



Du contrôle spatio-temporel d'ondes de surface à la stabilisation dynamique d'interfaces

Benjamin Apffel

► To cite this version:

Benjamin Apffel. Du contrôle spatio-temporel d'ondes de surface à la stabilisation dynamique d'interfaces. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2022. Français. NNT : 2022UPSL001 . tel-03948892

HAL Id: tel-03948892

<https://pastel.hal.science/tel-03948892>

Submitted on 20 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Institut Langevin, ESPCI

**Du contrôle spatio-temporel d'ondes de surface à la
stabilisation dynamique d'interfaces**

Une étude expérimentale de phénomènes oscillatoires
en mécanique des fluides

Soutenue par

Benjamin APFFEL

Le 6 juillet 2022

Directeur de thèse

Emmanuel FORT

Co-encadrant de thèse

Antonin EDDI

Ecole doctorale n° 564

Physique en Île-de-France

Spécialité

Physique

Composition du jury :

Emmanuel BOSSY *Président du jury*
Professeur, Université Grenoble Alpes

Nicolas VANDEWALLE *Rapporteur*
Professeur, Université de Liège

Romain FLEURY *Rapporteur*
Assistant professor, EPFL

Suzie PROTIERE *Examinatrice*
Chargée de recherche, Sorbonne Université

Corentin COULAIS *Examineur*
Assistant professor, University of Amsterdam

Emmanuel FORT *Directeur de thèse*
Professeur, ESPCI

Table des matières

<i>Remerciements</i>	9
<i>1. Introduction : de la propagation au contrôle des ondes</i>	13
1.1 Présentation générale et motivations	13
1.2 Propagation d'ondes en milieu homogène	14
1.3 Propagation d'ondes dans des milieux spatialement hétérogènes	15
1.4 Propagation d'ondes dans des milieux variables en temps	17
1.5 Intérêt des ondes de surface	20
1.6 Contrôle spatial d'ondes de surface	20
1.6.1 Contrôle par bathymétrie	20
1.6.2 Autres types de contrôle	22
1.7 Contrôle temporel des ondes de surface	22
1.8 Electrostriction et ondes de surface	24
1.9 Plan de la première partie	25
1.10 Ondes, pendule pesant et stabilité d'interfaces fluides	25
1.11 Milieu temporel effectif et stabilisation dynamique	26
1.12 Plan de la seconde partie	27
 <i>partie I Contrôle d'ondes par électrostriction</i>	 29
<i>2. Propagations d'ondes dans des milieux structurés spatialement</i>	31
2.1 Introduction	31
2.2 Les ondes de surface	31
2.2.1 Equations constitutives	31
2.2.2 Ondes planes et relation de dispersion en eau libre	32
2.2.3 Ajout de la dissipation visqueuse	32
2.3 Influence d'un champ électrique sur la propagation d'ondes	33
2.3.1 Cas statique	33
2.3.2 Cas d'ondes propagatives sous une électrode	34
2.3.3 Comportement à l'interface et discussion	36
2.4 Présentation du système expérimental pour le contrôle d'ondes par électrostriction	36
2.4.1 Présentation générale	36
2.4.2 Alignement horizontal de l'électrode	37
2.4.3 Mesure des ondes par FCD	37
2.5 Réfraction d'ondes à l'interface	39
2.5.1 Mesure de l'indice sous l'électrode	39
2.5.2 Vérification des lois de Snell-Descartes	39
2.5.3 Coefficient de réflexion à l'interface	40
2.6 Réflexion totale et champ évanescent	41
2.7 Focalisation d'ondes planes par une lentille	42
2.8 Confinement par fibre surfacique	43
2.9 Conclusion	44

3.	<i>De l'interface temporelle à la cascade fréquentielle</i>	45
3.1	Introduction	45
3.2	Passage d'une interface spatiale	45
3.2.1	Présentation du cadre du calcul	45
3.2.2	Transmission et réflexion à l'interface en incidence normale	46
3.3	Passage d'une interface temporelle	48
3.4	Interface temporelle par électrostriction	50
3.4.1	Présence d'un potentiel variable en temps	50
3.4.2	Présentation du système expérimental	51
3.4.3	Résultats	51
3.5	Passage successif d'une interface spatiale et temporelle	53
3.5.1	Un point de vue spectral des interfaces	53
3.5.2	Réalisation expérimentale	54
3.6	Cascade fréquentielle par itération d'étapes élémentaires	54
3.6.1	Itération d'interfaces spatiales et temporelles	54
3.6.2	Permutation de l'ordre des interfaces	55
3.6.3	Application en cavité	56
3.7	Calcul de rendement et quantité conservée	58
3.8	Les transformations spatiales et temporelles sur le cône de dispersion	59
3.9	Conclusion	60
4.	<i>Modulation temporelle périodique : une approche ondulatoire des instabilités paramétriques</i>	61
4.1	Introduction	61
4.2	Propagation dans un réseau d'interfaces temporelles	62
4.2.1	Introduction	62
4.2.2	Matrices de transfert	63
4.2.3	Cas d'une modulation périodique	64
4.3	Ajout de désordre	65
4.3.1	Cadre du modèle	65
4.3.2	Résultats numériques et théoriques	65
4.4	Résultats expérimentaux	67
4.4.1	Dispositif expérimental	67
4.4.2	Résultats	67
4.4.3	Le rôle de la viscosité	68
4.4.4	Taux de croissance et désordre	69
4.4.5	Une prédiction heuristique du taux de croissance	69
4.5	Etude des fluctuations et phénomène d'intermittence	70
4.6	Une approche ondulatoire de l'instabilité paramétrique	71
4.6.1	Evolution du champ d'ondes à l'interface	71
4.6.2	A partir des interfaces temporelles	72
4.6.3	A partir du modèle paramétrique	72
4.6.4	Bilan énergétique	73
4.6.5	Présence de désordre	74
4.7	Conclusion	74

<i>partie II Phénomènes de stabilisation par application de vibrations haute fréquence</i>	77
5. <i>Flottaison sous une couche de liquide en lévitation</i>	79
5.1 Introduction	79
5.2 L'instabilité de Rayleigh-Taylor	79
5.2.1 Origine physique du phénomène :	80
5.2.2 Étude linéaire de la stabilité	80
5.2.3 Le rôle de la capillarité	81
5.2.4 Au-delà du modèle linéaire	81
5.3 Le pendule de Kapitza	82
5.3.1 Présentation et interprétation graphique	82
5.3.2 Condition d'équilibre d'un pendule vibré	83
5.4 Instabilité de Rayleigh-Taylor dans un bain vibré	85
5.5 L'instabilité de Faraday - recherche de compromis	86
5.6 Mise en œuvre expérimentale	86
5.6.1 Montage expérimental	86
5.6.2 Comportement d'une bulle d'air dans un bain vibré	87
5.6.3 Méthodes de mesure	89
5.7 Etude de la résonance d'une couche d'air	90
5.8 Résultats expérimentaux	90
5.9 Modèle pour la résonance	91
5.10 Mesure de la vitesse d'excitation minimale	93
5.11 Comportement d'un flotteur sur et sous une couche de liquide	93
5.11.1 Résultats expérimentaux	93
5.11.2 Modélisation	94
5.11.3 Test expérimental du critère de stabilité	97
5.12 Conclusion	98
6. <i>Stabilisation d'interfaces par des vibrations dans une direction arbitraire</i>	99
6.1 Introduction	99
6.2 Observation expérimentales d'interfaces vibrées dans des directions arbitraires	100
6.2.1 Montage expérimental et méthodes de mesure	100
6.2.2 Résultats	101
6.3 Pendule pesant vibré dans une direction arbitraire	101
6.4 Correspondance entre une interface liquide et un pendule pesant	103
6.5 Dépendance expérimentale des angles en fonction de l'excitation	104
6.6 Prédiction théorique du profil de vitesse à l'interface	106
6.6.1 Modèle de pendule solide	106
6.6.2 Profil de vitesse à partir des équations de Navier-Stokes	107
6.6.3 La couche limite au bord	109
6.7 Etude expérimentale de la vitesse à l'interface	110
6.7.1 Méthode de mesure	110
6.7.2 Résultats expérimentaux	111
6.7.3 Déstabilisation de l'interface	113
6.8 Etude de stabilité dans le cas compressible	114
6.8.1 Angles de l'interface pour différents angles d'excitation	114
6.8.2 Profils de vitesse aux interfaces	115
6.9 Flottaison sur une interface dans une direction arbitraire	116

6.10 Conclusion et perspectives	117
7. <i>Conclusions et perspectives</i>	119
7.1 Résumé des résultats présentés	119
7.2 Perspectives	121
7.2.1 Transport d'objets flottants à l'interface d'un bain vibré	121
7.2.2 Propulsion par pression de radiation	122
7.2.3 Milieux spatio-temporels	123
7.2.4 Sources en milieu temporel	123
7.3 Le mot de la fin	124
 <i>Annexe</i>	 125
A. <i>Relation de dispersion en eau libre et sous une électrode</i>	127
A.1 Influence du champ électrique sur la propagation d'ondes	127
B. <i>Méthode de FCD</i>	129
C. <i>La couche limite de Stokes</i>	133
D. <i>Liste des publications liées à cette thèse</i>	135
<i>Bibliographie</i>	137

Remerciements

Je souhaite, en préambule à ce manuscrit, remercier les (très) nombreuses personnes qui ont contribué de manière directe ou indirecte au travail qui y est présenté.

J'adresse d'abord toute ma gratitude à l'ensemble des membres du jury pour avoir pris de leur temps afin d'évaluer ce travail. Un grand merci donc, à Nicolas Vandewalle et Romain Fleury d'avoir bien voulu être rapporteurs de ce manuscrit, à Suzie Protière et Corentin Coulais d'avoir accepté d'être examinateurs lors de la soutenance, ainsi qu'à Emmanuel Bossy d'avoir présidé ce jury.

Je tiens ensuite évidemment à remercier Emmanuel d'avoir dirigé cette thèse et de m'avoir encadré durant ces trois dernières années. L'énergie, le bouillonnement d'idées quotidien, la rigueur et la passion que tu as su insuffler et transmettre durant ces trois ans ont largement contribué à faire de ce temps passé au laboratoire un moment exceptionnel. Nos très nombreuses discussions, même les plus délirantes et éloignées de nos sujets d'expertises - cela allait souvent ensemble - m'ont permis d'attiser ma curiosité scientifique et de découvrir de très nombreux sujets qui m'étaient complètement inconnus. Ce fut pour moi une chance et un plaisir de travailler avec toi. Je souhaite également remercier Antonin d'avoir co-dirigé cette thèse. Ta rigueur expérimentale et ton goût pour l'exactitude m'ont appris à toujours essayer de tirer le maximum d'une expérience ou d'une mesure. J'ai également beaucoup apprécié nos discussions, qui permettaient toujours d'obtenir un nouveau point de vue sur les résultats ou d'éclaircir des points techniques obscurs. Merci également à Claire et Marc d'avoir bien voulu prendre part aux comités de suivi tout au long de la thèse.

Je souhaite ensuite remercier l'ensemble des membres de l'équipe auprès desquels j'ai eu la chance de travailler. Un grand merci à Chloé et Sander pour m'avoir si bien lancé dans cette thèse et pour le temps que vous avez accordé à la transmission de votre expertise. Merci Samuel pour ton enthousiasme et tes nombreux coups de mains en électronique ou en manip', sans parler de tes capacités de déménageur de pot vibrant. Merci Filip d'avoir pris du temps sur tes études pour venir faire des expériences et mettre de l'huile de silicone partout avec nous. Merci Valentin pour ton travail acharné et ton efficacité. Je tiens plus généralement à remercier les nombreuses personnes qui sont venues, pour quelques semaines ou quelques mois, faire de la recherche au laboratoire avec nous. Ce fut un réel plaisir de vous connaître et de travailler avec vous.

Au-delà de l'équipe, j'aimerais remercier l'ensemble des membres du laboratoire avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à interagir. Un grand merci tout d'abord à la direction du laboratoire, Arnaud Tourin et Yannick de Wilde, ainsi qu'aux personnels de gestion pour votre accueil, votre efficacité et votre gentillesse, qui contribuent à faire du laboratoire un lieu de travail extrêmement agréable au quotidien. J'adresse également un remerciement particulier aux membres du bureau R33 : à Jeanne et à ses conseils lecture, à Guillaume et à ses conseils gastronomiques, à Flavien et à ses conseils musique, à Arthur, Jérôme, Claudia, Hussam, William et les autres pour la bonne humeur. Merci également à Romain à qui je souhaite des intégrales convergentes, à Alexandre pour la bonne humeur en salle de manip' et à la pétanque, à Ahmed pour apporter la bonne ambiance par-delà les frontières du bureau, à Max pour les randonnées (j'espère un jour te voir transpirer), à Chloé pour toutes les discussions et ta fameuse théorie du bière-Spritz, à Ulysse, Elsa, Paul, Camilo et à tous les autres pour tous les bons moments dans et en-dehors du laboratoire. Cette ambiance extraordinaire et tous ces instants partagés ont fait que nous sommes aujourd'hui bien plus que des collègues, et j'espère que nous nous reverrons par la suite !

Remerciements

J'ai également eu la chance de pouvoir enseigner, durant ces trois ans, au sein de l'UFR d'ingénierie de Sorbonne Université. J'aimerais donc remercier Hélène Dumontet de m'y avoir accueilli et l'ensemble des équipes pédagogiques (Sylvie, Yves, Sophie, Diana...) pour leur confiance et leur disponibilité. J'ai beaucoup appris sur l'enseignement à votre contact. Un grand merci également aux personnels administratifs du département pour leur disponibilité et leur gentillesse.

Parce que la vie ne s'arrête pas aux portes du laboratoire, je tiens également à remercier l'ensemble des personnes que j'ai pu côtoyer durant ces années parisiennes. Merci JB pour toutes les aventures, pour l'enthousiasme et la bonne humeur même dans les plans les plus douteux. Ta relecture attentive et nos discussions scientifiques m'ont également beaucoup apporté. Merci à toute la bande : Marc, Paul, Marine, Charlie, Arnault, je souhaite à tout le monde d'avoir des amis comme vous et des shorts aussi beaux que les nôtres. Merci à Tony, Sam et tous les Gustins pour m'avoir montré qu'il y a toujours de nouveaux sujets passionnants à découvrir accompagnés d'une bonne bière. Merci Rémi pour les sorties improvisées au théâtre et au restaurant, quand on oublie pas tous les deux d'y aller. Merci à Vadim, Thibault, Joceran... et tous les autres que j'ai pu oublier. Ces sept années à Paris ont été extraordinaires grâce à vous tous !

Pour terminer, un immense merci à toute ma famille, pour avoir été à mes côtés depuis tout ce temps, pour avoir tenté de comprendre depuis toutes ces années ce que je bricolais dans ce mystérieux laboratoire (et qui diable pouvait bien me payer pour faire ça). Votre présence à la soutenance a été très importante pour moi, je ne doute pas que maintenant tout est clair pour vous ! Enfin, merci Lucie pour ta présence, ta patience, ta bonne humeur au quotidien, pour supporter ma passion parfois un peu envahissante même en vacances (il faut dire qu'on trouve des vagues un peu partout, même sur les rambardes à Reims). C'est un bonheur de tous les jours de vivre à tes côtés et j'ai hâte de continuer à partager tout ça avec toi !

Pour résumer et conclure, donc, un grand merci à tous !

Introduction : de la propagation au contrôle des ondes

1.1 Présentation générale et motivations

Cette thèse porte sur l'étude expérimentale de phénomènes oscillatoires en mécanique des fluides. Leurs signatures phénoménologiques sont extrêmement riches et nous proposons, par ce travail, d'en explorer quelques aspects. Ainsi, la focalisation d'une onde par électrostriction, la modification arbitraire de la fréquence des vagues, la croissance d'ondes dans un cristal temporel, la mise en lévitation d'une couche de fluide par l'application de vibrations à hautes fréquences ou encore la capacité à surfer sur un mur de liquide sont autant de faits expérimentaux liés à cette thématique qui seront discutés au fil des chapitres. Le premier objectif de cette introduction est donc d'exhiber le lien entre tous ces phénomènes et de donner le cadre formel dans lequel sera menée cette étude.

Un second objectif est de proposer des liens avec d'autres domaines de la physique. En effet, les expériences décrites précédemment reposent sur des principes formels très généraux, que la mécanique des fluides permet d'illustrer de manière extrêmement visuelle. De ce point de vue, ce travail peut être lié à d'autres expériences d'hydrodynamique dont l'objectif est d'illustrer des problèmes réputés peu intuitifs, issus par exemple de la mécanique quantique ou de la cosmologie. Ainsi, l'effet Aharonov-Bohm [1], le comportement de la lumière proche d'un trou noir [2–5], l'effet Casimir entre deux plaques [6] ou encore la dualité onde-corpuscule [7–9] ont été transcrits à la surface d'un fluide. Tous ces effets ont cependant un point commun : ils impliquent des phénomènes ondulatoires. C'est donc l'universalité de la physique des ondes qui les a rendus transposables dans le cadre particulier de la mécanique des fluides. La première partie de cette thèse s'inscrit dans cette lignée et s'intéresse, par le biais des ondes de surface et de l'électrostriction, au contrôle spatial et temporel d'ondes propagatives. La seconde partie s'intéresse à la stabilisations d'interfaces *a priori* instables par des vibrations de hautes fréquences. Là encore, les formulations présentées dans notre cas particulier sont en fait applicables à tout système physique proche d'une position d'équilibre instable et soumis à un forçage oscillant rapidement devant tous les temps caractéristiques du système [10].

Ce chapitre introductif est divisé, comme la présente thèse, en deux parties. La première partie commence par une présentation générale de la physique des ondes, puis de quelques stratégies de contrôle spatial et temporel d'ondes propagatives par modification des propriétés spatiales ou temporelles du milieu. Nous discuterons ensuite du choix des ondes hydrodynamiques comme système ondulatoire, avant de mentionner les techniques documentées dans la littérature pour contrôler spatialement et temporellement ces ondes. Nous verrons alors que l'électrostriction apparaît comme un candidat nouveau et prometteur pour réaliser un tel contrôle. Pour finir, nous décrirons très succinctement le contenu de chacun des chapitres de la première partie de la thèse.

Dans la seconde partie de l'introduction, nous discuterons assez brièvement du lien formel qu'il existe entre la propagation d'une onde, la stabilité de l'interface entre deux fluides et le mouvement d'un pendule pesant. Nous montrerons dès lors qualitativement la possibilité de stabiliser, par des vibrations à hautes fréquences, une couche de liquide placée au-dessus d'une couche d'air. Pour finir,

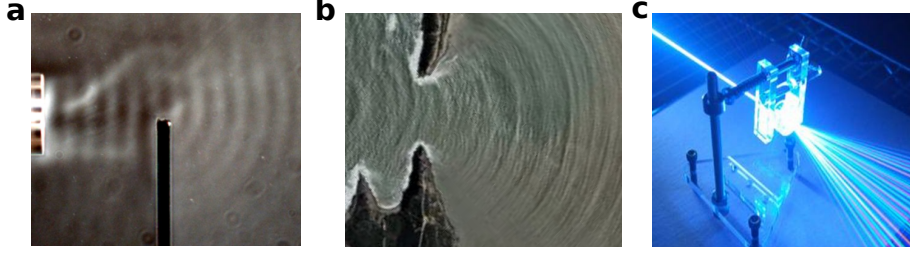


FIG. 1.1: Exemple de diffraction d'ondes. (a) Ondes sonores diffractées par un obstacle et visualisées par strioscopie [11]. (b) Vagues diffractées à l'entrée d'un port par une digue jouant le rôle de fente. Source : *GoogleEarth* (c) Diffraction de la lumière par un réseau périodique. Source : *PhysicsOpenLab.org*.

nous terminerons cette introduction par l'annonce du plan de la seconde partie.

1.2 Propagation d'ondes en milieu homogène

La propagation d'ondes est un phénomène universel dont on retrouve la trace dans des systèmes physiques variés : la lumière, le son, les vibrations du sol, les vagues à la surface de l'eau ou encore la déformation le long d'une corde en sont autant d'exemples rencontrés dans la vie quotidienne. Toutes les ondes partagent des signatures expérimentales communes parmi lesquelles figure, par exemple, la diffraction lors de leur passage à travers une fente d'une taille comparable à la longueur d'onde, comme illustré en figure 1.1. L'universalité des ondes se manifeste aussi formellement dans les équations les décrivant : ces dernières sont typiquement deux équations du premier ordre liant des dérivées spatiales et temporelles de deux champs Φ et Ψ couplés

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D_{\nabla} \Psi \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = D'_{\nabla} \Phi \quad (1.1)$$

avec D_{∇}, D'_{∇} des opérateurs faisant intervenir, entre autres, des dérivées spatiales. Selon les cas, les variables (Φ, Ψ) sont des grandeurs scalaires ou vectorielles et peuvent représenter les champs électriques et magnétiques $(\vec{E}, \vec{B})$ en optique, les champs de pression et de vitesse $(P, \vec{v})$ en acoustique, la tension et l'intensité (U, I) en électronique ou encore la force et le déplacement (F, h) pour une corde mise en vibration. Dans des milieux statiques et spatialement homogènes, une forme fréquemment rencontrée pour les opérateurs de dérivation est $D_{\nabla} = -\alpha \nabla$ et $D'_{\nabla} = -\beta \nabla$ avec α et β deux constantes positives dépendant du système physique, et ∇ l'opérateur gradient ou divergence selon le caractère scalaire ou vectoriel des champs. La combinaison des deux équations donne alors l'équation de d'Alembert pour chacun des champs

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

qui admet des solutions se propageant à la vitesse $c = 1/\sqrt{\alpha\beta}$. Cette vitesse dépend du type d'ondes considérées et varie de quelques dizaines de centimètres par seconde pour des ondes hydrodynamiques à des centaines de milliers de kilomètres par seconde pour la lumière.

L'étude de la propagation d'ondes se fait souvent par la transformée de Fourier, définie comme $\hat{\Phi}(\omega, \vec{k}) = \int \phi(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} d\vec{r} dt$. Cette dernière permet de transformer les équations différentielles en équations algébriques, de sorte que l'équation (1.2) se réécrit

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \hat{\Phi}(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (1.3)$$

De cette formulation découlent deux propriétés importantes :

- Le champ associé à $(\omega, \vec{k})$ ne peut être non nul que si $\omega^2 = c^2 k^2$. Il existe donc une relation, dite de dispersion, liant la norme du vecteur d'onde $k = ||\vec{k}||$ et la pulsation ω d'une onde, c'est-à-dire liant les variations spatiales et temporelles d'un champ d'ondes.
- Lorsque la relation de dispersion est vérifiée, la nullité ou non de la composante $\hat{\phi}(\omega, \vec{k})$ est déterminée par les conditions initiales du fait de la linéarité du problème. Ainsi, le spectre d'une onde est entièrement déterminé lors de l'émission, et aucune composante spectrale supplémentaire n'apparaît durant la propagation.

Pour la forme particulière d'opérateurs choisis, toutes les solutions se propagent à la même vitesse de phase, définie comme

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c. \quad (1.4)$$

et du fait de la relation de dispersion linéaire entre ω et k , le milieu est dit non dispersif. Dans de tels milieux, la forme spatiale d'un paquet d'onde est invariante lors de la propagation. Ce n'est cependant pas le cas pour de nombreux systèmes ondulatoires où la vitesse dépend de la fréquence considérée. C'est par exemple le cas des ondes se propageant à la surface de l'eau, dont la relation de dispersion est donnée par

$$\omega^2 = \tanh(kD) \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \quad (1.5)$$

où D est la profondeur du bain, g la pesanteur locale, γ la tension superficielle et ρ la masse volumique du fluide. Cette forme fait intervenir davantage de termes que précédemment, notamment du fait d'opérateurs de dérivation D_∇ et D'_∇ plus complexes que ceux utilisés ci-dessus. La dépendance en fréquence de la vitesse implique l'étalement progressif d'un paquet d'ondes au cours de sa propagation, ce qui justifie leur appellation d'ondes dispersives.

1.3 Propagation d'ondes dans des milieux spatialement hétérogènes

En plus de constituer un objet d'intérêt fondamental, les ondes sont un vecteur d'information omniprésent dans notre quotidien. Elles se manifestent dans des contextes aussi variés que notre perception sensible du monde par la vue et l'ouïe, la communication via les ondes électromagnétiques, l'étude de phénomènes astronomiques lointains *via* les ondes gravitationnelles, ou encore le diagnostic médical par échographie. Le contrôle de la propagation d'ondes est donc un enjeu crucial : la correction ophtalmique par ajout d'une lentille devant un œil myope, la collecte d'une grande quantité de lumière par un télescope ou encore l'isolation phonique d'un appartement modifient, par le contrôle des ondes, notre perception du monde.

Cependant, nous avons vu que dans un espace homogène, les propriétés des ondes sont fixées une fois pour toutes à leur émission, tandis que le contrôle des ondes suppose précisément de pouvoir modifier ces propriétés. L'une solution possible consiste alors à briser l'homogénéité du milieu et à structurer spatialement des propriétés physiques du milieu pour obtenir la forme d'onde souhaitée. Des exemples simples de telles structures sont présentées en figure 1.2a-c. Un train d'ondes propagatif dans un milieu initial, caractérisé par sa vitesse $c_1 = 1/\sqrt{\alpha_1 \beta_1}$, peut voir sa longueur d'onde modifiée lors de son passage en incidence normale dans un second milieu de vitesse $c_2 = 1/\sqrt{\alpha_2 \beta_2}$. Le ratio des longueurs d'onde λ_1/λ_2 dans les deux milieux est alors donné par l'indice de réfraction

$$n = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (1.6)$$

Ce dernier mesure donc, d'une certaine manière, la différence relative entre les deux milieux du point

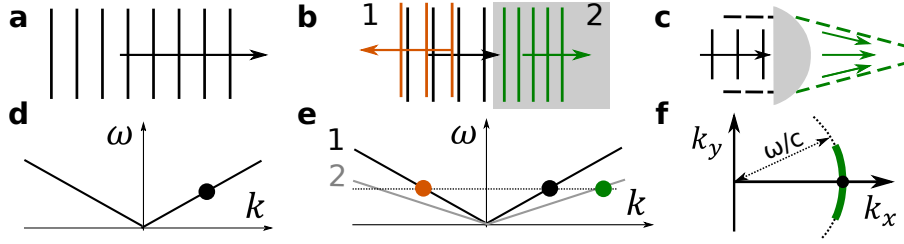


FIG. 1.2: (a) Onde plane se propageant dans un milieu homogène. (b) Lorsque cette onde plane traverse un dioptre, une partie de l'onde est réfléchiée et une partie est transmise. (c) Focalisation d'une onde plane par une lentille convergente. Les spectres spatiaux associés à chacune des situations sont représentés respectivement en figure (d), (e) et (f).

de vue des ondes.¹ La différence d'indice permet également, en incidence oblique, de réfracter les ondes. Cette possibilité de dévier un faisceau est par exemple utilisée pour focaliser une onde plane avec une lentille convexe, comme illustré en figure 1.2c.

L'influence d'une structuration spatiale peut également être analysée formellement dans l'espace de Fourier. Reconsidérons ainsi les exemples précédents : chacun des deux milieux est représenté dans cet espace par sa relation de dispersion $\omega = c_i k$ qui est, dans un milieu unidimensionnel, une droite de pente c_i , comme illustré en figure 1.2d. Une onde plane se propageant dans un milieu homogène est alors figurée par un point sur la relation de dispersion correspondante. Lors du passage d'un dioptre en incidence normale, les ondes réfléchies et réfractées apparaissent alors comme de nouvelles composantes spectrales à ω constant dans les milieux correspondants, comme montré en figure 1.2e. En particulier, le ratio des vecteurs d'ondes initiaux k_1 et transmis k_2 est donné par $n = k_1/k_2 = c_1/c_2$, en accord avec la formule (1.6). Dans le cas d'une lentille qui agit sur une onde de pulsation ω constante, la relation de dispersion est un cercle de rayon ω/c . La focalisation du faisceau après la lentille est alors associée à de nouvelles directions de propagation, et donc à l'ajout de nouvelles composantes sur le cercle, comme illustré en figure 1.2f.

Contrairement au cas d'un milieu homogène discuté dans la section précédente, le spectre d'un paquet d'ondes n'est donc pas entièrement déterminé à l'émission, mais dépend également des propriétés du milieu de propagation. Supposons par exemple que α dépende désormais de la coordonnée spatiale $\vec{x}$, tandis que β reste constant. L'équation de propagation s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \beta \nabla (\alpha(\vec{x}) \nabla \Psi) = 0 \quad (1.7)$$

Cette dernière se rencontre, dans sa version vectorielle, en électromagnétisme lors de la propagation dans un milieu de permittivité $\epsilon(\vec{x})$. Il est toujours possible de prendre la transformée de Fourier temporelle de cette équation pour obtenir l'équation de Helmholtz

$$\nabla (\alpha(\vec{x}) \nabla \Psi(\omega, \vec{x})) + \frac{\omega^2}{\beta} \Psi(\omega, \vec{x}) = 0. \quad (1.8)$$

et chaque fréquence ω peut donc être étudiée indépendamment. En revanche, la transformée de Fourier spatiale ne permet pas, comme précédemment, d'obtenir une relation simple entre ω et k du fait de la dépendance en espace de α . La transformée de Fourier est alors remplacée par l'étude des modes et des valeurs propres de l'équation (1.8). La structuration spatiale du milieu a donc une incidence sur le spectre spatial des ondes, et donc sur leur forme dans l'espace.

1. Nous discuterons également au chapitre 3 le rôle des impédances $Z_i = \sqrt{\beta_i/\alpha_i}$ et de leur ratio Z_2/Z_1 sur le comportement des ondes à l'interface.

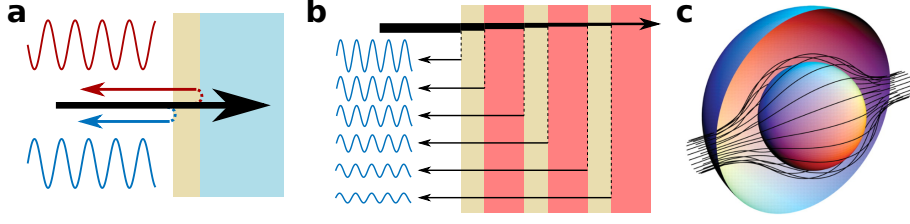


FIG. 1.3: (a) Principe d'un traitement antireflet : une fine couche de matériau intermédiaire provoque une interférence destructive entre les deux ondes réfléchies. (b) Principe d'un miroir de Bragg diélectrique : des couches de diélectriques différents et d'épaisseur adaptée à la longueur d'onde sont empilées pour faire interférer constructivement l'ensemble des ondes réfléchies. (c) Rayons lumineux courbés autour d'un objet (sphère intérieure) par une cape diélectrique s'étendant jusqu'à la sphère extérieure. Extrait de [15].

La capacité d'un opérateur à varier les propriétés d'une onde est directement liée aux différences d'indices qu'il est capable d'implémenter, comme le montre l'équation (1.6), et à la forme des profils effectivement réalisables expérimentalement. Ces derniers peuvent être conçus pour implémenter divers types de contrôles. Ainsi, un traitement antireflet peut être créé par ajout d'une fine couche intermédiaire entre deux milieux, comme schématisé en figure 1.3a. L'épaisseur et les propriétés physiques de cette couche sont choisies de sorte que les ondes réfléchies aux deux interfaces s'annulent par interférence destructive. L'intégralité du faisceau est donc transmise entre les deux milieux, contrairement au cas d'un dioptré simple. Ces traitements sont aujourd'hui utilisés quotidiennement en ophtalmologie. Au contraire, la pénétration du faisceau peut être empêchée par des interférences destructives entre les différentes ondes transmises à l'interface. La structure du milieu interdit la propagation de l'onde - on parle ainsi de bande interdite - tandis que les ondes réfléchies se somment de manière constructive, comme en figure 1.2b. Le milieu se comporte comme un miroir théoriquement parfait à cette longueur d'onde. Au-delà de ces deux exemples, d'innombrables dispositifs de contrôle basés sur une structuration spatiale des propriétés du milieu existent aujourd'hui pour tous les types d'ondes, avec des applications extrêmement variées.

Le contrôle spatial des ondes est cependant loin d'être total, et ne sera à terme limité que par l'imagination des théoriciens et l'habileté des expérimentateurs. Une piste intéressante est par exemple offerte par l'optique transformationnelle, qui repose sur l'étude de la transformation de l'équation (1.8) par changement du système de coordonnées [12, 13]. Le terme $\alpha(x)$ est alors lié au Jacobien de la transformation, ce qui donne une interprétation géométrique aux propriétés physiques du milieu. Ainsi, les profils de permittivité nécessaires à la création de capes d'invisibilité en électromagnétisme, comme illustré en figure 1.3c, peuvent être explicitement calculés [14, 15]. Réaliser de tels profils représente toutefois un véritable défi expérimental et ceux-ci ne fonctionnent théoriquement qu'à une seule fréquence, ce qui impose la mise en place de nouvelles stratégies pour la réalisation d'une "vraie" cape d'invisibilité [16].

1.4 Propagation d'ondes dans des milieux variables en temps

La structuration spatiale du milieu permet donc de jouer sur la forme et le spectre spatial d'une onde. En revanche, la fréquence est systématiquement invariante dans ce type de milieu, comme le montre la figure 1.2. De la même manière, l'énergie portée par l'ensemble du champ d'onde est constante au cours du temps et se répartit spatialement au gré des transformations. Ces lois de conservation sont une conséquence directe du caractère statique du milieu, c'est-à-dire de l'invariance par translation temporelle des équations de propagation.

La variation des propriétés du milieu avec le temps constitue donc un degré de liberté supplémentaire sur lequel il est possible de jouer. Ce type de problème a été étudié théoriquement dans la littérature, notamment du point de vue de l'électromagnétisme [17–20]. Dans de tels milieux dits temporels, des phénomènes de conversion de fréquences [19], de non-réciprocité [21, 22] ou d'amplification [23, 24] peuvent apparaître pour des ondes. Comme dans le cas spatial, l'apparition de l'un ou l'autre de ces effets est déterminée par la modulation choisie. Chacun d'entre eux est néanmoins impossible à observer dans des milieux statiques, et la variation temporelle des propriétés du milieu enrichit donc les possibilités de contrôle.

Par analogie avec ce qui précède, supposons désormais que le paramètre α ne dépende plus de l'espace mais du temps. L'équation d'évolution pour le champ est alors

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \alpha(t) \nabla^2 \Psi = 0 \quad (1.9)$$

à laquelle on applique une transformée de Fourier spatiale pour obtenir la contrepartie temporelle de l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \Psi(t, \vec{k})}{\partial t^2} + \alpha(t) k^2 \Psi(t, \vec{k}) = 0 \quad (1.10)$$

Les rôles de l'espace (respectivement du vecteur d'onde) et du temps (respectivement la fréquence) sont donc symétriquement inversés par rapport au cas spatial. Ainsi, la modulation temporelle des propriétés du milieu aura une influence sur le profil temporel et le spectre fréquentiel des ondes sans modifier le spectre spatial, comme illustré en figure 1.4a-b. Ces effets seront détaillés tout au long de cette thèse, mais citons tout de même dès à présent deux cas de tels milieux classiquement rencontrés

- Lorsque $\alpha(t)$ est une fonction marche, on parle, par analogie avec le cas spatial, d'interface temporelle. Cela correspond au cas où l'indice $n(t)$ du milieu est varié simultanément dans tout l'espace de sa valeur initiale n_1 à sa valeur finale n_2 . Le ratio des fréquences de l'onde initiale ω_1 et de l'onde transmise ω_2 est donné par

$$\omega_2/\omega_1 = n_2/n_1 \quad (1.11)$$

tandis que le vecteur d'onde est conservé, comme illustré en figure 1.4b. Un tel changement de fréquence est par exemple audible lors de la mise en tension progressive d'une corde de guitare. Comme pour le cas spatial, une onde réfléchie associée à $-\omega$ est également générée au passage de l'interface. Ce fait, illustré en figure 1.4a, sera démontré formellement dans le chapitre 3.

- Lorsque $\alpha(t)$ est une fonction périodique, l'équation (1.10) devient une équation de Mathieu et des ondes sont excitées paramétriquement dans le milieu. Ce cas de figure se rencontre par exemple dans les oscillateurs paramétriques optiques.

L'existence d'une symétrie formelle entre espace et temps dans les équations de propagation permet de définir l'analogie de nombreux dispositifs de contrôle spatiaux dans le cadre des milieux temporels [19]. C'est le cas par exemple des traitements anti-reflets temporels, qui consistent à passer temporellement dans un milieu intermédiaire avant d'atteindre le milieu final [25]. Comme pour le cas spatial, les ondes émises à chaque interface temporelle interfèrent de manière destructive et s'annulent. Il est également possible d'imaginer l'équivalent temporel d'une lentille [26], d'un prisme [27], d'un cristal périodique [28] ou même d'une cape d'invisibilité [29, 30]. Ce dernier exemple est illustré en figure 1.4c, et la similarité avec la figure 1.3c témoigne de la symétrie entre espace et temps. Au-delà de l'intérêt fondamental d'établir de telles équivalences, ces dispositifs pourraient mener au développement de nouveaux dispositifs de contrôle des ondes.

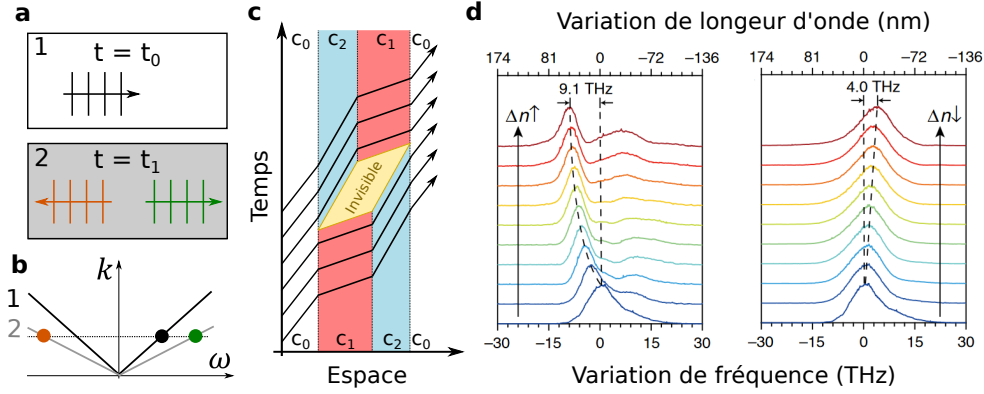


FIG. 1.4: (a) Lors du passage d’une interface temporelle, un paquet d’onde initial est divisé en deux ondes contra-propagatives. (b) Spectralement, la fréquence de l’onde initiale (point noir) est modifiée tandis que le vecteur d’onde est conservé lors du passage d’une relation de dispersion à l’autre. Les axes ont été inversés par rapport à la figure 1.2b. (c) Schéma de principe d’une cape d’invisibilité temporelle, inspiré de [29]. La vitesse des ondes prend trois valeurs $c_2 < c_0 < c_1$ selon l’espace et le temps pour ouvrir temporellement le faisceau. Celui-ci est ensuite recombinaé, de sorte qu’un observateur situé après la cape ne peut pas avoir accès à l’information de l’instant caché. (d) Exemple de modification de fréquence d’un faisceau infrarouge de longueur d’onde initiale $\lambda = 1235$ nm dans une couche d’ITO. L’indice du milieu est modulé temporellement en utilisant un pompage optique intense. Extrait de [31].

Si la symétrie entre espace et temps est clairement établie formellement, elle n’est cependant pas effective dans les possibilités expérimentales. Comparé au cas spatial, il est en effet bien plus délicat de varier temporellement de manière importante les propriétés physiques du milieu. En optique par exemple, une simple lame de verre réalise une variation d’indice de 50 % sur une zone spatiale extrêmement bien contrôlée. Dans le cas temporel, la modulation est communément déclenchée par l’utilisation d’impulsions optiques intenses et des non-linéarités [31–33], mais les variations d’indice relatives $\Delta n(t)/n$ ainsi obtenues ne dépassent pas quelques pourcents au maximum. Cela limite d’autant les possibilités de conversion de fréquence effectivement réalisables, comme le montrent l’équation (1.11) et les résultats de la figure 1.4d. La maîtrise temporelle du milieu sur des temps courts devant la propagation reste par ailleurs délicate, *a fortiori* dans le cadre de l’électromagnétisme. Pour pallier cette difficulté, des expériences ont été menées en cavité pour augmenter, du fait des nombreux allers-retours, le temps d’interaction entre l’onde et la zone modulée. Ainsi, le changement adiabatique des propriétés de la cavité modifie, comme pour une corde de guitare, la fréquence des ondes piégées [34, 35]. La modulation des propriétés mécaniques d’une plaque sur laquelle se propagent des ondes [36] ou des méta-matériaux mécaniques artificiels composés de résonateurs couplés modulés temporellement [37, 38] ont également été utilisés pour l’étude expérimentale des milieux temporels.

En plus de la difficulté à réaliser de tels milieux, la mesure du champ d’onde n’est généralement effectivement réalisée qu’en quelques points de l’espace. En optique, une caméra ne donne accès qu’à l’intensité moyenne du champ sur une section fixée, tandis que la mesure de la phase en un point se fait par interférométrie. En acoustique, la phase du champ est plus accessible mais la mesure se fait généralement point par point. Par ailleurs, l’expérimentateur est bien souvent condamné à ne pouvoir mesurer que les champs transmis ou rétro-diffusés par le milieu, sans avoir accès à une mesure à l’intérieur du milieu, qui est pourtant d’intérêt fondamental. Toutes ces contraintes rendent désirable un objet ondulatoire qu’il serait possible d’imager de manière non destructive et en temps réel durant sa propagation dans des milieux complexes. A cet égard, les vagues à la surface d’un

fluide, que l'on appellera un peu improprement dans la suite ondes de surface, apparaissent comme un support expérimental particulièrement intéressant.

1.5 Intérêt des ondes de surface

Parmi tous les types d'ondes qu'il est possible de dénombrer, les ondes à la surface d'un fluide sont en effet sans doute celles qui nous sont les plus familières. Leur observation quasi-quotidienne est facilitée par des propriétés sympathiques. Ces ondes sont en effet

- macroscopiques : leur longueur d'onde en laboratoire est typiquement centimétrique pour une amplitude de l'ordre du millimètre
- lentes : leur vitesse est typiquement de 30 cm/s à une fréquence d'une dizaine de Hertz

Cela autorise, comme nous le verrons plus loin, une détection quantitative du champ de hauteur à la surface sur de larges zones, avec une bonne résolution spatio-temporelle et peu de matériel. Il est donc possible de suivre en temps réel et de manière non invasive l'évolution de l'amplitude et de la phase de ces ondes. Cette mesure est extrêmement précieuse pour l'expérimentateur et permet une étude fine de leur comportement.

Cependant, ces ondes ont également, comme tout système expérimental, des inconvénients qui leur sont propres. En premier lieu, elles sont sujettes à la dissipation, notamment du fait de la viscosité du fluide qui tend à les amortir. La dissipation dépend fortement de la longueur d'onde et des conditions expérimentales, mais la longueur typique d'atténuation est au mieux de quelques dizaines de centimètres pour des ondes à une dizaine de Hertz. Il s'agit là d'une limitation majeure contre laquelle il est difficile de lutter. Ces ondes de surface portent par ailleurs assez mal leur nom, puisque leur étude théorique ne peut se faire qu'en déterminant à la fois le champ de vitesse généré dans l'ensemble de la masse de fluide et la variation de hauteur de l'interface. En particulier, une perturbation - par exemple un obstacle solide - placée sous la surface peut modifier l'écoulement environnant et donc leur signature sur l'interface. On peut également citer la présence de non-linéarités dès que l'amplitude des ondes n'est plus faible devant leur longueur d'onde, la présence de dispersion ou encore le caractère à la fois transverse et longitudinal des déplacements induits. Des difficultés théoriques sont donc bien souvent rencontrées pour décrire leur propagation en dehors des cas les plus simples.

Ces inconvénients sont cependant largement compensés par les avantages déjà mentionnés, et l'utilisation de ces ondes comme support expérimental pour la physique des ondes est largement répandue. En particulier, le contrôle spatial et temporel de ces ondes peut être réalisé par diverses techniques que l'on présente maintenant.

1.6 Contrôle spatial d'ondes de surface

Au même titre que les autres types d'ondes présentés précédemment, la propagation des ondes de surface peut être contrôlée en structurant le milieu de propagation. Les approches les plus classiques décrites dans la littérature sont brièvement mentionnées ci-dessous, et quelques résultats expérimentaux associés sont présentés en figure 1.5.

1.6.1 Contrôle par bathymétrie

La manière la plus classique de modifier les propriétés de propagation des ondes de surface est de modifier le profil bathymétrique sous la surface. L'écoulement dans le fluide dépend en effet de la profondeur D . Dans la limite des longueurs d'ondes grandes devant la profondeur ($kD \ll 1$), la

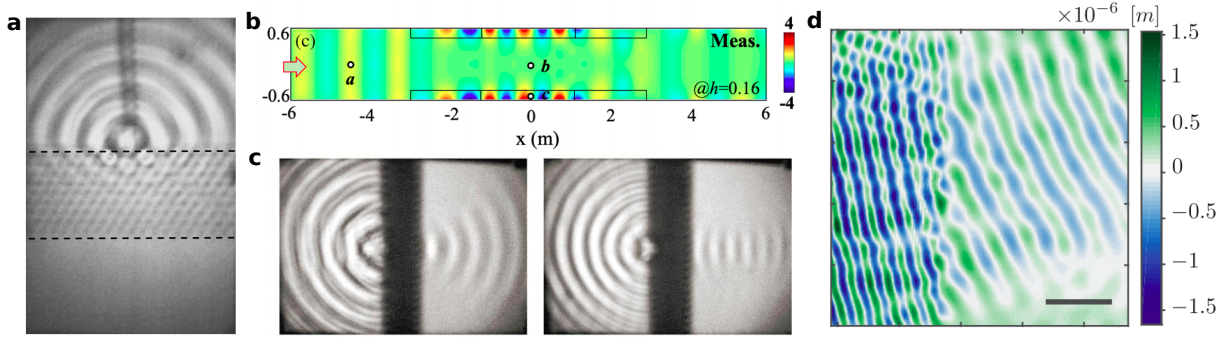


FIG. 1.5: Quelques exemples de manipulation d'ondes de surface extraits de la littérature. (a) Excitation d'ondes dans la bande interdite d'un cristal constitué de piliers cylindriques sous la surface. Extrait de [39]. (b) Cape d'invisibilité par profil bathymétrique cachant le point central aux ondes. Extrait de [40]. (c) Focalisation d'ondes à deux fréquences différentes par un réseau de piliers traversant la surface. Extrait de [41]. (d) Réfraction d'ondes à la surface d'une membrane placée sur la surface de l'eau. L'épaisseur de la membrane est différente sur la partie droite et la partie gauche, ce qui change la vitesse des ondes. Extrait de [42].

relation (1.5) se simplifie et donne une vitesse de phase pour les ondes qui s'exprime

$$v_\phi = \sqrt{gD}. \quad (1.12)$$

Dans ce régime, la vitesse des ondes dépend de la hauteur de fluide. Des zones de profondeurs différentes seront donc, pour les ondes, des zones de vitesses différentes. On dispose donc d'un moyen de moduler spatialement l'indice, ce qui ouvre la possibilité d'implémenter tous les phénomènes réfractifs discutés précédemment pour les ondes de surface. Par exemple, des phénomènes de focalisation, [43], de bande interdites (reproduits en figure 1.5a) [39, 44] ou de localisation en milieux désordonnés [45, 46] ont été prédits et réalisés expérimentalement en laboratoire. L'influence de zones de faible profondeur a également été observée à très grande échelle pour des ondes ayant des longueurs d'ondes kilométriques et sensibles aux irrégularités du plancher océanique [47]. L'étude des ondes de surface dans ces régimes est d'autant plus intéressante qu'il existe, dans ce cas précis, une analogie formelle avec l'optique transformationnelle. En effet, le champ de hauteur $h(x, t)$ de la surface de liquide évolue selon l'équation [48]

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - g\nabla(D(x)\nabla h) = 0 \quad (1.13)$$

et la profondeur $D(x)$ joue donc le rôle du paramètre $\alpha(x)$ dans l'équation (1.8). Cette correspondance fait des ondes de surface un support expérimental à l'optique transformationnelle, ce qui a permis la réalisation de capes d'invisibilité, comme illustré en figure 1.5b [40, 49–51].

L'inconvénient majeur de cette méthode est cependant l'augmentation de la dissipation visqueuse lorsque la profondeur diminue. La profondeur influence en effet la propagation des ondes en modifiant l'écoulement sous-jacent, ce qui modifie - et augmente - du même coup la dissipation visqueuse associée. Pour que les ondes ne soient pas absorbées trop rapidement, il est alors nécessaire d'augmenter les longueurs d'onde et donc la taille des expériences, comme illustré en figure 1.5b où la cape d'invisibilité est réalisée dans un bassin d'une dizaine de mètres. Par ailleurs, la variation brusque de la profondeur peut générer des non-linéarités importantes. Les variations d'indice effectivement réalisables sont donc en pratique limitées à quelques dizaines de pourcents.

1.6.2 Autres types de contrôle

Le contrôle d'ondes de surface est également possible par l'ajout d'inclusions solides à la surface, par exemple des cylindres solides plantés dans le fond du bac traversant cette dernière. On obtient alors typiquement un problème sur un domaine spatialement homogène mais non simplement connexe, sur les bords duquel des conditions de non pénétration sont imposées. Cette approche est particulièrement adaptée à la création de métamatériaux pour les ondes de surface. Comme pour la bathymétrie, des bandes interdites, des phénomènes de focalisation reproduits en figure 1.5c ou des capes d'invisibilité ont été rapportés dans la littérature [41, 52, 53]. La présence d'inclusions à l'interface complique cependant, par la présence de ménisques proche des bords, la mesure des ondes à la surface à leur voisinage. Ainsi seul le champ en dehors de la zone structurée est en général effectivement observable comme le montre la figure 1.5c. L'introduction des obstacles est également associée, comme précédemment, à une atténuation des ondes plus importante qu'en eau libre. Pour finir, l'absence de phénomènes réfractifs limite les possibilités de contrôle.

La propagation d'ondes est également modifiée lorsque des contraintes supplémentaires sont ajoutées à l'interface. Cela se produit par exemple en ajoutant des disques ou membranes flottants à la surface [54, 55]. Il apparaît alors un couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement des objets à l'interface qui modifie les propriétés des ondes propagatives. Les ondes peuvent ainsi être réfractées, comme illustré en figure 1.5d, ou focalisées [42, 56] et des métamatériaux peuvent être créés en structurant la membrane à l'interface [54].

Les ondes de surface peuvent donc, par l'introduction d'hétérogénéités, être contrôlées spatialement au même titre que tous les autres types d'ondes. En comparaison avec l'optique, les possibilités sont malgré tout bien plus limitées du fait de certaines contraintes spécifiques à l'hydrodynamique. Il en est tout autrement pour les milieux temporels, où des variations nettement plus significatives que celles discutées en section 1.4 peuvent être réalisées.

1.7 Contrôle temporel des ondes de surface

En effet, dans la limite des grandes profondeurs $D \rightarrow \infty$ et pour k suffisamment faible, la relation de dispersion (1.5) se simplifie comme

$$\omega^2 = gk \quad (1.14)$$

L'évolution des ondes est donc déterminée par la gravité. Or, cette dernière peut être modulée temporellement en appliquant à ce dernier une accélération verticale $a(t)$ pouvant dépendre du temps. Dans ce cas, l'équation de propagation des ondes doit tenir compte des forces inertielles et s'écrit pour un vecteur d'onde k donné

$$\frac{\partial^2 h(k, t)}{\partial t^2} + g_{eff}(t)kh(k, t) = 0 \quad (1.15)$$

où $g_{eff}(t) = g - a(t)$ est la gravité effective perçue sur le bain. Cette équation est à rapprocher de l'équation (1.10), et la modulation du milieu $\alpha(t)$ est donc donnée par l'accélération appliquée. Or, cette dernière peut être de plus d'un ordre de grandeur supérieure à l'accélération de pesanteur g , ce qui ouvre la voie à des variations relatives extrêmement importantes. Cette possibilité, combinée à la facilité d'imager le champ propagatif, fait des ondes de surface un choix extrêmement intéressant pour l'étude des milieux variables en temps.

Lorsque le bain est vibré sinusoïdalement, on observe, pour une accélération supérieure à un certain seuil, l'apparition d'ondes excitées paramétriquement à la surface du bain. Il s'agit de l'instabilité de Faraday [57–59], dont des photographies sont montrées en figure 1.6a. Cette instabilité

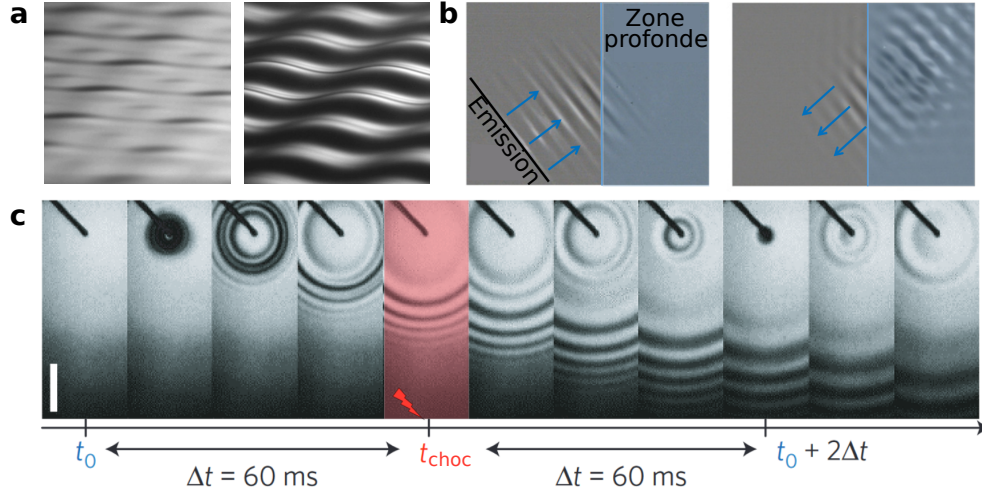


FIG. 1.6: (a) Vue de côté d'ondes excitées paramétriquement par instabilité de Faraday sur un bain vibré. Les deux photographies, séparées d'un quart de période d'oscillation des ondes, montrent leur caractère stationnaire. Images : A. Eddi. (b) Miroir à conjugaison de phase pour des ondes de surface sur un bain vibré : l'onde propagative initiale pénètre dans une zone de forte profondeur (à droite) qui retourne les ondes vers leur lieu d'émission. Extrait de [61] (c) Exemple de refocalisation d'onde par holographie temporelle. Une onde est émise à t_0 sur un bain au repos. A l'instant t_{choc} , un choc d'accélération intense ($\sim 20g$) est appliqué au bain. Le passage de cette interface temporelle génère une onde contra-propagative qui se refocalise. Extrait de [62].

est à rapprocher de la génération de fréquence moitié dans les oscillateurs paramétriques optiques, et peut être interprétée comme l'amplification du bruit ondulatoire dans un milieu temporel [60].

Plus récemment, le contrôle d'ondes de surface propagatives par une modulation bien choisie a été réalisé ces dernières années au laboratoire, notamment dans le cadre de la thèse de Vincent Bacot. L'application d'une vibration sinusoïdale permet dans ce cas l'implémentation d'un miroir à conjugaison de phase retournant des ondes vers leur lieu d'émission, comme illustré en figure 1.6b [61]. Cette réalisation repose sur l'augmentation du seuil de l'instabilité de Faraday lorsque la profondeur du bain diminue [9]. Le bain est ainsi divisé en deux zones de profondeurs différentes, et l'accélération du bain est choisie juste en-dessous du seuil d'instabilité pour la zone la plus profonde. Un train d'ondes est alors émis au sein d'une zone de faible profondeur, où la présence de vibrations n'affecte pas significativement la propagation. Lorsque ce dernier atteint la zone de profondeur plus importante, on observe, du fait du forçage sinusoïdal, la génération d'ondes stationnaires et d'une onde contra-propagative conjuguée en phase avec l'onde initiale.

L'influence d'un unique choc d'accélération a également été étudié. Une onde émise à un instant et un lieu donné peut alors être retournée temporellement et refocalisée à son point d'émission, comme illustré en figure 1.6c [62]. Cette observation est à rapprocher de la génération d'ondes contra-propagatives lors du passage d'une interface temporelle, déjà discutée en figure 1.4b. Elle illustre également l'équivalent temporel de l'holographie. La reconstruction du champ initial par l'illumination d'une plaque photographique dans le cas spatial est, dans ce cas, remplacée par le retournement temporel de l'onde à partir de l'information présente sur le bain à l'instant du choc.

L'application d'accélération permet donc la réalisation expérimentale de modulations temporelles extrêmement importantes, sur des temps courts devant les temps d'évolution typiques des champs d'ondes. Une accélération de $20g$, par rapport au bain au repos d'indice $n = 1$, est associée à une variation d'indice $\Delta n = \sqrt{20} \approx 4$, soit une variation relative de 400 % ! Cependant, le type de

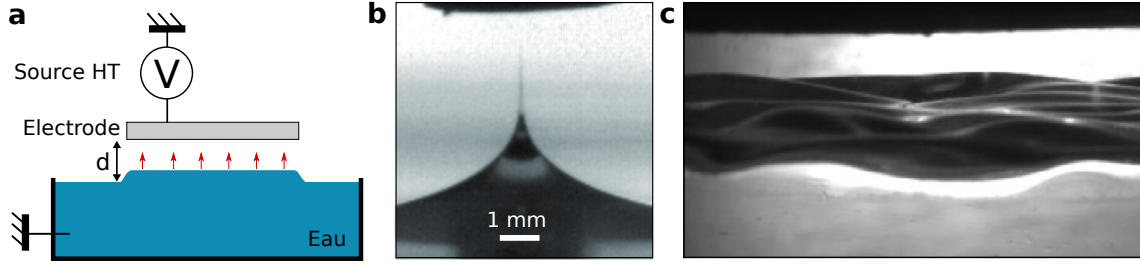


FIG. 1.7: (a) Système expérimental pour l'étude de l'effet de l'électrostriction : une électrode est placée à une distance d de la surface de l'eau et une différence de potentiel importante est appliquée. L'eau étant conductrice, une force d'électrostriction s'applique sous l'électrode et modifie la forme de l'interface. (b) Lorsque la tension V est constante, il existe un seuil V_c au-delà duquel un pont de liquide est créé entre l'électrode et le bain. Extrait de [63]. (c) Dans le cas d'une tension sinusoïdale, des ondes paramétriques sont générées à l'interface lorsque l'amplitude de la tension dépasse un certain seuil. La photographie, extraite de [64], montre ces ondes à l'interface eau-huile de silicone.

modulation accessible est malgré tout limité par des contraintes physiques. Par exemple, il n'est pas possible d'appliquer une accélération constante, et donc de réaliser une interface temporelle en forme de marche comme en figure 1.4a. Les résultats de la figure 1.6b sont en effet associés à deux interfaces temporelles extrêmement proches correspondant à l'accélération puis la décélération brutale du bain. Plus généralement, les accélérations appliquées par un vibreur sont de moyenne temporelle nulle, ce qui contraint fortement les modulations effectivement réalisables. Par ailleurs, la gravité effective sur le bain est homogène spatialement. Il est toujours possible, comme en figure 1.6c, de différencier spatialement certaines zones en modifiant la bathymétrie du bain, mais cela se fait au prix d'une augmentation importante de la dissipation du fait de la faible profondeur.

On propose donc, pour contourner ces contraintes, de manipuler les ondes de surface par une méthode différente basée sur l'électrostriction. Celle-ci, largement inexplorée dans la littérature, ouvre des possibilités extrêmement riches pour le contrôle des ondes et permet de lever les contraintes mentionnées précédemment.

1.8 Electrostriction et ondes de surface

L'action d'un champ électrique sur l'eau (ou d'autres liquides conducteurs) a beaucoup été étudiée dans le cadre des instabilités [63, 65–68]. Un système expérimental typique est schématisé en figure 1.7a. Un champ électrique intense (~ 10 kV/cm) est appliqué à la surface de l'eau grâce à une électrode au potentiel $V = V_0$ placée à une distance d du bain. L'eau conductrice est mise au potentiel $V = 0$ formant ainsi un condensateur plan. Une force d'électrostriction attractive s'applique alors à la surface de l'eau, qui se déforme jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre issue d'un compromis entre la gravité, la capillarité et l'électrostriction comme représenté schématiquement en figure 1.7a.

Lorsque le champ électrique appliqué est constant mais dépasse un certain seuil, l'électrostriction ne peut plus être compensée et un pont de liquide se forme alors entre les deux surfaces. Ce pont, dont une photographie est visible en figure 1.7b, prend la forme particulière d'un mince filament partant d'une base conique [65, 68] appelée cône de Taylor. Selon les régimes, ce pont peut être continu ou intermittent [69], débouchant sur de nombreuses applications pour la création de sprays via l'éjection de fines gouttelettes de liquide ou la formation de fibres de polymère extrêmement fines par électrofilage. Le cas d'un champ électrique oscillant sinusoïdalement a également été considéré, et il a été montré qu'une instabilité paramétrique est déclenchée lorsque l'amplitude du champ dépasse un certain seuil [64, 66]. Nous verrons au chapitre 4 que la ressemblance avec l'instabilité

de Faraday n'est pas que phénoménologique, puisque l'évolution du champ d'onde est régie dans les deux cas par une équation de Mathieu.

Si l'effet de l'électrostriction sur la stabilité d'une interface est donc bien documenté, l'étude de la propagation d'ondes sur une surface soumise à l'électrostriction ne l'est pratiquement pas. Sous les seuils d'instabilité, l'application d'une telle force va pourtant modifier la relation de dispersion (1.5) et apparaître comme un terme de gravité effective dirigé vers le haut, comme nous le verrons dans le prochain chapitre. Si la prédiction théorique de cette modification est bien établie [66], aucune étude expérimentale sur le sujet n'a, à notre connaissance, été menée. Les propriétés d'un tel système sont pourtant prometteuses, puisque les modulations $V(t)$ applicables peuvent être, comme les accélérations, rapides devant les temps caractéristiques des ondes mais ne sont pas, contrairement aux accélérations, contraints à être de moyenne nulle. Nous montrerons ainsi au chapitre 3 qu'une interface temporelle peut être réalisée avec ce système. Par ailleurs, la force d'électrostriction appliquée peut être variée spatialement, par exemple en ne couvrant que certaines parties du bain avec une électrode. Ainsi, un même système peut être utilisé à la fois pour structurer spatialement et temporellement, voire spatio-temporellement, le milieu de propagation. Nous verrons que l'amplitude des variations d'indice relatives $\Delta n/n$ accessibles dans ce système est de l'ordre de 50 – 80 % au maximum, qui sont donc plus faibles que celles générées par l'application d'une accélération. Malgré tout, ces modulations restent bien plus importantes que celles réalisables pour d'autres types d'ondes, et suffisantes pour observer des effets significatifs.

1.9 Plan de la première partie

La première partie de ce manuscrit est ainsi consacrée à l'étude et à la manipulation d'ondes à la surface de l'eau soumise à un champ électrique. La présentation des résultats est organisée de la manière suivante :

- le premier chapitre propose l'étude expérimentale et théorique de l'effet d'une force d'électrostriction constante à la surface de l'eau. On montrera en particulier que l'ajout d'une telle force diminue la vitesse des ondes et permet donc un contrôle réfractif spatial des ondes de surface. Ce chapitre présente également le système expérimental et les méthodes de mesure utilisées.
- le deuxième chapitre s'intéresse au cas d'une onde se propageant dans un milieu homogène spatialement mais où la vitesse des ondes est brusquement variée. On montre alors expérimentalement que le spectre fréquentiel des ondes est modifié. On présentera ensuite un dispositif de conversion de fréquence basé sur la combinaison d'interfaces spatiales et temporelles.
- le troisième chapitre est consacré au cas où la force d'électrostriction varie périodiquement au cours du temps. On montre alors qu'une instabilité paramétrique similaire à l'instabilité de Faraday peut être déclenchée. Celle-ci sera interprétée comme la propagation d'ondes dans un cristal temporel, et la conséquence de l'ajout de désordre dans un tel cristal sera discutée par analogie avec le cas spatial.

1.10 Ondes, pendule pesant et stabilité d'interfaces fluides

Les ondes de surface sont également, en changeant de point de vue, intimement liées à la stabilité de l'interface supportant ces ondes. Pour mettre ce lien en évidence, on peut repartir de l'équation (1.10) qui, en l'absence de modulation temporelle, se met sous la forme

$$\frac{\partial^2 \Psi(t, k)}{\partial t^2} + \omega_0(k)^2 \Psi(t, k) = 0 \quad (1.16)$$

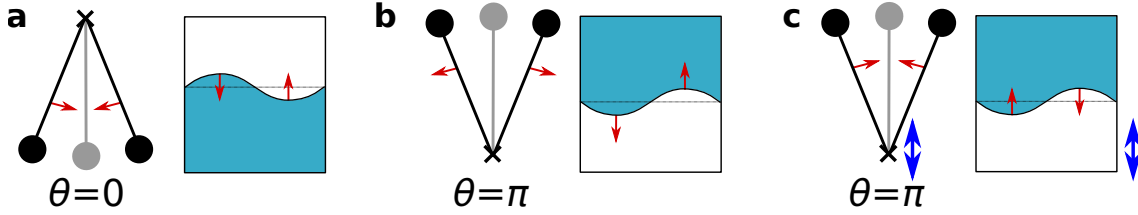


FIG. 1.8: (a) Pendule pesant autour de sa position d'équilibre stable $\theta = 0$ et interface oscillant autour de sa position d'équilibre. (b) Pendule pesant autour de sa position d'équilibre instable $\theta = \pi$ et interface liquide instable du fait de la gravité. (c) Stabilisation dynamique d'un pendule autour de sa position d'équilibre instable et stabilisation dynamique d'un liquide au-dessus d'une couche d'air par application de vibrations haute-fréquence.

où $\omega_0(k)$ est la pulsation propre du mode spatial considéré. Jusqu'à présent, les relations de dispersion considérées imposaient $\omega_0(k)^2 > 0$, ce qui correspondait à ω_0 réel et donc à une oscillation du champ autour de sa valeur moyenne selon $e^{i\omega_0 t}$.

Supposons maintenant que la relation de dispersion soit telle que $\omega_0(k)^2 < 0$. Dans ce cas, la pulsation est imaginaire pure et le champ d'onde croît exponentiellement en temps comme $e^{|\omega_0|t}$. Ce type d'évolution est typique de phénomènes d'instabilité et n'est pas limité à la physique des ondes. Considérons par exemple un pendule pesant de longueur L repéré par sa position angulaire Ψ . Autour de sa position d'équilibre stable $\Psi = 0$, l'équation d'évolution linéarisée est alors bien donnée par (1.16) avec $\omega_0^2 = g/L > 0$, et le pendule oscille autour de sa position d'équilibre. Cette oscillation est formellement similaire à celle d'un champ d'onde lors de sa propagation, comme illustré en figure 1.8a. Au contraire, autour de sa position d'équilibre instable $\Psi = \pi$, l'évolution de la position angulaire est encore donnée par l'équation (1.16), mais la pulsation est cette fois-ci donnée par $\omega_0^2 = -g/L < 0$ et le pendule s'écarte exponentiellement rapidement de sa position d'équilibre.

De la même manière, considérons le cas d'une interface horizontale liquide-air, avec le liquide placé, contrairement à précédemment, au-dessus de l'air comme représenté sur la figure 1.8b. Cette situation est instable et le liquide chute dans l'air du fait de la gravité : c'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor [70–72]. Or, nous montrerons dans le chapitre 5 que l'équation (1.16) décrit l'évolution linéarisée d'une telle interface, et que la chute du liquide est associée à des pulsations $\omega_0^2(k) < 0$ pour des grandes longueurs d'ondes. Le mouvement d'un pendule, la propagation d'ondes et la stabilité d'une interface sont donc formellement liés par l'équation (1.16).

1.11 Milieu temporel effectif et stabilisation dynamique

Nous avons déjà discuté en section 1.4 du rôle d'une modulation temporelle des paramètres physiques sur la propagation d'ondes. La correspondance précédente interroge sur le rôle d'une modulation temporelle sur la stabilité d'une interface, ou même sur le mouvement d'un pendule. Nous avons en fait déjà partiellement discuté de ce problème, puisque l'instabilité de Faraday est un exemple de déstabilisation d'interface par modulation temporelle du milieu. Réciproquement, il a été démontré que l'application d'une vibration verticale, à une fréquence grande devant les fréquences propres du système, peut permettre la stabilisation d'une couche de liquide au-dessus d'une couche d'air [73–75]. Ces expériences ont été inspirées par la stabilisation dynamique d'un pendule inversé, comme illustré en figure 1.8c, du fait de la vibration à haute fréquence de son point d'accroche [76, 77]. Cela illustre une fois encore du lien formel existant entre les deux problèmes.

Nous montrerons au chapitre 5 que cette stabilisation dynamique émerge d'une procédure de

séparation d'échelle et de moyennage sur les variables rapides. Cet effet de moyenne peut être compris comme la contrepartie temporelle de la description effective d'un milieu finement structuré spatialement. Lorsqu'une onde de longueur d'onde λ se propage dans un milieu dont les propriétés varient sur une longueur typique $a \ll \lambda$, il est possible de moyennner les propriétés du milieu sur un volume V tel que $a^3 \ll V \ll \lambda^3$. Il résulte de cette séparation d'échelle un milieu effectif spatialement homogène pour l'onde propagative. La définition de la permittivité diélectrique en électromagnétisme trouve par exemple son origine dans la moyenne des nombreux dipôles induits dans un volume $V \ll \lambda^3$. De la même manière, la présence d'un forçage évoluant à une fréquence élevée devant celle de l'onde permet d'écrire une séparation d'échelle temporelle similaire que l'on détaillera au chapitre 5. On obtient alors une description effective statique en moyennant sur l'oscillation rapide, et la relation de dispersion effective est différente de celle ayant cours en l'absence de modulation. En particulier, le signe de $\omega_0^2(k)$ peut s'inverser, ce qui indique donc la stabilisation des modes associés.

1.12 Plan de la seconde partie

Bien que l'analogie formelle existe, on ne s'intéressera cependant pas expérimentalement à la propagation d'ondes mais plutôt aux phénomènes hydrodynamiques induits tels que les stabilisations et déstabilisations d'interfaces et les phénomènes de flottaison et de transports. Les deux parties de cette thèse sont ainsi pratiquement indépendantes, tant les problématiques et les méthodes expérimentales diffèrent. Les résultats liés aux phénomènes de stabilisation seront présentés de la manière suivante dans la seconde partie :

- le premier chapitre décrira en détail l'instabilité de Rayleigh-Taylor et la procédure pour arriver à cette description en milieu effectif pour des ondes se propageant sur un bain vibré verticalement à haute-fréquence. Nous montrerons alors que des modes instables à la surface du bain peuvent être stabilisés, permettant la mise en lévitation au-dessus de l'air de couches d'une dizaine de centimètres de longueur. Nous discuterons également la stabilisation de flotteurs à l'interface inférieure.
- le second chapitre s'intéresse au cas où la vibration appliquée n'est plus verticale mais dans une direction arbitraire. La stabilité de l'interface obtenue ne sera plus discutée dans le cadre de la théorie des ondes de surface, mais plutôt comme la stabilisation de pendules vibrés de fréquence propre à déterminer. On montrera que des interfaces dans des directions arbitraires peuvent être obtenues et que des objets peuvent encore y être stabilisés.

Le dernier chapitre du manuscrit sera consacré à la conclusion générale de la thèse et à quelques perspectives pour des expériences présentes ou futures sur les thématiques abordées tout au long de ce manuscrit. On trouvera pour finir, en annexe à cette thèse, quelques calculs techniques utilisés au cours des différents chapitres, une présentation dans le cas unidimensionnel de la méthode d'imagerie des ondes de surface et une liste des publications scientifiques liées à cette thèse.

Première partie

CONTRÔLE D'ONDES PAR ÉLECTROSTRICTION

"Vos expériences me donnent
envie d'aller à la piscine."

L. Cazes

2

Propagations d'ondes dans des milieux structurés spatialement

2.1 Introduction

L'objectif de cette première partie est d'étudier les ondes de surface comme un système ondulatoire modèle et d'utiliser l'électrostriction comme méthode de contrôle de ces ondes. On se concentra dans ce premier chapitre sur le contrôle spatial des ondes, c'est à dire que les forçages appliqués seront systématiquement statiques. Le cas d'une modulation dynamique sera quant à lui discuté dans les deux prochains chapitres.

Ce chapitre peut être divisé en trois grandes parties. La première partie est consacrée à une description théorique des ondes de surface, d'abord en eau libre, puis lorsqu'une force d'électrostriction est appliquée. On décrira ensuite le système expérimental associé et les méthodes de mesures utilisées, avant de présenter les résultats obtenus sur le contrôle spatial d'ondes de surface par électrostriction.

2.2 Les ondes de surface

Comme discuté dans le chapitre introductif, l'étude des ondes de surface présente un certain nombre d'avantages au laboratoire. L'objectif de cette section est de rappeler quelques éléments de théorie liés à leur propagation.

2.2.1 Equations constitutives

Pour déterminer les équations de propagation des ondes de surface, on part des équations fondamentales de la mécanique des fluides. On notera z la coordonnée verticale et on se limitera aux systèmes invariants par translation selon la direction horizontale y transverse à la direction de propagation de l'onde. En supposant l'écoulement potentiel et en négligeant les non-linéarités, les équations de la mécanique des fluides prennent alors la forme [48]

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - gz \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=h} = -gh + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{P_s(x, h)}{\rho} \end{cases} \quad (2.1)$$

où Φ est le potentiel des vitesses, P la pression et h le champ de hauteur de l'interface. Le premier jeu d'équations à gauche correspond à l'incompressibilité du fluide et à l'équation d'Euler, tandis que le second jeu à droite est associé aux conditions cinématiques et dynamiques à l'interface. L'équilibre des pressions contient un terme capillaire, qui dépend de la courbure locale, et un terme

supplémentaire $P_s(x, h(x, t))$ modélisant des forces externes éventuellement appliquées à l'interface. A noter que pour écrire ces équations, il a fallu choisir une jauge particulière pour Φ et P , dont les détails sont donnés en annexe A. En présence de parois solides, on ajoute la condition supplémentaire de non pénétration $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ selon la normale au bord. Dans tout ce qui suit, les bords seront supposés infiniment loin et on imposera simplement l'annulation des dérivées à l'infini.

2.2.2 Ondes planes et relation de dispersion en eau libre

On supposera dans un premier temps $P_s = 0$ et on supposera les déformations assez faibles pour approximer le potentiel en $z = h$ et ses dérivées par sa valeur en $z = 0$, qui est la position de l'interface non perturbée¹. Comme dans le cas de l'électromagnétisme, les deux dernières équations liant des dérivées spatiales et temporelles de Φ et h peuvent être combinées pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left(g - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

où $\phi(x) = \Phi(x, z = 0)$. Contrairement au cas discuté dans l'introduction, l'équation de propagation n'est pas celle de d'Alembert, en particulier car l'une des dérivées spatiales est orthogonale à l'interface. Ce couplage entre l'interface et les écoulements dans le fluide constitue l'une des difficultés majeures des ondes de surface, puisque des contraintes appliquées sous la surface influencent l'élévation de la surface, et réciproquement.

Cette équation admet cependant des solutions en ondes propagatives dans la direction x . Considérons un champ de hauteur $h(x, t) = h_0 e^{i(kx - \omega_0 t)}$ se propageant selon x , avec $k > 0$. Le potentiel

$$\Phi(x, z, t) = \frac{\omega_0}{|k|} e^{|k|z} h(x, t) \quad (2.3)$$

est alors solution des équations (2.1), tandis que l'équation (2.2) donne la relation de dispersion gravito-capillaire

$$\omega_0^2 = gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}. \quad (2.4)$$

de laquelle on tire la vitesse de phase

$$v_0 = \frac{\omega_0}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} \quad (2.5)$$

La relation (2.4) distingue deux régimes : pour $k < k_c = \rho g / \gamma$ la dynamique des ondes est dominée par le terme gravitaire, tandis la capillarité est l'effet principal pour $k > k_c$. Cette relation est valable tant que la profondeur de liquide est grande devant la longueur d'onde, ce qui sera toujours le cas dans nos expériences.

2.2.3 Ajout de la dissipation visqueuse

Les calculs précédents ne sont valables que pour un fluide parfait, et en l'absence de tout effet visqueux. En pratique, les inhomogénéités spatiales de vitesse engendrent la dissipation de l'énergie cinétique dans le fluide. Pour une onde de pulsation ω et de vecteur d'onde k , on peut montrer que l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps avec un temps caractéristique τ tel que

$$\frac{1}{\tau} = 2\nu k^2 \quad (2.6)$$

1. Pour le cas particulier d'une onde monochromatique de vecteur d'onde k et d'amplitude A , l'hypothèse de faible déformation s'écrit $kA \ll 1$

où ν est la viscosité dynamique du liquide. Cette formule calculée perturbativement par rapport au cas d'un fluide parfait est valable tant que $\omega\tau \gg 1$, c'est à dire tant que l'onde oscille un grand nombre de fois avant d'être dissipée. Cette dissipation augmente fortement avec le nombre d'onde k du fait de l'augmentation des gradients de vitesse lorsque la longueur d'onde diminue. Pour des longueurs d'ondes $\lambda \sim 1$ cm, soit une fréquence $f \sim 20$ Hz, on trouve $\tau \sim 1$ s. Ceci correspond à des longueurs typiques de quelques dizaines de centimètres avant atténuation, en accord qualitatif avec les observations expérimentales.

En pratique, la valeur effective de τ ne dépend pas uniquement de la viscosité du fluide, mais également, entre autre, de la présence de surfactants ou de polluants à l'interface. De très nombreux modèles ont donc été proposés pour prédire le taux d'atténuation des ondes pour prendre en compte les autres sources de dissipation [78]. Une telle étude sors du cadre de cette thèse, et l'on supposera donc que la loi d'échelle précédente reste valide, de sorte que l'on écrira $1/\tau = 2\nu_{eff}k^2$ où ν_{eff} est un coefficient effectif qui rend compte de l'ensemble des sources de dissipation. Une mesure de ce coefficient est réalisée au chapitre 4, et l'on trouve $\nu_{eff} \approx 3.5 \times 10^{-6}$ m²/s qui est une valeur plus élevée mais du même ordre de grandeur que la valeur théorique $\nu = 10^{-6}$ m²/s.

2.3 Influence d'un champ électrique sur la propagation d'ondes

On décrit maintenant le rôle de l'électrostriction sur la propagation des ondes. Comme discuté en introduction, on se placera toujours suffisamment loin des seuils d'instabilité pour l'apparition de cône de Taylor, et on se limitera donc au calcul des perturbations linéaires par rapport au cas de l'eau libre. On montre dans ce cadre que l'électrostriction a deux effets bien distincts, puisqu'elle modifie à la fois le profil statique de l'interface et la vitesse des ondes, décrites ici comme des perturbations linéaires de ce profil statique.

2.3.1 Cas statique

On s'intéresse dans un premier temps à la forme statique $h_s(x, y)$ prise par l'interface lorsqu'aucune onde n'est excitée. L'équation vérifiée par h_s est donnée par l'équilibre des pressions à l'interface qui s'écrit

$$-gh_s + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h_s}{\partial x^2} + \frac{P_s(x, h_s)}{\rho} = 0 \quad (2.7)$$

Il est possible de déterminer la force d'électrostriction P_s loin des bords de l'électrode. Dans ce cadre, le forçage est homogène spatialement et l'interface est horizontale. On notera d la distance entre l'électrode et la surface de l'eau en l'absence de forçage électrique, qui devient $d - h_s$ en présence de ce dernier. En supposant l'eau parfaitement conductrice, le système est formellement équivalent à un condensateur plan. La densité de charge surfacique σ et la norme du champ électrique à l'interface sont alors liées par le théorème de Coulomb $\sigma = \epsilon_0 E$. Le champ électrique entre l'électrode et la surface de l'eau est constant et vaut $E = \frac{V_0}{d - h_s}$ loin des bords. Les charges surfaciques sont sensibles à ce champ électrique et il en résulte une force d'électrostriction par unité de surface qui s'exprime

$$P_s = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{\epsilon_0 V^2}{2(d - h_s)^2} \quad (2.8)$$

de sorte que l'équilibre des pressions s'écrit désormais

$$h_s = \frac{\epsilon_0 V^2}{2\rho g(d - h_s)^2} \quad (2.9)$$

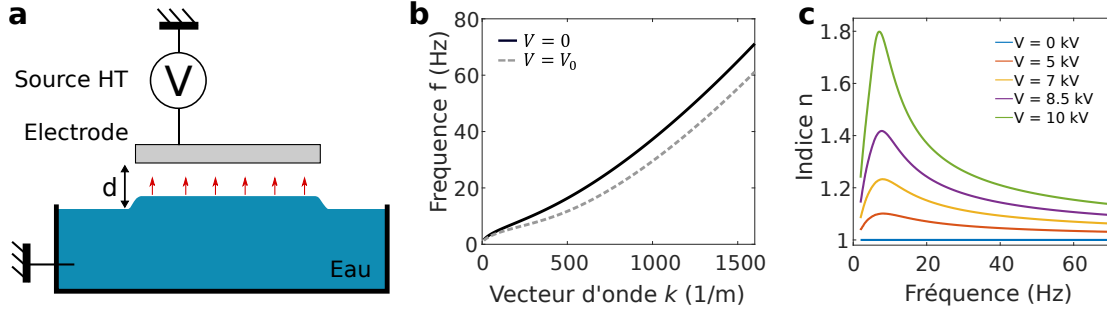


FIG. 2.1: (a) Schéma du système expérimental : une électrode est placée à une distance d de la surface de l'eau et une différence de potentiel importante est appliquée. L'eau étant conductrice, une force d'électrostriction s'applique sous l'électrode et modifie la forme de l'interface. (b) En-dessous de tout seuil d'instabilité, la relation de dispersion des ondes sous l'électrode est modifiée du fait du forçage électrostatique (ici $V_0 = 10$ kV, $\gamma = 40$ mJ/m², $d = 6$ mm). (c) Pour ces mêmes paramètres et une tension variable, l'indice $n(f)$, défini comme le ratio des vitesses d'une onde à une fréquence f sous l'électrode et en eau libre, augmente avec la tension appliquée et est piqué aux alentours de $f = 9$ Hz.

Des valeurs expérimentales typiques sont $V \sim 10$ kV et $d \sim 8$ mm et donnent une différence de hauteur $h_s \sim 1$ mm entre la zone sous l'électrode et l'eau libre, ce qui correspond qualitativement à nos observations.

La prédiction du profil de raccordement au niveau de la frontière de l'électrode est nettement plus délicate. Elle demanderait de connaître le champ électrique sur le bord d'un condensateur qui n'admet pas d'expression simple, d'autant plus que la surface de l'eau n'est pas horizontale sur cette zone. La transition sera typiquement de largeur d , qui est en plus du même ordre de grandeur que la longueur capillaire. Fort heureusement, la connaissance analytique de ce profil n'est pas nécessaire pour l'étude des ondes propagatives, mais empêchera par exemple la prédiction quantitative du comportement des ondes sur le bord de l'électrode.

2.3.2 Cas d'ondes propagatives sous une électrode

On s'intéresse maintenant au cas d'une onde de la forme $h(x, t) = h_0 e^{i(kx - \omega t)}$ se propageant sous une électrode. Les effets de bords seront ici négligés, l'interface initiale est donc horizontale, et on supposera que les déformations sont faibles devant la distance surface-électrode. On prendra l'origine de l'axe z à l'interface et on notera encore d la distance surface-électrode. La présence de la perturbation modifie le potentiel électrique entre ces deux derniers et donc la force d'électrostriction à la surface. On montre en annexe A que la force d'électrostriction doit être corrigée au premier ordre en h_0/d comme

$$P_s = \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2d^2} + \frac{\epsilon_0 V_0^2 k}{\rho d^2 \tanh(kd)} h(x, t) \quad (2.10)$$

Le premier terme a déjà été discuté et modifie le profil statique de hauteur, il sera donc omis dans la suite. Le second terme modifie l'équilibre dynamique de l'interface dans (2.1) qui s'écrit désormais

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \left(-g + \frac{\epsilon_0 V_0^2 k}{\rho d^2 \tanh(kd)} \right) h + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

L'électrostriction apparaît donc comme une gravité effective dirigée vers le haut et dépendante de k dans le bilan de pression. L'équation (2.2) devient alors

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left(g - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\epsilon_0 V_0^2 k}{\rho d^2 \tanh(kd)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

Le potentiel des vitesses (2.3) est encore solution des équations (2.1) mais la relation de dispersion s'écrit désormais

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} - \frac{\epsilon_0 V_0^2 k^2}{\rho d^2 \tanh(kd)} \\ &= \omega_0(k)^2 (1 - \alpha(k) V_0^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $\omega_0(k)$ est donné par (2.4) et $\alpha(k)$ est donné par

$$\alpha(k) = \frac{\epsilon_0 k^2}{\rho \omega_0^2(k) d^2 \tanh(kd)} \quad (2.14)$$

La vitesse de phase des ondes sous l'électrode est alors donnée par

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} - \frac{\epsilon_0 V_0^2}{\rho d^2 \tanh(kd)}} \quad (2.15)$$

Par rapport au cas de l'eau libre, l'électrostriction ajoute un régime intermédiaire entre les régimes gravitaires et capillaires. Les relations de dispersion (2.4) en eau libre et (2.13) en présence d'électrostriction sont tracées figure 2.1b, pour des valeurs typiques $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 40 \text{ mJ/m}^2$, $V_0 = 8 \text{ kV}$ et $d = 6 \text{ mm}$. En présence d'un potentiel électrique, la dispersion des ondes est donc modifiée tandis que leur vitesse de phase est diminuée.

La force d'électrostriction apparaît avec un signe négatif dans la relation de dispersion et a donc un effet déstabilisant sur l'interface lorsque $\alpha(k) V_0^2 > 1$. On restera donc sous cette limite ce qui impose une première borne supérieure au champ électrique effectivement applicable. Une seconde limite est donnée par le champ disruptif de l'air au-delà duquel ce dernier devient conducteur. Cet effet se manifeste expérimentalement par un bruit de claquage caractéristique dont le seuil d'apparition dépend des conditions exactes (présence de points anguleux sur l'électrode ou humidité de l'air par exemple). En pratique, on parvient à obtenir des valeurs typiques $\alpha(k) V_0^2 \sim 0.3 - 0.5$ au maximum.

Le bord d'une électrode joue donc pour les ondes de surface le rôle d'interface entre deux milieux - la surface libre et la surface soumise à l'électrostriction - dans lesquels les ondes se propagent à une vitesse différente. Pour une onde de pulsation ω donnée, les relations de dispersion des deux milieux (2.4) et (2.13) fixent les vecteurs d'onde associés $k_1(\omega)$ en eau libre ($V = 0$) et $k_2(\omega)$ en présence d'électrostriction. On définit alors l'indice de réfraction comme

$$n(\omega) = \frac{k_2(\omega)}{k_1(\omega)} = \frac{v_0(\omega)}{v_\phi(\omega)} \quad (2.16)$$

où $v_0(\omega)$ et $v_\phi(\omega)$ sont déterminées par les relations (2.5) et (2.15) respectivement. L'indice dépend du potentiel V , via la définition du vecteur d'onde k_2 , et sera donc unitaire lorsque $V = 0$ tandis que l'on aura $n > 1$ pour V non nul. L'indice n est tracé en fonction de la fréquence sur la figure 2.1c pour différentes valeurs de tension V pour $d = 6 \text{ mm}$. Il est d'autant plus piqué que la tension augmente, et il prend sa valeur maximale pour des fréquences autour de 9 Hz, c'est-à-dire comme attendu entre les régimes gravitaires et capillaires.

2.3.3 Comportement à l'interface et discussion

Pour compléter l'étude du problème, il est nécessaire de décrire le comportement d'une onde incidente à la frontière entre les milieux. Ce problème est extrêmement complexe à traiter et demanderait de connaître la force d'électrostriction et la forme de l'interface. Il serait ensuite nécessaire de trouver un potentiel des vitesses associé à ces contraintes pour espérer déterminer les coefficients de réflexion et de transmission. Plus généralement, l'étude du comportement des ondes de surface dans des milieux inhomogènes est un problème difficile, même dans des cas simples en apparence, comme la transmission et la réflexion d'une onde sur une marche de profondeur [79, 80]. Cela distingue les ondes de surface d'autres types d'ondes, pour lesquels le calcul des coefficients de transmission et de réflexion sur une interface en forme de marche est nettement plus simple. Cela tient au fait que les coefficients de réflexion et de transmission correspondent un problème de raccordement aux bords, qui dépendent donc des particularités de la situation physique considérée.

En revanche, il est toujours possible de connaître la direction prise loin de l'interfaces par les faisceaux réfléchis et transmis. En effet, les lois de la réfraction sont valables indépendamment du profil exact de l'interface, ou même des détails physiques du système, puisque ce sont des lois de conservation extrêmement générales associées à l'invariance du système par certaines transformations. Plus précisément, notons θ_i l'angle du faisceau incident, θ_r l'angle du faisceau réfléchi et θ_t l'angle du faisceau transmis par rapport à la normale d'une interface plane entre deux milieux d'indice n_1 et n_2 . Dans chaque milieu, la norme k_i du vecteur d'onde dans le milieu i est liée à la pulsation par $\omega = c_i k_i$. La conservation de la pulsation à l'interface, due à l'invariance du milieu par translation temporelle, impose donc

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.17)$$

D'autre part, les propriétés du milieu sont également invariantes par translation dans la direction parallèle à l'interface. La composante transverse du vecteur d'onde doit donc être conservée, ce qui impose

$$k_2 \sin(\theta_t) = k_1 \sin(\theta_i) \quad (2.18)$$

pour l'onde transmise. La combinaison des deux invariants donne alors la loi de Snell-Descartes en transmission $n_2 \sin(\theta_t) = n_1 \sin(\theta_i)$. La détermination de l'angle de réflexion relève du même argument de conservation. Ces lois sont donc valables pour n'importe quel type d'onde se propageant dans un milieu statique et invariant dans la direction parallèle à l'interface.

L'absence d'expression pour le profil d'interface pour les ondes de surface ne constitue donc pas une obstruction au contrôle réfractif de ces dernières. On présente maintenant le système expérimental permettant la vérification expérimentale d'un tel contrôle.

2.4 Présentation du système expérimental pour le contrôle d'ondes par électrostriction

2.4.1 Présentation générale

Pour confirmer expérimentalement la possibilité de contrôler des ondes de surface par électrostriction, le montage expérimental représenté figure 2.2a a été réalisé. Un vibreur alimenté par un générateur de tension sinusoïdale excite des ondes à la fréquence f à la surface du bain. Une électrode transparente constituée d'une plaque de verre de dimension $30 \times 30 \text{ cm}^2$ recouverte d'un film de FTO conducteur est maintenue horizontale à une distance d au-dessus du bain. La résistance entre deux points quelconques de l'électrode est toujours mesurée inférieure à 100Ω de sorte que le potentiel appliqué à l'électrode peut être considéré comme homogène sur toute la surface de l'électrode. Celle-ci est reliée à une source de haute tension continue (Spellman MPS15P10/24) délivrant des

tensions comprises entre 0 et 15 kV. Selon les cas, on ajoute parfois avant les expériences un peu de liquide vaisselle à la surface du bain. Cela permet de faire baisser la tension superficielle autour de $\gamma \approx 40 \text{ mJ/m}^2$ et *in fine* d'augmenter la différence d'indice entre les deux zones. C'est cette dernière plus que la valeur exacte de la tension superficielle qui sera importante et donc mesurée dans nos expériences.

La différence d'indice dépend également du potentiel V_0 appliqué et de la distance d entre le bain et l'électrode. Cette distance est fixée et mesurée au début de l'expérience, de sorte que la différence d'indice ne dépende plus que du potentiel électrique choisi. Entre deux séries d'expériences, cette distance peut être amenée à varier de quelques millimètres au maximum du fait de l'évaporation ou d'un changement d'électrode. Ces variations sont compensées par un ajustement des tensions appliquées d'une expérience à l'autre afin obtenir des différences d'indices comparables.

2.4.2 Alignement horizontal de l'électrode

La formule (2.13) indique que les propriétés des ondes dépendent de la tension V_0 mais également de la distance d entre l'électrode et la surface. Pour obtenir un forçage homogène, il est donc crucial que l'électrode soit parfaitement parallèle à l'interface. On utilise pour cela une technique d'alignement laser dont le fonctionnement est résumé figure 2.2b. Un laser collimaté envoyé en direction de l'expérience est partiellement réfléchi par l'électrode et le liquide. Ces faisceaux réfléchis sont alors focalisés via une lentille de focale f sur un écran et forment, dans le plan focal de la lentille, deux points espacés d'une longueur Δ . Cette distance est liée à l'angle α entre l'électrode et l'interface via la formule

$$\alpha = \frac{\Delta}{2f}. \quad (2.19)$$

Cette formule est valable sous les hypothèses de l'optique géométrique qui sont toujours vérifiées dans nos configurations expérimentales. On peut ainsi aligner l'électrode en modifiant son inclinaison pour rapprocher les tâches focales, qui coïncident sur l'écran pour un angle α nul. Les principaux avantages de cette méthode sont sa simplicité et sa rapidité, puisque l'alignement de l'électrode est réalisé en moins d'une minute. En particulier, l'écart Δ ne dépend pas, dans la limite des petits angles, de la direction d'incidence du laser. En pratique, les faisceaux ont une extension spatiale sur l'écran due aux imperfections de focalisation ainsi qu'à la diffraction. Néanmoins, un écart de $\Delta \sim 1 \text{ mm}$ est facilement visible expérimentalement ce qui permet d'assurer $\alpha < 0.1^\circ$ pour une focale de $f = 10 \text{ cm}$. Cette précision s'est avérée suffisante pour nos expériences et aucune inhomogénéité spatiale d'indice n'a été mesurée sous l'électrode.

2.4.3 Mesure des ondes par FCD

L'amplitude de la déformation de la surface est mesurée par méthode optique dite *FCD* pour *Fast Checkerboard Demodulation* développée il y a quelques années au laboratoire [81]. Il s'agit d'une variante des techniques de Schlieren utilisées classiquement pour mesurer des petites déformations sur une interface [82]. Celle-ci est basée sur l'observation d'un motif en damier périodique placé sous la surface comme illustré figure 2.2c. Lorsque l'interface est immobile et horizontale, l'image du motif observé par dessus la surface est parfaitement périodique. Au contraire, lorsque l'interface est perturbée, l'image du motif est distordue par réfraction optique. Un algorithme de démodulation basé sur la transformée de Fourier permet alors de retrouver le champ de hauteur associé à la distorsion. Cette méthode est similaire à la modulation de fréquence utilisée en radio FM, la porteuse étant le motif en damier et le signal la pente du champ de hauteur. Une description quantitative dans

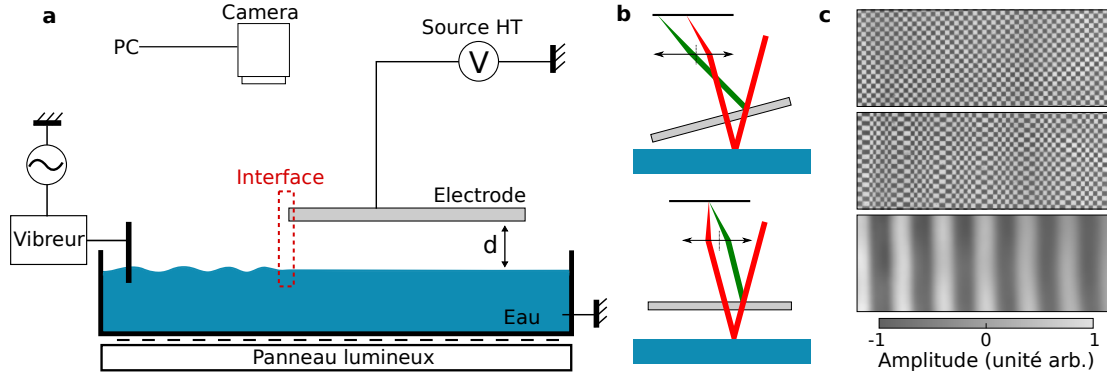


FIG. 2.2: (a) Schéma du système expérimental : un vibreur alimenté par une tension sinusoïdale à la fréquence f génère des ondes de surface. Une partie du bain est couverte par une électrode transparente reliée à une source de haute tension. L'amplitude des ondes est mesurée à l'aide d'une caméra placée au dessus du bain qui enregistre la déformation d'un motif périodique placé sous la surface. (b) Le réglage horizontal de l'électrode est assuré par un alignement laser : un faisceau incident (à droite) se réfléchit sur l'électrode et la surface de l'eau. L'image des faisceaux par une lentille convergente se superpose uniquement lorsque les deux interfaces sont parallèles. (c) Exemple de mesure des ondes sur le bain. En comparant l'image d'un motif périodique lorsque l'interface est immobile (en haut) et l'image du même motif distordu par le passage des ondes (au centre), un algorithme de démodulation permet de remonter au champ de déformation de la surface (en bas).

le cas unidimensionnel peut être trouvée en annexe B et des critères précis sur les conditions de fonctionnement peuvent être trouvés dans [81].

La démodulation fonctionne pourvu que l'amplitude des déformations ne soit pas trop importante et que le critère de Nyquist soit respecté afin d'éviter des repliement de spectre. Ces contraintes seront vérifiées lors de l'acquisition en s'assurant visuellement que les carreaux ne soient pas trop déformés (pour le critère d'amplitude) et qu'une longueur d'onde occupe typiquement au minimum quelques carreaux (pour le critère de Nyquist). Mentionnons également que la déformation du motif est proportionnelle à la distance entre ce dernier et la surface [82]. En ajustant cette distance et la taille des carreaux, il a donc toujours été possible dans nos expériences de respecter ces critères et d'obtenir des images résolues des champs de hauteur. Lorsque ces paramètres sont bien ajustés, le champ de hauteur est mesuré avec une incertitude de l'ordre 10μ pour des amplitudes de l'ordre de quelques centaines de micromètres à quelques millimètres.

Cette méthode présente de nombreux avantages pratiques. Tout d'abord, elle nécessite très peu de matériel (une caméra et une imprimante) et ne demande aucun alignement précis, un réglage approximatif de l'axe de la caméra avec la normale à l'interface étant suffisant. Le champ imagé est extrêmement large (de l'ordre de $50 \times 50 \text{ cm}^2$ soit quelques dizaines de longueurs d'ondes) et le traitement des images est extrêmement rapide puisque basé sur des transformées de Fourier. Les longueurs d'ondes et les amplitudes présentes sur le bain étant connues et contrôlées, il est possible d'adapter à chaque cas les conditions de prise de vue pour obtenir la meilleure résolution possible. La résolution temporelle est également assurée, puisque les caméras utilisées (Basler) peuvent acquérir jusqu'à 200 images/seconde en plein champ, tandis que les ondes excitées durant nos expériences oscillent typiquement à quelques dizaines de Hertz. On dispose ainsi d'un suivi dynamique, quantitatif et bien résolu spatio-temporellement de la propagation des ondes de surface.

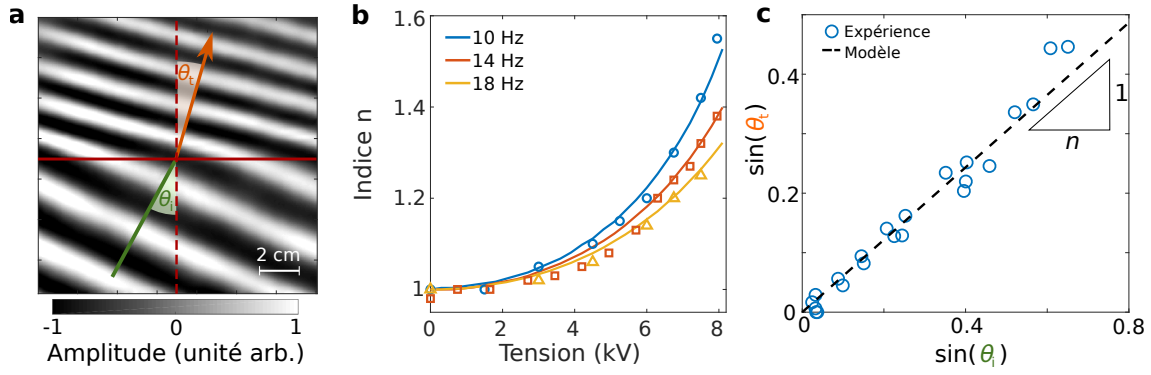


FIG. 2.3: (a) Mesure expérimentale d'une onde de longueur d'onde λ_i et de fréquence $f = 9$ Hz arrivant par le bas avec un angle θ_i par rapport au bord de l'électrode (ligne rouge pleine). Lors du passage de l'interface, la longueur d'onde est modifiée et l'onde est réfractée. (b) Le ratio des longueurs d'ondes dans les deux milieux donne accès à l'indice sous l'électrode. Des mesures à différents potentiels et différentes fréquences $f = 10$ Hz (cercles bleus), 14 Hz (carrés rouges) et 18 Hz (triangles jaunes) sont comparées aux prédictions théoriques (traits pleins avec $d = 5.7$ mm ajusté aux données). (c) Pour un indice et une fréquence fixés, l'angle de transmission est mesuré pour différents angles incidents. La mesure expérimentale (cercles bleus) est comparée à la loi de Descartes (pointillé noir).

2.5 Réfraction d'ondes à l'interface

On démontre maintenant expérimentalement la possibilité d'utiliser l'électrostriction pour réfracter les ondes de surface, avant d'implémenter des dispositifs de contrôle plus complexes. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Valentin Mouet lors de son stage au laboratoire.

2.5.1 Mesure de l'indice sous l'électrode

On s'intéresse dans un premier temps à la réfraction d'un faisceau incident à l'interface. Une onde plane propagative, de fréquence $f = 9$ Hz, est envoyée avec un angle d'incidence θ_i par rapport à la normale au bord de l'électrode, comme le montre la figure 2.3a. On observe alors que l'onde transmise sous l'électrode change de longueur d'onde et de direction. L'indice sous l'électrode peut alors être mesuré par l'équation (2.17) en prenant le ratio des longueurs d'ondes initiale et transmise. On trouve ainsi, dans le cas de la figure 2.3a, une valeur d'indice $n \approx 1.6$. Une mesure temporelle, non montrée ici, confirme par ailleurs la conservation de la fréquence à l'interface.

D'après ce qui précède, l'indice dépend, pour une distance bain-électrode fixée, du potentiel appliqué et de la fréquence de l'onde. La figure 2.3b montre la dépendance de l'indice vis à vis de ces deux paramètres et la prédiction théorique associée. L'accord est extrêmement bon puisque la différence relative entre les deux n'excède pas quelques pourcents sur toute la gamme de paramètres testés. L'indice maximum de $n = 1.5$ est atteint pour la fréquence $f = 10$ Hz, en accord avec les résultats de la figure 2.1c. En optimisant précisément la fréquence des ondes et en diminuant au maximum la tension superficielle par ajout de produit vaisselle juste avant les expériences, des indices $n \approx 1.8$ plus importants ont pu être obtenus.

2.5.2 Vérification des lois de Snell-Descartes

On souhaite maintenant vérifier la validité des lois de la réfraction dans notre système. La fréquence de l'onde initiale est fixée à $f = 9$ Hz, et le potentiel électrostatique est gardé constant tout au long

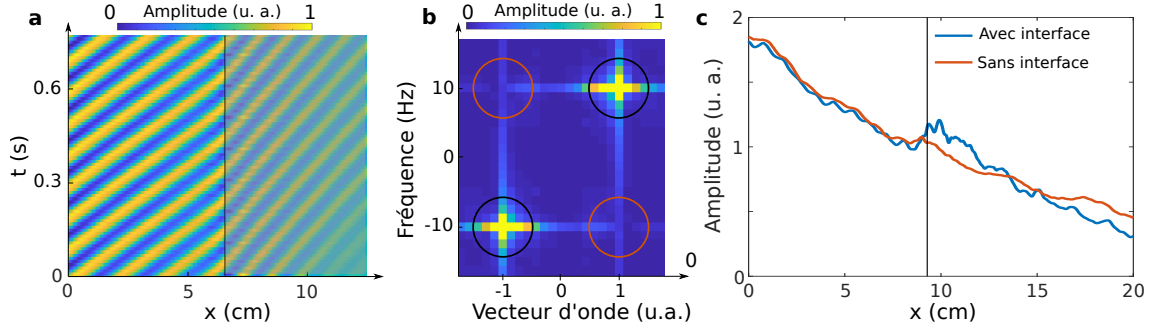


FIG. 2.4: (a) Diagramme spatio-temporel expérimental d'une onde en incidence normale sur le bord d'une électrode (matérialisé par la ligne pointillée). (b) Transformée de Fourier spatiale de la partie gauche du diagramme mettant en évidence l'onde incidente (cercles noirs) et l'absence d'onde réfléchie significative (cercles oranges). (c) Comparaison de l'amplitude des ondes lorsque l'électrode est au potentiel V (courbe bleue) et au potentiel $V = 0$ (courbe rouge) correspondant à l'absence d'interface. Aucune différence d'amplitude avant l'interface n'est perceptible.

de l'expérience. La mesure de l'indice par la méthode précédente donne alors $n \approx 1.6$. L'angle d'incidence de l'onde plane sur le bord de l'électrode est alors varié expérimentalement de 0 à 45° par une rotation progressive de la source d'ondes. L'angle de réfraction θ_t doit alors obéir à la loi de Descartes

$$n \sin \theta_t = \sin \theta_i. \quad (2.20)$$

Cette dépendance linéaire entre les deux sinus est confirmée par les mesures expérimentales reportées en figure 2.3c, et l'ajustement linéaire donne $n = 1.59$, en accord avec la valeur mesurée par ratio des longueurs d'ondes. Cette concordance sur toute la plage d'angles testée démontre la possibilité de réfracter des ondes de surface avec des champs électriques.

2.5.3 Coefficient de réflexion à l'interface

Le champ mesuré en figure 2.3a suggère par ailleurs que la réflexion à l'interface est très faible, puisqu'aucune onde contra-propagative n'est visible. Pour confirmer cette observation, une onde de fréquence $f = 10$ Hz est envoyée en incidence normale sur l'interface. L'indice mesuré par ratio des longueurs d'onde vaut alors $n \approx 1.5$. Le diagramme spatio-temporel obtenu, en moyennant sur la direction orthogonale à l'interface, est présenté en figure 2.4a. Comme dans les expériences précédentes, aucune onde réfléchie n'est visible. L'absence d'onde réfléchie peut être quantifiée par l'étude de la transformée de Fourier spatio-temporelle des ondes avant l'interface, tracée en figure 2.4b. Du fait de l'amortissement visqueux des ondes réfléchies, il est nécessaire d'effectuer l'analyse sur une zone restreinte en espace, ce qui diminue la résolution spatiale. Le pic associé à l'onde incidente est clairement visible, mais aucun signal significatif associé à une onde réfléchie n'est mesuré. D'autres ondes à des fréquences supérieures (non montrées ici) et d'amplitude typiquement cent fois inférieures ont été détectées sur cette même transformée de Fourier. On peut donc estimer que le coefficient de réflexion à l'interface n'excède pas quelques pourcents au maximum.

Cela est également confirmé par la comparaison directe en figure 2.4c de l'amplitude des ondes lorsque l'électrode est éteinte. Aucune différence significative n'est observée sur l'amplitude avant l'interface, ce qui confirme l'absence d'onde réfléchie. On peut comparer ce résultat aux formules de Fresnel, qui prédisent un coefficient de réflexion en incidence normale $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \approx 0.2$, soit une valeur bien supérieure à celle mesurée expérimentalement. Le comportement des ondes à l'interface n'est donc pas bien rendu par ces coefficients, qui sont calculés en électromagnétisme pour le passage

d'une interface d'extension spatiale nulle entre deux diélectriques (voir le chapitre 3). La figure 2.4c montre également que la transmission est quasi-unitaire, ce qui confirme que l'interface réalise une adaptation d'impédance entre les deux milieux. Nous ne disposons pas à ce stade d'une explication théorique de cette observation, mais nous supposons que l'extension spatiale de l'interface, du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, joue un rôle important.

2.6 Réflexion totale et champ évanescent

On s'intéresse maintenant au cas d'une interface entre un milieu d'indice élevé vers un milieu d'indice plus faible, obtenue lorsque les ondes sortent de sous une électrode. Lorsque l'onde arrive au bord de l'électrode, on attend à nouveau une onde transmise et une onde réfléchie. En incidence normale, des mesures similaires à celles présentées en figure 2.4 montrent une fois encore l'absence d'onde réfléchie mesurable. Une telle onde apparaît néanmoins dans le cas d'une onde avec un angle d'incidence de $\theta_i \approx 45^\circ$ comme en figure 2.5a. Lorsque la différence d'indice entre les deux milieux est trop importante, l'onde propagative sous l'électrode est même totalement réfléchie. Cela correspond au cas où les loi de Snell-Descartes n'admettent plus de solution pour le faisceau transmis, ce qui survient lorsque $n > 1/\sin\theta_i = 1.41$. Il y a alors réflexion totale interne sous l'électrode et aucun champ propagatif n'est transmis.

Pour étudier la transition vers ce régime, l'amplitude des ondes sur le bain est mesurée pour différentes valeurs d'indices obtenues en variant la tension V appliquée à l'électrode. Contrairement au cas de l'incidence normale, une onde réfléchie est mesurée expérimentalement et interfère avec l'onde incidente, comme le montre la figure 2.5a. Le coefficient de réflexion en amplitude r associé peut être déduit en mesurant le contraste associé à la figure d'interférence obtenue. Les résultats sont présentés en figure 2.5b et montrent que l'amplitude de l'onde réfléchie augmente et finit par saturer pour $n > n_c \approx 1.4$, en accord avec la loi de Descartes. Le coefficient de réflexion sature à $r \approx 0.8$ plutôt qu'à $r = 1$, ce qui suggère l'existence de phénomènes dissipatifs proche des bords de l'électrode. Étonnamment, la formule de Fresnel en incidence oblique pour une polarisation transverse électrique, qui prédit

$$r = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (2.21)$$

pour $n < n_c$ et $r = 1$ pour $n > n_c$, fournit cette fois-ci une prédiction extrêmement proche des valeurs mesurées expérimentalement, comme le montre la figure 2.5b. Les raisons de cet accord ne sont pas encore comprises à ce stade et demanderaient une étude expérimentale et théorique plus complète.

Lors d'une réflexion totale interne, le vecteur d'onde de l'onde transmise est imaginaire pur. Ce dernier est donc évanescent et s'amortit exponentiellement avec la distance à l'interface. La taille caractéristique δ de l'exponentielle est donnée par

$$k_0 \delta = \frac{1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} \quad (2.22)$$

où θ est l'angle d'incidence du faisceau et k_0 le vecteur d'onde associé à la fréquence de l'onde en eau libre. Cette formule indique que $\delta \sim \lambda$ et le champ évanescent peut donc facilement être observé pour les ondes de surface. La variation de θ à n constant puis de n à θ constant a permis de vérifier expérimentalement la validité de la formule (2.22) dans le cas des ondes de surface. Les résultats figure 2.5c montrent que toutes les données se rassemblent le long de la courbe prédite.

Ce champ évanescent peut être récupéré en plaçant une seconde électrode triangulaire en regard de la première à une distance de l'ordre de δ . Le champ exponentiel encore présent redevient alors propagatif, et la réflexion totale est alors "frustrée". Ceci nous a permis de réaliser un diviseur de

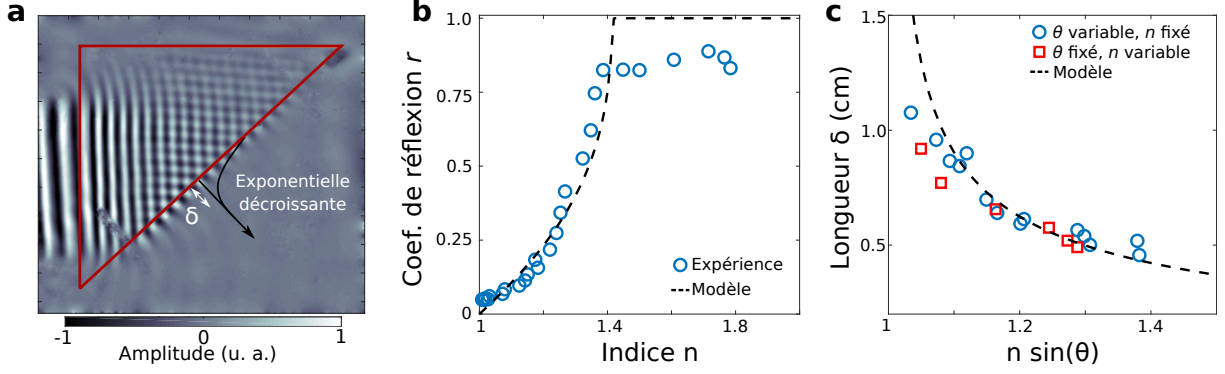


FIG. 2.5: (a) Coefficient de réflexion en amplitude r mesuré lors de la sortie d'une onde de sous l'électrode en incidence de 45° et comparaison avec les formules de Fresnel (tirets noirs). Pour $n > n_c \approx 1.4$, il y a réflexion totale de l'onde à l'interface. (b) Image expérimentale de réflexion totale. Le champ évanescents décroît exponentiellement avec la distance à l'interface avec une distance typique δ de l'ordre du centimètre. (c) Mesure de δ pour un angle d'incidence fixe et n variable (cercles bleus) et pour un angle d'incidence variable et n fixé (carrés rouges). Tous les points se rassemblent sur la courbe prédite par la théorie (pointillés noirs).

faisceau pour les ondes de surface, avec des coefficients de réflexion et de transmission contrôlés par la distance entre les deux électrodes. Ces résultats, non présentés ici par soucis de concision, font l'objet d'une publication en cours de préparation.

2.7 Focalisation d'ondes planes par une lentille

Le contrôle d'onde réfractif est possible pourvu que l'on soit capable de modifier la forme des zones d'indice n . Dans le cas présent, il suffit donc de découper les électrodes selon la forme souhaitée. Lorsque celle-ci est en forme de lentille plane-convexe, il est par exemple possible de focaliser un faisceau incident d'ondes planes à une distance f' qui dépend de l'indice n sous l'électrode. Dans la limite des lentilles minces, ces deux quantités sont reliées par la formule

$$f' = \frac{R}{n - 1} \quad (2.23)$$

où R est le rayon de courbure de la partie convexe de la lentille. Cette formule peut être testée en mesurant la distance focale pour différents indices obtenus en variant le potentiel V . La distance focale est mesurée expérimentalement comme la distance entre l'extrémité convexe de la lentille sur l'axe optique et le lieu où la courbure des fronts d'onde s'inverse, comme illustré sur la figure 2.6b. L'incertitude sur cette mesure est estimée à une longueur d'onde et est reportée dans les résultats présentés figure 2.6b. Ceux-ci montrent un bon accord avec la formule (2.23) malgré une sous estimation systématique de quelques centimètres. Ce désaccord peut être entièrement résorbé en prenant en compte l'épaisseur non nulle de la lentille, qui déplace légèrement le point initial de mesure pour f' à l'intérieur de la lentille. Les détails sont développés dans un article en cours de préparation. Par soucis de simplicité, on restera ici pour toute la suite dans le cadre des lentilles minces.

On peut poursuivre l'analogie avec l'optique en mesurant le profil transverse du faisceau au point focal. L'optique ondulatoire prédit, dans l'approximation des lentilles minces, que le profil d'amplitude $A_f(y)$ dans le plan focal est lié au profil incident $A_i(y)$ par une transformée de Fourier.

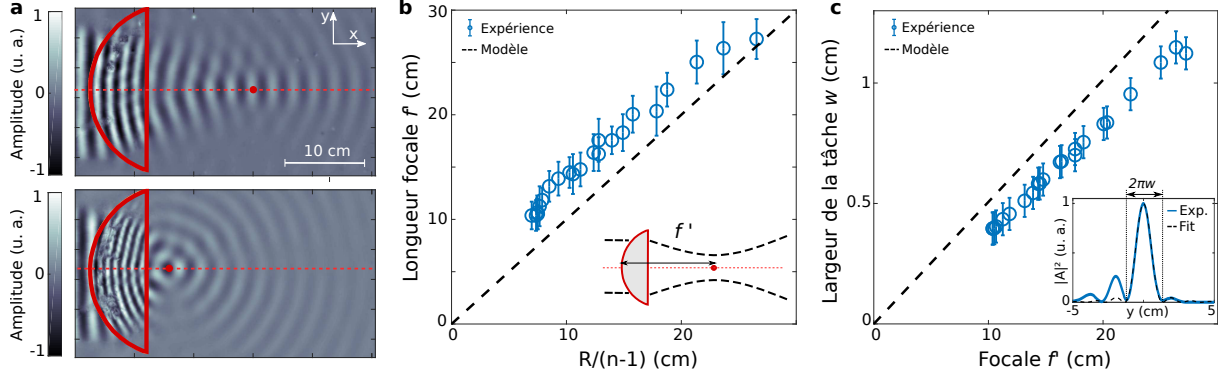


FIG. 2.6: (a) Exemple de focalisation d'ondes planes par une électrode en forme de lentille convexe pour deux indices différents $n = 1.6$ et $n = 2.3$. (b) Mesure de la distance focale f' en fonction de l'indice mesuré sous l'électrode. La prédiction de l'optique géométrique $f' = R/(n - 1)$ est tracée en pointillés. (c) Mesure de la largeur de la tâche de diffraction au point focal en fonction de l'indice n (cercles bleus) comparée à la prédiction de l'optique de Fourier (pointillés).

Pour un profil incident en forme de porte de largeur totale L , on attend donc en particulier

$$A_f(y)^2 \propto \left| \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} u y} du \right|^2 \propto \text{sinc} \left(\frac{\pi L}{\lambda f'} y \right)^2 \quad (2.24)$$

et la largeur de la tâche focale w est donc donnée par

$$w = \frac{\lambda f'}{\pi L} \quad (2.25)$$

qui dépend donc principalement de l'ouverture numérique f'/L .

Une mesure typique du carré de l'amplitude dans le plan focal est tracée en figure 2.6c. L'ajustement fonctionne parfaitement sur la tâche centrale et rend bien compte de la position des lobes secondaires. Le désaccord en amplitude sur ces derniers peut s'expliquer par la modélisation du profil incident par une fonction porte et l'approximation de lentille mince, qui ne sont pas parfaitement vérifiées ici. Un ajustement en $\text{sinc}(x/w)$ permet malgré tout d'extraire, pour chaque longueur focale, la largeur de la tâche associée. Les résultats rassemblés en figure 2.6c sont en bon accord avec la prédiction (2.25). Ainsi, la théorie de la diffraction fonctionne de manière très satisfaisante pour décrire la focalisation des ondes de surface par électrostriction.

2.8 Confinement par fibre surfacique

Il est également possible de confiner les ondes sous l'électrode, de la même manière que la lumière est confinée dans une fibre optique par une succession de réflexions totales internes. On utilise comme fibre une électrode de forme allongée comme sur la figure 2.7a. Une source d'ondes planes est diffractée par une fente de quelques centimètres de largeur pour créer des ondes circulaires plus propices à l'excitation des modes de la fibre. Les caractéristiques de la source sont choisies pour être proches de celles du premier mode de la fibre. Lorsque la tension V est progressivement augmentée, l'amplitude des ondes sur une section transverse à la fibre passe d'uniforme à localisée pour $n \approx 1.2$ comme le montrent les mesures figure 2.7b. Lorsque l'indice continue d'augmenter, on observe ensuite une décroissance de l'amplitude. Cette décroissance peut être expliquée qualitativement en remarquant

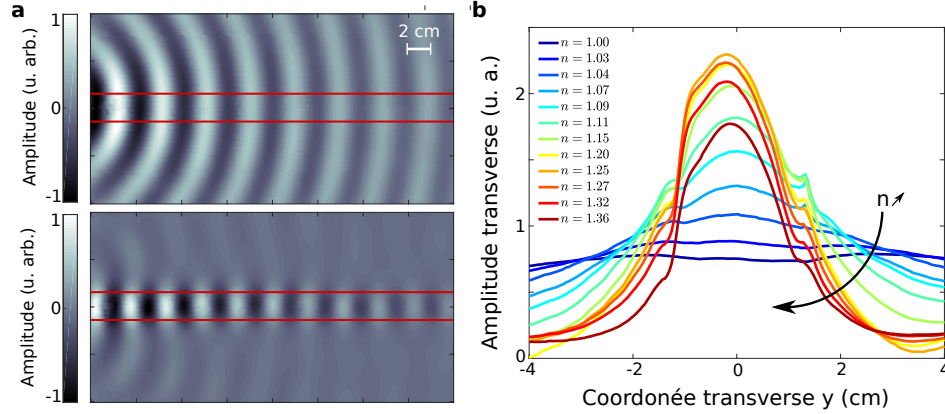


FIG. 2.7: (a) Confinement d'ondes de surface cylindriques sous une électrode de forme rectangulaire jouant le rôle de fibre optique lorsque le potentiel électrique est allumé. (b) Profil transverse des ondes sur le bain pour différentes valeurs d'indice dans la fibre. Le confinement des ondes apparaît distinctement pour $n \approx 1.2$.

que l'augmentation de l'indice provoque une diminution de la longueur d'onde et donc une augmentation des gradients de vitesse. Ainsi, les ondes sont d'avantage dissipées dans la fibre lorsque l'indice augmente, en accord avec la loi d'amortissement (2.6). Cette dissipation supplémentaire est également visible sur la figure 2.4c, où la décroissance des ondes est plus rapide sous l'électrode qu'en eau libre.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré que l'application d'une force d'électrostriction différenciée dans l'espace permet de moduler spatialement les propriétés de propagation des ondes de surface. Cette nouvelle méthode offre ainsi la possibilité de contrôler spatialement les ondes de surface, c'est-à-dire la possibilité de les réfracter, de les focaliser ou encore de les confiner. L'action à distance du champ électrique autorise un contrôle sans contact des ondes de surface, qui peuvent donc être imitées sans contraintes. Les différences d'indice induites sont importantes ($\Delta n/n \sim 50\%$) et réglables électriquement, tandis que la forme des zones d'indice élevé peut être choisie en ajustant la forme des électrodes. Cela a considérablement ouvert les possibilités de contrôle, sans pour autant augmenter outre-mesure la dissipation des ondes. Cela en fait donc un système de choix pour le contrôle de la propagation d'ondes de surface.

L'une des grandes forces du contrôle par électrostriction est sa flexibilité, puisque une modification de la tension appliquée permet de reconfigurer les dispositifs de contrôle spatial. Ce contrôle du forçage appliqué à la surface ouvre de plus la possibilité de varier significativement la vitesse de propagation des ondes au cours du temps, avec des modulations potentiellement rapides par rapport à l'oscillation du champ. Ainsi, les ondes de surface couplées à l'électrostriction apparaissent comme un excellent système expérimental pour l'étude des milieux variables en temps. Les prochains chapitres sont consacrés à la réalisation de tels milieux, et l'on s'intéressera plus particulièrement aux cas d'une interface temporelle dans le chapitre 3 et d'une modulation périodique en temps dans le chapitre 4.

3

De l'interface temporelle à la cascade fréquentielle

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré la possibilité de structurer spatialement les propriétés de propagation des ondes de surface. En variant la tension appliquée à l'électrode durant la propagation des ondes, il est également possible de varier la vitesse de ces dernières au cours du temps, ouvrant la voie à de nouveaux phénomènes déjà discutés dans l'introduction. Le présent chapitre est consacré à la réalisation expérimentale d'une interface temporelle, c'est à dire à un changement de la vitesse des ondes au cours du temps dans un milieu homogène spatialement.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Une première partie décrit en miroir les interfaces spatiales et temporelles d'un point de vue théorique. On mène cette étude dans le cadre de l'électromagnétisme, qui offre un formalisme plus simple que celui de l'hydrodynamique pour faire ressortir quelques aspects essentiels associés à ces interfaces. On présentera ensuite une réalisation expérimentale d'une interface temporelle, suivi par la description d'une méthode pour varier arbitrairement la fréquence d'une onde qui utilise une combinaison d'interfaces spatiales et temporelles. Par la suite, le rendement du processus de conversion sera discuté dans le cadre de l'électromagnétisme, et nous montrerons que l'efficacité de la conversion est indépendante de la différence d'impédance entre les deux milieux. Nous terminerons par une interprétation sur le cône de dispersion du contrôle spatial et temporel d'un paquet d'onde.

3.2 Passage d'une interface spatiale

3.2.1 Présentation du cadre du calcul

Lorsqu'une onde se propage dans l'espace d'un milieu à un autre, un certain nombre de ses propriétés sont modifiées lors de son passage à l'interface. On rappelle ici, dans le cadre de l'électromagnétisme, les principaux aspects d'une telle transition. On discutera dans la section suivante du cas d'une interface temporelle par analogie avec le cas d'une interface spatiale.

On se limite ici au cas d'une onde plane se propageant selon l'axe $\vec{x}$ arrivant en incidence normale sur l'interface. On supposera par ailleurs que tous les milieux de propagation sont caractérisés uniquement par leur permittivité diélectrique ϵ et leur perméabilité magnétique μ . Dans ces conditions, les équations de propagation s'écrivent

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial(\epsilon E)}{\partial t} \quad (3.1)$$

où E et H sont l'amplitude transverse du champ électrique et de l'excitation magnétique respectivement. Dans ce qui suit, on considérera également le comportement des flux d'énergie et d'impulsion à l'interface, tous les deux dirigés suivant la direction de propagation. On introduit donc le vecteur

de Poynting $\vec{\Pi}$ (en W.m^{-2}) et la densité volumique d'impulsion $\vec{P}$ (en N.s.m^{-3}) qui sont définis par

$$\vec{\Pi} = EH\vec{x} \quad \vec{P} = \vec{\Pi}/c^2 \quad (3.2)$$

où c est la vitesse des ondes dans le milieu.

3.2.2 Transmission et réflexion à l'interface en incidence normale

Formellement, une interface spatiale correspond à une variation spatiale des paramètres du milieu, que l'on fait apparaître en notant $(\epsilon(x), \mu(x))$ dépendant de la position. Cela modélise typiquement la propagation de la lumière à travers un dioptre air-verre. L'extension des interfaces sera négligée et les permittivités seront des fonctions marche passant de leur valeur initiale (ϵ_1, μ_1) à leur valeur finale (ϵ_2, μ_2) en $x = 0$ comme présenté figure 3.1a. L'équation vérifiée par le champ électrique peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3)$$

avec $c(x < 0) = c_1$ et $c(x > 0) = c_2$. Cette équation étant invariante par translation dans la direction temporelle, on peut chercher les solutions sous la forme $E(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$. Cela est équivalent à prendre la transformée de Fourier temporelle de l'équation (3.3) et à étudier chaque fréquence indépendamment par linéarité. Par l'équation (3.3), on trouve alors

$$\begin{aligned} \phi(x < 0) &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ \phi(x > 0) &= A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $k_i > 0$ est donné par la relation de dispersion dans le milieu i

$$k_i = \omega/c_i = n_i \omega/c_0 = n_i k_0 \quad (3.5)$$

avec c_0 et k_0 la vitesse et le vecteur d'onde dans le vide. Considérons le cas d'une onde se propageant initialement dans le milieu 1 dans la direction des x positifs ($B_2 = 0$). Les règles précédentes peuvent alors être résumées par le diagramme dans l'espace de Fourier présenté figure 3.1b. Chaque milieu est représenté par sa relation de dispersion $\omega = c_i k$. Une onde initiale (ω, k) dans le milieu 1 est alors séparée en deux composantes : une composante réfléchie $(\omega, -k)$ qui reste dans le milieu 1 et une composante transmise (ω, k_t) qui passe dans le milieu 2.

Il reste maintenant à exprimer les amplitudes transmises et réfléchies en fonction de l'amplitude initiale. Afin de relier la solution (3.4) dans les deux demi-espaces, il est nécessaire d'établir les relations de passage, c'est à dire de déterminer les quantités continues lors du passage de l'interface. Il est important de noter que l'équation (3.3) n'impose pas la continuité de E et sa dérivée première $\partial E/\partial x$, puisque cette équation n'est valable que de part et d'autre de l'interface. Il est ici nécessaire de revenir aux équations constitutives du premier ordre.

En intégrant les équations (3.1) autour de l'interface, on montre alors que E et H sont continus. Ceci permet de trouver les coefficients de transmission $t_{12}^S = A_2/A_1$ et de réflexion $r_{12}^S = B_1/A_1$ en amplitude donnés par

$$t_{12}^S = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad r_{12}^S = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.6)$$

où l'on a introduit l'impédance Z_i du milieu i définie comme

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \quad (3.7)$$

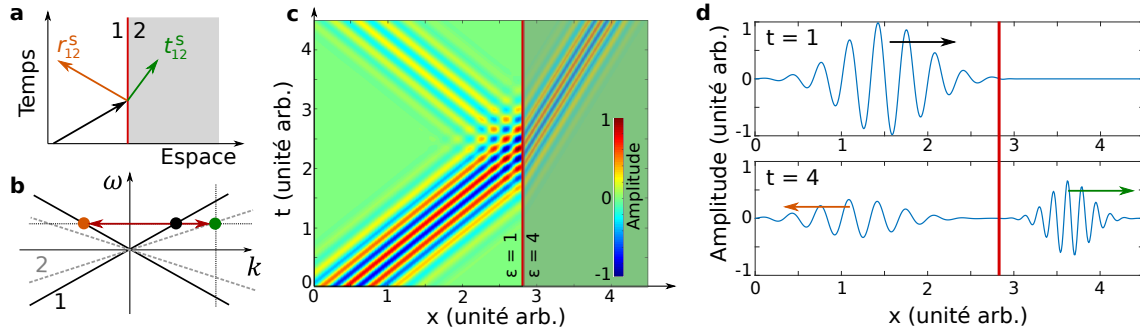


FIG. 3.1: (a) Réflexion et transmission d'une onde incidente sur une interface spatiale et coefficients en amplitude associés. (b) Transformation spectrale d'une onde initiale monochromatique (point noir) lors du passage de l'interface : l'onde réfléchie (point orange) a un vecteur d'onde de signe opposé mais reste dans le premier milieu tandis que le vecteur d'onde de l'onde transmise est du même signe mais se trouve dans le second milieu. La fréquence n'est pas modifiée. (c) Simulation numérique de la propagation d'un paquet d'onde gaussien au voisinage d'une interface entre deux milieux de permittivité $\epsilon_1 = 1$ et $\epsilon_2 = 4$ ($\mu = 1$). La couleur encode l'amplitude du champ électrique Ψ qui est continu à l'interface. Le changement de vitesse de l'onde transmise est associée à un changement de pente. (d) Coupe horizontale de (c) à $t = 1$ et $t = 4$. Le changement de longueur d'onde de l'onde transmise est nettement visible.

L'impédance Z donne également, pour des ondes propagatives, le ratio des amplitudes des champs $Z = E/H$. Les formules précédentes montrent que l'impédance est un paramètre de première importance pour déterminer le comportement d'une onde à l'interface. En particulier, il est possible de faire passer une onde d'un milieu à un autre sans réflexion lorsque les milieux sont adaptés en impédance ($Z_1 = Z_2$) et ce même si les vitesses dans les deux milieux sont différentes. En pratique, il est cependant fréquent que seule la permittivité électrique ϵ varie tandis que la perméabilité μ reste constante, de sorte que $Z_1 \neq Z_2$ si $c_1 \neq c_2$. Dans ce cas, les coefficients de réflexion et de transmission s'expriment en fonction de l'indice uniquement selon les formules de Fresnel¹

$$t_{12}^S = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad r_{12}^S = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (3.8)$$

La figure 3.1c-d montre par exemple un diagramme spatio-temporel issu d'une simulation numérique pour un paquet d'ondes se propageant d'un milieu 1 de permittivités ($\epsilon_1 = 1, \mu_1 = 1$) à un milieu 2 de permittivités ($\epsilon_2 = 4, \mu_2 = 1$). L'onde initiale est séparée à l'interface entre une composante réfléchie de même longueur d'onde mais de direction opposée et une composante transmise de longueur d'onde différente.

Il est également intéressant de regarder le comportement des quantités quadratiques à l'interface. Les normes des vecteurs de Poynting transmis Π_t et réfléchis Π_r normalisés par le vecteur de Poynting incident Π_i s'écrivent comme

$$\frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{Z_1}{Z_2} |t_{12}^S|^2 \quad \text{et} \quad \frac{\Pi_r}{\Pi_i} = |r_{12}^S|^2. \quad (3.9)$$

et le calcul montre que $\Pi_t + \Pi_r = \Pi_i$. Les flux d'énergie sont donc conservés à l'interface, ce qui est attendu pour un système invariant par translation temporelle. La symétrie par translation spatiale étant brisée, on s'attend en revanche a priori à la non-conservation de l'impulsion associée à cette

1. En supposant E et $\partial E/\partial x$ continues, l'impédance n'apparaît pas explicitement et on obtient directement les coefficients de Fresnel.

onde. Les normes des densités d'impulsion transmises P_t et réfléchies P_r normalisées par densité incidente P_i s'expriment comme

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{c_1^2 \Pi_t}{c_2^2 \Pi_i} \quad \text{et} \quad \frac{P_r}{P_i} = \frac{\Pi_r}{\Pi_i}. \quad (3.10)$$

et l'impulsion n'est pas conservée *a priori*. Les résultats précédents étant exprimés uniquement en fonction de l'impédance, ils s'étendent naturellement à d'autres types d'ondes. Toutefois, dans le cas des ondes de surface, il n'est pas évident d'identifier l'équivalent de l'impédance. C'est notamment cette difficulté qui a rendu délicate l'interprétation de l'absence d'onde réfléchie à l'interface dans le chapitre précédent. On voit à nouveau ici que cela est lié au manque d'une description formelle des ondes sur le bord de l'électrode.

Dans le cas où l'interface n'est pas une marche mais une fonction continue, les coefficients de transmission de réflexion sont différents et dépendent de la forme exacte du profil. La fréquence est cependant toujours conservée tant que l'invariance par translation temporelle est préservée. La loi de transformation des vecteurs d'onde (3.5) lors du changement de milieu est donc également valide dans le cas d'une interface lisse.

3.3 Passage d'une interface temporelle

On définit maintenant, par analogie avec le cas spatial, une interface temporelle comme une discontinuité dans la direction temporelle dans les fonctions $(\epsilon(t), \mu(t))$. Physiquement, cela correspond à un changement instantané dans tout l'espace des propriétés du milieu, comme illustré en figure 3.2a. L'équation de propagation du champ électrique sera cette fois-ci

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c(t)^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

avec $c(t < 0) = c_1$ et $c(t > 0) = c_2$. Les propriétés du milieu étant cette fois invariante par translation spatiale, on cherche les solutions sous la forme $E(x, t) = \phi(t)e^{-ikx}$. Par l'équation (3.11), on trouve alors

$$\begin{aligned} \phi(t < 0) &= A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{-i\omega_1 t} \\ \phi(t > 0) &= A_2 e^{i\omega_2 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

où ω_i est donné par

$$\omega_i = c_i k = c_0 k_0 / n_i \quad (3.13)$$

Une interface temporelle est donc associée à un changement de fréquence tandis que le vecteur d'onde est constant. À noter que la conservation du vecteur d'onde (ou de la fréquence dans la section précédente) peut également s'établir par continuité de la phase à l'interface, que l'on peut visualiser sur les figures 3.1c et 3.2c. Dans ce cas, le changement de fréquence (ou de vecteur d'onde) peut s'interpréter géométriquement comme une conséquence du changement de pente des isophases du fait de la variation de l'indice.

Dans le cas d'une onde se propageant initialement dans la direction des x positifs ($B_1 = 0$), la traversée d'une interface temporelle génère, comme dans le cas spatial, deux ondes contra-propagatives. On désignera, par analogie avec le cas spatial, l'onde se propageant dans la direction des x positifs comme l'onde transmise et l'onde se propageant dans la direction opposée comme l'onde réfléchie. Les propriétés spectrales de ces ondes sont résumées comme pour le cas spatial sur le diagramme figure 3.2b. À une onde initiale (ω_1, k) dans le premier milieu est associée deux ondes contra-propagatives dans le second milieu de coordonnées (ω_2, k) et $(-\omega_2, k)$.

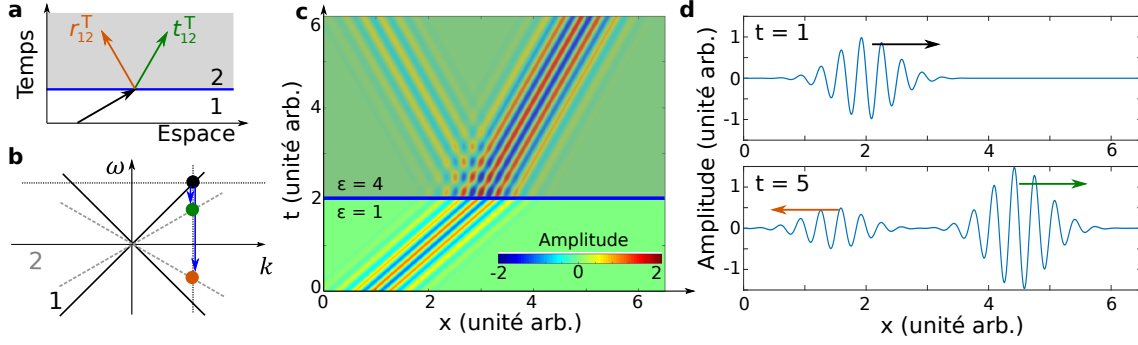


FIG. 3.2: (a) Réflexion et transmission d'une onde incidente sur une interface temporelle et coefficients en amplitude associés. (b) Transformation spectrale d'une onde initiale monochromatique (point noir) lors du passage de l'interface : l'onde réfléchie (point orange) a une fréquence de signe opposé et l'onde transmise a une fréquence du même signe. Les deux ondes se trouvent dans le second milieu et le vecteur d'onde n'est pas modifiée. (c) Simulation numérique de la propagation d'un paquet d'onde gaussien au voisinage d'une interface temporelle entre deux milieux de permittivité $\epsilon_1 = 1$ et $\epsilon_2 = 4$ ($\mu = 1$). La couleur encode l'amplitude de l'excitation électrique $\epsilon\Psi$ qui est continue à l'interface. Le changement de vitesse des ondes transmises et réfléchies est associé à un changement de pente. (d) Coupe horizontale de (c) à $t = 1$ et $t = 5$. La longueur d'onde est invariante, mais la fréquence a été modifiée.

A l'interface, l'intégration des équations (3.1) impose cette fois-ci la continuité des champs μH et ϵE [17]. Les coefficients de transmission $t_{12}^T = A_2/A_1$ et de réflexion $r_{12}^T = B_2/A_1$ sont donnés par

$$t_{12}^T = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_2} \quad r_{12}^T = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{Z_2 - Z_1}{2Z_2} \quad (3.14)$$

Si l'on suppose simplement que E et $\partial E/\partial t$ sont continus par l'équation (3.11), on trouve une expression en fonction des indices uniquement

$$t_{12}^T = \frac{n_1 + n_2}{2n_1} \quad r_{12}^T = \frac{n_1 - n_2}{2n_1} \quad (3.15)$$

qui est l'analogue des formules de Fresnel pour une interface temporelle.

La figure 3.2c-d montre la simulation numérique d'une interface temporelle entre un premier milieu de permittivités ($\epsilon_1 = 1, \mu_1 = 1$) et un second milieu de permittivités ($\epsilon_2 = 4, \mu_2 = 1$). Les deux ondes contra-propagatives après l'interface sont clairement visibles, la longueur d'onde étant bien conservée au cours du processus tandis que la fréquence est modifiée.

Comme pour le cas spatial, il est également important de calculer la transformation des quantités quadratiques. Les vecteurs de Poynting s'expriment

$$\frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{Z_1}{Z_2} |t_{12}^T|^2 \quad \text{et} \quad \frac{\Pi_r}{\Pi_i} = \frac{Z_1}{Z_2} |r_{12}^T|^2 \quad (3.16)$$

tandis que les densité d'impulsion s'écrivent

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\Pi_t}{\Pi_i} \quad \text{et} \quad \frac{P_r}{P_i} = \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\Pi_r}{\Pi_i}. \quad (3.17)$$

Le calcul montre alors que $P_t - P_r = P_i$ assurant ainsi la conservation de l'impulsion, ce qui est attendu dans un milieu invariant par translation dans la direction spatiale.

	t_{12}	r_{12}	Π_t/Π_i	Π_r/Π_i	P_t/P_i	P_r/P_i	Conservation
Interface spatiale	$\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_1}{Z_2} t_{12}^S ^2$	$ r_{12}^S ^2$	$\frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{\Pi_t}{\Pi_i}$	$\frac{\Pi_r}{\Pi_i}$	ω, Π
Interface temporelle	$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{Z_1+Z_2}{2Z_2}$	$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{Z_2-Z_1}{2Z_2}$	$\frac{Z_1}{Z_2} t_{12}^T ^2$	$\frac{Z_1}{Z_2} r_{12}^T ^2$	$\frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{\Pi_t}{\Pi_i}$	$\frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{\Pi_r}{\Pi_i}$	k, P

FIG. 3.3: Récapitulatif des propriétés d'une interface spatiale et temporelle d'un milieu 1 vers un milieu 2.

Bien que très semblables formellement, la différence fondamentale entre une interface spatiale et une interface temporelle réside dans les ondes réfléchies. Dans le premier cas, celles-ci se propagent dans le milieu initial, tandis que dans le second cas, elles passent avec les ondes transmises dans le second milieu (voir figure 3.1 et 3.2). Par conséquent, les conditions de passage à l'interface spatiale sont de la forme

$$\text{onde initiale} + \text{onde réfléchie} = \text{onde transmise}$$

tandis que celles à l'interface temporelle s'écrivent

$$\text{onde initiale} = \text{onde transmise} + \text{onde réfléchie}.$$

Cette différence est à l'origine des formes relativement différentes des coefficients de transmission et de réflexion aux interfaces spatiales et temporelles. Le tableau présenté figure 3.3 résume les propriétés importantes pour les interfaces temporelles et spatiales.

3.4 Interface temporelle par électrostriction

Comme discuté dans l'introduction, l'électrostriction apparaît comme un excellent candidat pour la réalisation de matériaux variables en temps, et en particulier d'interfaces temporelles. On présente maintenant la réalisation expérimentale d'une telle interface.

3.4.1 Présence d'un potentiel variable en temps

L'influence d'un potentiel statique sur la propagation des ondes a déjà été discuté dans le chapitre précédent. En particulier, on avait montré que la relation de dispersion des ondes loin des bords de l'électrode s'écrivait

$$\omega^2(k) = \omega_0^2(k)(1 - \alpha(k)V^2) \quad (3.18)$$

Dans le cas d'un potentiel variable en temps, on procédera donc simplement à la substitution de V par $V(t)$. Cela n'est cependant pas rigoureusement exact. Comme dans le cas d'une interface spatiale, il apparaît en effet extrêmement difficile de déterminer le comportement de l'onde immédiatement après une variation de potentiel. Même si la variation du potentiel est très rapide et peut être supposée instantanée, le temps de réponse du système à cette perturbation peut être plus lent. Par exemple, la variation de potentiel engendre une variation du profil de hauteur statique sous l'électrode qui se fait en un temps non nul, tout comme la variation du champ de vitesse dans le fluide. Cette formule n'est donc valable que sur des temps longs devant les régimes transitoires. En pratique, la transition semble toutefois extrêmement rapide comme le montrent les mesures figure 3.4b et l'on négligera donc ces temps de transition dans la suite.

Pour une onde de vecteur d'onde k donné et conservé au cours du temps, on définit alors l'indice $n(k, V)$ comme

$$n(k, V) = \frac{v_0(k)}{v_\phi(k)} = \frac{\omega_0(k)}{\omega(k)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha(k)V^2}} \quad (3.19)$$

qui dépend encore une fois du potentiel appliqué.

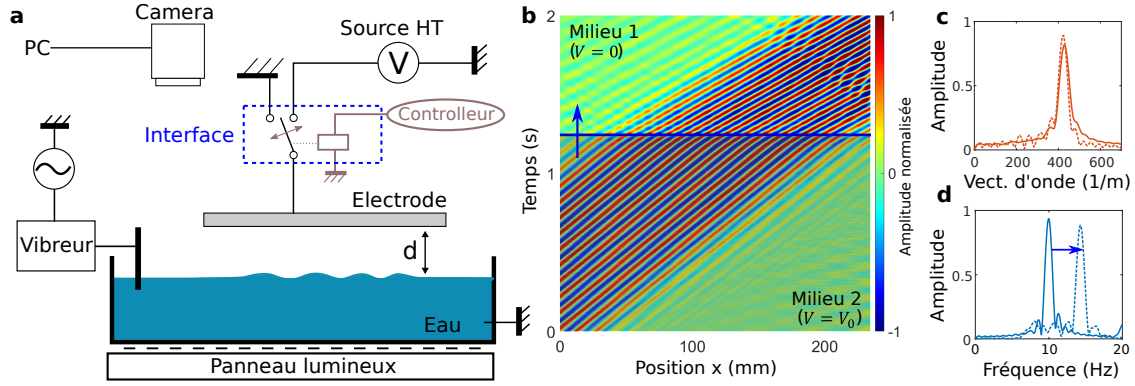


FIG. 3.4: (a) Schéma du montage expérimental pour les interfaces temporelles. Des relais haute-tension contrôlés électriquement permettent de connecter l'électrode à la source de haute-tension ou à la masse. (b) Mesure expérimentale du champ d'onde sous une électrode. Le changement de tension de $V_0 = 8$ kV à $V_0 = 0$ V est matérialisé par la ligne bleue. La dissipation est compensée numériquement. (c) Spectre en vecteur d'onde et (d) spectre fréquentiel issu de (b) avant (trait plein) et après (trait pointillé) le passage de l'interface.

3.4.2 Présentation du système expérimental

Le système expérimental, très similaire à celui utilisé pour la réfraction d'ondes, est représenté figure 3.4a. Les ondes arrivent cette fois-ci toujours en incidence normale par rapport au bord de l'électrode. Un relais commutable adapté aux hautes tensions (Meder HM2) est placé entre l'électrode et la source continue de haute tension. Ce relais contrôlé électriquement par un Arduino de puissance (Controllino) permet de connecter ou déconnecter la source. Ceci n'est toutefois pas suffisant pour modifier le potentiel appliqué puisque nous avons mesuré que l'électrode reste chargée durant au moins plusieurs secondes après avoir été déconnectée de la source haute-tension. Un second relais (non matérialisé) a donc été ajouté pour connecter l'électrode à la masse. Ainsi le potentiel passe de typiquement $V_0 \sim 10$ kV à $V_0 = 0$ V sur des temps de typiquement quelques dixièmes de seconde.

Le passage d'une interface temporelle nécessite que le milieu soit homogène spatialement. L'extension des électrodes étant finie, on envoie avec le vibreur des paquets d'onde contenant une dizaine de longueurs d'ondes. On synchronise alors le changement de tension avec l'instant où l'ensemble du paquet d'onde se trouve sous l'électrode et suffisamment loin des bords. Cela assure l'homogénéité spatiale de l'espace effectivement occupé par le paquet d'onde lors de la variation de potentiel.

Lorsque la tension passe de sa valeur maximale à zéro, le profil de hauteur statique est modifié. Le relâchement de la contrainte produit un mouvement du fluide et donc l'émission d'ondes qui perturbent le suivi du paquet d'onde propagatif. Pour palier cette difficulté, on effectue systématiquement un film de référence pour lequel la contrainte est relâchée en l'absence d'ondes propagatives. La soustraction de ce film de référence au film expérimental permet de s'affranchir de ces ondes indésirables pour nos mesures.

3.4.3 Résultats

Construction du diagramme spatio-temporel

Un résultat de mesure pour une interface temporelle est présenté figure 3.4b. Ce diagramme spatio-temporel est obtenu à partir des images traitées par *FCD* à chaque instant $A(x, y, t)$. Ces images sont dans un premier temps filtrées avec un passe haut pour retirer les moyennes et des mouvements lents du fluide. La prise de vue est réalisée de sorte que la direction horizontale x soit également la

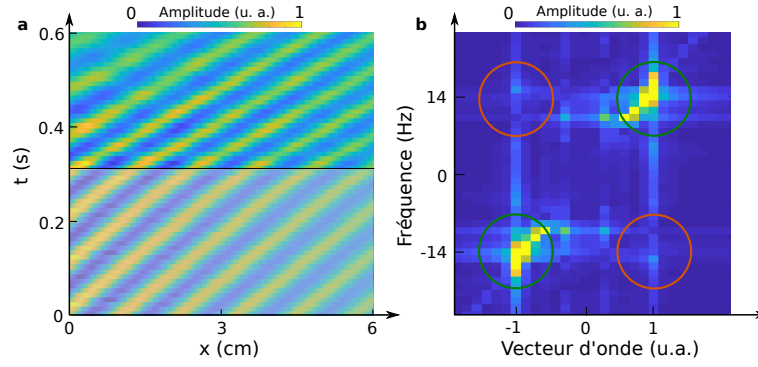


FIG. 3.5: (a) Diagramme spatio-temporel expérimental d'une onde lors du passage d'une interface temporelle. (b) Transformée de Fourier spatiale de la partie supérieure du diagramme mettant en évidence l'onde transmise (cercles verts) et l'onde réfléchie (cercles oranges).

direction de propagation et les fronts d'onde sont donc parallèles à y . L'onde est toujours en incidence normale sur le bord de l'électrode qui est donc matérialisé par une droite selon y . On peut donc moyenner le champ selon la direction y pour obtenir le diagramme $A(x, t)$. Pour faciliter la lecture des données, on compense ensuite numériquement la dissipation qui se traduit expérimentalement par une baisse de l'amplitude mesurée lorsque x augmente. Pour cela, on calcule à x fixé la quantité $\sigma_A(x) = \sqrt{\sum_t A(x, t)^2}$ qui fournit une bonne estimation de l'amplitude moyenne du paquet d'onde lors de son passage en x . Le diagramme normalisé est alors obtenu en calculant $A_{norm}(x, t) = A(x, t)/\sigma_A(x)$ et permet de conserver l'amplitude des ondes approximativement constante le long du diagramme. Cette normalisation fonctionne tant que le rapport signal à bruit est suffisant. Ce rapport diminue avec l'avancée du paquet d'onde et un brouillage des isophases apparaît lorsque le paquet d'onde n'est plus significatif par rapport au bruit.

Sur le diagramme en figure 3.4b, la transition du potentiel V_0 au potentiel nul est matérialisée par la ligne bleue. La rupture de pente des isophases associée au changement de vitesse est clairement visible et a lieu sur un temps inférieur à la dixième de seconde. La transition d'une onde propagative à une autre est donc extrêmement rapide et se fait sur moins d'une période d'oscillation de l'onde. Cela justifie expérimentalement l'utilisation de la formule (3.19) et le fait de négliger les régimes transitoires associés au changement de potentiel.

Analyse spectrale de l'onde transmise

Le diagramme spatio-temporel se prête bien à l'analyse spectrale puisque une transformée de Fourier horizontale (resp. verticale) donne accès au spectre en vecteur d'onde (resp. en fréquence) associé à un instant (resp. une position) donnée. Une telle analyse conduite sur le paquet d'onde avant et après l'interface montre comme attendu la conservation du vecteur d'onde mais une variation de la fréquence. Le ratio de la fréquence initiale et de la fréquence finale est directement lié au ratio des indices comme le montre l'équation (3.19), et on trouve donc l'indice sous l'électrode $n \approx 1.4$ (voir la figure 3.6d pour une telle mesure). Cela démontre clairement la possibilité de réaliser par l'électrostriction une interface temporelle avec une différence d'indice significative. Expérimentalement, il est difficile d'effectuer des changements de fréquence relatifs supérieurs à 50%, qui nécessiteraient des indices trop élevés. Nous verrons dans la section suivante comment cette limitation peut être battue en itérant ces transformations de fréquence.

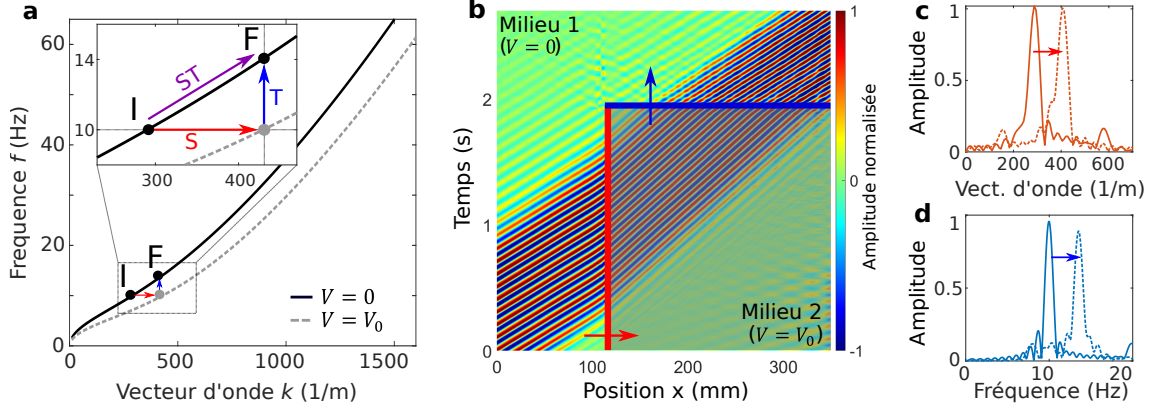


FIG. 3.6: (a) Principe de conversion de fréquence par passage successif d'une interface spatiale (flèche rouge) et temporelle (flèche bleue). Après l'opération, le paquet d'onde converti est de retour dans le milieu initial. (b) Diagramme spatio-temporel expérimental d'une onde passant successivement une interface spatiale et temporelle. Les ruptures de pentes associées aux changements de vitesses sont clairement visibles. (c) Spectre en vecteurs d'ondes et (d) spectre en fréquence du paquet d'onde avant et après la traversée des interfaces.

Coefficient de réflexion

On s'intéresse maintenant à la génération de l'onde contra-propagative lors du passage de l'interface temporelle. Le diagramme spatio-temporel de l'onde au voisinage immédiat de l'interface temporelle est présenté en figure 3.5a. L'onde transmise est clairement visible, et l'onde réfléchie peut être devinée par son interférence avec l'onde transmise. Une mesure plus quantitative peut être réalisée en prenant, comme dans le cas d'une réflexion spatiale, la transformée de Fourier du diagramme après l'interface en figure 3.5b. L'onde transmise apparaît clairement, et un signal est détectable à la position attendue pour une onde réfléchie. Le ratio des maxima des pics transmis et réfléchis donne un coefficient de réflexion $r \approx 0.1$. Cette valeur est cohérente avec celle donnée par la formule de Fresnel (3.15) pour un indice de $n \approx 1.4$ qui prédit $r \approx 0.15$.

3.5 Passage successif d'une interface spatiale et temporelle

Les variations de fréquence accessibles sont directement limitées par la différence d'indice réalisable expérimentalement. Pour contourner cette difficulté, nous avons profité de l'extension spatio-temporelle finie des paquets d'onde pour combiner des interfaces spatiales et temporelles. En itérant un enchaînement de ces deux interfaces, on montre qu'il est possible d'obtenir des paquets d'onde de fréquence arbitraire.

3.5.1 Un point de vue spectral des interfaces

Spectralement, la conversion de fréquence peut être résumée de la manière suivante. Partant d'un paquet d'onde initial de pulsation et de vecteur d'onde centraux $I = (k_i, \omega_i)$, on souhaite arriver à un autre paquet d'onde donné par $F = (k_f, \omega_f)$. Dans l'espace de Fourier (k, ω) , chacun de ces points I et F doit être sur la relation de dispersion donnée par $\omega_0(k)$ comme illustré figure 3.6a. Pour passer d'un point à un autre, une stratégie possible est d'utiliser un second milieu représenté par une seconde relation de dispersion. En entrant dans ce milieu par une interface spatiale, le vecteur d'onde est modifié tandis que la fréquence est conservée. Géométriquement, cela correspond donc à une projection horizontale $S_{1 \rightarrow 2}$ du point I sur le second milieu. Si le paquet d'onde ressort du

milieu par une interface temporelle, la projection $T_{2 \rightarrow 1}$ est cette fois-ci verticale. Par construction géométrique, on observe alors que le paquet d'onde final F se trouve à une position différente du paquet d'onde initial I .

Toutes ces transformations s'étendent directement au cas où la répartition spectrale des ondes n'est plus piquée mais répartie sur la relation de dispersion. Du fait de la linéarité des équations sous-jacentes, la transformation s'effectue en effet composante par composante et aucune interaction entre les différentes fréquences n'apparaît. Pour appliquer une interface spatiale suivie d'une interface temporelle, l'extension spatio-temporelle du paquet d'onde doit être finie et l'ensemble des ondes à convertir doit être contenu à un moment dans le second milieu. En particulier, cette procédure ne peut pas être appliquée à une onde purement monochromatique d'extension infinie.

3.5.2 Réalisation expérimentale

Le même système expérimental, déjà présenté ci-dessous, est à nouveau employé ici. Un paquet d'onde d'extension spatiale plus petite que l'électrode pénètre sous cette dernière en passant par une interface spatiale comme présenté en figure 3.6b. Le vecteur d'onde est alors modifié tandis que la fréquence est conservée. Une fois le paquet d'onde entièrement contenu sous l'électrode, on passe par la commutation des relais électriques du potentiel V_0 au potentiel nul. Le paquet d'onde a alors traversé une interface temporelle et la fréquence a été modifiée. A la fin de la procédure, le paquet d'onde est de retour en eau libre mais sa fréquence et son vecteur d'onde ont été modifiés comme en attestent les spectres en figure 3.6c-d respectivement.

Comme mentionné précédemment, les variations maximales de fréquences avec une interface temporelle sont de l'ordre de 50 % du fait des limitations en indice. L'onde étant de retour dans son milieu de propagation initial, le processus de conversion peut cependant être itéré pour obtenir des variations de fréquences arbitraires. Spectralement, cela correspond à la construction d'un escalier pour monter progressivement le long de la relation de dispersion.

3.6 Cascade fréquentielle par itération d'étapes élémentaires

3.6.1 Itération d'interfaces spatiales et temporelles

L'enchaînement de plusieurs transformations élémentaires se fait expérimentalement en utilisant plusieurs électrodes placées les unes à la suite des autres comme illustré en figure 3.7a. Chaque électrode est contrôlée indépendamment de sorte que les variations de tension soient synchronisées avec le passage du paquet d'onde. Pour limiter la dissipation associée à la propagation du paquet d'onde, on utilise des électrodes de 10 cm de largeur espacées l'une de l'autre de quelques centimètres. Comparé à ce qui précède, l'extension spatiale du paquet d'onde émis doit donc être réduite à moins de dix centimètres pour appliquer les transformations. Une mesure expérimentale du paquet d'onde après chaque itération est présentée figure 3.2b comparé à un paquet d'onde de référence non transformé. Comme attendu, on observe une diminution de la longueur d'onde entre chaque image signalant une modification des propriétés spectrales du paquet d'onde.

Pour obtenir une information fréquentielle, on trace en figure 3.7c le diagramme spatio-temporel associé à l'expérience. Lorsque la tension appliquée est non nulle, la zone associée est grisée. Le changement de potentiel de chaque électrode est synchronisé avec le passage du paquet d'onde qui rencontre ainsi de multiples interfaces temporelles. Une analyse fréquentielle après chacune de ces interfaces est tracée figure 3.7d et montre une variation de fréquence de 10 Hz à 18 Hz par itération de plusieurs sauts élémentaires d'environ 2 Hz. Pour des raisons pratiques, chaque saut de fréquence est environ deux fois plus faible qu'en figure 3.4, où l'on effectuait plutôt des sauts de 4 Hz. Cela tient à la manière de fixer les électrodes au-dessus du bain qui est différente dans les deux

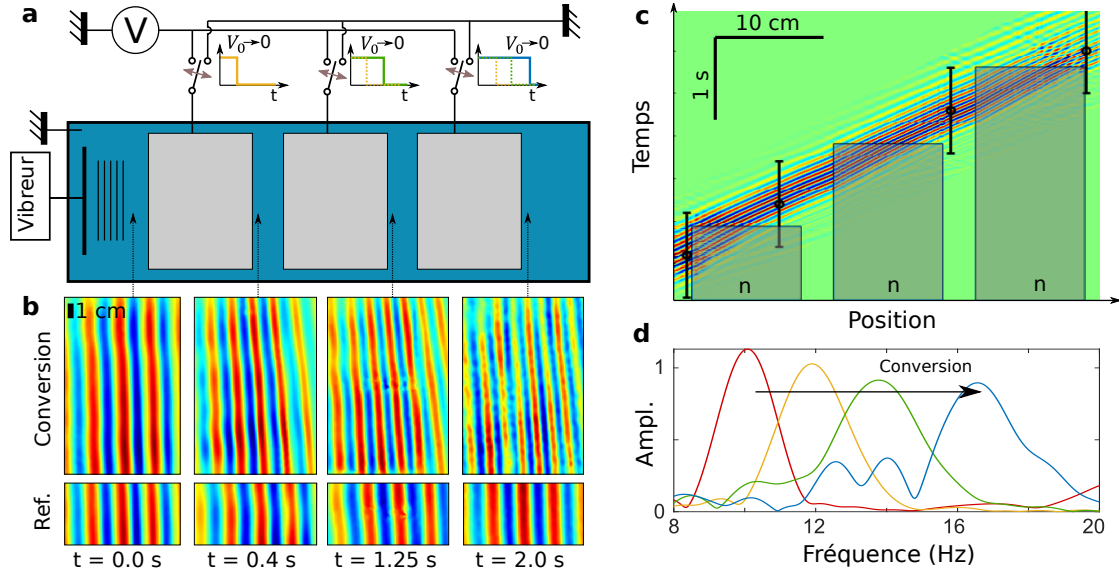


FIG. 3.7: (a) Itération en cascade du processus élémentaire par utilisation de plusieurs électrode successives synchronisées avec le passage du paquet d'onde. (b) Mesure expérimentale du paquet d'onde après chaque transformation et élémentaire et (c) comparaison avec la propagation d'un paquet d'onde de même fréquence initiale non transformé. L'amplitude est normalisée différemment sur chaque image. (c) Diagramme spatio-temporel expérimental d'un paquet d'onde transformé par trois électrodes matérialisées par les trois colonnes grisées. L'arrêt de la haute-tension aux électrodes est matérialisée par un dégrisement. (d) Spectre en fréquence relevés aux positions matérialisées sur le diagramme (c).

expériences. Lorsqu'une seule électrode est utilisée, l'électrode est suspendue par des fils reliés à des platines de translation micrométrique qui autorisent un ajustement très fin de l'horizontalité. Dans le cas présent, les électrodes sont toutes fixées sur un même support en plexiglas reposant sur des pieds réglables. Ce système offre un réglage moins fin que le précédent et ne permet pas de régler indépendamment chaque électrode. Les indices qu'il est possible d'atteindre avant les phénomènes de claquage sont donc plutôt aux alentours de $n \approx 1.3$ dans le cas présent. Du point de vue global, la baisse des indices accessibles est cependant largement compensée par la cascade de transformations élémentaires. Ce processus itératif ouvre également la possibilité de réaliser des conversions de fréquence importantes sur d'autres types d'ondes, pour lesquelles les variations d'indice temporelles réalisables sont nettement plus faibles.

3.6.2 Permutation de l'ordre des interfaces

La traversée successive d'une interface spatiale puis temporelle permet donc d'augmenter la fréquence d'un paquet d'onde. Réciproquement, il est possible de diminuer la fréquence en inversant l'ordre des interfaces. Ce résultat peut être appréhendé en imaginant ce que serait le résultat de l'expérience précédente par renversement du cours du temps. Le paquet d'onde traverserait alors une interface temporelle puis une interface spatiale et sa fréquence serait alors diminuée. L'itération de cette transformation élémentaire mènerait alors à une cascade fréquentielle descendante. Cette approche est basée sur l'invariance des équations de propagation par inversion du temps. Alternativement, on peut procéder à une analyse similaire à celle effectuée en figure 3.6. La permutation de l'ordre des interfaces correspond à une permutation de l'ordre des projections S et T et donc à une transformation du point F vers le point I .

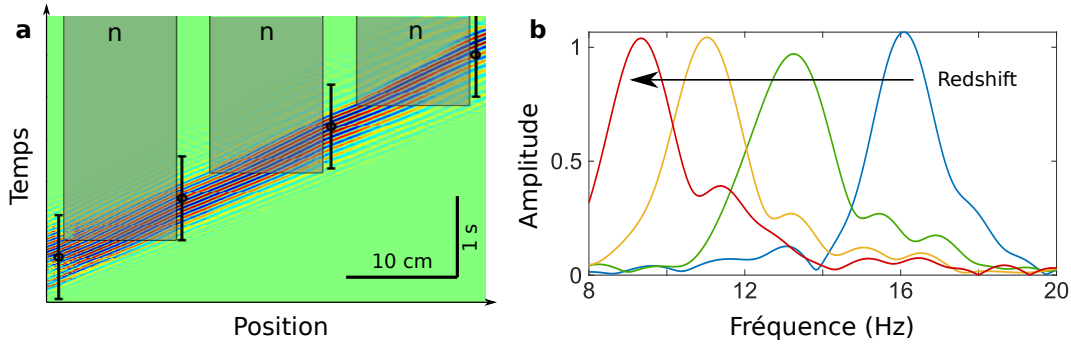


FIG. 3.8: (a) Diagramme spatio-temporel d'une cascade descendante en fréquence. La tension de chaque électrode passe de 0 à V_0 lors du passage du paquet d'onde et sort ensuite de sous l'électrode par une interface spatiale. (b) Spectre fréquentiel du paquet d'onde après chaque transformation élémentaire

Expérimentalement, une telle conversion descendante s'obtient en passant le potentiel de l'électrode de 0 à V_0 lors du passage du paquet d'onde. Celui-ci passe alors à travers une interface temporelle puis continue sa propagation et sort de sous l'électrode par une interface spatiale. Le diagramme spatio-temporel associé à cette expérience est présenté en figure 3.8a. Ce diagramme est très similaire à celui de la figure 3.7c et l'on passe de l'un à l'autre en inversant la direction de la flèche du temps. Une analyse en fréquence après chaque transformation montre une variation de fréquence et le paquet d'onde initial passe ainsi de 16 Hz à 9 Hz.

L'enchaînement successif d'interfaces spatiales et temporelles permet donc une conversion a priori arbitraire de la fréquence initiale d'un paquet d'onde. En pratique, la dissipation limite fortement le nombre de transformations possibles. Dans nos régimes expérimentaux, le signal détectable après trois transformations est assez bruité, du fait de la faible amplitude du paquet d'onde, et la mesure après quatre transformations n'a pas été possible. Les pertes d'amplitude lors de la propagation sont donc une limite importante au dispositif.

3.6.3 Application en cavité

En l'absence de tout phénomène dissipatif, les conversions successives pourraient être obtenues en utilisant un seul milieu actif placé dans une cavité comme illustré en figure 3.9a. Après chaque transformation, le paquet d'onde est renvoyé par un jeu de miroirs sur le même milieu actif. Ce dernier est réinitialisé dans sa configuration initiale pendant la propagation du paquet d'onde dans le reste de la cavité. Il est donc nécessaire que le paquet d'onde n'occupe pas simultanément l'intégralité de celle-ci. Ce type d'implémentation est particulièrement adapté à l'optique où des cavités avec d'excellents facteurs de qualités sont disponibles, ce qui permet d'effectuer un grand nombre d'itération. On compense ainsi la faiblesse des variations d'indice disponibles discutées précédemment.

Le diagramme spatio-temporel d'une telle cascade est tracé en figure 3.9c. On voit ici l'importance du fait que les ondes n'occupent simultanément qu'une partie de la cavité pour réinitialiser le milieu actif sans conséquences sur leurs propriétés. Lors des transformations successives, la longueur d'onde et la période, mais également les extensions spatiales et temporelles du paquet d'onde, sont compressées. L'extension spatiale du milieu actif L_a impose une borne supérieure à l'extension spatiale maximale du paquet d'onde, puisque ce dernier doit se trouver intégralement dans le milieu à un certain instant. Symétriquement, la durée de modulation T_a entre deux interfaces temporelle limite quant à elle l'extension temporelle maximale du paquet d'onde. Ces contraintes, visibles sur la figure 3.9c, permettent d'assurer que l'ensemble du paquet d'onde rencontre toujours une interface

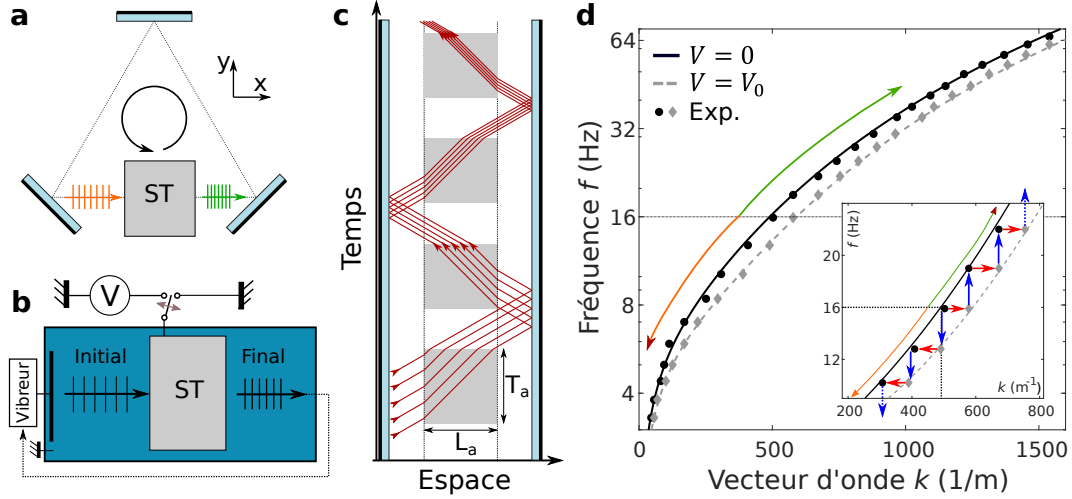


FIG. 3.9: (a) Principe de conversion multiple utilisant un seul milieu actif réinitialisé lorsque l'onde circule dans le reste de la cavité. (b) Pour compenser expérimentalement la dissipation, une boucle d'amplification est installée pour ré-émettre le paquet d'onde final à l'autre bout du bac. (c) Diagramme spatio-temporel associé à la cascade en cavité. La compression de la fréquence et de la durée du paquet d'onde est visible en prenant les sections verticales du faisceau. (d) Conversion de fréquence expérimentale de deux octaves vers le haut ou vers le bas en partant d'un paquet d'onde initial à $f = 16$ Hz. L'agrandissement à droite montre les étapes successives effectuées et les interfaces spatiales et temporelles. Les relations de dispersion théoriques (avec $\gamma = 45$ mJ/m² ajusté aux données en eau libre et $V = 7.5kV$, $d = 7$ mm) sont tracées en trait plein.

spatiale ou temporelle.

A noter également qu'il n'est pas nécessaire que la durée τ des interfaces temporelles soit, comme dans le cas présent, rapide devant tous les temps caractéristiques de l'onde. Une conversion similaire pourrait avoir lieu même si la durée de transition est longue devant la période de l'onde, c'est à dire si $\tau \gg 1/\omega$ (c'est par exemple le cas dans une corde de guitare dont on varie la tension). En ce sens, le processus peut donc être considéré comme adiabatique, le temps caractéristique T_a de modulation du milieu étant fixée par la durée du paquet d'onde plutôt que par sa fréquence propre d'oscillation.

Pour des ondes de surface, il n'existe pas de cavité aussi performante qu'en optique notamment à cause de l'absence de réflecteur efficace. Par ailleurs, la dissipation ne permettrait pas la propagation du paquet d'onde sur davantage que quelques tours. Pour effectuer un grand nombre d'itérations, une boucle d'amplification a donc été implémentée. On mesure pour cela la fréquence finale du paquet d'onde après sa transformation comme illustré en figure 3.9b. On émet ensuite, *via* le vibreur, un nouveau paquet d'onde à cette fréquence pour effectuer une nouvelle transformation.

La dissipation peut ainsi être contournée, ce qui autorise expérimentalement la réalisation d'un grand nombre de transformations élémentaires. Les résultats expérimentaux obtenus sont rassemblés en figure 3.9c. Le paquet d'onde initial de fréquence $f = 16$ Hz subit une conversion de fréquence globale de deux octaves vers le haut ou vers le bas par cascade d'une dizaine de transformations vers le haut ou vers le bas. Dans ces expériences, les ondes de plus hautes fréquences étaient amorties très rapidement tandis que les ondes de plus basse fréquence étaient de longueurs d'onde trop grande pour former un paquet d'onde significatif sous l'électrode. Théoriquement, il est cependant possible de continuer le processus tant que les relations de dispersion des deux milieux sont disjointes.

3.7 Calcul de rendement et quantité conservée

On propose maintenant de discuter le rendement de la conversion en étudiant l'amplitude du paquet d'onde sortant comparé au paquet d'onde entrant. On ne s'intéressera donc pas aux ondes réfléchies aux diverses interfaces mais seulement au paquet d'onde transmis. Toutes les quantités sont calculées dans le formalisme de l'électromagnétisme en modélisant les interfaces comme des marches d'une valeur à une autre. La permittivité et la perméabilité associées au milieu i seront notées ϵ_i et μ_i .

On s'intéresse dans un premier temps au cas d'une interface spatiale $S_{1 \rightarrow 2}$ suivie d'une interface temporelle $T_{2 \rightarrow 1}$. On notera (k_i, ω_i) et (k_f, ω_f) les vecteurs d'ondes et pulsations initiales et finales. Les résultats du tableau 3.3 nous permettent de calculer l'amplitude A_f transmise après les deux interfaces en fonction de l'amplitude incidente

$$\frac{A_f}{A_i} = t_{21}^T t_{12}^S = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1} \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.20)$$

En utilisant le fait que $c_1 = \omega_i/k_i = \omega_f/k_f$ et $c_2 = \omega_i/k_f$, on obtient finalement

$$\frac{A_f}{A_i} = \frac{k_f}{k_i} = \frac{\omega_f}{\omega_i} \quad (3.21)$$

Dans le cas où l'ordre des interfaces est permuté, l'onde passe une interface temporelle $T_{1 \rightarrow 2}$ puis une interface spatiale $S_{2 \rightarrow 1}$ et on obtient

$$\frac{A_f}{A_i} = t_{21}^S t_{12}^T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{Z_2 + Z_1}{2Z_2} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (3.22)$$

qui est donc l'inverse du résultat précédent. Cependant, en notant que cette fois-ci $c_2 = \omega_f/k_i$, on retrouve

$$\frac{A_f}{A_i} = \frac{k_f}{k_i} = \frac{\omega_f}{\omega_i} \quad (3.23)$$

L'amplitude transmise s'exprime donc uniquement en fonction du ratio des fréquences ou des vecteurs d'onde. Le résultat est indépendant de l'ordre des interfaces et de la différence d'impédance entre les deux milieux. Cela indique donc que les pertes et les gains aux interfaces spatiales et temporelles se compensent, de sorte que la transmission après deux interfaces est indépendante des impédances.

De la même manière, on peut s'intéresser aux quantités quadratiques initiales et finales. Par le tableau 3.3, le ratio des flux d'énergie et des densités d'impulsion sont identiques et s'écrivent

$$\frac{\Pi_f}{\Pi_i} = \frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{A_f}{A_i} \right)^2 = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = \left(\frac{k_i}{k_f} \right)^2 \quad (3.24)$$

Comme pour les amplitudes, le résultat est encore indépendant de l'ordre des interfaces ou des différences d'impédances.

Ce dernier résultat permet de trouver une quantité conservée lors de la transformation. Considérons l'énergie totale E qu'absorberait un capteur interceptant l'ensemble du paquet d'onde. En notant T_i et T_f l'extension temporelle initiale et finale, on a

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{T_f \Pi_f}{T_i \Pi_i} = \frac{T_f \omega_f^2}{T_i \omega_i^2} \quad (3.25)$$

Par continuité, le nombre de front d'onde N est conservé à l'interface, de sorte que $T_i = N/\omega_i$ et $T_f = N/\omega_f$ (voir la figure 3.9c), ce qui donne le ratio² $T_f/T_i = \omega_f/\omega_i$. On en déduit que le ratio des énergies s'exprime comme

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{\omega_f}{\omega_i} \quad (3.26)$$

Un raisonnement et un résultat identique peuvent être obtenus pour les densités d'impulsion en travaillant avec l'extension spatiale plutôt que temporelle du paquet d'onde.

Le résultat précédent indique donc que la quantité conservée lors de la transformation est E/ω . Cette quantité peut s'interpréter comme le nombre de photons contenus dans le paquet d'onde. Ceci permet de réinterpréter qualitativement l'indépendance des coefficients de transmission vis à vis de l'impédance. Lors de la traversée de l'interface spatiale, une partie des photons est transmise tandis qu'une autre est réfléchi. Cette perte d'une partie des photons est compensée par la création de nouveaux photons à l'interface temporelle. Le résultat précédent indique donc que le nombre de photons perdus et créés est identique quelle que soit la différence d'impédance.

3.8 Les transformations spatiales et temporelles sur le cône de dispersion

On propose maintenant une vision globale de ce que peut être un contrôle total d'un paquet d'onde quasi-monochromatique. Dans l'espace de Fourier (k_x, k_y, ω) , le milieu de propagation est représenté par son cône de dispersion tandis qu'un paquet d'onde est associé à un point sur ce cône, comme illustré figure 3.10a. La manipulation de ce paquet d'onde suppose la capacité de déplacer ce point vers une nouvelle position arbitraire sur ce même cône. Une stratégie possible est d'utiliser un second milieu, représenté par un second cône. Nous avons vu dans ce chapitre comment utiliser ce second milieu pour modifier l'ordonnée du paquet d'onde sur le cône : il convient pour cela de lui faire traverser une série d'interfaces spatiales et temporelles comme illustré en figure 3.10b. Cette transformation se produit dans un plan de coupe vertical du cône.

D'un autre côté, la position angulaire du point sur le cône correspond, dans l'espace réel, à une variation de la direction du paquet d'onde. Cette dernière peut être variée *via* le second milieu par le passage d'interfaces spatiales de normale $\vec{u}$ et $\vec{v}$ différentes, comme le montre la figure 3.10c. Nous pouvons également tracer l'évolution correspondante dans l'espace de Fourier. La fréquence est conservée au passage d'interfaces spatiales, si bien que la transformation a cette fois-ci lieu dans un plan de coupe horizontal. Par ailleurs, nous avons déjà discuté au chapitre précédent que lors du passage d'une interface spatiale, les composantes des vecteurs d'ondes parallèles à l'interface sont conservées. Cela indique donc que la différence entre les vecteurs d'ondes dans les deux milieux $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ est portée par la normale à l'interface.

Cette dernière remarque permet de tracer l'évolution d'un faisceau dans l'espace spectral. Le milieu étant statique, la fréquence est constante et les relations de dispersion des milieux 1 et 2 dans l'espace $(\vec{k}_x, \vec{k}_y)$ sont, à la fréquence ω , des cercles de rayon ω/c_i correspondant aux sections horizontales des cônes. Considérons un faisceau incident de vecteur d'onde $\vec{k}_1$ selon $\vec{e}_x$ qui passe dans le milieu 2 *via* une interface de normale $\vec{u}$ comme représenté figure 3.10c. Le vecteur d'onde initial $\vec{k}_1$ est donc à l'intersection de l'axe $\vec{k}_x$ et du cercle représentant le premier milieu. On peut alors construire géométriquement le vecteur d'onde transmis $\vec{k}_2$ comme l'intersection entre la droite dirigée par $\vec{u}$ partant de $\vec{k}_1$ et le cercle associé au second milieu³, comme illustré figure 3.10c. Cette construction assure que $\vec{k}_2 - \vec{k}_1 \propto \vec{u}$ et que k_2 vérifie la relation de dispersion du milieu 2. Si

2. Ce ratio T_f/T_i peut aussi être calculé en regardant dans l'espace de Fourier le changement de largeur spectrale $\Delta f_i \rightarrow n\Delta f = \Delta f_f$ lors d'une succession de projection horizontale et verticale comme en figure 3.6a. Par principe d'incertitude, on a ensuite $\Delta f \propto 1/T$ ce qui donne $T_f/T_i = 1/n = \omega_f/\omega_i$.

3. Il existe en fait deux points vérifiant cette condition, mais seul l'un de ces points se propage dans le bon sens.

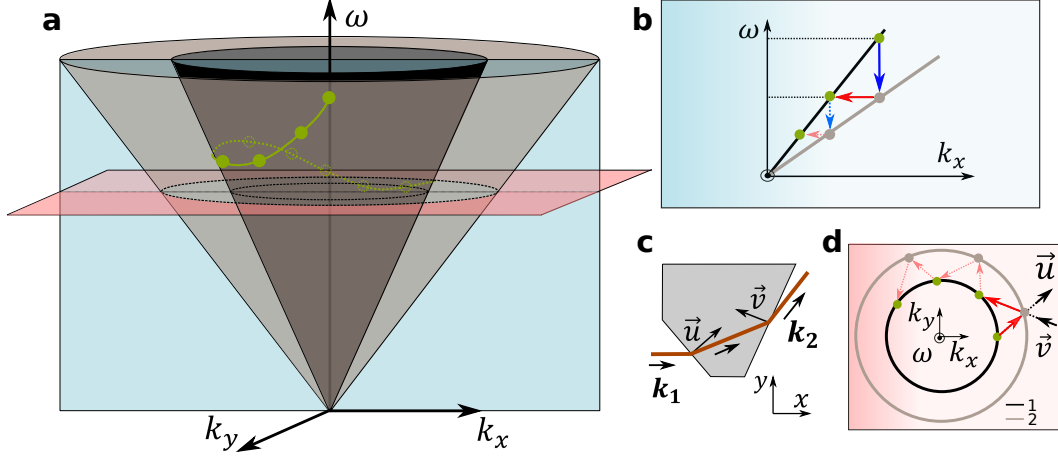


FIG. 3.10: (a) Cônes de dispersion associés aux deux milieux de propagation. Le contrôle total d'un paquet d'onde (k, ω) supposerait de pouvoir translater ce point n'importe où sur le cône comme illustré en vert. (b) Lorsque le paquet d'onde franchit une interface temporelle suivant x , la transformation se fait dans le plan (k_x, ω) et modifie l'altitude du point. (c) Dans le cas d'interfaces spatiales, la direction de l'onde peut être modifiée. (d) Spectralement, cela correspond à un changement de la coordonnée azimutale du paquet d'onde sur le cône, tandis que la fréquence est conservée.

le faisceau retourne dans le premier milieu par une interface de normale $\vec{v}$, on peut construire le nouveau vecteur d'onde de la même façon.

On remarque en particulier que le vecteur d'onde final diffère du vecteur d'onde initial sauf si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Dans l'espace de Fourier, cela indique que les projections effectuées ne sont pas inverse l'une de l'autre. Par ailleurs, la construction géométrique montre que la déviation spatiale du faisceau atteignable par de telles transformation est limitée. En utilisant plusieurs prismes, il est néanmoins possible, comme pour la conversion de fréquence, d'itérer ces transformations pour obtenir des déviations arbitraires. Ainsi, la combinaison d'interfaces spatiales et/ou temporelles permet une modification arbitraire de la coordonnée du paquet d'onde sur le cône.

3.9 Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons montré comment réaliser expérimentalement des interfaces temporelles pour des ondes de surface en utilisant l'électrostriction. Le contrôle électrique de la vitesse des ondes permet de changer cette dernière de manière significative et de créer des interfaces temporelles. Celles-ci permettent d'implémenter un procédé de conversion de fréquence arbitraire et linéaire en l'amplitude de l'onde, mais limité par les variations d'indice temporelles. Cette contrainte peut être contournée par l'itération de transformations élémentaires, composées d'une interface spatiale et d'une interface temporelles. L'enchaînement de sauts élémentaires permet alors une conversion de fréquence arbitraire, seulement limitée à terme par la dissipation et la possibilité d'avoir deux milieux avec des relations de dispersion différentes sur des grandes plages de fréquences.

Le contrôle électrique de l'indice permet par ailleurs une variation de ce dernier sur des temps rapides devant la propagation des ondes. Il est donc également possible d'étudier par ce système l'influence d'une modulation temporelle rapide mais périodique des propriétés du milieu. Cette étude fait l'objet du prochain chapitre.

4

Modulation temporelle périodique : une approche ondulatoire des instabilités paramétriques

4.1 Introduction

On s'intéresse maintenant au cas où la modulation du milieu n'est plus une fonction marche mais une fonction périodique du temps. Lorsqu'un bain est vibré verticalement, il a été montré que des ondes stationnaires apparaissaient lorsque l'accélération appliquée dépasse un certain seuil : c'est l'instabilité de Faraday [57–59, 83]. Les ondes ainsi générées oscillent à la fréquence moitié de la fréquence de forçage [84]. Formellement, le problème est régi par une équation de Mathieu de la forme

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \omega_0^2 (1 + p \cos(\omega t)) \Psi = 0 \quad (4.1)$$

avec Ψ le champ d'intérêt, ω_0 la pulsation propre du système, ω la pulsation du forçage et p son amplitude adimensionnée. Cette équation intervient en réalité dans de nombreux systèmes physiques [85]. Elle décrit par exemple l'évolution d'un pendule pesant dont on varierait la longueur au cours du temps [86] ou la génération de fréquence moitié dans les oscillateurs paramétriques optiques [87]. Dans tous les cas, une instabilité paramétrique apparaît pour un forçage suffisamment important menant à des solutions exponentiellement croissantes avec le temps.

L'équation de Mathieu peut également être perçue comme l'équation de propagation d'ondes dans un milieu périodique en temps. Il est alors naturel d'adopter un point de vue cristallographique sur cette équation [60, 88–90] s'inspirant directement de la propagation d'ondes dans des milieux périodiques spatiaux. La croissance exponentielle du champ s'interprète alors comme l'analogue d'un phénomène de bande interdite dans un cristal temporel [88], dont l'instabilité de Faraday est une manifestation expérimentale pour les ondes de surface [60].

Le déclenchement d'instabilités paramétriques à la surface d'un liquide conducteur en présence d'une force d'électrostriction sinusoïdale a également été étudié dans la littérature dans le cas d'un forçage sinusoïdal [64, 66, 91]. Nous proposons, dans ce chapitre, de revisiter cette instabilité d'un point de vue ondulatoire. On commencera pour cela par étudier le comportement d'ondes de surface soumises à une séquence de pics de tension, que l'on interprètera comme une succession d'interfaces temporelles. L'amplification des ondes apparaîtra alors comme une interférence constructive entre les ondes générées à toutes ces interfaces. En faisant une analogie formelle avec le cas d'un cristal spatial, on étudiera ensuite l'effet de l'ajout de désordre sur la propagation des ondes. On présentera ensuite des mesures expérimentales d'ondes de surface dans des milieux temporels désordonnés, que l'on comparera aux prédictions théoriques. On donnera pour finir une interprétation purement ondulatoire à ces observations, basée sur les interférences entre les différentes ondes transmises et réfléchies aux différentes interfaces temporelles.

4.2 Propagation dans un réseau d'interfaces temporelles

4.2.1 Introduction

Lorsque la surface d'un fluide conducteur est soumise à un potentiel $V(t)$ variable en temps arbitraire, l'équation d'évolution pour le mode associé au vecteur d'onde k s'écrit [66]

$$\frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2} + \omega_0(k)^2(1 - \alpha(k)V(t)^2)h_k = 0 \quad (4.2)$$

avec $\omega_0(k)$ donné par la relation de dispersion gravito-capillaire. Cette équation n'est valable que si les modes spatiaux présents sur le bain ne sont pas modifiés par la présence du forçage¹, ce qui est par exemple le cas lorsque ce dernier est homogène sur l'ensemble du bain. Dans le cas contraire, la modulation du forçage va, entre autre, introduire des conditions aux limites variables sur les bords de l'électrode, et donc modifier les modes propres spatiaux de la surface au cours du temps. L'équation (4.2) n'est alors plus rigoureusement valide, mais peut encore être utilisée si l'on néglige cette modification. Cette approximation a déjà été utilisée au chapitre précédent, lorsque nous avons remplacé le potentiel statique V par le potentiel dynamique $V(t)$ dans la formule de la vitesse des ondes. Elle semble correcte dans nos régimes expérimentaux, puisque le coefficient de réflexion mesuré dans le chapitre précédent est cohérent avec celui prédit par l'équation (4.2), qui impose la continuité de h_k et $\partial h_k / \partial t$ continue.

Dans le cas où $V(t)^2$ est sinusoïdal, l'équation (4.2) est bien l'équation de Mathieu (4.1). On s'intéresse plutôt ici au cas d'un potentiel composé d'une série de pics de période T . Le potentiel prend alors la forme

$$V(t)^2 \propto V_0^2 \sum_{n=1}^N \delta(t - T_n) \quad (4.3)$$

avec $T_n = nT$ l'instant associé au n^e pic. L'équation d'évolution s'exprime comme

$$\frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2} + \omega_0(k)^2 h_k = \beta \omega_0(k)^2 \sum_n \delta(t - T_n) h_k \quad (4.4)$$

avec β un préfacteur homogène à un temps, que l'on ajustera plus bas pour prendre en compte la forme exacte du pic de potentiel dans nos expériences.

Cette équation se rencontre également en matière condensée pour décrire des électrons dans un cristal unidimensionnel. En effet, l'équation de Schrödinger stationnaire en présence d'un potentiel cristallin de la forme $V(x) = \sigma \sum_n \delta(x - nL)$ s'écrit

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E\Psi = \sigma \sum_n \delta(x - nL) \quad (4.5)$$

L'équation d'évolution (4.4) est donc, à une permutation des variables spatiales et temporelles près, l'analogue de la propagation d'un électron dans un potentiel périodique. Les conditions aux limites sont cependant différentes dans les deux cas : l'équation (4.4) s'étudie généralement avec des conditions initiales (condition de Cauchy) tandis que l'équation (4.5) est plutôt couplée avec des conditions au bord (condition de Dirichlet ou de Neumann par exemple).

1. Cet aspect est par exemple discuté en détail dans [58] pour le cas de vibrations.

4.2.2 Matrices de transfert

La résolution de l'une ou l'autre de ces équations peut se faire dans le cadre de la théorie de Bloch (ou de Floquet). Cependant, on va plutôt tirer parti ici de la forme particulière du potentiel pour résoudre le problème par matrices de transfert. Cette méthode est classiquement utilisée en matière condensée pour décrire des électrons dans un réseau de diffuseurs ponctuels [92]. On pose pour cela

$$\phi_k(t) = \begin{bmatrix} h_k(t) \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial h_k}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

qui caractérise l'état du système à l'instant t . On cherche alors à lier le champ juste avant le n^e pic en fonction du champ juste avant le $n-1^e$ pic, comme illustré en figure 4.1a. On commence par intégrer l'équation (4.4) entre T_{n-1}^- et T_{n-1}^+ , ce qui donne (h_k étant continue)

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}(T_{n-1}^+) - \frac{\partial h_k}{\partial t}(T_{n-1}^-) = \beta \omega_0^2 h_k(T_{n-1}) \quad (4.7)$$

et le passage du pic peut donc s'écrire matriciellement en fonction d'une matrice $K(\beta)$ comme

$$\phi_k(T_{n-1}^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \phi_k(T_{n-1}^-) = K(\beta) \phi_k(T_{n-1}^-) \quad (4.8)$$

Jusqu'au prochain pic, l'équation d'évolution est alors celle d'un pendule oscillant sans terme source dont l'évolution est de la forme

$$h_k(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (4.9)$$

avec $A = h_k(0)$ et $B = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial h_k}{\partial t}(0)$ donnés par les conditions initiales. Le champ et sa dérivée évoluent alors selon une matrice de rotation

$$\phi_k(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} \phi_k(0) = R(\omega_0 t) \phi_k(0) \quad (4.10)$$

Ainsi, l'évolution sur une cellule élémentaire {pic + propagation} est donnée par

$$\phi_n = R(\omega_0 \Delta T_n) K(\beta) \phi_{n-1} = M_k(\beta, \Delta T_n) \phi_{n-1} \quad (4.11)$$

où l'on a noté $\phi_n = \phi_k(T_n^-)$ le champ avant le n^e pic et $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ l'intervalle de temps entre les deux pics. La matrice de transfert M dépend donc du vecteur d'onde considéré (via ω_0) ainsi que de l'amplitude et de l'intervalle entre les interfaces. L'évolution du champ à l'instant T_n est obtenue en fonction du champ initial par récurrence comme

$$\phi_n = \left(\prod_{i \leq n} M(\beta, \Delta T_i) \right) \phi_0 \quad (4.12)$$

Cette équation est valable pour une série d'interfaces d'amplitude et d'espacement quelconque, et n'est donc pas limitée aux systèmes périodiques.

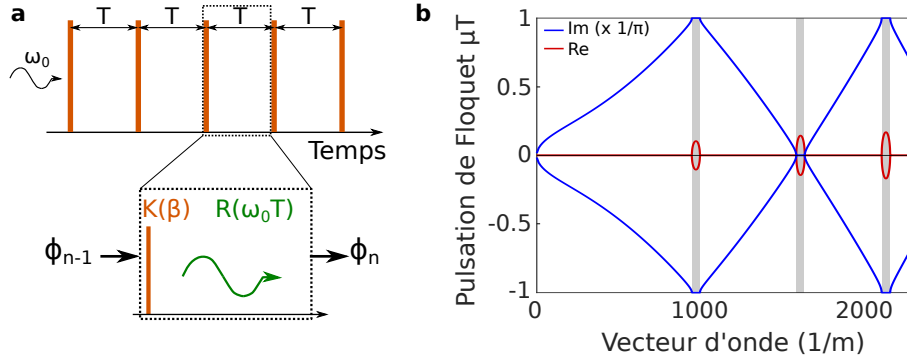


FIG. 4.1: (a) Schéma d'une onde à la pulsation ω_0 dans un peigne de Dirac de période T . L'évolution du champ sur une cellule élémentaire entre deux interfaces est donnée par le produit matriciel d'une matrice associée à l'interface $K(\beta)$ et de la matrice de propagation $R(\omega_0 T)$. (b) Diagramme de bande obtenu par calcul des valeurs propres de la matrice $M_k(\beta, T)$ pour des valeurs expérimentales typiques et une fréquence d'excitation $1/T = 60$ Hz. La partie réelle est nulle sauf sur quelques bandes localisées.

4.2.3 Cas d'une modulation périodique

Dans le cas où les interfaces sont également espacées ($\Delta T_i = T$) et de même amplitude β , l'équation (4.12) se simplifie comme

$$\phi_n = M_k(\beta, T)^n \phi_0 \quad (4.13)$$

et le comportement de ϕ_n est entièrement caractérisé par les valeurs propres de la matrice M_k , qui est le propagateur dans le cadre de la théorie de Floquet. On s'inspire donc de ce formalisme et l'on écrit les valeurs propres de cette matrice sous la forme $e^{\mu_i T}$, avec $(\mu_i)_{i=1,2}$ les pulsations complexes associées. Leurs parties imaginaires sont associées à une oscillation du champ, tandis que leurs parties réelles donnent le caractère exponentiellement amplifié ou amorti des ondes au cours du temps. La partie imaginaire n'est pas définie de manière unique puisque les pulsations μ_i et $\mu_i + 2i\pi/T$ sont indistinguables. On choisira donc la pulsation dont la partie imaginaire est comprise dans la première zone de Brillouin $]-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$.

Les pulsations μ_i en fonction de k sont tracées en figure 4.1b, et deux comportements distincts des valeurs propres apparaissent :

- en dehors des intervalles grisés, la partie réelle est nulle et le module du mode associé est donc invariant par propagation. En revanche, les deux parties imaginaires sont distinctes et opposées l'une de l'autre. Ces modes correspondent à des ondes propagatives dans les deux directions de l'espace.
- sur quelques intervalles, la partie réelle n'est plus dégénérée et se répartit de part et d'autre de l'axe des abscisses. Ces intervalles correspondent aux langues d'instabilités dans le formalisme des équations de Mathieu, ou encore à des bandes interdites dans celui de la matière condensée. Les modes correspondants sont alors exponentiellement amortis ($\text{Re}(\mu_i) < 0$) ou amplifiés ($\text{Re}(\mu_i) > 0$). Les parties imaginaires sont quant à elle dégénérées et valent 0 ou $\pm\pi/T$ selon les bandes considérées.

On retrouve ici un comportement identique à l'instabilité de Faraday. La première bande d'instabilité correspond à une partie imaginaire de π/T , c'est-à-dire à un doublement de période du mode par rapport à l'excitation. La seconde bande d'instabilité oscille quant à elle à la même fréquence que le forçage. Le graphe des pulsations de Floquet est extrêmement similaire au diagramme de bande d'un cristal spatial, le rôle de la fréquence et du vecteur d'onde étant permuté entre l'un et l'autre. Les bandes d'amplification observées sont la contrepartie temporelle des bandes interdites d'un cris-

tal spatial unidimensionnel [88]. L'existence de modes exponentiellement croissants est notamment permise par la non-conservation de l'énergie du fait de la modulation temporelle du milieu.

4.3 Ajout de désordre

Dans un cristal spatial unidimensionnel, l'ajout de désordre dans la structure cristalline modifie drastiquement le comportement des électrons y évoluant. Pour un potentiel $V(r)$ purement périodique, chaque état propres de l'Hamiltonien est spatialement uniformément distribué sur l'ensemble des sites. Ce n'est plus le cas lorsqu'un bruit aléatoire est ajouté au potentiel, par exemple pour simuler la présence d'impuretés ou de défauts, et on peut alors montrer que les fonctions d'ondes ont typiquement des distributions spatiales exponentielles. L'ajout de désordre dans le potentiel cristallin mène ainsi à des phénomènes de localisation d'Anderson, qui modifient par exemple les propriétés de conduction des solides [93].

L'analogie discutée dans les sections précédentes entre cristal spatial et temporel questionne l'influence de l'ajout de désordre dans ce dernier cas. Ce problème a été discuté dans la littérature dans le cadre de la mécanique quantique [94–96], de l'électromagnétisme [97, 98] ou pour un pendule pesant forcé aléatoirement [99]. Dans tous ces systèmes, le résultat principal est la croissance exponentielle du champ avec le temps, avec un temps caractéristique dépendant du désordre. Comme pour le cas ordonné, la décroissance exponentielle dans le cas spatial est donc remplacée par une croissance exponentielle dans le cas temporel. On discute maintenant formellement l'existence d'un tel phénomène pour notre système particulier.

4.3.1 Cadre du modèle

On choisit, pour introduire le désordre, de déplacer chaque interface du milieu périodique d'une certaine quantité. Dans le cas spatial, cela reviendrait à modifier aléatoirement la position de chaque atome du réseau autour de sa position initiale. Le temps d'occurrence de la n^e interface est donc défini comme

$$T_n = nT + T\epsilon_n \quad (4.14)$$

où les (ϵ_n) sont des variables indépendantes distribuées selon une loi uniforme sur $[-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma]$. Ce choix garantit que la moyenne et l'écart type de T_n soient respectivement nT et σT . Le choix de σ permet donc de régler directement le niveau de désordre dans les simulations. L'écart entre deux interfaces devient alors également une variable aléatoire $\Delta T = T(1 + \epsilon_n - \epsilon_{n-1})$, de même que la matrice de propagation d'une interface à la suivante. Ainsi, le produit (4.12) ne peut plus être simplifié mais peut être calculé numériquement. On prendra comme état initial $\phi_0 = [1, 0]$ et on calculera à chaque étape la norme du champ de hauteur, donc le module de la première composante de ϕ_n . Par correspondance avec les expériences, on prendra $1/T = 60$ Hz. Les simulations seront menées sur quelques centaines de secondes, correspondant à quelques dizaines de milliers d'interfaces.

4.3.2 Résultats numériques et théoriques

La figure 4.2a montre le module du résultat (en échelle logarithmique) en fonction du temps, pour $k = 819.2 \text{ m}^{-1}$ situé hors de la bande d'instabilité et différentes force de désordre σ . Dans le cas ordonné $\sigma = 0$, le module est bien constant au cours du temps (les oscillations périodiques sont dues au choix de norme). Au contraire, lorsque le désordre est ajouté, on observe une croissance exponentielle de l'onde avec le temps. Il s'agit là de l'équivalent formel de la localisation d'Anderson dans un cristal spatial désordonné : des modes initialement propagatifs exhibent, du fait de l'introduction

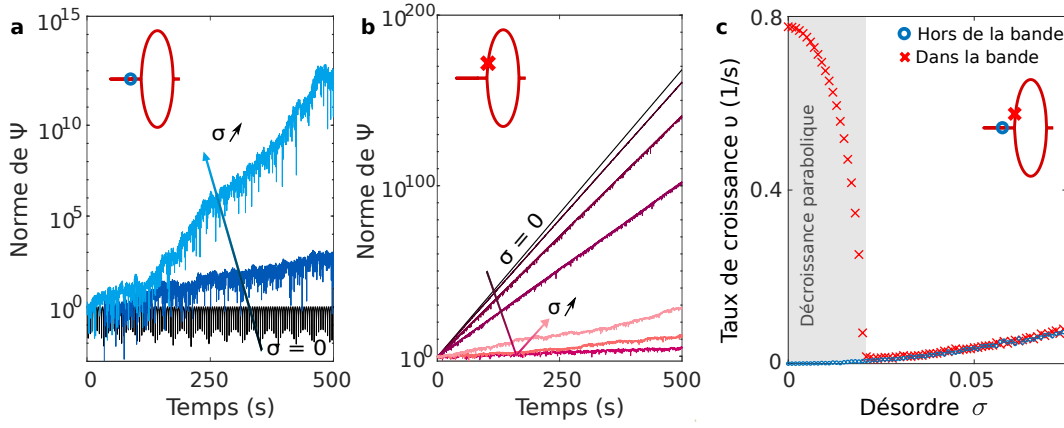


FIG. 4.2: (a) Pour un vecteur d'onde $k = 819.2 \text{ m}^{-1}$ hors de la première bande, l'ajout de désordre provoque une croissance exponentielle des ondes. (b) Pour un vecteur d'onde $k = 819.5 \text{ m}^{-1}$ dans la première bande, l'ajout de désordre provoque une baisse du taux de croissance des ondes puis une augmentation lorsque le désordre est trop important ($\sigma = [0.1, 0.6, 1.1, 1.6, 2.1, 7, 10] \times 10^{-2}$). (c) Mesure du taux de croissance par ajustement exponentiel des figures précédentes et différents désordre ($\sigma = [0, 3, 6] \times 10^{-2}$). Les taux de croissance hors et dans la bande coïncident pour un désordre assez important.

de désordre, un comportement exponentiel. Lorsque le désordre augmente, le temps de croissance typique des ondes diminue, comme le montre la figure 4.2a.

Lorsque le vecteur d'onde $k = 819.5 \text{ m}^{-1}$ est choisi dans une bande instable, le comportement est plus complexe, comme le montre la figure 4.2b. En l'absence de désordre, un tel mode croît exponentiellement puisqu'il est associé à une pulsation de Floquet réelle. L'ajout de désordre ralentit la croissance exponentielle des ondes, et le taux de croissance diminue pour un faible niveau de désordre. Au-delà d'un certain niveau de désordre critique $\sigma_c \approx 0.02$, on constate cependant à nouveau une accélération de la croissance des ondes avec le désordre. Ce comportement est très différent de celui d'un vecteur d'onde choisi hors de la bande d'instabilité, alors même que les valeurs numériques des vecteurs d'ondes considérées sont très proches ($\Delta k/k \sim 0.03\%$).

Pour caractériser quantitativement l'effet du désordre, on remarque tout d'abord que la simulation donne toujours une loi exponentielle pour la croissance des ondes. Ce comportement peut être prédit théoriquement grâce au théorème de Furstenberg, qui donne le comportement asymptotique d'un produit de matrices indépendantes identiquement distribuées. Les matrices d'évolution $M_k(\beta, \Delta T_n)$ ne sont cependant pas indépendantes, puisque ΔT_n dépend de $\epsilon_n - \epsilon_{n-1}$ et non pas seulement de l'un ou l'autre. On procède donc au changement de variable $\Psi_n = R(-\omega_0 T \epsilon_n) \phi_n$, de sorte que l'équation d'évolution (4.12) se réécrit $\Psi_n = \prod_{i \leq n} M'_i \Psi_0$ avec les M'_i satisfaisant cette fois-ci les hypothèses du théorème de Furstenberg. Ce dernier prédit alors que presque sûrement

$$\prod_{i \leq n} M'_i \sim_{n \rightarrow \infty} e^{v T n} \quad (4.15)$$

avec v l'exposant de Lyapunov associé. L'ajout de désordre mène donc à la croissance exponentielle des ondes avec un taux de croissance v qui dépend des paramètres du problème.

L'estimation de ce dernier peut se faire par ajustement sur les données numériques. Pour chaque force de désordre σ , on calcule le produit d'un grand nombre de matrices ($n \sim 10^5$) dont on extrait ensuite le taux de croissance associé $v(\sigma)$. Les résultats, tracés en figure 4.2c, sont conformes aux observations qualitatives précédentes. Hors de la bande d'instabilité ($k = 819.2 \text{ m}^{-1}$), le taux de croissance augmente avec le désordre σ . A l'inverse, dans la bande ($k = 819.5 \text{ m}^{-1}$), le taux de

croissance initialement non nul diminue rapidement avec l'ajout de désordre, selon une loi que l'on peut approximer par une parabole. Il augmente ensuite au-delà d'un désordre critique, qui correspond graphiquement au point d'intersection avec le taux de croissance calculé hors de la bande (voir figure 4.2c). Nous donnerons un peu plus loin une interprétation ondulatoire à ces résultats, et l'on présente maintenant les résultats expérimentaux obtenus pour des ondes de surface soumises à des séquences de pics de tension désordonnées.

4.4 Résultats expérimentaux

Bien que l'effet de désordre temporel dans un milieu structuré en temps ait été étudié théoriquement, l'observation expérimentale reste extrêmement délicate du fait de la difficulté à moduler temporellement les propriétés d'un milieu. En hydrodynamique, l'étude de l'instabilité de Faraday lorsqu'un bruit de phase est ajouté à la vibration a été étudiée avec le formalisme des instabilités [100]. Les résultats présentés ici, qualitativement similaires, seront interprétés dans le cadre des milieux variables en temps. Cela est notamment permis par la forme particulière en pics de Dirac de l'excitation appliquée, qui joue le rôle de séquence d'interfaces temporelles dont la localisation est aléatoire.

4.4.1 Dispositif expérimental

Pour réaliser expérimentalement un cristal temporel désordonné, on utilise un montage expérimental très similaire à celui utilisé précédemment comme illustré en figure 4.3a. Dans le cas ordonné, le signal de tension envoyé dans l'électrode est une série de pics de tension avec une période $T = 1/60s$. Pour s'approcher au mieux des pics de Dirac, le signal envoyé est une arche de cosinus de durée totale $0.4T$ et d'amplitude maximale V_0 (voir figure 4.3a). Pour retrouver le paramètre β correspondant dans le modèle, on égalise l'intégrale de V^2 sur une période. On trouve alors la correspondance

$$\beta = \frac{3T}{20} \alpha(k) V_0^2 \quad (4.16)$$

qui est bien homogène à un temps. Cette formule permet d'ajuster les simulations aux conditions expérimentales. Les séquences de pics, générées avec *Matlab*, sont émises par la sortie son de l'ordinateur qui joue le rôle de générateur de tension. Ceci permet d'envoyer des séquences de plusieurs dizaines de milliers d'interface qu'il était impossible de stocker dans la mémoire des générateurs de tension à disposition. Le signal est ensuite amplifié par un amplificateur haute-tension (Trek 20/20C) et envoyé sur l'électrode. Les ondes sous l'électrode sont imagées avec la technique de *FCD* (non représentée sur le schéma expérimental) déjà présentée au chapitre 2.

4.4.2 Résultats

Lorsque le signal de tension est parfaitement périodique de fréquence $f = 60$ Hz, on observe sous l'électrode l'apparition d'ondes stationnaires à la fréquence moitié $f = 30$ Hz et de vecteur d'onde mesuré $k \approx 870 \text{ m}^{-1}$ correspondant à la première bande d'instabilité. Au début du forçage, la croissance des ondes est exponentielle comme illustré en figure 4.3b. L'amplitude tend ensuite à saturer du fait des non-linéarités hydrodynamiques (cette phase n'est pas représentée ici). Lorsque du désordre est ajouté en perturbant la position des interfaces, on observe une fois encore une croissance exponentielle des ondes avant saturation, mais cette croissance est plus lente. Ceci est en accord qualitatif avec les simulations numériques pour des ondes dans la bande d'instabilité, où l'exposant ν présentait une décroissance parabolique à faible désordre (voir figure 4.2c).

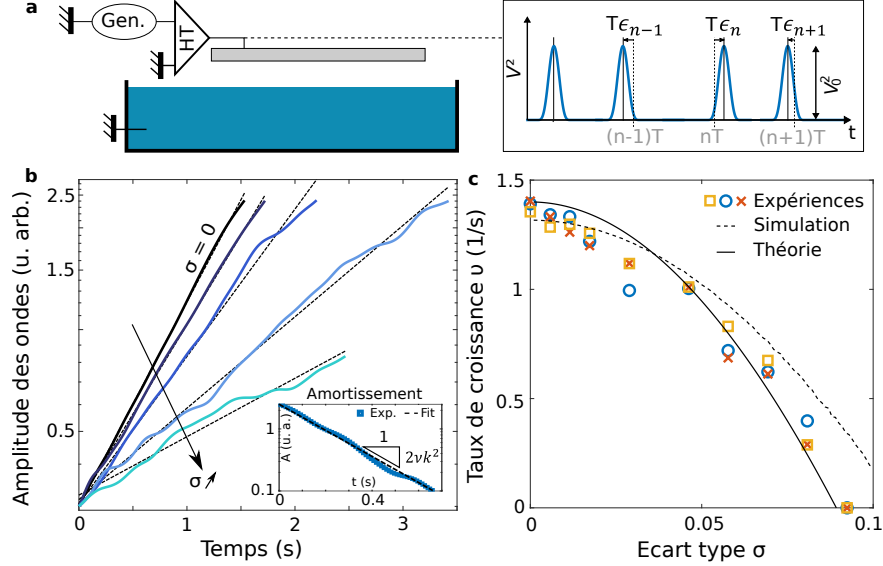


FIG. 4.3: (a) Schéma du dispositif expérimental : une série de pics de tension de fréquence 60 Hz est envoyé par un amplificateur haute-tension dans l'électrode. Les ondes sous l'électrode sont imagées par *FCD*, non représentée ici. (b) Mesure de l'amplitude des ondes à 30 Hz au cours du temps pour différents désordre $\sigma = [0, 1.7, 4.6, 6.9, 8.1] \times 10^{-2}$ en échelle logarithmique. Insert : mesure de la décroissance des ondes en l'absence de forçage, en échelle logarithmique. (c) Mesure du taux de croissance à partir de (b) pour différents forces de désordre. L'expérience est répétée trois fois pour tester la robustesse vis à vis des conditions expérimentales. Les résultats sont comparés aux simulations (trait pointillé) et à un ajustement théorique décrit dans le texte (traits pleins).

4.4.3 Le rôle de la viscosité

Par rapport aux simulations, la présence de viscosité restreint significativement les observations effectivement réalisables. Dans la bande instable, la viscosité repousse le seuil d'apparition des ondes, l'amplification exponentielle due au forçage devant être supérieure à l'amortissement exponentiel dû à la viscosité [83]. Comme discuté au chapitre 2, le temps d'amortissement visqueux est choisi de la forme $\frac{1}{\tau} = 2\nu_{eff}k^2$ avec ν_{eff} la viscosité effective que l'on mesure expérimentalement. Pour cela, on part d'un champ d'onde développé sur le bain et on coupe le forçage électrique. Les ondes stationnaire sont alors exponentiellement amorties comme montré en figure 4.3b. Ceci permet d'extraire le temps d'amortissement visqueux et la répétition de l'expérience donne la valeur de viscosité effective moyenne de

$$\nu_{eff} \approx 3.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (4.17)$$

Cette valeur est plus élevée que la viscosité de l'eau $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et indique donc que d'autres sources de dissipation sont présentes (pollution à la surface ou présence de bords par exemple).

Cette viscosité peut être ajoutée dans le modèle en multipliant la matrice de transfert par $e^{-T/\tau}$ pour prendre en compte l'amortissement durant le temps T entre les deux interfaces. Cela a deux conséquences principales :

- hors des bandes d'instabilité, les ondes sont exponentiellement amorties. Les taux de croissance liés à l'ajout de désordre ne permettent pas de compenser l'amortissement, et ces ondes ne sont donc jamais amplifiées expérimentalement
- dans les bandes d'instabilité, la partie réelle peut encore devenir positive pour un forçage assez grand, menant à l'instabilité décrite ci-dessus. Le temps d'amortissement visqueux augmentant quadratiquement avec k , seule la première bande est effectivement instable pour des

valeurs expérimentales typiques.

Ainsi, il n'est possible d'observer expérimentalement que les ondes amplifiées dans la première bande d'instabilité. La présence d'un mode développé sur toute la surface empêche par ailleurs l'observation de tout autre mode pouvant éventuellement apparaître avec un forçage plus important. En pratique, seul le mode associé au vecteur d'onde le plus instable sera donc effectivement observé. La valeur mesurée $k \approx 870 \text{ m}^{-1}$ est en bon accord avec les prédictions du modèle qui donne $k = 836 \text{ m}^{-1}$ pour le mode le plus instable dans les conditions expérimentales associées ($V_0 \sim 8 \text{ kV}$, $d = 5 \text{ mm}$, $\gamma = 50 \text{ mJ/m}^2$, $\nu_{eff} = 3.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

4.4.4 Taux de croissance et désordre

Le taux de croissance exponentiel ν , défini tel que $h(t) \propto e^{\nu t}$ dans la phase de croissance en l'absence de non-linéarités, est mesuré par des ajustements linéaires de l'amplitude des ondes au cours du temps en échelle logarithmique. La mesure de ν en fonction du niveau de désordre σ est tracé en figure 4.3c. On obtient alors une première série de mesure $\nu(\sigma)$ pour $0 \leq \sigma \leq 0.1$. Pour s'assurer que la variation observée est bien due au désordre, on reproduit alors à deux autres reprises cette même série de mesure. Cela permet d'exclure une variation des conditions expérimentales, comme la variation de la distance électrode-bain du fait de l'évaporation, des causes possibles pour la variation de ν observée. Les résultats montrent une bonne répétabilité et le taux de croissance diminue avec le désordre. Pour $\sigma \approx 0.09$, le taux de croissance est approximativement nul et la croissance des ondes n'est plus observée. Une baisse similaire du taux de croissance a été reportée pour l'instabilité de Faraday en présence d'un bruit de phase [100].

Le résultat obtenu peut être comparé à la simulation numérique. La valeur de V_0 est ajustée pour obtenir un taux de croissance ν identique à celui observé expérimentalement dans le cas sans désordre. Le taux de croissance en fonction du désordre σ est alors tracé comme en figure 4.2d. Les résultats expérimentaux et numériques concordent approximativement et présentent des formes très similaires. Comparée à la figure 4.2d, cela correspond à la partie parabolique décroissante de faible désordre dans la bande instable.

4.4.5 Une prédiction heuristique du taux de croissance

Il existe une méthode heuristique, issue de l'étude de l'instabilité de Faraday en présence de bruit de phase [100], pour prédire la forme parabolique de cette courbe. En première approximation, on peut supposer que les ondes stationnaires à 30 Hz sont déclenchées par la composante du signal oscillant à 60 Hz uniquement, indépendamment des autres composantes. Le transformée de Fourier du potentiel (4.3) s'écrit

$$V_\sigma^2(\omega) = \xi V_0^2 \sum_{n=1}^N e^{i\omega T_n} \quad (4.18)$$

avec ξ homogène à un temps. On s'intéresse ici à la composante à $\omega_f = 2\pi/T$. La définition (4.14) des temps d'interface permet alors d'écrire

$$V_\sigma^2(\omega_f) = \xi V_0^2 \sum_{n=1}^N e^{2i\pi\epsilon_n} \quad (4.19)$$

Cette somme peut être estimée pour N grand avec le théorème central limite comme

$$\begin{aligned} V_\sigma^2(\omega_f) &= \xi N V_0^2 \langle e^{2i\pi\epsilon_n} \rangle \\ &= \xi N V_0^2 \text{sinc}(2\pi\sqrt{3}\sigma) \\ &\approx \xi N V_0^2 \text{sinc}(1 - 2\pi^2\sigma^2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

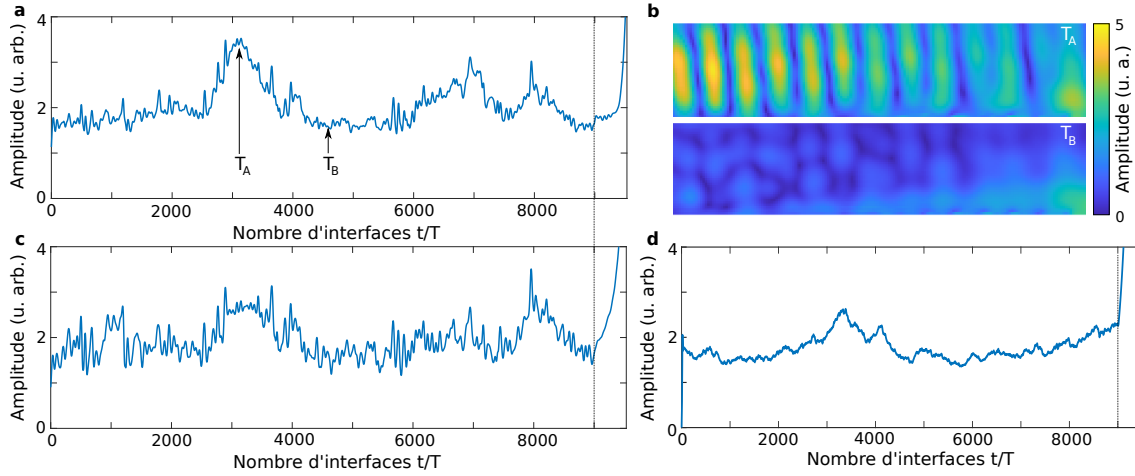


FIG. 4.4: (a) Amplitude des ondes en fonction du temps pour un taux de croissance nul et un désordre $\sigma \approx 0.09$. L'amplitude est approximativement constante mais présente des phénomènes d'intermittence. (b) Lorsque la même séquence de pics est envoyée, les mêmes phénomènes d'intermittence sont observés. (c) Simulation de l'amplitude des ondes pour la même séquence de pics. Les événements de localisation similaire sont visible. (d) Valeur absolue de l'amplitude du champ d'onde mesuré durant un pic d'intermittence (en haut) et hors d'un pic (en bas).

dans la limite des faibles bruits $\sigma \ll 1$.

On utilise ensuite le fait que proche du seuil, le taux de croissance est proportionnel à la distance au potentiel seuil V_c^2 , c'est à dire $v \propto V^2 - V_c^2$. Cette relation évaluée en présence et en l'absence de désordre donne alors

$$v(\sigma) - v(\sigma = 0) \propto V_\sigma^2(\omega_f) - V_{\sigma=0}^2(\omega_f) \quad (4.21)$$

ce qui donne donc, dans la limite des faibles désordre, un comportement parabolique

$$v(\sigma) = v_0(1 - \zeta\sigma^2) \quad (4.22)$$

avec v_0 le taux de croissance en l'absence de désordre et ζ une constante. La figure 4.3c montre l'ajustement parabolique pour $v_0 = 1.4$ et $\zeta = 120$ des données expérimentales, qui décrit de manière très satisfaisante les observations.

4.5 Etude des fluctuations et phénomène d'intermittence

On s'intéresse maintenant aux fluctuations du champ d'onde autour de son profil de croissance moyen. On se place pour cela dans le cas où le taux de croissance mesuré est nul ($\sigma \approx 9.10^{-2}$) et on envoie alors une certaine séquence de 9000 pics de tension d'une durée totale de 180s. Dans ce cas, l'amplitude des ondes est approximativement constante mais présente des fluctuations de l'ordre de l'amplitude moyenne comme illustré en figure 4.4a. Ces fluctuations sont lentes devant la fréquence d'excitation et durent typiquement durant quelques centaines de périodes. Celles-ci sont associées à l'émergence d'un champ d'onde structuré comme en figure 4.4b non visible la plupart du temps. Des phénomènes d'intermittence, que l'on peut rapprocher de ces observations, ont également été reportés pour des systèmes régis par une équation de Mathieu en présence de bruit multiplicatif [101, 102]

La structure des fluctuations dépend de la séquence particulière choisie. Ainsi, lorsque la même séquence de pics de tension est appliquée une seconde fois, les mêmes événements de croissance des

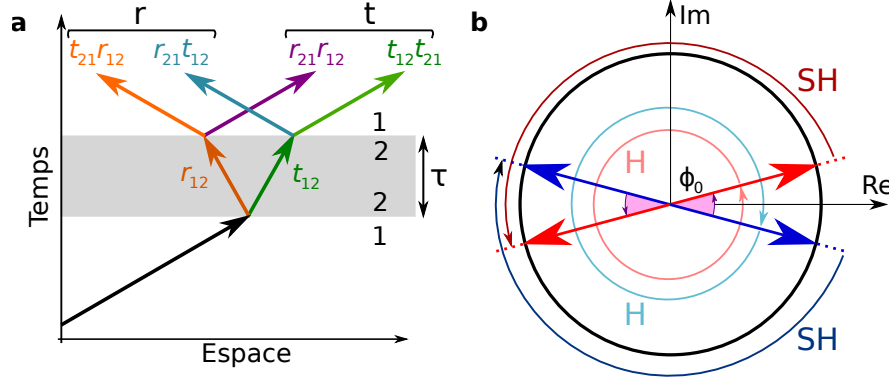


FIG. 4.5: (a) Représentation des ondes générées par la traversée de deux interfaces temporelles successives espacées d'un temps τ et coefficients en amplitude associés. (b) Les deux ondes contra-propagatives peuvent être représentées par deux vecteurs dans le plan complexe tournant à la même vitesse angulaire ω_0 dans des sens différents. La conservation de la phase relative entre les deux vecteurs Φ_0 , après un temps T , peut être obtenue en faisant faire un demi-tour ou un tour complet aux vecteurs. Le premier cas donne naissance à des ondes sous-harmoniques (SH) associées à $\omega_0 T = \pi$ tandis que le deuxième cas donne des ondes harmoniques associées à $\omega_0 T = 2\pi$.

ondes sont observés comme montré en figure 4.4c. Ces derniers ne sont donc pas dus à des variations aléatoires des conditions expérimentales mais des effets du désordre. Ils peuvent être interprétés comme une figure d'interférence dans le domaine temporel issue de l'histoire particulière des ondes diffusées par la série d'interfaces. On peut également reproduire ces événements numériquement, en calculant le produit matriciel (4.12) pour la séquence de pics de tension utilisée dans nos expériences. Après un ajustement précis du forçage $V = 7.322$ kV pour obtenir un taux de croissance nul, le champ d'onde simulé en figure 4.4d est d'allure similaire aux résultats expérimentaux.

À la fin de la séquence désordonnée, une séquence ordonnée de même amplitude V_0^2 est envoyée durant une dizaine de seconde, matérialisé par la ligne pleine en figure 4.4. Comme attendu, les ondes croissent exponentiellement avec le temps. Cela montre une fois encore le rôle du désordre dans l'absence de croissance d'ondes de Faraday, malgré une amplitude de forçage V_0^2 identique au cas ordonné. La section suivante propose une interprétation ondulatoire du rôle du désordre sur la croissance des ondes.

4.6 Une approche ondulatoire de l'instabilité paramétrique

4.6.1 Evolution du champ d'ondes à l'interface

Nous avons vu au chapitre précédent qu'en présence d'une interface temporelle, deux ondes contra-propagatives étaient générées. À partir d'une onde propagative $A_i e^{i\omega_0 t}$ à une fréquence donnée, on s'attend donc, après un pic de tension, à voir émerger deux ondes transmise $t A_i e^{i\omega_0 t}$ et réfléchie $r A_i e^{-i\omega_0 t}$. On peut alors interpréter l'instabilité paramétrique comme une interférence constructive entre les différentes ondes générées aux différentes interfaces temporelles. On détermine pour cela dans une premier temps les coefficients r et t liés aux passages d'un unique pic de tension. L'expression de ces coefficients peut être établie de deux manières différentes, que l'on décrit ci-dessous. On s'intéressera dans un deuxième temps à l'énergie portée par le champ d'onde dans un réseau d'interfaces, et l'on montrera que celle-ci peut, sous certaines conditions, croître exponentiellement avec le temps.

4.6.2 A partir des interfaces temporelles

On a déterminé au chapitre 3 l'expression des coefficients de réflexion à une interface temporelle. On peut donc procéder au calcul du coefficient de réflexion pour deux interfaces temporelles T_{12} et T_{21} espacées d'un temps τ comme illustré en figure 4.5a. Pour simuler un pic de tension en forme de Dirac, on supposera l'espacement entre les deux interfaces très faible devant la période de l'onde, c'est à dire que $\omega_0\tau \ll 1$.

On part d'une onde initiale $A_0 e^{i\omega_0 t}$ comme illustré en figure 4.5b. Le franchissement de la première interface temporelle, supposé au temps $t = 0$ sans perte de généralité, donne naissance à deux ondes contra-propagatives $t_{12}A_0 e^{i\omega_0 t}$ et $r_{12}A_0 e^{-i\omega_0 t}$. Après un temps τ , on est en présence de quatre ondes illustrées en figure 4.5b. Le champ d'onde final s'écrit alors

$$(r_{21}r_{12}e^{-i\Phi_\tau} + t_{21}t_{12}e^{i\Phi_\tau})e^{i\omega_0 t} + (t_{21}r_{12}e^{-i\Phi_\tau} + r_{21}t_{12}e^{i\Phi_\tau})e^{-i\omega_0 t} \quad (4.23)$$

avec Φ_τ le déphasage acquis par l'onde durant le temps τ . Le premier terme correspond au terme transmis tandis que le second est le terme réfléchi. En utilisant le tableau 3.3, on obtient après calcul les coefficients de transmission et de réflexion pour la combinaison des deux interfaces

$$\begin{aligned} r &= i \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{2Z_1 Z_2} \sin(\Phi_\tau) & t &= \cos(\Phi_\tau) + i \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2Z_1 Z_2} \sin(\Phi_\tau) \\ &\approx i \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{2Z_1 Z_2} \Phi_\tau & &\approx 1 + i \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2Z_1 Z_2} \Phi_\tau \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le cas d'une onde se propageant dans la direction opposée peut se déduire du cas précédent en prenant le complexe conjugué des équations précédentes. Les coefficients de transmission et de réflexion deviennent alors t^* et r^* respectivement. Lorsque les impédances sont accordées $Z_1 = Z_2$, on trouve $r = 0$ et $t = e^{i\Phi_\tau}$, ce qui correspond à une propagation de l'onde durant le temps τ sans amplification ni génération d'ondes contra-propagatives.

4.6.3 A partir du modèle paramétrique

On propose maintenant de calculer la réflexion et la transmission d'une onde à travers un pic de Dirac, sans distinguer les deux interfaces. On part pour cela d'un champ propagatif $h_i = A_i e^{i\omega_0 t}$ juste avant le pic de tension à $t = 0$. Après celui-ci, le champ est resté continu mais sa dérivée a subi une discontinuité, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} h &= A_i \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= iA_i\omega_0 + \beta\omega_0^2 A_i \end{aligned} \quad (4.25)$$

On cherche donc le nouveau champ sortant sous la forme $Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$. Après calcul, on trouve comme nouveau champ

$$h = tA_i e^{i\omega_0 t} + rA_i e^{-i\omega_0 t} \quad (4.26)$$

avec t et r les coefficient de transmission et de réflexion recherchés donné par

$$r = \frac{i\beta\omega_0}{2} \quad t = 1 - \frac{i\beta\omega_0}{2} = 1 - r \quad (4.27)$$

En prenant un champ initial de la forme $h_i = B_i e^{-i\omega_0 t}$, on trouve comme précédemment que les coefficients de transmission et de réflexion doivent être remplacé par t^* et r^* respectivement. La réflexion est donc due à l'ajout d'une composante supplémentaire dans les conditions initiales par

rapport à la propagation libre, qui génère la composante contra-propagative. Ce phénomène avait déjà été décrit dans le cas d'ondes de surface soumises à un choc de gravité [62].

Les deux résultats se rejoignent dans la limite où l'espace entre les interfaces tend vers zéro $\tau \rightarrow 0$, tandis que l'impédance du second milieu tend vers l'infini $Z_2 \rightarrow \infty$. En supposant que $Z_2 \Phi_\tau = \Gamma$ reste constant, on obtient $r = i\Gamma/2$ et $t = 1 + i\Gamma/2$ qui reproduit, à un signe près, le cas d'un pic de Dirac. Dans la limite inverse d'une impédance tendant vers zéro avec Φ_τ/Z_2 constant, on peut reproduire les signes des expressions (4.27) puisque dans ce cas $r = -i\Gamma/2$ et $t = 1 + i\Gamma/2$. Le choix de l'une ou l'autre de ces limites détermine donc la phase relative des ondes contra-propagatives générées aux interfaces.

4.6.4 Bilan énergétique

On peut maintenant faire un bilan d'énergie à l'interface. La forme la plus générale pour le champ d'onde est une somme de deux ondes contra-propagatives

$$h_i = A_i e^{i\omega_0 t} + B_i e^{-i\omega_0 t} \quad (4.28)$$

qui devient juste après l'interface, par ce qui précède

$$h_f = (tA_i + r^* B_i) e^{i\omega_0 t} + (rA_i + t^* B_i) e^{-i\omega_0 t} \quad (4.29)$$

où l'on a regroupé ensemble les termes se propageant dans la même direction.

L'énergie associée au champ est la somme des énergies associées à chacune des ondes propagatives et s'écrit (avec un préfacteur unitaire)

$$E_i = |A_i|^2 + |B_i|^2 \quad (4.30)$$

Après l'interface, cette énergie devient

$$E_f = |tA_i + r^* B_i|^2 + |rA_i + t^* B_i|^2 \quad (4.31)$$

Supposons qu'avant l'interface, le champ d'onde était une onde stationnaire, de sorte que $B_i = A_i e^{-i\Phi_0}$ avec A_i réel. On note, par ce qui précède, les coefficients de transmission et de réflexion $t = 1 + r'$ et r avec r et r' imaginaire purs. On limitera le calcul au cas où $r, r' \ll 1$ correspondant à une faible génération d'ondes à chaque interface. L'énergie initiale vaut alors $E_i = 2|A_i|^2$ tandis que l'énergie après l'interface est donnée au premier ordre par

$$E_f = E_i |t + r^* e^{i\Phi}| = E_i (1 + 2|r| \sin(\Phi_0)) + O(r^2, r'^2) \quad (4.32)$$

Selon la phase relative des deux ondes, le passage de l'interface temporelle peut donc mener à une perte ou un gain d'énergie. En particulier, le gain d'énergie maximal est donné pour $\Phi_0 = \pi/2$.

La formule précédente permet de prédire le comportement lorsque de la traversée d'une série d'interfaces espacées de T . Entre les deux interfaces, les deux ondes associées à $\pm\omega_0$ vont accumuler une différence de phase relative de $2\omega_0 \Delta T_n$. En notant E_N l'énergie après la N^e interface, on trouve en itérant la formule (4.32) que

$$\frac{E_N}{E_i} = \prod_{n \leq N} (1 + 2|r| \sin(2\omega_0 \Delta T_n + \Phi_0)) \quad (4.33)$$

On s'intéresse maintenant au cas d'un cristal périodique $\Delta T_j = T$, et spécifiquement aux ondes dont la fréquence est un nombre entier ou demi-entier de fois celle du cristal, c'est à dire lorsque

$$\omega_0 = \frac{p\pi}{T} \quad (4.34)$$

avec p un entier. La formule (4.33) se simplifie alors puisque tous les sinus ont la même phase, et l'énergie après N interfaces s'écrit alors

$$E_N = (1 + 2|r| \sin(\phi_0))^N E_i \quad (4.35)$$

On retrouve donc bien un comportement exponentiel des ondes avec le temps (ici N). La croissance ou décroissance exponentielle des ondes est entièrement déterminée par la phase Φ_0 de l'onde stationnaire. Cela signifie que la phase de l'onde amplifiée a une phase déterminée par rapport à l'excitation. On voit dans les calculs précédents l'importance des ondes réfléchies dans la croissance exponentielle des ondes. Ainsi, en l'absence de différence d'impédance entre les deux milieux, le coefficient de réflexion est nul et aucune instabilité paramétrique ne peut être déclenchée.

Selon la valeur d'entier p choisie dans la condition de résonance (4.34), les ondes associées seront harmoniques ou sous-harmoniques. Une interprétation géométrique à l'existence de ces ondes harmoniques ou sous-harmoniques est proposée en figure 4.5b. Celle-ci est basée sur l'équation (4.32), qui montre que l'amplification a lieu lorsque la phase des amplitudes complexes A et B avant chaque pic de tension est identique. Supposons que juste après une première interface, la phase relative Φ_0 entre les deux amplitudes maximise l'énergie gagnée. Jusqu'au pic suivant, l'évolution de chacune de ces amplitudes est une rotation à la vitesse $\pm\omega_0$ dans des sens opposés. L'intervalle de temps T entre les interfaces doit donc être choisi de sorte à ce que la différence de phase entre les amplitudes complexes, après leur rotation respective, soit à nouveau Φ_0 . Graphiquement, il est possible de construire deux solutions à ce problème en faisant faire un demi-tour ou un tour complet à chaque vecteur, comme illustré en figure 4.5b. Le cas d'un demi tour correspond à $\pm\omega_0 T = \pi$, soit une évolution sous-harmonique associée à $p = 1$ dans l'équation (4.34), tandis qu'un tour complet correspond à $p = 2$ et à une évolution harmonique. Les solutions d'ordre p plus élevé s'obtiennent de manière similaire par un nombre plus important de tours ou de demi-tours.

4.6.5 Présence de désordre

Les ondes, harmoniques ou sous-harmoniques, avec une phase bien choisie de sorte que $\sin \phi_0 = 1$, correspondent au gain d'énergie maximal à chaque interface dans la formule (4.32). L'ajout de désordre vient perturber l'interférence parfaitement constructive entre toutes les ondes en ajoutant des déphasages aléatoires $\delta_n \ll 1$. Au premier ordre non nul en δ_n , la formule (4.33) devient

$$\frac{E_N}{E_i} = \prod_{n \leq N} (1 + 2|r| - |r|\delta_n^2) \quad (4.36)$$

Si l'on prend $\delta_n = \pm\sigma$ avec probabilité 1/2, de moyenne nulle et de variance σ , on obtient alors

$$E_N = E_i(1 + 2|r| - |r|\sigma^2)^N \quad (4.37)$$

qui prédit, comme en section 4.4.5, une baisse du taux de croissance parabolique avec l'écart-type σ . Dans le cadre de ce modèle, la mesure expérimentale de cette parabole donne donc une information directe sur le coefficient de réflexion à l'interface.

4.7 Conclusion

Ce chapitre était consacré à la propagation d'ondes dans un milieu dont les caractéristiques varient sur des temps comparables à la fréquence de l'onde. En profitant de la forme particulière des interfaces, on a pu trouver une formule explicite pour le champ d'onde à tout temps en adaptant le modèle des matrices de transfert habituellement utilisé en matière condensée. En particulier, le

système étudié est l'analogie temporelle d'un cristal spatial unidimensionnel et présente une structure de bandes d'instabilités similaire à la structure de bandes d'un cristal spatial. Nous avons ensuite sondé numériquement et expérimentalement le cas d'un cristal temporel parfaitement ordonné puis le cas d'un cristal désordonné. Hors des bandes d'instabilité, les ondes croissent exponentiellement en présence de désordre, donnant un analogue formel à la localisation d'Anderson dans un cristal unidimensionnel. Dans la bande d'instabilité, le taux de croissance tend à diminuer avec le désordre. Cette diminution peut être comprise dans le cadre des instabilités (le forçage à la fréquence d'intérêt diminue avec le désordre) ou comme une perturbation d'une figure d'interférence dans le cadre ondulatoire. À noter que l'étude des phénomènes d'interférences peut être étendue au cas d'une modulation spatio-temporelle des propriétés du milieu, menant par exemple à la formation de *field patterns* aux formes géométriques variées [103].

Ce troisième chapitre clôt la première partie de cette thèse consacrée à l'étude des ondes de surface en présence de champs électriques. La seconde partie, largement indépendante de celle-ci, est consacrée à l'étude des déformations de la surface d'un fluide en présence d'une modulation temporelle rapide devant l'évolution de ces déformations. On s'intéressera en particulier aux phénomènes de stabilisations dans un bain vibré à haute-fréquence.

Deuxième partie

PHÉNOMÈNES DE STABILISATION PAR APPLICATION DE
VIBRATIONS HAUTE FRÉQUENCE

"A chaque fois qu'on vous parle de physique, vous nous parlez de faire vibrer du glycérol."

G. Noetinger

5

Flottaison sous une couche de liquide en lévitation

5.1 Introduction

Dans des conditions expérimentales standards, l'interface d'un liquide au repos est horizontale du fait de l'action de la gravité. En appliquant des contraintes, il est néanmoins possible de déstabiliser cette interface et d'y faire apparaître des motifs variés. On peut par exemple citer l'apparition d'ondes stationnaires sur un bain vibré verticalement suffisamment fort [57–59, 83] ou l'apparition de motifs rappelant des vagues déferlantes lorsqu'un vent suffisamment intense souffle au-dessus de la surface [104–106]. De telles déformations sont le fruit de mécanismes d'instabilité (respectivement de Faraday et de Kelvin-Helmholtz pour les exemples précédents). L'interface entre deux fluides au repos peut également être déstabilisée sans appliquer de contrainte supplémentaire mais en augmentant la densité du fluide du dessus jusqu'à lui faire dépasser celle du fluide du dessous : c'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor. [70–72]. Cette instabilité se produit par exemple lorsque l'on retourne un verre d'eau : la couche l'eau plus dense placée au-dessus de l'air moins dense chute quasi-instantanément.

Il existe, dans la littérature, de nombreux moyens connus pour retarder voire supprimer le développement de cette dernière instabilité. On peut par exemple citer l'application de gradients de température [107], de champs électriques [108, 109] ou magnétiques [110], la mise en rotation du bain [111] ou l'application de vibrations verticales hautes fréquences [73–75]. On propose dans ce chapitre d'étudier expérimentalement la stabilisation d'une couche de liquide visqueux placée au-dessus d'une couche d'air par cette dernière technique. Après la description de l'instabilité de Rayleigh-Taylor et de quelques phénomènes remarquables dus aux vibrations, on réalise expérimentalement la stabilisation de couches de liquides de 20 cm de long au-dessus de couches d'air. On démontre ensuite théoriquement et expérimentalement la possibilité pour des objets de flotter à l'envers au niveau de l'interface inférieure. Ce dernier phénomène, inconnu jusqu'alors, est un nouvel exemple étonnant de stabilisation associé à l'application de vibrations hautes fréquences.

5.2 L'instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est un phénomène de déstabilisation qui apparaît lorsqu'une couche de fluide de densité ρ_1 est placée au-dessus d'une couche de fluide de densité ρ_2 plus faible. Ce phénomène se produit par exemple lorsqu'une couche de peinture liquide est appliquée au plafond. La couche ne peut pas chuter d'un seul bloc comme un solide, puisque de l'air doit progressivement se frayer un chemin pour remplacer le liquide perdu. Le film de peinture se vide ainsi progressivement par l'interface en formant des gouttes, comme illustré en figure 5.1a avec de l'huile de silicone étalée sous une plaque de plexiglas. De très nombreuses études expérimentales, numériques ou théoriques ont été proposées depuis plus d'un siècle pour étudier ce phénomène dans des configurations variées [70–72, 112–117]. Au-delà des études menées en laboratoire, ce phénomène est également rencontré à plus grande échelle, par exemple en météorologie lors des phénomènes d'inversion de densité dans

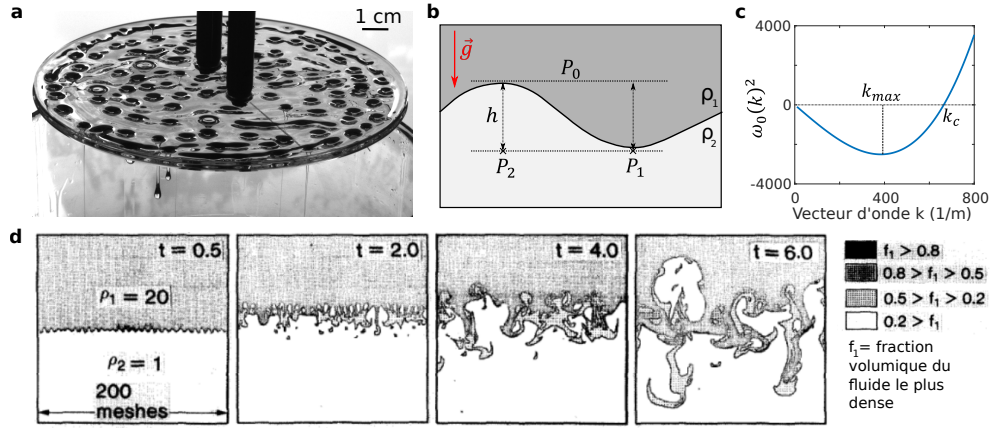


FIG. 5.1: (a) Photographie d'une couche mince d'huile de silicone placée sous un support en plexiglas. (b) Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Taylor : un fluide de densité ρ_1 est placé au dessus d'un fluide de densité ρ_2 . Si $\rho_2 < \rho_1$, les perturbations à l'interface croissent et déstabilisent le système. (c) Relation de dispersion (5.2) en profondeur infinie dans le cas d'une couche d'huile de silicone placée au-dessus d'une couche d'air ($\gamma = 20$ mJ/m², $\rho_1 = 0.9$ kg/L, $\rho_2 = 0$ kg/L). (d) Simulation numérique extraite de [112] présentant le développement de l'instabilité entre deux fluides.

l'atmosphère ou en astronomie lors de l'éjection de différentes couches de gaz par des supernovae [118, 119]. On propose ici de résumer brièvement quelques points génériques relatifs à cette instabilité.

5.2.1 Origine physique du phénomène :

Il est tout d'abord intéressant de noter que la différence de densité entre les deux fluides ne suffit pas à expliquer le déclenchement de l'instabilité [120]. En effet, une interface parfaitement horizontale correspond à une position d'équilibre indépendamment de la différence de densité entre les deux fluides, puisque l'interface est orthogonale au gradient de pression hydrostatique vertical. Cependant, toute perturbation de cette configuration mène irrémédiablement à la déstabilisation. En supposant que le gradient de pression hydrostatique reste dominant, on peut en effet calculer la différence de pression entre deux points 1 et 2 de même altitude situés respectivement dans un creux et dans un sommet de l'interface comme représenté en figure 5.1b. La pression au point i vaut alors $P_i = P_0 + \rho_i gh$. La perturbation sera résorbée si la différence de pression ainsi générée redirige le fluide en excès dans la bosse vers le creux, c'est-à-dire si $P_2 - P_1 > 0$ ou encore si $\rho_2 > \rho_1$. Cela correspond au cas où le liquide le plus lourd est placé en-dessous, et l'on observe alors des oscillations de la surface au cours du temps. Dans le cas contraire et en l'absence de phénomènes capillaires, les perturbations seront amplifiées d'une manière que l'on va décrire maintenant.

5.2.2 Étude linéaire de la stabilité

On introduit un champ de hauteur $h(x, t)$ quelconque mais petit décrivant la déviation de l'interface entre les deux fluides par rapport à l'horizontale. On supposera également que $\rho_1 \gg \rho_2$ ce qui sera toujours le cas pour les interfaces liquide-air. En supposant la perturbation suffisamment faible, on peut obtenir un problème linéaire en $h(x, t)$. Chaque mode h_k associé au vecteur d'onde k évolue alors indépendamment selon l'équation (voir l'annexe A)

$$\frac{d^2 h_k}{dt^2} + \omega_0(k)^2 h_k = 0 \quad (5.1)$$

avec $\omega_0(k)$ donné par la relation de dispersion

$$\omega_0^2(k) = -gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \quad (5.2)$$

Comparé à l'étude des ondes dans les chapitres précédents, le signe du terme gravitaire est inversé, ce qui correspond bien à un retournement du bac. La pulsation $\omega_0^2(k)$ est donc négative pour les vecteurs d'onde vérifiant la condition

$$k < k_c = \sqrt{\rho g / \gamma}. \quad (5.3)$$

Pour ces vecteurs d'onde, le modèle prédit donc une croissance exponentielle du mode h_k avec le temps. La pulsation $\omega_0(k)$ dans le cas d'une interface huile de silicone-air est tracée en figure 5.1c. Cette équation d'évolution est valable tant que $kh_k \ll 1$ pour tous les vecteurs d'onde.

5.2.3 Le rôle de la capillarité

On peut noter que la capillarité joue un rôle important dans le modèle. Tout d'abord, les vecteurs d'ondes $k > k_c$ sont stabilisés par la capillarité. Pour ces modes de faible longueur d'onde, la courbure de l'interface est assez importante pour que la pression de Laplace compense la pression hydrostatique. On s'attend donc à ce que la capillarité stabilise l'interface lorsque le bac a une taille L inférieure à la taille capillaire définie comme $l_c = 1/k_c$. En effet, le plus grand mode observable sur un bain de taille L sera de longueur d'onde $\lambda_{max} = L$ (le mode de longueur d'onde $2L$ ne peut pas être observé si le volume de liquide est conservé lors de la déformation). Les vecteurs d'onde observés vérifieront donc

$$k > k_{min} = \frac{2\pi}{L} \quad (5.4)$$

En combinant les critères (5.3) et (5.4), on obtient que l'interface est stable si et seulement si $k_{min} > k_c$, c'est à dire lorsque la capillarité stabilise tous les modes autorisés à la surface. Le cas d'égalité donne la taille maximale de l'interface liquide qu'il est possible de stabiliser grâce à la capillarité

$$L_{max} = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (5.5)$$

qui est comme attendu de l'ordre de la longueur capillaire.

Par ailleurs, la capillarité impose l'existence d'un taux de croissance ω_0 maximal pour un vecteur d'onde $k_{max} = k_c/\sqrt{3}$. Expérimentalement, on s'attend à ce que seul le mode le plus instable soit observable. Cela correspond bien qualitativement à la photographie montrée en figure 5.1a, où l'interface déstabilisée présente une échelle caractéristique de l'ordre de la longueur capillaire, bien que le vecteur d'onde k_{max} soit légèrement modifié du fait de la faible épaisseur de la couche [114].

5.2.4 Au-delà du modèle linéaire

Lorsque la cambrure kh_k n'est plus négligeable, il devient nécessaire de prendre en compte les non-linéarités des équations d'écoulement. Le problème devient alors difficile à traiter mathématiquement. Le comportement du système dépend fortement de la densité des deux fluides et du caractère bi ou tri-dimensionnel de l'écoulement. Qualitativement, on peut néanmoins distinguer trois étapes (voir [120, 121] et la figure 5.1d)

- Tout d'abord, des "doigts" (ou polypes) verticaux des liquides se développent à l'interface. L'évolution est alors majoritairement due au déséquilibre entre poussée d'Archimède et gravité, ce qui génère une croissance des structures.

- Ces doigts, une fois suffisamment développés interagissent entre eux et peuvent être déstabilisés par l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Cela a pour effet d'augmenter le nombre d'échelles caractéristiques dans le système, par exemple via la fusion de deux structures adjacentes. Les interactions entre structures de liquides différents jouent également un rôle important.
- Les mélanges et fusions successives finissent par créer une zone de mélange turbulent complètement développée où l'on perd toute trace de l'interface initiale.

Comme mentionné précédemment, de nombreux paramètres peuvent influencer le développement de l'instabilité au-delà de la croissance exponentielle. On peut par exemple citer la viscosité qui joue un rôle régularisant ou la compressibilité pouvant modifier le comportement à grande longueur d'onde [120].

On cherche maintenant à décrire comment les vibrations peuvent permettre de stabiliser les modes instables. Cette idée a été proposée par G. Wolf à la fin des années 1960 [73, 74] et repose sur le fait que l'équation (5.1) peut être réinterprétée comme l'équation d'un pendule dont le point d'accroche est vibré verticalement. Ce système, *a priori* plus simple, a largement été étudié dans la littérature. La section suivante propose un résumé de ses propriétés remarquables.

5.3 Le pendule de Kapitza

5.3.1 Présentation et interprétation graphique

Un pendule pesant tel que présenté en figure 5.2 présente deux positions d'équilibre en $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Cette dernière position "inversée" étant instable, elle n'est jamais observée expérimentalement, toute perturbation déstabilisant de manière irrémédiable le système. Il existe cependant un moyen de stabiliser cette position en vibrant verticalement le point d'accroche. L'idée est de modifier dynamiquement sa position afin de recentrer dynamiquement le pendule autour de sa position verticale. Une telle rétro-action peut par exemple être implémentée en vibrant à haute fréquence le point d'attache du pendule. Ce phénomène, découvert par Stephenson il y a plus d'un siècle [76], a été étudié par P. Kapitza [77] et porte aujourd'hui son nom. D'autres phénomènes contre-intuitifs causés par les vibrations ont ensuite été découverts et rapportés dans la littérature [75, 122, 123]. Certains de ces phénomènes seront présentés en détail dans les sections suivantes, on se concentrera donc pour l'instant uniquement sur le pendule vibré verticalement.

Avant de donner un traitement mathématique du phénomène, nous en donnons une interprétation graphique initialement exposée par E. Butikov [124]. En première approche, on pourrait penser que puisque la moyenne des forces inertielles est nulle, leur action moyenne sur le pendule devrait également être nulle. La résolution de ce paradoxe se trouve dans le fait que l'action de la vibration sur le pendule se fait via un couple. Or, la longueur du bras de levier n'est pas la même à tous les instants de l'oscillation du point d'accroche, engendrant un couple moyen non nul. Pour voir cela, on considère par exemple les deux positions extrémales du forçage comme illustré en figure 5.2-c. En position 1, le point d'accroche est à son altitude maximale et la force inertielle F_1 associée pointe vers le haut. En supposant le mouvement du point d'accroche rapide devant celui du pendule, l'extrémité de ce dernier sera simplement tirée vers le bas avec le point d'accroche, causant un redressement du pendule vers le haut (voir la figure 5.2-c). Une demi-période plus bas, le point d'accroche est à son altitude maximale et la force inertielle associée F_2 est dirigée vers le bas. Les forces F_1 et F_2 associées aux positions 1 et 2 sont de même norme mais de sens contraire. Cependant, on observe que le bras de levier en position 1 est plus important qu'en position 2. Pour ces deux instants 1 et 2 séparés d'une demi-période, la somme des couples exercés est donc un couple non nul qui tend à redresser le pendule.

Ce raisonnement peut-être généralisé à n'importe quels instants séparés d'une demi-période avec

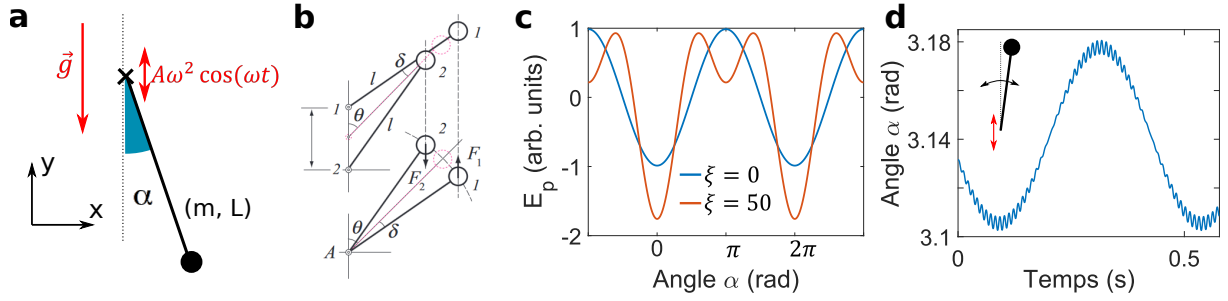


FIG. 5.2: (a) Schéma d'un pendule pesant vibré à l'accélération $A\omega^2 = \xi g$. (b) Pendule aux positions extrémales de forçage dans le référentiel du laboratoire (en haut) et le référentiel oscillant (en bas). Le bras de levier étant différent et les forces de même norme, un couple moyen renvoie le pendule vers le haut. Extrait de [124]. (c) Profil d'énergie potentielle pour un pendule de pulsation $\omega_0 = 2\pi \cdot 5$ rad/s vibré à $\omega = 2\pi \cdot 100$ rad/s dans le cas $\xi = 0$ (forçage nul) et $\xi = 50$ (forçage intense). On observe l'apparition d'un puit de potentiel à $\alpha = \pi$ grâce au forçage. (d) Simulation numérique du même pendule vibré pour $\xi = 30$ à partir de l'équation (5.12). Le pendule placé initialement proche de la position $\alpha = \pi$ oscille faiblement autour de cette position d'équilibre. Les oscillations haute fréquence dues au forçage sont visibles autour des positions extrémales.

un résultat similaire. Sur une période, le couple associé à la vibration est donc non nul et tend à ramener le pendule vers la verticale. On donne dans la section suivante une formalisation mathématique à ces observations.

5.3.2 Condition d'équilibre d'un pendule vibré

On considère un pendule pesant de masse m , de longueur L dont le point d'accroche oscille avec une accélération verticale $\vec{a} = A\omega^2 \cos(\omega t)\vec{y}$ comme illustré en figure 5.2a. On note α l'angle avec la verticale et on notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ la base polaire attachée au pendule. Dans le référentiel mobile, le principe fondamental de la dynamique selon l'axe $\vec{e}_\alpha$ s'écrit

$$mL\ddot{\alpha} = -m(g + A\omega^2 \cos(\omega t)) \sin \alpha \quad (5.6)$$

En posant $\omega_0^2 = g/L$ la pulsation du pendule et $\xi = A\omega^2/g$ l'accélération adimensionnée, on obtient

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 (1 + \xi \cos(\omega t)) \sin \alpha = 0 \quad (5.7)$$

Il existe deux échelles de temps dans cette équation, celle associée au pendule et celle associée à la vibration. On suppose désormais que $\omega \gg \omega_0$, c'est-à-dire que la vibration est rapide devant les mouvements du pendule. Dans ces conditions, il devient possible de trouver des solutions approximées à l'équation (5.7). On décompose pour cela α en une variable rapide α_f oscillant à ω et une variable lente α_s

$$\alpha = \alpha_s + \alpha_f \quad (5.8)$$

On notera $\langle . \rangle$ la moyenne sur une période rapide. On a alors $\langle \alpha_f \rangle = 0$, $\langle \alpha_s \cos(\omega t) \rangle = 0$. On supposera par ailleurs que $\alpha_f \ll 1$. En conservant les termes d'ordre dominant en ω dans l'équation (5.7), on obtient

$$\ddot{\alpha}_f = -\xi \omega_0^2 \cos(\omega t) \sin(\alpha_s) \quad (5.9)$$

et donc

$$\alpha_f = \xi \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \sin(\alpha_s) \quad (5.10)$$

On prend maintenant la moyenne $\langle . \rangle$ de l'équation (5.7) et on obtient

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_s + \omega_0^2 \sin \alpha_s &= -\xi \omega_0^2 \langle \cos(\omega t) [\sin(\alpha_s) + \cos(\alpha_s) \alpha_f] \rangle \\ &= -\xi \omega_0^2 \cos(\alpha_s) \langle \cos(\omega t) \alpha_f \rangle \\ &= -\xi^2 \frac{\omega_0^4}{2\omega^2} \cos(\alpha_s) \sin(\alpha_s)\end{aligned}\quad (5.11)$$

et on a donc finalement pour les variables lentes

$$\ddot{\alpha}_s + \omega_0^2 \sin(\alpha_s) + \xi^2 \frac{\omega_0^4}{4\omega^2} \sin(2\alpha_s) = 0 \quad (5.12)$$

Cette équation du mouvement lent peut se réécrire $\ddot{\alpha}_s = -\frac{dE_p}{d\alpha_s}$ avec E_p l'énergie potentielle effective. A forçage nul, cette énergie potentielle est celle d'un pendule pesant classique et présente un maximum en $\alpha_s = \pi$ caractéristique d'un équilibre instable. Lorsque le forçage augmente, un puits finit par se creuser à cette position au-delà d'une certaine valeur de ξ , comme le montre le graphe en figure 5.2b. Dans ce cas, on observe alors l'apparition de deux positions d'équilibre instable de part et d'autre de $\alpha = \pi$. Le caractère dynamique de la stabilisation et l'oscillation rapide de la position angulaire est visible sur le graphique en figure 5.2d issu d'une résolution numérique de l'équation (5.7)

Autour des positions d'équilibre $\alpha_s = 0$ et $\alpha_s = \pi$, l'équation du mouvement (5.7) et l'équation moyennée (5.12) peuvent se linéariser

— Pour le pendule orienté vers le bas ($\alpha \ll 1$)

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 (1 + \xi \cos(\omega t)) \alpha = 0 \quad (5.13)$$

$$\ddot{\alpha}_s + \omega_1^2 \alpha_s = 0 \quad (5.14)$$

avec $\omega_0^2 = g/L > 0$ et $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{A^2 \omega^2 \omega_0^4}{2g^2}$

— Pour le pendule orienté vers le haut ($\alpha - \pi \ll 1$)

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 (1 + \xi \cos(\omega t)) \alpha = 0 \quad (5.15)$$

$$\ddot{\alpha}_s + \omega_1^2 \alpha_s = 0 \quad (5.16)$$

avec $\omega_0^2 = -g/L < 0$ et $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{A^2 \omega^2 \omega_0^4}{2g^2}$

Ainsi, la position $\alpha = 0$ est toujours stable ($\omega_0^2 > 0$, $\omega_1^2 > 0$) tandis que la position $\alpha = \pi$ est instable à forçage nul ($\omega_0^2 < 0$) mais devient stable lorsque $\omega_1^2 > 0$. On en déduit la vitesse de forçage minimale pour stabiliser le pendule

$$A\omega \geq \sqrt{2gL} \quad (5.17)$$

Comme mentionné précédemment, l'équation (5.1) qui prédit la stabilité d'une interface dans le cas linéaire est la même que celle du pendule pesant. Plus précisément, on associe une équation de pendule pesant et une pulsation $\omega_0(k)$ à chaque mode k existant à la surface du bain. Le cas $\omega_0^2 > 0$ correspond à une oscillation du pendule équivalent autour d'une position d'équilibre stable tandis que $\omega_0^2 < 0$ est associé à une position d'équilibre instable. Or, il a été démontré qu'appliquer des vibrations à un pendule instable pouvait modifier la nature de ses positions d'équilibre. Les vibrations apparaissent donc comme un excellent candidat pour stabiliser l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

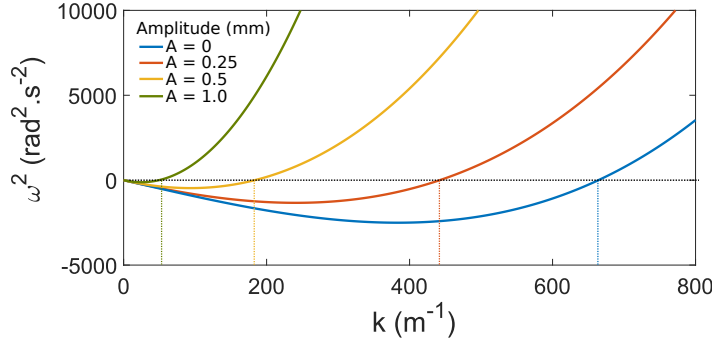


FIG. 5.3: Relation de dispersion (5.20) pour de l'huile de silicone ($\rho = 0.9$ kg/L, $\gamma = 20$ mJ/m²) vibrée à $\omega = 2\pi \cdot 100$ rad/s avec différentes amplitudes de forçage $A = 0, 0.25, 0.5$ et 1 mm. La plage de vecteurs d'onde instables se réduit lorsque le forçage augmente, ce qui permet d'augmenter la taille de la couche de liquide.

5.4 Instabilité de Rayleigh-Taylor dans un bain vibré

On revient donc au problème de stabilité de l'interface liquide et l'on suppose maintenant que le bac de liquide est soumis à un forçage vertical oscillant. La gravité effective dans le référentiel du bac est alors $\vec{g}(t) = \vec{g} - A_0\omega^2 \cos(\omega t)\vec{y}$. En procédant à cette substitution dans l'équation (5.1), l'équation d'évolution du mode k devient

$$\frac{d^2 h_k}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + kA \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos(\omega t) \right) h_k = 0 \quad (5.18)$$

avec $\omega_0(k)$ toujours donné par la relation (5.2). On reconnaît alors une équation similaire à (5.7) pour le pendule de Kapitza avec $\xi = kA\omega^2/\omega_0^2$. Plus précisément, le cas $\omega_0^2 > 0$ correspond au pendule linéarisé autour de $\alpha = 0$ tandis que $\omega_0^2 < 0$ correspond au pendule linéarisé autour de $\alpha = \pi$.

La séparation d'échelle utilisée dans la section 5.3.2 nécessite de vérifier la condition $\omega_0(k) \ll \omega$. Ce n'est en général pas le cas puisque $\omega_0(k)$ tend vers l'infini avec k . Cependant, les modes de k élevés sont stabilisés par capillarité. On peut donc se limiter à l'étude des modes instables de vecteur d'onde $k < k_c$. Dans cette plage de vecteurs d'onde, on a $|\omega_0| < \omega_{max} \sim 2\pi \cdot 10$ rad/s. Dans nos expériences, on choisira typiquement $\omega \sim 2\pi \cdot 100$ rad/s grande devant ω_{max} . On peut donc légitimement appliquer la séparation d'échelle précédente et l'équation vérifiée par les variables lentes $\bar{h}_k$ devient (voir section 5.3.2)

$$\frac{d^2 \bar{h}_k}{dt^2} + \omega_1^2 \bar{h}_k = 0 \quad (5.19)$$

avec

$$\omega_1(k)^2 = -gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} + \frac{A^2 \omega^2}{2} k^2 \quad (5.20)$$

Comme pour le cas du pendule vibré, la moyenne du terme croisé entre le déplacement de l'interface et le forçage fait apparaître un terme supplémentaire stabilisant. Les relations de dispersion (5.20) sont tracées en figure 5.3 pour des valeurs typiques de forçage dans nos expériences. En se limitant au régime gravitaire $k \ll k_c$, on prédit la vitesse minimale V_l^* du forçage nécessaire pour stabiliser une couche de taille L

$$A\omega \geq \sqrt{\frac{Lg}{\pi}} = V_l^* \quad (5.21)$$

Pour un bac de largeur $L = 10$ cm, on obtient une vitesse de stabilisation de l'ordre de 0.5 m/s soit un déplacement A de l'ordre du millimètre. La présence d'un tel forçage peut néanmoins mener à une déstabilisation de l'interface liquide par l'instabilité de Faraday.

5.5 L'instabilité de Faraday - recherche de compromis

Comme nous l'avons déjà discuté dans la première partie, l'application de vibrations verticale à une fréquence f déclenche, pour une accélération $A\omega^2$ supérieure à un certain seuil a_c , l'instabilité de Faraday. L'interface n'est alors plus plane mais présente des ondes stationnaires oscillant à la fréquence $f/2$ issues d'un forçage paramétrique [57–59, 83]. Lorsque l'écart au seuil $A\omega^2 - a_c$ devient trop important, la cohésion du fluide est rompue et on observe l'éjection de gouttelettes. Dans le cas d'une couche de liquide inversée, ces gouttes tombent alors au fond de la cuve ce qui provoque un affinement rapide de la couche de liquide stabilisée.

Il est donc nécessaire d'éviter l'émergence de cette instabilité pour maintenir la cohésion de la couche de liquide stabilisée. On dispose pour cela de deux degrés de liberté

- Le seuil de Faraday a_c dépend de la fréquence d'excitation comme $a_c \propto \omega^{5/3}$ dans le régime capillaire [125]. On en déduit que la vitesse de forçage à ne pas dépasser pour déclencher l'instabilité est $A\omega \propto \omega^{2/3}$ tandis que Rayleigh-Taylor est stabilisé pour $A\omega > V_c$. En augmentant ω , il est donc possible de supprimer l'instabilité de Faraday tout en stabilisant la couche de liquide. Cependant, les capacités de forçage des vibreurs mécaniques tendent à diminuer lorsque la fréquence augmente, et cette dernière ne peut donc pas être augmentée indéfiniment.
- Pour une fréquence donnée, on peut augmenter la viscosité du fluide. Le seuil de Faraday augmente en effet avec la viscosité [83] tandis que la stabilisation de Rayleigh-Taylor en est indépendante.

On utilisera donc dans nos expériences des fréquences de l'ordre de la centaine de Hertz et des viscosités importantes allant de 100 à 1000 fois la viscosité de l'eau. Ceci permet de repousser suffisamment le seuil l'instabilité de Faraday pour pouvoir stabiliser une couche de liquide.

5.6 Mise en œuvre expérimentale

On propose maintenant la réalisation expérimentale de la stabilisation de Rayleigh-Taylor par des vibrations. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Filip Novkoski dans le cadre de son stage de licence puis de master au sein du laboratoire.

5.6.1 Montage expérimental

Le montage suivant a été mis en œuvre afin d'étudier expérimentalement la stabilisation d'une interface liquide inversée. Une cuve en plexiglas de longueur $2 \text{ cm} \leq L \leq 18 \text{ cm}$ et de largeur $2 \text{ cm} \leq W \leq 5 \text{ cm}$ est vissée sur un vibreur (B & K V450). Un signal de tension sinusoïdal de fréquence $f \sim 100 \text{ Hz}$ est envoyé à l'aide d'un générateur (Rigol DG1022) dans un amplificateur (LDS PA 500L) puis injecté dans le pot vibrant. Deux liquides ont été utilisés : de l'huile de silicone ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 1000 \text{ cSt}$) ou du glycérol végétal ($\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$, $\eta \sim 1000 \text{ cSt}$). Les résultats de mesures sur chacun des deux liquides montrent des résultats semblables, mais ceux obtenus avec du glycérol présentent davantage de dispersion statistique. Cette dispersion est attribuée à l'hydratation progressive du glycérol du fait de l'humidité de l'air ambiant qui modifie sa viscosité.

L'expérience est placée devant un panneau LED offrant un éclairage uniforme et filmée avec une caméra (Basler). La fréquence d'acquisition est choisie proche de la fréquence de vibration f de sorte

à obtenir par effet stroboscopique un grand nombre de phases de l'oscillation (entre 10 et 20 selon les réglages). L'amplitude de vibration peut alors être extraite du film en mesurant pour chaque image la position d'un repère fixé sur la cuve.

Afin d'étudier l'instabilité de Rayleigh-Taylor, une première approche a été de construire une cuve pouvant pivoter autour d'un axe horizontal. Une fois la vibration démarrée, on retournait alors rapidement la cuve à 180° pour créer une couche de liquide au plafond. Ce système permettait une observation qualitative du phénomène mais ne permettait pas un bon contrôle expérimental, la rotation rapide étant difficile à maîtriser. Une autre possibilité (notamment utilisée par Wolf [73]) consiste à faire pivoter l'ensemble du système (vibreux compris)¹. Durant nos expériences, nous avons mis au point une méthode alternative pour créer une couche de liquide au dessus d'une couche d'air. Nous avons en effet (re)découvert que des bulles d'air dans un bain vibré suffisamment fort ont tendance à couler. L'injection d'une grande quantité d'air au fond du bac à l'aide d'une seringue permet ainsi d'insérer une couche d'air sous une couche de liquide. Cette méthode présente plusieurs avantages, qui sont discutés plus précisément dans les sections suivantes. Tout d'abord, les manipulations sont grandement simplifiées, puisque la cuve et le vibreur sont désormais immobiles. L'épaisseur de la couche d'air créée au fond de la cuve peut facilement être variée en changeant le volume d'air injecté. L'épaisseur de couche de liquide est quant à elle réglée grâce au forçage. En déclenchant le régime d'éjection de gouttes de l'instabilité de Faraday, il est en effet possible d'affiner une couche de liquide jusqu'à l'épaisseur désirée. On dispose ainsi d'un bon contrôle expérimental sur les couches de fluide, que l'on détaille maintenant.

5.6.2 Comportement d'une bulle d'air dans un bain vibré

Dans un liquide de masse volumique ρ , une bulle de gaz de densité négligeable remonte à la surface du fait de la poussée d'Archimède. Il en va cependant autrement lorsque l'ensemble du liquide est soumis à des vibrations. On observe en effet expérimentalement l'existence d'une profondeur limite, notée d^* , au-delà de laquelle la bulle se met à couler dans le bain au lieu de remonter. Cet effet se manifeste notamment en aéronautique ou dans divers contextes industriels [126]. Ce problème a par ailleurs été étudié théoriquement et expérimentalement dans divers régimes [123, 127–129]. On se contente ici de présenter un modèle simple permettant de rendre compte qualitativement de ce phénomène.

On considère une bulle de masse m , de volume $V(t)$, placée dans le liquide en vibration. En notant z la profondeur de la bulle dans le liquide, l'équation du mouvement dans le référentiel mobile s'écrit (en négligeant le poids de la bulle devant la poussée d'Archimède)

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \rho(g + A\omega^2 \cos(\omega t))V(t) \quad (5.22)$$

On suppose de plus que les oscillations à ω sont rapides devant le temps caractéristique de mouvement global de la bulle, c'est à dire $\frac{1}{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dt} \ll \omega$ où $\bar{z}$ est l'altitude lentement variable de la bulle. Celle-ci subit alors plusieurs cycles de transformation que l'on suppose de la forme

$$PV^\beta = P_0 V_0^\beta \quad (5.23)$$

avec β une constante et $V_0, P_0 = P_{atm} - mg\bar{z}$ le volume et la pression moyenne à la profondeur $\bar{z}$ ($\bar{z} < 0$). Le cas $\beta = 1$ correspond à une transformation isotherme tandis que $\beta = 1.7$ est une

1. Cette méthode sera utilisée dans le chapitre suivant pour l'étude d'interfaces dans des directions arbitraire. Elle est cependant moins maniable que la méthode utilisée ici, ne serait-ce que parce que le vibreur pèse une cinquantaine de kilogrammes.

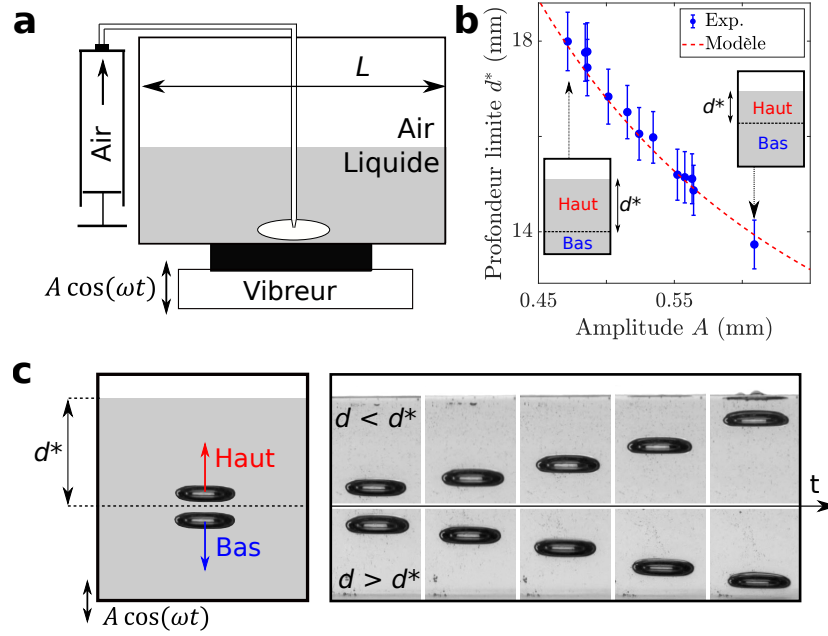


FIG. 5.4: (a) Schéma de l'expérience. Une cuve de longueur L et de largeur $W < L$ contenant du liquide est placée sur un vibreur. De l'air est injecté à une hauteur et un débit réglable à l'aide d'une seringue. (b) Mesure de la profondeur limite d^* au-delà de laquelle les bulles commencent à couler en fonction de l'amplitude de forçage. La fréquence de vibration est fixée à 100 Hz. La courbe pointillée correspond à la loi d'échelle ajustée $d^* = c/A^2$ avec $c = 5.5 \text{ mm}^3$. (c) Extraits d'un film de deux bulles créées de part et d'autre de la profondeur limite.

transformation isentropique. En supposant l'équilibre hydrostatique atteint à chaque instant, la pression appliquée sur la bulle est

$$\begin{aligned} P(t) &= P_{atm} - \rho(g + A\omega^2 \cos(\omega t))\bar{z} \\ &= P_0 - \rho A\omega^2 \cos(\omega t)\bar{z} \end{aligned} \quad (5.24)$$

On en déduit le volume au cours du temps

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \left(\frac{P_0}{P} \right)^\beta \\ &\approx V_0 \left(1 + \frac{\beta \rho A \omega^2 \bar{z}}{P_0} \cos(\omega t) \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

De là, on en déduit l'équation du mouvement sur la variable lente

$$m \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \rho g V_0 + \frac{\beta V_0 \rho^2 A^2 \omega^4 \bar{z}}{2 P_0}. \quad (5.26)$$

La bulle commence à couler lorsque le terme de droite devient négatif, ce qui arrive à la profondeur (comptée positivement à partir de la surface)

$$d^* \approx \frac{2gP_{atm}}{\beta \rho A^2 \omega^4} \quad (5.27)$$

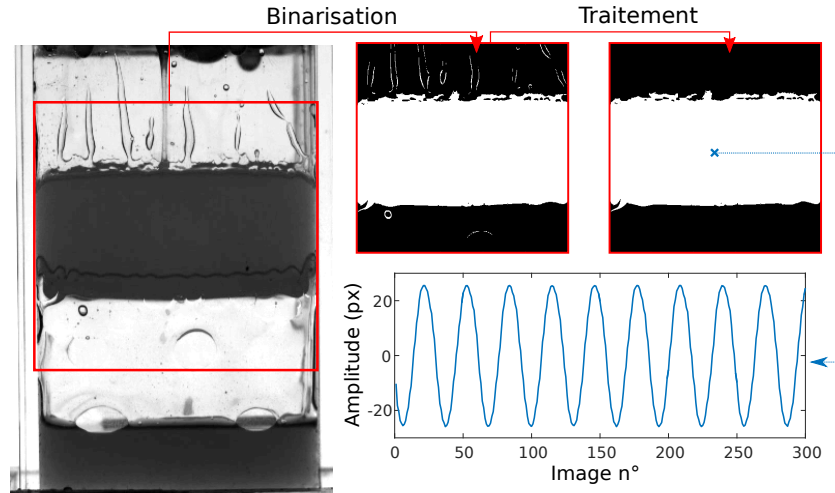


FIG. 5.5: Exemple de traitement d'image pour extraire la position d'une couche de liquide. Partant d'une image en niveau de gris, une binarisation puis un algorithme de détection de forme permet de repérer le barycentre de la couche de fluide. Sa coordonnée verticale est alors enregistrée pour chaque image. L'effet stroboscopique permet de récupérer un grand nombre de phases de l'oscillation sans augmenter déraisonnablement le nombre d'images par secondes acquises.

en négligeant le terme hydrostatique dans P_0 . On présente en figure 5.4 un schéma expérimental ainsi que les résultats obtenus pour la mesure de cette profondeur. Pour un forçage donné, on observe bien le mouvement descendant ou ascendant des bulles en fonction de leur position. En augmentant le forçage, on observe aussi la diminution de la profondeur critique avec le forçage comme prédit par le modèle. On ajuste les données expérimentales avec la courbe $d^* = c/A^2$ avec $c = 5.5 \text{ mm}^3$. La formule précédente donne alors $\beta \approx 4$. Cette valeur de β ne correspond pas à une transformation simplement interprétable d'un point de vue thermodynamique. Elle n'est en effet ni isotherme ($\beta = 1$), ni isentropique ($\beta = 1.7$), ni isochore ($\beta = \infty$) mais quelque part entre ces deux derniers.

Au-delà de ces considérations quantitatives, le point important réside dans le fait qu'une bulle d'air injectée suffisamment profondément sera attirée vers le fond du bac. En injectant de l'air au fond d'un bac vibré suffisamment fort, de l'air s'accumule donc sous le liquide. L'instabilité de Rayleigh-Taylor étant stabilisée par les vibrations, la taille de cette bulle peut dépasser la taille capillaire et remplir le fond de la cuve, formant une couche de liquide en lévitation. Ce processus est présenté en figure 5.6. Le coussin d'air créé présente alors une résonance étudiée ci-dessous. Pour cela, il est cependant nécessaire de pouvoir mesurer la vitesse de différents éléments. La méthode utilisée est brièvement présentée maintenant.

5.6.3 Méthodes de mesure

Afin de comparer quantitativement les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux, il est nécessaire de mesurer expérimentalement le déplacement du bac ainsi que celui de la couche de liquide. On profite pour cela de l'effet stroboscopique. Le choix d'un nombre d'images par seconde prises par la caméra très proche d'un diviseur de la fréquence d'excitation (par exemple 25.2 images/seconde pour une fréquence d'excitation de 100 Hz) permet d'acquérir un grand nombre de phases du signal d'excitation. Sur chaque image, on mesure la position d'un repère fixé à la cuve présentant un fort contraste avec l'arrière-plan de l'image. On procède alors à une binarisation de l'image de sorte que le repère et l'arrière-plan soient distincts et l'on détecte ensuite le barycentre du repère via les paquets de traitement d'image inclus nativement dans Matlab. Un traitement similaire

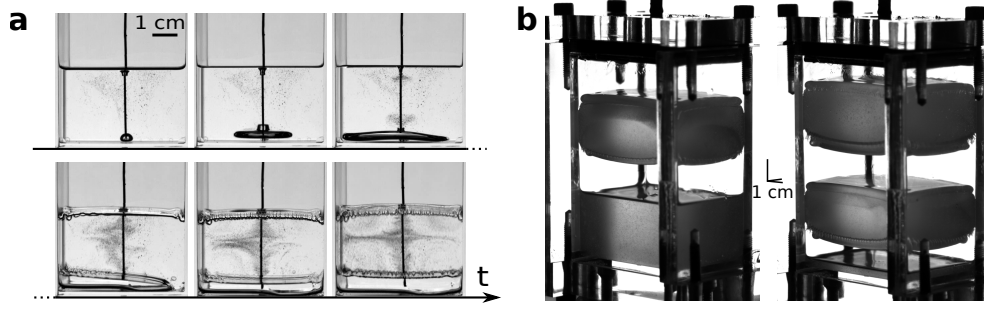


FIG. 5.6: (a) Injection d'air au fond d'une cuve vibrée. L'air injecté reste au fond du bac et finit par remplir l'intégralité du fond de la cuve, mettant le liquide en lévitation. (b) Photographies de côté d'une couche et de deux couches de liquides en lévitation dans un bac de $5 \times 4 \text{ cm}^2$. Le forçage est d'environ $A\omega \approx 0.5 \text{ m/s}$.

est appliquée pour mesurer la vitesse de la couche de liquide (qui est opaque du fait de la présence de bulles d'air), en nettoyant si besoin les images numériquement des gouttes de liquide pouvant perturber la mesure. Un exemple de traitement est présenté en figure 5.5.

Les résultats obtenus dans tous les cas sont des sinusoides quasi-parfaites dont on extrait l'amplitude A en millimètres via un facteur de conversion en pixel/mètre. La fréquence de forçage $\omega/2\pi$ étant connue, il est possible de remonter à l'amplitude de la vitesse $A\omega$. Cette méthode de mesure est notamment utilisée pour établir la courbe de résonance de la couche d'air que l'on décrit dans la section suivante.

5.7 Etude de la résonance d'une couche d'air

5.8 Résultats expérimentaux

Pour obtenir une couche d'air comme celle obtenue en figure 5.6a, il est nécessaire d'adapter l'amplitude de la vibration au cours du temps. En laissant le forçage constant, on observe en effet l'apparition d'ondes de Faraday puis l'éjection intense de gouttelettes à mesure que l'air est injecté. Il est donc nécessaire de diminuer le forçage appliqué au cours de l'injection afin de conserver une interface stable entre la poche d'air et le liquide. Une fois arrivé en configuration "couche d'air", le forçage appliqué par le vibreur n'est plus qu'une fraction (typiquement un cinquième) du forçage initial nécessaire pour maintenir les bulles au fond du bac. En augmentant encore la quantité d'air dans la couche, le forçage appliqué par le vibreur doit encore être diminué pour éviter l'éjection de gouttelettes. Ceci est valable jusqu'à une certaine épaisseur critique de la couche d'air pour laquelle le forçage appliqué est minimal. Au-delà, la vibration appliquée doit être augmentée avec la quantité d'air sans quoi la couche de liquide s'effondre par instabilité de Rayleigh-Taylor. L'amplitude du forçage à appliquer en fonction du volume d'air injecté pour maintenir le liquide stable a donc typiquement une forme en V. Cela suggère que le forçage appliqué à la couche de liquide dépend de l'épaisseur de la couche d'air située en dessous.

Afin d'étudier simplement le forçage ressenti par le liquide, une couche d'air est créée sous une couche de liquide et la fréquence de forçage est variée de 80 à 120 Hz. Cela permet de travailler avec un volume fixé d'air et évite de manipuler simultanément l'injection d'air et le forçage appliqué. Les expériences sont menées avec une couche d'air de hauteur $h_0 \approx 1.5 \text{ cm}$ et une couche de glycérol de taille $h_{liq} \approx 2.5 \text{ cm}$. Pour chaque fréquence, le forçage est réglé de sorte à obtenir une couche de liquide stable sans instabilités aux interfaces. Les positions du vibreur $A\omega \cos(2\pi ft + \phi)$ et de

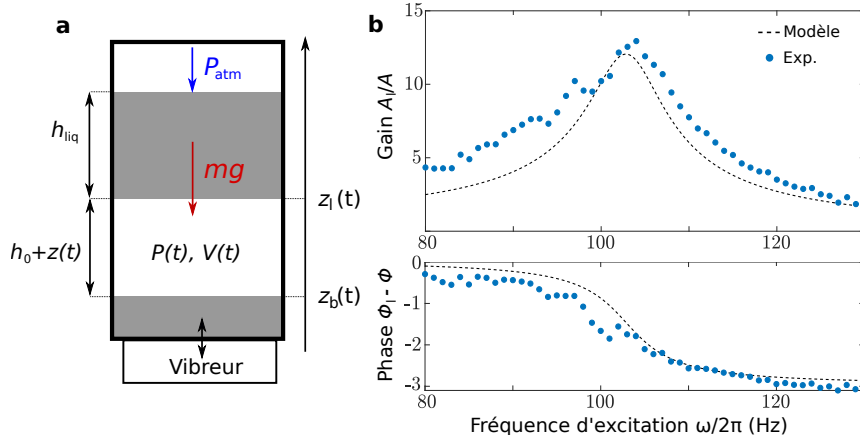


FIG. 5.7: (a) Schéma d'une couche de liquide au-dessus d'une couche d'air et notations associées. Le coussin d'air agit comme un ressort dont la fréquence dépend de la géométrie et des caractéristiques du fluide. (b) Module et phase expérimentale de la fonction de transfert (points bleus) comparée à la prédiction (5.35) avec $\omega_0 = 2\pi \cdot 103$ rad/s et $Q = 12$ (pointillés noirs).

la couche de liquide $A_l \cos(2\pi ft + \phi_l)$ sont mesurées avec les algorithmes présentés ci-dessus. La figure 5.7b présente le gain A_l/A et le déphasage $\phi_l - \phi$ associé à chaque fréquence. Pour ces tailles particulières de couches, on observe une résonance autour de $f = 103$ Hz où la couche de liquide présente une amplitude de déplacement plus de 10 fois supérieure à celle du vibreur. La phase relative $\phi_l - \phi$ passe de 0 à π et rappelle elle aussi fortement celle d'un oscillateur harmonique autour de la fréquence de résonance. On présente ci-dessous un modèle simple où le coussin d'air joue le rôle d'un ressort et la couche de liquide celui d'une masse. Ceci permet d'obtenir une réponse résonante semblable à celle observée expérimentalement.

5.9 Modèle pour la résonance

On démontre ici que la couche de liquide placée au-dessus de la couche d'air agit comme un système masse ressort et présente une résonance autour d'une fréquence à déterminer. Toutes les variables sont exprimées dans le référentiel du laboratoire. On note $z_l(t)$ la position de l'interface inférieure de liquide, $z_b(t)$ la position de la cuve, h_0 la hauteur moyenne de la couche d'air. On suppose comme précédemment que la pression et le volume de la couche vérifient

$$PV^\beta = P_0V_0^\beta \quad (5.28)$$

avec P_0 et V_0 la pression et le volume associés à h_0 . Le volume d'air vaut alors $V = S(z_l(t) - z_b(t))$. On notera $h_1(t)$ l'écart à la hauteur moyenne $h_0 + h_1(t) = z_l(t) - z_b(t)$. Le volume d'air peut alors s'écrire $V = V_0 + Sh_1(t)$. On se place dans l'approximation des faibles oscillations $h_1 \ll h_0$. La pression peut alors s'écrire comme

$$P = P_0 \left(1 - \beta \frac{h_1(t)}{h_0}\right) \quad (5.29)$$

on en déduit que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la couche de liquide s'écrit

$$m\ddot{z}_l = -\frac{m\omega_0}{Q}(\dot{z}_l - \dot{z}_b) + SP_0 \left(1 - \beta \frac{h_1(t)}{h_0}\right) - P_{atm}S - mg \quad (5.30)$$

avec P_{atm} la pression atmosphérique. Le premier terme du membre de droite modélise la friction entre la couche de liquide de vitesse $\dot{z}_l$ et les murs de la cuve de vitesse $\dot{z}_b$. Les autres termes prennent

en compte les forces de pression de part et d'autre de la cuve et le poids. En prenant la moyenne sur une période d'oscillation, on obtient (h_1 étant de moyenne nulle)

$$P_0 = P_{atm} + \frac{mg}{S} \quad (5.31)$$

ce qui traduit simplement le fait que la pression moyenne dans la couche d'air inférieure doit compenser le poids et la pression atmosphérique. On peut réexprimer l'équation (5.30) en fonction de h_1 uniquement

$$\ddot{h}_1 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{h}_1 + \omega_0^2 h_1 = -\ddot{z}_b \quad (5.32)$$

avec $\omega_0^2 = \frac{\beta P_0 S}{mh_0}$ et Q le facteur de qualité dépendant de la friction. On retrouve donc l'équation d'un système masse-ressort amorti forcé par la vibration de la cuve. Le rôle de la masse m est joué par la couche de liquide tandis que la couche d'air est équivalente à un ressort de raideur $k = \frac{\beta P_0 S}{h_0}$ de sorte que $\omega_0^2 = k/m$. Si le forçage est purement sinusoïdal $z_b(t) = Ae^{i\omega t}$, on obtient en posant $h_1(t) = a_1 e^{i(\omega t + \phi)}$

$$a_1 e^{i\phi_1} = A \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q}} \quad (5.33)$$

La position de la couche de liquide dans le référentiel du laboratoire est $z_l(t) = z_b(t) + h_0 + h_1(t)$. En écrivant $z_l(t) = h_0 + A_l e^{i\phi_l}$, on obtient finalement le déplacement recherché

$$A_l e^{i\phi_l} = \frac{\omega_0^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q}} A = \frac{1 + i \frac{\hat{\omega}}{Q}}{1 - \hat{\omega}^2 + i \frac{\hat{\omega}}{Q}} A = H(\hat{\omega}) A \quad (5.34)$$

avec $\hat{\omega} = \omega/\omega_0$. On en déduit l'amplitude et la phase du déplacement de la couche de liquide par rapport à celle de la cuve

$$\begin{aligned} \frac{A_l}{A} &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\hat{\omega}^2}{Q^2}}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + \frac{\hat{\omega}^2}{Q^2}}} \\ \phi_l &= \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{Q}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{Q(1 - \hat{\omega}^2)}\right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

En ajustant les paramètres $\omega_0 = 2\pi.103$ rad/s et $Q = 12$, on obtient les courbes présentées en figure 5.7. Les expériences ont été obtenues avec une couche d'air d'épaisseur $h_0 \approx 1.5$ cm et une couche de glycérol d'épaisseur $h_{liq} \approx 2.5$ cm. On en déduit que $\beta = \frac{\omega_0^2 \rho h_{liq} h_0}{P_0} \approx 1.9$. Cette valeur de β est du même ordre que celle trouvée pour les bulles dans un liquide vibré $\beta = 4$ mais varie significativement avec le volume d'air considéré. Pour des couches d'air, la transformation est quasiment isentropique et le volume varie davantage que dans cas des bulles. La tension de surface pourrait être responsable de cette différence en empêchant une déformation trop importante des bulles d'air dans le liquide mais ne jouant aucun rôle dans le cas d'une couche d'air complète.

Ce modèle rend également compte des observations décrites ci-dessus lorsque l'air est injecté dans la couche d'air tandis que la fréquence d'excitation ω est fixe. Ajouter de l'air revient à augmenter la hauteur d'air h_0 et donc à diminuer la fréquence propre du système ω_0 . Tant que $\omega < \omega_0$, diminuer ω_0 permet de se rapprocher de la résonance et donc d'augmenter le forçage ressenti par le liquide. A la hauteur critique telle que $\omega = \omega_0$, le gain de l'oscillateur est maximal et le forçage à appliquer peut être réduit au minimum. Si la hauteur continue d'augmenter, on a cette fois $\omega > \omega_0$ et diminuer encore ω_0 oblige à forcer davantage pour compenser l'éloignement à la résonance. On en déduit cette forme en V du forçage à appliquer décrite précédemment.

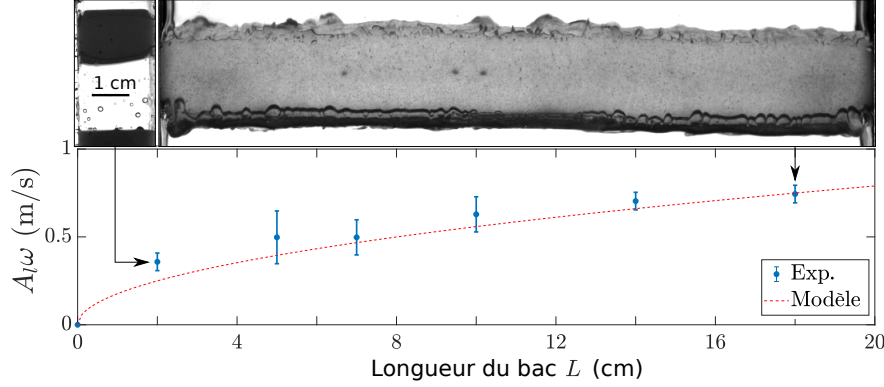


FIG. 5.8: Vitesses minimales de forçage nécessaire expérimentalement (barres bleues) et théoriquement (pointillés rouges) pour stabiliser une couche de liquide en fonction de la plus grande dimension du bac. Les barres d'erreurs représentent les valeurs extrêmes mesurées sur plusieurs répétitions de l'expérience.

5.10 Mesure de la vitesse d'excitation minimale

En utilisant d'une part le comportement atypique des bulles d'air dans un liquide vibré et la résonance du coussin d'air, il est possible d'observer avec un excellent contrôle et une très bonne reproductibilité la stabilisation d'une couche de liquide. A la fréquence de résonance, l'amplitude de vibration est typiquement amplifiée d'un facteur 10. La vitesse maximale atteignable par le pot étant limitée, cette résonance est un outil précieux pour outrepasser les limites de forçage imposées par le vibreur, à condition qu'il soit possible de créer l'état initial.

Afin de tester le modèle proposé, nous avons vérifié expérimentalement la prédiction (5.21) sur la vitesse de forçage minimale en fonction de la plus grande dimension du bac $A\omega > \sqrt{gL/\pi} = v_l^*$. Pour un bac de taille L donnée, une couche de liquide est créée puis le forçage est diminué jusqu'à observer la déstabilisation de la couche. On mesure alors la vitesse de la couche obtenue. Le résultat est présenté en figure 5.8. L'expérience est répétée cinq fois pour chaque taille de bac pour assurer la reproductibilité des expériences. Les barres d'erreurs représentent les vitesses minimales et maximales mesurées pour chaque bac. L'accord expérience-théorie est très bon sur toute la gamme de longueurs de bac testée. Bien que le modèle ne prenne en compte aucun des aspects hydrodynamiques du problème (couches limites, écoulements secondaires), il semble décrire le système de manière satisfaisante.

5.11 Comportement d'un flotteur sur et sous une couche de liquide

On s'intéresse maintenant à la flottaison d'objets au niveau de l'interface inférieure. Nous allons voir que celle-ci est possible sous certaines conditions, que l'on établit à la fois expérimentalement et théoriquement dans les prochaines sections.

5.11.1 Résultats expérimentaux

On introduit maintenant des sphères en plastique de 1 cm de diamètre et de masse m sur le bain. La masse m est ajustée en injectant un volume contrôlé de glycérol à l'intérieur de la sphère close. Une rondelle en acier est collée à la sphère afin de pouvoir la manipuler par l'extérieur du bac *via* un aimant. En plaçant ce flotteur sur la couche de liquide, on observe comme attendu l'existence d'une position d'équilibre stable résultant d'une compensation entre poids et poussée d'Archimède. De

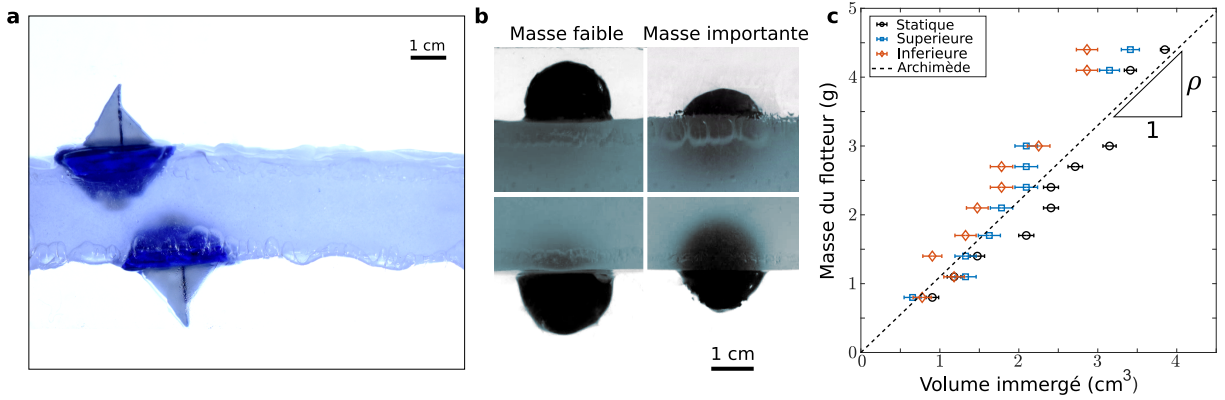


FIG. 5.9: (a) Photographie de deux bateaux flottant sur et sous une couche d'huile de silicone en lévitation. (b) Photographies de deux flotteurs de diamètre 1 cm à l'équilibre sur chacune des interfaces. Le flotteur de gauche est plus lourd que celui de droite. (b) Volume immergé pour une masse de flotteur donné dans le cas d'une mesure sur le bain au repos (cercles noirs), sur l'interface supérieure d'une couche en lévitation (carrés bleus) et sur l'interface inférieure (losanges rouges). Les barres d'erreurs sont dues à l'oscillation du bain et aux mouvements de fluide. La prédiction donnée par l'équilibre entre poussée d'Archimède et poids est tracée en pontillés.

manière surprenante, en poussant le flotteur sur l'interface inférieure, une position d'équilibre stable "à l'envers" est également observée. De plus, lorsque la masse de la sphère est augmentée, on observe que cette dernière s'enfonce davantage dans le liquide tant à l'interface supérieure qu'à l'interface inférieure. Cela suggère que l'équilibre sur l'interface inférieure, comme sur l'interface supérieure, est lié à la poussée d'Archimède. Afin d'explorer la plus large gamme de masses possibles, les expériences sont conduites dans du glycérol dont la masse volumique est supérieure à celle de l'huile de silicone.

Afin de procéder à une étude systématique, la masse des flotteurs est variée entre 0.9g et 4.5g. Cette dernière masse correspond approximativement à la flottaison neutre dans le glycérol. Pour chaque flotteur, on réalise trois séries de mesures : une première sur le bain non vibré, une seconde sur l'interface supérieure d'une couche de liquide et une troisième sur la couche inférieure. On mesure à l'aide d'une caméra la hauteur moyenne entre le sommet de la sphère et la ligne de flottaison, ce qui permet de déduire le volume immergé. Les résultats sont rassemblés sur la figure 5.9 et montrent que dans tous les cas, les positions d'équilibre sont très proches d'un équilibre dû à la poussée d'Archimède. Les différentes mesures effectuées présentent peu de dispersion et les incertitudes, dues aux mouvements de fluide et à l'oscillation, sont évaluées à ± 1 mm et sont matérialisées par les barres d'erreurs. On observe un léger désaccord avec l'équilibre d'Archimède lorsque la masse du flotteur augmente. On propose ci-après un modèle rendant compte de ces observations.

5.11.2 Modélisation

On propose de modéliser le comportement d'un flotteur sur une interface vibrée. On commence pour cela par de brefs rappels sur la poussée d'Archimède classique pour définir les notations avant de s'intéresser au cas d'un flotteur sur l'interface du haut puis du bas.

Poussée d'Archimède à forçage nul : on considère un flotteur de masse m de volume V sur un bain de liquide de masse volumique ρ . On supposera $m < \rho V$ pour assurer la flottaison et on négligera les effets capillaires. En notant z la position du centre de gravité, l'équation du mouvement s'écrit alors

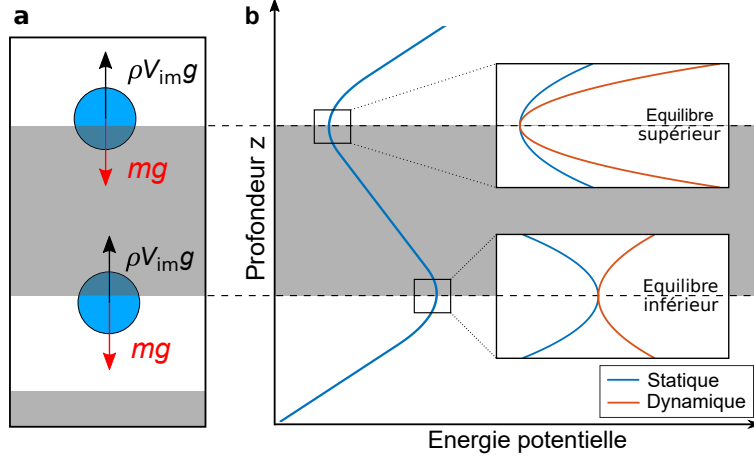


FIG. 5.10: (a) Schéma d'un flotteur sur chaque interface et forces associées. (b) Profil d'énergie potentielle d'un flotteur en fonction de la position de son centre de gravité. Sans vibration, la position inversée est instable. En ajoutant l'effet des vibrations, on retrouve une stabilité lorsque la vitesse de forçage dépasse une valeur critique V_b^*

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + \rho g V_{im}(z) \quad (5.36)$$

avec $V_{im}(z)$ le volume immergé associé à la position z (voir la figure 5.10). La position d'équilibre z_{eq} vérifie

$$V(z_{eq}) = \frac{m}{\rho} \quad (5.37)$$

On peut maintenant considérer de petites oscillations autour de cette position d'équilibre. L'équation sur le déplacement $Z = z - z_{eq}$ s'écrit alors au premier ordre

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \omega_{arch}^2 Z = 0 \quad (5.38)$$

avec $\omega_{arch}^2 = -\frac{\rho g}{m} \frac{dV_{im}}{dz}(z_{eq}) > 0$ (on a $\frac{dV_{im}}{dz} < 0$ avec nos conventions). Comme attendu, le flotteur oscille autour de sa position d'équilibre.

Poussée d'Archimède sur un bain vibré : On considère la même situation que précédemment mais en ajoutant un forçage au bain sous la forme $A\omega^2 \cos(\omega t)\vec{z}$. On suppose que l'équilibre hydrostatique est réalisé à chaque instant dans le bain. Le gradient pression s'écrit alors $\vec{\nabla}P = -\rho g_{eff}(t)\vec{z}$ avec $g_{eff}(t) = g + A\omega^2 \cos(\omega t)$. On supposera la pression dans l'air uniforme. La poussée d'Archimède s'écrit alors (avec $\vec{dS}$ la surface élémentaire pointant vers l'extérieur du flotteur)

$$\vec{F}_{arch} = - \int_S P \vec{dS} = - \int_V \vec{\nabla}P dV = \rho g_{eff}(t) V_{im}(z) \vec{z} \quad (5.39)$$

On peut alors écrire l'équation du mouvement

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg_{eff}(t) + \rho g_{eff}(t) V_{im}(z) \quad (5.40)$$

avec z la position du centre de gravité dans le référentiel mouvant. On retrouve la même équation que dans le cas statique modulo la transformation $g \rightarrow g_{eff}$. En particulier, la position z_{eq} donnée par l'équation (5.37) est toujours une position d'équilibre à chaque instant. En posant à nouveau $Z = z - z_{eq}$, on obtient l'équation pour les petits déplacements

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \omega_{arch}^2 Z = \omega_{arch}^2 \frac{A\omega^2}{g} \cos(\omega t) Z \quad (5.41)$$

On reconnaît encore une fois une équation de pendule forcé. Dans nos conditions expérimentales, on aura toujours $\omega_{arch} \ll \omega$. En appliquant la séparation d'échelle comme en section 5.3.2, on obtient l'équation pour les variables lentes

$$\frac{d^2 Z_s}{dt^2} + (1 + \alpha) \omega_{arch}^2 Z_s = 0 \quad (5.42)$$

avec $\alpha = \frac{\omega_{arch}^2}{2} \left(\frac{A\omega}{g} \right)^2 > 0$ un paramètre adimensionné issu des corrélations entre le mouvement du flotteur et le forçage.

Poussée d'Archimède sous une couche de liquide : on considère maintenant le cas d'un flotteur sous une interface de liquide comme illustré en figure 5.10. On a montré précédemment que cette interface pouvait être stable du fait des vibrations imposées. La poussée d'Archimède a encore pour expression $\vec{F}_{arch} = \rho V_{im} g_{eff}(t) \vec{z}$ et s'oppose encore à la gravité effective. La poussée d'Archimède dépend en effet des gradients de pression dans le fluide qui sont opposés à la gravité effective (voir équation (5.39)). La position z_{eq} est encore une position d'équilibre mais instable puisque $\frac{dV_{im}}{dz}(z_{eq}) > 0$ et donc $\omega_{arch}^2 < 0$. Néanmoins, l'équation du mouvement sur les variables lentes en prenant en compte les vibrations s'écrit

$$\frac{d^2 Z_s}{dt^2} + (\alpha + 1) \omega_{arch}^2 Z_s = 0 \quad (5.43)$$

avec cette fois ci $\alpha < 0$ et $\omega_{arch}^2 < 0$. L'équilibre est donc stabilisé si

$$\alpha + 1 < 0 \quad (5.44)$$

ce qui donne finalement une vitesse minimale de forçage

$$A\omega > \sqrt{\frac{2g}{\frac{1}{V_{im}} \frac{dV_{im}}{dz_{eq}}}} = V_b^* \quad (5.45)$$

Ce modèle prédit donc deux choses :

- D'une part, la position d'équilibre sur l'interface inférieure est la même que celle sur l'interface supérieure et correspond donc à une flottaison "inversée". Ceci concorde bien avec les données expérimentales présentées en figure 5.9.
- D'autre part, la vitesse minimale pour stabiliser un flotteur dépend de son volume immergé $V_{im}(z_{eq})$ et donc de sa masse ainsi que de sa forme. Pour un flotteur sphérique, on montre que la vitesse V_b^* augmente avec la masse et diverge lorsque le flotteur est en flottaison neutre (on a alors annulation de la dérivée au dénominateur). Cette vitesse V_b^* est tracée en figure 5.11.

On dispose donc d'un critère supplémentaire pour tester le modèle en mesurant la vitesse minimale de forçage pour stabiliser des flotteurs de masses différentes. Le forçage ne peut cependant pas être descendu en dessous de la vitesse limite de stabilisation de la couche liquide V_l^* sans quoi l'interface toute entière sera déstabilisée.

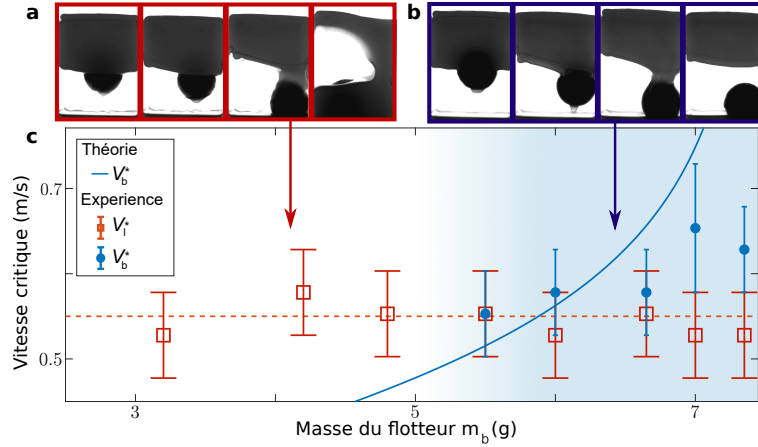


FIG. 5.11: (a) Déstabilisation d'une interface sans déstabilisation du flotteur de masse $m = 4.8$ g (b) Déstabilisation d'un flotteur de masse $m = 6.6$ g sans déstabilisation de l'interface (c) Vitesse de chute expérimentale d'un flotteur en fonction de sa masse (points bleus) comparé à la prédiction théorique V_b^* (trait plein). La vitesse de chute de la couche (indépendante de la masse) est également mesurée expérimentalement (carrés rouges). La moyenne des mesures est représentée en pointillés. Pour les masses les plus faibles, la couche de liquide est systématiquement déstabilisée avant le flotteur et la vitesse de chute du flotteur n'a donc pas pu être mesurée dans ces cas. Les barres d'erreurs représentent les valeurs extrémales obtenues pour plusieurs répétitions de l'expérience et prennent en compte les incertitudes de mesure.

5.11.3 Test expérimental du critère de stabilité

On souhaite tester expérimentalement le critère de stabilité (5.45) prédisant une vitesse de forçage minimale V_b^* pour un flotteur de masse donnée. On procèdera de la même manière que pour mesurer la vitesse minimale V_l^* pour stabiliser une couche de liquide le longueur donnée. Partant d'une situation stabilisée, on diminue le forçage jusqu'à observer la chute du flotteur. On ne peut cependant mesurer cette vitesse que si $V_b^* > V_l^*$ sans quoi l'ensemble de la couche de liquide s'effondre avant que le flotteur ne tombe. La vitesse V_b^* augmentant avec la masse des flotteurs, seuls les flotteurs les plus lourds devraient donc pouvoir être déstabilisés. Afin de maximiser la plage de masses pour lesquels $V_b^* > V_l^*$, on utilise expérimentalement un bac de taille $L = 5$ cm et un flotteur de diamètre 2.5 cm offrant une plage confortable de masses utilisables (voir la figure 5.11).

La figure 5.11 montre les mesures expérimentales de V_b^* et V_l^* pour différentes masses de flotteurs. Ces résultats confirment les prédictions du modèle puisque seuls les flotteurs les plus lourds ont pu être déstabilisés sans déstabiliser la couche de liquide. De plus, la vitesse critique de chute augmente effectivement avec la masse du flotteur. La vitesse de chute du liquide est elle comme attendu indépendante de la masse du flotteur, indiquant que le flotteur ne perturbe pas outre mesure la stabilisation de la couche. Les mesures des vitesses critiques des flotteurs présentent néanmoins une dispersion importante notamment du fait de la présence des bords pouvant modifier le comportement du fluide et du flotteur d'une manière difficilement prévisible. Un cas typique est le déplacement du flotteur vers un bord puis la perte progressive de liquide entre la sphère et le bord du bac. Ces écoulements semblent liés à des problèmes de mouillage entre le flotteur, le bord du bac et le liquide qui ne sont pas pris en compte dans le modèle. Ce dernier capture malgré tout les propriétés générales du système et prédit les bonnes tendances pour la vitesse critique associée à la chute en fonction de la masse du flotteur.

5.12 Conclusion

L'application de vibrations à haute fréquence permet la stabilisation d'interfaces habituellement instables. Nous avons démontré expérimentalement la possibilité de maintenir des couches de liquides visqueux de taille allant jusqu'à 20 cm au-dessus de coussins d'air. L'utilisation du comportement atypique des bulles dans un bain vibré et de la résonance du coussin d'air créé permettent une implémentation expérimentale simple pour peu que l'on dispose d'un vibreur assez puissant. Par ailleurs, la stabilisation des flotteurs sur l'interface inférieure offre une nouvelle illustration surprenante de stabilisation par des vibrations.

Les résultats expérimentaux sont, de manière presque surprenante, en très bon accord avec des modèles théoriques simples basés sur des pendules analogues. Cela est remarquable, puisque de nombreux phénomènes hydrodynamiques pourtant à l'œuvre ont été complètement négligés. On peut par exemple citer les mouvements oscillants entre les bords du bac et le liquide ainsi que les lignes de contact et vortex associés, l'existence d'écoulements secondaires développés dans l'ensemble de la couche, l'ensemble des phénomènes capillaires ou encore la présence de l'instabilité de Faraday aux interfaces qui pourrait briser la validité du modèle linéaire. La validité expérimentale du modèle et le calcul d'ordres de grandeurs dans certains cas montre néanmoins que ces effets sont négligeables ou que le phénomène de stabilisation est suffisamment robuste pour qu'il ne soit pas nécessaire de les inclure en première approximation.

La présence des flotteurs sous la couche de liquide indique qu'à l'interface inférieure, les objets ressentent une gravité effective dirigée vers le haut. D'une manière plus générale, on pourrait créer selon les mêmes principes des configurations expérimentales avec une gravité effective arbitraire. On peut pour cela changer la direction de l'excitation et étudier de la même manière la stabilité de l'interface liquide et le comportement d'objets que l'on y placerait. Cette étude est l'objet du prochain chapitre.

"J'ai généralisé le modèle,
maintenant il est faux par-
tout."

E. Fort



Stabilisation d'interfaces par des vibrations dans une direction arbitraire

6.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que des vibrations verticales pouvaient à la fois stabiliser une interface plane initialement instable au repos (par instabilité de Rayleigh-Taylor) ou déstabiliser une interface plane initialement stable au repos (par instabilité de Faraday). Plus généralement, l'application de vibrations dans diverses directions a des effets importants sur la forme des interfaces liquides. Historiquement, la première observation est attribuée à Faraday qui a observé l'aplatissement de gouttes liquides lorsqu'elles étaient soumises à des vibrations intenses [57]. Lorsque la vibration appliquée n'est plus verticale mais horizontale, il existe un seuil au-delà duquel apparaît un motif stationnaire à l'interface appelé *frozen waves* dont la première observation est attribuée à G. Wolf [73]. Dans le cas où les vibrations sont bien plus intenses que la gravité, la masse de fluide se réoriente globalement de sorte à ce que l'interface soit perpendiculaire à l'excitation. Ce *vibro-équilibre* résulte d'un compromis entre les pseudo-forces inertielles appliquées et la gravité (on négligera ici les effets capillaires).

Ce problème a été étudié théoriquement *via* des techniques variationnelles moyennées sur une excitation rapide [130–132] ou plus simplement par des modèles de pendules équivalents [133, 134]. Expérimentalement, la déformation d'interfaces par création de *frozen waves* a été étudiée à plusieurs reprises [135–137] et quelques observations de vibro-équilibres présentant des interfaces planes mais non horizontales ont été rapportées [73]. Les accélérations nécessaires pour observer de tels effets nécessitent cependant des vibreurs de grande puissance et engendrent pour des fluides peu visqueux l'éjection massives de gouttes par l'interface. Pour pallier cette difficulté, de nombreuses expériences ont eu lieu en micro-gravité afin d'augmenter les effets des vibrations comparativement aux effets gravitaires [132, 133, 138–140] et montrent bien un alignement des interfaces perpendiculairement au forçage. Ces expériences ouvrent la voie à la création de gravité artificielle dans l'espace pour le contrôle de fluides [141]. Il semble cependant qu'aucune étude quantitative sur ces vibro-équilibres n'ait été menée dans des conditions de gravité standard.

Nous proposons donc dans cette section de mener une telle étude. Afin d'éviter les instabilités mentionnées précédemment, nous utilisons à nouveau de l'huile de silicone fortement visqueuse et un vibreur permettant d'appliquer des accélérations sinusoïdales dont l'amplitude est de quelques dizaines de g à une centaine de Hertz. Les effets issus des vibrations sont, dans ces conditions, dominants devant les effets gravitaires. Après une première observation expérimentale, une analogie avec un pendule vibré dans une direction arbitraire est proposée et comparée aux données expérimentales. L'aspect hydrodynamique du problème est étudié théoriquement et expérimentalement. On établit en particulier que la stabilisation passe par l'établissement d'un gradient de vitesse le long de l'interface. Par la suite, on montre expérimentalement que la physique du problème est qualitativement

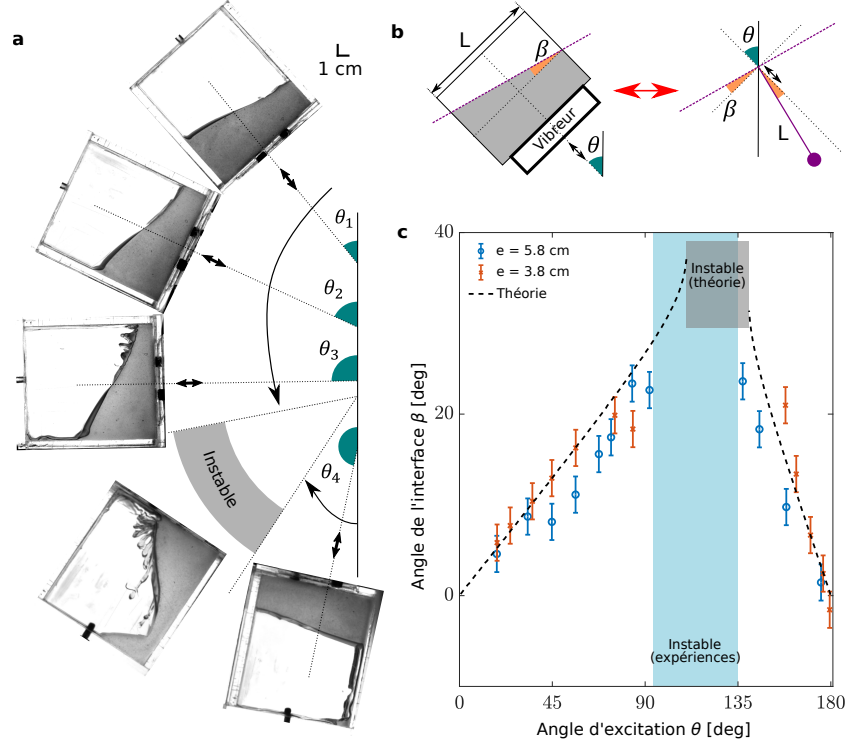


FIG. 6.1: Angle d'équilibre pour un bac de longueur $L = 9$ cm (a) Photographies d'une interface vibrée dans différentes directions (b) Notations et schéma d'une interface liquide et du pendule équivalent associé (c) Mesure de l'angle β entre la normale à l'excitation et l'interface pour différents angles d'excitation θ . Le pendule associé a pour pulsation $\omega_0^2 = \alpha_0 g |\cos \beta| / L$ avec $\alpha_0 = 2.3$.

modifiée lorsqu'une couche d'air compressible est ajoutée au fond du bac. Pour finir, des expériences de flottaison sur les interfaces vibrées sont réalisées, montrant que l'équilibre d'Archimède est réalisé pour toutes les directions d'excitations.

6.2 Observation expérimentales d'interfaces vibrées dans des directions arbitraires

6.2.1 Montage expérimental et méthodes de mesure

Nous présentons dans cette section une série d'expériences mettant en évidence les vibro-équilibres mentionnés précédemment. Les expériences sont conduites dans un bac de longueur $L = 9$ cm pour une largeur de 2 cm. Ce dernier est rempli d'huile de silicone de masse volumique $\rho = 0.96$ kg/L et de viscosité $\nu = 1000$ cSt. Cette viscosité permet comme précédemment d'appliquer des forçages importants sans éjection de gouttes par l'interface. Le tout est placé sur un vibreur pouvant pivoter autour d'un axe horizontal, permettant ainsi de faire varier l'angle θ entre la direction d'excitation et la verticale. On prendra comme convention $\theta = 0^\circ$ lorsque le liquide est au-dessus du fond du bac et $\theta = 180^\circ$ lorsque celui-ci est en dessous (voir figure 6.1). La fréquence de vibration est fixée à $\omega/2\pi = 100$ Hz, de même que la norme de l'excitation $V_{exc} = 1.4$ m/s. La vitesse du pot vibrant est mesurée lorsque le pot est en position verticale en utilisant des algorithmes d'analyse d'image similaires à ceux présentés dans le chapitre précédent. En plaçant un accéléromètre sur le pot, il a été possible de vérifier que pour une consigne électrique constante, la vitesse de vibration était indépendante de l'angle θ .

L'interface liquide restant approximativement plane durant l'expérience, la position d'équilibre

obtenue peut être caractérisée par l'angle β entre la normale à l'excitation et l'interface. Du fait du forçage haute fréquence, l'angle β oscille à cette même fréquence au cours du temps (voir plus loin figure 6.5). L'amplitude de cette oscillation est cependant relativement faible puisqu'elle n'excède pas quelques degrés au maximum. On négligera donc cet effet dans un premier temps et on procédera aux mesures de β sur une seule image. L'incertitude de mesure est estimée empiriquement à $\pm 2^\circ$ et est matérialisée par des barres d'erreur.

6.2.2 Résultats

Partant d'une position initialement verticale, l'angle d'excitation θ est progressivement augmenté. On observe alors une réorientation de l'interface qui s'incline par rapport à l'horizontale (voir figure 6.1a). L'angle β caractérisant l'écart à une interface perpendiculaire au forçage augmente également, suggérant que l'équilibre observé résulte d'un compromis entre la gravité et les forces issues de la vibration. Lorsque l'angle θ dépasse les 100° , l'interface s'effondre et le liquide passe dans une nouvelle position d'équilibre symétrique telle que celle présentée figure 6.1a.

Le temps de chute du liquide étant suffisamment lent, il est possible de pivoter rapidement le pot vibrant jusqu'à $\theta = 180^\circ$ pour placer le liquide en position inversée. On peut alors effectuer la même expériences en partant d'une interface horizontale inversée avec un forçage vertical. On observe alors comme précédemment une déviation de l'interface par rapport à l'horizontale à mesure que l'angle d'excitation θ est diminué. Au-delà d'un angle limite d'environ 135° , l'interface s'effondre à nouveau, définissant une zone d'instabilité $100^\circ < \theta < 135^\circ$ où la stabilisation d'une interface plane semble impossible.

En variant la quantité de liquide présente dans le bac, on démontre expérimentalement que le résultat de la mesure dépend marginalement de l'épaisseur de liquide notée e . Les résultats obtenus pour $e = 3.8$ cm et $e = 5.8$ cm présentés figure 6.1c sont en effet quasiment identiques aux incertitudes de mesure près. Cela suggère que seule la longueur du bac L est pertinente pour peu que la quantité de liquide soit suffisante pour réaliser l'équilibre.

Pour modéliser ces observation, on propose d'assimiler la masse de fluide par un pendule pesant équivalent vibré dans une direction arbitraire. Les propriétés d'un tel pendule sont présentées dans la section suivante.

6.3 Pendule pesant vibré dans une direction arbitraire

On étudie pour commencer un pendule rigide de masse m et de longueur L_p dont le point d'accroche oscille avec une accélération $\vec{a} = -A\omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_\phi$ (voir figure 6.2). L'angle entre la vibration et la verticale est noté ϕ , celui entre le pendule et la verticale est noté α , et on notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ la base polaire attachée au pendule. Dans le référentiel mobile, le principe fondamental de la dynamique selon l'axe $\vec{e}_\alpha$ s'écrit

$$mL_p \ddot{\alpha} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_\alpha - m\vec{a} \cdot \vec{e}_\alpha \quad (6.1)$$

En posant $\omega_0^2 = g/L_p$ la pulsation du pendule $\xi = \frac{A\omega^2}{g}$ un paramètre adimensionné, on peut réécrire l'équation précédente

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = \xi \omega_0^2 \cos(\omega t) \sin(\phi - \alpha) \quad (6.2)$$

On applique la même procédure que pour le pendule vertical en décomposant $\alpha = \alpha_s + \alpha_f$ et on obtient pour la variable rapide

$$\ddot{\alpha}_f = \xi \omega_0^2 \cos(\omega t) \sin(\phi - \alpha_s) \quad (6.3)$$

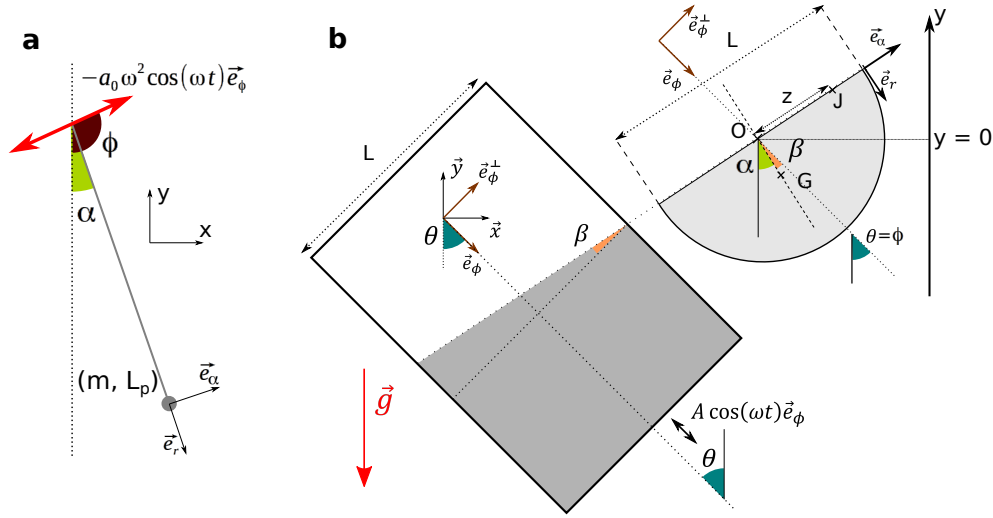


FIG. 6.2: (a) Schéma du pendule vibré et notations (b) Notations et schéma d'une interface liquide et du pendule équivalent associé

et donc

$$\alpha_f = -\xi \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos(\omega t) \sin(\phi - \alpha_s) \quad (6.4)$$

En prenant maintenant la moyenne $\langle . \rangle$ de l'équation (6.2), on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_s + \omega_0^2 \sin \alpha_s &= \xi \omega_0^2 \langle \cos(\omega t) [\sin(\phi - \alpha_s) - \cos(\phi - \alpha_s) \alpha_f] \rangle \\ &= -\xi \omega_0^2 \cos(\phi - \alpha_s) \langle \cos(\omega t) \alpha_f \rangle \\ &= \xi^2 \frac{\omega_0^4}{2\omega^2} \cos(\phi - \alpha_s) \sin(\phi - \alpha_s) \\ &= \xi^2 \frac{\omega_0^4}{4\omega^2} \sin(2\phi - 2\alpha_s) \end{aligned} \quad (6.5)$$

La position d'équilibre α_{eq} vérifie donc

$$\frac{V_{exc}^2}{4gL_p} \sin(2\phi - 2\alpha_{eq}) = \sin(\alpha_{eq}) \quad (6.6)$$

La stabilité de la position est quant à elle déterminée par le signe de la dérivée. Une solution stable vérifiera

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\sin(\alpha) - \frac{V_{exc}^2}{4gL_p} \sin(2\phi - 2\alpha) \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} > 0 \quad (6.7)$$

tandis qu'une solution instable aura une dérivée négative. Seules les solutions stables seront considérées dans la suite du chapitre et on parlera donc de position d'équilibre sans autre précision.

L'équation (6.6) indique que dans le cas d'un forçage important, on a $\alpha_{eq} \approx \phi + n\pi$ et le pendule tend donc à s'aligner avec la vibration. En particulier, la position d'équilibre varie continûment avec l'angle d'excitation et il est donc possible de passer de la solution "pendule pesant" à la solution "pendule inversé" en faisant tourner l'excitation. Ce n'est plus le cas lorsque le forçage passe sous une vitesse critique $V_{exc} < V_{lim}$. Partant de la position "pendule pesant", il est impossible de passer en position inversée par une variation quasi statique de la direction d'excitation. Il existe en effet un angle de décrochage θ_{min} pour lequel le pendule passe soudainement sur un autre équilibre

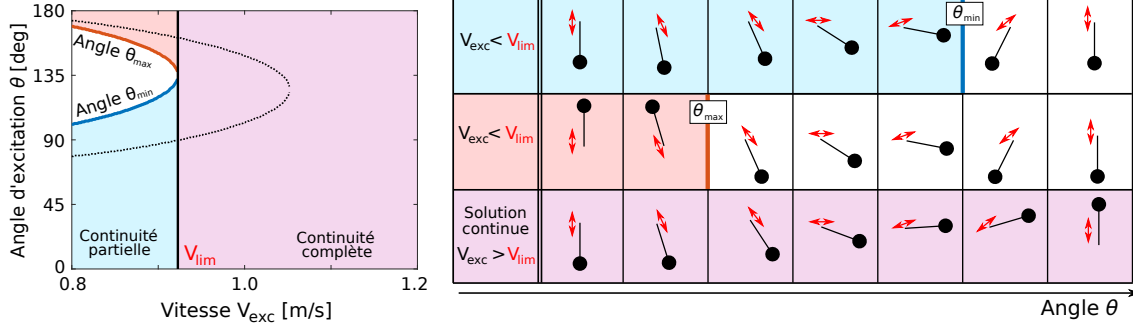


FIG. 6.3: Angles limites atteignables par continuité en fonction de la vitesse du forçage V_{exc} avec un pendule de pulsation $\omega_0^2 = \alpha_0 g/L$. Partant d'une position "pendule pesant" ou "pendule inversé", on observe deux types de comportements. Si $V_{exc} < V_{lim}$, il existe des angles de forçage pour lesquels la position d'équilibre du pendule présente une discontinuité. Si $V_{exc} > V_{lim}$, il est possible de passer continûment d'une position à l'autre en faisant tourner lentement la direction de l'excitation. La ligne en pointillé représente ces mêmes angles dans le cas d'un pendule modifié de pulsation $\omega_0^2 = \alpha_0 g \cos(\alpha)/L$. La vitesse limite varie d'environ 10 % mais l'allure des deux courbes reste très proche.

comme représenté figure 6.3. La vitesse limite V_{lim} étant supérieure à la vitesse nécessaire pour stabiliser le pendule dans sa position inversée, on peut effectuer la même analyse en partant de cette position. De la même manière, on observe un saut dans la position d'équilibre pour un angle θ_{max} . L'intervalle $\theta_{min} < \theta < \theta_{max}$ est tracé en fonction de la vitesse d'excitation figure 6.3. Cet intervalle diminue avec le forçage et disparaît finalement pour $V_{exc} > V_{lim}$. Par ailleurs, cette vitesse limite est d'autant plus grande que la longueur du pendule L_p augmente, l'équation (6.6) donnant la loi d'échelle $V_{lim} \propto \sqrt{L_p}$.

Ces résultats théoriques sont qualitativement similaires aux résultats expérimentaux présentés précédemment. Dans les deux cas, il existe une tendance à l'alignement avec la vibration et l'existence d'angles de décrochage. Cela motive l'introduction d'un principe de correspondance entre interface liquide et pendule vibré que l'on décrit maintenant.

6.4 Correspondance entre une interface liquide et un pendule pesant

La question de l'équivalence entre un pendule et une surface liquide a déjà été abordée dans le chapitre précédent et de manière exhaustive dans la littérature [74, 133, 134]. On se contentera ici d'un modèle simple avec un paramètre ajustable pour accorder dans la mesure du possible prédictions et résultats expérimentaux. Expérimentalement, l'angle β donnant la déviation de l'interface par rapport à la droite perpendiculaire à l'excitation permet une interprétation plus simple des données. On peut relier cet angle à l'angle d'équilibre α_{eq} via la formule $\beta = \phi - \alpha_{eq}$. Cet angle représente également l'angle entre le pendule et la direction d'excitation. L'angle de cette dernière étant défini à π près, on identifiera $\theta = \phi$.

Afin d'utiliser les prédictions associées au pendule pesant, il est nécessaire de déterminer la pulsation ω_0 associée à l'interface liquide. Dans le chapitre précédent, le choix avait été guidé par la relation de dispersion des ondes sur une surface horizontale qui donnait $\omega_0 = \sqrt{2\pi g/L}$. Cependant, si l'interface n'est plus horizontale, le calcul aboutissant à la relation de dispersion ne peut plus être effectué et il n'y a donc aucune raison de conserver cette valeur particulière de pulsation.

On peut cependant inférer que la loi d'échelle $\omega_0 \sim \sqrt{g/L}$ restera valable quel que soit l'angle de l'interface. En effet, la masse de fluide peut être modélisée comme un demi-disque tournant autour

de son centre comme présenté figure 6.2. Le choix du point d'attache au centre du disque permet d'assurer la conservation volume de fluide équivalent lors de la rotation. Le moment d'inertie est alors $I = \frac{1}{8}mL^2$ et le centre de masse est à une distance $\frac{2}{3\pi}L$ du centre de rotation. L'équation du mouvement est alors

$$\ddot{\alpha} = -mg \frac{2L}{3\pi I} \sin \alpha = -\frac{8g}{3\pi L} \sin \alpha = -\omega_0^2 \sin \alpha \quad (6.8)$$

et on retrouve bien la loi d'échelle attendue pour ω_0 , le préfacteur dépendant de la forme exacte choisie. On choisira donc

$$\omega_0^2 = \frac{\alpha_0 g}{L} \quad (6.9)$$

et on ajustera α_0 à l'aide des données expérimentales. Pour les données précédentes avec $L = 9$ cm, la valeur $\alpha_0 = 2.3$ permet un bon accord entre théorie et expérience. Cette loi d'échelle est conforme à celle utilisée dans d'autres articles traitant de problèmes similaires bien que le préfacteur diffère [133, 134]. Cependant, le modèle prédit que toutes les positions devraient être stables pour le forçage appliqué de $V_{exc} = 1.4$ m/s ($V_{lim} < V_{exc}$). En abaissant légèrement $\alpha_0 = 1.8$, il est possible d'augmenter cette vitesse limite et de faire apparaître un intervalle instable au prix d'un moins bon accord avec les données expérimentales.

Il est également possible de modifier le modèle pour prendre en compte la longueur variable de l'interface liquide en fonction de son angle d'inclinaison. Pour cela, on remplace dans la loi d'échelle $\omega_0^2 \sim g/L$ par $\omega_0^2 = g/L_i$ avec $L_i = L/|\cos(\beta)| > L$ la longueur de l'interface. Cela rend compte du fait que la pulsation du plus grand mode dépend de la longueur et donc de l'angle d'inclinaison de l'interface. Pour de faibles angles β , les deux modèles donnent des prédictions équivalentes tandis que pour des angles β plus importants, des différences significatives apparaissent. La longueur de l'interface devient alors significativement plus grande que celle du bac. La longueur du pendule équivalent augmente donc également, ce qui le rend plus difficile à stabiliser. La condition d'équilibre (6.6) devient donc pour l'interface liquide

$$\frac{\alpha_0 V_{exc}^2}{4gL} \cos(\phi - \alpha) \sin(2\phi - 2\alpha_{eq}) = \sin(\alpha_{eq}) \quad (6.10)$$

La prédiction de ce modèle avec $\alpha_0 = 2.3$ est tracée figure 6.1b. Celui-ci offre un bon accord avec les résultats expérimentaux et prédit l'apparition d'un intervalle d'instabilité. La comparaison en terme de stabilité entre le pendule classique et ce pendule modifié pour $\alpha_0 = 2.3$ est présentée figure 6.3. L'effet principal est un décalage d'environ 10 % de la vitesse limite, l'allure des courbes donnant θ_{min} et θ_{max} étant très similaire. On utilisera donc ce modèle et cette valeur de α_0 pour les prédictions d'angles d'équilibres.

6.5 Dépendance expérimentale des angles en fonction de l'excitation

Le modèle précédent prédit d'une part l'inclinaison de l'interface pour un forçage donné et d'autre part la valeur des angles θ_{min} et θ_{max} pour lesquels le liquide décroche de sa position d'équilibre. Le modèle prédit en particulier l'existence d'une vitesse de forçage minimale V_{lim} au-delà de laquelle ce décrochage ne se produit plus (voir figure 6.3). Il est possible dans ce cas d'effectuer une transition continue entre la position "standard" et la position "inversée" du liquide par le biais d'une rotation de 0 à 180 degrés de l'angle de vibration. Expérimentalement, une telle transition n'a pas pu être observée dans un bac de 9 cm du fait des limitations du pot vibrant. Les considérations précédentes suggèrent donc de diminuer la taille du bac afin d'abaisser la vitesse limite nécessaire pour stabiliser le liquide quel que soit l'angle d'excitation.

La même expérience est donc menée avec un bac de longueur $L = 5$ cm et des vitesses de forçage différentes $0.9 \text{ m/s} < V_{exc} < 1.2 \text{ m/s}$. Les résultats sont présentés en figure 6.4. Lorsque

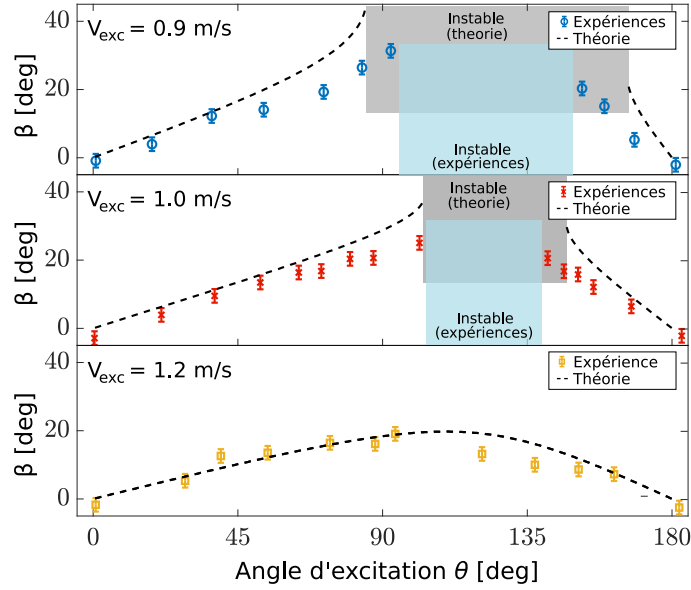


FIG. 6.4: Mesure de l'angle β en fonction de l'angle d'excitation θ pour différentes vitesses d'excitation $V_{exc} = 0.9, 1.0$ et 1.2 m/s dans un bac de longueur $L = 5$ cm. Les angles $(\theta_{min}, \theta_{max})$ expérimentaux sont matérialisés par une bande bleue. La prédiction théorique est tracée pour $\alpha_0 = 2.3$ soit $\omega_0 = 21$ rad/s. Pour la plus grande vitesse $V_{exc} = 1.2$ m/s, aucun décrochage du liquide n'est observé.

le forçage augmente, on observe à la fois une diminution de l'angle de l'interface β pour tous les angles d'excitation et une réduction de la plage d'instabilité $(\theta_{min}, \theta_{max})$. Pour le forçage maximal $V_{exc} = 1.2$ m/s, celle-ci disparaît même complètement permettant une stabilisation suivant tous les angles d'excitation. Ces résultats concordent avec le modèle proposé, bien que des différences significatives apparaissent pour les angles de forçage proches de l'horizontale.

Afin d'étudier de manière plus précise la dépendance de β en fonction de la vitesse d'excitation, on étudie sa variation pour un forçage horizontal d'intensité variable. En partant d'une interface quasi-verticale, le forçage est diminué progressivement jusqu'à ce que l'interface s'effondre pour une vitesse $V \approx 0.8$ m/s. Contrairement aux mesures précédentes, on étudie cette fois-ci la dynamique rapide de l'interface en réalisant un film pris à 25.5 images/seconde pour profiter de l'effet stroboscopique. On procède alors pour chaque image à une détection d'interface par des méthodes similaires à celles présentées au chapitre précédent. On ajuste ensuite numériquement une droite sur l'interface comme présenté en figure 6.5 pour accéder à l'angle β associé à l'image. En traçant cet angle en fonction du temps, on peut observer les oscillations rapides dues à la vibration haute fréquence et une augmentation lente de la valeur moyenne due à la baisse progressive du forçage.

En repérant par ailleurs la position d'un repère sur le bac (en l'occurrence, la vis) sur une oscillation complète, on peut accéder à l'amplitude du forçage imposée sur une oscillation. Il est possible à partir de ces deux informations de tracer l'angle moyenné sur une période d'oscillation β en fonction de la vitesse imposée sur cette même oscillation. Les résultats comparés à la prédiction théorique sont tracés en figure 6.5c. Cette dernière décrit bien la tendance des données expérimentales mais avec un écart significatif. L'accord quantitatif peut être retrouvé à condition de prendre $\omega_0 = 24$ rad/s (et non plus $\omega_0 = 21$ rad/s) pour la pulsation du pendule équivalent. Ces observations sont cohérentes avec la figure 6.4 où les désaccords significatifs entre théorie et expériences apparaissent lorsque θ est proche de 90° .

Ces écarts montrent les limites du modèle qui malgré sa simplicité décrit de manière satisfaisante

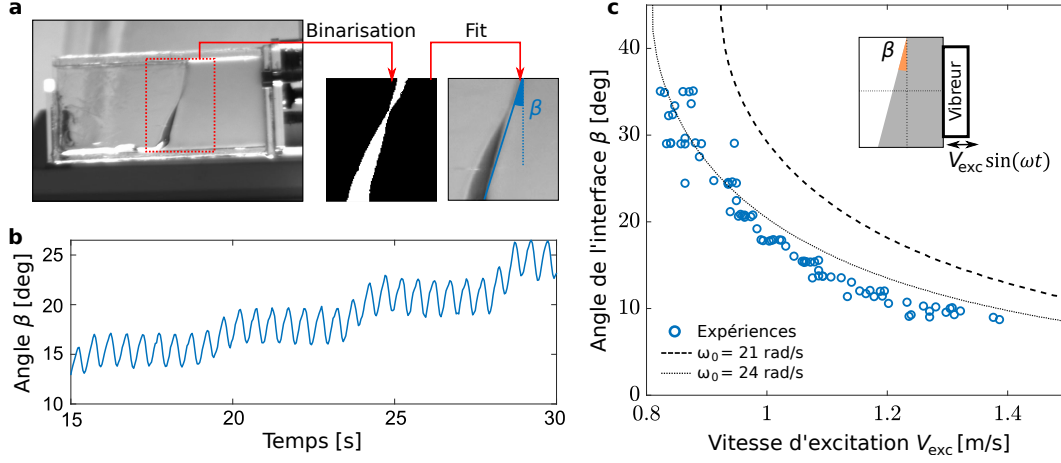


FIG. 6.5: Etude de l'angle de l'interface pour un forçage horizontal d'intensité variable. (a) Méthode de détection de l'interface : après une binarisation par seuil, on procède à un ajustement linéaire sur l'interface permettant d'extraire pour chaque image l'angle β . (b) Angle β détecté en fonction du temps. La variation lente de la valeur moyenne est due à la diminution progressive du forçage au cours du temps tandis que les oscillations rapides sont dues à la vibration haute fréquence de l'interface perçue par effet stroboscopique. (c) Mesure de l'angle moyen (extrait de (b)) en fonction de la vitesse d'excitation. Les prédictions théoriques associées à $\omega_0 = 21$ rad/s (ligne discontinue) et $\omega_0 = 24$ rad/s (pointillés) sont tracées pour comparaison.

les résultats expérimentaux. Ce type de modèle n'est toutefois pas pleinement satisfaisant puisqu'il ne dit rien sur le maintien de l'interface d'un point de vue hydrodynamique, le pendule équivalent étant un solide indéformable. L'étude fine des interfaces offre une piste intéressante pour expliquer la stabilisation d'un point de vue hydrodynamique. La photographie pour un forçage horizontal présentée en figure 6.1a montre en effet la présence d'ondes de Faraday sur la partie supérieure de l'interface uniquement. Cela indique que la vitesse d'oscillation à l'interface n'est pas uniforme mais dépend du point considéré. On montre dans la section suivante que ces inhomogénéités permettent de compenser la pression hydrostatique et de maintenir l'interface inclinée.

6.6 Prédiction théorique du profil de vitesse à l'interface

Pour éviter toute confusion, on réservera les lettres minuscules aux quantités qui varient sinusoidalement et les majuscules aux amplitudes. Ainsi, la vitesse dans le référentiel du laboratoire sera notée $v(z, t) = V(z) \sin(\omega t)$ tandis que la vitesse dans le référentiel en mouvement sera notée $v^*(z, t) = V^*(z) \sin(\omega t)$.

6.6.1 Modèle de pendule solide

Pour commencer, il est intéressant de calculer le profil de vitesse le long de l'interface du demi-disque solide étudié précédemment. Considérons un point J tel que $\vec{OJ} = z\vec{e}_\alpha$ comme représenté figure 6.2. Sa vitesse dans le référentiel en mouvement s'écrit

$$\vec{v}^*(z, t) = -z\dot{\alpha}\vec{e}_r \quad (6.11)$$

avec $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_s + \dot{\alpha}_f$. L'équation (6.4) donne alors

$$\dot{\alpha}_f = \xi \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin(\omega t) \sin(\beta_s) \quad (6.12)$$

En supposant l'équilibre atteint sur les variables lentes, on a $\dot{\alpha}_s \approx 0$. et la vitesse du point J dans le référentiel en mouvement s'écrit donc

$$\vec{v}^*(z, t) = -\xi z \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin(\omega t) \sin(\beta) \vec{e}_r = V^*(z) \sin(\omega t) \vec{e}_r \quad (6.13)$$

Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du point J sera (on utilise ici $\vec{e}_r = \cos(\beta) \vec{e}_\phi + \sin(\beta) \vec{e}_\phi^\perp$)

$$\begin{aligned} \vec{v}(z, t) &= -A\omega \sin(\omega t) \vec{e}_\phi - \xi z \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin(\omega t) \sin(\beta) \vec{e}_r \\ &= -\left(A\omega + \xi z \frac{\omega_0^2}{2\omega} \sin(2\beta)\right) \sin(\omega t) \vec{e}_\phi \\ &\quad - \xi z \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin(\beta)^2 \sin(\omega t) \vec{e}_\phi^\perp \end{aligned} \quad (6.14)$$

Expérimentalement, on a $\beta < \pi/6$ si bien que l'on négligera systématiquement la composante selon $\vec{e}_\phi^\perp$. Au premier ordre, la vitesse de l'interface est donc orientée dans la même direction que l'excitation. Dans la configuration telle que présentée figure 6.2 ($\beta > 0$) le modèle prédit une vitesse V plus grande que la vitesse d'excitation sur la partie supérieure de l'interface et une vitesse plus faible dans la partie inférieure. Dans le cas d'un forçage horizontal selon $\vec{e}_x$, on a $z = y \sin(\alpha_{eq})$ en supposant que O est sur la ligne $y = 0$ (voir figure 6.2). L'amplitude de la vitesse devient avec cette nouvelle cordonnée

$$V(y) = V_{exc} + \xi y \frac{\omega_0^2}{2\omega} \frac{\sin(2\beta)}{\sin(\alpha_{eq})} \quad (6.15)$$

En utilisant la condition d'équilibre (6.6), le résultat précédent se réécrit simplement

$$\boxed{V(y) = V_{exc} + \frac{2g}{V_{exc}} y} \quad (6.16)$$

Le profil de vitesse est linéaire du fait du caractère indéformable du pendule. Le point $y = 0$ correspondant à l'axe de rotation a bien la vitesse de l'excitation V_{exc} . Le fait d'avoir choisi le centre du disque comme centre de rotation assure automatiquement la conservation du volume de liquide qui impose $\frac{1}{L} \int V(y) dy = V_{exc}$. Ce modèle nécessite néanmoins l'introduction d'un solide équivalent pour modéliser le fluide.

6.6.2 Profil de vitesse à partir des équations de Navier-Stokes

On montre ici qu'il est possible d'écrire directement la condition d'équilibre à partir des équations de la mécanique des fluide sans passer par un pendule équivalent. On supposera pour simplifier que le forçage est horizontal, de sorte que l'accélération du bac est $A\omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. Dans le référentiel du laboratoire, les équations de conservation de la masse et de Navier-Stokes s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} \end{aligned} \quad (6.17)$$

avec $\vec{v}$ la vitesse et p la pression dans le fluide. A l'interface, donnée par $y = h(x, t)$ dans le référentiel du laboratoire, les conditions aux limites cinématiques et dynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{dh}{dt} = v_y \\ p(x, h(x, t)) &= P_{atm} \end{aligned} \quad (6.18)$$

où P_{atm} est la pression atmosphérique. Cette dernière équation est valable tant que les phénomènes capillaires et les variations de pression dans la couche d'air sont négligeables. On négligera également dans un premier temps la viscosité, et on supposera le forçage intense devant la gravité, c'est à dire $A\omega^2 \gg g$. Cette approximation permet de supposer qu'au premier ordre, la vitesse du fluide oscillera avec le forçage à la pulsation ω . On cherche donc une solution pour le champ de vitesse sous la forme

$$\vec{v} = \vec{V} \sin \omega t + \vec{u} \quad (6.19)$$

où $\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y$ est l'amplitude locale de la vitesse oscillant à ω et $\vec{u}$ une composante petite devant $\vec{V}$ modélisant l'ensemble des flots secondaires lents pouvant émerger.

Il est possible de procéder à une résolution perturbative du problème [142]. On écrit le champ de pression $p = p_0 + p_1 + \dots$, avec $p_1 \ll p_0$. Au premier ordre, l'équation de Navier-Stokes s'écrit alors

$$\omega \vec{V} \cos \omega t = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_0 \quad (6.20)$$

A l'ordre principal, la pression dans le fluide est donc directement liée au champ de vitesse oscillant à ω . A noter que pour établir cette équation, nous avons omis le terme non linéaire $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$, ce qui revient à négliger au premier ordre les variations spatiales de $\vec{V}$. Ce terme ne peut plus être négligé à l'ordre suivant de l'équation (6.17), qui donne alors

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \cos(\omega t)^2 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_1 + \nu \Delta \vec{V} \cos \omega t + \vec{g} \quad (6.21)$$

En prenant le rotationnel de l'équation (6.20), on montre que $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$. Le terme non linéaire peut alors se mettre sous forme potentielle $\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{V}^2)$. La moyenne de l'équation (6.21) sur une période d'oscillation rapide donne alors

$$\frac{1}{4} \vec{\nabla} (\vec{V}^2) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \langle p_1 \rangle + \vec{g} \quad (6.22)$$

On en déduit le profil de pression moyen qui suit une loi de Bernoulli

$$\langle p_1 \rangle = C_0 - \frac{1}{4} \rho V^2 - \rho g y \quad (6.23)$$

On va maintenant utiliser les expressions des champs de pression pour expliciter la condition cinématique (6.18). On sépare pour cela la hauteur de l'interface $h(x, t)$ en deux composantes $h = h_0 + h_1$. Le premier terme h_0 rend compte de la position moyenne de l'interface, qui ne dépend pas du temps à l'équilibre, tandis que h_1 rend compte de l'oscillation de l'interface à la pulsation ω autour de sa position d'équilibre. On suppose que $h_1 \ll h_0$, ce qui permet d'écrire la condition cinématique comme

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + V_x \frac{\partial h_0}{\partial x} \sin \omega t = V_y \sin \omega t \quad (6.24)$$

On en déduit, en intégrant l'équation précédente par rapport au temps, que la hauteur de l'interface s'écrit

$$h(x, t) = h_0(x) + \frac{1}{\omega} \left(V_x \frac{\partial h_0}{\partial x} - V_y \right) \cos(\omega t) \quad (6.25)$$

On utilise cette expression pour développer la condition dynamique (6.18) qui s'écrit

$$p_0(x, h_0) + \frac{\partial p_0}{\partial y}(x, h_0) h_1 + p_1(x, h_0) = P_{atm} \quad (6.26)$$

En utilisant les équation (6.20) et l'expression de h_1 , l'équation précédente se réécrit

$$p_0(x, h_0) - \rho\omega V_y \frac{1}{\omega} \left(V_x \frac{\partial h_0}{\partial x} - V_y \right) \cos(\omega t) + p_1(x, h_0) = P_{atm} \quad (6.27)$$

Au premier ordre, cette équation impose que la pression p_0 soit constante à l'interface. Cela impose en particulier que sa dérivée le long de l'interface soit nulle. En notant $\vec{t}$ un vecteur tangent à l'interface, cette condition s'écrit par l'équation (6.20)

$$\vec{V} \cdot \vec{t} = 0 \quad (6.28)$$

A l'interface, la vitesse est donc dirigée selon la normale $\vec{n}$ à l'interface et s'écrit

$$\vec{V} = V(x, y) \vec{n} \quad (6.29)$$

On va utiliser cette propriété pour écrire l'équation (6.27) en fonction de l'amplitude $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ uniquement. Un vecteur tangent à l'interface est donné par $\vec{t} = (1, \frac{\partial h_0}{\partial x})$, si bien que $\vec{V} \cdot \vec{t} = 0$ donne la relation $V_x = -\frac{\partial h_0}{\partial x} V_y$. Au deuxième ordre, l'équation (6.27) se réécrit alors

$$\frac{1}{2} V^2 \cos \omega t^2 + p_1 = C_1 \quad (6.30)$$

avec C_1 une constante. En prenant la moyenne sur une période d'oscillation et avec l'équation (6.23), on obtient finalement qu'à l'interface moyenne $\langle y \rangle = h_0$, la vitesse de l'interface est liée au champ de hauteur par

$$\frac{1}{4} V^2 - \rho g h_0 = C_1 \quad (6.31)$$

On définit l'altitude y_0 comme celle où la vitesse de l'interface est égale à celle de l'excitation $V(y_0) = V_{exc}$. On peut alors exprimer la relation précédente comme

$$\boxed{V(y) = \sqrt{V_{exc}^2 + 4g(y - y_0)}} \quad (6.32)$$

Dans la limite des larges forçages $V_{exc} \gg gL$, le développement limité au premier ordre de ce profil donne exactement le profil de vitesse (6.16) prédit par le modèle du pendule solide. Dans le cas général, le point y_0 de vitesse égale à celle de l'excitation est déterminé par la condition $\frac{1}{L} \int V(y) dy = V_{exc}$ et se situe dans la partie inférieure de l'interface ($y_0 < 0$).

Contrairement au cas d'une interface horizontale qui est toujours en situation d'équilibre (stable ou instable) au repos, une interface inclinée n'est pas à l'équilibre en l'absence de forçage. Nous venons de montrer ici que l'établissement d'un gradient de vitesse à l'interface permet d'obtenir un équilibre dynamique de cette interface. La stabilité de l'équilibre n'est pas démontrée pour autant. Dans le cas d'une interface horizontale par exemple, ce modèle prédit simplement une vitesse homogène à l'interface, et aucune condition de stabilité supplémentaire n'apparaît. On supposera cependant que cette position d'équilibre est stabilisée par les vibrations comme le suggère le modèle du pendule pesant.

6.6.3 La couche limite au bord

Les profils (6.16) et (6.32) ne prennent cependant pas en compte la condition aux limites cinématiques d'entraînement au bord

$$V(y = \pm L/2) = V_{exc} \quad (6.33)$$

Pour remédier à cela, on perturbe les profils précédents sur une épaisseur $\delta = \sqrt{2\nu/\omega} \approx 2$ mm. Dans cette couche limite, on supposera que le fluide suit un écoulement de Stokes dominé par la viscosité que l'on peut déterminer. On utilise pour cela le fait que l'écoulement initial est approximativement uniforme sur une épaisseur de quelques δ . Les deux écoulements dans la couche et loin de la couche sont ensuite raccordés. Les calculs sont détaillés en annexe C. La correction décroît exponentiellement avec la distance au bord sur une épaisseur typique δ et permet au champ de vitesse de respecter la condition (6.33).

6.7 Etude expérimentale de la vitesse à l'interface

On cherche maintenant à étudier expérimentalement le profil de vitesse à l'interface. On se place pour cela dans le cas d'un forçage horizontal $\theta = 90^\circ$, où le gradient de vitesse semble maximal. L'angle β représente alors l'écart de l'interface à la verticale $\vec{y}$.

6.7.1 Méthode de mesure

L'étude de la vitesse de l'interface nécessite une détection fine de cette dernière. On utilisera pour cela un algorithme de détection de front sub-pixel [143] déjà utilisé à plusieurs reprises dans le laboratoire. Le fonctionnement de l'algorithme est présenté en figure 6.6. Chaque ligne de l'image est traitée indépendamment. En appliquant éventuellement des seuils sur les niveaux de l'image, on arrive à faire apparaître l'interface comme une marche dans les niveaux de gris de la ligne considérée. Pour détecter la position subpixel du front, on convolue numériquement ce signal avec la fonction

$$f_a(x) = x \exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right) \quad (6.34)$$

où l'on prend $a = 5$ px de l'ordre de la taille du front. Le résultat de la convolution est la dérivée du signal initial convolué par une gaussienne de largeur a . Ceci permet de lisser le processus de dérivation numérique qui est généralement fortement bruité. Le maximum du signal convolué correspond à la pente maximal du niveau de gris et donc à l'interface recherchée. Il est possible de détecter ce maximum avec une résolution subpixel par un ajustement parabolique à son voisinage. Le résultat obtenu pour l'interface en utilisant cette technique est satisfaisant dans la grande majorité des cas. Il arrive cependant que l'algorithme détecte une autre interface, par exemple celle d'une bulle. Ces événements étant rares, on applique une procédure de lissage au profil permettant de régulariser ces points aberrants. Un résultat typique est présenté en figure 6.6.

En appliquant cette procédure sur chaque image, on est capable grâce à l'effet stroboscopique d'extraire la dynamique rapide de l'interface. Pour chaque ligne i de pixels, on mesure le déplacement $a_i(t)$ de l'interface au cours du temps en pixels. Ce déplacement est sinusoïdal avec une très bonne approximation

$$a_i(t) = A_i \sin(\omega t + \phi_i). \quad (6.35)$$

L'amplitude de l'oscillation A_i est extraite en prenant l'écart type du signal temporel σ_t sur un grand nombre d'oscillations

$$\sigma_t(a_i(t)) = \frac{A_i}{\sqrt{2}} \quad (6.36)$$

Cela permet de déduire la norme de la vitesse en pixels/seconde sur la ligne i via

$$V_i = A_i \omega \quad (6.37)$$

Le retour en unité physique se fait alors via un facteur de conversion en pixels/mètre.

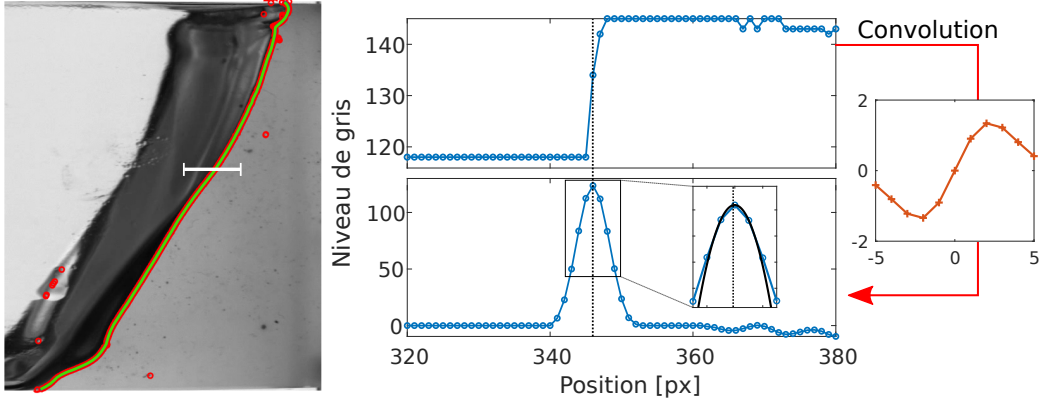


FIG. 6.6: Exemple de détection d'interface. Pour chaque ligne de pixels, on extrait la zone d'intérêt (ligne blanche sur l'image) et on applique des seuils pour que l'interface apparaisse comme une marche unique. Le signal obtenu est ensuite convolué avec une fonction analysatrice de sorte que le front corresponde à un maximum. La position subpixel est alors obtenue par un ajustement parabolique autour du maximum. La procédure appliquée à chaque ligne donne les points rouges affichés sur l'image. Pour supprimer les points aberrants, une procédure de régularisation est appliquée (ligne verte).

Cette méthode permet d'accéder à la projection horizontale de la vitesse de l'interface. L'angle β entre l'interface et l'horizontale étant de l'ordre de 30° , cette vitesse mesurée vaut environ 80 % de la vitesse normale. Par ailleurs, d'autres sources d'erreur comme la parallaxe peuvent également altérer la mesure. Ces effets s'appliquent cependant de manière uniforme sur toutes les lignes de pixels et n'altèrent donc pas l'allure des courbes obtenues, mais seulement le préfacteur multiplicatif global. Par simplicité, on prendra ce préfacteur unitaire.

L'incertitude de la méthode peut être estimée de manière simple en supposant que la détection en position se fait sur chaque ligne sur ± 0.5 pixel ce qui donne en pratique une incertitude de mesure sur la vitesse de l'ordre de quelques pourcents. Cette estimation est cependant assez grossière puisqu'elle ne prend pas en compte le caractère statistique de la mesure (qui consiste en un écart type sur un grand nombre de périodes) et le processus de régularisation sur le profil une fois la détection terminée. Une estimation plus globale de l'erreur peut être obtenue en calculant la moyenne de la vitesse sur l'interface $\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i$. Par conservation du volume, cette moyenne devrait être égale à la vitesse de l'excitation V_{exc} . Expérimentalement, on obtient des écarts relatifs de typiquement 5% entre les deux valeurs. Cette estimation comporte également de nombreux biais. Combinée avec la précédente, elle indique cependant que le traitement régularisant ne perturbe pas significativement les mesures.

6.7.2 Résultats expérimentaux

En utilisant la méthode présentée précédemment, il a été possible d'extraire la dynamique de l'interface d'un bac de $L = 5$ cm vibré horizontalement à la vitesse $V_{exc} = 0.85$ m/s. La position de l'interface dans le référentiel oscillant durant une demi-période d'oscillation rapide est présentée en figure 6.7a. La partie supérieure de l'interface se déplace dans le même sens que le bac tandis que la partie inférieure se déplace dans le sens inverse. Au voisinage du bord inférieur, l'interface reste immobile dans le référentiel en mouvement. Ceci indique la présence d'une couche limite visqueuse entraînée par le bac. Proche du bord supérieur, la vitesse d'excitation devient trop importante et génère localement des ondes de Faraday qui empêchent une détection satisfaisante de l'interface.

L'amplitude $V(y)$ de la vitesse dans le référentiel du laboratoire extraite des positions d'interfaces

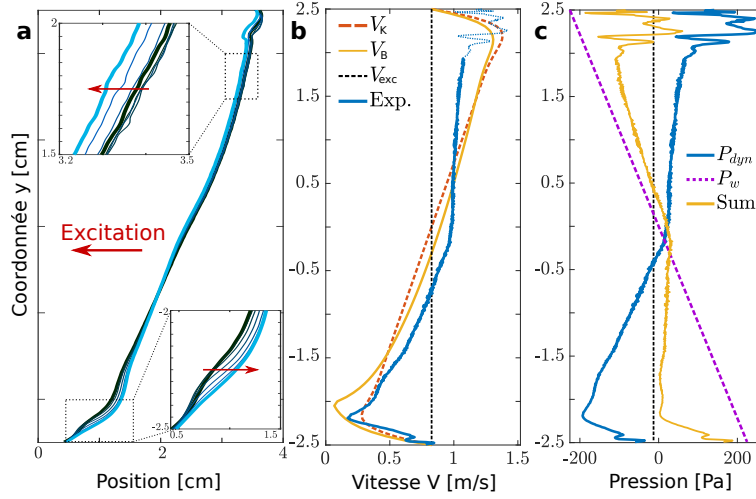


FIG. 6.7: Mesure de la vitesse de l'interface pour un bac excité horizontalement à $V_{exc} = 0.85$ m/s. (a) Détection de l'interface sur une demi-période d'oscillation dans le référentiel oscillant. La partie supérieure oscille en phase avec l'excitation tandis que la partie inférieure est en opposition de phase. (b) Amplitude de la vitesse horizontale mesurée dans le référentiel du laboratoire à partir des détections d'interface. La présence d'ondes de Faraday dans la partie supérieure empêche une mesure satisfaisante et est donc tracée en pointillé. Le champ de vitesse prédit par le modèle du pendule (pointillé rouge) et les équations de Navier-Stokes (points-tirets jaunes) est tracé pour comparaison. (c) Champ de pression dynamique expérimental $P_{dyn} = \frac{1}{4}\rho V^2$ (trait plein), pression hydrostatique $P_w = \rho gy$ (tirets violets) et somme des deux termes (pointillés). Le modèle prédit une somme constante (courbe jaune).

est tracée en figure 6.7b. Comme attendu, la partie supérieure oscillant en phase avec l'excitation présente une amplitude supérieure à celle de la partie inférieure en opposition de phase. A proximité du bord inférieur, la présence de la couche limite entraînée par le bac se traduit par une inversion du gradient de vitesse sur une épaisseur de quelques millimètres. La mesure proche du bord supérieur est perturbée par la présence d'ondes de Faraday et est donc laissée en pointillés.

Les profils de vitesse prédits pour le pendule solide (6.16) et par les équations de Navier Stokes (6.32) sont tracés avec $V_{exc} = 0.85$ m/s. La concordance avec l'expérience est satisfaisante, la prédiction issue de Navier-Stokes étant légèrement meilleure. Elle prévoit en effet un gradient plus important sur la partie inférieure que sur la partie supérieure et un point y_0 tel que $V(y_0) = V_{exc}$ situé sous l'axe central $y = 0$ du bac, en accord avec les observations. L'allure prédite pour la couche limite est également similaire à celle effectivement mesurée. L'accord avec le modèle est vérifié en traçant en figure 6.7c les quantités $P_{dyn} = -\frac{1}{4}\rho V^2$, $P_w = \rho gy$ ainsi que leur somme. En laissant de côté la zone proche du bord supérieur dont la mesure n'est pas fiable du fait des ondes de Faraday, la somme est approximativement constante comme prédit par le modèle sauf au voisinage du bord inférieur. Le profil de vitesse étant issu de la condition d'équilibre dynamique à l'interface $P(x, h(x, t)) = P_0$, cela signifie que cette dernière est brisée dans cette couche limite. Une vitesse plus importante que celle prescrite (comme c'est le cas ici) est associée à une pression dans le liquide supérieure à la pression atmosphérique. La surpression étant localisée sur quelques millimètres, la capillarité permet de maintenir malgré tout l'équilibre.

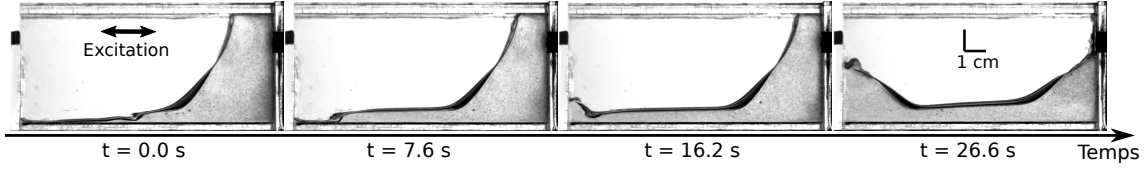


FIG. 6.8: Lorsque le forçage V_{exc} est maintenu constant juste en dessous de la vitesse limite V_{lim} , on observe la fuite de liquide par une langue de quelques millimètres dont la progression est lente. Lorsque le liquide atteint l'autre extrémité du bac, une seconde accumulation de liquide se forme jusqu'à ce que le liquide soit dans un nouvel état symétrique stable ($t = 26.6$ s).

6.7.3 Déstabilisation de l'interface

Lorsque la vitesse d'excitation V_{exc} est maintenue constante juste en dessous de la vitesse limite de stabilité V_{lim} , le processus de déstabilisation n'est pas brutal mais au contraire très lent comme illustré en figure 6.8. La chute du liquide se fait de manière très progressive par une langue de liquide de quelques millimètres de hauteur qui progresse à faible vitesse (typiquement quelques mm/s). Lorsque le liquide parvient au bout du bac, un second bourrelet est créé au niveau du mur opposé et un équilibre symétrique est finalement trouvé par le système. Cet état d'équilibre symétrique peut également être créé directement en excitant horizontalement un liquide initialement au repos. Le liquide est alors d'autant plus creusé que le forçage est important.

Les considérations précédentes permettent d'expliquer qualitativement la nature de cette déstabilisation. Le champ de vitesse $V(y) = \sqrt{V_{exc}^2 + 4g(y - y_0)}$ n'a en effet de sens que si le terme sous la racine reste positif. En diminuant le forçage, on atteint un point où ce terme devient négatif. Ceci se produit en premier lieu sur la partie inférieure de l'interface. Lorsque la zone où le champ de vitesse ne vérifie plus la condition d'équilibre est trop grande pour être maintenue par la capillarité, le liquide commence à fuir par cette même zone. Cependant, le reste de l'interface peut tout à fait rester en l'équilibre, expliquant ainsi cette forme caractéristique de langue. Cette dernière traduit le caractère local de la perte d'équilibre hydrodynamique, contrairement au modèle du pendule qui ne peut prédire qu'une déstabilisation globale du solide.

En résumé, la stabilisation de l'interface liquide n'est possible que lorsqu'un gradient de vitesse monotone est établi le long de l'interface. Par ailleurs, la conservation du volume pour le liquide incompressible impose que la moyenne du champ de vitesse soit égale à V_{exc} . Par conséquent, les vitesses admissibles sur la partie inférieure de l'interface sont comprises entre 0 et V_{exc} ce qui limite mécaniquement les différences de vitesse possibles dans cette zone. Lorsque V_{exc} est trop faible, il est impossible pour le système de maintenir un gradient de vitesse suffisant sur toute la partie inférieure de l'interface. Cela mène à sa déstabilisation vers un nouvel état d'équilibre. L'incompressibilité du liquide joue ici un rôle crucial dans la stabilité du système puisqu'elle impose la valeur moyenne de la vitesse et donc une borne supérieure de la taille de liquide qu'il est possible de stabiliser pour une excitation donnée. Par ailleurs, la présence du bord inférieur impose que la vitesse du fluide à son voisinage soit V_{exc} . Cela est en contradiction avec la nécessité d'avoir d'une part une vitesse croissante avec la hauteur d'une part, et une moyenne égale à V_{exc} du fait de l'incompressibilité. Cette dernière est donc fondamentalement à l'origine d'une instabilité de la couche, qui est compensée par capillarité.

Les remarques précédentes montrent les différentes contraintes imposées par l'incompressibilité de l'huile de silicone. La section suivante s'intéresse au cas où ces contraintes sont levées par l'ajout d'une couche d'air compressible. On montre en particulier que la vitesse d'excitation minimale pour obtenir une interface verticale peut être abaissée par ce biais, et que les phénomènes de capillarité ne sont plus nécessaires à la stabilité du système.

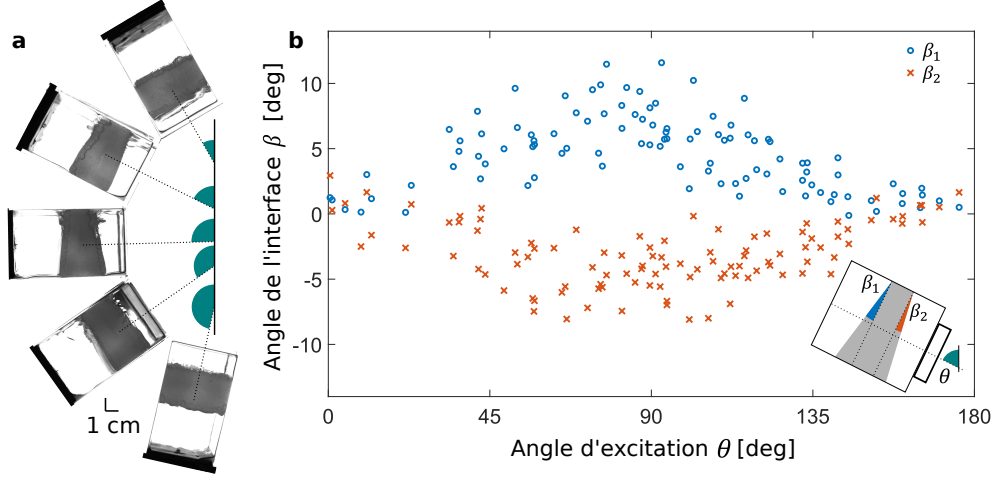


FIG. 6.9: Stabilisation d'une couche de liquide entre deux couches d'air. (a) Photographie d'une couche de liquide dans un bac de section $5 \times 4 \text{ cm}^2$ pour différents angles d'excitation à vitesse d'excitation constante (b) Mesure des angles de l'interface (voir insert) à partir de photographies pour différents angles d'excitation.

6.8 Etude de stabilité dans le cas compressible

6.8.1 Angles de l'interface pour différents angles d'excitation

On a vu dans le chapitre précédent que des vibrations permettaient de maintenir une couche d'air sous une couche de liquide. L'air piégé jouait alors, du fait de sa compressibilité, le rôle d'un ressort pour la masse de liquide. En excitant ce système à sa fréquence de résonance, un facteur multiplicatif de typiquement 10 était alors obtenu entre la vitesse d'excitation appliquée et la vitesse du centre de masse du liquide, qui était aussi celle de l'interface horizontale. L'ajout d'une couche compressible permet donc de lever l'égalité entre la valeur moyenne de la vitesse à l'interface et la vitesse d'excitation. L'objectif de cette section est d'étudier les modifications induites par le relâchement de cette contrainte sur la stabilisation d'interfaces dans des directions arbitraires.

On commence par mesurer l'angle de l'interface pour différents angles d'excitation, sa norme étant fixée à $V_{exc} \approx 0.5 \text{ m/s}$. En partant d'une position d'excitation verticale $\theta = 0^\circ$, une couche d'air de quelques centimètres au maximum est injectée sous le liquide puis l'angle d'excitation est lentement modifié jusqu'à atteindre $\theta = 180^\circ$ comme présenté en figure 6.9a. Le résultat obtenu, similaire visuellement à ceux obtenus en micro-gravité [139], est une couche liquide d'épaisseur approximativement constante avec des interfaces orthogonales à l'excitation. Comme précédemment, la mesure de l'angle de l'interface β_1 est effectuée sur des photographies prises durant l'expérience. Comparativement au cas précédent, il existe une seconde interface liquide dont l'angle β_2 est également mesuré (voir insert figure 6.9b). Il a été choisi ici de ne pas mettre de barres d'erreur mais simplement de montrer les données brutes obtenues sur un grand nombre de mesures. Pour chaque angle d'excitation, la mesure présente une dispersion de quelques degrés. Ceci est cohérent avec l'incertitude de $\pm 2^\circ$ utilisée précédemment.

Les résultats expérimentaux sont tracés en figure 6.9b. L'allure des courbes est similaire à celles obtenues pour le cas incompressible et passe par un maximum pour $\theta \approx 90^\circ$. L'amplitude de variation de β est cependant bien moindre puisque ce dernier ne dépasse pas 10° , à comparer avec les 30° obtenus dans le cas du liquide seul (voir figure 6.4). Il existe une légère asymétrie entre les angles des deux interfaces $|\beta_2| < |\beta_1|$ que l'on peut attribuer à la différence d'épaisseur des couches

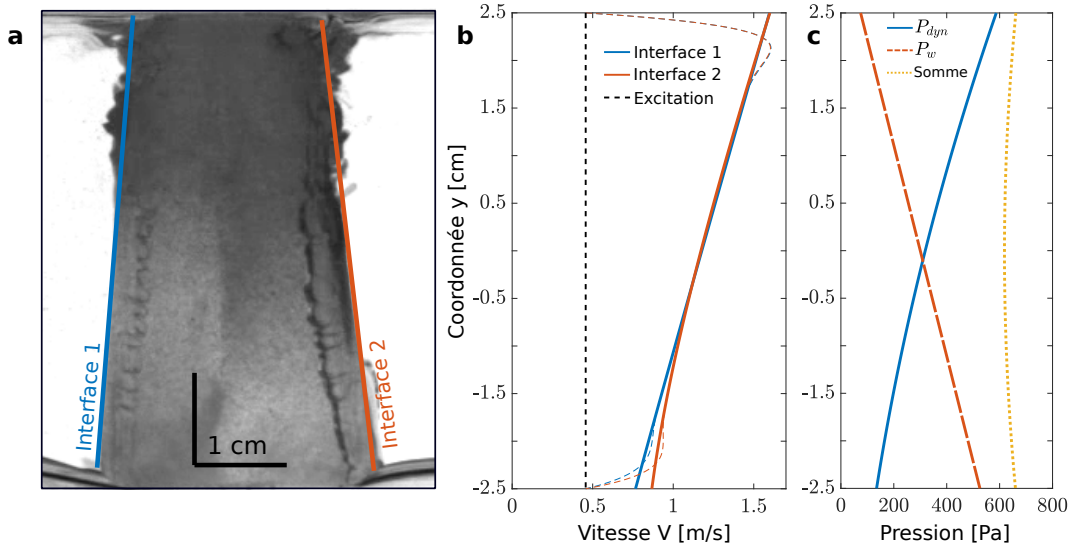


FIG. 6.10: (a) Photographie d'une couche de liquide verticale de 5 cm de hauteur forcée horizontalement. L'interface ne pouvant être détectée par les techniques de détection précédemment appliquées, elles sont approximées par des droites comme illustré sur la photographie. (b) Mesure des vitesses à l'interface à partir des ajustements linéaires effectués sur l'interface. La vitesse d'excitation est présentée en pointillés. (c) Tracé de $P_{dyn} = \frac{1}{4}\rho V^2$, $P_w = -\rho g y$ et leur somme.

d'air de part et d'autre du liquide.

La présence de la couche compressible modifie considérablement le comportement de l'interface. Celle-ci permet la stabilisation de l'interface à une vitesse d'excitation $V_{exc} \approx 0.5$ m/s bien plus faible que celle nécessaire pour stabiliser une interface de même taille de la cas incompressible (qui était de l'ordre de 1.1 m/s). Des mesures de vitesse dans le cas d'une excitation horizontale montrent que la vitesse du centre de masse du fluide $V_f = 1.0$ m/s est environ deux fois supérieure à la vitesse d'excitation. Comme attendu, la résonance du système permet d'augmenter significativement la vitesse du fluide par rapport à celle du bac. Cela ne suffit toutefois pas à expliquer la faiblesse des angles mesurés. En effet, pour une vitesse $V_{exc} = 1.0$ m/s, les angles β dans le cas incompressible dépassent 20° et le système présente une plage d'instabilité matérialisée en figure 6.4.

Au-delà du simple effet résonant, la couche d'air modifie les mouvements autorisés pour la couche de fluide. Le modèle de pendule était basé sur le fait que les seuls mouvements autorisés dans le cas incompressible pouvaient être modélisés par la rotation d'un pendule indéformable autour du point central de l'interface. Ces mouvements étaient en effet les seuls à garantir la conservation du volume, qui imposait $\frac{1}{L} \int V(y) dy = V_{exc}$. Cela n'est plus le cas dans cette nouvelle configuration. Le solide équivalent, s'il existe encore, n'a plus de raison d'être indéformable et la position du centre instantané de rotation ne peut plus être déduite par des arguments physiques simples. Ceci est la conséquence des nouveaux degrés de libertés autorisés du fait de la compressibilité de la couche d'air. Une prédiction théorique simple basée sur un solide équivalent ne semble donc pas adaptée pour décrire ce système.

6.8.2 Profils de vitesse aux interfaces

La prédiction des profils de vitesse (6.32) issue des équations de Navier-Stokes devrait cependant continuer d'être valide dans cette configuration pour peu que la pression dans chacune des couches d'air soit uniforme. La mesure des champs de vitesse à l'interface se fait dans les mêmes conditions

que dans le cas incompressible avec une excitation horizontale d'intensité constante $V_{exc} = 0.48$ m/s. La vitesse du centre de masse du liquide est elle aussi mesurée et vaut $V_f = 1.0$ m/s. La détection des interfaces est nettement plus complexe que précédemment du fait de la présence de ménisques irréguliers et d'ondes de Faraday évoluant rapidement. Les méthodes présentées précédemment ayant échoué à donner un résultat satisfaisant, on se contente d'un ajustement linéaire à chaque interface comme représenté en figure 6.10a. Le profil de vitesse est alors obtenu à partir des profils linéaires d'interface selon la méthode exposée en section 6.7.1. Le résultat est tracé en figure 6.10b.

Les deux profils sont très proches et de moyenne quasi-identique, ce qui est attendu par conservation du volume de liquide. Conformément aux prédictions, la vitesse augmente avec l'altitude y du point considéré. Contrairement au cas incompressible, l'ensemble de l'interface se déplace à une vitesse supérieure à celle du bac. La condition aux limites (6.33) de non-glissement sur le bord est toujours valable mais ne peut être détectée du fait de l'ajustement linéaire de l'interface. Le raccordement à partir de la formule théorique (voir l'annexe C) est tracé pour comparaison. Dans cette configuration, aucune inversion du gradient de vitesse n'est observé proche du bord inférieur. Il n'y a donc pas besoin de capillarité pour expliquer la stabilité de la couche de liquide.

Les champs de vitesse détectés vérifient bien la prédiction (6.32) et comme montré en figure 6.10c, la somme $P_{dyn} + P_w = \frac{1}{4}\rho V^2 - \rho g y$ est constante le long de l'interface. La condition de non-glissement au niveau des parois est associée à une dépression dans le liquide sur les deux bords, contrairement au cas incompressible où le bord inférieur était le lieu d'une surpression. Notons pour finir que la surpression ou dépression au bord due à la condition cinématique (6.33) joue un rôle sur la forme de l'interface proche du bord. Sur la photographie en figure 6.6, la zone proche du bord inférieur associée à une surpression présente un bourrelet de liquide tandis que la zone proche du bord supérieur présente un creux. De même figure 6.10a, les deux zones proches des bords présentent des creux. Dans ce dernier cas, des creux sont même observables tout le long de l'interface du fait de la condition au limite prescrite par le bord du bac dans le plan de la figure.¹ Une observation des photographies du chapitre précédent montre également ces effets de "démouillage" sur les bords du bac malgré le caractère très mouillant² de l'huile de silicone. Le modèle développé est en accord qualitatif avec ces observations puisqu'il associe une dépression aux zones de creux et donc un enfoncement de l'interface liquide par la pression atmosphérique. La compréhension fine de ces formes est cependant au-delà des ambitions de cette étude et nécessiterait probablement la prise en compte de phénomènes complexes faisant intervenir la capillarité et les effets de mouillage sur une interface oscillante.

6.9 Flottaison sur une interface dans une direction arbitraire

L'existence d'interfaces stabilisées dans des directions arbitraires incite à réitérer les expériences de flottaison conduite dans le chapitre précédent. Les expériences de stabilisation dans un bac de 5×4 cm sont donc reproduites en ajoutant un flotteur sphérique de masse m variable à la surface de l'huile de silicone. Pour une vitesse d'excitation constante, l'angle θ est varié de 0° à 90° comme présenté en figure 6.11a. Sur une série de photographies à différents angles θ , la distance entre la ligne de flottaison et le haut du flotteur est mesurée manuellement. Le volume immergé est ensuite calculé avec des formules standards de calotte sphérique. Les résultats pour des flotteurs de masses $m = 1.2$ g et $m = 2.5$ g sont présentés en figure 6.11b. Dans les deux cas, le volume immergé ne dépend pas significativement de l'angle d'excitation et une masse plus élevée est associée à un volume immergé plus important, comme en flottaison classique. Des résultats similaires (non représentés ici)

1. Ce sont notamment ces ménisques qui ont rendu impossible la détection de l'interface par les algorithmes subpixels.

2. que j'ai pu pleinement constater - parfois de manière involontaire - sur divers équipements du laboratoire

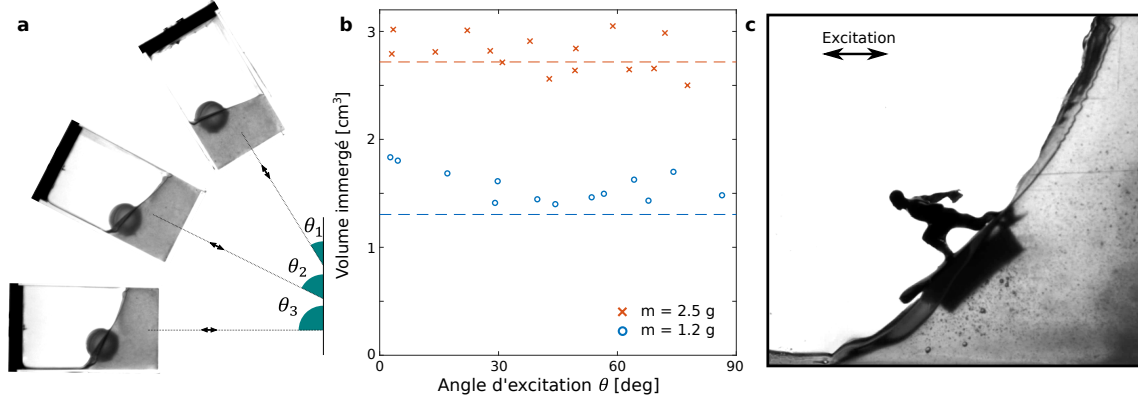


FIG. 6.11: (a) Photographies d'un flotteur à la surface d'une interface stabilisée par vibrations avec un angle d'excitation variable. (b) Volume immergé pour un flotteur de masse $m = 1.2$ g et $m = 2.5$ g lorsque l'angle d'excitation est varié de 0° à 90° . Les pointillés donnent la prédiction associée à la poussée d'Archimède $V_{im} = m/\rho$. (c) Image d'un flotteur en forme de surfeur sur une interface de 9 cm de hauteur vibrée horizontalement.

sont obtenus dans le cas d'angles d'excitation supérieurs à 90° et à chacune des interfaces d'une couche liquide lorsqu'une couche d'air est injectée au fond du bac.

Théoriquement, on s'attend à ce que le volume immergé soit constant

$$V_{im} = \frac{m}{\rho}. \quad (6.38)$$

En effet, en négligeant les flots secondaires le long de l'interface, une particule de fluide proche de la surface est immobile dans le référentiel du bac. Cela signifie que les forces de pression dans le fluide moyennées sur une oscillation compensent le poids de cette particule. En remplaçant cette particule par un flotteur, on s'attend donc de la même manière à ce que force de pression et poids se compensent. Le volume immergé doit donc être donné par la formule (6.38) indépendamment de l'angle de forçage. La stabilité de la position d'équilibre est quant à elle garantie comme précédemment par la vibrations haute fréquence pour peu qu'elle soit suffisamment intenses. La figure 6.11b montre bien un volume indépendant de l'angle d'excitation pour une masse de $m = 1.2$ g, un désaccord de l'ordre de 20 % subsiste cependant entre théorie et expériences. Ce désaccord est attribué aux erreurs de mesures de la masse du flotteur ou à un problème de parallaxe empêchant une mesure fidèle de la distance entre la ligne de flottaison et le sommet du flotteur.

La présence de flots secondaires perturbe la position du flotteur et celui-ci tend à "glisser" vers le bord inférieur de l'interface, le volume immergé restant constant durant cette phase. Selon les configurations, le flotteur glisse jusqu'à la paroi inférieure ou s'arrête quelques millimètres avant (voir figure 6.11a).

6.10 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stabilisation d'une interface vibrée dans une direction arbitraire. Loin d'être une simple extension du chapitre précédent, cette nouvelle configuration présente des différences fondamentales avec le cas d'une interface horizontale. En particulier, un gradient de pression hydrostatique apparaît le long de l'interface inclinée. Celui-ci est compensé par un différentiel de vitesse établi le long de cette même interface. Par ailleurs, nous avons démontré l'existence de différences qualitatives selon la présence ou non d'une couche d'air compressible entre le liquide

et le fond du bac. Une modélisation avec un solide équivalent ou directement à partir des équations de Navier-Stokes a également été proposée et discutée, de même que des expériences de flottaisons sur des interfaces penchées. La physique riche de ces systèmes est encore loin d'être épuisée, et l'on mentionnera encore quelques exemples de phénomènes issus des vibrations haute-fréquence dans le chapitre de conclusion.

Conclusions et perspectives

7.1 Résumé des résultats présentés

Cette thèse proposait d'étudier expérimentalement la propagation et le contrôle des ondes dans des milieux structurés spatialement et temporellement, ainsi que certains phénomènes d'instabilités liés à ces modulations. Le choix des ondes de surface comme support expérimental a permis, d'une part, la réalisation de milieux spatio-temporels extrêmement variés, et, d'autre part, un suivi résolu spatialement et temporellement des ondes se propageant dans ces milieux. L'amplitude, la dynamique et la précision du contrôle obtenues sur la modulation temporelle des propriétés des milieux ont permis l'exploration de régimes jusque là inatteignables expérimentalement avec d'autres systèmes ondulatoires. La figure 7.1 reprend graphiquement les divers cas considérés au fil des chapitres, que l'on peut distinguer en comparant η la période temporelle de modulation du milieu avec T la période d'oscillation des ondes et Δ la durée typique d'un paquet d'onde. On résume ci-dessous brièvement le contenu de chaque chapitre :

- Le premier chapitre a permis la mise en contexte de cette thèse et discuté quelques aspects relatifs à la propagation d'ondes dans des milieux variables en espace et en temps. Nous avons également motivé l'utilisation d'ondes de surfaces, du fait de leurs spécificités, comme système expérimental modèle pour l'étude de ces thématiques.
- Dans le chapitre 2, nous avons démontré la possibilité de contrôler réfractivement les ondes de surface grâce à l'électrostriction ($\eta = 0$). Par cette méthode originale, nous avons pu dévier, focaliser ou confiner sans contact les ondes à la surface de l'eau. L'avantage principal de ces dispositifs est leur modularité, puisque les profils d'indice sont réglés en modifiant la forme des électrodes et le potentiel électrique appliqué. Nous avons ainsi pu implémenter des sauts d'indice importants à travers des interfaces d'extension spatiale typiquement sub-longueur d'onde, et obtenir ainsi un contrôle polyvalent et accordable des ondes hydrodynamiques.
- Le chapitre 3 était consacré à la réalisation expérimentale d'interfaces temporelles. Le contrôle par électrostriction a permis une variation brusque et importante de l'indice, de laquelle résulte un changement de fréquence des ondes propagatives. Nous avons ensuite introduit la

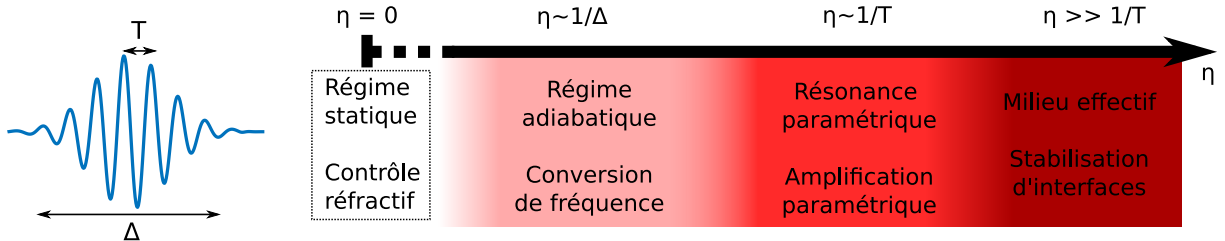


FIG. 7.1: Résumé des différents régimes étudiés durant cette thèse en fonction de la fréquence de modulation du milieu η , de la durée du paquet d'onde Δ et de la période d'oscillation de l'onde T .

méthode de "cascade fréquentielle" pour réaliser des conversions de fréquences sur plusieurs octaves. Celle-ci est basée sur le passage en série d'interfaces spatiales et temporelles synchronisées avec le passage de l'onde ($\eta\Delta \sim 1$). Ces étapes élémentaires peuvent être arbitrairement petites, pourvu que l'on en itère suffisamment. Par ailleurs, le processus de conversion est linéaire en l'amplitude de l'onde et l'intégralité du paquet d'onde est converti. Cela ouvre la voie à des applications pour d'autres types d'ondes (en optique notamment), pour lesquelles les variations d'indice accessibles sont restreintes.

- Le chapitre 4 s'est intéressé au cas d'une fréquence de modulation temporelle de l'ordre de la fréquence de l'onde considérée ($\eta T \sim 1$). L'équivalent électrique de l'instabilité de Faraday a été discuté théoriquement et expérimentalement. Du fait de la forme de l'excitation choisie en peigne de Dirac, un formalisme de matrice de transfert empruntée à la cristallographie a été préféré à une analyse de Floquet. Cela nous a permis de discuter le comportement des ondes lors de l'introduction de désordre dans la répartition des pics de tension, et notamment l'analogie temporelle de la localisation d'Anderson. Nous avons ensuite réalisé expérimentalement un tel cristal désordonné et comparé nos résultats à des simulations numériques. Une analyse purement ondulatoire de l'instabilité paramétrique a été proposée, et la croissance et les fluctuations de l'amplitude des ondes s'interprétaient alors comme des phénomènes d'interférence. Un bilan d'énergie et une discussion sur le rôle de l'impédance dans le déclenchement des instabilités ont également été menés.
- La seconde partie de la thèse portait sur la stabilisation dynamique d'interfaces entre deux fluides par l'application de vibrations. Dans le chapitre 5, nous avons montré que lorsque la fréquence de vibration est grande devant la fréquence des ondes ($\eta T \gg 1$), ces dernières perçoivent un milieu effectif avec une relation de dispersion différente du cas statique. En particulier, des modes instables associés à des pulsations imaginaires peuvent être stabilisés par l'action des vibrations. Cette stabilisation dynamique est analogue à celle d'un pendule "la tête en bas" dont on vibre verticalement, à haute fréquence, le point d'accroche. Expérimentalement, l'eau et l'électrostriction ont fait place à l'huile de silicone visqueuse et aux vibrations et nous avons pu, par l'application de vibrations intenses, mettre en lévitation sur un coussin d'air résonant des couches de liquides d'une dizaine de centimètre de longueur. Des flotteurs ont également été stabilisés sur l'interface inférieure grâce à ces mêmes vibrations, révélant un nouveau phénomène de stabilisation par l'application d'un forçage haute-fréquence.
- Le chapitre 6 était consacré au cas de vibrations dans une direction arbitraire. Nous avons alors montré théoriquement et expérimentalement que les positions du liquide obtenues résultaient d'un compromis entre la gravité et les vibrations. Pour des amplitudes de forçage suffisamment importantes, des interfaces faisant des angles arbitraires avec la verticale ont pu être stabilisées. Nous avons ensuite, comme au chapitre précédent, discuté ces résultats par rapport au cas d'un pendule pesant dont le point d'accroche est vibré dans une direction arbitraire. Un modèle hydrodynamique complet de ces *vibro-équilibres* a également été développé, et nous avons mis en évidence théoriquement et expérimentalement une synchronisation entre le forçage et le mouvement de l'interface liée à ces équilibres. La stabilisation de couches de liquides verticales entre deux couches d'air, formant un mur de liquide, et la stabilisation de flotteurs sur ces interfaces inclinées ont également été réalisées.

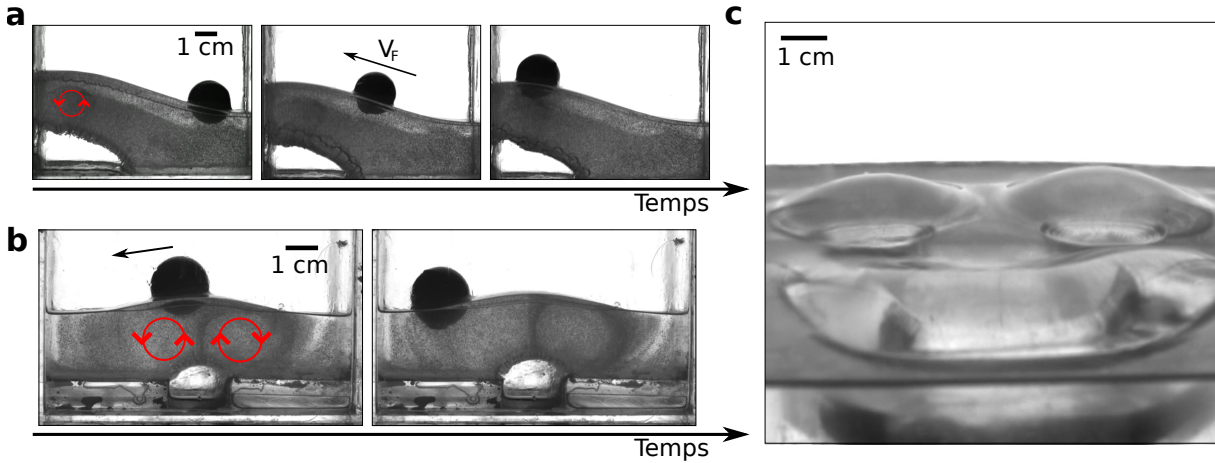


FIG. 7.2: (a) Photographie d'une interface déformée par une couche d'air localisée dans un bac de 9 cm vibré à 100 Hz. Un écoulement secondaire lent, symbolisé par la flèche rouge, s'établit dans le fluide. Ce dernier permet le transport d'objets vers les zones de plus haute altitude. (b) En modifiant le profil bathymétrique, on peut déformer l'interface à des localisations choisies. Dans ce cas, les écoulements tendent à pousser le flotteur vers les zones de basse altitude. La fréquence de l'excitation à 178 Hz a été réglée pour maximiser la déformation d'interface. (c) Déformation d'une interface en forme de smiley grâce à des couches d'air piégées dans une topographie sous la surface de même forme. La fréquence de vibration est de 250 Hz.

7.2 Perspectives

Nous discutons pour finir de quelques perspectives qui font actuellement l'objet de recherches en cours au laboratoire.

7.2.1 Transport d'objets flottants à l'interface d'un bain vibré

Pour la stabilisation d'interfaces par vibrations hautes-fréquences, nous n'avons considéré que le cas où le forçage du fluide était uniforme. Dans le cas des interfaces inclinées, nous avons cependant montré que l'existence de l'interface non-horizontale était intimement liée à la présence d'un gradient de vitesse. Celui-ci est issu d'une oscillation en phase ou en opposition de phase de l'interface, vue dans le référentiel du bac, avec l'excitation. De tels gradients de vitesse peuvent également être établis en forçant avec une amplitude différenciée les différentes zones du bac. Cela se produit par exemple lorsqu'une couche d'air incomplète est injectée au fond du bac. Le liquide au-dessus de la couche perçoit une vibration amplifiée par le coussin d'air, tandis que, loin de la couche, le liquide oscille avec le bac. Une observation typique de ce phénomène est montrée en figure 7.2a pour un bac de 9 cm de large vibré à 100 Hz. Comme pour les interfaces inclinées du chapitre 6, les zones plus grande vitesse sont associées à une altitude de l'interface plus élevées.

Il s'établit également dans le fluide des écoulements lents, formant des vortex au-dessus de la couche d'air, et matérialisés en figure 7.2a-b. La formation de vortex associés à des vibrations a déjà été observée dans d'autres systèmes expérimentaux et est vraisemblablement liée à des phénomènes non-linéaires [144, 145]. Le mécanisme exact de génération de ces écoulements dans notre cas reste encore à comprendre. Ces derniers peuvent toutefois être utilisés pour le transport d'objets à l'interface, comme le montre la séquence d'images en figure 7.2a où un flotteur à l'interface est entraîné vers les zones de haute-altitude. Des mesures préliminaires indiquent que la vitesse d'ascension du flotteur est approximativement constante et dépend de l'amplitude du forçage ainsi que du volume

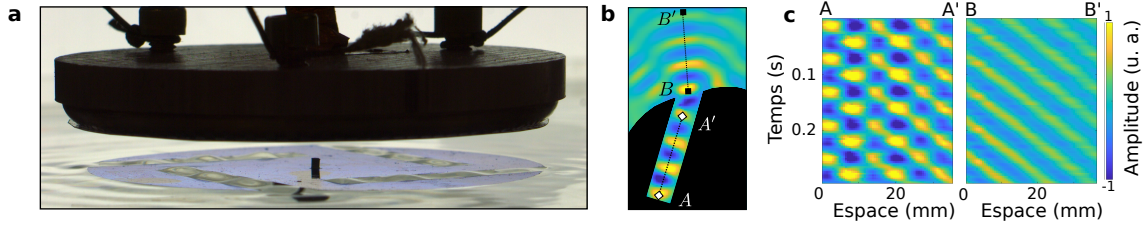


FIG. 7.3: (a) Photographie du montage expérimental : des ondes stationnaires sont excitées paramétriquement dans les fentes d'un disque en plastique par une électrode. La fréquence d'excitation est choisie pour que les fentes forment une cavité unidimensionnelle pour les ondes générées. L'électrode n'étant pas transparente, les ondes sont imagées par le fond du bac grâce à un motif en damier imprimé sur l'électrode. (b) Vue de dessus d'une partie du moteur. Des ondes stationnaires sont excitées dans la fente AA' par une électrode circulaire placée au-dessus du bain. En sortie de la fente, les ondes deviennent propagatives, comme montré par (c) les diagramme spatio-temporel des ondes dans et hors de la fente.

d'air injecté. La prédiction quantitative de la vitesse d'ascension fait l'objet de travaux en cours.

Une autre perspective offerte par ces expériences est le contrôle de la forme d'une interface liquide. Sans précaution particulière, les bulles d'air injectées ont tendance à être attirées vers l'un des bords du bac, comme en figure 7.2a. L'insertion d'inclusions dans le fond du bac pour piéger les couches d'air, comme en figure 7.2b, permet cependant de localiser la déformation de l'interface à des positions préférentielles. Contrairement au cas précédent, les écoulements secondaires générés tendent cette fois-ci à pousser les flotteurs vers les zones de plus faible altitude. Le sens de rotation des vortex dépend donc de la configuration, d'une manière qui reste encore à déterminer. La structuration plus complexe du fond du bac permet l'impression de formes arbitraires à l'interface du fluide, comme le montre la figure 7.2c pour un fond creusé en forme de smiley. L'exploration des phénomènes de transport sur ces interfaces complexes commence tout juste, et réserve sans doute de nombreuses surprises.

7.2.2 Propulsion par pression de radiation

L'électrostriction a été utilisée au chapitre 4 pour exciter des ondes paramétriques à la surface de l'eau. Cette technique offre de plus, par le choix de la forme des électrodes, la possibilité de contrôler spatialement les zones d'apparition de l'instabilité. On dispose ainsi un degré de liberté supplémentaire par rapport à l'application de vibrations, qui sont généralement homogènes sur l'ensemble du fluide. Dans ce dernier cas, le réglage du seuil de Faraday peut malgré tout être réalisé, en jouant par exemple sur la bathymétrie. Cela se fait cependant souvent au prix d'une plus grande dissipation visqueuse, qui empêche la propagation d'ondes sur de longues distances. L'électrostriction permet donc de s'affranchir de ces contraintes, et ouvre ainsi de nombreuses possibilités expérimentales.

Nous avons par exemple utilisé ce forçage différencié pour réaliser un moteur propulsé par la pression de radiation des ondes de surface. Le moteur est un disque de plastique de 9 cm de diamètre percé de 4 fentes ouvertes à l'une de leur extrémité comme illustré en figure 7.3a. Une électrode de même diamètre est placée au-dessus du moteur et excite des ondes stationnaires dans les fentes. Une aiguille, posée au fond du bac, permet de maintenir le moteur sous l'électrode sans empêcher sa rotation. Les ondes stationnaires deviennent propagatives en sortant des fentes, comme le montrent les figures 7.3b-c. Il en résulte une poussée dans la direction opposée et donc la mise en rotation du disque. L'amplitude des ondes dans les fentes, et donc la vitesse de rotation du moteur, peut être réglée par l'amplitude du forçage électrique appliqué. Ce moteur, dont la caractérisation précise

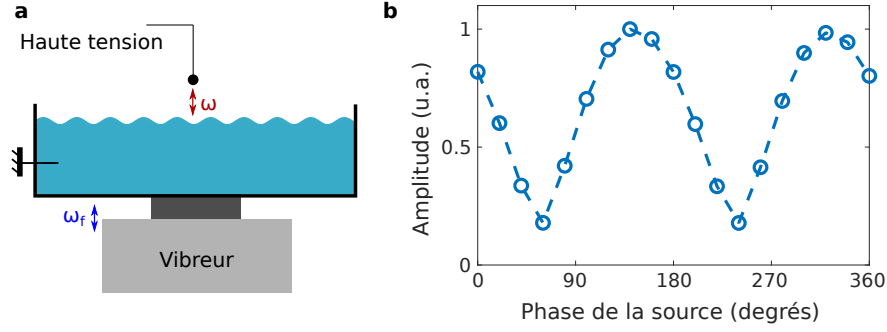


FIG. 7.4: (a) Réalisation expérimentale d'une source oscillant à ω dans un milieu temporel modulé à ω_f . La source est une aiguille métallique reliée à une haute-tension oscillante, tandis que le milieu modulé est réalisé en vibrant le bain. (b) Amplitude des ondes sur le bain en régime stationnaire en fonction de la phase de la source, lorsque la fréquence de celle-ci est la même que celle des ondes de Faraday ($\omega = \omega_f/2$). L'accélération du bain est juste en dessous du seuil de Faraday.

est actuellement en cours, montre une fois encore la flexibilité offerte par l'électrostriction pour le contrôle des ondes de surface.

7.2.3 Milieux spatio-temporels

Nous avons discuté au chapitre 3 la possibilité de structurer spatio-temporellement le milieu de propagation pour obtenir de nouveaux degrés de contrôle sur les ondes. Les profils d'indice étaient cependant de la forme $n(x, t) = f(x)g(t)$ et ne couplaient donc pas les dynamiques spatiales et temporelles. Il serait ainsi intéressant de considérer le cas de profils d'indice non séparables, par exemple de la forme $n(x, t) = f(x - vt)$ voyageant à une vitesse v arbitraire. Ce type de profil brise la symétrie droite-gauche du milieu, ce qui mène à des phénomènes de non-réciprocité ou d'amplification [23, 24]. L'électrostriction pourrait permettre la réalisation de tels profils, par exemple en translatant l'électrode au-dessus du bain où par l'utilisation de plusieurs électrodes soumises à des signaux synchronisés. La vitesse v pourrait, du fait de la relative lenteur des ondes de surface, être choisie inférieure ou supérieure à la vitesse des ondes. La translation d'une électrode horizontale permettrait par exemple l'étude du comportement d'une onde sur une interface spatio-temporelle [146]. On peut également imaginer compenser la dispersion d'un paquet d'onde en translatant une électrode inclinée au-dessus de ce dernier. Les ondes les plus rapides, à l'avant, seraient ainsi ralenties par le champ électrique plus intense qu'à l'arrière. Le phénomène résultant serait très similaire à un soliton, bien qu'aucune non-linéarité n'intervienne dans le système. Une étude récente montre également que le paquet d'onde serait de plus amplifié au cours du processus [24].

7.2.4 Sources en milieu temporel

Le comportement d'une source peut être fortement modifié en présence d'un milieu structuré périodiquement en espace [147]. En effet, l'émission d'un champ d'onde propagatif est par exemple impossible si la fréquence de la source est à l'intérieur d'une bande interdite du milieu. On peut alors s'interroger sur l'équivalent temporel de ce type de phénomène. Nous avons vu, au chapitre 4, que les bandes interdites d'un cristal spatial étaient formellement équivalentes aux bandes d'instabilité dans un cristal temporel. Cela suggère la possibilité d'amplifier le signal émis par une source grâce à l'énergie apportée par la modulation du milieu.

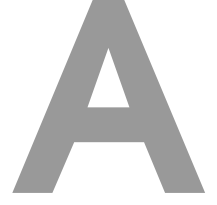
Il est possible d'explorer expérimentalement cette thématique avec les ondes de surface. Nous avons pour cela réalisé le montage expérimental présenté en figure 7.4a. La modulation temporelle du milieu est générée par la vibration mécanique du bain à la pulsation ω_f , tandis que la source est une aiguille métallique placée au-dessus de la surface et soumise à un potentiel oscillant. L'amplitude de la vibration est choisie proche mais en-dessous du seuil d'instabilité de Faraday, de sorte que seules les ondes excitées par la source sont présentes sur le bain. La variation de la fréquence de la source permettrait, par l'observation du champ généré, de sonder le diagramme de Floquet associé. Une telle étude fait l'objet du stage de pré-thèse de Quentin Louis au laboratoire.

Lorsque les fréquences de la source et du milieu sont accordées pour sonder la première bande interdite ($\omega_f = 2\omega$), on peut également s'intéresser au rôle de la phase relative entre les deux sur le champ émis. Des résultats préliminaires, présentés en figure 7.4b, montrent une forte dépendance de l'amplitude des ondes stationnaires sur le bain avec cette phase relative. Lorsque la phase de la source est accordée avec celle du mode sous-amorti, l'amplitude des ondes est bien plus importante que lorsque la phase de la source est celle du mode sur-amorti. Cette dépendance est réminiscente du lien de phase qu'il existe entre la vibration et les ondes stationnaires de Faraday. Ainsi, la présence d'un environnement périodique en temps semble pouvoir influencer sur l'émission d'une source.

7.3 *Le mot de la fin*

Nous avons vu, au cours de cette thèse, le confort expérimental offert par l'étude des ondes de surface comme objet ondulatoire. La simplicité - relative - des expériences et la diversité des régimes qu'il est possible d'obtenir en font un formidable outil de recherche et d'enseignement expérimental. Cela est d'autant plus remarquable que le traitement théorique pourrait laisser penser que rien ne fonctionnera, tant ce dernier peut se révéler complexe. J'espère donc que cette thèse sera perçue comme une invitation à l'expérimentation, qui fonctionne parfois bien mieux qu'espéré !

Annexe



Relation de dispersion en eau libre et sous une électrode

Cette annexe est consacrée aux équations de propagation pour des ondes de surface. On cherche à décrire l'écoulement du fluide associé à un champ de hauteur $h(x, t)$ en surface pour un bac de profondeur D constante. La viscosité sera négligée, on supposera l'écoulement irrotationnel et on considèrera les solutions invariantes par translation selon y . Il existe donc un potentiel $\Phi(x, z, t)$ tel que le champ de vitesse $\vec{v}$ s'écrive

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi \quad (\text{A.1})$$

La conservation de la masse $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ se réécrit alors

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\text{A.2})$$

L'écoulement est décrit par l'équation d'Euler qui peut s'écrire dans le cas d'un écoulement irrotationnel

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

En négligeant la non linéarité et quitte à appliquer une transformation de jauge sur Φ du type $\Phi \rightarrow \Phi + g(t)$, cette équation se réécrit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = 0 \quad (\text{A.4})$$

A l'interface, la pression est donnée par $P = P_{atm} - \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$. La pression atmosphérique P_{atm} peut être réabsorbée dans la jauge de Φ et on obtient finalement à l'interface

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -gh + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\text{A.5})$$

On a donc obtenu à partir de l'équilibre des pressions à l'interface une équation liant une dérivée temporelle de l'écoulement à une dérivée spatiale du champ de hauteur. La condition cinématique à l'interface du haut s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

On retrouve ainsi les équations utilisées dans le texte principal.

A.1 Influence du champ électrique sur la propagation d'ondes

On calcule ici la force électrostatique par unité de surface $P_{el}(x, y, t)$ exercée sur la surface de l'eau. On modélise l'eau comme un conducteur parfait au potentiel nul. Le théorème de Coulomb donne que le champ $\vec{E}(x, y)$ est porté par la normale $\vec{n}$ à la surface et que la densité surfacique de charge est $\sigma = \epsilon_0 ||\vec{E}||$. La force surfacique exercée sera donc au premier ordre

$$\vec{P}_{el} = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{n} \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{z} \quad (\text{A.7})$$

Il reste à déterminer le champ $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ avec V le potentiel. On doit résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}\Delta V &= 0 \\ V(z = h(x, y)) &= 0 \\ V(z = d) &= U_0\end{aligned}\tag{A.8}$$

On peut trouver une solution à ce problème avec une méthode perturbative. Lorsque la surface est plane, le potentiel V vérifie

$$\begin{aligned}\Delta V_0 &= 0 \\ V_0(z = 0) &= 0 \\ V_0(z = d_0) &= U_0\end{aligned}$$

dont la solution est $V_0 = \frac{U_0 z}{d_0}$. On regarde maintenant les perturbations dues aux ondes se propageant à la surface. On considère encore une fois une onde monochromatique $h(x, t) = h_1 e^{i(\omega t - kx)}$ et on suppose que les variations de hauteur sont assez faibles, c'est à dire que $\epsilon_h = h/d_0 \ll 1$. On cherche alors un potentiel perturbé sous la forme $V = V_0 + \epsilon_h V_1(z)$. L'équation vérifiée par V_1 est alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2 V_1}{dz^2} - k^2 V_1 &= 0 \\ \epsilon_h V_1(z = h) &= -V_0(z = h) = -U_0 \epsilon_h \\ \epsilon_h V_1(z = d_0) &= U_0 - V_0(z = d_0) = 0\end{aligned}$$

dont on peut trouver une solution au premier ordre en ϵ_h sous la forme $V_1 = U_0 \frac{\sinh(k(z-d_0))}{\sinh k d_0}$. Le potentiel total est donc

$$V = U_0 \left(\frac{z}{d_0} + \epsilon_h \frac{\sinh(k(z-d_0))}{\sinh k d_0} \right)\tag{A.9}$$

On peut alors déterminer le champ électrique et la force d'électrostriction par unité de surface. Au premier ordre en ϵ_h , on obtient

$$P_{el} = \epsilon_0 U_0^2 \left(\frac{1}{2d^2} + \frac{k}{\rho d^2 \tanh kd} h(x, t) \right)\tag{A.10}$$

Il est intéressant de noter la similitude entre ce problème et celui étudié en section 2.2.1. Dans les deux cas, on cherche un potentiel harmonique avec conditions aux limites afin de déterminer la dérivée du potentiel selon la direction normale à l'interface et ainsi trouver une équation sur $h(x, t)$.

B

Méthode de FCD

La méthode de mesure des ondes de surface utilisée ici, dite FCD pour *Fast Checkerboard Demodulation* [81], est basée sur une observation optique du bain comme présenté figure B.1. On se limitera pour l'explication de principe au cas d'un unidimensionnel qui contient tous les éléments nécessaires. Un motif placé sous la surface est initialement imagé lorsque l'interface est au repos par une caméra dont l'axe optique est perpendiculaire à la surface. Ceci fournit une première image de référence notée $I_{ref}(x)$. Lorsqu'une onde passe à la surface, l'image du motif sur la caméra est distordue par réfraction. On obtient ainsi une seconde image $I(x)$ de laquelle on cherche à extraire le champ de hauteur $h(x)$ responsable de la distorsion.

Il existe un lien entre l'image distordue et l'image de référence puisque chaque élément du motif a subi du fait du passage de l'onde un décalage $r(x)$. On peut donc écrire

$$I(x) = I_{ref}(x - r(x)) \quad (\text{B.1})$$

Par ailleurs, il existe un lien entre $r(x)$ et le champ de hauteur $h(x)$. On va pour cela considérer un point du capteur, qui récupère l'information associée à un faisceau d'angle d'incidence θ_i par rapport à l'axe optique. On cherche à trouver le point du motif qui sera imagé à cette position du capteur. Dans le cas de l'image de référence, la loi de Snell-Descartes s'écrit (dans la limite des petits angles)

$$\theta_i = n\theta_r \quad (\text{B.2})$$

avec θ_i et θ_r l'angle du faisceau par rapport à la verticale dans l'air et l'eau respectivement et n l'indice optique de l'eau. On peut écrire la même relation dans le cas d'une interface perturbée

$$\theta'_i = n\theta'_r \quad (\text{B.3})$$

avec cette fois les angles mesurés par rapport à la normale à l'interface qui fait un angle α avec la verticale. L'angle entre le nouveau faisceau réfracté et la verticale est donc $\theta'_r + \alpha$. Le faisceau incident faisant un angle θ_i avec la verticale, on a par ailleurs $\theta'_i = \theta_i - \alpha$. On en déduit que dans la limite des petits angles

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{D} &= \theta'_r + \alpha - \theta_r \\ &= \frac{\theta_i - \alpha}{n} + \alpha - \frac{\theta_i}{n} \\ &= \left(\frac{n-1}{n} \right) \alpha \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dans la limite des faibles cambrures, on a $\alpha = \frac{\partial h}{\partial x}$ et donc le déplacement $r(x)$ s'écrit finalement

$$r(x) = D \left(\frac{n-1}{n} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{B.5})$$

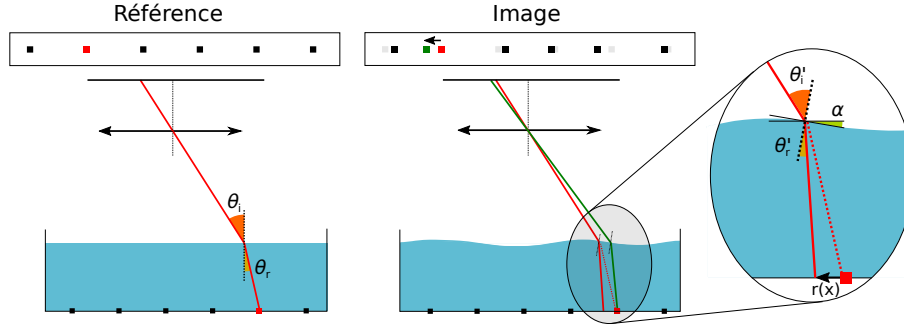


FIG. B.1: Méthode de mesure du champ de hauteur par méthode optique. Un motif périodique placé sous la surface est imagé sur un capteur par un objectif. Une première image de référence est mesurée lorsque l'interface est au repos. Dans l'approximation de l'optique géométrique, cette image est parfaitement périodique. Lorsque une onde passe à la surface, l'image du motif sur le capteur est distordue. La comparaison de cette image avec l'image de référence rend possible la reconstruction du champ de hauteur.

qui est donc le produit du bras de levier optique et de la dérivée du champ de hauteur. A une intégration près, la connaissance de $r(x)$ permet donc de connaître le champ de hauteur associé.

La mesure numérique du déplacement se fait en profitant du caractère périodique du motif. On supposera que le champ de hauteur (et donc $r(x)$) varie lentement entre deux points du motif garantissant ainsi un bon échantillonnage du signal. Le signal de référence étant périodique, on peut le décomposer en série de Fourier

$$I_{ref}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{ik_n x} \quad (\text{B.6})$$

avec $k_n = 2n\pi/L = nk_1$ où L la période du motif. L'image distordue s'écrit alors en utilisant (B.1)

$$I(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n e^{-ik_n r(x)} e^{ik_n x} \quad (\text{B.7})$$

En supposant que $r(x)$ varie lentement sur une période L , le rôle de ce dernier est de moduler lentement la phase des harmoniques. Une manière rapide d'extraire ce déplacement est d'utiliser la transformée de Fourier. En effet, l'image de référence dans l'espace de Fourier est une somme de pics de Dirac

$$\hat{I}_{ref}(k) = \sum_n I_n \delta(k) \quad (\text{B.8})$$

avec $\delta_n(k) = \delta(k - k_n)$. L'ajout de la modulation de phase peut par linéarité de la transformée de Fourier s'étudier harmonique par harmonique. On notera $f_n(x) = e^{-ik_n r(x)}$ et par propriété de la transformée de Fourier, on obtient une somme de produits de convolution

$$\hat{I}(k) = \sum_n I_n (\delta_n * \hat{f}_n)(k) = \sum_n I_n \hat{f}_n(k - k_n) \quad (\text{B.9})$$

Si le déplacement $r(x)$ varie lentement sur une longueur L alors la fonction $\hat{f}_n$ ne prend des valeurs non nulles que sur un support centré en zéro et de rayon petit devant nk_1 . L'ajout de la modulation provoque donc un étalement autour de chaque pic, ces derniers restant cependant bien disjoint.

Cette propriété cruciale permet d'extraire simplement $r(x)$. On applique à $I_{ref}(x)$ et $I(x)$ un filtre passe bande centré sur la première harmonique et de largeur typique $k_m/2$. Ceci permet d'éliminer les

harmoniques supérieures tout en conservant toute l'information de modulation de phase contenue dans une petite bande de vecteurs d'ondes autour de k_m . Les signaux obtenus sont alors $J_0 = I_1 e^{ik_1 x}$ et $J_1 = I_1 e^{-ik_1 r(x)} e^{ik_1 x}$. Pour de faibles déplacements, on a $k_1 r \ll 1$ et on peut extraire le déplacement par

$$\text{Im}(J_0^* J_1) = -ik_1 r(x) \quad (\text{B.10})$$

On a utilisé ici le caractère périodique du motif pour extraire le champ de déplacement par démodulation de phase. Le caractère lentement variable du champ de hauteur sur une période du motif est crucial et garantit une démodulation fidèle. Cela implique donc de choisir correctement le pas du motif en fonction des conditions expérimentales. Cette méthode est parfaitement adaptée aux expériences que nous souhaitons mener puisque les longueurs d'onde envoyées sur le bain sont connues et contrôlées.

Pour une implémentation au laboratoire, on utilise un motif d'échiquier bidimensionnel placé sous la surface. Le déplacement étant maintenant une quantité vectorielle $\vec{r}(x, y)$, il est nécessaire d'extraire l'information autour de deux pics orthogonaux comme présenté figure B.1b. On obtient alors le produit scalaire de $\vec{r}$ avec deux vecteurs du réseau réciproque (comme pour l'équation (B.10)). Puisque $\vec{r}(x, y) \propto \vec{\nabla} h(x, y)$, il reste ensuite à intégrer numériquement le déplacement pour trouver (à une constante près) le champ de hauteur.



La couche limite de Stokes

La modèle du pendule nous prédit un profil de vitesse issu d'une modélisation "solide" de l'interface liquide. Cependant, la condition aux limites hydrodynamique sur les bords de l'interface impose

$$V(z = \pm L/2) = -A\omega = V_{exc} \quad (\text{C.1})$$

Clairement le profil $V(z)$ obtenu ne vérifie pas cette condition. Nous allons donc procéder à une correction du profil de vitesse. Cette correction devrait se produire sur une échelle caractéristique de couche visqueuse $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \approx 2$ mm. Dans cette région, l'écoulement $\vec{v}_b$ doit vérifier l'équation de Stokes avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} &= \nu \Delta \vec{v}_b - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \\ \vec{v}_b(z = \pm L/2) &= -A\omega e^{i\omega t} \vec{e}_\phi \\ \vec{v}_b(|z \pm L/2| \gg \delta) &= V(z) e^{i\omega t} \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

La dernière condition indique qu'à une distance $d \gg \delta$ du bord, la vitesse est celle du profil non perturbé. Sur une distance de quelques δ , la vitesse $V(z)$ est approximativement constante. Plus précisément, la variation de $V(z)$ sur une distance δ est $\frac{dV}{dz} \delta = A\omega \sin(\beta) \frac{\delta}{2L}$ qui est petit devant la vitesse typique $A\omega$. De plus, comme $\delta \ll L$ on pourra traiter indépendamment les écoulements proches des bord supérieurs et inférieurs.

Le système d'équation (C.2) se résout grâce au principe de superposition. On considère tout d'abord l'écoulement uniforme $\vec{v}_\infty = V(\pm L/2) e^{i\omega t} \vec{e}_\phi$. On a $\Delta \vec{v}_\infty = 0$ et le gradient de pression associé s'écrit donc $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P_\infty = -i\omega \vec{v}_\infty$. On définit ensuite les variable $\vec{w}_b = \vec{v}_b - \vec{v}_\infty$ et $\hat{P} = P - P_\infty$. Ces nouvelles variables doivent être solution de

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \hat{P} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{w}_b}{\partial t} &= \nu \Delta \vec{w}_b \\ \vec{w}_b(\pm L/2) &= -V^*(\pm L/2) e^{i\omega t} \vec{e}_\phi \\ \vec{w}_b(|z \pm L/2| \gg \delta) &\approx 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où on utilise dans la dernière condition le fait que $V(z)$ peut être approximé comme constant dans la couche limite. La solution s'écrit alors (en notant $\vec{w}_b(z, t) = W_b(z) e^{i\omega t} \vec{e}_\phi$)

$$W_b = -V^*(\pm L/2) e^{-\frac{1 \pm i}{\delta} (\frac{L}{2} - |z|)} \quad (\text{C.4})$$

où la taille de la couche limite est comme annoncé

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (\text{C.5})$$

On obtient donc le profil de vitesse corrigé proche des bords que l'on peut écrire de manière compacte ($\delta/L \ll 1$)

$$V_b(z) = V(z) - V^*(s(z)L/2)e^{-(1+i)\phi(z)} \quad (\text{C.6})$$

avec $\phi(z) = \frac{1}{\delta}(\frac{L}{2} - |z|)$ la distance à un bord normalisée par δ et $s(z)$ le signe de z . Ce champ de vitesse se confond loin des bords avec celui trouvé précédemment mais permet d'assurer la condition aux limites cinématiques au bord $z = \pm L/2$.



Liste des publications liées à cette thèse

Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes (actualisé au 01/06/2022) :

- **Floating under a levitating liquid**, Benjamin Apffel, Filip Novkoski, Antonin Eddi, Emmanuel Fort, *Nature*, 2020. Cet article a été repris dans de nombreux journaux "grand public" (*Le Monde*, *The Guardian*, *The New York Times*...) et a notamment donné lieu à l'écriture d'un article de vulgarisation pour le site *The Conversation*.
- **Liquid walls and interfaces in arbitrary directions stabilized by vibrations**, Benjamin Apffel, Samuel Hidalgo-Caballero, Antonin Eddi, Emmanuel Fort, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2021
- **Frequency Conversion Cascade by Crossing Multiple Space and Time Interfaces**, Benjamin Apffel, Emmanuel Fort, *Physical Review Letters*, 2022
- **Experimental Implementation of Wave Propagation in Disordered Time-Varying Media**, Benjamin Apffel, Sander Wildeman, Antonin Eddi, Emmanuel Fort, *Physical Review Letters*, 2022
- **Liquid interface shaping and transport phenomena induced by spatially inhomogeneous vibrations**, Benjamin Apffel, Christian Wilkinson, Emmanuel Fort, *EPJ Plus*, 2022. Cet article a été écrit dans le cadre des compte-rendus de l'édition 2021 des Rencontres du Non-Linéaire.

- [1] M. V. Berry, R. G. Chambers, M. D. Large, C. Upstill, and J. C. Walmsley. Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue. *European Journal of Physics*, 1(3) :154, July 1980. Publisher : IOP Publishing.
- [2] Ralf Schützhold and William G. Unruh. Gravity wave analogues of black holes. *Physical Review D*, 66(4) :044019, August 2002. Publisher : American Physical Society.
- [3] Germain Rousseaux, Christian Mathis, Philippe Maïssa, Thomas G. Philbin, and Ulf Leonhardt. Observation of negative-frequency waves in a water tank : a classical analogue to the Hawking effect ? *New Journal of Physics*, 10(5) :053015, May 2008. Publisher : IOP Publishing.
- [4] Germain Rousseaux, Philippe Maïssa, Christian Mathis, Pierre Coulet, Thomas G. Philbin, and Ulf Leonhardt. Horizon effects with surface waves on moving water. *New Journal of Physics*, 12(9) :095018, September 2010. Publisher : IOP Publishing.
- [5] Silke Weinfurtner, Edmund W. Tedford, Matthew C. J. Penrice, William G. Unruh, and Gregory A. Lawrence. Classical Aspects of Hawking Radiation Verified in Analogue Gravity Experiment. In Daniele Faccio, Francesco Belgiorno, Sergio Cacciatori, Vittorio Gorini, Stefano Liberati, and Ugo Moschella, editors, *Analogue Gravity Phenomenology : Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*, Lecture Notes in Physics, pages 167–180. Springer International Publishing, Cham, 2013.
- [6] Bruce C. Denardo, Joshua J. Puda, and Andrés Larraza. A water wave analog of the Casimir effect. *American Journal of Physics*, 77(12) :1095–1101, December 2009. Publisher : American Association of Physics Teachers.
- [7] Y. Couder, S. Protière, E. Fort, and A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437(7056) :208–208, September 2005. Number : 7056 Publisher : Nature Publishing Group.
- [8] Stéphane Perrard, Matthieu Labousse, Marc Miskin, Emmanuel Fort, and Yves Couder. Self-organization into quantized eigenstates of a classical wave-driven particle. *Nature Communications*, 5(1) :3219, January 2014. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [9] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy, and Y. Couder. Unpredictable Tunneling of a Classical Wave-Particle Association. *Physical Review Letters*, 102(24) :240401, June 2009. Publisher : American Physical Society.
- [10] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. Cours de Physique théorique - Mécanique.
- [11] Allen Crockett and Wolfgang Rueckner. Visualizing sound waves with schlieren optics. *American Journal of Physics*, 86(11) :870–876, November 2018.
- [12] L S Dolin. To the possibility of comparison of three-dimensional electromagnetic systems with non-uniform anisotropic filling. page 17.
- [13] Huanyang Chen, C. T. Chan, and Ping Sheng. Transformation optics and metamaterials. *Nature Materials*, 9(5) :387–396, May 2010. Number : 5 Publisher : Nature Publishing Group.
- [14] Ulf Leonhardt. Optical Conformal Mapping. *Science*, 312(5781) :1777–1780, June 2006. Publisher : American Association for the Advancement of Science.

-
- [15] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith. Controlling Electromagnetic Fields. *Science*, 312(5781) :1780–1782, June 2006.
 - [16] Romain Fleury, Francesco Monticone, and Andrea Alù. Invisibility and Cloaking : Origins, Present, and Future Perspectives. *Physical Review Applied*, 4(3) :037001, September 2015. Publisher : American Physical Society.
 - [17] F.R. Morgenthaler. Velocity Modulation of Electromagnetic Waves. *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 6(2) :167–172, April 1958.
 - [18] Christophe Caloz and Zoé-Lise Deck-Léger. Spacetime Metamaterials—Part I : General Concepts. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 68(3) :1569–1582, March 2020.
 - [19] Christophe Caloz and Zoé-Lise Deck-Léger. Spacetime Metamaterials—Part II : Theory and Applications. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 68(3) :1583–1598, March 2020.
 - [20] Emanuele Galiffi, Romain Tirole, Shixiong Yin, Huanan Li, Stefano Vezzoli, Paloma A. Huidobro, Mário G. Silveirinha, Riccardo Sapienza, Andrea Alù, and J. B. Pendry. Photonics of time-varying media. *Advanced Photonics*, 4(1) :014002, February 2022.
 - [21] Dimitrios L. Sounas and Andrea Alù. Non-reciprocal photonics based on time modulation. *Nature Photonics*, 11(12) :774–783, December 2017.
 - [22] Junfei Li, Chen Shen, Xiaohui Zhu, Yangbo Xie, and Steven A. Cummer. Nonreciprocal sound propagation in space-time modulated media. *Physical Review B*, 99(14) :144311, April 2019.
 - [23] E. Galiffi, P. A. Huidobro, and J. B. Pendry. Broadband Nonreciprocal Amplification in Luminal Metamaterials. *Physical Review Letters*, 123(20) :206101, November 2019.
 - [24] J. B. Pendry, E. Galiffi, and P. A. Huidobro. Gain in time-dependent media—a new mechanism. *JOSA B*, 38(11) :3360–3366, November 2021.
 - [25] Victor Pacheco-Peña and Nader Engheta. Antireflection temporal coatings. *Optica*, 7(4) :323–331, April 2020.
 - [26] Brian H. Kolner and Moshe Nazarathy. Temporal imaging with a time lens. *Optics Letters*, 14(12) :630–632, June 1989. Publisher : Optica Publishing Group.
 - [27] Alireza Akbarzadeh, Nima Chamanara, and Christophe Caloz. Inverse prism based on temporal discontinuity and spatial dispersion. *Optics Letters*, 43(14) :3297–3300, July 2018.
 - [28] Amr M. Shaltout, Jieran Fang, Alexander V. Kildishev, and Vladimir M. Shalaev. Photonic Time-Crystals and Momentum Band-Gaps. In *Conference on Lasers and Electro-Optics (2016)*, paper FM1D.4, page FM1D.4. Optica Publishing Group, June 2016.
 - [29] Martin W. McCall, Alberto Favaro, Paul Kinsler, and Allan Boardman. A spacetime cloak, or a history editor. *Journal of Optics*, 13(2) :024003, November 2010. Publisher : IOP Publishing.
 - [30] Moti Fridman, Alessandro Farsi, Yoshitomo Okawachi, and Alexander L. Gaeta. Demonstration of temporal cloaking. *Nature*, 481(7379) :62–65, January 2012.

-
- [31] Yiyu Zhou, M. Zahirul Alam, Mohammad Karimi, Jeremy Upham, Orad Reshef, Cong Liu, Alan E. Willner, and Robert W. Boyd. Broadband frequency translation through time refraction in an epsilon-near-zero material. *Nature Communications*, 11(1) :2180, May 2020.
 - [32] Vincenzo Bruno, Stefano Vezzoli, Clayton DeVault, Enrico Carnemolla, Marcello Ferrera, Alexandra Boltasseva, Vladimir M. Shalaev, Daniele Faccio, and Matteo Clerici. Broad Frequency Shift of Parametric Processes in Epsilon-Near-Zero Time-Varying Media. *Applied Sciences*, 10(4) :1318, January 2020.
 - [33] Stefan F. Preble, Qianfan Xu, and Michal Lipson. Changing the colour of light in a silicon resonator. *Nature Photonics*, 1(5) :293–296, May 2007.
 - [34] Takasumi Tanabe, Masaya Notomi, Hideaki Taniyama, and Eiichi Kuramochi. Dynamic Release of Trapped Light from an Ultrahigh-Q Nanocavity via Adiabatic Frequency Tuning. *Physical Review Letters*, 102(4) :043907, January 2009.
 - [35] Masaya Notomi and Satoshi Mitsugi. Wavelength conversion via dynamic refractive index tuning of a cavity. *Physical Review A*, 73(5) :051803, May 2006.
 - [36] Giuseppe Trainiti, Yiwei Xia, Jacopo Marconi, Gabriele Cazzulani, Alper Erturk, and Massimo Ruzzene. Time-Periodic Stiffness Modulation in Elastic Metamaterials for Selective Wave Filtering : Theory and Experiment. *Physical Review Letters*, 122(12) :124301, March 2019.
 - [37] Amir Darabi, Xiang Ni, Michael Leamy, and Andrea Alù. Reconfigurable Floquet elastodynamic topological insulator based on synthetic angular momentum bias. *Science Advances*, 6(29) :eaba8656.
 - [38] Yifan Wang, Behrooz Yousefzadeh, Hui Chen, Hussein Nassar, Guoliang Huang, and Chiara Daraio. Observation of Nonreciprocal Wave Propagation in a Dynamic Phononic Lattice. *Physical Review Letters*, 121(19) :194301, November 2018.
 - [39] Yifeng Shen, Xiaohan Liu, Yunfei Tang, Yanfei Chen, and Jian Zi. Observation of a complete band gap for liquid surface waves propagating over a periodically drilled bottom. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 17(26) :L287–L292, June 2005.
 - [40] Siyuan Zou, Yadong Xu, Razafizana Zatianina, Chunyang Li, Xu Liang, Lili Zhu, Yongqiang Zhang, Guohua Liu, Qing Huo Liu, Huanyang Chen, and Zhenyu Wang. Broadband Waveguide Cloak for Water Waves. *Physical Review Letters*, 123(7) :074501, August 2019.
 - [41] Xinhua Hu, Yifeng Shen, Xiaohan Liu, Rongtang Fu, and Jian Zi. Superlensing effect in liquid surface waves. *Physical Review E*, 69(3) :030201, March 2004.
 - [42] L. Domino, M. Fermigier, E. Fort, and A. Eddi. Dispersion-free control of hydroelastic waves down to sub-wavelength scale. *EPL (Europhysics Letters)*, 121(1) :14001, January 2018.
 - [43] T. Bobinski, A. Eddi, P. Petitjeans, A. Maurel, and V. Pagneux. Experimental demonstration of epsilon-near-zero water waves focusing. *Applied Physics Letters*, 107(1) :014101, July 2015.
 - [44] Liang-Shan Chen, Chao-Hsien Kuo, Zhen Ye, and Xin Sun. Band gaps in the propagation and scattering of surface water waves over cylindrical steps. *Physical Review E*, 69(6) :066308, June 2004.

-
- [45] Pierre Devillard, François Dunlop, and Bernard Souillard. Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *Journal of Fluid Mechanics*, 186 :521–538, January 1988.
 - [46] Max Belzons, Elisabeth Guazzelli, and Olivier Parodi. Gravity waves on a rough bottom : experimental evidence of one-dimensional localization. *Journal of Fluid Mechanics*, 186 :539–558, January 1988.
 - [47] Henri Degueldre, Jakob J. Metzger, Theo Geisel, and Ragnar Fleischmann. Random focusing of tsunami waves. *Nature Physics*, 12(3) :259–262, March 2016.
 - [48] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. Cours de Physique théorique - Mécanique des fluides.
 - [49] Chunyang Li, Lin Xu, Lili Zhu, Siyuan Zou, Qing Huo Liu, Zhenyu Wang, and Huanyang Chen. Concentrators for Water Waves. *Physical Review Letters*, 121(10) :104501, September 2018.
 - [50] Zhenyu Wang, Pei Zhang, Xiaofei Nie, and Yongqiang Zhang. Manipulating Water Wave Propagation via Gradient Index Media. *Scientific Reports*, 5(1) :16846, November 2015.
 - [51] Zhenyu Wang, Pei Zhang, Xiaofei Nie, and Yongqiang Zhang. Focusing of liquid surface waves by gradient index lens. *EPL*, 108(2) :24003, October 2014.
 - [52] Taek Seong Jeong, Jae-Eun Kim, Hae Yong Park, and In-Won Lee. Experimental measurement of water wave band gaps. *Applied Physics Letters*, 85(9) :1645–1647, August 2004.
 - [53] M. Farhat, S. Enoch, S. Guenneau, and A. B. Movchan. Broadband Cylindrical Acoustic Cloak for Linear Surface Waves in a Fluid. *Physical Review Letters*, 101(13) :134501, September 2008.
 - [54] L. Domino, M. Fermigier, and A. Eddi. Artificial resonant crystals for hydroelastic waves. *Applied Physics Letters*, 117(6) :063701, August 2020.
 - [55] Xinyu Zhao, Xinhua Hu, and Jian Zi. Fast Water Waves in Stationary Surface Disk Arrays. *Physical Review Letters*, 127(25) :254501, December 2021.
 - [56] Chi Zhang, C. T. Chan, and Xinhua Hu. Broadband focusing and collimation of water waves by zero refractive index. *Scientific Reports*, 4(1) :6979, November 2014.
 - [57] Michael Faraday. On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 121 :299–340, January 1831.
 - [58] Thomas Brooke Benjamin, Fritz Joseph Ursell, and Geoffrey Ingram Taylor. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 225(1163) :505–515, September 1954.
 - [59] S. Douady. Experimental study of the Faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 221 :383–409, December 1990.
 - [60] Guillaume d’Hardemare, Antonin Eddi, and Emmanuel Fort. Probing Floquet modes in a time periodic system with time defects using Faraday instability. *Europhysics Letters*, 131(2) :24007, July 2020.

-
- [61] Vincent Bacot, Guillaume Durey, Antonin Eddi, Mathias Fink, and Emmanuel Fort. Phase-conjugate mirror for water waves driven by the Faraday instability. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(18) :8809–8814, April 2019.
- [62] Vincent Bacot, Matthieu Labousse, Antonin Eddi, Mathias Fink, and Emmanuel Fort. Time reversal and holography with spacetime transformations. *Nature Physics*, 12(10) :972–977, October 2016.
- [63] Robert T. Collins, Jeremy J. Jones, Michael T. Harris, and Osman A. Basaran. Electrohydrodynamic tip streaming and emission of charged drops from liquid cones. *Nature Physics*, 4(2) :149–154, February 2008.
- [64] Kevin Ward, Satoshi Matsumoto, and Ranga Narayanan. The electrostatically forced Faraday instability : theory and experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 862 :696–731, March 2019.
- [65] John Zeleny. Instability of Electrified Liquid Surfaces. *Physical Review*, 10(1) :1–6, July 1917.
- [66] Chia-Shun Yih. Stability of a Horizontal Fluid Interface in a Periodic Vertical Electric Field. *The Physics of Fluids*, 11(7) :1447–1449, July 1968.
- [67] G. I. Taylor and A. D. McEwan. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field. *Journal of Fluid Mechanics*, 22(1) :1–15, May 1965.
- [68] Geoffrey Ingram Taylor. Disintegration of water drops in an electric field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 280(1382) :383–397, July 1964.
- [69] Alfonso M. Gañán-Calvo, José M. López-Herrera, Miguel A. Herrada, Antonio Ramos, and José M. Montanero. Review on the physics of electrospray : From electrokinetics to the operating conditions of single and coaxial Taylor cone-jets, and AC electrospray. *Journal of Aerosol Science*, 125 :32–56, November 2018.
- [70] Lord Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceedings of the London mathematical society*, 1883.
- [71] Geoffrey Ingram Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1065) :192–196, March 1950.
- [72] D. J. Lewis and Geoffrey Ingram Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 202(1068) :81–96, June 1950.
- [73] G. H. Wolf. The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, 227(3) :291–300, June 1969.
- [74] G. H. Wolf. Dynamic Stabilization of the Interchange Instability of a Liquid-Gas Interface. *Physical Review Letters*, 24(9) :444–446, March 1970.
- [75] Madison S. Krieger. Interfacial fluid instabilities and Kapitza pendula. *The European Physical Journal E*, 40(7) :67, July 2017.
- [76] Andrew Stephenson. On induced stability. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15(86) :233–236, February 1908.

-
- [77] P. L. Kapitza. Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates. *Soviet Phys. JETP*, 1951.
 - [78] Girish K. Rajan and Diane M. Henderson. Linear waves at a surfactant-contaminated interface separating two fluids : Dispersion and dissipation of capillary-gravity waves. *Physics of Fluids*, 30(7) :072104, July 2018.
 - [79] J. N. Newman. Propagation of water waves over an infinite step. *Journal of Fluid Mechanics*, 23(02) :399, October 1965.
 - [80] John W. Miles. Surface-wave scattering matrix for a shelf. *Journal of Fluid Mechanics*, 28(4) :755–767, June 1967.
 - [81] Sander Wildeman. Real-time quantitative Schlieren imaging by fast Fourier demodulation of a checkered backdrop. *Experiments in Fluids*, 59(6) :97, May 2018.
 - [82] Frédéric Moisy, Marc Rabaud, and Kévin Salsac. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46(6) :1021, January 2009.
 - [83] Krishna Kumar and Laurette S. Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 279 :49–68, November 1994.
 - [84] Rayleigh. VII. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, April 2009.
 - [85] Lawrence Ruby. Applications of the Mathieu equation. *American Journal of Physics*, 64(1) :39–44, January 1996.
 - [86] Eugene I. Butikov. Parametric excitation of a linear oscillator. *European Journal of Physics*, 25(4) :535–554, May 2004.
 - [87] D. Holberg and K. Kunz. Parametric properties of fields in a slab of time-varying permittivity. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(2) :183–194, March 1966.
 - [88] Eran Lustig, Yonatan Sharabi, and Mordechai Segev. Topological aspects of photonic time crystals. *Optica*, 5(11) :1390–1395, November 2018.
 - [89] Frank Wilczek. Superfluidity and Space-Time Translation Symmetry Breaking. *Physical Review Letters*, 111(25) :250402, December 2013.
 - [90] Krzysztof Sacha and Jakub Zakrzewski. Time crystals : a review. *Reports on Progress in Physics*, 81(1) :016401, November 2017.
 - [91] E. B. Devitt and J. R. Melcher. Surface Electrohydrodynamics with High-Frequency Fields. *The Physics of Fluids*, 8(6) :1193–1195, June 1965.
 - [92] Alain Comtet, Christophe Texier, and Yves Tourigny. Lyapunov exponents, one-dimensional Anderson localization and products of random matrices. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 46(25) :254003, June 2013.
 - [93] Ad Lagendijk, Bart van Tiggelen, and Diederik S. Wiersma. Fifty years of Anderson localization. *Physics Today*, 62(8) :24–29, August 2009.

-
- [94] Kabir Ramola and Christophe Texier. Fluctuations of Random Matrix Products and 1D Dirac Equation with Random Mass. *Journal of Statistical Physics*, 157(3) :497–514, November 2014.
 - [95] Krzysztof Sacha and Dominique Delande. Anderson localization in the time domain. *Physical Review A*, 94(2) :023633, August 2016.
 - [96] Marcin Mierzejewski, Krzysztof Giergiel, and Krzysztof Sacha. Many-body localization caused by temporal disorder. *Physical Review B*, 96(14) :140201, October 2017.
 - [97] Yonatan Sharabi, Eran Lustig, and Mordechai Segev. Disordered Photonic Time Crystals. *Physical Review Letters*, 126(16) :163902, April 2021.
 - [98] R. Carminati, H. Chen, R. Pierrat, and B. Shapiro. Universal Statistics of Waves in a Random Time-Varying Medium. *Physical Review Letters*, 127(9) :094101, August 2021.
 - [99] Claudio Floris. Mean square stability of a second-order parametric linear system excited by a colored Gaussian noise. *Journal of Sound and Vibration*, 336 :82–95, February 2015.
 - [100] F. Pétrélis, S. Aumaître, and S. Fauve. Effect of Phase Noise on Parametric Instabilities. *Physical Review Letters*, 94(7) :070603, February 2005.
 - [101] Sébastien Aumaître, François Pétrélis, and Kirone Mallick. Low-Frequency Noise Controls On-Off Intermittency of Bifurcating Systems. *Physical Review Letters*, 95(6) :064101, August 2005.
 - [102] Sébastien Aumaître, Kirone Mallick, and François Pétrélis. Effects of the Low Frequencies of Noise on On-Off Intermittency. *Journal of Statistical Physics*, 123(4) :909–927, May 2006.
 - [103] G. W. Milton and O. Mattei. Field patterns : a new mathematical object. *Proc. R. Soc. A*, 473(1) :20160819, 2017.
 - [104] W. Thomson. Hydrokinetic solutions and observations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42(281) :362–377, November 1871.
 - [105] S. A. Thorpe. A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 32(4) :693–704, June 1968.
 - [106] S. A. Thorpe. Experiments on the Stability of Stratified Shear Flows. *Radio Science*, 4(12) :1327–1331, 1969.
 - [107] John M. Burgess, Anne Juel, W. D. McCormick, J. B. Swift, and Harry L. Swinney. Suppression of Dripping from a Ceiling. *Physical Review Letters*, 86(7) :1203–1206, February 2001.
 - [108] Radu Cimeanu, Demetrios T. Papageorgiou, and Peter G. Petropoulos. On the control and suppression of the Rayleigh-Taylor instability using electric fields. *Physics of Fluids*, 26(2) :022105, February 2014.
 - [109] Lyudmyla L. Barannyk, Demetrios T. Papageorgiou, and Peter G. Petropoulos. Suppression of Rayleigh–Taylor instability using electric fields. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(6) :1008–1016, February 2012.
 - [110] Dirk Rannacher and Andreas Engel. Suppressing the Rayleigh-Taylor instability with a rotating magnetic field. *Physical Review E*, 75(1) :016311, January 2007.

-
- [111] J. J. Tao, X. T. He, W. H. Ye, and F. H. Busse. Nonlinear Rayleigh-Taylor instability of rotating inviscid fluids. *Physical Review E*, 87(1) :013001, January 2013.
- [112] David L. Youngs. Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1) :32–44, July 1984.
- [113] Grétar Tryggvason and Salih Ozen Unverdi. Computations of three-dimensional Rayleigh–Taylor instability. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 2(5) :656–659, May 1990.
- [114] M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet, and C. Quilliet. Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 236 :349–383, March 1992.
- [115] K. I. Read. Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1) :45–58, July 1984.
- [116] L. Limat, P. Jenffer, B. Dagens, E. Tournon, M. Fermigier, and J. E. Wesfreid. Gravitational instabilities of thin liquid layers : dynamics of pattern selection. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 61(1) :166–182, December 1992.
- [117] Hyun Geun Lee and Junseok Kim. Numerical simulation of the three-dimensional Rayleigh–Taylor instability. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(8) :1466–1474, November 2013.
- [118] L. Smarr, J. R. Wilson, R. T. Barton, and R. L. Bowers. Rayleigh-Taylor overturn in supernova core collapse. *The Astrophysical Journal*, 246 :515–525, June 1981.
- [119] John M. Blondin and Donald C. Ellison. Rayleigh-Taylor Instabilities in Young Supernova Remnants Undergoing Efficient Particle Acceleration. *The Astrophysical Journal*, 560(1) :244, October 2001.
- [120] D. H. Sharp. An overview of Rayleigh-Taylor instability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1) :3–18, July 1984.
- [121] Maurice Rossi. Thèse de doctorat (chap. 1 et 2).
- [122] V. N. Chelomey. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Meccanica*, 20(4) :314–316, December 1985.
- [123] I. I. Blekhman, L. I. Blekhman, L. A. Vaisberg, V. B. Vasil’kov, and K. S. Yakimova. “Anomalous” phenomena in fluid under the action of vibration. *Doklady Physics*, 53(10) :520, October 2008.
- [124] Eugene I Butikov. Kapitza’s Pendulum : A Physically Transparent Simple Treatment. page 20.
- [125] Suzie Protiere. Gouttes rebondissantes : une association onde-particule à échelle macroscopique. page 141.
- [126] Brian R. Elbing, Adam L. Still, and Afshin J. Ghajar. Review of Bubble Column Reactors with Vibration. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 55(2) :385–403, January 2016.
- [127] M. H. I. Baird. Resonant bubbles in a vertically vibrating liquid column. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 41(2) :52–55, 1963.

-
- [128] G. J. Jameson. The motion of a bubble in a vertically oscillating viscous liquid. *Chemical Engineering Science*, 21(1) :35–48, January 1966.
- [129] V. S. Sorokin, I. I. Blekhman, and V. B. Vasilkov. Motion of a gas bubble in fluid under vibration. *Nonlinear Dynamics*, 67(1) :147–158, January 2012.
- [130] Dmitri V. Lyubimov, Anatoly A. Cherepanov, Tatiana P. Lyubimova, and Bernard Roux. Interface orienting by vibration. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 325(7) :391–396, October 1997.
- [131] J. Fernández, I. Tíñao, J. Porter, and A. Laverón-Simavilla. Instabilities of vibroequilibria in rectangular containers. *Physics of Fluids*, 29(2) :024108, February 2017.
- [132] P. Salgado Sánchez, J. Fernández, I. Tíñao, and J. Porter. Vibroequilibria in microgravity : Comparison of experiments and theory. *Physical Review E*, 100(6) :063103, December 2019.
- [133] G. Gandikota, D. Chatain, T. Lyubimova, and D. Beysens. Dynamic equilibrium under vibrations of H₂ liquid-vapor interface at various gravity levels. *Physical Review E*, 89(6) :063003, June 2014.
- [134] R. A. Ibrahim, V. N. Pilipchuk, and T. Ikeda. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :133–199, March 2001.
- [135] A A Ivanova, V G Kozlov, and P Evesque. Interface Dynamics of Immiscible Fluids under Horizontal Vibration. 36(3) :7, 2001.
- [136] Emma Talib, Shreyas V. Jalikop, and Anne Juel. The influence of viscosity on the frozen wave instability : theory and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 584 :45–68, August 2007.
- [137] Gerd (Gerhard) H. Wolf. Dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability of miscible liquids and the related “frozen waves”. *Physics of Fluids*, 30(2) :021701, February 2018.
- [138] P. Salgado Sánchez, V. Yasnou, Y. Gaponenko, A. Mialdun, J. Porter, and V. Shevtsova. Interfacial phenomena in immiscible liquids subjected to vibrations in microgravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 865 :850–883, April 2019.
- [139] P. Salgado Sánchez, Y. Gaponenko, V. Yasnou, A. Mialdun, J. Porter, and V. Shevtsova. Effect of initial interface orientation on patterns produced by vibrational forcing in microgravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 884, February 2020.
- [140] J. Porter, P. Salgado Sánchez, V. Shevtsova, and V. Yasnou. A review of fluid instabilities and control strategies with applications in microgravity. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 16 :24, 2021.
- [141] Daniel Beysens. Vibrations in space as an artificial gravity ? *Europhysics News*, 37(3) :22–25, May 2006.
- [142] D. V. Lyubimov and A. A. Cherepanov. Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field. *Fluid Dynamics*, 21(6) :849–854, November 1986.
- [143] Antonin Marchand. Mouillage statique et dynamique : Influences géométriques aux échelles moléculaires. pages 291–295.

-
- [144] Chao-Lung Ting and Marc Perlin. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate : an experimental investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 295 :263–300, 1995.
 - [145] M. Costalonga, P. Brunet, and H. Peerhossaini. Low frequency vibration induced streaming in a hele-shaw cell. *Physics of Fluids*, 27(1) :013101, 2015.
 - [146] Fabio Biancalana, Andreas Amann, Alexander V. Uskov, and Eoin P. O'Reilly. Dynamics of light propagation in spatiotemporal dielectric structures. *Physical Review E*, 75(4) :046607, April 2007.
 - [147] Eli Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :2059–2062, May 1987.

RÉSUMÉ

Le contrôle d'ondes par structuration spatiale du milieu de propagation est aujourd'hui au cœur d'innombrables applications dans de nombreux domaines. Celui-ci est cependant fondamentalement limité par la conservation de certaines quantités (par exemple des flux d'énergie) du fait du caractère statique du problème. La modulation temporelle du milieu apparaît alors comme un nouveau degré de liberté permettant d'enrichir les possibilités de contrôle. Cependant, l'implémentation expérimentale est bien souvent délicate, du fait de la difficulté à varier significativement au cours du temps les propriétés physiques d'un milieu. A ce titre, les ondes à la surface de l'eau apparaissent comme un système modèle prometteur, ouvrant des possibilités inégalées que nous discutons dans cette thèse. Dans une première partie, la manipulation spatiale et temporelle d'ondes hydrodynamiques est réalisée par une nouvelle technique d'électrostriction basée sur l'utilisation d'électrodes placées au-dessus de la surface d'un liquide conducteur. Nous avons ainsi pu focaliser ou guider ces ondes, procéder à des conversions de fréquences arbitraires par un processus linéaire en leur amplitude, ou encore étudier leur comportement dans l'équivalent temporel d'un cristal spatial. Une seconde partie s'intéresse à la stabilité de l'interface entre deux fluides soumis à une vibration verticale haute fréquence. Le comportement des ondes à l'interface, qui est également lié à l'étude linéaire de phénomènes d'instabilité, est alors modifié du fait de la modulation temporelle de la gravité effectivement ressentie par le liquide. Nous démontrons en particulier que dans ce contexte, une couche d'huile de silicone placée au-dessus d'une couche d'air, habituellement instable du fait de la gravité, peut être stabilisée expérimentalement. Des objets peuvent alors symétriquement flotter sur l'interface supérieure ou inférieure, cette dernière position étant stabilisée par les vibrations. La « gravité effective » ressentie par ces objets est ensuite étendue au cas d'interfaces liquides stabilisées dans des directions arbitraires.

MOTS CLÉS

ondes, contrôle, milieu temporel, hydrodynamique, instabilité, vibrations

ABSTRACT

Spatial control of waves is generally achieved by the introduction of spatial inhomogeneities in the propagating media. Although such control is at the heart of countless applications, it is fundamentally limited by the conservation of certain quantities (for instance energy fluxes) due to the temporal invariance of the system. Time modulation of the medium properties thus appears as a new degree of freedom that can be engineered to extend wave control. Experimental realization of such media remains however a challenging task, as varying significantly the physical properties of the propagating media along time is generally difficult. From this perspective, water waves appear as a promising tool to implement time-varying media. This thesis is dedicated to such study, that we divide in two parts. In a first part, we manipulate water waves by placing electrodes submitted to electrical high voltage above the water surface. This novel technique provides unreached space-time control that we use to focus waves, perform large frequency conversion or amplify a specific frequency in a one dimensional time crystal. A second part deals with the case when high-frequency vertical vibrations are applied to the bath. The interface stability (that is related to the behavior of the waves at the surface) is then modified compared to the static case. In particular, we demonstrate the stabilization of a 20 cm-silicon oil layer above a cushion of air. Moreover, we also demonstrate that inverted buoyancy on the downward interface can occur thanks to the vibrations. Such "effective gravity" experienced by small objects can be generalized to the case of liquid interfaces stabilized in arbitrary directions using non-vertical vibrations.

KEYWORDS

waves, control, time-varying media, hydrodynamics, instability, vibrations