



**HAL**  
open science

# Homogénéisation multi-échelle pour un objectif d'amortissement modal dans la conception d'aubes composite tissé 3D

Florian Conejos

► **To cite this version:**

Florian Conejos. Homogénéisation multi-échelle pour un objectif d'amortissement modal dans la conception d'aubes composite tissé 3D. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. HESAM Université, 2021. Français. NNT : 2021HESAE022 . tel-03677256

**HAL Id: tel-03677256**

**<https://pastel.hal.science/tel-03677256>**

Submitted on 24 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET MÉTIERS DE L'INGÉNIEUR**  
**Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux - Campus  
de Paris**

# **THÈSE**

*présentée par :* **Florian CONEJOS**

*soutenue le :* **7 juin 2021**

*pour obtenir le grade de :* **Docteur d'HESAM Université**

*préparée à :* **École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

*Spécialité :* **Mécanique et Matériaux**

**Homogénéisation multi-échelle pour un objectif  
d'amortissement modal dans la conception d'aubes composite  
tissé 3D**

**THÈSE** dirigée par : **M. BALMES Etienne**

et co-encadrée par :  
**M. TRANQUART Bastien**  
**M. MONTEIRO Eric**

**Jury**

<b>M. Jean-Francois DEÛ</b>	Professeur, LMSSC, CNAM	Président
<b>M. Charles PÉZERAT</b>	Professeur, LAUM, Le Mans Université	Rapporteur
<b>M. Julien YVONNET</b>	Professeur, MSME, UPEC	Rapporteur
<b>M. Zoheir ABOURA</b>	Professeur, Roberval, UTC	Examinateur
<b>M. Nicolas CARRERE</b>	Professeur, LBMS, ENSTA Bretagne	Examinateur
<b>M. Etienne BALMES</b>	Professeur, PIMM, ENSAM	Examinateur
<b>M. Eric MONTEIRO</b>	Maitre de Conférences, PIMM, ENSAM	Examinateur
<b>M. Bastien TRANQUART</b>	Docteur, Safran Composites	Examinateur



“Hard work beats talent when talent fails to work hard”

Tim Notke/Kevin Durant

“I never lose. I either win or learn.”

“I am the master of my fate, I am the captain of my soul.”

Nelson Mandela

À ma famille



# Remerciements

Confinement, COVID, masques, couvre-feu, télétravail, qui aurait cru que ces trois années de thèse se terminent dans un contexte aussi troublé. Les capacités d'adaptation de tous ont été mises à rude épreuve et les moments de convivialité mis entre parenthèse mais le bout du tunnel se rapproche.

Tout d'abord, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Étienne Balmes, pour avoir été toujours disponible, à l'écoute et pédagogue malgré la charge phénoménale de travail qui s'accumule de jour en jour. Je suis impressionné par la personne que tu es et que j'ai appris à découvrir durant ces trois années. Tout ce que tu m'as apporté scientifiquement et professionnellement est immense.

Je tiens à remercier Eric Monteiro, ta disponibilité, ta capacité à me faire prendre du recul, tes analyses nous ont permis d'avoir des échanges qui ont toujours étaient constructifs.

Je remercie également, Guillaume Martin, pour son aide et ses conseils sur la partie expérimentale, tu as toujours été disponible pour me fournir des informations complémentaires de qualité.

Je remercie également mon jury qui a accepté d'évaluer mon travail malgré ce contexte difficile. Une mention spéciale à Nicolas Carrère qui avant de partir l'ENSTA Bretagne, m'a recruté en tant que stagiaire à Safran Composites et m'a proposé cette thèse.

Je me tourne maintenant vers Safran Composites. Un grand merci à Bastien Tranquart qui a toujours été présent et m'a soutenu. Tes remarques ont toujours été pertinentes et essentielles à l'aboutissement de cette thèse. Cédric Thomas, mon ancien chef de pôle, sport et travail ne sont pas incompatibles, tu me l'as montré je l'ai appliqué, merci. Je remercie également William Albouy, mon ancien tuteur de stage, qui m'a donné l'envie de réaliser un doctorat et poursuivre dans la recherche. Enfin, ces quatre années au sein de cette entreprise a permis de tisser des liens, plus que professionnels, toujours présent pour un bière, une sortie VTT, un barbecue, un run, un foot, merci à Quentin, Nico T., PEM, Camille, Jérôme, Remi, Sylvain, Othmane, Nico L., Pierre, Marine ... et bien entendu tous ceux que j'oublie.

L'aventure au Pimm, m'a fait partager mon bureau avec Rafa. Merci à toi, toujours à m'attendre le midi que je rentre de la salle de sport pour que je ne mange pas seul, tu as réussi à me supporter durant ces trois années. Merci également aux doctorants de la Hall 3 du PIMM, Nassim, Hadrien, Quentin, Matthias et aux nouveaux Hadrien, William, Erika ça a toujours été

---

un plaisir de vous voir et discuter avec vous.

Je n'oublie pas mes amis de l'UTC, 5 années d'école d'ingénieur partagées avec vous, que de moments forts. Des amitiés sincères, des franches rigolades, des soutiens personnels, je vous dois beaucoup. À Patty, Alix, Ana, Léana, Martin, Etienne, Camil, Flo. Antoine, mon ami d'enfance, que de soirées mémorables ensemble, c'est toujours un plaisir de se revoir et partager de bons moments. Une petite pensée aussi à Alexandre, Benoit et aux vieux de l'UTC.

Je remercie également mes grands parents, mon oncle, la famille de cœur de Chartrettes, les amis du club de Judo/Jiu-jitsu/Boxe de Chartrettes, ceux de la salle de sport. Vous êtes essentiels à mon équilibre de vie.

Enfin, je termine par les plus important, mes parents et mon frère, Vincent. Merci d'avoir toujours été présent pour me soutenir, me guider, m'épauler et bien plus encore.

# Table des matières

Liste des tableaux	9
Liste des figures	10
Liste des symboles	15
Introduction	19
<b>1 Les composites tissés : fabrication et représentation</b>	<b>23</b>
1.1 Généralités sur les composites et textiles . . . . .	24
1.1.1 Les tissus tridimensionnels : définition et notion . . . . .	24
1.1.2 Fabrication d'un composite tissé 3D et matériau d'étude . . . . .	26
1.1.3 Définition des échelles . . . . .	27
1.2 Source d'amortissement dans les composites tissés . . . . .	28
1.2.1 À l'échelle microscopique et mésoscopique . . . . .	28
1.2.2 Technologies extrinsèques à l'échelle macroscopique . . . . .	30
<b>2 Viscoélasticité linéaire et mécanique des milieux continus</b>	<b>35</b>
2.1 Viscoélasticité linéaire et caractérisation . . . . .	36
2.1.1 Essai sinusoïdal : module complexe sous sollicitation harmonique . . . . .	37
2.1.2 Essais temporels : fluage et relaxation . . . . .	38
2.1.3 Passage temporel/fréquentiel : principe de correspondance . . . . .	38
2.1.4 Modélisations rhéologiques du comportement viscoélastique . . . . .	39
2.2 Dépendance de la résine à la fréquence et à la température . . . . .	41
2.2.1 Traitement des données brutes . . . . .	42
2.2.2 Équivalence temps/température . . . . .	44
2.3 Milieu tridimensionnel . . . . .	46
2.3.1 Les lois de comportement en élastique . . . . .	46
2.3.2 Viscoélasticité et paramétrisation des lois de comportement . . . . .	47
2.3.3 Définition des travaux dissipé et élastique au point matériel . . . . .	48
2.3.4 Fractions d'énergie : décomposition en valeurs singulières . . . . .	49
<b>3 Homogénéisation viscoélastique</b>	<b>53</b>
3.1 Homogénéisation numérique en élasticité linéaire . . . . .	54
3.1.1 Principe et méthodologie de l'homogénéisation . . . . .	54
3.1.2 De la rigidité matériau à la matrice de raideur éléments finis . . . . .	57
3.1.3 Kinematic Uniform Boundary Conditions (KUBC) . . . . .	58
3.1.4 Static Uniform Boundary Conditions (SUBC) . . . . .	60
3.1.5 Mixed Uniform Boundary Conditions (MUBC) . . . . .	61
3.1.6 Periodic Boundary Conditions (PBC) . . . . .	62
3.1.7 Vérification en élastique : cas d'une inclusion cylindrique . . . . .	63
3.2 Extension à la viscoélasticité . . . . .	64

3.2.1	Traitement de la viscoélasticité et cas test . . . . .	64
3.2.2	Vérification pour une inclusion cylindrique . . . . .	66
3.2.3	Homogénéisation des torons . . . . .	67
3.3	Homogénéisation des textiles . . . . .	70
3.3.1	Maillage des mésostructures : les outils numériques à disposition . . . . .	70
3.3.2	Application à une armure tissée 3D . . . . .	75
3.4	Stratégie de résolution : solveur et réduction de modèle . . . . .	77
3.4.1	Choix du solveur de résolution : méthode directe et itérative . . . . .	77
3.4.2	Réduction de modèle : étude en fréquence et en température . . . . .	79
3.5	Vérification de la séparation des échelles . . . . .	82
3.5.1	Développement théorique . . . . .	82
3.5.2	Application à l'échelle microscopique et mésoscopique . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Essais Oberst modifiés : corrélation calcul/essai</b>	<b>91</b>
4.1	Protocole expérimental et caractérisation du banc d'essai sur éprouvettes métalliques	92
4.1.1	Contexte et présentation des bancs d'essais . . . . .	92
4.1.2	Principes de conception pour le banc d'essai . . . . .	93
4.1.3	Amortissement induit par les mors : serrage et excitation . . . . .	96
4.1.4	Résultats en température sur éprouvettes métalliques . . . . .	98
4.1.5	Estimation des biais d'amortissement liés au banc . . . . .	103
4.2	Essais sur des éprouvettes en composite tissé 3D . . . . .	105
4.2.1	Exemple d'essai en température de tissé 3D . . . . .	105
4.2.2	Analyse du modèle éléments finis pour une éprouvette tissée 3D . . . . .	107
4.2.3	Analyse de la séparation des échelles . . . . .	110
4.2.4	Corrélation calcul/essai . . . . .	111
4.2.5	Effet de l'orientation . . . . .	112
4.2.6	Essai sur éprouvettes composites conçues par fabrication additive . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Optimisation de l'amortissement des tissés 3D</b>	<b>119</b>
5.1	Mésostructure hybridée . . . . .	120
5.1.1	Homogénéisation de mésostructure hybride . . . . .	120
5.1.2	Etude de différentes stratégies d'hybridation . . . . .	124
5.1.3	Analyse des répartitions des énergies à l'échelle mésoscopique . . . . .	125
5.2	Cartographie de propriétés viscoélastiques . . . . .	131
5.2.1	Cartographie de la matrice . . . . .	131
5.2.2	Cartographie des torons élastomères . . . . .	133
5.3	Calcul sur aube . . . . .	134
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
	<b>Liste des annexes</b>	<b>156</b>
<b>A</b>	<b>Développement du travail dissipé</b>	<b>157</b>
<b>B</b>	<b>Stratégie de découpe des éléments 2D et 3D</b>	<b>159</b>

# Liste des tableaux

3.1	Conditions aux limites de type MUBC. . . . .	62
3.2	Comparaison de la méthodologie pour une inclusion cylindrique. . . . .	64
3.3	Comparaison des facteurs de perte pour une inclusion cylindrique pour différents taux volumiques de fibre. . . . .	67
3.4	Temps de calcul des différentes méthodologies de résolution. . . . .	78

# Table des figures

1.1	Tissage d'une préforme tissée 3D [19]. . . . .	25
1.2	Illustration des quantités EPI et PPI [20]. . . . .	25
1.3	Injection schématisée de la résine sur une préforme tissée lors du procédé RTM. . . . .	26
1.4	Démoulage d'une aube en composites tissés 3D [19]. . . . .	26
1.5	Définition des trois échelles d'observation pour l'aube. . . . .	27
1.6	Arrangements possibles de la microstructure [29]. . . . .	29
1.7	Exemples d'armures de tissus bidimensionnels et d'armure unidirectionnel [38]. . . . .	30
1.8	Positionnement possible des patchs piezoélectriques. . . . .	31
1.9	Positionnement des patchs viscoélastiques d'après Kosmatka [13]. . . . .	32
1.10	Amortissement modal d'une aube tissée 3D avec patchs viscoélastiques. . . . .	33
2.1	Essai de fluage avec recouvrance. . . . .	38
2.2	Essai de relaxation avec recouvrement. . . . .	38
2.3	Modèles rhéologiques de base. . . . .	40
2.4	Données brutes de l'essai DMA à différents isothermes pour une gamme de fréquence entre [0.1,10]Hz et de température entre [-65,130]°C. . . . .	42
2.5	Diagramme de Wicket pour la résine étudiée entre [-65,200]°C (gauche) et zoom associé pour [-65,130]°C (droite). . . . .	43
2.6	Facteurs de décalage retenus pour tracer la courbe maitresse en figure 2.7. . . . .	44
2.7	Courbe maitresse du module de stockage et du facteur de perte de la résine. . . . .	45
2.8	Lissage de la courbe de tendance du facteur de perte $\eta$ dans la zone d'intérêt. . . . .	45
2.9	Modes de flexion (m1) et de torsion (m2) en conditions libre-libre. . . . .	51
2.10	Fraction des énergies élastique et dissipée en flexion (m1) et en torsion (m2). . . . .	52
3.1	Schéma de principe de l'homogénéisation. . . . .	55
3.2	Maillage hexaédrique (gauche) et tétraédrique (droite) des VER sous Abaqus. . . . .	63
3.3	VER avec un TVF de 30% maillé sous Abaqus en hexaèdres. . . . .	67
3.4	Processus de découpe et d'assignation matériau par des fonctions de niveau. . . . .	68
3.5	Maillage à l'aide des fonctions de niveau d'un motif hexagonal compact. . . . .	68
3.6	Partie réelle des composantes de rigidité et facteur de perte associé axial (gauche) et transverse (droite) en fonction de la température pour une fréquence de 65Hz. . . . .	69
3.7	Effet de la fréquence sur le module de stockage et le facteur de perte axial (gauche) et transverse (droite) pour un toron. . . . .	70
3.8	Différentes représentations d'un même tissé 3D [104]. . . . .	71
3.9	Descripteur géométrique. . . . .	72
3.10	Visualisation des imperpénétrations de torons après compaction. . . . .	72
3.11	Affectation matériau selon la position du centre des éléments voxels. . . . .	73

3.12	Méthodologie de maillage octree avec raffinement sur un toron [113]. . . . .	73
3.13	Comparaison géométrique d'un maillage voxel et conforme. . . . .	74
3.14	Comparaison des caractéristiques de maillage entre voxel et conforme. . . . .	74
3.15	Exemple de mésostructure 3D voxélisée. . . . .	75
3.16	Module de stockage et facteur de perte axiaux homogénéisés dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) en fonction de la température. . . . .	76
3.17	Module de stockage et facteur de perte homogénéisés de cisaillement $xz$ (gauche) et $xy$ (droite) en fonction de la température. . . . .	76
3.18	Effet de la fréquence sur les propriétés homogénéisées dans le sens chaîne. . . . .	77
3.19	Position des extrema pour la construction de la base d'apprentissage. . . . .	80
3.20	Comparaison du module de stockage (gauche) et du facteur de perte (droite) transverse pour un calcul avec et sans modèle réduit. . . . .	81
3.21	Erreur entre le modèle réduit et le modèle complet sur la composante de stockage et le facteur de perte associé dans le sens transverse. . . . .	82
3.22	Assemblage de 4 cellules pour un milieu périodique axialement. . . . .	83
3.23	Déplacement d'une onde de cisaillement de direction $x$ pour une longueur d'onde propagée dans la direction $z$ à l'échelle microscopique. . . . .	84
3.24	Champ de déplacement solution induit par différentes forces volumiques. . . . .	85
3.25	Critère de convergence sur l'énergie élastique (gauche) et l'énergie dissipée (droite) pour une force volumique $f^v([M^m])$ pour une propagation dans la direction longitudinale avec un fil à 75% de fibre. . . . .	87
3.26	Divergence du critère sur l'énergie dissipée $\alpha_{diss}$ pour une force volumique $f^v([M^m])$ et $f^v([K^m])$ pour une propagation dans la direction longitudinale pour un fil à 75% de fibre à faible longueur d'onde. . . . .	88
3.27	Critère de convergence sur l'énergie élastique (gauche) et dissipée (droite) pour un fil à 75% de fibre avec une propagation d'onde dans les deux directions transverses aux fibres. . . . .	88
3.28	Critère de convergence sur l'énergie élastique (gauche) et dissipée (droite) pour des températures de $-40^\circ\text{C}$ et $120^\circ\text{C}$ pour une propagation d'onde longitudinale ( $z$ ) pour un toron à 75% de fibre. . . . .	89
3.29	Critère de convergence sur les deux énergies pour l'ensemble des directions de propagation pour une armure tissée 3D. . . . .	90
4.1	Les bancs d'essai au sein de l'enceinte thermique. . . . .	94
4.2	Déformée du modèle éléments finis des modes de flexion 1 et 2. . . . .	95
4.3	Fonction réponse en fréquence pour différentes températures. . . . .	95
4.4	Cycle de température des essais. . . . .	96
4.5	Effet d'hystérésis sur l'amortissement modal. . . . .	96
4.6	Influence du serrage des mors sur la fonction réponse en fréquence pour les matériaux métalliques à une excitation de 1V. . . . .	97
4.7	Influence de l'excitation sur la fréquence et l'amortissement pour les matériaux métalliques pour différents couples de serrage. . . . .	98
4.8	Configuration des masses ajoutées au sommet. . . . .	99

4.9	Évolution de la fréquence et de l'amortissement en température pour les trois matériaux métalliques. . . . .	100
4.10	Éprouvette acier en condition libre-libre au sein de l'étuve thermique. . . . .	101
4.11	Décalage de fréquence pour une éprouvette en acier (Inconel 600). . . . .	102
4.12	Fraction d'énergie élastique au sein du banc et des éprouvettes métalliques. . . . .	103
4.13	Amortissement modal de l'éprouvette acier en libre-libre, mode 1 et 2. . . . .	103
4.14	Amortissement engendré par le banc pour le mode 1 (gauche) et 2 (droite). . . . .	104
4.15	Biais d'amortissement induit par les bancs pour les essais sur l'éprouvette acier. . . . .	105
4.16	Schéma de configuration de découpe des éprouvettes dans un panneau. . . . .	106
4.17	Visualisation des différentes configurations de masse. . . . .	106
4.18	Amortissement en température du mode 1 (gauche) et 2 (droite) pour une éprouvette tissée 3D à 0°. . . . .	107
4.19	Fraction de l'énergie élastique et dissipée pour les températures -40°C (gauche) et 120°C (droite) pour le mode m1 et m2. . . . .	108
4.20	Répartition des contraintes pour les modes 1 et 2 pour les composantes $C_{11}$ et $C_{55}$ pour une température de -40°C. . . . .	109
4.21	Comparaison de la distribution des contraintes à -40°C (gauche) et 120°C (droite) pour le mode 1 pour les composantes $C_{11}$ et $C_{55}$ . . . . .	110
4.22	Ratio entre l'énergie élastique (gauche) et l'énergie dissipée (droite) du milieu hétérogène et homogène pour un composite tissé 3D avec $x$ comme direction de propagation. . . . .	110
4.23	Amortissement calcul/essai en température pour l'éprouvette chaîne 0°. . . . .	111
4.24	Déformée des 3 modes pour les éprouvettes orientées à 30° et 60°. . . . .	112
4.25	Analyse de la première flexion pour les différentes orientations. . . . .	113
4.26	Analyse de la deuxième flexion pour les différentes orientations. . . . .	114
4.27	Analyse des énergies élastique et dissipée pour les différentes orientations. . . . .	115
4.28	Analyse des modes de torsion à 30° et 60°. . . . .	116
4.29	Éprouvettes composites en fabrication additive. . . . .	116
4.30	Résultats en température des éprouvettes réalisées en fabrication additive. . . . .	118
5.1	Schéma du VER d'un composite hybridé avec des joncs élastomères. . . . .	120
5.2	Module complexe du Smactane 50 [149]. . . . .	121
5.3	Module et taux de perte homogénéisés dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) de l'armure hybridée avec joncs élastomères. . . . .	121
5.4	Comparaison du module de stockage et du facteur de perte des matériaux élastomères étudiés à une fréquence de 60Hz entre -40°C et 120°C. . . . .	122
5.5	Module de stockage et facteur de perte homogénéisés dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) de l'armure hybridée avec différents joncs élastomères. . . . .	123
5.6	Résultats du cisaillement homogénéisé $C_{55}$ pour différents joncs élastomères. . . . .	124
5.7	Représentation d'un VER hybride enrobé et cotissé. . . . .	124
5.8	Module de stockage et facteur de perte dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) des différentes configurations d'hybridation. . . . .	125

5.9	Fraction d'énergie <i>élastique</i> par composante pour une mésostructure tissée 3D <i>standard</i> à $-40^{\circ}\text{C}$ . . . . .	126
5.10	Fraction d'énergie <i>dissipée</i> par composante pour une mésostructure tissée 3D <i>standard</i> à $-40^{\circ}\text{C}$ . . . . .	127
5.11	Fraction d'énergie <i>élastique</i> par composante pour une mésostructure tissée 3D <i>hybride</i> à $-40^{\circ}\text{C}$ . . . . .	128
5.12	Fraction d'énergie <i>dissipée</i> par composante pour une mésostructure tissée 3D <i>hybride</i> à $-40^{\circ}\text{C}$ . . . . .	129
5.13	Fraction d'énergie <i>élastique</i> par composante pour une mésostructure tissée 3D <i>hybride</i> à $120^{\circ}\text{C}$ . . . . .	130
5.14	Fraction d'énergie <i>dissipée</i> par composante pour une mésostructure tissée 3D <i>hybride</i> à $120^{\circ}\text{C}$ . . . . .	130
5.15	Influence des propriétés de la résine sur le taux de perte d'un toron homogénéisé à 71% de fibre dans la direction axiale (gauche) et transverse (droite). . . . .	132
5.16	Influence des propriétés de la résine sur le taux de perte d'un toron homogénéisé à 71% de fibre dans la direction cisaillement $xz$ (55). . . . .	132
5.17	Influence des propriétés de la résine sur une armure 3D dans la direction chaîne (gauche) et chaîne/épaisseur (droite). . . . .	133
5.18	Quantification de l'amortissement dans le sens chaîne (11) pour des températures de $-40^{\circ}\text{C}$ (gauche) et $120^{\circ}\text{C}$ (droite). . . . .	133
5.19	Quantification de l'amortissement dans le sens trame (22) pour des températures de $-40^{\circ}\text{C}$ et $120^{\circ}\text{C}$ . . . . .	134
5.20	Maillage de l'aube. . . . .	135
5.21	Mode 1 de l'aube pour des conditions encastree-libre. . . . .	136
5.22	Amortissement modal de l'aube pour le mode 1. . . . .	136
5.23	Analyse des zones énergétiques de l'aube à $-40^{\circ}\text{C}$ . . . . .	137
5.24	Fractions d'énergie des composantes de l'aube à $120^{\circ}\text{C}$ . . . . .	137
5.25	Zones spatiales réagissant le plus énergiquement en fonction des composantes. . . . .	138
5.26	Amortissement modal pour le mode 1 de l'aube standard et hybride. . . . .	139
5.27	Répartition énergétique de l'aube hybride à $-40^{\circ}\text{C}$ . . . . .	139
B.1	Visualisation des différentes découpes d'un élément triangulaire . . . . .	159
B.2	Visualisation des différentes découpes d'un élément quadrilatère . . . . .	160
B.3	Visualisation des différentes découpes d'un élément tétraédrique . . . . .	161
B.4	Visualisation des différentes découpes d'un élément pyramidal . . . . .	163
B.5	Visualisation des différentes découpes d'un élément hexaédrique . . . . .	163



# Liste des symboles

## Acronymes

3D	Tridimensionnel
CORAC-EPICE	Conseil pour la recherche aéronautique civile française- Engin Propulsif Intégrant des Composantes Environnementales
CIFRE	Convention Industrielle de Formation par la REcherche
CNRS	Centre national de la recherche scientifique
DDL	Degré(s) De Liberté
DGAC	Direction Générale de l'Aviation Civile
DMA	Dynamic Mechanical Analysis (Analyse Mécanique Dynamique)
KUBC	Kinematic Uniform Boundary Conditions
LEAP	Leading Edge Aviation Propulsion (propulsion aéronautique d'avant-garde)
MLE	Metallic Leading Edge
MPa/GPa	Méga-Pascal/Giga-Pascal
MPI	Message Passing Interface
MSE	Modal Strain Energy (Énergie de Déformation Modal)
MUBC	Mixed Uniform Boundary Conditions
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
OpenMP	Open Multi-Processing
PBC	Periodic Boundary Conditions
PRC	Projet de Recherche Collaboratif
RCT	Ratio Chaîne/Trame
RTM	Resin Transfer Modling
SUBC	Static Uniform Boundary Conditions
TVF	Taux Volumique de Fibres
UD	Unidirectionnel
VER	Volume élémentaire représentatif

## Matrices et vecteurs colonnes

$[B]$	Matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolations
$[C]$	Matrice des rigidités
$[C(\omega)]$	Matrice des rigidités complexes
$[C']$	Partie réelle de la matrice des rigidités
$[C'']$	Partie imaginaire de matrice des rigidités
$[D]$	Matrice diagonale des valeurs propres
$[I]$	Matrice identité
$[K]$	Matrice de raideur éléments finis
$[M]$	Matrice de masse éléments finis
$[N]$	Matrice des fonctions de forme ou d'interpolation
$[T]$	Base du modèle réduit
$[V]$	Matrice des vecteurs propres droits
$\{F\}$	Vecteur des forces extérieures
$\{f^v\}$	Vecteur des forces volumiques
$\{n\}$	Vecteur normal
$\{q\}_R$	Vecteur des DDL réduits
$\{q\}$	Vecteur colonne des DDL
$\{\bullet\}_i$	Partie imaginaire du vecteur

$\{\bullet\}_r$	Partie réelle du vecteur
$\{u\}$	Vecteur des déplacements
$\{v\}$	Vecteur propre droit
$\{X\}$ ou $\mathbf{X}$	Vecteur position
$\{\epsilon\}$	Vecteur des déformations
$\{\kappa\}$	Vecteur de nombre d'onde
$\{\sigma\}$	Vecteur des contraintes
$\{\zeta\}$	Vecteur position de la cellule de référence

### Opérateurs et symboles mathématiques

$\det J_j$	Jacobien (déterminant de la matrice jacobienne) au point d'intégration $j$
$H(t)$	Fonction de Heaviside
$\mathbb{H}(\tau)$	Spectre des temps de relaxation
$i$	Nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$
$J(t)$	Fonction de fluage
$\mathcal{L}$	Transformée de Laplace
$\Omega$	Domaine entier considéré
$\Omega^0$	Domaine de référence
$\omega_j$	Poids du point d'intégration
$R(t)$	Fonction de relaxation
$\Re(\bullet)$	Partie réelle
$\Im(\bullet)$	Partie imaginaire
$div(\bullet)$	Opérateur divergence
$\nabla\bullet$	Opérateur gradient
$\bullet^d$	Composante donnée (connue)
$\bullet^H$	Hermitien
$\bullet^h$	Composante du milieu hétérogène
$\bullet^m$	Composante du milieu homogène (macroscopique)
$\bullet^u$	Composante unitaire
$\hat{\bullet}$	Champ virtuel
$\dot{\bullet}$	Dérivée temporelle
$\bullet_C$	DDL du Complémentaire (interne)
$\bullet_f$	Donnée fibre
$\bullet_I$	DDL d'interface
$\bullet_m$	Donnée matrice
$\int_V \bullet dV$	Intégrale sur le domaine $V$
$\frac{\partial \bullet}{\partial \bullet}$	Dérivée partielle
$\ \bullet\ $	Norme de vecteur
$ \bullet $	Module d'un scalaire

### Scalars

$c$	Composante visqueuse dans les modèles rhéologiques
$c_j(\omega)$	Module complexe principal
$d$	Taille des hétérogénéités
$d_j$	Valeur propre
$E(\omega)$	Module Complexe
$E'$	Module de stockage
$E''$	Module de perte
$E$	Module de Young

---

$E_{elas}$	Énergie élastique
$E_{diss}$	Énergie dissipée
$k$	Composante élastique dans les modèles rhéologiques
$\ell$	taille du VER
$N$	nombre de DDL du modèle
$NI$	nombre de DDL d'interface
$NC$	nombre de DDL du complémentaire (interne)
$s$	Variable de Laplace (inverse d'un temps)
$T$	Température
$t$	Temps
$V$	Volume
$W_{elas}$	Travail élastique
$W_{diss}$	Travail dissipé
$\alpha_{elas}$	Critère de convergence sur le module de stockage
$\alpha_{diss}$	Critère de convergence sur le facteur de perte
$\alpha(T)$	Facteur de décalage
$\eta$	Facteur de perte
$\delta$	Angle de déphasage
$\epsilon(\omega)$	première harmonique de la transformée de Fourier de la déformation
$\lambda$	Longueur d'onde physique
$\lambda, \mu$	Coefficients de Lamé
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\omega$	Pulsation
$\sigma(\omega)$	première harmonique de la transformée de Fourier de la contrainte
$\rho$	Masse volumique
$\tau$	Temps caractéristique dans les modèles rhéologiques
$\zeta$	Amortissement modal



# Introduction

Les matériaux composites, qui ont vu leur utilisation s'accroître ces dernières décennies dans la structure des avions, font maintenant une avancée importante dans les applications moteurs. Un exemple est l'aube de soufflante du moteur LEAP fabriquée par le groupe Safran en composites tissés 3D. Ce matériau permet une grande flexibilité de conception et des performances mécaniques élevées, en particulier à l'impact. Les aubes de soufflante des moteurs d'avions sont des pièces d'une importance majeure pour les performances et la sécurité des avions, la soufflante assurant plus de 80% de la poussée.

Afin de répondre aux enjeux environnementaux, l'industrie aéronautique et les motoristes en particuliers, ont besoin de rechercher des solutions innovantes et de proposer des architectures en rupture afin d'atteindre des objectifs forts de réduction de consommation et de pollution.

Ces nouvelles architectures, de grands diamètres de soufflante, peuvent entraîner des chargements nouveaux, comme des réponses forcées liées aux distorsions d'entrée d'air, ou encore une sensibilité accrue aux phénomènes de flottement. Ces derniers sont des instabilités aéroélastiques dont la non-maitrise peut entraîner la rupture catastrophique des aubes. Le contrôle de l'amortissement est une solution pour accroître la marge à ce phénomène et limiter les amplitudes vibratoires en général. Les enjeux sont importants, allant de l'élargissement des plages d'opérabilité moteur à l'augmentation des durées de vie.

Les matériaux composites tissés 3D étudiés sont constitués de renforts en fibre de carbone et d'une matrice en résine époxy. La microstructure de ce type de matériau a une grande influence sur son comportement. Leur modélisation passe par des homogénéisations à différentes échelles. Les problématiques d'homogénéisation ne sont pas nouvelles avec les modèles simples de Voigt et Reuss [1, 2] qui au début des années 1900 constituent les premières formulations d'homogénéisation en champs moyens. L'évolution est permanente au cours de XXème siècle avec l'apparition des schémas d'Eshelby [3], auto-cohérent [4] ou encore de Mori-Tanaka [5]. Des méthodes variationnelles dues à Hashin et Shtrikman [6, 7] sont plus performantes et ont permis un resserrement des bornes obtenues à partir des modèles de Voigt et Reuss. Les progrès en calcul éléments finis ont permis aux approches en champs complets de voir le jour par la représentation de la microstructure, à l'aide d'un volume élémentaire représentatif (VER). Les premières approches d'homogénéisation considérant des matériaux viscoélastiques linéaires ont été développées dans les années 1960 [8, 9]. Plus récemment pour les composites tissés 3D les

propriétés de relaxation homogénéisées ont été estimées [10, 11] afin de prédire la distorsion des pièces résultant de contraintes résiduelles survenant pendant le processus de fabrication.

À l'échelle du matériau composite de nombreux travaux ont répertorié les différents mécanismes favorisant l'amortissement [12]. En effet l'utilisation de matériaux composites tissés 3D offre de nombreuses voies d'optimisation matériau. Néanmoins le comportement viscoélastique des constituants notamment caractérisé par leur capacité à dissiper est prépondérant.

À l'échelle de la pièce de structure, l'aube de soufflante, il existe plusieurs leviers afin d'améliorer l'amortissement. Le gain peut être effectué de façon *extrinsèque*, par ajout de patchs viscoélastiques [13, 14, 15] ou piézoélectriques [16] ou bien de façon *intrinsèque*, en améliorant la capacité d'amortissement des matériaux constituant la pièce.

L'objectif industriel de cette thèse est d'être en capacité de concevoir des matériaux composites tissés 3D en maîtrisant l'amortissement des premiers modes des aubes de soufflante. Plusieurs étapes intermédiaires ont été nécessaires afin d'y parvenir.

Le premier objectif scientifique est de savoir *homogénéiser des comportements viscoélastiques*. Étant la source de dissipation intrinsèque des composites à base polymère présentés dans le chapitre 1, les expressions bien connues de la viscoélasticité linéaire sont rappelées au sein du chapitre 2. La caractérisation expérimentale des propriétés viscoélastiques est ainsi présentée. Les contributions de ce mémoire sont : une clarification du calcul du taux de perte en termes de travail dissipé et élastique ; une discussion concernant la paramétrisation des lois de comportement en préparation de l'homogénéisation ; et une extension des stratégies de décomposition des lois de comportement au cas viscoélastique en préparation des analyses de performance dissipative.

Une fois le comportement viscoélastique des constituants décrit, la deuxième étape est l'homogénéisation, abordée au chapitre 3. L'objectif est la mise en place d'une chaîne numérique multi-échelle pour l'homogénéisation viscoélastique des matériaux composites tissés 3D. Il est montré que le module complexe sans recours à des formulations rhéologiques est adaptée aux prédictions d'amortissement et donc préférable car évitant les biais d'identification. Pour permettre le recours à des solveurs itératifs et une réduction de modèle pour l'évolution en température, la première contribution est une formulation matricielle des méthodes d'homogénéisation classiques. Une fois définie, la méthodologie est illustrée pour des études en température et fréquence. Le lien entre les propriétés amortissantes de la résine et celle du composite est mis en évidence.

En préparation de la confrontation aux essais, où des gradients spatiaux proches de la taille de la mésostructure sont présents, le chapitre 3 se termine sur le développement théorique d'une méthode de vérification de l'hypothèse de séparation des échelles. La contribution est la définition d'un critère de précision des propriétés homogénéisées en fonction de la longueur d'onde.

Le chapitre 4 s'assure que les calculs numériques sont *représentatifs de la réalité* des essais. Une campagne d'essai Oberst modifié de caractérisation de l'amortissement modal d'un

composite tissé 3D y est détaillée avec une réflexion sur les limitations du banc d'essai et plus précisément sur l'amortissement induit. Une corrélation calcul/essai est effectuée sur des éprouvettes tissées 3D. Les effets de la température, de la fréquence et de l'orientation matériau sont analysés permettant de répondre à la question de la prédictivité du modèle. Enfin, pour fournir des procédures de conception des armures, il est montré que les fractions d'énergie élastique et dissipée permettent une interprétation pertinente des différents mécanismes induisant l'amortissement en fonction de la température.

La dernière contribution a trait à la mise en place du processus à *l'échelle de l'aube* avec des stratégies d'optimisation des propriétés de la mésostructure et de la pièce. En effet, la solution envisagée est une véritable rupture technologique brevetée par Safran [17, 18]. Il s'agit d'une solution intrinsèque visant une *hybridation du composite tissé 3D avec des joncs élastomères*. Le chapitre 5 présente l'application de la chaîne numérique aux armures tissées 3D hybrides. Différentes hybridations sont étudiées en analysant plusieurs choix de matériau dissipatif et en évaluant l'effet de la température sur les mécanismes d'amortissement. Des cartographies illustrant le compromis rigidité amortissement sont fournies pour définir les propriétés optimales de l'élastomère ou de la résine en fonction de la température et de la cible d'amortissement. L'ultime contribution analyse les résultats d'amortissement modal sur le premier mode de flexion de l'aube de soufflante LEAP homogénéisée viscoélastiquement avec des illustrations de la localisation spatiale de la dissipation et l'influence de l'insertion d'une mésostructure hybridée.

Cette étude se place dans le contexte d'une CIFRE avec Safran Composites. Elle est menée dans le cadre du PRC MECACOMP, projet cofinancé par la DGAC et le groupe Safran piloté par le groupe Safran et impliquant le groupe Safran, l'ONERA et le CNRS.



## **Chapitre 1**

# **Les composites tissés : fabrication et représentation**

Ce chapitre est une introduction aux matériaux composites tissés 3D en abordant en section 1.1 des définitions et des notions propres aux tissus tridimensionnels. La définition des différentes échelles d'observations sont décrites permettant d'introduire les différents constituants de l'aube de soufflante. Par la suite, en section 1.2, l'accent est mis sur les sources d'amortissement aux différentes échelles. Le besoin du partenaire industriel étant l'amortissement au sein de l'aube de soufflante, l'état de l'art existant à cette échelle est introduit et la rupture technologique visant à hybrider un composite tissé 3D avec des joncs élastomères est présentée.

## 1.1 Généralités sur les composites et textiles

L'aube de soufflante du moteur LEAP est constituée de tissus tridimensionnels dont les caractéristiques et le vocabulaire sont brièvement détaillés, suivi du procédé de fabrication. Enfin, les différentes échelles caractéristiques de cette pièce sont présentées.

### 1.1.1 Les tissus tridimensionnels : définition et notion

L'utilisation de matériaux composites est maintenant fortement ancrée au sein de nombreux secteurs d'activité comme dans l'aéronautique, l'automobile, le ferroviaire, le bâtiment ou encore le sport. Leurs propriétés mécaniques alliant performance et légèreté font d'eux des matériaux très convoités par les industries de hautes technologies.

Un matériau est dit composite lorsque qu'il résulte de la combinaison d'au moins deux phases distinctes : généralement une matrice et des renforts. Il est de par sa nature hétérogène. Il existe plusieurs types de renforts tels que des fibres ou des particules avec des origines différentes (minérale, naturelle, synthétique, métallique) qui assurent la tenue mécanique. De son côté, la matrice, pouvant appartenir à la famille des polymères, des métaux ou des céramiques, permet une cohésion de la structure. Il existe deux catégories de matrices organiques : les thermodurcissables comme les résines époxydes communément appelées époxy et les thermoplastiques tels que le polypropylène ou le polyéthylène par exemple. Les matériaux composites considérés au sein de cette thèse sont des matériaux composites à fibres longues à matrice organique thermodurcissable. Il s'agit de matériaux architecturés. Les renforts sont orientés dans une ou plusieurs directions permettant d'adapter les propriétés mécaniques. Il existe deux grandes catégories de composites à fibres longues continues, les unidirectionnels (UD) et les textiles. Leur différence provient des renforts qui sont parallèles pour les premiers tandis que qu'ils sont enchevêtrés les uns avec les autres pour les seconds.

Au sein de ces travaux, seuls les tissés sont pris en compte. Un vocabulaire spécifique est associé à ce type de matériau et nécessite d'être défini. Le constituant le plus fin est la fibre, il s'agit d'un mono-filament allongé constitutif d'une mèche. Une mèche (*tow*) est un groupement parallèle de milliers de fibres. Il est commun dans le monde des composites d'utiliser le terme fil, qui permet de qualifier à la fois une mèche mais aussi un toron (*yarn*), qui est un assemblage de

mèches. Les tissus sont généralement constitués de torons. Le tissage naît de l'enchevêtrement de fils de chaîne et de trame comme illustré en figure 1.1. les fils de chaîne (*warp*) sont ceux dans le sens de la longueur du tissu alors que ceux de trame (*weft*) sont perpendiculaires aux fils de chaîne et se trouvent dans la largeur du tissu. Par conséquent, il existe deux réseaux de torons, de direction différentes et qui s'entrecroisent. Au sein des tissés 3D, constituant les aubes de soufflante des moteurs d'avion, des fils de liage disposés dans le sens chaîne permettent d'assurer la cohésion dans l'épaisseur. Le mode d'entrecroisement des chaînes et des trames constitue l'armure du tissu. Il est usuel de définir un composite tissé 3D en nombre de couche, c'est-à-dire le nombre de pli équivalent en 2D.



FIGURE 1.1 – Tissage d'une préforme tissée 3D [19].

Le milieu des composites et particulièrement des tissés 3D nécessite la définition de termes spécifiques provenant du monde du tissage. Le ratio chaîne/trame (RCT) définit le ratio entre les fils dans la direction chaîne sur ceux dans la direction trame. Le taux volumique de fibres (TVF) est une quantité importante à la définition du composite tissé 3D. En effet, les combinaisons d'enchevêtrement sont nombreuses et varient en fonction de nombreux paramètres comme le choix de l'armure, la taille des fils, l'espacement ou encore l'embuvage (ondulation). Ce dernier représente la relation entre la longueur d'un tissu et la longueur du fil. Ainsi, plus l'embuvage est grand, plus le tissage est dense.

Le critère le plus important de la fabrication de textile est le TVF cible final de l'armure. En fonction de ce dernier, des ajustements sont effectués à l'aide notamment de l'EPI (Ends Per Inchs) qui est relié au nombre de fil dans le sens chaîne (vertical) par *inch* (1 *inch* = 2.54cm) et le PPI (Picks Per Inch) qui se rapporte au nombre de fil de trame (horizontal) par *inch* comme montré en figure 1.2 [20].

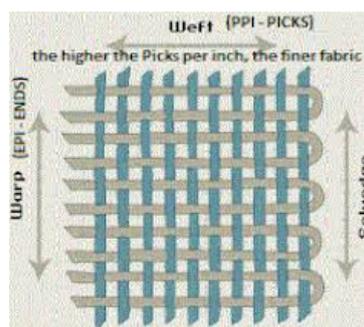


FIGURE 1.2 – Illustration des quantités EPI et PPI [20].

### 1.1.2 Fabrication d'un composite tissé 3D et matériau d'étude

Les fils de chaîne et de trame sont constitués de milliers de fibres longues de carbone imprégnées de matrice. Il existe des fils de 1k à 72k, c'est-à-dire avec 1 000 ou 72 000 fibres. Dans l'aéronautique, la tendance est à l'utilisation de fil de 8k, 12k, 24k, 48k ou 72k.

La fabrication de tissus tridimensionnels (3D) consiste à entrelacer des fils de chaîne et de trame. Un métier à tisser Jacquard 3D est utilisé afin de réaliser ce type de tissu. La cohésion du tissu dans l'épaisseur est garantie par les fils de chaîne qui viennent lier les couches de fils de trame. Une fois tissée, l'armure 3D est consolidée par l'injection d'une résine époxy dans un moule fermé. Ce procédé est appelé procédé RTM (*Resin Transfer Modling*) et est schématisé en figure 1.3. Le renfort est compacté lors de la fermeture du moule et préalablement à l'injection. L'entrefer, l'espace entre le moule supérieur et inférieur, détermine, en fonction du renfort, le taux volumique final de fibre de la pièce.

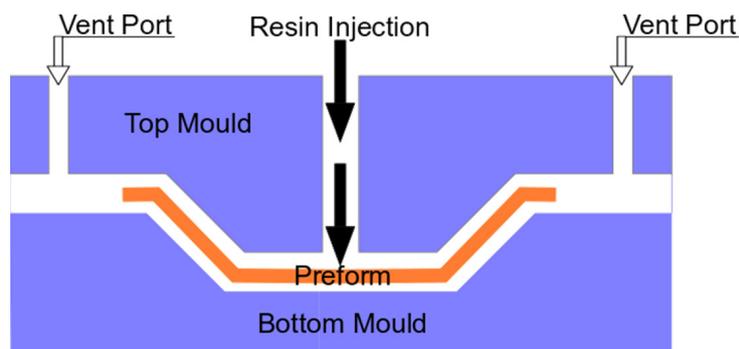


FIGURE 1.3 – Injection schématisée de la résine sur une préforme tissée lors du procédé RTM.

Une fois l'injection réalisée, la pièce finale peut être démoulée après refroidissement comme illustré en figure 1.4.

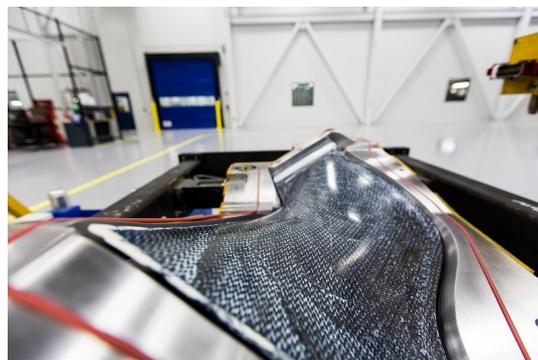


FIGURE 1.4 – Démoulage d'une aube en composites tissés 3D [19].

### 1.1.3 Définition des échelles

Un matériau est de la matière pouvant être décrite par des propriétés intrinsèques aussi bien mécaniques, chimiques, thermiques, etc... [21]. S'il est possible de considérer que les grandeurs physiques d'intérêt, comme par exemple les déformations et contraintes, varient lentement à une certaine échelle, le milieu est dit homogène. En revanche, si les fluctuations des quantités d'intérêt ne peuvent être négligées le milieu est dit hétérogène et donc constitué de plusieurs matériaux formant une microstructure dont les tailles caractéristiques sont petites allant potentiellement jusqu'à l'échelle très discontinue des atomes. Le caractère homogène ou hétérogène d'un matériau composite dépend de son échelle d'observation.

La figure 1.5 montre les échelles découlant des tailles caractéristiques des constituants élémentaires. Par ordre de grandeur croissant, il y a tout d'abord l'échelle microscopique liée aux fils. Ces derniers sont constitués de fibres noyées dans la matrice. L'ordre de grandeur des fibres est de quelques micromètres  $\mu m$ . Ensuite, il y a l'échelle mésoscopique associée au tissé représentant un motif élémentaire de tissu, formé de l'entrelacement de fils, avec de la matrice. La dimension caractéristique est de l'ordre de la dizaine de millimètres. Enfin, l'échelle macroscopique est définie avec la pièce de structure, l'aube de soufflante, qui est composée de plusieurs armures tissées 3D. Les ordres de grandeurs dans le cas de cette pièce spécifique à géométrie complexe varient du millimètre à la dizaine de centimètres.

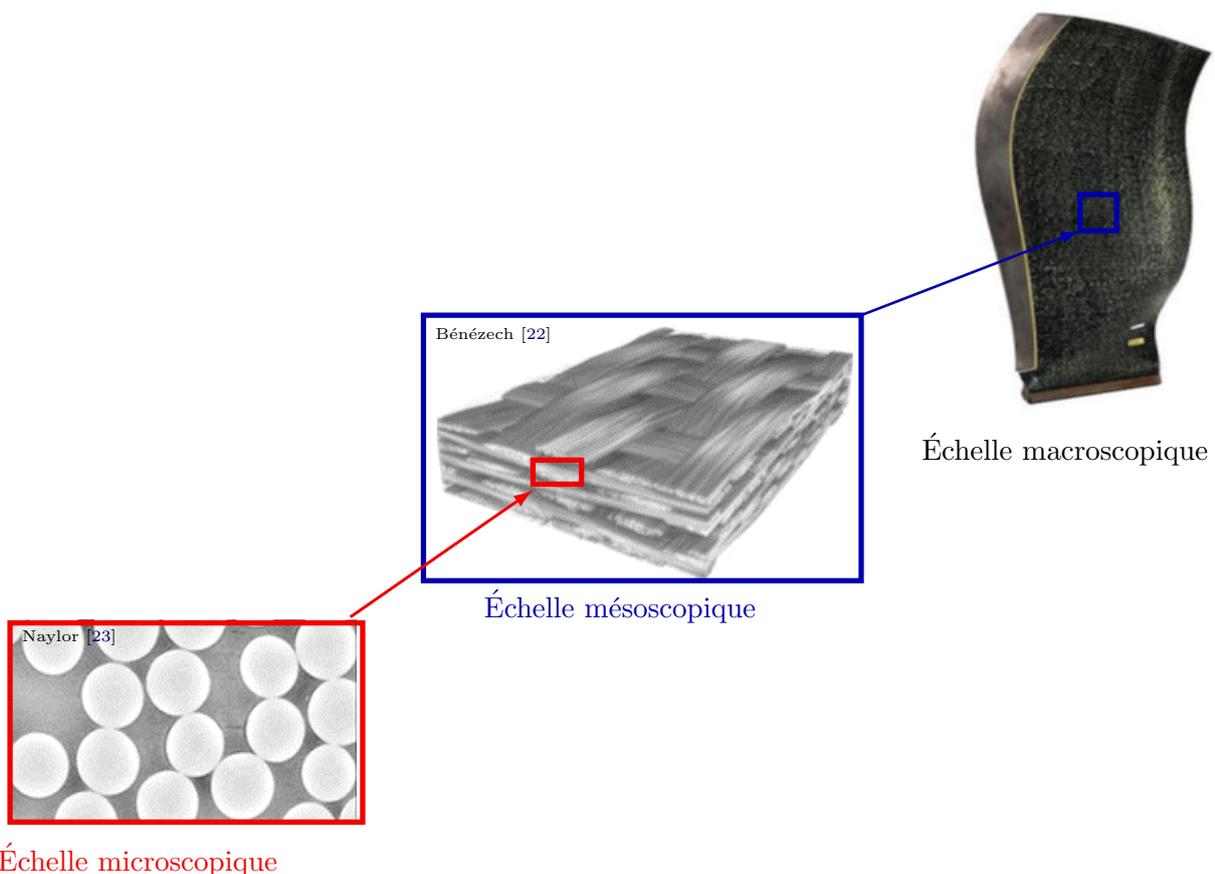


FIGURE 1.5 – Définition des trois échelles d'observation pour l'aube.

La représentation des phases du matériau aux différentes échelles est distincte. En effet, à l'échelle microscopique fibres et matrice sont homogènes avec respectivement un comportement élastique et dissipatif. C'est pourquoi les mécanismes d'amortissement seront approfondis en section 1.2.1 et que la caractérisation des matériaux viscoélastiques linéaires sera détaillée au sein du chapitre 2.

À l'échelle mésoscopique la matrice et les fils sont vus comme des matériaux homogènes. L'homogénéisation effectuée à l'échelle inférieure engendre des torons avec des propriétés viscoélastiques et les fibres ne sont donc plus représentées. L'aube apparaît comme un mélange de plusieurs matériaux homogènes dont les propriétés varient en fonction de l'épaisseur et de l'armure du renfort utilisées dans les différentes zones de la pièce.

## 1.2 Source d'amortissement dans les composites tissés

Différents mécanismes d'amortissement, plus ou moins complexes, ont été étudiés à l'échelle microscopique et mésoscopique et sont détaillés en section 1.2.1. Enfin, la section 1.2.2 discute des technologies extrinsèques actuellement développées pour augmenter l'amortissement au sein des aubes de soufflante.

### 1.2.1 À l'échelle microscopique et mésoscopique

De nombreux articles ont répertorié les différentes sources d'amortissement au sein des matériaux composites renforcés par des fibres [12, 24, 25].

La caractérisation expérimentale des propriétés dynamiques des composites est encore loin d'être standardisée comme le montre Treviso [24] dans une revue répertoriant l'état de l'art de l'amortissement des matériaux composites. Les protocoles expérimentaux actuels entraînent des sources d'amortissement non négligeables, notamment en cas de présence d'un encastrement. Cette variable sera analysée au sein du chapitre 4 où un protocole expérimental de caractérisation de l'amortissement des composites tissés 3D est exposé avec le recours à des essais Oberst.

La revue publiée par Chandra [12] constitue une référence dans la description des mécanismes d'amortissement favorisant la dissipation d'énergie au sein des composites à matrice organique renforcés par des fibres. De nombreuses simulations numériques ont été effectuées afin d'identifier les mécanismes suivant :

- le comportement viscoélastique des constituants est prépondérant et sera analysé plus en détail au sein de cette section à l'échelle microscopique et mésoscopique ;
- l'endommagement des composants. Ce mécanisme, non souhaité ici, est modélisé par une discontinuité et peut entraîner un gain d'amortissement notamment en cas de présence de fissures dans la matrice ou de fibres rompues. Ce gain est sensible à l'orientation de la discontinuité en fonction des chargements ;
- pour des chargements cycliques ou à haut niveau de vibration, des amortissements visco-

plastiques ou bien thermoélastiques peuvent apparaître. Cependant, ces travaux restent limités aux petites perturbations.

Les deux derniers points énumérés, qui ne sont pas étudiés ici, sont des sources d'amortissement proche du mécanisme de friction. Ce dernier qui correspond à la résistance de mouvement entre deux surfaces hétérogènes est bien connu pour avoir la capacité à augmenter l'amortissement [26].

Le caractère dissipatif des matériaux est la source principale d'amortissement. Dans des modèles à deux phases, matrice-fibre, à l'échelle microscopique ou fils-matrice à l'échelle mésoscopique, l'amortissement intrinsèque de chaque constituant contribue à l'amortissement global du composite. Ensuite, il y a l'amortissement dû au comportement viscoélastique des interphases. Ici, l'interphase, c'est-à-dire la zone se situant entre les deux constituants, n'est pas prise en compte, et une interface parfaite est considérée. Cependant, des travaux ont montré une influence non négligeable sur les propriétés amortissantes du matériau [27, 28]. L'interphase peut être considérée rigide, plusieurs GPa avec un faible amortissement ( $\approx 1\%$ ), ou souple, quelques MPa avec un amortissement important ( $>50\%$ ). Des études sur le volume et les propriétés de l'interphase montrent que le caractère souple ou rigide joue un rôle important. Dans la majorité des directions une interphase rigide donne un amortissement plus élevé qu'une interphase souple. A l'échelle microscopique, Tsai [29] a analysé numériquement l'effet purement géométrique de l'arrangement des fibres de carbone pour un matériau composite à matrice plastique en considérant un comportement viscoélastique pour chacun des deux constituants. Trois types d'arrangement sont retenus comme montré en figure 1.6.

Les deux arrangements hexagonaux sont plus amortis que l'arrangement carré. L'hexagonal rectangle possède des propriétés d'amortissement entre les deux. L'arrangement joue donc un rôle. L'étude de Liu [30] a montré que l'arrangement hexagonal rectangle aussi appelé hexagonal compact représenté au mieux la répartition aléatoire des fibres dans le toron. Par conséquent, dans cette thèse cet arrangement est utilisé. Ces études montrent que le caractère amortissant provenant du caractère viscoélastique des composants provient d'un compromis entre la rigidité, la géométrie et la dissipation des matériaux constituant le milieu hétérogène. Des résultats renforçant ces observations sont retrouvés au sein du chapitre 5.

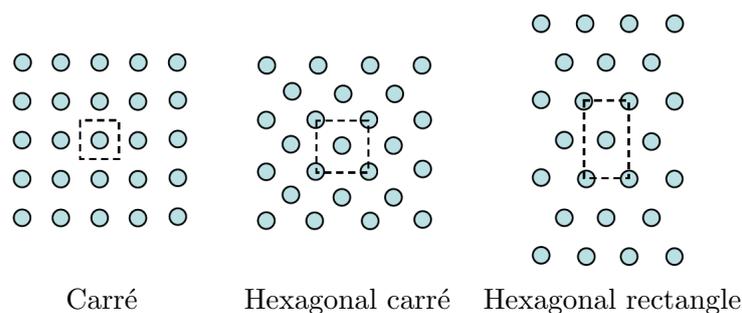


FIGURE 1.6 – Arrangements possibles de la microstructure [29].

A l'échelle mésoscopique, les travaux de Ni et Adams [31, 32] ont été précurseurs dans les années 70 pour l'étude des composites laminés et ont engendré de nombreuses études par la suite. Pour les composites tissés à matrice polymère la recherche date des années 2000. Les premiers travaux ont été faits numériquement par Guan [33] sur une armure simple de type taffetas avec la méthode de l'énergie de déformation. Une corrélation évidente entre la diminution du facteur de perte et l'augmentation du taux volumique de toron est aussi mise en avant. Yu [34] a montré, sur une armure à 4 couches avec des trames rectilignes et des chaînes ondulés, que l'ondulation des torons rend difficilement extensible aux armures tissées complexes la méthode de l'énergie de déformation modal (MSE [35]) alors qu'elle fonctionne bien pour des composites UD. L'équipe de Romano [25, 36] a étudié expérimentalement et numériquement des armures taffetas et sergé 2x2 représentées en figure 1.7. Expérimentalement [37], le taffetas donne des valeurs d'amortissement plus élevées que le sergé 2x2. En effet, l'ondulation des fils suivant l'arrangement du tissage de la mésostucture est un paramètre ayant une influence non négligeable.

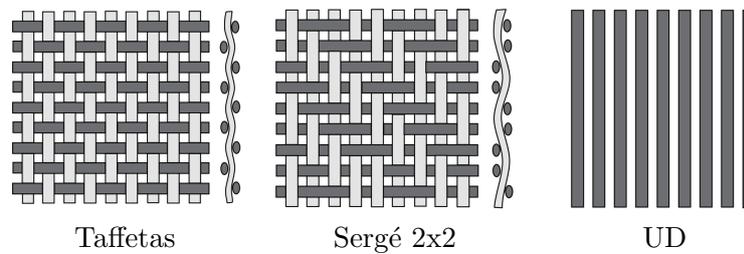


FIGURE 1.7 – Exemples d'armures de tissus bidimensionnels et d'armure unidirectionnel [38].

Pour des armures tissées, à l'échelle mésoscopique, les travaux de Thierry [39] permettent le calcul du facteur de perte en fonction de la direction de propagation d'une onde et de la fréquence pour tous types de tissé. La gamme de fréquence est très haute entre 100 et 1000 kHz ce qui n'est pas la cible de ces travaux de thèse. Il est intéressant de noter que le facteur de perte est calculé à l'aide de la méthode WFE (Wave Finite Element [40, 41]) associant la théorie des milieux périodiques avec la méthode éléments finis pour étudier la propagation des ondes au sein d'une structure périodique. Les diagrammes de dispersion représentant le nombre d'onde de la longueur d'onde en fonction de la fréquence sont représentés et permettent de déduire que l'amortissement dépend de la direction de propagation de l'onde et de la fréquence. Le volume de toron joue aussi un rôle en diminuant l'amortissement quand il augmente.

### 1.2.2 Technologies extrinsèques à l'échelle macroscopique

A l'échelle de l'aube, l'amortissement nécessite d'être augmenté afin de réduire le risque de problème lié au phénomène de flottement. Pour se faire, à ce jour, deux technologies extrinsèques sont étudiées.

La première consiste à avoir un contrôle des vibrations de structure par des matériaux piézoélectriques. Un brevet pour l'amortissement piézoélectrique shunté des aubes de soufflante a

été déposé par Hilbert [42], où des patchs piézoélectriques sont placés sur la partie inférieure des aubes comme l'illustre la figure 1.8a. L'étude de Min [43] porte sur une aube de soufflante composée d'un empilement de plis unidirectionnels de résine époxy avec fibres de carbone. Au sein de cette dernière, les effets de rotation sont pris en compte. Cette analyse éléments finis a été validée avec des essais expérimentaux. Il a été montré que l'amortissement des vibrations piézoélectriques peut réduire considérablement les vibrations des aubes de soufflante en composites des moteurs d'avion. En effet, l'amortissement gagne un facteur 3 sans rotation avec le contrôle actif et un facteur 1.5 pour 5000 tours/minute. Sur une aube en composites tissés 3D, les travaux de thèse de Thierry [16] en partenariat avec Safran Aircraft Engines ont montré que le dispositif piézoélectrique représente une solution viable. La position du dispositif amortissement est illustré en figure 1.8b et se positionne sur la partie supérieure de la face intrados de l'aube. Une atténuation des vibrations de l'aube de soufflante a été observée.

Si elles semblent efficaces, ces solutions technologiques ne sont pas évidentes à mettre en œuvre de façon industrielle, pour des problématiques d'intégration sur pièce tournante qui représentent un vrai challenge.

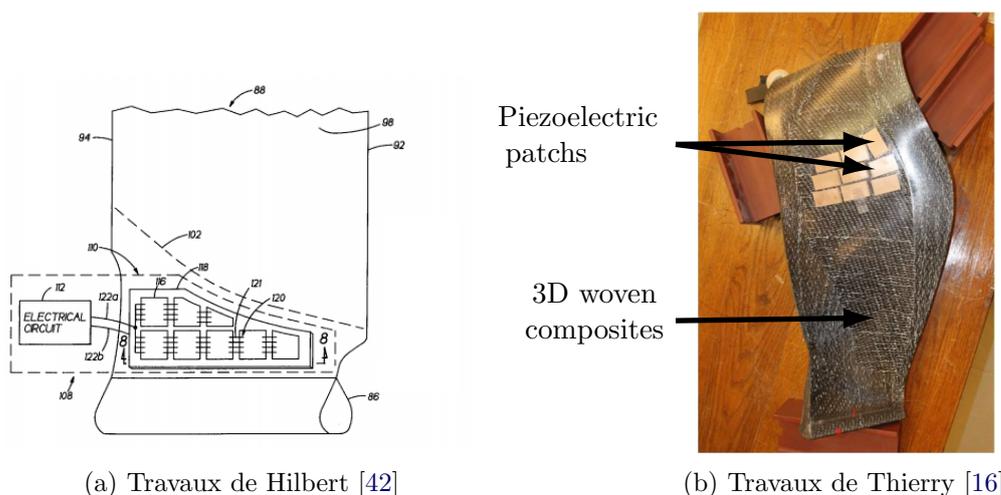


FIGURE 1.8 – Positionnement possible des patchs piézoélectriques.

La seconde technologie extrinsèque est l'ajout d'un patch viscoélastique contraint sur l'aube de soufflante. Ce traitement d'amortissement passif repose sur les caractéristiques des matériaux viscoélastiques qui assurent la dissipation d'énergie. Il a été appliqué avec succès à de nombreuses applications industrielles au cours des dernières décennies. La première étude sur des laminés remonte aux années 1980 avec Johnson [35] mais peu d'application à l'aéronautique sont connues. La quantité d'amortissement structural fournie par les patchs dépend des niveaux de contrainte de cisaillement dans la couche amortissante. Le travail pionnier pour les patchs viscoélastiques au sein des aubes de soufflante sont les travaux de Kosmatka [44].

Au début l'aube était simplifiée par une plaque sur laquelle des prédictions numériques et des essais en rotation ont été effectués [45, 44], puis les premiers calculs sur une aube composite en

UD graphite/époxy à l'échelle 1/5 ont été réalisés [13]. Dans les années 2000, différentes configurations d'aube ont été étudiées et testées en rotation en collaboration entre Pratt&Whitney et la Nasa. La première était une aube en composite UD graphite/époxy laminé avec un longeron en titane [13] comme représenté figure 1.9. La seconde était une aube composite UD graphite/époxy laminé avec un noyau creux [46]. Les patches viscoélastiques sont insérés dans le laminé. Une efficacité importante de ces derniers pour augmenter l'amortissement des aubes a été montrée pour l'ensemble des modes en rotation.

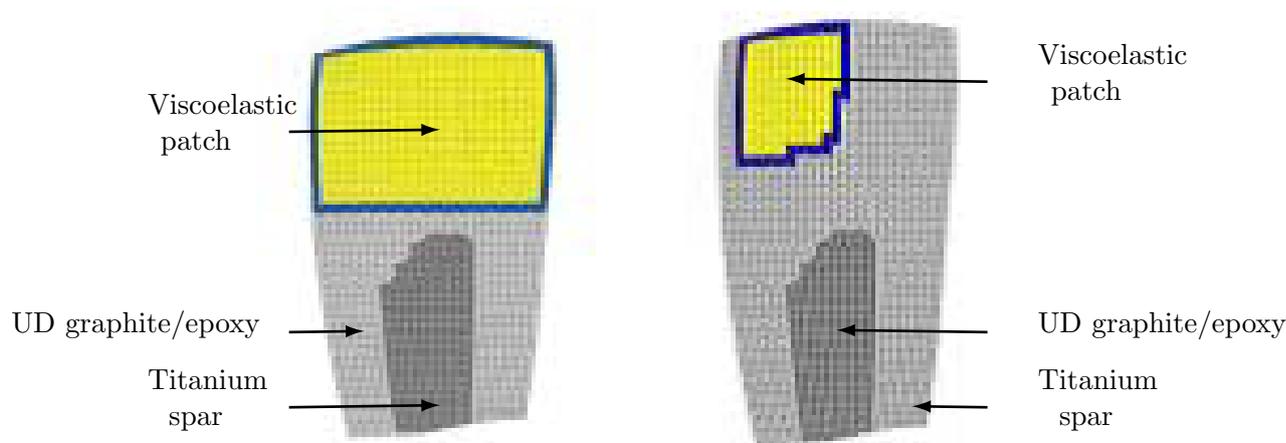
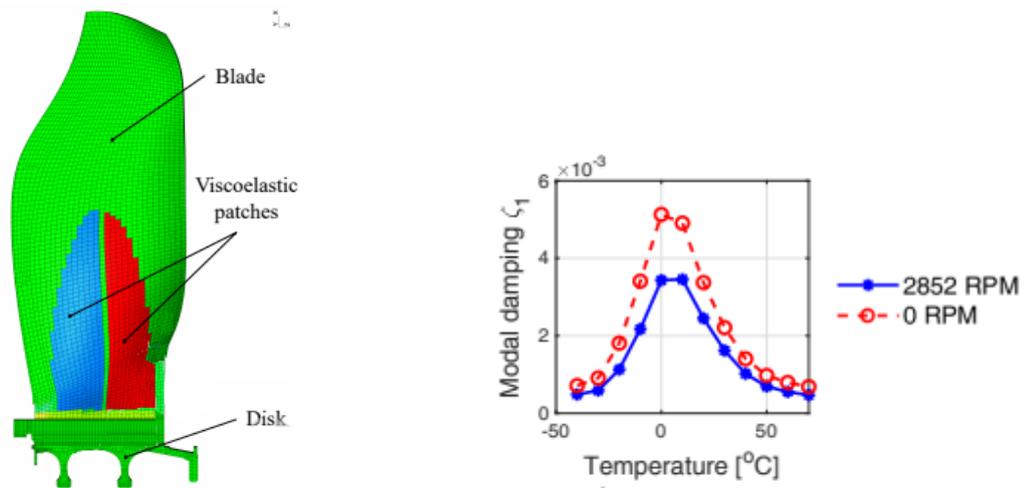


FIGURE 1.9 – Positionnement des patches viscoélastiques d'après Kosmatka [13].

Les travaux menés par SDTools pour Safran sur l'utilisation de patches viscoélastiques datent des années 2000 avec une première application publiée pour l'étage *BLISK* du compresseur où le disque et les aubes sont monoblocs [47, 48]. L'ajout de matériaux viscoélastiques dans une aube de soufflante en composite a fait l'objet de brevets par les ingénieurs de Safran Aircraft Engines [14, 15]. Cette solution représente une solution technologique efficace pour réduire les vibrations mais est sensible aux variations de température. La configuration d'aube de soufflante amortie avec des patches viscoélastiques a été conçue depuis 2008 par SDTools pour Safran et réalisée dans le cadre du projet CORAC-EPICE. Cette dernière a été reprise en 2020 pour un calcul d'amortissement par Rouleau [49]. Ce calcul, rendu public, permet de quantifier l'influence de la température et de la vitesse de rotation sur l'efficacité du traitement d'amortissement passif.

La configuration de positionnement des patches sur la face extradors de l'aube représentée en figure 1.10a permet d'obtenir les résultats montrés figure 1.10b. Les conclusions sont que la vitesse de rotation augmente la fréquence mais diminue l'amortissement en restant supérieur au calcul sans rotation. Une évolution en cloche entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $80^{\circ}\text{C}$  est observée avec un pic à environ  $0^{\circ}\text{C}$ . À noter que l'amortissement propre à l'aube n'est pas pris en compte.



(a) Positionnement des patches viscoélastiques

(b) Résultats du mode 1 en température

FIGURE 1.10 – Amortissement modal d'une aube tissée 3D avec patches viscoélastiques.

Pour rappel, ces travaux s'inscrivent dans une solution intrinsèque visant à hybrider les mésostructures tissées 3D par des joncs élastomères afin de tirer profit de leur capacité de dissipation importante. Contrairement aux technologies extrinsèques exposées précédemment, son intégration interne est un avantage. De plus, étant donné l'application visée sur des pièces tournantes devant avoir une résistance à l'impact, sa robustesse est un atout. Le chapitre 5 est consacré à l'armure hybridée qui possède comme autre avantage d'avoir des voies d'optimisation aussi bien géométriques que matérielles nombreuses.



## **Chapitre 2**

# **Viscoélasticité linéaire et mécanique des milieux continus**

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions nécessaires à la compréhension du comportement viscoélastique linéaire. La représentation de ce type de comportement repose sur l'hypothèse que la contrainte est une fonction linéaire de l'historique des déformations. Un matériau possédant un comportement viscoélastique possède des propriétés à la fois élastiques et visqueuses. Sous une sollicitation donnée, une part de l'énergie est stockée puis restituée et l'autre est dissipée sous forme de chaleur.

Le chapitre précédent a montré que le comportement viscoélastique est la source principale de l'amortissement dans les matériaux composites. Il est donc important de bien comprendre les spécificités qui y sont associées. La section 2.1 détaille les différents moyens de caractérisation. Ensuite, en section 2.2, l'accent est mis sur l'analyse du module complexe de la résine résultant d'un essai harmonique. Enfin, pour les milieux tridimensionnels abordés en section 2.3, le taux de perte est exprimé en fonction du travail élastique et dissipé, et une décomposition ainsi qu'une paramétrisation des lois de comportement viscoélastique sont abordées avec une écriture matricielle adaptée à la stratégie d'homogénéisation mise en place en chapitre 3.

## 2.1 Viscoélasticité linéaire et caractérisation

L'hypothèse sous-jacente à la viscoélasticité linéaire est l'existence d'une dépendance linéaire de la contrainte à l'histoire de la déformation. Cette dépendance, associée à la linéarité du comportement, correspond en analyse des systèmes à un système linéaire invariant dans le temps. Les deux quantités sont liées par une fonction de transfert dans le domaine fréquentiel ou sa transformée temporelle la réponse impulsionnelle. Dans l'analyse des matériaux, ce transfert est appelé module complexe noté  $E(\omega)$ .

Les deux premières sections s'intéressent à la caractérisation du comportement viscoélastique, soit par essais de vibration sinus comme classiquement considéré dans les essais harmoniques d'analyse mécanique dynamique (*DMA : Dynamic mechanical analysis*), soit par des échelons temporels comme dans les essais de fluage et de relaxation. La viscoélasticité dépend de la fréquence des sollicitations mécaniques (essais dynamiques) ou du temps d'observation (essais quasi-statiques) et de la température. Dans le cas linéaire, le passage entre temps et fréquence est classique comme explicité en section 2.1.3. Enfin, la dernière section introduit les modèles rhéologiques qui ne sont toutefois pas obligatoires pour caractériser l'amortissement.

Au sein de cette section, une approche unidimensionnelle est détaillée avec un comportement matériau supposé viscoélastique linéaire non vieillissant. Cela signifie que son comportement ne dépend pas de l'âge du matériau, ni de son éventuelle dégradation physique ou chimique. La linéarité de la correspondance entre l'histoire de la sollicitation et celle de la réponse s'exprime par le principe de superposition de Boltzmann [50]. Par ailleurs, cette section se place dans le cadre des petites perturbations, correspondant à la combinaison de deux hypothèses fortes qui sont celles des petites déformations et des petits déplacements.

### 2.1.1 Essai sinusoïdal : module complexe sous sollicitation harmonique

Lors d'un essai DMA, pour une sollicitation harmonique  $\epsilon(t)$  à la pulsation  $\omega$ , l'hypothèse de dépendance linéaire de la contrainte à l'histoire de la déformation impose que la contrainte  $\sigma(t)$  est une réponse à la même fréquence

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \Re(\epsilon(\omega)e^{i\omega t}) \\ \sigma(t) &= \Re(\sigma(\omega)e^{i\omega t})\end{aligned}\quad (2.1)$$

avec  $\Re$  désignant la partie réelle,  $\epsilon(\omega)$  la première harmonique de la transformée de Fourier de la déformation,  $\sigma(\omega)$  celle des contraintes.

Cet essai permet de caractériser le transfert, au sens de la dynamique des systèmes qui dans le cas scalaire est donné par  $\sigma(\omega)/\epsilon(\omega)$ . En effet, la relation entre la contrainte et la déformation à la fréquence d'essai est supposée liée par une équation différentielle linéaire. Dans la terminologie usuelle pour les matériaux, ce transfert est appelé module complexe

$$\frac{\sigma(\omega)}{\epsilon(\omega)} = E(\omega) \quad (2.2)$$

et il caractérise le facteur d'amplification et de déphasage entre les mesures de contrainte et déformation. Ainsi, il est usuel d'écrire le module complexe  $E(\omega)$  en explicitant la relation avec une partie réelle et une imaginaire.

$$E(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)(1 + i\eta(\omega)) \quad (2.3)$$

avec  $E'(\omega)$  le module de stockage représentant la composante élastique et la capacité du matériau à stocker l'énergie mécanique fournie,  $E''(\omega)$  le module de perte représentant la composante visqueuse et la capacité à dissiper l'énergie au cours d'un cycle et  $\eta(\omega)$  le facteur de perte. Ce dernier est défini comme le ratio de la partie imaginaire et réelle du module complexe

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (2.4)$$

En temporel, pour les matériaux viscoélastiques la réponse est déphasée par rapport à la sollicitation. C'est la partie visqueuse qui est à l'origine du comportement différé du matériau, entraînant un angle de déphase caractéristique du niveau d'amortissement du matériau. La relation entre contrainte et déformation s'écrit alors

$$\sigma(t) = \Re(E(\omega)\epsilon(\omega)e^{i\omega t}) = \Re(E'(\omega)(1 + i\eta(\omega))\epsilon(\omega)e^{i\omega t}) = \Re(|E(\omega)||\epsilon(\omega)|e^{i(\omega t + \delta)}) \quad (2.5)$$

où  $|E(\omega)|$  représente le module du module complexe,  $|\epsilon(\omega)|$  décrit l'amplitude du cycle de déformation, et la relation entre le facteur de perte et le déphasage apparaît comme s'écrivant  $\eta(\omega) = \tan \delta$ . Pour un essai DMA, différentes sollicitations comme la traction, la flexion ou la torsion sont envisageables en fonction notamment de la dimension de l'échantillon testé.

### 2.1.2 Essais temporels : fluage et relaxation

Comme traditionnellement pour la caractérisation d'un système linéaire invariant dans le temps, il est possible de caractériser la fonction de transfert dans le domaine temporel. En mécanique des matériaux, il est classique de considérer des échelons : les essais de fluage et de relaxation.

L'expérience de fluage consiste à appliquer un échelon de contrainte. La déformation suit alors une évolution temporelle de la forme

$$\epsilon(t) = J(t)\sigma_0 \quad (2.6)$$

où  $J(t)$  est dénommée fonction de fluage et illustrée en figure 2.1 et  $\sigma_0$  l'amplitude de la contrainte. En pratique, un deuxième échelon de décharge est régulièrement considéré. Il s'agit de la phase de recouvrance.

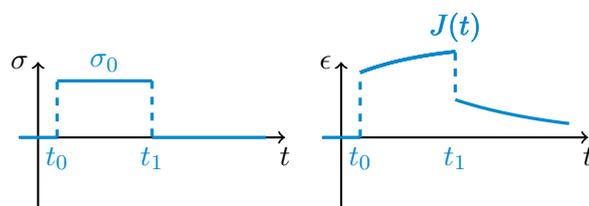


FIGURE 2.1 – Essai de fluage avec recouvrance.

L'expérience de relaxation est la duale de la précédente. Un échelon de déformation est réalisé. Une évolution de contrainte de la forme

$$\sigma(t) = R(t)\epsilon_0 \quad (2.7)$$

est observée, avec  $\epsilon_0$  l'amplitude de la déformation et caractérisant une fonction de relaxation  $R(t)$  illustrée en figure 2.2. En cas de relâchement de la déformation, la contrainte s'annule totalement ou partiellement après un temps long. Cette expérience de charge-décharge en déformation exposée figure 2.2 est appelée recouvrement.

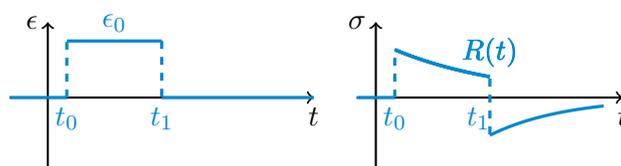


FIGURE 2.2 – Essai de relaxation avec recouvrement.

### 2.1.3 Passage temporel/fréquentiel : principe de correspondance

L'équivalence entre la représentation par une équation différentielle en temps, une fonction de relaxation ou un transfert est l'objet des théories de Fourier et de Laplace.

La transformée de Laplace inverse du module complexe  $E(s)$  est  $E(t) = \dot{R}(t)$  la dérivée temporelle de la fonction de relaxation

$$E(t) = \dot{R}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} E(s)e^{st} ds \quad (2.8)$$

où  $s$  la variable de Laplace, est l'inverse d'un temps  $t$  et  $\mathcal{L}$  est la transformée de Laplace.

Pour les essais de relaxation qui caractérisent  $R(t)$ , la transformée de Laplace-Carson est utilisée donnant

$$E(s) = s\mathcal{L}(R(t)) = \int_0^{+\infty} \dot{R}(t)e^{-st} dt \quad (2.9)$$

Les essais harmoniques permettent d'accéder à la partie Fourier  $s = i\omega$  du plan de Laplace,  $E(i\omega)$  est donc connu. Pour accéder à  $E(s)$  dans l'ensemble du plan un relèvement peut éventuellement être utilisé.

En temporel, connaissant la réponse impulsionnelle, qui est la dérivée de la fonction de relaxation, il est possible d'en déduire tout type de réponse avec le produit de convolution. Ainsi, ce dernier s'exprime comme [50]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(\tau)E(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t - \tau)\dot{\epsilon}(\tau)d\tau. \quad (2.10)$$

avec  $\dot{\epsilon}(\tau)$  la dérivée temporelle de la déformation et  $\tau$  est un changement de variable pour laquelle les fonctions sont intégrables.

Dans les exposés de la communauté matériau, la transformée de Laplace-Carson est considérée. Il s'agit de la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction, découlant sur une multiplication par la variable de la transformée de Laplace de la fonction [51]. Le principe de correspondance viscoélastique linéaire suppose la linéarité de comportement du matériau. Le nom de la transformée, qui permet de faire disparaître la dépendance au temps, dépend du type d'essai réalisé mais la finalité est la même. Pour les essais de fluage et de relaxation, la transformée de Laplace-Carson est invoquée alors que pour les essais harmoniques, c'est celle de Fourier.

#### 2.1.4 Modélisations rhéologiques du comportement viscoélastique

Il peut, comme en dynamique des systèmes, être utile de procéder à la construction d'un modèle paramétrique sous forme d'équation différentielle. Dans la communauté matériau, ceci correspond à un modèle rhéologique. Dans le cas de cette thèse, l'exploitation directe du module complexe sera utilisée pour effectuer l'homogénéisation viscoélastique ce qui permet de s'affranchir de toute modélisation du comportement par un modèle rhéologique.

Les figures 2.3a et 2.3b représentent respectivement le modèle de Kelvin qui associe un ressort et un amortisseur montés en parallèle et le modèle de Maxwell où un ressort et un amortisseur sont montés en série. Ces modèles sont très basiques et limités, c'est pourquoi le modèle Maxwell généralisé, représenté en figure 2.3c est utilisé pour caractériser le comportement d'un matériau

viscoélastique linéaire. Il est constitué de  $n$  modèles de Maxwell assemblés en parallèle auxquels une branche parallèle supplémentaire constituée d'un simple ressort est ajoutée. Ceci permet d'assurer une recouvrance totale c'est-à-dire que la déformation s'annule pour des temps suffisamment grands. Avec une branche, il est appelé modèle Zener ou encore amortissement de solide viscoélastique standard. Il permet de reproduire de manière simplifiée le comportement d'un matériau viscoélastique avec la présence d'une asymptote haute et basse fréquence. Renaud [52] s'est intéressé aux comportements en module et en amortissement générés par chacun des modèles décrits précédemment. Il a notamment réalisé une identification des paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement en utilisant de la méthode des asymptotes.

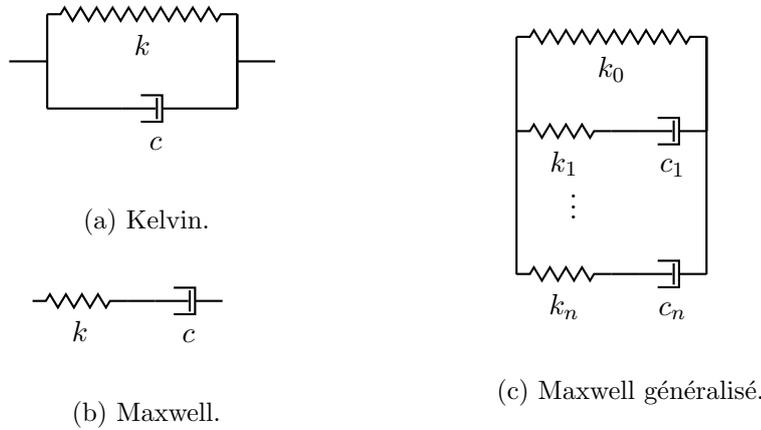


FIGURE 2.3 – Modèles rhéologiques de base.

Pour le modèle Maxwell généralisé, le module complexe dans l'espace fréquentiel s'écrit

$$E(\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n k_i \frac{s}{s + \frac{1}{\tau_i}} = k_0 + \sum_{i=1}^n k_i \frac{s\tau_i}{1 + s\tau_i} \text{ avec } \tau_i = \frac{c_i}{k_i}. \quad (2.11)$$

Le module complexe est obtenu pour  $s = i\omega$ .

$$E(i\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n k_i \frac{i\omega\tau_i}{1 + i\omega\tau_i} \quad (2.12)$$

La représentation dans l'espace temporel du modèle de Maxwell généralisé est une série de Prony. La fonction de relaxation  $E(t)$  s'écrit

$$E(t) = k_0 + \sum_{i=1}^n k_i e^{-\frac{k_i}{c_i}t} = k_0 + \sum_{i=1}^n k_i e^{(-\frac{t}{\tau_i})} \quad (2.13)$$

avec  $\tau_i$  les temps caractéristiques de relaxation de chaque branche.

La fonction de relaxation peut aussi s'écrire à l'aide du spectre des temps de relaxation considéré comme une fonction continue  $\mathbb{H}(\tau)$  et non plus comme une somme de terme discret avec chacun un temps caractéristiques  $\tau_i$  comme dans une série de Prony. Ainsi pour un matériau viscoélastique linéaire, dans l'espace temporel,

$$E(t) = k_0 + \int_0^{+\infty} \mathbb{H}(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \quad (2.14)$$

Pouvant avoir une forme gaussienne, triangulaire ou rectangle, la formulation spectrale permet d'éviter les problèmes d'identification de paramètres associés aux modèles rhéologiques généralisés et possède comme principal avantage par rapport à un spectre discret d'avoir un faible nombre de paramètres à identifier [53].

Pour une exploitation au sein de calculs numériques, le spectre de relaxation est recherché comme discret ce qui passe par la discrétisation de l'axe des temps de relaxation  $\tau$  en une série finie  $\tau_i$  [54]. Ceci est exprimée par la série de Prony exprimée en équation (2.13). Classiquement, une discrétisation avec un pas logarithmique régulier est choisie. Le choix, purement arbitraire, est souvent défini par un temps de relaxation par décade. Plusieurs méthodes existent afin de caractériser le spectre des temps de relaxation  $\mathbb{H}(\tau)$ . À partir du module complexe [55] l'obtention du spectre de relaxation est un problème mathématique n'ayant pas une solution unique. C'est pourquoi en fonction des choix des temps de relaxation, il est possible d'observer une réponse ondulante [56]. A l'aide d'algorithmes, il est possible d'identifier des spectres discrets à partir d'essai de relaxation [57].

La caractérisation du matériau viscoélastique en temporel peut être un enjeu notamment pour la modélisation des contraintes résiduelles comme détaillé par Courtois [11]. Une série d'essais de relaxation peut être utilisée, pour pouvoir construire une courbe maîtresse caractéristique du comportement viscoélastique du matériau en temporel. Une fois construite cette dernière peut être modélisée par une série de Prony puis utilisée dans l'espace fréquentiel. L'avantage de l'utilisation du module complexe vis-à-vis de cette approche est une exploitation directe des données dans le domaine fréquentiel.

## 2.2 Dépendance de la résine à la fréquence et à la température

Le comportement viscoélastique possède une dépendance au temps et donc en fréquence, mais aussi à la température. En règle générale les essais quasi-statiques, de fluage ou de relaxation sont réalisés dans un cadre isotherme alors qu'un essai DMA peut être réalisé dans un cadre isotherme avec une variation de la fréquence de sollicitation ou à une fréquence fixe avec une température variable.

L'essai DMA de la résine, utilisée ici, est effectué à différents isothermes entre  $-65^{\circ}\text{C}$  et  $130^{\circ}\text{C}$  avec des paliers de  $15^{\circ}\text{C}$  et à des fréquences variant de 0.1Hz à 10Hz. Le domaine d'intérêt de l'application est une fréquence comprise entre 50 et 150 Hz et des températures allant de  $-40^{\circ}\text{C}$  à  $120^{\circ}\text{C}$ . Il n'est pas toujours possible, pour des contraintes techniques, de caractériser les matériaux directement sur le domaine d'intérêt, c'est pourquoi le principe d'équivalence fréquence/température est une méthode utilisée pour passer outre.

Il est dans un premier temps étudié l'existence d'une fonction de transfert unique ne dépendant que de la fréquence et de la température, à l'aide d'indicateurs classiques tels que les diagrammes Cole-Cole ou de Wicket, similaires aux diagrammes de Nyquist utilisés en analyse des

systèmes. Cette étude permet de montrer la pertinence de l'équivalence fréquence/température, qui est appliqué au matériau thermo-rhéologiquement simple pour construire la courbe maîtresse.

### 2.2.1 Traitement des données brutes

Le comportement viscoélastique de la résine, caractérisé par le module de stockage  $E'$  et le facteur de perte  $\eta$  défini par  $\eta = \tan(\delta)$ , a été déterminé par essai DMA, pour différentes fréquences et températures.

La figure 2.4 montre la variation du module de stockage et du facteur de perte de la résine pour l'essai réalisé. Le module de stockage,  $E'$ , est normé par sa valeur minimum. Il diminue avec une augmentation de la température ce qui est classique pour un polymère. Pour le facteur de perte, la tendance n'est pas uniforme. Un maximum d'amortissement est observé pour les isothermes  $-65^\circ\text{C}$  et  $130^\circ\text{C}$  et un minimum pour  $-5^\circ\text{C}$ .

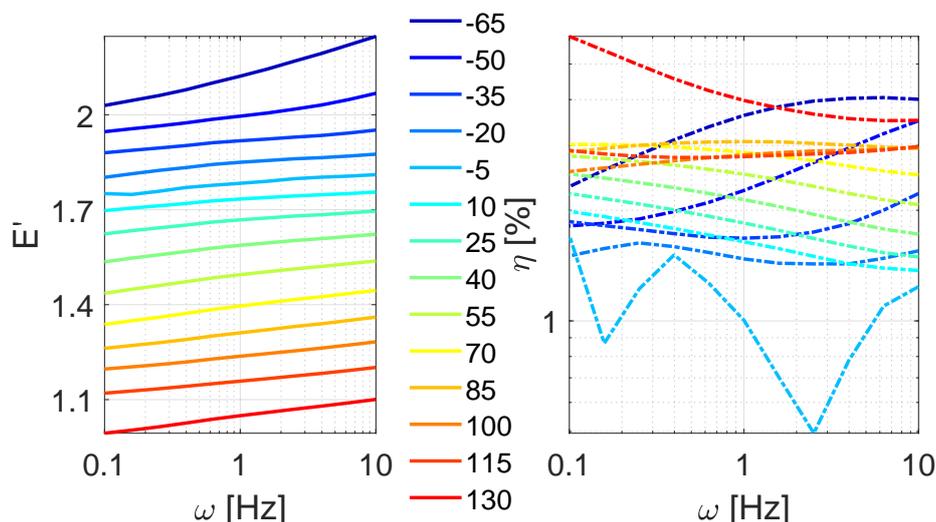


FIGURE 2.4 – Données brutes de l'essai DMA à différents isothermes pour une gamme de fréquence entre [0.1,10]Hz et de température entre  $[-65,130]^\circ\text{C}$ .

Deux représentations permettent d'étudier le transfert, en s'affranchissant de la fréquences. Le diagramme Cole-Cole [58] et le diagramme Wicket [59] représentent respectivement le module de perte  $E''$  et le facteur de perte  $\eta$  en fonction du module de stockage  $E'$ .

La figure 2.5 représente le diagramme Wicket associé au comportement de la résine pour deux essais distincts, l'un réalisé entre  $-65^\circ\text{C}$  et  $130^\circ\text{C}$ , et l'autre entre  $20^\circ\text{C}$  et  $200^\circ\text{C}$ , en gris. Le module de stockage du second test a été ajusté avec celui du deuxième car ce dernier était légèrement supérieur. Pour différents isothermes, les courbes se superposent suffisamment pour qu'une seule courbe puisse être considérée. Pour des raisons de confidentialité, le module de stockage en abscisse a été normé par rapport à sa plus petite valeur obtenue au cours de l'essai à  $200^\circ\text{C}$ .

La figure 2.5 montre aussi certaines propriétés importantes de la résine considérée. La présence d'un grand anneau simple correspond à la transition dite  $\alpha$  pour des températures entre

115 et 200°C. Ensuite pour des modules élevés, c'est-à-dire supérieurs à 2GPa, le comportement est plus difficile à analyser. En effet, deux anneaux d'amplitude faible apparaissent correspondant respectivement aux transitions  $\omega$  et  $\beta$ . Ces dernières sont caractéristiques du comportement de la résine à l'état initial [60, 61]. Pour comprendre ces transitions il faut s'intéresser à la chimie de la résine. Celle utilisée ici appartient à la famille des thermodurcissables. Le réseau macromoléculaire tridimensionnel est formé à l'issue de réactions irréversibles et est composé d'un pré-polymère époxy et d'un durcisseur amine. Les essais DMA mettent en évidence l'existence de mouvements moléculaires caractéristiques du réseau appelés transitions. La transition  $\alpha$  est visible à haute température. Elle correspond à la relaxation des chaînes lors du passage de l'état vitreux à l'état caoutchoutique. La transition  $\beta$  apparaît à des températures négatives (parfois au-delà de  $-60^\circ\text{C}$ ) et est attribué à la mobilité locale de groupement spécifiques des réseaux époxy. Il s'agit de mouvements locaux des chaînes. L'amplitude de cette transition augmente avec le degré de réticulation car le groupement à l'origine des mouvements se forme à la suite de la réaction entre un époxyde et une amine. La transition  $\omega$  se situant entre la transition  $\alpha$  et  $\beta$  correspond au léger regain d'amortissement après la transition  $\alpha$ . Son origine fait débat, elle serait due soit à la plastification d'une partie du réseau époxy par la présence d'eau, soit à la mobilité de segment libres n'ayant pas réagi lors de la réticulation, soit à la mobilité de zones fortement réticulées d'une partie du réseau époxy.

Les courbes ne sont pas parfaitement superposées et discontinues. La cause peut être due à un effet du comportement matériau qui est complexe dans la zone d'intérêt ou bien à un problème lors de l'essai tels que des conditions limites hasardeuses avec des problèmes de frottement ou encore une stabilisation thermique mal réalisée. Les écarts entre les segments sont néanmoins suffisamment réduits pour que dans la suite des travaux, l'ensemble des données mesurées soient exploitées et que le principe d'équivalence temps température soit appliqué.

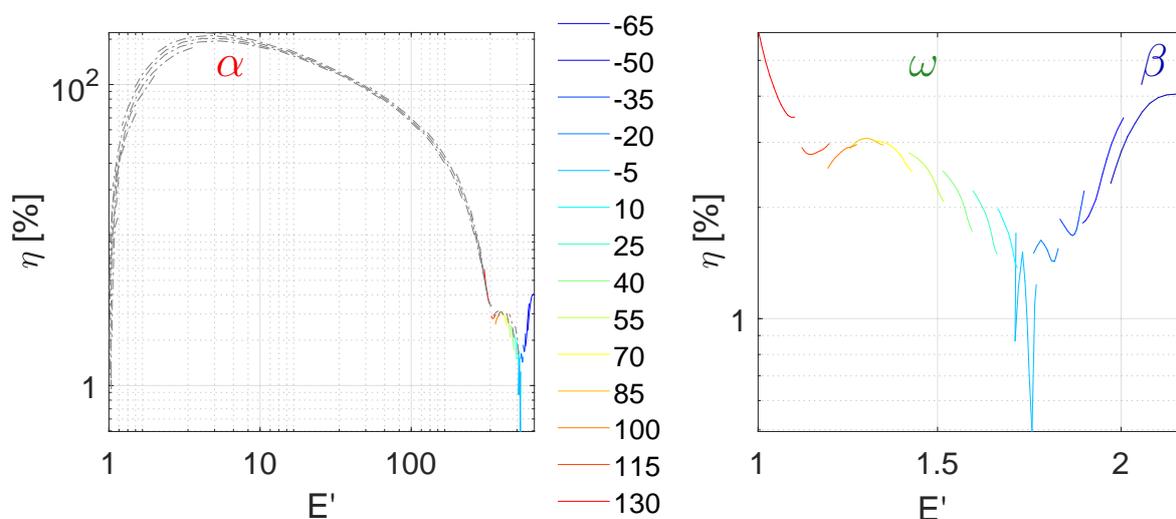


FIGURE 2.5 – Diagramme de Wicket pour la résine étudiée entre  $[-65,200]^\circ\text{C}$  (gauche) et zoom associé pour  $[-65,130]^\circ\text{C}$  (droite).

### 2.2.2 Équivalence temps/température

Expérimentalement, une augmentation de la raideur est observée avec une baisse de la température ou une augmentation de la vitesse. Par ailleurs, le diagramme de Wicket, montré dans la section précédente, a permis de constater que le module complexe pouvait être approché par une seule courbe quelle que soit la combinaison température/fréquence. Dans un tel cas, le matériau viscoélastique est dit thermo-rhéologiquement simple [62, 63, 64] et la paramétrisation par une abscisse curviligne, appelée une fréquence réduite, dépendante de la fréquence et de la température est définie par  $\alpha(T)\omega$ . Pour chaque température, il existe un changement de variable en fréquence qui est précisément explicité comme

$$E(\omega, T) = E(\alpha(T)\omega) \quad (2.15)$$

avec un facteur de décalage  $\alpha(T)$  déterminé, à chaque isotherme, à partir des données expérimentales de manière à minimiser les sauts entre les différentes température. Cela signifie qu'à température élevée, le comportement du matériau à une sollicitation de courte durée est identique à celui d'une sollicitation de longue durée à température basse.

La figure 2.6 montre, pour une température de référence de  $25^\circ\text{C}$  où  $\alpha(25^\circ\text{C}) = 0$ , que les facteurs de décalage définis expérimentalement pour cette étude suivent une droite linéaire, c'est pourquoi aucune loi analytique comme la loi Williams-Landel-Ferry (WLF), celle d'Arrhénius ou encore celle de Vogel-Tamman-Flulcher [65] n'est utilisée. Chaque loi possède ses spécificités et leur efficacité dépend de la nature du matériau et de la gamme de température d'étude.

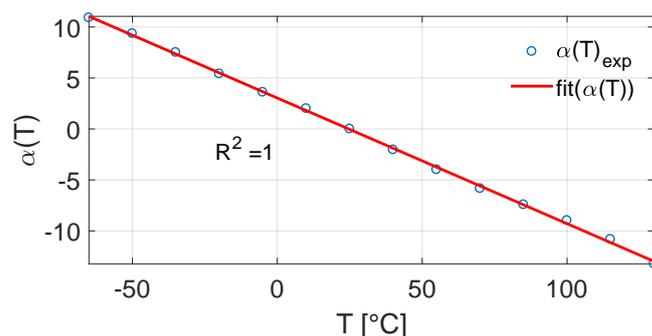


FIGURE 2.6 – Facteurs de décalage retenus pour tracer la courbe maitresse en figure 2.7.

La figure 2.7 montre la superposition des courbes en module de stockage et en facteur de perte pour des isothermes allant de  $-65^\circ\text{C}$  à  $200^\circ\text{C}$  en fonction de la fréquence réduite. La plage d'intérêt est la zone colorée, elle se situe au-delà de la transition vitreuse qui est présente avec l'essai en gris. La température de référence de représentation de la figure 2.7 est de  $70^\circ\text{C}$ .

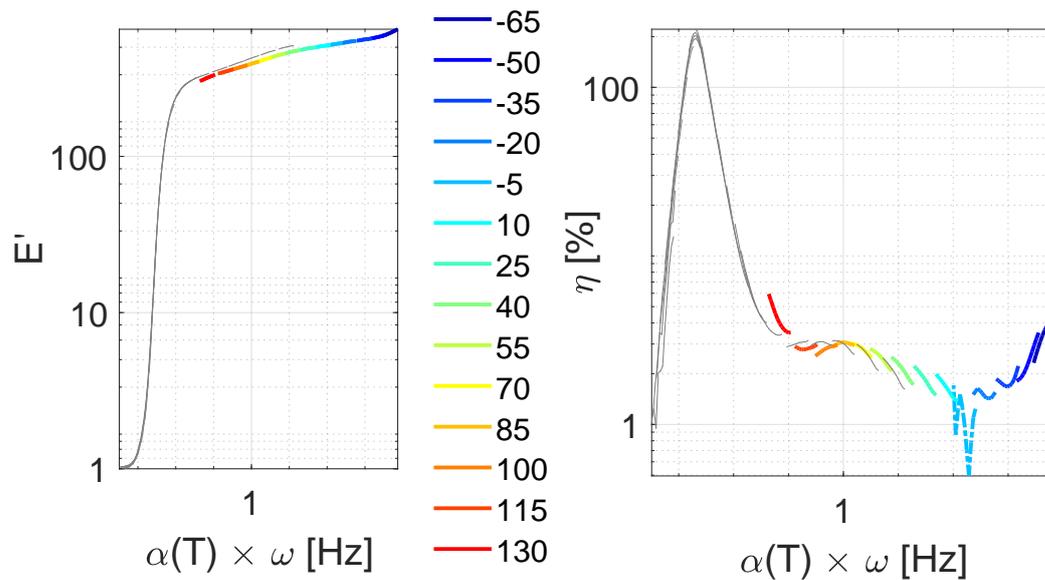


FIGURE 2.7 – Courbe maitresse du module de stockage et du facteur de perte de la résine.

Concernant le facteur de perte de la résine, une continuité raisonnable dans le comportement est observée entre les deux essais. Ceci est rassurant quant à la confiance vis-à-vis de ces résultats étant donné l'effet saccadé des mesures. Une explication proposée pour les discontinuités est une acquisition des données trop rapide avant une stabilisation thermique de l'échantillon au sein de la machine. De plus, pour ces niveaux de température, le module de stockage de la matrice est très élevé avec un niveau d'amortissement bas ce qui est peu adapté pour un essai DMA ou la précision de mesure est meilleure pour des matériaux mous avec des facteurs de perte élevés tels les élastomères ou les caoutchoucs.

Ces données seront utilisées lors des calculs éléments finis pour les homogénéisations viscoélastiques des composites tissés 3D. Afin de s'affranchir de l'effet discontinu des facteurs de perte, observé expérimentalement, la figure 2.8 montre le lissage dans la zone d'intérêt de la courbe maîtresse des facteurs de perte, représentée en figure 2.7, avec un polynôme de degré 6. Le coefficient de détermination de cette fonction est  $R^2 = 0.95$ , ce qui est considéré comme satisfaisant.

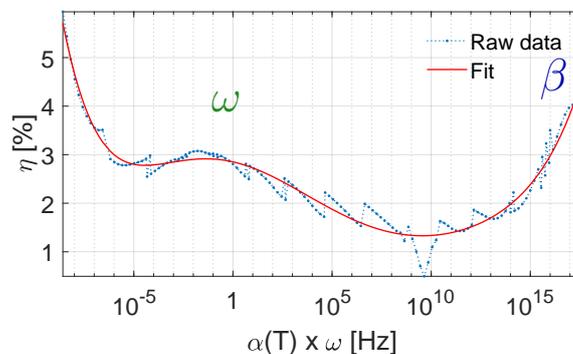


FIGURE 2.8 – Lissage de la courbe de tendance du facteur de perte  $\eta$  dans la zone d'intérêt.

La solution technologique envisagée au sein de ces travaux utilise des joncs élastomères afin d'hybrider l'armure tissée 3D. La caractérisation des comportements viscoélastiques des élastomères à l'aide du module complexe a mis en évidence pour des niveaux de déformation important d'au moins 10%, des phénomènes additionnels qui ne seront pas considérés ici comme l'effet Payne [66] et l'effet Mullins [67]. Le premier correspond à une dépendance du module dynamique mesuré à l'amplitude de la sollicitation dynamique et au niveau de charge au sein de l'élastomère. En effet, à partir d'un certain seuil, il y a une diminution du module de stockage dynamique mesuré des élastomères chargés avec une amplitude de déformation croissante. Des études approfondies sur cet effet ont été réalisées en étudiant les propriétés dynamiques du caoutchouc naturel vulcanisé chargé en noir de carbone [68]. Cet effet semble être présent pour de nombreux élastomères chargés et s'amplifie avec une augmentation du niveau de charge. Le second qui se manifeste lors d'un essai quasi-statique cyclique, correspond au phénomène d'adoucissement du matériau après une première phase de charge et ainsi de suite. Ces effets constituent simplement un point de vigilance car le cadre de l'étude qui est celui des petites déformations. Ainsi, il n'y a pas de problématique d'augmentation de l'amplitude de déformation importante, ni de rodage initial avec des ratios d'extension élevés.

## 2.3 Milieu tridimensionnel

Cette section considère un milieu continu tridimensionnel. Les lois de comportement associées sont tout d'abord décrites dans un cadre élastique sous forme matricielle avant d'être étendues à la viscoélasticité linéaire en introduisant une paramétrisation qui simplifie par la suite la mise en œuvre de l'homogénéisation numérique viscoélastique. Les travaux dissipé et élastique sont ensuite définis au point matériel puis une décomposition de la loi de comportement viscoélastique en valeurs singulières est utilisée pour quantifier les fractions d'énergie associées à chaque composante.

### 2.3.1 Les lois de comportement en élastique

Les lois de comportement permettent de relier les contraintes aux déformations. Dans le cadre des petites perturbations en élasticité linéaire, le comportement s'exprime par la loi de Hooke généralisée. Elle permet de relier l'état de contrainte à celui de déformation par

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (2.16)$$

où  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  représentent respectivement le champ de contrainte et de déformation et  $[C]$  la matrice des modules de rigidité. L'écriture matricielle est privilégiée c'est pourquoi les tenseurs de contraintes et de déformations d'ordre 2 sont notés comme des vecteurs alors que le tenseur d'ordre 4 des modules de rigidité apparaît comme une matrice de dimension  $6 \times 6$ .

La matrice des modules de rigidité  $[C]$  est définie positive et par conséquent inversible. Son inverse est nommé souplesse. Par symétrie, elle se réduit à 21 composantes indépendantes dans

le cas anisotrope, 9 dans le cas orthotrope et 7 dans le cas isotrope transverse.

L'équation (2.16) s'exprime en la notation de Voigt (ou notation de l'ingénieur) comme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{symm.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

avec l'introduction de la notation dite du cisaillement de l'ingénieur dans le vecteur colonne des déformations avec  $\epsilon_l = 2\epsilon_{mn}$  pour  $m \neq n$  et  $l = 9 - (m + n)$ .

Dans le cas orthotrope,  $[C]$  est décrite comme

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, la rigidité s'exprime à l'aide des coefficients de Lamé  $(\lambda, \mu)$  et la souplesse à l'aide de  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $E$  le module de Young conduisant à

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{symm.} & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

avec  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  et la matrice des modules de souplesse par

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Viscoélasticité et paramétrisation des lois de comportement

L'introduction de la viscoélasticité, comme discuté en section 2.1 fait intervenir des composantes complexes. La paramétrisation des lois de comportement permet de conserver des matrices réelles comme en élasticité linéaire en affectant une pondération complexe.

Pour un matériau viscoélastique linéaire, le champ de contrainte  $\{\sigma\}$  est relié au champ de déformation  $\{\varepsilon\}$  par

$$\{\sigma\} = [C(T, \omega)] \{\varepsilon\} \quad (2.21)$$

avec

$$C_{kl}(T, \omega) = C'_{kl}(T, \omega) + iC''_{kl}(T, \omega) = C'_{kl}(T, \omega)(1 + \eta_{kl}(T, \omega)). \quad (2.22)$$

Pour alléger les notations, dans la suite toutes les composantes  $C_{kl}(T, \omega)$  complexes et dépendantes de la température et de la fréquence sont notées  $C_{kl}$ .

Les comportements (2.17) ou (2.18) peuvent s'écrire comme une somme de matrices réelles avec une pondération complexe de la forme

$$\begin{aligned} [C] &= C_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 0 \end{bmatrix} + C_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 0 \end{bmatrix} + \dots + C_{66} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{kl} C_{kl} [C_{kl}^u] \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec  $C_{kl}$  la  $kl^{\text{ème}}$  composante complexe de la matrice des rigidités et  $[C_{kl}^u]$  une matrice réelle constante *unitaire* avec comme seule composante non nulle le coefficient d'indice  $kl$  avec  $k, l \in [1, 6]$ . Un facteur de perte  $\eta_{kl}$  est associé à chaque module de rigidité.

Dans le cas particulier du matériau isotrope, la loi de Hooke peut être exprimée avec les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  comme le produit de deux matrices réelles

$$[C] = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La paramétrisation avec les coefficients  $E$  et  $\nu$  n'est pas naturelle du fait des relations non-linéaires  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Un cas pratique est de considérer le coefficient de Poisson comme réel et constant conduisant à

$$[C] = E [C^u] = E \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2(1+\nu)} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

avec  $E$  le module complexe du matériau viscoélastique isotrope. Néanmoins, des études expérimentales [69, 70, 71] visant à caractériser un coefficient de Poisson complexe, dépendant de la fréquence et de la température existent mais semblent encore difficiles à interpréter. Les paramétrisations en modules complexes (2.23) permet de s'affranchir de la discussion.

### 2.3.3 Définition des travaux dissipé et élastique au point matériel

Le facteur de perte permet de quantifier de manière adimensionnelle la capacité d'un matériau à dissiper une partie de l'énergie lors d'un cycle de sollicitation. La définition introduite en

section 2.1.1 est basée sur le déphasage entre contrainte et déformation mais une autre analyse en terme de travail est aussi classique. Nashif [72], relie le facteur de perte avec le travail dissipé noté  $W_{diss}$  et le maximum du travail élastique noté  $W_{elas}$  comme

$$\eta = \frac{W_{diss}}{2\pi W_{elas}} \quad (2.26)$$

Pour chaque champ de contrainte  $k$  noté  $\{\sigma_k(t)\}$  et pour chaque champ de déformation calculé  $l$ , noté  $\{\varepsilon_l(t)\}$ , le travail dissipé  $W_{diss}$  sur un cycle de période  $T = 2\pi/\omega$  est égale à

$$W_{diss}(\{\sigma_k\}, \{\varepsilon_l\}) = \int_0^T \{\sigma_k(t)\}^T \{\dot{\varepsilon}_l(t)\} dt \quad (2.27)$$

avec  $\{\dot{\varepsilon}_l(t)\}$  la dérivée de la déformation en fonction du temps.

La démonstration du travail dissipé pour une sollicitation harmonique est effectuée en annexe A aboutissant à

$$W_{diss}(\{\epsilon_k\}, \{\epsilon_l\}) = \pi(\{\epsilon_k(\omega)\}^H [C''(\omega)] \{\epsilon_l(\omega)\}) \quad (2.28)$$

où  $\{\}^H$  le hermitien, c'est-à-dire le vecteur transposé conjugué,  $[C'']$  la partie imaginaire de la matrice de rigidité complexe  $[C]$ .

Le travail élastique est défini de manière simple au point matériel comme le travail des efforts élastiques avec le maximum de la déformation sur le temps noté par  $max_t$  [72]. En considérant que la contrainte  $\sigma$  n'est pas induit par la déformation  $\epsilon$ , le travail s'exprime pour une contrainte  $k$  et une déformation calculée  $l$  comme

$$\begin{aligned} 2W_{elas}(\epsilon_k, \epsilon_l) &= max_t \left( \{\sigma_k(t)\}^T \{\epsilon_l(t)\} \right) = max_t \left( \{\epsilon_k(t)\}^T [C'(\omega)] \{\epsilon_l(t)\} \right) \\ &= \{\epsilon_k(\omega)\}^H [C'(\omega)] \{\epsilon_l(\omega)\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Le facteur de perte  $\eta_{kl}$  provenant d'un champ de contrainte  $k$  non nécessairement associé à un champ de déformation  $l$  s'écrit alors comme

$$\eta_{kl} = \frac{W_{diss}(\epsilon_k, \epsilon_l)}{2\pi W_{elas}(\epsilon_k, \epsilon_l)} = \frac{\{\epsilon_k(\omega)\}^H [C''(\omega)] \{\epsilon_l(\omega)\}}{\{\epsilon_k(\omega)\}^H [C'(\omega)] \{\epsilon_l(\omega)\}} \quad (2.30)$$

### 2.3.4 Fractions d'énergie : décomposition en valeurs singulières

Dans la décomposition (2.23) les différentes matrices unitaires  $[C_{ij}^u]$  ne sont pas définies positives et peuvent donc être associées à une contribution négative à l'énergie mécanique stockée au point matériel. Ceci rend difficile une interprétation de la contribution de différentes directions à un comportement global qui sera utilisé aux chapitres 4 et 5. La discussion de la paramétrisation est complétée par le souhait de pouvoir décomposer le comportement tridimensionnel en une somme de comportements scalaires, c'est-à-dire d'obtenir une expression de la loi de comportement complexe sous la forme

$$[C(\omega)] = \sum_{j=1}^6 c_j(\omega) [C_j^u] \quad (2.31)$$

avec chaque matrice  $[C_j^u]$  réelle semi définie positive, pour qu'elle représente une contribution en énergie et de rang 1 pour que cela corresponde à la définition d'une composante principale de déformation, et  $c_j(\omega)$  un module complexe principal décrivant les aspects stockage et dissipation associés à la déformation principale.

Pour des matrices réelles symétriques définies positives, comme c'est le cas du comportement élastique, les vecteurs singuliers et les vecteurs propres coïncident. La décomposition de la loi de comportement  $[C]$  est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres

$$[C] \{V_j\} = [I] \{V_j\} c_j \quad (2.32)$$

avec  $[C]$  la matrice de rigidité,  $c_j$  une valeur propre et  $\{V_j\}$  les vecteurs propres droits tel que  $\{V_j\}^T [V_k] = \delta_{jk}$  où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker (égal à 1 si  $j = k$  et à 0 si  $j \neq k$ ).

En utilisant les propriétés des vecteurs propres, l'équation (2.31) peut se réécrire comme

$$[C]_{6 \times 6} = \sum_{j=1}^6 c_j [C_j^u] = \sum_{j=1}^6 c_j [\{V_j\}_{6 \times 1} \{V_j\}_{1 \times 6}^T] \quad (2.33)$$

La décomposition de Kelvin [73] existe depuis longtemps mais reste peu utilisée, les travaux de Rychlewski [74] ou de Cowin et Mehrabadi [75] montrent cette décomposition en valeurs propres pour de nombreuses natures de matériau.

Pour un matériau orthotrope élastique, possédant par conséquent une loi de comportement réelle définie semi-positive, les six valeurs propres de la décomposition (2.32) sont distinctes. Les composantes de cisaillement ne change pas au cours de la transformation. De manière pragmatique, les vecteurs propres associés aux composantes de cisaillement, sont reconnaissables car ils ne possèdent qu'une seule composante non nulle. La détermination de la composante longitudinale et des deux transverses passe par l'observation des composantes du vecteur propre. La valeur absolue maximale du vecteur propre en première position correspond à la direction longitudinale.

Ici, l'amortissement, qui est associé au facteur de perte, est la donnée d'intérêt c'est pourquoi les lois de comportement sont complexes. La stratégie à adopter est donc légèrement différente du cas élastique. En effet, dans le cas d'une matrice complexe, la base orthogonale exprimant les composantes de la partie réelle de  $[C(\omega)]$ , notée  $[C'(\omega)]$ , doit être la même que pour celles de la partie imaginaire de  $[C(\omega)]$ , noté  $[C''(\omega)]$ . En effet, ceci est nécessaire afin que les contributions de chaque composante soient définies dans la même base pour exprimer des fractions d'énergie élastique et dissipée. En utilisant l'algèbre linéaire, il est possible de réaliser ceci en effectuant une diagonalisation simultanée de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $[C(\omega)]$ . Afin d'alléger la notation, la dépendance à  $\omega$  n'est pas explicitée. Ainsi la décomposition d'une loi de comportement complexe s'écrit

$$[C'] \{V_j\} = [C''] \{V_j\} d_j \quad (2.34)$$

La matrice des vecteurs singuliers réels  $[V] = [\{V_j\}]$  et celle des valeurs singulières  $[D]$  vérifient les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \{V_j\}^T \{V_j\} &= 1 && \text{vecteur de norme euclidienne égale à 1} \\ \{V_j\}^T [C'] \{V_k\} &= c'_j \delta_{jk} && \text{orthogonalité par rapport à } C' \\ \{V_j\}^T [C''] \{V_k\} &= c''_j \delta_{jk} && \text{orthogonalité par rapport à } C'' \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec  $[D^2]$  la matrice diagonale des carrés des valeurs singulières et  $[I]$  la matrice identité. L'objet de la décomposition étant une loi de comportement l'ensemble des matrices sont de dimension  $6 \times 6$ .

Il est intéressant de faire remarquer qu'une décomposition en valeurs propres classique comme expliqué précédemment dans le cas élastique en équation (2.33) revient à réaliser une diagonalisation simultanée de la matrice identité et de la matrice d'intérêt.

Pour une matrice symétrique définie positive complexe, comme expliqué en équation (2.31), la décomposition de la loi de comportement peut s'écrire comme

$$[C] = \sum_{j=1}^6 c_j(\omega) [C_j^u] = \sum_{j=1}^6 (c'_j + ic''_j) [\{V_j\} \{V_j\}^T] \quad (2.36)$$

Comme en élastique, la plus grande composante de  $V_j$  est utilisée pour associer un nom aux composantes. Les cisaillements ont une seule composante non-nulle, la composante longitudinale est définie comme associée à la plus grande valeur propre et les deux autres composantes de compression sont dénommées transverses.

Pour illustrer cette méthodologie, un exemple simple d'analyse modale d'une poutre est considéré. Le comportement du matériau est un comportement orthotrope viscoélastique et des conditions libre-libre sont appliquées. Le modèle éléments finis possède des dimensions de  $200 \times 14 \times 10 \text{mm}$  avec des éléments hexaédriques de 1mm. Les déformées des modes de flexion et de torsion sont représentées en figure 2.9. Les valeurs de fréquence et d'amortissement ne sont pas affichées, car ce ne sont pas les variables d'intérêt dans cet exemple d'illustration.

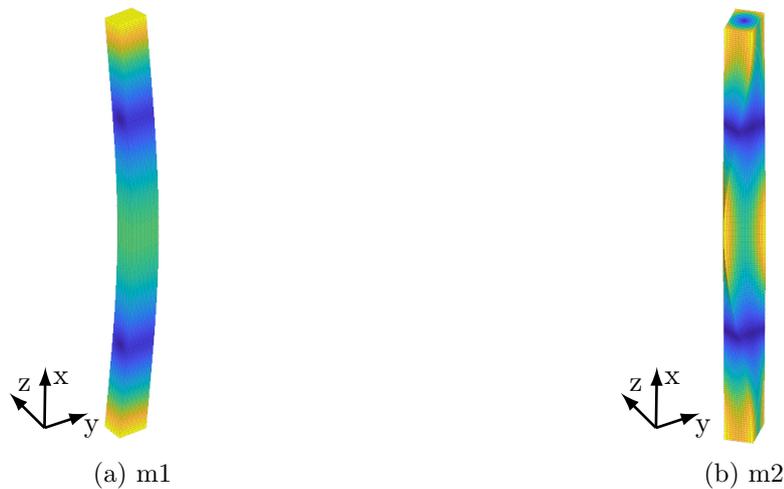


FIGURE 2.9 – Modes de flexion (m1) et de torsion (m2) en conditions libre-libre.

La méthodologie développée précédemment est utilisée afin d'identifier les composantes de la loi de comportement contribuant le plus au sein de ces deux modes distincts. Une composante principale est affectée à chaque vecteur propre en fonction de ses valeurs

$$[V] = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.11 & 0.38 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & -0.99 & 0.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & -0.06 & 0.88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_l & C_{t1} & C_{t2} & C_{yz} & C_{xz} & C_{xy} \end{matrix}$$

Au sein de la figure 2.10 chaque couleur correspondant à une composante différente. Pour le mode de flexion (m1), 93% de l'énergie élastique provient de la composante  $C_l$  et 7% de  $C_{xz}$ , pour l'énergie dissipée les mêmes composantes interviennent à des niveaux différents avec respectivement 67% et 33%. Pour le mode de torsion (m2), les composantes intervenant sont les composantes de cisaillement portées par la direction  $x$ , c'est-à-dire  $C_{xy}$  et  $C_{xz}$  avec respectivement pour l'énergie élastique 58% et 41% contre 62% et 38% pour l'énergie dissipée. Ces résultats prévisibles confortent la méthodologie de post-traitement développée, qui sera utilisée en chapitre 4 et 5 avec des structures plus complexes.

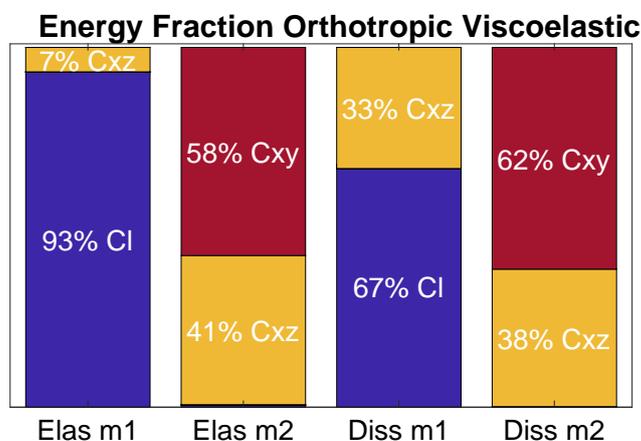


FIGURE 2.10 – Fraction des énergies élastique et dissipée en flexion (m1) et en torsion (m2).

## **Chapitre 3**

# **Homogénéisation viscoélastique**

L'homogénéisation est la méthodologie permettant d'obtenir les propriétés d'un modèle homogène à une certaine échelle à partir d'un modèle hétérogène construit à une échelle inférieure. Cela se réalise par exemple par des opérations de moyenne des champs de contrainte et de déformation.

Il est choisi, dans ce manuscrit d'utiliser une notation matricielle de l'homogénéisation de manière à transcrire fidèlement l'implémentation numérique et de préparer le terrain pour la mise en œuvre d'une méthodologie de réduction de modèle pour l'étude des évolutions en température. La section 3.1 reprend le cas classique de l'élasticité linéaire avant l'extension à la viscoélasticité en section 3.2. L'homogénéisation viscoélastique d'une armure tissée 3D est présentée en section 3.3. L'objectif étant de quantifier l'évolution de l'amortissement en fonction de la température et de la fréquence pour des maillages de taille importante, des stratégies de résolution et de réduction de modèle pour l'homogénéisation ont été mises en place en section 3.4. Enfin en section 3.5, une méthodologie de vérification de la séparation des échelles est développée afin de déterminer le domaine de validité de l'homogénéisation en termes de longueur d'onde de sollicitation.

### 3.1 Homogénéisation numérique en élasticité linéaire

Cette section détaille les principales méthodes d'homogénéisation. Les approches possibles sont répertoriés en section 3.1.1 en fonction des conditions limites appliquées. Ensuite, une introduction à la notation matricielle adaptée aux éléments finis est effectuée en section 3.1.2. Enfin les sections suivantes détaillent les différentes approches en notation matricielle, pour aboutir en section 3.1.7 à un cas test de validation.

#### 3.1.1 Principe et méthodologie de l'homogénéisation

L'homogénéisation est une notion clef de l'analyse multi-échelle des structures. Elle s'attache à fournir, à l'échelle de la structure une représentation du comportement apparent du matériau réel, hétérogène. Cette notion de comportement macroscopique apparent d'un milieu homogène équivalent est couramment liée à des moyennes en espace des champs de contrainte et de déformation sur des volumes dit représentatifs dont la taille dépend de la microstructure. Cette idée, usuelle en mécanique des milieux continus [76], permet de représenter utilement des milieux complexes.

L'homogénéisation est la méthodologie utilisée pour construire un modèle homogène à une certaine échelle à partir d'un modèle hétérogène à une échelle inférieure. Dans le schéma de principe présenté en figure 3.1, les propriétés et la géométrie de la microstructure associées au milieu hétérogène sont dénotées par l'exposant  $^h$  et les propriétés du milieu homogène par l'exposant  $^m$  pour macroscopique.

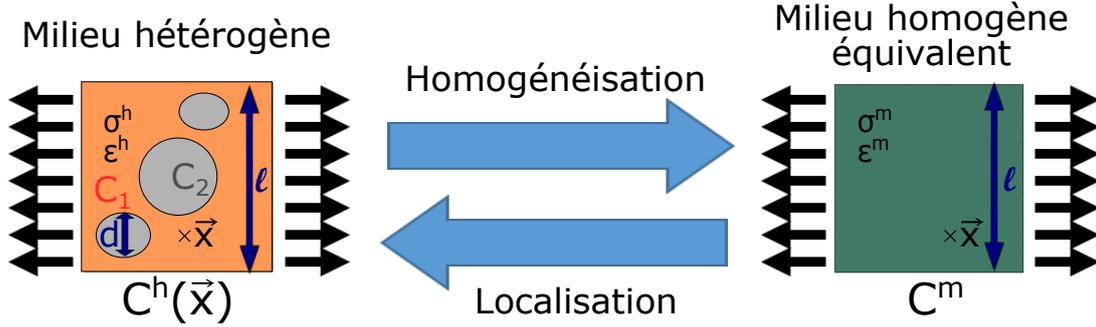


FIGURE 3.1 – Schéma de principe de l'homogénéisation.

Trois opérations se distinguent dans les méthodes d'homogénéisation :

- la *représentation* correspond à l'introduction d'un modèle de la microstructure hétérogène typiquement par une description géométrique du Volume Élémentaire Représentatif (VER) et le choix des lois de comportement pour chaque phase. Une description complète et exacte de la microstructure est difficile, c'est pourquoi des hypothèses simplificatrices doivent être introduites dans la majorité des cas : approximations de la géométrie, choix de réalisations spécifiques, discrétisation, ...
- l'*homogénéisation* établit la synthèse des résultats et permet l'obtention des propriétés homogénéisées du milieu hétérogène. L'approche énergétique utilise le principe des travaux virtuels. Selon la condition de Hill, pour chaque champ de déformation  $\epsilon_l$  et champ de contrainte calculé  $\sigma_k$ , le comportement homogène est défini comme l'égalité des travaux entre le milieu hétérogène et le milieu homogène et permet d'obtenir à partir d'un milieu hétérogène les propriétés homogénéisées du milieu homogène équivalent. L'hypothèse des petites perturbations est utilisée pour linéariser la déformation.

$$\int_V \{\sigma_k^m\} \{\epsilon_l^m\} dV = \int_V \{\sigma_k^h\} \{\epsilon_l^h\} dV \quad (3.1)$$

Le résultat de l'homogénéisation est conditionné par les choix de cette étape et par celle de la représentation.

- la *localisation* est l'inverse de l'homogénéisation. Elle estime les champs du milieu hétérogène à partir des champs homogènes. Elle correspond au calcul de la réponse mécanique, déplacements, déformations et contraintes, d'un VER hétérogène à des sollicitations caractéristiques de la réponse du milieu homogène. Cette dernière n'est en général pas faite, car la reconstruction des champs locaux peut être fastidieuse et la donnée d'intérêt est principalement le comportement de structure homogène.

Les propriétés homogènes peuvent être considérées comme des modules effectifs [80]. Ils sont évalués par des moyennes volumiques de contraintes et de déformations du milieu hétérogène étudié. La validité de l'homogénéisation dépend d'une hypothèse d'ergodicité qui implique que la moyenne de volume (du VER) et la moyenne d'ensemble (de tout le milieu hétérogène) sont égales.

Les premiers modèles d'homogénéisation pour des matériaux isotropes élastiques sont ceux de Voigt (connu sous le nom de la loi des mélanges) et de Reuss [1, 2]. Puis des études analytiques plus précises basées sur des quantités moyennes effectives sont apparues. Le problème d'Eshelby [3] a servi de base pour de nombreuses méthodes d'homogénéisation dont la méthode de Mori-Tanaka [5] ou encore la méthode auto-cohérente [4]. La limite de ces développements réside dans la simplicité de la microstructure cylindrique ou sphérique. C'est pourquoi des méthodes de type *Unit Cell Method* se sont développées [77, 78, 79]. Le comportement macroscopique est alors issu d'essais numériques sur un volume élémentaire représentatif (VER).

L'homogénéisation  $y$  est résolue numériquement en utilisant des modèles éléments finis de microstructure, car cela permet une prise en compte fine du détail géométrique. Les livres et les revues sur l'homogénéisation sont nombreux, la rédaction de cette section s'est principalement appuyée sur le livre de Bornert [80] et sur la revue de Saeb [81], car ils rassemblent les principaux travaux sur l'homogénéisation numérique basée sur la méthode des éléments finis.

Comme énoncé précédemment, le choix du VER a un impact majeur sur la pertinence des modules effectifs estimés par homogénéisation. Un VER peut être défini comme un volume  $V$  de matière hétérogène suffisamment grand pour être statistiquement représentatif du composite d'après les travaux de Kanit et Forest [82]. Pour cela, il doit inclure un échantillonnage de toutes les hétérogénéités microstructurales apparaissant au sein du composite. L'augmentation de la taille du VER à l'avantage de réduire l'erreur en prévision de la valeur moyenne de la grandeur (homogénéisation) [83]. Néanmoins, le VER doit rester suffisamment petit devant les dimensions de l'objet macroscopique pour être considéré comme un élément de volume de la mécanique des milieux continus.

En effet, la pertinence de l'homogénéisation repose sur la séparation des échelles qui s'exprime par l'inégalité [84]

$$\lambda \gg \ell \gg d \quad (3.2)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du *spectre spatial* de la sollicitation,  $\ell$  la taille du VER et  $d$  celle des hétérogénéités qui peut être variable comme représenté en figure 3.1. Au sein de l'aube de soufflante composite tissé 3D, cette hypothèse n'est pas vérifiée de manière évidente et sera détaillé en section 3.5.

Une fois le VER choisi et décrit, il s'agit d'en estimer les propriétés apparentes. Pour le modèle homogène, différentes réponses sont considérées en nombre suffisant pour faire intervenir toutes les composantes de la loi de comportement homogénéisée choisie. En élasticité six cas de chargement suffisent. Les conditions en déplacement ou contrainte associées à cette réponse sont alors appliquées sur le bord du VER hétérogène dans l'étape de localisation. Classiquement la méthode dite KUBC (*Kinematic Uniform Boundary Conditions*), détaillée en section 3.1.3, impose des déplacements alors que la méthode SUBC (*Static Uniform Boundary Conditions*), détaillée en section 3.1.4, utilise des densités d'efforts surfaciques.

Parmi les alternatives aux méthodes en déplacement ou en densité d'effort surfacique, il existe les *Mixed Uniform Boundary Conditions* (MUBC) développées par Hazanov [85], où les conditions limites imposées aux contours du VER sont un mixte entre déplacements et efforts. Enfin, il y a les *Periodic Boundary Conditions* (PBC) qui s'appliquent pour une microstructure périodique où un VER de référence et des vecteurs de périodicité sont définis afin de coupler les conditions limites entre chaque face opposée.

Dans la méthode KUBC, les faces sont contraintes à avoir un mouvement affine, la solution hétérogène est donc contrainte ce qui conduit à une surestimation de la raideur homogène. Dans la méthode SUBC les faces sont libres et donc moins contraintes, la raideur homogène est donc sous-estimée. Pour obtenir une solution plus précise il est souhaitable de construire une solution mixte comme c'est le cas avec la méthode MUBC ou PBC. Ceci a été démontré par de nombreux auteurs au cours de ces dernières années, aussi bien en mécanique linéaire et non linéaire [86, 87, 88].

### 3.1.2 De la rigidité matériau à la matrice de raideur éléments finis

Afin d'introduire une formulation matricielle de l'homogénéisation, des rappels de notation éléments finis sont nécessaires [89, 90].

L'interpolation d'un champ de déplacement pour un élément  $e$  est donné par

$$\{u(\mathbf{X})\} = \begin{Bmatrix} u_x(\mathbf{X}) \\ u_y(\mathbf{X}) \\ u_z(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n [N(\mathbf{X})]_j^e \{u\}_j^e \quad (3.3)$$

où  $\{u\}_j^e$  de dimension  $(3 \times 1)$ , représente le vecteur déplacement pour le nœud  $j$  d'un élément  $e$ ,  $\mathbf{X}$  est une position dans l'espace,  $[N(\mathbf{X})]_j^e$  est la matrice des fonctions d'interpolation (fonctions de forme) de l'élément  $e$  au nœud  $j$  de dimension  $(3 \times 3)$  et  $n$  représente le nombre de nœud de l'élément  $e$ .

Le vecteur des déformations  $\{\varepsilon(\mathbf{X})\}$  s'exprime en fonction des déplacements par

$$\{\varepsilon(\mathbf{X})\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(\mathbf{X}) \\ \varepsilon_2(\mathbf{X}) \\ \varepsilon_3(\mathbf{X}) \\ \varepsilon_4(\mathbf{X}) \\ \varepsilon_5(\mathbf{X}) \\ \varepsilon_6(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n [B(\mathbf{X})]_j^e \{u\}_j^e \quad (3.4)$$

où  $[B(\mathbf{X})]_j^e$  est la matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolations de dimension  $(6 \times 3)$ .

Par extension de la notation, et de manière plus condensée, l'expression (3.3) peut être écrite en fonction du vecteur  $\{q\}$  qui contient les déplacements de l'ensemble des  $N$  degrés de liberté (DDL) d'un modèle et ainsi le champ de déplacement en tout point  $X$  est noté par

$$\{u(\mathbf{X})\}_{3 \times 1} = [N(\mathbf{X})]_{3 \times N} \{q\}_{N \times 1} \quad (3.5)$$

et pour la déformation

$$\{\epsilon(\mathbf{X})\}_{6 \times 1} = [B(\mathbf{X})]_{6 \times N} \{q\}_{N \times 1} \quad (3.6)$$

Les lois de comportement décrivent la relation entre les contraintes et les déformations, ce qui, via la notation de Voigt, revient à écrire le vecteur des contraintes en fonction du vecteur de déformations comme suit

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} = [C] [B] \{q\} \quad (3.7)$$

La matrice de raideur est exprimée comme l'intégrale, sur le volume du modèle, des travaux virtuels associés aux contraintes, qui dépendent du déplacement, par l'équation (3.7) de la loi de comportement, ainsi

$$[K] \{q\} = \int_V [B]^T \{\sigma(q)\} dV = \left[ \int_V [B]^T [C] [B] dV \right] \{q\} \quad (3.8)$$

Cette intégrale peut être approximée par une somme aux points d'intégration qui s'écrit de la forme

$$[K] = \sum_j [B]_j^T [C]_j [B]_j \omega_j \det J_j \quad (3.9)$$

avec  $\omega_j$  le poids de chaque point d'intégration, variant en fonction de la règle d'intégration et  $\det J_j$  le déterminant de la matrice jacobienne au point d'intégration  $j$  (aussi appelé jacobien). Ce dernier est utilisé pour transformer les intégrales sur l'élément réel en intégrales sur l'élément de référence [89]. En utilisant la paramétrisation de la loi de comportement en équation (2.23), il est possible de proposer une paramétrisation de la matrice de raideur éléments finis

$$[K] = \sum_{kl} C_{kl} [K(C_{kl}^u)] = \sum_{kl} C_{kl} [K_{kl}^u] \quad (3.10)$$

avec  $[K(C_{kl}^u)]$  la matrice de raideur associée à la matrice de rigidité unitaire  $[C_{kl}^u]$ .

La matrice de masse élémentaire s'exprime à l'aide des fonctions de forme  $[N]$  et de la densité volumique  $\rho$  par

$$[M] = \int_V [N]^T \rho [N] dV = \sum_j \omega_j [N]_j^T \rho_j [N]_j \det J_j \quad (3.11)$$

Une fois ces considérations éléments finis introduites, les différentes méthodes d'homogénéisation peuvent être détaillées.

### 3.1.3 Kinematic Uniform Boundary Conditions (KUBC)

La méthode KUBC impose des déformations unitaires du milieu homogène

$$\begin{aligned} \{\epsilon_k^m\} &= \frac{1}{2} (\nabla \{u_k^m\} + \nabla^T \{u_k^m\}) \\ [\epsilon^m] &= \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \epsilon_{1k} \\ \epsilon_{2k} \\ \epsilon_{3k} \\ \epsilon_{4k} \\ \epsilon_{5k} \\ \epsilon_{6k} \end{array} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec  $k$  l'indice associé à chaque cas de chargement et  $\{u_k^m\}$  le champ de déplacement homogène associé à la déformation  $\{\epsilon_k^m\}$  et  $\nabla \{u_k^m\}$  le gradient du vecteur déplacement.

Par intégration, les six champs de déplacement sont donnés par

$$[u^m] = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_{xk}^m \\ u_{yk}^m \\ u_{zk}^m \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} u_{xk}^m \\ u_{yk}^m \\ u_{zk}^m \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} u_{xk}^m \\ u_{yk}^m \\ u_{zk}^m \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & z/2 & y/2 \\ 0 & y & 0 & z/2 & 0 & x/2 \\ 0 & 0 & z & y/2 & x/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

avec  $x, y, z$  les coordonnées des points du modèle. Chaque vecteur  $\{u_k^m\}$  est clairement associé aux différentes colonnes de la matrice des déformations unitaires exposée en équation (3.12).

Souhaitant se ramener aux calculs de travail de l'équation (3.1), le travail du milieu homogène pour un champ de contrainte homogène  $\{\sigma_l^m\}$  et de déformation homogène imposé  $\{\epsilon_k^m\}$  s'écrit

$$\int_V \{\epsilon_k^m\}^T \{\sigma_l^m\} dV = V \{I_k\}^T \{\sigma_l^m\} = V C_{kl}^m \quad (3.14)$$

avec  $k, l \in [1, 6]$  et  $\{I_k\}$  la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice identité de l'équation (3.12) et  $V$  le volume du milieu homogène.

Chaque cas de chargement de l'équation (3.12) permet d'associer les contraintes homogènes aux colonnes de la matrice de comportement au volume près. Ainsi,

$$[\sigma^m]_{6 \times 6} = [C^m]_{6 \times 6} [\epsilon^m]_{6 \times 6} = [C^m] \quad (3.15)$$

où  $[C^m]$  représente la matrice de rigidité matériau homogène.

Pour la solution hétérogène, le champ de déplacement défini en équation (3.13), soit  $\{u_k^m\}$  sur les nœuds, est imposé sur les faces du VER. En introduisant les indices  $I$  et  $C$  pour définir respectivement les nœuds d'interface et ceux complémentaires (internes), la condition limite s'écrit  $\{q_I^h\} = \{q_k^m\}$ . Supposant qu'il n'y a pas d'effort interne, l'équation d'équilibre statique est

$$\begin{bmatrix} K_{II}^h & K_{IC}^h \\ K_{CI}^h & K_{CC}^h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_I^h\} \\ \{q_C^h\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

où  $\{F_I\}$  représente les forces de réaction aux frontières du VER. La nullité des efforts internes est utilisée pour calculer le déplacement interne par relèvement statique

$$\{q_C^h\} = -[K_{CC}^h]^{-1} [K_{CI}^h] \{q_I^h\}. \quad (3.17)$$

L'équivalence est construite en imposant l'égalité du travail des solutions homogènes et hétérogènes pour l'ensemble des champs homogènes (3.13). En utilisant l'expression des contraintes exprimée en équation (3.7) et de la matrice de rigidité en équation (3.8), le travail du milieu hétérogène est obtenu par

$$\begin{aligned} \int_V \{\epsilon_k^h\}^T \{\sigma_l^h\} dV &= \int_V \{\epsilon_k^h\}^T [C^h] \{\epsilon_l^h\} dV \\ &= \int_V \{q_k^h\}^T [B]^T [C^h] [B] \{q_l^h\} dV \\ &= \{q_k^h\}^T [K^h] \{q_l^h\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec  $k, l \in [1, 6]$  correspondant au cas de chargement.

Ainsi pour un modèle éléments finis à  $N$  DDL, le calcul des relèvements exprimé en équation (3.17) conduit à une expression simple du comportement homogénéisé par

$$[C^m]_{6 \times 6} = \frac{[q^h]_{6 \times N}^T [K^h]_{N \times N} [q^h]_{N \times 6}}{V}. \quad (3.19)$$

Les différentes étapes de l'homogénéisation KUBC sont résumées ci-dessous :

1. construire les champs de déplacement  $\{u_k^m\}$  pour obtenir  $\{q_k^m\}$
2. calculer le volume du VER  $V$  ;
3. assembler la matrice de raideur hétérogène  $[K^h]$  ;
4. appliquer les chargements  $\{q_k^m\}$  sur les bords du VER hétérogène ;
5. calculer les DDL complémentaires avec l'équation (3.17) pour construire  $\{q_k^h\}$  ;
6. calculer la matrice des rigidités du milieu homogène équivalent  $[C^m]$  avec l'équation (3.19).

### 3.1.4 Static Uniform Boundary Conditions (SUBC)

Pour l'approche SUBC, les six cas de chargement du milieu homogène correspondent aux états de contrainte  $\{\sigma_k^m\}$  unitaire soit

$$\{\sigma_k^m\}_{6 \times 1} = \{I_k\}_{6 \times 1} \quad (3.20)$$

Ce choix *unitaire* est adapté à l'implémentation éléments finis même si l'utilisation de contraintes sans unité est inhabituelle.

Dans un milieu homogène, la loi de Hooke permet d'exprimer les déformations  $\{\epsilon_k^m\}$  en fonction des contraintes imposées comme

$$\{I_k\} = [C^m] \{\epsilon_k^m\} \Leftrightarrow [C^m]^{-1} \{I_k\} = \{\epsilon_k^m\} \quad (3.21)$$

avec  $[C^m]$  la matrice des modules de rigidité. Les déformations donnent donc accès aux colonnes de la matrice de souplesse matériau  $[C^m]^{-1}$ .

Pour la microstructure hétérogène, la méthode SUBC applique les densités surfaciques d'effort associées aux contraintes homogènes sur le bord.

Il est utile de noter que pour une loi de comportement arbitraire  $[C^r]$  et pour la combinaison linéaire  $\left\{ \left( [\epsilon^m]_{(KUBC)} [C^r]^{-1} \right)_k \right\}$  composée de la déformation KUBC définis en équation (3.12), les contraintes sont données par

$$\{\sigma_k^m\} = [C^r] \left\{ \left( [\epsilon]_{(KUBC)} [C^r]^{-1} \right)_k \right\} = [C^r] \left\{ \left( I [C^r]^{-1} \right)_k \right\} = I_k \quad (3.22)$$

Ainsi, les chargements homogènes SUBC sont déduits comme étant

$$\{F_k^m\} = [K(C^r)] \{q_k^m\} = [K(C^r)] \left\{ \left( [q^m]_{(KUBC)} [C^r]^{-1} \right)_k \right\} \quad (3.23)$$

où  $[q^m]_{(KUBC)}$  correspond aux champs de déplacement KUBC aux nœuds définis en équation (3.13). Le chargement  $\{F_k^m\}$  est indépendant du choix de  $[C^r]$  car  $[C^r]$  et  $[C^r]^{-1}$  interviennent respectivement dans le calcul de  $[K^r]$  et du champ de déplacement homogène.

Pour le milieu hétérogène, les champs de déplacement pour les six vecteurs force  $\{F_k^m\}$  sont calculés en résolvant

$$[K^h] [q^h] = [F^m] \quad (3.24)$$

où une attention particulière est apportée du fait de la présence de modes de corps rigide (méthode des contraintes temporaires[91])

Le travail du champ de déformation homogène dans la contrainte homogène est trivial et donné par

$$\begin{aligned} \int_V [\sigma^m]^T [\epsilon^m] dV &= \int_V [\sigma^m]^T [C^m]^{-1} [\sigma^m] dV \\ &= V [C^m]^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour le champ hétérogène l'équation (3.17) reste valide car le champ hétérogène vérifie l'équilibre statique. Par ailleurs, pour construire l'équivalence associée au milieu hétérogène, l'expression des travaux à l'aide de la matrice de raideur, exprimée en équation (3.18), est à nouveau utilisée ce qui conduit à

$$[C^m]_{6 \times 6}^{-1} = \left[ \frac{[q^h]^T [K^h] [q^h]}{V} \right]^{-1} \quad (3.26)$$

Les différentes étapes de l'homogénéisation SUBC sont énumérées ci-dessous :

1. définir un milieu de référence homogène ayant des propriétés connues  $[C^r]$  permettant de calculer la matrice de raideur de ce milieu  $[K(C^r)]$  associée ;
2. construire le champ de force  $\{F_k^m\}$  à partir des champs de déplacement KUBC comme explicité en équation (3.23) ;
3. calculer les champs de déplacement hétérogènes solutions exprimés en équation (3.24) ;
4. calculer la matrice de souplesse homogène exprimée en équation (3.26) et l'inverser pour obtenir la matrice de rigidité  $[C^m]$ .

### 3.1.5 Mixed Uniform Boundary Conditions (MUBC)

Le choix de déformation ou de contrainte imposée étant arbitraire, des approches intermédiaires sont possibles [85]. Les conditions imposées dans une approche MUBC doivent respecter le fait que le déplacement et la contrainte ne peuvent être imposés simultanément. En d'autres termes, le travail des quantités imposées sur une face de normale  $n_j$  doit être nul

$$\{u_k\} [\sigma_{kl}] \{n_l\} = 0 \quad (3.27)$$

avec  $k, l \in [x, y, z]$  représentant les trois directions de l'espace.

Étant donné cette définition, ce problème n'a pas de solution unique [92]. En utilisant les choix émis par Pahr and Zysset [93], et repris par Hello [94], les conditions limites homogènes en déplacement en fonction des normales extérieures de chaque face permettent de construire complètement la matrice des rigidités orthogonale. Elles sont exprimées dans le tableau 3.1 où chaque colonne correspond à un cas de chargement. Les  $-$  signifient que la face est libre et, par voie de conséquence, la densité surfacique d'effort appliquée est nulle dans la direction correspondante, ce qui permet de vérifier (3.27).

TABLE 3.1 – Conditions aux limites de type MUBC.

Normale	Six champs de déplacements
$\{n_x\}$	$[u^m] = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & \frac{x}{2} \\ - & - & - & - & \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix}$
$\{n_y\}$	$[u^m] = \begin{bmatrix} - & - & - & 0 & - & \frac{y}{2} \\ 0 & y & 0 & - & 0 & - \\ - & - & - & \frac{y}{2} & - & 0 \end{bmatrix}$
$\{n_z\}$	$[u^m] = \begin{bmatrix} - & - & - & 0 & \frac{z}{2} & - \\ - & - & - & \frac{z}{2} & 0 & - \\ 0 & 0 & z & - & - & 0 \end{bmatrix}$

D'après Hazanov [92], avec ces conditions limites imposées le travail des déplacements et efforts associés donne la rigidité matériau de la même façon que pour la méthode KUBC

$$[C^m] = \frac{[q^h]^T [K^h] [q^h]}{V}. \quad (3.28)$$

### 3.1.6 Periodic Boundary Conditions (PBC)

Un milieu est considéré périodique si une cellule de référence peut être répéter un certain nombre de fois en translation pour la périodicité axiale ou en rotation pour la périodicité cyclique. Les PBC ne sont valables que pour les matériaux à structures périodiques. Sanchez-Palencia [95] a introduit dans les années 70 une approche de l'homogénéisation des structures périodiques. Numériquement, une parfaite périodicité des faces du maillage du VER est préférable.

Les conditions limites couplent les nœuds de chaque face opposée. La solution homogène est la même que pour le KUBC exprimée en équation (3.15) pour une déformation unitaire exprimée en équation (3.12).

Pour le milieu hétérogène, les conditions aux limites à appliquer sont considérées en déplacement. Il existe donc une relation linéaire entre les faces opposées correspondant à un déplacement relatif.  $\{X_\gamma\}$  est défini comme le point appartenant à la face  $\gamma$  avec pour coordonnées  $\{X_\gamma\}^T = \{x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma\}^T$ .

$$\begin{aligned} \{u_k^m(\{X_W\})\} - \{u_k^m(\{X_E\})\} &= [\varepsilon_k^m] \{\{X_W\} - \{X_E\}\} \\ \{u_k^m(\{X_N\})\} - \{u_k^m(\{X_S\})\} &= [\varepsilon_k^m] \{\{X_N\} - \{X_S\}\} \\ \{u_k^m(\{X_T\})\} - \{u_k^m(\{X_B\})\} &= [\varepsilon_k^m] \{\{X_T\} - \{X_B\}\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec  $[\epsilon_k^m]_{3 \times 3}$  la représentation de  $\{\epsilon_k^m\}_{6 \times 1}$  dans l'espace vectoriel de dimension 2 [96]. Les faces allant par paire, les couples représentant les 6 faces du VER sont  $\{\{T, B\}; \{W, E\}; \{N, S\}\}$ . Par ailleurs,  $\{\{X_\alpha\} - \{X_\beta\}\}$  n'est d'autre que le vecteur distance entre la face  $\alpha$  et son opposée  $\beta$ , aussi appelé vecteur de périodicité.

Les contraintes linéaires imposées entre les faces exprimées en équation (3.29) ne bloquent pas l'ensemble des mouvements de corps rigides mais seulement les 3 rotations. L'ajout d'une contrainte isostatique est nécessaire pour empêcher les 3 derniers mouvements de corps rigides en translation, en encastrant par exemple un point au centre du VER ou un coin. Ceci permet une solution unique pour le calcul de la matrice des rigidités du milieu hétérogène.

### 3.1.7 Vérification en élastique : cas d'une inclusion cylindrique

Afin de vérifier que les stratégies exposées précédemment fournissent des résultats cohérents, il a été choisi de réaliser un calcul d'homogénéisation avec des conditions aux limites de type MUBC sous Abaqus [97] et sous SDT [98], logiciel développé par SDTools. Deux types de maillages conformes ont été modélisés, un avec des éléments hexaédriques linéaires et l'autre avec des tétraédriques linéaires comme illustré en figure 3.2. La géométrie choisie est une inclusion cylindrique représentant une fibre dans de la matrice. Le VER est cubique avec une dimension de  $10\mu m$  et un taux volumique de fibres de 47%. Les matériaux ont des propriétés isotropes élastiques. La fibre (du bore) et la matrice (de l'aluminium) sont respectivement indicées par  $f$  et  $m$  et ont les propriétés suivantes  $E_f = 379,3$  GPa,  $\nu_f = 0,1$  et  $E_m = 68,3$  GPa,  $\nu_m = 0,3$ . L'axe de la fibre se situe le long de l'axe 1.

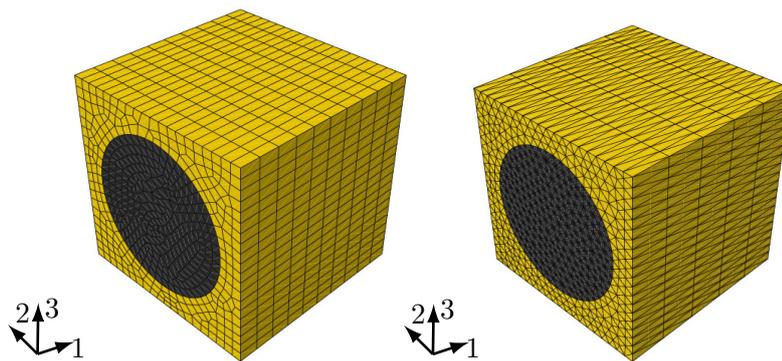


FIGURE 3.2 – Maillage hexaédrique (gauche) et tétraédrique (droite) des VER sous Abaqus.

Les résultats sont exposés en tableau 3.2 et sont comparés avec la littérature [94, 99]. Tout d'abord, une légère différence entre les résultats du maillage hexaédrique et tétraédrique est observée à cause de la différence de volume de fibre entre les deux modèles avec respectivement 46,88% et 47%. Un maillage hexaédrique plus fin aurait permis un meilleur résultat. Ceci montre, l'importance du respect du volume afin d'obtenir des résultats au plus proche de la réalité.

TABLE 3.2 – Comparaison de la méthodologie pour une inclusion cylindrique.

Constantes de l'ingénieur	Maillage hexaédrique		Maillage tétraédrique		Hello[94]	Vamush [99]
	Abaqus	SDT	Abaqus	SDT		
E1 (GPa)	214.95	214.95	215.33	215.33	215.33	215.3
E2=E3 (GPa)	143.79	143.88	143.98	143.98	143.96	144.1
G12=G13 (GPa)	54.30	54.30	54.38	54.38	54.38	54.39
G23 (GPa)	45.78	45.81	45.83	45.83	45.82	45.92
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195	0.195
$\nu_{23}$	0.255	0.255	0.255	0.255	0.255	0.255

Ensuite, à maillage identique, les résultats sous Abaqus et sous SDT sont égaux pour des éléments tétraédriques et diffèrent légèrement pour des éléments hexaédriques. Cette différence provient de l'intégration des éléments faite au sein des deux logiciels. En effet, au sein d'Abaqus, un hexaèdre du premier ordre avec intégration complète est intégré aux points de Gauss mais le changement de volume réel aux points de Gauss est remplacé par le changement de volume moyen de l'élément, alors qu'au sein de SDT, le changement de volume réel est pris en compte. Ceci est connu sous le nom de technique d'intégration sélectivement réduite [97]). Cette technique permet d'éviter le verrouillage du maillage et fournit ainsi des solutions précises dans des cas incompressibles ou presque incompressibles [100]. Le gradient de déformation modifié sous Abaqus devient

$$\bar{J} = J \left( \frac{\overline{\det(J)}}{\det(J)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.30)$$

où est  $J = \frac{\partial x}{\partial X}$  le gradient de déformation ;  $n$  est la dimension de l'élément ;  $\det(J)$  est le jacobien au point de Gauss ; et  $\overline{\det(J)}$  est le jacobien moyen sur l'élément. Cette différence est minime et entraîne une erreur sur le résultat de l'ordre de 1 pour 1000. Par ailleurs, en intégrant au centre de l'élément hexaédrique, ce qui correspond à des éléments C3D8R sous Abaqus, les résultats sont identiques entre Abaqus et SDT.

## 3.2 Extension à la viscoélasticité

Cette section étend les méthodologies présentées précédemment au cas viscoélastique en utilisant le module complexe dans l'espace fréquentiel. La section 3.2.1 exprime la démarche du calcul des modules de stockage et des facteurs de perte du milieu homogénéisé. Ensuite, la section 3.2.2 compare la méthodologie avec des travaux issus de la littérature. Enfin, l'homogénéisation des torons du matériau composite tissé 3D est exposée en section 3.2.3.

### 3.2.1 Traitement de la viscoélasticité et cas test

Le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire dépend de la fréquence et de la température comme décrit au chapitre 2. Dans la mesure où l'équivalence entre les approches fréquentielles et temporelles a été abordée en section 2.1.3, l'accent est mis ici sur les expressions

fréquentielles. L'hypothèse reste que la contrainte dépend de l'histoire de la déformation avec une dépendance qui peut être décrite par une équation différentielle linéaire et invariante dans le temps. Il existe donc un transfert entre les composantes de déformation et les composantes de contrainte caractérisé par une matrice de comportement complexe. En reprenant la décomposition (2.23), la relation suivante est utilisée

$$\begin{aligned} [C] &= \sum_{kl} (C'_{kl} + iC''_{kl}) [C_{kl}^u] \\ &= \sum_{kl} C'_{kl} (1 + i\eta_{kl}) [C_{kl}^u] \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec  $C'_{kl}(\omega)$ ,  $C''_{kl}(\omega)$ ,  $\eta_{kl}(\omega)$  respectivement la composante  $ij$  de stockage, de perte et le facteur de perte du module de rigidité d'indice  $kl$  et  $[C_{kl}^u]$  la matrice *unitaire* de comportement qui est réelle et indépendante de la fréquence associée à la composante  $kl$ .

A l'échelle de la structure, l'expression du travail dissipé sur une période correspond à l'intégrale sur le volume des puissances dissipées en chaque point matériel, qui est exprimée en équation (2.28) soit

$$W_{diss}(\hat{\epsilon}_k, \epsilon_l) = \pi \int_V (\{\hat{\epsilon}_k(\omega)\})^H [C''(\omega)] \{\epsilon_l(\omega)\} dV \quad (3.32)$$

avec  $\{\hat{\epsilon}_k\}$  désignant un champ de déformation virtuel et  $\{\epsilon_l\}$  le champ de déformation conduisant à la contrainte  $\{\sigma_l\} = [C] \{\epsilon_l\}$ .

Les déformations  $\{\epsilon_l(\omega)\}$  et  $\{\hat{\epsilon}_k(\omega)\}$  sont des vecteurs complexes tels que

$$\begin{aligned} \{\epsilon_l(\omega)\} &= [B] \{q_l(\omega)\} = [B] (\{q_l\}_r + i \{q_l\}_i) \\ \{\hat{\epsilon}_k(\omega)\}^H &= ([B] \{\hat{q}_k(\omega)\})^H = (\{\hat{q}_k\}_r^T - i \{\hat{q}_k\}_i^T) [B]^T \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec  $[B]$  la matrice introduit en équation (3.4),  $\{q_k\}_r$  et  $\{q_k\}_i$  respectivement la partie réelle et imaginaire du vecteur  $\{q_k\}$  de direction  $k$  de dimension  $N \times 1$  où  $N$  représente le nombre de DDL de la structure et  $k, l$  sont les directions.

En injectant l'équation (3.33) dans (3.32), le travail des efforts dissipés  $W_{diss}$  s'écrit

$$\begin{aligned} W_{diss}(\hat{q}_k, q_l) &= \pi \int_V (\{\hat{q}_k\}_r^T [B]^T - i \{\hat{q}_k\}_i^T [B]^T) [C''] [B] (\{q_l\}_r + i \{q_l\}_i) dV \\ &= \pi \left( \{\hat{q}_k\}_r^T [K(C'')] \{q_l\}_r + \{\hat{q}_k\}_i^T [K(C'')] \{q_l\}_i \right) \\ &= \pi \{\hat{q}_k\}^H [K(C'')] \{q_l\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

De même que pour le travail dissipé, le travail des efforts élastiques  $W_{elas}$  correspond à l'intégrale sur le volume des efforts élastiques en chaque point matériel défini en équation (2.29) tel que

$$2W_{elas}(\hat{\epsilon}_k(\omega), \epsilon_l(\omega)) = \int_V \{\hat{\epsilon}_k(\omega)\}^H [C'] \{\epsilon_l(\omega)\} dV \quad (3.35)$$

En réalisant le même exercice que précédemment, ce dernier s'exprime en fonction des champs de déplacement comme

$$\begin{aligned} 2W_{elas}(\hat{q}_k, q_l) &= \{\hat{q}_k\}_r^T [K(C')] \{q_l\}_r + \{\hat{q}_k\}_i^T [K(C')] \{q_l\}_i \\ &= \{\hat{q}_k\}^H [K(C')] \{q_l\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pour des conditions limites pilotées en déformation (ou en déplacement) comme par exemple en KUBC, MUBC ou PBC, le même schéma de résolution qu'en élasticité linéaire est appliqué, conduisant à l'obtention d'une matrice des rigidités  $[C^m]$  complexe

$$\begin{aligned} [C^m]_{6 \times 6} &= \frac{[q^h]_{6 \times N}^H [K^h]_{N \times N} [q^h]_{N \times 6}}{V} \\ &= \frac{[q^h]_{6 \times 6}^H ([K^h(C')] + i[K^h(C'')]) [q^h]}{V} \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec  $[q^h]$  la matrice des champs de déplacement des DDL associés aux six cas de chargement complexes,  $[q^h]^H$  la matrice hermitienne, et  $[K^h]$  la matrice de raideur complexe. En notation indicielle, chacune des composantes s'exprime donc comme

$$C_{kl}^m = \frac{\{\hat{q}_k^h\}^H ([K^h(C')] + i[K^h(C'')]) \{q_l^h\}}{V} \quad (3.38)$$

avec  $k, l \in [1, 6]$ .

Le facteur de perte homogénéisé associé à chaque composante s'exprime comme le ratio entre la partie imaginaire et la partie réelle des composantes des rigidités homogénéisées tel que

$$\eta_{kl} = \frac{\Im(C_{kl}^m)}{\Re(C_{kl}^m)} \quad (3.39)$$

En utilisant les expressions (3.34) et (3.36), il est possible de vérifier qu'il s'agit d'une généralisation simple de l'expression classique des taux de perte en termes de travaux dissipés et d'énergie élastique

$$\eta_{kl} = \frac{W_{diss}(\hat{\epsilon}_k, \epsilon_l)}{2\pi W_{elas}(\hat{\epsilon}_k, \epsilon_l)} = \frac{\{\hat{q}_k^h\}^H [K(C'')] \{q_l\}}{\{\hat{q}_k^h\}^H [K(C')] \{q_l\}} \quad (3.40)$$

### 3.2.2 Vérification pour une inclusion cylindrique

Le calcul du facteur de perte a été confronté à la littérature avec les publications de Chandra [101] et Rezaei [102]. Pour cela, il a été considéré un VER avec une inclusion cylindrique simple dans un cube. La fibre et la matrice sont considérées viscoélastiques avec les propriétés suivantes  $E_f=72.4\text{GPa}$ ,  $G_f=30.2\text{GPa}$ ,  $\nu_f=0.2$ ,  $\eta_f=0.18\%$  et  $E_m=2.76\text{GPa}$ ,  $G_m=1.02\text{GPa}$ ,  $\nu_m=0.35$ ,  $\eta_m=1.5\%$ .

Le VER modélisé a pour dimension  $10 \times 10 \times 2\text{mm}$  avec 1500 éléments hexaédriques comme représenté en figure 3.3. Les conditions limites utilisées par Rezaei [102] sont des conditions limites périodiques, et reprisent dans cette exemple sous SDT.

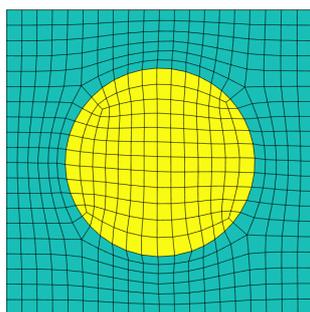


FIGURE 3.3 – VER avec un TVF de 30% maillé sous Abaqus en hexaèdres.

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.3. L'analyse a été effectuée pour différents volumes de fibre. Les erreurs numériques maximum avec Rezaei sont de 7% dans le sens axial pour les trois variations de volumes. Par rapport à Chandra, un écart important est observé dans le sens transverse pour un volume de fibre de 70% avec une différence de 15%. Ces écarts entre les coefficients peuvent s'expliquer par des maillages différents entre les trois études.

TABLE 3.3 – Comparaison des facteurs de perte pour une inclusion cylindrique pour différents taux volumiques de fibre.

TVF	30%			50%			70%		
	SDT	Chandra	Rezaei	SDT	Chandra	Rezaei	SDT	Chandra	Rezaei
$\eta_{11}$ (%)	0.30	0.31	0.28	0.24	0.26	0.23	0.21	0.22	0.20
$\eta_{22}$ (%)	1.49	1.48	1.43	1.43	1.42	1.38	1.12	1.34	1.12
$\eta_{12}$ (%)	1.49	1.48	1.46	1.44	1.46	1.44	1.33	1.41	1.35
$\eta_{23}$ (%)	1.48	1.47	1.43	1.39	1.42	1.38	1.21	1.34	1.21

### 3.2.3 Homogénéisation des torons

Les torons sont composés de fibres et de matrice. L'homogénéisation du comportement est réalisé sur la base d'un VER hexagonal compact, connu pour être suffisamment représentatif [30].

L'utilisation de fonctions de niveau permet une représentation fidèle à la réalité. Pour une fonction de niveau passant par un élément une stratégie de découpe des éléments est mise en place. Les nœuds en dehors de la fonction de niveau sont définis par  $-$ ; ceux à l'intérieur par  $+$  et ceux se trouvant sur la fonction de niveau par  $0$ .

Deux stratégies sont envisageables, soit la découpe de maillage 2D soit la découpe de maillage 3D. La stratégie de modélisation des VER à l'échelle microscopique consiste à découper un maillage 2D composé d'éléments quadrilatéraux et d'ensuite extruder dans la direction de l'axe de la fibre garantissant un maillage parfaitement périodique. De plus, le travail de découpe des éléments en 2D possède l'avantage d'être facile et d'avoir un nombre de cas à traiter réduit. L'ensemble des découpes des éléments en 2D sont répertoriés en annexe B pour les éléments triangles et quadrilatéraux.

La figure 3.4 montre le procédé de découpe d'un maillage 2D par fonctions de niveau. La fonction de niveau est représentée par les marqueurs rouges  $+$ . L'ordre choisi pour réaliser le motif

hexagonal compact est de commencer par l'inclusion cylindrique puis les 4 quarts de cercle. Une fois la valeur affectée à chaque nœud la découpe des éléments est effectuée et l'assignation des propriétés matériaux aussi.

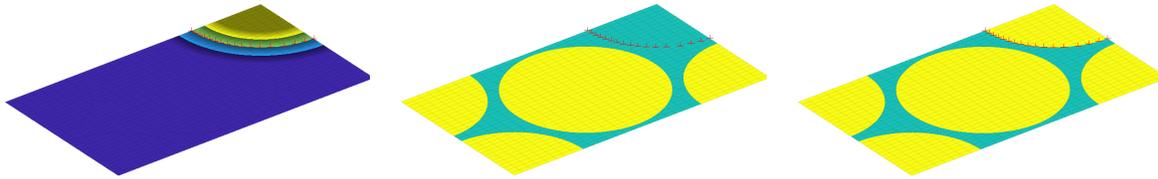


FIGURE 3.4 – Processus de découpe et d'assignation matériau par des fonctions de niveau.

Le maillage conforme final, généré sous SDT à l'aide des fonctions de niveau est constitué uniquement d'hexaèdres et de pentaèdres comme illustré figure 3.5. La matrice représenté en jaune est considérée comme isotrope viscoélastique alors que les fibres, en gris, sont purement élastiques avec un comportement orthotrope.

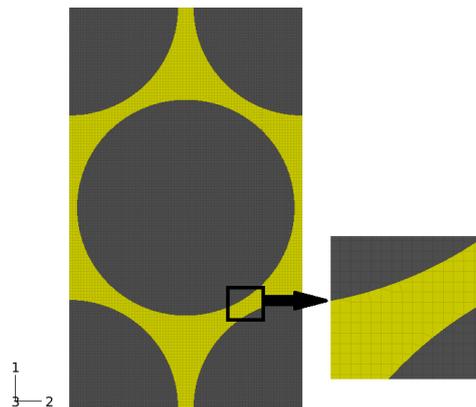


FIGURE 3.5 – Maillage à l'aide des fonctions de niveau d'un motif hexagonal compact.

Une analyse de convergence au maillage a été effectuée. Afin de conserver la même proportion de matrice et de fibre, les éléments du maillage initial sont subdivisés. Ainsi à géométrie fixée, la taille de maille a très peu d'influence sur la valeur en module et en amortissement. Les écarts observés sont inférieurs à 0.1% pour l'ensemble des modules et inférieurs à 1% pour les facteurs de perte. Ces pourcentages d'erreur sont acceptables étant donné le pourcentage d'erreur respectif sur chacune des quantités avec l'essai DMA. L'utilisation d'éléments quadratiques est connue pour permettre une interprétation plus précise des champs de déplacement. Comparé aux linéaires, ici, ces derniers entraînent une sous-estimation du module de stockage de 0.2% et une sur-estimation du facteur de perte de 2%. Cette faible différence n'impose pas leur emploi.

Pour la suite, une taille de maille fine de  $0.1\mu m$  est choisie pour respecter au mieux le taux volumique de fibres du toron. En effet, plus le maillage d'origine à découper est fin plus le taux volumique de fibres est proche de la valeur cible. Par ailleurs la discrétisation dans l'axe de la fibre n'a pas d'influence sur les propriétés homogénéisées du VER. La cellule utilisée est de dimension  $9.9 \times 5.72 \times 1\mu m$ . Le maillage initial avant découpe par la fonction de niveau est

composé de  $99 \times 57$  éléments dans les directions 1 et 2. Après découpe, le maillage comprend 52 452 DDL et 11 590 avec deux éléments sont présents en direction 3 correspondant à l'axe de la fibre. Le maillage généré est périodique, ainsi des conditions aux limites de type PBC sont appliquées.

En figure 3.6 sont représentés la partie réelle de la composante de rigidité et le facteur de perte associé dans la direction axiale (direction 3) et dans la direction transverse (direction 1) à une fréquence de 65Hz pour une gamme de température entre  $-40^\circ\text{C}$  et  $120^\circ\text{C}$  et un taux volumique de fibres de 71%. Les modules de stockage sont normés par leur valeur minimum et une discrétisation en température tous les dix degrés a été choisie. Les propriétés de la matrice sont tracées en pointillé avec un facteur d'échelle constant calculé pour la température la plus faible. Pour des raisons de symétrie le module transverse dans la direction 2 est égal à celui dans la direction 1.

Dans le sens axial, le module de stockage ne dépend pas du comportement de la matrice, le facteur de perte est très faible. Les propriétés homogénéisés varient faiblement par rapport à celles de la matrice.

Dans le sens transverse, la résine travaille plus ce qui conduit à un amortissement plus important et aussi à un module de stockage plus faible.

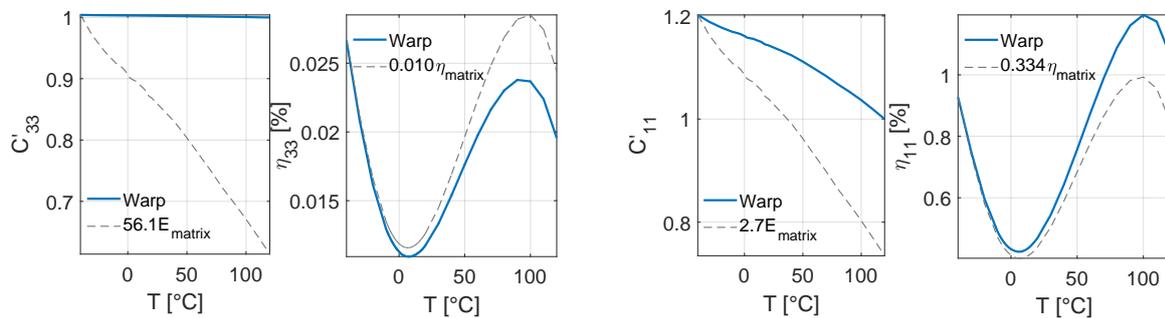


FIGURE 3.6 – Partie réelle des composantes de rigidité et facteur de perte associé axial (gauche) et transverse (droite) en fonction de la température pour une fréquence de 65Hz.

La matrice contrôle le comportement amortissant de la cellule, cependant, le facteur d'échelle n'est pas constant. Des effets de géométrie rentrent donc en compte, les travaux élastique et dissipé sont différents dans les constituants du milieu hétérogène en fonction de la température.

L'homogénéisation à l'échelle microscopique fournit des propriétés orthotropes viscoélastiques, cela signifie que la matrice des rigidités est constituée de 9 composantes complexes distinctes. Ce sont ces propriétés qui seront utilisées en section 3.3 pour modéliser le comportement des torons à l'échelle mésoscopique.

L'influence de la fréquence a été quantifiée dans cette gamme de température en figure 3.7 pour un toron avec un TVF de 79%. Plus la fréquence est élevée plus les propriétés homogénéisées sont raides et plus le minimum d'amortissement est décalé vers des températures élevées suivant logiquement l'équivalence temps/température de la résine. Entre 60Hz et 375Hz, ce décalage

s'évalue à environ 10°C. Pour une fréquence de 375Hz, l'amortissement est supérieur à celui obtenu à 60Hz jusqu'à 20°C puis il devient légèrement inférieur.

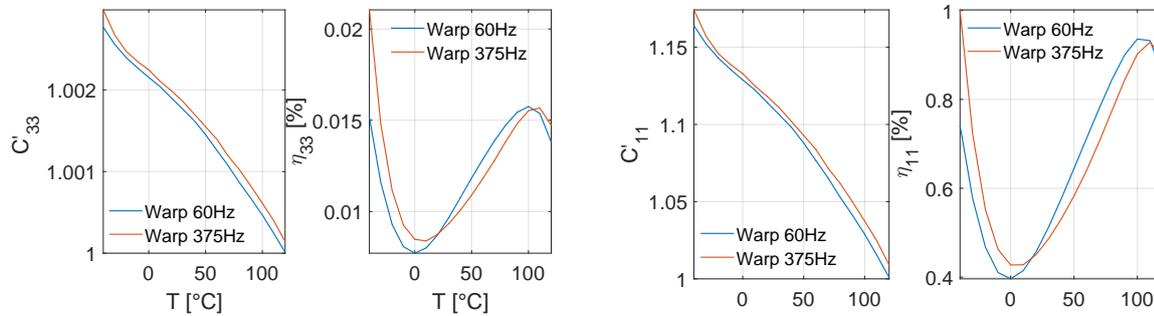


FIGURE 3.7 – Effet de la fréquence sur le module de stockage et le facteur de perte axial (gauche) et transverse (droite) pour un toron.

### 3.3 Homogénéisation des textiles

L'homogénéisation des textiles est une approche multi-échelle [103]. Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle de la structure suit deux homogénéisations. La première permet de passer des constituants élémentaires du composite, la résine et la fibre, au toron puis la seconde permet la transition des torons aux mésostructures composant la structure.

Cette section présente l'homogénéisation des textiles en commençant par le maillage de la mésostructure exposé en section 3.3.1 puis le cas d'application sur un textile tissé 3D en section 3.3.2.

#### 3.3.1 Maillage des mésostructures : les outils numériques à disposition

La modélisation numérique des composites tissés 3D est une activité à ce jour très bien développée. Plusieurs logiciels existent sur le marché. Ils permettent de modéliser la géométrie d'un tissage de manière plus ou moins réaliste et d'obtenir le maillage de l'armure désirée comme illustré en figure 3.8.

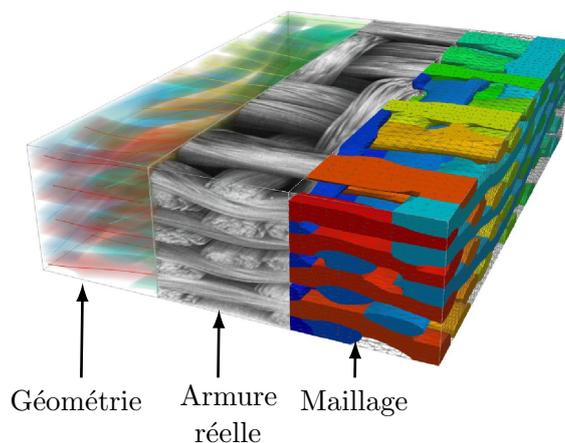


FIGURE 3.8 – Différentes représentations d'un même tissé 3D [104].

Des universités ont développé des logiciels comme Wisetex [105] développé par KU Leuven et Texgen [106] par University of Nottingham sont très connus. Safran développe ses propres logiciels internes en collaboration avec des universités.

Pour l'ensemble des logiciels, le point de départ correspond à la description de la préforme sèche. Les géométries des mésostructures tissées peuvent être plus ou moins complexes allant d'une simple toile à du tissé 3D. La première étape est la description de la topologie, c'est-à-dire la position relative de tous les fils et le nombre de couche de l'armure sans prendre en compte les caractéristiques géométriques comme l'illustre la figure 3.9a. Une fois l'entrelacement des torons réalisé le descripteur géométrique place les fils dans l'espace tridimensionnel. Cette étape de définition de la géométrie fait intervenir notamment l'espacement des chaînes et des trames, la taille des fils pouvant varier entre 1k et 96k, les paramètres du taux volumique de fibres (TVF) cible compacté ou encore le ratio chaîne/trame (RCT) cible. L'espacement des trames est une variable d'ajustement, elle est souvent calculée de manière à obtenir le RCT cible voire le TVF cible même si ce dernier est aussi ajustable en fonction du nombre de couches de l'armure.

Les fils sont placés via leur fibre neutre comme montré en figure 3.9b. Cette courbe unidimensionnelle est définie à l'aide d'une série de points. Ensuite, la surface du fil est caractérisée en balayant une forme bidimensionnelle sur la longueur du fil. Cette section prend généralement la forme d'une simple courbe paramétrique comme par exemple, une ellipse ou un cercle.

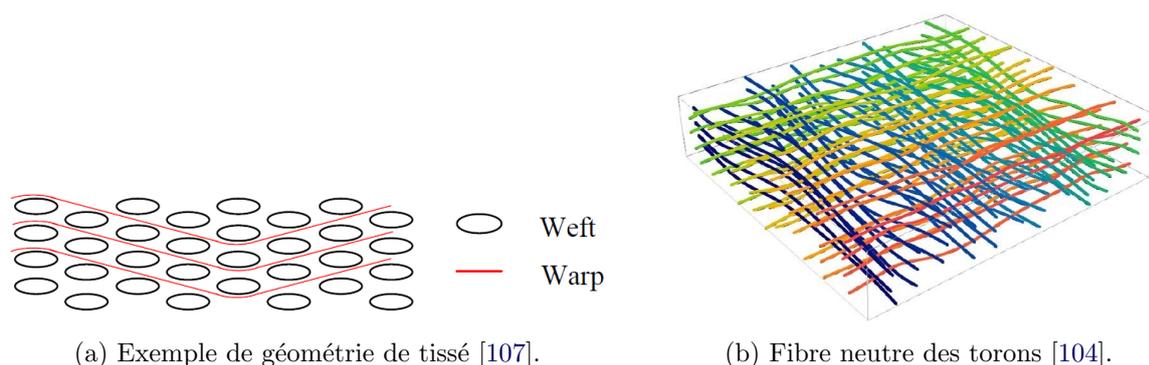


FIGURE 3.9 – Descripteur géométrique.

L'orientation matériau des torons est construite pour chaque section discrétisant les fils. Un vecteur normal est défini à partir de la fibre neutre en utilisant 3 points consécutifs. Ensuite un second vecteur est construit dans le plan de la section.

La dernière étape correspond au maillage de la mésostructure. Cette dernière peut être maillée avec ou sans la résine.

Un maillage hexaédrique des fibres seules permet par exemple de simuler l'étape de compaction durant laquelle la préforme est pressée dans un moule avant l'injection de la résine [108]. Cette manipulation est réalisée via l'utilisation par exemple d'une loi hyper-élastique [109]. Les ellipses initiales sont déformées et la géométrie de chaque toron est redéfinie par une section avec une liste de points et par une nouvelle fibre de neutre. Des formes complexes plus proches de la réalité sont ainsi obtenues. Cependant, comme l'illustre la figure 3.10, des interpénétrations entre les torons, encadrées en rouge, se produisent fréquemment. Le traitement de ces dernières peut être géré de plusieurs façons, par exemple en affectant des priorités ou encore en essayant de répartir le volume.

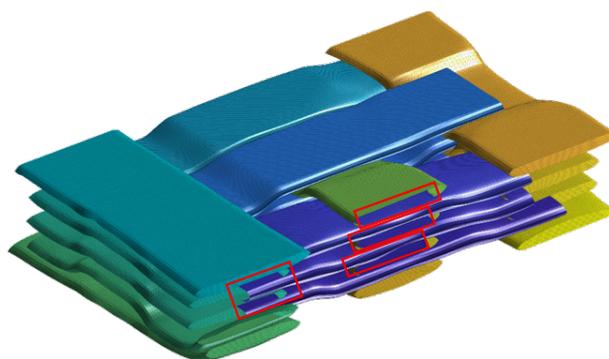


FIGURE 3.10 – Visualisation des imperpénétrations de torons après compaction.

Les outils Safran permettent aussi de concevoir des armures créées à partir de tomographies permettant de reproduire des armures spécifiques très complexes au plus proche du réel. Le logiciel WiseTex via le code de maillage MeshTex [110] développé par Osaka University, utilise sa propre loi de compaction des torons. Chaque toron est divisé en une succession d'ellipse

constante le long de sa fibre neutre. Ce logiciel, très orienté tissage, permet uniquement de mailler des toiles en hexaèdres linéaires sans la matrice. Cependant, via le logiciel TexComp, il est capable de réaliser de l'homogénéisation en fournissant la matrice de rigidité complète de la cellule unitaire homogénéisée en utilisant la méthode des inclusions qui est basée sur les concepts de transformation d'Eshelby combinés à un schéma de Mori-Tanaka ou auto-cohérent [111].

Ensuite, le maillage de la matrice et de la préforme. Deux catégories se distinguent, les maillages voxels composés d'éléments hexaédriques réguliers et les maillages conformes. Un maillage voxel peut être vu comme une version simple des fonctions de niveau. La figure 3.11 montre une façon d'affecter les matériaux aux éléments au sein d'un maillage voxel. Un voxel est attribué à un fil ou à la matrice en fonction de la position de son centre [112]. Les éléments rouges appartiennent aux fils et les gris à la résine.

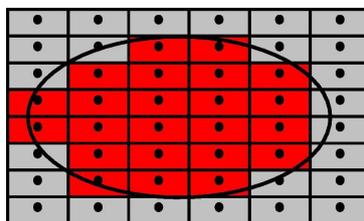
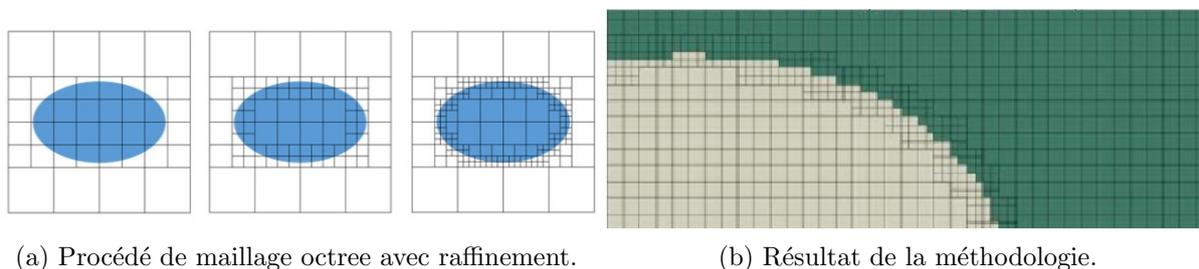


FIGURE 3.11 – Affectation matériau selon la position du centre des éléments voxels.

Les maillages voxélisés sont des bonnes alternatives mais les éléments doivent avoir une taille raisonnable pour pouvoir être au plus proche de la réalité en termes de géométrie et de volume de chaque constituant. Des alternatives existent pour avoir des maillages semi-conformes à partir de maillages voxels. TexGen est très avancé en termes de maillage pour ses armures prédéfinies. En effet, en plus des techniques de maillages voxels et conformes déjà existantes, la figure 3.12 montre l'application de la méthode de maillage octree avec raffinement qui a été implémentée récemment permettant de raffiner les maillages voxels au niveau des surfaces des torons [113].



(a) Procédé de maillage octree avec raffinement.

(b) Résultat de la méthodologie.

FIGURE 3.12 – Méthodologie de maillage octree avec raffinement sur un toron [113].

De plus, ce logiciel possède la particularité de pouvoir être piloté en langage Python, facilitant l'automatisation de génération de mésostructure allant de la topologie à l'export du maillage.

Les outils internes développés par Safran sont plus robustes et permettent de générer le maillage d'armure complexe en voxels mais aussi en maillage conforme tétraédrique linéaire en

lissant les éléments du maillage voxelisé, ce qui augmente de manière significative le nombre de degrés de liberté du modèle. Les fichiers de sortie sont généralement, pour l'ensemble des logiciels, des fichiers d'entrée Abaqus [97].

La génération de maillages conformes adaptés au composite tissé 3D sont encore difficiles à généraliser pour des armures à géométrie complexe. Les travaux de Grail [114] et de Ha [115] montrent la difficulté à automatiser les procédures de maillage à tous les types de mésostructures. C'est pourquoi, au cours de cette thèse, une méthodologie utilisant des fonctions de niveau venant découper un maillage hexaédrique a été implémentée au sein du logiciel SDT [98]. Cependant, la découpe de maillage 3D demande un travail important qui n'a pas pu aboutir. Des logiciels déjà existant comme MMG3D [116] ou CutFEM [117, 118] permettent la découpe de maillage 3D. Cependant, ils ne répondaient pas à la stratégie envisagée de découper les éléments hexaédriques en éléments pentaédriques, pyramidaux ou tétraédriques et non de créer que des éléments tétraédriques. Contrairement au maillage voxelisé lissé, seul les éléments par lesquels passent les fils sont découpés permettant de diminuer le nombre de nouveaux nœuds créés.

La figure 3.13 montre le maillage voxel en bleu et conforme généré par des fonctions de niveau en rouge d'un toron avec des sections elliptiques non constantes le long de la fibre neutre. Les contours géométriques réels du toron sont affichés. Un meilleur respect des surfaces pour le maillage conforme est observé contrairement au maillage voxel classique. Le maillage réalisé avec les fonctions de niveau est obtenu à partir d'un maillage voxel avec des éléments de taille de  $200\mu m$  tandis que le maillage voxel possède des éléments de taille  $100\mu m$ .

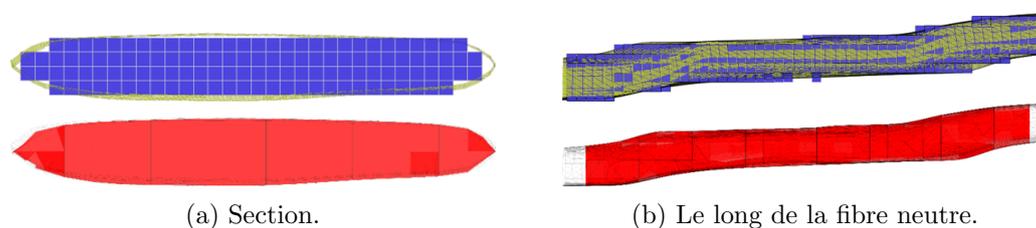


FIGURE 3.13 – Comparaison géométrique d'un maillage voxel et conforme.

La figure 3.14 montre la comparaison entre les deux maillages. Une diminution de 66% du nombre d'éléments et de 80% des nœuds est obtenue par fonctions de niveau comparé au voxel.

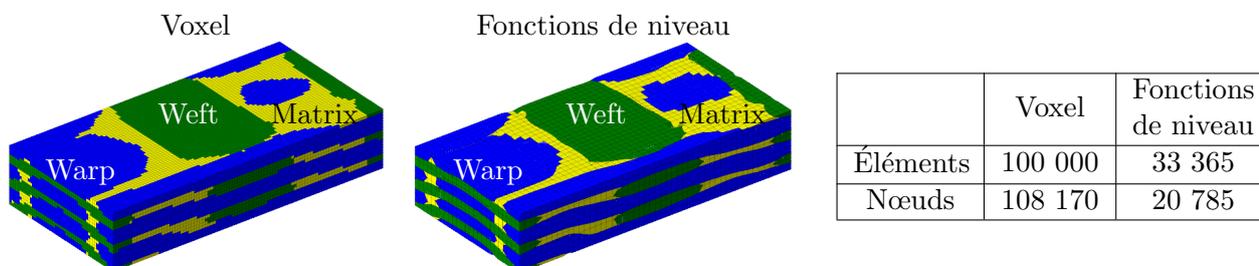


FIGURE 3.14 – Comparaison des caractéristiques de maillage entre voxel et conforme.

Malheureusement, aucun calcul avec cette stratégie de découpe n'a pu aboutir du fait de la présence d'éléments plats et distordus empêchant la bonne convergence des calculs. Par la

suite, les maillages voxels traditionnels sont utilisés avec des éléments d'une taille de  $100\mu\text{m}$  permettant une bonne discrétisation des torons avec la présence d'au moins 4 éléments selon le petit axe de l'ellipse des fils comme illustré figure 3.15. Ceci correspond à un bon compromis en termes de précision de résultats et de coût de calcul.

### 3.3.2 Application à une armure tissée 3D

À l'échelle des tissés, comme montré figure 3.15, trois constituants sont considérés. La matrice, en jaune, supposée identique à celle de l'échelle microscopique, les torons de chaîne, en bleu, et les torons de trame, en vert. Ces derniers sont distincts car leur TVF est ajustés en fonction du volume de fibre cible du composite (entre 50% et 60% en général). Les propriétés orthotropes des torons sont obtenus par homogénéisation à l'échelle microscopique comme effectué en section 3.2.3. La cellule représentée ici est constituée de 2.25 millions d'éléments pour un volume de dimension  $25 \times 15 \times 6\text{mm}$ .

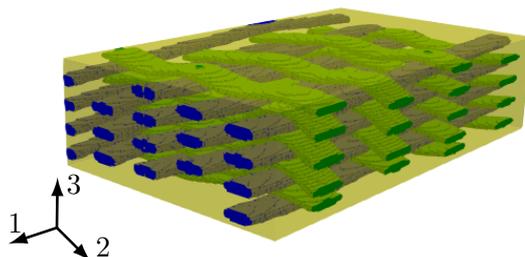


FIGURE 3.15 – Exemple de mésostructure 3D voxélisée.

La figure 3.16 donne les modules de stockage et les taux de perte en fonction de la température pour une armure tissée 3D représentative des composites présents dans l'aube. Les modules de stockage homogénéisés sont normés par leur minimum. Pour illustrer l'influence majeure du comportement de la matrice, le résultat du calcul en trait plein est superposé avec le comportement de la matrice avec un facteur d'échelle constant en tiret.

L'évolution des taux de perte homogénéisés est très similaire à celle de la matrice avec un petit effet de microstructure donnant deux courbes pas tout à fait proportionnelles. Par ailleurs, l'amortissement est plus faible pour  $C_{11}$  que pour  $C_{22}$ , indiquant une fraction d'énergie plus faible dans la matrice. Ce résultat est corrélé avec un module plus élevé et une sensibilité à la température plus faible. En effet, pour  $C_{11}$  le facteur d'échelle de la matrice est de 21.7 contre 13.1 pour  $C_{22}$ , et la variation en température du module  $C_{11}$  est de  $-8\%$  contre  $-12\%$  pour  $C_{22}$ . Plus le module est faible, plus l'influence de la matrice est importante avec une perte de module plus importante en fonction de la température et un amortissement plus grand.

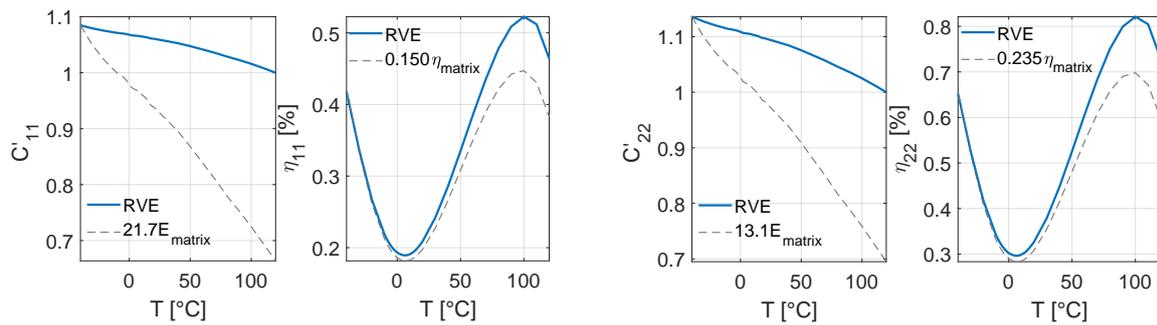


FIGURE 3.16 – Module de stockage et facteur de perte axiaux homogénéisés dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) en fonction de la température.

La figure 3.17 présente les comportements homogénéisés dans les directions de cisaillement. Ces derniers sont très sensibles à la matrice ce qui se traduit par une variation significative en température et un facteur de perte plus important. La perte en module avec la température s'évalue à 29% pour  $C'_{55}$  et 33% pour  $C'_{66}$ . Les facteurs de perte de cisaillement sont significativement plus élevés que ceux de chaîne et de trame. Par la suite, en chapitre 4 et 5, l'intervention de ces composantes dans l'amortissement globale de la structure sera analysée.

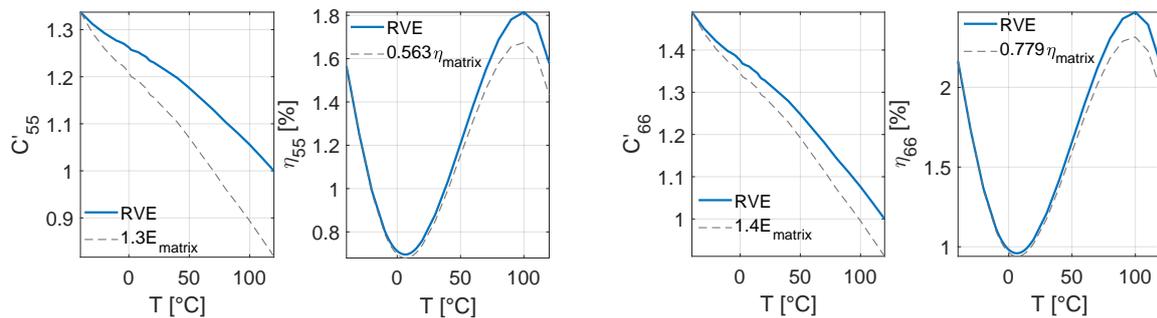


FIGURE 3.17 – Module de stockage et facteur de perte homogénéisés de cisaillement  $xz$  (gauche) et  $xy$  (droite) en fonction de la température.

Par ailleurs, la figure 3.18 illustre l'influence de la fréquence pour cette mésostructure. En corrélation avec le chapitre 4, le calcul est fait à des fréquences de 60Hz, 330Hz et 600Hz.

En termes de module, une augmentation de la fréquence augmente la rigidité. Ceci s'explique à l'aide du principe d'équivalence temps/température exprimé en section 2.2.2.

Concernant l'amortissement, un décalage du minimum est observé pour des températures plus élevée quand la fréquence augmente. En effet, il passe de 6°C à 60Hz à 20°C à 600Hz. Ceci a aussi pour effet, de décaler la transition  $\omega$  au-delà de la gamme de température. Le niveau d'amortissement, avant d'atteindre le minimum, est supérieur pour de hautes fréquences puis il est inférieur mais strictement croissant par la suite. L'explication provient des transitions et du principe d'équivalence temps/température. La transition  $\beta$  se situant après  $-40^\circ\text{C}$ , pour de hautes fréquences les niveaux d'amortissement sont supérieurs avant le minimum puis ensuite inférieur car la transition  $\omega$  n'est pas atteinte.

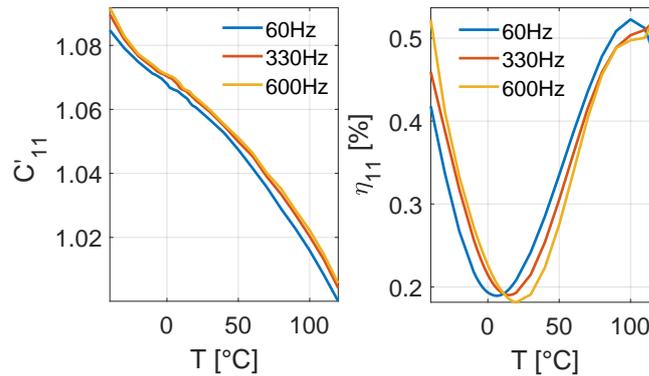


FIGURE 3.18 – Effet de la fréquence sur les propriétés homogénéisées dans le sens chaîne.

### 3.4 Stratégie de résolution : solveur et réduction de modèle

Pour pouvoir réaliser des études en fréquence et en température en un temps réduit sur des maillages de mésostructure à grand nombre de DDL, pour bien représenter la géométrie, différentes stratégies de résolutions ont été investiguées. Le choix du solveur de résolution est un enjeu discuté en section 3.4.1 avec un comparatif entre les méthodes directes et itératives. En section 3.4.2 la stratégie de réduction de modèle appliquée à l’homogénéisation viscoélastique est détaillée.

#### 3.4.1 Choix du solveur de résolution : méthode directe et itérative

Dans le cas de l’homogénéisation viscoélastique, il est nécessaire de résoudre un problème avec raideur complexe (3.17) pour 6 chargements différents. Pour cette résolution, deux grandes classes de solveurs sont considérées, les méthodes directes et itératives, qui diffèrent dans leur compromis entre temps et espace mémoire.

Les solveurs directs considèrent typiquement 3 phases : la factorisation symbolique (renumérotation), la factorisation numérique et la résolution. Si la phase de résolution est généralement très rapide, les phases de factorisation ralentissent notablement le calcul dans les configurations limitent en mémoire et comme le nombre de résolution est ici de 6, le temps de factorisation domine. La toolbox SDT donne accès aux bibliothèques Spooles, UMFPACK et PARDISO. Pour des calculs de petites tailles (<30 000 éléments), la factorisation de la rigidité est acceptable et plus rapide en particulier avec le solveur PARDISO. Pour des maillages volumiques plus significatifs (quelques millions de degré de liberté), des configurations saturant en mémoire arrivent rapidement.

Les solveurs itératifs sont une alternative classique ayant une empreinte mémoire beaucoup plus faible. L’objet matrice factorisée de SDT (*ofact*) permet d’accéder aux solveurs itératifs [119, 120] présents dans MATLAB. Compte tenu des caractéristiques du problème à résoudre, le choix s’est porté sur la méthode des gradients conjugués préconditionnés (PCG) qui permet d’exploiter

la structure des matrices symétriques définies positives. Une comparaison avec la généralisation de la méthode de minimisation du résidu (GMRES) qui est une extension de la méthode de minimisation du résidu pour les matrices non-symétrique (MINRES) a aussi été effectuée et est présentée au sein du tableau 3.4.

Plusieurs options peuvent être attribuées au solveur itératif afin de rendre le calcul plus efficace. Ainsi, pour accroître la vitesse de convergence, des méthodes de préconditionnement existent. Travaillant avec une matrice carrée creuse, une factorisation de Cholesky incomplète est utilisée. Elle est préférée par exemple à une factorisation LU incomplète car la matrice est symétrique. Pour certains modèles, l'apparition de pivot négatif ou nul, peut intervenir entraînant une erreur empêchant le calcul de la matrice de préconditionnement. Pour contourner ce problème, plusieurs techniques existent en modifiant les options du préconditionneur le rendant plus ou moins efficace [121, 120]. Un script permettant le passage d'une technique à une autre en cas d'échec de résolution a été implémenté. La méthode de construction la plus efficiente est de réaliser un préconditionnement sans seuil de tolérance avec une factorisation de Cholesky incomplète modifiée, permettant la conservation de la première colonne. Ensuite, le recours à une factorisation avec un seuil de tolérance est une option, une autre est de réaliser une factorisation de Cholesky incomplète. Enfin, une dernière alternative est de conserver le seuil de tolérance mais de construire une factorisation de Cholesky incomplète compensée en modifiant ainsi les valeurs de la diagonale de la matrice pour éviter la présence de pivot non positif lors du calcul du préconditionneur.

Le modèle utilisé pour réaliser la comparaison entre les solveurs directs et itératifs avec préconditionnement est un petit modèle à l'échelle mésoscopique avec 242 550 éléments. Ceci a été effectué sur un ordinateur ayant pour principales caractéristiques 2 CPUS, Intel xeon E5-2630 v2 2.6Ghz 6coeurs et 96 Go de RAM. Les résultats en termes de temps sont montrés dans le tableau 3.4. La construction du préconditionneur avec une factorisation de Cholesky incomplète n'est pas chronophage et dure 1.8 secondes pour ce modèle, ce qui est satisfaisant.

TABLE 3.4 – Temps de calcul des différentes méthodologies de résolution.

		Temps de calcul (s)	
Taille du modèle	Solveur	Élastique	Viscoélastique
242 550 éléments (767 232 DDL)	Direct Pardiso	1240	Memory failed
	Itératif GMRES( $10^{-6}$ )	227	778
	Itératif GMRES(50)	207	554
	Itératif PCG	149	393

Pour GMRES( $10^{-6}$ ) et PCG, la tolérance des solveurs itératifs est fixée à  $1e-6$ . Pour GMRES(50) un restart est fixé à 50. Un restart permet au solveur itératif de réaliser des itérations internes afin de diminuer le nombre d'itérations externe et ainsi converger plus rapidement. La contrepartie est une exigence en mémoire plus élevées. Le calcul viscoélastique avec le solveur direct n'a pas pu aboutir car il demandait trop de ressources en mémoire. Le gain de temps

entre le solveur direct et itératif PCG pour le calcul élastique est d'un facteur 8. Entre les deux solveurs itératifs, le PCG est plus rapide.

À noter que l'implémentation MATLAB des solveurs sparse itératifs est séquentielle alors que des implémentations parallèles en OpenMP, voir distribuées en MPI sont raisonnablement accessibles. La résolution itérative semble donc la plus adaptée à l'homogénéisation pour des modèles de grandes dimensions à haut niveau de DDL.

### 3.4.2 Réduction de modèle : étude en fréquence et en température

Un calcul à l'échelle mésoscopique, pour un maillage avec environ 7.5 millions de degrés de liberté et en l'état actuel de l'implémentation (algorithme PCG avec préconditionnement Cholesky incomplet) dure environ 6000 secondes par chargement en complexe. Pour 100 températures et 6 chargements par température, il faudrait donc environ 42 jours de calcul pour obtenir l'ensemble du comportement viscoélastique sur le domaine d'intérêt. Pour obtenir des temps de calcul adaptés à la conception, c'est-à-dire la recherche d'optimum nécessitant le test de plusieurs configurations matériaux, une réduction de modèle est donc nécessaire. Comme explicité, plus bas la réduction utilise deux calculs élastiques (10 000 secondes de réduction) et la résolution à 100 températures sur base réduite dure moins de 1 seconde. Le temps de calcul total est donc divisé par environ 350 et pour un seul point viscoélastique le passage par deux calculs réels est plus rapide.

Généralement appliquée en vibration [122], ici la réduction de modèle est appliquée à l'homogénéisation en s'appuyant sur la méthode de réduction de Ritz-Galerkin. La plus ancienne est la réduction de modèle par décomposition de domaines suivant le principe général des méthodes de Ritz [123] avec une projection du modèle sur une base de projection. Dans les alternatives récentes, il existe les méthodes de réduction de données telles que la Proper Orthogonal Decomposition (POD) ou sa généralisation la Proper Generalized Decomposition (PGD) [124].

L'exemple présenté ici est limité à une étude en température pour une fréquence fixée. Cependant, l'inverse est aussi envisageable. La méthodologie développée ici est valable pour tout couple température/fréquence.

La première étape consiste à construire la base d'apprentissage. Un sous-espace d'apprentissage est généré en résolvant le problème initial en équation (3.17)

$$\left\{ \begin{array}{l} \{q_{I_k}^h\} \\ \{q_{C_k}^h(T_i)\} \end{array} \right\} = \left[ -[K_{CC}^h(T_i)]^{-1} [K_{CI}^h(T_i)] \right] \{q_{I_k}^h\} \quad (3.41)$$

en utilisant les propriétés élastiques des matériaux aux températures  $T_i$  associées aux extrema de la gamme de température ciblée comme montré par les flèches en figure 3.19. Le fait que les calculs élastiques suffisent est bien établi [125, 126]. Ainsi l'inversion matricielle, présente dans (3.41) est moins coûteuse en temps et mémoire de stockage. Ce problème étant résolu pour

6 cas de chargements pour deux températures, il en résulte

$$[q^h]_{N \times NR} = \begin{bmatrix} [q_I^h]_{NI \times NR} \\ [q_C^h(T)]_{NC \times NR} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

où  $N$  représente les DDL du système,  $NI$  représente les DDL d'interface,  $NC$  représente les DDL du complémentaire et  $NR$  ceux du modèle réduit avec  $NR = 6n$  où  $n$  est le nombre de point d'apprentissage, ici  $n = 2$ , correspondant aux deux extrema.

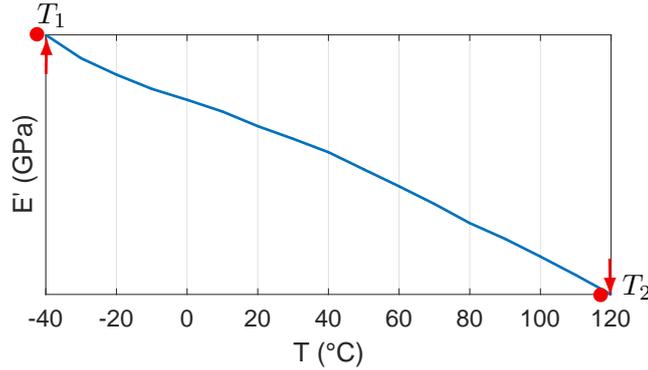


FIGURE 3.19 – Position des extrema pour la construction de la base d'apprentissage.

À partir du sous-espace appris, une base est construite telle que

$$[\mathbb{T}]_{N \times NR} = \begin{bmatrix} [q_I^h] & [q_I^h] \\ -[K_{CC}^h(T_1)]^{-1} [K_{CI}^h] [q_I^h] & -[K_{CC}^h(T_2)]^{-1} [K_{CI}^h] [q_I^h] \end{bmatrix}_{\perp}. \quad (3.43)$$

Il est nécessaire de s'assurer que la base de réduction soit orthonormée afin que les colonnes de cette matrice soient linéairement indépendantes. Pour s'en assurer une procédure d'orthonormalisation est utilisée en résolvant un problème aux valeurs propres projeté sur la base  $[\mathbb{T}]$  en utilisant la matrice de masse et de raideur du modèle à  $T_2$ . Potentiellement, si les vecteurs de  $[\mathbb{T}]$  sont suffisamment indépendants, aucun travail n'est nécessaire. L'étape d'orthonormalisation n'est pas chronophage et correspond à une dizaine de secondes pour le maillage à 7.5 millions de degrés de liberté. À l'issue de cette phase, le sous-espace indépendant de la température est de dimension  $NR = 12$  et la réduction est décrite par la relation de restitution

$$\begin{Bmatrix} \{q_{I_k}\} \\ \{q_{C_k}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [q_I^h] & 0 \\ -[K_{CC}^h(T_1)]^{-1} [K_{CI}^h] [q_I^h] & [\mathbb{T}_{CR}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_{I_k}\}_R \\ \{q_{C_k}\}_R \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

où les déplacements réduits imposés sont simplement les colonnes de l'identité de dimension  $6 \times 6$  soit  $\{q_{I_k}\}_R = \{I_k\}$  et  $[\mathbb{T}_{CR}]$  correspond à la matrice de base de réduction de dimension  $NC \times NR$ .

La technique de paramétrisation de la matrice de raideur en matrice constante en température (équation (3.10)) est appliquée à la matrice de raideur réduite donnant

$$[K(C(T))]_R = \sum C_{ij}(T) [\mathbb{T}]^T [K_{ij}^u] [\mathbb{T}] \quad (3.45)$$

où les coefficients de pondération dépendent de la température, mais les matrices réduites  $[\mathbb{T}]^T [K_{ij}^u] [\mathbb{T}]$  sont constantes.

Le modèle réduit garde la forme (3.41) sauf que les matrices  $[K_{CC}^h]$  et  $[K_{CI}^h]$  sont maintenant de dimension  $12 \times 12$  et que la solution sur l'ensemble des degrés de liberté est obtenue à l'aide de (3.44).

Afin de se convaincre que la réduction de modèle exposée ci-dessus est valide, une vérification a été effectuée à l'échelle des torons, où la matrice possède des propriétés viscoélastiques. Les propriétés homogénéisées sont calculées à une fréquence de 80Hz, pour une gamme de température allant de  $-40^\circ\text{C}$  à  $120^\circ\text{C}$  avec un intervalle de  $1^\circ\text{C}$  et un taux volumique de fibres de 79%. Le modèle est composé de 11 590 éléments et 52 452 DDL. Un calcul complet et un utilisant la réduction de modèle en construisant la base d'apprentissage avec 2 températures  $T_1 = -40^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 120^\circ\text{C}$  sont réalisés. La figure 3.20 illustre une parfaite superposition des deux méthodologies.

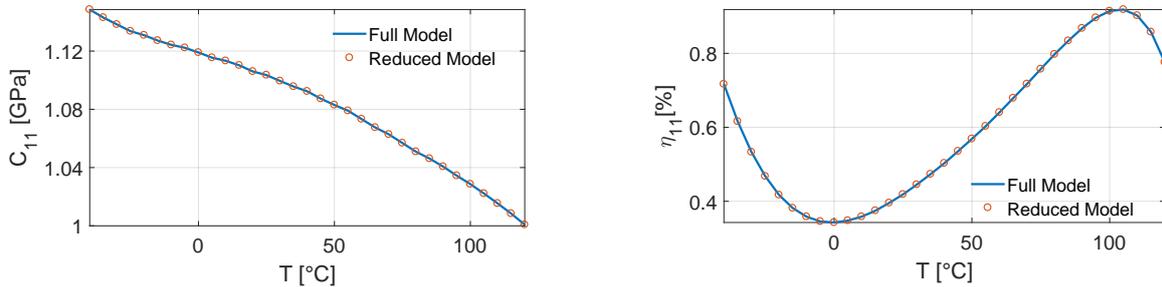


FIGURE 3.20 – Comparaison du module de stockage (gauche) et du facteur de perte (droite) transverse pour un calcul avec et sans modèle réduit.

L'erreur relative entre les deux démarches est quantifiée en module et en amortissement en figure 3.21. Elles sont très faibles et n'excèdent pas  $10^{-4}\%$  pour l'ensemble des composantes. L'erreur sur la composante transverse  $C_{11}$  est la plus importante. L'évolution est en forme de cloche avec un maximum atteint pour des températures médianes de la gamme cible.

Concernant le facteur de perte, l'erreur est légèrement plus élevée mais n'excède pas les  $10^{-2}\%$  quelque que soit la composante. Ici, l'erreur représentée pour  $\eta_{11}$  n'excède pas  $2 \times 10^{-3}\%$  et le maximum est atteint pour le cisaillement plan 12, dans lequel la matrice domine le comportement. L'évolution de l'erreur en température est moins triviale que pour le module.

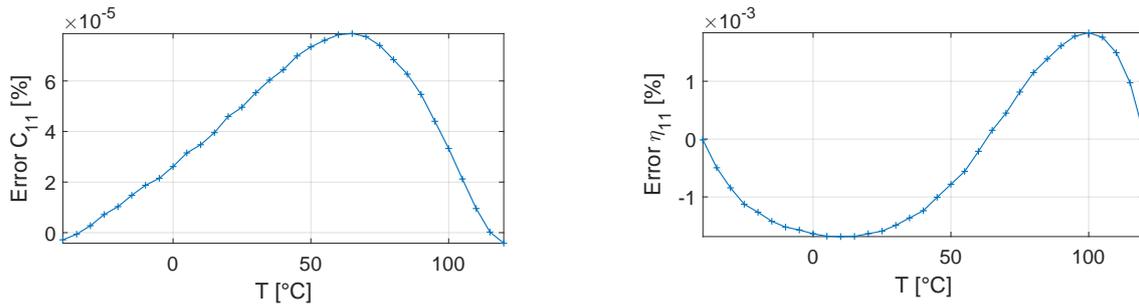


FIGURE 3.21 – Erreur entre le modèle réduit et le modèle complet sur la composante de stockage et le facteur de perte associé dans le sens transverse.

Les deux calculs élastiques pour construire la base réduite dure 4 secondes, la résolution pour les 160 températures dure moins de 1 seconde. Les 160 calculs viscoélastiques sur le modèle complet dure 575 secondes. Par conséquent, le temps de calcul est divisé par 130.

### 3.5 Vérification de la séparation des échelles

Dans le cas des tissées 3D, l'armure tissée a des dimensions de l'ordre du centimètre ce qui est proche de certaines épaisseurs caractéristiques de l'aube de soufflante et des longueurs caractéristiques des gradients de contrainte. C'est pourquoi l'hypothèse de séparation des échelles n'est pas vérifiée de manière évidente. L'objectif est de déterminer à partir de quelle longueur d'onde de sollicitation les propriétés homogénéisées sont correctes.

Ainsi, des chargements à différentes longueur d'onde sont définis et un critère de validité par comparaison des solutions homogènes et hétérogènes associées est introduit. Le développement théorique est détaillé en section 3.5.1 puis appliqué à l'échelle microscopique et mésoscopique en section 3.5.2.

#### 3.5.1 Développement théorique

Des solutions exactes, obtenues par l'utilisation de la transformée de Fourier spatiale ou transformée de Floquet, sont construites sans discontinuité sur les bords du volume, indépendamment de la taille du VER correspondant au motif géométriquement périodique. Elles permettent de tester la validité du modèle homogénéisé en fonction de la longueur d'onde et de contrôler ainsi l'hypothèse de séparation d'échelle. Pour se faire une sollicitation à appliquer au milieu hétérogène et homogène, dépendante de la longueur d'onde, doit être définie. Différentes propositions sont ainsi étudiées afin d'aboutir à la définition de deux critères fournissant des renseignements sur le module de stockage et le facteur de perte homogénéisé.

La figure 3.22 illustre la situation en considérant une périodicité axiale. Toutes cellules de  $\Omega$  se déduisent par translation de la cellule de référence  $\Omega^0$  qui a une taille  $\Delta z$ . Ainsi, il est possible d'exprimer tout point  $\mathbf{X}$  d'une cellule répétée de  $\Omega$  en fonction d'un point  $\mathbf{zeta}$  de  $\Omega^0$ . Pour un

milieu viscoélastique, la solution de la transformée de Fourier spatiale est composée d'une partie réelle et imaginaire, impliquant une résolution sur un modèle de taille  $2N$  correspondant à deux fois le nombre de DDL de la cellule répétée [127, 128].

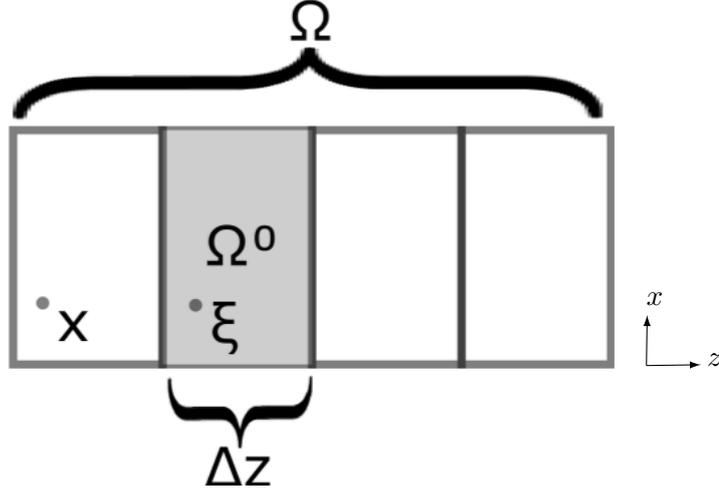


FIGURE 3.22 – Assemblage de 4 cellules pour un milieu périodique axialement.

Pour vérifier la prédiction d'une solution, il faut choisir une sollicitation. Une approche simple est de se donner un champ associé à une onde plane

$$\begin{aligned}
 [a^d(\kappa, \mathbf{X})] &= [\{a_j^d(\kappa, \mathbf{X})\}] \\
 &= \Re(e^{i\{\kappa\}\{X\}}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \Re(e^{i\{\kappa\}\{X\}}) [\{I_j\} a]
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

avec  $\kappa = \{\kappa\}^T = \{k_x, k_y, k_z\}$  le vecteur de nombre d'onde,  $\mathbf{X} = \{X\}^T = \{x, y, z\}$  la position d'un point dans le VER,  $a$  une quantité homogène à un déplacement ou à une accélération,  $d$  l'exposant utilisé pour exprimer un chargement donné appliqué à l'ensemble de la cellule et  $j \in [1, 3]$  l'indice correspondant à la  $j^{\text{ème}}$  direction de déplacement.

Pour un vecteur d'onde général, la direction de propagation est donnée par l'orientation du vecteur  $\{\kappa\}$  et la longueur d'onde physique  $\lambda$  est reliée au module du vecteur par

$$\|\kappa\| = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.47}$$

Pour simplifier les explications, une seule direction de propagation est conservée, par exemple la direction  $z$  comme illustré dans la figure 3.23. Ainsi  $k_x = k_y = 0$  et  $k_z = \|\kappa\|$ . La taille du VER est aussi utilisée comme paramètre. Les longueurs d'onde sont définies en référence à la taille de cellule dans la direction de propagation avec  $\lambda_z = N_c \Delta z$ .

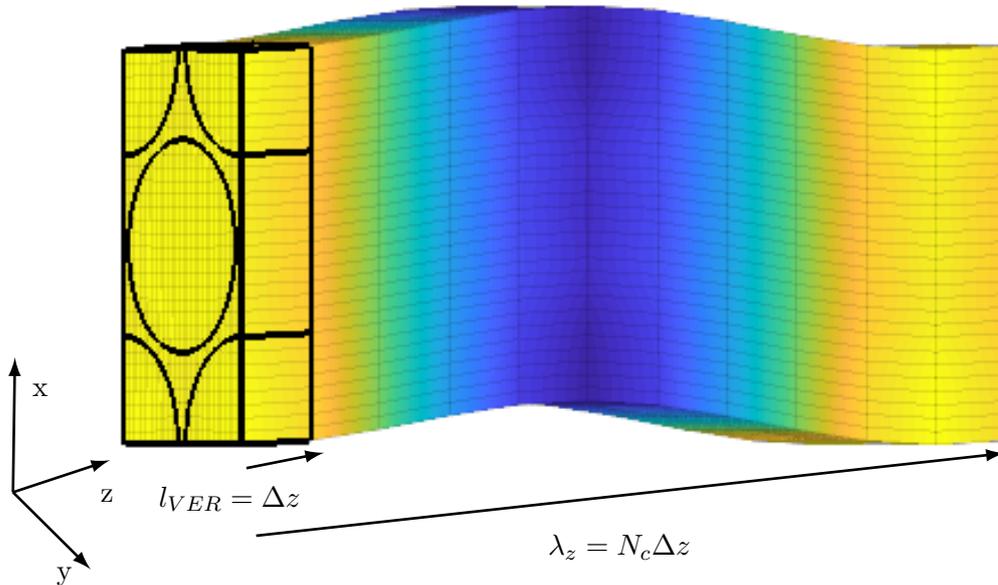


FIGURE 3.23 – Déplacement d’une onde de cisaillement de direction  $x$  pour une longueur d’onde propagée dans la direction  $z$  à l’échelle microscopique.

Au sein de la figure 3.23, le modèle de la cellule de référence est représenté avec les contours épais tandis que le reste illustre la restitution d’une période couvrant plusieurs cellules. Ici l’onde à un mouvement dans la direction  $x$  et se propage dans la direction  $z$ , il s’agit donc d’une onde de cisaillement. Une onde de compression est caractérisée par un mouvement dans la direction  $z$  se propageant dans la direction  $z$ . Il est utile de noter que la propagation dans des directions obliques peut également être envisagée.

Il est proposé d’appliquer un champ de force volumique  $\{f_j^v\}$  périodique et de comparer la réponse statique induite entre le milieu homogène et hétérogène en utilisant la relation d’équilibre des deux milieux. La figure 3.24 montre les champs de déplacement solutions calculés pour différentes forces volumiques construites à partir des masses volumiques ou des rigidités du milieu hétérogène ou homogène pour une onde de cisaillement et une de compression. La deuxième onde de cisaillement n’est pas représentée car pour des raisons de symétries est identique à celle affichée. Les chargements construits à partir de la matrice de masse ou de la matrice de raideur du milieu hétérogène ajoutent des fluctuations non souhaitables empêchant une bonne convergence. Ces fluctuations sont plus marquées pour les ondes de compression que pour les ondes de cisaillement. Plus le contraste des propriétés des matériaux constituant le milieu hétérogène est important, plus les fluctuations sont présentes. Les champs de déplacement construits à partir des caractéristiques du milieu homogène n’introduisent pas de variation au sein du champ ce qui permet une convergence aussi bien en compression qu’en cisaillement.

Un premier choix est de considérer un chargement volumique  $\{f_j^v\} = \rho \{a_j^d\}$ . Ce choix correspond à la troisième colonne de la figure 3.24. Dans le modèle éléments finis, ceci correspond

à la force discrétisée  $\{F_j^v(\kappa)\}$  telle que

$$\{F_j^v(\kappa)\} = \frac{1}{\rho^m} [M^m(\rho^m)] \{q_j^d(\kappa)\} \quad (3.48)$$

où  $\{q_j^d(\kappa)\} = \{a_j^d(\kappa)\}_{\text{noeuds}}$  correspond au  $j^{\text{ème}}$  chargement de l'expression (3.46) qui est homogène à une accélération et  $[M^m(\rho^m)]$  est la matrice de masse du milieu homogène de masse volumique  $\rho^m$ .

Un deuxième choix, représenté en quatrième colonne de la figure 3.24, est de considérer l'effort volumique en équilibre avec une onde de déplacement choisie se propageant dans le milieu homogène, soit  $\{f^v(\kappa, X)\} = \text{div}([C^m] \{\epsilon^d(\kappa, X)\})$ , qui est plus facilement calculé en utilisant

$$\{F_j^v(\kappa)\} = [K^m] \{q_j^d(\kappa)\} \quad (3.49)$$

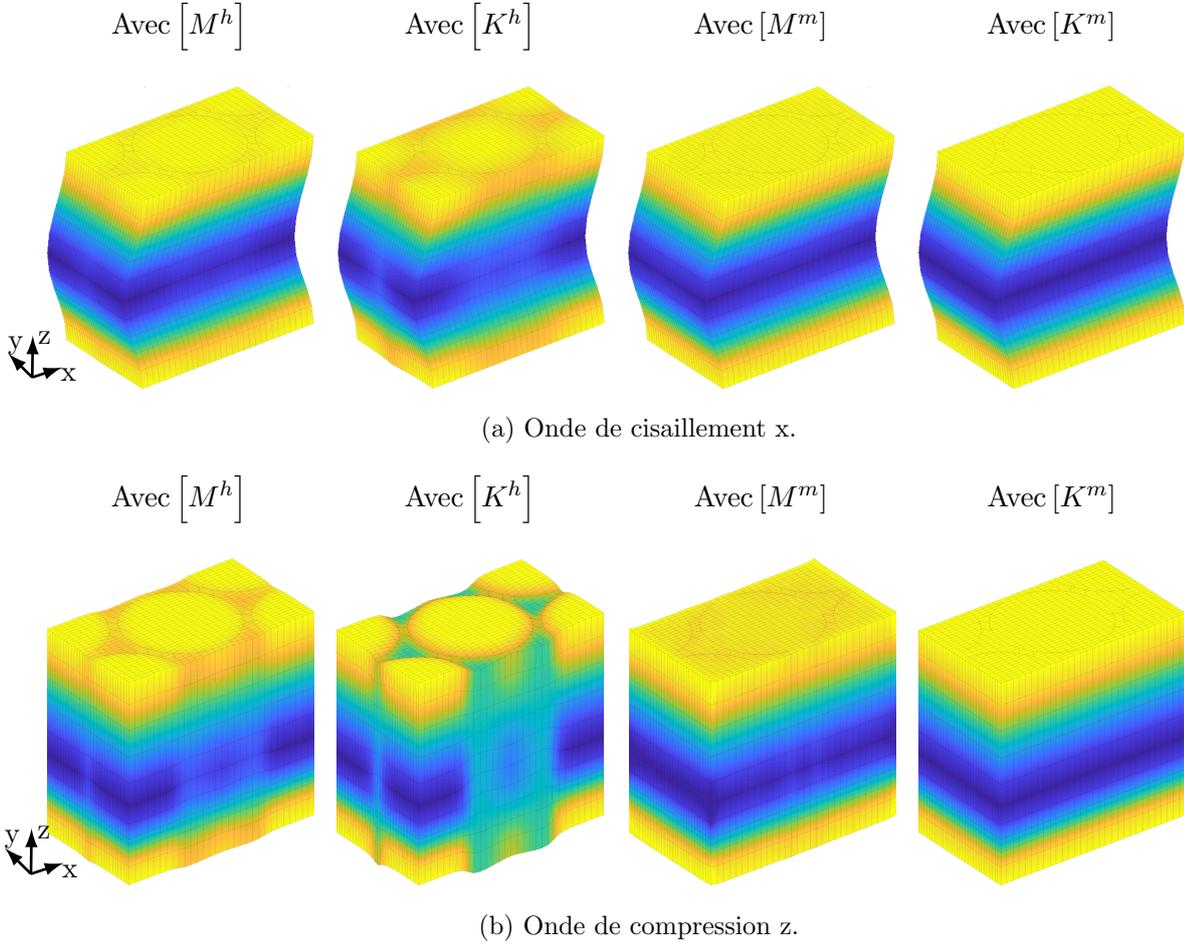


FIGURE 3.24 – Champ de déplacement solution induit par différentes forces volumiques.

L'approche simpliste aurait été de forcer le déplacement dans le milieu hétérogène en appliquant directement  $\{a_j^d\}$ . Cependant ceci ne permet pas d'obtenir les fluctuations attendues à petite échelle et, comme prévu, l'énergie de déformation résultante est assez différente de celle du milieu homogène.

Travaillant en régime quasi-statique, le terme d'inertie est négligé. Ainsi, étant donné un choix de  $\{F_j^v(\kappa)\}$  la réponse périodique statique  $\{q(\kappa)_j\}$  est calculée en utilisant les hypothèses de périodicité [41, 129].

Les expressions (3.34) et (3.36) expriment respectivement les travaux des efforts dissipés et élastiques à l'échelle du modèle éléments finis. Comme précisé précédemment, l'énergie est un cas particulier des expressions du travail des efforts associés à la déformation réelle. Ainsi l'énergie des efforts élastiques peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned} 2E_{elas} &= \{q_j\}^H [K'] \{q_j\} \\ &= \|\{q_j\}\|_{[K']}^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

où  $\|\{q_j\}\|_{[K']}^2$  correspond au carré de la norme  $[K']$  de  $\{q_j\}$ .

Concernant l'énergie des efforts dissipés,

$$\begin{aligned} \frac{E_{diss}}{\pi} &= \{q_j\}^H [K''] \{q_j\} \\ &= \|\{q_j\}\|_{[K'']}^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

où  $\|\{q_j\}\|_{[K'']}^2$  correspond au carré de la norme  $[K'']$  de  $\{q_j\}$ .

Les deux critères, nommés respectivement  $\alpha_{elas}$  et  $\alpha_{diss}$ , sont définis comme étant les rapports des quantités exprimées en équation (3.50) et (3.51) du milieu hétérogène sur celle du milieu homogène tel que

$$\begin{aligned} \alpha_{elas} &= \frac{\|\{q_j^h\}\|_{[K'^h]}^2}{\|\{q_j^m\}\|_{[K'^m]}^2} \\ \alpha_{diss} &= \frac{\|\{q_j^h\}\|_{[K''^h]}^2}{\|\{q_j^m\}\|_{[K''^m]}^2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Lorsque le modèle homogénéisé est valide, ces critères tendent vers 1 signifiant que l'hypothèse de séparation d'échelle est vérifiée. En effet, pour une longueur d'onde élevée, c'est-à-dire sans gradient de contrainte au sein du VER, les énergies des deux milieux sont égales.

L'intérêt est d'obtenir une limite objective quant à la validité de l'homogénéisation réalisée en fixant un seuil sur les critères exprimés en équation (3.52).  $\alpha_{elas}$  procure des informations sur le module de stockage homogénéisé tandis que  $\alpha_{diss}$  est utilisé pour le facteur de perte homogénéisé.

### 3.5.2 Application à l'échelle microscopique et mésoscopique

La procédure explicitée a été appliquée à la fois à l'échelle microscopique et mésoscopique afin d'établir à partir de quelle longueur d'onde caractéristique de gradient les propriétés homogénéisées correctes. Les différents cas de chargement ont été testés et discutés dans cette section.

Pour éviter toute confusion, la direction de propagation de l'onde est notée  $x$ ,  $y$ , ou  $z$  et la direction du mouvement est décrite par 1, 2 ou 3.

A l'échelle microscopique, la vérification est effectuée dans un premier temps en propageant une onde dans la direction de l'axe de la fibre  $z$  comme indiqué sur la figure 3.23. La figure 3.25 montre les résultats obtenus dans cette direction longitudinale. Il est intéressant de constater à cette échelle pour ce chargement que l'énergie engendrée dans le milieu hétérogène est surestimée par rapport à celle du milieu homogène pour l'onde de compression alors que c'est l'inverse pour les ondes de cisaillement.

Pour les deux types d'onde, la vitesse de convergence du critère pour l'énergie dissipée est plus lente que pour l'énergie élastique.

L'onde de compression et celles de cisaillement ne convergent pas à la même vitesse. En effet, la première est plus rapide que les secondes pour l'énergie élastique et plus lente pour l'énergie dissipée. En fixant une erreur de 2% sur le critère, pour l'énergie élastique l'onde de compression converge pour une longueur d'onde  $\lambda = 50\mu m$  contre  $\lambda = 200\mu m$  pour celles de cisaillement (direction 1 et 2). Pour l'énergie dissipée en revanche, les longueurs d'ondes obtenues sont respectivement de  $\lambda = 800\mu m$  pour l'onde de compression et  $\lambda = 400\mu m$  pour celles de cisaillement.

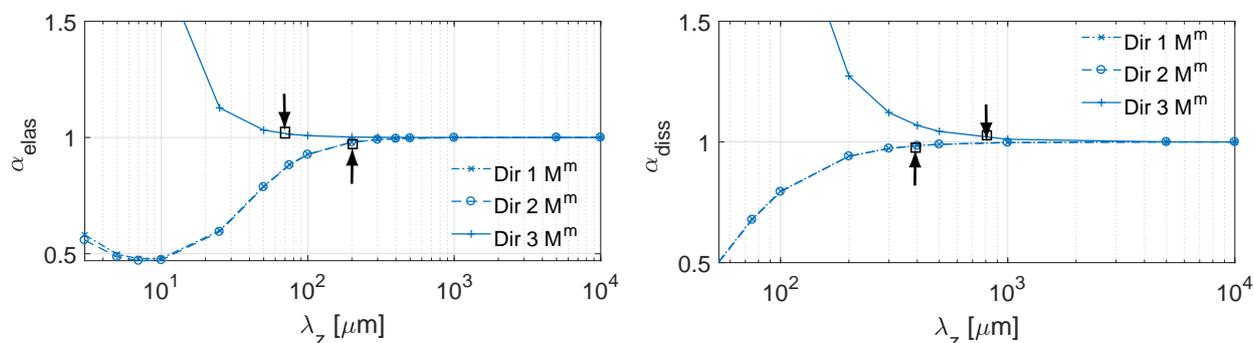


FIGURE 3.25 – Critère de convergence sur l'énergie élastique (gauche) et l'énergie dissipée (droite) pour une force volumique  $f^v([M^m])$  pour une propagation dans la direction longitudinale avec un fil à 75% de fibre.

La figure 3.26 montre une comparaison entre les résultats de convergence obtenus pour un chargement volumique construit à partir de (3.48) et (3.49). L'unique différence intervient pour les faibles longueurs d'onde au niveau du ratio de l'énergie dissipée pour les ondes de compression. En effet pour des longueurs d'ondes inférieures à  $25\mu m$ , le ratio d'énergie calculé à partir de la matrice masse homogène est inférieur à celui calculé avec la matrice de raideur homogène.

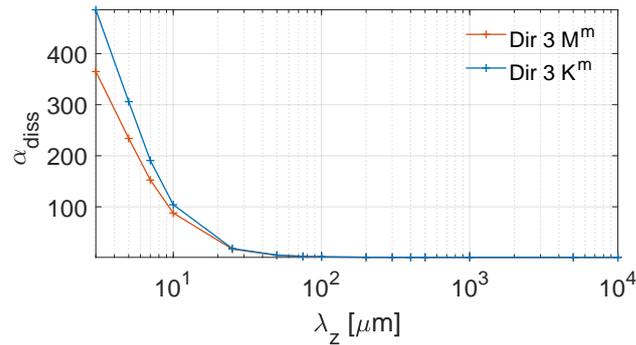


FIGURE 3.26 – Divergence du critère sur l'énergie dissipée  $\alpha_{diss}$  pour une force volumique  $f^v([M^m])$  et  $f^v([K^m])$  pour une propagation dans la direction longitudinale pour un fil à 75% de fibre à faible longueur d'onde.

La convergence est atteinte pour les mêmes longueurs d'onde peu importe la méthode de construction du chargement volumique aussi bien pour  $\alpha_{elas}$  que pour  $\alpha_{diss}$ .

À la suite des précédentes observations, les résultats suivants sont calculés en utilisant un chargement volumique construit à partir de la matrice de raideur construit en équation (3.49).

La figure 3.27 montre les critères de convergence pour une propagation d'onde dans les directions transversales x et y. La convergence est atteinte rapidement pour une longueur d'onde supérieure à  $30\mu m$  pour tous types d'ondes.

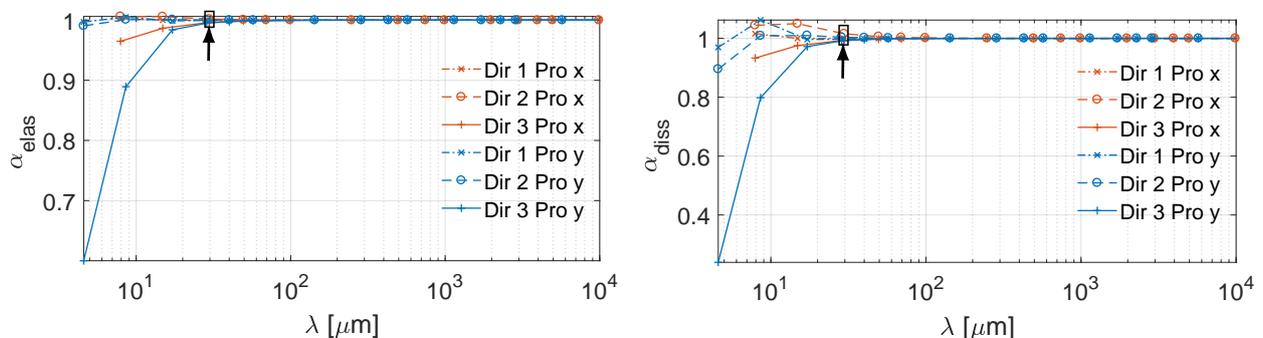


FIGURE 3.27 – Critère de convergence sur l'énergie élastique (gauche) et dissipée (droite) pour un fil à 75% de fibre avec une propagation d'onde dans les deux directions transversales aux fibres.

La figure 3.28 montre l'effet de la température sur les critères de convergence. Les courbes des ondes de cisaillement, direction 1 et 2, se superposent parfaitement en figure 3.26, c'est pourquoi, ici, seule la direction 1 est représentée. La convergence est plus rapide pour les deux critères pour n'importe quel type d'onde pour des températures faibles. De plus, l'erreur en énergie élastique et dissipée est moins importante pour une température à  $-40^{\circ}C$  qu'à  $120^{\circ}C$ . Cependant, pour une marge d'erreur fixée à 2% la différence en température n'existe pas, en effet, cette dernière intervient principalement à faible longueur d'onde.

De plus, plus le contraste entre les matériaux est important, plus la convergence est lente. En effet, à  $-40^{\circ}\text{C}$ , la matrice est plus rigide qu'à  $120^{\circ}\text{C}$ , donc ses propriétés sont plus proches de celles des fibres et le contraste moins important.

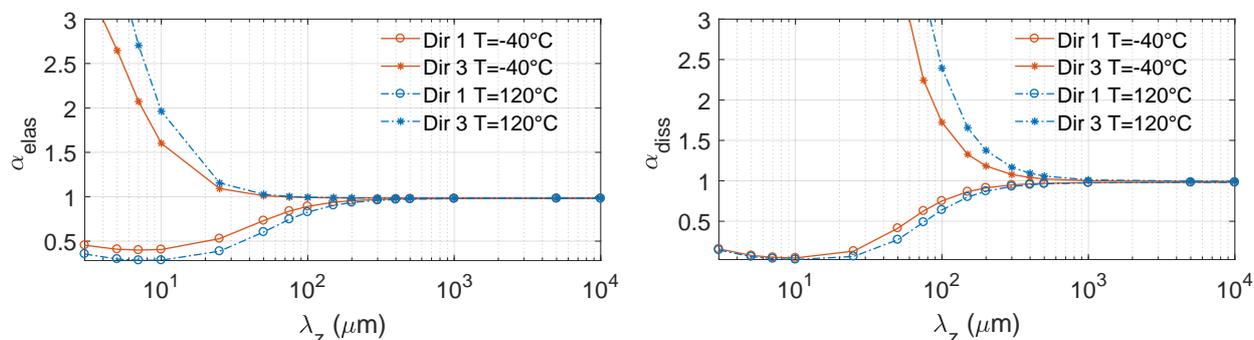


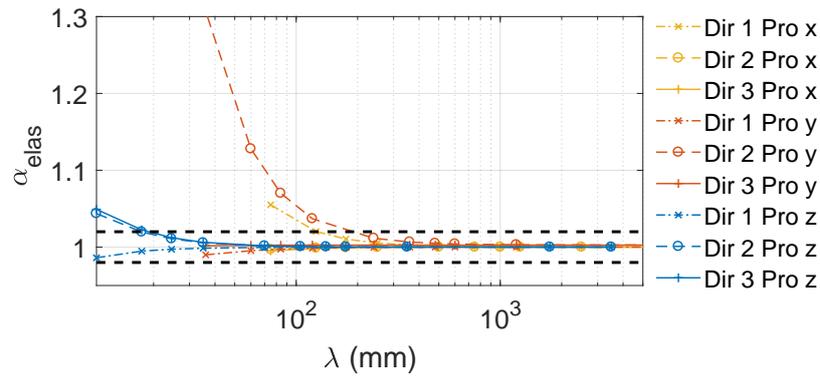
FIGURE 3.28 – Critère de convergence sur l'énergie élastique (gauche) et dissipée (droite) pour des températures de  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$  pour une propagation d'onde longitudinale ( $z$ ) pour un toron à 75% de fibre.

L'ensemble de ces observations montrent que l'homogénéisation viscoélastique du fil est valable si la longueur d'onde de la sollicitation est supérieure à  $1\text{mm}$  dans la plage de température visée. Par conséquent, une confiance dans la valeur du fil homogénéisé pour effectuer le calcul à l'échelle mésoscopique est assurée car les longueurs caractéristiques au sein du tissage sont supérieures au  $\text{mm}$ . De plus, rapporté à un mode de structure, ce type de fluctuation de l'ordre du millimètre n'intervient que pour de très hautes fréquences, ce qui conforte la validité de l'homogénéisation.

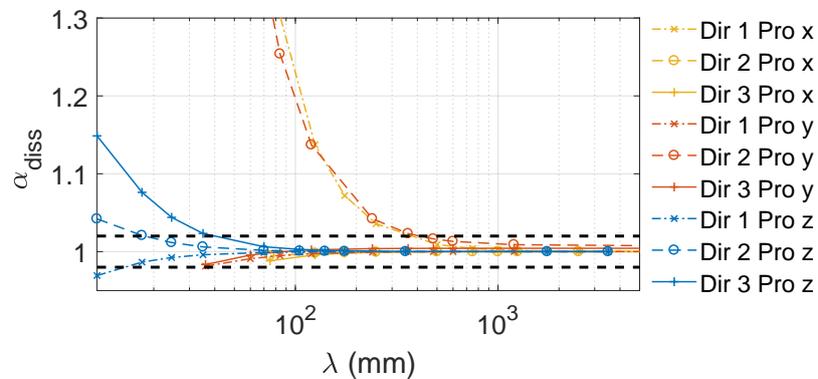
À l'échelle mésoscopique, l'homogénéisation de l'armure tissée est étudiée. Les calculs ont été effectués sur l'armure représentée en figure 3.15. La figure 3.29 représente les résultats obtenus pour des ondes se propageant dans les trois directions. Les barres en tirets représentent la marge d'erreur de 2%. Une couleur est associée à chaque direction de propagation et un marqueur à la direction du mouvement.

Dans les trois directions de propagation pour l'énergie élastique et dissipée, les ondes de compression surestiment l'énergie dans le milieu hétérogène et les ondes de cisaillement la sous-estime excepté pour l'onde de cisaillement  $y$  avec une propagation en  $z$ .

La convergence de  $\alpha_{diss}$  est plus lente que celle de  $\alpha_{elas}$ . En effet, avec une marge d'erreur de 2%, la limite objective à l'échelle mésoscopique est fixée à  $\lambda = 200\text{mm}$  pour le module de stockage et  $\lambda = 400\text{mm}$  pour le facteur de perte pour l'ensemble des directions. La direction de propagation dans le sens trame (en  $y$ ) est la plus désavantageuse.



(a) Sur l'énergie élastique.



(b) Sur l'énergie dissipée.

FIGURE 3.29 – Critère de convergence sur les deux énergies pour l'ensemble des directions de propagation pour une armure tissée 3D.

Cependant, dans cette étude, le tissé 3D au sein de l'aube fan est sollicité en flexion, c'est pourquoi il est intéressant de déterminer la validité de l'homogénéisation pour une direction de propagation en  $x$  qui est celle correspondant au sens chaîne. Une exploitation détaillée sera présentée en section 4.2.3 afin de comprendre les observations effectuées lors des essais Oberst modifié sur les éprouvettes en composite tissé 3D.

## **Chapitre 4**

### **Essais Oberst modifiés : corrélation calcul/essai**

L'objectif est de s'assurer que les calculs numériques sont représentatif de la réalité en caractérisant l'amortissement de composites tissés 3D en fonction de la température, de la fréquence et de l'orientation matériau pour les deux premiers modes de flexion. Le test mis en place est un essai Oberst modifié, il est dérivé de la méthode des poutres Oberst définie dans la norme ASTM E756-98 [130]. Le banc d'essai est d'abord analysé finement, pour des éprouvettes métalliques, afin de quantifier les sources d'amortissement induites. Ensuite, l'essai est utilisé pour la caractérisation d'éprouvettes composites, en tenant compte des apports d'amortissement liés au banc. Les résultats sont comparés à la simulation éléments finis, afin d'identifier les termes prépondérants dans le comportement du composite.

## 4.1 Protocole expérimental et caractérisation du banc d'essai sur éprouvettes métalliques

Dans cette partie, le banc d'essai permettant la caractérisation de l'amortissement en température est présenté. Une fois le contexte et les différentes approches existantes introduits, les principes de conception du banc sont détaillés avec un accent mis en section 4.1.3 sur l'impact du serrage et de l'excitation pour une liaison boulonnée au niveau des mors. Enfin, les résultats en température sur des éprouvettes métalliques sont analysés résultant en section 4.1.5 sur une caractérisation du biais maximal induit par le banc d'essai sur les valeurs en amortissement.

### 4.1.1 Contexte et présentation des bancs d'essais

Pour les matériaux souples, il est usuel d'utiliser une analyse mécanique dynamique (DMA) en traction, flexion, ou cisaillement pour caractériser les modules complexes comme c'est le cas en section 2.2 pour la résine. Ces approches ne sont cependant pas adaptées pour les composites renforcés par des fibres longues, car pour les dimensions d'un VER représentatif du tissage, la raideur de l'échantillon est supérieure à celle de l'appareillage d'une DMA standard. L'alternative usuelle est alors d'utiliser une éprouvette de plus grande taille, de caractériser ses modes et leur amortissement et de recalibrer les paramètres matériau associés. L'essai standard des poutres Oberst [130] est ainsi basé sur ce principe et des formules analytiques relient les mesures modales d'une poutre encastree-libre aux propriétés matériaux comme le module et le taux de perte. La norme donne des expressions validées pour une géométrie spécifique définie, mais le principe de relier le module complexe et les propriétés modales est une problématique de recalage de modèle qui est utilisable dans bien d'autres configurations.

La première étude sur les propriétés dynamiques des poutres constituées de matériaux viscoélastiques, dans le cadre des matériaux sandwichs, a été présentée par Kerwin [131]. Une extension de ce travail via l'analyse de la variation de l'amortissement d'une poutre constituée d'un matériau orthotrope en fonction de l'orientation des axes du matériau a été développée par Adams et Bacon [31] puis par Ni et Adams [32]. Des études sur des composites particu-

laïres à matrice polymère ont été menées pour identifier les propriétés mécaniques dynamiques et être capable de détecter des endommagements de structure avec une DMA et une analyse modale [132] dont les principes théoriques sont respectivement détaillés dans [133] et [134].

Pour des composites ayant des renforts unidirectionnels ou tissés avec un motif sergé en fibre de verre, les coefficients d'amortissement longitudinal, transverse et longitudinal/transverse respectivement notés  $\eta_{11}$ ,  $\eta_{22}$  et  $\eta_{66}$  ont été déterminés à partir de l'analyse expérimentale en flexion de poutre par Berthelot et Assarar [135, 136]. Ces travaux récents ont permis d'obtenir des valeurs de l'amortissement pour différentes directions de fibre égales à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  avec un maximum d'amortissement atteint pour une orientation de  $45^\circ$  et variant entre 0.6% et 1.2% pour une armure sergé à 50Hz. Ces résultats montrent aussi que l'amortissement augmente lorsque la fréquence croît pour les deux types de matériaux.

Une approche alternative est de remonter aux modules à partir de mesure de champ et donc à chaque fréquence. Ceci peut être mis en oeuvre par des méthodes de résolution inverse [137] ou par l'analyse du nombre d'onde complexe caractérisant longueur d'onde et distance d'atténuation [138]. Bottois [137] a testé sa méthodologie sur des éprouvettes métalliques pures ou sandwichs longilignes de faibles épaisseurs tandis que Margerit [138] l'a appliquée à de nombreux types de matériaux : isotrope, orthotrope, isotrope viscoélastique, orthotrope viscoélastique, sandwich isotrope avec des épaisseurs allant jusqu'à 5mm. Ces méthodes, qui permettent de remonter à des estimations locales, semble applicable à des composites tissés de faible épaisseur.

#### 4.1.2 Principes de conception pour le banc d'essai

Dans ce travail, une approche par recalage d'une configuration Oberst modifiée a été considérée. Les contraintes associées à la conception du banc sont :

- de caractériser l'amortissement d'éprouvette en composite tissé 3D de petite taille ;
- de respecter les VER associés au tissage avec des épaisseurs de 7 à 12mm ;
- d'avoir des fréquences représentatives des aubes de soufflante soit un premier mode compris entre 60 et 100 Hz
- d'être dans une gamme de température d'utilisation allant de  $-40^\circ\text{C}$  à  $120^\circ\text{C}$
- d'être applicable à des matériaux ayant des modules qui sont plutôt élevés avec un ordre de grandeur avoisinant les 100GPa et des amortissements faibles entre 0.2% et 0.4%.

Chacun des points énumérés précédemment est détaillé afin de comprendre le cheminement de la conception du banc d'essai.

Des éprouvettes de petites tailles sont utilisées car l'approvisionnement de grandes éprouvettes est difficile et la réalisation de tests en température dans des grandes chambres climatiques est complexe à maîtriser. Ainsi des échantillons de 200mm de long ont été retenus. Ce choix permet, par ailleurs, de découper des éprouvettes plusieurs fois dans la même direction et de varier les orientations de découpe dans un même panneau.

Pour respecter la contrainte de fréquence en ayant une éprouvette courte et raide, la configu-

ration encastrée libre à masses ajoutées s'avère nécessaire. Ces dernières sont vissées à l'aide de 3 vis à l'extrémité libre comme cela est illustré en figure 4.1. Le choix des masses est une variable d'ajustement permettant de se positionner à une fréquence supérieure à 50Hz afin d'éviter le bruit important lié à l'étuve en dessous. Pour abaisser la fréquence de flexion et fournir une surface pour le positionnement d'un système de mesure indépendant de l'éprouvette, un montant vertical est rapporté soudé au centre induisant peu d'amortissement.

Le dit encastrement de l'essai est une liaison boulonnée sur ce montant vertical soudé. Les éprouvettes sont serrées à leur base par trois vis entre deux mors en acier, eux-mêmes fixés au montant par deux vis. Il est bien connu que les liaisons boulonnées ont tendance à dissiper une partie de l'énergie du système, et donc à apporter de l'amortissement. Cet apport dû au frottement dans les interfaces de contact peut être significatif lorsque que les amortissements matériaux à mesurer sont faibles. De nombreux travaux ont caractérisé ce type de liaison expérimentalement et numériquement [139, 140, 141]. La conception de cette liaison a fait l'objet de nombreuses itérations détaillées en section 4.1.3 afin de minimiser son impact.

Pour permettre la mesure d'amortissement faible, il est indispensable de porter une attention particulière au fait de ne pas mesurer des amortissements induits par d'autres éléments. En dehors des liaisons encastrements, il est donc choisi d'utiliser un massif d'encastrement suspendu sur une liaison très peu dissipative. Ceci est réalisé par un bloc d'acier reposant sur un socle équipé de ressorts métalliques. Pour accélérer les études, trois bancs ont été fabriqués et pour limiter le couplage des bancs entre eux, surtout à basse fréquence, la plaque support de chaque banc a été équipée de plots élastomères comme illustré en figure 4.1.

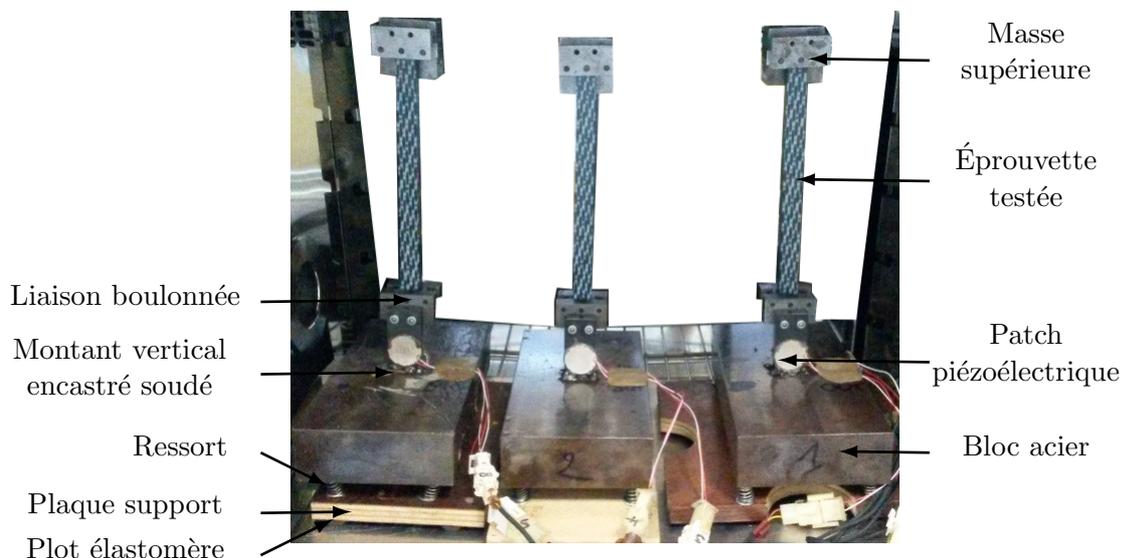


FIGURE 4.1 – Les bancs d'essai au sein de l'enceinte thermique.

Deux patches piézoélectriques représentant l'entrée et la sortie du signal sont collés sous pression à l'aide d'une colle haute température sur le montant vertical. Le signal d'entrée émis est un balayage fréquentiel exponentiel. Le collage est important et doit résister à des cycles de température avec un différentiel de 160°C entre la température minimale et maximale. Par

ailleurs, la réalisation des essais à basse température ( $-40^{\circ}\text{C}$ ) pose des problèmes de condensation et donc de court-circuit potentiel du banc d'essai. L'isolation électrique initiale des patches est donc complétée à l'aide de vernis isolant. Des essais utilisant un pot vibrant à la place des patches piézoélectriques n'ont pas été envisagés car la contrainte de place, de mobilité et l'aspect thermique des essais ont été des freins. Néanmoins, il existe des enceintes munies de pot vibrant ou encore des pots vibrants pouvant être utilisés pour des températures de  $-70^{\circ}\text{C}$  à  $170^{\circ}\text{C}$  [142].

La figure 4.2 illustre les deux premières flexions qui sont utilisées dans la phase de recalage en section 4.2. Au-delà, la flexibilité des liaisons rend difficile l'interprétation des mesures qui sont cependant de bonne qualité.

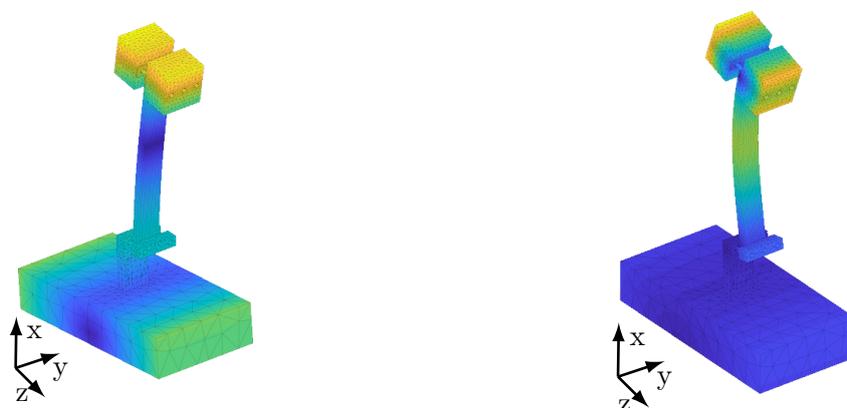


FIGURE 4.2 – Déformée du modèle éléments finis des modes de flexion 1 et 2.

Une étude en température est effectuée pour certains isothermes choisis dans la gamme de température. Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) obtenues sont représentées en figure 4.3. Le graphique de droite est un zoom sur les deux premiers modes de flexion. L'effet de la température est clairement observable avec une diminution de la fréquence de chaque mode pour une augmentation de température. La qualité de la FRF reste bonne et permet une bonne distinction de chaque mode. Une automatisation du post-traitement des essais en température est donc possible afin d'extraire la fréquence et l'amortissement modal. Chaque pic est identifié à l'aide d'une fonction continue et l'amortissement est obtenu à l'aide de la méthode de la bande passante à  $-3\text{dB}$ . L'ensemble du processus d'identification a été implanté au sein de SDT [143].

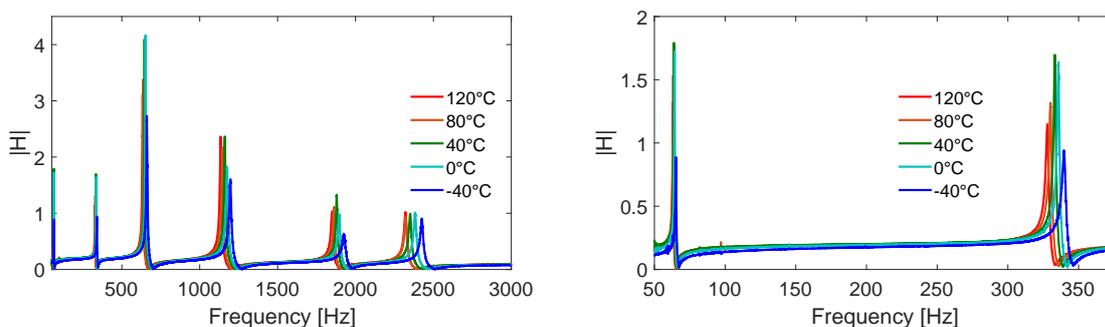


FIGURE 4.3 – Fonction réponse en fréquence pour différentes températures.

Concernant le contrôle de la température, les éprouvettes ont été placées dans une étuve WEISS (WKL100) pouvant atteindre des températures entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $180^{\circ}\text{C}$  (voire  $-70^{\circ}\text{C}$  pour certains modèles). Un cycle lent, détaillé en figure 4.4, est appliqué avec une montée de  $0.5^{\circ}\text{C}/\text{min}$  afin d'assurer le plus possible une uniformité de température et ainsi éviter un gradient thermique trop important lors des phases de montée et de descente au cours du cycle.

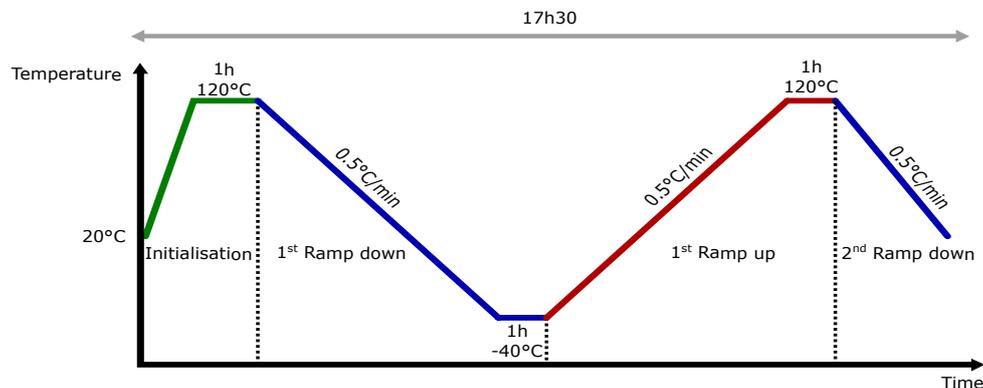


FIGURE 4.4 – Cycle de température des essais.

Les figures 4.5a et 4.5b montrent que même avec une rampe très lente un effet d'hystérésis non stabilisé respectivement en température et en fréquence est présent rajoutant un biais de mesure au banc. Plus le cycle de montée et de descente en température est rapide plus l'effet d'hystérésis est marqué. En effet, plus la rampe de température est élevée plus l'aire de l'ellipse est importante, plus elle est ouverte.

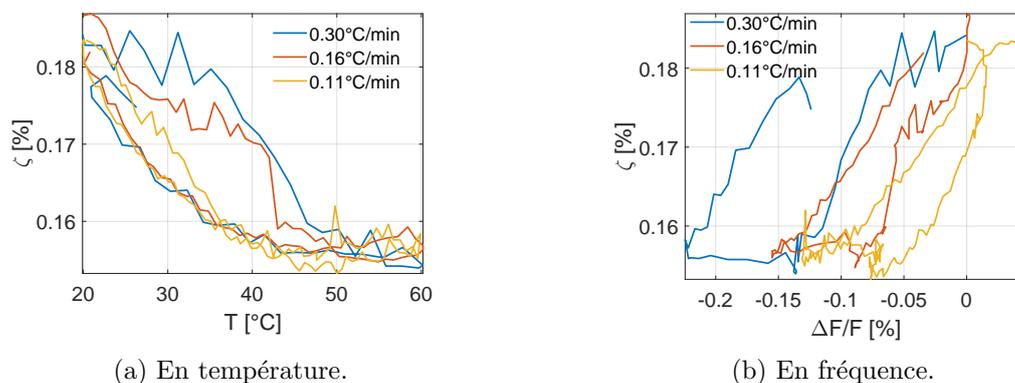


FIGURE 4.5 – Effet d'hystérésis sur l'amortissement modal.

### 4.1.3 Amortissement induit par les mors : serrage et excitation

Le contact entre les mors et l'éprouvette au niveau de la liaison boulonnée est réalisé sur des épaulements étroits permettant d'augmenter la pression de contact de manière à limiter les glissements entre les constituants. Le contact d'interface entre les masses supérieures et l'éprouvette est aussi minimisé en ajoutant deux cales en aluminium.

Le banc détaillé dans la section précédente était conçu au préalable de cette thèse. Afin de

raffiner la compréhension de ses qualités et limitations, des essais sont menés sur des éprouvettes métalliques isotropes d'une hauteur de 200mm, d'épaisseur 10mm, et de largeur 14mm. Les matériaux retenus sont l'aluminium 7050, le titane (Ta6V) et l'acier 5540 (Inconel 600 [144]) afin d'avoir des matériaux avec une rigidité plus ou moins importante.

L'objectif de la campagne, en dehors de l'obtention d'amortissement pour les matériaux métalliques, est d'optimiser le serrage des mors et l'excitation de manière à minimiser les amortissements induits par le banc tout en conservant un bon rapport signal/bruit.

Les figures 4.6a et 4.6b montrent la tendance type observée pour les trois matériaux métalliques pour les deux modes c'est pourquoi les valeurs numériques en abscisse et en ordonnée ont été enlevées. Le serrage, ajusté à l'aide d'une clé dynamométrique, augmente la raideur de contact et diminue l'amortissement induit. Ceci est visible par le décalage vers la droite en fréquence et un pic moins évasé. L'effet de l'utilisation d'une liaison boulonnée en guise d'encastrement est clairement montré.

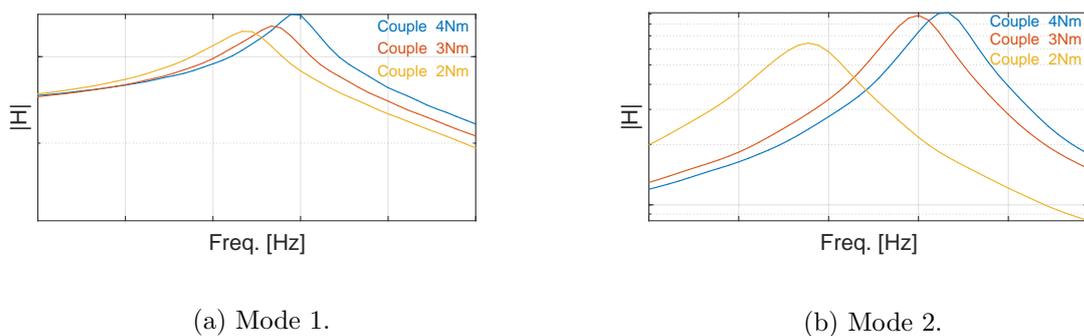
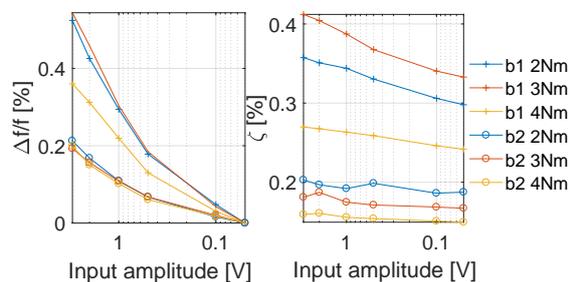


FIGURE 4.6 – Influence du serrage des mors sur la fonction réponse en fréquence pour les matériaux métalliques à une excitation de 1V.

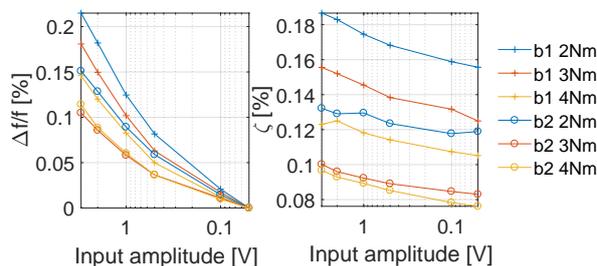
La figure 4.7 montre l'influence de l'amplitude de l'excitation sur la fréquence et sur l'amortissement modal  $\zeta$  pour différents couples de serrage sur deux éprouvettes testés sur deux bancs distincts à une température de 20°C.  $\Delta f/f$  correspond à l'erreur relative en fréquence avec la fréquence obtenue pour l'excitation minimale. Une augmentation de l'excitation entraîne une augmentation de la fréquence et donc une raideur du système plus importante. L'amortissement induit par les micro-glissements dans la liaison augmente avec le niveau d'excitation mais un niveau minimal est nécessaire pour obtenir des mesures propres dans les phases de régulation en température où les vibrations induites par l'étuve viennent perturber la mesure. Le banc joue un rôle important sur l'amortissement et entraîne un écart entre les deux éprouvettes. De manière générale, plus le couple de serrage est élevé, plus l'amortissement est faible et la variation en excitation est moindre.

La tendance est généralisable aux trois matériaux même si les non-linéarités de comportement en fréquence et en amortissement semblent diminuer avec la rigidité matériau. En effet, les écarts observés avec les éprouvettes aluminiums sont moins importants que ceux du titane ou de l'acier. Compte tenu de ces investigations, une configuration avec un couple de serrage de 3Nm et une

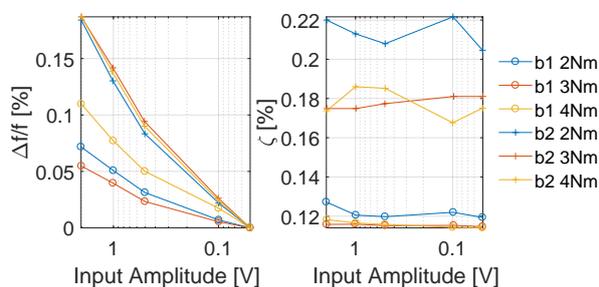
excitation de 0.5V a été retenue pour effectuer les essais en température.



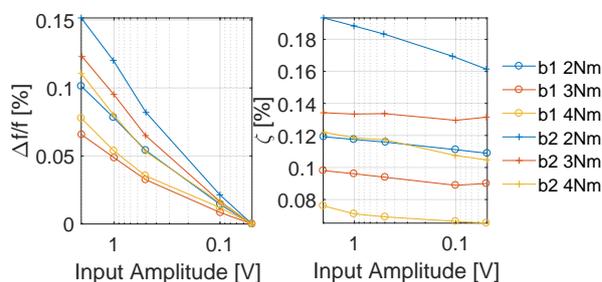
(a) Mode 1 de l'acier.



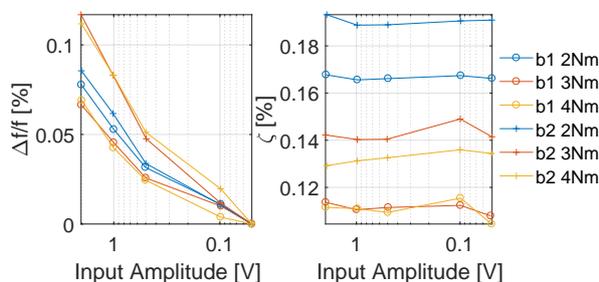
(b) Mode 2 de l'acier.



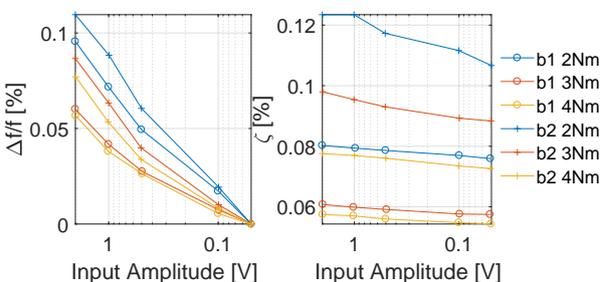
(c) Mode 1 du titane.



(d) Mode 2 du titane.



(e) Mode 1 de l'aluminium.



(f) Mode 2 de l'aluminium.

FIGURE 4.7 – Influence de l'excitation sur la fréquence et l'amortissement pour les matériaux métalliques pour différents couples de serrage.

#### 4.1.4 Résultats en température sur éprouvettes métalliques

Dans la littérature, R. S. Lakes [145] a rassemblé de nombreuses données d'amortissement de divers matériaux. À température ambiante, pour une fréquence de 1Hz, l'aluminium et l'acier ont respectivement des facteurs de perte d'une valeur de 0.1% et 0.05% alors qu'à 10kHz, des valeurs de 0.08% et 0.1% sont indiquées. Certains alliages d'aluminium présentent des facteurs de perte très faibles. Les aluminiums 6061 et 5056, par exemple, qui possèdent respectivement des modules d'élasticité de 69GPa et 72GPa, ont des facteurs de perte de 0.036% et 0.045% en torsion à température ambiante. Pour l'aluminium, un pic d'amortissement a été observé pour

des températures élevées de l'ordre de  $300^{\circ}\text{C}$ . Pour rappel, l'aluminium testé est du 7050, il possède un module d'élasticité de  $71.5\text{GPa}$  mais aucune donnée d'amortissement n'a été trouvée.

Ici, les trois matériaux ont été testés en température pour le cycle de température représenté en figure 4.4 avec un couple de serrage à  $3\text{Nm}$  et une amplitude d'excitation à  $0.5\text{V}$ . Concernant la configuration des masses ajoutées sur la partie libre des éprouvettes, elle est identique pour l'acier et le titane et correspond à la configuration de masse 1 de la figure 4.8, c'est-à-dire l'ajout de  $715$  grammes au sommet. En revanche pour l'aluminium, il est nécessaire de limiter la masse afin d'obtenir un premier mode à une fréquence supérieure à  $50\text{Hz}$ . Ainsi la configuration de masse 2 est retenue avec au sommet  $424$  grammes.

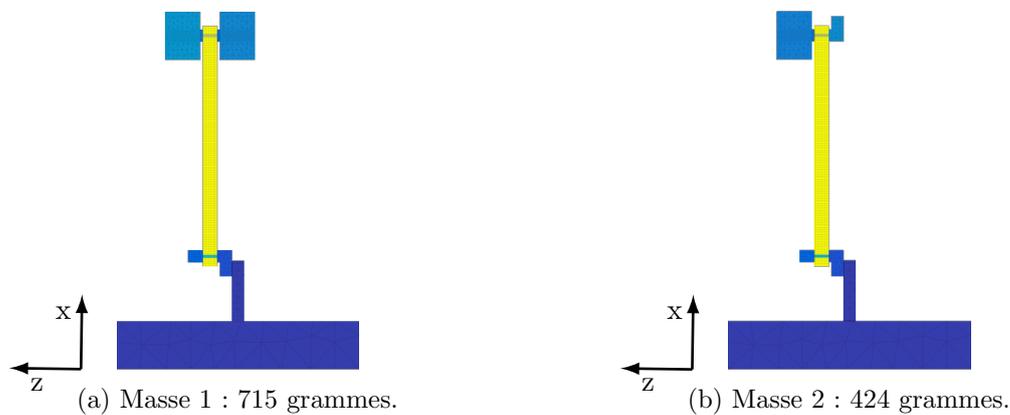


FIGURE 4.8 – Configuration des masses ajoutées au sommet.

La figure 4.9 montre les résultats expérimentaux obtenus pour les deux premiers modes. La première flexion est affichée en bleu tandis que la deuxième est en orange.

Les fréquences de référence affichées dans les figures correspondent à celles relevées à  $T=-40^{\circ}\text{C}$ . Elles sont légèrement différentes entre les deux bancs de  $3\%$  pour l'aluminium et le titane et de  $5\%$  pour l'acier. Les fréquences mesurées sont plus faibles sur le banc 2. Chaque banc est unique du fait de la soudure du montant vertical dans le bloc d'acier.

Concernant l'évolution de la fréquence en température, pour les deux bancs, une différence entre  $3.5\%$  et  $6\%$  est observée pour l'ensemble des matériaux. Ceci semble important pour des métaux dans cette gamme de température. Un effet de liaison au sein du banc est fortement envisagé dû à la dilatation thermique.

Les limitations présagées sont liées à la méconnaissance des propriétés exactes de chaque banc et au fait que les liaisons boulonnées reliant le banc à l'éprouvette ne sont pas parfaites.

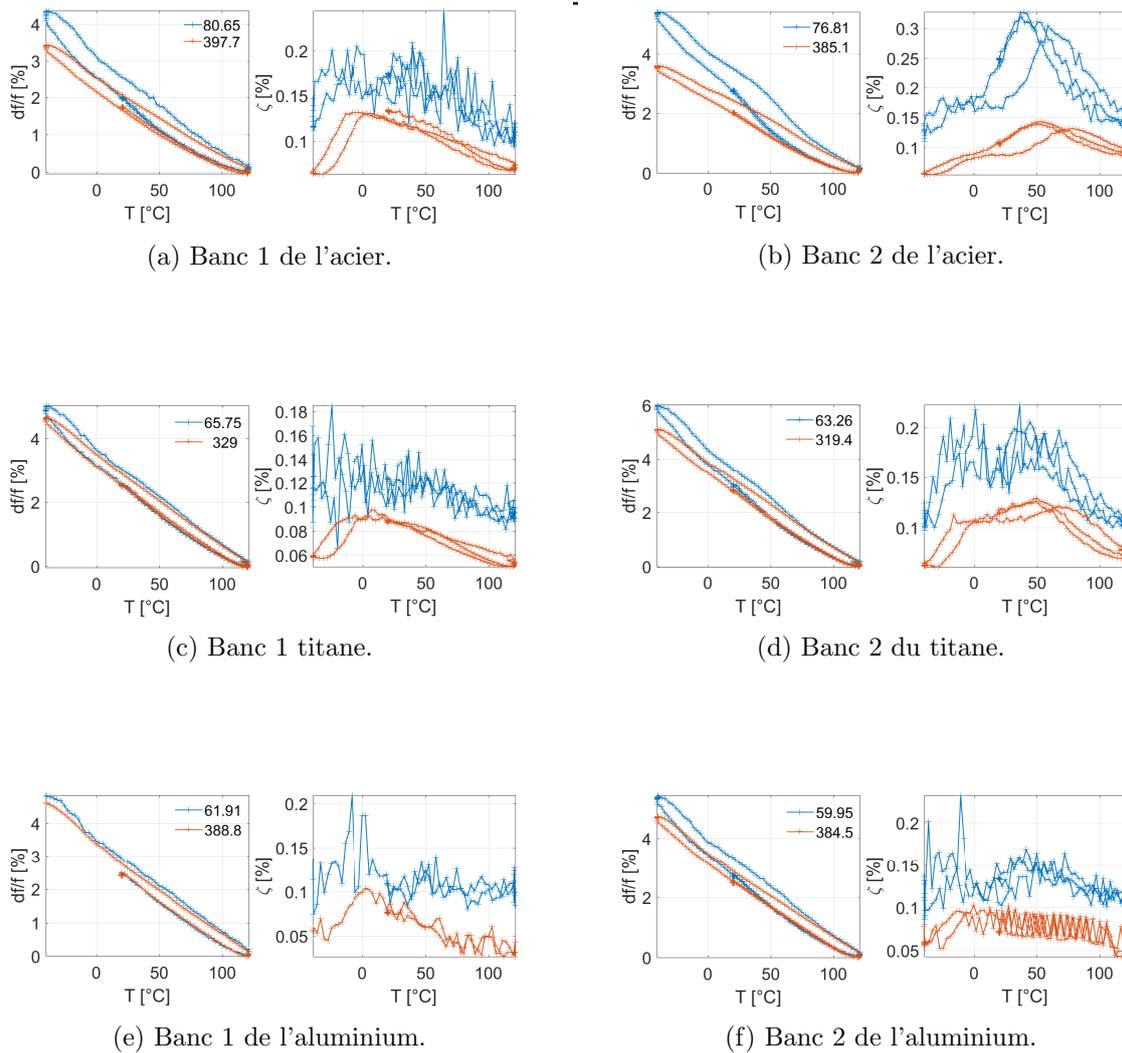


FIGURE 4.9 – Évolution de la fréquence et de l'amortissement en température pour les trois matériaux métalliques.

Afin d'étudier l'impact de la liaison boulonnée et de quantifier le biais généré par le banc, un essai dans une configuration libre-libre est réalisé. L'éprouvette en acier est choisie car il s'agit de la configuration la plus désavantageuse dans le cas du test sur le banc. En effet, la rigidité de l'éprouvette est équivalente à celui des mors du banc, ainsi le contact d'interface entre les deux n'est pas assuré de façon optimale. La figure 4.10 montre l'expérience réalisée. L'éprouvette est simplement suspendue à l'aide d'un ressort au sein de l'étuve et est instrumentée avec deux patches piézoélectriques fixés avec une colle cyanoacrylate. Les patches piézoélectriques sont positionnés aux mêmes endroits de part et d'autre de l'éprouvette, de façon à exciter les modes de flexion dans un même plan.

L'essai est réalisé entre  $-15^{\circ}\text{C}$  et  $85^{\circ}\text{C}$  avec un rampe de  $0.5^{\circ}\text{C}/\text{min}$  et des paliers aux températures extrêmes de 1h afin d'assurer la tenue de la colle. En effet, peu de données mécaniques sont disponibles pour cette colle, le constructeur assure un collage résistant et efficace entre  $-20^{\circ}\text{C}$  et  $100^{\circ}\text{C}$  [146].

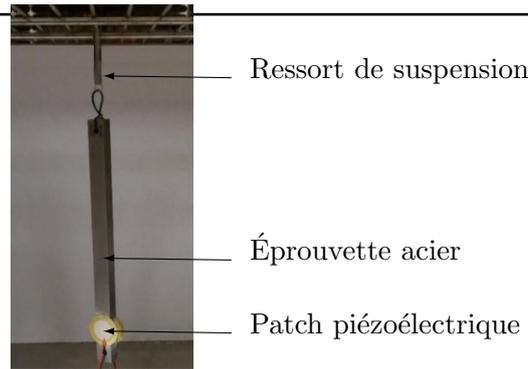


FIGURE 4.10 – Éprouvette acier en condition libre-libre au sein de l'étuve thermique.

La figure 4.11 montre que l'augmentation de la fréquence pour l'éprouvette libre-libre est d'environ 1.4% entre  $-15^{\circ}\text{C}$  à  $85^{\circ}\text{C}$ . Cela signifie que la géométrie de l'éprouvette ainsi que les propriétés du matériau évoluent avec la température. Ceci peut sembler surprenant étant donné la gamme de température ciblée qui est loin de la température de fusion.

La fréquence théorique d'une poutre encastree-libre est donnée par [147]

$$f(T, \alpha) = \frac{A_1}{L^2(\alpha)2\pi} \sqrt{\frac{E(T)I(\alpha)}{\rho S(\alpha)}} \quad (4.1)$$

avec  $A_1$  fixé à  $A_1 = 22.37$  pour le premier mode de flexion,  $T$  la température,  $\alpha$  le coefficient d'expansion thermique,  $L$  la longueur de la poutre,  $E$  le module de Young,  $I$  le moment quadratique avec  $I = \frac{bh^3}{12}$ ,  $\rho$  la masse volumique,  $S$  la section,  $S = bh$  et  $b$  et  $h$  la largeur et la hauteur de la poutre.

D'après la littérature [148] et après régression linéaire, le module de Young de l'Inconel 600 est estimé à  $85^{\circ}\text{C}$  à  $E = 210.1\text{GPa}$  et à  $-15^{\circ}\text{C}$  à  $E = 216.7\text{GPa}$  soit un écart relatif de 3%. Ainsi, en prenant en compte aussi le coefficient d'expansion thermique [148], le décalage de fréquence obtenu entre les deux températures extrêmes est

$$\frac{f(-15, \alpha) - f(+85, \alpha)}{f(+85, \alpha)} = 1.64\% \quad (4.2)$$

La dilatation thermique, c'est-à-dire la variation géométrique est responsable de 0.11% de variation en fréquence entre  $-15^{\circ}\text{C}$  et  $85^{\circ}\text{C}$  tandis que l'évolution des propriétés de rigidité du matériau s'élève à 1.53%. Ces contributions sont calculées respectivement en utilisant un module de rigidité fixe avec des variations géométriques de la poutre ; et pour une géométrie fixe avec une variation de la rigidité du matériau de la poutre.

Le résultat théorique, en trait plein en figure 4.11, est conforme à l'expérimental.

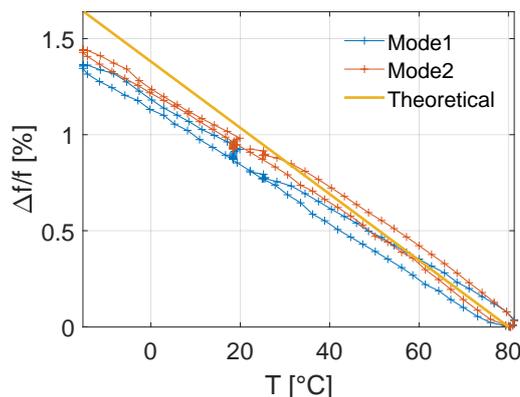


FIGURE 4.11 – Décalage de fréquence pour une éprouvette en acier (Inconel 600).

Ce même calcul réalisé pour des températures maximales et minimales respectivement de  $120^{\circ}\text{C}$  et  $-40^{\circ}\text{C}$  permet d'obtenir une erreur relative de 2.47% pour l'acier, de 4.9% pour de l'aluminium et de 6.7% pour du titane pur. La variation de rigidité du Ta6V en température n'a pas été trouvée. Ces prédictions sont cohérentes pour l'aluminium et sous-estimées pour l'acier au regard des résultats présentés en figure 4.9.

L'amortissement des éprouvettes métalliques, mesuré pour ces essais avec le banc, diminue avec la fréquence. En effet, le mode 1, représenté en bleu, possède des valeurs supérieures au mode 2, représenté en rouge, sur les deux bancs pour les trois matériaux métalliques. Les effets très saccadés au niveau du premier mode peuvent s'expliquer par la difficulté à réaliser la liaison boulonnée au niveau des mors inférieurs. En effet, les modules de rigidité des matériaux testés sont proches voire identiques à celui des mors où est réalisé l'encastrement de l'éprouvette. Par conséquent, les non-linéarités de contact apparaissent.

Un pic d'amortissement vers  $0^{\circ}\text{C}$  pour le banc 1 et  $50^{\circ}\text{C}$  pour le banc 2 est constaté pour mode 2 quel que soit le matériau testé. Les amortissements mesurés pour le deuxième mode semblent moins dispersés et plus propres. Ceci peut s'expliquer par le fait que ce dernier fait moins travailler la liaison boulonnée. La figure 4.12 illustre très clairement cette contribution moindre dans le calcul des fractions d'énergie de déformation élastique évaluées au sein du modèle éléments finis. L'énergie du banc est deux fois moins importante pour le mode 2.

En effet, la fraction d'énergie au sein de l'éprouvette en aluminium est de 53% et de 77% pour respectivement les modes 1 et 2 contre 42% et 70% pour l'éprouvette en titane et 28% et 67% pour celle en acier. En d'autres termes cela signifie que pour l'éprouvette acier, la contribution du banc est la plus importante. Cette contribution diminue avec la rigidité de l'éprouvette testée. De plus, pour le mode 2, la contribution du banc est moins importante. Ceci peut expliquer la baisse de l'amortissement avec la fréquence observée expérimentalement. Pour l'aluminium, les amortissements mesurés sont plus faibles et plus proches de la littérature [145]. Par ailleurs, plus le matériau est tendre, moins il y a de différence entre la valeur maximale et minimale

d'amortissement mesurées entraînant de meilleurs résultats.

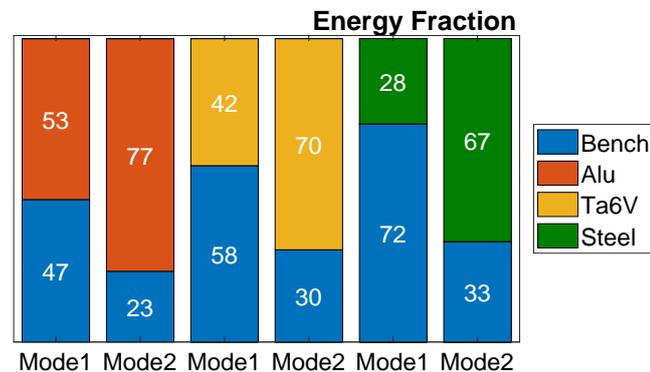


FIGURE 4.12 – Fraction d'énergie élastique au sein du banc et des éprouvettes métalliques.

#### 4.1.5 Estimation des biais d'amortissement liés au banc

L'objectif de cette section est d'estimer l'effet du banc sur les mesures d'amortissement, en faisant la différence entre les résultats sur banc et les éprouvettes seules en acier.

La figure 4.13 représente l'évolution de l'amortissement modal de l'éprouvette libre-libre en acier correspondant à l'essai de la figure 4.10. Les données expérimentales brutes dans l'intervalle de température considéré, entre  $-15^{\circ}\text{C}$  et  $+85^{\circ}\text{C}$ , donnent une moyenne pour le mode 1 et 2 respective de 0.028% et 0.033% avec un écart type est évaluée à 0.02%. Les amortissements sont bas avec des valeurs inférieures à 0.1%. La dépendance de l'amortissement à la température est modélisée par des droites, permettant une extrapolation pour des températures supérieures à  $85^{\circ}\text{C}$  et inférieures à  $-15^{\circ}\text{C}$ .

Pour le second mode de flexion, représenté en orange, la montée des valeurs d'amortissement au-delà  $60^{\circ}\text{C}$  fait planer des doutes sur cette mesure. Par conséquent, seulement le résultat du premier mode  $IDf1$  est conservé pour l'estimation du biais de banc.

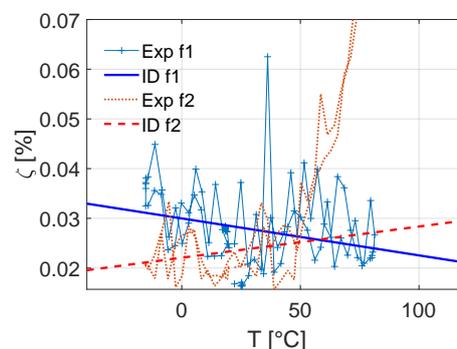


FIGURE 4.13 – Amortissement modal de l'éprouvette acier en libre-libre, mode 1 et 2.

La figure 4.14 présente l'effet du banc sur le mode 1 et 2, par soustraction des amortissements libres des amortissements de banc des figures 4.9a et 4.9b. Des effets locaux en température sont toujours présents et dépendent du banc et possiblement du matériau. Il a donc été choisi d'estimer

une incertitude de banc constante en température. En prenant un point par température, pour ne pas fausser la moyenne à cause des plateaux de température, l'amortissement sur le mode 1 est surestimé par le banc 1 de 0.13% et par le banc 2 de 0.18%. Pour le mode 2, la surestimation moyenne pour les deux bancs est de 0.08%.

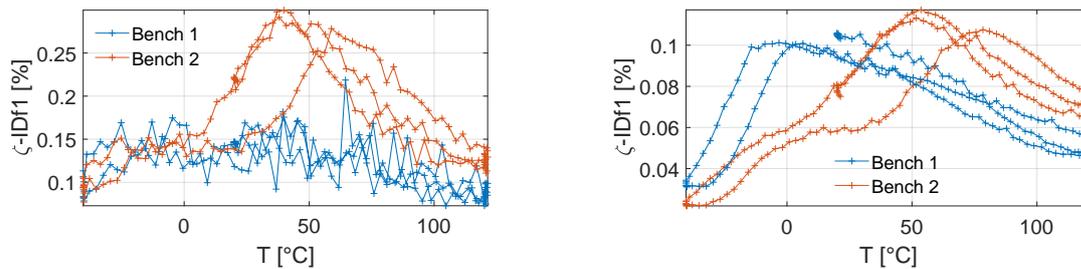
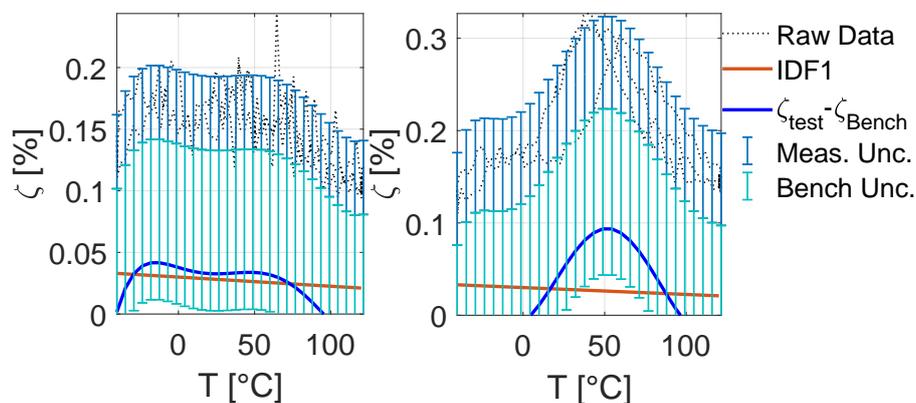


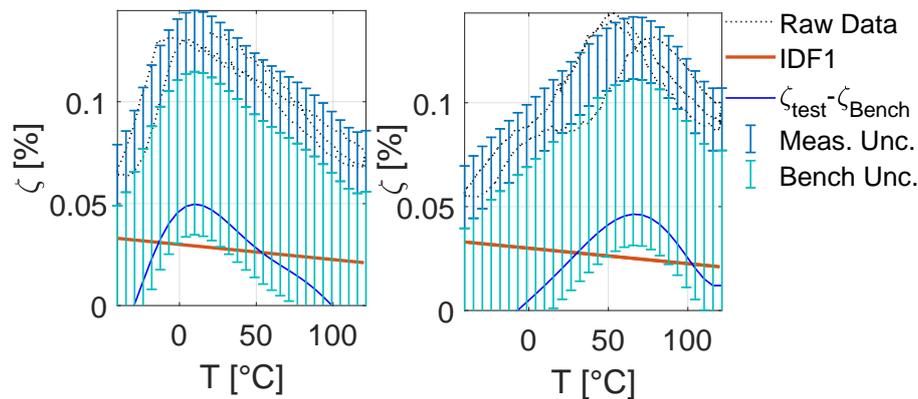
FIGURE 4.14 – Amortissement engendré par le banc pour le mode 1 (gauche) et 2 (droite).

La figure 4.15 met en application la démarche pour les essais sur les éprouvettes en acier. Ainsi, dans les figures 4.15a et 4.15b, les données brutes des essais sont représentées en pointillé, l'identification effectuée à partir de l'essai libre-libre est en trait plein orange. Ensuite, en trait plein bleu est représenté l'amortissement lissé de l'essai sur le banc auquel est soustrait le biais de chacun des bancs estimé en figure 4.14. Enfin, les barres d'erreurs correspondent aux incertitudes de l'essai avec en bleu foncé l'incertitude de mesure et en turquoise l'incertitude du banc qui est égale à son biais supposé constant en température.

L'amortissement calculé en libre-libre  $IDF1$  se situe dans l'intervalle d'incertitude généré par l'essai sur le banc. Ceci permet de caractériser le biais maximum du banc car ceci est l'essai le plus pénalisant. Cette quantification des incertitudes est utilisée dans la suite de la thèse.



(a) Mode 1 : banc 1 (gauche) et banc 2 (droite).



(b) Mode 2 : banc 1 (gauche) et banc 2 (droite).

FIGURE 4.15 – Biais d'amortissement induit par les bancs pour les essais sur l'éprouvette acier.

## 4.2 Essais sur des éprouvettes en composite tissé 3D

Cette section détaille l'ensemble du protocole expérimental mis en place pour les essais sur les éprouvettes en composite tissé 3D pour un même panneau ayant une armure spécifique et étant composé de 12 couches. Tout d'abord, les résultats de caractérisation de l'amortissement pour une éprouvette découpée dans le sens chaîne sont montrés. Ensuite, une représentation éléments finis de ce test permet d'analyser les mécanismes contribuant à l'amortissement. Cette section est suivie d'une quantification des erreurs liées à l'utilisation de propriétés homogénéisées au sein du modèle. L'ensemble de ce travail aboutit à une corrélation calcul/essai afin de vérifier que les calculs numériques sont représentatifs de la réalité. Enfin, l'ultime section analyse expérimentalement le comportement dynamique de nouveaux types de matériaux composites réalisés par fabrication additive.

### 4.2.1 Exemple d'essai en température de tissé 3D

La figure 4.16 illustre la découpe des éprouvettes au sein d'un même panneau qui permet d'obtenir des éprouvettes avec différentes orientations. Les éprouvettes à  $90^\circ$  correspondent à celles coupées dans le sens trame. Les angles  $30^\circ$  et  $60^\circ$  sont pris vis-à-vis du sens chaîne.

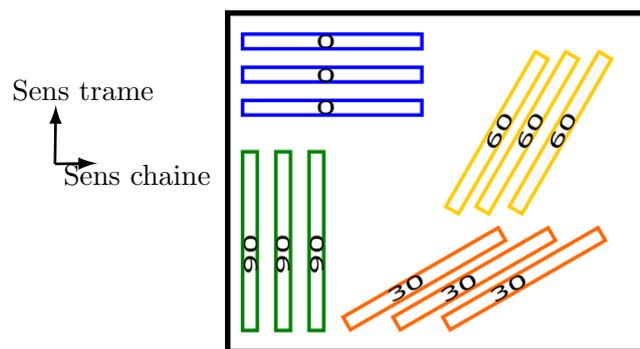


FIGURE 4.16 – Schéma de configuration de découpe des éprouvettes dans un panneau.

La figure 4.17 montre plusieurs configurations de masse supérieure possibles en fonction de l'orientation des éprouvettes afin de positionner le premier mode à la fréquence souhaitée. La configuration de masse de gauche est privilégiée pour les éprouvettes découpées dans le sens chaîne  $0^\circ$  ; celle au centre pour celles découpées dans le sens trame c'est-à-dire avec un angle de  $90^\circ$  et celle de droite pour celles découpées avec un angle de  $30^\circ$  et  $60^\circ$ .

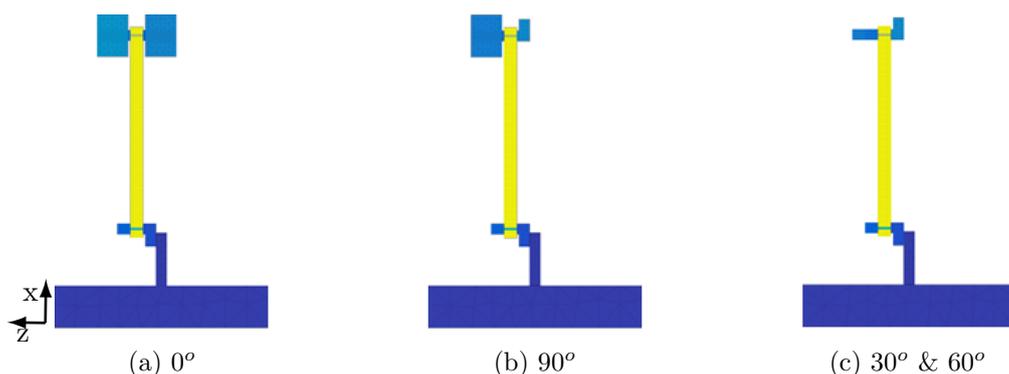


FIGURE 4.17 – Visualisation des différentes configurations de masse.

De manière similaire à l'étude du banc réalisée sur les éprouvettes métalliques, une rapide étude de sensibilité au condition de montage (serrage) et d'excitation (amplitude) a été réalisée. Les tendances sont similaires. Le couple de serrage augmente la fréquence et diminue l'amortissement. L'augmentation de l'excitation baisse la fréquence et augmente l'amortissement apparent. L'influence des non-linéarités semble se stabiliser à partir de  $0.1V$ , cependant l'excitation du système est trop faible devant le niveau de bruit généré par le fonctionnement de l'étuve. La configuration de l'essai est donc fixée à une excitation à  $0.5V$  et un couple de serrage à  $3Nm$ .

Des analyses ont aussi montré la nécessité de contrôler la verticalité de l'éprouvette lors de la mesure. Une augmentation de l'angle entre les mors et l'éprouvette modifie légèrement la fréquence des modes ( $<1\%$ ). De plus, l'influence sur l'amortissement peut être supérieure à  $10\%$  pour les différents modes. En effet, comme l'éprouvette n'est plus parfaitement verticale, le matériau n'est plus sollicité de la même manière dans les trois directions du tissu 3D et l'amortissement global s'en trouve modifié.

Les résultats montrés en figure 4.18 ont été obtenus pour la première et la deuxième flexion

pour une éprouvette de dimension  $200 \times 21 \times 11.1\text{mm}$  découpée dans le sens chaîne  $0^\circ$  avec le configuration de masse gauche donnée en figure 4.17. Les données brutes de l'essai, en pointillé, sont lissées par une fonction polynomiale de degré 6 continue, en trait plein. Les tests 1 et 2 correspondent à l'essai de la même éprouvette sur deux bancs d'essai différents.

La dépendance de l'amortissement modal à la température est significative, se présentant sous la forme d'une cloche inversée c'est-à-dire avec un minimum d'amortissement se situant proche de la température ambiante. L'amortissement augmente pour les basses températures et les hautes températures de la gamme cible. De manière générale, les essais sur les composites tissés 3D ont tous montré cette tendance pour les deux premiers modes. Ce comportement est proche de celui observé pour la résine dans la section 2.2.

En termes de niveau d'amortissement propre du composite, compte tenu de l'apport d'amortissement du banc, le premier mode oscille entre 0.25% et 0.45% et le second entre 0.2% et 0.36%. Comme observé pour les éprouvettes métalliques, les valeurs du mode 1 sont supérieures au mode 2 à cause de la nature du mode (flexion) et à un effet de banc plus important.

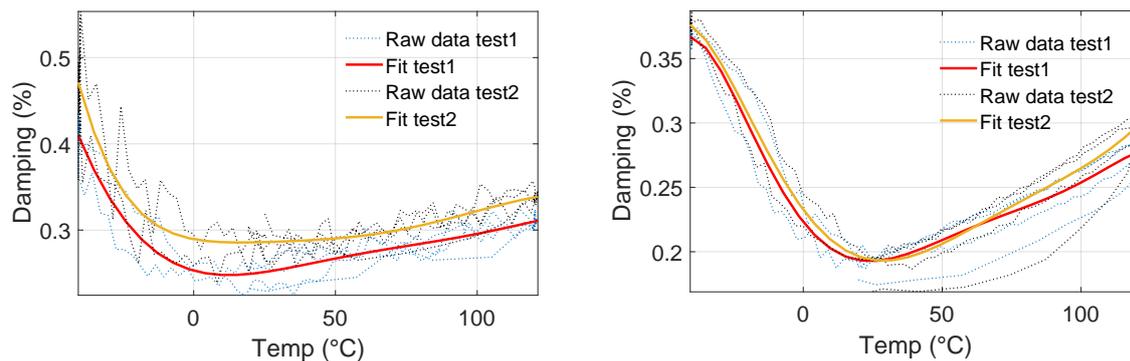


FIGURE 4.18 – Amortissement en température du mode 1 (gauche) et 2 (droite) pour une éprouvette tissée 3D à  $0^\circ$ .

#### 4.2.2 Analyse du modèle éléments finis pour une éprouvette tissée 3D

Souhaitant réaliser un recalage des résultats montrés en figure 4.18, un modèle éléments finis de cet essai a été réalisé. Les propriétés de l'éprouvette en composite tissé 3D ont été homogénéisées comme en section 3.3.2 pour une fréquence de 60Hz et 330Hz afin de caractériser l'amortissement pour le premier et le second mode. Le banc est considéré élastique avec des propriétés d'acier classique avec un module de Young à 210GPa et des propriétés invariantes en fonction de la température.

Il est intéressant d'étudier la fraction d'énergie élastique et dissipée de chaque constituant de l'essai. Ainsi, la loi de comportement de l'éprouvette a subi une décomposition en valeurs singulières comme expliquée en section 2.3.4. La figure 4.19 montre les deux premiers modes, notés m1 et m2, aux deux extrema de température.

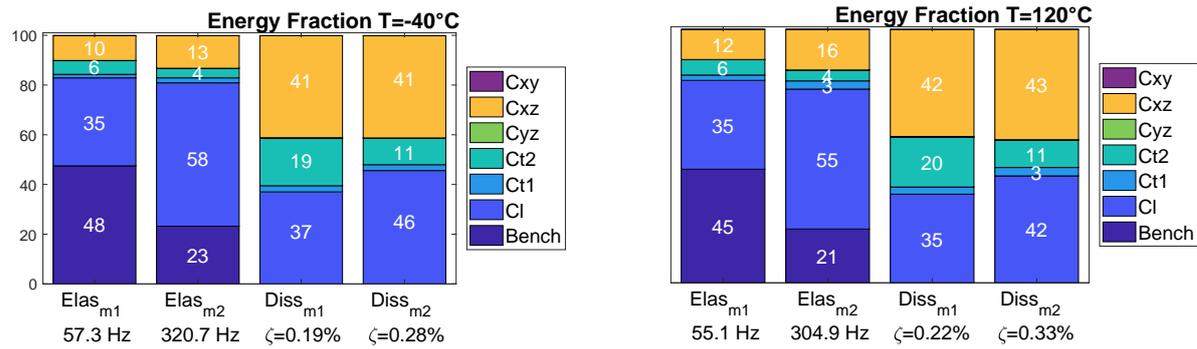


FIGURE 4.19 – Fraction de l'énergie élastique et dissipée pour les températures  $-40^{\circ}\text{C}$  (gauche) et  $120^{\circ}\text{C}$  (droite) pour le mode m1 et m2.

Le banc n'intervient pas dans le calcul des fractions de l'énergie dissipée du fait de son comportement purement élastique. À  $-40^{\circ}\text{C}$ , pour le mode 1, la contribution du banc est plus importante que pour le mode 2 avec respectivement 48% et 23%. L'éprouvette porte le reste de l'énergie soit 52% pour le mode 1 et 77% pour le mode 2.

Concernant l'énergie dissipée des deux modes de flexion à cette même température, elle provient principalement de 3 composantes : longitudinale  $C_l$ , transverse  $C_{t2}$  et de cisaillement  $C_{xz}$ . Ces composantes sont identiques à celles participant à l'énergie élastique. La composante  $C_{t2}$  est celle portée par l'axe  $z$ , dans l'épaisseur de l'éprouvette.

Les résultats en valeur d'amortissement modal pour ces deux températures montrent une augmentation avec la fréquence avec à  $-40^{\circ}\text{C}$ ,  $\zeta = 0.19\%$  pour le mode 1 et  $\zeta = 0.28\%$  pour le mode 2 et à  $120^{\circ}\text{C}$ , respectivement  $\zeta = 0.22\%$  et  $\zeta = 0.33\%$ . Il a été montré en section 3.3.2 que les propriétés amortissantes homogénéisées du tissé augmentent avec la fréquence. Ainsi, il n'est pas étonnant d'avoir un amortissement modal supérieur pour le deuxième mode.

L'effet de la température sur les contributions est minime, cependant les pourcentages varient car l'évolution de chaque composante en fonction de la température n'est pas identique. À  $120^{\circ}\text{C}$ , la fréquence baisse à cause d'une baisse de la rigidité de l'éprouvette et par conséquent une baisse de la contribution du banc. Par ailleurs, le niveau d'amortissement entre les deux températures est différent, avec une augmentation à  $120^{\circ}\text{C}$  pour les deux modes qui se traduit par une baisse de la contribution longitudinale et une augmentation des composantes transverses et de cisaillement.

En complément, il est approprié d'analyser la répartition géométrique des contraintes de chaque composante afin d'observer le caractère local des contributions de certaines composantes.

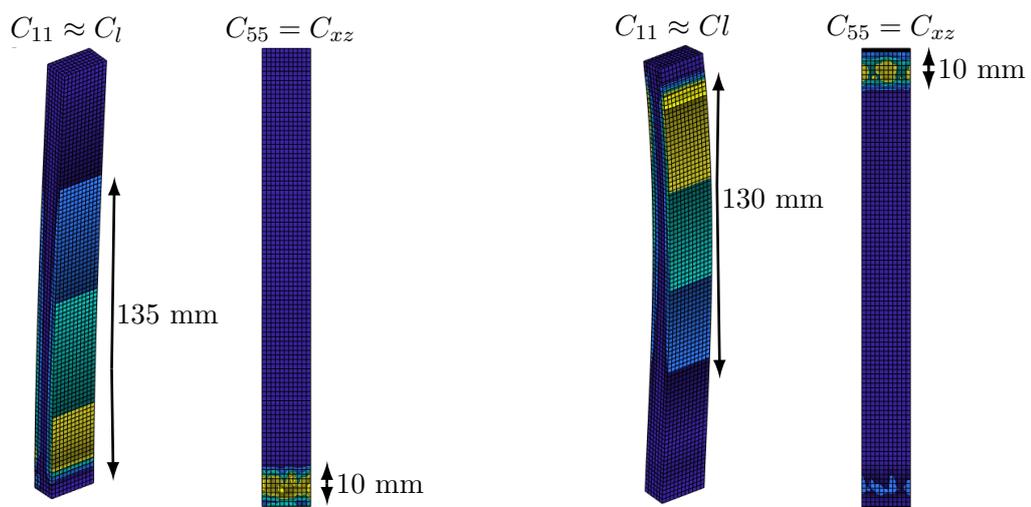
L'accent est mis sur les deux composantes ayant la plus grande contribution à l'amortissement de l'éprouvette, d'après le graphique 4.19,  $C_{11} \approx C_l$  et  $C_{55} = C_{xz}$  (suivant les éléments de la section 2.3.4).

La figure 4.20 montre la répartition des contraintes à  $-40^{\circ}\text{C}$  pour le mode 1. Pour la composante  $C_{11}$ , la répartition est très diffuse et s'étend sur une zone de 135mm alors que pour  $C_{55}$

celle-ci est très concentrée au niveau des mors inférieurs sur une zone de 10mm à  $-40^{\circ}\text{C}$ . Ces observations montrent que l'hypothèse de séparation des échelles n'est pas vérifiée de manière évidente dans toutes les directions, c'est pourquoi la méthodologie de vérification (exposée en section 3.5) a été appliquée en section 4.2.3.

La même constatation pour le mode 2 est observée, sur la partie supérieure, avec une zone de 130mm pour la composante  $C_{11}$  et de 10mm pour la composante  $C_{55}$ .

Par ailleurs, il a aussi été constaté que la répartition des contraintes change en fonction de la température, bien que ces modifications sont limitées dans ce cas d'application comme le montre la figure 4.21. En effet, les étendus des zones varient seulement de quelques millimètres.



(a) Mode 1 :  $f = 57.3\text{Hz}$  &  $\zeta = 0.19\%$

(b) Mode 2 :  $f = 320.7\text{Hz}$  &  $\zeta = 0.28\%$

FIGURE 4.20 – Répartition des contraintes pour les modes 1 et 2 pour les composantes  $C_{11}$  et  $C_{55}$  pour une température de  $-40^{\circ}\text{C}$ .

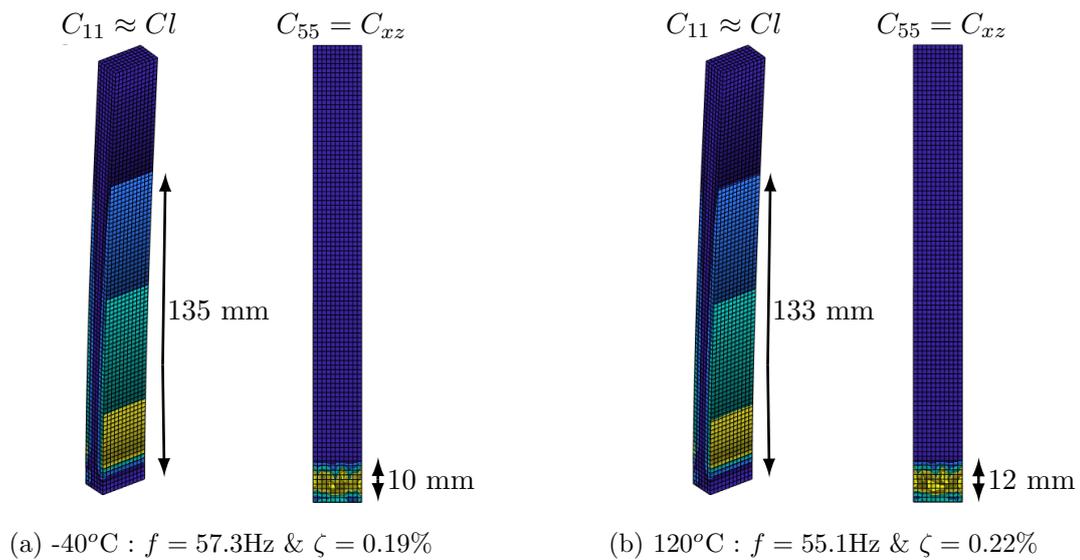


FIGURE 4.21 – Comparaison de la distribution des contraintes à  $-40^{\circ}\text{C}$  (gauche) et  $120^{\circ}\text{C}$  (droite) pour le mode 1 pour les composantes  $C_{11}$  et  $C_{55}$ .

### 4.2.3 Analyse de la séparation des échelles

Les calculs effectués dans cette section reprennent ceux réalisés en section 3.5.2. L'accent est mis sur l'onde ayant une propagation dans la direction  $x$  c'est-à-dire dans la direction des chaînes correspondant à la direction de l'éprouvette.

Une zone de concentration de contrainte de cisaillement très locale au niveau des mors a été observée pour la composante  $C_{55}$  en figure 4.20 posant la question de la validité des propriétés homogénéisées appliquées à l'éprouvette.

La figure 4.22 montre les résultats du calcul effectué pour des longueurs d'ondes allant de 10 mm à 1000 mm. Les couleurs du tracé correspondent à celles utilisées dans la figure 4.19.

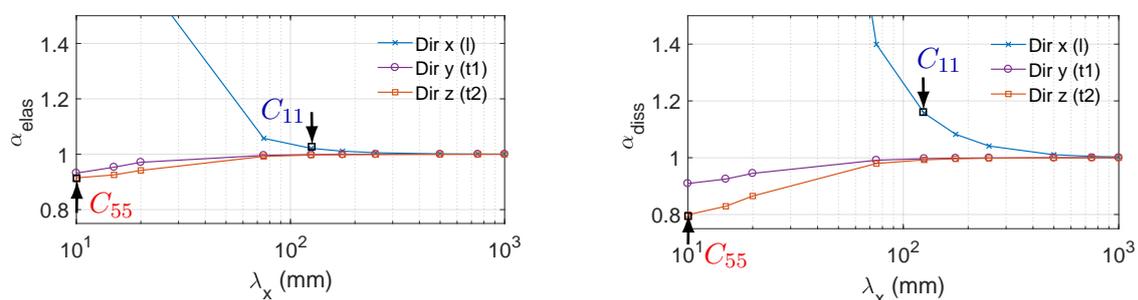


FIGURE 4.22 – Ratio entre l'énergie élastique (gauche) et l'énergie dissipée (droite) du milieu hétérogène et homogène pour un composite tissé 3D avec  $x$  comme direction de propagation.

Pour la composante longitudinale  $C_{11}$ , en bleue, une erreur de 2% et 15% est commise sur le module et le taux de perte respectivement, pour une longueur d'onde de 125mm. Ces points sont pointés par une flèche descendante.

Pour la composante de cisaillement  $C_{55}$  ( $C_{xz}$ ), en rouge, une erreur de 9% et 20% est commise sur le module et le taux de perte respectivement, pour une longueur d'onde de 10mm. Ces points sont pointés par une flèche ascendante.

Ces observations peuvent induire une différence entre les résultats du test et la simulation et un réajustement des propriétés du composites est envisageable en fonction des pourcentages d'erreur mis en avant.

#### 4.2.4 Corrélation calcul/essai

Pour réaliser une corrélation calcul/essai correcte, il convient de tenir compte de la variabilité expérimentale et des effets d'amortissement induits par le banc. Les données brutes sont indiquées en pointillé noir en figure 4.23. Elles sont lissées par un polynôme de degré 6 nommé  $\zeta_{test}$  auquel est soustrait l'incertitude du banc  $\zeta_{bench}$  (section 4.1.5) correspondant à 0.18% pour le mode 1 et 0.08% pour le mode 2 en trait plein orange.

De plus, l'incertitude de mesure est évaluée à  $\pm 0.025\%$  (en fonction de la dispersion des points des données brutes). Additionnée à la contribution du banc, un domaine d'incertitude est estimé et représenté par les barres d'erreur. Le résultat de l'amortissement modal de la modélisation éléments finis (utilisée en section 4.2.2) est affiché avec une courbe bleue en trait continu.

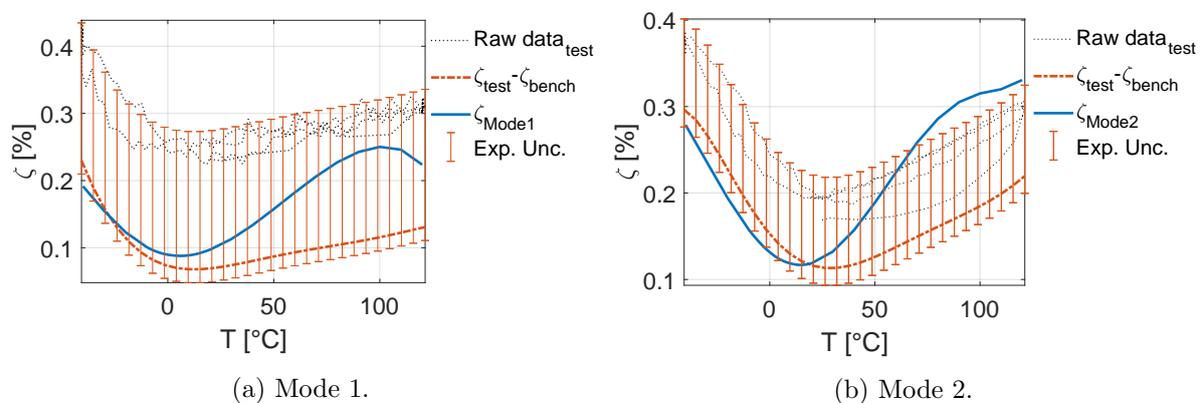


FIGURE 4.23 – Amortissement calcul/essai en température pour l'éprouvette chaîne 0°.

Pour les éprouvettes sens chaîne, l'amortissement mesurée est compris dans l'intervalle de  $[0.2 - 0.4]\%$  pour la plage de température d'intérêt, pour les deux premiers modes. Compte tenu des niveaux d'amortissement mesurés, l'incertitude de mesure et le biais généré par le banc engendre une variation d'environ 100% sur le premier mode et de 50% sur le second.

La tendance des résultats expérimentaux pour les deux modes montre une augmentation de l'amortissement pour des basses et hautes températures, respectivement  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$  avec un minimum à  $10^{\circ}\text{C}$  pour le premier mode et  $30^{\circ}\text{C}$  pour le second.

Le premier mode du calcul éléments finis est dans l'intervalle de confiance, le second l'est aussi jusqu'à  $70^{\circ}\text{C}$  puis une légère surestimation est observée jusqu'à  $120^{\circ}\text{C}$ .

La prédiction éléments finis donne le minimum d'amortissement à des températures plus faibles que celle obtenues dans le test. Il y a, en effet, un décalage de  $9^{\circ}\text{C}$  pour le mode 1 et de  $11^{\circ}\text{C}$  pour le mode 2. Ce minimum est similaire à celui observé sur le taux de perte de la résine, d'où un effet faible de la mésostructure.

Le mode 1 est moins amorti que le mode 2 dans la modélisation éléments finis ce qui est le contraire dans l'expérience. En s'appuyant sur les travaux de Lakes [145] et Berthelot [135], l'amortissement a tendance à augmenter avec la fréquence comme observé dans la modélisation éléments finis. La dépendance importante du premier mode à la liaison boulonnée peut expliquer cette différence de tendance au sein de l'expérience.

Enfin, dans le test sur les éprouvettes en composite tissé 3D, la transition  $\omega$  n'apparaît pas. Elle peut être décalée en dehors de la plage de température testée.

Néanmoins, son absence peut aussi être dû au vieillissement de la résine. En effet, il a été montré que cette transition, au contraire des autres transitions  $\alpha$  et  $\beta$ , peut disparaître avec le vieillissement [60]. Il pourrait être nécessaire, pour affiner le modèle, de s'appuyer sur une caractérisation après vieillissement de la résine. De plus, il pourrait être intéressant de substituer les propriétés homogénéisées par un VER hétérogène (sous la forme d'un zoom structural par exemple) près des mors pour confirmer l'effet des erreurs dû à la séparation d'échelle montrées en figure 4.20.

#### 4.2.5 Effet de l'orientation

Cette section étudie l'effet de l'orientation du renfort sur l'amortissement. La configuration des masses supérieures est explicitée en figure 4.17.

La figure 4.24 montre les trois premiers modes obtenus pour les orientations  $30^{\circ}$  et  $60^{\circ}$ . Il apparaît qu'un mode de torsion s'intercale entre la première et la deuxième flexion.

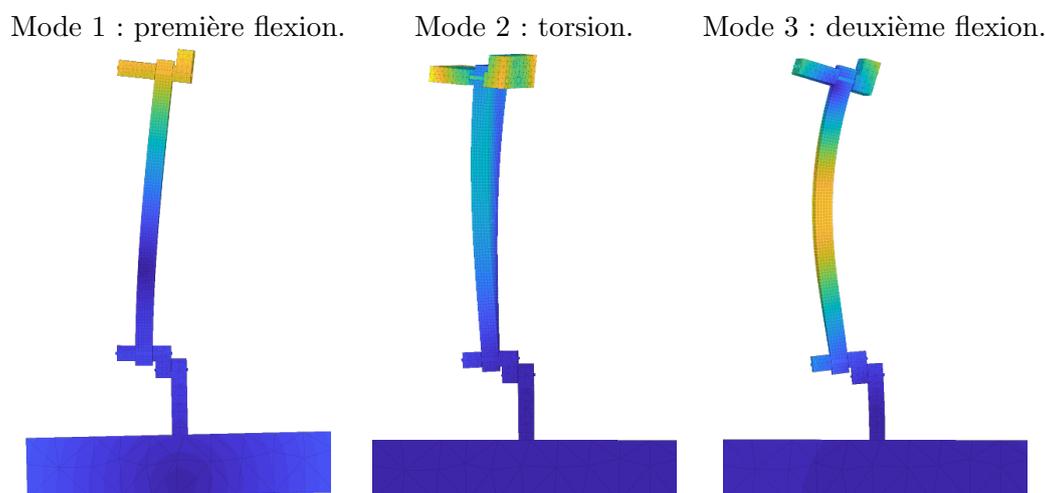


FIGURE 4.24 – Déformée des 3 modes pour les éprouvettes orientées à  $30^{\circ}$  et  $60^{\circ}$ .

La figure 4.25 dresse un comparatif des corrélations calcul/essai pour le premier mode de flexion pour les quatre orientations. Les niveaux d'amortissement dépendent sensiblement de l'orientation. L'éprouvette orientée à  $0^\circ$  amortit moins que celle à  $90^\circ$ . Les éprouvettes orientées à  $30^\circ$  et  $60^\circ$  possèdent les amortissements les plus élevés.

Les ordres de grandeur obtenus avec le modèle sont corrects et se situent dans les intervalles d'incertitude de l'essai. À basse température entre  $-40^\circ\text{C}$  et  $20^\circ\text{C}$ , les tendances entre le modèle et les essais (zone en gras) sont similaires. La transition  $\beta$  de la matrice est bien observée. Au-delà, la prédiction éléments finis fait apparaître une tendance liée à la transition gamma qui est absente des essais. Comme expliqué précédemment, cela peut être attribué à la caractérisation à l'état initial de la résine, ce qui tend à penser que la prédiction éléments finis n'est pas correcte après cette température.

La position du minimum d'amortissement est bien corrélée de manière générale hormis à  $90^\circ$  où un décalage de  $20^\circ\text{C}$  vers des températures plus élevées est observé.

Enfin, il est intéressant de constater que le biais associé au banc est diminué pour les éprouvettes à  $30^\circ$  et  $60^\circ$ . Ceci peut s'expliquer par la diminution de la raideur apparentes des éprouvettes ainsi que par la diminution des masses ajoutées (limitant les efforts dans le mors).

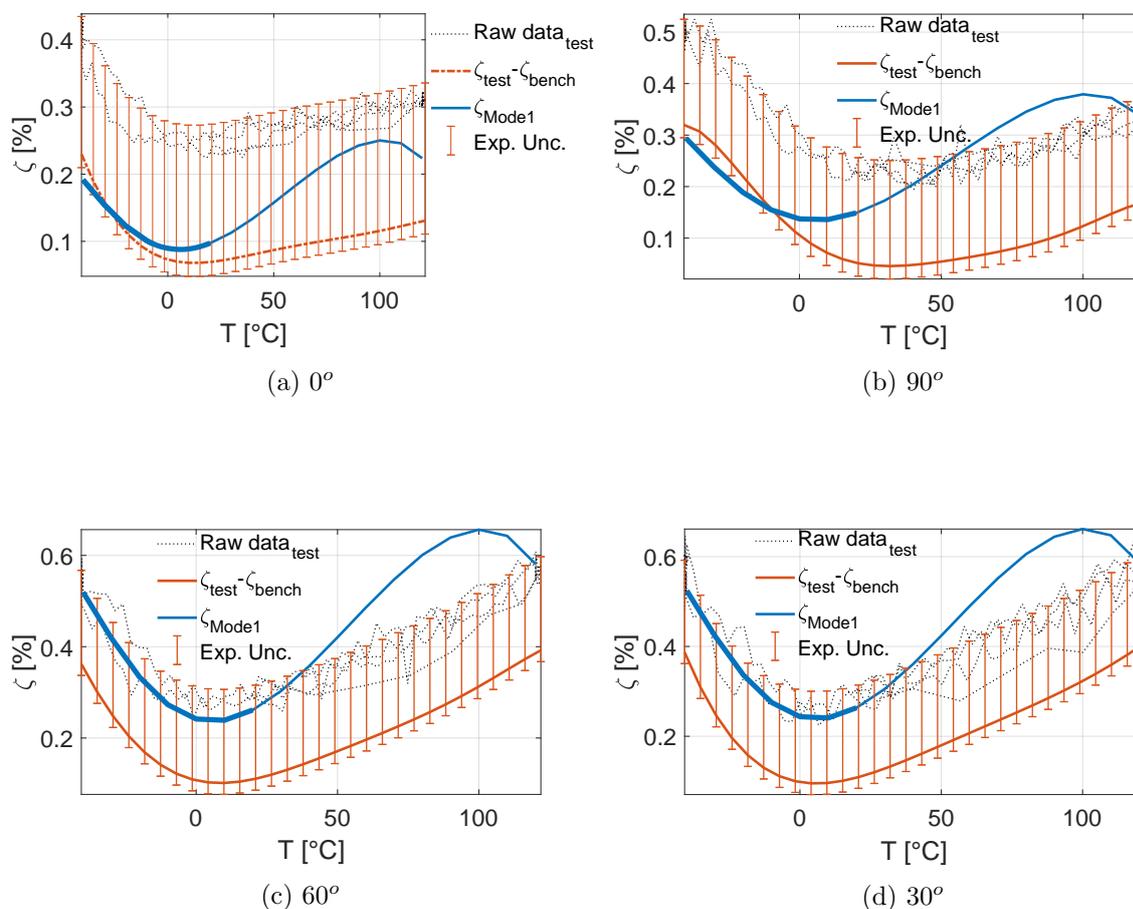


FIGURE 4.25 – Analyse de la première flexion pour les différentes orientations.

La figure 4.26 présente le deuxième mode de flexion pour les différentes orientations. Pour ce mode, où le banc intervient moins, la prédiction présente la même tendance que pour le mode 1 mais cette dernière est meilleure car l'incertitude expérimentale est plus faible.

La deuxième flexion pour les éprouvettes à  $30^\circ$  et  $60^\circ$  est atteinte à des fréquences supérieures à celles à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  du fait de l'insertion du mode de torsion entre les deux flexions. Ceci a pour conséquence une évolution différente de la prédiction éléments finis à hautes températures, néanmoins comme expliqué précédemment à ces températures la confiance en la prédiction numérique est faible à cause de la transition  $\omega$ .

Par ailleurs, du fait de la fréquence plus élevée de ce mode de flexion et l'orientation entraînant des effets de mésostructures différents, les éprouvettes à  $30^\circ$  et  $60^\circ$  sont plus amorties que les éprouvettes à  $90^\circ$  et  $0^\circ$ .

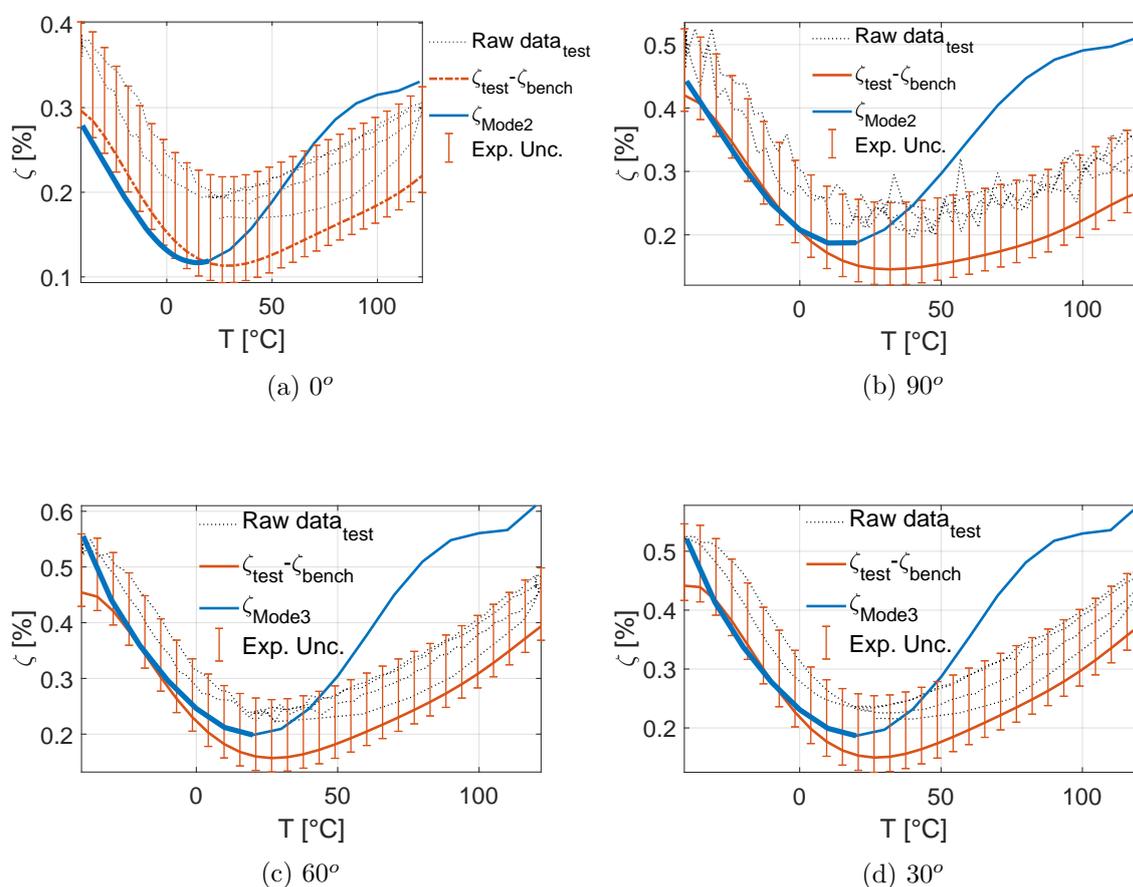


FIGURE 4.26 – Analyse de la deuxième flexion pour les différentes orientations.

La figure 4.27 montre qu'en fonction des orientations des éprouvettes les composantes activées ne sont pas identiques pour les mêmes modes. L'analyse a été effectuée à une température de  $-40^\circ\text{C}$  et les fréquences et amortissements modaux correspondant sont affichés en abscisse.

Pour les éprouvettes à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  la composante respectivement portée par le sens chaîne  $C_l$  et par le sens trame  $C_{t1}$  joue un rôle important. La deuxième contribution majoritaire provient res-

pectivement du cisaillement plan  $xz$  avec  $C_{xz}$  et  $yz$  avec  $C_{yz}$ . Ceci explique que l'amortissement à  $90^\circ$  est plus élevé qu'à  $0^\circ$  car l'amortissement dans le sens trame pour cette mésostructure est plus élevé que dans le sens chaîne et équivalent pour les composantes de cisaillement.

La répartition des fractions d'énergie des éprouvettes  $30^\circ$  et  $60^\circ$  permet de comprendre l'augmentation significative du niveau d'amortissement modal. En effet, les contributions principales proviennent des composantes de cisaillement et notamment du cisaillement plan  $xy$  induisant une éprouvette moins rigide mais plus amorti. Pour l'éprouvette à  $60^\circ$  elle est suivie de celle du cisaillement plan  $yz$  et pour l'éprouvette à  $30^\circ$  celle du plan  $xz$ .

Par ailleurs, la composante  $C_{t1}$  intervient en complément sur le  $60^\circ$ , et la composante  $C_t$  pour les  $30^\circ$ . Ceci explique la différence d'amortissement mesurée pour ces deux essais.

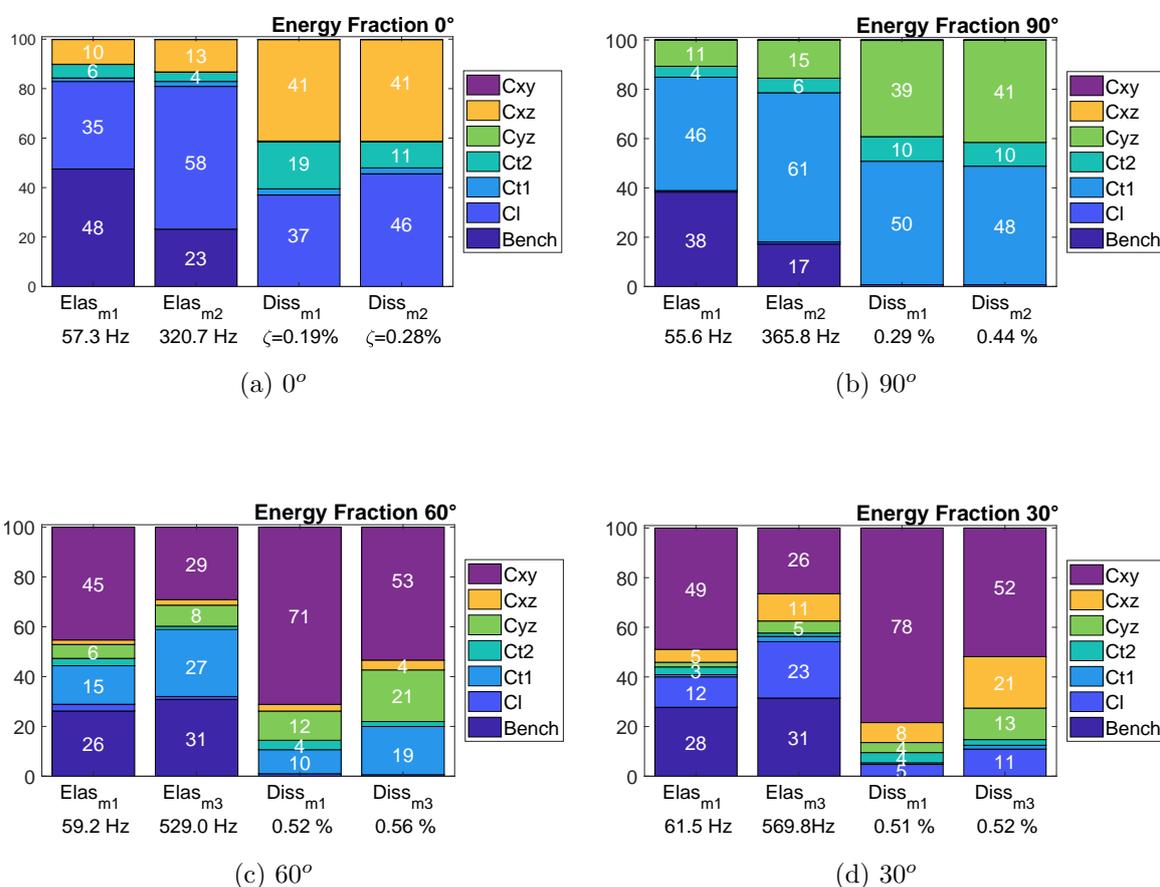


FIGURE 4.27 – Analyse des énergies élastique et dissipée pour les différentes orientations.

Enfin la figure 4.28 montre la corrélation calcul/essai pour les modes de torsion des éprouvettes à  $30^\circ$  et  $60^\circ$ . L'amortissement est plus élevé que pour les modes de flexion aussi bien expérimentalement que numériquement. Des variations similaires de l'amortissement sont retrouvées, tant en amplitude qu'en tendance. La même constatation, que pour les orientations à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  peut être faite avec au-delà de  $25^\circ\text{C}$ , un écart entre la prédiction et les mesures qui est attribué à la transition  $\omega$ . L'approche est pertinente quelle que soit la nature du mode.

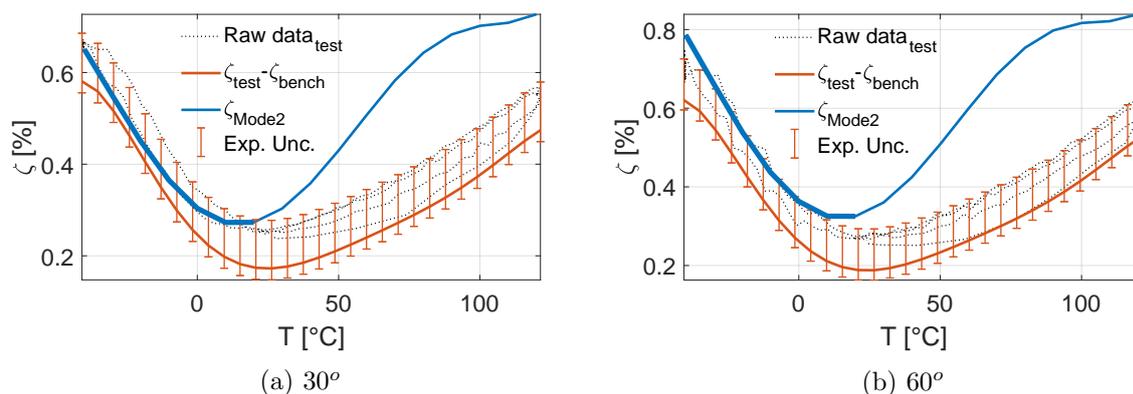


FIGURE 4.28 – Analyse des modes de torsion à 30° et 60°.

La base de données d'essais contient plusieurs panneaux avec des motifs de tissages et des épaisseurs différents pour avoir des matériaux représentatifs de ceux de l'aube. En effet, les panneaux conçus sont constitués de 8 à 12 couches et leur épaisseur varie entre 7 et 12 mm. Il est envisageable, étant donné la bonne corrélation à basse température, de pouvoir réaliser une procédure d'identification inverse du comportement viscoélastique de la résine. Ainsi, le modèle éléments finis ne prendrait pas en compte la transition  $\omega$  de la résine présente à l'état initial.

#### 4.2.6 Essai sur éprouvettes composites conçues par fabrication additive

En complément de la caractérisation expérimentale faite sur des éprouvettes en composite tissé 3D, des essais sur des échantillons réalisés par fabrication additive ont été effectués aboutissant à un comportement notablement distinct.

Les trois éprouvettes testées ici sont constitués d'une dépose de fil thermoplastique, renforcés par des fibres de carbone continues. La figure 4.29a montre les différents motifs d'impression.

Les mêmes conditions d'essai que pour les éprouvettes composites classiques ont été utilisées avec 715 grammes de masse ajoutée au sommet. Cependant, le cycle de température est réduit à  $[-40^{\circ}\text{C}; 70^{\circ}\text{C}]$  afin d'éviter que la matière ne flue trop à haute température en particulier sous les mors. Le matériau étant plus tendre que les composites tissés 3D une surface de matage au niveau des mors et des masses ajoutées apparaît pour un couple de 3 Nm (figure 4.29b).

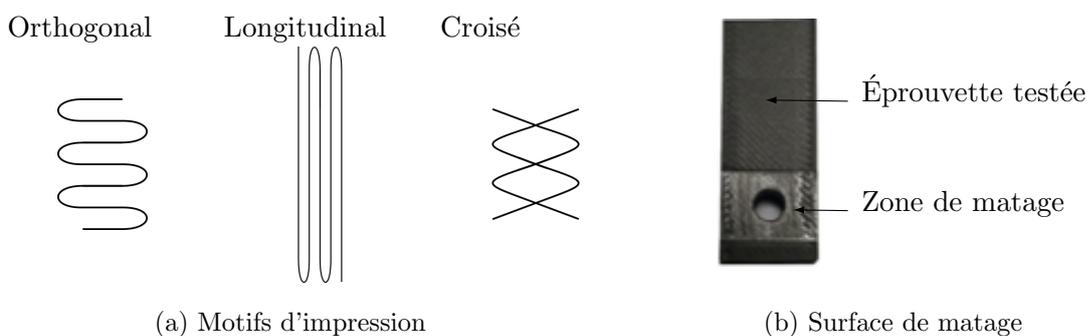
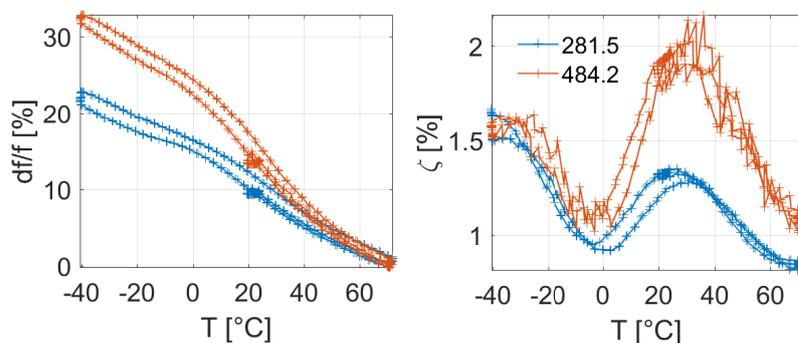


FIGURE 4.29 – Éprouvettes composites en fabrication additive.

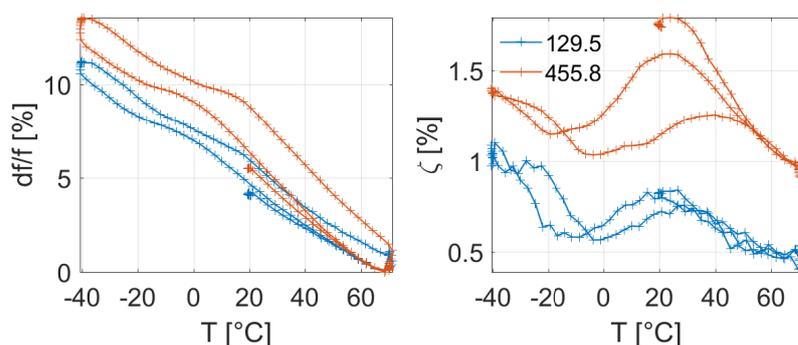
La figure 4.30 montre les résultats en température pour les différentes éprouvettes avec un comportement identique pour les 3 mais bien différents des éprouvettes tissées 3D.

La fréquence, et donc la rigidité, évolue de manière importante, la variation est comprise entre 10% et 30%. En entrant dans les détails, pour l'éprouvette avec renforts orthogonaux en figure 4.30a la différence entre les deux extrêmes s'échelonne à 22% pour le premier mode et 33% pour le second. L'éprouvette montrant le moins de variation est l'éprouvette avec les renforts longitudinaux, pour les deux modes la variation est d'environ 10% comme montré en figure 4.30b. Au regard de la valeur des deux modes, il s'agit de l'éprouvette la plus raide des trois ce qui peut expliquer cette variation moins importante. L'éprouvette avec les renforts croisés dont les résultats sont illustrés en figure 4.30c possède des variations en fréquence identiques à l'éprouvette avec les renforts orthogonaux mais est moins rigide.

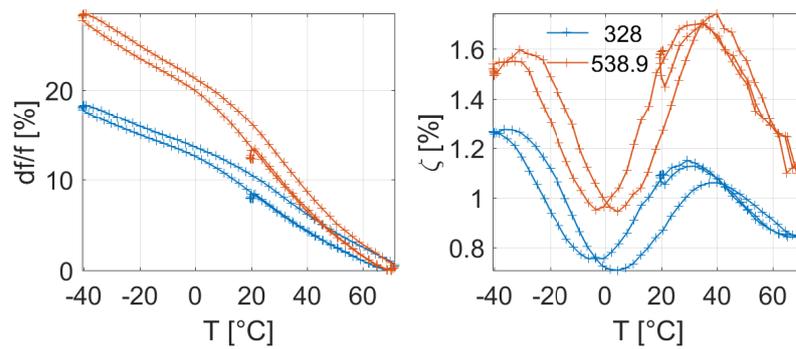
Concernant le niveau d'amortissement, il est plus élevé que pour le composite tissé 3D avec des amortissements mesurés allant de 0.5% à 2%. Par ailleurs, la tendance n'est pas la même. En effet, il y a toujours une cuvette située aux alentours de 0°C mais elle est encadrée par de deux cloches intervenant vers -35°C et 30°C. Ce comportement est visible pour les trois éprouvettes. Le matériau étant plus souple, le contact d'interface au niveau des mors de l'encastrement est mieux effectué, permettant une mesure plus propre et une meilleure confiance envers les résultats obtenus. Pour ces éprouvettes, l'amortissement augmente avec la fréquence. L'éprouvette avec les renforts orthogonaux montre les niveaux d'amortissement les plus élevés, suivis de celle avec les renforts croisés puis enfin les renforts longitudinaux.



(a) Renforts orthogonaux.



(b) Renforts longitudinaux.



(c) Renforts croisés.

FIGURE 4.30 – Résultats en température des éprouvettes réalisées en fabrication additive.

Ces résultats analysés en fonction de la géométrie des renforts sont à nuancer avec le taux de remplissage de fil, qui peut être mesuré en considérant un TVF de fil identique pour chaque éprouvette. Néanmoins, un comportement remarquable dû aux propriétés viscoélastiques de la matrice, est mis en évidence. Par manque d'informations sur les mésostructures et sur les composants utilisés aucune validation par un calcul numérique n'a été poussée.

## **Chapitre 5**

# **Optimisation de l'amortissement des tissés 3D**

L'objectif ici est de mettre en avant les leviers permettant d'augmenter l'amortissement au sein de des composites tissés 3D et d'analyser l'effet de l'hybridation de ces derniers à l'aide de joncs élastomères. Des composites hybridés sont homogénéisés dans la partie 5.1 avec une analyse de l'énergie élastique et dissipée afin d'identifier les principales composantes entrant en jeu à l'échelle de la mésostructure. Ensuite, la section 5.2 détaille la génération de cartographies dédiées à l'amortissement dans le but d'optimiser l'amortissement en fonction des caractéristiques viscoélastiques de la résine et des joncs élastomères. Enfin, la section 5.3 montre le calcul de structure sur l'aube de soufflante montrant l'impact de l'insertion d'un composite hybride sur l'amortissement modale de la pièce à l'arrêt.

## 5.1 Mésostructure hybridée

Après avoir homogénéisé les propriétés d'une armure tissée 3D hybride, différentes stratégies d'hybridation pour augmenter l'amortissement sont étudiées. Enfin, l'énergie élastique et dissipée est analysée pour identifier les composantes participant à l'amortissement à l'échelle du matériau tissé 3D.

### 5.1.1 Homogénéisation de mésostructure hybride

Cette section s'intéresse à l'homogénéisation d'une mésostructure tissée 3D hybridée avec des joncs élastomères. La figure 5.1 montre la modélisation d'une mésostructure hybridée constituée de 4 matériaux viscoélastiques, l'élastomère, en rouge, et la matrice, en jaune, sont isotropes et les fils de chaîne, en bleu et de trame, en vert, sont orthotropes. L'armure à une épaisseur de 6 couches avec des joncs élastomères insérés dans le sens trame entre les colonnes de trame. Une parfaite cohésion entre les torons élastomères et la matrice est supposée. Le TVF cible de l'armure est de 59%.

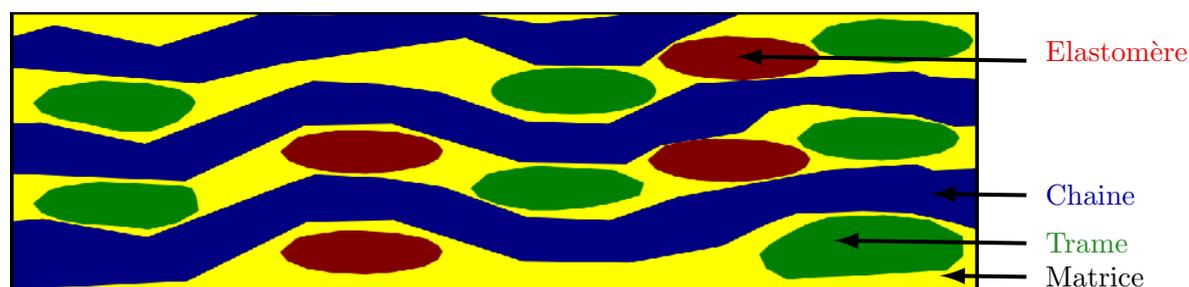


FIGURE 5.1 – Schéma du VER d'un composite hybridé avec des joncs élastomères.

Les propriétés viscoélastiques de l'élastomère ont été caractérisées par un essai DMA par Safran qui, pour des raisons de confidentialité, n'est pas montré. L'élastomère a des propriétés proches du Smactane50. Il a été préféré à ce dernier, car il a montré un facteur de perte et une rigidité légèrement supérieurs pour la gamme de température et de fréquence ciblée et permet une mise en œuvre compatible au tissage. La figure 5.2 présente la courbe maitresse du Smactane

50 en fréquence réduite où la zone d'intérêt ciblée est encadrée. D'après les essais, la gamme de température cible est associée à un pic d'amortissement avec un facteur de perte de 110%. Ce dernier est lié à la température de transition vitreuse montrant une augmentation du module avec la fréquence passant ainsi d'une dizaine de méga pascal (MPa) à des centaines.

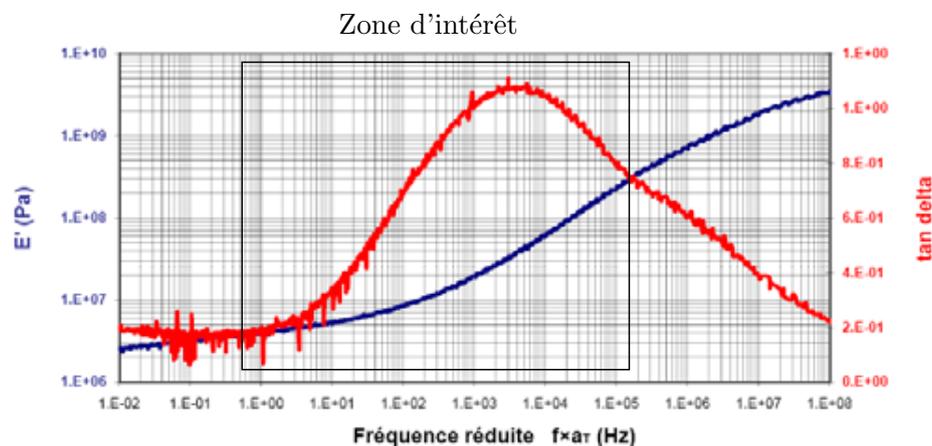


FIGURE 5.2 – Module complexe du Smactane 50 [149].

La figure 5.3 illustre l'évolution de la rigidité et du facteur de perte de cette mésostructure dans le sens chaîne et trame en trait plein bleu. Le trait plein rouge représente les résultats de l'homogénéisation de cette même mésostructure sans jonc élastomère. En pointillé est représentée l'évolution des propriétés de la matrice avec un facteur d'échelle constant tandis que celles de l'élastomère sont affichées avec des tirets. Les propriétés du jonc sont la propriété de Safran, c'est pourquoi les facteurs d'échelle sont remplacés respectivement pour le module et le facteur de perte par  $\chi_E$  et  $\chi_\eta$ .

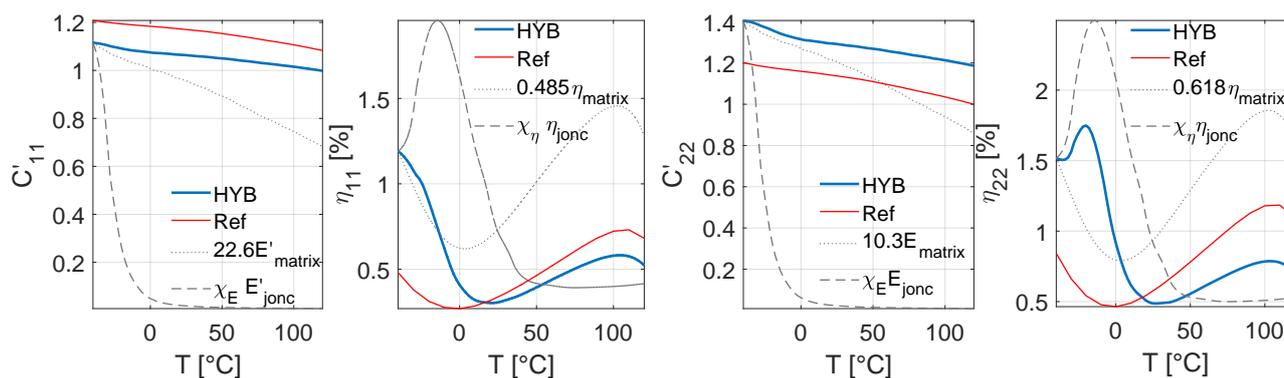


FIGURE 5.3 – Module et taux de perte homogénéisés dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) de l'armure hybridée avec joncs élastomères.

L'insertion de l'élastomère affecte l'évolution du module de rigidité en fonction de la température. En effet, une chute plus importante du module est constatée entre  $-40^\circ\text{C}$  et  $0^\circ\text{C}$ . Celle-ci est corrélée au niveau d'énergie dans l'élastomère et donc à l'amortissement induit dans la structure. L'influence de l'élastomère est plus visible dans le sens trame qui correspond à sa direction d'insertion.

L'évolution de l'amortissement est différente dans les deux directions. Dans le sens chaîne, l'ajout de l'élastomère induit une augmentation significative de l'amortissement pour les températures négatives par rapport à l'armure de référence. Ceci est plus marqué dans le sens trame où un pic d'amortissement est observé. Dans le sens trame le facteur de perte est environ 30% plus élevé que dans le sens chaîne à  $-40^{\circ}\text{C}$ . Comparé à la référence, l'augmentation du facteur de perte est de 148% dans le sens chaîne et de 80% dans le sens trame.

L'insertion de l'élastomère contribue à instaurer un amortissement additionnel entraînant un décalage du minimum d'amortissement vers des températures plus élevées d'environ  $15^{\circ}\text{C}$ . Contrairement au sens chaîne, un maximum est observé dans le sens trame à environ  $-20^{\circ}\text{C}$ . Ce comportement se retrouve pour le jonc élastomère avec un maximum atteint à  $-14^{\circ}\text{C}$ .

L'évolution distincte du facteur de perte dans les deux directions montre qu'un calcul est nécessaire pour caractériser l'amortissement d'une mésostructure hybride et qu'une loi des mélanges, par exemple, n'est pas suffisante.

Par ailleurs, l'efficacité du toron élastomère résulte d'une combinaison, d'un compromis, entre amortissement et rigidité. En effet, au-delà de  $20^{\circ}\text{C}$ , le facteur de perte de mésostructure hybride suit la même tendance que la référence mais possède des valeurs inférieures. Ainsi, si la raideur de l'élastomère est trop faible, de l'ordre du MPa, il n'est d'aucune utilité pour la cellule même si son facteur de perte est important.

Par conséquent, plusieurs types de joncs élastomères ont été testés avec des comportements différents en température. La figure 5.4 montre les données matériaux du Smactane50, du Smactane70, du Vamac et du DYAD-609, issues de SDT/visc [143]. En termes de rigidité, le Vamac est intéressant car c'est le plus raide à  $-40^{\circ}\text{C}$  avec 4GPa et il arrive à maintenir une rigidité correcte à  $120^{\circ}\text{C}$  avec 60MPa. Ensuite, le DYAD-609 est très raide jusqu'à  $50^{\circ}\text{C}$  avec un module supérieur au GPa avant de connaître une baisse brutale et atteindre 4MPa à  $120^{\circ}\text{C}$ . Le Smactane70 a une rigidité plus élevée que le Smactane50 d'au minimum 200% sur la gamme de température. Cependant, sa valeur n'est que de 15MPa à  $120^{\circ}\text{C}$ .

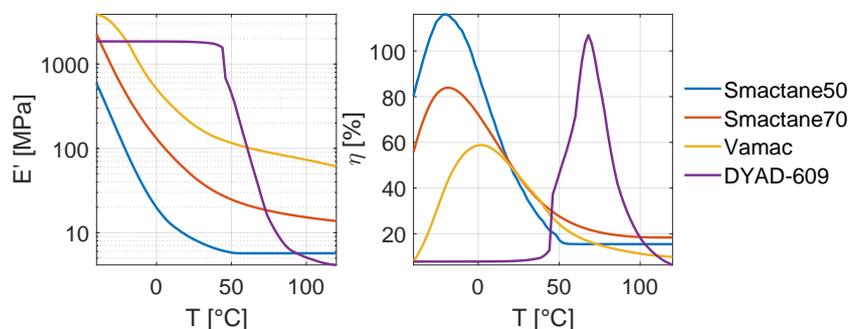


FIGURE 5.4 – Comparaison du module de stockage et du facteur de perte des matériaux élastomères étudiés à une fréquence de 60Hz entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$ .

En termes d'amortissement, le Smactane50 a un pic à 116% à  $-20^{\circ}\text{C}$ . Sa variante, le Smactane70, possède le même comportement mais est moins amorti de 30% à la même température.

Le Vamac est le moins amorti des quatre matériaux, il présente un pic à 60% à 0°C. Passé 50°C son facteur de perte, comme celui du Smactane50 et 70, est faible et inférieur à 20%. Enfin le DYAD-609 se distingue avec un amortissement faible avant 50°C, puis un pic à 107% à 70°C avant d'être inférieur à 20% à 100°C.

La figure 5.5 montre que dans le sens chaîne les propriétés homogénéisées avec le Vamac et le DYAD-609 ont un pic d'amortissement respectivement à -20°C avec 0.96% et 50°C avec 0.88%. Le Smactane 70 présente le plus haut facteur de perte avec 1.5% à -40°C mais après -20°C, le Vamac est supérieur. Le Smactane50 est en tout point inférieur au Smactane70.

En terme de rigidité, les modules de stockage ont été normés par le minimum obtenu pour les quatre matériaux. Le Vamac est supérieur au Smactane70 et 50 pour toute la gamme de température, le DYAD-609 lui est supérieur entre -20°C et 50°C. Le gain en rigidité n'est pas significatif et l'écart entre le plus faible et le plus élevé est inférieur à 4%.

Dans le sens trame, le comportement en rigidité est identique à celui en sens chaîne avec des valeurs environ deux fois inférieures. En revanche pour l'amortissement chaque matériau présente un pic d'amortissement à des températures différentes. Pour le Smactane 50 ce pic est à -25°C avec 1.74%, pour le Smactane 70 à -15°C avec 1.49%, pour le Vamac à 5°C avec 1.17% et pour le DYAD-609 à 65°C avec 1.66%. Le Vamac possède un amortissement supérieur au Smactane 50 dès -5°C, au Smactane 70 dès 5°C et par rapport au DYAD-609 il n'est inférieur qu'entre 45° et 80°C.

Sur l'ensemble de la gamme de température, le Vamac semble avoir le comportement le plus régulier afin de maximiser l'amortissement de la mésostructure.

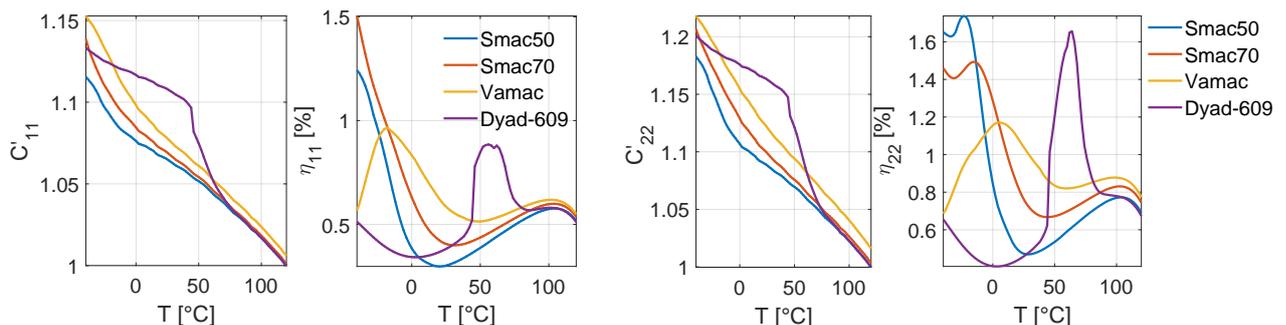


FIGURE 5.5 – Module de stockage et facteur de perte homogénéisés dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) de l'armure hybridée avec différents joncs élastomères.

Le chapitre 4 a mis en évidence que la composante de cisaillement  $C_{xz} = C_{55}$  contribue à l'amortissement des éprouvettes tissées 3D sur les modes de flexion, elle est présentée en figure 5.6. En termes de tendance en rigidité et en facteur de perte, les mêmes constatations que pour les propriétés dans le sens chaîne sont observées. Cependant en terme de valeur, la rigidité est plus faible et comprise entre 4.3 et 4.8 GPa à -40°C et les amortissements sont supérieurs à 1%. Le Vamac est toujours intéressant avec son pic d'amortissement à -20°C.

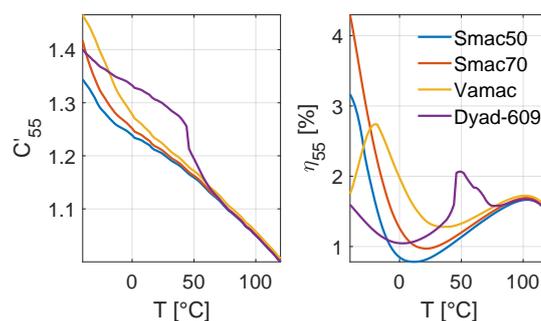
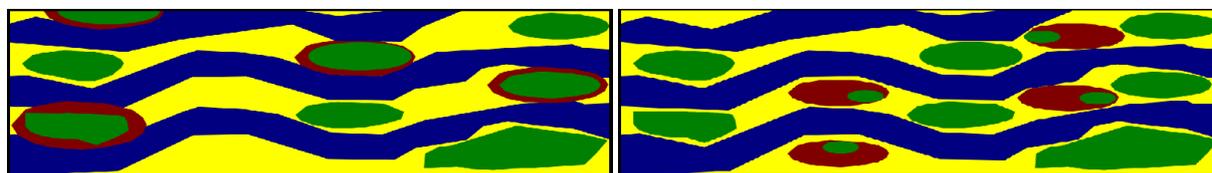


FIGURE 5.6 – Résultats du cisaillement homogénéisé  $C_{55}$  pour différents joncs élastomères.

Pour une insertion de joncs élastomères dans le sens trame, le changement de matériau ne semble pas présenter de gain significatif, en particulier à des températures supérieures à 20°C. Une stratégie d'hybridation différente semble donc nécessaire pour maximiser les gains d'amortissement dans ces composites hybridés.

### 5.1.2 Etude de différentes stratégies d'hybridation

Quatre configurations d'hybridation ont été testées avec les maillages à disposition. L'élastomère utilisé pour ces calculs est celui caractérisé par Safran en section 5.1.1. Le maillage de référence correspond à une armure 6 couches standard. L'armure enrobée, représentée en figure 5.7a, reprend le même maillage que l'armure de référence mais certains fils de trame (en vert) sont enrobés d'élastomère (en rouge). Un toron de trame sur deux a été enrobé toutes les deux colonnes de trames et disposé en quinconce. L'enrobage a une épaisseur d'environ 0.2mm. L'armure imprégnée consiste à remplacer les joncs élastomères de l'armure hybride par des torons composés de 79% de fibre et 21% d'élastomère. Ces fils imprégnés sont homogénéisés de la même façon que les fils de chaîne et de trame. Enfin, l'armure cotissée, représentée en figure 5.7b, montre des joncs élastomères (en rouge) tissés avec un toron de trame (en vert) puis insérés entre les colonnes de trame. Dans ces deux dernières figures, la résine est représentée en jaune et les torons de chaîne en bleu.



(a) Armure avec fils de trame enrobés.

(b) Armure avec fils élastomère cotissés.

FIGURE 5.7 – Représentation d'un VER hybride enrobé et cotissé.

La figure 5.8 représente les résultats des différentes configurations dans le sens chaîne et trame. Le taux volumique de fibres chaque armure est identique est fixé à 59%, les taux volumiques de fibre dans les fils de chaîne et de trame sont ajustés en conséquence. L'armure de référence est appelée *Ref*, celle hybridée avec des joncs élastomères est nommé par *Pure*, celle cotissée par *Twist*, l'enrobée par *Coated* et l'imprégnée par *Impreg*. Le pourcentage volumique

d'élastomère dans l'armure *Ref* est de 0%, dans *Pure* et *Twist* il est de 10%, *Coated* il est de 3% et dans *Impreg.*, il est de 2% car il y a 10% de fils imprégnés à 21% d'élastomère. Les modules de stockage sont normés par rapport au module de stockage obtenu à 120°C pour l'armure *Pure*.

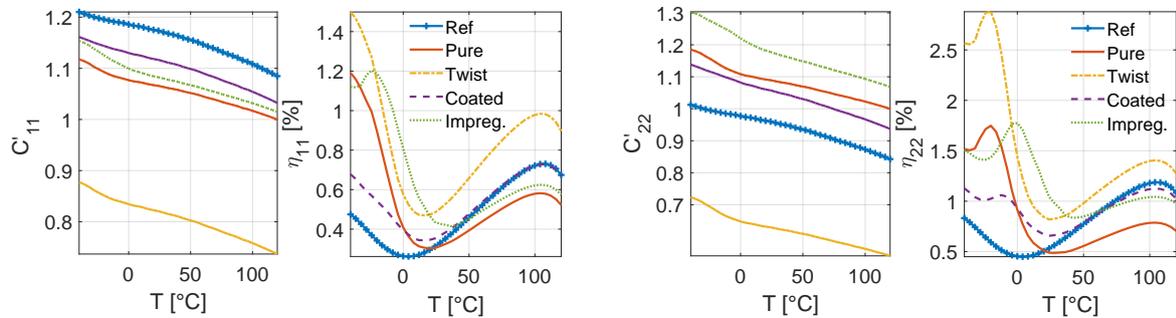


FIGURE 5.8 – Module de stockage et facteur de perte dans le sens chaîne (gauche) et trame (droite) des différentes configurations d'hybridation.

L'armure cotissée présente les meilleurs résultats en amortissement dans le sens chaîne et trame avec un gain par rapport à la référence sur toute la gamme de température. En revanche, la contrepartie est un module de rigidité faible avec une perte de 28% dans le sens chaîne et trame par rapport à la référence.

L'insertion d'élastomère autour de certains fils de trame, représentant l'armure enrobée, réduit la rigidité de l'armure dans le sens chaîne, mais augmente l'amortissement de 40% jusqu'à 10°C, ensuite l'élastomère n'est plus assez rigide pour être efficace et l'armure possède des niveaux d'amortissement identiques à la référence. Dans le sens trame, la rigidité et l'amortissement sont supérieurs à la référence.

L'armure imprégnée se distingue des autres par le comportement de son facteur de perte. En effet, c'est la seule dans le sens chaîne à montrer un maximum vers  $-20^{\circ}\text{C}$  et son minimum est le plus décalé vers des températures élevées. Dans le sens trame, elle présente une baisse jusqu'à  $-20^{\circ}\text{C}$  puis un maximum à  $0^{\circ}\text{C}$  avant d'avoir un comportement identique à la référence après  $50^{\circ}\text{C}$ . Son gain en amortissement est présent jusqu'à  $50^{\circ}\text{C}$ .

Par conséquent, une alternative crédible aux joncs élastomères purs semble être l'insertion de torons de trame imprégnés d'élastomère. En effet, son comportement en rigidité est meilleur et les niveaux d'amortissement le sont aussi. L'armure enrobée est aussi intéressante mais le gain moins important. En revanche, l'armure cotissée montre une rigidité trop faible pour être une solution envisagée. La façon d'insérer les joncs élastomères perturbe la géométrie de l'armure et constitue le critère principal de l'efficacité de la configuration.

### 5.1.3 Analyse des répartitions des énergies à l'échelle mésoscopique

Dans le cas de l'homogénéisation viscoélastique, la quantification de la fraction d'énergie associée à chaque composante de chaque matériau permet de comprendre les mécanismes d'amortissement associés aux composites tissés 3D pour différents chargements. L'analyse s'est portée

sur une armure standard homogénéisée en section 3.3.2 et une armure hybride homogénéisée en section 5.1.1 avec des joncs élastomères.

La décomposition de la matrice des rigidités complexe est effectuée suivant la méthodologie de la section 2.3.4. Des notations spécifiques sont utilisées. Le terme  $Y_x C_{t1}$  désigne *yarn x, transverse-1 component*, c'est-à-dire la première composante transverse du toron de chaîne. De même,  $Y_y C_l$  signifie *yarn y, longitudinal component*, soit la composante longitudinale du toron de trame. Pour les cisaillements qui apparaîtront dans les analyses d'énergie dissipée, l'écriture  $C_{44} = C_{yz}$ ;  $C_{55} = C_{xz}$  et  $C_{66} = C_{xy}$  est utilisée représentant respectivement le cisaillement transverse-1-transverse-2, le cisaillement longitudinale-transverse-2 et cisaillement longitudinale-transverse-1 pour le toron de chaîne. Enfin, *Mat* représente le fraction d'énergie dans la matrice. Chaque composante ayant une fraction d'énergie supérieure à 3% est représentée dans les figures de la section. En abscisse sont indiqués le chargement ainsi que le facteur de perte homogénéisé correspondant. Par exemple  $E_{xx}$  et  $E_{yy}$  correspondent respectivement au chargement de traction/compression dans le sens chaîne et trame. Les observations sont effectuées pour une température de  $-40^\circ\text{C}$  à une fréquence de 60Hz.

La figure 5.9 montre pour l'armure standard pour les chargements  $E_{xx}$  et  $E_{yy}$ , c'est la composante longitudinale respectivement des fils de chaîne  $Y_x C_l$  et de trame  $Y_y C_l$  qui génère principalement l'énergie élastique. Ceci est normal car les composantes longitudinales sont celles se trouvant dans la direction de la sollicitation. La composante transverse  $C_{t1}$  intervient aussi à hauteur d'environ 10%.

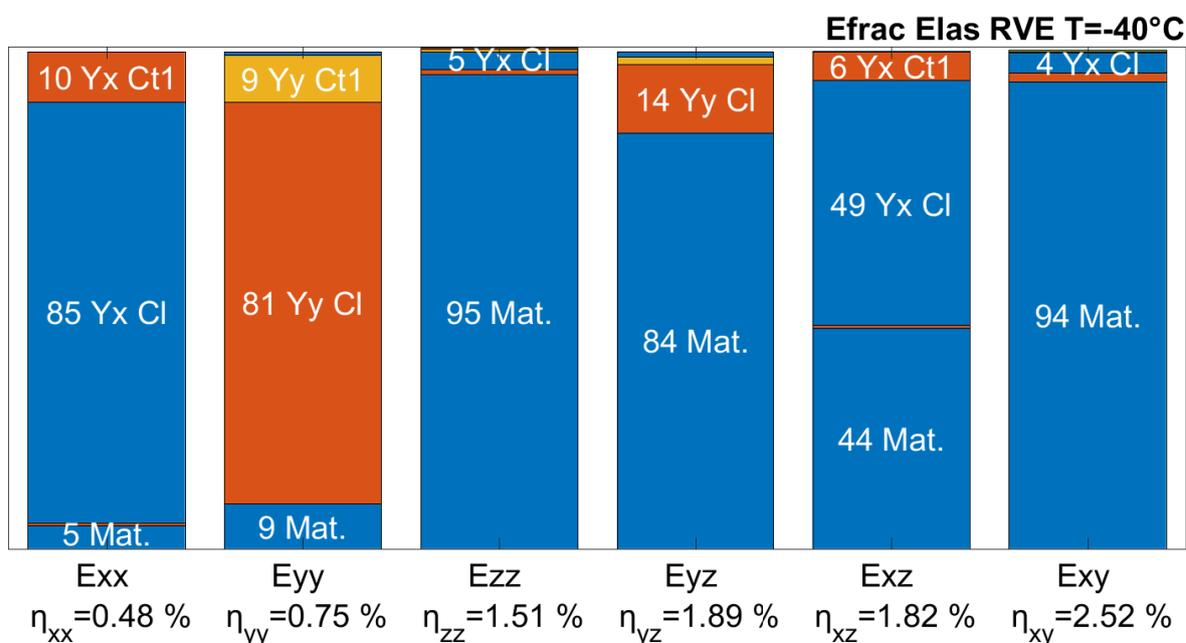


FIGURE 5.9 – Fraction d'énergie élastique par composante pour une mésostructure tissée 3D standard à  $-40^\circ\text{C}$ .

Pour les chargements en cisaillement, la contribution principale provient de la matrice *Mat*. Les composantes longitudinales interviennent aussi mais dans une moindre mesure.

Pour comprendre les mécanismes d'amortissement, il faut s'intéresser aux fractions d'énergie *dissipée*. Les composantes intervenantes sont beaucoup plus diverses et varient en fonction des chargements. La figure 5.10 montre que l'énergie dissipée est créée par des effets de cisaillement. Pour l'ensemble des chargements au moins une de ces composantes  $C_{xy}$ ,  $C_{xz}$ ,  $C_{yz}$  intervient et environ le quart de l'effet dissipatif provient de la matrice *Mat*. L'effet de la matrice est le moins important pour le chargement de cisaillement chaîne/trame  $E_{xy}$  et le plus important pour le chargement dans l'épaisseur  $E_{zz}$ . Pour les chargements en sens chaîne  $E_{xx}$  et trame  $E_{yy}$ , même si la composante dominante est celle de cisaillement longitudinale-transverse respectivement  $Y_x C_{xz}$  et  $Y_y C_{xz}$ , il est intéressant de constater que les composantes transverses respectivement des fils de trame  $Y_y C_{t1}$ ,  $Y_y C_{t2}$  et de chaîne  $Y_x C_{t1}$ ,  $Y_x C_{t2}$  interviennent. Cela signifie que pour un chargement dans le sens chaîne  $E_{xx}$ , la traction des torons de trame  $Y_y$  intervient tandis que pour un chargement dans le sens trame  $E_{yy}$ , il y a une traction des fils de chaîne  $Y_x$ . Ces fractions d'énergie représentent en cumulé respectivement 14% pour la traction des trames et 23% pour celle des chaînes.

Pour les chargements de cisaillement, les composantes de cisaillement des chaînes et des trames associés à la sollicitation entrent en jeu et concentrent la majorité de l'énergie dissipée.

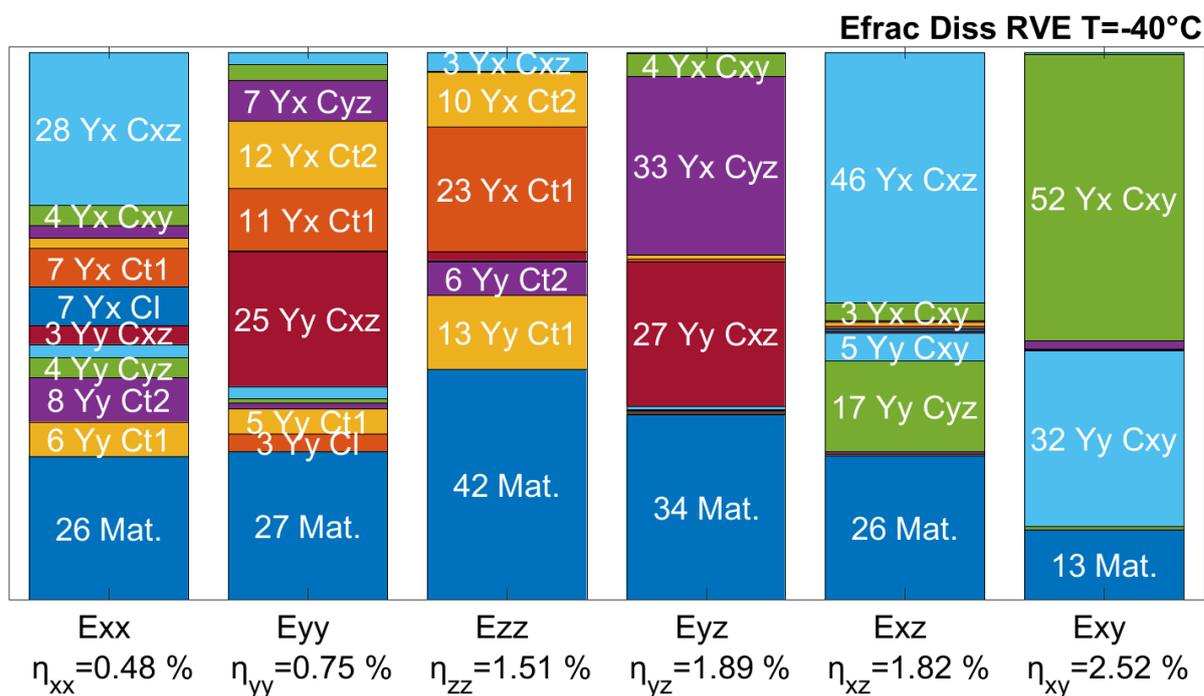


FIGURE 5.10 – Fraction d'énergie *dissipée* par composante pour une mésostructure tissée 3D *standard* à  $-40^\circ\text{C}$ .

Pour les mésostructures hybridées, une composante additionnelle associée au jonc élastomère est notée  $Visc$ .

La figure 5.11 montre que pour cette armure hybride, dans les cas de chargement en chaîne  $E_{xx}$  et en trame  $E_{yy}$ , la composante longitudinale des torons orientés dans la même direction respectivement  $Y_x C_l$  et  $Y_y C_l$  qui contribue le plus à l'énergie élastique. Cette observation est identique que pour une armure standard. La matrice  $Mat$  contribue tout autant que pour une mésostructure tissée 3D standard avec respectivement 7% et 13% contre 5% et 9%.

Pour les chargements en cisaillement, matrice et élastomère produisent la grande majorité de l'énergie élastique avec les composantes longitudinales des fils de chaîne et de trame.

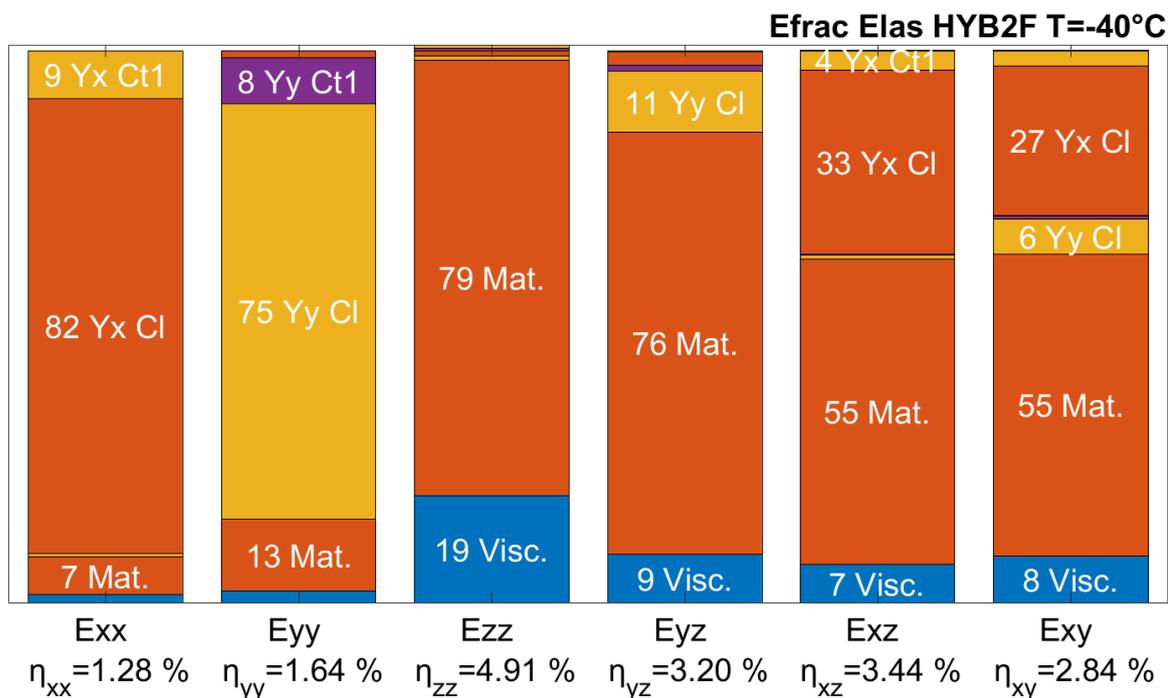


FIGURE 5.11 – Fraction d'énergie élastique par composante pour une mésostructure tissée 3D hybride à  $-40^{\circ}\text{C}$ .

La figure 5.12 s'intéresse à l'énergie dissipée. Le facteur de perte est plus important que la mésostructure tissée 3D standard et ceci se caractérise par un fort pourcentage de l'énergie dissipée provenant de l'élastomère avec plus de la moitié pour l'ensemble des chargements excepté le chargement de cisaillement chaîne/trame. Dans les chargements traction/compression  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $E_{zz}$  les pourcentages sont élevés et se situent entre 60% et 76%. La matrice a maintenant un rôle secondaire et contribue à des pourcentages situés entre 14% et 17%.

Pour les cas de chargements en cisaillement, les composantes de cisaillements des torons sont activées. Le pourcentage provenant de l'élastomère est moins important que pour les chargements traction/compression, mais l'amortissement reste élevé car le facteur de perte des composantes de cisaillement compense le travail moins important de l'élastomère. De plus la contribution provenant de la matrice est aussi légèrement plus élevée.

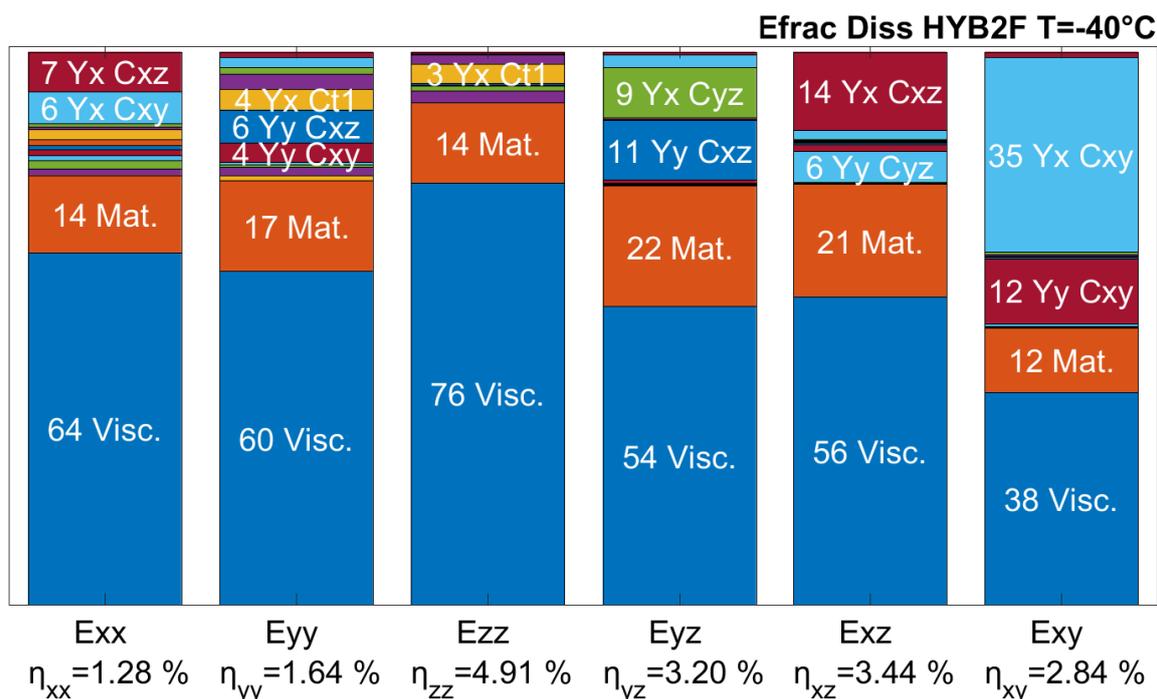


FIGURE 5.12 – Fraction d'énergie *dissipée* par composante pour une mésostructure tissée 3D *hybride* à  $-40^{\circ}\text{C}$ .

Les propriétés viscoléastiques des composants des mésostructures tissées 3D standards ou hybrides impliquent une évolution en fonction de la fréquence et de la température. Ici, l'impact d'une augmentation de la température est évalué à fréquence fixée pour une armure hybride. En effet, les propriétés de l'élastomère évoluent fortement entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$ . Pour du Smactane50, par exemple, représenté en figure 5.2, à  $-40^{\circ}\text{C}$  son module atteint presque 1GPa avec un facteur de perte d'environ 70% tandis qu'à  $120^{\circ}\text{C}$  son module chute à quelques MPa et son amortissement est à 20%. Les variations en module et en facteur de la perte de la matrice sont moindre avec une rigidité relativement stable avec des valeurs entre 1 et 3GPa et un amortissement oscillant entre 1.5% et 3%.

La figure 5.13 montre qu'à  $120^{\circ}\text{C}$  pour l'armure hybridée, l'élastomère contribue pour l'énergie élastique à moins de 1% pour l'ensemble des chargements excepté celui dans le sens de l'épaisseur alors qu'à  $-40^{\circ}\text{C}$  ce pourcentage peut atteindre 9% pour les chargements en cisaillement. En effet, sa rigidité est trop faible vis-à-vis dans autres composants avec un facteur 200 avec la matrice et de 10 000 avec les torons. La compensation s'effectue par un pourcentage de travail élastique fournit par les torons et la matrice plus important, car leurs propriétés de rigidité sont moins détériorées.

La non contribution de l'élastomère à l'énergie élastique du fait de sa faible rigidité se répercute directement sur l'énergie dissipée montrée en figure 5.14 avec une baisse considérable des niveaux de contribution. En effet, l'élastomère n'intervient plus lors des chargements de cisaillement et possède des pourcentages très faibles sur les chargements de traction/compression. Sa contribution est négligeable comparée à celle de la matrice ou du cisaillement des torons.

Les mêmes tendances que pour une armure standard sont retrouvées avec l'augmentation de la contribution des composantes de cisaillement et pour les chargements  $E_{xx}$  et  $E_{yy}$ , la traction des fils respectivement de trame et de chaîne intervient.

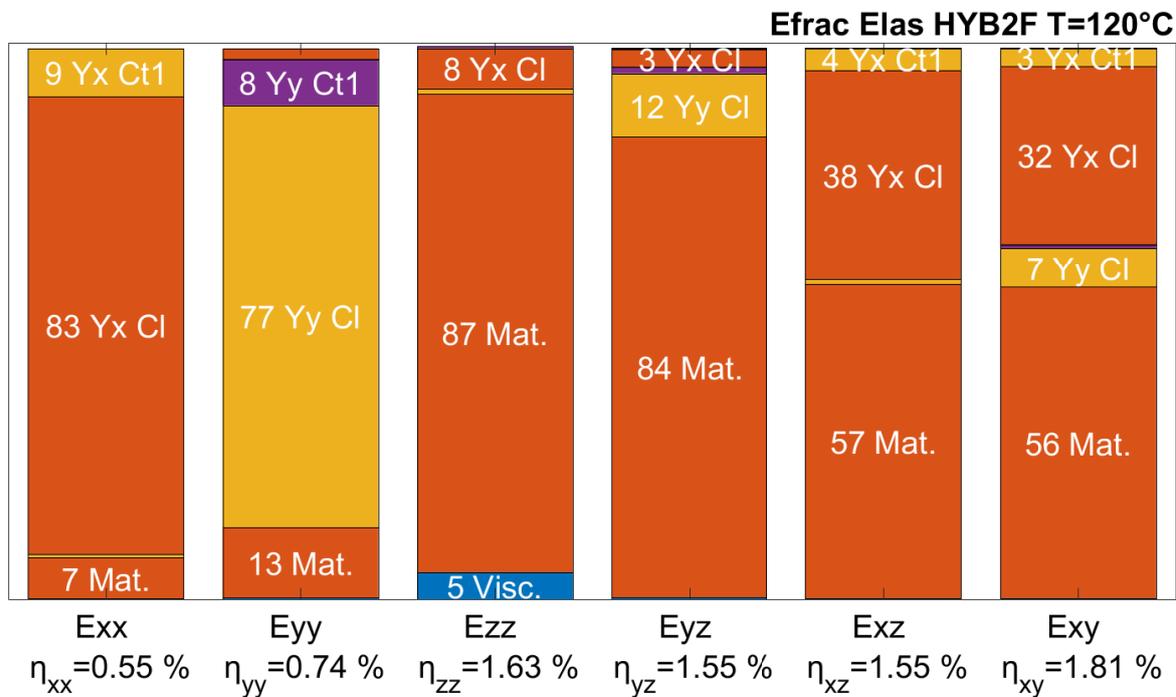


FIGURE 5.13 – Fraction d'énergie *élastique* par composante pour une mésostructure tissée 3D hybride à 120°C.

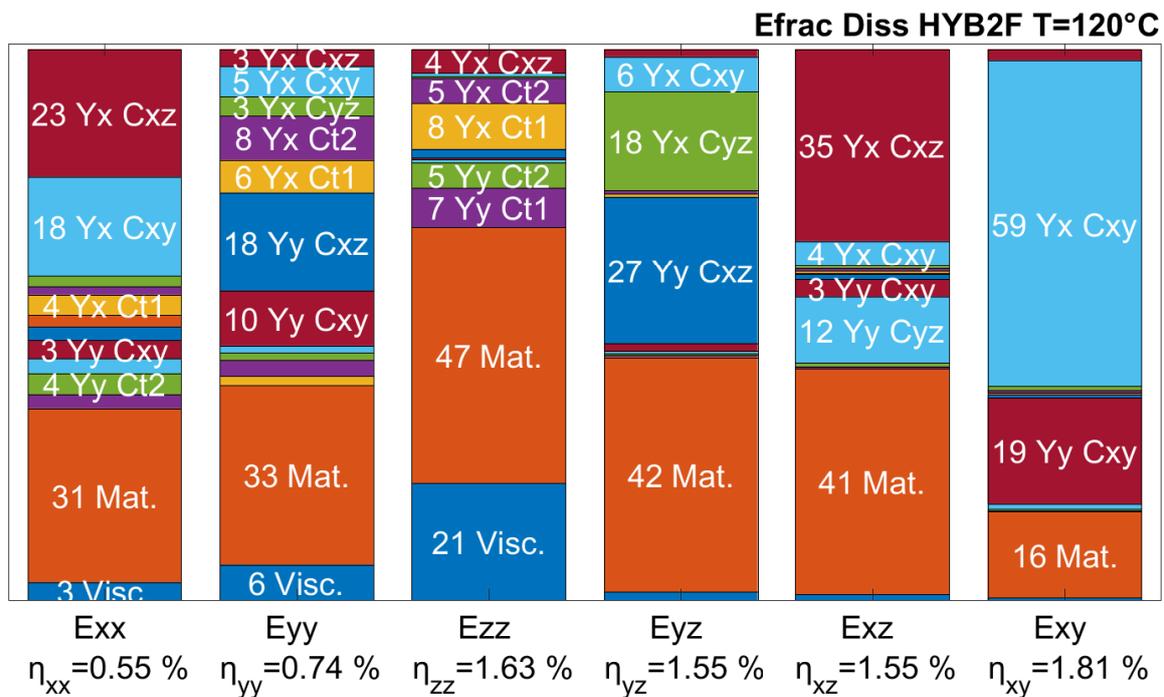


FIGURE 5.14 – Fraction d'énergie *dissipée* par composante pour une mésostructure tissée 3D hybride à 120°C.

Les composantes contribuant à l'amortissement des composites standards et hybridés en fonction de la température ont été mis en évidence. Il a été trouvé que les cisaillements des torons et la matrice contribuent majoritairement. Par ailleurs, la traction des torons orthogonaux à une sollicitation dans l'axe des torons est aussi une variable pouvant augmenter le facteur de perte. Enfin, le contraste en rigidité entre les matériaux du milieu hétérogène ne doivent pas être trop important ( $>100$ ) au risque de posséder des matériaux inefficaces pour favoriser l'amortissement du milieu.

## 5.2 Cartographie de propriétés viscoélastiques

L'objectif de cette section est de définir l'influence des propriétés mécaniques viscoélastique des constituants sur l'amortissement de la mésostructure. Pour cela, une variation des propriétés de la résine pour les armures standards est effectuée en section 5.2.1 tandis qu'en section 5.2.2 les propriétés de l'élastomère pour une mésostructure hybride sont analysées.

### 5.2.1 Cartographie de la matrice

La définition des propriétés viscoélastiques de la matrice du tissé 3D, ici une résine époxy, est un enjeu essentiel dans la prédiction de l'amortissement. L'ajout de joncs élastomères permet d'augmenter l'amortissement de manière importante pour une gamme de température précise, cependant, une fois inefficace, l'élément qui pilote le comportement amortissant du composite à l'échelle microscopique ou à l'échelle mésoscopique est la matrice. Une étude a été effectuée aux deux échelles en réalisant un calcul pour différents modules de stockage de matrice notés  $E_{matrix}$  avec un facteur de perte constant noté  $\eta_{matrix}$ .

A l'échelle du toron, la figure 5.15 montre que la tendance est différente entre le sens transverse et axial. Dans le sens axial 33 pour un même facteur de perte, plus la matrice est raide, plus le toron est amorti. En effet, par exemple, pour un facteur de perte de matrice à 4% et un module à 0.7GPa l'amortissement est de 0.02% alors qu'avec un module matrice à 4GPa il est de 0.04% soit un facteur 2. Cependant, les niveaux sont très faibles.

Dans le sens transverse 11, en revanche, c'est le contraire, pour un même facteur de perte, plus la matrice est raide moins le toron est amorti. Dans les deux cas, il semble logique que pour une même rigidité, plus la matrice est amortie plus le toron l'est aussi.

Les valeurs de facteur de perte dans le sens axial et transverse sont très différentes avec un facteur proche de 100. Cependant, l'analyse de l'énergie dissipée montrée en figure 5.10 et 5.12 a montré que la composante de cisaillement  $xz$  ici notée 55 à un impact important sur l'énergie dissipée et par conséquent sur l'amortissement. La figure 5.16 montre que le niveau d'amortissement pour cette composante est environ égale à l'amortissement de la matrice pour cette gamme de module. À niveau d'amortissement identique, le facteur de perte du toron diminue avec une augmentation de module.

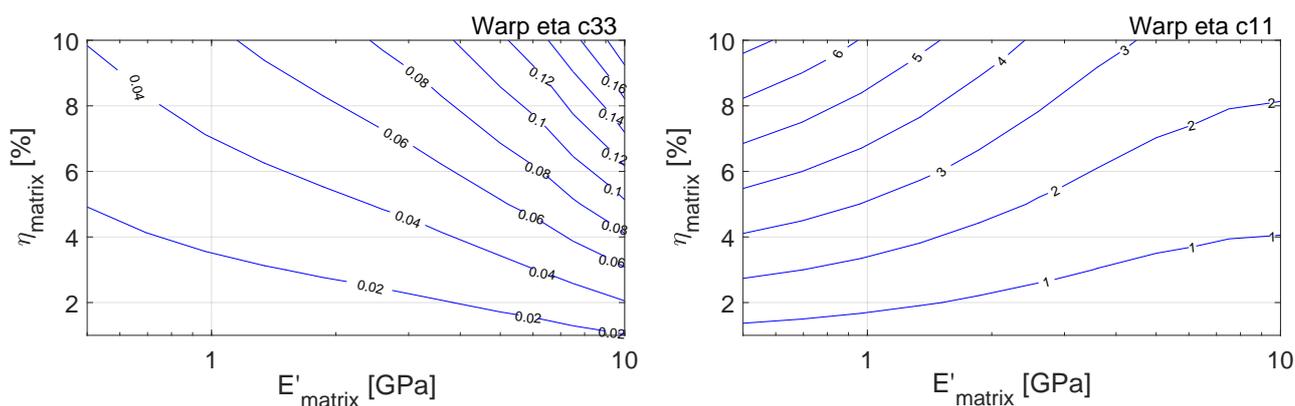


FIGURE 5.15 – Influence des propriétés de la résine sur le taux de perte d'un toron homogénéisé à 71% de fibre dans la direction axiale (gauche) et transverse (droite).

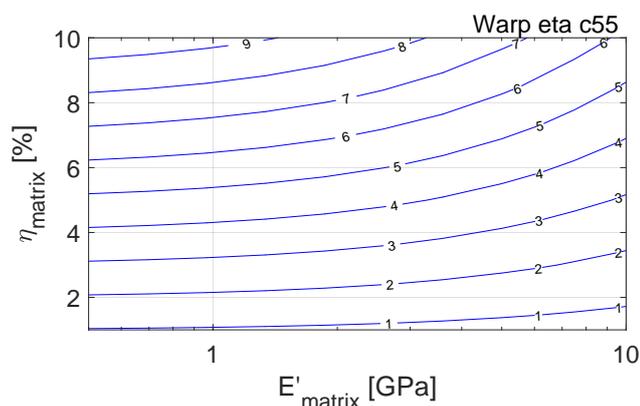


FIGURE 5.16 – Influence des propriétés de la résine sur le taux de perte d'un toron homogénéisé à 71% de fibre dans la direction cisaillement  $xz$  (55).

A l'échelle mésoscopique, le même travail est effectué. Les propriétés des torons de chaîne et de trame sont calculées comme précédemment pour les différentes propriétés matrices. Pour ce calcul, il y a uniformité des propriétés de la matrice constituant les torons et l'armure 3D.

La figure 5.17 décrit l'évolution des facteurs de perte des composantes 11 et 55 car ce sont celles qui contribuent le plus à l'amortissement du tissu 3D d'après la répartition des énergies effectuée en figure 4.19. Pour cette gamme de module de matrice, à facteur de perte identique plus la matrice est rigide, moins la mésostructure est amortie. En effet, pour un facteur de perte de matrice égal à 4%, celui dans le sens chaîne est égal à 1% pour un module de matrice à 1GPa contre 0.75% pour 2GPa. Plus les courbes sont horizontales moins l'effet de la rigidité de la matrice est important vis-à-vis du facteur de perte. Ainsi pour la composante de cisaillement montrée ici, l'effet de la rigidité de la matrice est négligeable vis-à-vis du facteur de perte. Cette observation est moins vraie dans le sens chaîne.

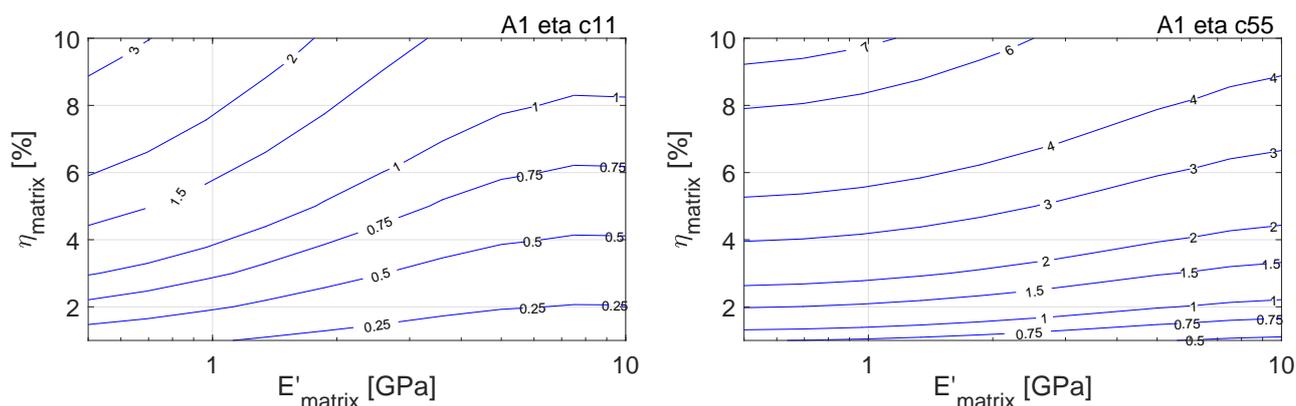


FIGURE 5.17 – Influence des propriétés de la résine sur une armure 3D dans la direction chaîne (gauche) et chaîne/épaisseur (droite).

### 5.2.2 Cartographie des torons élastomères

L'efficacité des joncs élastomères dans les mésostructures hybridées provient d'un compromis entre rigidité et amortissement. Ici, afin de maximiser l'amortissement, une variation des propriétés de rigidité et de facteur de perte des joncs est effectuée. Les calculs ont été réalisés sur un tissé 3D hybride composé de six couches comme représenté en figure 5.1.

La démarche consiste à faire varier les propriétés des joncs élastomères pour des propriétés de matrice et de toron fixées à une unique température. C'est pourquoi ici, les deux températures choisies correspondant aux extrêmes de la gamme de température c'est-à-dire  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$ . La figure 5.18 montre les résultats obtenus auxquels sont ajoutés des points correspondant aux valeurs des homogénéisations réalisées en section 5.1.1. *S50* correspond à l'homogénéisation de la mésostructure hybride avec des joncs élastomères en Smactane50, *S70* en Smactane70 et *Visc* avec le matériau Safran.

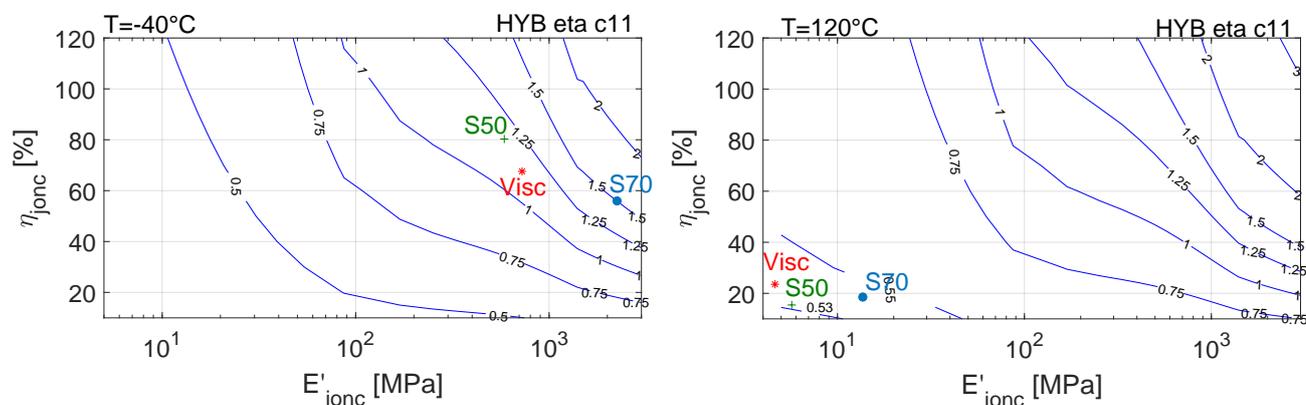


FIGURE 5.18 – Quantification de l'amortissement dans le sens chaîne (11) pour des températures de  $-40^{\circ}\text{C}$  (gauche) et  $120^{\circ}\text{C}$  (droite).

Dans le sens des chaines, quelle que soit la température plus le jonc élastomère est rigide plus la mésostructure est amortie. En effet, à  $-40^{\circ}\text{C}$ , pour un facteur de perte égal à 60%, un amortissement de 1% est obtenu pour un module de stockage de 700MPa alors qu'à 2GPa, l'amortissement serait de 1.5%.

A  $120^{\circ}\text{C}$ , des valeurs d'amortissement identiques à  $-40^{\circ}\text{C}$  sont obtenues pour des modules plus faibles. Ceci est normal car à haute température la matrice et par conséquent les torons sont moins rigides. Ainsi, quand le jonc est plus raide le contraste est plus important à haute température et par conséquent l'amortissement est plus élevé.

A partir de ces cartographies, un amortissement cible de la mésostructure peut être visé et les propriétés des joncs élastomères associées déterminées. Ainsi, si un amortissement de 1% dans le sens des chaines (11) est souhaité, le jonc élastomère doit avoir par exemple un facteur de perte de 60% et un module de stockage de 700MPa à  $-40^{\circ}\text{C}$  et 150 MPa a  $120^{\circ}\text{C}$ .

La figure 5.19 représente l'amortissement dans le sens trame, la tendance est différente comparée au sens chaîne. Les niveaux sont plus élevés et une forme en S est observée. Plus l'amortissement de la mésostructure est élevé, plus le S a une amplitude importante. Pour un élastomère avec un facteur de 60%, un niveau d'amortissement de 1.5% est observé à  $-40^{\circ}\text{C}$  pour un module de stockage à 200MPa et à  $120^{\circ}\text{C}$  à 80MPa.

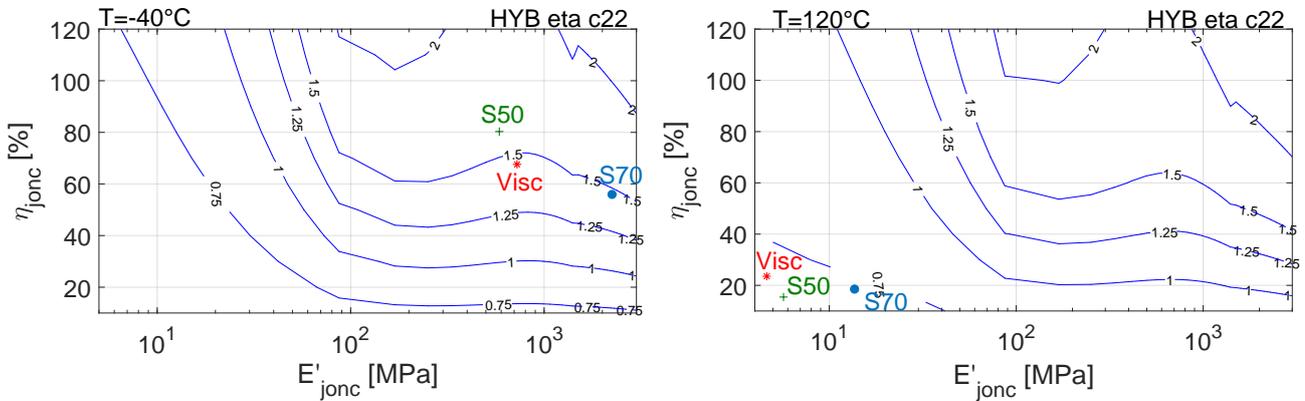


FIGURE 5.19 – Quantification de l'amortissement dans le sens trame (22) pour des températures de  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$ .

La réduction de modèle explicité en section 3.4 présente dans ce type d'étude tout son intérêt, car l'établissement de tels abaques nécessitent la résolution d'un millier d'homogénéisation.

### 5.3 Calcul sur aube

Les différentes homogénéisations de mésostructure effectuées au sein de cette thèse ont permis de réaliser un calcul de structure sur une aube de soufflante prototype. L'aube est constituée d'une partie pale qui oriente le flux d'air et d'un pied qui permet l'attache au disque. Le compor-

tement dynamique de l'aube composite est simulé à l'aide de modèle éléments finis construit par Safran Aircraft Engines [49]. La colle et le bord d'attaque métallique (MLE) ont été conservés. Le modèle éléments finis, montré en figure 5.20, est constitué de 75 021 éléments.

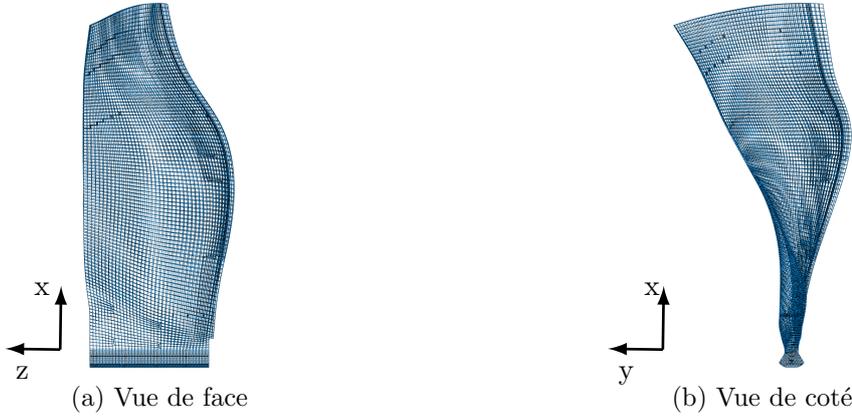


FIGURE 5.20 – Maillage de l'aube.

Le modèle numérique est divisé en différents zonages matériau. L'anisotropie du composite tissé est gérée en associant à chaque élément un repère matériau. L'aube est constituée d'une dizaine de mésostructures aux propriétés mécaniques différentes qui dépendent du motif de tissage, de la taille des torons, du RCT et du taux volumique de fibres.

Les différentes zones matériaux de l'aube n'ont pas pu être modélisées c'est pourquoi des coefficients d'abattement ne dépendant pas de la température ont été calculés afin d'obtenir les propriétés de chacune. La procédure mise en place pour le calcul de ces derniers est simple. En effet, le modèle de référence possède des valeurs homogénéisées pour l'ensemble des zones en élastique. En considérant  $Z_0$  la seule zone matériau homogénéisée du maillage en viscoélastique pour une fréquence et des températures, les propriétés viscoélastiques des autres zones sont calculées comme

$$C_{kl}(T_t, Z_i) = \frac{C_{kl}(Z_{iref})}{C_{kl}(Z_{0ref})} C_{kl}(T_t, Z_0) \quad (5.1)$$

avec  $C_{kl}(T_t, Z_i)$  la composante  $kl$  de la matrice des rigidités de la zone  $Z_i$  à la température  $T_t$  dont les propriétés viscoélastiques sont recherchées,  $C_{kl}(Z_{iref})$  la composante  $kl$  de la matrice des rigidités de la zone  $Z_i$  du maillage de référence homogénéisé en élastique et  $C_{kl}(T_t, Z_0)$  la composante  $kl$  de la matrice des rigidités complexe de la seule zone  $Z_0$  homogénéisée en viscoélastique.

Les conditions limites sont de type encastéré-libre. La figure 5.21a montre l'endroit de l'encastrement qui correspond à la zone de contact entre l'aube et le disque sur les flancs du pied d'aube. Le mode étudié est le premier mode de flexion dont la déformée est montrée en figure 5.21b.

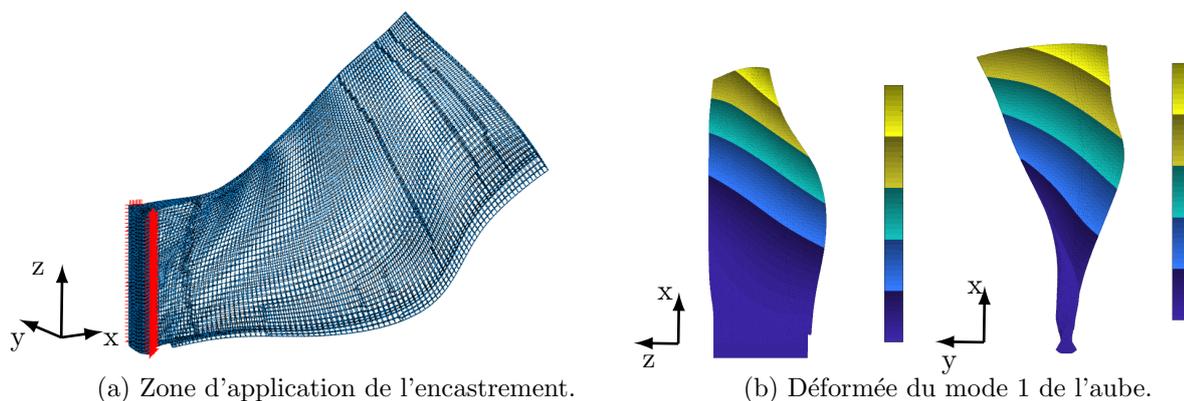


FIGURE 5.21 – Mode 1 de l’aube pour des conditions encastree-libre.

La figure 5.22 montre une prédiction numérique de l’amortissement modal de ce premier mode en fonction de la température pour des conditions limites encastree-libre. Le comportement du facteur de perte de la matrice avec un coefficient d’échelle constant est tracé en tiret.

La tendance de l’amortissement est la même que celle de la matrice. Ceci semble logique car c’est le seul matériau viscoélastique mis en jeu. Des effets de géométries sont observables du fait que l’écart entre les deux courbes n’est pas constant en fonction de la température.

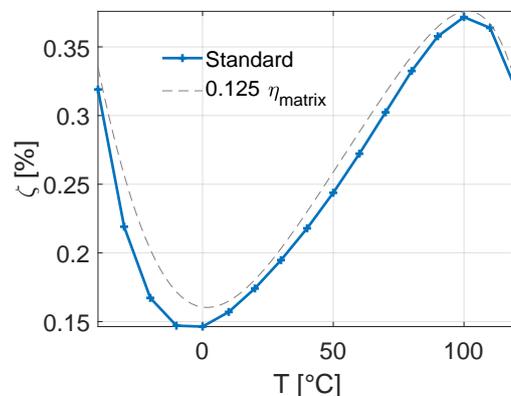


FIGURE 5.22 – Amortissement modal de l’aube pour le mode 1.

La figure 5.23a montre la répartition de l’énergie élastique et dissipée afin de connaître les mésostructures contribuant le plus à l’amortissement.

Concernant l’énergie élastique, 66% provient de la zone 12  $Z_{12}$ . La composante longitudinale de cette zone contribue à 50% ce qui est conséquent. 16% provient de la zone 11  $Z_{11}$  qui est situé en partie haute du pied d’aube et 6% provient de l’ensemble métallique du bord d’attaque et de la colle, *MLE + Glue*. Ces différentes zones sont représentées en figure 5.23b.

Pour l’énergie dissipée 70% provient de la  $Z_{12}$ . Les composantes principales sont celles longitudinale et de cisaillement porté par l’axe x. Le module longitudinal est le plus contributeur suivi du cisaillement chaîne/trame et le cisaillement chaîne/épaisseur.

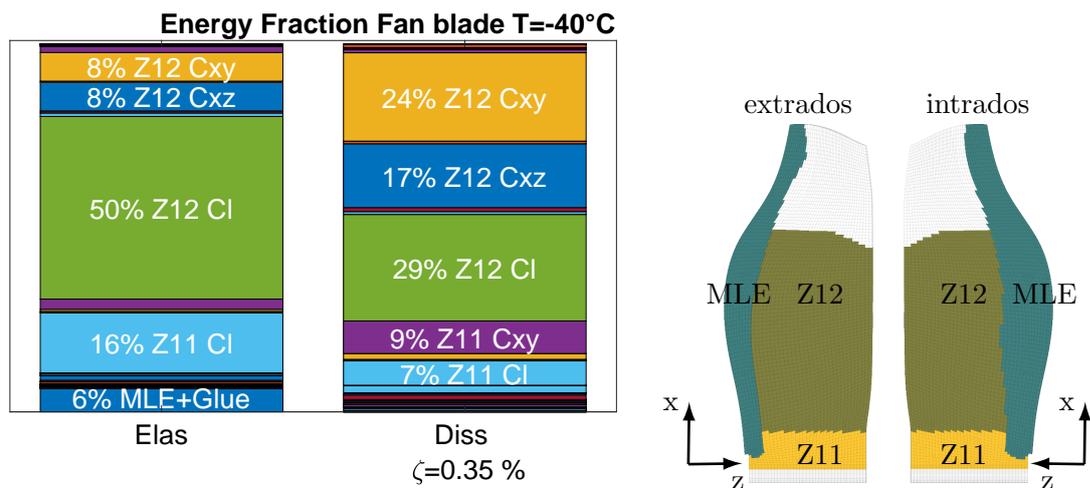


FIGURE 5.23 – Analyse des zones énergétiques de l'aube à  $-40^{\circ}\text{C}$ .

La figure 5.24 permet d'analyser la variation des répartitions énergétiques avec la température pour cette aube avec des mésostructures tissées 3D standards. L'écart est très faible. Pour l'énergie élastique,  $Z_{11}$  contribue plus. La composante  $C_{xy}$  monte à 3% et  $C_l$  à 17%. Au niveau de  $Z_{12}$  ceci est quasi identique. Pour l'énergie dissipée,  $Z_{11}$  occupe aussi une place plus importante avec près de 19% contre 16% à  $-40^{\circ}\text{C}$ . Pour  $Z_{12}$  la composante de cisaillement  $C_{xy}$  participe plus avec 28% contre 24% à  $-40^{\circ}\text{C}$  et la composante longitudinale participe moins avec 22% contre 29%. Ceci s'explique par le fait que les tissages entre les deux zones sont différents ainsi l'évolution de leurs propriétés avec la température est différente.

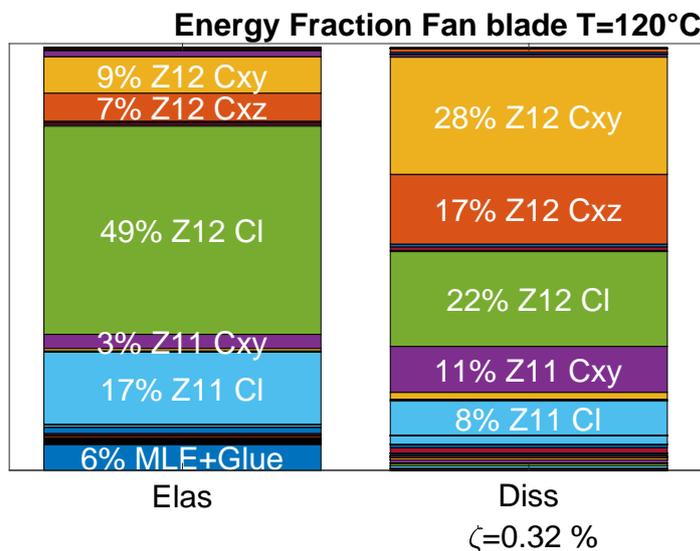


FIGURE 5.24 – Fractions d'énergie des composantes de l'aube à  $120^{\circ}\text{C}$ .

La figure 5.25a représente la répartition spatiale globale des fractions d'énergie dissipée intrados et extrados de l'aube en corrélation avec le graphique en figure 5.23a pour le mode 1 à  $-40^{\circ}\text{C}$  afin d'avoir une idée très générale de l'endroit où la dissipation est importante. Elle montre que la face extrados proche du bord d'attaque métallique dissipe le plus. Le détail par

composante permet d'avoir une interprétation plus fine de cette zone de dissipation.

En effet, pour les composantes longitudinales, en figure 5.25b la zone est étendue et est principalement située en zone  $Z_{12}$ . La face extrados est la plus dissipative. Une légère zone, en étendu et en valeur, apparaît en  $Z_{11}$  mais est minime comparé à la précédente.

Pour les cisaillements  $C_{xy}$ , en figure 5.25c, la zone de dissipation est toujours plus forte côté extrados qu'intrados. Côté extrados,  $Z_{12}$  dissipe plus proche du bord d'attaque métallique tandis que celle de  $Z_{11}$  se situe proche du pied d'aube côté bord d'attaque.

Pour les cisaillements  $C_{xz}$ , en figure 5.25d, la dissipation de  $Z_{12}$  est forte côté intrados. Côté extrados, celle-ci est plus diffuse mais toujours proche du bord d'attaque.

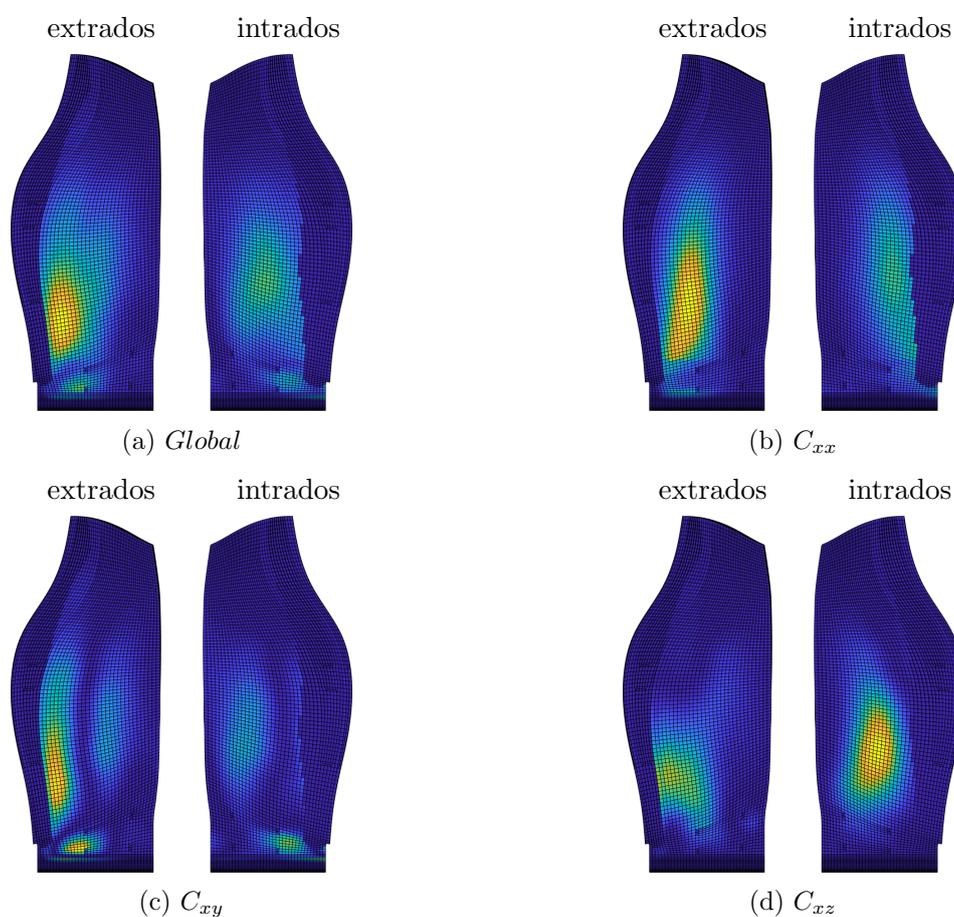


FIGURE 5.25 – Zones spatiales réagissant le plus énergiquement en fonction des composantes.

À la vue des différentes observations réalisées, il convient donc que si l'amortissement veut être amplifié un travail sur  $Z_{12}$  doit être consenti. Par la suite, une armure hybridée avec des joncs élastomères est introduite à cet endroit.

La figure 5.26 montre la comparaison du mode 1 entre ces deux aubes. Plus la pale est composée de matériau amortissant plus elle est amortie. Entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $20^{\circ}\text{C}$ , le gain en amortissement est important et s'élève de 64% à  $-40^{\circ}\text{C}$  à 24% à  $20^{\circ}\text{C}$ . Ensuite, le gain se stabilise jusqu'à  $120^{\circ}\text{C}$  avec environ 10%. Le minimum d'amortissement est décalé vis-à-vis de l'aube non

amorti, ceci avait déjà été observé à l'échelle de la mésostructure avec les armures hybrides en section 5.1.1. Ainsi, le comportement de l'amortissement modal de l'aube hybride suit la même tendance que l'armure hybride.

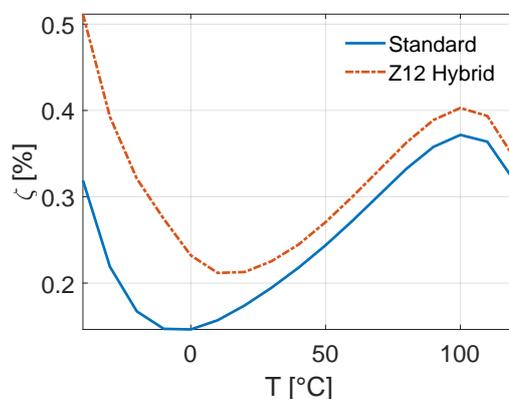


FIGURE 5.26 – Amortissement modal pour le mode 1 de l'aube standard et hybride.

La figure 5.27 représente le graphique de la répartition des énergies élastique et dissipée pour cette aube hybride afin de comparer avec l'aube standard et observer si de nouveaux mécanismes d'amortissement interviennent.

Au niveau de l'énergie élastique il y a peu de différence entre les deux aubes.  $Z_{12}$  participe moins à hauteur de 2% alors que  $Z_{11}$  augmente d'environ 1%. Ceci s'explique par le fait que l'armure amortie est légèrement plus souple que celle de référence.

En revanche les pourcentages au niveau de l'énergie dissipée sont bien différents.  $Z_{12}$  contribue à hauteur de 77% contre 70% pour la non amortie. Ceci à pour impact un contribution moins importante de  $Z_{11}$  avec 11% contre 16%.

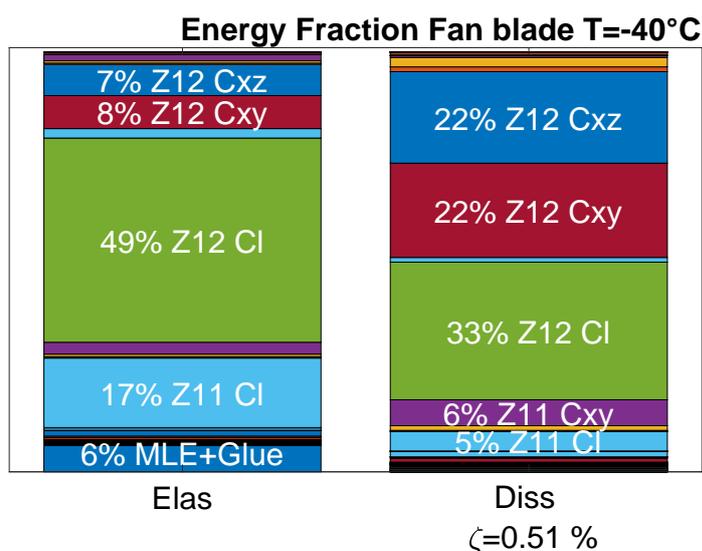


FIGURE 5.27 – Répartition énergétique de l'aube hybride à  $-40^{\circ}\text{C}$ .



# Conclusions et perspectives

La maîtrise de l'amortissement du premier mode de flexion pour la conception des aubes de soufflante en composites tissés 3D nécessite la mise en place d'une chaîne numérique permettant d'étudier le comportement amortissant du matériau en fonction de la fréquence et de la température.

Le premier apport de ces travaux est la prédiction de l'amortissement pour des matériaux composites tissés 3D. Cet objectif est atteint en modélisant les propriétés viscoélastiques des mésostuctures en utilisant une approche d'homogénéisation viscoélastique multi-échelle exploitant le module complexe de la résine et une paramétrisation des lois de comportement avec des matrices réelles. Cette méthodologie a fait l'objet d'une présentation au colloque Journée Scientifique et Technique de l'AMAC (JST-AMAC) consacrée à l'homogénéisation et au calcul multi-échelles de matériaux hétérogènes et structures composites [150].

Les formulations matricielles des techniques d'homogénéisation standard ont permis l'utilisation de méthodes de réduction de modèle menant à une procédure numériquement efficace pour des études en fréquence et en température. La méthode de réduction proposée est composée de deux phases :

1. La construction de la base de réduction qui s'effectue, pour une étude en température à fréquence fixée, par un apprentissage à partir des champs de déplacement pour les six cas de chargement de l'homogénéisation aux deux températures extrêmes.
2. La résolution dans l'espace réduit permet de réduire le nombre de DDL du problème et ainsi d'obtenir un gain de temps important. Pour l'homogénéisation d'une armure tissée 3D avec un maillage à haut DDL (>7.5 millions), le temps de calcul est divisé par 350.

Le second apport concerne la confrontation des résultats numériques avec une campagne expérimentale afin de se convaincre que les *prédictions sont correctes*. La caractérisation expérimentale de l'amortissement à basse fréquence en température de petites éprouvettes en composite tissé 3D, raides et peu dissipative, a été effectuée à l'aide d'un essai Oberst modifié réalisé par SDTools pour le compte de Safran Aircraft Engines et Safran Composites. Un travail important de conception et de caractérisation du banc d'essai a permis de définir un biais maximum d'amortissement lié au banc. À travers les deux premiers modes de flexion étudiés une dépendance importante des résultats à la liaison boulonnée servant d'encastrement est montrée. Pour

des éprouvettes plus souples et des masses ajoutées sur la partie libre plus légères, les efforts au niveau des mors sont plus faibles entraînant des résultats proches de la prédiction numérique.

Par ailleurs, les résultats ont permis d'associer le minimum d'amortissement vers l'ambiante (comportement en cloche inversée) aux propriétés de la résine et d'illustrer une bonne prédiction de la dépendance de l'amortissement à l'orientation. Après avoir caractérisé le biais d'amortissement provoqué par le banc, les calculs éléments finis ont montré un bon accord à la fois en valeur absolue et en tendance en fonction de la température.

Ces essais ont motivé le développement d'une stratégie de vérification de l'hypothèse de séparation d'échelle pour fournir une limite objective en longueur d'onde de la représentativité des modules de stockage et des facteurs de perte homogénéisés. En effet, des concentrations de contrainte, de l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques de l'armure tissée 3D, de certaines composantes de la loi de comportement jouant un rôle dans l'amortissement montrent des zones où la séparation des échelles n'est pas vérifiée. Cette méthode, utilisant les calculs périodiques et faisant appel à la transformée de Fourier spatiale, permet de construire une solution exacte pour une sollicitation dépendante de la longueur d'onde. Le critère proposé est défini par comparaison du travail des efforts élastiques et dissipés entre le milieu hétérogène et le milieu homogène équivalent donnant la possibilité d'identifier un pourcentage d'erreur lié à l'homogénéisation en fonction de la longueur d'onde de la sollicitation.

Ces résultats ont fait l'objet d'une soumission dans *Composites Structures* [151], ainsi qu'une présentation au *WCCM-ECCOMAS 2020* [152].

Enfin, le troisième apport, répondant plus aux problématiques industrielles, propose des stratégies pour :

- analyser les comportements de différentes armures tissées 3D, y compris *hybridées avec des joncs élastomères*;
- orienter la *conception* à l'échelle de l'armure et l'échelle de l'aube.

L'analyse des contributions principales de la loi de comportement en énergie élastique et dissipée permet d'appréhender les mécanismes d'amortissement à l'échelle du matériau et de la structure. En effet, en fonction de l'orientation matériau, des cas de chargement ou encore des modes vibratoires la source d'amortissement peut être différente. La décomposition de la loi de comportement en composantes principales est utilisée pour ce faire. Elle repose sur des principes d'algèbres linéaires, avec diagonalisation simultanée de la partie réelle et imaginaire de la loi de comportement orthotrope viscoélastique. Dans le cas de l'aube, l'amortissement du premier mode fait principalement intervenir une zone dont la composante longitudinale et celles de cisaillements longitudinaux sont dissipatifs.

La génération de cartographie à l'échelle du tissé 3D est intéressante pour maîtriser l'amortissement dans l'optique d'une optimisation des propriétés de la matrice ou encore d'hybridation du renfort. En effet, il a été montré que le pouvoir amortissement n'est pas le seul critère à

prendre en compte. Il faut, en effet, que ce dernier conserve une rigidité proche du GPa afin de continuer à travailler et rester efficace. Le compromis rigidité amortissement est la clé de cette solution technologique. L'analyse de différents matériaux constitutifs des joncs élastomères a permis de vérifier l'exactitude de ces cartographies.

La chaîne de calcul numérique et les méthodologies développées ont été implémentées au sein des logiciels SDTools sur des calculateurs Safran. Les calculs sur aube ont permis de montrer le gain en amortissement pouvant être généré par l'insertion d'une armure tissée 3D hybride dans une zone de dissipation importante pour le premier mode de flexion de l'aube. Ce gain a été caractérisé en température et est compris entre 8% et 60% montrant que cette solution est viable.

Ces travaux fournissent une stratégie claire pour l'augmentation de l'amortissement de l'aube de soufflante avec un matériau tissé 3D hybridé avec des joncs élastomères. Il reste néanmoins un certain nombre de points permettant d'aller plus loin dans la modélisation de l'amortissement du composite et de son application à la structure.

Numériquement, tout d'abord, la génération de maillage conforme d'armure tissée 3D permettra une meilleure représentation des volumes et ainsi des résultats plus précis. Les travaux initiés dans cette thèse par l'intermédiaire des fonctions de niveau avaient pour objectif d'obtenir des maillages conformes à faible nombre de DDL et surtout de mettre en place une stratégie d'optimisation des joncs élastomères au sein des mésostructures. En effet, en jouant sur la position en espace et sur la forme des joncs élastomères une augmentation encore plus importante de l'amortissement pourrait être observée.

Ensuite, vis-à-vis de la corrélation calcul/essai, la réalisation d'un zoom structural de l'éprouvette au niveau des mors inférieurs de l'éprouvette sur les modèles éléments finis permettrait une meilleure corrélation avec les essais. En effet, cette zone concentre les mécanismes de dissipation et l'utilisation d'un milieu homogène entraîne possiblement une erreur de prédiction. L'utilisation d'un maillage de mésostructure à ce niveau permettrait d'observer l'influence de la position des mors sur les composants du tissé 3D.

La campagne d'essai réalisée par SDTools étant très fournie de nouvelles corrélations pour d'autres armures tissées 3D est possible et permettrait de confirmer le domaine de validité des prédictions.

Par ailleurs, des essais pour des températures négatives sur les éprouvettes constituées d'une mésostructure hybride sont envisageables afin d'observer l'efficacité de la technologie lorsque l'élastomère est encore assez rigide. Une hybridation de la mésostructure avec un matériau comme le Vamac, qui est plus rigide mais moins amorti que le Smactane 50 ou 70, semble une alternative pour accroître l'amortissement sous réserve que le tissage soit réalisable.

Enfin, d'un point de vue expérimental des perspectives existent aussi. Il est envisageable d'utiliser des méthodes de résolution inverse afin de remonter aux propriétés du tissé 3D et plus particulièrement de la résine afin de posséder une caractérisation des données viscoélastiques différentes de celles obtenues sur un échantillon pur.

La corrélation calcul essai semble indiquer que la transition  $\omega$  de la résine n'est pas présente dans les composites. Ceci est cohérent avec les données de la littérature montrant cette transition exclusivement à l'état initial et dont l'origine fait toujours débat. Pour une meilleure prédiction, il est souhaitable de réaliser une nouvelle caractérisation des propriétés de la résine sur un échantillon ayant suivi le même processus thermique que le composite.

Par ailleurs, il est aussi possible de réaliser des essais sur des éprouvettes en quart de cercle en vue obtenir l'ensemble des directions permettant de caractériser la loi de comportement. L'utilisation de la technique des mesures de champ est une solution adaptée à cette application.

Si cette thèse a permis de modéliser l'amortissement du composite, et de proposer une stratégie pour son optimisation, il convient néanmoins de s'assurer que les propriétés mécaniques classiques des tissés 3D ne sont pas modifiées. Des travaux en ce sens sont en cours [153]. Ainsi, à plus long terme, il conviendrait d'avoir une approche complète de l'optimisation matériau avec pour objectif de maximiser l'amortissement tout en maintenant une tenue en fatigue acceptable. Des essais de traction couplés à de l'émission acoustique, de la corrélation d'images et des observations tomographiques pourront être utilisés pour étudier le premier endommagement et le comportement des tissés hybrides. Des essais d'impact pourront aussi être réalisés afin de vérifier l'effet de l'hybridation sur la tenue à l'impact de ce nouveau matériau en vue d'une utilisation au sein des aubes de soufflante.

# Bibliographie

- [1] W. Voigt, “Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper”, *Annalen der Physik*, vol. 274, pp. 573–587. John Wiley & Sons, Jan. 1889.
- [2] A. Reuss, “Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 9, pp. 49–58 John Wiley & Sons, Jan. 1929.
- [3] J. D. Eshelby and R. E. Peierls, “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, pp. 376–396. Royal Society, Aug. 1957.
- [4] R. Hill, “A self-consistent mechanics of composite materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, pp. 213–222, Aug. 1965.
- [5] T. Mori and K. Tanaka, “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions”, *Acta Metallurgica*, vol. 21, pp. 571–574, May 1973.
- [6] Z. Hashin, “The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, pp. 143–150, Mar. 1962.
- [7] Z. Hashin and S. Shtrikman, “A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 127–140, Mar. 1963.
- [8] R. M. Christensen, “Viscoelastic properties of heterogeneous media”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 17, no. 1, pp. 23 – 41, 1969.
- [9] Z. Hashin, “Complex Moduli of Viscoelastic Composites-I. General Theory and Application to particulate composites”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 6, pp. 539–552, 1970.
- [10] M. Hirsekorn, F. Petitjean, and A. Deramecourt, “A continuous threshold model for the visco-elasto-plastic behavior of PET based multi-layer polymeric films”, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 14, no. 1, pp. 25–45, 2010.
- [11] A. Courtois, L. Marcin, M. Benavente, E. Ruiz, and M. Lévesque, “Numerical multiscale homogenization approach for linearly viscoelastic 3D interlock woven composites”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 163, pp. 61–74, 2019.
- [12] R. Chandra, S. P. Singh, and K. Gupta, “Damping studies in fiber-reinforced composites – a review”, *Composite Structures*, vol. 46, no. 1, pp. 41 – 51, 1999.

- 
- [13] J. Kosmatka, G. Appuhn, and O. Mehmed, “Design and Testing of Integrally Damped First-Stage Composite Fan Blades”, 2002.
- [14] S. L. Hong and J.-P. F. Lombard, “Damping device for composite blade”, Nov. 2011. US Patent 8,061,997
- [15] R. F. D. Moura, P. B. Jean, S. L. Hong, and J.-P. F. Lombard, “Blade made of composite material comprising a damping device”, Aug. 2013. US Patent 8,500,410.
- [16] O. Thierry, *Réduction des vibrations de structures composites complexes par dispositifs piézoélectriques shuntés : application aux aubes de turbomachines*. PhD thesis, Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2016.
- [17] B. Dambrine, B. Tranquart, D. Coupe, and M.-A. Colot, “Piece en composite a renfort fibreux avec une resistance aux vibrations augmentee”, June 2020. WO Patent 2020128367.
- [18] B. Dambrine, D. Coupe, and B. Tranquart, “Texture fibreuse tissée”, June 2020. WO Patent 2020128191.
- [19] “Médiathèque Safran.” ”<https://www.safran-medialibrary.com/Photos/categories>”.
- [20] TextileMerchandise, “Textile Merchandise” ”<https://www.textilemerchandise.com/2017/12/06/what-do-mean-by-epi-ppi-on-the-fabric/>”, 2017.
- [21] J. Charmet, *Mécanique du solide et des matériaux : Élasticité-Plasticité-Rupture*.
- [22] J. Benezech and G. Couégnat, “Segmentation de préformes textiles à partir de microtomographies à rayons X par une approche variationnelle”, (École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers (ENSAM), Bordeaux, France), 2019.
- [23] R. Naylor, C. Fagiano, M. Hirsekorn, B. Tranquart, and Baranger, “Mesures de champs de déformations par corrélations d’images pour l’identification de modèles mécaniques microscopiques de composites à matrice polymère”, (École des Ponts ParisTech (ENPC), Champs-sur-Marne, France), 2017.
- [24] A. Treviso, B. V. Genechten, D. Mundo, and M. Tournour, “Damping in composite materials : Properties and models”, *Composites Part B : Engineering*, vol. 78, pp. 144 – 152, 2015.
- [25] M. Romano, I. Ehrlich, and N. Gebbeken, “Structural mechanic material damping in fabric reinforced composites : A review”, *Archives of Materials Science and Engineering*, vol. 88, no. 1, pp. 12–41, 2017.
- [26] N. Peyret, *Dissipation de l’énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. PhD thesis, Paris-Est, Paris, 2012.
- [27] R. Chandra, S. P. Singh, and K. Gupta, “A study of damping in fiber-reinforced composites”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 262, no. 3, pp. 475 – 496, 2003.
- [28] M. Pathan, V. Tagarielli, and S. Patsias, “Effect of fibre shape and interphase on the anisotropic viscoelastic response of fibre composites”, *Composite Structures*, vol. 162, pp. 156–163, 2017.

- [29] J.-L. Tsai and Y.-K. Chi, “Effect of fiber array on damping behaviors of fiber composites”, *Composites Part B : Engineering*, vol. 39, no. 7, pp. 1196 – 1204, 2008.
- [30] Y. Liu, Y. Yan, L. Yang, H. She, and M. He, “Prediction on macroscopic elastic properties of interphase-contained long-fiber-reinforced composites and multiple nonlinear regression analysis”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 31, no. 17, pp. 1143–1157, 2012.
- [31] R. Adams and D. Bacon, “Effect of Fibre Orientation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP”, *Journal of Composite Materials*, 1973.
- [32] R. Adams and R. Ni, “The Damping and Dynamic Moduli of Symmetric Laminated Composite Beams : Theoretical and Experimental Results”, *Journal of Composite Materials*, 1984.
- [33] H. Guan and R. Gibson, “Micromechanical Models for Damping in Woven Fabric-Reinforced Polymer Matrix Composites”, *Journal of Composite Materials*, vol. 35, pp. 1417–1434, 2001.
- [34] H. Yu and C. Zhou, “Complex stiffness method for damping properties of woven composites”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 36, pp. 1421–1430, 2017.
- [35] C. Johnson and D. A. Kienholz, “Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers”, *AIAA Journal*, vol. 20, pp. 1284–1290, 1982.
- [36] M. Romano, M. Micklitz, F. Olbrich, R. Bierl, I. Ehrlich, and N. Gebbeken, “Experimental investigation of damping properties of unidirectionally and fabric reinforced plastics by the free decay method”, *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, vol. 63, no. 2, pp. 65–80, 2014.
- [37] M. Romano, I. Ehrlich, and N. Gebbeken, “Parametric characterization of a mesomechanic kinematic caused by ondulation in fabric reinforced composites : Analytical and numerical investigations”, *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 11, pp. 226–247, 2017.
- [38] “Guide de sélection Composite - Samaro.” [”https://samaro.fr/fr/content/102-guide-de-selection-composite”](https://samaro.fr/fr/content/102-guide-de-selection-composite).
- [39] V. Thierry and D. Chronopoulos, “The impact of mesoscale textile architecture on the structural damping in composite structures”, *Composite Structures*, vol. 249, p. 112475, 2020.
- [40] W. Zhong and F. Williams, “On the direct solution of wave propagation for repetitive structures”, *Journal of Sound and Vibration*, pp. 485–501, 1995.
- [41] B. Mace, R. Duhamel, M. Brennan, and J. Hinke, “Finite element prediction of wave motion in structural waveguides”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, pp. 2835–2843, 2005.
- [42] G. Hilbert, D. Pearson, and E. Crawley, “Method and apparatus for damping vibration in turbomachine components”, 2001. US Patent 6,299,410.

- [43] J. Min, K. Duffy, B. Choi, A. Provenza, and N. Kray, *Piezoelectric Vibration Damping Study for Rotating Composite Fan Blades*. NASA technical memorandum, National Aeronautics and Space Administration, Glenn Research Center, 2012.
- [44] J. B. Kosmatka and O. Mehmed, “Vibrational reduction in integral-damped composite fan blades : experimental results”, in *Smart Structures and Materials 1998 : Passive Damping and Isolation*, vol. 3327 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pp. 115–127, 1998.
- [45] J. Kosmatka and O. Mehmed, “Passive vibration reduction of advanced composite pretwisted plates using integral damping materials”, *Proceedings of SPIE*, vol. 2445, pp. 72–83, May 1995.
- [46] J. Kosmatka, “Design and Spin Testing of Integrally Damped Hollow Core Composite Fan Blades”, in *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* 2005.
- [47] E. Balmes, M. Corus, S. Baumhauer, P. Jean, and J. Lombard, “Constrained viscoelastic damping, test/analysis correlation on an aircraft engine”, vol. 3, United States of America, p. 75, 2010.
- [48] S. J. J. Baumhauer, J. A. Dupeux, F. M. Garcin, J.-P. F. Lombard, E. Seinturier, and E. Balmes, “Movable impeller for a turbojet and turbojet comprising same”, July 2012. US Patent 8,226,367.
- [49] L. Rouleau, O. De Smet, and J.-F. Deü, “Viscoelastic vibration damping of rotating composite fan blades”, in *ISMA-USD 2020 - International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven, Belgium, 2020.
- [50] J. Salençon, *Viscoélasticité*. Presse des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [51] F. Tricomi, “Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss, et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique”, *Annales de l’institut Henri Poincaré*, vol. 8, no. 3, pp. 111–149, 1938.
- [52] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire, “A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized Maxwell model”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, pp. 991–1010, Apr. 2011.
- [53] W. Albouy, *De la contribution de la visco-élasto-plasticité au comportement en fatigue de composites à matrice thermoplastique et thermodurcissable*. PhD thesis, INSA de Rouen, Nov. 2013.
- [54] M. Baumgaertel and H. H. Winter, “Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data”, *Rheologica Acta*, vol. 28, pp. 511–519, Nov. 1989.
- [55] S. Bhattacharjee, A. K. Swamy, and J. S. Daniel, “Continuous relaxation and retardation spectrum method for viscoelastic characterization of asphalt concrete”, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 16, pp. 287–305, Aug. 2012.

- [56] H. Kausch, N. Heymans, C. Plummer, and P. Decroly, *Matériaux polymères : Propriétés mécaniques et physiques*. no. 14 in *Traité des matériaux*, Lausanne : Presse polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- [57] D. Jalocha, *Modélisation du comportement viscoélastique d'un élastomère fortement chargé sous sollicitations multiaxiales*. PhD thesis, Ecole Doctorale de l'Ecole Polytechnique, 2015.
- [58] C. Han and J. Kim, "On the use of time-temperature superposition in multicomponent/multiphase polymer systems", *POLYMER*, vol. 34, no. 12, pp. 2533–2539, 1993.
- [59] D. Price and J. Duncan, "Thermomechanical, Dynamic Mechanical and Dielectric Methods", in *Principles of Thermal Analysis and Calorimetry*, Royal Society of Chemistry, 2 ed., 2016.
- [60] E. Ernault, *Thermo-oxydation de réseaux époxy/amine*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech – Centre de Paris, Paris, 2016.
- [61] J. Delozanne, *Durabilité des époxy ; application au collage structural aéronautique*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech - Campus de Paris, Paris, 2018.
- [62] L. C. E. Struik, *Physical aging in amorphous polymers and other materials*. Amsterdam, New York : Elsevier Scientific, 1978.
- [63] E. Munch, *Impact de la déformation sur la mobilité moléculaire des polymères amorphes*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2006.
- [64] K. Gordnian, *Crystallization and thermo-viscoelastic modelling of polymer composites*. PhD thesis, University of British Columbia, 2017.
- [65] M. Peleg, "Temperature–viscosity models reassessed", *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, vol. 58, pp. 2663–2672. Taylor & Francis , Oct. 2018
- [66] A. Payne, "A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates", *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 3, no. 7, pp. 127–127, 1960.
- [67] L. Mullins, "Softening of Rubber by Deformation", *Rubber Chemistry and Technology*, vol. 42, no. 1, pp. 339–362, 1969.
- [68] A. Payne, "The Dynamic Properties of Carbon Black-Loaded Natural Rubber Vulcanizates. Part I", *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 6, no. 19, pp. 57–63, 1962.
- [69] N. W. Tschoegl, *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior : An Introduction*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1989.
- [70] T. Pritz, "Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials", *Applied Acoustics*, vol. 60, pp. 279–292, 2000.
- [71] D. J. O'Brien, N. R. Sottos, and S. R. White, "Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy", *Experimental Mechanics*, vol. 47, pp. 237–249, Apr. 2007.
- [72] A. Nashif, D. Jones, and J. Henderson, *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, 1985.
- [73] W. Thomson, "XXI. Elements of a mathematical theory of elasticity", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 146, pp. 481–498, Jan. 1856.

- [74] J. Rychlewski, “On Hooke’s law”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 48, no. 3, pp. 303 – 314, 1984.
- [75] M. Mehrabadi and S. Cowin, “Eigentensors of Linear Anisotropic Elastic Materials”, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 43, Feb. 1990.
- [76] N. Moës, *Mécanique des milieux continus. École d’ingénieur*. 2011.
- [77] T. Christman, A. Needleman, and S. Suresh, “An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites”, *Acta Metallurgica*, vol. 37, pp. 3029–3050, Nov. 1989.
- [78] V. Tvergaard, “Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite”, *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 38, pp. 185–194, Feb. 1990.
- [79] R. K. Patel, B. Bhattacharya, and S. Basu, “A finite element based investigation on obtaining high material damping over a large frequency range in viscoelastic composites”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 303, pp. 753–766, June 2007.
- [80] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes Science Publications, 2001.
- [81] S. Saeb, P. Steinmann, and A. Javili, “Aspects of computational homogenization at finite deformations : A unifying review from Reuss’ to Voigt’s Bound”, *Applied Mechanics Reviews*, vol. 68, no. 5, 2016.
- [82] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin, “Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 13, pp. 3647 – 3679, 2003.
- [83] E. Blond, *Mécanique des Milieux Continus -2017/18*. École d’ingénieur. Mécanique des milieux continus, 2018.
- [84] S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, S. Kruch, V. Maurel, and M. Mazière, *Mécanique des milieux continus*. 2009.
- [85] S. Hazanov and M. Amieur, “On overall properties of elastic heterogeneous bodies smaller than the representative volume”, *International Journal of Engineering Science*, vol. 33, no. 9, pp. 1289 – 1301, 1995.
- [86] C. Huet, “Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38, pp. 813–841, Jan. 1990.
- [87] S. J. Hollister and N. Kikuchi, “A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites”, *Computational Mechanics*, vol. 10, pp. 73–95, Mar. 1992.
- [88] S. Nemat-Nasser and M. Hori, “Universal Bounds for Overall Properties of Linear and Non-linear Heterogeneous Solids”, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 117, pp. 412–432, Oct. 1995.

- [89] R. Hassani, *Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis*. Université de Savoie SFA, sciences Fondamentales et Appliquées, 2004.
- [90] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Zhu, *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6th ed., 2005.
- [91] M. Géradin and D. Rixen, *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Wiley and Sons, 1994, also in French, Masson, Paris, 1993.
- [92] S. Hazanov, “Hill condition and overall properties of composites”, *Archive of Applied Mechanics*, vol. 68, pp. 385–394, July 1998.
- [93] D. H. Pahr and P. K. Zysset, “Influence of boundary conditions on computed apparent elastic properties of cancellous bone”, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 7, pp. 463–476, Dec. 2008.
- [94] G. Hello, J. Schneider, and Z. Aboura, “Numerical simulations of woven composite materials with voxel-FE models”, in *16th European Conference on Composite Materials (ECCM)*, Seville, Spain , June 2014.
- [95] E. Sanchez-Palencia, “Comportements local et macroscopique d’un type de milieux physiques heterogenes”, *International Journal of Engineering Science*, vol. 12, no. 4, pp. 331 – 351, 1974.
- [96] M. Maya, “Mécanique des milieux continus”, Sept. 2010.
- [97] *ABAQUS v. 6.14-2 : Theory manual*. United States of America : Dassault Systèmes Simulia Corporation, 2014. Commercial FE Software and Documentation Providence, RI,.
- [98] E. Balmes, “Structural Dynamics Toolbox & FEMLink”, 1995.
- [99] W. Yu and T. Tang, “Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials”, *International Journal of Solids and Structures*, pp. 3738–3755, 2007.
- [100] J. Nagtegaal, D. Parks, and J. Rice, “On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic Range”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 4, pp. 153–177, Oct. 1974.
- [101] R. Chandra, S. P. Singh, and K. Gupta, “Micromechanical damping models for fiber-reinforced composites : a comparative study”, *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 33, no. 6, pp. 787 – 796, 2002.
- [102] A. Rezaei, D. Goroz Gómez, F. Gilabert, W. Desmet, and W. Van Paepegem, “Micro-scale finite element simulation of the viscoelastic damping in unidirectional fiber reinforced composites”, in *ISMA 2016 - International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD2016 International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, Leuven, Belgium, pp. 1757–1766, 2016.
- [103] S. Lomov, G. Huysmans, Y. Luo, R. Parnas, A. Prodromou, I. Verpoest, and F. Phe-lan, “Textile composites : modelling strategies”, *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 32, no. 10, pp. 1379–1394, 2001.

- [104] A. Mendoza, J. Schneider, E. Parra, and S. Roux, “The correlation framework : Bridging the gap between modeling and analysis for 3D woven composites”, *Composite Structures*, vol. 229, p. 111468, Dec. 2019.
- [105] I. Verpoest and S. V. Lomov, “Virtual textile composites software WiseTex : Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis”, *Composites Science and Technology*, vol. 65, no. 15, pp. 2563 – 2574, 2005.
- [106] A. C. Long and L. P. Brown, “8 - Modelling the geometry of textile reinforcements for composites : TexGen”, in *Composite Reinforcements for Optimum Performance*, Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering, pp. 239 – 264, Woodhead Publishing, 2011.
- [107] G. Perie, S. Lomov, V. Ignaas, and D. Marsal, “Meso-scale modelling and homogenization of interlock reinforced composite”, in *ICCM-17, 17th International Conference on Composite Materials*, Edinburgh, United Kingdom, 2009.
- [108] N. Naouar, *Analyse mésoscopique par éléments finis de la déformation de renforts fibreux 2D et 3D à partir de microtomographies X*. PhD thesis, INSA de Lyon, Lyon, 2015.
- [109] A. Charmetant, E. Vidal-Sallé, and P. Boisse, “Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements”, *Composites Science and Technology*, vol. 71, no. 14, pp. 1623-1631, Sept 2011.
- [110] S. Lomov, A. Bogdanovich, D. Ivanov, K. Hamada, T. Kurashiki, M. Zako, M. Karahan, and I. Verpoest, “Finite element modelling of progressive damage in non-crimp 3D orthogonal weave and plain weave E-glass composites” in *2nd World Conference in 3D Fabrics and Their Applications*, Zhengzhou, China, 2009.
- [111] G. Huysmans, I. Verpoest, and P. Van Houtte, “Eshelby models applied to woven fabric composites : a benchmark study” in *ICCM-12, 12th International Conference on Composite Materials*, Paris, France, 1999.
- [112] A. Doitrand, C. Fagianò, F. X. Irisarri, and M. Hirsekorn, “Comparison between voxel and consistent meso-scale models of woven composites”, *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 73, pp. 143–154, June 2015.
- [113] M. Y. Matveev, L. P. Brown, and A. C. Long, “Efficient meshing technique for textile composites unit cells of arbitrary complexity”, *Composite Structures*, vol. 254, p. 112757, Dec. 2020.
- [114] G. Grail, M. Hirsekorn, A. Wendling, G. Hivet, and R. Hambli, “Consistent Finite Element mesh generation for meso-scale modeling of textile composites with preformed and compacted reinforcements”, *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 55, pp. 143–151, 2013.
- [115] M. H. Ha, L. Cauvin, and A. Rassineux, “A methodology to mesh mesoscopic representative volume element of 3D interlock woven composites impregnated with resin”, *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 344, pp. 267–283, Apr. 2016.

- [116] C. Dobrzynski, “Mmg3d : User Guide”, Rapport technique no. 422 , Univ.Bordeaux, IMB, UMR 5251, INRIA, Talence, Mar. 2012.
- [117] E. Burman, S. Claus, P. Hansbo, M. G. Larson, and A. Massing, “CutFEM : Discretizing geometry and partial differential equations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 104, no. 7, pp. 472–501, 2015.
- [118] E. Burman, P. Hansbo, M. Larson, and D. Samvin, “A cut finite element method for elliptic bulk problems with embedded surfaces”, *International Journal on Geomathematics*, vol. 10, no. 10, 2019.
- [119] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Jan. 1994.
- [120] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Other Titles in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Jan. 2003.
- [121] T. A. Manteuffel, “An Incomplete Factorization Technique for Positive Definite Linear Systems”, *Mathematics of Computation*, vol. 34, no. 150, pp. 473–497. American Mathematical Society, 1980.
- [122] E. Liberge, *Modèles réduits obtenus par la méthode de POD-Galerkin pour les problèmes d’interaction fluide structure*. PhD thesis, Université de La Rochelle, Feb. 2008.
- [123] R. Craig and M. Bampton, “Coupling of substructures for dynamic analyses”, *AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 1313–1319, 1968.
- [124] F. Chinesta and E. Cueto, *PGD-Based Modeling of Materials, Structures and Processes*. ESAFORM Bookseries on Material Forming, Springer International Publishing, 2014.
- [125] A. Plouin and E. Balmes, “A test validated model of plates with constrained viscoelastic materials”, *International Modal Analysis Conference*, pp. 194–200, 1999.
- [126] C. Hammami, E. Balmes, and M. Guskov, “Numerical design and test on an assembled structure of a bolted joint with viscoelastic damping”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 70–71, pp. 714–724, Sept. 2015.
- [127] E. Arlaud, *Modèles dynamiques réduits de milieux périodiques par morceaux : application aux voies ferroviaires*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers - ENSAM, Paris, Dec. 2016.
- [128] A. Sternchuss, *Multi-level parametric reduced models of rotating bladed disk assemblies*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2009.
- [129] H. Pinault, E. Arlaud, and E. Balmes, “A general superelement generation strategy for piecewise periodic media”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 469, pp. 115–133, 2020.
- [130] A. S. for Testing and Materials, “ASTM E756-98 : Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials”, in *Annual Book of Standards*, vol. 14.02, ASTM International, 1998.

- [131] E. Kerwin, “Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1959.
- [132] J. Dupuy, P. Ienny, S. Corn, and L. Daridon, “Comparaison de méthodes dynamiques d’analyse du comportement mécanique de matériaux”, in *18ème Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 2007.
- [133] K. Menard, *Dynamic Mechanical Analysis : A Practical Introduction, 2nd Edition*. CRC Press/Taylor & Francis Group, 2008.
- [134] D. Ewins, *Modal Testing : Theory and Practice*. Engineering dynamics series, Research Studies Press, 1984.
- [135] J.-M. Berthelot, M. Assarar, Y. Sefrani, and A. E. Mahi, “Damping analysis of composite materials and structures”, *Composite Structures*, vol. 85, pp. 189–204, Oct. 2008.
- [136] M. Assarar, A. El Mahi, and J. Berthelot, “Analyse de la réponse dynamique des structures en matériaux composites”, in *19ème Congrès Français de Mécanique*, Marseille, 2009.
- [137] P. Bottois, *Caractérisation de matériaux composites sur structures à géométries complexes par problème inverse vibratoire local*. PhD thesis, Le Mans, Nov. 2019.
- [138] P. Margerit, *Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes : application à la table d’harmonie du piano*. PhD thesis, Université Paris-Est, Dec. 2018.
- [139] M. Groper, “Microslip and macroslip in bolted joints”, *Experimental Mechanics*, vol. 25, pp. 171–174, June 1985.
- [140] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-l. Dion, “A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 75, pp. 170–177, Oct. 2013.
- [141] P. Butaud, G. Chevallier, and E. Sadoulet-Reboul, “Analyse multi-échelle expérimentale et numérique du comportement d’une liaison, in *23ème Congrès Français de Mécanique (CFM2017)*, Lille, 2017.
- [142] “CEVAA : centre d’essais et simulations pour l’Industrie | Acoustique NVH.” ”<https://cevaa.com/cevaa-centre-acoustique-nvh/>”.
- [143] E. Balmes, *Viscoelastic vibration toolbox, User Manual*. SDTools, 2004.
- [144] “Alloy 600 / Inconel 600 equivalent and supplier - AMS 5540 / UNS N06600.” ”<https://www.upmet.com/products/nickel-alloys/alloy-600>” .
- [145] R. Lakes, *Viscoelastic Materials*. cambridge university press ed., 2009.
- [146] “Keol Services : Expert sous-traitance collage industriel.” ”<http://www.keol-services.com/>” .
- [147] A. Capra and V. Davidovici, *Calcul dynamique des structures en zone sismique*. Paris, France : Eyrolles, 1982.

- [148] L. Hayden and al., *Power Piping*, vol. B31.1. United States of America : American National Standards Institute, the american society of mechanical engineers, 2001.
- [149] T. Demerville and M. Smith, “Les élastomères en environnement spatial”, in *Journée ELASTOMECA-Association Française des Ingénieurs et Cadres du Caoutchouc et des Polymères (AFICEP)*, Senlis, 2009.
- [150] F. Conejos, E. Balmes, E. Monteiro, and B. Tranquart, “Homogénéisation viscoélastique de matériaux composites tissés et validation de l’hypothèse de séparation des échelles”, in *Homogénéisation et calcul multi-échelle dans les matériaux hétérogènes et structures composites*, Marne-la-Vallée, pp. 1–4, 2019.
- [151] F. Conejos, E. Balmes, E. Monteiro, B. Tranquart, and G. Martin, “Viscoelastic homogenization of 3D woven composites with damping validation in temperature and verification of scale separation.”, *Composite Structures*, 2021.
- [152] F. Conejos, E. Balmes, E. Monteiro, and B. Tranquart, “Viscoelastic homogenization in woven composites and validation of the scale separation hypothesis”, in *14th World Congress in Computational Mechanics-ECCOMAS Congress 2020*, Virtual Congress, Paris, 2021.
- [153] B. Ade, *Caractérisation et modélisation de l’impact de l’hybridation sur le comportement endommageable des composites tissés 3D*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne - Laboratoire Roberval, Compiègne, 2022.



## Annexe A

# Développement du travail dissipé

Du point matériel, sur un cycle de période  $T$ , le travail dissipé  $W_{diss}$  est égal à

$$W_{diss} = \int_0^T \{\sigma_k(t)\}^T \{\dot{\varepsilon}_l(t)\} dt \quad (\text{A.1})$$

Pour une sollicitation harmonique définie par

$$\{\varepsilon(t)\} = \Re(\{\varepsilon(\omega)\} e^{i\omega t}) \quad (\text{A.2})$$

avec  $\{\varepsilon(\omega)\}$  un vecteur de déformation complexe dépendant de la fréquence. Ainsi,  $\{\dot{\varepsilon}(t)\}$  s'écrit comme

$$\{\dot{\varepsilon}(t)\} = \Re(i\omega \{\varepsilon(\omega)\} e^{i\omega t}) \quad (\text{A.3})$$

A l'aide de la matrice des rigidités complexes  $[C(\omega)]$ , le terme  $\{\sigma(t)\}$  peut être écrit comme

$$\{\sigma(t)\} = \Re([C(\omega)] \{\varepsilon(\omega)\} e^{i\omega t}) \quad (\text{A.4})$$

En décomposant  $[C(\omega)]$  par  $[C'(\omega)] + i[C''(\omega)]$ ,  $\{\varepsilon(\omega)\}$  par  $\{\varepsilon_r\} + i\{\varepsilon_i\}$  et  $e^{i\omega t}$ , avec la formule d'Euler, comme  $\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ .

Toute simplification réalisée, en conservant les parties réelles des développements pour respectivement  $\{\sigma(t)\}$  et  $\{\dot{\varepsilon}(t)\}$ , il reste

$$\begin{aligned} \{\sigma(t)\} &= [C'] \{\varepsilon_r\} \cos(\omega t) - [C''] \{\varepsilon_i\} \cos(\omega t) - [C'] \{\varepsilon_i\} \sin(\omega t) - [C''] \{\varepsilon_r\} \sin(\omega t) \\ \{\dot{\varepsilon}(t)\} &= -\omega \{\varepsilon_r\} \sin(\omega t) + \{\varepsilon_i\} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Par conséquent, le travail dissipé peut s'écrire après avoir réalisé le produit de  $\{\sigma(t)\}^T$  par  $\{\dot{\varepsilon}(t)\}$  comme

$$\begin{aligned} W_{diss} = \int_0^T & -\omega \{\varepsilon_r\}^T [C'] \{\varepsilon_r\} \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \omega \{\varepsilon_r\}^T [C''] \{\varepsilon_i\} \cos^2(\omega t) \\ & + \omega \{\varepsilon_i\}^T [C''] \{\varepsilon_r\} \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \omega \{\varepsilon_i\}^T [C'] \{\varepsilon_i\} \cos^2(\omega t) \\ & + \omega \{\varepsilon_i\}^T [C'] \{\varepsilon_r\} \sin^2(\omega t) + \omega \{\varepsilon_i\}^T [C''] \{\varepsilon_i\} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ & + \omega \{\varepsilon_r\}^T [C''] \{\varepsilon_r\} \sin^2(\omega t) + \omega \{\varepsilon_r\}^T [C'] \{\varepsilon_i\} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

En utilisant les formules de trigonométrie,

1.  $\cos^2(\omega t)$  est remplacé par  $\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2}$  qui par intégration en fonction du temps  $t$  devient  $\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$  ;
2.  $\sin^2(\omega t)$  est remplacé par  $\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{2}$  qui par intégration en fonction du temps  $t$  devient  $\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$  ;
3.  $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$  est remplacé par  $\frac{\sin(2\omega t)}{2}$  qui par intégration en fonction du temps  $t$  devient  $-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega}$ .

Ainsi pour une intégrale sur la période  $[0, T]$  avec  $T = 2\pi/\omega$ , les parties de l'équation (A.6) en  $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$  sont nulles ; celles en  $\omega\cos^2(\omega t)$  et  $\omega\sin^2(\omega t)$  reviennent à réaliser une multiplication par  $\pi$

Par conséquent après intégration, il reste de l'équation (A.6),

$$\begin{aligned}
 W_{diss} = & -\pi\omega \{\varepsilon_r\}^T [C'] \{\varepsilon_i\} + \pi\omega \{\varepsilon_i\}^T [C'] \{\varepsilon_r\} \\
 & + \pi\omega \{\varepsilon_r\}^T [C''] \{\varepsilon_r\} + \pi\omega \{\varepsilon_i\}^T [C''] \{\varepsilon_i\}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Cette expression peut être réécrite comme

$$\begin{aligned}
 W_{diss} = & \pi\omega \{\varepsilon_r\}^T [C''] \{\varepsilon_r\} + \pi\omega \{\varepsilon_i\}^T [C''] \{\varepsilon_i\} \\
 W_{diss} = & \pi(\{\varepsilon\}^H E''(\omega) \{\varepsilon\})
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

## Annexe B

# Stratégie de découpe des éléments 2D et 3D

### Découpe des éléments 2D

Les éléments 2D se classent en deux catégories, les éléments triangles (3 nœuds) et les éléments quadrilatères (4 nœuds).

Pour les éléments triangles, les possibilités de découpe sont récapitulées dans la figure B.1, pour chaque cas des rotations sont nécessaires pour couvrir l'ensemble des cas. L'élément affiché en rouge est créé à partir de la découpe engendrée par la fonction de niveau. Si cette dernière passe par un sommet (figure B.1a) un nœud est créé sur l'arête opposée ; si elle coupe deux arêtes (figure B.1b) deux nœuds sont créés sur les arêtes coupées c'est-à-dire celles ayant pour extrémités un nœud + et un nœud -.

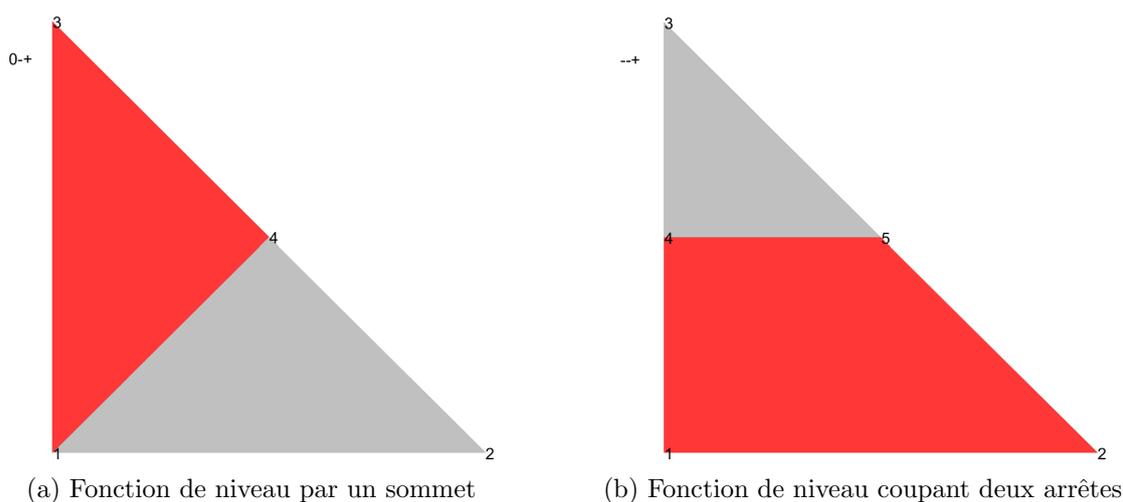
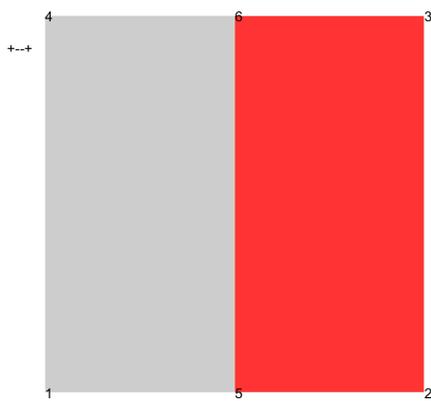
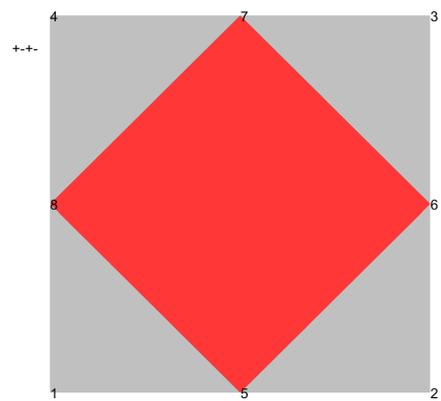


FIGURE B.1 – Visualisation des différentes découpes d'un élément triangulaire

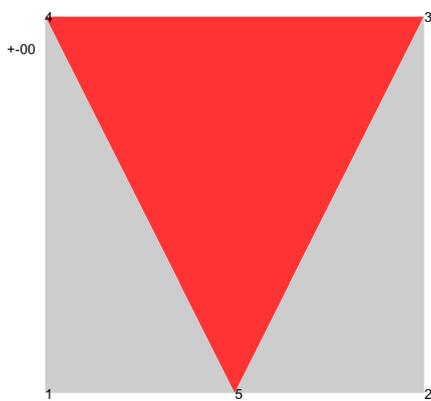
Pour les éléments quadrilatères, le nombre de cas est plus important. Les cas récapitulés figure B.2 permettent de couvrir l'ensemble des cas en réalisant les différentes rotations des plans de découpe.



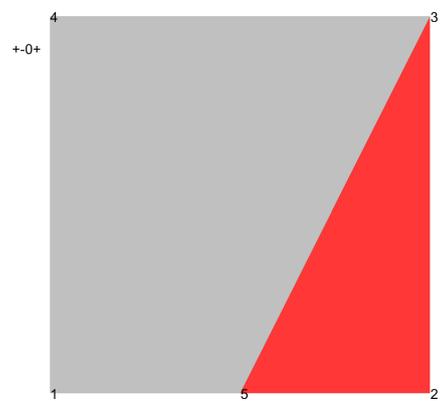
(a) Fonction de niveau coupant deux arrêtes



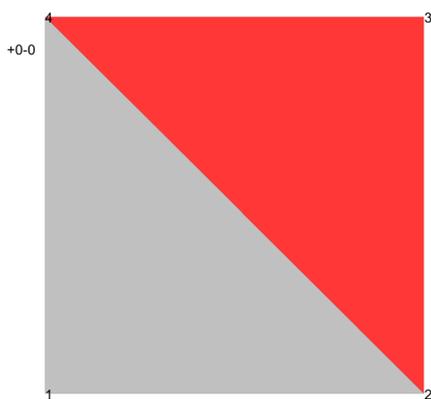
(b) Fonction de niveau coupant quatre arrêtes



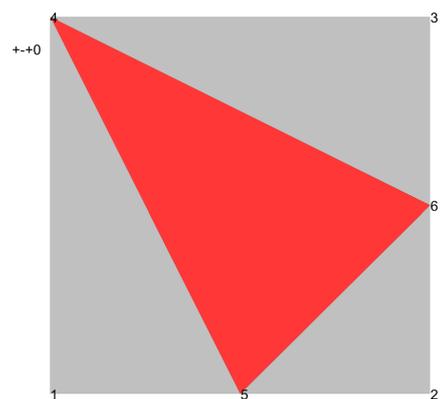
(c) Fonction de niveau coupant une arrête et passant par deux sommets



(d) Fonction de niveau coupant une arrête et passant par un sommet



(e) Fonction de niveau passant par deux sommets ou



(f) Fonction de niveau coupant deux arrêtes et passant par un sommet

FIGURE B.2 – Visualisation des différentes découpes d'un élément quadrilatère

Ainsi un élément quadrilatère peut être découpé en deux quadrilatères (figure B.2a) ou en un quadrilatère et quatre triangles (figure B.2b) ou trois triangles (figure B.2c) ou un quadrilatère et un triangle (figure B.2d) ou deux triangles (figure B.2e) ou enfin quatre triangles (figure B.2f).

### Découpe des éléments 3D

Pour des maillages volumiques, quatre types d'éléments sont considérés, il y a les tétraédriques, les pyramidaux (prismatique), les pentaédriques et les hexaédriques. Au sein des figures de cette section, les nouvelles faces des éléments créées par la découpe sont affichés en rouge.

Les éléments tétraédriques sont découpés soit en tétraèdres, soit en pyramides, soit en pentaèdres en fonction de l'endroit de passage de la fonction de niveau comme le montre la figure B.3.

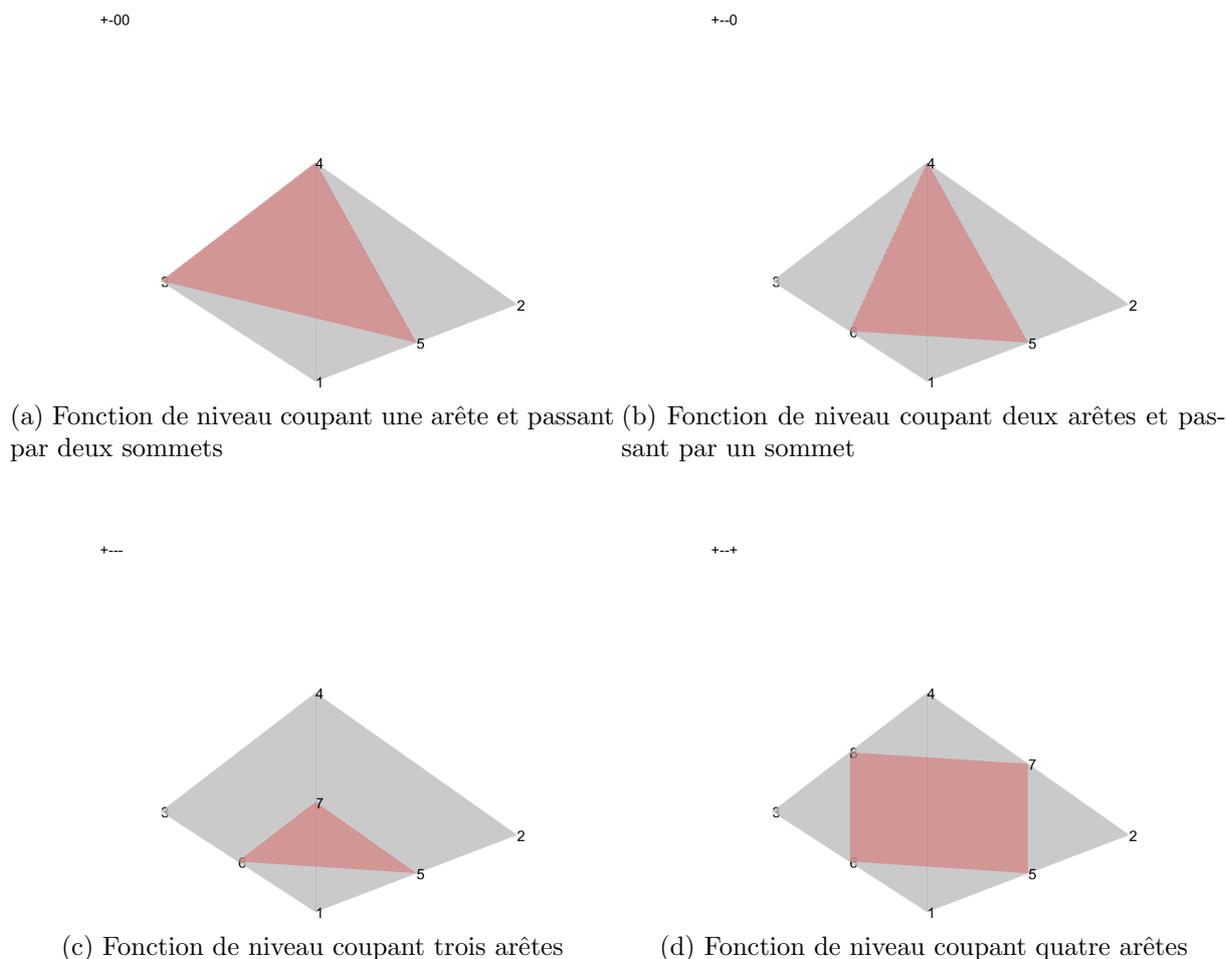


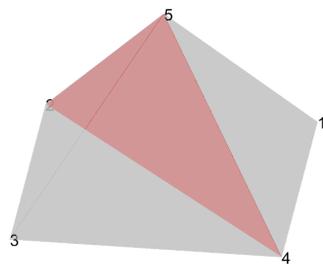
FIGURE B.3 – Visualisation des différentes coupes d'un élément tétraédrique

La figure B.3a revient à diviser le tétraèdre en deux tétraèdres. La figure B.3b consiste à découper l'élément en un tétraèdre et une pyramide. En figure B.3c trois arêtes sont découpées générant un tétraèdre et un pentaèdre. Enfin, la figure B.3d décompose l'élément en deux pentaèdres car 4 arêtes sont découpées.

Pour éléments pyramidaux, où le nombre de cas est raisonnable, les éléments sont découpés en éléments hexaédriques, tétraédriques, pyramidaux et pentaédriques. Les possibilités sont récapitulées dans la figure B.4.

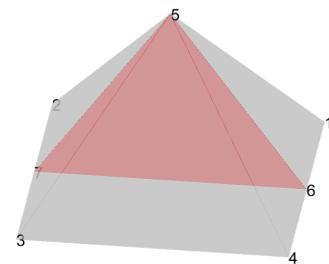
La figure B.4a montre une découpe en deux éléments tétraédriques ; la B.4b en deux éléments pyramidaux ; la B.4c en un pyramidal et un hexaédrique ; la B.4d en un pyramidal et un pentaédrique ; la B.4e en cinq tétraèdres ; la B.4f en un tétraèdre et un pyramidal ; la B.4g en 3 tétraèdres et la B.4h en un pyramidal et deux tétraèdres.

-0+00



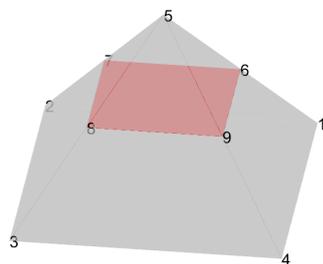
(a) Fonction de niveau passant par trois ou quatre sommets

--++0



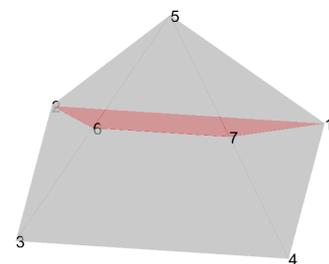
(b) Fonction de niveau coupant deux arêtes et passant par un sommet

++++-



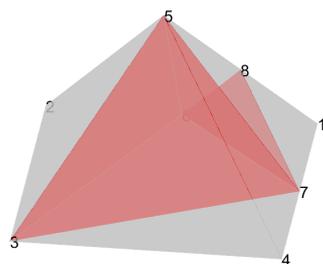
(c) Fonction de niveau coupant quatre arêtes

00--+



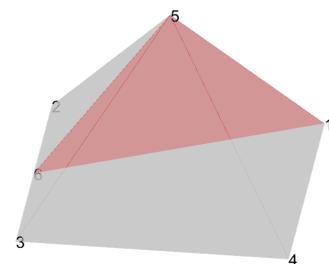
(d) Fonction de niveau coupant une arête et passant par deux sommets

-++++



(e) Fonction de niveau coupant deux arêtes

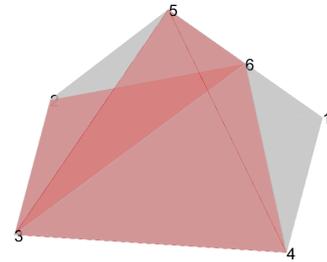
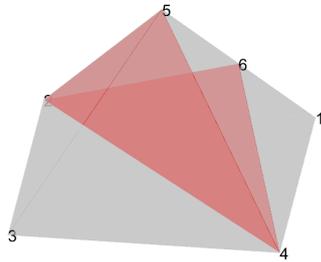
0-++0



(f) Fonction de niveau coupant deux arêtes et passant par deux sommets

-0+0+

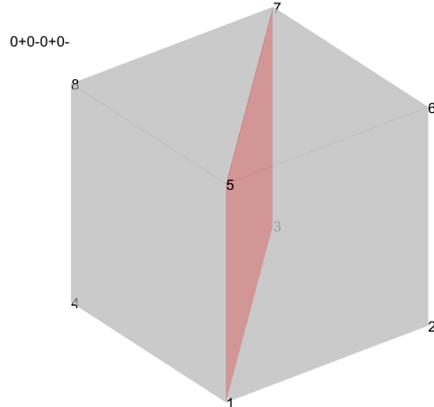
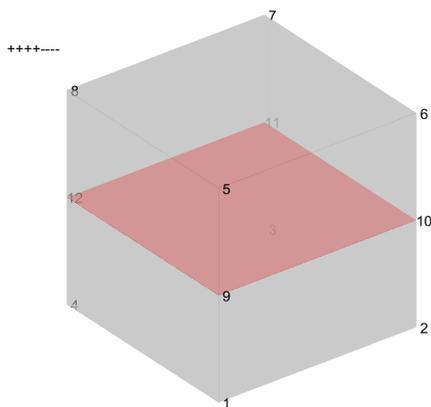
-000+



(g) Fonction de niveau passant par deux sommets et coupant une arête (h) Fonction de niveau passant par trois sommets et coupant une arête

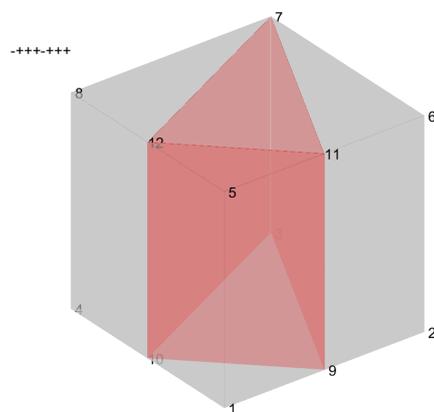
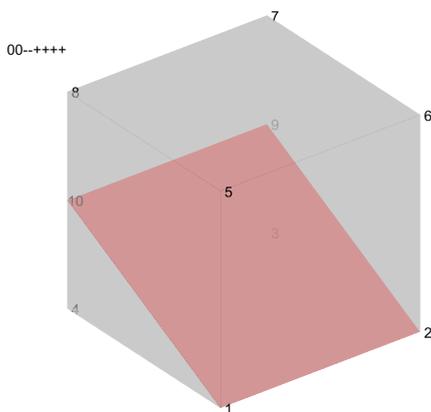
FIGURE B.4 – Visualisation des différentes découpes d'un élément pyramidal

Pour les éléments hexaédriques, des découpes simples sont représentées en figure B.5. En figure B.5a, l'élément est divisé en deux éléments hexaédriques ; en B.5b en deux pentaèdres ; en B.5c en un hexaèdre et un pentaèdre et en B.5d en quatre pentaèdres.



(a) Fonction de niveau coupant quatre arêtes

(b) Fonction de niveau passant par quatre sommets



(c) Fonction de niveau coupant deux arêtes et passant par deux sommets (d) Fonction de niveau coupant quatre arêtes (coin)

FIGURE B.5 – Visualisation des différentes découpes d'un élément hexaédrique

---

Pour les autres cas, la stratégie envisagée est de diviser l'élément hexaédrique en 6 pyramides en ajoutant un point central et ensuite de découper ces éléments pyramides comme précédemment. Ceci avait l'avantage de conserver les faces intactes grâce à la base carrée des éléments pyramide. La difficulté est de trouver des découpes de face unique et d'éviter altérer les faces par lesquelles la fonction de niveau ne passe pas.

Pour les découpes complexes des hexaèdres, une triangulation de Delaunay peut être effectuée afin de découper l'élément l'hexaédrique en plusieurs éléments tétraédriques. Les logiciels de découpe comme MMG3D [116] ou CutFEM [117, 118], utilisent ce type de stratégie et s'appuie ensuite sur le faible nombre de cas de découpe des éléments tétraédriques pour être efficace.



**Résumé :** L'objectif de cette thèse est la maîtrise de l'amortissement des premiers modes d'aube de soufflante dès la phase de conception. Une chaîne numérique pour l'homogénéisation viscoélastique des matériaux composites tissés 3D est mise en place. Deux homogénéisations sont réalisées à l'échelle du toron et de l'armure tissée 3D. Le module complexe de la résine, les propriétés élastiques des fibres et la géométrie de la microstructure, permettent une prédiction de l'amortissement en fréquence et en température. La formulation matricielle de l'homogénéisation, adaptée à l'implémentation éléments finis, permet le recours à des techniques de réduction de modèle lors d'études paramétriques sur les propriétés viscoélastiques des constituants.

Une confrontation des prédictions numériques avec l'amortissement modal obtenu par essai Oberst modifié, pour de basses fréquences et des températures comprises entre  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $120^{\circ}\text{C}$ , fournit des résultats cohérents en valeurs et en tendance. Ces essais montrent des zones de gradient en contrainte qui sont petites par rapport à la taille de la mésostructure, motivant l'introduction d'une méthodologie de vérification de l'hypothèse de séparation des échelles à différentes longueurs d'onde. La définition de fractions d'énergie élastique et dissipée par décomposition de la loi de comportement en valeurs singulières permet une analyse des contributions importantes à l'amortissement à l'échelle du tissé 3D et à celle de l'aube. L'insertion d'une mésostructure hybridée avec des joncs élastomères au sein de l'aube de soufflante est proposée afin d'augmenter l'amortissement modal de la première flexion. Une étude spatiale des zones dissipant le plus d'énergie est effectuée pour optimiser le placement de l'armure hybride.

**Mots clés :** amortissement, homogénéisation, viscoélasticité, multi-échelle, composite tissé 3D

**Abstract :** The goal of this work is to control the damping of the first modes of the fan blade during the design phase. A numerical method for the viscoelastic homogenization of 3D woven composite materials is developed. Two homogenizations are made, at the yarn's scale and at the woven one. The complex modulus of the resin, the elastic properties of the yarns and the geometry of the microstructure allow a characterization of the damping in frequency and temperature. The matrix formulation of the homogenization, for a finite element implementation, allowed the use of model reduction techniques in parametric studies on the viscoelastic properties of the composite's constituents.

A comparison of the numerical predictions with the modal damping obtained by modified Oberst test, for low frequencies and a range of temperature between  $-40^{\circ}\text{C}$  and  $120^{\circ}\text{C}$ , provided coherent results in terms of absolute values and trends. These tests also show areas of stress gradient which are small compared to the weaving pattern size motivating the introduction of a verification methodology of the scale separation hypothesis at different wavelengths. The definition of the elastic and dissipated energy fractions by decomposition of the constitutive law into singular values allows an analysis of the main contributions to the damping at both 3D woven and fan blade scale.

The insertion of a hybridized 3D woven composite with elastomer tows within the fan blade is proposed in order to increase the modal damping of the first flexion. A spatial study of the areas dissipating the most energy is performed to optimize the placement of the hybrid weaving pattern.

**Keywords :** damping, homogenization, viscoelasticity, multiscale, 3D woven composite