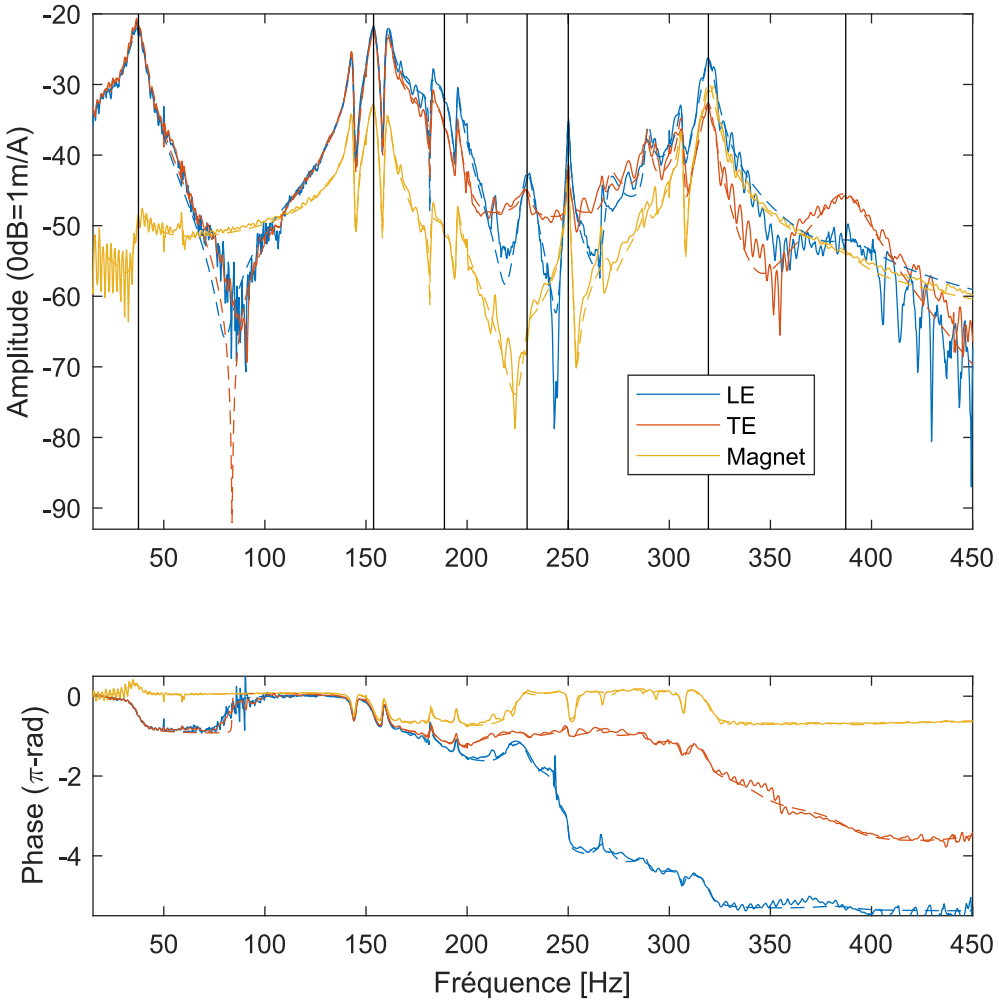


Figure E.4.4 – Superposition des FRF expérimentales et reconstruites en différents points du GLR 4

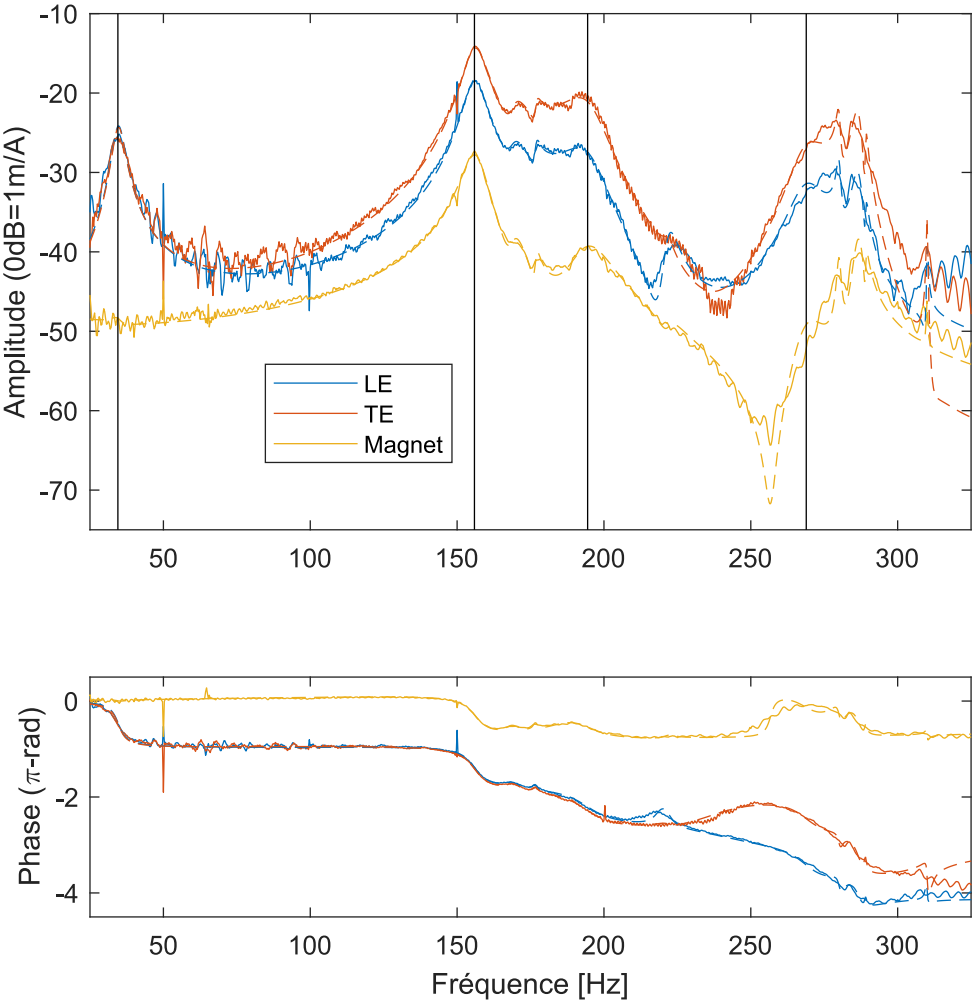


Figure E.4.5 – Superposition des FRF expérimentales et reconstruites en différents points du GLR 6 AM

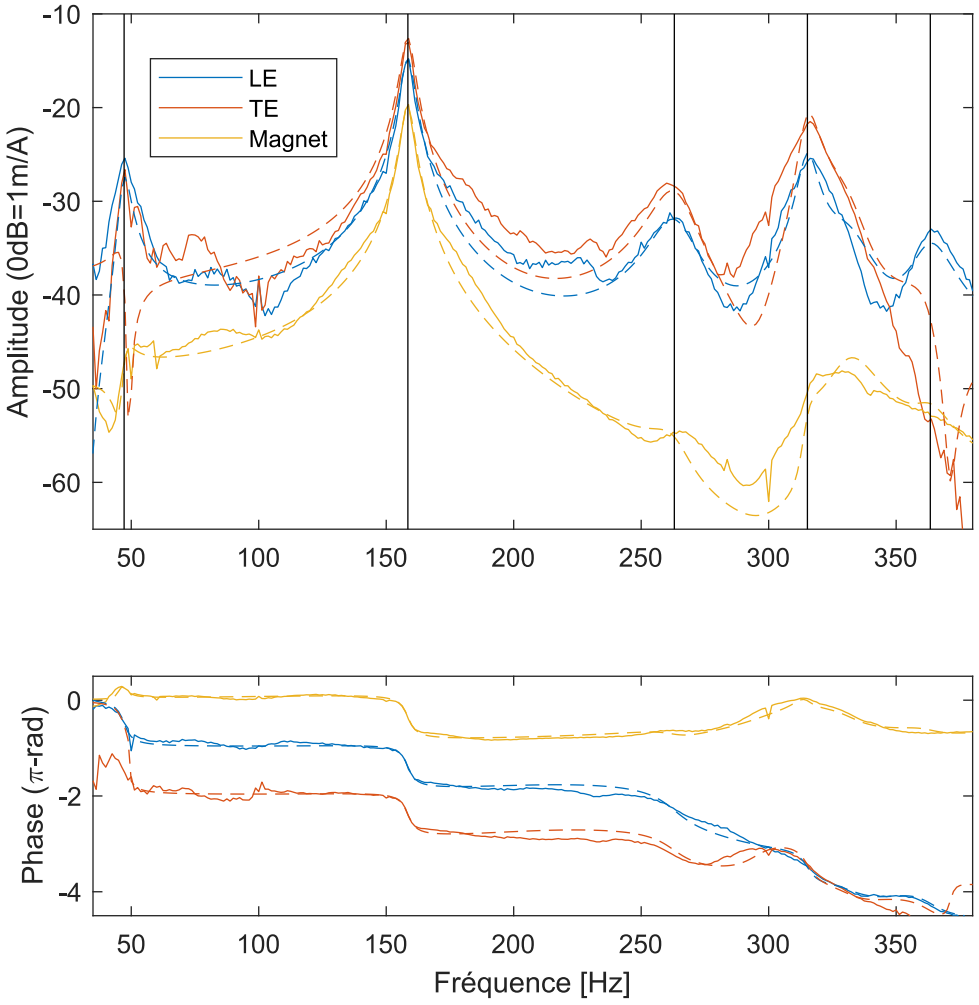


Figure E.4.6 – Superposition des FRF expérimentales et reconstruites en différents points du GLR 6 SM

Annexe F

Annexes du chapitre 6

F.1 Aile avec un bord d'attaque rigide et un assemblage de poutres fines

Suite aux calculs de la section6.2, on sait qu'on va poser une aile sous la forme d'un assemblage de 4 poutres fines sur lequel sera déposé la membrane. De plus, on cherche à avoir un maximum de surface en bout d'aile. On pose donc l'aile selon le dessin de définition suivant :

On calcule d'abord l'énergie cinétique de la barre 1 :

$$\mathcal{T}_{1/0} = \frac{1}{2} m_{p1} \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2. \tag{F.1}$$

On calcule ensuite l'énergie cinétique du solide 2, dont on note le centre d'inertie $G_2(x_{G_2}, y_{G_2})$.

$$\mathcal{T}_{2/0} = \frac{1}{2} m_{p2} \vec{V}^2_{G_2/0} + \frac{1}{2} (\mathcal{I}_{G_2} \vec{\omega}_{2/0}).\vec{\omega}_{2/0}. \tag{F.2}$$

Pour la vitesse, on a :

$$\vec{V}_{G_2/0} = y_{G_2} \dot{\theta} \vec{z}_1 - x_{G_2} \vec{x}_2 \wedge (\dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{y}_1), \tag{F.3}$$

d'où

$$\vec{V}_{G_2/0} = \begin{pmatrix} -x_{G_2} \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ x_{G_2} \sin(\alpha) \dot{\theta} \\ y_{G_2} \dot{\theta} - x_{G_2} \cos(\alpha) \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_1}, \tag{F.4}$$

et donc, on a :

$$\frac{1}{2} m_{p2} \vec{V}^2_{G_2/0} = \frac{1}{2} m_{p2} \left(x^2_{G_2} \dot{\alpha}^2 + (y^2_{G_2} + \sin^2(\alpha) x^2_{G_2}) \dot{\theta}^2 - 2 \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos(\alpha) x_{G_2} y_{G_2} \right) \tag{F.5}$$

Pour la matrice d'inertie, comme le plan (Ox_2y_2) est plan de symétrie de l'aile, on a :

$$\mathcal{I}_{G,2} = \begin{pmatrix} \text{A} & \text{-F} & 0 \\ \text{-F} & \text{B} & 0 \\ 0 & 0 & \text{C} \end{pmatrix}_{\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2}. \tag{F.6}$$

On verra ensuite quelles sont les valeurs de A, B, C et F.

Dans le repère R_2, on a :

$$\vec{\omega}_{2/0} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta}\sin(\alpha) \end{pmatrix} \tag{F.7}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(\mathcal{I}_{G_2}\vec{\omega}_{2/0}).\vec{\omega}_{2/0} = \frac{1}{2}((A\cos(\alpha)^2 + C\sin(\alpha)^2)\dot{\theta}^2 + B\dot{\alpha}^2 - 2F\dot{\alpha}\dot{\theta}\cos(\alpha)). \tag{F.8}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2/0} =& \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(m_{p2}(y_{G_2}^2 + \sin^2(\alpha)x_{G_2}^2) + A\cos(\alpha)^2 + C\sin(\alpha)^2) \\ &+ \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2(m_{p2}x_{G_2}^2 + B) \\ &- \frac{1}{2}\dot{\alpha}\dot{\theta}(2\cos(\alpha)(m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} + F)) \end{aligned} \tag{F.9}$$

Une expression de la matrice de masse est alors :

$$M = \begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}(y_{G_2}^2 + \sin^2(\alpha)x_{G_2}^2) + A\cos(\alpha)^2 + C\sin(\alpha)^2 & -\cos(\alpha)(m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} + F) \\ -\cos(\alpha)(m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} + F) & m_{p2}x_{G_2}^2 + B \end{pmatrix} \tag{F.10}$$

et celle de raideur :

$$K = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix} \tag{F.11}$$

Avec la linéarisation des équations du mouvement autour d'une position d'équilibre $(M(0))$, on a :

$$M = \begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}y_{G_2}^2 + A & -(m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} + F) \\ -(m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} + F) & m_{p2}x_{G_2}^2 + B \end{pmatrix} \tag{F.12}$$

On peut déterminer les grandeurs m_{p2}, A, B et F d'après le dessin fig. F.1.1. Tout d'abord :

$$m_{p2} = \rho h_2 b_2(3H + L). \tag{F.13}$$

On peut ensuite calculer le centre de gravité de l'aile en faisant le barycentre des centres de gravité respectifs des poutres :

$$G_L = (0, L/2), G_{f,1} = (H/4, 0), G_{f,2} = (H/2, L/2), G_{f,3} = (3H/4, L) \tag{F.14}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{m_{p2}}(m_L\overrightarrow{\mathrm{OG}}_L + m_{f,1}\overrightarrow{\mathrm{OG}}_{f,1} + m_{f,2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}_{f,2} + m_{f,3}\overrightarrow{\mathrm{OG}}_{f,3}). \tag{F.15}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} x_{G,2} &= \frac{7H^2}{4(L+3H)} \\ y_{G,2} &= \frac{L^2 + 2HL}{2(L+3H)}. \end{aligned} \tag{F.16}$$

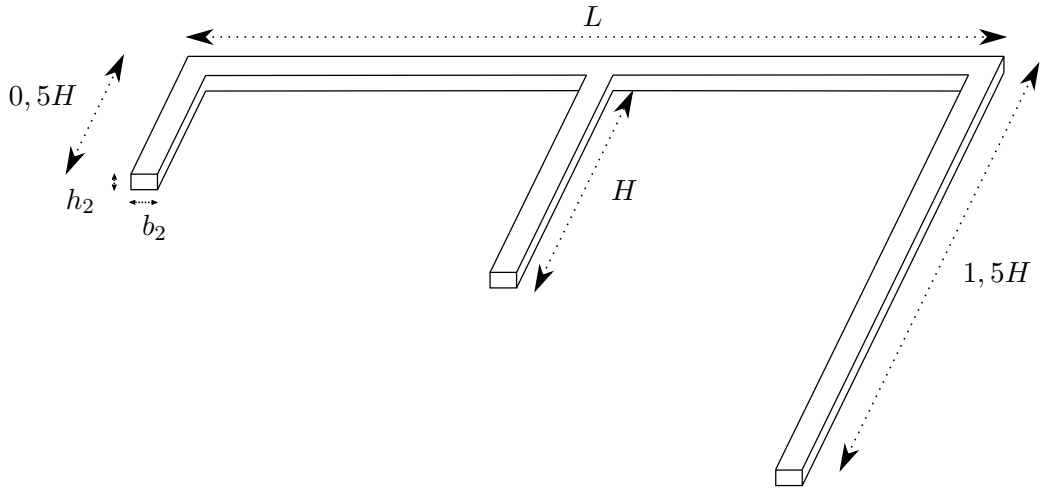


Figure F.1.1 – Schéma de définition géométrique de l'aile de nanodrone de la nouvelle génération

On peut calculer très facilement les matrices d'inertie des poutres en leurs centres de gravités :

$$\mathcal{I}_{G_L,L} = \rho \begin{pmatrix} bhL\frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bhL\frac{L^2}{12} \end{pmatrix}_2, \mathcal{I}_{G_{f,1},f,1} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & bh\frac{H^3}{12}(\frac{1}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & bh\frac{H^3}{12}(\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix}_2,$$
$$\mathcal{I}_{G,f,3,f,3} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & bh\frac{H^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & bh\frac{H^3}{12} \end{pmatrix}_2, \mathcal{I}_{G_{f,3},f,3} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & bh\frac{H^3}{12}(\frac{3}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & bh\frac{H^3}{12}(\frac{3}{2})^2 \end{pmatrix}_2. \tag{F.17}$$

Enfin on détermine A, B et F à l'aide du théorème de Huyghens.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho bhL^2}{L+3H}\frac{L^2+9HL+15H^2}{12}, \quad B = \frac{\rho bhH^3}{L+3H}\frac{23H+24L}{16}, \\ F &= -\frac{\rho bhLH^2}{L+3H}\frac{4L+5H}{8} \end{aligned} \tag{F.18}$$

On a alors d'après l'équation (F.12) :

$$M = \begin{pmatrix} m_{p1}\frac{L^2}{3} + m_{p2}y_{G_2}^2 + \frac{\rho bhL^2}{L+3H}\frac{L^2+9HL+15H^2}{12} & -m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} - \frac{\rho bhLH^2}{L+3H}\frac{4L+5H}{8} \\ -m_{p2}x_{G_2}y_{G_2} - \frac{\rho bhLH^2}{L+3H}\frac{4L+5H}{8} & m_{p2}x_{G_2}^2 + \frac{\rho bhH^3}{L+3H}\frac{23H+24L}{16} \end{pmatrix} \tag{F.19}$$

En exprimant cette matrice en fonction des grandeurs géométriques de base seulement, on obtient :

$$M = \rho \begin{pmatrix} L^2\,(\frac{m_{p1}}{3} + \frac{bhL}{3} + \frac{7bhH}{4}) & -bhLH^2\frac{11}{8} \\ -bhLH^2\frac{11}{8} & bhH\frac{3H^2}{2} \end{pmatrix} \tag{F.20}$$

On pose $X_r = -\sqrt{3}H\alpha$ et $X_1 = \frac{11L}{4\sqrt{3}}\theta$, ce qui amène à :

$$M = \rho \begin{pmatrix} \frac{16}{121}(m_{p1}+bhL) + (1+\frac{47}{121})bhH/2 & bhH/2 \\ bhH/2 & bhH/2 \end{pmatrix} \tag{F.21}$$

	Aile L	Aile BI	Aile E
$x_1\,;\,x_r$	$\theta\frac{3L}{2}\,;\,-\alpha H$	$\theta H\sin(\beta)\,;\,-\alpha H\cos(\beta)$	$\theta\frac{11}{4\sqrt{3}}L\,;\,-\alpha\sqrt{3}H$
$\frac{m_{\text{eq},1}}{\rho}\,;\,\frac{m_{\text{eq},2}}{\rho}$	$m_{p,1}\frac{4}{27}+m_{p,2}\frac{1}{3}\,;\,\frac{b_2h_2H}{4}$	$\frac{b_1h_1L^3}{3H^2\sin^2(\beta)}\,;\,\frac{b_2h_2H}{3}$	$\frac{16}{121}(b_1h_1+b_2h_2)L\,;\,\frac{b_2h_2H}{2}$
$k_1\,;\,k_2$	$\frac{4\Gamma_1}{9L^2}\,;\,\frac{\Gamma_2}{H^2}$	$\frac{\Gamma_1(\beta)}{H^2\sin^2}\,;\,\frac{\Gamma_2}{H^2}$	$\frac{\Gamma_1 4\sqrt{3}}{11L}\,;\,\frac{\Gamma_2}{\sqrt{3}H}$
μ	$\frac{b_2h_2}{b_1h_1}\frac{H}{L}$	$\frac{b_2h_2}{b_hh_1}(\frac{H}{L})^3\sin^2(\beta)$	$\frac{121}{32}\frac{b_2h_2}{b_1h_1+b_2h_2}\frac{H}{L}$
ω_e	$\sqrt{\frac{8\Gamma_2}{b_1h_1H^2}}$	$\sqrt{\frac{3\Gamma_2}{\rho b_2h_2H^3}}$	$\sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\sqrt{3}b_2h_2H^2}}$
$\frac{\theta}{-\alpha}$	$\frac{x_1}{x_r}\frac{H}{2L}$	$\frac{x_1}{x_r}\tan(\beta)$	$\frac{x_1}{x_r}\frac{11}{4}\frac{H}{L}$

Tableau F.1 – Dimensionnement des 3 ailes

F.2 Annexes de Transition

F.2.1 Fréquence d'une poutre articulée-libre

Pour une liaison souple de même section que la poutre, on obtient :

$$\omega_l = \frac{1}{L\sqrt{lL}}\frac{h\sqrt{E}}{2\sqrt{\rho}}. \tag{F.22}$$

à comparer à l'expression de la première fréquence propre d'une poutre articulée-libre de longueur $L+l$ et de même section :

$$\omega_1 = \frac{\beta_{\text{art}}^2}{\sqrt{3}(L+l)^2}\frac{h\sqrt{E}}{2\sqrt{\rho}}, \tag{F.23}$$

où β_{art}=3,927 [Géradin et Rixen 1994]. Ces deux expressions relativement proches donnent des valeurs comparables pour une longueur $l \approx L/10$. Afin de mieux préciser les conditions d'application de cette formule, on propose de vérifier :

$$I_{li} \ll I_i \quad \text{soit} \quad b_{li}h_{li}^3 \ll b_ih_i^3. \tag{F.24}$$

On s'assure ainsi que la déformation se concentre sur la liaison souple, et donc on vérifie l'hypothèse de solide rigide.

F.2.2 Calcul systématique de l'ensemble 2

Afin de simplifier le problème, et pour garder une géométrie d'aile avec une surface minimale, on pose :

$$H = L. \tag{F.25}$$

La démarche proposée est de trouver un premier ensemble de dimensions pour la liaison souple et la poutre modélisant le bord d'attaque (ensemble « 1 »), puis, avec ces objectifs, trouver les dimensions correspondantes pour l'autre liaison souple et l'autre nervure

(ensemble « 2 »). Pour trouver les dimensions 2, on peut par exemple fixer une proportionnalité entre les dimensions 1 et 2, ce qui amène $b_2 \propto \sqrt{\mu} b_1$, $h_2 \propto \sqrt{\mu} h_1$. Alors, d'après les formulations des objectifs 1 et 2 et l'équation (F.25), $\frac{I_2 l_1}{I_1 l_2} = \mu / \sin^2(\beta)$, soit :

$$\frac{b_{l2}}{b_{l1}} \left(\frac{h_{l2}}{h_{l1}}\right)^3 \frac{1/l_2}{1/l_1} = \mu / \sin^2(\beta). \tag{F.26}$$

Si on pose $b_{l2} \propto k b_{l1}$, $h_{l2} \propto k h_{l1}$ et $l_2 \propto k l_1$, avec $k^3 = \mu$, alors on peut écrire :

$$\frac{h_{l2}}{h_2} \propto \mu^{-\frac{1}{6}} \frac{h_{l1}}{h_1}, \tag{F.27}$$

et on observe bien une augmentation du ratio $\frac{h_{l2}}{h_2}$ pour des valeurs décroissantes de μ

Si on voit qu'il sera difficile de déterminer une structure avec un μ variable à fréquence constante, on peut néanmoins utiliser ces critères afin d'obtenir une géométrie intéressante d'aile bio-inspirée. On peut voir dans les lignes qui suivent que cela nécessite une certaine réflexion afin d'évaluer certains compromis.

F.3 Annexes de l'optimisation

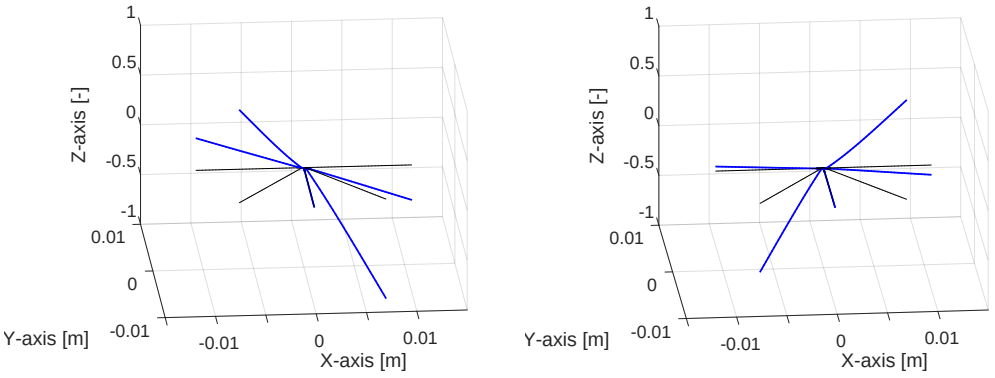


Figure F.3.1 – Modes annexes de BI1 calculés par Matlab (87,77 Hz et 94,30 Hz)

Arts et Métiers Sciences et Technologies

Mathieu COLIN

Conception et optimisation d'un nanodrone à ailes vibrantes

HESAM UNIVERSITÉ

Résumé : Cette thèse vise à réaliser un nanodrone à ailes vibrantes d'une masse de 20 mg. Une telle échelle engendre de nombreux défis. Les travaux antérieurs ont permis l'obtention d'un prototype générant une portance compensant son propre poids mais insuffisante pour le décollage. Il faut donc (i) comprendre comment générer plus de portance et (ii) d'optimiser la structure en ce sens. Le premier axe de travail est l'étude de l'interaction de l'air avec la structure. Deux modèles de cette interaction sont proposés : le premier sous la forme d'un amortissement modal non linéaire et le second avec une force aérodynamique générée par une aile flexible de nanodrone. Ces modèles permettent de déterminer des stratégies de création de portance par des structures à ailes vibrantes et ainsi de valider le principe d'actionnement du nanodrone, appelé combinaison modale. Ce principe consiste à exciter une structure ayant un mode de flexion et un mode de torsion des ailes à une fréquence où ces modes sont en quadrature de phase. Si les modes sont assez proches alors le mouvement est résonant à la fréquence d'excitation. La conception de la structure est donc cruciale pour la combinaison modale et représente le second axe de travail. Un code de calcul de structure est développé et permet de modéliser les drones comme des treillis de poutres avec une cinématique d'Euler-Bernoulli. Ce code est ensuite intégré à un algorithme d'optimisation paramétrique dont les critères reposent principalement sur les réponses en fréquence simulées. Ces outils sont mis à profit pour une conception efficace de nouvelles architectures de drones plus simples et prometteuses.

Mots clés : Nanodrone ; Amortissement non-linéaire ; Aérodynamique ; Analyse modale ; Optimisation paramétrique ; Modèles analytiques

Abstract: This research aims at designing a 20-mg vibrating-wing nanodrone. A number of challenges arise at this scale. Previous work led to a prototype that generated a lift force equal to its weight but insufficient for take-off. The goal is therefore (i) to understand how to generate higher lift, and (ii) to optimise the structure accordingly. The first work lead is the interaction of air with the structure, studied with two distinct models: first as a nonlinear modal damping and second as an aerodynamic force generated by a flexible nanodrone wing. It allows determining lift generation strategies and validates the actuation principle of the drone, called modal combination. This principle consists in exciting a structure with a bending mode and a twisting mode of the wings at a phase shift quadrature frequency. If the modes are close enough, the motion is resonant at the excitation frequency. Since this principle relies heavily on the design of the structure, the design itself is thus the second work lead. A structural code modelling the drone as a beam truss with Euler-Bernoulli kinematics is developed. The code is then integrated into a parametric optimisation algorithm which cost-function is based mostly on the simulated frequency responses. These tools enable the efficient design of new prototype architectures that are promising.

Keywords: NAV ; Non-linear damping ; Aerodynamics ; MEMS ; Modal analysis ; Parametric optimisation ; Analytical models