



**HAL**  
open science

# Estimation du comportement élastique transverse de composites unidirectionnels, application à l'étude du rôle des fluctuations morphologiques locales

Jennifer Blondel

► **To cite this version:**

Jennifer Blondel. Estimation du comportement élastique transverse de composites unidirectionnels, application à l'étude du rôle des fluctuations morphologiques locales. Matériaux. Université Paris sciences et lettres, 2021. Français. NNT : 2021UPSLM059 . tel-03690439

**HAL Id: tel-03690439**

**<https://pastel.hal.science/tel-03690439>**

Submitted on 8 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée à MINES ParisTech

**Estimation du comportement élastique transverse de  
composites unidirectionnels, application à l'étude du rôle  
des fluctuations morphologiques locales**

Soutenue par

**Jennifer BLONDEL**

Le 19 novembre 2021

École doctorale n°621

**Ingénierie des Systèmes,  
Matériaux, Mécanique,  
Energétique**

Spécialité

**Mécanique**

Composition du jury :

Stéphane BERBENNI  
Professeur des Universités,  
Université de Lorraine

*Président  
Rapporteur*

Jean-Claude MICHEL  
Directeur de Recherche,  
Aix-Marseille Université

*Rapporteur*

Michel BORNERT  
Ingénieur en chef des Ponts,  
des Eaux et des Forêts,  
École des Ponts ParisTech

*Examineur*

Sébastien JOANNÈS  
Chargé de Recherche,  
Mines ParisTech

*Examineur*

Eveline HERVÉ-LUANCO  
Professeur des Universités,  
Mines ParisTech

*Directrice de thèse*



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 État de l’art</b>	<b>13</b>
1.1 Intérêt de la modélisation micromécanique . . . . .	13
1.2 Modèles d’homogénéisation à champs moyens . . . . .	14
1.2.1 Assemblage de Hashin . . . . .	14
1.2.2 Modèle différentiel . . . . .	15
1.2.3 Modèle de Mori Tanaka . . . . .	16
1.2.4 Modèle Auto-Cohérent Classique . . . . .	17
1.2.5 Modèle Auto-Cohérent Généralisé (ACG) . . . . .	17
1.2.6 Modèle Auto-Cohérent Généralisé $(n + 1)$ -phase . . . . .	18
1.2.7 Utilisation des modèles $(n + 1)$ -phase comme cas test . . . . .	19
1.2.8 Autres utilisations . . . . .	20
1.3 Modèles d’homogénéisation à champs complets . . . . .	20
1.3.1 Méthode des Éléments Finis . . . . .	20
1.3.2 Méthode FFT . . . . .	22
1.3.3 Approches multi-échelle . . . . .	22
1.4 Intérêt d’un nouveau modèle . . . . .	23
1.4.1 Exemple de résultats expérimentaux . . . . .	23
1.4.2 Comparaison avec les résultats du modèle ACG . . . . .	27
1.4.3 Utilité des expériences numériques . . . . .	27
1.5 Approche par Motifs Morphologiques Représentatifs . . . . .	28
1.5.1 Approche MMR associée au modèle $(n + 1)$ -phase . . . . .	28
1.5.2 Notre approche : extension de l’approche MMR à des composites à fibres en élasticité . . . . .	29
<b>2 Développement d’un modèle analytique ACG/MRP</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.1.1 À la recherche des propriétés transverses élastiques des composites unidirectionnels . . . . .	31
2.1.2 Un modèle micromécanique rationnel . . . . .	32
2.2 Extension du modèle $(n + 1)$ -phase . . . . .	33
2.2.1 Méthodologie . . . . .	35
2.2.2 Mode hydrostatique plan . . . . .	37
2.2.3 Mode en cisaillement plan . . . . .	40
2.3 Cas particulier de deux motifs avec deux phases dans chaque motif . . . . .	47
2.3.1 Définition des paramètres utiles . . . . .	49
2.3.2 Développement de $k_{23}^{\text{eff}}$ . . . . .	50
2.3.3 Développement de $\mu_{23}^{\text{eff}}$ . . . . .	52

2.4	Synthèse des résultats obtenus . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Étude de sensibilité des paramètres du modèle</b>	<b>65</b>
3.1	Variation de $m$ et de $c$ . . . . .	65
3.2	Confrontation du modèle à des cas expérimentaux . . . . .	66
3.2.1	limiter les incertitudes . . . . .	66
3.2.2	Méthodologie . . . . .	68
3.2.3	Réponse du modèle dans les conditions expérimentales retenues, courbes “enveloppe” . . . . .	72
3.2.4	Résultats expérimentaux de Zimmer et Cost (1970) . . . . .	74
3.3	Réduire les incertitudes, apport du numérique . . . . .	76
3.4	Recherche de couples solution $(m, c)$ communs . . . . .	77
3.4.1	Méthode inverse . . . . .	78
3.4.2	Superposition des couples solution pour les deux modules transverses	79
3.5	Conclusion . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Développements numériques : nourrir le modèle</b>	<b>81</b>
4.1	Amélioration de la recherche des couples solutions . . . . .	82
4.1.1	Application à un matériau composite réel verre-polyamide . . . . .	82
4.1.2	Une microstructure maîtrisée . . . . .	82
4.1.3	Choix du VER - Maîtrise de l’incertitude . . . . .	84
4.1.4	Difficultés liées au maillage . . . . .	90
4.1.5	Résultats . . . . .	92
4.2	Robustesse des couples solutions . . . . .	94
4.2.1	Variation des paramètres matériaux . . . . .	94
4.2.2	Deux zones de performance . . . . .	96
4.2.3	Recherche d’une valeur de $m$ optimisée . . . . .	97
4.2.4	Procédure de minimisation de l’erreur . . . . .	98
4.2.5	Généralisation à d’autres concentrations en fibres . . . . .	99
4.2.6	Résultats . . . . .	101
4.3	Étude du cas d’une matrice incompressible . . . . .	102
4.4	Indépendance de la physique considérée . . . . .	107
4.5	Conclusion . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>111</b>
5.1	Retour sur les enjeux de la thèse . . . . .	111
5.2	Évolutions du modèle analytique . . . . .	112
5.3	Amélioration du modèle numérique . . . . .	114
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>117</b>
A.1	Résultats du modèle avec les valeurs de $m$ optimisé dans d’autres cas . . . . .	117
A.1.1	Premier cas : $\nu_f = 0.2$ et $\nu_m = 0.2$ . . . . .	117
A.1.2	Second cas : $\nu_f = 0.2$ et $\nu_m = 0.3$ . . . . .	118
A.2	Résultats WWFE . . . . .	119
A.3	Cas d’une matrice incompressible : autres valeurs de $m$ . . . . .	120
A.3.1	2 <sup>ème</sup> valeur de $m$ . . . . .	121
A.3.2	3 <sup>ème</sup> valeur de $m$ . . . . .	122

# Nomenclature

## Acronymes

ACG	Modèle Auto-Cohérent Généralisé / Generalized Self-Consistent Scheme en anglais (GSCS)
EF	Éléments Finis / Finite Element Method en anglais (FEM)
GHW	Fait référence aux résultats publiés par Gusev <i>et al.</i> (2000)
MHE	Milieu Homogène Equivalent / Equivalent Homogeneous Medium en anglais (EHM)
MMR	Motif Morphologique Représentatif / Morphologically Representative Pattern en anglais (MRP)
UD	Unidirectionnel, i.e. matériaux composites à renforts fibreux unidirectionnels
VER	Volume Élémentaire Représentatif / Representative Volume Element en anglais (RVE)
ZC	Fait référence aux résultats publiés par Zimmer et Cost (1970)

## Indices, exposants et crochets

- Représente un champ de tenseur arbitraire (0, 1, 2) ou une variable de matrice
- Définit un tenseur du premier ordre (vecteur)
- ̄ Définit un tenseur du second ordre
- ̄̄ Définit un tenseur du quatrième ordre
- <sup>(i)</sup> ou •<sub>i</sub> Indice de phase,  $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$
- <sup>(i<sub>λ</sub>)</sup> ou •<sub>i<sub>λ</sub></sub> Indice de phase dans le motif  $\lambda$ ,  $i_\lambda \in \{1, \dots, n_\lambda\}$
- <sup>(k)</sup> ou •<sub>k</sub> La lettre  $k$  est généralement utilisée pour désigner une phase ( $k$ )
- <sup>[j]</sup> Une estimation de • lors du processus itératif
- <sup>f</sup>, •<sup>m</sup> ou •<sup>eff</sup> Relatif aux propriétés de la “fibre”, de la “matrice” ou aux propriétés “effectives”
- <sup>⊗</sup> ou •<sub>⊗</sub> Indique la dépendance au motif
- <sup>⊠</sup> ou •<sub>⊠</sub> Transformation identité définie pour deux motifs et deux phases,  $\boxplus \equiv \text{Id}(\lambda)$  avec  $\boxplus = 1$  et  $\boxminus = 2$
- <sup>⊡</sup> ou •<sub>⊡</sub> Transformation complémentaire définie pour deux motifs et deux phases,  $\boxtimes \equiv \text{Cp}(\lambda)$  avec  $\boxplus = 2$  et  $\boxminus = 1$

$\langle \bullet \rangle_{\Omega_{\square}}$	Fraction volumique moyenne d'une expression $\bullet$ dans le volume $\Omega_{\square}$
$\{\mathbf{A}_p\}_{\subseteq \bullet}$	Quand $\bullet$ doit être détaillé, $\bullet$ peut être, partiellement ou complètement, divisé en plusieurs parties : $\{\mathbf{A}_1\}_{\subseteq \bullet}, \{\mathbf{A}_2\}_{\subseteq \bullet}, \dots; \{\mathbf{A}_p\}_{\subseteq \bullet}, p \in \mathbb{N}$ , représente toutes ces parties. Quand $\bullet$ peut être écrit sous différentes formes, $\{\mathbf{B}_p\}_{\subseteq \bullet}, \{\mathbf{C}_p\}_{\subseteq \bullet}, \dots$ sont utilisés. Quand une seule partie est requise, l'indice est omis

### Constantes matériaux et paramètres

$\mu_{23}$	Module de cisaillement transverse
$\nu$	Coefficient de Poisson
$E$	Module d'Young
$k_{23}$	Module de compressibilité transverse
$\underset{\sim}{\mathcal{C}}$	Tenseur de rigidité élastique

### Autres symboles

$\underline{x}$	Vecteur position, i.e. $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ ou $\underline{x} = r\underline{e}_r + x_1\underline{e}_1$
$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$	Base orthonormale cartésienne
$(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_1)$	Base orthonormale cylindrique
$(x_1, x_2, x_3)$	Coordonnées cartésiennes de $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$
$(r, \theta, x_1)$	Coordonnées cylindriques de $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_1)$
$\Omega$	Volume du matériau dont les propriétés effectives sont recherchées
$\overline{\Omega}$	Environnement complémentaire de $\Omega$ , $\overline{\Omega}$ et $\Omega$ forment une partition de l'univers
$\Omega_\lambda$	Volume du motif $\lambda$ , partition de $\Omega$
$\Omega_i$	Volume de la phase $(i)$ , partition de $\Omega$
$\Omega_{i\lambda}$	Volume de la phase $(i)$ à l'intérieur du motif $\lambda$ , partition de $\Omega_i$
$n$	Nombre de phases
$N_\lambda$	Nombre de familles de "Motifs Morphologiques Représentatifs"
$n_\lambda$	Nombre de phases à l'intérieur du motif $\lambda$
$f$	Fraction volumique de la phase (1), dans le cas où $N_\lambda = 2$ et $n_\lambda = 2$ pour chaque motif; i.e. $f = f_1$
$f_i$	Fraction volumique de la phase $(i)$
$m_\lambda$	Fraction volumique du motif $\lambda$
$m$	Fraction volumique du motif "direct", dans le cas où $N_\lambda = 2$ et $n_\lambda = 2$ pour chaque motif; i.e. $m = m_1$
$c_{i\lambda}$	Fraction volumique de la phase $(i)$ à l'intérieur du motif $\lambda$
$c_{i(\lambda)}$	Fraction volumique de la "ième" phase à l'intérieur du motif $\lambda$

$c$	Fraction volumique de la phase (1) à l'intérieur du motif "direct", dans le cas où $N_\lambda = 2$ et $n_\lambda = 2$ pour chaque motif; i.e. $c = c_{1_1} = c_{1_2}$
$R_i$	Rayon extérieur de la phase ( $i$ ) se trouvant entre les rayons $R_{i-1}$ et $R_i$
$\underline{T}$	Vecteur contrainte
$\underline{T}^0$	Vecteur contrainte appliqué
$T_i$	Composantes du vecteur contrainte selon $\underline{e}_i$
$\underline{u}$	Vecteur déplacement
$\underline{u}^0$	Vecteur déplacement appliqué à chaque motif sous conditions limites homogènes
$\underline{u}^g$	Vecteur déplacement "donné (given en anglais)" appliqué à une configuration homogène équivalente sous conditions limites homogènes
$u_i$	Composantes du vecteur déplacement selon $\underline{e}_i$
$\underline{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\underline{\varepsilon}$	Tenseur des déformations
$\underline{\varepsilon}^0$	Le vecteur déplacement $\underline{u}^0 = \underline{\varepsilon}^0 \cdot \underline{x}$ est appliqué à chaque motif
$\underline{E}$	Le vecteur déplacement $\underline{u}^g = \underline{E} \cdot \underline{x}$ est appliqué à la configuration homogène équivalente
$\mathcal{A}_{i_\lambda}$	Coefficient relatif au tenseur de localisation dans la phase ( $i_\lambda$ )
$\underline{\mathcal{A}}_i$	Tenseur de localisation pour la phase ( $i$ )
<b>Bold</b>	Notation en gras pour les tableaux rectangulaires i.e. tableaux rectangulaires tels que $\mathbf{V}$ , $\mathbf{J}$ , $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Q}$ avec les composantes dénotées $Q_{kl}$ par exemple
$\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Q}^*$	Matrices de transfert
$A_k, B_k, C_k$ et $D_k$	Constantes pour chaque phase ( $k$ ) dans le cas d'un mode de cisaillement transverse dans le plan
$A_{i_\lambda}$ et $D_{i_\lambda}$	Constantes pour la phase ( $i_\lambda$ )





# Introduction générale

Les matériaux composites dits avancés présentent des microstructures complexes. La variabilité qui existe dans ces microstructures rend compte de leur complexité.

Cette variabilité concerne tout d'abord les matériaux utilisés. Les propriétés des constituants varient fortement selon le matériau choisi. Les matériaux composites unidirectionnels à renforts fibreux (UD) sont constitués de fibres microscopiques plongées dans une matrice qui joue un rôle de liant pour les fibres. Ces fibres peuvent être en verre ou en carbone pour les plus communes, mais également en polymère ou encore en métal. La matrice peut être un polymère, une céramique ou encore un matériau métallique. L'ensemble des couples (fibre, matrice) possibles est très large. Un autre exemple de variabilité concerne une hybridation des constituants. Cette hybridation se fait à une échelle de plus en plus fine, jusqu'à l'échelle microscopique. Ces composites sont fabriqués à partir de différents renforts et présentent des spécificités microstructurales illustrées par la FIGURE 1 dans laquelle deux fibres différentes (verre et carbone) viennent renforcer le matériau composite.

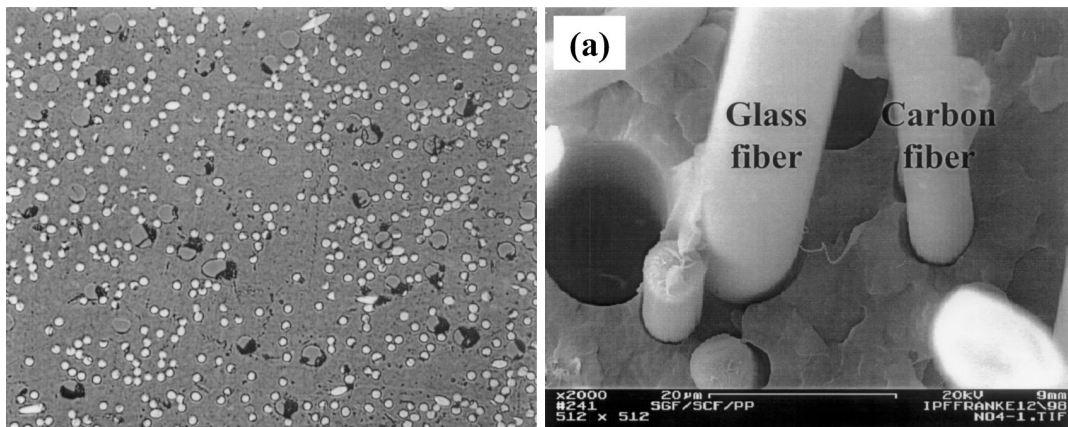


FIGURE 1 – Image prise en microscopie optique d'un composite hybride d'après Fu *et al.* (2001). Le composite présente ici, en volume, 18.75% de fibres de carbone et 6.25% de fibres de verre plongées dans une matrice polypropylène. Les plus grosses fibres sont en verre et les plus petites en carbone.

D'autres variabilités sont présentes au sein des matériaux composites. En s'intéressant à l'échelle des constituants, il apparaît une forte fluctuation de la morphologie de la microstructure. La fluctuation morphologique peut être perçue comme un ensemble de caractéristiques qui s'écartent d'une configuration idéalisée. Un exemple de configuration idéale peut être un arrangement hexagonal de fibres. Les facteurs liés aux fluctuations morphologiques sont la géométrie des fibres (fibres de différentes tailles, fibres non parfaitement circulaires), la localisation spatiale des fibres (répartition non homogène ou aléatoire des fibres, amas de fibres entraînant une variation locale de la fraction volumique en fibres,

présence de zones riches en matrice), la cohésion imparfaite entre la fibre et la matrice (défaut d'ensimage), la présence de vides ou porosités dans la matrice. Quelques unes de ces caractéristiques sont illustrées sur la FIGURE 2. Ces caractéristiques microscopiques sont directement liées aux procédés de fabrication des matériaux composites.

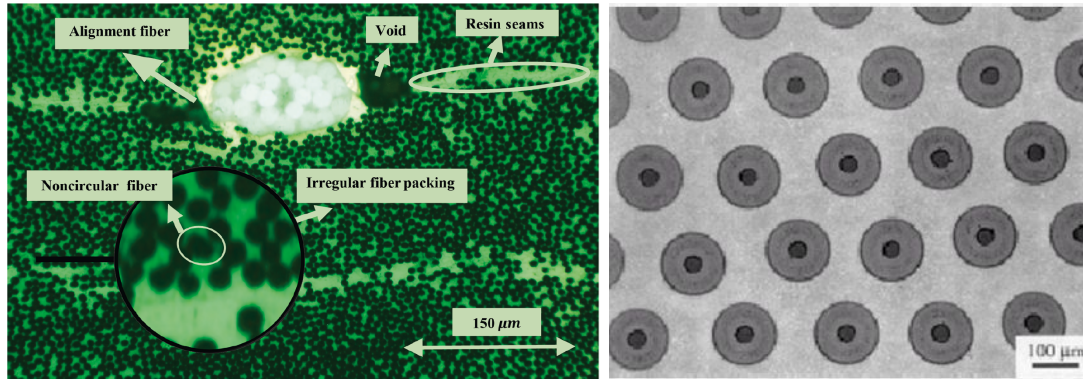


FIGURE 2 – À gauche : image en microscopie optique d'un composite carbone-epoxy d'après Bhuiyan *et al.* (2020). À droite : image de microstructure d'un composite SCS-6/Ti-22Al-27Nb d'après Vassel et Pautonnier (2001)

Dans un contexte de modélisation de structures de plus en plus grandes et de plus en plus complexes, dimensionnées vis-à-vis de sollicitations variées, un nombre croissant de calculs est maintenant nécessaire. Les simulations nécessitent alors des outils capables de prédire ce qui va se passer aussi bien globalement que localement car toutes les spécificités microstructurales évoquées ci-dessus peuvent en altérer les propriétés mécaniques globales. Une approche didactique de ce phénomène serait de considérer la France comme le matériau d'étude et la météo comme le paramètre à prévoir. À l'échelle nationale, il est très difficile de prendre en considération les détails que nous aurions sur un paysage à l'échelle d'une ville par exemple. Pourtant, imaginons que cette ville se trouve dans un relief encaissé, il est fort probable que les orages et les perturbations y soient plus nombreux qu'une ville voisine en zone de plaine. Cette information régionalisée est essentielle pour anticiper les risques météorologiques. Il en est de même pour les structures composites que nous évoquions au début de ce paragraphe. Connaître le comportement local et surtout pouvoir correctement prédire les zones "à risque" est primordial. Les fluctuations locales évoquées plus haut pour la météo peuvent correspondre à une répartition hétérogène des fibres dans le cas du composite. Les fibres peuvent en effet être regroupées et créer des zones où la matrice est alors confinée (voir la FIGURE 3). Les fibres ainsi regroupées agissent en véritables concentrateurs de contraintes.

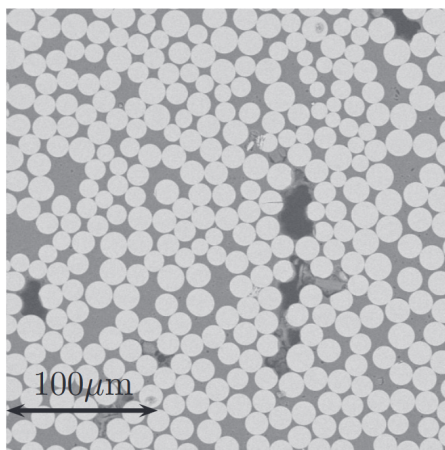


FIGURE 3 – Microstructure d’un composite verre-polyamide de Caysac (2014) à fort taux de renfort illustrant le phénomène de confinement matriciel.

Les perturbations morphologiques locales (voir la FIGURE 2 à gauche ou la FIGURE 3) influencent modérément le comportement effectif global mais peuvent être à l’origine d’un endommagement de la structure. Il en va de même pour les zones de porosité qui fragilisent localement le matériau composite. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces zones le mieux possible.

Cependant, la prise en compte des détails de la microstructure des matériaux entraîne souvent des calculs très lourds voir impossible à mener de manière globale. C’est pourquoi il est utile d’avoir recours à d’autres outils plus adaptés comme les modèles analytiques qui sont souvent peu coûteux en temps de calcul et généralement suffisamment performants pour obtenir une première estimation du comportement.

La prédiction du comportement transverse de composites renforcés de fibres continues pose de nombreuses difficultés qu’il s’agisse de prédiction expérimentale ou numérique. L’objectif de ce travail est de prédire le comportement effectif transverse de microstructures composites à renforts fibreux en intégrant les informations de “fluctuations morphologiques” introduites précédemment à savoir, dans notre étude, la répartition des fibres dans le plan transverse ou bien encore la porosité. Quelles sont les méthodes qui existent aujourd’hui pour répondre à cet objectif ?

Pour prédire le comportement d’un composite, plusieurs options sont offertes, plus ou moins simples à mettre en œuvre, plus ou moins longues ou coûteuses. L’un des modèles analytiques parmi les plus appropriés dans le cas d’un composite à fibres continues est le modèle de Christensen et Lo (1979). Cependant, celui-ci ne prend pas en compte les fluctuations morphologiques microscopiques et n’est donc pas adapté pour rendre compte de l’effet d’une répartition hétérogène de fibres comme dans le cas de microstructures réelles. Un autre outil très utilisé est le modèle numérique à champs complets exploitant par exemple les Éléments Finis. Il permet de prendre en compte la microstructure telle qu’elle est dans la réalité. Cela nécessite néanmoins d’obtenir des images à l’échelle microscopique du matériau réel qui soient représentatives de la microstructure, ce qui signifie des images de taille suffisante ou suffisamment nombreuses. Des simulations à partir de ces images sont ensuite à réaliser avec des étapes plus ou moins complexes comme celle du maillage. Le procédé de maillage est en effet l’opération la plus longue et délicate à réaliser. Pour contourner cette difficulté, il est courant d’utiliser un calcul en supposant un arrangement

hexagonal des fibres. Cette fois, la microstructure réelle n'est pas prise en compte et une erreur est commise lors de l'estimation des propriétés effectives transverses. Les procédés de fabrication des matériaux composites offrent aujourd'hui une grande liberté vis-à-vis des formes et des performances. Les procédures d'optimisation permettent en outre de réduire la quantité de matière nécessaire tout en conservant les performances souhaitées. Dimensionner au plus juste passe par une très bonne connaissance du comportement et une juste quantification des incertitudes. Tout ce travail amont permet un gain à plusieurs niveaux. Le premier gain est économique en raison d'une moins grande quantité de matière utilisée. Mais le gain économique peut se répercuter sur toute la durée de vie de la pièce car moins de matière signifie moins de masse. En prenant l'exemple du domaine aéronautique, la quantité de carburant nécessaire aux différentes phases de vol est directement lié à la masse de l'appareil. Une réduction de masse de 1% correspond à une économie de carburant entre 0.75% et 1% selon le type et la génération du moteur utilisé. Les distances de vol peuvent alors être allongées ou simplement la charge utile augmentée. C'est un cercle vertueux car les pièces plus légères peuvent être soutenues par des supports moins massifs.

Avec le développement des composites à fibres naturelles (lin, chanvre, etc.), un moindre impact écologique peut être envisagé. Exploiter au mieux les performances de ces fibres naturelles passe également par une bonne maîtrise des propriétés et une juste évaluation de leur variabilité. Des simulations de plus en plus précises ne sont exploitables que si les erreurs et incertitudes associées sont quantifiées. Cela permet d'éviter de répercuter aux échelles supérieures une erreur faite à l'échelle microscopique lors d'un calcul multi-échelles. La "brique" élastique est la première à être concernée. C'est elle qui donne la réponse en raideur initiale de la structure ; ce qui conditionne grandement la quantité de matière à considérer. La brique élastique est également celle qui permet de prédire correctement la limite du domaine de réversibilité du matériau, un critère bien souvent indispensable à connaître. Alors que les propriétés longitudinales sont facilement mesurables, les propriétés transverses sont, quant à elles, difficilement accessibles, que ce soit expérimentalement ou numériquement, avec des marges d'erreur toujours très larges. Comme cela a été souligné plus haut, l'estimation numérique (via les champs complets) de ces propriétés transverses, nécessitent un temps de mise en œuvre du modèle puis de simulation assez important. Le développement d'une nouvelle approche analytique permet ici de prédire les propriétés transverses effectives d'un composite à fibres avec davantage de précision que les modèles existants. Plusieurs interrogations sont toutefois présentes :

1. Comment rendre compte de l'influence des fluctuations morphologiques sur le comportement effectif dans un modèle analytique ? Comment rendre compte également de problèmes d'interface/interphase ?
2. Comment s'assurer que le modèle est bien capable de rendre compte de la morphologie du composite ?

La première question trouve sa réponse dans l'emploi d'une approche par Motifs Morphologiques Représentatifs (MMR de (Bornert *et al.*, 1996)) couplée au modèle analytique Auto-Cohérent-Généralisé (ACG  $(n + 1)$ -phase de (Hervé et Zaoui, 1995)). La seconde question trouve sa réponse dans la complémentarité avec l'utilisation d'une approche numérique à champs complets, faute de pouvoir accéder aux résultats expérimentaux pour les propriétés transverses. Le modèle analytique développé dans ce travail repose sur l'association du modèle d'homogénéisation analytique Auto-Cohérent Généralisé (ACG) associé à une approche par Motifs Morphologiques Représentatifs (MMR). Ce modèle permet aussi d'étayer une réflexion en amont de la conception d'un matériau composite. Avant de conce-

voir un matériau composite, il est tout à fait possible de faire varier les paramètres du modèle et de déterminer la configuration optimale au sein même de la microstructure du composite en fonction du résultat souhaité. Il est à noter que les résultats sont générés très rapidement et cela permet, par exemple, de facilement recourir au modèle pour balayer un jeu de propriétés dans un plan d'expérience. Tout cela permet d'anticiper et d'optimiser la suite des étapes de conception. Un des avantages de ce modèle est qu'il peut prédire les propriétés élastiques effectives transverses d'un composite dont le contraste entre les phases est très élevé (jusqu'à  $10^5$ ). En outre, il ne se limite pas à une fraction volumique donnée et peut être utilisé avec des taux en renforts de fibres très élevés. Il permet par exemple de prendre en compte des interfaces/interphases grâce à son approche multicouches. Le motif morphologique représentatif du composite est constitué d'un ensemble de cylindres concentriques dont le nombre et l'épaisseur via la fraction volumique sont choisis par l'utilisateur. Ainsi une faible épaisseur permet de représenter une interphase fibre-matrice par exemple (ou une interface si l'épaisseur tend cette fois vers zéro). Un autre avantage de ce modèle est la possibilité de prendre en considération de la porosité au sein du composite avec l'ajout d'un motif morphologique représentatif constitué d'une zone de vide entourée par de la matrice (ou non) puis par le Milieu Homogène Equivalent. Le modèle peut aussi être utilisé dans sa formulation générale pour déterminer le comportement élastique effectif de matériaux hybrides. Dans le cas des composites hybrides, cela peut par exemple permettre d'ajuster les proportions des différents constituants en amont ou d'étudier l'effet d'un "mauvais" mélange entre constituants. Le modèle ne s'applique pas à un champ restreint d'applications. Au contraire, une extension est possible dans beaucoup de domaines. Ce modèle basé sur une approche par motifs existe déjà pour les composites à particules (Marcadon *et al.*, 2007) et ce travail a consisté à le développer dans le cas de composites à fibres continues.

Ce manuscrit est construit de la manière suivante : le chapitre 1 replace notre démarche dans la continuité des développements analytiques de prédiction du comportement élastique effectif, le chapitre 2 détaille le développement du modèle analytique ACG par motifs permettant de prédire le comportement effectif transverse pour les modules de compressibilité plan et de cisaillement transverse de composites à fibres, le chapitre 3 permet de tester la robustesse du modèle et la sensibilité de ses paramètres sur un exemple de microstructure de composite générée virtuellement, le chapitre 4 s'intéresse à la mise en place d'une démarche d'utilisation du modèle pour un composite réel et le chapitre 5 conclut ce manuscrit et propose plusieurs améliorations pouvant être développées par la suite dans la continuité de la recherche de la meilleure prise en compte de la microstructure réelle du composite.



# Chapitre 1

## État de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Intérêt de la modélisation micromécanique . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Modèles d'homogénéisation à champs moyens . . . . .</b>	<b>14</b>
1.2.1	Assemblage de Hashin . . . . .	14
1.2.2	Modèle différentiel . . . . .	15
1.2.3	Modèle de Mori Tanaka . . . . .	16
1.2.4	Modèle Auto-Cohérent Classique . . . . .	17
1.2.5	Modèle Auto-Cohérent Généralisé (ACG) . . . . .	17
1.2.6	Modèle Auto-Cohérent Généralisé $(n + 1)$ -phase . . . . .	18
1.2.7	Utilisation des modèles $(n + 1)$ -phase comme cas test . . . . .	19
1.2.8	Autres utilisations . . . . .	20
<b>1.3</b>	<b>Modèles d'homogénéisation à champs complets . . . . .</b>	<b>20</b>
1.3.1	Méthode des Éléments Finis . . . . .	20
1.3.2	Méthode FFT . . . . .	22
1.3.3	Approches multi-échelle . . . . .	22
<b>1.4</b>	<b>Intérêt d'un nouveau modèle . . . . .</b>	<b>23</b>
1.4.1	Exemple de résultats expérimentaux . . . . .	23
1.4.2	Comparaison avec les résultats du modèle ACG . . . . .	27
1.4.3	Utilité des expériences numériques . . . . .	27
<b>1.5</b>	<b>Approche par Motifs Morphologiques Représentatifs . . . . .</b>	<b>28</b>
1.5.1	Approche MMR associée au modèle $(n + 1)$ -phase . . . . .	28
1.5.2	Notre approche : extension de l'approche MMR à des composites à fibres en élasticité . . . . .	29

---

### 1.1 Intérêt de la modélisation micromécanique

Chaque application nécessite de sélectionner les matériaux les plus appropriés pour atteindre les objectifs de performances visés. Les matériaux composites offrent la possibilité de concevoir le matériau en même temps que le produit final et ainsi optimiser les propriétés "à la demande". Ils ouvrent le champ des possibles en multipliant les combinaisons de constituants. Les composites utilisés dans ce travail ont une morphologie de type inclusion-matrice, c'est-à-dire qu'ils sont constitués de deux phases, l'une continue appelée matrice et l'autre discontinue appelée inclusion. Pour prédire le comportement de tels matériaux, des méthodes d'homogénéisations spécifiques doivent être développées. Ces méthodes permettent de prendre en compte, le mieux possible, la morphologie du



composite, la concentration en différentes phases, le comportement de ces phases et parfois des effets de taille. Les propriétés effectives représentent les propriétés moyennes du matériau obtenues en prenant en compte les propriétés de chaque phase du matériau hétérogène et de leur interaction. Certaines morphologies particulières (Composite Sphere Assemblage (CSA) (Hashin, 1962) ou Composite Cylinder Assemblage (CCA) (Hashin et Rosen, 1964)) conduisent à des solutions exactes qui peuvent être trouvées pour certains modules effectifs. Quand ce n'est pas possible, des bornes ou des estimations sont recherchées pour les autres modules.

## 1.2 Modèles d'homogénéisation à champs moyens

Depuis plus de 50 ans, de nombreuses équipes ont travaillé au développement de modèles analytiques permettant de prédire le comportement de composites à fibres. Les travaux de Eshelby (1957) fournissent une solution classique au problème d'une hétérogénéité ellipsoïdale dans une matrice infinie soumise à des contraintes ou déformations uniformes à l'infini. Ces travaux ont été beaucoup utilisés et développés pour construire des modèles micromécaniques capables de prédire le comportement général d'un matériau hétérogène.

### 1.2.1 Assemblage de Hashin

Hashin (1962) et Hashin et Rosen (1964) ont proposé des matériaux modèles sous forme d'assemblage de sphères puis d'assemblage de cylindres entourés d'une couche de matrice concentrique. Cet assemblage est représenté par des sphères ou cylindres homothétiques pavant l'espace et ayant une taille variable allant jusqu'à une dimension quasi-nulle pour remplir tout l'espace et maintenir la connectivité de la matrice. Elles sont réparties de manière isotrope ou transversalement isotrope selon les cas particules ou fibres. Dans le cas de Hashin et Rosen (1964), les cylindres sont coaxiaux tels que la fraction volumique de phase de chaque élément composite est égale aux fractions volumiques du composite. Ce modèle d'assemblage de cylindres composites (CCA) fournit une méthode pour estimer toutes les propriétés effectives à l'exception du cisaillement transverse  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  pour laquelle il fournit des bornes plus restrictives que les limites généralisées de Hill (1964) et Hashin (1965). Ils ont obtenu des résultats exacts pour des réseaux hexagonaux de fibres identiques et des résultats approximatifs pour un réseau aléatoire de fibres.

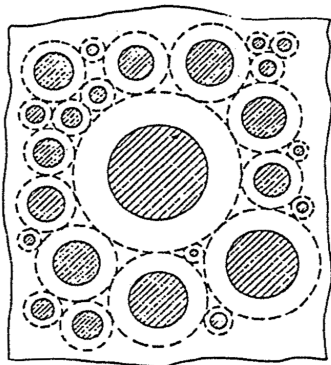


FIGURE 1.1 – Assemblage de Hashin et Rosen, d'après Hashin (1983).

Cependant les bornes de Hashin pour le CSA ou les bornes de Hashin et Rosen pour le CCA respectivement pour les modules de cisaillement et de cisaillement transverse peuvent être très éloignées les unes des autres. Elles le sont comme celles de Hashin et Shtrikman (1963) qui prennent en compte toute distribution isotrope ou isotrope transverse. Une estimation du module de cisaillement d'un CSA (isotropie) ou d'un CCA (isotropie transverse) a été obtenue par Christensen et Lo (1979) en se basant sur un critère énergétique. Une autre définition du comportement effectif à partir de moyenne des champs de déformation et des contraintes a été proposée par Hervé *et al.* (1991). Ces estimations ont été étendues aux CSA et CCA comportant des sphères ou cylindres à  $n$  couches par Hervé et Zaoui (1993) et Hervé et Zaoui (1995).

### 1.2.2 Modèle différentiel

Une autre méthode d'approximation des propriétés effectives, appelée Schéma Différentiel (Differential Scheme en anglais ou DS), a été proposée par Bruggeman (1935) pour prédire la conductivité effective des milieux hétérogènes. Le DS est basé sur une construction progressive du matériau composite. Les propriétés effectives du composite sont obtenues par l'addition progressive de quantités infimes de renforts. Le DS stipule que chaque hétérogénéité se comporte comme une hétérogénéité isolée dans un milieu infini, ce qui correspond au problème d'hétérogénéité de Eshelby (1957). Dans ce modèle, les interactions entre les inclusions sont négligées. Cette méthode a été utilisée et améliorée par de nombreux auteurs. Roscoe (1952) a proposé une interprétation de cette méthode basée sur l'hypothèse qu'il existe des renforts de tailles différentes. Dans ce modèle, la construction du composite commence par l'insertion des plus petites inclusions et se termine par les plus grandes. L'étude s'est portée sur la viscosité des sphères rigides en suspension et la détermination des propriétés des composites avec des constituants élastiques et viscoélastiques. L'application du DS aux matériaux composites et aux solides avec des micro fissures a été faite par Boucher (1974), puis reprise par McLaughlin (1977), et Cleary *et al.* (1980). Norris (1985) a enfin proposé une extension de ce modèle au cas de plusieurs phases pour l'inclusion. Hashin (1988) a appliqué le DS aux matériaux fissurés, puis celui-ci a été développé par Christensen (1990), Nemat-Nasser et Hori (1990) et Zimmerman (1991). Le modèle ne s'applique qu'aux matériaux hétérogènes contenant une faible concentration en inclusions.

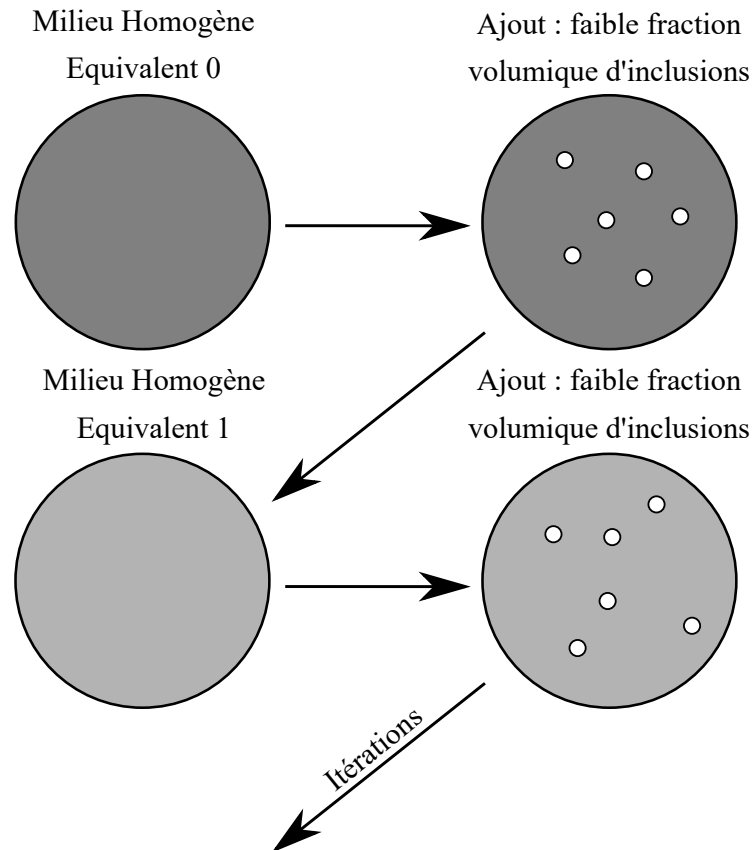


FIGURE 1.2 – Schéma de la procédure du modèle différentiel.

### 1.2.3 Modèle de Mori Tanaka

Le modèle de Mori Tanaka (MT) a été développé par Mori et Tanaka (1973) puis Benveniste (1987) (pour calculer la réponse effective des matériaux composites) et Qu et Cherkaoui (2006) en conservant la configuration du modèle d'Eshelby. Pour tenir compte des interactions entre les inclusions de manière moyenne, des hypothèses supplémentaires sont appliquées. L'objectif principal de ce schéma est de considérer l'hétérogénéité ellipsoïdale immergée dans le milieu homogène infini (matrice) soumis à un champ de déformation fictif. Le modèle est adapté aux matériaux hétérogènes avec une fraction volumique modérée d'environ 25% à 30%. La méthode a considérablement amélioré la précision du modèle différentiel (Mori et Tanaka (1973), Taya et Chou (1981), Benveniste (1986); Zhao et Weng (1990)). Le modèle à trois phases est également utilisé pour améliorer l'exactitude de la méthode MT (Luo et Weng, 1987). Ces méthodes sont assez faciles à implémenter. Elles sont peu coûteuses en termes de calcul et donnent accès à des informations riches sur les contraintes au niveau des constituants. Cependant, de nombreuses publications soulignent les lacunes théoriques de ces méthodes. Les avantages et les inconvénients de

la méthode MT ont été discutés par Christensen (1990) et Christensen (1992).

### 1.2.4 Modèle Auto-Cohérent Classique

Le modèle Auto-Cohérent dit Classique (ACC ou Self Consistent Scheme en anglais ou SCS) a été introduit dans le domaine de la mécanique par Hershey (1954), et a été développé par Kröner (1958) comme un moyen pour modéliser le comportement des matériaux polycristalins. L'extension de ce modèle aux milieux multiphasés a été faite par Hill (1965b) et Budiansky (1965) en élasticité linéaire et par Hill (1965a) et Berveiller et Zaoui (1979) en élasto-plasticité.

Pour le modèle Auto-Cohérent Classique, le motif élémentaire d'étude choisi est une unique inclusion dans un milieu homogène équivalent infini.

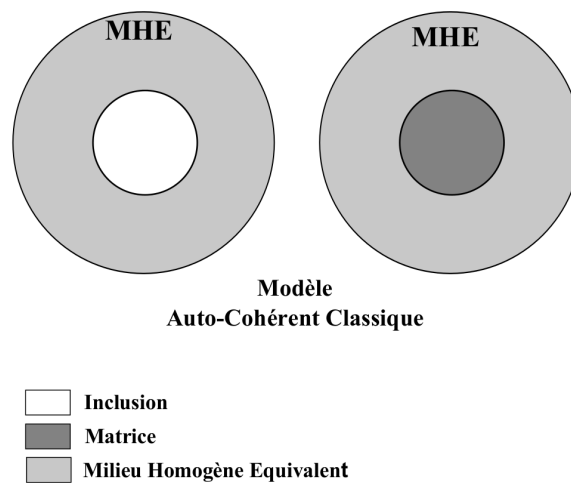


FIGURE 1.3 – Motif morphologique représentatif du modèle ACC.

Le modèle ne prend pas en compte la notion de matrice, ce qui limite son champ d'application car il ne rend pas bien compte de la morphologie de type inclusion-matrice du composite. Le schéma ACC apparaît comme un outil puissant pour prédire les propriétés effectives des matériaux polycristallins, tant en élasticité qu'en élasto-plasticité Berveiller et Zaoui (1979). Certains essais de son application directe aux composites polyphasiques naturels ou manufacturés ont démontré l'inadéquation d'une telle approche. Un comportement physiquement aberrant est estimé par le modèle lorsque la fraction volumique de renfort devient importante ou lorsque l'inclusion est rigide ou vide (Qu et Cherkaoui, 2006). Cela est dû à la mauvaise description des interactions entre le renfort et le matériau environnant introduit par l'hypothèse auto-cohérente. Dans cette approche, la modélisation de l'inclusion est incrustée directement dans le matériau effectif dont les propriétés peuvent être très différentes de celles du milieu entourant l'inclusion. Les limitations du modèle sont discutées dans Vieville *et al.* (2006).

### 1.2.5 Modèle Auto-Cohérent Généralisé (ACG)

Pour décrire plus précisément les interactions de l'inclusion avec le matériau environnant, une idée a été développée : le motif élémentaire d'étude choisi est un renfort

(sphérique ou cylindrique) entouré par une phase de matrice et le tout plongé dans un milieu infini ayant les propriétés encore inconnues du milieu homogène équivalent.

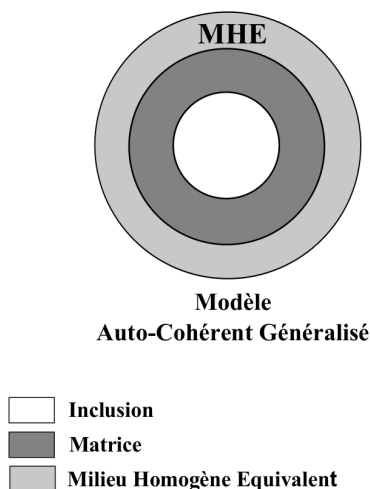


FIGURE 1.4 – Motif morphologique représentatif du modèle ACG.

Ce modèle, appelé le modèle Auto-Cohérent Généralisé (ACG ou GSCS i.e. Generalized Self Consistent Scheme), initialement introduit par Frolich et Sack (1946), a été résolu exactement par Christensen et Lo (1979) (à partir des travaux effectués par Hermans (1967)) pour les matériaux élastiques et étendu aux matériaux non linéaires par Hervé et Zaoui (1990). Différente des modèles micromécaniques précédemment cités et basée sur un modèle à deux phases, la méthode ACG est basée sur un modèle à trois phases. La méthode ACG fournit des prédictions pour les types extrêmes d'inclusions (c'est-à-dire les vides et les inclusions rigides), et la méthode donne également le comportement asymptotique correct des composites à mesure que la fraction volumique d'inclusion approche de 100%, c'est-à-dire uniquement du renfort. Il est montré que les résultats de la méthode ACG sont en excellent accord avec les données expérimentales (se référer par exemple à Huang et Gibson (1993)). Le schéma ACG de Christensen et Lo (1979) fournit une prédiction de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  qui se situe entre les bornes de Hashin et Rosen pour le CCA.

### 1.2.6 Modèle Auto-Cohérent Généralisé $(n + 1)$ -phase

Quelques années plus tard, le modèle Auto-Cohérent Généralisé a été étendu au cas d'inclusions sphériques multi-couches (modèle  $(n + 1)$ -phase) par Hervé et Zaoui (1993) puis au cas d'inclusions cylindriques multi-couches (Hervé et Zaoui, 1995). Ce dernier papier considère un motif élémentaire constitué d'une inclusion cylindrique à  $n$  couches plongée dans un milieu infini dont les propriétés sont dans un premier temps connues et qui est soumis à des sollicitations homogènes.

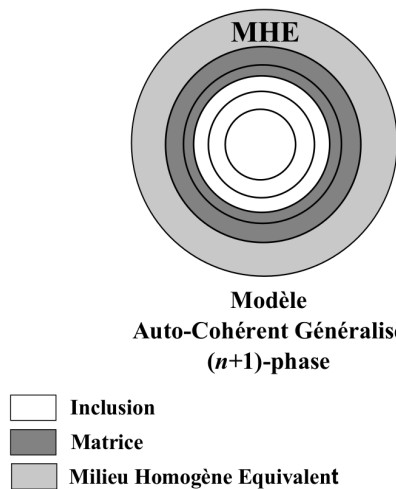


FIGURE 1.5 – Motif morphologique représentatif du modèle ACG  $(n + 1)$ -phase.

La solution de ces problèmes permet dans un deuxième temps de déterminer le comportement effectif d'un matériau composite à renforts cylindriques multi-couches en remplaçant le milieu infini connu par le MHE (Milieu Homogène Equivalent) inconnu. Pour cela des opérations de moyenne et une Condition d'Auto-Cohérence (Self Consistent Condition en anglais) ont été utilisées pour déterminer les caractéristiques de ce MHE. Ce modèle généralise l'estimation de Christensen et Lo (1979). Il permet de prendre en compte le comportement isotrope transverse de chacune des phases mais aussi, par exemple, l'influence de l'enrobage de l'inclusion sur les propriétés effectives du matériau composite. Une phase supplémentaire est alors introduite entre l'inclusion et la matrice.

Chaque ajout d'information au modèle concernant la microstructure du composite le rapproche du matériau réel ce qui permet d'améliorer ses capacités de prédiction.

### 1.2.7 Utilisation des modèles $(n + 1)$ -phase comme cas test

De nombreux auteurs se sont intéressés aux modèles  $(n + 1)$ -phase et ont utilisé les résultats de ces modèles comme cas tests pour le comportement linéaire. La précision d'estimation de ces modèles est donc primordiale puisque la fiabilité et l'efficacité d'autres modèles en dépend.

### Comportements plus complexes

Plusieurs travaux utilisent les résultats donnés dans les articles Hervé et Zaoui (1993) et Hervé et Zaoui (1995) pour développer des comportements plus complexes. Deux exemples peuvent être cités dans le cas de composites à fibres pour un comportement élastique orthotrope. Marklund *et al.* (2008) étudient l'effet de l'anisotropie des fibres de bois et Tsukrov et Drach (2010) développent un nouveau modèle analytique explicite pour les composites multi-couches cylindriques orthotropes. Leurs travaux ont été étendus aux cas de fibres et matrices orthotropes avec un comportement thermoélastique (Tsukrov *et al.*, 2012).

## Développements numériques

Des développements numériques ont également été comparés aux résultats des articles de Hervé et Zaoui (1993) et de Hervé et Zaoui (1995), comme par exemple dans le cas d'inclusions ellipsoïdales Berbenni et Cherkaoui (2010). Le comportement de composites à fibres multi-couches a aussi été déterminé par un algorithme récursif (Upadhyay et Lyons, 2000) ou de manière numérique (Wang *et al.*, 2006) par exemple permettant ici de prendre en compte des interphases non homogènes. Une autre utilisation a été faite avec Bardella et Genna (2001a) qui cherchent à déterminer les modules élastiques du cœur d'un composite sandwich formé d'un cœur en mousse syntactique et d'une peau en composite unidirectionnel constitué de résine et de fibres de verre.

### 1.2.8 Autres utilisations

L'article Hervé et Zaoui (1993) a été récemment étendu à des comportements non linéaires (Hervé-Luanco, 2017). Beicha *et al.* (2016) offrent une comparaison des résultats des modèles ACG de Christensen et Lo (1979) et  $(n+1)$ -phase par rapport à des simulations numériques avec des tirages aléatoires de fibres.

## 1.3 Modèles d'homogénéisation à champs complets

### 1.3.1 Méthode des Éléments Finis

Lorsque la résolution analytique des équations différentielles devient délicate, d'autres modèles d'homogénéisation, à champs complets, peuvent être utilisés pour prédire le comportement linéaire élastique transverse des matériaux composites. La Méthode des Éléments Finis (MEF) en est l'un des exemples parmi les plus communément utilisés.

La MEF tire son origine du besoin de résoudre des problèmes complexes en élasticité et en analyse de structure pour les ingénieurs. Le concept d'élément fini a été introduit en 1956 par Turner *et al.* (1956) et la méthode a été définie mathématiquement dans les années 1960 avec les travaux de Zienkiewicz. Elle a trouvé son essor grâce au développement du calcul numérique sur ordinateurs et s'est aujourd'hui étendue à de nombreux domaines d'application. C'est l'un des outils numériques pour approcher la solution d'un problème aux dérivées partielles. Il repose sur le concept de la discrétisation du domaine d'étude en sous-domaines discrets, que l'on appelle des éléments. La MEF peut s'appliquer à différentes échelles, celle de la structure mais également celle des "microstructures". La discrétisation spatiale utilisée dans la MEF permet de représenter aussi fidèlement que possible la répartition des phases dans les microstructures. Cette méthode permet donc de simuler le comportement de systèmes physiques complexes en prenant en compte la morphologie locale. Cela est particulièrement utile quand on atteint les limites des modèles analytiques tout en limitant les essais sur pièce réelle souvent longs et coûteux. Le nombre de degrés de liberté et la taille des éléments va jouer sur la qualité de l'approximation de la solution et dans les zones où la solution évolue rapidement il sera nécessaire de raffiner le maillage.

Lorsque la microstructure du composite est arrangée périodiquement, le volume sur lequel les calculs sont menés peut être réduit à celui de l'unité périodique. La microstructure du matériau est décomposée en cellules périodiques translattées selon les vecteurs de périodicité. Dans la plupart des cas, l'arrangement des renforts est cependant aléatoire et un Volume Élémentaire Représentatif doit être défini. En première approximation, un

calcul sur un arrangement périodique permettra de d'approcher le comportement d'une microstructure aléatoire mais il faut être conscient des hypothèses adoptées.

Quelle que soit la géométrie considérée, les étapes nécessaires pour obtenir la solution via la MEF sont :

- **Réaliser un maillage** : Cette étape est souvent nommée : étape de représentation. Lors d'une modélisation par Éléments Finis, plusieurs problèmes entrent en jeu. L'un d'eux concerne la difficulté de représenter la géométrie de microstructures aléatoires complexes. La taille des modèles est souvent très élevée due au grand nombre de degrés de liberté nécessaires pour raffiner le maillage. En effet, lorsque les fibres sont très proches, des zones de concentration de contrainte apparaissent. Mailler finement dans ces zones est un travail long et fastidieux qui peut parfois être accompagné par des techniques automatisées.

- **Imposer des conditions aux limites et appliquer un chargement** :

Afin de résoudre les équations de comportement pour un milieu considéré, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites et d'appliquer un chargement au Volume Élémentaire Représentatif choisi. Il est alors possible de reconstruire les matrices homogénéisées de souplesse et d'élasticité des matériaux étudiés. Il est possible d'imposer des conditions aux limites de différentes natures qui permettent de reproduire des configurations expérimentales réelles. La MEF permet de solliciter les (micro)structures considérées dans des conditions parfois difficiles à atteindre avec des essais expérimentaux physiques.

Il existe trois types de conditions aux limites principales :

1. Conditions aux limites en déformation homogène, ou KUBC (Kinetic Uniform Boundary Conditions).
2. Conditions aux limites en contrainte homogène, ou SUBC (Static Uniform Boundary Conditions).
3. Conditions aux limites périodiques, ou PBC (Periodic Boundary Conditions).

Les conditions aux limites périodiques sont à privilégier quand cela est possible (Besson *et al.*, 2001).

- **Une étape d'homogénéisation** :

Les méthodes d'homogénéisation ont pour objectif de déterminer le comportement macroscopique homogénéisé de matériaux dont la structure est hétérogène à une échelle inférieure, dans notre étude à une échelle microscopique.

La MEF permet de réaliser cette opération numérique d'homogénéisation assez simplement. Il s'agit d'effectuer des calculs de moyennes sur un Volume Élémentaire Représentatif étant sollicité de telle sorte que les composantes des matrices d'élasticité puissent être obtenues facilement. Parmi les techniques existantes, celle dite de l'"élément périodique" en déformation ou en contrainte est probablement la plus efficace. Cette méthode est basée sur des degrés de liberté supplémentaires (6) qui correspondent à la déformation homogène ou la contrainte homogène. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, l'approche en contrainte ou en déformation conduit bien entendu au même résultat.

- **Une étape de localisation** :

La procédure d'homogénéisation nécessite une étape de localisation qui vise à relier les champs macroscopiques aux champs locaux. Dans le cadre de la MEF, il s'agit de remonter aux champs locaux en utilisant le comportement homogène équivalent sur la structure.



### 1.3.2 Méthode FFT

En parallèle de la MEF, depuis le début des années 1990, quelques méthodes alternatives à champs complets sont apparues dont la FFT. La FFT repose sur la Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform en anglais ou FFT). Cette méthode a été développée pour pallier les difficultés à mailler ou à prendre en compte un grand nombre de degrés de liberté requis pour les simulations MEF. La méthode FFT a été développée à l'origine par Moulinec et Suquet (1994, 1995). Le principe de la méthode repose sur l'utilisation d'une méthode itérative. Il n'est plus nécessaire de réaliser un maillage puisque les images de microstructures sont utilisées directement. Cependant, la méthode FFT présente un inconvénient majeur. La méthode itérative requiert un nombre d'itérations approximativement proportionnel au contraste entre les modules des phases du matériau composite. Le processus d'itération converge rarement dans le cas de contrastes élevés (Michel *et al.*, 1999). Des schémas dits "accélérés" ont été développés, notamment par Eyre et Milton (1999), Moulinec et Suquet (2003) et Zeman *et al.* (2010), pour contourner ce problème en permettant une augmentation de la vitesse de convergence. Enfin, une comparaison de plusieurs approches FFT "accélérées" est présentée dans Moulinec et Silva (2014).

### 1.3.3 Approches multi-échelle

Comme nous avons pu l'évoquer à plusieurs reprises dans l'introduction, le comportement global d'une structure est dépendant des effets et interactions à plus petites échelles. Dans le cas d'un calcul par la MEF, la structure peut-être discrétisée une première fois grossièrement. Une simulation initiale permet d'identifier les zones où l'information n'est pas suffisamment bien représentée, comme les zones de concentrations de contrainte par exemple. Raffiner le maillage dans ces zones est possible mais il ne peut pas être fin au point de pouvoir prendre en compte les plus petits éléments microstructuraux du matériau. Le coût de calcul serait aujourd'hui prohibitif. Une autre voie est nécessaire.

Une solution consiste à utiliser la méthode des Éléments Finis multi-échelles (appelée aussi FE<sup>2</sup>). La méthode des Éléments Finis multi-échelles est une méthode d'homogénéisation qui permet de déterminer le comportement du matériau composite à l'échelle macroscopique, à partir du comportement du matériau à l'échelle des constituants, à travers la résolution d'un problème aux limites sur un VER (Volume Élémentaire Représentatif) soigneusement choisi. Cette méthode a été introduite par Feyel (1999) puis Feyel et Chaboche (2000) d'après les travaux de Ghosh *et al.* (1995). Le principe de la méthode FE<sup>2</sup> est le suivant : à chaque point d'intégration à l'échelle macroscopique, un élément de volume représentatif est attribué et un calcul par Éléments Finis séparé est effectué simultanément. Cette procédure ne nécessite pas de préciser le comportement constitutif macroscopique. Une fois les échelles mécaniques pertinentes choisies, le modèle est construit à partir de trois ingrédients principaux :

1. Une modélisation du comportement mécanique à l'échelle inférieure (le VER).
2. Une règle de localisation qui détermine les solutions locales à l'intérieur de la maille élémentaire, pour toute déformation globale donnée.
3. Une règle d'homogénéisation donnant le tenseur de contrainte macroscopique, connaissant l'état de contrainte micromécanique.

En principe, toute règle de localisation-homogénéisation peut être utilisée pour les points 1 à 3, mais la méthode la plus courante est l'homogénéisation périodique. Deux maillages éléments finis sont nécessaires : un premier pour la cellule élémentaire microscopique périodique et un deuxième pour la structure macroscopique. Le calcul est effectué simultanément sur les deux échelles. Cette modélisation multi-échelle permet donc de connaître

le chargement local à appliquer à une microstructure. Une étude des différentes méthodes multi-échelles pour les composites est réalisée dans Kanouté *et al.* (2009).

## 1.4 Intérêt d'un nouveau modèle

Le modèle ACG ( $n + 1$ )-phase cylindres prend en compte les concentrations en chacune des phases, les propriétés élastiques de chacune des phases représentées par cinq modules élastiques indépendants et la répartition des phases dans le motif. Ce modèle fait l'hypothèse d'une répartition homogène des fibres dans le matériau composite, or des observations de microstructures réelles, dans le cas de fortes concentrations en inclusions, montrent clairement que la distribution des fibres est rarement parfaitement homogène. On observe en particulier des zones où la matrice est confinée, laissant apparaître des petites zones où la matrice est "emprisonnée" entre des fibres. Il a été montré par Hervé-Luanco et Joannès (2016) que le modèle ACG utilisé dans le cas de la diffusion donne des résultats voisins de ceux obtenus par éléments finis lorsque l'arrangement des fibres est choisi hexagonal uniquement. Des écarts apparaissent lorsque des confinements sont présents comme sur des microstructures réelles. Ce travail de thèse consiste à développer une approche par motifs MMR (Motifs Morphologiques Représentatifs ou Morphologically Representative Pattern en anglais) associée à une approche Auto-Cohérente Généralisée qui permette de prendre en compte des fluctuations locales de distribution de fibres.

### 1.4.1 Exemple de résultats expérimentaux

La plupart des modèles analytiques micromécaniques reposent sur des hypothèses qui assument une simplification de la microstructure du composite réel. Cet écart est source d'erreur dans la prédiction. Les améliorations consistent le plus souvent à se rapprocher davantage de la microstructure réelle d'un composite et ainsi mieux prendre en considération les interactions entre constituants. Se pose alors la question de l'évaluation des améliorations proposées. Il faut pour cela disposer d'une banque de données expérimentales ou numériques de "référence" dont les incertitudes sont connues.

### Difficultés d'exploiter les essais mécaniques

C'est une réelle difficulté d'obtenir des données de "référence" exploitables. Pour les propriétés transverses, si il est envisageable de trouver des articles présentant des résultats de simulation numérique et leur incertitude, il n'en est pas de même pour les résultats expérimentaux qui sont beaucoup plus rares ou présentés avec de très larges incertitudes. Ce sont pourtant les résultats les plus intéressants. Pour être exploités, les travaux expérimentaux doivent mentionner la nature et les conditions dans lesquelles les essais ont été réalisés. Mais également les constantes élastiques permettant de remonter au comportement transverse avec l'incertitude associée, la plus petite possible. Ils doivent en outre indiquer les paramètres matériaux (mesurés ou pris dans la littérature) ainsi que la fraction volumique en fibres (ou en matrice) du composite. Très peu de travaux disponibles dans la littérature réunissent toutes les conditions.

L'article de Wang et Huang (2018) présente une étude comparative de la performance prédictive de plusieurs modèles micromécaniques et numériques par rapport aux résultats expérimentaux des World-Wide Failure Exercises (WWFE). Cet exemple, pourtant basé sur un exercice de comparaison international, rend compte de toutes les difficultés évoquées.

L'article présente neuf résultats d'essais expérimentaux issus des WWFE. Les données matériaux des fibres, de la matrice et certains modules élastiques du composite sont disponibles. En particulier, tous les modules élastiques nécessaires à la détermination du module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  sont donnés. Le second module transverse qui nous intéresse ici,  $k_{23}^{\text{eff}}$ , n'a cependant pas été mesuré expérimentalement. Il n'est fait mention dans l'article d'aucune précision sur l'incertitude des mesures expérimentales. Ces résultats sont comparés à des modèles analytiques comme notamment le modèle ACG et à des modèles numériques comme la MEF. Le TABLEAU 1.1 permet de synthétiser ces comparaisons.

<b>Composites (<math>f/m</math>)</b>	$f$	$\mu_{23}^f$	$\mu_{23}^m$	$\mu_{23}^{\text{eff}(exp)}$	$\mu_{23}^{\text{eff}(ACG)}$	$\mu_{23}^{\text{eff}(EF)}$
E-Glass <sup>a</sup> / LY556	0.62	33.33	1.24	6.32	4.65	6.49
E-Glass <sup>b</sup> / MY750	0.6	30.8	1.24	5.79	4.33	5.89
S2-Glass / Epoxy	0.6	36.3	1.19	6.7	4.25	5.89
T300 / BSL914C	0.6	7	1.48	3.93	3.32	3.71
T300 / PR319	0.6	7	0.35	1.86	1.19	1.58
AS carbon / Epoxy	0.6	7	1.19	3.35	2.9	3.32
AS4 / 3501-6	0.6	7	1.57	3.93	3.42	3.79
IM7 / 8551-7	0.6	7	1.48	2.8	3.42	3.79
G40-800 / 5260	0.6	7	1.28	3.56	3.09	3.47

TABLEAU 1.1 – Résultats des WWFE rassemblés à partir de Wang et Huang (2018)

Les résultats montrent ici que dans 8 cas sur 9, le modèle numérique des Éléments Finis fournit une prédiction plus proche des résultats expérimentaux que le modèle ACG. L'article note que les Éléments Finis peuvent en outre traiter une morphologie microstructurale complexe telle qu'une distribution irrégulière des fibres dans le composite. Les auteurs précisent tout de même que le modèle ACG est le modèle analytique le plus performant parmi ceux comparés. Cependant, aucun détail n'est donné quant aux incertitudes des mesures expérimentales. Il semble donc difficile de tirer davantage de conclusions à partir de ces résultats tirés de la littérature.

### Contourner le problème avec les méthodes ultrasonores

Compte tenu des difficultés soulevées, deux autres travaux sont étudiés car ils répondent en grande partie aux attentes exprimées plus haut. Ils reposent sur des mesures ultrasonores.

Une très grande majorité des études expérimentales rapportées dans la littérature sont basées sur des techniques d'essais "mécaniques". Bien que la caractérisation mécanique des modules d'Young longitudinaux et transversaux ne pose généralement pas de difficultés, cela n'est pas aussi simple pour la caractérisation des modules de compressibilité et de cisaillement transverse qui sont considérés ici. Ces modules sont généralement absents des publications et dans le meilleur des cas, sont estimés indirectement à partir de constantes élastiques plus faciles à obtenir. Pour faciliter la caractérisation de ces constantes élastiques transverses et réduire la propagation inhérente des incertitudes expérimentales, des méthodes alternatives expérimentales ont été proposées.

Les méthodes ultrasonores offrent une telle alternative et ont été développées depuis les années 70, initiées par Markham (1970) et Zimmer et Cost (1970). Le principe est basé sur la propagation d'ondes ultrasonores à travers un échantillon. La vitesse de phase de ces ondes planes se propageant est ensuite mesurée. Une géométrie appropriée permet de propager les ondes dans les directions souhaitées et d'estimer plus facilement des constantes élastiques à l'aide des équations de Christoffel bien connues. Une récente étude récapitulative des méthodes ultrasonores écrite par Paterson *et al.* (2018) peut être consultée pour plus de détails.

Au-delà des résultats expérimentaux sur le comportement élastique transverse, la comparaison avec un modèle micromécanique, telle que présentée dans ce travail, nécessite de connaître les propriétés des constituants ainsi que la morphologie de la microstructure. C'est le cas de Zimmer et Cost (1970).

Les résultats de Zimmer et Cost (1970) pour la moyenne des modules de compressibilité et de cisaillement transverse sont :

$$\left. \begin{aligned} \langle k_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{ZC}} &= (13.79 \pm 1.28) \text{ GPa} \\ \langle \mu_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{ZC}} &= (4.00 \pm 1.28) \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Les détails et explications de ces expérimentations sont donnés dans le chapitre 3. Les résultats du modèle analytique ACG pour le matériau composite de Zimmer et Cost (1970) sont les suivants :

$$\left. \begin{aligned} k_{23}^{\text{eff}} &= 11.01 \text{ GPa} \\ \mu_{23}^{\text{eff}} &= 4.06 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Les résultats expérimentaux de Zimmer et Cost (1970) sont donnés avec une erreur relative de 9.2% pour  $k_{23}^{\text{eff}}$  et avec une erreur de 31.8% pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ .

Le modèle ACG donne une prédiction correcte pour le module de cisaillement transverse alors que sa prédiction est assez éloignée pour le module de compressibilité. Cependant l'incertitude des mesures pour le module de cisaillement est telle que l'on ne peut pas savoir réellement si le modèle ACG fournit une prédiction fiable ou non. Si les méthodes ultrasonores permettent de limiter les incertitudes expérimentales, il n'en reste pas moins vrai que ces incertitudes sur les propriétés moyennes restent importantes. En outre, d'autres problèmes se posent lors de l'utilisation des résultats expérimentaux comme données de référence, même lors de l'augmentation du nombre de tests. Les résultats expérimentaux sont en effet affectés par des comportements non pris en compte par la procédure d'homogénéisation élastique linéaire, tels que des non-linéarités, des incertitudes sur les modules réels des phases employées, ou encore la présence d'interphases de propriétés inconnues entre le renfort et la matrice. L'utilisation d'expériences numériques permet de s'affranchir, au moins dans un premier temps, de ces problèmes pour valider une méthode.

### Réduction de l'incertitude expérimentale avec les simulations numériques

Les résultats obtenus avec la MEF sont utilisés pour tester la réduction de l'incertitude expérimentale. Conduire des simulations numériques permet de mieux maîtriser les conditions et envisager une complexité croissante des microstructures. Gusev *et al.* (2000) a été sélectionné car il combine à la fois des résultats expérimentaux – utilisant des techniques ultrasonores – et numériques pour les propriétés élastiques souhaitées. Nous nous

intéressons ici aux résultats numériques qui sont les suivants :

$$\left. \begin{aligned} \langle k_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{GHW}} &= (16.23 \pm 0.16) \text{ GPa} \\ \langle \mu_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{GHW}} &= (6.14 \pm 0.16) \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Les résultats du modèle ACG pour le matériau composite considéré dans l'article sont :

$$\left. \begin{aligned} k_{23}^{\text{eff}}_{\text{GHW}} &= 14.58 \text{ GPa} \\ \mu_{23}^{\text{eff}}_{\text{GHW}} &= 5.47 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Le modèle ACG semble sous estimer les modules transverses effectifs. Ce résultat montre que l'arrangement aléatoire des fibres conduit à un "rigidification" des propriétés transverses qui n'est pas prise en considération par le modèle ACG.

### Ouverture vers des conditions d'expérience générales

Les résultats présentés dans cette partie sont calculés numériquement (par Éléments Finis) à partir d'images de microstructure générées "virtuellement" et dont la répartition des fibres est aléatoire. Ils proviennent d'une analyse préparatoire à la présente étude.

Dans cet exemple, un composite à 60% de fibres est considéré avec un coefficient de Poisson de la fibre (ou inclusion) à 0.2 et celui de la matrice à 0.3. Le module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  normalisé par le module de cisaillement transverse de la matrice est tracé en fonction du contraste entre les propriétés des phases. Par exemple 1 correspond à un ratio de  $10^1$  entre le module de cisaillement transverse de la fibre sur celui de la matrice. Les pointillés noirs et la zone grise délimitent les bornes de Hashin et Shtrikman (1963). Les résultats par Éléments Finis sont représentés par des trèfles verts et la zone verte représente les différents intervalles de confiance de ces résultats. Une ligne bleue avec des hexagones représente le résultat d'autres calculs par Éléments Finis cette fois avec un arrangement hexagonal des fibres dans le composite. L'important écart entre la courbe verte et la courbe bleue montre l'importance de la prise en compte de la répartition des fibres au sein du composite. Enfin les résultats du modèle ACG sont tracés avec une courbe noire.

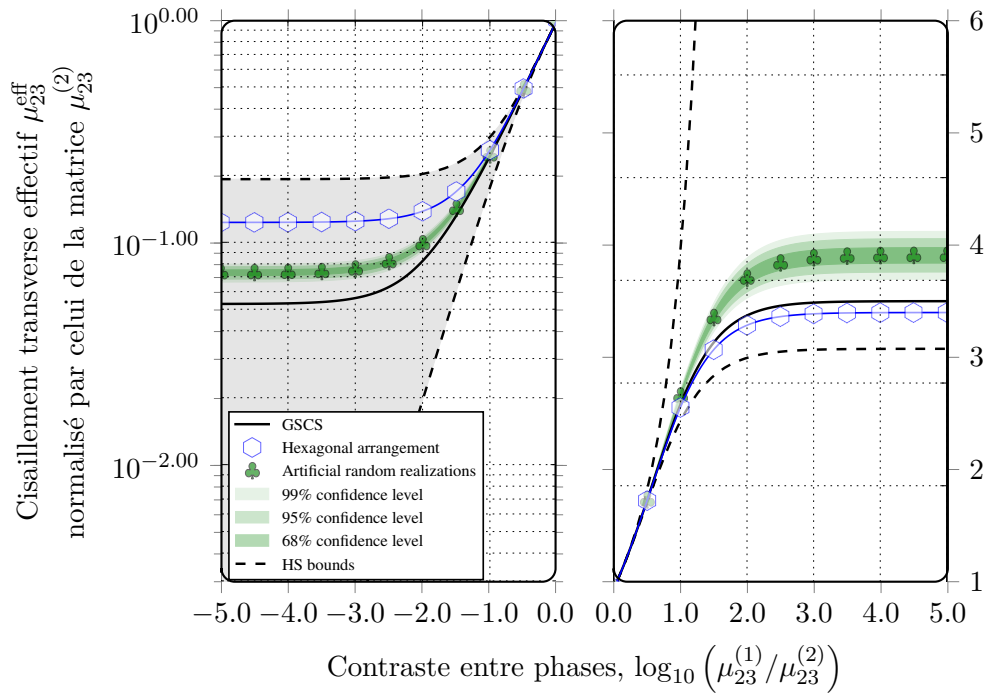


FIGURE 1.6 – Module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  normalisé par le module de cisaillement transverse de la matrice  $\mu_{23}^{(2)}$ , en fonction du contraste entre phases pour une microstructure générée virtuellement. La fraction volumique des inclusions est  $f_1 = 0.6$ ;  $\nu^{(1)} = 0.2$ ,  $\nu^{(2)} = 0.3$ .

### 1.4.2 Comparaison avec les résultats du modèle ACG

Les résultats expérimentaux montrent presque tous un écart entre la valeur moyenne expérimentale obtenue et la prédiction du modèle ACG. Seuls les résultats pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  dans l'exemple de Zimmer et Cost (1970) semblent coïncider. Cependant, une importante incertitude (31.8%) sur ces résultats rend la prédiction du modèle analytique moins évidente à juger. Les résultats des calculs par Éléments Finis ne semblent également pas en accord avec la prédiction du modèle ACG. Jusqu'à un ratio d'environ 10 entre les propriétés des phases, tous les modèles semblent concordant. Au delà, des écarts apparaissent et se stabilisent à partir d'un ratio 1000 entre les propriétés des phases. La courbe noire se situe entre la courbe bleue et la zone verte dont on cherche le modèle qui se rapproche le plus. Le modèle ACG apporte, dans ce cas précis, une meilleure estimation que les calculs Éléments Finis avec un arrangement hexagonal. Cependant un écart persiste. Le modèle ACG ne permet pas, tel qu'il est formulé actuellement, de prendre en compte les fluctuations morphologiques microscopiques telle que la répartition des fibres au sein du composite. C'est là qu'intervient le travail effectué au chapitre 2 avec le développement d'un modèle capable de prendre en compte ces fluctuations morphologiques en s'appuyant sur une approche par motifs.

### 1.4.3 Utilité des expériences numériques

Dans la partie précédente, des résultats ont été étudiés à partir d'images de microstructure générées numériquement. Cette approche permet de fixer les choses : on connaît la microstructure puisque l'on peut choisir certains paramètres qui la détermine. Les ex-

plications sur cette méthode sont données plus tard (voir Chapitre 4). Les maillages sont ceux utilisés pour des calculs en diffusion dans l'article Joannès et Hervé-Luanco (2016) et ont été utilisés dans ce travail pour des calculs en mécanique. L'intérêt de cette méthode est de mieux prendre en compte ce qui se passe. Il est possible de générer plusieurs fois des images de microstructures avec les mêmes paramètres d'entrée. Grâce à un calcul de probabilités, une estimation de l'incertitude est également possible. La méthode utilisée est détaillée dans Poulet (2017).

## 1.5 Approche par Motifs Morphologiques Représentatifs

L'article de base concernant les Motifs Morphologiques Représentatifs (MMR) est celui de Bornert *et al.* (1996) qui généralise la notion d'assemblages de Hashin (Hashin (1962) pour les sphères, Hashin et Rosen (1964) pour les cylindres). Ce modèle a été appliqué aux assemblages de Hashin par Hervé *et al.* (1991) et ce papier détaille l'obtention de bornes sur le module de cisaillement plus resserrées que celles obtenues par Hashin (1962). Le modèle de Bornert *et al.* (1996) permet de prendre en compte l'influence de la distribution des phases sur le comportement effectif du matériau. La démarche générale repose sur la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman (1963) appliquée à un Volume Élémentaire Représentatif du composite élastique étudié et soumis à un chargement macrohomogène. L'approche de Bornert *et al.* (1996) les conduit à des bornes rigoureuses ou à des estimations autocohérentes pour les tenseurs des modules élastiques. Cette démarche appliquée au cas particulier de Motifs Morphologiques Représentatifs requiert la solution d'un problème auxiliaire, celui de l'inclusion hétérogène de géométrie ellipsoïdale noyée en milieu infini. La résolution est faite dans leur papier par éléments finis faute de solution analytique. La notion de points homologues au sein des éléments d'un même motif est introduite. Cette notion est valable dans l'interprétation de nos résultats au niveau local.

### 1.5.1 Approche MMR associée au modèle $(n + 1)$ -phase

#### Cas d'un comportement élastique

Un certain nombre d'applications de l'approche par MMR associées au modèle ACG existe dans la littérature. Bardella et Genna (2001b) ont par exemple développé un nouveau modèle de prédiction des modules élastiques pour des composites appelés mousses syntactiques où des billes de verre creuses sont plongées dans un polymère. L'approche par MMR leur permet d'étudier l'augmentation successive des amas d'inclusions ainsi que la présence de trous (non désirés mais dus à la méthode de fabrication) dans la matrice. L'article de Marcadon *et al.* (2007) explicite en détails l'approche MMR en élasticité dans le cas de deux motifs deux phases pour les composites à particules et permet d'étudier l'influence de paramètres géométriques tels que l'effet de taille ou l'effet d'amas des particules sur les modules élastiques effectifs de tels composites. L'article de Majewski *et al.* (2017a) qui utilise également l'approche MMR, intègre une interphase supplémentaire et propose une comparaison avec des résultats d'homogénéisation par Éléments Finis.

#### Cas d'un comportement viscoélastique

L'approche MMR associée au modèle ACG a été appliquée à d'autres comportements plus complexes comme en viscoélasticité linéaire dans le cas de polymères renforcés par des nanoparticules élastiques avec une phase d'enrobage entre la matrice et la particule viscoélastique (Diani et Gilormini, 2014). L'approche par MMR leur permet d'étudier

l'influence de paramètres microstructuraux comme la dispersion des particules, l'effet de taille des particules ou encore la distance entre particules. Chabert *et al.* (2004) proposent quant à eux une modélisation des interactions particules-particules dans la description du comportement viscoélastique de matériaux renforcés par des nanoparticules.

L'étude des inclusions sphériques ou ellipsoïdales pour le comportement viscoélastique est menée par les articles Alberola et Mele (1996) qui présentent un modèle Auto-Cohérent amélioré grâce à un Motif Morphologique Représentatif constitué d'une inclusion sphérique à trois phases leur permettant de prendre en compte la présence de particules agglomérées. Touboul *et al.* (2007) et de Nguyen et Dormieux (2015) proposent quant à eux une nouvelle approche numérique basée sur les MMR pour les milieux viscoélastiques micro-fissurés avec ou sans propagation de fissures.

### Cas d'un comportement non linéaire

L'approche MMR a aussi été associée au modèle ACG dans le cas de comportement non linéaire : Sanahuja et Dormieux (2005) utilisent la méthode sécante modifiée (permettant de trouver la racine d'une fonction, voir Qiu et Weng (1992), Suquet (1995), Suquet (1997) et Hu (1996)) pour obtenir une expression analytique du critère de rupture macroscopique d'un matériau poreux et Bilger *et al.* (2002) ont développé de nouvelles bornes et estimations auto-cohérentes pour des composites poreux avec une matrice rigide parfaitement plastique et une microstructure similaire à un assemblage de Hashin. Ce travail a permis à Bilger *et al.* (2007) de trouver de nouvelles bornes et estimations pour la surface de charge d'un matériau poreux avec une matrice rigide parfaitement plastique dans le cas où la porosité locale peut varier et à Bardella (2003) de proposer une simplification de la méthode sécante modifiée pour trouver le comportement non linéaire de composites renforcés par des sphères rigides. Bardella *et al.* (2012) ont recherché des résultats numériques à comparer avec plusieurs modèles analytiques dans le cas de composite en mousse syntactique.

#### 1.5.2 Notre approche : extension de l'approche MMR à des composites à fibres en élasticité

Dans ce travail, l'approche MMR à deux motifs constitués de deux phases en élasticité linéaire est développée dans le cas de composites à fibres longues (unidirectionnels). Pour cela, les résultats obtenus dans le cas de composites à fibres avec gradient de propriétés, présentés dans Hervé et Zaoui (1995), sont utilisés ainsi qu'une nouvelle formulation du modèle  $(n + 1)$ -phase présentée dans Hervé-Luanco (2019) pour obtenir des résultats explicites pour le module de compressibilité plan effectif ainsi que pour le module de cisaillement effectif. L'approche théorique pour obtenir les modules élastiques effectifs grâce à l'approche par MMR en partant du tenseur de déformations dans chaque phase et grâce à des opérations de moyenne s'inspire largement de l'approche développée par Marcadon *et al.* (2007) pour le cas des composites à particules et de Hervé-Luanco et Joannès (2016) et Joannès et Hervé-Luanco (2016) pour les composites à fibres soumis à des phénomènes de diffusion. Ces deux derniers articles développent un outil de prédiction des phénomènes de transport pour les composites multicouches à inclusion cylindrique et isotropes transverses. Hervé-Luanco et Joannès (2016) traitent du développement du modèle ACG associé à l'approche MMR pour la prédiction du coefficient de diffusion transverse alors que Joannès et Hervé-Luanco (2016) étudient un cas réel de composite unidirectionnel où le modèle développé permet d'étudier l'influence des amas de fibres sur le coefficient de diffusion transverse.





## Chapitre 2

# Développement d'un modèle analytique ACG par motifs

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
2.1.1	À la recherche des propriétés transverses élastiques des composites unidirectionnels	31
2.1.2	Un modèle micromécanique rationnel	32
<b>2.2</b>	<b>Extension du modèle <math>(n + 1)</math>-phase</b>	<b>33</b>
2.2.1	Méthodologie	35
2.2.2	Mode hydrostatique plan	37
2.2.3	Mode en cisaillement plan	40
<b>2.3</b>	<b>Cas particulier de deux motifs avec deux phases dans chaque motif</b>	<b>47</b>
2.3.1	Définition des paramètres utiles	49
2.3.2	Développement de $k_{23}^{\text{eff}}$	50
2.3.3	Développement de $\mu_{23}^{\text{eff}}$	52
<b>2.4</b>	<b>Synthèse des résultats obtenus</b>	<b>58</b>

---

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 À la recherche des propriétés transverses élastiques des composites unidirectionnels

Anticiper la manière dont une structure va se déformer sous charge et l'un des défis à relever par les ingénieurs en conception mécanique. En raison de leur anisotropie intrinsèque, les matériaux composites à fibres continues peuvent présenter une réponse mécanique dépendant de la direction dans laquelle les charges sont appliquées. Il est clair qu'un seul pli unidirectionnel (UD), par exemple renforçant le caoutchouc d'un pneu, présentera une résistance à la déformation considérable si la charge est appliquée dans le sens des fibres. En revanche, ce même pli subira une déformation plus importante si la charge est maintenant appliquée dans toute autre direction que celle du renfort. L'anisotropie est clairement l'un des avantages des matériaux composites et elle doit être exploitée au mieux. Pour concevoir des structures performantes, les ingénieurs doivent donc être en mesure de prévoir la déformation du matériau pour toutes les directions dans lesquelles

les charges peuvent survenir. A l'échelle du matériau, ces prévisions passent le plus souvent par la caractérisation du matériau suivant ses axes de symétries matérielles. Si ces caractérisations ne posent généralement aucun problème dans la direction longitudinale, en ce qui concerne les propriétés transverses, elles sont davantage affectées par les interactions entre les constituants. Comme cela a pu être illustré dans le chapitre précédent, la caractérisation expérimentale est toujours une procédure fastidieuse et les incertitudes sur les résultats sont souvent grandes. Ces difficultés constituent une motivation pratique pour le développement de modèles pouvant être utilisés pour prédire la performance d'un matériau.

Cependant, cela ne signifie pas que les modèles suppriment les difficultés sous-jacentes. Lorsque la concentration en fibres est suffisamment grande, la loi des mélanges, ne tenant compte que de la fraction volumique des constituants et de leur comportement, fait apparaître de grands écarts par rapport aux solutions attendues pour les modules ici considérés. Des modèles améliorés sont nécessaires pour obtenir des prévisions réalistes des propriétés transverses de ce type de matériaux composites. Les variabilités morphologiques et le regroupement des fibres influencent fortement le comportement linéaire élastique transverse de ces composites. De nombreuses méthodes ont déjà été proposées afin de prédire les propriétés effectives de ce type de milieu multiphasé.

Comme nous avons pu le mentionner en introduction à ce manuscrit, les solutions existantes sont, d'une part, les approches à champ complet – par exemple la Méthode des Éléments Finis (MEF) – nécessitant de modéliser la microstructure de manière détaillée et d'autre part, les approches par champ moyen qui sont basées sur un problème d'inclusion unique. Des approches comme les éléments finis nécessitent des opérations de maillage souvent longues et fastidieuses, en particulier lorsque les fibres sont très proches. Lors de l'utilisation de modèles à champs moyens, seules des informations statistiques sur la microstructure sont nécessaires. Les deux approches ont leurs avantages et le travail présenté dans ce chapitre porte sur un modèle analytique à champs moyens, efficace, rapide et peu coûteux, prenant en compte les fluctuations morphologiques à l'échelle microscopique afin de prédire les modules élastiques transverses de cisaillement et de compressibilité de composites unidirectionnels.

### 2.1.2 Un modèle micromécanique rationnel

Comme expliqué précédemment, ce travail est consacré à l'étude du comportement élastique transverse de composites renforcés par des fibres continues avec différentes distributions de fibres. En se limitant à la forme cylindrique et à l'élasticité isotrope transverse, nous pouvons nous référer à l'assemblage composite de Hashin et Rosen (1964) ou au modèle trois-phases de Christensen et Lo (1979) qui traite du cylindre coaxial à deux phases pour un matériau bi-phasé. Un modèle a été développé dans Hervé et Zaoui (1995) pour prédire le comportement élastique de composites renforcés par des fibres réparties de manière hétérogène, y compris dans le cas des composites renforcés par des fibres enrobées, généralement appelé modèle  $(n + 1)$ -phase. Il est utile de remarquer que le modèle trois-phase proposé par Christensen et Lo (1979) correspond également au modèle  $(n + 1)$ -phase développé par Hervé et Zaoui (1995) dans le cas particulier où  $n = 2$ . Ce dernier travail a également fourni les champs de contrainte et de déformation élastique dans un milieu infini constitué d'une inclusion cylindrique isotrope transverse à  $n$ -couches, entourée d'une matrice cylindrique isotrope transverse soumise à des conditions uniformes à l'infini. Ces champs ont été donnés de manière plus simple dans Hervé-Luanco (2019). À partir de là, nous pouvons étudier le comportement élastique transverse avec des morphologies plus complexes, c'est-à-dire la manière dont les fibres sont réparties à l'intérieur de la matrice

ou le fait que les fibres puissent avoir un gradient de propriété radial. Ces préoccupations mènent directement, d’une part, à plus d’un motif et, d’autre part, à plus de deux phases dans chaque motif.

La méthode utilisée ici pour prendre en compte les morphologies complexes consiste à ajouter autant de motifs élémentaires que nécessaire. Cette méthode a déjà été utilisée dans Marcadon *et al.* (2007) ou dans Majewski *et al.* (2017b) dans le cas de composites renforcés par des particules ayant des effets de taille. On la trouve également dans Bilger *et al.* (2007) et Bardella et Genna (2001c) dans le cas de matériaux poreux ou dans Diani et Gilormini (2014) dans le cas de la viscoélasticité linéaire de polymères nano-renforcés ayant une interphase. Il est à noter que dans Albérola *et al.* (1994) et Mélé *et al.* (2005), un motif “inverse” a déjà été utilisé pour traiter les zones de matrice non percolante. Dans ce travail, le modèle Auto-Cohérent Généralisé (ACG) utilisé dans Hervé-Luanco (2019) et dans Hervé et Zaoui (1995) est couplé à l’approche par Motifs Morphologiques Représentatifs (MMR) développée par Bornert *et al.* (1996) afin de prendre en compte les fluctuations morphologiques locales et la distribution hétérogène des fibres. Des estimations analytiques sont fournies pour les modules transverses de cisaillement et de compressibilité effectifs. L’approche suivie par Marcadon *et al.* (2007) pour les composites à particules dans le cas de deux motifs à deux phases a été généralisée :

1. dans le cas de composites renforcés par des fibres.
2. pour un nombre quelconque de motifs avec un nombre quelconque de phases dans chaque motif, comme dans Hervé-Luanco et Joannès (2016).

Dans ce dernier papier, un modèle a été développé permettant de prédire les propriétés transverses d’un composite renforcé par des fibres continues dans le cas de phénomènes de transport. Dans un deuxième article (Joannès et Hervé-Luanco, 2016), les auteurs ont utilisé leur modèle pour étudier l’influence des effets du regroupement des fibres sur les propriétés transverses des composites vis-à-vis des phénomènes de transport.

Dans ce chapitre, une première partie est consacrée au développement d’une approche basée sur les MMR couplée au modèle  $(n + 1)$ -phase grâce à une réorganisation des matrices de transfert en fonction de leur dépendance au comportement d’une phase comme indiqué dans Hervé-Luanco (2019). Ensuite, le détail du développement des modèles est donné. Les équations finales sont fournies pour les modules transverses de cisaillement et de compressibilité. Dans une seconde partie, le modèle est appliqué dans le cas de deux motifs avec deux phases à l’intérieur de chaque motif. Un exemple d’application est donné pour mettre en évidence les possibilités du modèle présenté. Deux comparaisons avec des données expérimentales sont ensuite présentées.

## 2.2 Extension du modèle $(n + 1)$ -phase grâce à l’approche par motifs

Considérons la configuration définie dans Hervé et Zaoui (1995) où le motif élémentaire représentant la microstructure est une inclusion cylindrique à  $n$  phases qui est noyée dans une matrice infinie et soumise à des conditions aux limites homogènes à l’infini (FIGURE 2.1). Chaque phase est homogène, élastique linéaire et isotrope transverse avec l’axe de l’isotropie transverse dans la direction de la fibre.

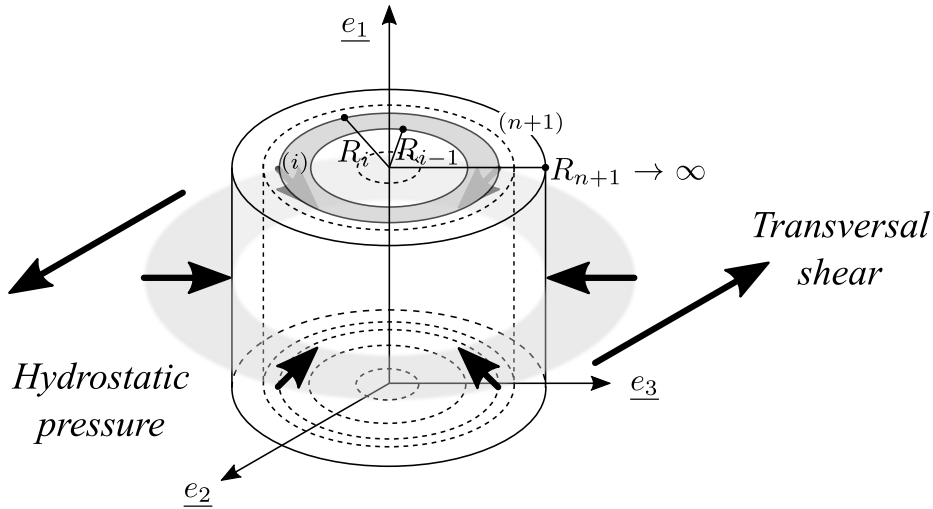


FIGURE 2.1 – Un unique motif élémentaire composé de  $n$ -couche d'inclusions cylindriques le tout plongé dans une matrice infinie, i.e. la phase  $(n + 1)$ .

Supposons d'abord que le Volume Élémentaire Représentatif (VER) de la microstructure étudiée puisse être décomposé en un ensemble de  $N_\lambda$  familles (voir la FIGURE 2.2) de domaines homothétiques finis et identiques dont les matériaux qui les composent sont connus. Ces familles sont appelées ici “motifs”, elles sont constituées de différentes phases et cette microstructure peut faire référence à un assemblage généralisé de motifs de Hashin. La configuration utilisée fait appel à un système de coordonnées cartésien rectangulaire dans le repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  permettant de connaître la position de tout point par rapport à l'origine  $O$  grâce à son vecteur position  $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ . La direction donnée par  $\underline{e}_1$  est parallèle à l'axe longitudinal de la fibre alors que  $(O, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  représente le plan transverse. Un système de coordonnées cylindriques avec le même point origine et le repère orthonormal  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_1)$  peut également être utilisé. Dans ce repère cylindrique, les coordonnées du vecteur position sont définies par  $(r, \theta, x_1)$ . Comme dans Hervé et Zaoui (1995), la phase  $(i)$ , pour  $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ , se trouve dans l'inclusion et est bornée par le rayon intérieur  $R_{i-1}$  et par le rayon extérieur  $R_i$  (voir la FIGURE 2.1). Nous considérons ici que  $R_0 = 0$  et  $R_{n+1} \rightarrow \infty$ . Les interfaces entre les différentes phases sont supposées être parfaites ce qui nécessite la continuité du vecteur déplacement  $\underline{u}$  et du vecteur contrainte  $\underline{T}$  à chaque interface  $r = R_i$ . Soient  $k_{23}^{(i)}$  et  $\mu_{23}^{(i)}$  respectivement le module de compressibilité plan et le module de cisaillement transverse de la phase  $(i)$  et soient  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  respectivement les tenseurs de déformation et de contrainte. Un comportement à symétrie cylindrique est considéré et par conséquent  $k_{23}^{(i)}$  et  $\mu_{23}^{(i)}$  dépendent uniquement de  $r$ . Afin de déterminer les modules effectifs de compressibilité et de cisaillement transverse de l'assemblage (i.e.  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ ), deux modes de sollicitation élémentaire sont étudiés : un mode hydrostatique dans le plan et un mode de cisaillement dans le plan.

### 2.2.1 Méthodologie

Dans les deux modes étudiés, la même méthodologie a été utilisée pour trouver les solutions analytiques explicites des modules de compressibilité et de cisaillement transverse. Les champs locaux à l'intérieur de chaque phase de chaque motif  $\lambda$  où  $\lambda \in \{1, 2, \dots, N_\lambda\}$  sont ici exprimés grâce au modèle développé par Hervé et Zaoui (1995) et simplifié récemment par Hervé-Luanco (2019). Soient  $n_\lambda$  le nombre de phases à l'intérieur du motif  $\lambda$  et  $m_\lambda$  la fraction volumique en motif  $\lambda$ . La phase  $(i_\lambda)$  correspond à la partie de la phase  $(i)$  contenue dans le motif  $\lambda$ . En fonction du contexte,  $i_\lambda$  peut prendre une forme explicite<sup>1</sup> ou simplement une valeur correspondant à la position de la phase  $(i)$  à l'intérieur du motif  $\lambda$ . C'est le cas en particulier si les calculs sont menés avec  $i_\lambda$  comme par exemple,  $i_\lambda - 1$ . Dans ce cas,  $i_\lambda$  peut prendre les valeurs suivantes  $\{1, 2, \dots, n_\lambda\}$ . Considérons que le matériau étudié occupe un volume  $\Omega$ , que le volume correspondant au motif  $\lambda$  soit noté  $\Omega_\lambda$  et que  $\Omega = \cup_{\lambda=1}^{N_\lambda} \Omega_\lambda$  et  $\cap_{\lambda=1}^{N_\lambda} \Omega_\lambda = \emptyset$ .  $\Omega_i$  est le volume correspondant à toutes les parties de la phase  $(i)$  présentes dans les différents motifs et est supposé vérifier  $\Omega_i = \cup_{\lambda=1}^{N_\lambda} \Omega_{i_\lambda}$  et  $\cap_{\lambda=1}^{N_\lambda} \Omega_{i_\lambda} = \emptyset$  où  $\Omega_{i_\lambda}$  est le volume correspondant à la phase  $(i)$  dans le motif  $\lambda$ . Le cas particulier de deux motifs à deux phases (section 2.3) permet de saisir plus facilement la relation entre  $(i)$  et  $(i_\lambda)$ .

Les propriétés globales sont définies en prenant en compte un problème de valeur limite. La détermination du comportement effectif est déduite d'une part, de la solution du problème élémentaire de chaque motif inclus dans une matrice infinie élastique et homogène avec des modules adéquats soumis à la même contrainte uniforme à l'infini et, d'autre part, d'opérations de moyenne appropriées menant à la détermination du tenseur des modules élastiques effectifs  $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$  (modules transverses dans notre cas). La première étape est de considérer que chaque motif est soumis au même type de conditions limites comme pour le modèle classique ACG (Hervé-Luanco, 2019). Les extrémités du composite sont soumises aux conditions limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} u_1^0 = 0 \\ T_2^0 = 0 \\ T_3^0 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

et la surface latérale,  $r = R_{n+1}$ , aux conditions suivantes :

$$\underline{u}^g = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad (2.2)$$

Sur les extrémités de chaque motif :

$$\left. \begin{array}{l} u_1^0 = 0 \\ T_2^0 = 0 \\ T_3^0 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

et sur la surface latérale de chaque motif :

$$\underline{u}^0 = \underline{\varepsilon}^0 \cdot \underline{x} \quad (2.4)$$

où  $\underline{\varepsilon}^0$  dans l'équation (2.4) dépend du mode considéré (mode hydrostatique plan ou mode cisaillement transverse plan).

---

1. Par exemple  $1_2$ , désignant la phase (1) dans le motif 2.

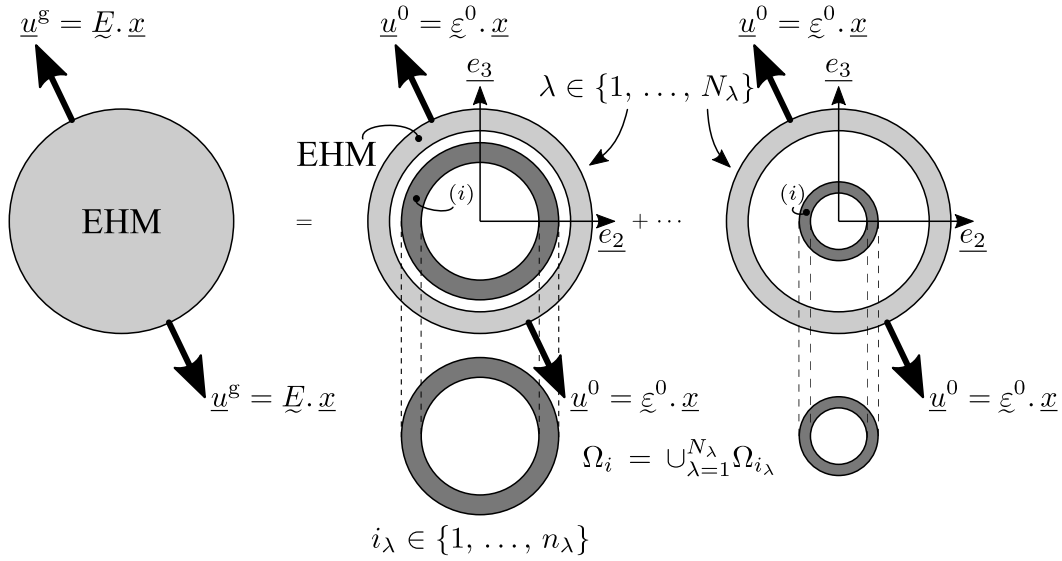


FIGURE 2.2 – Approche MMR avec  $N_\lambda$  motifs constitués de  $n_\lambda$ -phases plongées dans une matrice infinie, i.e. la phase  $(n + 1)$ .

La relation constitutive pour l'élasticité linéaire sera notée par :

$$\sigma = \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \varepsilon \quad (2.5)$$

où

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \equiv \sigma_1 \\ \sigma_{22} \equiv \sigma_2 \\ \sigma_{33} \equiv \sigma_3 \\ \sigma_{23} \equiv \sigma_4 \\ \sigma_{31} \equiv \sigma_5 \\ \sigma_{12} \equiv \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 \equiv 2 \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 \equiv 2 \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_6 \equiv 2 \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Dans le matériau homogène équivalent, nous utiliserons  $C_{ij}^{\text{eff}}$  et dans la phase  $(k)$   $C_{ij}^{(k)}$  pour décrire leur comportement élastique respectif. En combinant  $C_{22}$  et  $C_{23}$ ,  $k_{23}$  et  $\mu_{23}$  peuvent être déterminés selon la relation suivante :

$$\begin{aligned} k_{23} &= \frac{C_{22} + C_{23}}{2} \\ \mu_{23} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Puisque l'élasticité est linéaire sans contrainte propre, le tenseur de contrainte moyen dans n'importe quelle phase  $(i)$  s'écrit comme suit :

$$\langle \varepsilon \rangle_{\Omega_i} = \underset{\sim}{\mathbb{A}}_i : \underline{E} \quad (2.8)$$

où  $\underset{\sim}{\mathbb{A}}_i$  est le tenseur de localisation moyen de la phase  $(i)$ .

Le tenseur des modules élastiques effectifs  $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$  est donné par les relations suivantes :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{C}}^{\text{eff}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{C}}^{\text{eff}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.9)$$

les équations (2.5), (2.8) et (2.9) donnent immédiatement :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left\langle \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathcal{A}}} \right\rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} = \sum_{i=1}^n f_i \underline{\underline{C}}^{(i)} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_i : \underline{\underline{E}} \quad (2.10)$$

où  $f_i$  est la fraction volumique de la phase ( $i$ ). Par conséquent :

$$\underline{\underline{C}}^{\text{eff}} = \sum_{i=1}^n f_i \underline{\underline{C}}^{(i)} : \underline{\underline{\mathcal{A}}}_i \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Mode hydrostatique plan

Dans le cas où un mode hydrostatique plan est considéré, d'après Hervé et Zaoui (1995),  $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$  dans l'équation (2.4) est choisi sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \beta^0 [(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)] \quad (2.12)$$

Grâce à la résolution du problème ( $n+1$ )-phase dans Hervé et Zaoui (1995) (voir l'équation Eq. (37)<sup>95 2</sup>), avec  $\epsilon = 0$ , la moyenne du tenseur des déformations  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}}$  pour chaque phase ( $i_\lambda$ ) de chaque motif  $\lambda$  est donné par :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} = \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{11}^{(n_\lambda)}} \beta^0 [(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)] \quad (2.13)$$

D'après les équations (2.12) et (2.13) on peut remarquer que  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}}$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} = \mathcal{A}_{i_\lambda} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{A}_{i_\lambda}$  est un scalaire défini par :

$$\mathcal{A}_{i_\lambda} = \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{11}^{(n_\lambda)}} \quad (2.15)$$

avec  $\mathbf{Q}$  la matrice de transfert définie dans Hervé et Zaoui (1995). Il est maintenant possible d'écrire la déformation moyenne dans toute la phase ( $i$ ) ( $m_\lambda$  est la fraction volumique en motif  $\lambda$ ) :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \quad (2.16)$$

Ainsi :

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \sum_{i=1}^n f_i \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \quad (2.17)$$

---

2. La notation Eq(numéro d'équation) exposant 95 indique la référence à une équation de l'article Hervé et Zaoui (1995).



Il vient ensuite naturellement que  $E$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &= E [(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)] \\ \text{avec } E &= \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \beta^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

A partir des équations Eqs.<sup>95</sup> (39) et (40) de Hervé et Zaoui (1995) avec  $\epsilon = 0$  et en utilisant l'équation (2.6), on obtient la moyenne du tenseur des contraintes dans la phase ( $i_\lambda$ ) quand chaque motif  $\lambda$  est soumis à un déplacement  $u^0$  donné dans l'équation (2.4) où  $\underline{\xi}^0$  est donné par l'équation (2.12) :

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} &= 2 C_{12}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \beta^0 \\ \langle \sigma_{22} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_{33} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} &= 2 k_{23}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \underline{\xi}^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

ce qui mène à :

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega} &= \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda 2 C_{12}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \beta^0 \\ \langle \sigma_{22} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_{33} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \rangle_{\Omega} &= \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda 2 k_{23}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \underline{\xi}^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Le tenseur des constantes élastiques effectives  $\underline{C}^{\text{eff}}$  est obtenu grâce à la relation (2.9) et à l'équation de comportement l'équation (2.6) appliquées au milieu homogène équivalent :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{11} &= 2 C_{12}^{\text{eff}} E = \langle \sigma_{11} \rangle_{\Omega} \\ \Sigma_{22} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \Sigma_{33} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) &= 2 k_{23}^{\text{eff}} \underline{E} \\ &= \langle \sigma_{22} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_{33} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \rangle_{\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

La comparaison de l'équation (2.21) et l'équation (2.20) où  $\underline{E}$  et  $E$  sont donnés par l'équation (2.18) implique que :

$$\left. \begin{aligned} C_{12}^{\text{eff}} &= \frac{\sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda C_{12}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \right)}{\sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right)} \\ k_{23}^{\text{eff}} &= \frac{\sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda k_{23}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \right)}{\sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Le module de compressibilité transverse effectif  $k_{23}^{\text{eff}}$  est finalement obtenu en remplaçant  $\mathcal{A}_{i_\lambda}$  défini par l'équation (2.15) dans l'équation (2.22) :

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i k_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{11}^{(n_\lambda)}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{11}^{(n_\lambda)}}} \quad (2.23)$$

et on obtient  $C_{12}$  effectif de la même manière :

$$C_{12}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i C_{12}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{11}^{(n_\lambda)}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{11}^{(n_\lambda)}}} \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) ne sera pas utilisée par la suite car seul le comportement élastique transverse est traité ici.

On peut remarquer que  $k_{23}^{\text{eff}}$  donné par l'équation (2.23) dépend de la fraction volumique de chaque phase du composite, de la fraction volumique de chaque motif, de la distribution des différentes phases dans chaque motif mais également des propriétés transverses (modules de compressibilité et de cisaillement) de chaque phase.

Il a été démontré dans Hervé-Luanco (2019) (en utilisant l'équation (2.25)) que  $\mathbf{Q}^{(n_\lambda)}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{Q}^{(n_\lambda)} = \mathbf{J}_{n_\lambda+1}^{-1} (R_{n_\lambda}) \mathbf{Q}^{*(n_\lambda)} \quad (2.25)$$

où seul  $\mathbf{J}_{n_\lambda+1}^{-1} (R_{n_\lambda})$  dépend de  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et avec :

$$\mathbf{J}_{n_\lambda+1}^{-1} (R_{n_\lambda}) = \frac{1}{2 R_{n_\lambda} (k_{23}^{(n_\lambda+1)} + \mu_{23}^{(n_\lambda+1)})} \begin{pmatrix} 2 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} & R_{n_\lambda} \\ 2 k_{23}^{(n_\lambda+1)} & -R_{n_\lambda} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

ce qui donne immédiatement :

$$Q_{11}^{(n_\lambda)} = \frac{2 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} Q_{11}^{*(n_\lambda)} + R_{n_\lambda} Q_{21}^{*(n_\lambda)}}{2 R_{n_\lambda} (k_{23}^{(n_\lambda+1)} + \mu_{23}^{(n_\lambda+1)})} \quad (2.27)$$

$k_{23}^{\text{eff}}$  peut alors être réorganisé en remplaçant  $Q_{11}^{(n_\lambda)}$  par sa valeur issue de l'équation (2.27) dans l'équation (2.23) :

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i k_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)} R_{n_\lambda}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*(n_\lambda)} + R_{n_\lambda} Q_{21}^{*(n_\lambda)}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)} R_{n_\lambda}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*(n_\lambda)} + R_{n_\lambda} Q_{21}^{*(n_\lambda)}}} \quad (2.28)$$

où l'expression  $(k_{23}^{(n_\lambda+1)} + \mu_{23}^{(n_\lambda+1)})$  en facteur de chaque terme a été supprimée car elle est identique dans tous les motifs (même milieu infini entourant tous les motifs).

Les différentes matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}^*$  présentes dans l'équation (2.28) dépendent toutes du motif  $\lambda$  auquel elles sont attachées. Pour cette raison et afin d'évaluer plus facilement  $k_{23}^{\text{eff}}$ , il sera écrit sous la forme suivante<sup>3</sup> en utilisant le symbole  $\textcircled{\lambda}$  pour spécifier la dépendance au motif  $\lambda$  :

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i k_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)\textcircled{\lambda}} R_{n_\lambda\textcircled{\lambda}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{\lambda}} + R_{n_\lambda\textcircled{\lambda}} Q_{21}^{*\textcircled{\lambda}}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)\textcircled{\lambda}} R_{n_\lambda\textcircled{\lambda}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{\lambda}} + R_{n_\lambda\textcircled{\lambda}} Q_{21}^{*\textcircled{\lambda}}}} \quad (2.29)$$

3. Comme  $\mathbf{Q}^*$  est utilisé uniquement pour la phase ( $n_\lambda$ ) et  $n_\lambda$  étant parfaitement défini pour chaque motif,  $\mathbf{Q}^{*(n_\lambda)}$  sera écrit de manière équivalente  $\mathbf{Q}^{*\textcircled{\lambda}}$ .

Pour  $N_\lambda > 1$  (plus d'un motif), il est important de remarquer que le module de compressibilité transverse effectif  $k_{23}^{\text{eff}}$  dépend du module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ .

### 2.2.3 Mode en cisaillement plan

Dans le cas où un mode en cisaillement plan transverse est considéré, d'après Hervé et Zaoui (1995),  $\underline{\varepsilon}^0$  dans l'équation (2.4) est choisi ainsi :

$$\underline{\varepsilon}^0 = \gamma^0 [(e_2 \otimes e_2) - (e_3 \otimes e_3)] \quad (2.30)$$

La même méthodologie que celle présentée dans le cas d'un mode hydrostatique plan est utilisée.

D'après l'équation Eq. (74)<sup>95</sup> publiée dans Hervé et Zaoui (1995), la moyenne du tenseur des contraintes  $\langle \underline{\varepsilon} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}}$  dans chaque phase ( $i_\lambda$ ) de tout motif  $\lambda$  est donnée par l'équation (2.31) où  $A_{i_\lambda}$  - à ne pas confondre avec  $\mathcal{A}_{i_\lambda}$  - et  $D_{i_\lambda}$  sont des constantes définies pour la phase ( $i_\lambda$ ) (voir Hervé et Zaoui (1995)) :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} = \frac{1}{D_{n_\lambda+1}} \left[ D_{i_\lambda} - 3 A_{i_\lambda} \frac{(R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4)}{R_{i_\lambda}^2 (R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2)} \right] \underline{\varepsilon}^0 = \mathcal{A}_{i_\lambda} \underline{\varepsilon}^0 \quad (2.31)$$

ce qui conduit à :

$$\mathcal{A}_{i_\lambda} = \frac{1}{D_{n_\lambda+1}} \left[ D_{i_\lambda} - 3 A_{i_\lambda} \frac{(R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4)}{R_{i_\lambda}^2 (R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2)} \right] \quad (2.32)$$

Il est maintenant simple d'en déduire que nous avons toujours ici :

$$\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle_\Omega = \sum_{i=1}^n f_i \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{\Omega_i} = \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \underline{\varepsilon}^0 \quad (2.33)$$

avec  $\mathcal{A}_{i_\lambda}$  donné maintenant par l'équation (2.32). En conséquence :

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &= E [(e_2 \otimes e_2) - (e_3 \otimes e_3)] \\ \text{avec } E &= \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \gamma^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

En utilisant l'équation de comportement (2.6) on obtient la moyenne du tenseur des contraintes dans la phase ( $i_\lambda$ ) quand chaque motif  $\lambda$  est soumis à l'équation (2.4) où  $\underline{\varepsilon}^0$  est donné par l'équation (2.30) :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_{\Omega_{i_\lambda}} = 2 \mu_{23}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \underline{\varepsilon}^0 \quad (2.35)$$

ce qui conduit à :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_\Omega = \left[ \sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda 2 \mu_{23}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \right) \right] \underline{\varepsilon}^0 \quad (2.36)$$

Le tenseur des constantes élastiques effectif  $\underline{\tilde{C}}^{\text{eff}}$  est obtenu grâce aux relations (2.9) et (2.6) appliquées au milieu homogène équivalent :

$$\underline{\Sigma} = 2 \mu_{23}^{\text{eff}} \underline{E} = \langle \underline{\sigma} \rangle_\Omega \quad (2.37)$$

La comparaison de l'équation (2.36) et de l'équation (2.37) (avec  $\underline{\varepsilon}^0$  donné par l'équation (2.30)), où  $\underline{E}$  et  $E$  sont donnés par l'équation (2.34), implique que :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mu_{23}^{(i_\lambda)} \mathcal{A}_{i_\lambda} \right)}{\sum_{i=1}^n f_i \left( \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \mathcal{A}_{i_\lambda} \right)} \quad (2.38)$$

En remplaçant l'équation (2.32) dans l'équation (2.38) cela conduit à une expression de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  de la forme :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{1}{D_{n_\lambda+1}} \left[ D_{i_\lambda} - 3 A_{i_\lambda} \frac{(R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4)}{R_{i_\lambda}^2 (R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2)} \right]}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{1}{D_{n_\lambda+1}} \left[ D_{i_\lambda} - 3 A_{i_\lambda} \frac{(R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4)}{R_{i_\lambda}^2 (R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2)} \right]} \quad (2.39)$$

Dans Hervé et Zaoui (1995), la forme de la solution du champ de déplacement est exprimée en fonction de quatre constantes ( $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$ ) dans le cas du mode en cisaillement transverse et  $\mathbf{V}_k$  est la matrice dont les composantes sont ces quatre constantes :

$$\mathbf{V}_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \\ D_k \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Ici  $A_{i_\lambda}$  et  $D_{i_\lambda}$  correspondent respectivement à  $A_k$  et  $D_k$  et sont déterminés dans l'équation (2.41) où la phase ( $k$ ) a été remplacée par la phase ( $i_\lambda$ ) présente dans le motif  $\lambda$  et  $n$  a été remplacé par  $n_\lambda$  (voir l'équation Eq. (72)<sup>95</sup> de Hervé et Zaoui (1995)) :

$$\frac{\mathbf{V}_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} = \frac{1}{Q_{44}^{(n_\lambda)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{41}^{(n_\lambda)} Q_{14}^{(n_\lambda)}} \begin{pmatrix} Q_{11}^{(i_\lambda-1)} & Q_{12}^{(i_\lambda-1)} & Q_{13}^{(i_\lambda-1)} & Q_{14}^{(i_\lambda-1)} \\ Q_{21}^{(i_\lambda-1)} & Q_{22}^{(i_\lambda-1)} & Q_{23}^{(i_\lambda-1)} & Q_{24}^{(i_\lambda-1)} \\ Q_{31}^{(i_\lambda-1)} & Q_{32}^{(i_\lambda-1)} & Q_{33}^{(i_\lambda-1)} & Q_{34}^{(i_\lambda-1)} \\ Q_{41}^{(i_\lambda-1)} & Q_{42}^{(i_\lambda-1)} & Q_{43}^{(i_\lambda-1)} & Q_{44}^{(i_\lambda-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Q_{14}^{(n_\lambda)} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{11}^{(n_\lambda)} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$A_{i_\lambda}/D_{n_\lambda+1}$  et  $D_{i_\lambda}/D_{n_\lambda+1}$  dans l'équation (2.39) sont donnés par l'équation (2.42) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} &= \frac{Q_{14}^{(i_\lambda-1)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{11}^{(i_\lambda-1)} Q_{14}^{(n_\lambda)}}{Q_{44}^{(n_\lambda)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{41}^{(n_\lambda)} Q_{14}^{(n_\lambda)}} \\ \frac{D_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} &= \frac{Q_{44}^{(i_\lambda-1)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{14}^{(n_\lambda)} Q_{41}^{(i_\lambda-1)}}{Q_{44}^{(n_\lambda)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{41}^{(n_\lambda)} Q_{14}^{(n_\lambda)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Il est important de constater que  $A_{i_\lambda}$  et  $D_{i_\lambda}$  dépendent de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  à travers les différentes composantes de  $\mathbf{Q}^{(n_\lambda)}$ . Afin de faire ressortir la dépendance en  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  dans l'équation (2.39),  $\mathbf{Q}^{(n_\lambda)}$  s'exprime grâce à l'équation (2.25) où  $\mathbf{Q}^{*(n_\lambda)}$  ne dépend pas de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ . Ensuite,

$(\nu_{n_\lambda+1} - 1) \mathbf{J}_{n_\lambda+1}^{-1}(R_{n_\lambda})$  (voir Hervé-Luanco (2019)) est donné, pour le mode en cisaillement transverse, par :

$$\left( \begin{array}{cccc} -\frac{R_{n_\lambda+1}^2}{8 R_{n_\lambda}^3} & -\frac{R_{n_\lambda+1}^2}{8 R_{n_\lambda}^3} & -\frac{R_{n_\lambda+1}^2}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} R_{n_\lambda}^2} & -\frac{R_{n_\lambda+1}^2}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} R_{n_\lambda}^2} \\ 0 & -\frac{R_{n_\lambda}^3}{4 R_{n_\lambda+1}^4} & -\frac{\nu_{n_\lambda+1} R_{n_\lambda}^4}{12 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} R_{n_\lambda+1}^4} & -\frac{(2 \nu_{n_\lambda+1} - 3) R_{n_\lambda}^4}{24 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} R_{n_\lambda+1}^4} \\ -\frac{R_{n_\lambda}}{8 R_{n_\lambda+1}^2} & -\frac{R_{n_\lambda}}{8 R_{n_\lambda+1}^2} & -\frac{R_{n_\lambda}^2}{16 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} R_{n_\lambda+1}^2} & -\frac{R_{n_\lambda}^2}{16 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} R_{n_\lambda+1}^2} \\ -\frac{1}{2 R_{n_\lambda}} & -\frac{1}{4 R_{n_\lambda}} & -\frac{\nu_{n_\lambda+1} - 1}{4 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} & -\frac{2 \nu_{n_\lambda+1} - 1}{8 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} \end{array} \right) \quad (2.43)$$

Afin de faciliter la lecture,  $n_\lambda$  étant parfaitement défini pour chaque motif,  $\mathbf{Q}^{*(n_\lambda)}$  sera noté  $\mathbf{Q}^{*\textcircled{\lambda}}$  dans les équations suivantes où  $\textcircled{\lambda}$  indique la dépendance au motif  $\lambda$ . Il faut prendre en compte le fait que la phase  $(n_\lambda + 1)$  est la même phase dans tous les motifs et correspond au milieu effectif. Afin de déterminer  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ , nous considérerons donc que  $k_{23}^{\text{eff}} = k_{23}^{(n_\lambda+1)}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}} = \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}$ . Le coefficient  $\nu_{n_\lambda+1}$  peut être calculé en utilisant sa définition donnée dans Hervé et Zaoui (1995) :

$$\nu_{n_\lambda+1} = \frac{C_{23}^{(n_\lambda+1)}}{C_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{22}^{(n_\lambda+1)}} \quad (2.44)$$

En utilisant l'équation (2.7) :

$$\left. \begin{array}{l} k_{23}^{(n_\lambda+1)} = \frac{C_{22}^{(n_\lambda+1)} + C_{23}^{(n_\lambda+1)}}{2} \\ \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} = \frac{C_{22}^{(n_\lambda+1)} - C_{23}^{(n_\lambda+1)}}{2} \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

$\nu_{n_\lambda+1}$  peut alors être réécrit de manière équivalente sous la forme :

$$\nu_{n_\lambda+1} = \frac{k_{23}^{(n_\lambda+1)} - \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{2 k_{23}^{(n_\lambda+1)}} \quad (2.46)$$

Ou plus généralement et dans la phase  $(k)$  sous la forme suivante :

$$\nu_k = \frac{k_{23}^{(k)} - \mu_{23}^{(k)}}{2 k_{23}^{(k)}} \quad (2.47)$$

Calculons maintenant le dénominateur de l'équation (2.42) :

$$\{\mathbf{A}\}_{\subseteq / D_{n_\lambda+1}} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{44}^{(n_\lambda)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{41}^{(n_\lambda)} Q_{14}^{(n_\lambda)} \quad (2.48)$$

Toutes les composantes de  $\mathbf{Q}^{(n_\lambda)}$  présentes dans l'équation précédente peuvent être déter-

minées en substituant l'équation (2.43) dans (2.25)<sup>4</sup> :

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{44}^{(n_\lambda)} &= \frac{1}{\nu_{n_\lambda+1} - 1} \left[ -\frac{Q_{14}^{*\lambda}}{2 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{24}^{*\lambda}}{4 R_{n_\lambda}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Q_{34}^{*\lambda}}{4 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (\nu_{n_\lambda+1} - 1) - \frac{Q_{44}^{*\lambda}}{8 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (2 \nu_{n_\lambda+1} - 1) \right] \\
 Q_{11}^{(n_\lambda)} &= \frac{1}{\nu_{n_\lambda+1} - 1} \left( \frac{R_{n_\lambda+1}}{R_{n_\lambda}} \right)^2 \left[ -\frac{Q_{11}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Q_{21}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{31}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} - \frac{Q_{41}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right] \\
 Q_{41}^{(n_\lambda)} &= \frac{1}{\nu_{n_\lambda+1} - 1} \left[ -\frac{Q_{11}^{*\lambda}}{2 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{21}^{*\lambda}}{4 R_{n_\lambda}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Q_{31}^{*\lambda}}{4 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (\nu_{n_\lambda+1} - 1) - \frac{Q_{41}^{*\lambda}}{8 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (2 \nu_{n_\lambda+1} - 1) \right] \\
 Q_{14}^{(n_\lambda)} &= \frac{1}{\nu_{n_\lambda+1} - 1} \left( \frac{R_{n_\lambda+1}}{R_{n_\lambda}} \right)^2 \left[ -\frac{Q_{14}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Q_{24}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{34}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} - \frac{Q_{44}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Grâce aux les équations (2.46) et (2.49),  $\{A\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}}$  peut ainsi être réécrit comme :

$$\{A\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} = \frac{4 R_{n_\lambda+1}^2}{R_{n_\lambda}^2 \left( 1 + \frac{\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{k_{23}} \right)^2} \left( \begin{array}{cc} \{B_1\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} & \{B_2\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} \\ - & - \\ \{B_3\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} & \{B_4\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} \end{array} \right) \quad (2.50)$$

avec  $\{B_p\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}}$ ,  $p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , donnés par :

$$\left. \begin{aligned}
 \{B_1\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{Q_{14}^{*\lambda}}{2 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{24}^{*\lambda}}{4 R_{n_\lambda}} + \frac{Q_{34}^{*\lambda}}{4 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (\nu_{n_\lambda+1} - 1) - \\
 &\quad - \frac{Q_{44}^{*\lambda}}{8 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (2 \nu_{n_\lambda+1} - 1) \\
 \{B_2\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{Q_{11}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{21}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{31}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} - \frac{Q_{41}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} \\
 \{B_3\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{Q_{11}^{*\lambda}}{2 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{21}^{*\lambda}}{4 R_{n_\lambda}} + \frac{Q_{31}^{*\lambda}}{4 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (\nu_{n_\lambda+1} - 1) - \\
 &\quad - \frac{Q_{41}^{*\lambda}}{8 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} (2 \nu_{n_\lambda+1} - 1) \\
 \{B_4\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{Q_{14}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{24}^{*\lambda}}{8 R_{n_\lambda}} - \frac{Q_{34}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}} - \frac{Q_{44}^{*\lambda}}{48 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

4. Afin d'éviter toute erreur, les symboles des opérateurs mathématiques sont intentionnellement répétés quand l'équation est coupée.

En réarrangeant les équations (2.51) grâce à l'équation (2.52) :

$$Z_{ij}^{\otimes} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{i4}^{*\otimes} Q_{j1}^{*\otimes} - Q_{j4}^{*\otimes} Q_{i1}^{*\otimes} \quad (2.52)$$

avec  $i, j \in \{1, 4\}$  et en utilisant (2.46) il vient que :

$$384 R_{n_\lambda}^2 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} \left( \begin{array}{cc} \{B_1\} & \{B_2\} \\ \subseteq/D_{n_\lambda+1} & \subseteq/D_{n_\lambda+1} \end{array} - \begin{array}{cc} \{B_3\} & \{B_4\} \\ \subseteq/D_{n_\lambda+1} & \subseteq/D_{n_\lambda+1} \end{array} \right) = A_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{\otimes} \quad (2.53)$$

où  $A_{\otimes}$ ,  $B_{\otimes}$  et  $C_{\otimes}$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} A_{\otimes} &\stackrel{\text{def}}{=} 12 Z_{12}^{\otimes} + 6 \frac{R_{n_\lambda} \otimes}{k_{23}^{\text{eff}}} \left( Z_{14}^{\otimes} + Z_{32}^{\otimes} + Z_{24}^{\otimes} + Z_{31}^{\otimes} \right) \\ B_{\otimes} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 Z_{34}^{\otimes} R_{n_\lambda}^2}{k_{23}^{\text{eff}}} + 2 R_{n_\lambda} \otimes \left( 2 Z_{14}^{\otimes} + 2 Z_{32}^{\otimes} + Z_{24}^{\otimes} + Z_{31}^{\otimes} \right) \\ C_{\otimes} &\stackrel{\text{def}}{=} Z_{34}^{\otimes} R_{n_\lambda}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Il est important de noter que  $A_{\otimes}$  et  $B_{\otimes}$  dépendent de  $k_{23}^{\text{eff}}$ .

Finalement :

$$\begin{aligned} \{A\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}} &= \frac{R_{n_\lambda+1}^2}{96 R_{n_\lambda}^4 \left( 1 + \frac{\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{k_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right)^2 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2}} \times \\ &\times \left( A_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{\otimes} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

l'équation (2.42) prend la forme suivante et peut donc être calculée grâce à l'équation (2.55) et à l'équation (2.49) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} &= \frac{Q_{14}^{(i_\lambda-1)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{11}^{(i_\lambda-1)} Q_{14}^{(n_\lambda)}}{\{A\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}}} \\ \frac{D_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} &= \frac{Q_{44}^{(i_\lambda-1)} Q_{11}^{(n_\lambda)} - Q_{14}^{(n_\lambda)} Q_{41}^{(i_\lambda-1)}}{\{A\}_{\subseteq/D_{n_\lambda+1}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

ce qui mène à :

$$\frac{A_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} = \frac{4 R_{n_\lambda} \left( 1 + \frac{\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{k_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right) \left( 6 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} \alpha_{A_{i_\lambda}} + R_{n_\lambda} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} \beta_{A_{i_\lambda}} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{\otimes}} \quad (2.57)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{A_{i_\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} Q_{14}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{11}^{*\otimes} + Q_{21}^{*\otimes} \right) - Q_{11}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{14}^{*\otimes} + Q_{24}^{*\otimes} \right) \\ \beta_{A_{i_\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} Q_{14}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{31}^{*\otimes} + Q_{41}^{*\otimes} \right) - Q_{11}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{34}^{*\otimes} + Q_{44}^{*\otimes} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

et

$$\frac{D_{i_\lambda}}{D_{n_\lambda+1}} = \frac{4 R_{n_\lambda} \left( 1 + \frac{\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{k_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right) \left[ 6 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} \alpha_{D_{i_\lambda}} + R_{n_\lambda} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} \beta_{D_{i_\lambda}} \right]}{A_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{\otimes}} \quad (2.59)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{D_{i_\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} Q_{44}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{11}^{*\otimes} + Q_{21}^{*\otimes} \right) - Q_{41}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{14}^{*\otimes} + Q_{24}^{*\otimes} \right) \\ \beta_{D_{i_\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} Q_{44}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{31}^{*\otimes} + Q_{41}^{*\otimes} \right) - Q_{41}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{34}^{*\otimes} + Q_{44}^{*\otimes} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

En remplaçant  $A_{i_\lambda}/D_{n_\lambda+1}$  et  $D_{i_\lambda}/D_{n_\lambda+1}$  respectivement par les expressions de l'équation (2.57) et par l'équation (2.59) dans l'équation (2.39),  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  devient :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{4 m_\lambda R_{n_\lambda} \left( 1 + \frac{\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{k_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right) \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} \left( 6 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{n_\lambda} \beta_{\otimes}^{(i)} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{\otimes}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{4 m_\lambda R_{n_\lambda} \left( 1 + \frac{\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}}{k_{23}^{(n_\lambda+1)}} \right) \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} \left( 6 \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{n_\lambda} \beta_{\otimes}^{(i)} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{(n_\lambda+1)} + C_{\otimes}}} \quad (2.61)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\otimes}^{(i)} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{D_{i_\lambda}} - 3 \frac{R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4}{R_{i_\lambda}^2 (R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2)} \alpha_{A_{i_\lambda}} \\ \beta_{\otimes}^{(i)} &\stackrel{\text{def}}{=} \beta_{D_{i_\lambda}} - 3 \frac{R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4}{R_{i_\lambda}^2 (R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2)} \beta_{A_{i_\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

$\mu_{23}^{(n_\lambda+1)}$  et  $k_{23}^{(n_\lambda+1)}$  ne dépendent pas du motif auquel ils sont attachés (voir la FIGURE 2.2) en conséquence ils ne dépendent pas de  $\lambda$  et l'équation (2.61) peut être reformulée ainsi :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{m_\lambda R_{n_\lambda} \left( 6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{n_\lambda} \beta_{\otimes}^{(i)} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{m_\lambda R_{n_\lambda} \left( 6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{n_\lambda} \beta_{\otimes}^{(i)} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}}} \quad (2.63)$$



où

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_{\mathbb{A}}^{(i)} &= Q_{44}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{11}^{*\mathbb{A}} + Q_{21}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
&\quad - Q_{41}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{14}^{*\mathbb{A}} + Q_{24}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
&\quad - 3 \frac{\left( R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4 \right)}{R_{i_\lambda}^2 \left( R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2 \right)} \times \\
&\quad \times \left[ Q_{14}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{11}^{*\mathbb{A}} + Q_{21}^{*\mathbb{A}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - Q_{11}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{14}^{*\mathbb{A}} + Q_{24}^{*\mathbb{A}} \right) \right] \\
\beta_{\mathbb{A}}^{(i)} &= Q_{44}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{31}^{*\mathbb{A}} + Q_{41}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
&\quad - Q_{41}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{34}^{*\mathbb{A}} + Q_{44}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
&\quad - 3 \frac{\left( R_{i_\lambda}^4 - R_{i_\lambda-1}^4 \right)}{R_{i_\lambda}^2 \left( R_{i_\lambda}^2 - R_{i_\lambda-1}^2 \right)} \times \\
&\quad \times \left[ Q_{14}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{31}^{*\mathbb{A}} + Q_{41}^{*\mathbb{A}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - Q_{11}^{(i_\lambda-1)} \left( Q_{34}^{*\mathbb{A}} + Q_{44}^{*\mathbb{A}} \right) \right]
\end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

L'équation (2.63) est une équation implicite qui dépend à la fois de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et de  $k_{23}^{\text{eff}}$  à travers les termes  $A_{\mathbb{A}}$  et  $B_{\mathbb{A}}$ .

Dans les différentes applications, nous utiliserons les expressions suivantes pour prendre en compte le fait que les différents rayons et matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}^*$  présents dans l'équation (2.63) dépendent du motif  $\lambda$  auquel ils sont attachés :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{m_\lambda R_{n_\lambda \mathbb{A}} \left( 6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\mathbb{A}}^{(i)} + R_{n_\lambda \mathbb{A}} \beta_{\mathbb{A}}^{(i)} \right)}{A_{\mathbb{A}} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\mathbb{A}} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathbb{A}}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{m_\lambda R_{n_\lambda \mathbb{A}} \left( 6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\mathbb{A}}^{(i)} + R_{n_\lambda \mathbb{A}} \beta_{\mathbb{A}}^{(i)} \right)}{A_{\mathbb{A}} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\mathbb{A}} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathbb{A}}}} \quad (2.65)$$

où finalement

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{\mathbb{A}}^{(i)} &= Q_{44}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{11}^{*\mathbb{A}} + Q_{21}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
 &\quad - Q_{41}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{14}^{*\mathbb{A}} + Q_{24}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
 &\quad - 3 \frac{\left( R_{i_\lambda\mathbb{A}}^4 - R_{i_\lambda-1\mathbb{A}}^4 \right)}{R_{i_\lambda\mathbb{A}}^2 \left( R_{i_\lambda\mathbb{A}}^2 - R_{i_\lambda-1\mathbb{A}}^2 \right)} \times \\
 &\quad \times \left[ Q_{14}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{11}^{*\mathbb{A}} + Q_{21}^{*\mathbb{A}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - Q_{11}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{14}^{*\mathbb{A}} + Q_{24}^{*\mathbb{A}} \right) \right] \\
 \beta_{\mathbb{A}}^{(i)} &= Q_{44}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{31}^{*\mathbb{A}} + Q_{41}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
 &\quad - Q_{41}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{34}^{*\mathbb{A}} + Q_{44}^{*\mathbb{A}} \right) - \\
 &\quad - 3 \frac{\left( R_{i_\lambda\mathbb{A}}^4 - R_{i_\lambda-1\mathbb{A}}^4 \right)}{R_{i_\lambda\mathbb{A}}^2 \left( R_{i_\lambda\mathbb{A}}^2 - R_{i_\lambda-1\mathbb{A}}^2 \right)} \times \\
 &\quad \times \left[ Q_{14}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{31}^{*\mathbb{A}} + Q_{41}^{*\mathbb{A}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - Q_{11}^{(i_\lambda-1)\mathbb{A}} \left( Q_{34}^{*\mathbb{A}} + Q_{44}^{*\mathbb{A}} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

On peut constater ici également (voir les équations (2.65) et (2.54)) que le module de cisaillement transverse effectif dépend du module de compressibilité transverse effectif. Finalement, les deux modules  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  sont liés l'un à l'autre. De plus, le rayon  $R_{n_\lambda\mathbb{A}}$  disparaît dans les deux équations finales (2.29) et (2.65) dans certains cas particuliers comme  $N_\lambda = 2$  et  $n_\lambda = 2$  pour chaque motif (voir section 2.3).

## 2.3 Cas particulier de deux motifs avec deux phases dans chaque motif

Dans cette section, nous considérons un motif “direct” et un motif “inverse” comme dessinés sur la FIGURE 2.3.

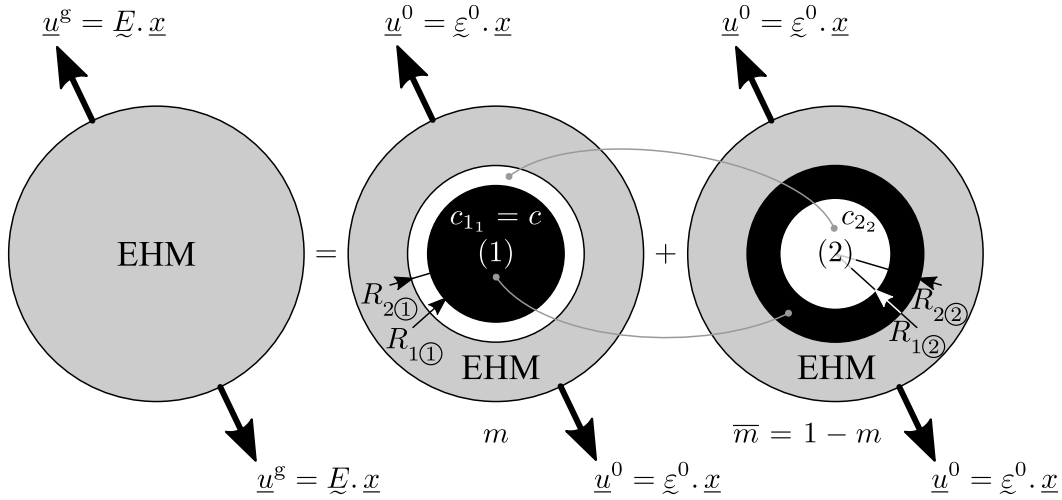


FIGURE 2.3 – Deux motifs morphologiques représentatifs.

Afin de prendre en compte les fluctuations morphologiques locales causées par le regroupement des fibres, le modèle développé dans la section précédente a été utilisé avec deux motifs de deux phases chacun ( $N_\lambda = 2$  et  $n_\lambda = 2$  pour chaque motif). Le premier motif ( $\lambda = 1$ ) est appelé le motif “direct” et est constitué de deux cylindres concentriques où la phase intérieure est composée du matériau de la fibre (1) et la phase externe est uniquement composée de la matrice (2). Le second motif ( $\lambda = 2$ ) est appelé quant à lui le motif “inverse” où au contraire, la phase interne est maintenant de la matrice pure (2) et la phase extérieure est composée du matériau de la fibre (1). Soit  $f$  la fraction volumique globale en fibres, i.e.  $f = f_1$  et soient  $m$  la fraction volumique du premier motif et  $c$  la fraction volumique en fibres dans ce premier motif.

Soit  $(i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), la phase qui se trouve dans chaque motif  $\lambda$  à l’intérieur de la zone limitée par les deux cylindres concentriques aux rayons  $R_{i-1(\lambda)}$  et  $R_{i(\lambda)}$  pour  $\lambda \in \{1, 2\}$ . Dans la configuration étudiée, la phase (1) représente les fibres et est notée phase (1<sub>1</sub>) dans le motif direct 1 et notée phase (1<sub>2</sub>) dans le motif inverse 2. Comme montré sur la FIGURE 2.3, la phase (1<sub>1</sub>) correspond à la première phase, i.e. la phase intérieure, du motif 1 et se trouve entre les rayons  $R_{0(1)} = 0$  et  $R_{1(1)}$ . En considérant encore la zone de fibres, la phase (1<sub>2</sub>) correspond à la phase extérieure, i.e. la seconde phase du motif 2, et se trouve entre les rayons  $R_{1(2)}$  et  $R_{2(2)}$ . Il est important de ne pas confondre le numéro de phase et leur numéro d’indexation dans chaque motif. Cela est noté comme suit pour les fractions volumiques mais s’applique également aux rayons :  $c_{i\lambda}$  correspond à la fraction volumique de la phase  $(i)$  dans le motif  $\lambda$  alors que  $c_{i(\lambda)}$  est la fraction volumique de la “i-ième” phase dans le motif  $\lambda$ ;  $c_{2_2}$  et  $c_{2(2)}$  ne sont donc pas équivalents. Les paramètres présentés sur la FIGURE 2.3 sont liés par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} c_{1_1} = c_{1(1)} = c = R_{1(1)}^2 / R_{2(1)}^2 \quad \text{and} \quad c_{2_1} = c_{2(1)} = 1 - c \\ c_{1_2} = c_{2(2)} = 1 - c_{2_2} \quad \text{and} \quad c_{2_2} = c_{1(2)} = R_{1(2)}^2 / R_{2(2)}^2 \\ f_1 = mc_{1_1} + (1 - m)c_{1_2} = mc + (1 - m)(1 - c_{2_2}) = f \\ f_2 = 1 - f \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

$f$ ,  $m$  et  $c$  sont les trois paramètres indépendants du modèle et toutes ces données permettent d'exprimer  $c_{2_2}$  sous la forme  $c_{2_2} = [(1 - f) + m(c - 1)] / (1 - m)$ . De plus, soient  $(k_{23}^{(i)}, \mu_{23}^{(i)})$  respectivement le module de compressibilité transverse et le module de cisaillement transverse de la phase  $(i)$ .

Les équations (2.29) et (2.65) ont été développées dans ce cas particulier de deux motifs avec deux phases dans chaque motif.

### 2.3.1 Définition des paramètres utiles

Par la suite, nous utiliserons les fonctions et paramètres définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{Id} : \{1, 2\}_{\subseteq \Omega} &\rightarrow \{1, 2\}_{\subseteq \mathbb{N}} \\ \lambda &\mapsto \text{Id}(\lambda) \equiv \boxed{\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 1 \\ 2 & \text{si } \lambda = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \text{Cp} : \{1, 2\}_{\subseteq \Omega} &\rightarrow \{1, 2\}_{\subseteq \mathbb{N}} \\ \lambda &\mapsto \text{Cp}(\lambda) \equiv \blacksquare = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 2 \\ 2 & \text{si } \lambda = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.69)$$

où l'ensemble d'arrivée  $\{1, 2\}_{\subseteq \mathbb{N}}$  des transformations Id et Cp a totalement perdu les références au "motif". Cela signifie que les images  $\text{Id}(\lambda)$ , i.e.  $\boxed{\lambda}$ , et  $\text{Cp}(\lambda)$ , i.e.  $\blacksquare$ , sont des nombres naturels et peuvent par exemple décrire les numéros de phase s'ils sont placés entre parenthèses ou en indices comme ceci :  $\bullet^{(k)}$  ou  $\bullet_k$ . Donc, d'après les paramètres utilisés dans Hervé et Zaoui (1995) :

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\boxed{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} \mu_{23}^{(\boxed{\lambda})} / \mu_{23}^{(\blacksquare)} \\ a_{\boxed{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\boxed{\lambda}} + (3 - 4 \nu_{\boxed{\lambda}}) \\ b_{\boxed{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} (3 - 2 \nu_{\boxed{\lambda}}) + \rho_{\boxed{\lambda}} (2 \nu_{\blacksquare} - 3) \\ c_{\boxed{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \rho_{\boxed{\lambda}} (3 - 4 \nu_{\blacksquare}) \\ d_{\boxed{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \nu_{\boxed{\lambda}} - 1 + \rho_{\boxed{\lambda}} (1 - 2 \nu_{\blacksquare}) \\ e_{\boxed{\lambda}} &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \rho_{\boxed{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

où  $\nu_{\boxed{\lambda}}$  et  $\nu_{\blacksquare}$  sont calculés grâce à l'équation (2.47). De plus :

$$q_{\boxed{\lambda}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} R_{1(\boxed{\lambda})}^2 / R_{2(\boxed{\lambda})}^2 \Rightarrow \begin{cases} q_{\textcircled{1}}^2 = c \\ q_{\textcircled{2}}^2 = c_{2_2} \end{cases} \quad (2.71)$$

Pour calculer  $\alpha_{\boxed{\lambda}}^{(i)}$  et  $\beta_{\boxed{\lambda}}^{(i)}$  dans le cas où on cherche le module de cisaillement transverse effectif, la relation suivante sera prise en compte :

$$c_{\boxed{\lambda}} = a_{\boxed{\lambda}} + 2 d_{\boxed{\lambda}} \quad (2.72)$$

### 2.3.2 Développement de $k_{23}^{\text{eff}}$

Lorsque l'on considère le cas de deux motifs à deux phases chacun, l'équation (2.29) devient :

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^2 f_i k_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^2 m_{\lambda} \frac{Q_{11}^{(i_{\lambda}-1)\textcircled{\lambda}} R_{2\textcircled{\lambda}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{\lambda}} + R_{2\textcircled{\lambda}} Q_{21}^{*\textcircled{\lambda}}}}{\sum_{i=1}^2 f_i \sum_{\lambda=1}^2 m_{\lambda} \frac{Q_{11}^{(i_{\lambda}-1)\textcircled{\lambda}} R_{2\textcircled{\lambda}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{\lambda}} + R_{2\textcircled{\lambda}} Q_{21}^{*\textcircled{\lambda}}}} \quad (2.73)$$

En remplaçant les différentes composantes des matrices  $\mathbf{Q}^{\textcircled{\lambda}}$  (voir Hervé et Zaoui (1995)) (pour  $\lambda \in \{1, 2\}$ ) dans l'équation (2.73) on obtient :

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{f k_{23}^{(1)} \{A_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} + (1-f) k_{23}^{(2)} \{A_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}}{f \{A_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} + (1-f) \{A_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{B_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}}{\{B_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}} \quad (2.74)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{m Q_{11}^{(0)\textcircled{1}} R_{2\textcircled{1}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{1}} + R_{2\textcircled{1}} Q_{21}^{*\textcircled{1}}} + \frac{(1-m) Q_{11}^{(1)\textcircled{2}} R_{2\textcircled{2}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{2}} + R_{2\textcircled{2}} Q_{21}^{*\textcircled{2}}} \\ \{A_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{m Q_{11}^{(1)\textcircled{1}} R_{2\textcircled{1}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{1}} + R_{2\textcircled{1}} Q_{21}^{*\textcircled{1}}} + \frac{(1-m) Q_{11}^{(0)\textcircled{2}} R_{2\textcircled{2}}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\textcircled{2}} + R_{2\textcircled{2}} Q_{21}^{*\textcircled{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Les matrices  $\mathbf{Q}^{\textcircled{\lambda}}$  sont déterminées à partir de Hervé et Zaoui (1995) pour  $\lambda \in \{1, 2\}$  :

$$\mathbf{Q}^{(0)\textcircled{\lambda}} = \mathbf{I} \implies Q_{11}^{(0)\textcircled{\lambda}} = 1 \quad (2.76)$$

$$\mathbf{Q}^{(1)\textcircled{\lambda}} = N^{\lambda(1)} = \frac{1}{\mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} + k_{23}^{(\mathbf{\lambda})}} \begin{pmatrix} (\mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} + k_{23}^{(\mathbf{\lambda})}) & R_{0\textcircled{\lambda}}^2 (\mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} - \mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})}) \\ (k_{23}^{(\mathbf{\lambda})} - k_{23}^{(\mathbf{\lambda})}) & R_{1\textcircled{\lambda}}^2 (\mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} + k_{23}^{(\mathbf{\lambda})}) \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

$R_{0\textcircled{\lambda}}^2 = 0$  par définition ce qui implique que :

$$Q_{11}^{(1)\textcircled{\lambda}} = \frac{\mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} + k_{23}^{(\mathbf{\lambda})}}{\mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} + k_{23}^{(\mathbf{\lambda})}} \quad (2.78)$$

Afin de trouver  $k_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  à partir de l'équation (2.73), les matrices  $\mathbf{Q}$  doivent être calculées en utilisant les matrices  $\mathbf{Q}^*$  comme dans Hervé-Luanco (2019).

$$\mathbf{Q}^{*\textcircled{\lambda}} = \mathbf{J}_2^{\textcircled{\lambda}} (R_{2\textcircled{\lambda}}) \mathbf{Q}^{(1)\textcircled{\lambda}} \quad (2.79)$$

avec

$$\mathbf{J}_2^{\textcircled{\lambda}} (R_{2\textcircled{\lambda}}) = \begin{pmatrix} R_{2\textcircled{\lambda}} & \frac{R_{1\textcircled{\lambda}}^2}{R_{2\textcircled{\lambda}}} \\ 2 k_{23}^{(\mathbf{\lambda})} & -2 \frac{R_{1\textcircled{\lambda}}^2}{R_{2\textcircled{\lambda}}} \mu_{23}^{(\mathbf{\lambda})} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

On montre facilement que :

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{R_{2\langle \lambda \rangle} \left( \mu_{23}^{(\square)} + k_{23}^{(\square)} \right) + \frac{R_{1\langle \lambda \rangle}^2}{R_{2\langle \lambda \rangle}} \left( k_{23}^{(\square)} - k_{23}^{(\square)} \right)}{\mu_{23}^{(\square)} + k_{23}^{(\square)}} \\ Q_{21}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{2 k_{23}^{(\square)} \left( \mu_{23}^{(\square)} + k_{23}^{(\square)} \right) - 2 \frac{R_{1\langle \lambda \rangle}^2}{R_{2\langle \lambda \rangle}} \mu_{23}^{(\square)} \left( k_{23}^{(\square)} - k_{23}^{(\square)} \right)}{\mu_{23}^{(\square)} + k_{23}^{(\square)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

$\{A_p\}$ ,  $p \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ , dans l'équation (2.75) s'écrivent donc ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right)}{2 \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(2)} \right) + 2 c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(2)} \right)} + \\ &\quad \frac{(1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right)}{2 \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(1)} \right) + 2 c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(1)} \right)} \\ \{A_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right)}{2 \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(2)} \right) + 2 c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(2)} \right)} + \\ &\quad \frac{(1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right)}{2 \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(1)} \right) + 2 c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(1)} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

En remplaçant  $\{A_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}$  et  $\{A_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}$  de l'équation (2.82) dans l'équation (2.74) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \{B_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{f k_{23}^{(1)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right)}{\left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(2)} \right) + c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(2)} \right)} + \\ &\quad \frac{f k_{23}^{(1)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right)}{\left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(1)} \right) + c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(1)} \right)} \\ \{B_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{f m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right)}{\left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(2)} \right) + c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(2)} \right)} + \\ &\quad \frac{f (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right)}{\left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} + k_{23}^{(1)} \right) + c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \left( \mu_{23}^{\text{eff}} - \mu_{23}^{(1)} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Finalement  $k_{23}^{\text{eff}}$  (équation (2.74)) peut être écrit en fonction de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  tel que :

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{\{C_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} \mu_{23}^{\text{eff}} + \{C_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}}{\{C_3\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} \mu_{23}^{\text{eff}} + \{C_4\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}} \quad (2.84)$$

où les coefficients  $\{C_p\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}$  pour  $p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  sont déterminés en fonction des trois paramètres indépendants  $f$ ,  $m$ , et  $c$  et en fonction du comportement de chaque phase dans les deux

motifs (équation (2.85)) avec :

$$\left. \begin{aligned}
\{C_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f k_{23}^{(1)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) + \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \right] + \\
&+ \left[ f k_{23}^{(1)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) + \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \\
\{C_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f k_{23}^{(1)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) k_{23}^{(1)} - c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \mu_{23}^{(1)} \right] + \\
&+ \left[ f k_{23}^{(1)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) k_{23}^{(2)} - c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \mu_{23}^{(2)} \right] \\
\{C_3\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) + \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \right] + \\
&+ \left[ f (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) + \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \\
\{C_4\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) k_{23}^{(1)} - c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \mu_{23}^{(1)} \right] + \\
&+ \left[ f (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) k_{23}^{(2)} - c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \mu_{23}^{(2)} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

### 2.3.3 Développement de $\mu_{23}^{\text{eff}}$

Dans le contexte où deux motifs à deux phases sont considérés l'équation (2.65) devient :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^2 f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{m_\lambda R_{2\otimes} \left( 6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{2\otimes} \beta_{\otimes}^{(i)} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}}}{\sum_{i=1}^2 f_i \sum_{\lambda=1}^2 \frac{m_\lambda R_{2\otimes} \left( 6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{2\otimes} \beta_{\otimes}^{(i)} \right)}{A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}}} \quad (2.86)$$

Afin de calculer  $A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}$  il nous faut utiliser les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
A_{\otimes} &= 12 Z_{12}^{\otimes} + 6 \frac{R_{2\otimes}}{k_{23}^{\text{eff}}} \left( Z_{14}^{\otimes} + Z_{32}^{\otimes} + Z_{24}^{\otimes} + Z_{31}^{\otimes} \right) \\
B_{\otimes} &= \frac{2 Z_{34}^{\otimes} R_{2\otimes}^2}{k_{23}^{\text{eff}}} + 2 R_{2\otimes} \left( 2 Z_{14}^{\otimes} + 2 Z_{32}^{\otimes} + Z_{24}^{\otimes} + Z_{31}^{\otimes} \right) \\
C_{\otimes} &= Z_{34}^{\otimes} R_{2\otimes}^2
\end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

### 2.3. CAS PARTICULIER DE DEUX MOTIFS AVEC DEUX PHASES DANS CHAQUE MOTIF<sup>53</sup>

où tous les  $Z_{ij}$  (voir Hervé et Zaoui (1995) l'équation Eq. (81)<sup>95</sup>) sont déjà définis par :

$$Z_{ij}^{\otimes} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{i4}^{*\otimes} Q_{j1}^{*\otimes} - Q_{j4}^{*\otimes} Q_{i1}^{*\otimes} \quad (2.88)$$

avec :

$$Q^{*\otimes} = J_2^{\otimes} (R_{2\otimes}) Q^{(1)\otimes} \quad (2.89)$$

D'après Hervé et Zaoui (1995), lorsque l'on applique une sollicitation en cisaillement transverse  $J_2^{\otimes} (R_{2\otimes})$  est donné par :

$$J_2^{\otimes} (R_{2\otimes}) = \begin{pmatrix} -4 \nu_{\mathbf{\Delta}} R_{2\otimes} & R_{2\otimes} & 4 (1 - \nu_{\mathbf{\Delta}}) R_{2\otimes} & R_{2\otimes} \\ (6 - 4 \nu_{\mathbf{\Delta}}) R_{2\otimes} & R_{2\otimes} & - (2 - 4 \nu_{\mathbf{\Delta}}) R_{2\otimes} & -R_{2\otimes} \\ 0 & -6 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} & -8 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} & 2 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} \\ 12 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} & -6 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} & -4 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} & -2 \mu_{23}^{\mathbf{\Delta}} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

et  $Q^{(1)\otimes}$  est défini ainsi :

$$Q^{(1)\otimes} = \frac{1}{4 (1 - \nu_{\mathbf{\Delta}})} \times \begin{pmatrix} \frac{a_{\mathbf{\Delta}}}{q_{\mathbf{\Delta}}^2} & \frac{1 - \rho_{\mathbf{\Delta}}}{q_{\mathbf{\Delta}}^2} & \frac{1 - \rho_{\mathbf{\Delta}}}{q_{\mathbf{\Delta}}^2} & 0 \\ 2 q_{\mathbf{\Delta}}^4 b_{\mathbf{\Delta}} & q_{\mathbf{\Delta}}^4 c_{\mathbf{\Delta}} & 2 q_{\mathbf{\Delta}}^4 d_{\mathbf{\Delta}} & q_{\mathbf{\Delta}}^4 (\rho_{\mathbf{\Delta}} - 1) \\ -3 q_{\mathbf{\Delta}}^2 (1 - \rho_{\mathbf{\Delta}}) & 0 & q_{\mathbf{\Delta}}^2 a_{\mathbf{\Delta}} & q_{\mathbf{\Delta}}^2 (1 - \rho_{\mathbf{\Delta}}) \\ -6 d_{\mathbf{\Delta}} & 3 (1 - \rho_{\mathbf{\Delta}}) & 2 b_{\mathbf{\Delta}} & c_{\mathbf{\Delta}} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Les différentes matrices  $Q^{*\otimes}$  sont calculées à partir de l'équation (2.89) grâce à l'équa-



tion (2.90) et à l'équation (2.91) :

$$\left. \begin{aligned}
Q_{11}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{R_{2\langle \lambda \rangle}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ -4\nu_{\mathbf{A}} \frac{a_{\langle \lambda \rangle}}{q_{\langle \lambda \rangle}^2} + 2q_{\langle \lambda \rangle}^4 b_{\langle \lambda \rangle} - \right. \\
&\quad \left. -12(1-\nu_{\mathbf{A}}) q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} - 6d_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{21}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{R_{2\langle \lambda \rangle}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ (6-4\nu_{\mathbf{A}}) \frac{a_{\langle \lambda \rangle}}{q_{\langle \lambda \rangle}^2} + 2q_{\langle \lambda \rangle}^4 b_{\langle \lambda \rangle} + \right. \\
&\quad \left. +3(2-4\nu_{\mathbf{A}}) q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} + 6d_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{31}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{2\mu_{23}^{(\mathbf{A})}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ -6q_{\langle \lambda \rangle}^4 b_{\langle \lambda \rangle} + 12q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} - 6d_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{41}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{2\mu_{23}^{(\mathbf{A})}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ 6\frac{a_{\langle \lambda \rangle}}{q_{\langle \lambda \rangle}^2} - 6q_{\langle \lambda \rangle}^4 b_{\langle \lambda \rangle} + 6q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} + 6d_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{14}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{R_{2\langle \lambda \rangle}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ -q_{\langle \lambda \rangle}^4 e_{\langle \lambda \rangle} + 4(1-\nu_{\mathbf{A}}) q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} + c_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{24}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{R_{2\langle \lambda \rangle}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ -q_{\langle \lambda \rangle}^4 e_{\langle \lambda \rangle} - (2-4\nu_{\mathbf{A}}) q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} - c_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{34}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{2\mu_{23}^{(\mathbf{A})}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ 3q_{\langle \lambda \rangle}^4 e_{\langle \lambda \rangle} - 4q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} + c_{\langle \lambda \rangle} \right] \\
Q_{44}^{*\langle \lambda \rangle} &= \frac{2\mu_{23}^{(\mathbf{A})}}{4(1-\nu_{\mathbf{A}})} \left[ 3q_{\langle \lambda \rangle}^4 e_{\langle \lambda \rangle} - 2q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} - c_{\langle \lambda \rangle} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

Les différentes composantes  $Z_{ij}^{(\lambda)}$  présentes dans l'équation (2.87) peuvent être déterminées grâce à l'équation (2.88) avec les valeurs précédemment calculées de  $Q^{*\langle \lambda \rangle}$  ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
Z_{12}^{(\lambda)} &= \frac{R_{2\langle \lambda \rangle}^2}{16(1-\nu_{\mathbf{A}})^2} \left[ -6q_{\langle \lambda \rangle}^2 a_{\langle \lambda \rangle} e_{\langle \lambda \rangle} - 6q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} c_{\langle \lambda \rangle} + 12q_{\langle \lambda \rangle}^2 d_{\langle \lambda \rangle} e_{\langle \lambda \rangle} + \right. \\
&\quad +4q_{\langle \lambda \rangle}^6 b_{\langle \lambda \rangle} e_{\langle \lambda \rangle} (3-4\nu_{\mathbf{A}}) + 6q_{\langle \lambda \rangle}^6 e_{\langle \lambda \rangle}^2 (4\nu_{\mathbf{A}}-3) + 4q_{\langle \lambda \rangle}^4 b_{\langle \lambda \rangle} c_{\langle \lambda \rangle} - \\
&\quad \left. -12q_{\langle \lambda \rangle}^4 e_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle} + \frac{2a_{\langle \lambda \rangle} c_{\langle \lambda \rangle}}{q_{\langle \lambda \rangle}^2} (3-4\nu_{\mathbf{A}}) + 8a_{\langle \lambda \rangle} e_{\langle \lambda \rangle} (3-6\nu_{\mathbf{A}} + 4\nu_{\mathbf{A}}^2) \right] \quad (2.93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{31}^{(\lambda)} &= \frac{2\mu_{23}^{(\mathbf{A})} R_{2\langle \lambda \rangle}}{16(1-\nu_{\mathbf{A}})^2} \left[ 8q_{\langle \lambda \rangle}^4 b_{\langle \lambda \rangle} c_{\langle \lambda \rangle} + 8q_{\langle \lambda \rangle}^6 e_{\langle \lambda \rangle} b_{\langle \lambda \rangle} (2-3\nu_{\mathbf{A}}) - \right. \\
&\quad -12q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} c_{\langle \lambda \rangle} (2-\nu_{\mathbf{A}}) - 12q_{\langle \lambda \rangle}^2 a_{\langle \lambda \rangle} e_{\langle \lambda \rangle} \nu_{\mathbf{A}} + 12q_{\langle \lambda \rangle}^6 e_{\langle \lambda \rangle}^2 (3\nu_{\mathbf{A}}-2) + \\
&\quad \left. +24q_{\langle \lambda \rangle}^2 e_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle} (2-\nu_{\mathbf{A}}) - \frac{4a_{\langle \lambda \rangle} c_{\langle \lambda \rangle} \nu_{\mathbf{A}}}{q_{\langle \lambda \rangle}^2} - 24q_{\langle \lambda \rangle}^4 d_{\langle \lambda \rangle} e_{\langle \lambda \rangle} + 16\nu_{\mathbf{A}} e_{\langle \lambda \rangle} a_{\langle \lambda \rangle} \right] \quad (2.94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{32}^{\otimes} &= \frac{2 \mu_{23}^{(\otimes)} R_{2\otimes}}{16 (1 - \nu_{\otimes})^2} \left[ 3 (6 - 4 \nu_{\otimes}) q_{\otimes}^2 a_{\otimes} e_{\otimes} + 6 q_{\otimes}^6 e_{\otimes}^2 (5 - 6 \nu_{\otimes}) - \right. \\
 &\quad - 8 (3 - 2 \nu_{\otimes}) a_{\otimes} e_{\otimes} - 4 (5 - 6 \nu_{\otimes}) q_{\otimes}^6 e_{\otimes} b_{\otimes} - \\
 &\quad - 12 (3 - 2 \nu_{\otimes}) q_{\otimes}^2 e_{\otimes} d_{\otimes} + \frac{2 a_{\otimes} c_{\otimes}}{q_{\otimes}^2} (3 - 2 \nu_{\otimes}) - \\
 &\quad \left. - 4 q_{\otimes}^4 b_{\otimes} c_{\otimes} + 6 q_{\otimes}^2 c_{\otimes} e_{\otimes} (3 - 2 \nu_{\otimes}) + 12 q_{\otimes}^4 e_{\otimes} d_{\otimes} \right] \quad (2.95)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{14}^{\otimes} &= \frac{2 \mu_{23}^{(\otimes)} R_{2\otimes}}{16 (1 - \nu_{\otimes})^2} \left[ 6 (2 \nu_{\otimes} - 1) q_{\otimes}^2 a_{\otimes} e_{\otimes} + 6 q_{\otimes}^6 e_{\otimes}^2 (5 - 6 \nu_{\otimes}) + \right. \\
 &\quad + 12 q_{\otimes}^4 e_{\otimes} d_{\otimes} + 8 (3 - 4 \nu_{\otimes}) a_{\otimes} e_{\otimes} + \\
 &\quad + 4 q_{\otimes}^6 b_{\otimes} e_{\otimes} (6 \nu_{\otimes} - 5) + 12 (1 - 2 \nu_{\otimes}) q_{\otimes}^2 d_{\otimes} e_{\otimes} + \\
 &\quad \left. + \frac{2 a_{\otimes} c_{\otimes}}{q_{\otimes}^2} (3 - 2 \nu_{\otimes}) - 4 q_{\otimes}^4 b_{\otimes} c_{\otimes} + 6 (2 \nu_{\otimes} - 1) q_{\otimes}^2 e_{\otimes} c_{\otimes} \right] \quad (2.96)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{24}^{\otimes} &= \frac{2 \mu_{23}^{(\otimes)} R_{2\otimes}}{16 (1 - \nu_{\otimes})^2} \left[ 12 (\nu_{\otimes} - 2) q_{\otimes}^2 a_{\otimes} e_{\otimes} - 12 q_{\otimes}^6 e_{\otimes}^2 (2 - 3 \nu_{\otimes}) - \right. \\
 &\quad - 24 q_{\otimes}^4 d_{\otimes} e_{\otimes} + 16 \nu_{\otimes} a_{\otimes} e_{\otimes} + 8 (2 - 3 \nu_{\otimes}) q_{\otimes}^6 e_{\otimes} b_{\otimes} + \\
 &\quad \left. + 24 q_{\otimes}^2 e_{\otimes} d_{\otimes} \nu_{\otimes} - \frac{4 \nu_{\otimes} a_{\otimes} c_{\otimes}}{q_{\otimes}^2} + 8 q_{\otimes}^4 b_{\otimes} c_{\otimes} - 12 \nu_{\otimes} q_{\otimes}^2 e_{\otimes} c_{\otimes} \right] \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{34}^{\otimes} &= \frac{4 \mu_{23}^{(\otimes)^2}}{16 (1 - \nu_{\otimes})^2} \left[ 18 q_{\otimes}^2 a_{\otimes} e_{\otimes} - 18 q_{\otimes}^6 e_{\otimes}^2 + 36 q_{\otimes}^4 e_{\otimes} d_{\otimes} - 24 a_{\otimes} e_{\otimes} + \right. \\
 &\quad \left. + 12 q_{\otimes}^6 e_{\otimes} b_{\otimes} - 36 q_{\otimes}^2 e_{\otimes} d_{\otimes} + \frac{6 a_{\otimes} c_{\otimes}}{q_{\otimes}^2} - 12 q_{\otimes}^4 b_{\otimes} c_{\otimes} + 18 q_{\otimes}^2 e_{\otimes} c_{\otimes} \right] \quad (2.98)
 \end{aligned}$$

En conséquence  $\alpha_{\otimes}^{(i)}$ ,  $A_{\otimes}$ ,  $B_{\otimes}$ , et  $C_{\otimes}$ , peuvent être factorisés par rapport au rayon  $R_{2\otimes}$ .

Nous introduisons donc  $\alpha_{\mathcal{R}(\otimes)}^{(i)}$ ,  $A_{\mathcal{R}(\otimes)}$ ,  $B_{\mathcal{R}(\otimes)}$ ,  $C_{\mathcal{R}(\otimes)}$  définis de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{\mathcal{R}(\otimes)}^{(i)} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{\otimes}^{(i)} / R_{2\otimes} \\
 A_{\mathcal{R}(\otimes)} &\stackrel{\text{def}}{=} A_{\otimes} / R_{2\otimes}^2 \\
 B_{\mathcal{R}(\otimes)} &\stackrel{\text{def}}{=} B_{\otimes} / R_{2\otimes}^2 \\
 C_{\mathcal{R}(\otimes)} &\stackrel{\text{def}}{=} C_{\otimes} / R_{2\otimes}^2
 \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

Ainsi  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  dans l'équation (2.86) s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
 \mu_{23}^{\text{eff}} &= \frac{\sum_{i=1}^2 f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{m_{\lambda} (6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\mathcal{R}(\otimes)}^{(i)} + \beta_{\otimes}^{(i)})}{A_{\mathcal{R}(\otimes)} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\mathcal{R}(\otimes)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathcal{R}(\otimes)}}}{\sum_{i=1}^2 f_i \sum_{\lambda=1}^2 \frac{m_{\lambda} (6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\mathcal{R}(\otimes)}^{(i)} + \beta_{\otimes}^{(i)})}{A_{\mathcal{R}(\otimes)} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\mathcal{R}(\otimes)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathcal{R}(\otimes)}}} \quad (2.100)
 \end{aligned}$$

Finalement, l'équation (2.100) peut s'écrire sous la forme de la fonction implicite suivante :

$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \mu_{23}^{\text{eff}} \left( f, m, c, k_{23}^{\text{eff}}, \mu_{23}^{\text{eff}}, k_{23}^{(i)}, \mu_{23}^{(i)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{A_1\}}{\{A_2\}} \quad (2.101)$$

où les coefficients  $\{A_p\}$ ,  $p \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ , dépendent de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{m \left[ f \mu_{23}^{(1)} \left( 6 \alpha_{R(1)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(1)} \right) + (1-f) \mu_{23}^{(2)} \left( 6 \alpha_{R(1)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(2)} \right) \right]}{A_{R(1)} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{R(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{R(1)}} + \\ &+ \frac{(1-m) \left[ f \mu_{23}^{(1)} \left( 6 \alpha_{R(2)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(1)} \right) + (1-f) \mu_{23}^{(2)} \left( 6 \alpha_{R(2)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(2)} \right) \right]}{A_{R(2)} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{R(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{R(2)}} \\ \{A_2\}_{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{m \left[ f \left( 6 \alpha_{R(1)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(1)} \right) + (1-f) \left( 6 \alpha_{R(1)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(2)} \right) \right]}{A_{R(1)} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{R(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{R(1)}} + \\ &+ \frac{(1-m) \left[ f \left( 6 \alpha_{R(2)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(1)} \right) + (1-f) \left( 6 \alpha_{R(2)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(2)} \right) \right]}{A_{R(2)} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{R(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{R(2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

De plus, nous avons utilisé le fait que  $A_{R(\lambda)}$ ,  $B_{R(\lambda)}$  et  $C_{R(\lambda)}$  dépendent uniquement du motif  $\lambda$  et non de la phase  $(i)$  dans l'équation (2.100).

Nous pouvons maintenant obtenir les expressions finales des huit termes  $\alpha_{R(\lambda)}^{(i)}$  et  $\beta_{(\lambda)}^{(i)}$  (voir l'équation (2.66)) car  $\mathbf{Q}^{(0)(\lambda)} = \mathbf{I}$ , une matrice identité et parce que  $\mathbf{Q}^{(1)(\lambda)}$  peut être déterminé en utilisant l'équation Eq. (69)<sup>95</sup> dans Hervé et Zaoui (1995) :

$$\left. \begin{aligned} Q_{14}^{(1)(\lambda)} &= 0 \\ Q_{11}^{(1)(\lambda)} &= \frac{a_{[\lambda]}}{4 \left( 1 - \nu_{[\lambda]} \right) q_{(\lambda)}^2} \\ Q_{44}^{(1)(\lambda)} &= \frac{c_{[\lambda]}}{4 \left( 1 - \nu_{[\lambda]} \right)} \\ Q_{41}^{(1)(\lambda)} &= \frac{-6d_{[\lambda]}}{4 \left( 1 - \nu_{[\lambda]} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

ce qui donne finalement :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{R(\lambda)}^{(\lambda)} &= \frac{2}{4 \left( 1 - \nu_{[\lambda]} \right)} \left[ \frac{a_{[\lambda]}}{q_{(\lambda)}^2} (3 - 4 \nu_{[\lambda]}) + q_{(\lambda)}^4 (2 b_{[\lambda]} - 3 e_{[\lambda]}) \right] \\ \alpha_{R(\lambda)}^{(\lambda)} &= \frac{2}{16 \left( 1 - \nu_{[\lambda]} \right)^2} \left[ 3 a_{[\lambda]} e_{[\lambda]} \left( 1 - q_{(\lambda)}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_{[\lambda]} q_{(\lambda)}^4 (2 b_{[\lambda]} - 3 e_{[\lambda]}) + \frac{a_{[\lambda]} c_{[\lambda]}}{q_{(\lambda)}^2} (3 - 4 \nu_{[\lambda]}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

et ce qui donne également :

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\mathbb{A}}^{(\mathbb{A})} &= \frac{12 \mu_{23}^{(\mathbb{A})}}{4 (1 - \nu_{\mathbb{A}})} \left[ \frac{a_{\mathbb{A}}}{q_{\mathbb{A}}^2} - 2 q_{\mathbb{A}}^4 b_{\mathbb{A}} + 3 q_{\mathbb{A}}^4 e_{\mathbb{A}} \right] \\ \beta_{\mathbb{B}}^{(\mathbb{A})} &= \frac{12 \mu_{23}^{(\mathbb{A})}}{16 (1 - \nu_{\mathbb{A}})^2} \left[ -2 c_{\mathbb{A}} b_{\mathbb{A}} q_{\mathbb{A}}^4 + 3 a_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} q_{\mathbb{A}}^4 + \right. \\ &\quad \left. + 3 a_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} (q_{\mathbb{A}}^2 - 1) + 6 e_{\mathbb{A}} d_{\mathbb{A}} q_{\mathbb{A}}^4 + \frac{a_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}}}{q_{\mathbb{A}}^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Les expressions finales de  $A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}$ ,  $B_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}$ ,  $C_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}$  sont données par les équations (2.106), (2.109) et (2.112).

$A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}$  est donné par :

$$A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_1\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}} + \frac{\{A_2\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}}}{k_{23}^{\text{eff}}} \quad (2.106)$$

où

$$\begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}} &= \frac{12 Z_{12}^{(\mathbb{A})}}{R_{2(\mathbb{A})}^2} \\ &= \frac{12}{4 (1 - \nu_{\mathbb{A}})^2} \left[ -6 q_{\mathbb{A}}^2 a_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} - 6 q_{\mathbb{A}}^2 e_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}} + 12 q_{\mathbb{A}}^2 d_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} + \right. \\ &\quad + 4 q_{\mathbb{A}}^6 b_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} (3 - 4 \nu_{\mathbb{A}}) + 6 q_{\mathbb{A}}^6 e_{\mathbb{A}}^2 (4 \nu_{\mathbb{A}} - 3) + 4 q_{\mathbb{A}}^4 b_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}} - \\ &\quad \left. - 12 q_{\mathbb{A}}^4 e_{\mathbb{A}} d_{\mathbb{A}} + \frac{2 a_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}}}{q_{\mathbb{A}}^2} (3 - 4 \nu_{\mathbb{A}}) + 8 a_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} (3 - 6 \nu_{\mathbb{A}} + 4 \nu_{\mathbb{A}}^2) \right] \end{aligned} \quad (2.107)$$

et

$$\begin{aligned} \{A_2\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}} &= \frac{6}{R_{2(\mathbb{A})}} \left( Z_{14}^{(\mathbb{A})} + Z_{32}^{(\mathbb{A})} + Z_{24}^{(\mathbb{A})} + Z_{31}^{(\mathbb{A})} \right) \\ &= \frac{12 \mu_{23}^{(\mathbb{A})}}{16 (1 - \nu_{\mathbb{A}})^2} \left[ -12 q_{\mathbb{A}}^2 a_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} + 12 q_{\mathbb{A}}^6 e_{\mathbb{A}}^2 - 24 q_{\mathbb{A}}^4 d_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} \right. \\ &\quad + 16 \nu_{\mathbb{A}} a_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} - 8 q_{\mathbb{A}}^6 b_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} + 24 q_{\mathbb{A}}^2 d_{\mathbb{A}} e_{\mathbb{A}} \\ &\quad \left. + \frac{4 a_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}}}{q_{\mathbb{A}}^2} (3 - 4 \nu_{\mathbb{A}}) + 8 q_{\mathbb{A}}^4 b_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}} - 12 q_{\mathbb{A}}^2 e_{\mathbb{A}} c_{\mathbb{A}} \right] \end{aligned} \quad (2.108)$$

$B_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}$  est quant à lui donné par :

$$B_{\mathcal{R}(\mathbb{A})} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_1\}_{\subseteq B_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}} + \frac{\{A_2\}_{\subseteq B_{\mathcal{R}(\mathbb{A})}}}{k_{23}^{\text{eff}}} \quad (2.109)$$

où

$$\begin{aligned}
\{A_1\}_{\subseteq B, \mathcal{R}(\lambda)} &= \frac{2}{R_{2(\lambda)}} \left( 2Z_{14}^{(\lambda)} + 2Z_{32}^{(\lambda)} + Z_{24}^{(\lambda)} + Z_{31}^{(\lambda)} \right) \\
&= \frac{8 \mu_{23}^{(\lambda)}}{16 (1 - \nu_{\lambda})^2} \left[ 36 (1 - \nu_{\lambda}) q_{(\lambda)}^6 e_{(\lambda)}^2 + \right. \\
&\quad \left. + 24 (\nu_{\lambda} - 1) q_{(\lambda)}^6 e_{(\lambda)} b_{(\lambda)} + 12 (1 - \nu_{\lambda}) \frac{a_{(\lambda)} c_{(\lambda)}}{q_{(\lambda)}^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.110}$$

et

$$\begin{aligned}
\{A_2\}_{\subseteq B, \mathcal{R}(\lambda)} &= 2 Z_{34}^{(\lambda)} \\
&= \frac{8 \mu_{23}^{(\lambda)^2}}{16 (1 - \nu_{\lambda})^2} \left[ 18 q_{(\lambda)}^2 a_{(\lambda)} e_{(\lambda)} - 18 q_{(\lambda)}^6 e_{(\lambda)}^2 + 36 q_{(\lambda)}^4 e_{(\lambda)} d_{(\lambda)} - \right. \\
&\quad - 24 a_{(\lambda)} e_{(\lambda)} + 12 q_{(\lambda)}^6 e_{(\lambda)} b_{(\lambda)} - 36 q_{(\lambda)}^2 e_{(\lambda)} d_{(\lambda)} + \\
&\quad \left. + \frac{6 a_{(\lambda)} c_{(\lambda)}}{q_{(\lambda)}^2} - 12 q_{(\lambda)}^4 b_{(\lambda)} c_{(\lambda)} + 18 q_{(\lambda)}^2 e_{(\lambda)} c_{(\lambda)} \right]
\end{aligned} \tag{2.111}$$

$C_{\mathcal{R}(\lambda)}$  est donné par :

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{R}(\lambda)} &= Z_{34}^{(\lambda)} \\
&= \frac{4 \mu_{23}^{(\lambda)^2}}{16 (1 - \nu_{\lambda})^2} \left[ 18 q_{(\lambda)}^2 a_{(\lambda)} e_{(\lambda)} - 18 q_{(\lambda)}^6 e_{(\lambda)}^2 + 36 q_{(\lambda)}^4 e_{(\lambda)} d_{(\lambda)} - \right. \\
&\quad - 24 a_{(\lambda)} e_{(\lambda)} + 12 q_{(\lambda)}^6 e_{(\lambda)} b_{(\lambda)} - 36 q_{(\lambda)}^2 e_{(\lambda)} d_{(\lambda)} + \\
&\quad \left. + \frac{6 a_{(\lambda)} c_{(\lambda)}}{q_{(\lambda)}^2} - 12 q_{(\lambda)}^4 b_{(\lambda)} c_{(\lambda)} + 18 q_{(\lambda)}^2 e_{(\lambda)} c_{(\lambda)} \right]
\end{aligned} \tag{2.112}$$

## 2.4 Synthèse des résultats obtenus

$$\begin{array}{c}
 \hline
 k_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i k_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)\otimes} R_{n_\lambda\otimes}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\otimes} + R_{n_\lambda\otimes} Q_{21}^{*\otimes}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} m_\lambda \frac{Q_{11}^{(i_\lambda-1)\otimes} R_{n_\lambda\otimes}}{2 \mu_{23}^{\text{eff}} Q_{11}^{*\otimes} + R_{n_\lambda\otimes} Q_{21}^{*\otimes}}} \quad \mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \mu_{23}^{(i)} \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{m_\lambda R_{n_\lambda\otimes} (6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{n_\lambda\otimes} \beta_{\otimes}^{(i)})}{A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}}}{\sum_{i=1}^n f_i \sum_{\lambda=1}^{N_\lambda} \frac{m_\lambda R_{n_\lambda\otimes} (6 \mu_{23}^{\text{eff}} \alpha_{\otimes}^{(i)} + R_{n_\lambda\otimes} \beta_{\otimes}^{(i)})}{A_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}^2} + B_{\otimes} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\otimes}}} \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l}
 \alpha_{\otimes}^{(i)} = Q_{44}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{11}^{*\otimes} + Q_{21}^{*\otimes}) - \\
 - Q_{41}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{14}^{*\otimes} + Q_{24}^{*\otimes}) - \\
 - 3 \frac{(R_{i_\lambda\otimes}^4 - R_{i_\lambda-1\otimes}^4)}{R_{i_\lambda\otimes}^2 (R_{i_\lambda\otimes}^2 - R_{i_\lambda-1\otimes}^2)} \times \\
 \times \left[ Q_{14}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{11}^{*\otimes} + Q_{21}^{*\otimes}) - \right. \\
 \left. - Q_{11}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{14}^{*\otimes} + Q_{24}^{*\otimes}) \right]
 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l}
 \beta_{\otimes}^{(i)} = Q_{44}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{31}^{*\otimes} + Q_{41}^{*\otimes}) - \\
 - Q_{41}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{34}^{*\otimes} + Q_{44}^{*\otimes}) - \\
 - 3 \frac{(R_{i_\lambda\otimes}^4 - R_{i_\lambda-1\otimes}^4)}{R_{i_\lambda\otimes}^2 (R_{i_\lambda\otimes}^2 - R_{i_\lambda-1\otimes}^2)} \times \\
 \times \left[ Q_{14}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{31}^{*\otimes} + Q_{41}^{*\otimes}) - \right. \\
 \left. - Q_{11}^{(i_\lambda-1)\otimes} (Q_{34}^{*\otimes} + Q_{44}^{*\otimes}) \right]
 \end{array} \right\} \\
 \hline
 \end{array}$$

TABLEAU 2.1 – Synthèse des résultats obtenus de l’approche MMR dans le cas de  $N_\lambda$  motifs à  $n_\lambda$  phases.

$$\begin{aligned}
k_{23}^{\text{eff}} &= \frac{\{\mathbf{C}_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} \mu_{23}^{\text{eff}} + \{\mathbf{C}_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}}{\{\mathbf{C}_3\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} \mu_{23}^{\text{eff}} + \{\mathbf{C}_4\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}}} \\
\{\mathbf{C}_1\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f k_{23}^{(1)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) + \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \right] + \\
&\quad + \left[ f k_{23}^{(1)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) + \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \\
\{\mathbf{C}_2\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f k_{23}^{(1)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) k_{23}^{(1)} - c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \mu_{23}^{(1)} \right] + \\
&\quad + \left[ f k_{23}^{(1)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) k_{23}^{(2)} (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) k_{23}^{(2)} - c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \mu_{23}^{(2)} \right] \\
\{\mathbf{C}_3\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) + \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) \right] + \\
&\quad + \left[ f (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) + \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \\
\{\mathbf{C}_4\}_{\subseteq k_{23}^{\text{eff}}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ f m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) m \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) k_{23}^{(1)} - c_{22} \left( k_{23}^{(1)} - k_{23}^{(2)} \right) \mu_{23}^{(1)} \right] + \\
&\quad + \left[ f (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(2)} \right) + (1-f) (1-m) \left( \mu_{23}^{(1)} + k_{23}^{(1)} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ \left( \mu_{23}^{(2)} + k_{23}^{(1)} \right) k_{23}^{(2)} - c \left( k_{23}^{(2)} - k_{23}^{(1)} \right) \mu_{23}^{(2)} \right]
\end{aligned}$$

TABLEAU 2.2 – Synthèse des résultats obtenus de l'approche MMR dans le cas de 2 motifs à 2 phases pour le module de compressibilité transverse effectif.

---


$$\mu_{23}^{\text{eff}} = \frac{\{A_1\}_{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}}}{\{A_2\}_{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}}}$$


---


$$\begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{m \left[ f \mu_{23}^{(1)} \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(1)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(1)} \right) + (1-f) \mu_{23}^{(2)} \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(1)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(2)} \right) \right]}{A_{\mathcal{R}(1)} \mu_{23}^{\text{eff}2} + B_{\mathcal{R}(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathcal{R}(1)}} + \\ &+ \frac{(1-m) \left[ f \mu_{23}^{(1)} \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(2)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(1)} \right) + (1-f) \mu_{23}^{(2)} \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(2)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(2)} \right) \right]}{A_{\mathcal{R}(2)} \mu_{23}^{\text{eff}2} + B_{\mathcal{R}(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathcal{R}(2)}} \\ \{A_2\}_{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}} &= \frac{m \left[ f \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(1)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(1)} \right) + (1-f) \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(1)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(1)}^{(2)} \right) \right]}{A_{\mathcal{R}(1)} \mu_{23}^{\text{eff}2} + B_{\mathcal{R}(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathcal{R}(1)}} + \\ &+ \frac{(1-m) \left[ f \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(2)}^{(1)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(1)} \right) + (1-f) \left( 6 \alpha_{\mathcal{R}(2)}^{(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + \beta_{(2)}^{(2)} \right) \right]}{A_{\mathcal{R}(2)} \mu_{23}^{\text{eff}2} + B_{\mathcal{R}(2)} \mu_{23}^{\text{eff}} + C_{\mathcal{R}(2)}} \\ \alpha_{\mathcal{R}(\lambda)}^{(\lambda)} &= \frac{2}{4(1-\nu_{\lambda})} \left[ \frac{a_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} (3-4\nu_{\lambda}) + q_{\lambda}^4 (2b_{\lambda} - 3e_{\lambda}) \right] \\ \alpha_{\mathcal{R}(\lambda)}^{(\lambda)} &= \frac{2}{16(1-\nu_{\lambda})^2} \left[ 3a_{\lambda}e_{\lambda}(1-q_{\lambda}^2) + \right. \\ &\quad \left. + c_{\lambda}q_{\lambda}^4(2b_{\lambda} - 3e_{\lambda}) + \frac{a_{\lambda}c_{\lambda}}{q_{\lambda}^2}(3-4\nu_{\lambda}) \right] \\ \beta_{\mathcal{R}(\lambda)}^{(\lambda)} &= \frac{12\mu_{23}^{(\lambda)}}{4(1-\nu_{\lambda})} \left[ \frac{a_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} - 2q_{\lambda}^4 b_{\lambda} + 3q_{\lambda}^4 e_{\lambda} \right] \\ \beta_{\mathcal{R}(\lambda)}^{(\lambda)} &= \frac{12\mu_{23}^{(\lambda)}}{16(1-\nu_{\lambda})^2} \left[ -2c_{\lambda}b_{\lambda}q_{\lambda}^4 + 3a_{\lambda}e_{\lambda}q_{\lambda}^4 + \right. \\ &\quad \left. + 3a_{\lambda}e_{\lambda}(q_{\lambda}^2 - 1) + 6e_{\lambda}d_{\lambda}q_{\lambda}^4 + \frac{a_{\lambda}c_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} \right] \end{aligned}$$


---

TABLEAU 2.3 – Synthèse des résultats obtenus de l'approche MMR dans le cas de 2 motifs à 2 phases pour le module de cisaillement transverse effectif.



$$A_{\mathcal{R}(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_1\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\lambda)}} + \frac{\{A_2\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\lambda)}}}{k_{23}^{\text{eff}}}$$

où

$$\begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\lambda)}} &= \frac{12 Z_{12}^{\lambda}}{R_{2\lambda}^2} \\ &= \frac{12}{4 (1 - \nu_{\mathbf{N}})^2} \left[ -6 q_{\lambda}^2 a_{\lambda} e_{\lambda} - 6 q_{\lambda}^2 e_{\lambda} c_{\lambda} + 12 q_{\lambda}^2 d_{\lambda} e_{\lambda} + \right. \\ &\quad + 4 q_{\lambda}^6 b_{\lambda} e_{\lambda} (3 - 4 \nu_{\mathbf{N}}) + 6 q_{\lambda}^6 e_{\lambda}^2 (4 \nu_{\mathbf{N}} - 3) + 4 q_{\lambda}^4 b_{\lambda} c_{\lambda} - \\ &\quad \left. - 12 q_{\lambda}^4 e_{\lambda} d_{\lambda} + \frac{2 a_{\lambda} c_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} (3 - 4 \nu_{\mathbf{N}}) + 8 a_{\lambda} e_{\lambda} (3 - 6 \nu_{\mathbf{N}} + 4 \nu_{\mathbf{N}}^2) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{A_2\}_{\subseteq A_{\mathcal{R}(\lambda)}} &= \frac{6}{R_{2\lambda}} \left( Z_{14}^{\lambda} + Z_{32}^{\lambda} + Z_{24}^{\lambda} + Z_{31}^{\lambda} \right) \\ &= \frac{12 \mu_{23}^{(\mathbf{N})}}{16 (1 - \nu_{\mathbf{N}})^2} \left[ -12 q_{\lambda}^2 a_{\lambda} e_{\lambda} + 12 q_{\lambda}^6 e_{\lambda}^2 - 24 q_{\lambda}^4 d_{\lambda} e_{\lambda} \right. \\ &\quad + 16 \nu_{\mathbf{N}} a_{\lambda} e_{\lambda} - 8 q_{\lambda}^6 b_{\lambda} e_{\lambda} + 24 q_{\lambda}^2 d_{\lambda} e_{\lambda} \\ &\quad \left. + \frac{4 a_{\lambda} c_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} (3 - 4 \nu_{\mathbf{N}}) + 8 q_{\lambda}^4 b_{\lambda} c_{\lambda} - 12 q_{\lambda}^2 e_{\lambda} c_{\lambda} \right] \end{aligned}$$

$$B_{\mathcal{R}(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_1\}_{\subseteq B_{\mathcal{R}(\lambda)}} + \frac{\{A_2\}_{\subseteq B_{\mathcal{R}(\lambda)}}}{k_{23}^{\text{eff}}}$$

où

$$\begin{aligned} \{A_1\}_{\subseteq B_{\mathcal{R}(\lambda)}} &= \frac{2}{R_{2\lambda}} \left( 2Z_{14}^{\lambda} + 2Z_{32}^{\lambda} + Z_{24}^{\lambda} + Z_{31}^{\lambda} \right) \\ &= \frac{8 \mu_{23}^{(\mathbf{N})}}{16 (1 - \nu_{\mathbf{N}})^2} \left[ 36 (1 - \nu_{\mathbf{N}}) q_{\lambda}^6 e_{\lambda}^2 + \right. \\ &\quad \left. + 24 (\nu_{\mathbf{N}} - 1) q_{\lambda}^6 e_{\lambda} b_{\lambda} + 12 (1 - \nu_{\mathbf{N}}) \frac{a_{\lambda} c_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{A_2\}_{\subseteq B_{\mathcal{R}(\lambda)}} &= 2 Z_{34}^{\lambda} \\ &= \frac{8 \mu_{23}^{(\mathbf{N})^2}}{16 (1 - \nu_{\mathbf{N}})^2} \left[ 18 q_{\lambda}^2 a_{\lambda} e_{\lambda} - 18 q_{\lambda}^6 e_{\lambda}^2 + 36 q_{\lambda}^4 e_{\lambda} d_{\lambda} - \right. \\ &\quad - 24 a_{\lambda} e_{\lambda} + 12 q_{\lambda}^6 e_{\lambda} b_{\lambda} - 36 q_{\lambda}^2 e_{\lambda} d_{\lambda} + \\ &\quad \left. + \frac{6 a_{\lambda} c_{\lambda}}{q_{\lambda}^2} - 12 q_{\lambda}^4 b_{\lambda} c_{\lambda} + 18 q_{\lambda}^2 e_{\lambda} c_{\lambda} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{R(\lambda)} &= Z_{34}^{(\lambda)} \\
&= \frac{4 \mu_{23}^{(\lambda)^2}}{16 (1 - \nu_{\lambda})^2} \left[ 18 q_{(\lambda)}^2 a_{\lambda} e_{\lambda} - 18 q_{(\lambda)}^6 e_{\lambda}^2 + 36 q_{(\lambda)}^4 e_{\lambda} d_{\lambda} - \right. \\
&\quad \left. - 24 a_{\lambda} e_{\lambda} + 12 q_{(\lambda)}^6 e_{\lambda} b_{\lambda} - 36 q_{(\lambda)}^2 e_{\lambda} d_{\lambda} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{6 a_{\lambda} c_{\lambda}}{q_{(\lambda)}^2} - 12 q_{(\lambda)}^4 b_{\lambda} c_{\lambda} + 18 q_{(\lambda)}^2 e_{\lambda} c_{\lambda} \right]
\end{aligned}$$



## Chapitre 3

# Étude de sensibilité des paramètres du modèle développé

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Variation de <math>m</math> et de <math>c</math></b> . . . . .	<b>65</b>
<b>3.2</b>	<b>Confrontation du modèle à des cas expérimentaux</b> . . . . .	<b>66</b>
3.2.1	Limiter les incertitudes . . . . .	66
3.2.2	Méthodologie . . . . .	68
3.2.3	Réponse du modèle dans les conditions expérimentales retenues, courbes “enveloppe” . . . . .	72
3.2.4	Résultats expérimentaux de Zimmer et Cost (1970) . . . . .	74
<b>3.3</b>	<b>Réduire les incertitudes, apport du numérique</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>3.4</b>	<b>Recherche de couples solution <math>(m, c)</math> communs</b> . . . . .	<b>77</b>
3.4.1	Méthode inverse . . . . .	78
3.4.2	Superposition des couples solution pour les deux modules transverses . . . . .	79
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>80</b>

---

Disposer d'un nouveau modèle prédictif est une avancée mais sa capacité de prédiction reste une inconnue. Ce chapitre est consacré à l'étude de sensibilité du modèle développé dans le chapitre précédent. Il est en effet nécessaire d'évaluer la manière dont se comporte le modèle aux limites de ses capacités. En particulier, l'objectif est de voir comment le modèle répond en balayant les valeurs possibles des paramètres. Cette investigation permet de mettre en avant les avantages de ce nouveau modèle et montre ce qu'il peut apporter de plus par rapport au modèle existant à un seul motif.

### 3.1 Variation de $m$ et de $c$

Dans sa version à deux motifs à deux phases chacun, le modèle développé précédemment dispose de trois paramètres d'entrée. Il s'agit de :

1.  $f$ , qui est la fraction volumique en fibres au sein du composite,
2.  $m$ , qui représente la fraction volumique du premier motif dit “direct” où la fibre est entourée de matrice,
3.  $c$ , qui est la fraction volumique en fibres dans le premier motif dit “direct”.

Le nombre de combinaisons possibles pour les trois paramètres du modèle est infini en raison de la continuité du problème. La plage possible de variation de  $f$ ,  $m$  et  $c$  est cependant définie d'après les équations (3.1) et (3.2).

$$m \geq \frac{1}{2} + \left| f - \frac{1}{2} \right| \quad (3.1)$$

$$0 \leq c_{\min} = 1 + \frac{f-1}{m} < c < c_{\max} = \frac{f}{m} \leq 1 \quad (3.2)$$

L'étude est d'abord restreinte aux cas expérimentaux afin de fixer les paramètres matériaux.

## 3.2 Confrontation du modèle à des cas expérimentaux

Des résultats expérimentaux de la littérature concernant le comportement transverse élastique effectif de composites unidirectionnels renforcés par des fibres ont été utilisés. Ils permettent de fixer les paramètres matériaux ainsi que  $f$ , la concentration en fibres. Une fois ces valeurs fixées, une discrétisation de  $m$  et  $c$  permet de balayer un certain nombre de valeurs possibles dans un contexte restreint. Cela permet de mieux appréhender la manière dont le modèle répond. Le but de cette partie est de réduire le paramétrage pour se concentrer dans un premier temps sur l'étude de sensibilité des paramètres qui ont été introduits "en plus" par rapport au modèle à trois phases de Hervé et Zaoui (1995). Cela permet en outre de pouvoir comparer les modèles et voir ce que le nouveau peut apporter.

### 3.2.1 Limiter les incertitudes

Comme cela a été abordé en introduction, trouver des résultats expérimentaux qui soient exploitables dans le cadre de la présente approche est assez complexe. Une très grande majorité des études expérimentales trouvées dans la littérature sont basées sur des techniques d'essais "mécaniques". Bien que la caractérisation mécanique des modules d'Young longitudinaux et transversaux ne pose généralement pas de difficultés, il n'en est pas de même pour la caractérisation des modules transverses de compressibilité et de cisaillement qui font l'objet de cette étude. Ces modules sont généralement absents des papiers et dans le meilleur des cas, ils sont estimés indirectement à partir de constantes élastiques plus faciles à obtenir. Dans ce cas, la propagation inhérente des incertitudes expérimentales conduit à des estimations plutôt imprécises et souvent inutilisables. Dans la littérature, on peut trouver des méthodes alternatives pour améliorer l'estimation de certaines constantes élastiques, difficilement accessibles mécaniquement.

Les résultats expérimentaux sélectionnés pour l'étude de sensibilité (présentés en introduction) permettent d'avoir accès à la fraction volumique en fibres,  $f$ , et aux paramètres matériaux. Deux exemples reposant sur une technique à ultrasons ont été utilisés dans cette section. Les constantes élastiques qui conduisent à la détermination des modules élastiques ont été mesurées. Dans ces articles, les incertitudes expérimentales sont relativement faibles sur les valeurs de la plupart des propriétés élastiques transverses. Le premier article est le travail des précurseurs Zimmer et Cost (1970) qui s'intéressent à un composite verre-époxy. Les modules d'Young, les coefficients de Poisson des phases de ce composite mais également la fraction volumique en fibres sont détaillées dans le TABLEAU 3.1. L'indice ZC fait référence à ces auteurs, l'exposant "f" aux propriétés de la fibre et l'exposant "m" aux propriétés de la matrice. La FIGURE 3.1 illustre la morphologie de la microstructure du composite étudié par Zimmer et Cost (1970).

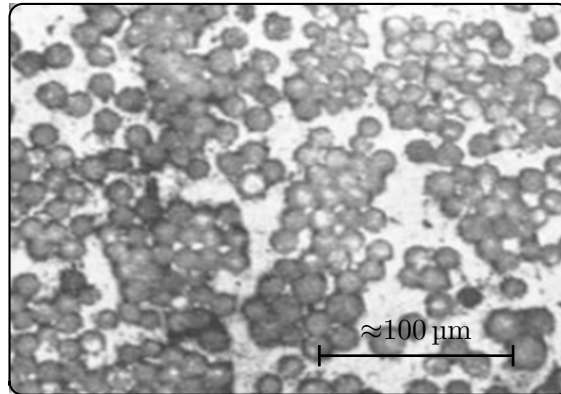
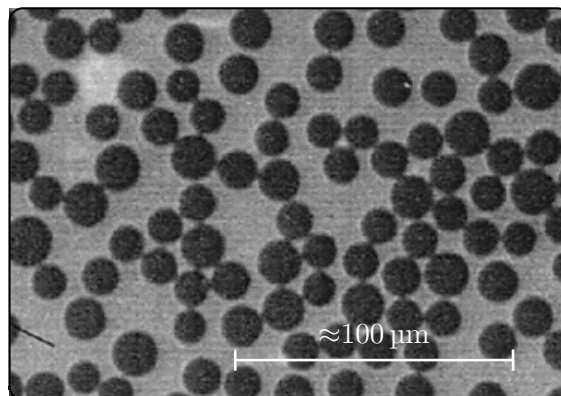


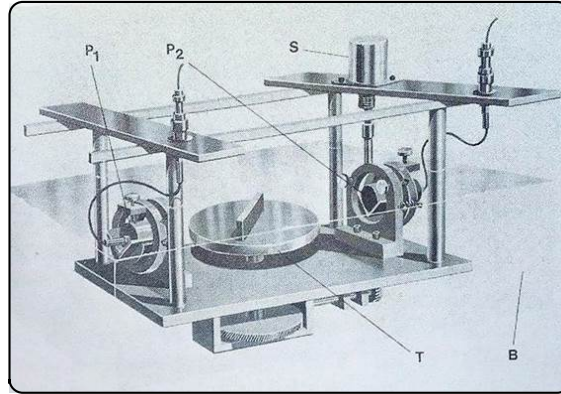
FIGURE 3.1 – Image de microstructure tirée de Zimmer et Cost (1970)

Le deuxième ensemble de données provient de Gusev *et al.* (2000) et le module d'Young et le coefficient de Poisson des différentes phases sont résumés dans le TABLEAU 3.1. Il est utile de remarquer que, dans cet article, le module d'Young et le coefficient de Poisson des fibres de verre sont tirés de la littérature, tandis que le comportement de la matrice est obtenu grâce à la procédure par ultrasons décrite dans l'article. L'indice GHW fait référence à ces auteurs. La FIGURE 3.2 illustre la morphologie de la microstructure du composite étudié par Gusev *et al.* (2000).

FIGURE 3.2 – Image de microstructure tirée de Gusev *et al.* (2000)

Les deux exemples traitent de composites similaires de par leurs composants (verre-epoxy) avec une fraction volumique globale en fibres très proche (0.49 et 0.54), cependant les morphologies à l'échelle microscopique semblent différentes. Alors que les fibres de Zimmer et Cost (1970) semblent former des amas, les fibres de Gusev *et al.* (2000) ont l'air réparties de manière plus homogène. Dans les approches classiques, ces composites sont traités de la même manière. Le modèle analytique développé dans le chapitre précédent permet quant à lui de prendre en compte davantage la morphologie microscopique.

Enfin, la FIGURE 3.3 schématise le dispositif expérimental utilisé. L'échantillon est placé sur un support tournant permettant de régler l'angle d'incidence des ondes sonores. Les ondes sont émises depuis un premier dispositif et les ondes réfléchies sont captées par un second dispositif. Les mesures permettent de calculer les coefficients élastiques.

FIGURE 3.3 – Dispositif expérimental à ultrason tiré de Gusev *et al.* (2000)

Les données matériaux sont résumées dans le TABLEAU 3.1.

Propriété	Notation	ZC	GHW	Unités
Fraction volumique globale en fibres	$\langle f \rangle$	0.49	0.54	-
Module d'Young de la fibre	$\langle E^f \rangle$	72.4	72.5	GPa
Coefficient de Poisson de la fibre	$\langle \nu^f \rangle$	0.20	0.20	-
Module d'Young de la matrice	$\langle E^m \rangle$	4.34 <sup>a</sup>	5.32	GPa
Coefficient de Poisson de la matrice	$\langle \nu^m \rangle$	0.36	0.365	-

TABLEAU 3.1 – Données matériaux fournies par Zimmer et Cost (1970) (noté ZC en référence aux auteurs, fibres de verre et matrice epoxy Scotchply™ 1002) et par Gusev *et al.* (2000) (noté GHW en référence aux auteurs, fibres de verre et matrice epoxy 913).

<sup>a</sup> En raison de la viscoélasticité de la résine et des fréquences ultrasonores choisies, le module d'Young de la matrice est présenté avec une augmentation de 40% par rapport à la valeur mesurée (3.103 GPa). Les auteurs expliquent que cela a donné, dans leur situation, les meilleures correspondances entre les expériences et les modèles de référence.

L'objectif est de savoir comment se situe le nouveau modèle développé dans le chapitre précédent par rapport aux résultats expérimentaux. Dans leur article, Zimmer et Cost (1970) donnent une estimation de l'erreur commise due aux mesures expérimentales. Gusev *et al.* (2000) ne donnent pas précisément cette valeur mais l'intérêt de l'article de Gusev *et al.* (2000) réside également dans l'approche numérique qui leur permet de valider les résultats expérimentaux. Ces résultats seront utilisés par la suite dans ce chapitre. Nous allons tout d'abord confronter notre modèle analytique avec les données expérimentales de Zimmer et Cost (1970).

### 3.2.2 Méthodologie

Afin de construire la réponse du modèle analytique avec les données d'entrée de Zimmer et Cost (1970) sélectionnées précédemment, les modules transverses des composites unidirectionnels ont été déterminés en utilisant un algorithme récursif basé sur les équations (2.84) et (2.100) et peuvent être décrits par l'équation (3.3). Cet algorithme est

implémenté en raison du couplage des modules transverses.

$$\left. \begin{aligned}
 k_{23}^{\text{eff}} &\approx k_{23}^{[j+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{C_1\}\mu_{23}^{[j]} + \{C_2\}}{\{C_3\}\mu_{23}^{[j]} + \{C_4\}} \\
 &\quad \substack{\subseteq k_{23}^{\text{eff}} \\ \subseteq k_{23}^{\text{eff}}} \\
 \text{avec } \{C_p\}, p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, &\text{ fonction de } (f, m, c, k_{23}^{(i)}, \mu_{23}^{(i)}) \\
 &\quad \subseteq k_{23}^{\text{eff}} \\
 \mu_{23}^{\text{eff}} &\approx \mu_{23}^{[j+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{A_1\}}{\{A_2\}} \\
 &\quad \substack{\subseteq \mu_{23}^{\text{eff}} \\ \subseteq \mu_{23}^{\text{eff}}} \\
 \text{avec } \{A_p\}, p \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, &\text{ fonction de } (f, m, c, k_{23}^{(i)}, \mu_{23}^{(i)}, \\
 &\quad \subseteq \mu_{23}^{\text{eff}} \\
 &\quad k_{23}^{\text{eff}} \approx k_{23}^{[j]}, \mu_{23}^{\text{eff}} \approx \mu_{23}^{[j]}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

où  $k_{23}^{[j]}$  et  $\mu_{23}^{[j]}$  sont respectivement une estimation des modules effectifs de compressibilité plan et de cisaillement transverse à l'instant  $[j]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , de la procédure d'itération (voir la FIGURE 3.4).

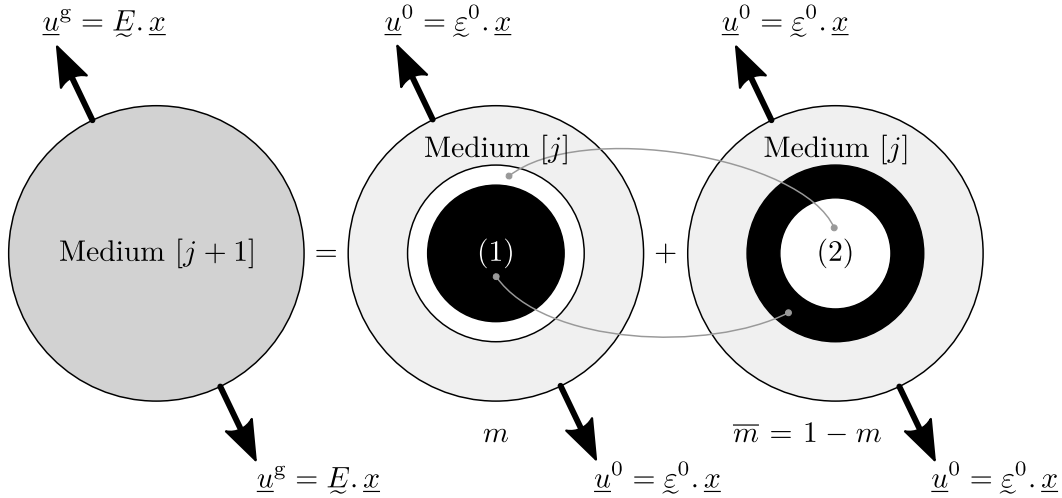


FIGURE 3.4 – Algorithme récursif permettant d'obtenir le comportement transverse effectif.

Les estimations initiales,  $\mu_{23}^{[0]}$  et  $k_{23}^{[0]}$ , peuvent être choisies soit comme les modules de cisaillement transverse et de compressibilité plan de la matrice ou soit comme les mêmes modules mais de la fibre, ce qui donne respectivement les estimations inférieures ou supérieures dans la FIGURE 3.5 comme dans Hervé *et al.* (1991).

La procédure s'arrête quand l'erreur "Err" définie par l'équation (3.4) est inférieure à  $10^{-6}$ .

$$\text{Err} = \frac{\sqrt{(\mu_{23}^{[j+1]} - \mu_{23}^{[j]})^2 + (k_{23}^{[j+1]} - k_{23}^{[j]})^2}}{\sqrt{(\mu_{23}^{[0]})^2 + (k_{23}^{[0]})^2}} \quad (3.4)$$



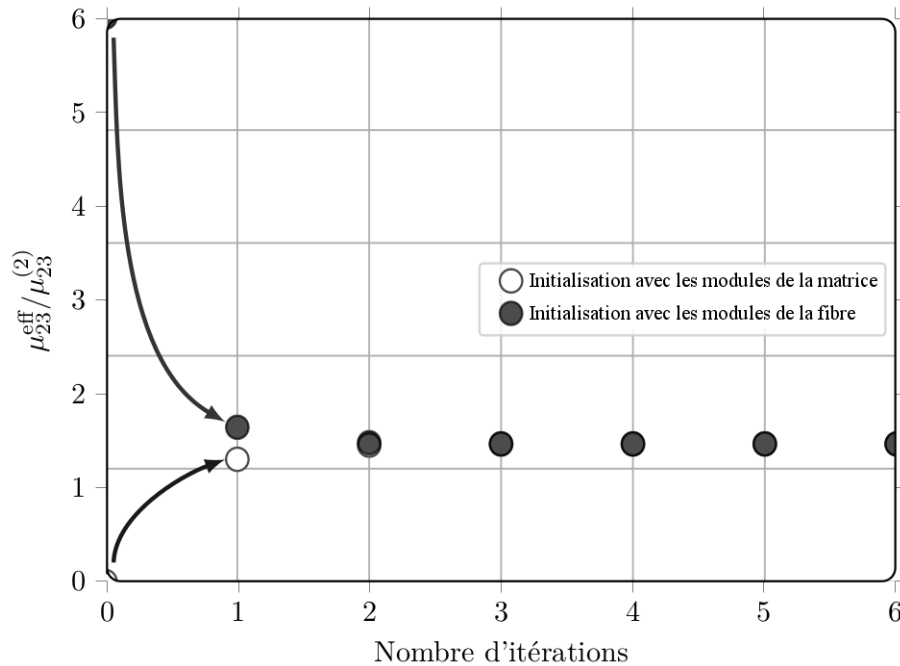


FIGURE 3.5 – Module de cisaillement transverse effectif d’un composite renforcé par des fibres obtenu par un algorithme récursif et normalisé par le module de cisaillement transverse de la matrice (phase (2)). La fibre (phase (1)) a une fraction volumique,  $f$ , égale à 0.5, tout comme  $m$  et  $c$ . Le module de cisaillement normalisé de la fibre vaut  $\mu_{23}^{(1)}/\mu_{23}^{(2)} = 6$  et les coefficients de Poisson valent  $\nu^{(1)} = 0$  et  $\nu^{(2)} = 0.45$ .

Afin d’illustrer la convergence d’une telle procédure, un exemple est traité dans la FIGURE 3.5 où deux phases isotropes sont considérées.

Les paramètres d’entrée dans l’équation (3.3) sont le comportement élastique de chaque phase et les trois paramètres morphologiques suivants :  $f$ , la fraction volumique globale en fibres,  $m$ , la fraction volumique en motif “direct” et  $c$ , la fraction volumique en fibres dans le motif “direct”. Il faut également prendre en compte le fait que  $m$  et  $c$  doivent satisfaire respectivement les équations (3.1) et (3.2) correspondant à leurs bornes (voir Joannès et Hervé-Luanco (2016)). Dans ce cas, une discrétisation est faite sur les valeurs de  $m$  et de  $c$  et on balaye sur toutes les valeurs possibles dans les intervalles de définition de  $m$  et de  $c$ . Cette procédure récursive est utilisée dans la section 3.2.4 en utilisant les données du TABLEAU 3.1. Comme  $f$  est connu, on peut calculer pour chaque couple  $(m, c)$  possible, les modules transverses effectifs  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ .

Pour illustrer la manière dont l’erreur définie dans l’équation (3.4) diminue pendant la procédure récursive, sa valeur a été tracée dans la FIGURE 3.6 (haut) et dans la FIGURE 3.6 (bas) respectivement quand le milieu initial correspond à la fibre (verre) et à la matrice (époxy). Dans cet exemple, les données de Zimmer et Cost (1970) ont été utilisées. Dans la FIGURE 3.6 seules cinq valeurs différentes de  $m$  ont été sélectionnées (comme tracé dans la FIGURE 3.8 et dans la FIGURE 3.9) avec  $c = f = 0.49$  même si, ces deux figures ont nécessité l’utilisation de beaucoup plus de valeurs de  $m$  et  $c$  afin de tracer les courbes enveloppe. Il convient de noter que la vitesse de convergence est très rapide, à savoir que le nombre d’itérations nécessaires pour obtenir l’erreur souhaitée est faible (9 itérations pour l’exemple de Zimmer et Cost (1970) d’après la FIGURE 3.6).

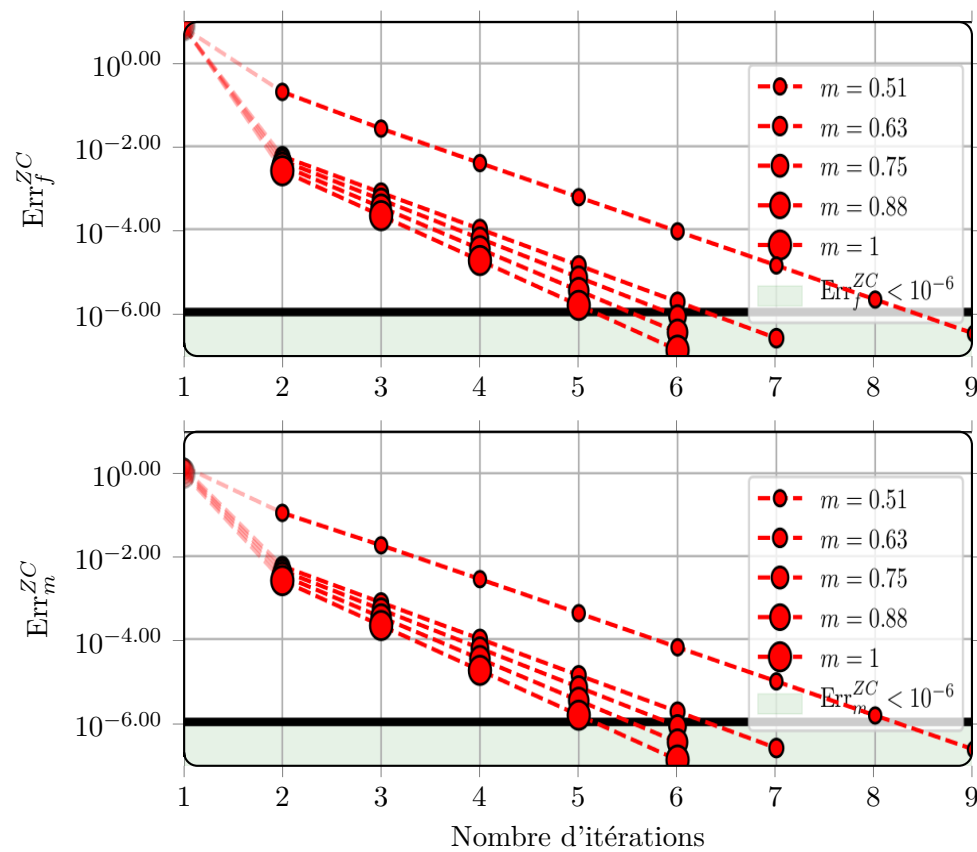


FIGURE 3.6 – Minimisation de l'erreur pendant la procédure d'itération avec l'exemple de Zimmer et Cost (1970) dans le cas particulier où  $c=f=0.49$  et où le milieu [0] correspond à la fibre (haut) ou à la matrice (bas).

### 3.2.3 Réponse du modèle dans les conditions expérimentales retenues, courbes “enveloppe”

Il est important de comprendre que, pour toute fraction volumique de fibres donnée, lorsque le comportement élastique des fibres et de la matrice sont connus dans un composite unidirectionnel, il est possible de prédire le module de compressibilité plan effectif  $k_{23}^{\text{eff}}$  et le module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ .

La réalisation des courbes résultat a nécessité trois étapes. Les étapes sont détaillées pour l'exemple de Zimmer et Cost (1970). Avec les données matériaux précédentes et grâce à la procédure d'itération sur les équations du modèle,  $f$  étant fixé ( $f=0.49$ ), il est possible de discrétiser  $m$  et  $c$  sur toute leur plage de variation possible. Ainsi, on peut trouver pour chaque cas, les modules transverses effectifs correspondants.

La FIGURE 3.7 (haut) représente la première étape qui donne les résultats du calcul du module de compressibilité transverse en fonction de  $c$ , qui est la fraction volumique de fibres dans le motif “direct”.  $k_{23}^{\text{eff}}$  est tracé en pointillés rouges et dépend de trois paramètres. On donne une première valeur à  $m$ .  $c$  peut varier d'après l'équation (3.2). Le triangle gauche (respectivement droit) représente la valeur minimale (respectivement maximale) de  $c$ .

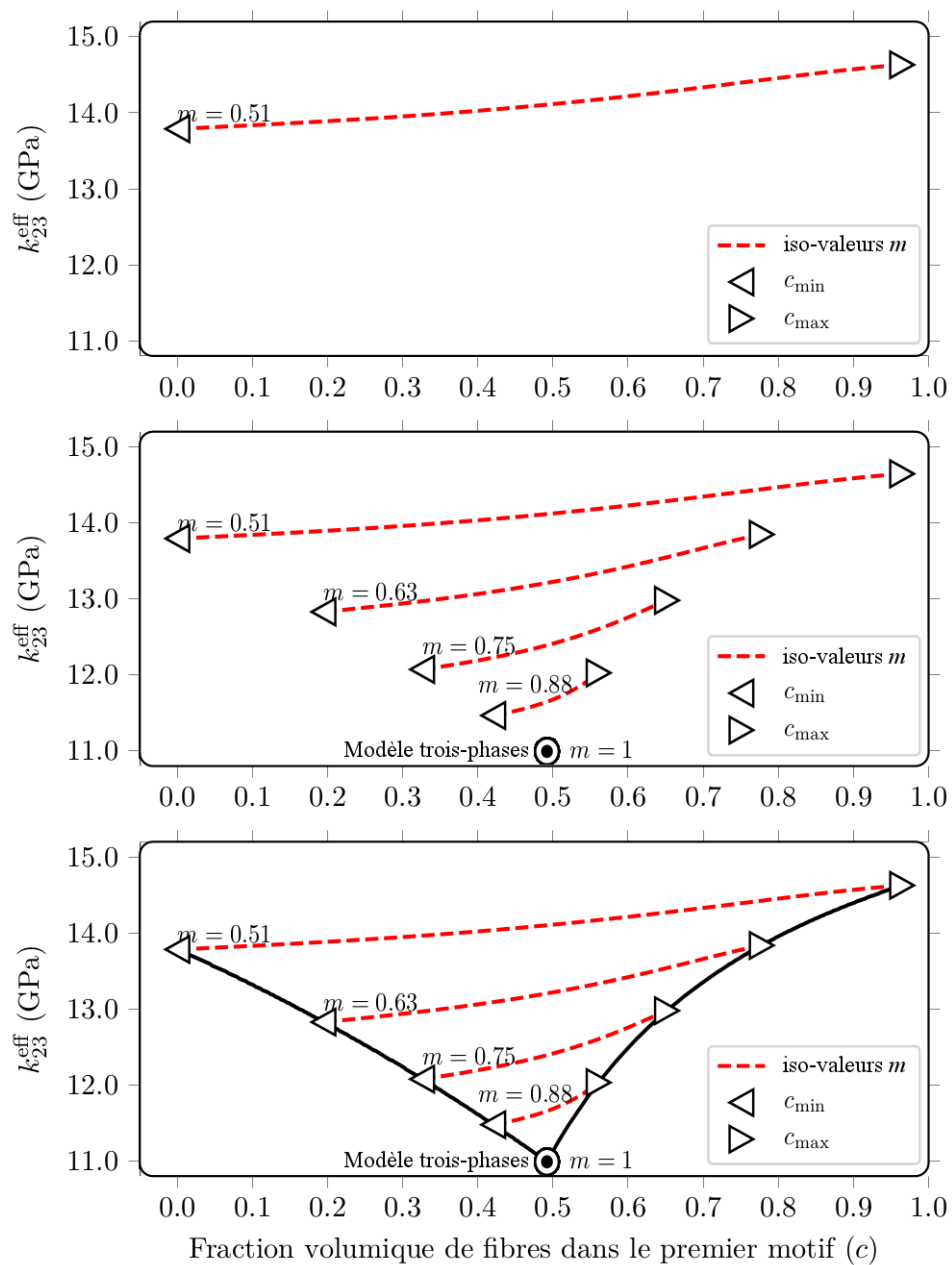


FIGURE 3.7 – Les étapes conduisant à la construction de la courbe enveloppe de  $k_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $c$  pour Zimmer et Cost (1970).

La deuxième étape consiste à tracer les mêmes courbes sur la FIGURE 3.7 (milieu) pour différentes valeurs de  $m$  dans son intervalle de définition (ici entre 0.49 et 1). La valeur de  $k_{23}^{\text{eff}}$  en  $m = 1$  correspond à l'unique résultat du modèle ACG à trois phases de Christensen et Lo (1979). Les résultats sont encadrés par les bornes de  $m$  et  $c$ . La troisième étape correspond au tracé en trait plein de la courbe enveloppe des résultats sur la FIGURE 3.7 (bas) en suivant les valeurs de  $c_{\min}$  et  $c_{\max}$ . Cette courbe enveloppe donne accès à la plage de variation possible des propriétés mécaniques avec les paramètres matériaux utilisés donc pour un matériau composite donné. La FIGURE 3.7 (bas) montre la sensibilité des paramètres du modèle pour les données d'entrée expérimentales de Zimmer et Cost (1970) choisies (voir le TABLEAU 3.1). Le nouveau modèle présente une large gamme de résultats qui vont bien au-delà de l'unique résultat que l'on peut obtenir avec le modèle à trois phases (une seule valeur).

### 3.2.4 Résultats expérimentaux de Zimmer et Cost (1970)

#### Détermination des modules transverses effectifs expérimentaux

Il a été montré que le nouveau modèle balaye une plage de valeurs de modules élastiques possibles bien plus large que le modèle existant. Il est nécessaire de voir comment se situe cette plage de valeurs vis-à-vis des résultats expérimentaux évoqués précédemment, en particulier ceux de Zimmer et Cost (1970). Les résultats suivants pour  $C_{22}$  et  $C_{23}$  (voir l'équation (3.5)) sont présentés avec leur incertitude associée.

$$\left. \begin{aligned} \langle C_{22} \rangle_{\text{ZC}} &= (17.79 \pm 1.03) \text{ GPa} \\ \langle C_{23} \rangle_{\text{ZC}} &= (9.79 \pm 1.52) \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Les modules transverses sont reliés aux constantes élastiques par l'équation (3.6).

$$\left. \begin{aligned} k_{23}^{\text{eff}} &= \frac{C_{22}^{\text{eff}} + C_{23}^{\text{eff}}}{2} \\ \mu_{23}^{\text{eff}} &= \frac{C_{22}^{\text{eff}} - C_{23}^{\text{eff}}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Les modules de cisaillement transverse et de compressibilité plan effectifs de Zimmer et Cost (1970) sont finalement donnés ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \langle k_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{ZC}} &= (13.79 \pm 1.28) \text{ GPa} \\ \langle \mu_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{ZC}} &= (4.00 \pm 1.28) \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$k_{23}^{\text{eff}}$  est déterminé avec une erreur relative de 9.2% et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  avec une erreur relative de 31.8%.

#### Comparaison modèle analytique - résultats expérimentaux

En ajoutant le résultat expérimental à la la FIGURE 3.7 et en réalisant la même procédure pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ , le module de cisaillement transverse effectif, on obtient la FIGURE 3.8 finale. Cette figure permet de comparer les prédictions analytiques du présent modèle aux données expérimentales choisies et représentées par une zone verte.

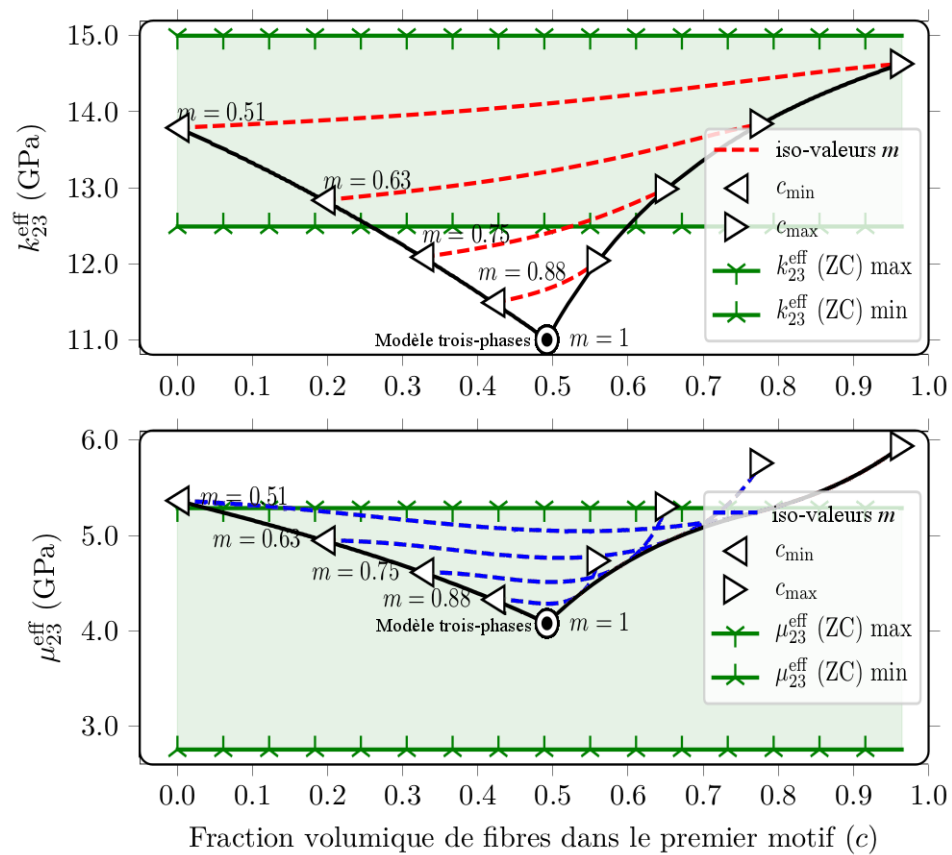


FIGURE 3.8 – Résultats analytiques comparés aux données expérimentales de Zimmer et Cost (1970).

Les résultats analytiques englobent une majeure partie des résultats expérimentaux. Le modèle à trois phases, correspondant au cas où  $m = 1$ , est la valeur la plus faible des modules prédits dans la FIGURE 3.8. Ceci s'explique par le fait que dans les microstructures étudiées, une partie de la matrice est particulièrement confinée (FIGURE 3.1). Ce nouveau modèle permet une meilleure estimation que le modèle  $(n + 1)$ -phase qui commet par exemple une erreur de 11% par rapports aux résultats expérimentaux pour la prédiction de  $k_{23}^{\text{eff}}$  et 4% pour la prédiction de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  dans le cas de Zimmer et Cost (1970). Cependant, l'exemple étudié présente une telle incertitude qu'il est difficile d'en tirer des conclusions générales. Pour le module de cisaillement transverse (incertitude relative de 31.8%), une grande partie des valeurs de  $m$  et de  $c$  donnent un résultat dans la zone des résultats expérimentaux. Il est donc difficile de savoir quels paramètres du modèle analytique utiliser pour capter au mieux les modules effectifs transverses du composite réel étudié. C'est là qu'intervient le second article de Gusev *et al.* (2000) étudié.

### 3.3 Réduire les incertitudes, apport du numérique

Gusev *et al.* (2000) proposent également des résultats expérimentaux basés sur l'analyse des temps de vol dans les différentes directions (méthode inspirée de Read et Dean (1978)). Ces mesures permettent de conduire aux résultats de l'équation (3.8).

$$\left. \begin{aligned} \langle C_{22} \rangle_{\text{GWH}} &= 22.38 \text{ GPa} \\ \langle C_{23} \rangle_{\text{GWH}} &= 10.09 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ce qui conduit à l'équation (3.9) :

$$\left. \begin{aligned} \langle k_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{GWH}} &= 16.23 \text{ GPa} \\ \langle \mu_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{GWH}} &= 6.14 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Il est nécessaire de préciser que la valeur de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  fournie par Gusev *et al.* (2000) (6.07 GPa), est légèrement en dessous de la valeur calculée ici, qui permet de travailler sous l'hypothèse d'isotropie transverse.

Dans l'article de Gusev *et al.* (2000), les constantes élastiques ne sont pas données, seuls quelques modules élastiques ont été mesurés. En ce qui concerne l'incertitude, les auteurs indiquent uniquement que la précision de la méthode est typiquement de quelques pour cent. Comme pour Zimmer et Cost (1970), cette incertitude ne permet pas d'affiner la comparaison entre le modèle analytique et les résultats expérimentaux.

L'article de Gusev *et al.* (2000) présente des résultats numériques en parallèle des résultats expérimentaux, ce qui permet de mieux maîtriser les sources d'incertitudes et faciliter les comparaisons. Les simulations par éléments finis sont menés sur des images de microstructures générées en suivant une méthode de Monte Carlo. Les auteurs ont choisi d'identifier deux paramètres morphologiques : la distance au plus proche voisin et le diamètre des fibres pour créer des microstructures le plus semblable possible au matériau considéré dans l'article. Ces simulations numériques ont ainsi permis d'obtenir des estimations des constantes élastiques très proches des résultats expérimentaux. Finalement, les résultats obtenus numériquement sont :

$$\left. \begin{aligned} \langle k_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{GWH}} &= 15.01 \text{ GPa} \\ \langle \mu_{23}^{\text{eff}} \rangle_{\text{GWH}} &= 5.66 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

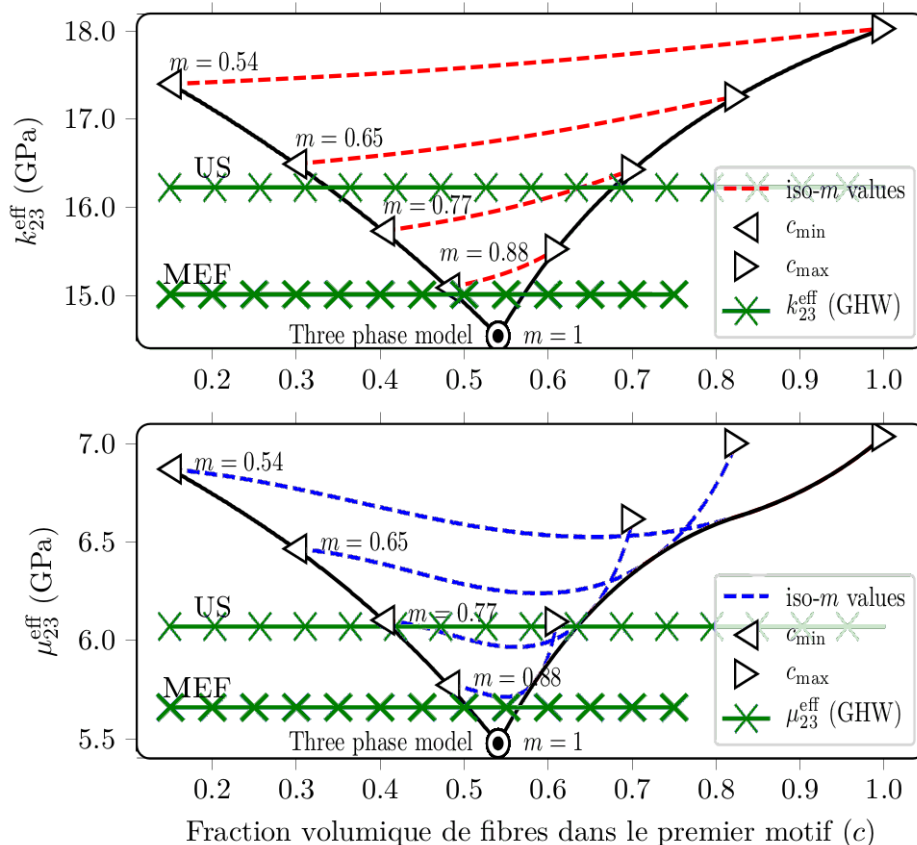


FIGURE 3.9 – Résultats analytiques comparés aux données expérimentales (US) et numériques (MEF) de Gusev *et al.* (2000).

Les écarts relatifs des valeurs numériques avec les valeurs expérimentales sont de 7.8% pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et 7.5% pour  $k_{23}^{\text{eff}}$ . Les résultats numériques sont donc bien en accord avec les résultats expérimentaux. En utilisant une approche similaire à celle utilisée dans la partie précédente, on peut tracer sur la FIGURE 3.9 les résultats analytiques de Gusev *et al.* (2000) et y inclure les résultats expérimentaux et numériques.

Les résultats de notre modèle englobent à la fois les résultats expérimentaux et numériques. Le modèle analytique permet dans ce cas de prédire correctement le comportement transverse effectif du composite étudié. Il est clair que l'incertitude sur les résultats numériques étant bien plus faible que celle sur les résultats expérimentaux, nous pouvons considérer que l'approche proposée est bien appropriée pour rendre compte des effets des fluctuations morphologiques sur le comportement transverse.

La difficulté dans l'utilisation du modèle analytique développé réside dans le choix des deux paramètres supplémentaires  $m$  et  $c$ . Il n'est pas évident de choisir "a priori" les valeurs correspondant au composite étudié. Dans un premier temps, il est intéressant de s'intéresser à la plage de valeur pour  $m$  etc correspondant aux résultats numériques de Gusev *et al.* (2000).

### 3.4 Recherche de couples solution ( $m, c$ ) communs

Sur la FIGURE 3.9, les variations de  $m$  et  $c$  correspondent à des variations de microstructure. Ces variations entraînent une importante amplitude des résultats que ce soit



de  $k_{23}^{\text{eff}}$  ou de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ , ce qui indique une sensibilité de  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  à la morphologie à l'échelle microscopique. Grâce à l'ajout d'un motif morphologique représentatif, le nouveau modèle permet d'atteindre des propriétés bien au delà de celles calculées par le modèle à trois phases. Et ces nouvelles propriétés sont compatibles avec des résultats numériques eux-mêmes peu éloignés des résultats expérimentaux. Des couples solution pour les paramètres du modèle  $(m, c)$  semblent exister pour trouver  $k_{23}^{\text{eff}}$  ou  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ . Mais une interrogation demeure quant à la possibilité de prédire correctement et en même temps les deux modules effectifs transverses. Les résultats de Gusev *et al.* (2000) ont été choisis comme référence pour la suite de l'étude car l'incertitude des résultats numériques est la plus faible (moins d'un pourcent d'après les auteurs).

### 3.4.1 Méthode inverse

Une méthode inverse a été utilisée sur les résultats précédents. Afin d'obtenir un maximum de points solution, une forte discrétisation de  $m$  doit être réalisée autour du résultat numérique. Avec cette discrétisation sur la FIGURE 3.9, la courbe bleue du résultat numérique coupe la courbe rouge en pointillés du modèle analytique en un ou plusieurs points. Pour une valeur de  $m$  fixée, il y a jusqu'à trois couples  $(m, c)$  solution dans cet exemple précis. Mais si on discrétise davantage  $m$ , il y en a en réalité une infinité à l'intérieur de la courbe enveloppe. La méthode inverse consiste à retrouver tous ces couples solution. On fixe  $m$  et on teste toutes les valeurs de  $c$  possibles. L'intersection de la courbe rouge (qui représente un résultat analytique) avec le résultat numérique moyen donne un point solution. Tous les points  $(m, c)$  solution sont représentés sur la FIGURE 3.10 à gauche pour le module de compressibilité et sur la droite de la FIGURE 3.10 pour le module de cisaillement avec  $m$  en abscisse et  $c$  en ordonnée.

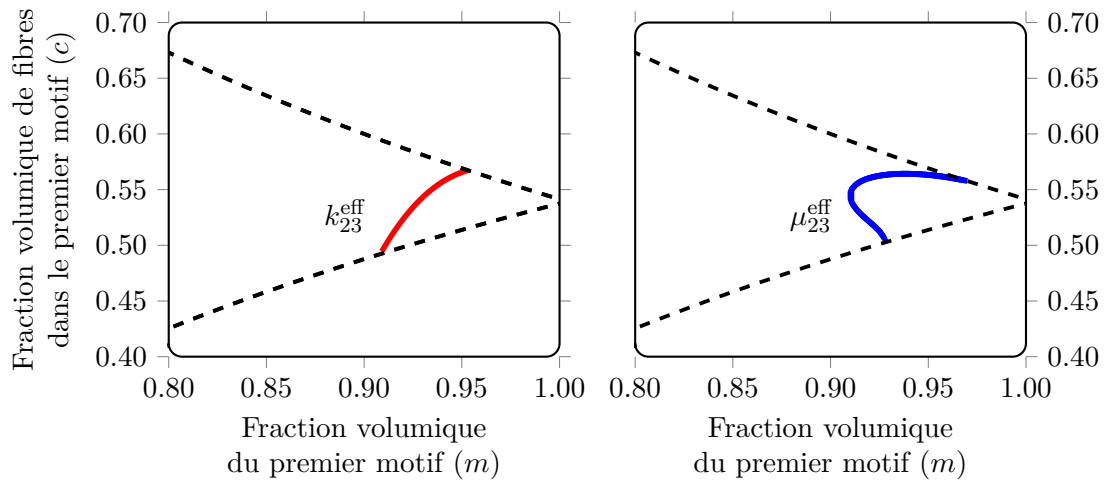


FIGURE 3.10 – Application d’une méthode inverse permettant de déterminer l’ensemble des couples  $(m, c)$  et retrouver analytiquement le module de compressibilité transverse effectif  $k_{23}^{eff}$  et le module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{eff}$  numériques de Gusev *et al.* (2000).

Le modèle analytique permet de prédire correctement les modules transverses séparément sur une plage de variation de  $m$  et  $c$  pour l’instant propre à chaque module.

### 3.4.2 Superposition des couples solution pour les deux modules transverses

En superposant les deux courbes de la FIGURE 3.10, on obtient la FIGURE 3.11.

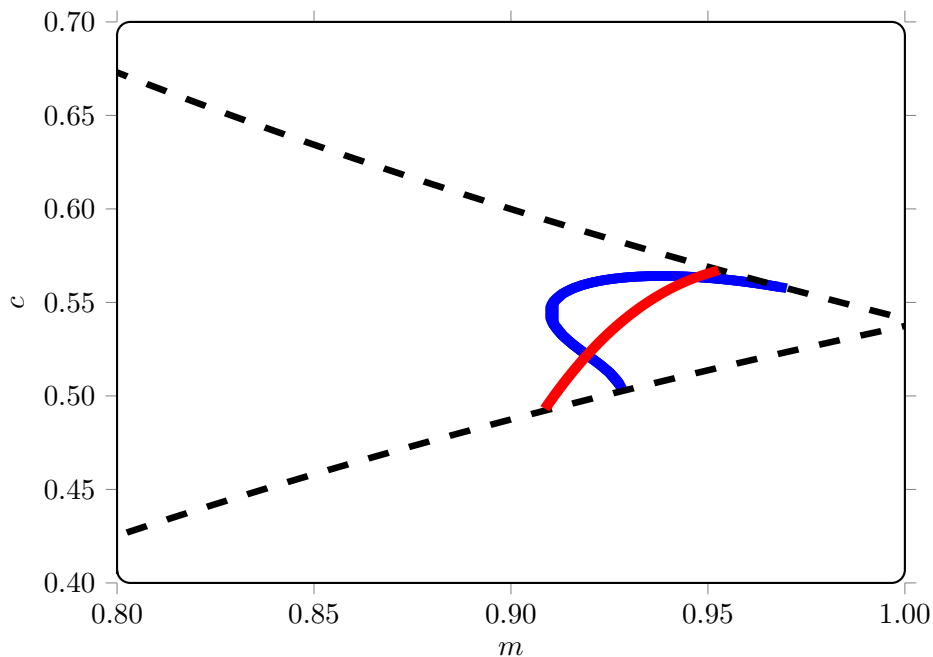


FIGURE 3.11 – Superposition des couples solution de Gusev *et al.* (2000) pour  $\mu_{23}^{eff}$  et  $k_{23}^{eff}$ .

Le modèle analytique développé semble avoir un fort potentiel de prédiction par rapport

au modèle à trois phases pour les résultats sélectionnés. Dans le contexte étudié dans ce chapitre, il est possible d'identifier deux couples solution. En réalité, compte tenu des incertitudes sur les résultats "cibles", une zone de couples communs  $(m, c)$  existe.

### 3.5 Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre sont particulièrement encourageants. Le modèle analytique développé dans le chapitre précédent est ici mis en œuvre pour évaluer sa capacité à prédire des résultats expérimentaux et numériques de la littérature. La plage de réponse du modèle est suffisamment large pour couvrir les résultats expérimentaux et numériques considérés. Pour chacun des deux paramètres élastiques étudiés, un ensemble de couples solution  $(m, c)$  a pu être identifié et l'intersection de ces ensembles solution n'est pas vide. Il est donc possible de prédire  $k_{23}^{\text{eff}}$  ou  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  à partir du même jeu de paramètres.

Néanmoins, cette conclusion ne vaut que pour l'exemple étudié dans ce chapitre et plusieurs interrogations demeurent, notamment en ce qui concerne la robustesse de la solution et l'extension de ces résultats à d'autres configurations morphologiques. C'est notamment l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 4

# Développements numériques pour nourrir le modèle analytique

### Sommaire

---

<b>4.1 Amélioration de la recherche des couples solutions . . . . .</b>	<b>82</b>
4.1.1 Application à un matériau composite réel verre-polyamide . . . . .	82
4.1.2 Une microstructure maîtrisée . . . . .	82
4.1.3 Choix du VER - Maîtrise de l'incertitude . . . . .	84
4.1.4 Difficultés liées au maillage . . . . .	90
4.1.5 Résultats . . . . .	92
<b>4.2 Robustesse des couples solutions . . . . .</b>	<b>94</b>
4.2.1 Variation des paramètres matériaux . . . . .	94
4.2.2 Deux zones de performance . . . . .	96
4.2.3 Recherche d'une valeur de $m$ optimisée . . . . .	97
4.2.4 Procédure de minimisation de l'erreur . . . . .	98
4.2.5 Généralisation à d'autres concentrations en fibres . . . . .	99
4.2.6 Résultats . . . . .	101
<b>4.3 Étude du cas d'une matrice incompressible . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>4.4 Indépendance de la physique considérée . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>4.5 Conclusion . . . . .</b>	<b>109</b>

---

Les résultats du chapitre précédent montrent que l'on peut trouver des couples  $(m, c)$  qui, une fois introduits dans le modèle analytique, prédisent correctement et en même temps les modules effectifs transverses de cisaillement et de compressibilité plan. La recherche de ces couples solution s'est faite pour l'instant uniquement sur un exemple tiré de la littérature où les propriétés effectives d'un composite verre-époxy ont été identifiées via une méthode numérique confirmant des résultats expérimentaux ultrasonores (Gusev *et al.*, 2000). Bien que les résultats numériques soient proches des résultats expérimentaux, un écart demeure. Cet écart peut provenir de multiples sources à commencer par les incertitudes expérimentales. Il peut également être dû à une mauvaise prise en compte des paramètres matériaux des constituants ou à la représentativité des microstructures utilisées dans les simulations numériques.

Les questions qui suivent guident le cheminement de ce chapitre :

1. La détermination des couples solution peut-elle être améliorée et intégrer une incertitude ?
2. Les plages de solutions trouvées sont-elles robustes ?

3. Y a-t-il similitude entre les couples solution trouvés ici dans le cas de la mécanique et les couples solution trouvés dans le cas de la diffusion par Joannès et Hervé-Luanco (2016) ?

## 4.1 Amélioration de la recherche des couples solutions

Le chapitre 3 a permis d'étudier la sensibilité des paramètres du modèle ACG par motifs. Il a permis de montrer que le modèle pouvait capturer correctement le comportement d'un composite verre-époxy d'après des données expérimentales par ultrasons et d'après des données numériques validant les résultats expérimentaux. Ces données de la littérature ont toutefois leur limite. Il n'y a pas d'information précise sur l'incertitude relative aux mesures expérimentales bien qu'elle soit supposée faible, de l'ordre de quelques pour cent. En ce qui concerne les résultats numériques, l'incertitude exacte n'est pas précisée et on ne connaît pas tous les paramètres utilisés pour reproduire ces résultats. La solution qui consiste à travailler sur un matériau réel tout en reproduisant numériquement et fidèlement une microstructure morphologiquement représentative du composite étudié est bonne et est reprise dans la suite de ce chapitre. Cependant, la méthode de la portée intégrale est en plus utilisée pour évaluer précisément l'incertitude liée aux résultats numériques.

### 4.1.1 Application à un matériau composite réel verre-polyamide

La suite de ce travail s'appuie sur les travaux de thèse de Poulet (2017) qui ont permis de développer un outil permettant de générer numériquement une microstructure morphologiquement représentative d'un matériau composite réel. Le composite utilisé est constitué de fibres de verre liées par une matrice polyamide. Une image représentative de la microstructure de ce composite ainsi que les propriétés matériaux sont données sur la FIGURE 4.1.

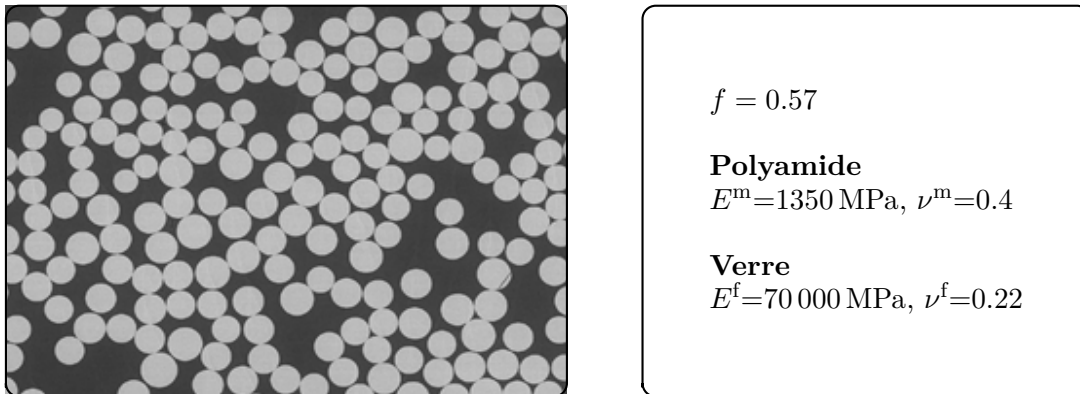


FIGURE 4.1 – Image de microscopie d'un composite verre-polyamide et les données matériaux de ce composite.

### 4.1.2 Une microstructure maîtrisée

Dans les travaux de Poulet (2017), bien que disposant physiquement d'un matériau, réaliser des essais pour obtenir les modules transverses est assez complexe car il n'est pas possible d'obtenir ces modules directement par les essais mécaniques habituellement utilisés. Il aurait été possible de découper le matériau, de le traiter avant de l'analyser

au microscope (Microscope Électronique à Balayage ou Microscope Optique) comme sur la FIGURE 4.1 et ensuite de faire un calcul par la MEF ou de faire un calcul par FFT. Mais un certain nombre d’images et d’échantillons (pour ne pas dire un nombre certain) est nécessaire pour obtenir une moyenne représentative, ce qui limite l’utilisation de cette méthode. Afin de surmonter ce problème, un programme de génération de microstructures virtuelles a été développé par Poulet (2017).

La méthode utilisée par Poulet (2017) s’inspire de la méthode de la “dynamique moléculaire” de Ghossein et Levesque (2012) qui permet d’atteindre une forte concentration en fibres. Un certain nombre de germes correspondant aux axes des fibres est fixé. Les germes sont répartis dans un espace limité qui est à choisir en fonction de la morphologie et en s’aidant des résultats donnés par la portée intégrale. Une direction et une vitesse initiale leurs sont imposées. Ils disposent d’un taux de croissance propre. Si celui-ci est identique pour chaque germe, les fibres auront le même diamètre au final. Une masse est également imposée, conférant une inertie aux germes pour éventuellement former sur des zones plus riches en fibres ou en matrices. La méthode repose sur le principe suivant : les germes se déplacent, entrent en collision et se repoussent ou sortent du cadre pour réapparaître de l’autre côté ce qui assure la périodicité géométrique de l’espace considéré. Les germes voient leur taille augmenter “jusqu’à” un choc ou une sortie-entrée de l’espace ce qui génère un incrément de temps. À chaque incrément de temps, la concentration en fibres est calculée. Les germes sont animés jusqu’à ce que la concentration en fibres atteigne la valeur cible désirée. Cette méthode a été implémentée dans le cadre de la thèse de Poulet (2017) et est exploitée dans le présent travail.

Une fois les images générées (FIGURE 4.2), certains modules élastiques sont calculés par la Méthode des Éléments Finis.

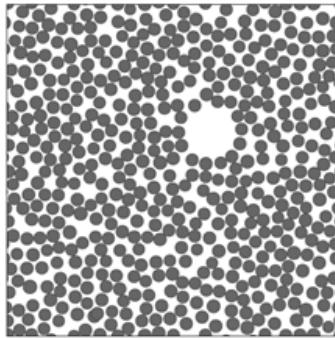


FIGURE 4.2 – Image générée numériquement et représentative du matériau composite verre-polyamide de Poulet (2017). Une zone plus riche en matrice est clairement visible sur ce tirage aléatoire.

L’outil de génération permet de jouer sur plusieurs paramètres :

- la fraction volumique globale en fibres,
- la zone d’exclusion déterminant la distance minimale entre deux fibres (si celle-ci est nulle, les fibres sont en contact ce qui peut compliquer le maillage final),
- le nombre de fibres,
- la taille (longueur et hauteur) de la cellule générée,
- le spectre du rayon permettant d’avoir ou non un diamètre de fibres différent,

- la possibilité d’ajouter plusieurs germes qui resteront ensuite de la matrice, et dont la position et la taille peuvent être choisies.

L’intérêt de cet outil de génération est de pouvoir jouer sur tous ces paramètres pour se rapprocher au mieux de la microstructure réelle souhaitée. Cette correspondance est évaluée grâce à plusieurs descripteurs morphologiques. Ces descripteurs sont calculés sur l’image générée ainsi que sur l’image de microscopie d’un échantillon représentatif du matériau réel. La similitude des descripteurs réels et virtuels assure que l’image virtuelle soit morphologiquement représentative du matériau réel. Des calculs sur l’image virtuelle ainsi générée doivent donner des résultats similaires aux calculs sur l’image de composite réel. Plusieurs descripteurs sont utilisés par Poulet (2017), on peut citer par exemple la fonction de densité de probabilité des rayons des fibres, la fonction de densité de probabilité des distances et orientations des premiers voisins, la fonction de densité de probabilité des aires de Voronoï, la fonction de distribution radiale ou encore la fonction de covariance. Certains descripteurs sont semblables à ceux utilisés par Gusev *et al.* (2000), étudié dans le chapitre précédent. Cependant, ils n’utilisent dans leur cas que deux descripteurs et bien que les valeurs mesurées sur le composite réel et calculées sur les images créées soient proches, des écarts persistent pour certaines valeurs.

### 4.1.3 Choix du VER - Maîtrise de l’incertitude

Une fois l’outil de génération de microstructures opérationnel, il est nécessaire de déterminer le volume à générer. Cette recherche du VER (Volume Élémentaire Représentatif) permet d’optimiser notamment la taille de celui-ci et le temps de calcul. La méthode utilisée est l’utilisation de la portée intégrale. La portée intégrale est une approche statistique décrite par Kanit *et al.* (2003) et issue des travaux de Lantuejoul (1991) qui, pour un paramètre apparent  $Z$  fournit une relation entre l’erreur relative de  $Z$  moyen ( $\varepsilon_{\text{rela}}$ ), le volume étudié ( $V$ ) et le nombre de réalisations ( $n$ ) d’image de la microstructure avec les paramètres choisis :

$$\varepsilon_{\text{rela}} = \sqrt{\frac{4D_Z^2 A_3^\gamma}{\langle Z \rangle^2 n V^\gamma}} \quad (4.1)$$

Dans l’équation (4.1), les paramètres manquants sont déterminés avec la méthode définie par la FIGURE 4.3, la FIGURE 4.4 et la FIGURE 4.5. À partir d’une image générée, un certain nombre de tailles de surface est étudié. Pour chaque taille de surface, l’image est découpée en sous-domaines indépendants (FIGURE 4.3).

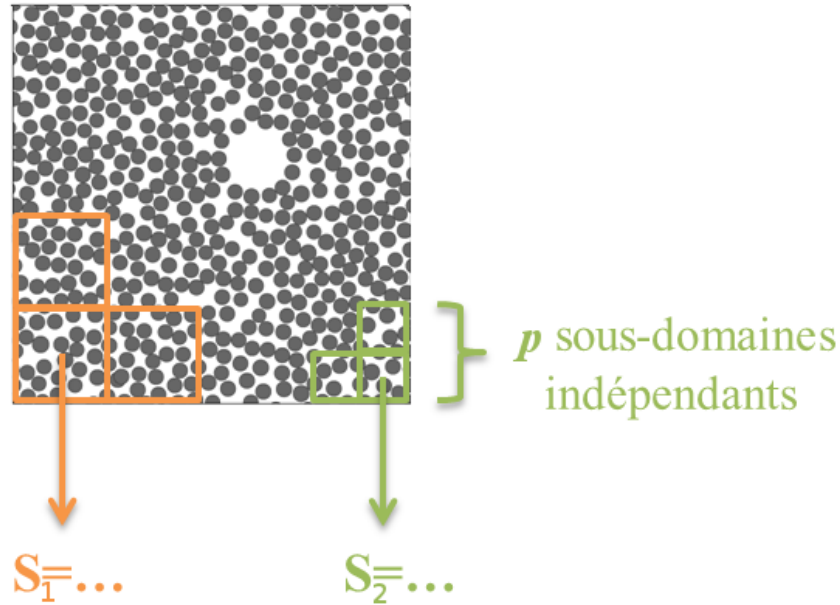


FIGURE 4.3 – Principe de la portée intégrale : découpe de l'image de Poulet (2017) en sous-domaines indépendants.

La variance du paramètre  $Z$  (qui représentera  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  ou  $k_{23}^{\text{eff}}$  dans notre étude) est calculée pour chaque sous-domaine grâce à l'équation (4.2) :

$$D_Z^2(S) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (\langle Z_j \rangle - \langle Z \rangle)^2 \quad (4.2)$$

Le résultat est tracé pour chaque surface considérée (FIGURE 4.4). Cet exemple permet d'illustrer la méthode et porte sur le paramètre  $Z = \varepsilon_{22}$ . Le paramètre d'intérêt serait ici le module de cisaillement effectif transverse ou le module de compressibilité effectif transverse.

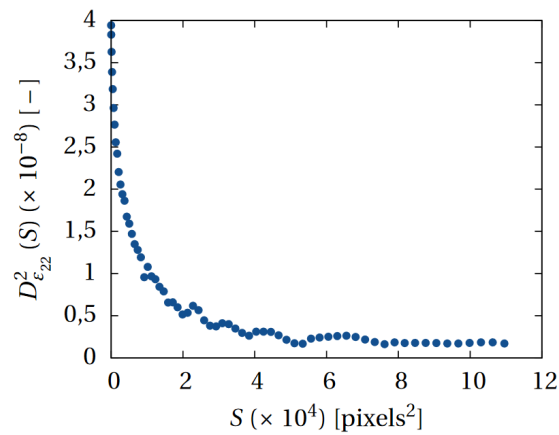


FIGURE 4.4 – Principe de la portée intégrale : calcul de la variance par Poulet (2017). Ici  $Z = \varepsilon_{22}$



Le même tracé est fait en échelle bi-logarithmique. Une régression linéaire permet de trouver  $\gamma$  (pente de la droite) et  $D_Z^2 A_3^\gamma$  (ordonnée à l'origine de la droite) (FIGURE 4.5).

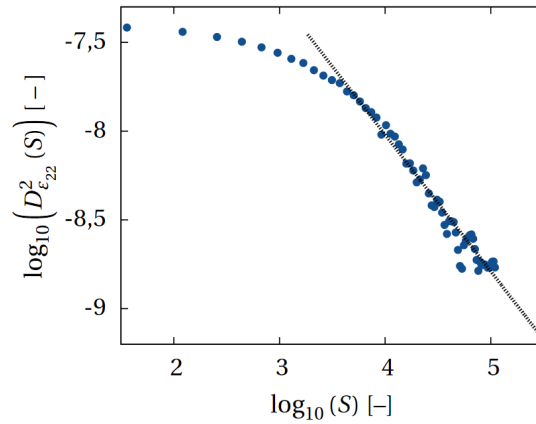


FIGURE 4.5 – Principe de la portée intégrale : régression linéaire par Poulet (2017).

La méthode de la portée intégrale présentée précédemment a été utilisée par Poulet (2017).  $\epsilon_{22}$  a été choisi comme paramètre  $Z$ . La régression linéaire a donné dans cet exemple le résultat suivant :  $\gamma=0.7698$  et  $D_{\epsilon_{22}}^2 A_3^\gamma = 1,15 \times 10^{-5}$ . Dans l'équation (4.1), les inconnues non déterminées sont  $n$ ,  $V$  et la moyenne de  $Z$ . En lançant  $n$  calculs par la MEF sur une surface  $S$  (dans cet exemple, des calculs 2D sont faits donc sur une surface  $S$  et non pas sur un volume  $V$ ), on obtient des résultats pour  $\epsilon_{22}$  dont on peut faire la moyenne. Il est donc possible de connaître l'erreur relative commise lors de la détermination du paramètre choisi, ici  $\epsilon_{22}$ .

Poulet (2017) s'est intéressé entre autre au module de cisaillement transverse, qui est d'intérêt dans ce travail. Les résultats des calculs par la MEF sur les microstructures générées virtuellement sont donnés sur le TABLEAU 4.1.

Paramètre [Unité]	Calculs MEF
$E_1$ [MPa]	40 288
$E_2$ [MPa]	6 066
$\mu_{23}$ [MPa]	1 979
$\mu_{12}$ [MPa]	2 008
$\nu_{12}$	0.28
$\nu_{13}$	0.28
$\nu_{23}$	0.49

TABLEAU 4.1 – Résultats des calculs par la MEF des modules élastiques effectifs de Poulet (2017) sur les microstructures virtuelles générées avec une erreur relative maximale de 5% sur chaque paramètre.

Le résultat pour le module de cisaillement transverse effectif est donné à 1979 MPa avec une erreur relative maximale de 5% déterminée par la méthode de la portée intégrale. Le module de compressibilité transverse effectif n'est pas calculé directement ici. La formule

(4.3) a été utilisée pour le déterminer.

$$k_{23}^{\text{eff}} = \frac{E_{22}^{\text{eff}}}{2 \left( 1 - \nu_{23}^{\text{eff}} - 2 \frac{E_{22}^{\text{eff}} \nu_{12}^{\text{eff}2}}{E_{11}^{\text{eff}}} \right)} \quad (4.3)$$

En faisant ce calcul, le module de compressibilité transverse a une valeur de 6236 MPa avec une erreur relative d'environ 11 %. Puisque  $k_{23}^{\text{eff}}$  n'était pas l'objet d'étude de Poulet (2017), une erreur relative sur les modules de 5 % était suffisante. Mais cette erreur peut être diminuée en augmentant le nombre de réalisations ou la surface étudiée (voir l'équation (4.1)). En utilisant les résultats de  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ , le modèle analytique ACG par motifs peut être utilisé pour comparer les prédictions du modèle aux résultats numériques. Contrairement aux résultats numériques de Gusev *et al.* (2000) présentés dans le chapitre précédent, les résultats de Poulet (2017) présentent deux avantages majeurs :

- générer des images qui représentent le plus fidèlement possible la microstructure réelle du composite étudié,
- déterminer les modules élastiques avec une erreur relative maîtrisée.

Les courbes similaires à la FIGURE 3.9 et à la FIGURE 3.11 obtenues grâce au modèle ACG par motifs ont été tracées. La FIGURE 4.6 en haut montre que pour une certaine plage de valeurs de  $c$  et  $m$ , le modèle analytique est capable de prédire le comportement en cisaillement transverse dans la même gamme que les résultats par la Méthode des Éléments Finis. Les courbes bleues et vertes représentent les valeurs trouvées par Poulet (2017) à savoir 1979 MPa à plus ou moins 5%. Chaque point à l'intérieur de l'enveloppe noire correspond à un couple  $(m, c)$  particulier. La FIGURE 4.6 en bas montre l'ensemble des couples  $(m, c)$  possibles calculés par la méthode inverse (voir section 3.4.1) (avec les résultats de la figure de gauche). La FIGURE 4.7 montre les mêmes résultats mais cette fois-ci pour le module de compressibilité  $k_{23}^{\text{eff}}$ . La zone des couples  $(m, c)$  possibles est dans ce cas beaucoup plus grande puisque l'erreur d'estimation est plus importante.

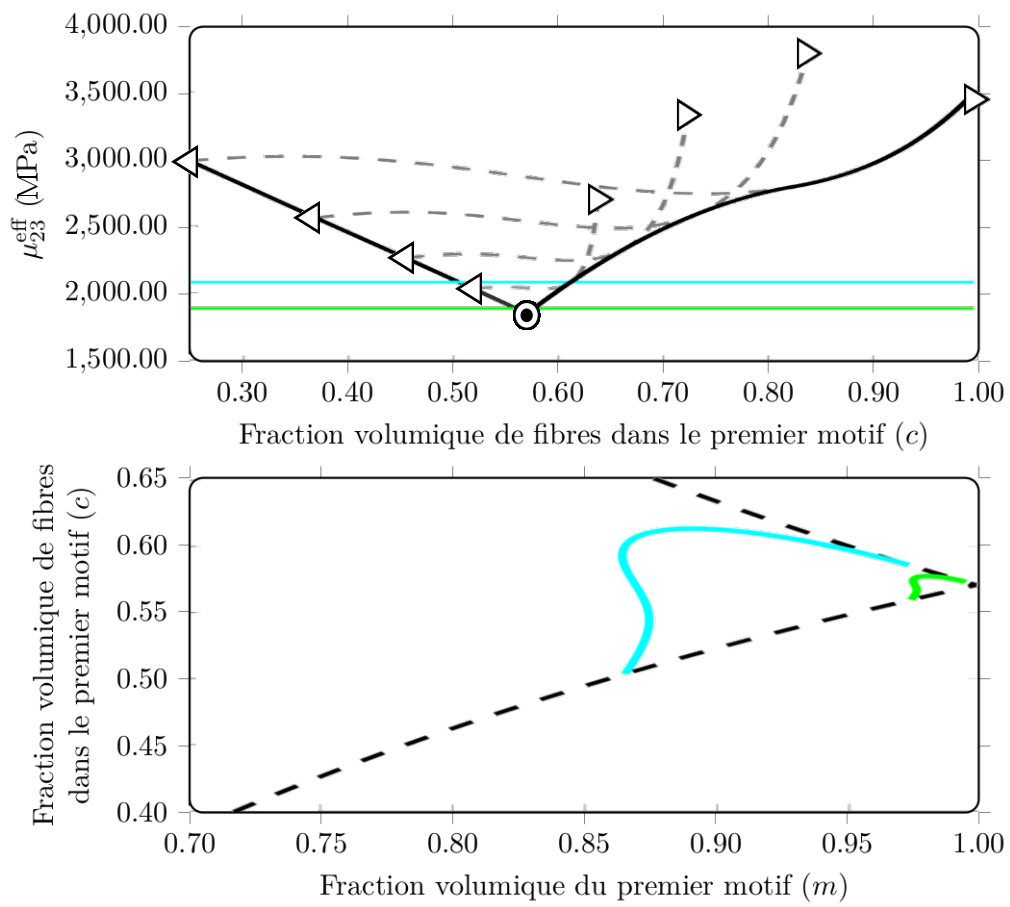


FIGURE 4.6 – Modèle MRP-GSCS comparé aux résultats de Poulet (2017) pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et les couples  $(c, m)$  correspondants

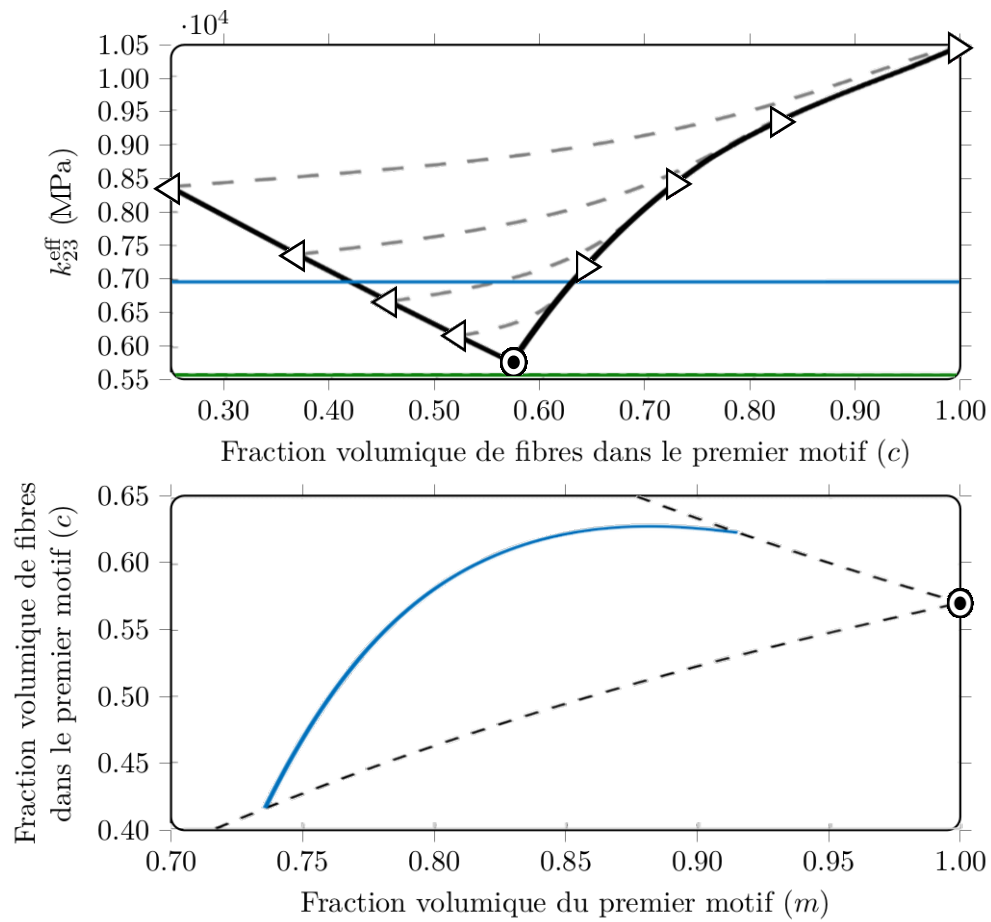


FIGURE 4.7 – Modèle MRP-GSCS comparé aux résultats de Poulet (2017) pour  $k_{23}^{\text{eff}}$  et les couples  $(c, m)$  correspondants

L'assemblage des deux courbes résultats des couples  $(m, c)$  donne la FIGURE 4.8.

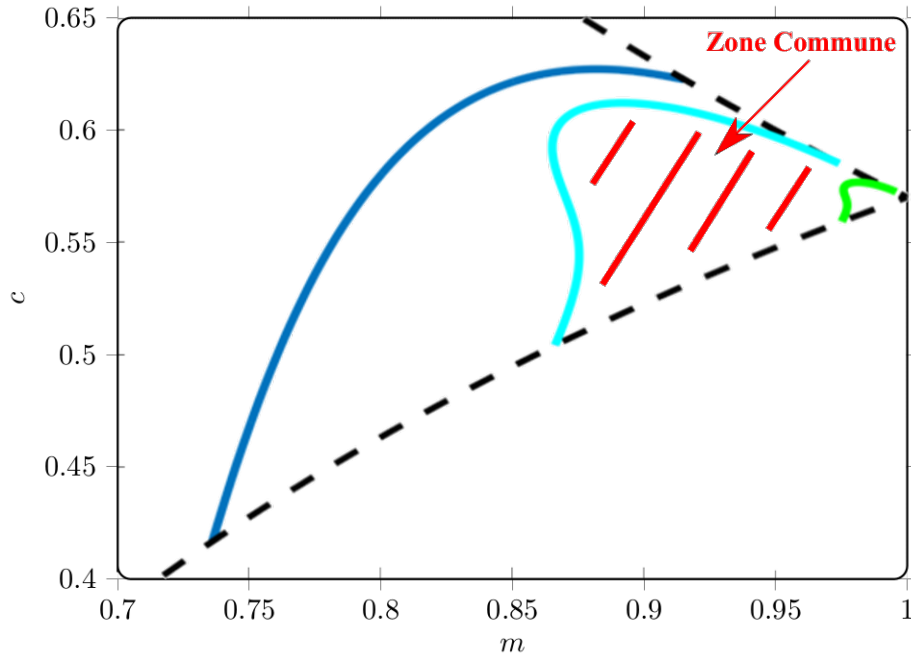


FIGURE 4.8 – Recherche d’une zone commune des couples  $(m, c)$  pour les résultats de Poulet (2017)

La méthode utilisée doit permettre l’amélioration de la méthode de détermination des couples solution vue au chapitre précédent. Cependant, les résultats de Poulet (2017) offrent des marges d’erreur, bien que précises, encore assez importantes ( $\pm 5\%$  d’erreur pour le module de cisaillement transverse et  $\pm 11\%$  d’erreur pour le module de compressibilité transverse). L’importante erreur relative sur le module de compressibilité transverse donne une très grande zone commune allant de 0.86 à 0.99 environ pour  $m$  et de 0.51 à 0.61 environ pour  $c$ . Cette incertitude ne permet pas d’estimer précisément les couples  $(m, c)$  possibles.

Tout comme pour les résultats du chapitre précédent, une zone commune existe, c’est à dire des couples  $(m, c)$  capables de donner une prédiction cohérente avec les résultats par la MEF pour les deux modules de compressibilité et de cisaillement transverse en même temps.

L’idée ici est donc de reprendre les résultats de Poulet (2017) sur la portée intégrale pour améliorer l’incertitude sur les prédictions. Ses recherches ont montré qu’il faut au minimum 150 images modélisant 120 fibres (à 57% de concentration en fibres) pour obtenir une erreur relative inférieure à 1% dans l’estimation des deux modules de compressibilité et cisaillement transverse effectif. Cette approche diffère cependant légèrement de la méthode présentée précédemment car, ici, l’image n’est pas découpée mais de nombreuses images sont générées pour être ensuite “assemblées”.

#### 4.1.4 Difficultés liées au maillage

Afin de pouvoir réduire l’incertitude des calculs numériques, il nous faut générer de nouvelles images et effectuer de nouveaux calculs. La FIGURE 4.9 montre le cheminement qui a permis de produire les résultats de Poulet (2017).

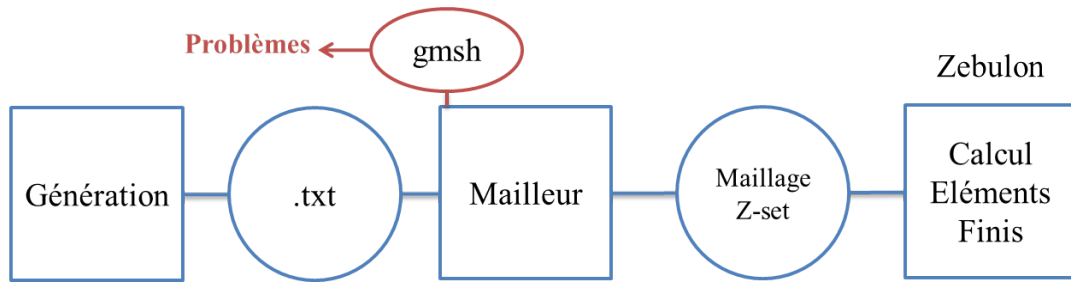


FIGURE 4.9 – Méthode de génération de microstructures et de calculs des propriétés effectives de Poulet (2017) : problématiques.

L’outil de génération de microstructures créé par Poulet (2017) génère un fichier texte avec les positions  $x$  et  $y$  ainsi que le rayon de chaque fibre (représentée en 2D par un disque noir). Les données sont utilisées dans un mailleur appelé `gmsH` qui produit un maillage utilisé ensuite pour faire un calcul par la Méthode des Éléments Finis sous “Zebulon”, un outil interne au laboratoire de recherche dans lequel ces travaux se sont déroulés. L’utilisation de `gmsH` s’avère poser quelques soucis. Il arrive que certains maillages ne puissent pas s’achever automatiquement et il faut alors, à la main, déplacer les nœuds posant des problèmes. Une alternative reposant sur les travaux de NGuyen (2014) qui exploitent les outils de morphologie mathématique pour trianguler puis mailler des images a été testée avec succès. Néanmoins, dans un souci de rapidité et d’efficacité, une voie sans la contrainte du maillage a été choisie. Un programme de génération d’image a été créé à partir des données du fichier texte de Poulet (2017). Les images sont créées en dimension  $2048 \times 2048$  pixels. Des calculs sont ensuite effectués directement sur cette image grâce à la méthode FFT (Fast Fourier Transform). La méthode FFT présente au moins deux limitations :

1. lorsque le contraste entre les phases est important,
2. lorsque la fraction volumique en fibres est importante du fait de la taille des pixels.

Cependant, dans l’exemple étudié, ces paramètres restent dans une zone de confort pour appliquer la FFT : la fraction volumique en fibres est de 57% et le contraste entre les phases est de 59.5 pour le module de cisaillement transverse et de 0.047 pour le module de compressibilité transverse.

L’outil utilisant la FFT a été développé par Willot (2015). Une comparaison a pu être conduite sur des microstructures “tests” (FIGURE 4.10) et les résultats coïncident. Cette méthode est donc retenue pour la suite de ce chapitre.

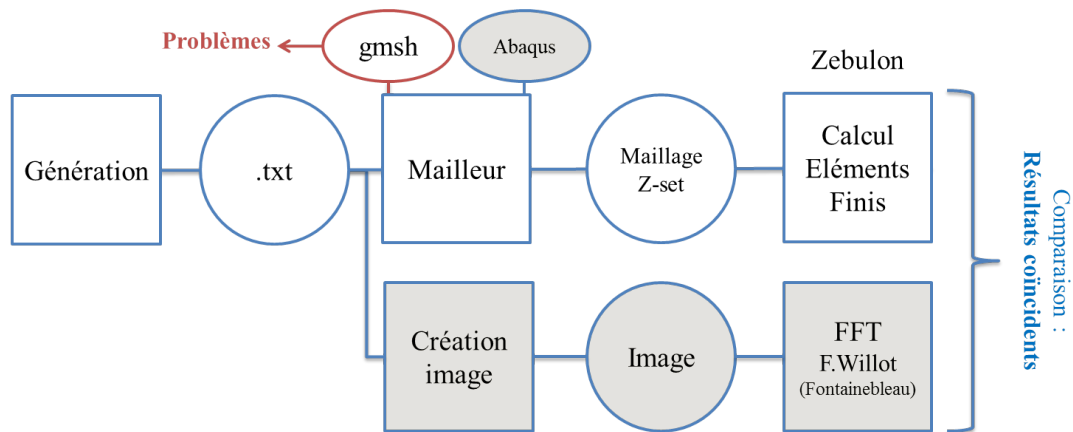


FIGURE 4.10 – Méthode de génération de microstructures et de calculs des propriétés effectives de Poulet (2017) : solutions.

L’outil de génération de microstructures et le programme de création d’images a permis de créer 180 images. Les images ont été créées avec 120 fibres et une fraction volumique en fibres de 57%. Deux zones enrichies en matrice ont été ajoutées conformément au matériau réel d’étude. La position du centre de ces zones est calculée aléatoirement. Un exemple d’image générée est présenté sur la FIGURE 4.11.

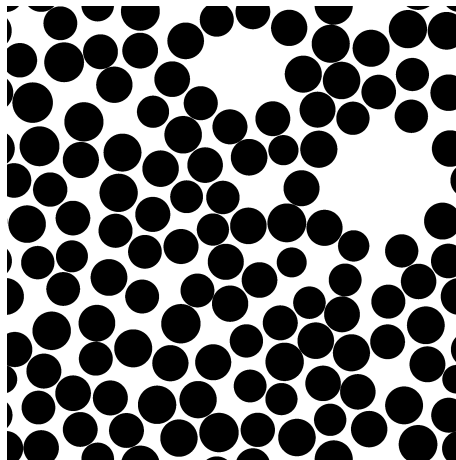


FIGURE 4.11 – Exemple d’image générée, morphologiquement représentative du matériau réel de Poulet (2017)

#### 4.1.5 Résultats

La FFT a été utilisée sur toutes les images et 180 estimations du module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et 180 estimations du module de compressibilité transverse effectif  $k_{23}^{\text{eff}}$  ont donc été obtenues.

En complément de la portée intégrale, il est possible de visualiser l’incertitude sur les moyennes en utilisant une méthode de Bootstrap non paramétrique. Cette méthode statistique de sous échantillonnage consiste à faire un certain nombre de tirages aléatoires parmi les données disponibles avec remise. Chaque tirage donne un résultat de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  moyen

et de  $k_{23}^{\text{eff}}$  moyen. À chaque tirage, 10 résultats sont piochés parmi les 180 disponibles. Grâce à ce choix, l'intervalle de confiance à 95% (représenté par les 97.5 % percentile et 2.5% percentile) est défini par un ensemble de 95 résultats avec 2.5 résultats au-dessus et 2.5 en-dessous. Le résultat est donné par la FIGURE 4.12 en haut pour le module de compressibilité et par la FIGURE 4.12 en bas pour le module de cisaillement. Pour simplifier le rendu visuel, cent tirages aléatoires sont tracés uniquement.

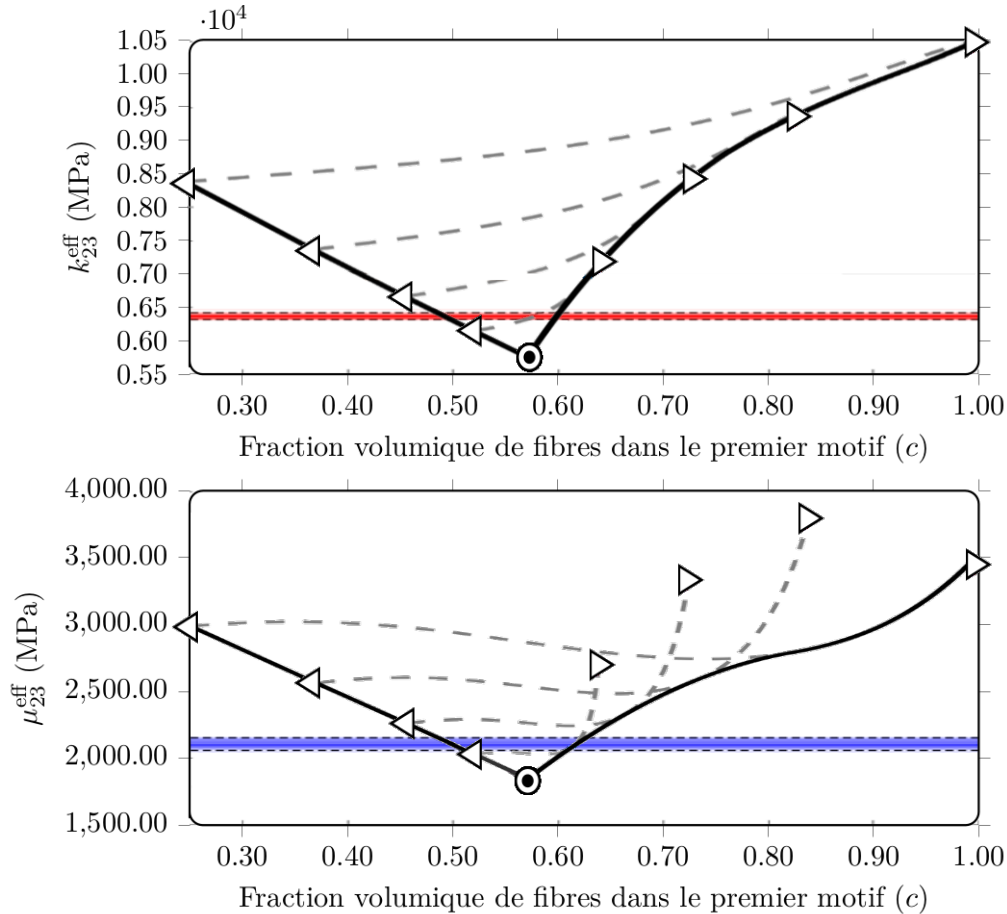


FIGURE 4.12 – Résultat du modèle ACG par motifs comparé aux résultats du tirage aléatoire Bootstrap pour  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$

Les lignes bleues et rouges sont en transparence. Plus elles se superposent et plus le rendu est foncé. Les lignes en pointillés bleues et rouges représentent l'intervalle de confiance à 95%. Les résultats numériques obtenus sont maintenant suffisamment précis pour nous permettre de trouver à nouveau les couples  $(m, c)$ . Tous les couples  $(m, c)$  correspondant aux points des lignes bleues et rouges à l'intérieur des courbes enveloppe noires peuvent être trouvés. La méthode inverse du chapitre précédent est utilisée sur les 180 résultats numériques.

Le résultat de la méthode inverse est représenté sur la FIGURE 4.13. Les courbes rouges représentent les couples  $(m, c)$  permettant d'avoir une estimation de  $k_{23}^{\text{eff}}$  cohérente avec les résultats de la FFT et les courbes bleues représentent les couples  $(m, c)$  permettant d'avoir une estimation de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  cohérente avec les résultats de la FFT.



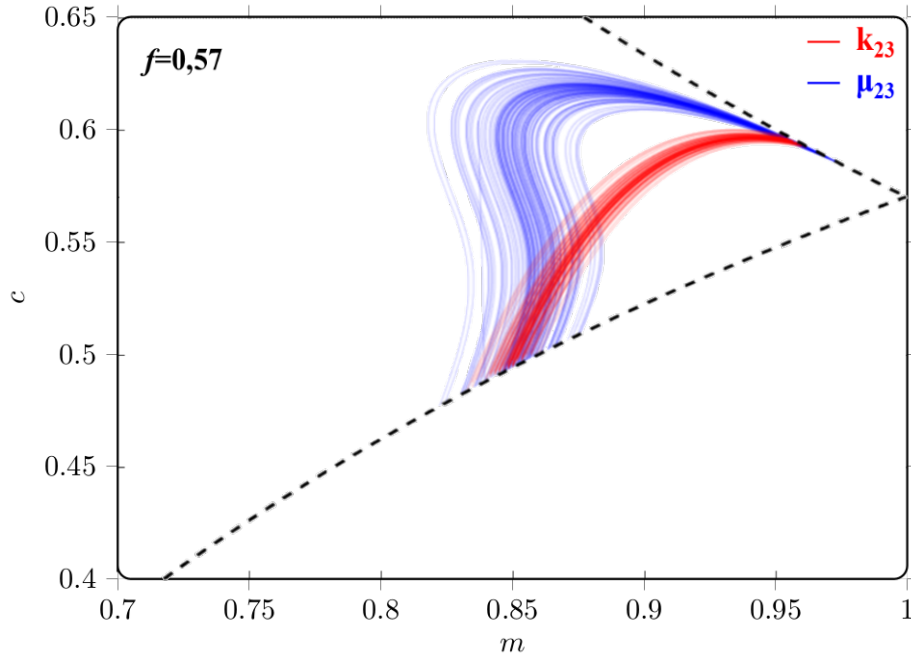


FIGURE 4.13 – Couples  $(m, c)$  correspondant aux tirages aléatoires pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et  $k_{23}^{\text{eff}}$

La FIGURE 4.13 montre qu'il existe deux zones communes pour les couples solution possibles dans ce cas précis. On retrouve les deux zones que nous avons trouvées au chapitre précédent. La première zone, avec un  $m$  aux alentours de 0.85, est assez clairement définie. La seconde zone commune se trouve pour  $m$  très proche de 1 (0.95). Cette seconde zone se rapproche beaucoup du modèle ACG pour lequel un seul motif est modélisé et qui implique que  $m = 1$ . On peut se demander si ces deux zones sont retrouvées quels que soient les paramètres matériaux utilisés. Il est impératif que la méthode d'identification que nous pourrions proposer soit généralisable. La démarche qui suit vise à étudier la robustesse des couples solution et la reproductibilité de la démarche.

## 4.2 Robustesse des couples solutions

### 4.2.1 Variation des paramètres matériaux

La méthode présentée précédemment permet de trouver une solution (détermination des couples  $(m, c)$ ) de manière analytique et alimentée par des résultats numériques (MEF). Afin d'étudier la robustesse de cette solution, il est nécessaire de faire varier plusieurs paramètres matériaux :

- la fraction volumique en fibres. L'intervalle choisi est  $[0.1, 0.7]$  avec un pas de 0.1.
- le rapport  $R_k = \frac{k_{23}^{(f)}}{k_{23}^{(m)}}$  du module de compressibilité transverse de la fibre sur celui de la matrice. L'intervalle choisi est  $[10^1, 10^5]$  avec un pas d'un facteur 10.
- le rapport  $R_\mu = \frac{\mu_{23}^{(f)}}{\mu_{23}^{(m)}}$  du module de cisaillement transverse de la fibre sur celui de la matrice. L'intervalle choisi est  $[10^1, 10^5]$  avec un pas d'un facteur 10.

- les coefficients de Poisson de la fibre  $\nu_f$  et de la matrice  $\nu_m$ . Quatre valeurs discrètes  $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ .

Faire varier tous ces paramètres nécessite également des microstructures “test” générées numériquement. Ces microstructures servent de “cible”.

### Génération d’images

La méthode utilisée consiste en la génération d’images artificielles dont on peut moduler différents paramètres morphologiques tels que la fraction volumique en fibres.

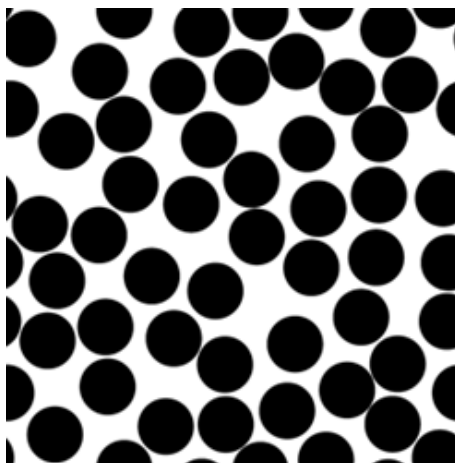


FIGURE 4.14 – Image générée avec un arrangement aléatoire à 60% de fibres.

La FIGURE 4.14 représente une image de microstructure générée avec 60% de fibres constituée d’un arrangement aléatoire des fibres.

### Prédiction du comportement transverse effectif

Le comportement effectif transverse des microstructures générées a été calculé par la Méthode des Éléments Finis. L’utilisation de la FFT présentait l’avantage de ne pas nécessiter d’étape de maillage mais l’inconvénient de temps de calculs prohibitifs pour les contrastes entre phases les plus élevés. Ce problème est discuté dans Moulinec et Suquet (2003).

Un seul cas avec un renfort de 60% de fibres est détaillé pour illustrer la démarche. Le coefficient de Poisson de la fibre a été fixé à 0.2 et celui de la matrice à 0.4. Sur une dizaine d’images générées à 60% de fibres, des calculs par la MEF ont permis d’obtenir les modules transverses effectifs numériques “cible”. Les modules effectifs correspondants sont calculés grâce au modèle analytique en considérant les mêmes propriétés matériaux. La méthode inverse vue au chapitre précédent est appliquée ici également et donne tous les couples  $(m, c)$  solution. Un des points délicats lors de la prédiction des propriétés effectives est de considérer un fort contraste entre les phases ce qui peut générer une importante incertitude de prédiction (voir la FIGURE 1.6). Cette incertitude est liée au nombre de calculs qui ont été utilisés (voir Kanit *et al.* (2003)). Les couples solutions  $(m$  en abscisse et  $c$  en ordonnée) sont reportés pour cinq ratios de contraste différents ( $10^1$  à  $10^5$ ) sur la FIGURE 4.15.

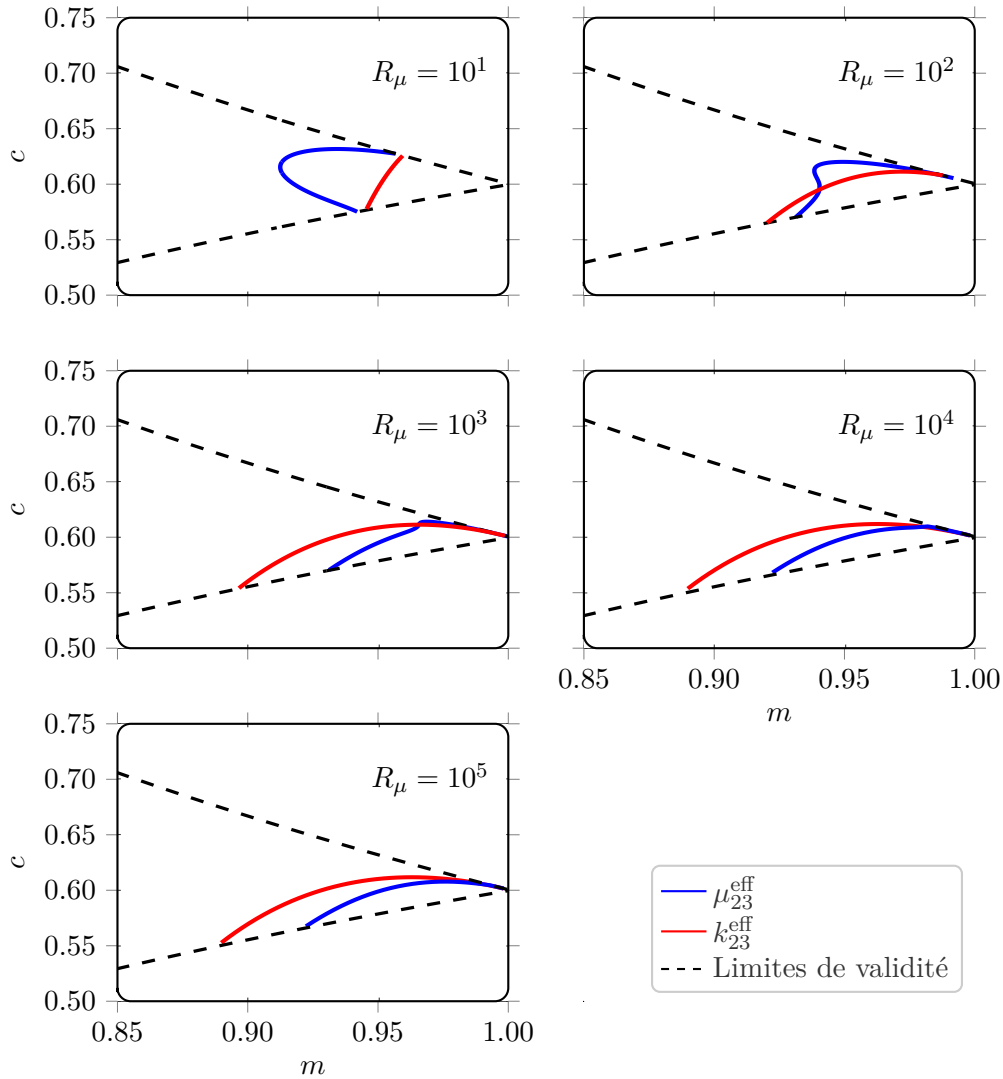


FIGURE 4.15 – Résultats de la méthode inverse dans le cas particulier où  $f=60\%$ ,  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.4$ . Cinq ratios de contraste  $R_\mu$  sont représentés allant de  $10^1$  à  $10^5$ .

Les courbes bleues représentent les couples solution pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  donnés par la MEF et les courbes rouges représentent les couples solution pour  $k_{23}^{\text{eff}}$  donnés par la MEF. Dans cette partie, seules les moyennes sont représentées pour plus de clarté. Les points solution se déplacent lorsque le contraste varie. Il faut noter que les plages de variation restent relativement étroites. La plage de variation de  $m$  est environ  $[0.88, 0.99]$  et celle de  $c$  est environ  $[0.55, 0.65]$ . Pour certains contrastes, les deux points solution sont bien distincts alors que pour d'autres (pour les plus forts contrastes), les deux points sont tous les deux dans une zone proche de  $m = 1$ . Il est utile de tracer de nouveau le résultat du module de compressibilité effectif transverse en fonction de  $c$  pour différentes valeurs de  $m$ . Cela permet dans cet exemple précis de pouvoir observer ce qui se passe aux points solutions.

#### 4.2.2 Deux zones de performance

Les résultats précédents sur l'exemple de Poulet (2017) correspondent à un ratio  $R_\mu$  d'environ 70 ce qui est proche du cas à  $10^2$ . Il est donc utile de regarder ce qu'il se

passer lorsque le ratio de contraste  $R_\mu$  vaut  $10^5$ . Les composites dont les phases ont des propriétés ayant un fort contraste entre elles représentent un enjeu dans la prédiction du comportement mécanique. En effet, la plupart des modèles peinent à estimer correctement le comportement de ces matériaux.

En considérant le cas d'un ratio  $R_\mu = 10^5$  et en opérant une forte discrétisation sur  $m$  et  $c$ , le résultat de  $k_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $c$  est donné sur la FIGURE 4.16 à gauche.

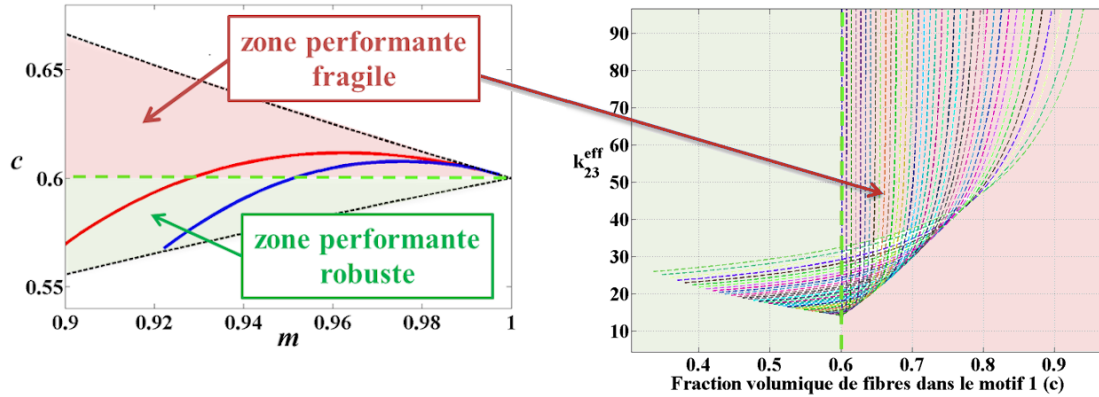


FIGURE 4.16 – Résultats de la méthode inverse pour le cas particulier où  $f=60\%$ ,  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.4$  et pour le contraste  $R_\mu = 10^5$ .

Deux zones se détachent de la FIGURE 4.16 de gauche, de part et d'autre de  $c = f = 0.6$ . Si  $c$  est strictement supérieur à  $f$ , un fort gradient apparaît. Dans cette zone, une variation très légère de  $c$  ou  $m$  entraîne une très forte variabilité sur le résultat du calcul du module de compressibilité effectif (voir la FIGURE 4.16 : à droite, courbes montrant toutes les valeurs possibles pour  $k_{23}^{\text{eff}}$  avec une variation de  $m$  et  $c$ ). La précision nécessaire pour les valeurs de  $m$  et  $c$  (au millième de décimal près) implique que cette zone peut être définie comme performante “fragile”. Elle permet de trouver le résultat souhaité d'où sa performance mais ces résultats sont très dépendants d'une variation même très petite des paramètres du modèle. C'est ce qui rend cette zone fragile. Au contraire, lorsque  $c$  est inférieur ou égal à  $f$ , les pentes sont très douces, ce qui fait qu'une légère variation de  $c$  ou  $m$  affecte très peu le module de compressibilité transverse effectif. Cette zone peut être appelée zone performante robuste car elle est performante et présente, de surcroît, une plus grande stabilité. Le même type de gradient est observé pour d'autres ratios  $R_\mu$  à partir de  $10^3$  ainsi que pour le module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ . Si l'on souhaite que la méthode de détermination des paramètres du modèle soit la plus robuste possible, il faut considérer une solution dans la zone verte, éventuellement au détriment de la précision (pour certains contrastes) qu'il conviendra d'évaluer.

### 4.2.3 Recherche d'une valeur de $m$ optimisée

Lorsque le ratio de contraste  $R_\mu$  vaut  $10^5$ , les couples solutions ne se trouvent pas dans la zone de performance robuste délimitée par  $c \leq f$ . L'influence du ratio de contraste sur la valeur du couple solution  $(m, c)$  ne permet pas d'identifier précisément ce couple mais nécessite de trouver une valeur optimisée. Une superposition des courbes des couples  $(m, c)$  pour les ratios de contrastes de  $10^2$  à  $10^5$  est présentée sur la FIGURE 4.17.

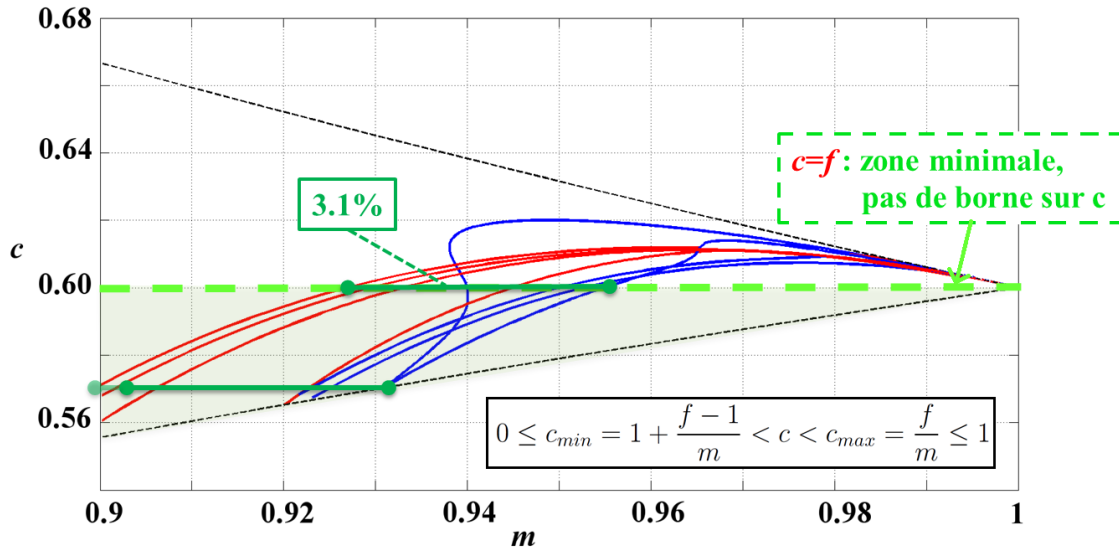


FIGURE 4.17 – Choix de  $c$  dans la zone de performance robuste et recherche de  $m$  optimisé pour le cas particulier d’un composite à 60% de fibres avec  $\nu_f=0.2$ ,  $\nu_m=0.4$  et pour un contraste  $R_\mu \in [10^2, 10^5]$

La zone verte représente la zone de performance robuste pour la recherche du couple  $(m, c)$  solution. Les courbes rouges représentent les couples solution pour une valeur cible de  $k_{23}^{\text{eff}}$  trouvée par la MEF pour différents ratios de contraste et les courbes bleues pour une valeur cible de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  trouvée par la MEF pour les mêmes ratios de contraste. À chaque valeur de  $c$  correspond une zone de valeurs possibles de  $m$  (segment en vert foncé) en suivant l’équation (3.2). Si  $c$  est strictement inférieur à  $f$ , la largeur du segment représentant les valeurs possibles de  $m$  augmente légèrement par rapport à la largeur du segment pour  $c = f$ . Tout en minimisant la largeur du segment, choisir  $c = f$  permet également de s’affranchir de contraintes sur l’intervalle de validité de  $c$  (qui dépend normalement de  $m$  et de  $f$ ). Ce compromis, qui simplifie grandement la procédure, a également été étudié dans (Joannès et Hervé-Luanco, 2016). Il est important de remarquer que l’axe des abscisses est très “zoomé” avec des valeurs entre 0.9 et 1. Plusieurs ordres de grandeur de variation sur les contrastes sont considérés, de 100 à 100 000 mais  $m$  varie uniquement sur une étendue très faible d’environ 3.1%. Il semble possible de trouver une valeur de  $m$  optimisée pour tous les cas de propriétés étudiés. Cette valeur optimisée donnera une estimation des deux modules transverses de cisaillement et de compressibilité effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  et  $k_{23}^{\text{eff}}$ . La propagation de l’erreur aux propriétés effectives, liée au choix  $c = f$ , est discutée dans la suite de ce chapitre.

#### 4.2.4 Procédure de minimisation de l’erreur

En choisissant  $c = f$ , la valeur de  $m$  optimisée se trouve sur la FIGURE 4.17 au niveau de la ligne verte pointillée. L’idée est de prendre chaque valeur de  $m$  possible dans cet intervalle et de mesurer l’erreur du modèle analytique par rapport à la valeur “cible” trouvée par la MEF.

Un calcul d’erreur nommé  $S$ , défini par l’équation (4.4), est mené en prenant en compte chaque valeur de ratio de contraste  $R_\mu$  et chaque valeur du coefficient de Poisson de la matrice dans leurs intervalles de définition. Le coefficient de Poisson de la fibre n’est pas

pris en compte car il n'influence pas ou très peu le comportement transverse effectif.

$$S = \sum_{R_\mu \in [10^1; 10^5]} \sum_{\nu^{(m)} \in [0.1; 0.4]} \sqrt{(\varepsilon_k)^2 + (\varepsilon_\mu)^2} \quad (4.4)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k &= \frac{k_{\text{analytique}} - k_{\text{cible MEF}}}{k_{\text{cible MEF}}} \\ \varepsilon_\mu &= \frac{\mu_{\text{analytique}} - \mu_{\text{cible MEF}}}{\mu_{\text{cible MEF}}} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Le résultat de la procédure de minimisation de l'erreur  $S$  se trouve sur la FIGURE 4.18.  $S$  est tracée en fonction de  $m$ .

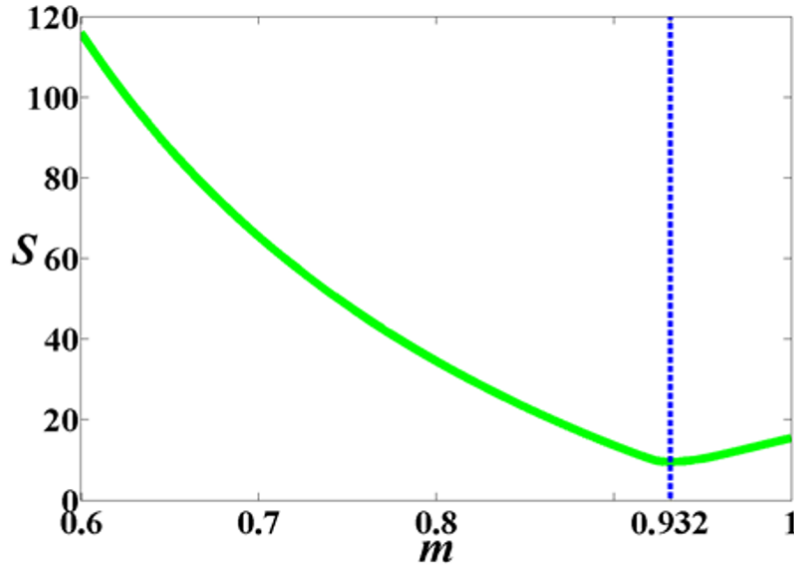


FIGURE 4.18 – Recherche de la valeur de  $m$  optimisée par minimisation de l'erreur  $S$  dans le cas particulier où  $f = 0.6$ ,  $\nu_m \in [0.1, 0.4]$  et  $R_\mu \in [10^1, 10^5]$

$S$  diminue quand  $m$  augmente jusqu'à la valeur de  $m$  optimisée souhaitée qui vaut 0.932 dans ce cas particulier où la fraction volumique de fibres  $f$  est de 60%. Nous pouvons par ailleurs noter que cette valeur optimisée est robuste, c'est à dire que la performance est stable autour de la solution et ce, pour des contrastes faible à fort.

Pour chaque cas de propriété et de ratio étudié dans le calcul de  $S$ , avec un couple  $(m, c)$  solution de  $(0.6, 0.932)$ , le calcul analytique de  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  engendre une erreur inférieure à 5% par rapport à la solution cible donnée par la MEF (voir la partie 4.2.6). Pour rappel, le modèle ACG ( $m = 1$ ) donne des erreurs de l'ordre de 9%. Dans cette illustration de la méthode développée, un seul cas de fraction volumique en fibres (60%) a été considéré.

#### 4.2.5 Généralisation à d'autres concentrations en fibres

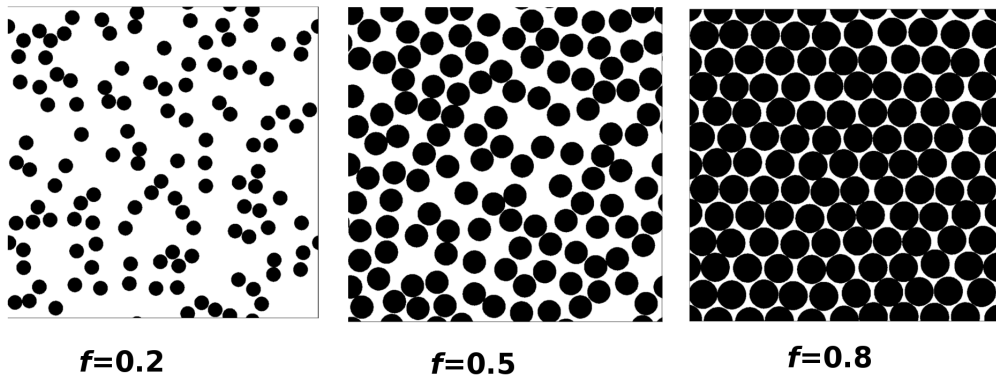


FIGURE 4.19 – Génération de microstructures avec différentes valeurs de fraction volumique  $f$

La recherche d'une valeur optimisée du paramètre  $m$  du modèle analytique avec la méthode décrite précédemment a été étendue à d'autres fractions volumiques de fibres dans l'intervalle  $[0.1, 0.7]$  (voir la FIGURE 4.19). La recherche d'une valeur de  $m$  optimisée en fonction de  $f$  est représentée sur la FIGURE 4.20. Les résultats sont matérialisés par des points bleus. Le point bleu correspondant à une fraction volumique de 0.75 est une extrapolation des résultats car il n'existe pas de résultats obtenus par la MEF pour cette fraction volumique de fibres précisément. Les résultats pour des fractions volumiques en fibre inférieures à 0.3 n'ont pas été calculés, l'écart avec le modèle ACG étant minimale.

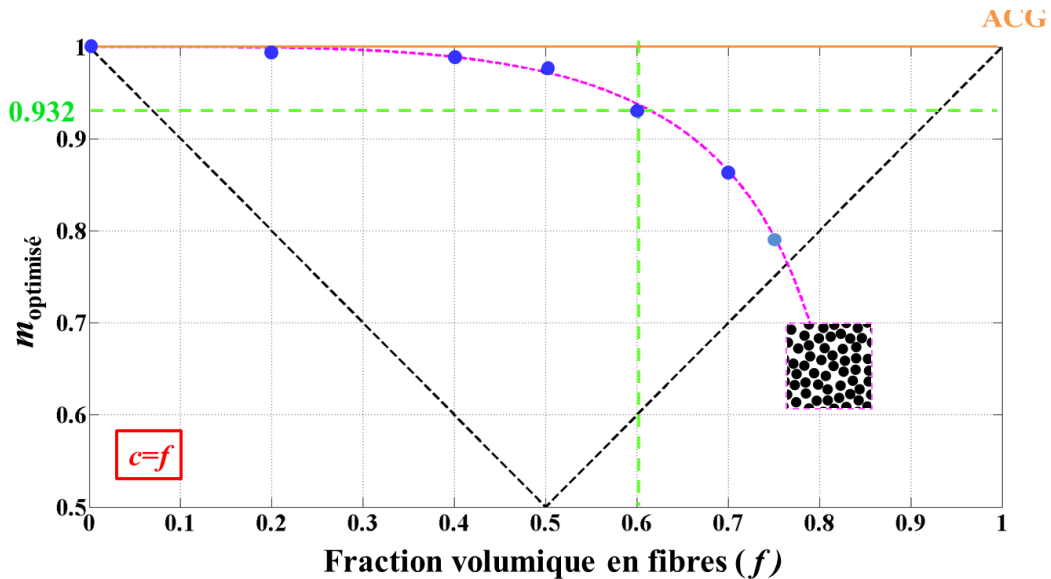


FIGURE 4.20 – Résultat de la recherche d'une valeur de  $m$  optimisée par rapport aux propriétés matériaux, en fonction de la fraction volumique de fibres  $f$  et dans le cas particulier où  $c = f$ .

Ce résultat est valable pour les microstructures morphologiquement semblables à celles générées pour l'étude (FIGURE 4.14) en supposant que  $c = f$ . Au-dessus des points bleus, la microstructure considérée présente moins de confinement matriciel ( $m$  est plus grand et

correspond à la fraction volumique en motif “direct” où une zone de fibre est entourée par de la matrice). La zone sous les points bleus correspond à des microstructures où davantage de zones de matrice sont confinées (plus grande fraction volumique de motif “indirect”). La ligne orange matérialise le cas où  $m = 1$  et représente le modèle ACG de Christensen et Lo (1979). Jusqu’à environ 30% de fibres dans le composite, les résultats sont en accord avec le modèle ACG. Au delà de 30% de fibres, il faut prendre  $m < 1$ . L’intérêt de ce nouveau modèle apparaît pour des fractions volumiques en fibres plus importantes car c’est dans ces configurations que des zones de regroupement de fibres apparaissent le plus. L’amélioration par rapport au modèle ACG est significative pour des fractions volumiques de fibres au delà de 60%. L’erreur peut-être diminuée à moins de 5 % pour le module de cisaillement transverse et à moins de 2% pour le module de compressibilité transverse.

#### 4.2.6 Résultats

Les résultats du modèle développé obtenus grâce à la procédure d’optimisation des paramètres sont présentés sur la FIGURE 4.21 et reprend la FIGURE 1.6 sur laquelle ont été ajoutés les résultats du modèle développé dans le chapitre 2. Dans cet exemple,  $c = f$  et  $m = 0.932$  et les résultats du ratio de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  (calculé analytiquement) sur le module de cisaillement transverse de la matrice sont représentés par des étoiles roses sur la figure de gauche. Les résultats du ratio de  $k_{23}^{\text{eff}}$  (calculé analytiquement) sur le module de compressibilité plan de la matrice sont représentés par des étoiles roses sur la figure de droite. Les résultats “cible” calculés par la MEF, sur des images générées virtuellement et avec une position aléatoire des fibres, sont affichés en vert.

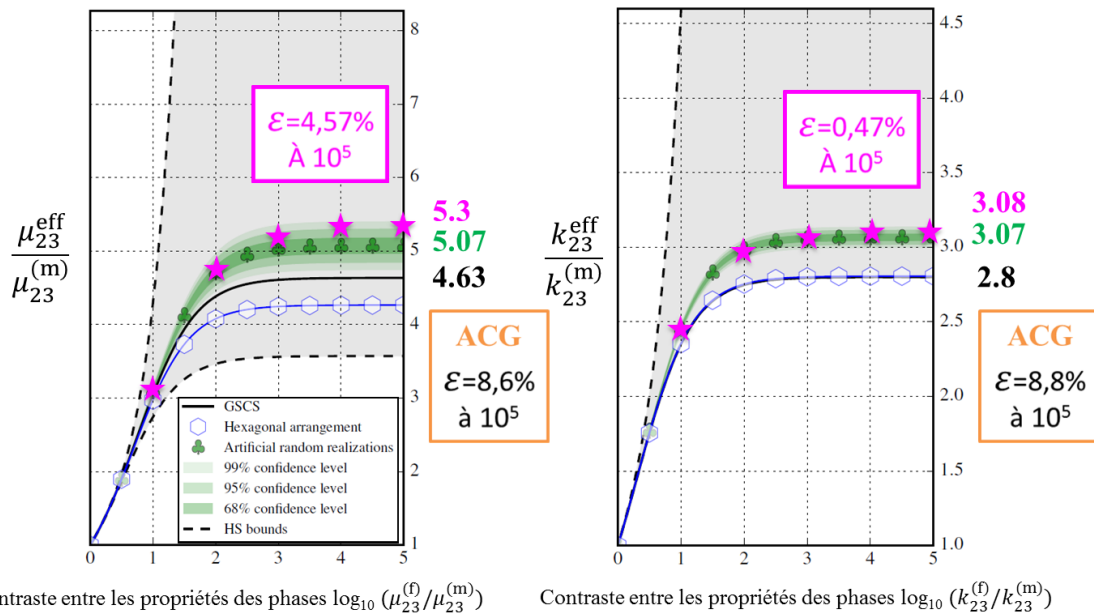


FIGURE 4.21 – Prédiction du modèle analytique avec la valeur de  $m$  optimisée par rapport à d’autres estimations dans le cas particulier où  $f = 0.6$ ,  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.4$ .

L’erreur la plus grande est commise pour le plus fort ratio de contraste  $R_\mu$  à  $10^5$  et vaut 4.57% alors que le modèle ACG conduit à une erreur de 8.6% dans les mêmes conditions. L’erreur commise pour le plus fort ratio de contraste  $R_k$  à  $10^5$  vaut 0.47% ce qui est beaucoup plus faible que le modèle ACG qui conduit à une erreur de 8.8% dans



les mêmes conditions. Cette même tendance a été confirmée pour d'autres configurations (voir l'annexe).

### 4.3 Étude du cas d'une matrice incompressible

L'un des avantages de ce nouveau modèle est de pouvoir faire des estimations dans des cas "pathologiques pour les modèles" et donc rarement traités. L'un de ces cas concerne l'utilisation d'un matériau incompressible comme matrice. L'étude est menée en utilisant les données matériaux suivantes :

- $\nu^m = 0.499999$
- $\frac{\mu_{23}^f}{\mu_{23}^m} = 100$
- $f$ , la concentration en fibres totale est fixée à 0.5
- le module d'Young de la fibre  $E^f$  est fixé à 70 000 [MPa]
- le coefficient de Poisson de la fibre  $\nu^f$  est fixé à 0.22

Les données précédentes ont été utilisées comme données d'entrée du modèle analytique développé dans le second chapitre. Pour différentes valeurs de  $m$ , le module de compressibilité transverse  $k_{23}^{\text{eff}}$  est calculé et tracé en fonction de  $c$  sur la FIGURE 4.22.

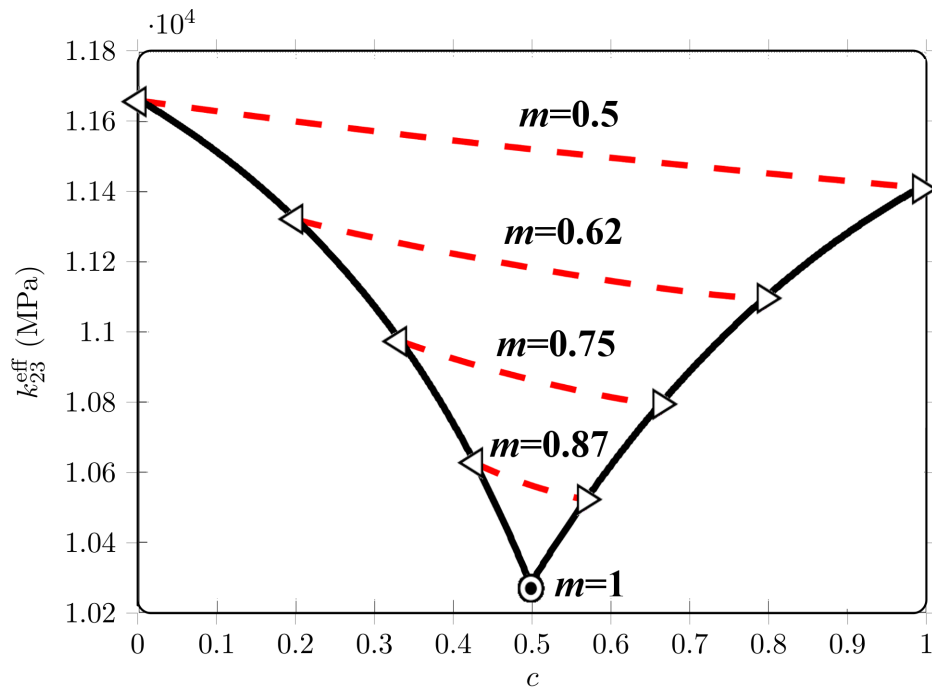


FIGURE 4.22 – Module de compressibilité plan transverse effectif  $k_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $c$  pour plusieurs valeurs de  $m$ , dans le cas d'une matrice incompressible.

Le module de cisaillement transverse  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  est quant à lui calculé et tracé en fonction de  $c$  sur la FIGURE 4.23.

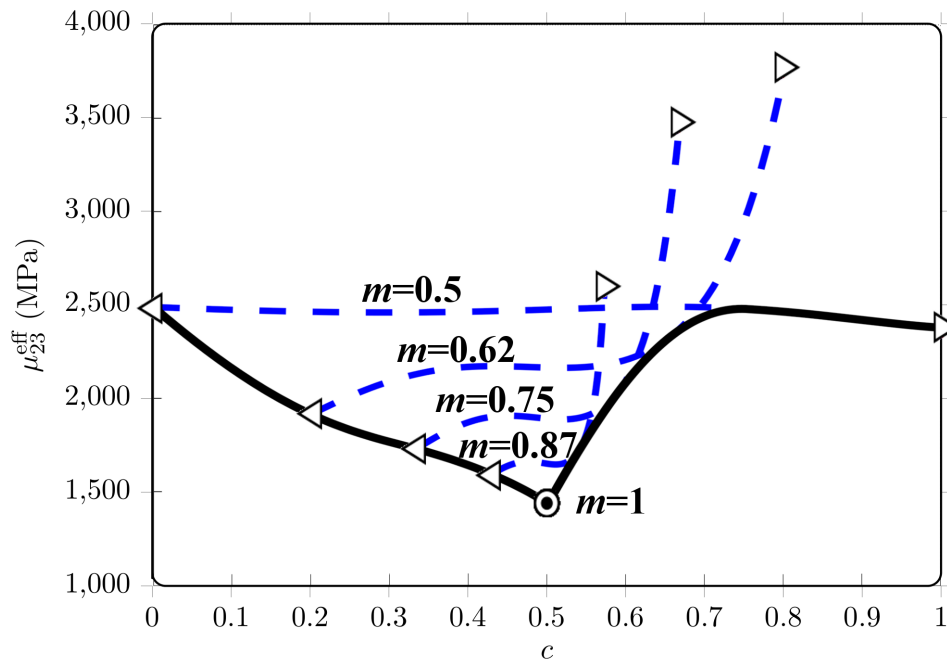


FIGURE 4.23 – Module de cisailment transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $c$  pour plusieurs valeurs de  $m$ , dans le cas d'une matrice incompressible.

Les courbes précédentes permettent de visualiser l'ensemble des valeurs possibles pour les deux modules transverses. Celles-ci ont sensiblement la même allure que les courbes tracées dans le cas de matrice non incompressibles. Puisque nous ne travaillons pas sur des données réelles, il est possible en gardant les mêmes propriétés matériaux de faire varier la valeur de  $f$ . Une discrétisation de  $m$  et  $c$  est alors faite sur leurs intervalles de définition. Les modules transverses sont calculés analytiquement pour chaque couple  $(m, c)$  possible et cela pour chaque valeur de  $f$ .

Ces calculs sont représentés sur la FIGURE 4.24.

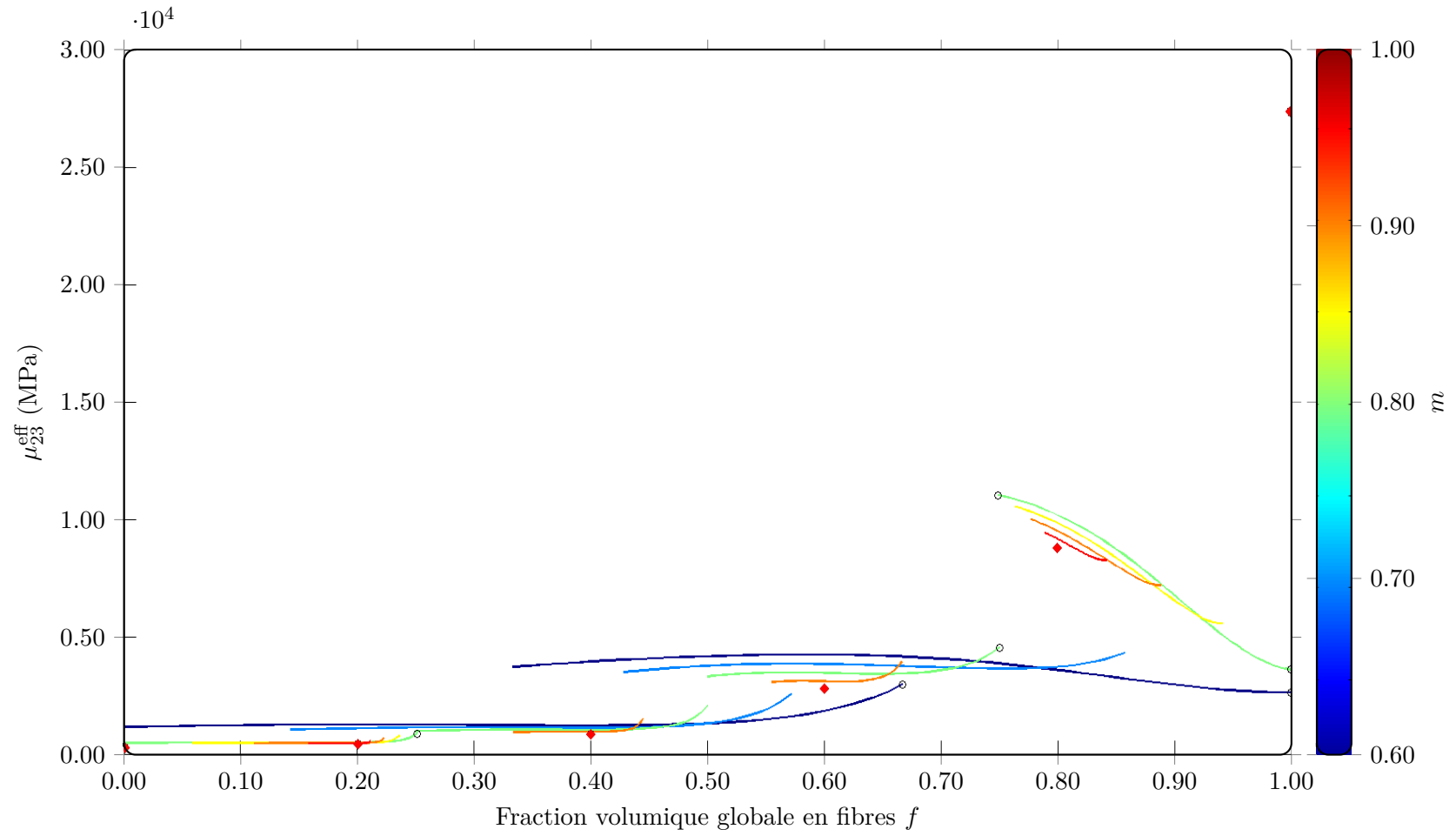


FIGURE 4.24 – Module de cisailment  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $c$  pour différentes valeurs de  $m$  et de  $f$ .

On distingue plusieurs ensembles de courbes correspondant à six valeurs différentes de  $f$ . Ces courbes sont tracées sur une figure 3D, mais seul le plan (X-Z) est affiché ici. Les losanges rouges correspondent au cas du modèle ACG où  $m = 1$ . Les cercles noirs matérialisent les extremums de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ . Ces calculs permettent d'obtenir les valeurs minimales et maximales des modules transverses pour cent valeurs de  $f$ , pour cinq valeurs de  $m$  et en fonction de  $c$ . Les enveloppes min et max sont présentées sur la FIGURE 4.25 pour le module de cisaillement  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ .

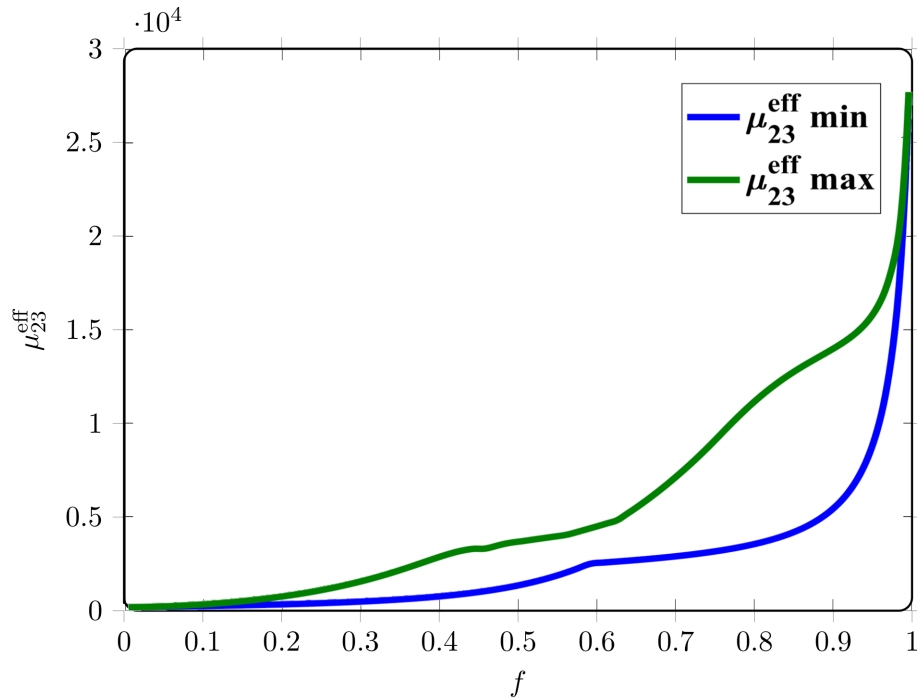


FIGURE 4.25 – Variation de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $f$

Ces courbes ont une forme originale qui nécessite des explications. Pour chaque valeur de  $f$ , on a un ensemble de couples  $(m, c)$  possibles. Les courbes ont été obtenues grâce à la superposition de plusieurs courbes (voir la FIGURE 4.26).

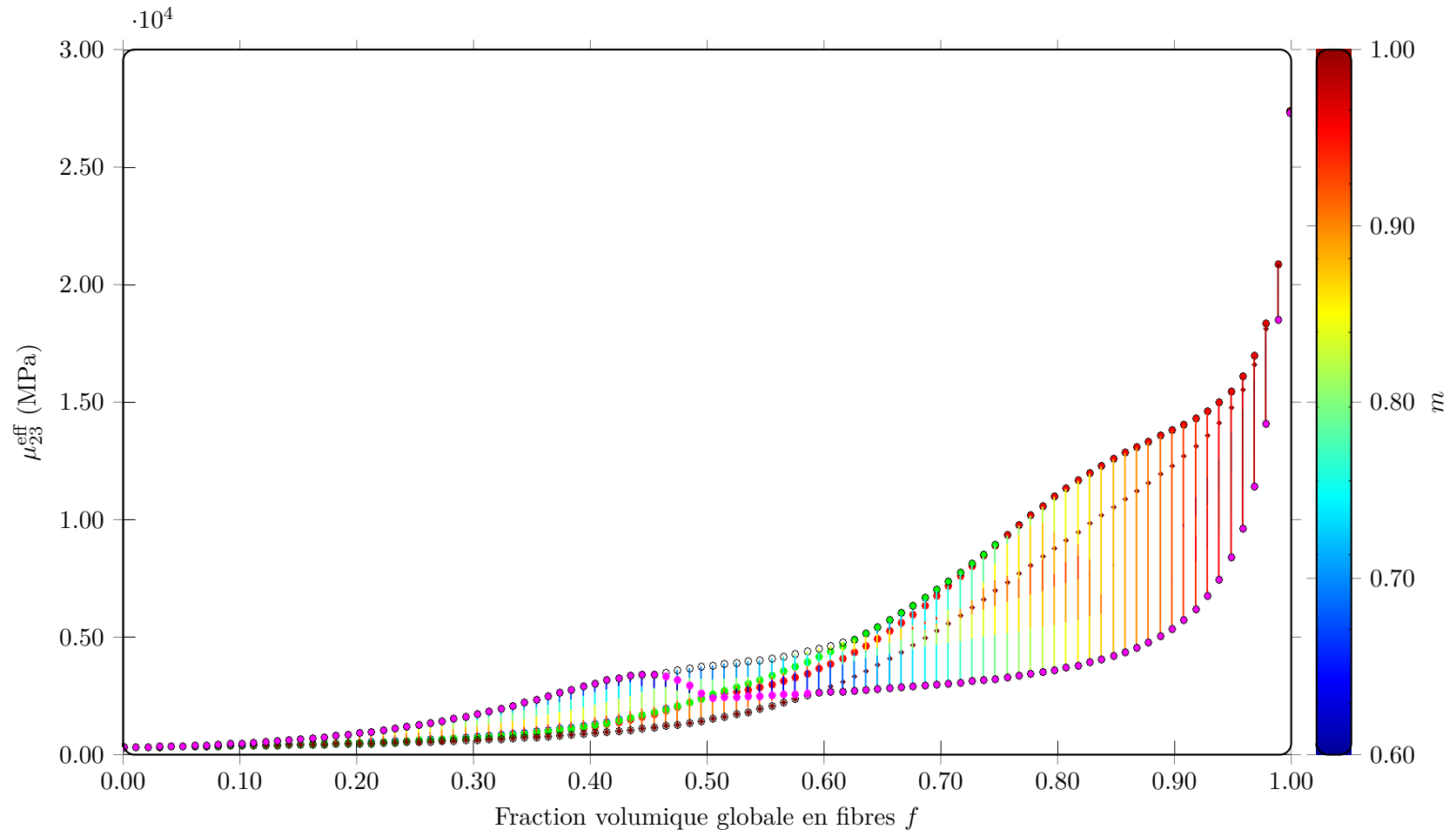


FIGURE 4.26 – Variation de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  en fonction de  $f$ . Tracé de la 1<sup>ère</sup> valeur de  $m$ .

Pour rappel, à chaque valeur de  $f$  on a un intervalle de  $m$  possible et pour chaque  $m$  on a un intervalle de  $c$  possible. Pour l'explication de la forme de la courbe, le tracé a été fait en 3D :  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  est tracé sur l'axe  $Z$  en fonction de  $c$  (axe  $X$ ) et  $f$  (axe  $Y$ ), pour 5 valeurs de  $m$ .

Sur la FIGURE 4.24, à chaque valeur de  $m$ , il y a deux valeurs extrêmes en  $c_{\min}$  et  $c_{\max}$  ainsi que 2 extremums locaux. En réalité il y a 1 à 2 extremums locaux car selon la valeur de  $f$ , la forme de la courbe varie aussi. L'idée de la FIGURE 4.26 est de tracer pour chaque courbe les 4 points extrêmes cités précédemment. Les points rouges sont associés au  $c_{\min}$ , les roses au  $c_{\max}$ , les bleus au premier extremum local (en partant de gauche à droite) et les verts au second extremum local.

Pour chaque valeur de  $f$ , il y a donc 4 points de chaque couleur plus un losange rouge foncé ( $m = 1$ ) soit 5 valeurs de  $m$ .

Tous ces points sont tracés dans la même figure 3D. En regardant le plan (Y-Z), on remarque que les enveloppes de  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  (cercles noirs) correspondent à différentes courbes. Pour identifier ces courbes, il faut tracer chaque figure 3D avec à chaque fois les points pour une seule valeur de  $m$  (soit 4 figures, on ne compte pas le cas  $m = 1$  car les losanges rouges foncés sont toujours présents). Il est important de remarquer que pour chaque valeur de  $f$ ,  $m_{\min}$  change. Le tracé de la première valeur de  $m$  correspond à la première valeur de discrétisation pour un  $f$  donné et est différente pour chaque valeur de  $f$ .

Les valeurs de discrétisation de  $m$  de la 1<sup>ère</sup> à la 4<sup>ème</sup> vont de la plus petite à la plus grande, la 5<sup>ème</sup> étant  $m = 1$ . Finalement, les courbes enveloppe correspondent :

- pour la courbe  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  min, aux points  $m = 1$  (ACG) puis aux points roses (1<sup>ère</sup> valeur de  $m$ ).
- pour la courbe  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  max, aux points roses (1<sup>ère</sup> valeur de  $m$ ), puis roses (2<sup>ème</sup> valeur de  $m$ ), puis roses (3<sup>ème</sup> valeur de  $m$ ), puis verts (1<sup>ère</sup> valeur de  $m$ ), puis rouges (1<sup>ère</sup> valeur de  $m$ ).

Les détails des figures pour les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> valeurs de  $m$  sont donnés dans l'annexe.

## 4.4 Indépendance de la physique considérée

Le modèle ACG par motifs développé dans le chapitre 2 s'inspire largement de la méthodologie développée par Joannès et Hervé-Luanco (2016). Compte tenu des présents résultats, la question de la généralisation de la solution  $m$  optimisée pour  $c = f$  s'impose. Est-il envisageable que pour une microstructure donnée, quel que soit le contraste entre phases, une valeur unique de  $m$  puisse permettre de prédire à la fois le comportement mécanique et la diffusivité transverse ?

### Extension aux résultats en diffusion

Afin de permettre une lecture plus simple, les mêmes notations que Hervé-Luanco et Joannès (2016) et Joannès et Hervé-Luanco (2016) ont été utilisées dans ce manuscrit pour définir les paramètres du modèle. Cependant les méthodes de détermination des deux paramètres  $m$  et  $c$  divergent. Dans l'article de Joannès et Hervé-Luanco (2016), une analyse d'image est utilisée pour trouver  $m$ , et  $c$  est calculé de manière empirique. Utiliser le couple  $(m, c)$  obtenu par l'analyse d'image décrite dans Joannès et Hervé-Luanco (2016) pour prédire les propriétés mécaniques transverses ne marche pas, notamment pour le module de compressibilité.

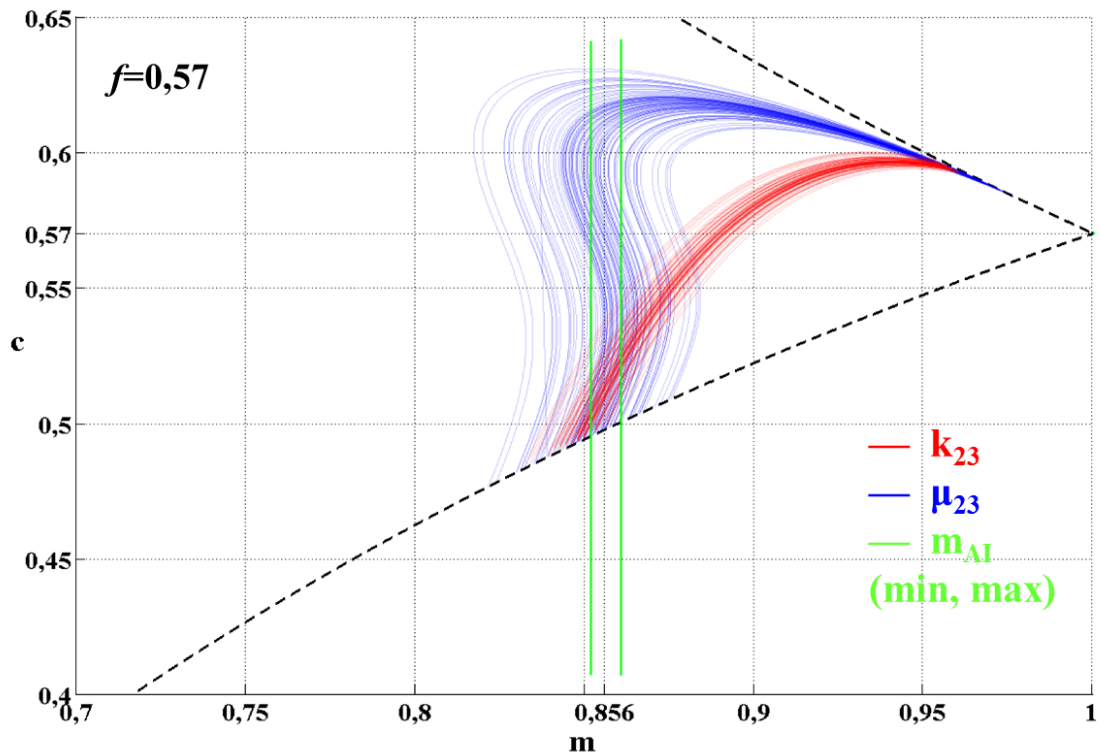


FIGURE 4.27 – Test de l’analyse d’image de [JoannèsHervé2016] sur les résultats de PAP.

En revanche, partir des conclusions des présents travaux en choisissant  $c = f$  présente de nombreux avantages, à commencer par la simplification de la méthode et des expressions analytiques. La pertinence de l’approche a été montrée dans le cas des propriétés mécaniques transverses et il convient maintenant de le vérifier dans le cas d’un problème de transport-diffusion. Dans leur article, Joannès et Hervé-Luanco (2016) ont déterminé les équations des modules de diffusion transverse et longitudinale dans le cas où deux motifs à deux phases “inverses” sont considérés (développé en mécanique dans le chapitre 2) et le cas particulier  $c = f$  a également été considéré. L’équation solution est l’équation (11) page 568 de l’article. Cette équation donne le résultat du module de diffusion transverse effectif normalisé par le module de diffusion transverse de la matrice. Elle est fonction de  $f$  et  $m$  uniquement :  $D_T^{\text{eff}}/D_T^m = (1 - f)(2m - 1)/(1 + f)$ . En utilisant les valeurs de  $m$  optimisées de la FIGURE 4.20 pour chaque  $f$  donné, les calculs du module de diffusion transverse effectif normalisé sont simplement reportés sur la FIGURE 4.28 qui correspond à la Fig.8 extraite de Joannès et Hervé-Luanco (2016).

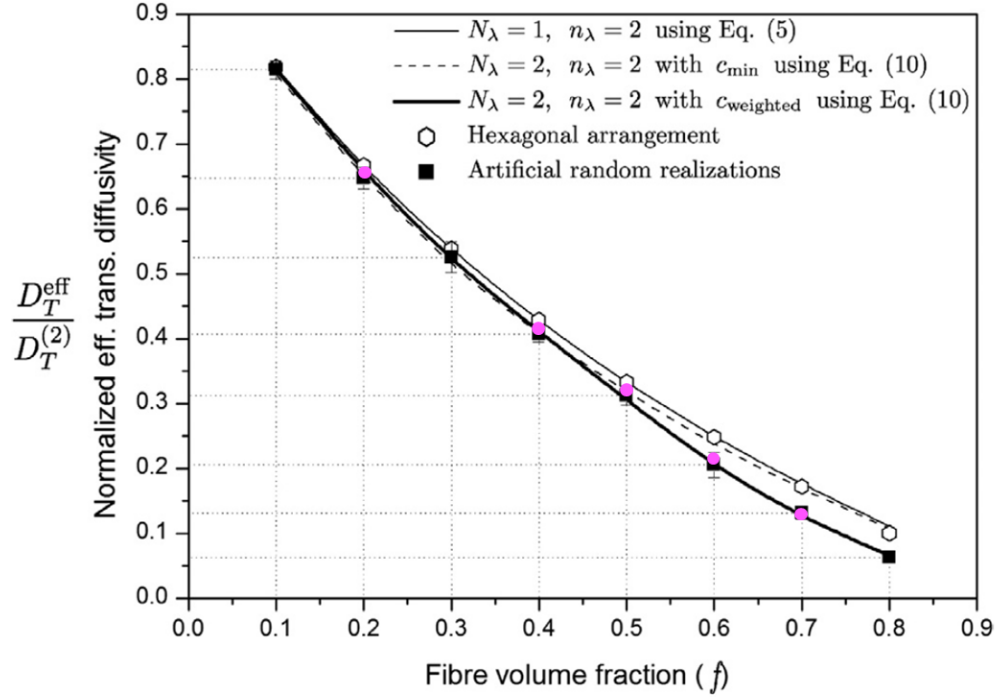


FIGURE 4.28 – Comparaison des résultats en diffusion de Joannès et Hervé-Luanco (2016) avec les valeurs de  $m$  optimisée en mécanique dans le cas de deux motifs à deux phases avec l’hypothèse  $c = f$ .

Les valeurs obtenues sont matérialisées par des points roses et sont en très bon accord avec les résultats obtenus par la MEF représentés par des carrés noirs et ce, jusqu’à 70% de fibres en volume. Ce résultat est d’autant plus encourageant que les microstructures étudiées, bien que présentant des similitudes, ne proviennent pas du même matériau.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu confirmer la pertinence de l’approche par motifs pour prédire le comportement transverse de microstructures composites. Il a été montré que choisir d’imposer la concentration en fibre du motif direct ( $c$ ) égale à la fraction volumique de fibre ( $f$ ) est un excellent compromis. Ce choix permet de simplifier la méthode et les expressions analytiques tout en garantissant la robustesse des solutions pour  $m$ , la concentration en motif direct.

Il a également été montré que pour une fraction volumique donnée, il est possible d’identifier une valeur de  $m$  unique qui permet de prédire correctement le comportement effectif transverse. Cette même valeur semble pouvoir être utilisée pour prédire la diffusivité transverse d’une microstructure présentant des similarités sans toutefois être identique. Par ailleurs, à une fraction volumique de fibre donnée, la valeur optimisée de  $m$  fonctionne quel que soit le contraste entre phases. Il est ainsi possible d’apporter des prédictions fiables sur une très large gamme de propriétés et de matériaux.

Certaines questions restent ouvertes. La première étant l’identification simplifiée de  $m$  pour une microstructure donnée. La piste de l’analyse d’image semble intéressante mais n’a pas pu être confirmée dans le cadre de cette thèse. La méthode présentée dans Joan-



nès et Hervé-Luanco (2016) doit être adaptée. L'extraction de données à partir des covariogrammes des microstructures permettrait probablement d'apporter des éléments de réponse. La seconde question concerne la confirmation de la généralisation de la méthode à d'autres modules et d'autres physiques. Le potentiel de la présente approche, bien que très encourageant, doit être confirmé.

## Chapitre 5

# Conclusions et perspectives

### Sommaire

---

5.1	Retour sur les enjeux de la thèse . . . . .	111
5.2	Évolutions du modèle analytique . . . . .	112
5.3	Amélioration du modèle numérique . . . . .	114

---

### 5.1 Retour sur les enjeux de la thèse

Pour de nombreuses applications, la détermination des propriétés élastiques transverses de matériaux composites unidirectionnels (ici les modules de compressibilité et de cisaillement) revêt un caractère important. Les essais mécaniques ne permettent pas de déterminer directement et de manière suffisamment fiable ces modules élastiques transverses. Le recours à la modélisation est une alternative intéressante avec des avantages et des inconvénients. Qu'elles soient numériques ou analytiques, les modélisations se heurtent également à de nombreuses difficultés, à commencer par la prise en compte de la fluctuation morphologique du composite à l'échelle microscopique. La distribution des fibres au sein du composite est, en effet, bien souvent hétérogène et requiert des approches dédiées. Parmi ces approches, le modèle analytique Auto Cohérent Généralisé présente les avantages de rester performant dans les cas extrêmes comme une matrice incompressible, un fort contraste entre phases ou encore une importante fraction volumique de renforts fibreux.

Ce modèle, couplé à une approche par motifs représentatifs a permis, dans cette thèse, de prendre en compte la fluctuation morphologique de composites à l'échelle microscopique. Dans un contexte à deux phases et deux motifs, deux paramètres morphologiques ( $m$  et  $c$ ) ont été introduits pour gérer un large éventail de situations. Une étude de sensibilité a mis en évidence les multiples avantages du modèle proposé et de ses apports. L'étude a été conduite en s'appuyant sur un exemple expérimental réel puis sur un composite numérique à morphologie contrôlée. La maîtrise des paramètres de cette expérience numérique a été possible grâce à la génération de microstructures virtuelles représentatives. Une étude de robustesse du modèle a par ailleurs été menée afin de confirmer la performance du modèle dans un cas plus général. L'étude a montré qu'une hypothèse simplificatrice était utile en choisissant de poser  $c = f$  où  $f$  est la fraction volumique de renfort. Enfin, une valeur de  $m$  optimisée a pu être trouvée pour chaque valeur de  $f$ , indépendamment des propriétés matériaux. La portée d'un tel abaque reste néanmoins limitée aux configurations morphologiques aléatoires étudiées dans ce manuscrit. Grâce à la stratégie adoptée, l'erreur

de prédiction est nettement inférieure au modèle ACG classique.

## 5.2 Évolutions du modèle analytique

Le modèle développé dans le second chapitre et étudié dans la suite du manuscrit offre de nombreuses possibilités encore non exploitées.

Dans ce manuscrit, une hypothèse est faite sur le comportement isotrope transverse du composite étudié. Cinq modules élastiques sont donc nécessaires pour connaître entièrement le comportement élastique du matériau. Parmi ceux-ci, seuls deux modules, de compressibilité et de cisaillement transverse ont été étudiés. Ces deux modules sont très sensibles à la morphologie locale contrairement au module d'Young longitudinal par exemple. Néanmoins, une ouverture possible serait le développement du modèle pour les autres modules, permettant ainsi d'accéder à la totalité du comportement élastique. Se pose bien entendu la question de la généralisation de la démarche adoptée et de la pertinence des hypothèses choisies ( $c = f$ ) pour l'ensemble des modules.

Si le modèle proposé est disponible dans une versions à  $n_\lambda$  phases et  $N_\lambda$  motifs, une version simplifiée à deux phases et deux motifs est présentée. Bien que la détermination des paramètres du modèle dans un cas général soit encore une question ouverte, le modèle proposé ouvre néanmoins la voie à la prise en compte :

- de “clusters” de fibres par l'ajout d'un troisième motif à deux phases où une zone de fibres est entourée de matrice avec des fractions volumiques différentes du premier motif (FIGURE 5.1).

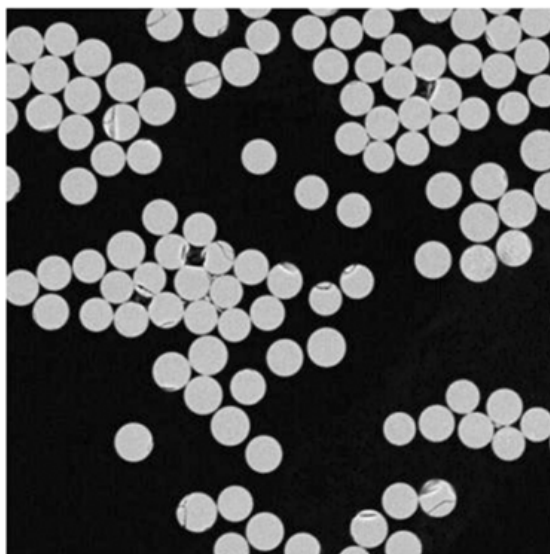


FIGURE 5.1 – Image de microstructure tirée de Honore *et al.* (2007).

- d'interphases par l'ajout d'une phase intermédiaire entre la fibre et la matrice (modèle à deux motifs à trois phases chacun) (FIGURE 5.2).

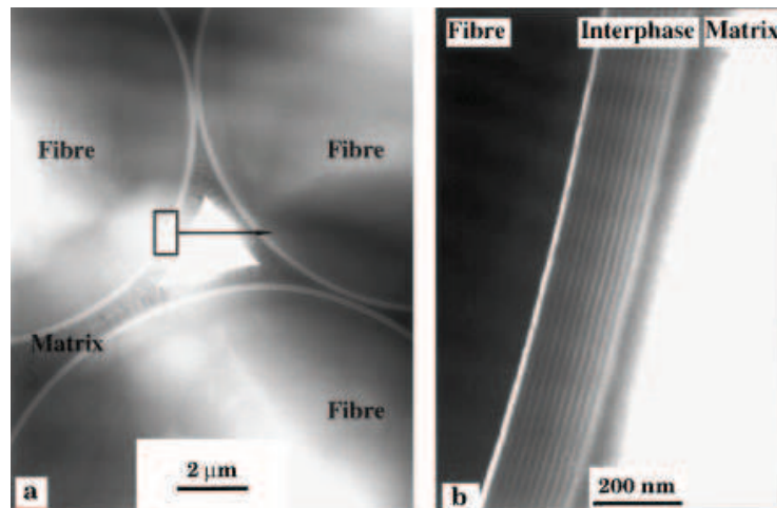


FIGURE 5.2 – Image de microstructure tirée de Bertrand *et al.* (2000).

- de zones de porosité par l’ajout d’un troisième motif de “vide” entouré par de la matrice (FIGURE 5.3).

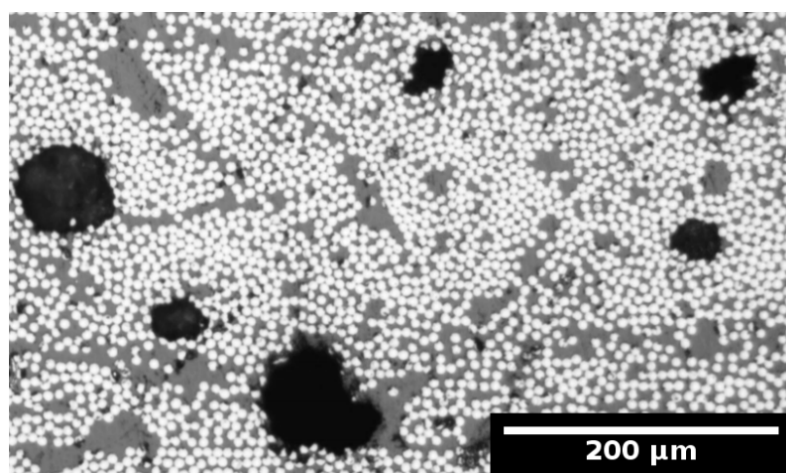


FIGURE 5.3 – Image de microstructure tirée de Rojek (2020).

- de composites hybrides dont deux motifs présenteraient une phase de fibre différente sur les deux motifs (voir la FIGURE 1).

Toutes ces configurations semblent pouvoir être facilement modélisées avec l’approche proposée. La principale difficulté réside dans la détermination des paramètres morphologiques des motifs nouvellement introduits. Cette question de l’identification des descripteurs morphologiques pertinents est cruciale mais n’est pas propre à la démarche proposée, cette question se pose quelle que soit la stratégie de modélisation morphologique adoptée.

Une autre possibilité du modèle est de pouvoir étudier le comportement local du composite. Il est possible de calculer les champs locaux (déplacement, déformation, contrainte) de manière analytique et de manière numérique, ces champs étant des moyennes calculées sur des points homologues (voir définition ci-après). En effet, le modèle de Bornert *et al.*

(1996), utilisé pour développer le modèle ACG par motifs, correspond à une amélioration de l'approche "ponctuelle" classique. Leur idée était de concevoir un modèle dans lequel les informations disponibles sur la distribution des phases interviennent comme paramètres (dont l'effet sur la réponse locale et globale du matériau peut être testé). La démarche générale démarre avec la formulation variationnelle de Hashin et Shtrikman (1963) appliquée à un Volume Élémentaire Représentatif d'un composite élastique soumis à un chargement macrohomogène et les conduit à des bornes rigoureuses ou à des estimations autocohérentes pour les propriétés élastiques. Cette démarche appliquée au cas particulier de Motifs Morphologiques Représentatifs requiert la solution d'un problème auxiliaire, celui de l'inclusion hétérogène de géométrie ellipsoïdale noyée en milieu infini. La résolution est faite ici par éléments finis car il n'y a pas de solution analytique. Dans ce papier, la notion de points homologues au sein des éléments d'un même motif est introduite. Cette notion peut être utilisée dans une approche locale (FIGURE 5.4). Cette même approche locale a déjà été faite dans un cas un motif à  $n$  phases Hervé et Zaoui (1995).

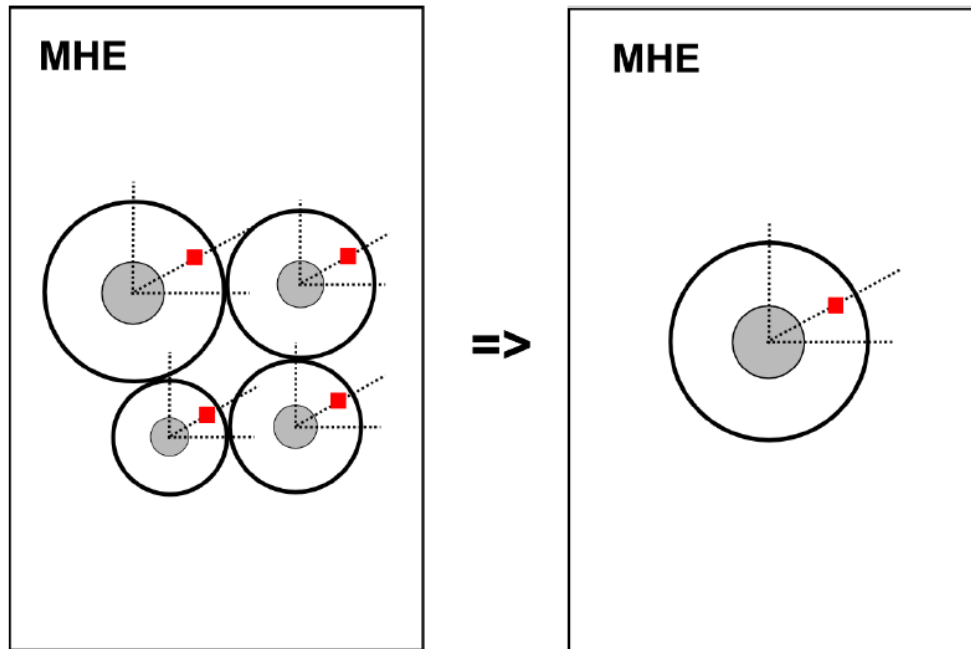


FIGURE 5.4 – Approche MMR locale.

### 5.3 Amélioration du modèle numérique

Ce travail a conduit à l'identification des paramètres morphologiques  $m$  et  $c$  en s'appuyant sur des résultats d'expériences physiques et virtuelles. Alors que  $c$  a été fixé égal à  $f$ , la recherche de la valeur de  $m$  a nécessité de recourir à une optimisation. Indépendamment des propriétés matériaux de la fibre et de la matrice, il s'agissait de trouver le meilleur compromis pour prédire  $k_{23}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}}$ . A fraction volumique fixée, il a été possible d'identifier une valeur de  $m$  commune pour les deux modules transverses étudiés. Cette valeur semble par ailleurs transposable à une autre physique, celle des phénomènes de transport-diffusion. L'étendue de la transposition de la démarche mériterait d'être étudiée

davantage.

Cette méthode est une avancée dans la compréhension de l'effet de la morphologie microscopique sur le comportement transverse effectif des composites. Cependant, la paramètre  $m$  identifié s'applique à un type de composite ayant une microstructure proche de celle étudiée au départ. Si la microstructure s'éloigne de la référence, avec par exemple des zones plus concentrées en fibres ou une répartition plus homogène des fibres (arrangement hexagonal par exemple), la valeur optimale de  $m$  s'en trouve modifiée. Plusieurs pistes sont envisagées pour généraliser la méthode. Dans son travail, Poulet (2017) utilise des descripteurs morphologiques tels que la covariance ou la distance au plus proche voisin afin de générer virtuellement des images morphologiquement représentatives du matériau réel étudié. Des descripteurs pourraient permettre de mieux caractériser les morphologies microscopiques et être corrélés avec les valeurs optimales de  $m$ . Un premier travail de réflexion a été mené et le premier objectif est d'identifier le ou les descripteurs morphologiques pertinents. Les descripteurs du premier ordre sont notamment la distribution des fibres, la distance aux premiers voisins, l'orientation des premiers voisins, les aires de polygone de Voronoï. Les descripteurs du second ordre sont par exemple la fonction de Ripley, la fonction de distribution radiale, et la covariance. Nous avons pu identifier la covariance (le covariogramme) comme un descripteur intéressant pour plusieurs raisons : sa simplicité de mise en œuvre, sa sensibilité à une périodicité dans le plan transverse et à la fraction volumique en renfort. Un tracé de la covariance sur une image générée virtuellement a permis d'identifier plusieurs pistes pour trouver la corrélation entre  $m$  et la covariance dans les quatre directions de l'image (FIGURE 5.5)

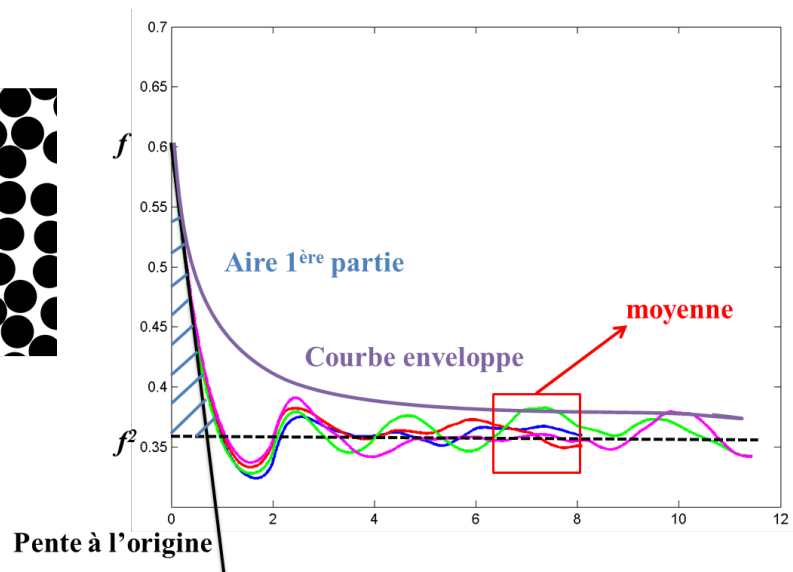


FIGURE 5.5 – Covariance appliquée à une image générée virtuellement dans les quatre directions de l'image.

Les pistes envisagées sont l'utilisation de l'aire de la première partie, la courbe enveloppe, la pente à l'origine, la moyenne des quatre courbes ou encore une combinaison de ces paramètres. Ces pistes ne sont qu'une ouverture et le travail reste à mener.



# Annexe A

## Annexes

### Sommaire

---

<b>A.1 Résultats du modèle avec les valeurs de <math>m</math> optimisé dans d'autres cas . . . . .</b>	<b>117</b>
A.1.1 Premier cas : $\nu_f = 0.2$ et $\nu_m = 0.2$ . . . . .	117
A.1.2 Second cas : $\nu_f = 0.2$ et $\nu_m = 0.3$ . . . . .	118
<b>A.2 Résultats WWFE . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>A.3 Cas d'une matrice incompressible : autres valeurs de <math>m</math> . . . . .</b>	<b>120</b>
A.3.1 2 <sup>ème</sup> valeur de $m$ . . . . .	121
A.3.2 3 <sup>ème</sup> valeur de $m$ . . . . .	122

---

### A.1 Résultats du modèle avec les valeurs de $m$ optimisé dans d'autres cas

#### A.1.1 Premier cas : $\nu_f = 0.2$ et $\nu_m = 0.2$



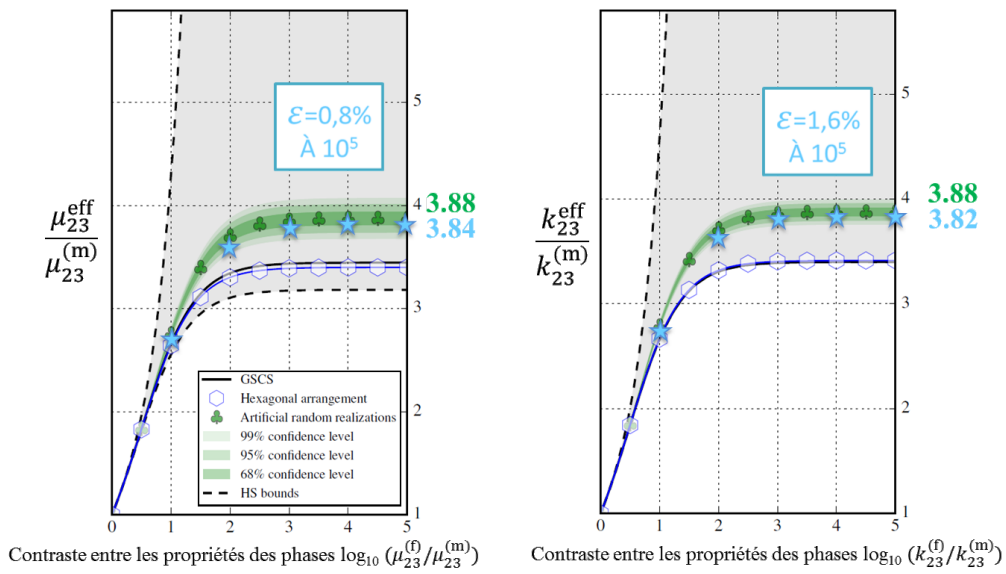


FIGURE A.1 – Prédiction du modèle analytique avec la valeur de  $m$  optimisée par rapport à d'autres estimations dans le cas particulier où  $f = 0.6$ ,  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.2$ .

A.1.2 Second cas :  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.3$

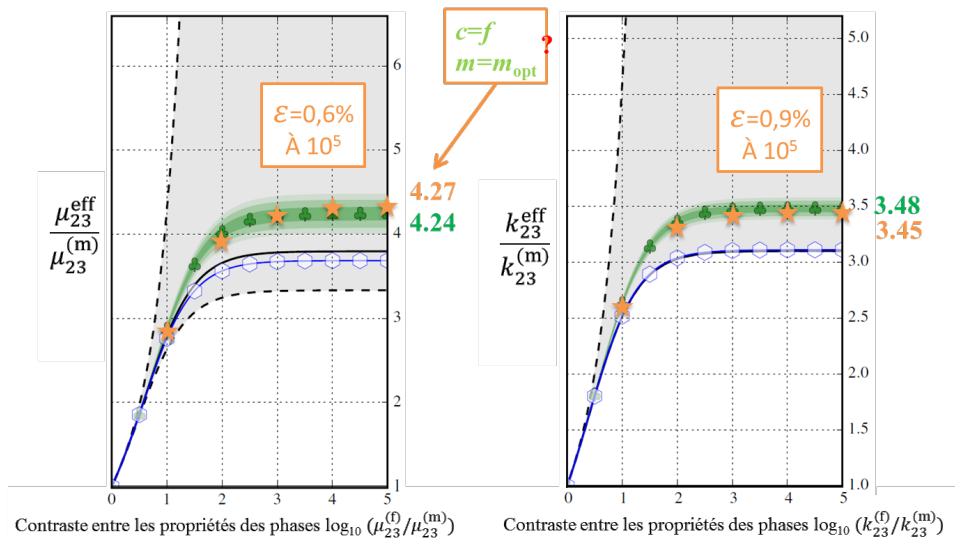


FIGURE A.2 – Prédiction du modèle analytique avec la valeur de  $m$  optimisée par rapport à d'autres estimations dans le cas particulier où  $f = 0.6$ ,  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.3$ .

## A.2 Résultats WWFE

### Résultats d'expérimentation des WWFE

L'article présenté ici est celui de Wang et Huang (2018). Il présente neuf résultats d'essais expérimentaux des WWFE (World-Wide Failure Exercises). Ils indiquent les données matériaux des fibres, de la matrice et certains modules élastiques du composite. Ces résultats sont ensuite comparés à des modèles analytiques comme notamment le modèle ACG et à des modèles numériques comme la MEF. Dans cet article, tous les modules élastiques nécessaires à la détermination du module de cisaillement transverse effectif  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  sont donnés.

Comme indiqué précédemment, sans indication d'une estimation de l'erreur commise, il est difficile de pouvoir comparer des résultats. Il est également délicat de comparer les résultats du calcul par Éléments Finis à ces résultats expérimentaux n'ayant pas de détails sur la procédure de calculs par Éléments Finis adoptée. Ces précisions sont importantes car le tableau 5 de l'article p.17 indique que le calcul par Éléments Finis commet en moyenne la plus petite erreur de prédiction pour le module  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  alors que le modèle ACG se place en 7<sup>ème</sup> position des modèles testés.

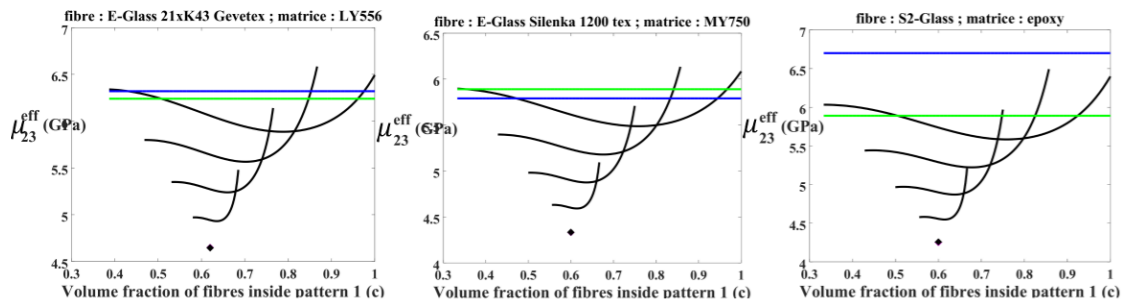


FIGURE A.3 – Résultats de Wang et Huang (2018) pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  calculés avec notre modèle analytique pour les composites à fibres de verre.

Les résultats de notre modèle montrent une prédiction en accord avec les résultats expérimentaux et par EF dans le cas de fibres de verre. Dans les autres cas, les résultats sont plus aléatoires. De manière générale, les résultats expérimentaux sont largement au-dessus des prédictions de tous les modèles testés (sauf dans un cas). Une explication possible pourrait être la difficulté d'obtenir des données matériaux fiables pour des fibres isotropes transverses. Notre modèle prend en compte cette anisotropie cependant les erreurs des données matériaux peuvent se reporter sur le résultat final. Sur quelques exemples également, le résultat du modèle ACG de l'article (losange magenta) est différent du résultat du modèle ACG calculé par notre modèle (losange noir) (voir la FIGURE A.4).

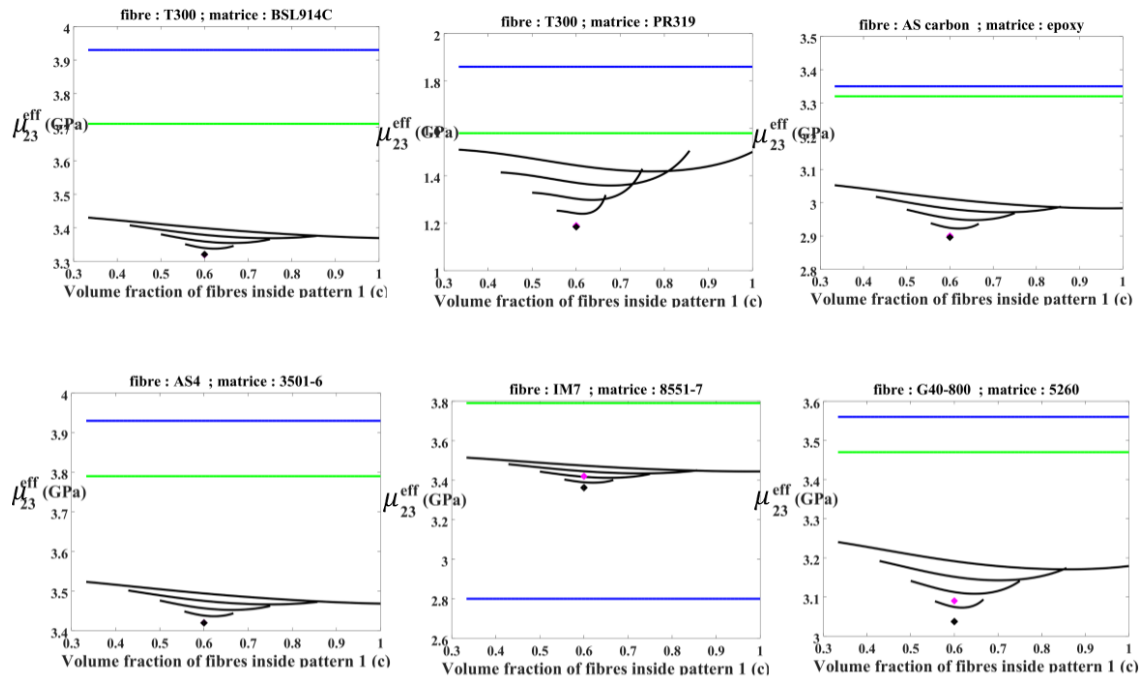


FIGURE A.4 – Résultats de Wang et Huang (2018) pour  $\mu_{23}^{\text{eff}}$  calculés avec notre modèle pour les autres composites.

### A.3 Résultats du modèle dans le cas d'une matrice incompressible pour d'autres valeurs de $m$

A.3.1 2<sup>ème</sup> valeur de  $m$

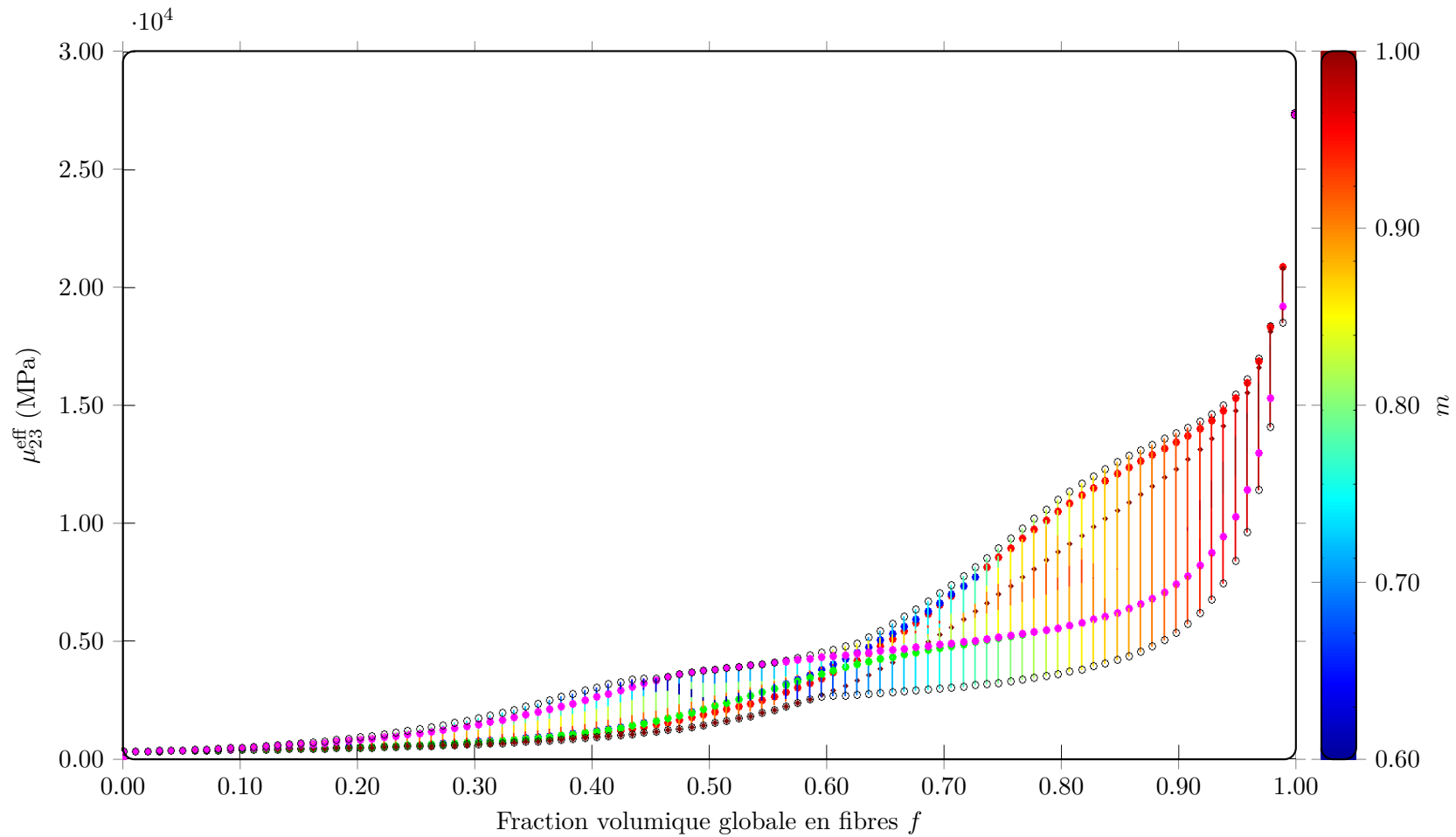


FIGURE A.5 – Variation de  $\mu_{23}^{eff}$  en fonction de  $f$ . Tracé de la 2<sup>ème</sup> valeur de  $m$ .

### A.3.2 3<sup>ème</sup> valeur de $m$

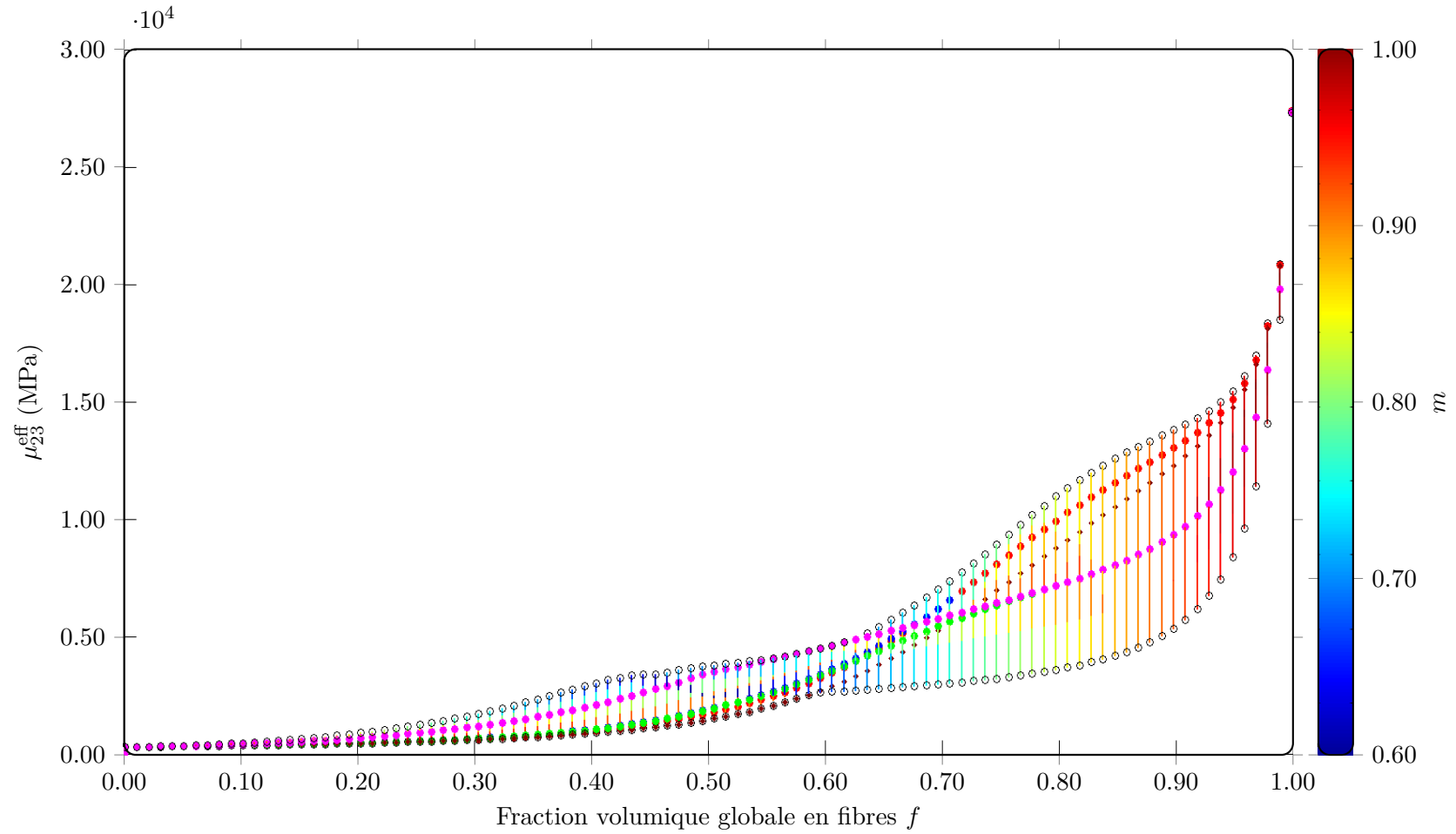


FIGURE A.6 – Variation de  $\mu_{23}^{eff}$  en fonction de  $f$ . Tracé de la 3<sup>ème</sup> valeur de  $m$ .

# Bibliographie

- ALBÉROLA, N., BAS, C. et MÉLÉ, P. (1994). Composites particulières : modelisation du comportement viscoelastique, assortie du concept de percolation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 319:1129–1134.
- ALBEROLA, N. et MELE, P. (1996). Viscoelasticity of polymers filled by rigid or soft particles : Theory and experiment. *Polymer Composites*, 7(5):751–759.
- BARDELLA, L. (2003). An extension of the secant method for the homogenization of the nonlinear behavior of composite materials. *Int. J. of Engng Science*, 41:741–768.
- BARDELLA, L. et GENNA, F. (2001a). Elastic design of syntactic foamed sandwiches obtained by filling of three-dimensional sandwich-fabric panels. *Int. J. Sol. Structures*.
- BARDELLA, L. et GENNA, F. (2001b). On the elastic behavior of syntactic foams. *Int. J. Sol. Structures*, 38:7235–7260.
- BARDELLA, L. et GENNA, F. (2001c). On the elastic behavior of syntactic foams. *Int. J. Sol. Structures*, 38:7235–7260.
- BARDELLA, L., SFREDDO, A., VENTURA, C., PORFIRI, M. et GUPTA, N. (2012). A critical evaluation of micromechanical models for syntactic foams. *Mechanics of Materials*, 50:53–69.
- BEICHA, D., KANIT, T., BRUNET, Y., IMAD, A., EL MOUMEN, A. et KHELFAOUI, Y. (2016). Effective transverse elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites. *Mechanics of Materials*.
- BENVENISTE, Y. (1986). On the Mori-Tanaka method in cracked solids. *Mechanics Research Communication*, 13(4):193–201.
- BENVENISTE, Y. (1987). A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6:147–157.
- BERBENNI, S. et CHERKAOUI, M. (2010). Homogenization of multi-coated inclusion-reinforced linear elastic composites with eigenstrains : application to the thermo-elastic behavior. *Philosophical Magazine*, 44:8213–8228.
- BERTRAND, S., DROILLARD, C., PAILLER, R., BOURRAT, X. et NASLAIN, R. (2000). Tem structure of (pyc/sic)<sub>n</sub> multilayered interphases in sic/sic composites. *Journal of the European Ceramic Society*, 20:1–13.
- BERVEILLER, M. et ZAOU, A. (1979). An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystal. *J. Mech. Phys. Sol.*, 26:325–344.

- BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J.-L. et FOREST, S. (2001). *Mécanique non-linéaire des matériaux*. Hermès.
- BHUIYAN, F. H., SANEI, S. H. R. et FERTIG III, R. S. (2020). Predicting variability in transverse effective elastic moduli and failure initiation strengths in ud composite microstructures due to randomness in fiber location and morphology. *Composite Structures*, 237.
- BILGER, N., AUSLENDER, F., BORNERT, M. et MASSON, R. (2002). Effective transverse elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites. *C.R. Mecanique*, 330:127–132.
- BILGER, N., AUSLENDER, F., BORNERT, M., MOULINEC, H. et ZAOUI, A. (2007). Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a nonuniform distribution of voids. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 26:810–836.
- BORNERT, M., STOLZ, C. et ZAOUI, A. (1996). Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity. *J. Mech. Phys. Sol.*, 44:307–331.
- BOUCHER, S. (1974). On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites. *J. of composite materials*, 8:82–89.
- BRUGGEMAN, D. (1935). Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanten. *Annalen der Physik*, 416:636–664.
- BUDIANSKY, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Mech. Phys. Solids*, 13:223–227.
- CAYSAC, H.-A. (2014). *Analyses expérimentale et numérique de l'endommagement matriciel d'un matériau composite. Cas d'un pultrudé thermoplastique renforcé de fibres de verre*. Thèse de doctorat, ENSMP.
- CHABERT, E., BORNERT, M., BOURGEAT-LAMI, E., CAVAILLE, J.-Y., DENDIEVEL, R., GAUTHIER, C., PUTAUX, J. et ZAOUI, A. (2004). Filler–filler interactions and viscoelastic behavior of polymer nanocomposites. *Materials Science and Engineering A*, 381:320–330.
- CHRISTENSEN, R. (1990). A critical evaluation for a class of micromechanical models. *J. Mech. Phys. Sol.*, 38(3):379–404.
- CHRISTENSEN, R. (1992). On the range of validity of the mori tanaka method. *J. Mech. Phys. Sol.*, 40(1):69–73.
- CHRISTENSEN, R. M. et LO, K. H. (1979). Solutions for the effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Sol.*, 27:315–330.
- CLEARY, M., CHEN, I.-W. et LEE, S.-M. (1980). Self-consistent techniques of heterogeneous media. *J. Engrn. Mech. Div. ASCE*, 106:861–887.
- DIANI, J. et GILORMINI, P. (2014). Using a pattern-based homogenization scheme for modeling the linear viscoelasticity of nano-reinforced polymers with an interphase. *J. Mech. Phys. Sol.*, 63:51–61.
- ESHELBY, J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Royal Soc. London*, 241:376–396.

- EYRE, D. et MILTON, G. (1999). A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement. *European Physical Journal*, 6:41–47.
- FEYEL, F. (1999). Multiscale fe2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Comp. Mat. Sci.*, 16:344–354.
- FEYEL, F. et CHABOCHE, J. (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Comput. Methods in Appl. Mech.*, 183:309–330.
- FROLICH, H. et SACK, R. (1946). Theory of the rheological properties of dispersions. *Proc. Roy. Soc. London*, 18:415–430.
- FU, S.-Y., LAUKE, B., MÄDER, E., YUE, C.-Y. et MAI, Y.-W. (2001). Hybrid effects on tensile properties of hybrid short-glass-fiber-and short-carbon-fiber-reinforced polypropylene composites. *Journal of Materials Science*, 36:1243–1251.
- GHOSH, S., LEE, K. et MOORTHY, S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. *Int. J. Sol. Structures*, 32:27–62.
- GHOSSEIN, E. et LEVESQUE, M. (2012). A fully automated numerical tool for a comprehensive validation of homogenization models and its application to spherical particles reinforced composites. *Int. J. Sol. Structures*, 49:1387–1398.
- GUSEV, A., HINE, P. et WARD, I. (2000). Fiber packing and elastic properties of transversely random unidirectional glass/epoxy composite. *Composite Science Technology*, 60:535–541.
- HASHIN, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. of Applied Mechanics*, 29:143.
- HASHIN, Z. (1965). On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *J. Mech. Phys. Sol.*, 13:119–134.
- HASHIN, Z. (1983). Analysis of composite materials-a survey. *J. of Applied Mechanics*, 50:481–504.
- HASHIN, Z. (1988). The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 36:719–734.
- HASHIN, Z. et ROSEN, B. W. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *J. of Applied Mechanics*, 31:223–230.
- HASHIN, Z. et SHTRIKMAN, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 11:127–140.
- HERMANS, J. (1967). The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned. In *Koninkl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen-Amsterdam*, volume 70 de series B.
- HERSHEY, A. (1954). The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21:236–241.
- HERVÉ, E., STOLZ, C. et ZAOUÏ, A. (1991). A propos de l'assemblage de sphères composites de hashin. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 313:857–852.



- HERVÉ, E. et ZAOUÏ, A. (1990). Modelling the effective behaviour of non-linear matrix-inclusion composites. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9:505–515.
- HERVÉ, E. et ZAOUÏ, A. (1993). n-Layered inclusion-based micromechanical modelling. *Int. J. of Engng Science*, 31:1–10.
- HERVÉ, E. et ZAOUÏ, A. (1995). Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. *Int. J. of Engng Science*, 33:1419–1433.
- HERVÉ-LUANCO, E. (2017). Simplification of the (n+1)-phase model and its extension to non linear behavior. *Int. J. Sol. Structures*, 121:135–147.
- HERVÉ-LUANCO, E. (2019). Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites : simplification of the (n+1)-phase model and extension to imperfect interfaces. *Submitted*.
- HERVÉ-LUANCO, E. et JOANNÈS, S. (2016). Multiscale modelling of transport phenomena for materials with n-layered embedded fibres. part i : Analytical and numerical-based approaches. *Int. J. Sol. Structures*, 97-98:625–636.
- HILL, R. (1964). Theory of mechanical properties of fibre-strengthened. *J. Mech. Phys. Sol.*, 12:199–212.
- HILL, R. (1965a). Continuum micro-mechanisms of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Sol.*, 13:89–101.
- HILL, R. (1965b). A self consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Sol.*, 13:213–222.
- HONORE, J., MELÉ, P. et FLANDIN, L. (2007). Influence of fibre clustering on the transverse mechanical behaviour of polypropylene/glass fibre composites : experimental approach and modelling. *Journal of Physics D*, 40:6788.
- HU, G. K. (1996). A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. *Int. J. Plast.*, 12:439–449.
- HUANG, J. et GIBSON, L. (1993). Elastic moduli of a composite of hollow spheres in a matrix. *J. Mech. Phys. Sol.*, 41(1):55–75.
- JOANNÈS, S. et HERVÉ-LUANCO, E. . (2016). Multiscale modelling of transport phenomena for materials with n-layered embedded fibres. part ii : Investigation of fibre packing effects. *Int. J. Sol. Structures*, 97-98:566–574.
- KANIT, T., FOREST, S., GALLIET, I., MOUNOURY, V. et JEULIN, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. J. Sol. Structures*, 40(13–14):3647–3679.
- KANOUTÉ, P., BOSO, D., CHABOCHE, J. et SCHREFLER, B. (2009). Multiscale methods for composites : A review. *Arch Computat Methods Eng*, 16:31–75.
- KRÖNER, E. (1958). Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus des konstanten des einkristalls. *Z. Physik*, 151:504–518.
- LANTUEJOUL, C. (1991). Ergodicity and integral range. *Journal of Microscopy*, 161:387–403.

- LUO, H. et WENG, G. (1987). On eshelby's inclusion problem in a three-phase spherically concentric solid, and a modification of mori-tanaka's method. *Mech. of Materials*, 6:347–361.
- MAJEWSKI, M., KURSA, M., HOLOBUT, P. et KOWALCZYK-GAJEWSKA, K. (2017a). Micromechanical and numerical analysis of packing and size effects in elastic particulate composites. *Composites Part B*, 124:158–174.
- MAJEWSKI, M., KURSA, M. et KOWALCZYK-GAJEWSKA, K. (2017b). Micromechanical and numerical analysis of packing and size effects in elastic particulate composites. *Composites Part B*, 124:158–174.
- MARCADON, V., HERVE, E. et ZAOU, A. (2007). Micromechanical modeling of packing and size effects in particulate composites. *Int. J. Sol. Structures*, 44:8213–8228.
- MARKHAM, M. F. (1970). Measurement of the elastic constants of fibre composites by ultrasonics. *COMPOSITE*, pages 145–149.
- MARKLUND, E., VARNA, J., NEAGU, R. et GAMSTEDT, E. (2008). Stiffness of aligned wood fiber composites : Effect of microstructure and phase properties. *J. of composite materials*, 42(22):2377–2405.
- MCLAUGHLIN, R. (1977). A study of the differential scheme for composite materials. *Int. J. of Engng Science*, 15:237–244.
- MÉLÉ, P., MARCEAU, S., BROWN, D. et ALBÉROLA, N. (2005). Conséquences de l'agrégation et de la percolation de charges sur le comportement viscoélastique de nanocomposites. *C. R. Mécanique*, 333:155–161.
- MICHEL, J. C., MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : A computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1):109–143.
- MORI, T. et TANAKA, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 21:571–574.
- MOULINEC, H. et SILVA (2014). Comparison of three accelerated fft-based schemes for computing the mechanical response of composite materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97:960–985.
- MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1994). A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 318:1417–1423.
- MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1995). A fft-based numerical method for computing the mechanical properties of composites from images of their microstructures. In PYRZ, R., éditeur : *IUTAM Symposium on Microstructure-Property Interactions in Composite Materials*, pages 235–246. Kluwer Academic.
- MOULINEC, H. et SUQUET, P. (2003). Comparison of fft-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties. *Physica B : Condensed Matter*, 338:58–60.
- NEMAT-NASSER, S. et HORI, M. (1990). *Elastic solids with microdefects*, pages 297–320. Springer-Verlag, New York.

- NGUYEN, F. (2014). *Morphologie mathématique appliquée au développement d'outils de maillage EF automatique dans le cas de microstructures hétérogènes bi et multi-phasés*. Thèse de doctorat, Université Lille 1.
- NGUYEN, S. et DORMIEUX, L. (2015). Propagation of micro-cracks in viscoelastic materials : Analytical and numerical methods. *International Journal of Damage Mechanics*, 24 (4):562–581.
- NORRIS, A. (1985). A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mech. of Materials*, 4:1–16.
- PATERSON, D. A. P., IJOMAH, W. et WINDMILL, J. (2018). Elastic constant determination of unidirectional composite via ultrasonic bulk wave through transmission measurements : A review. *Progress in Materials Science*, 97:1–37.
- POULET, P. (2017). *Effet de la variabilité microstructurale sur le comportement d'un composite UD verre/PA11 : de la caractérisation expérimentale à la modélisation multi-échelle*. Thèse de doctorat, ENSMP.
- QIU, Y. P. et WENG, G. J. (1992). Energy approach to the plasticity of porous materials. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 132:203–217.
- QU, J. et CHERKAOUI, M. (2006). *Fundamentals of Micromechanics of Solids*. Wiley Online Library : New York, NY, USA.
- READ, B. et DEAN, G. (1978). *The Determination of Dynamic Properties of Polymers and Composites*. Adam Hilger Limited, Bristol, UK.
- ROJEK, J. (2020). *Effet de la porosité dans les réservoirs composites à parois épaisses : Observations expérimentales et modélisation numérique*. Thèse de doctorat, ENSMP.
- ROSCOE, R. (1952). The viscosity of suspensions of rigid spheres. *British Journal of Applied Physics*, 3:267–269.
- SANAHUJA, J. et DORMIEUX, L. (2005). Résistance d'un milieu poreux à phase solide hétérogène. *C. R. Mécanique*, 333:818–823.
- SUQUET, P. (1995). Overall properties on nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with ponte castañeda's nonlinear variational procedure. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 320:563–571.
- SUQUET, P., éditeur (1997). *Continuum Micromechanics*, volume 377 de *CISM Courses and lectures*. Springer Verlag.
- TAYA, M. et CHOU, T. (1981). On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body : an application to a hybrid composite. *Int. J. Sol. Structures*, 17:553–563.
- TOUBOUL, M., NADOT-MARTIN, C., DRAGON, A. et FANGET, A. (2007). A multi-scale “morphological approach” for highly-filled particulate composites : evaluation in hyperelasticity and first application to viscohyperelasticity. *Arch. Mech.*, 59(4-5):403–433.
- TSUKROV, I. et DRACH, B. (2010). Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *Int. J. Sol. Structures*, 66:1–18.

- TSUKROV, I., DRACH, B. et GROSS, T. (2012). Effective stiffness and thermal expansion coefficients of unidirectional composites with fibers surrounded by cylindrically orthotropic matrix layers. *Int. J. of Engng Science*.
- TURNER, M., CLOUGH, R., MARTIN, H. et TOPP, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9):805–823.
- UPADHYAY, P. et LYONS, J. (2000). Elastic constants of uniaxially fiber reinforced multiphase composites using recursive cell method. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 19(7):569–603.
- VASSEL, A. et PAUTONNIER, F. (2001). Mechanical behavior of sic monofilaments in orthorhombic titanium aluminide composites. In *"ICCM"*, Pékin (Chine).
- VIEVILLE, P., BONNET, A. et LIPÍŃSKI, P. (2006). Modelling effective properties of composite materials using the inclusion concept. general considerations. *Archives of Mechanics*, 58:207–239.
- WANG, J., CROUCH, S. et MOGILEVSKAYA, S. (2006). Numerical modeling of the elastic behavior of fiber-reinforced composites with inhomogeneous interphases. *Composite Science Technology*, 66:1–18.
- WANG, Y. et HUANG, Z. (2018). Analytical micromechanics models for elastoplastic behavior of long fibrous composites : A critical review and comparative study. *Materials*, 11:1919.
- WILLOT, F. (2015). Fourier-based schemes for computing the mechanical response of composites with accurate local fields. *Comptes Rendus Mécanique*, 343:232–245.
- ZEMAN, J., VONDREJC, J., NOVAK, J. et MAREK, I. (2010). Accelerating a fft-based solver for numerical homogenization of periodic media by conjugate gradients. *Journal of Computational Physics*, 229:8065–8071.
- ZHAO, Y. et WENG, G. (1990). Effective elastic moduli of ribbon-reinforced composites. *J. Appl. Mech.*, 57:158–167.
- ZIMMER, J. et COST, J. (1970). Determination of the elastic constants of an unidirectional fiber composite using ultrasonic velocity measurements. *J. Acoust. Soc. Am*, 47:795–803.
- ZIMMERMAN, R. (1991). Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions. *Mechanics of Materials*, 12:17–24.





## RÉSUMÉ

---

Pour combiner performance, faible masse et durabilité, les composites renforcés de fibres UD sont parfois une alternative efficace aux solutions métalliques traditionnelles. Cependant, tester l'efficacité de ces matériaux composites au sein d'un processus industriel peut être long et coûteux. L'estimation des propriétés effectives longitudinales, c'est-à-dire dans le sens des fibres, est assez simple en connaissant les propriétés des constituants et leur fraction volumique respective. Ce n'est pas aussi simple pour les propriétés effectives transverses (modules effectifs transversaux de cisaillement et de compressibilité dans cette étude). Expérimentalement, il est assez difficile d'obtenir ces modules. Numériquement, les propriétés transverses sont fortement influencées par la disposition des fibres. Une modélisation micro-mécanique "réaliste" est ainsi nécessaire pour comprendre l'influence de l'agencement des fibres sur les propriétés mécaniques. Dans ce contexte, les approches de modélisation micro-mécanique numérique et analytique couplées sont un moyen efficace d'aller de l'avant.

Dans ce travail, le comportement élastique transverse de matériaux composites isotropes transverses est étudié. A titre d'exemple, le cas d'un composite unidirectionnel présentant des régions de matrice "piégées" par les fibres est étudié. À cette fin, un schéma auto-cohérent généralisé " $n$ -phase" couplé à une approche par motifs morphologiquement représentatifs a été développé. Des solutions analytiques, dépendant de deux paramètres morphologiques sont présentées pour prédire les modules transversaux de cisaillement et de compressibilité. De plus, le modèle proposé, écrit dans un formalisme transversalement isotrope, est valable pour une large gamme de fractions volumiques de fibres et notamment pour les fractions volumiques les plus élevées que l'on puisse trouver dans les composites à hautes performances.

Un modèle microstructural exploitant les éléments finis est utilisé pour gérer les morphologies complexes, en se rapprochant le plus possible des microstructures réelles. Ces simulations numériques permettent de faciliter la mise en œuvre du modèle analytique pour offrir une meilleure description des interactions entre les constituants et calibrer les deux paramètres morphologiques. Ce nouveau modèle analytique est comparé aux modèles couramment utilisés par la communauté "composite" pour prédire les propriétés transverses.

## MOTS CLÉS

---

Homogénéisation, Composites renforcés par des fibres, Modèles micromécanique, Motifs Morphologiques Représentatifs, Modèle Auto-Cohérent Généralisé, Fluctuations morphologiques, Méthode des Éléments Finis.

## ABSTRACT

---

In order to combine performance, low weight and durability, unidirectional fiber reinforced composites are sometimes an efficient alternative to traditional metallic solutions. However, testing the efficiency of these composite materials in an industrial process can be time consuming and expensive. Estimating longitudinal effective properties, i.e. in the fiber direction, is quite simple by knowing the properties of the constituents and their volume respective volume fraction. This is not as simple for the transverse effective properties (transverse effective shear and bulk moduli in this study). Experimentally, it is quite difficult to obtain these moduli. Numerically, transverse properties are strongly influenced by the fibre arrangement. "Realistic" micromechanical modelling is though needed to understand the influence of the fiber packing on the mechanical properties. In this context, coupled numerical and analytical micromechanical modelling approaches are an efficient way to move forward.

In this work, the transverse elastic behaviour of transversely isotropic multi-phased materials is studied. As an application example, the case of UD with "trapped" matrix regions is investigated. For this purpose, a " $n$ -phase" Generalized Self-Consistent Scheme coupled with a Morphologically Representative Pattern approach have been developed. Analytical solutions, depending on two morphological parameters are provided to predict the transverse shear modulus and the transverse bulk modulus. Moreover, the proposed model, written in a transversely isotropic formalism, is valid for a wide range of inclusion volume fractions and specifically for the highest volume fractions we can find in high performance composites.

A microstructural Finite Element Model is used to handle the complex morphologies, approaching as closely as possible real microstructures. Those numerical simulations help supplying the analytical implementation for a better description of interactions between the constituents and calibrate the two morphological parameters. This new model is compared with the models commonly used by the composite community to predict transverse properties.

## KEYWORDS

---

Homogenization, Fibre reinforced composites, Micromechanical models, Morphologically Representative Patterns, Generalized Self-Consistent Scheme, Fluctuations of morphology, Finite Element Method.