



HAL
open science

Modélisation numérique et caractérisation expérimentale de matériaux architecturés au comportement élastique de second gradient

Baptiste Durand

► **To cite this version:**

Baptiste Durand. Modélisation numérique et caractérisation expérimentale de matériaux architecturés au comportement élastique de second gradient. Matériaux. École des Ponts ParisTech, 2022. Français. NNT : 2022ENPC0007 . tel-03968103

HAL Id: tel-03968103

<https://pastel.hal.science/tel-03968103v1>

Submitted on 1 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation numérique et caractérisation expérimentale de matériaux architecturés au comportement élastique de second gradient

École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement (SIE)

Spécialité du doctorat : Structures et Matériaux

Thèse préparée au Laboratoire Navier (UMR 8205)

Thèse soutenue le 14 mars 2022, par
Baptiste DURAND

Composition du jury :

Angela, Madeo Full professor, TU Dortmund	Rapporteure
Basile, Audoly Directeur de recherche, CNRS	Rapporteur
Rémy, Dendievel Professeur des universités, Grenoble INP	Président du jury
Samuel, Forest Directeur de recherche, MINES ParisTech	Examineur
Martin, Poncelet Maître de conférences, ENS Paris Saclay	Examineur
Arthur, Lebée Chercheur, École des Ponts ParisTech	Directeur de thèse
Karam, Sab Directeur de recherche, École des Ponts ParisTech	Co-encadrant
Pierre, Seppecher Professeur, Université de Toulon	Co-encadrant

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Arthur Le-bée, qui m'a accompagné tout au long du doctorat et m'a guidé sur des pistes de recherche complexes mais prometteuses. J'ai beaucoup appris à ses côtés, de par la finesse de ses raisonnements scientifiques, sa méthodologie et sa vision de la recherche. Le contexte particulier dû au COVID-19 a rendu cette relation doctorant – directeur de thèse encore plus importante : nos échanges aussi réguliers que possible, malgré les difficultés, m'ont aidé à mener ce travail jusqu'au bout. J'adresse également mes remerciements à Pierre Seppecher et Karam Sab, co-encadrants de cette thèse, qui m'ont fait part de leurs conseils scientifiques avisés, chacun avec un point de vue particulier. Bien que comprendre et concilier leurs idées n'a pas toujours été simple, j'ai grandement apprécié les échanges que j'ai pu avoir avec eux et la pluridisciplinarité de cet encadrement a été très enrichissante.

Je tiens à remercier les membres du jury de thèse qui m'ont fait l'honneur d'examiner avec attention mon travail. Je remercie en particulier Angela Madeo et Basile Audoly, qui ont acceptés d'être rapporteurs, pour le temps consacré à la lecture minutieuse du manuscrit et les commentaires qu'ils en ont fait.

Je remercie avec une profonde gratitude mes collègues et amis de l'équipe MSA du laboratoire Navier, pour la bonne humeur, l'entraide, le soutien et les moments conviviaux partagés. Quand on a l'impression que rien ne fonctionne, rien de tel qu'une pause en bonne compagnie pour redonner le moral et l'envie d'avancer. Merci en particulier à Charlotte, Sébastien, Nicolas et Chadi, pour leur bonne humeur et leur soutien indéfectible pendant la rédaction du manuscrit. Merci à Vianney, Julien, Filippo, Leila, Eki, Paul, Alma, Romane, Pierre, Camille, Julien, Caroline, Malo et aux autres stagiaires et doctorants qui ont fait vivre l'équipe MSA au cours de ces années. Côté permanents, je remercie en particulier : Jean François Caron et Gilles Foret, qui m'ont fait découvrir la recherche académique, Marie Françoise, pour les nombreux services rendus et les moments passés à discuter, et Adelaïde. Mes remerciements vont aussi aux techniciens, Christophe, Gilles et Hocine, toujours prêts à m'apporter leur aide.

Je souhaite, à travers ces quelques lignes, remercier sincèrement des chercheurs qui m'ont aidé à réaliser ce travail : Jérémy Bleyer pour ses précieux conseils sur le code FEniCS, Michel Bornert pour ses conseils sur l'utilisation de moyens de mesure optiques, Pierre Margerit qui m'a formé et accompagné pour la Corrélation d'Images Numériques, et Martin Poncelet pour les agréables échanges que nous avons eus et les essais réalisés ensemble.

Au-delà de la sphère scientifique et du laboratoire, je souhaite remercier mes amis les plus proches pour leur présence, leur indulgence et leurs encouragements pendant ces années de thèse intenses en émotions. Je tiens également à remercier Lucie, qui m'a accompagné tout au long de cette aventure, pour sa patience et son soutien inestimable.

Enfin, je remercie du fond du cœur mes parents et ma sœur qui m'ont toujours supporté et sur qui je peux compter à tout moment.

Résumé

Pour les matériaux architecturés, la microstructure a un rôle prépondérant dans le comportement visible à l'échelle macroscopique. Il y a toutefois peu d'exemples de matériaux architecturés qui présentent des effets de second gradient marqués, pour des sollicitations en statiques. Ces travaux visent à évaluer la possibilité d'obtenir un tel comportement élastique non standard avec une famille particulière de microstructures périodiques qui ont la particularité d'engendrer un mode mou de déformation macroscopique, à faible énergie.

Dans le contexte des petites perturbations, un schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur basé sur la méthode des développements asymptotiques à double échelle est proposé pour construire un milieu homogène équivalent de second gradient. La méthode est illustrée et validée en l'appliquant sur une première microstructure pantographique connue pour présenter des effets de second gradient marqués. Elle est ensuite étendue au cas des microstructures non centro-symétriques et mise en œuvre pour deux autres microstructures. Pour la première microstructure (rotating square), une forte sensibilité au gradient de dilatation isotrope est prévue. À l'inverse, aucun effet de second gradient n'est prévu pour la seconde microstructure (rotating triangles).

Une méthode d'essai est développée afin de vérifier la possibilité d'obtenir en pratique un comportement élastique de second gradient et de mesurer les raideurs effectives associées. Une méthode de corrélation d'images numériques est employée. Les essais de traction réalisés sur des échantillons de microstructure pantographique, fabriqués par découpe laser, mettent en évidence une forte sensibilité au gradient d'élongation et montrent l'existence d'un régime élastique linéaire. La comparaison des raideurs et de la longueur intrinsèque prévues par homogénéisation à celles mesurées confirme le caractère prédictif du schéma d'homogénéisation. La méthode d'essai élaborée est ensuite appliquée pour une microstructure conçue par optimisation topologique. Ce travail expérimental permet de vérifier que l'on obtient en pratique l'effet de second gradient macroscopique visé lors de la phase de conception.

Mots-clés : Homogénéisation d'ordre supérieur ; Élasticité linéaire ; Milieu de second gradient ; Métamatériau ; Corrélation d'images numériques

Abstract

In the case of architected materials, the underlying microstructure has a major influence on the effective behaviour that is visible on the macroscopic scale. The key role of the microstructure geometry provides the opportunity to design, and then fabricate, new architected materials with properties that cannot be reached with conventional materials, called metamaterials. However, there are very few examples of architected materials that exhibit significant second-gradient effects in the case of statics. This work aims at exploring the feasibility of obtaining such non-standard elastic behaviour with a certain family of periodic microstructures. These continuous two-dimensional microstructures are made of a single linear elastic material, contain voids and thin junctions and have the distinctive feature of leading to a macroscopic floppy strain mode, with a low strain energy.

In a linear elasticity framework, under the assumption of small deformations at both microscopic and macroscopic scales, a higher-order homogenization scheme based on the two-scale asymptotic expansion is proposed. This scheme provides an equivalent homogeneous strain-gradient medium. The approach is illustrated and validated by applying it to a first microstructure, called “pantographic material”, that is known to present significant strain-gradient effects. The method is then extended to the case of non-centrosymmetric microstructures and applied to two other microstructures. For the first one (commonly called “rotating square” structure), a strong sensitivity to the isotropic expansion gradient is expected. Conversely, no second gradient effect is predicted for the second microstructure (“rotating triangles” structure).

An experimental method and an identification procedure are devised in order to verify that significant strain-gradient elastic effects can be obtained with real samples of these materials and to measure the corresponding effective stiffnesses. A digital image correlation method is used. Experimental tensile tests, performed on laser-cut samples of the pantographic microstructure, highlight a strong sensitivity to the extension gradient and confirm the existence of a linear elastic regime. The comparison of effective elastic properties predicted by the higher-order homogenization scheme with those measured experimentally confirms the predictive value of this new up-scaling method. The developed experimental method is then applied to a microstructure designed by topology optimization. This experimental study provides evidence that the macroscopic strain-gradient behaviour targeted in the design phase is achieved in practice.

Keywords: Higher-order homogenization; Linear elasticity; Strain-gradient continuum; Metamaterial; Digital images correlation

Table des matières

Table des matières	vii
Table des notations	xi
I Introduction générale	1
I.1 Contexte	1
I.2 Projet ArchiMatHOS	4
I.3 Objectifs du doctorat	4
I.4 Organisation du manuscrit	6
II Schéma d’homogénéisation d’ordre supérieur pour l’élasticité de second gradient	9
II.1 Introduction	10
II.2 The continuous pantographic metamaterial	13
II.2.1 The microstructure	13
II.2.2 Emergence of strain-gradient effects	14
II.3 Higher-order homogenization from the two-scale asymptotic expansion	16
II.3.1 The two-scale asymptotic expansion	16
II.3.2 Resolution of the first auxiliary problems and resulting asymptotic series	18
II.3.3 Deriving equivalent continua from the two-scale asymptotic expansions	21
II.4 Homogenization of the pantographic material	23
II.4.1 First-order auxiliary problem	24
II.4.2 Second-order auxiliary problem	26
II.4.3 Strain-gradient model for the pantographic material	30
II.5 Comparison with full-scale simulations and empirical error estimates	31
II.5.1 Benchmark problem	31
II.5.2 Reference solution by full-scale numerical simulation	32
II.5.3 Approximate solutions from homogenization	32
II.5.4 Error measures	34
II.5.5 Influence of the relative position of the microstructure	34
II.5.6 Influence of the scale separation	35
II.6 Controlling displacement and strain concentration inside thin junctions	38
II.6.1 Prediction of the homogenized model	38

II.6.2	Maximum displacement and strain in full scale simulations	40
II.6.3	Asymptotic regime ensuring bounded strains and displacements	41
II.7	Conclusion	42
III	Application du schéma d'homogénéisation à deux microstructures auxétiques	45
III.1	Introduction	46
III.2	Étude de la microstructure « carrés auxétiques »	48
III.2.1	Présentation de la microstructure	48
III.2.2	Élasticité du premier ordre	51
III.2.3	Élasticité du second ordre	55
III.2.4	Synthèse et discussion : Modélisation du comportement élastique effectif	63
III.3	Étude de la microstructure <i>triangles auxétiques</i>	64
III.3.1	Présentation de la microstructure	64
III.3.2	Adaptation du schéma d'homogénéisation pour une microstructure non centro-symétrique	67
III.3.3	Résultats : Élasticité du premier ordre	69
III.3.4	Élasticité du second ordre : tenseurs d'élasticité D et B	73
III.3.5	Analyse de l'opérateur d'élasticité complet	76
III.3.6	Synthèse	87
III.4	Conclusion partielle et perspectives	88
IV	Identification expérimentale de modules élastiques de second gradient	91
IV.1	Introduction	92
IV.2	Conception et fabrication d'échantillons de bande pantographique	96
IV.2.1	Microstructure de la bande pantographique	96
IV.2.2	Modèle homogénéisé	98
IV.2.3	Procédé de fabrication	101
IV.2.4	Caractérisation du matériau constitutif	103
IV.2.5	Conception des éprouvettes	108
IV.2.6	Imperfections et quantification de l'écart à la géométrie nominale	110
IV.3	Mise en évidence expérimentale d'une sensibilité au gradient d'élongation	113
IV.3.1	Dispositif expérimental	113
IV.3.2	Sollicitations mécaniques	114
IV.3.3	Mesures de déplacements par corrélation d'images numériques	116
IV.3.4	Description cinématique macroscopique	123
IV.3.5	Résultats	124
IV.4	Identification d'un comportement de second gradient équivalent	127
IV.4.1	Méthode	128
IV.4.2	Expérience numérique	130
IV.4.3	Résultats	134
IV.5	Application à une microstructure obtenue par optimisation topologique	139

IV.5.1 Synthèse d'une poutre périodique sensible au gradient d'extension . .	139
IV.5.2 Méthode	147
IV.5.3 Résultats	151
IV.6 Conclusion et perspectives	154
V Conclusion générale	157
V.1 Conclusion	157
V.2 Perspectives	158
A Notations et conventions tensorielles	161
B Illustrations complémentaires pour la microstructure <i>triangles auxétiques</i>	165
B.1 Sollicitations de premier gradient dans une configuration kagome	165
B.2 Micro-ajustement dans le cas d'un gradient de dilatation \mathbf{K}^2	167
C Construction du modèle du milieu de second gradient élastique linéaire	169
C.1 Construction du modèle du milieu de second gradient	169
C.2 Récapitulatif	175
Bibliographie	177

Table des notations

Cette table des notations est un aide-mémoire destiné au lecteur. Elle fait la synthèse des principales notations utilisées dans ce manuscrit. Les notations sont regroupées en fonction du chapitre où celles-ci sont introduites.

Chapitre 2

- a^1 Premier tenseur de localisation de la déformation 19
- a^2 Deuxième tenseur de localisation de la déformation 20
- C, C^p Tenseur d'élasticité homogénéisé du premier ordre 21
- D, D^p Tenseur d'élasticité homogénéisé du second ordre 22
- D^*, D^{*p} Tenseur d'élasticité homogénéisé du second ordre projeté 30
- E Déformations linéarisée macroscopique 20
- ε Tenseur des déformations linéarisées 17
- η Rapport d'échelles 16
- h^1 Premier tenseur de localisation du déplacement 19
- h^2 Deuxième tenseur de localisation du déplacement 20
- K Gradient de la déformation linéarisée macroscopique 20
- $\ell_{p,\alpha}, \ell_{p,\alpha}^p$ Longueurs caractéristiques des effets élastiques de second gradient 28
- ρ Finesse des jonctions 13
- s Position relative de la microstructure 32
- σ Tenseur des contraintes de Cauchy 17
- \underline{u} Champ de déplacement 17
- \underline{U} Déplacement macroscopique 20
- $W, W^{\rho,\eta}, W^{\text{hom}}$ Densité d'énergie élastique homogénéisée 31

Chapitre 3

- B Tenseur d'élasticité homogénéisé de couplage 68
- B^* Tenseur d'élasticité homogénéisé de couplage projeté 73
- E^1 Déformations macroscopique de dilatation 51
- E^2 Déformation macroscopique de cisaillement simple dans les directions 1 et 2 51
- E^3 Déformations macroscopique de contre-dilatation 51
- θ Angle d'ouverture de la microstructure 48

Chapitre 4

- C Raideur homogénéisée de premier gradient, associée à l'élongation 97
- D Raideur homogénéisée de premier gradient, associée au gradient d'élongation 97
- E Élongation macroscopique 96
- C–C Essai avec deux encastremets faibles aux extrémités de l'échantillon 107
- S–C Essai avec un encastrement fort et un faible aux extrémités de l'échantillon 107
- K Gradient d'élongation macroscopique 96
- L Longueur de la bande architecturée 97
- ℓ Longueur intrinsèque du milieu homogénéisée de second gradient, associée au gradient d'élongation macroscopique 97
- U Déplacement macroscopique longitudinal 96
- w Largeur nominale des jonctions 96
- \bar{w} Largeur moyenne des jonctions 110
- X Position longitudinale macroscopique 96

Chapitre I

Introduction générale

I.1 Contexte

Les matériaux architecturés sont des milieux hétérogènes dotés d'une microstructure choisie, généralement périodique, à une échelle intermédiaire entre l'échelle de la structure et l'échelle des hétérogénéités des matériaux constitutifs. Cette microstructure a un rôle prépondérant dans le comportement du matériau architecturé à l'échelle macroscopique.

Il est ainsi possible, avec des microstructures judicieusement conçues, d'accéder à des propriétés inatteignables avec des matériaux conventionnels. On parle alors de *métamatériaux* [Bertoldi *et al.*, 2017; Kadic *et al.*, 2019]. En mécanique, il s'agit par exemple de comportements élastiques inhabituels (auxéticité [Shan *et al.*, 2015; Clausen *et al.*, 2015], pentamode [Kadic *et al.*, 2012]...), d'un rapport raideur / masse volumique extrêmement élevé [Meza *et al.*, 2014; Tancogne-Dejean *et al.*, 2018] ou encore, en dynamique, de propriétés dispersives exotiques [Rosi et Auffray, 2016; d'Agostino *et al.*, 2020; Alberdi *et al.*, 2021].

Une approche appelée « Materials by design » a récemment émergé pour le développement de nouveaux matériaux [Ashby, 2013; Yeo *et al.*, 2018; Reis *et al.*, 2015]. L'idée maitresse est de contrôler finement l'organisation de la matière à une échelle mésoscopique, voire microscopique, aussi bien lors de la conception du matériau que lors de sa fabrication, afin d'obtenir les propriétés mécaniques voulues. Cette nouvelle approche permet ainsi de répondre au besoin en matériaux aux performances toujours plus élevées. Les matériaux architecturés occupent une place centrale dans cette approche, car la microstructure est un levier très efficace pour faire varier le comportement macroscopique.

L'approche *Materials-by-design* est devenue possible grâce aux importants progrès réalisés récemment dans plusieurs domaines. En ce qui concerne les matériaux architecturés, on note en particulier la concomitance des facteurs suivants :

- L'arrivée à un niveau de maturité suffisant de procédés de fabrication innovants (fabrication additive, autres procédés digitaux);
- L'émergence de nouvelles procédures d'optimisation topologique et d'optimisation de forme permettant la synthèse de microstructures (par exemple : Clausen *et al.*,

2015; Amstutz *et al.*, 2010), le lecteur pourra se référer à [Calisti *et al.*, 2021] pour une présentation des différentes stratégies développées ;

- Plus indirectement, des avancées en termes de moyens de simulation numérique et de moyens expérimentaux pouvant être utilisés pour la caractérisation des matériaux, dont la corrélation d'images numériques [Hild et Roux, 2012].

Le *milieu de Cauchy* est le modèle de référence en mécanique des milieux continus. Il s'agit du modèle standard utilisé pour la description du comportement élastique d'un matériau. Dans ce modèle, chaque point matériel est doté d'un seul degré de liberté (le déplacement) et seule la partie symétrique du premier gradient du déplacement intervient dans la densité d'énergie élastique. Il existe néanmoins d'autres modèles de milieux continus, construits à partir d'hypothèses différentes de celles qui aboutissent au milieu de Cauchy, appelés de façon générique *milieux généralisés*. Leur intérêt est de permettre de représenter certains phénomènes mécaniques qu'il est impossible de capter avec un milieu de Cauchy. On distingue deux classes de milieux généralisés¹ :

- Les milieux continus d'*ordre supérieur* : Pour ces milieux, la description cinématique est enrichie avec des degrés de liberté supplémentaires. Le milieu micromorphe [Mindlin, 1964; Germain, 1973b] et le milieu de Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909; Ehlers et Bidier, 2020] en sont deux exemples.
- Les milieux continus de *degré supérieur* : Dans ce cas, on ajoute dans les relations constitutives des termes qui font intervenir des gradients d'ordre plus élevé de certains champs. Citons en particulier le milieu de second gradient de déplacement [Mindlin et Eshel, 1968; Germain, 1973a], qui occupera une place importante dans cette thèse, le milieu de troisième gradient [Mindlin, 1965], nettement moins utilisé, et la théorie du gradient de contrainte plus récemment proposée [Forest et Sab, 2012].

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [Forest, 2006] pour une présentation détaillée des milieux généralisés.

Dans le contexte des petites perturbations, il est possible d'élaborer des théories d'élasticité linéaire, autre que l'élasticité linéarisée de premier gradient, en employant ces milieux généralisés. Celles-ci sont valides d'un point de vue thermodynamique, mais il y a peu d'exemples pratiques de tels comportements élastiques.

Dans cette thèse, nous emploierons le terme d'*élasticité classique* pour désigner l'élasticité linéaire de premier gradient et le terme de *non standard* pour désigner des phénomènes élastiques qui ne peuvent pas être pris en compte avec un milieu homogène équivalent construit sur la base d'un milieu de Cauchy.

Une construction de la théorie élastique linéaire de second gradient, à partir du principe du minimum de l'énergie potentielle, est proposée en annexe C.

1. Les théories non locales, d'une nature radicalement différente, sont volontairement écartées de cette présentation succincte.

En s'inscrivant dans cette démarche *Materials-by-design* nous arrivons naturellement à la question suivante : Pouvons-nous obtenir des effets élastiques typiques de milieux généralisés avec des milieux architecturés dotés de microstructures particulières ?

Jusqu'à présent, cette question a surtout été abordée en dynamique et essentiellement pour l'élasticité de second gradient. Citons en particulier les propriétés dispersives, typiques d'un milieu de second gradient élastique, mises en évidence par [Rosi et Auffray, 2016]. La dynamique est un cadre privilégié pour l'obtention d'effets élastiques de second gradient. En effet, il suffit dans ce cas que la longueur d'onde soit comparable aux longueurs intrinsèques du milieu homogène équivalent de second gradient pour que des effets élastiques de second gradient soient visibles. Au contraire, en statique, les longueurs intrinsèques doivent être comparables à la taille caractéristique de la structure pour que ces effets élastiques non standards soient visibles à l'échelle macroscopique. Il y a néanmoins un résultat théorique qui laisse entrevoir la possibilité d'obtenir des comportements élastiques non standards en statique. Camar-Eddine et Seppecher [2003] ont en effet montré par une preuve mathématique la possibilité d'aboutir, avec des matériaux architecturés, à une large variété de comportements élastiques dont certains correspondent à des milieux généralisés. Il s'agit cependant uniquement d'une preuve d'existence et celle-ci ne s'accompagne pas d'une méthode permettant de concevoir de tels matériaux architecturés. En ce qui concerne l'élasticité de second gradient, en statique, des études mathématiques de milieux architecturés à fort contraste ont montré la possibilité d'obtenir lors du passage à la limite des effets élastiques de second gradient. Toutefois, les hypothèses utilisées pour ces travaux sont fortes et, de ce fait, éloignées de ce que l'on peut réaliser lors d'expérimentations. Il y a extrêmement peu d'exemples pratiques de milieux architecturés qui donnent lieu à des effets de second gradient pour certaines sollicitations statiques. La majorité des travaux réalisés à ce sujet concernent une microstructure particulière : le pantographe en treillis.

Nous pouvons identifier deux verrous scientifiques qui freinent la synthèse et l'étude de matériaux architecturés au comportement élasto-statique non standard :

- Le premier est le manque de schémas d'homogénéisation adéquats, de portée générale, permettant de faire le lien entre une microstructure périodique quelconque et le comportement élastique macroscopique représenté à l'aide d'un milieu généralisé. Nous emploierons le terme de *schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur*. Contrairement au cas de l'élasticité classique, aucune preuve mathématique de convergence d'un schéma d'homogénéisation, valable dans un cadre suffisamment général, n'a été établie jusqu'à présent. Des approches discrètes ont été proposées [Seppecher *et al.*, 2011; Abdoul-Anziz et Seppecher, 2018b; dell'Isola *et al.*, 2016], mais celles-ci ne peuvent pas être appliquées sur une microstructure quelconque. Dans une autre famille d'approches, une approche basée sur les développements asymptotiques et permettant de définir un milieu homogène équivalent de second gradient, ou de gradient d'ordre supérieur, a également été proposée [Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000]. Cependant, le cadre de travail nécessaire pour mener à bien ce travail théorique est extrêmement restrictif.

- Le second est l'absence, jusqu'à encore récemment, de procédures d'optimisation permettant la synthèse de microstructures dans le cadre des comportements élastiques non standards. Ce second verrou est en partie lié au premier. Des procédures d'optimisation topologiques requièrent un schéma d'homogénéisation adapté au comportement non standard recherché et pouvant être appliqué à une microstructure décrite comme un milieu continu classique composé d'une ou deux phases et de vide.

C'est dans ce paysage scientifique que s'inscrivent ce doctorat et le projet de recherche ArchiMathHOS² (Architected materials designed with higher-order homogenization), financé par l'Agence Nationale de la Recherche, dont il fait partie.

I.2 Projet ArchiMathHOS

Le projet ArchiMathHOS ambitionne d'explorer la variété des comportements élastiques typiques de milieux généralisés que l'on peut obtenir, en statique, avec des matériaux architecturés. À cette fin, une partie des travaux réalisés dans le cadre de ce projet ont pour objectif de lever les deux verrous scientifiques identifiés précédemment.

Les parties prenantes sont, d'une part, trois laboratoires de mécanique théorique et appliquée (Laboratoire Navier³, LEMTA⁴, MSME⁵), d'autre part, deux laboratoires de mathématiques (Laboratoire IMATH⁶, IECL⁷) et, enfin, un laboratoire brésilien d'analyse numérique (LNCC⁸). La pluridisciplinarité des partenaires permet une complémentarité des expertises scientifiques.

Les travaux de recherche réalisés dans le cadre de ce projet s'articulent en trois volets :

- L'élaboration et l'étude de schémas d'homogénéisation d'ordre supérieur dans le contexte des petites perturbations ;
- Le développement de procédures d'optimisation topologique permettant la synthèse de nouveaux matériaux architecturés dotés d'un comportement élastique non standard ;
- L'étude dans le cadre des grandes transformations de matériaux architecturés au comportement élastique non standard, par homogénéisation et expérimentalement.

Ce doctorat contribue au premier volet.

I.3 Objectifs du doctorat

Nous proposons dans ce manuscrit d'étudier la problématique suivante : **Pouvons-nous prévoir, par homogénéisation, et obtenir en pratique des comportements élastiques de second gradient avec certaines microstructures planes, dotées de fines jonctions ?**

2. <https://anr.fr/Project-ANR-17-CE08-0039>

3. UMR 8205, <https://navier-lab.fr>

4. Laboratoire Énergies & Mécanique Théorique et Appliquée, UMR 7563, <https://lemta.univ-lorraine.fr/>

5. Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208, <http://msme.u-pem.fr>

6. Institut de Mathématiques de Toulon, EA 2134, <http://imath.fr/>

7. Institut Élie Cartan de Lorraine <https://iecl.univ-lorraine.fr/>

8. Laboratório Nacional de Computação Científica, <https://www.lncc.br>

Comme cela a été présenté précédemment, la majorité des travaux concernant des matériaux architecturés qui donnent lieu à un comportement élastique de second gradient ont été réalisés pour des microstructures en treillis. Nous proposons d’explorer une autre voie : l’emploi de microstructures planes comportant de fines jonctions et des parties vides. Ce choix est motivé par le fait que ces fines jonctions permettent d’aboutir à un comportement élastique de premier gradient dégénéré. Cela signifie qu’il existe au moins un mode de déformation macroscopique à très faible énergie, lorsque cette déformation est uniforme. Cette dégénérescence est un facteur favorable, si ce n’est une condition nécessaire, pour l’obtention d’effets élastiques de second gradient nettement visibles à l’échelle macroscopique.

Un schéma d’homogénéisation d’ordre supérieur est nécessaire pour détecter la capacité d’une microstructure à engendrer des effets de second gradient marqués et, auquel cas, définir un milieu homogène équivalent de second gradient. Au cours de cette thèse, un schéma d’homogénéisation d’ordre supérieur a été élaboré, implémenté et validé à l’aide d’études numériques. Dans ce schéma, basé uniquement sur l’hypothèse de séparation d’échelles, la microstructure est décrite comme un solide élastique, comportant éventuellement plusieurs phases et des vides. Ainsi, cette approche d’homogénéisation peut être appliquée pour une large variété de microstructures. De plus, un tel outil numérique est nécessaire pour la mise en œuvre de la procédure d’optimisation topologique développée par d’autres membres du projet ArchiMathOS.

Ce doctorat comporte également un volet expérimental, indispensable pour que l’étude de ces matériaux architecturés particuliers soit complète. L’objectif principal est de s’assurer que l’on peut effectivement obtenir en pratique les effets élastiques non standards prévus par l’homogénéisation, pour certaines de ces microstructures. Il y a en effet un fort risque que ce ne soit pas le cas, étant donné que ces microstructures comportant de fines jonctions peuvent être très sensibles aux imperfections (écart à la géométrie nominale) ainsi qu’aux non-linéarités. Nous souhaitons également développer une méthode de caractérisation permettant de mesurer la raideur homogénéisée associée à l’effet de second gradient mis en évidence. Un dispositif expérimental original a donc été conçu et réalisé. Les méthodes de mesure de champs cinématiques [Grédiac *et al.*, 2013] sont des outils particulièrement appropriés pour de tels essais mécaniques, car elles permettent de capter l’hétérogénéité des champs cinématiques. Nous emploierons une méthode de corrélation d’images numériques [Bornert *et al.*, 2013]. Enfin, pour vérifier le caractère prédictif du schéma d’homogénéisation, les raideurs homogénéisées de premier et de second gradient prévues sont comparées aux raideurs mesurées.

En résumé, les travaux menés permettent de répondre partiellement aux trois objectifs définis au début de ce doctorat :

- Élaborer, implémenter et valider des schémas d’homogénéisation d’ordre supérieur pour l’élasticité linéarisée (HPP);
- Explorer l’espace des comportements élastiques non standards que l’on peut obtenir avec différentes familles de microstructures (microstructures planes et, éventuellement,

inspirées d'origami);

- Mettre au point un dispositif expérimental et une méthode de caractérisation permettant de mettre en évidence des comportements élastiques non standards et de mesurer les raideurs correspondantes.

I.4 Organisation du manuscrit

La suite de ce manuscrit s'organise en trois chapitres.

Le chapitre II présente le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur proposé et le valide au moyen d'une étude numérique. Ce chapitre correspond à un article [Durand *et al.*, 2022] publié dans le *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Il est par conséquent rédigé en anglais, à l'inverse du reste du manuscrit, afin d'éviter une traduction superflue et de ne pas altérer le document original.

Le schéma d'homogénéisation proposé, valable dans le contexte des petites perturbations, permet de détecter si une microstructure peut donner lieu à des effets de second gradient visibles à l'échelle macroscopique pour certaines sollicitations statiques. Afin de prendre en compte ces phénomènes élastiques non standards dans le modèle macroscopique, nous construisons un milieu homogène équivalent de second gradient.

Cette démarche d'homogénéisation est appliquée à une première microstructure, dotée de fines jonctions, qui est inspirée du mécanisme de pantographe. Cela permet d'illustrer le principe de cette approche et montre que l'on peut obtenir, avec cette microstructure, un matériau architecturé très sensible à certains gradients de déformation macroscopique.

Dans un second temps, ce chapitre expose une étude numérique dont l'objectif est de valider ce schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur. Nous utilisons pour cela le cas de la microstructure pantographique et un problème de structure qui est tel que les effets de second gradient apparaissent. Les deux solutions approchées obtenues avec les modèles homogénéisés standard et de second gradient sont comparées à une solution de référence obtenue par un calcul complet par éléments finis. Le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur conduit à de très faibles erreurs d'approximation, mesurées en normes L_2 pour les champs de déplacement et de déformation, contrairement à l'homogénéisation classique de premier gradient. Nous constaterons également que la qualité de la prédiction dépend peu de la position relative de la microstructure par rapport au bord de la structure.

Ce chapitre se termine par une étude de la validité de l'hypothèse des petites perturbations, à l'intérieur de la microstructure, dans le cas de la microstructure pantographique. Nous verrons qu'un choix judicieux de la finesse des jonctions permet de conserver des effets visibles à l'échelle macroscopique lorsque la taille de la cellule tend vers 0 tout en limitant l'intensité des déformations dans la microstructure.

Ce schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur est implémenté dans le package Python HO_homog [Durand et Lebée, 2020]. Maintenant que cette approche est validée, nous avons

un outil adéquat pour étudier d'autres microstructures en s'intéressant à d'éventuels effets de second gradient.

Le chapitre III est consacré à l'étude numérique de deux microstructures en apparence similaires. Ces microstructures sont constituées de carrés ou de triangles équilatéraux reliés par de fines jonctions et ont la particularité d'engendrer un comportement élastique de premier gradient dégénéré : à l'échelle macroscopique, la dilatation isotrope est un mode mou. Elles sont donc de bonnes candidates pour l'obtention d'un milieu architecturé sensible au gradient de dilatation. Nous appliquerons le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur pour chacune de ces deux microstructures, en faisant varier leurs paramètres géométriques. Comme la seconde microstructure n'est pas centro-symétrique, une extension de l'approche proposée dans le chapitre II au cas des microstructures non centro-symétriques est présentée. Nous constaterons que ces deux microstructures génèrent des comportements macroscopiques grandement différents : des effets de second gradient marqués sont prévus uniquement pour la première microstructure. Nous verrons que l'absence d'effets de second gradient dans le cas de la seconde microstructure est une conséquence du couplage entre les modes raides de premier gradient et l'élasticité de second gradient.

Enfin, le chapitre IV présente les travaux expérimentaux réalisés. Comme expliqué précédemment, l'obtention en pratique des comportements élastiques non standards prévus par homogénéisation est une question fondamentale. Dans un premier temps, nous étudierons une bande pantographique extraite de la microstructure présentée au chapitre II et nous nous intéresserons à sa sensibilité au gradient d'élongation. Deux essais de traction sont réalisés avec des conditions aux limites particulières. La conception et la fabrication des éprouvettes seront d'abord abordées puis nous vérifierons, à l'aide de ces deux essais, que cette microstructure permet d'obtenir en pratique un comportement élastique de second gradient. Nous décrirons ensuite la méthode proposée pour mesurer, à partir de ces deux essais, la raideur effective en extension et la raideur effective de second gradient associée au gradient d'élongation. Afin de vérifier la pertinence de cette méthode, son biais systématique sera estimé à l'aide d'une expérience numérique. Enfin, cette méthode sera mise en œuvre pour la poutre pantographique. Nous constaterons que l'écart entre les raideurs prévues par le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur et les raideurs mesurées est très faible. Cela nous permettra de valider le caractère prédictif de ce schéma d'homogénéisation.

Dans un second temps, nous étudierons une autre microstructure générée par optimisation topologique. Il s'agit du volet expérimental de travaux réalisés en collaboration dans le cadre du projet ArchiMatHOS, avec notamment Valentin Calisti [Calisti, 2018]. La fonction objectif utilisée pour l'optimisation topologique correspond à une forte sensibilité à un gradient d'extension. Nous tâcherons de vérifier que cette microstructure permet en pratique d'obtenir le comportement de second gradient recherché. Pour cela, la méthode d'essais introduite précédemment sera mise en œuvre pour une bande architecturée dotée de cette microstructure. Cette collaboration permet de démontrer la possibilité d'obtenir, avec cette

procédure d'optimisation, des microstructures qui donnent en pratique des effets élastiques de second gradient.

Chapitre II

Schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur pour l'élasticité de second gradient

II.1	Introduction	10
II.2	The continuous pantographic metamaterial	13
II.2.1	The microstructure	13
II.2.2	Emergence of strain-gradient effects	14
II.3	Higher-order homogenization from the two-scale asymptotic expansion	16
II.3.1	The two-scale asymptotic expansion	16
II.3.2	Resolution of the first auxiliary problems and resulting asymptotic series	18
II.3.3	Deriving equivalent continua from the two-scale asymptotic expansions	21
II.4	Homogenization of the pantographic material	23
II.4.1	First-order auxiliary problem	24
II.4.2	Second-order auxiliary problem	26
II.4.3	Strain-gradient model for the pantographic material	30
II.5	Comparison with full-scale simulations and empirical error estimates	31
II.5.1	Benchmark problem	31
II.5.2	Reference solution by full-scale numerical simulation	32
II.5.3	Approximate solutions from homogenization	32
II.5.4	Error measures	34
II.5.5	Influence of the relative position of the microstructure	34
II.5.6	Influence of the scale separation	35
II.6	Controlling displacement and strain concentration inside thin junctions	38
II.6.1	Prediction of the homogenized model	38
II.6.2	Maximum displacement and strain in full scale simulations	40
II.6.3	Asymptotic regime ensuring bounded strains and displacements	41
II.7	Conclusion	42

La partie des travaux de thèse abordée dans ce chapitre a fait l’objet d’un article publié dans le *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* [Durand *et al.*, 2022] :

DURAND, B., A. LEBÉE, P. SEPPECHER et K. SAB (2022). Predictive strain-gradient homogenization of a pantographic material with compliant junctions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, p. 104773. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104773>

Nous reprenons pour ce chapitre le contenu de l’article publié, en conservant la langue anglaise afin de ne pas dénaturer le document publié.

II.1 Introduction

Architected materials are heterogeneous materials with a designed microstructure, most often periodic. Their macro-scale behaviour emerges rather from the microstructure than from the properties of the constituent materials. Recent advances in manufacturing techniques, such as additive manufacturing processes, raised considerable interest in these materials as they provide solutions to the demand for better mechanical performances in engineering applications. Indeed, even in elastostatics, a theoretical result shows that a vast variety of macro-scale mechanical behaviours may be obtained from an arbitrary mixture of materials [Camar-Eddine et Seppecher, 2003]: not only the classical first-gradient elasticity theory but also generalized continua [Cosserat et Cosserat, 1909; Mindlin, 1964] or metamaterials [Kadic *et al.*, 2019]. Hence, a new framework has emerged, called *material by design*, which consists in designing the microstructure of an architected material with design tools such as topology optimization, to obtain the desired behaviour at the macroscopic scale. This framework relies deeply on predictive up-scaling methods relating the microscopic properties of the architected material to its overall mechanical behaviour. In these methods, the microstructure may be modelled either as a discrete mechanical system or as a continuous medium. However, following a material by design framework, we focus here on media that are continuous at the microscopic scale with a reasonable volume fraction. They are thus easy to fabricate and can result from topology optimization.

Up-scaling methods for a continuous medium leading to first-gradient elasticity are now well established in statics as well as in dynamics. They are based on the leading order of the two-scale asymptotic expansion and convergence results have been proved [Jikov *et al.*, 1994]. Hence architected material properties have been widely explored and optimized in this framework (see [Bendsøe et Sigmund, 2004; Amstutz *et al.*, 2010; Wang *et al.*, 2014; Zhu *et al.*, 2017; Thomsen *et al.*, 2018] among many others). This is not the case of up-scaling methods for generalized continua which were derived either from discrete microstructures or, for continuous microstructures, still require *ad hoc* hypothesis or specific stiffness-contrast assumptions.

In the present paper, we focus on the linear strain-gradient elasticity theory which, unlike first-gradient theory, can take into account fast variations of the strain fields. In dynamics, this is mandatory when the wavelength λ becomes very small compared to the

overall size of the body T . In such a case, boundary layers may be neglected and strain-gradient elasticity brings out some dispersive properties of the architected material as illustrated for instance in [Rosi et Auffray, 2016]. The natural framework for investigating wave propagation in architected materials is Bloch wave decomposition [Lee et Yang, 1973; Willis, 1980; Auriault et Bonnet, 1985; Nassar et al., 2015; Vondřejc et al., 2017]. Its close link with the two-scale asymptotic expansion (with respect to the small parameter $\eta = t/T$ characteristic of the scale separation, where t is the typical size of the unit cell) was pointed out and a strain-gradient up-scaling method capturing acoustic branches of the dispersion diagram was suggested as well as higher-order convergence justified when η tends to zero [Santosa et Symes, 1991; Allaire et al., 2016]. Hence, topology optimization in this framework has already been performed [Bonnet et Cornaggia, 2017; Allaire et Yamada, 2018; Bonnet et al., 2018; Cornaggia et Bellis, 2020].

The case of elastostatics investigated in this paper is more challenging. Indeed, without a wavelength to compare with, size effects in statics must be compared to the overall size T of the elastic body and are meant to vanish when T tends to infinity. Hence, strain-gradient effects are classically presented as higher-order corrections with a small typical intrinsic or internal length. In this direction, numerous up-scaling methods leading to an effective strain-gradient continuum were suggested. Following historical contributions from Mindlin [1964] and Germain [1973b] a family of approaches is based on quadratic periodic boundary conditions applied to the unit cell [Gologanu et al., 1997; Kouznetsova et al., 2002; Auffray et al., 2010]. These methods are based on the intuition that the unit cell may be curved when strain gradients are significant. However, they present inconsistencies which were reviewed by Monchiet et al. [2020] who also pointed out a relation with the second family of up-scaling methods based on higher orders of the two-scale asymptotic expansion. Indeed, as for dynamics, higher-order contributions terms involve higher gradients of the macroscopic strain [Bakhvalov et Panasenko, 1989; Gambin et Kröner, 1989; Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996; Boutin, 1996]. A consistent variational derivation of higher-gradient theories was suggested by Smyshlyaev et Cherednichenko [2000] and a higher-order convergence result was obtained with very specific assumptions on the boundary conditions and on the averaging method. This result has not been extended to more general boundary conditions and strain-gradient effects seem to remain very limited for the investigated microstructures [Peerlings et Fleck, 2001; Ameen et al., 2018].

This motivated another direction for designing microstructures presenting significant effective strain-gradient effects. Indeed, when the first-gradient effective constitutive law is degenerate, there exists some zero-energy, or floppy, deformation modes with a non-vanishing strain. In this case, strain-gradient elastic energy may become preponderant. This requires breaking out of the classical assumptions in homogenization methods which always lead to a non-degenerate strain energy. To that aim, two approaches were followed. First, mechanisms, that are discrete microstructures with perfect junctions, were considered: with a well-chosen configuration of perfect, or zero-energy, junctions, it is possible to design microstructures with floppy strain modes and derive a strain-gradient homogenized model

[Alibert *et al.*, 2003; dell'Isola *et al.*, 2016]. However, this requires an educated guess of the microstructure which is also rather difficult to fabricate [dell'Isola *et al.*, 2019]. Second, one has to assume specific stiffness contrast and geometry for the continuous microstructure [Pideri et Seppecher, 1997; Abdoul-Anziz et Seppecher, 2018a,b; Abdoul-Anziz *et al.*, 2021; Coutris *et al.*, 2020]. Again, this leads to a rigorous justification of strain-gradient continua in elastostatics which was validated in [Jakabčín et Seppecher, 2020] but is specific to each microstructure and not suitable for topology optimization.

The main objective of this paper is to assess the prediction of the higher-order effective behaviour given by the two-scale asymptotic expansion applied to a continuous microstructure featuring significant strain-gradient effects. To that aim, we consider the pantographic microstructure from Abdoul-Anziz et Seppecher [2018a] simply made of triangles connected by compliant junctions (Figure II.1). Indeed, slender bars investigated in [Jakabčín et Seppecher, 2020] are strongly subject to buckling at the microscopic level and thus are not suitable for an experimental study nor for practical use. On the contrary, it is expected that considering solid triangles will mitigate this non-linear effect. Indeed, several metamaterials using compliant junction were already investigated experimentally and mostly modelled as discrete microstructures [Bertoldi *et al.*, 2017; Celli *et al.*, 2018; Zheng *et al.*, 2021; Czajkowski *et al.*, 2021]. Nevertheless, the asymptotic behaviour when junctions are very thin was not fully explored through numerical homogenization and no higher-order convergence result is established for this class of microstructure, motivating the present study.

First, we investigate in Section II.2 the behaviour of the architected material that we consider when connections between triangles become thin and we show that first-gradient elasticity is not able to correctly predict the homogenized behaviour. Then, in Section II.3, the higher-order homogenization scheme based on the asymptotic expansion is recalled. As the contrast is here infinite and the shape of the microstructure is evolving with thinner and thinner junctions, the considered structure falls out of the classical assumptions in homogenization. The strain-gradient homogenized stiffness tensor given by the higher-order homogenization corresponds to different intrinsic lengths. When the strain does not belong to a degenerate direction of the first-gradient homogenized stiffness tensor, these lengths are extremely small (of the order of the size of the periodic cell) and, at the macroscopic level, the effect of such strain-gradient terms can be ignored. On the contrary, this effect becomes important, maybe preponderant, when the strain belongs to a degenerate direction of the first-gradient homogenized stiffness tensor. Hence we project the strain-gradient homogenized stiffness tensor in these directions (Section II.4). This presents two advantages. First, the model that we derive is indeed a macroscopic one as it does not try to describe the equilibrium solution at the scale of the unit cell. Secondly, the model leads to well-posed problems, which is not always the case when the whole strain-gradient tensor is retained [Allaire *et al.*, 2016; Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000]. In Section II.5, we perform extensive numerical simulations to compare the strain-gradient model and the first-gradient model to a numerical reference solution. The comparisons reveal the very good predictions of the strain-gradient model. Finally, in Section II.6, with an adequate choice of scalings for the

scale separation and the junction thinness, we observe that strains as well as displacements in compliant junctions remain bounded while preserving macroscopic strain-gradient effects.

II.2 The continuous pantographic metamaterial

II.2.1 The microstructure

The proposed pantographic metamaterial is a bi-dimensional body with a periodic microstructure. This microstructure is composed of identical triangles and of rhombi connected at their vertices by thin junctions, as shown in Figure II.1a. It is made of a homogeneous isotropic linear elastic material. We denote \mathbf{c} the stiffness tensor of this constituent material. The remaining space is empty.

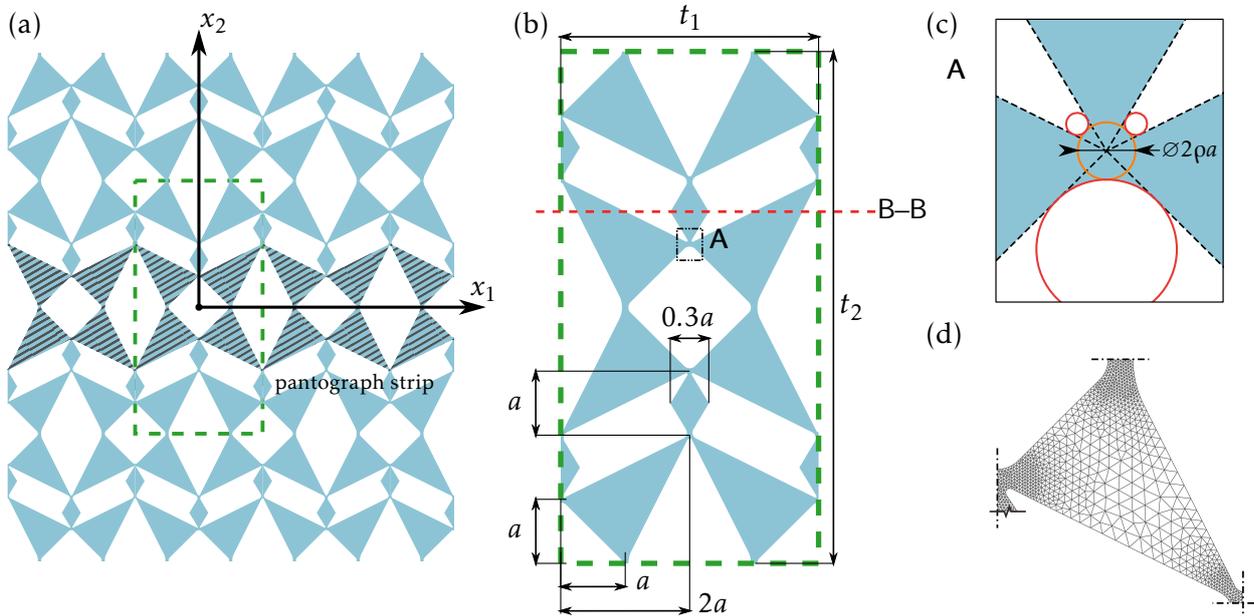


Figure II.1 – (a) The periodic microstructure (b) Geometric configuration of the unit cell (c) Geometric construction of the junctions (d) Illustration of mesh density around the junctions.

The chosen unit cell used for the computation of the effective behaviour is rectangular and its geometry is presented in Figure II.1b. The geometry of the microstructure depends on two parameters: the length a and the dimensionless junction thinness ρ . The dimensions of the unit cell in the global coordinate system are $t = t_1 = 4a$ and $t_2 = 8a$. Hence, t is the typical size of the unit cell and $\tau = t_2/t_1 = 2$ is the aspect ratio of the unit cell. The area fraction of solid with respect to the unit cell area $t_1 t_2$ is denoted ϕ .

The junction geometry is defined as follows: a circle of radius ρa is centred at the common vertex of adjacent triangles and rhombi (orange circle in Figure II.1c); then each void angle sector is smoothed with a circle (drawn in red in Figure II.1c) tangent to both edges and the orange circle. The parameter ρ , representative of the junction thinness, has a significant influence on the behaviour of the metamaterial. Indeed, the shape of the junctions makes

them much more compliant to bending moment than to traction or shear forces. It is thus expected that they almost behave like revolute joints when ρ is small enough.

More precisely, the unit-cell configuration allows macroscopic strains with low energy called floppy modes. First, the arrangement of triangles as horizontal strips in Direction 1 allows almost free stretch in this direction. This mode is denoted pantograph mode in reference to the classical mechanism. One pantograph strip is hatched on Figure II.1a. Secondly, rhombi which connect vertically pantograph strips allow an almost free horizontal relative motion in Direction 1 between all strips. These floppy modes were already investigated for structures containing perfect junctions [Alibert *et al.*, 2003] and Γ -convergence results were obtained when the unit cell is the assembly of slender beams [Abdoul-Anziz, 2018; Abdoul-Anziz et Seppecher, 2018b].

II.2.2 Emergence of strain-gradient effects

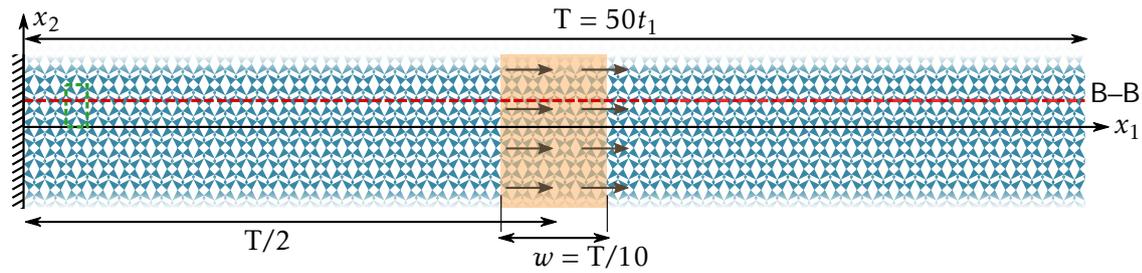


Figure II.2 – 2D linear elastic boundary value problem for the pantographic metamaterial. The domain is periodic in Direction 2.

We consider a 2D rectangular body that is clamped at $x_1 = 0$ and free at $x_1 = T$ in plane-strain linear elasticity (Figure II.2). In Direction 2, periodic boundary conditions are applied along the lateral boundaries. The sample is made of the pantographic metamaterial, with 50 unit cells in the length T . It is subjected to a load $\tilde{\underline{f}}$ uniformly distributed on a central strip of the elastic body. More precisely $\tilde{\underline{f}} = \tilde{f} \underline{e}_1$ for $\frac{T}{2} - \frac{w}{2} < x_1 < \frac{T}{2} + \frac{w}{2}$, with $w = \frac{T}{10}$.

Our reference displacement solution $\tilde{\underline{u}}^{\text{fs}}$ is obtained using a full-scale numerical simulation, i.e. using a standard FEM formulation and a mesh that represents the whole microstructure accurately. Full details of the finite-element simulations are given in Section II.5.2. They are performed for a series of values of the junction thickness ρ in the interval $[10^{-3}, 10^{-1}]$.

To check whether a standard homogenized model based on a first-gradient continuum is able to describe this equilibrium from the macroscopic point of view, we derive, in a closed form, the solution of the corresponding boundary value problem. The standard homogenized stiffness tensor \underline{C}^ρ will be computed in Section II.3. Owing to symmetries, the homogenized displacement in Direction 2 (\tilde{U}_2) vanishes and the horizontal displacement \tilde{U}_1 is independent

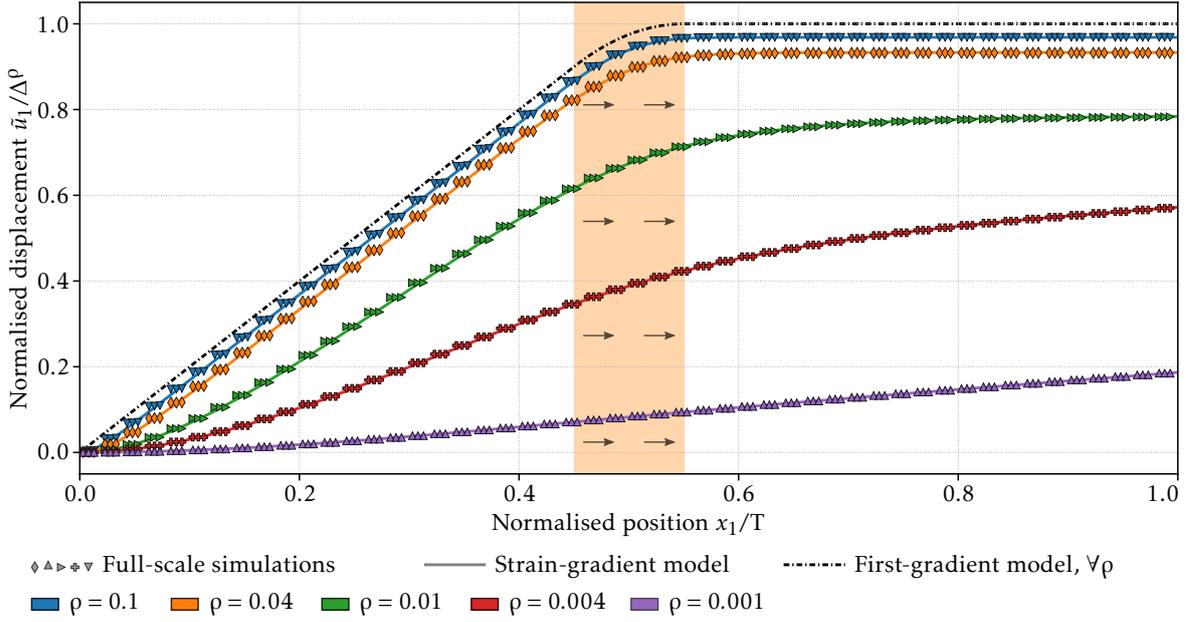


Figure II.3 – Distribution of the longitudinal displacement \tilde{u}_1 along the B–B line (Figures II.1b and II.2) for several ρ values. For each full-scale simulation (markers), the first-gradient (dashed line) and strain-gradient (solid lines) homogenized solutions are also plotted.

of x_2 . It can be expressed as follows:

$$\tilde{U}_1(x_1) = \begin{cases} \Delta^\rho \frac{2x_1}{T} & \text{for } 0 \leq x_1 \leq \frac{T-w}{2}, \\ \Delta^\rho \left(1 - \frac{1}{T-w} \left(x_1 - \frac{T+w}{2} \right)^2 \right) & \text{for } \frac{T-w}{2} \leq x_1 \leq \frac{T+w}{2}, \\ \Delta^\rho & \text{for } \frac{T+w}{2} \leq x_1 \leq T, \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

where $\Delta^\rho = \frac{\phi f w T}{2C_{1111}^\rho}$ is the displacement on the right side of the plate ($x_1 \geq \frac{T+w}{2}$) predicted by the first-gradient homogenized model. Note that, when the junction thinness ρ decreases, the homogenized stiffness C_{1111}^ρ decreases and consequently the value of Δ^ρ increases. Anyway, the function \tilde{U}_1/Δ^ρ is independent of it and consequently of ρ .

Figure II.3 shows the profile along a horizontal line of \tilde{U}_1/Δ^ρ and compares it to the horizontal displacement $\tilde{u}_1^{\text{fs}}/\Delta^\rho$ obtained by the full-scale simulation and normalized with the homogenized first-gradient displacement Δ^ρ computed for each value of ρ .

It appears that the first-gradient homogenized model leads to an overestimation of the horizontal displacement \tilde{u}_1^{fs} . The discrepancy between the homogenized displacement \tilde{U}_1 and the full-scale displacement \tilde{u}_1^{fs} is visible even for rather thick junctions and becomes very significant when $\rho \rightarrow 0$. It also appears that this discrepancy cannot be corrected by simply correcting the value of C_{1111}^ρ given by standard homogenization theory. Indeed the profiles obtained by the full-scale simulation are not constant in the free part ($x_1 \geq \frac{T+w}{2}$) of the plate and are thus fundamentally different from the profile given by (II.1).

The reason for the failure of the classical periodic homogenization when junctions are getting thinner is the following: the first-gradient homogenized stiffness tensor \mathbf{C}^ρ becomes

ill-conditioned as $C_{1111}^0 \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$. Hence, higher-order effects, related to components of the strain gradient, become significant. Whereas classical homogenization predicts larger and larger displacement Δ^ρ , the actual displacement remains limited because the clamped boundary condition prevents the relative motion of the triangles inside the microstructure.

Ahead of our development, we also plot in Figure II.3 the macro-scale displacement that we will obtain using the equivalent homogeneous strain-gradient medium derived in Section II.4. It appears clearly that it describes in a very accurate way the equilibrium of the considered architected material from the macroscopic point of view.

II.3 Higher-order homogenization from the two-scale asymptotic expansion

In the present section, the formal two-scale asymptotic expansion procedure is briefly recalled for a microstructure made of a homogeneous linear elastic material and voids. The geometry of the unit cell is fixed. The expansion is carried out up to the second order and the derivation of a strain-gradient homogenized energy is recalled.

II.3.1 The two-scale asymptotic expansion

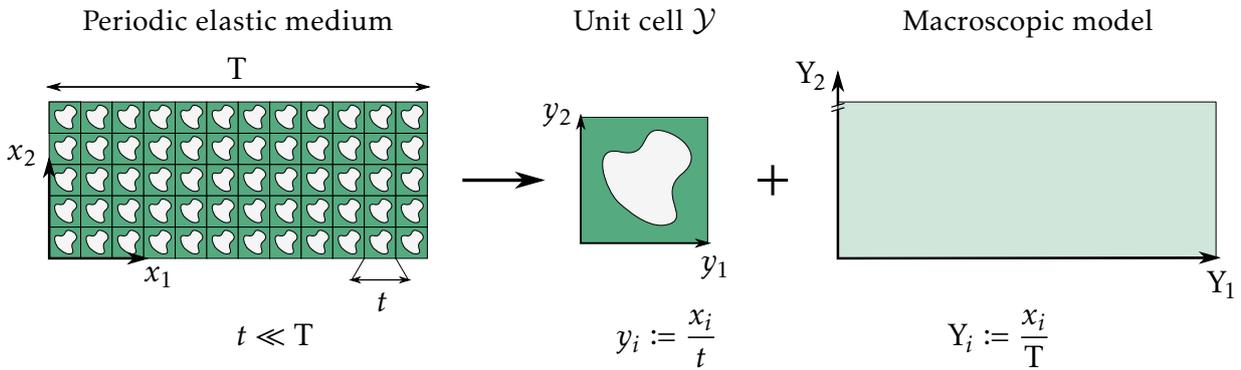


Figure II.4 – Schematic representation of the double-scale description use for the periodic medium. T is the typical size of the and is related to the macroscopic scale while t is the typical size of the unit cell and is related to the microscopic scale. Two independent space variables are introduced : the microscopic one \underline{y} and the macroscopic one \underline{Y} .

The periodic medium is defined on a 2D connected domain of typical size T obtained by the repetition of a unit cell of typical size t , as seen in Figure II.4. The repetitive unit cell is constituted of a linear elastic material and voids. Let us readily work in a dimensionless framework by introducing the space variable $\underline{Y} = \underline{x}/T$ and the relative size of the unit cell $\eta = t/T$. We also divide the displacement field $\underline{\tilde{u}}$ by T in order to work with a dimensionless field \underline{u} . We assume that the displacement is prescribed on the external boundary $\partial\Omega^{\text{ext}}$, whereas the boundary $\partial\Omega^{\text{int}}$ of the voids is traction-free. The equilibrium displacement under the action of a body force $\underline{f} = T\tilde{\underline{f}}$ concentrated on the solid part of the domain satisfies

the boundary value problem

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{div}}(\boldsymbol{\sigma}) + \underline{\mathbf{f}} = 0, & \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Omega, \\ \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega^{\text{ext}} & \text{and} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega^{\text{int}}, \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

where $\underline{\mathbf{div}}$ stands for the divergence operator, ∇^s is the symmetric part of the gradient operator and $\underline{\mathbf{n}}$ denotes the normal to the boundary $\partial\Omega^{\text{int}}$ of the voids.

Notations All developments are made in a fixed Cartesian frame endowed with an orthonormal basis $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2)$. Hence, it is useful to introduce the following tensorial notations. Vectors $\underline{\mathbf{X}}$ are underlined and higher-order tensors \mathbf{X} are simply in boldface. When dealing with components, Greek indices $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2$ are used and Einstein's summation convention is followed for repeated indices. The transpose operation $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}^T$ is applied to any order tensors \mathbf{X} by reversing the indices order as follows: $(\mathbf{X}^T)_{\alpha\beta\dots\psi\omega} = X_{\omega\psi\dots\beta\alpha}$. Four symbols are defined: (\cdot) , $(:)$, $(\dot{:})$ and $(\ddot{:})$ for the contraction products on, respectively, one, two, three and four indices. By convention, closest indices are successively summed together in contraction products. For instance, contracting three times the six-order tensor \mathbf{X} with the third-order tensor \mathbf{Y} writes as: $(\mathbf{X} \dot{:} \mathbf{Y})_{\alpha\beta\gamma} = (X_{\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu} Y_{\mu\lambda\delta})$. Finally, Kronecker symbol is denoted $\delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta} = 1$ if $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ otherwise).

Double-scale representation As we intend to study the behaviour of the structure in the homogenized limit, that is when η becomes smaller and smaller, we parametrize Problem (II.2) and all associated quantities by η . Moreover we search for a double-scale representation of these quantities of the form $\underline{\mathbf{u}}^\eta(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}})$, $\boldsymbol{\sigma}^\eta(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^\eta(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}})$ where $\underline{\mathbf{y}}$ is the microscopic space variable defined by

$$y_1 = \frac{x_1}{t_1} - \left\lfloor \frac{x_1}{t_1} \right\rfloor = \frac{Y_1}{\eta} - \left\lfloor \frac{Y_1}{\eta} \right\rfloor \quad \text{and} \quad y_2 = \frac{x_2}{t_1} - \frac{t_2}{t_1} \left\lfloor \frac{x_2}{t_2} \right\rfloor = \frac{Y_2}{\eta} - \tau \left\lfloor \frac{Y_2}{\tau\eta} \right\rfloor. \quad (\text{II.3})$$

Here $\lfloor x \rfloor$ stands for the floor of x . Note that $\underline{\mathbf{y}}$ belongs to the rescaled cell $[0, 1] \times [0, 2]$, more precisely to the solid part \mathcal{Y} of it.

The body load $\underline{\mathbf{f}}$, concentrated on the solid part of the unit cell, is assumed to vary slowly. Hence its double-scale representation is assumed to be of the form $\frac{1}{\phi} \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{Y}})$. The normalization with the volume fraction of solid $\phi = \frac{|\mathcal{Y}|}{\tau}$ ensures that $\underline{\mathbf{F}}$ will correspond to the body load per unit surface of the macroscopic domain Ω .

The scale-separation assumption consists in assuming the independence of the two coordinate variables $\underline{\mathbf{Y}}$ and $\underline{\mathbf{y}}$. It enables us to rewrite the spatial derivation operator ∇^η under the form

$$\nabla^\eta = \nabla_{\underline{\mathbf{Y}}} + \frac{1}{\eta} \nabla_{\underline{\mathbf{y}}}. \quad (\text{II.4})$$

Expansion Treating η as a perturbation parameter, functions that represent mechanical quantities are written as formal power series of η :

$$\underline{\mathbf{u}}^{\eta}(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \underline{\mathbf{u}}^k(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}), \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\eta}(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \sum_{k=-1}^{\infty} \eta^k \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}), \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\eta}(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \sum_{k=-1}^{\infty} \eta^k \underline{\boldsymbol{\sigma}}^k(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{II.5})$$

Both these expressions as series and the expanded derivation operator (II.4) are incorporated in the equations of Problem (II.2). Then, each equation of this system is broken down into a set of equations where each one corresponds to the terms in η^p for a given power p . These elementary equations are then gathered to form a sequence of auxiliary boundary value problems defined on the solid part \mathcal{Y} of the rescaled unit cell. For each problem of order p , the main unknown is the displacement field $\underline{\mathbf{u}}^p$ while the field $\underline{\mathbf{u}}^{p-1}$ is considered as an input of the problem. The problems are nested and solved successively.

II.3.2 Resolution of the first auxiliary problems and resulting asymptotic series

Leading order displacement The case of the order $p = 0$ yields:

$$\begin{cases} \nabla_{\underline{\mathbf{y}}}^s \underline{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{0} & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \underline{\mathbf{u}}^0(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) & \text{periodic with respect to } \underline{\mathbf{y}}. \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

The structure Ω that we consider is connected. Hence the displacement $\underline{\mathbf{u}}^0$ is a rigid-body displacement. Owing to the periodicity condition, it is a global translation of the unit cell:

$$\underline{\mathbf{u}}^0(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{U}}^0(\underline{\mathbf{Y}}), \quad (\text{II.7})$$

which cannot be determined at this step.

First-order auxiliary problem The auxiliary problem of order $p = 1$ is a boundary value problem for the displacement $\underline{\mathbf{u}}^1$

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{div}}_{\underline{\mathbf{y}}} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \mathbf{0} & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \underline{\mathbf{c}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \underline{\mathbf{E}}^0 + \nabla_{\underline{\mathbf{y}}}^s \underline{\mathbf{u}}^1 & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\mathcal{Y}, \\ \underline{\mathbf{u}}^1(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) & \text{periodic with respect to } \underline{\mathbf{y}}, \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

where the macroscopic strain $\underline{\mathbf{E}}^0(\underline{\mathbf{Y}})$ is defined as

$$\underline{\mathbf{E}}^0 = \nabla_{\underline{\mathbf{Y}}}^s \underline{\mathbf{U}}^0. \quad (\text{II.9})$$

The solution $\underline{\mathbf{u}}^1$ of this linear boundary value problem is again defined up to an undetermined macroscopic translation, now denoted $\underline{\mathbf{U}}^1$. This solution depends linearly on the source term $\underline{\mathbf{E}}^0$ and thus can be expressed as the linear superposition

$$\underline{\mathbf{u}}^1(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{h}}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{E}}^0(\underline{\mathbf{Y}}) + \underline{\mathbf{U}}^1(\underline{\mathbf{Y}}) \quad (\text{II.10})$$

or, in terms of components,

$$u_\alpha^1(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{y}}) = h_{\alpha\beta\gamma}^1(\underline{\mathbf{y}}) E_{\gamma\beta}^0(\mathbf{Y}) + U_\alpha^1(\mathbf{Y}). \quad (\text{II.11})$$

The third-order displacement localization tensor \mathbf{h}^1 that relates $\underline{\mathbf{u}}^1$ to \mathbf{E}^0 is uniquely defined once its mean value¹ is fixed by

$$\langle \mathbf{h}^1 \rangle = \mathbf{0}, \quad (\text{II.12})$$

and can be determined by solving elementary elasticity problems on \mathcal{Y} . Clearly the associated strain also depends linearly on \mathbf{E}^0 and we have

$$\varepsilon^0(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{y}}) = \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^0(\mathbf{Y}). \quad (\text{II.13})$$

where the strain localization tensor \mathbf{a}^1 is the fourth-order tensor defined by

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 = \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\text{sym}} + \frac{1}{2} (\partial_{y_\beta} h_{\alpha\gamma\delta}^1 + \partial_{y_\alpha} h_{\beta\gamma\delta}^1) \quad \text{with} \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}). \quad (\text{II.14})$$

Finally we notice that the stress tensor is given by

$$\sigma^0(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{y}}) = \mathbf{c} : (\mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^0(\mathbf{Y})) = (\mathbf{c} : \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}})) : \mathbf{E}^0(\mathbf{Y}). \quad (\text{II.15})$$

Second-order auxiliary problem The auxiliary problem of order $p = 2$ reads

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\mathbf{div}}_{\underline{\mathbf{y}}} \sigma^1 + \underline{\mathbf{div}}_{\mathbf{Y}} \sigma^0 + \frac{1}{\phi} \mathbf{F} = \mathbf{0} & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \sigma^1 = \mathbf{c} : \varepsilon^1 & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \varepsilon^1 = \underline{\nabla}_{\mathbf{Y}}^s \underline{\mathbf{u}}^1 + \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{y}}}^s \underline{\mathbf{u}}^2 & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \sigma^1 \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\mathcal{Y}, \\ \underline{\mathbf{u}}^2(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{y}}) & \text{periodic with respect to } \underline{\mathbf{y}}. \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

We remark first that periodicity conditions imply that $\langle \underline{\mathbf{div}}_{\underline{\mathbf{y}}} \sigma^1 \rangle = \mathbf{0}$. Hence the mean value of the first equation reads

$$\underline{\mathbf{div}}_{\mathbf{Y}} \Sigma^0 + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \Sigma^0 = \langle \sigma^0 \rangle. \quad (\text{II.17})$$

From equation (II.15), we deduce

$$\Sigma^0 = \mathbf{C} : \mathbf{E}^0 \quad \text{with} \quad \mathbf{C} = \langle \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \rangle. \quad (\text{II.18})$$

Recalling that $\mathbf{E}^0 = \underline{\nabla}_{\mathbf{Y}}^s \mathbf{U}^0$, and using Dirichlet boundary conditions, we recover the classical first-order homogenized problem. This is a well-posed elasticity problem where the first-order homogenized constitutive equation (II.18) results from the determination of the first-order strain localization tensor \mathbf{a}^1 which has been determined in the previous step. The

1. The averaging operator is defined as $\langle f \rangle = \frac{1}{\phi} \int_{\mathcal{Y}} f(\underline{\mathbf{y}}) d\underline{\mathbf{y}}$. Note that $\langle 1 \rangle = \phi$.

homogenization procedure usually ends there. Let us however study more deeply the second-order auxiliary problem which, taking into account equations (II.17), (II.18) and (II.11), can be written

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\mathbf{div}}_{\underline{\mathbf{y}}} \boldsymbol{\sigma}^1 + \left(\mathbf{c} : \mathbf{a}^1 - \frac{1}{\phi} \mathbf{C} \right) : \mathbf{K}^0 = \mathbf{0} & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}^1 & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{p}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}^0 + \mathbf{E}^1 + \nabla_{\underline{\mathbf{y}}}^s \underline{\mathbf{u}}^2 & \text{on } \mathcal{Y}, \\ \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\mathcal{Y}, \\ \underline{\mathbf{u}}^2(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) & \text{periodic with respect to } \underline{\mathbf{y}}, \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

where $\mathbf{E}^1 = \nabla_{\underline{\mathbf{Y}}}^s \underline{\mathbf{U}}^1$ and \mathbf{K}^0 stand respectively for the macroscopic strain associated with the displacement field $\underline{\mathbf{U}}^1$ and for the strain gradient associated with the displacement field $\underline{\mathbf{U}}^0$: $\mathbf{K}_{\alpha\beta\gamma}^0(\underline{\mathbf{Y}}) = \partial_{Y_\gamma} E_{\alpha\beta}^0(\underline{\mathbf{Y}})$. The fifth-order tensor \mathbf{p}^1 is defined by

$$p_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}^1(\underline{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \left(\delta_{\beta\gamma} h_{\alpha\delta\epsilon}^1(\underline{\mathbf{y}}) + \delta_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta\epsilon}^1(\underline{\mathbf{y}}) \right). \quad (\text{II.20})$$

The solution $\underline{\mathbf{u}}^2$ of Problem (II.19) is again determined up to a global translation, now denoted $\underline{\mathbf{U}}^2(\underline{\mathbf{Y}})$. It depends linearly on its source terms \mathbf{K}^0 and \mathbf{E}^1 . Again, solving elementary problems uniquely determines a localization tensor $\mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}})$ satisfying $\langle \mathbf{h}^2 \rangle = 0$ and such that

$$\underline{\mathbf{u}}^2(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}^0(\underline{\mathbf{Y}}) + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^1(\underline{\mathbf{Y}}) + \underline{\mathbf{U}}^2(\underline{\mathbf{Y}}). \quad (\text{II.21})$$

We then deduce the existence of an associated strain localization tensor \mathbf{a}^2 such that

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) = \mathbf{a}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}^0(\underline{\mathbf{Y}}) + \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^1(\underline{\mathbf{Y}}). \quad (\text{II.22})$$

The formal series The induction may be pursued up to any higher order. Each auxiliary problem yielding a higher-order macroscopic displacement $\underline{\mathbf{U}}^p$ and new localization fields \mathbf{h}^p and \mathbf{a}^p related to higher gradients of the macroscopic displacements $\underline{\mathbf{U}}^0$. Following [Boutin \[1996\]](#), [Smyshlyaev et Cherednichenko \[2000\]](#) and others, it is convenient to introduce the series of the macroscopic displacement

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{Y}}) = \sum_{p=0}^{\infty} \eta^p \underline{\mathbf{U}}^p(\underline{\mathbf{Y}}) \quad (\text{II.23})$$

as well as the corresponding strain \mathbf{E} and strain-gradient \mathbf{K} .

This allows to rewrite formally the expansion of the displacement (II.5) as:

$$\underline{\mathbf{u}}^n(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) \simeq \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta^2 \mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}(\underline{\mathbf{Y}}) + \dots \quad (\text{II.24})$$

and the expansion of the strain as:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) \simeq \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \mathbf{a}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}(\underline{\mathbf{Y}}) + \dots \quad (\text{II.25})$$

II.3.3 Deriving equivalent continua from the two-scale asymptotic expansions

In this second part of the homogenization scheme, we focus on approximations of the macroscopic energy density. The idea is to truncate the series (II.24) and to compute the corresponding energy. Our aim is the second-order truncation but we first recall the results obtained for shorter truncations.

Zeroth order truncation The truncation of $\underline{\mathbf{u}}^\eta$ at order $p = 0$ corresponds to the approximation $\underline{\mathbf{u}}^\eta(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) \simeq \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{Y}})$. Using the expanded derivation operator (II.4), one easily gets that the associated strain is $\varepsilon^\eta \simeq \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}})$ and thus uniform on the unit cell. The corresponding strain energy average on the unit cell corresponds to the Voigt approximation of the homogenized strain energy

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon^\eta : \mathbf{c} : \varepsilon^\eta \right\rangle \simeq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \phi \mathbf{c} : \mathbf{E}, \quad (\text{II.26})$$

which is known to be a very rough approximation. The reason appears clearly when comparing approximation $\varepsilon^\eta \simeq \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}})$ with expansion (II.25) : the error due to this approximation is of order η^0 .

First-order truncation The truncation of $\underline{\mathbf{u}}^\eta$ at order $p = 1$ corresponds to the approximation

$$\underline{\mathbf{u}}^\eta(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) \simeq \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}}). \quad (\text{II.27})$$

The related strain field is obtained by applying the expanded derivation operator (II.4) and taking into account Definitions (II.14) and (II.20). We get

$$\varepsilon^\eta(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{Y}}) \simeq \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \mathbf{p}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}(\underline{\mathbf{Y}}). \quad (\text{II.28})$$

From now on, for the sake of simplicity, we assume that the unit cell is centrosymmetric. Indeed, this assumption implies that odd tensors like $\langle \mathbf{a}^{1\top} : \mathbf{c} : \mathbf{p}^1 \rangle = 0$ must vanish. Computing the strain energy average on the unit cell leads then to

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon^\eta : \mathbf{c} : \varepsilon^\eta \right\rangle \simeq \frac{1}{2} \left[\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + \eta^2 \mathbf{K}^\top : \mathbf{D}^\# : \mathbf{K} \right], \quad (\text{II.29})$$

where $\mathbf{C} = \langle \mathbf{a}^{1\top} : \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \rangle$ is the first-order effective tensor already² introduced in (II.18) and $\mathbf{D}^\#$ is the sixth-order tensor defined as

$$\mathbf{D}^\# = \langle \mathbf{p}^{1\top} : \mathbf{c} : \mathbf{p}^1 \rangle. \quad (\text{II.30})$$

The macroscopic strain energy density (II.29) corresponds to a strain-gradient model. However, comparing (II.28) to expansion (II.25) shows that the error in this approximation of the strain is of order η and consequently that the approximation of the energy density we obtain is not reliable at order η^2 . It can only be confidently used at order η^0 where it reads

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (\text{II.31})$$

and corresponds to the effective energy associated with the classical homogenized problem (II.17), (II.18).

2. Indeed: $\langle \mathbf{a}^{1\top} : \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \rangle = \left\langle \left(\underline{\mathbf{y}}^s \mathbf{h}^1 \right)^\top : \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 + \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \right\rangle = \left\langle -\mathbf{h}^{1\top} \cdot \underline{\mathbf{div}}_{\underline{\mathbf{y}}}(\mathbf{c} : \mathbf{a}^1) \right\rangle + \langle \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \rangle = \langle \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \rangle$

Second-order truncation At the order $p = 2$, the approximation of the displacement field is

$$\underline{\mathbf{u}}^\eta(\underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{y}}) \simeq \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \underline{\mathbf{h}}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta^2 \underline{\mathbf{h}}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{Y}}), \quad (\text{II.32})$$

from which we deduce the related strain field

$$\varepsilon^\eta(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{Y}}) \simeq \underline{\mathbf{a}}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \underline{\mathbf{a}}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta^2 \underline{\mathbf{p}}^2(\underline{\mathbf{y}}) : (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{Y}})), \quad (\text{II.33})$$

where $\underline{\mathbf{p}}^2$ is the sixth order tensor defined by

$$\underline{\mathbf{p}}^2_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\beta\gamma} h^2_{\alpha\delta\epsilon\zeta}(\underline{\mathbf{y}}) + \delta_{\alpha\gamma} h^2_{\beta\delta\epsilon\zeta}(\underline{\mathbf{y}}) \right), \quad (\text{II.34})$$

and $\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}}$ is the second gradient of the macroscopic strain ($(\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}})_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\partial_{Y_\delta} K_{\alpha\beta\gamma})$). The corresponding approximation of the strain energy average $\langle \frac{1}{2} \varepsilon^\eta : \underline{\mathbf{c}} : \varepsilon^\eta \rangle$ on the unit cell writes

$$\frac{1}{2} \left[\underline{\mathbf{E}} : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\mathbf{E}} + \eta^2 (\underline{\mathbf{K}}^\top : \underline{\mathbf{G}} : \underline{\mathbf{K}} + 2 \underline{\mathbf{E}} : \underline{\mathbf{H}} : (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}})) + \eta^4 (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}})^\top : \underline{\mathbf{L}}^\# : (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}}) \right], \quad (\text{II.35})$$

where the sixth-order stiffness tensors $\underline{\mathbf{G}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ and the eight-order stiffness tensor $\underline{\mathbf{L}}^\#$ are defined by:

$$\underline{\mathbf{G}} = \langle \underline{\mathbf{a}}^{2^\top} : \underline{\mathbf{c}} : \underline{\mathbf{a}}^2 \rangle, \quad \underline{\mathbf{H}} = \langle \underline{\mathbf{a}}^{1^\top} : \underline{\mathbf{c}} : \underline{\mathbf{p}}^2 \rangle \quad \text{and} \quad \underline{\mathbf{L}}^\# = \langle \underline{\mathbf{p}}^{2^\top} : \underline{\mathbf{c}} : \underline{\mathbf{p}}^2 \rangle. \quad (\text{II.36})$$

Again, odd-order tensors vanish here thanks to the centrosymmetry assumption for the unit cell. The form (II.35) of the homogenized energy involves the third-gradient of the displacement $\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}}$. At order η^2 , this dependence can be removed through an integration by parts on the macroscopic domain of the cross term $\underline{\mathbf{E}} : \underline{\mathbf{H}} : (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}})$. Ignoring boundary terms and focusing on the bulk energy, we obtain the following average strain energy density:

$$\frac{1}{2} \left[\underline{\mathbf{E}} : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\mathbf{E}} + \eta^2 \underline{\mathbf{K}}^\top : (\underline{\mathbf{G}} - \underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{H}}^\top) : \underline{\mathbf{K}} + \eta^4 (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}})^\top : \underline{\mathbf{L}}^\# : (\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\mathbf{K}}) \right]. \quad (\text{II.37})$$

Like in the previous truncations, the highest order term in this energy is not reliable as the error committed when approximating $\varepsilon^\eta(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{Y}})$ is of order η^2 . Hence we can only rely on the following approximation of the average energy density:

$$\frac{1}{2} \left[\underline{\mathbf{E}} : \underline{\mathbf{C}} : \underline{\mathbf{E}} + \eta^2 \underline{\mathbf{K}}^\top : (\underline{\mathbf{G}} - \underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{H}}^\top) : \underline{\mathbf{K}} \right]. \quad (\text{II.38})$$

The sixth-order tensor:

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{G}} - \underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{H}}^\top, \quad (\text{II.39})$$

characterizes strain-gradient effects. Note that $\underline{\mathbf{D}}$ may not be positive³ in which case the present energy cannot be used as an elastic energy and we cannot readily set a well-posed strain gradient boundary value problem.

3. This should be understood as meaning that $\underline{\mathbf{D}}$ can have negative eigenvalues. *i.e.*: the energy term $\underline{\mathbf{K}}^\top : \underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{K}}$ can be negative for certain strain gradients $\underline{\mathbf{K}}$.

The higher-order convergence result from Smyshlyaev et Cherednichenko [2000] This sequence of approximations for the averaged energy may be continued for higher-order truncation of the displacement \underline{u}^n . They are expected to provide improved homogenized approximations when the scale separation is not completely satisfied. Indeed Smyshlyaev et Cherednichenko [2000] proved a convergence result showing that the use of the averaged energy obtained by truncating \underline{u}^n at order p provides an approximation of the “actual displacement” with an error of order η^p . In this result the “actual displacement” must be understood as an average of the actual equilibrium displacement for all possible positions of the microstructure with respect to the macroscopic domain. Indeed, the exact position of the microstructure is generally not known. Contrary to the classical leading-order homogenized approximation where this effect may be neglected, seeking higher-order estimates requires removing this influence by averaging.

However, the result obtained by Smyshlyaev et Cherednichenko [2000] must be evoked with caution in our context. Indeed it has been established under conditions that are not satisfied by the structures we are considering. First, the authors consider only a boundary value problem with periodic boundary conditions. This eliminates any boundary layer effect which can pollute higher-order estimates. Secondly and more importantly, they consider only microstructures with a finite elastic contrast (thus voids and rigid inclusions are forbidden). This ensures in particular that \mathbf{C} is positive definite and bounded. This theoretical result was investigated numerically on periodic circular inclusions by Ameen *et al.* [2018] who confirmed the improved estimates when the scale separation is low and even with a rather large contrast. However, for the microstructure they considered, scale effects were only observed for $\eta \sim 1/3$ which questions even the relevance of deriving a homogenized model and confirms the robustness of the classical homogenization method.

Indeed, preserving contributions of order η^2 in energy (II.38) requires that $\eta^2 \mathbf{D}$ is somehow comparable to \mathbf{C} . This implies that either \mathbf{D} is large, either \mathbf{C} is small, at least in some common directions. That can be achieved only if c is large (even infinite) in some parts of \mathcal{Y} and small (or vanishing) in some other parts. One way to achieve this is to consider microstructures featuring floppy modes. This corresponds to the case where \mathbf{C} becomes ill-conditioned⁴. This is the case of the pantographic material described in Section II.2.1 and investigated in the following section. This case falls out of the classical homogenization theory with finite contrast and out of the framework assumed in [Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000].

II.4 Homogenization of the pantographic material

We now consider the pantographic material described in Section II.2.1, parametrized by the junction thinness ρ . The domain of the microstructure domain is changing with ρ and we

4. Here, ill-conditioned is understood as the loss of definiteness of \mathbf{C} and should not be confused with loss of rank-one convexity. Indeed, a floppy mode may not correspond to a rank-one strain tensor. See for instance, the dilatational floppy mode in [Grima et Evans, 2000].

numerically investigate the case $\rho \rightarrow 0$.

The strain-gradient homogenization scheme described in the previous section is implemented in the python package HO_homog [Durand et Lebée, 2020] (open source project). HO_homog is specially designed to automate the numerical application of higher-order homogenization schemes such as the one presented here. It is based on the library Dofin [Logg et al., 2012] for solving the auxiliary problems with the finite element method and for performing operations on the solution fields \mathbf{u}^k , $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ and $\boldsymbol{\sigma}^k$. It also includes features for parametric modelling of 2D unit-cell geometries like the one shown in Figure II.1 and generating the associated finite element meshes. For these functionalities, HO_homog makes use of Gmsh [Geuzaine et Remacle, 2009], a finite-element mesh generator. As junctions play an essential role in the behaviour of this metamaterial, we impose a significantly higher mesh density in the vicinity of the junctions: the characteristic length of the elements varies from $a/4$ in the area far from any junction to $\rho a/8$ within small areas around each junction (Figure II.1).

We solve the auxiliary problems (II.8) and (II.19) numerically and we thus obtain finite element functions that represent the localization tensors $\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$. Then, applying the formula (II.18), (II.36) and (II.39) results in the numerical values of the stiffness tensors for the first-gradient equivalent medium (\mathbf{C}^ρ) and the strain-gradient equivalent medium (\mathbf{C}^ρ and \mathbf{D}^ρ). Note that shifting the microstructure in Direction 1 or 2 does not change the values for \mathbf{C}^ρ and \mathbf{D}^ρ : the localization tensors are the same regardless of the shift of coordinates. Note also that considering a larger unit cell (made of several minimal unit cells) does not change the homogenized tensors either.

II.4.1 First-order auxiliary problem

Corrector fields Figure II.5 presents the displacement field rescaled in the unit cell \mathbf{u}^E defined as

$$\mathbf{u}^E = \mathbf{E} \cdot \underline{\mathbf{y}} + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}, \quad (\text{II.40})$$

for a junction thickness $\rho = 0.05$ and for each unit strain case: E_{11} , E_{22} and E_{12} . The norm of the corresponding local strain field, $\|\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^E)\| = \|\mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}\|$, is plotted on the deformed configuration. Note that \mathbf{h}^1 , like all other localization tensors, depends on ρ , even though this dependence is not recalled in our notation.

It appears that both macroscopic strains E_{11} and E_{12} essentially induce relative rotations of the triangles and rhombi inside the unit cell, while the strain is concentrated at junctions. The stretch E_{11} corresponds to the pantographic mode and the shear E_{12} is also almost free thanks to rhombi which allow relative horizontal motion between two pantograph strips (Figure II.1). Hence these macroscopic strains appear as floppy modes of the microstructure. On the contrary, the macroscopic strain E_{22} generates significant strains in the triangles and corresponds to a stiff mode.

When $\rho \rightarrow 0$, the scaling of strain and stress in the vicinity of the junctions can be more precisely described. Indeed, the triangles reaching the junction may be treated as

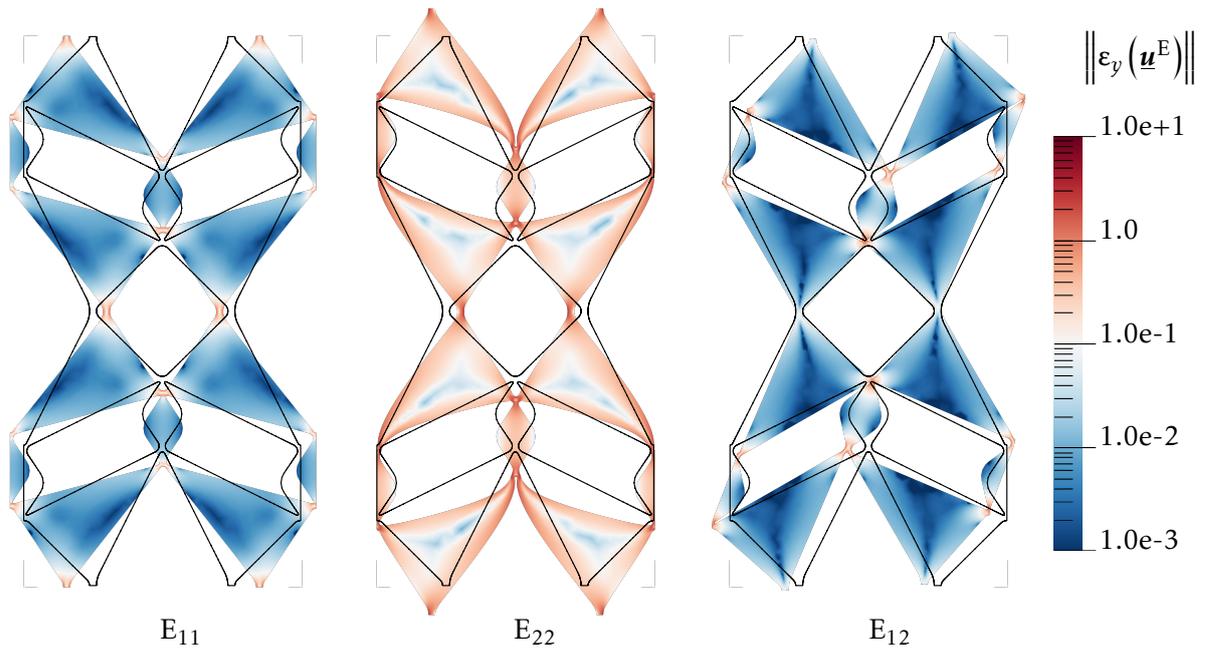


Figure II.5 – Displacement and strain fields produced by each unit macroscopic strain component when $\rho = 0.05$. Scale factors of the deformed shapes: 0.1 for E_{11} and E_{22} , 0.07 for E_{12} .

wedges loaded at the tip (see Figure II.6). For the stiff mode E_{22} , triangles are loaded with concentrated forces flowing through junctions because of incompatible relative motions of the triangles. This corresponds to the well-known **Flamant** [1892] solution where the stress distribution inside the wedge scales as d^{-1} where d is the distance to the tip (Figure II.6). For the floppy modes E_{11} and E_{12} the corresponding loading of the wedge is a concentrated couple at the tip. Similar arguments based on **Michell** [1899] general solution indicate that in this case, the stress distribution in the wedge scales as d^{-2} .

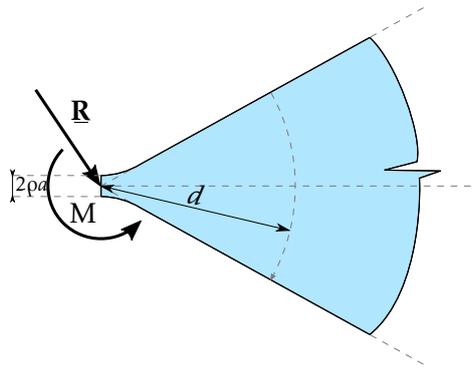


Figure II.6 – Wedge with concentrated load \mathbf{R} and couple M at the tip.

First-order homogenized stiffness Scalings of the stress close to junctions have a direct influence on the total energy in the unit cell and consequently on the homogenized stiffness.

For a floppy mode, as the stress in each branch of the triangles scales as d^{-2} close to all junctions, it is possible to argue that the corresponding overall strain energy in the unit cell scales as ρ^2 in the auxiliary problem. Similar arguments also indicate that for a stiff mode, as the stress scales as d^{-1} , the overall strain energy scales as $\frac{1}{|\log \rho|}$.

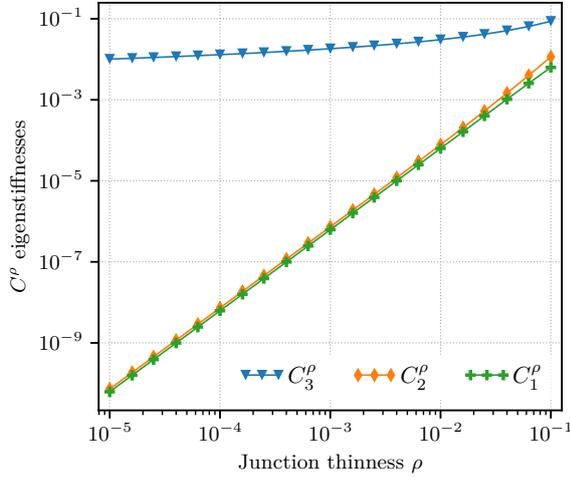


Figure II.7 – Eigenstiffnesses of the first-order stiffness tensor \mathbf{C}^ρ as functions of the junction thinness.

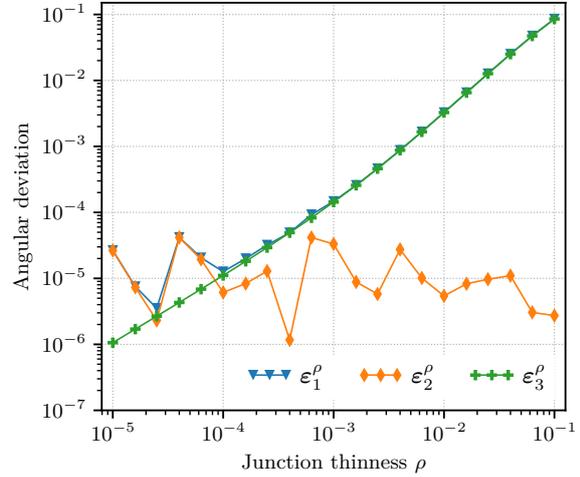


Figure II.8 – Angular deviation of the eigenstrains of the first-order stiffness tensor \mathbf{C}^ρ from their limit eigenstrains when $\rho \rightarrow 0$.

This is confirmed when considering the diagonal form of \mathbf{C}^ρ :

$$\mathbf{C}^\rho = \sum_{p=1}^3 C_p^\rho \boldsymbol{\varepsilon}_p^\rho \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_p^\rho \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p^\rho : \boldsymbol{\varepsilon}_q^\rho = \delta_{pq}, \quad (\text{II.41})$$

introducing the eigenvalues of \mathbf{C}^ρ , $(C_1^\rho, C_2^\rho, C_3^\rho)$, and the orthonormal basis $(\boldsymbol{\varepsilon}_1^\rho, \boldsymbol{\varepsilon}_2^\rho, \boldsymbol{\varepsilon}_3^\rho)$ of the associated eigenvectors. In this context of elasticity, we will call C_p^ρ eigenstiffnesses and $\boldsymbol{\varepsilon}_p^\rho$ eigenstrains.

The three eigenstiffnesses C_p^ρ are sorted in ascending order and plotted in Figure II.7 as functions of the junction thinness. It appears that two eigenstiffnesses converge to 0 at a rate of ρ^2 : they correspond to floppy modes. The last eigenstiffness C_3^ρ convergence is much lower and similar to $\frac{1}{|\log \rho|}$. This is the stiff mode. The corresponding eigenstrains converge respectively toward $\boldsymbol{\varepsilon}_1^0 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2^0 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)/\sqrt{2}$ and $\boldsymbol{\varepsilon}_3^0 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$. Indeed Figure II.8 presents the angular deviation $\sin(\theta_p^0) = \sqrt{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}_p^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_p^0)^2}$ with respect to these limits.

Note that, for $\rho = 0.02$, the floppy modes eigenstiffnesses are already two orders of magnitude smaller than the stiff mode, showing the efficiency of compliant junctions. Consequently, when ρ is reasonably small, we can define without ambiguity the vector space of floppy modes of \mathbf{C}^ρ as $\text{span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_1^0, \boldsymbol{\varepsilon}_2^0\}$. When the strain belongs to this space, the associated first-order energy is so small that the contributions from the second-order $\eta^2 \mathbf{D}$ may become comparable. These contributions are investigated in the next subsection.

II.4.2 Second-order auxiliary problem

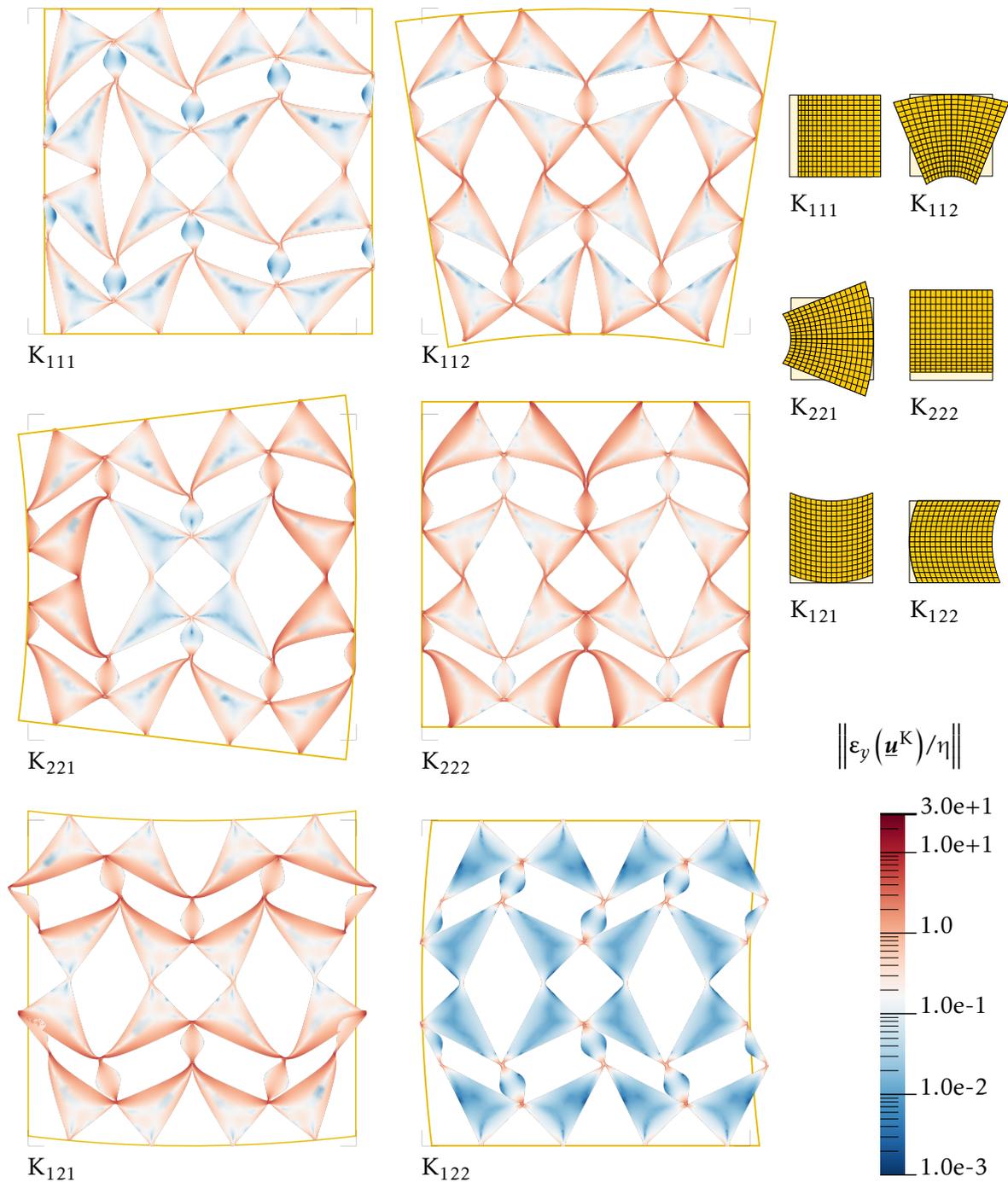


Figure II.9 – Total displacement and strain field produced by each unit strain-gradient component. On the upper-right corner, the macroscopic deformation corresponding to each strain-gradient component is represented by applying the deformation $\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{K}} : (\underline{\mathbf{y}} \otimes \underline{\mathbf{y}})$ to a regular grid.

Corrector fields Figure II.9 presents the total displacement around a unit cell computed for a uniform macroscopic strain-gradient \mathbf{K} . Indeed, considering a quadratic variation of the macroscopic displacement \mathbf{U} in the expansion (II.24) yields the following approximation of the displacement, rescaled in the unit cell:

$$\underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{K}} = \eta \left(\frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{K}} : (\underline{\mathbf{y}} \otimes \underline{\mathbf{y}}) + h^1(\underline{\mathbf{y}}) : (\mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{y}}) + h^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K} \right), \quad (\text{II.42})$$

where $\widetilde{\mathbf{K}}$ is the second-gradient of the displacement corresponding to the strain-gradient \mathbf{K} . It is easily written in terms of \mathbf{K} as follows⁵

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}}_{111} &= \mathbf{K}_{111}, & \widetilde{\mathbf{K}}_{221} &= \widetilde{\mathbf{K}}_{212} = \mathbf{K}_{221}, & \widetilde{\mathbf{K}}_{122} &= 2\mathbf{K}_{122} - \mathbf{K}_{221}, \\ \widetilde{\mathbf{K}}_{222} &= \mathbf{K}_{222}, & \widetilde{\mathbf{K}}_{112} &= \widetilde{\mathbf{K}}_{121} = \mathbf{K}_{112}, & \widetilde{\mathbf{K}}_{211} &= 2\mathbf{K}_{211} - \mathbf{K}_{112}. \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Second-order corrector fields may be interpreted as the way the microstructure responds to linear variations of the macroscopic strains. This is well illustrated with the present pantographic material. For instance, \mathbf{K}_{112} corresponds clearly to a beam-like bending of the pantograph strips. Similarly, \mathbf{K}_{111} reveals the incompatibility of the rotation of triangles when the floppy stretch E_{11} is not uniform.

The correctors associated with all strain-gradient components, except \mathbf{K}_{122} , feature significant deformation of the solid triangles corresponding to stiff strain-gradient modes. The corrector associated with \mathbf{K}_{122} corresponds to a mode that remains floppy at the second order. Indeed, recall that the presence of rhombi allows almost zero energy relative motion in Direction 1 between pantograph strips (Figure II.1). Hence, all macroscopic displacements of the form $\underline{\mathbf{U}} = g(x_2)\underline{\mathbf{e}}_1$ have almost zero energy.

Strain-gradient intrinsic lengths Now we compute the second-order homogenized stiffness \mathbf{D}^p defined from the two-scale asymptotic expansion in Equation (II.39). In order to illustrate it, we present the six quantities defined, for $p \in \{1, 2, 3\}$ and $\alpha \in \{1, 2\}$, by

$$\ell_{p,\alpha}^p = \eta \sqrt{\frac{(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^p \otimes \underline{\mathbf{e}}_\alpha)^{\mathbf{T}} : \mathbf{D}^p : (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^p \otimes \underline{\mathbf{e}}_\alpha)}{C_p^p}}. \quad (\text{II.44})$$

These quantities are six intrinsic lengths of the effective strain-gradient continuum (relative to the size T of the macroscopic domain). Each one corresponds to the response of the material to a variation, in the direction $\underline{\mathbf{e}}_\alpha$, of a strain remaining proportional to the eigenstrain $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^p$: any such variation occurring over a distance of order $\ell_{p,\alpha}^p$ (or smaller) is associated to a non-negligible elastic energy. The strain-gradient effect is negligible at the macroscopic scale when the intrinsic length is of the order of the relative unit-cell typical size η . It becomes important when the intrinsic length is of order $1 = \eta^0$.

Figure II.10 presents these intrinsic lengths expressed as multiples of η . It appears clearly that, when junctions are becoming thin, three lengths remain of the order of the cell size or smaller whereas the three others are real and become significantly large compared to it.

5. i.e.: $\nabla_y \nabla_y^s \left(\frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{K}} : \underline{\mathbf{y}} \otimes \underline{\mathbf{y}} \right) = \mathbf{K}$

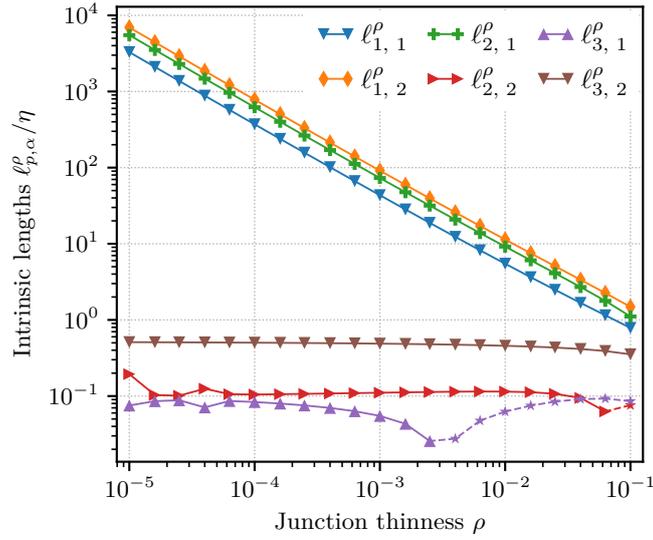


Figure II.10 – Intrinsic lengths of the equivalent strain-gradient continuum. Note that, as \mathbf{D}^ρ is not necessarily positive, the strain-gradient energy term $(\boldsymbol{\varepsilon}_p^\rho \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\alpha)^\top : \mathbf{D}^\rho : (\boldsymbol{\varepsilon}_p^\rho \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\alpha)$ may be negative, hence the lengths $\ell_{p,\alpha}^\rho$ may be complex. This is the case for $\ell_{3,2}^\rho$ when ρ is rather large. In case of complex values, the modulus of $\ell_{p,\alpha}^\rho$ is plotted using star markers and dotted lines.

The reason why $\ell_{3,1}^\rho$ and $\ell_{3,2}^\rho$ remain of the order of the cell size is the following: they are related to the stiff strain-gradient modes K_{221} and K_{222} (Figure II.9) associated to the stiff strain mode $\boldsymbol{\varepsilon}_3^\rho$. The energy of these modes is expected to scale as $\frac{1}{|\log \rho|}$ exactly like the first-order eigenstiffness C_3^ρ . The reason why $\ell_{2,2}^\rho$ also remains of the order of the cell size is similar but with a different energy scaling: it is related to the floppy strain-gradient mode K_{122} (Figure II.9) associated with the floppy strain mode $\boldsymbol{\varepsilon}_2^\rho$. The energies corresponding to these two modes share again the same scaling which is now ρ^2 . The situation is different for the other lengths $\ell_{1,1}^\rho$, $\ell_{1,2}^\rho$ and $\ell_{2,1}^\rho$: they correspond to stiff strain-gradient modes whose energies scale as $\frac{1}{|\log \rho|}$ associated with floppy strain modes whose energy scales as ρ^2 . It is then not surprising that these lengths scale as $\frac{\eta}{\rho \sqrt{|\log \rho|}}$.

For ρ small enough, $\rho \sqrt{|\log \rho|}$ may become comparable to η , revealing strain-gradient effects that are significant from the macroscopic point of view.

It is also important to understand why the lengths associated with floppy strain modes are real. Indeed, in Equation (II.39), unsigned contributions come from \mathbf{H}^ρ and correspond to cross energies between the first-gradient strain localization \boldsymbol{a}^1 and the second-gradient displacement corrector \boldsymbol{h}^2 . When a floppy strain mode is considered, the corresponding strain localization \boldsymbol{a}^1 becomes small when $\rho \rightarrow 0$ and contributions from \mathbf{H}^ρ become negligible compared to those from \mathbf{G}^ρ in Equation (II.39).

II.4.3 Strain-gradient model for the pantographic material

From the behaviour of the intrinsic lengths as functions of ρ , we conclude that \mathbf{D}^ρ cannot be used directly for describing the strain-gradient effective behaviour of the pantographic material. Indeed, contributions with an intrinsic length that remains of the order of the cell size should be discarded in a macroscopic model. Furthermore, \mathbf{D}^ρ may not be positive definite. In that case, deriving a well-posed model would require some regularization by adding for instance third-gradient terms in the homogenized energy, terms whose physical bases would have to be justified. That is why we suggest keeping in the macroscopic effective model only the strain-gradient terms that correspond to macroscopic intrinsic lengths.

The second-order stiffness tensor for the pantographic material We suggest projecting \mathbf{D}^ρ on the subspace of the strain gradients that present significant intrinsic lengths, namely on the space spanned by $\varepsilon_1^\rho \otimes \underline{e}_1$, $\varepsilon_1^\rho \otimes \underline{e}_2$, $\varepsilon_2^\rho \otimes \underline{e}_1$ corresponding to the lengths $\ell_{1,1}^\rho$, $\ell_{1,2}^\rho$ and $\ell_{2,1}^\rho$. We set

$$\mathbf{D}^{*\rho} = \mathbf{P}^\rho \vdash \mathbf{D}^\rho \vdash \mathbf{P}^\rho, \quad (\text{II.45})$$

where $\mathbf{P}^\rho = \varepsilon_1^\rho \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \varepsilon_1^\rho + \varepsilon_1^\rho \otimes \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \otimes \varepsilon_1^\rho + \varepsilon_2^\rho \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \varepsilon_2^\rho$. As already pointed out, this projection ensures that $\mathbf{D}^{*\rho}$ is positive for ρ sufficiently small, in addition to removing spurious contributions from short intrinsic lengths. This is illustrated in Figure II.11 which shows the three eigenstiffnesses of $\mathbf{D}^{*\rho}$.

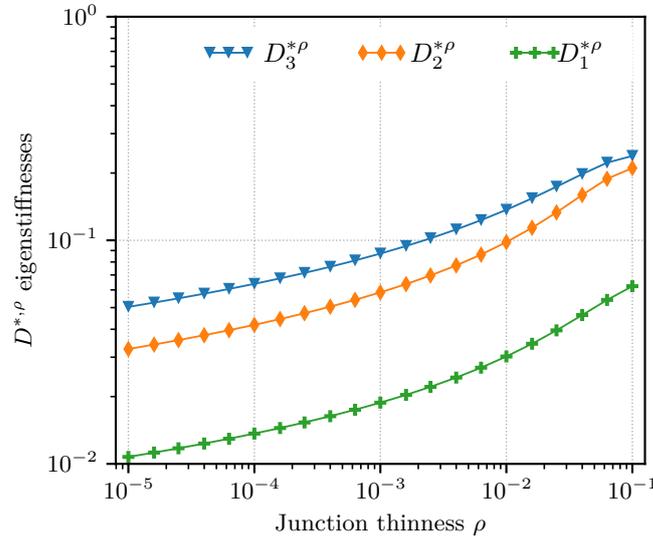


Figure II.11 – Eigenstiffnesses of $\mathbf{D}^{*\rho}$ obtained after projection.

Homogenized energy From the previous developments we arrive at the following homogenized strain-gradient energy density

$$W^{\rho,\eta}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} : \mathbf{C}^\rho : \mathbf{E} + \eta^2 \mathbf{K}^\top \vdash \mathbf{D}^{*\rho} \vdash \mathbf{K} \right), \quad (\text{II.46})$$

and we define the strain-gradient approximation of the macroscopic displacement as the function $\underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}$ which minimizes

$$\int_{\Omega} W^{\rho,\eta}(\underline{\mathbf{U}}) - \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \, d\Omega \quad (\text{II.47})$$

on a suitable functional space. This functional space depends on the boundary conditions imposed to the structure. Different conditions will be considered in the sequel.

The next section is devoted to checking that this strain-gradient model describes in a very accurate way the macroscopic behaviour of the considered pantographic material.

II.5 Comparison with full-scale simulations and empirical error estimates

Several numerical campaigns have been performed to check the accuracy of the proposed strain-gradient model for the pantographic metamaterial.

The results of the first campaign have already been presented in Figure II.3 where one can qualitatively observe a huge difference between the accuracy provided by the proposed effective strain-gradient model and the accuracy of the classical first-gradient model effective model. On this graph, solid lines represent the closed-form displacement solution $\underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}$ that corresponds to the problem where the pantographic metamaterial is replaced by the proposed strain-gradient equivalent homogeneous medium, with the elasticity characteristics calculated using the method presented in Sections II.3 and II.4. This macroscopic approximate solution $\underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}$ fits perfectly the results of the full-scale simulations, when the junctions are thin ($\rho \leq 1 \times 10^{-3}$) as well as when they are thick ($\rho = 1 \times 10^{-1}$), while significant discrepancies can be noted when using the first-gradient homogeneous equivalent medium. We do not detail here the computation of the equilibrium solution $\underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}$ nor the way we perform the full-scale simulation. Indeed we prefer to focus on a slightly different benchmark problem which is more suitable for a quantitative comparison of the accuracy of the two models. The computation of the equilibrium solution $\underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}$ and the way we perform the full-scale simulation are identical in both problems. We did not choose to present this new benchmark problem in Section II.2.2 as it generates a lower discrepancy between first-gradient and strain-gradient approximations and thus does not provide a so glaring evidence of the superiority of the strain-gradient effective model. We focus on it now because it is better numerically conditioned for the full-scale simulations.

II.5.1 Benchmark problem

The considered structure is still a plate made of the pantographic metamaterial and infinite in Direction 2. It is now clamped on the left-hand side $x_1 = 0$ and subjected to a prescribed displacement boundary condition $\underline{\mathbf{u}} = \tilde{u}^d \underline{\mathbf{e}}_1$ on its right-hand boundary at $x_1 = T$. There is no body force.

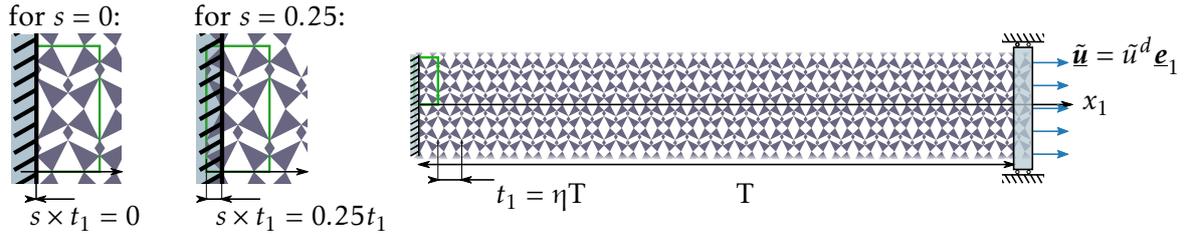


Figure II.12 – Second benchmark elasticity problem, used for the comparison between the first-gradient model, the proposed strain-gradient model and full-scale simulations.

Furthermore, we consider several configurations that correspond to shifts of the microstructure in Direction 1 with respect to the domain. For each configuration, the position of the microstructure is measured with s , defined in Figure II.12. The case $s = 0.00$ is the situation⁶ where the boundaries of the domain coincide with the edges of the unit cell as defined in Section II.1 and shown in green in Figure II.12.

Thus, the effect of three parameters are investigated: the junction thickness ρ , the scale ratio η and the microstructure relative position s . The first study focuses on the effects of microstructure position s , while the second focuses on the separation of scales. The influence of the junction thickness ρ is investigated in both studies.

II.5.2 Reference solution by full-scale numerical simulation

A full-scale finite element simulation is performed with the geometry of the whole microstructure explicitly meshed and using a standard displacement-based finite element formulation. This solution serves as the reference for the following comparisons. $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{fs}}$ and $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{fs}}$ are respectively its equilibrium displacement field and the associated strain field. Quadratic Lagrange triangles are used for the discretization of the displacement field. We use the Python package Dolfin [Logg *et al.*, 2012], a component of the FEniCS Project [Alnæs *et al.*, 2015], for all finite-element calculations presented in this paper. The discrete problem is solved using a direct solver (mumps). Owing to the periodicity of the benchmark problem in Direction 2, it is enough to perform the numerical simulations on a strip Ω^{fs} of unit cells that contains a single unit cell in Direction 2 and to impose periodic boundary conditions between the top and bottom boundaries of Ω^{fs} . The CAD modelling of Ω^{fs} and the generation of the associated mesh are done using Gmsh [Geuzaine *et Remacle*, 2009]. The mesh of the strip is generated by duplicating the mesh of one unit cell, the same mesh as the one used for the homogenization step in Section II.4. This meshing strategy has been validated by a convergence study (for $\eta = 1/20$).

II.5.3 Approximate solutions from homogenization

The first-gradient and the strain-gradient homogenized energies have been computed in Section II.4. Computing the equilibrium solution corresponding to these two models is

6. The particular configuration $s = 0.00$ was also used for the simulations presented in Section II.2.2.

straightforward. In a further step, we can reconstruct the microscopic-scale fluctuations by using the localization tensor fields.

Macroscopic-scale boundary value problems The first-gradient boundary value problem reduces to a one-dimensional problem $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{Y}) = (U_1(Y_1), U_2(Y_1))$ with $\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$ on the left-hand side $Y_1 = 0$ and $\underline{\mathbf{U}} = u^d \mathbf{e}_1$ on the right-hand side $Y_1 = 1$. The equilibrium displacement field $\underline{\mathbf{U}}^C$ is simply given, for any $Y_1 \in [0, 1]$, by

$$U_1^C(\mathbf{Y}) = Y_1 u^d \quad \text{and} \quad U_2^C(\mathbf{Y}) = 0. \quad (\text{II.48})$$

Only one component of the associated strain field \mathbf{E}^C does not vanish, namely $E_{11}^C(\mathbf{Y}) = u^d$.

The second-gradient boundary value problem also reduces to a one-dimensional problem with the boundary conditions $\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ for $Y_1 = 0$ and $\underline{\mathbf{U}} = u^d \mathbf{e}_1$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ for $Y_1 = 1$. A closed-form solution $\underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}$ can also be obtained. We get, for any $Y_1 \in [0, 1]$,

$$U_1^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) = B \left(\sinh \left(k \left(Y_1 - \frac{1}{2} \right) \right) - k \cosh \left(\frac{k}{2} \right) \left(Y_1 - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{u^d}{2} \quad \text{and} \quad U_2^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) = 0 \quad (\text{II.49})$$

with $k = \sqrt{\frac{C_{1111}}{D_{111111}}}$ and $B = \frac{u^d}{2k} \left(\frac{1}{k} \sinh(k/2) - \frac{1}{2} \cosh(k/2) \right)^{-1}$. The corresponding macroscopic strain \mathbf{E}^{SG} and strain-gradient \mathbf{K}^{SG} have only one non-zero component, namely $E_{11}^{\text{SG}} = \partial_1 U_1^{\text{SG}}$ and $K_{111}^{\text{SG}} = \partial_{11} U_1^{\text{SG}}$.

Assembling of the approximate solutions The first-gradient model has been obtained by approximating, for any given macroscopic field $\underline{\mathbf{U}}$, the displacement field at the microscopic level by the truncated series (II.27). For this model, the approximations $\underline{\mathbf{u}}^C$ and $\boldsymbol{\varepsilon}^C$ of the displacement and strain fields are thus given by:

$$\underline{\mathbf{u}}^C(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{U}}^C(\mathbf{Y}) + \eta \mathbf{h}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}^C(\mathbf{Y}) \quad (\text{II.50})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^C(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}^C(\mathbf{Y}). \quad (\text{II.51})$$

In a similar manner, the approximate displacement field $\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}}$ and strain field $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{SG}}$ associated with the strain-gradient model are:

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{U}}^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) + \eta \mathbf{h}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) + \eta^2 \mathbf{h}^2(\mathbf{y}) : \mathbf{K}^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) \quad (\text{II.52})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{SG}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) + \eta \mathbf{a}^2(\mathbf{y}) : \mathbf{K}^{\text{SG}}(\mathbf{Y}) \quad (\text{II.53})$$

For both approximate solutions, the displacement is normalized with respect to T.

II.5.4 Error measures

Finally, the quality of each approximation $(\underline{\mathbf{u}}^C, \boldsymbol{\varepsilon}^C)$ or $(\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{SG}})$ is assessed by computing the relative L^2 distance from the reference solution for both displacement fields. We define⁷

$$\delta(\underline{\mathbf{u}}^C) = \frac{\|\underline{\mathbf{u}}^{\text{fs}} - \underline{\mathbf{u}}^C\|_2}{\|\underline{\mathbf{u}}^{\text{fs}}\|_2}, \quad \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^C) = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{fs}} - \boldsymbol{\varepsilon}^C\|_2}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{fs}}\|_2}, \quad \delta(\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}}) = \frac{\|\underline{\mathbf{u}}^{\text{fs}} - \underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}}\|_2}{\|\underline{\mathbf{u}}^{\text{fs}}\|_2} \quad \text{and} \quad \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{SG}}) = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{fs}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{SG}}\|_2}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{fs}}\|_2},$$

where $\underline{\mathbf{u}}^{\text{fs}} = \tilde{\underline{\mathbf{u}}}^{\text{fs}}/T$ and $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{fs}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{fs}}$ are the dimensionless fields obtained from full-scale simulations.

Note that homogenized models are often compared to adequate averages of the full-scale solution. Here, we measure the “true” error between the reconstructed approximation and the reference solution.

II.5.5 Influence of the relative position of the microstructure

This first comparison campaign focuses on the influence of the microstructure relative position. Owing to the symmetries of the benchmark problem and the unit cell, the study range for the s values can be narrowed to $[0.0, 0.25]$. Eleven values of s are considered, uniformly distributed in this range. We also considered several junction sizes ρ ranging from 10^{-4} to 10^{-1} and, for this campaign, the scale separation is fixed to $\eta = 1/20$. This value of η is a compromise as it corresponds to a reasonable separation of scale while keeping the calculation cost reasonably low. The comparison process previously described is applied for each of the corresponding triplets (ρ, η, s) .

Figures II.13a and II.13b respectively present the errors measured for the approximate displacement fields $\delta(\underline{\mathbf{u}}^X)$ and for the approximate strain fields $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^X)$ as functions of the microstructure position s . Both approximate solutions, resulting from the proposed strain-gradient model and from the first-gradient model, are represented. Solid lines represent the accuracy measures for $\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}}$ and $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{SG}}$ while dotted lines correspond to $\underline{\mathbf{u}}^C$ and $\boldsymbol{\varepsilon}^C$.

Figure II.13a shows that the microstructure relative position s has almost no effect on the accuracy of the approximate solution obtained using the first-gradient model: the overall error $\delta(\underline{\mathbf{u}}^C)$ is so large (about 10^{-1}) that the small fluctuation caused by s is not discernible. The strain-gradient model provides a much more accurate approximate solution and a variation of the microstructure position results in a non-negligible fluctuation of the error $\delta(\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}})$. It appears that, for a given value of ρ , the position $s = 0.00$ is the most favourable case and results in the smallest estimation error $\delta(\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}})$ while $s = 0.10$ corresponds to the most unfavourable case. Nonetheless, even for $s = 0.10$ the error in terms of displacement with the strain-gradient model is one decade below the error $\delta(\underline{\mathbf{u}}^C)$ which results from the first-gradient model.

7. The L^2 -norm is defined by:

$$\|\underline{\mathbf{u}}\|_2 = \left(\int_{\Omega} \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 = \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

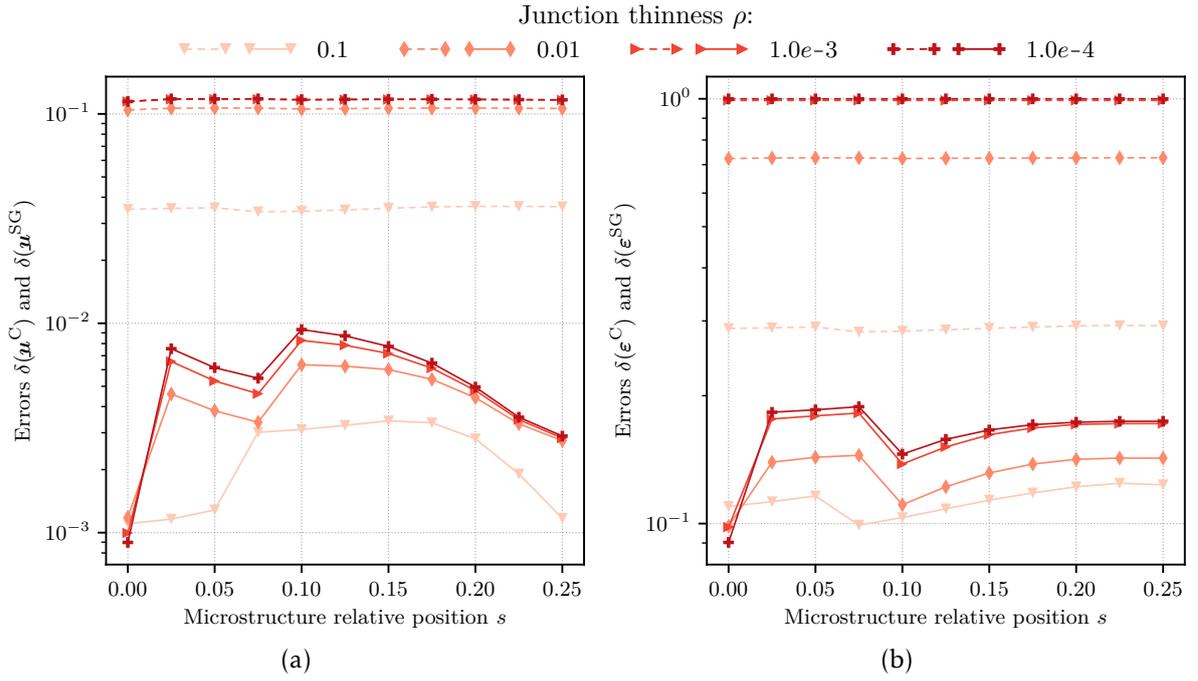


Figure II.13 – Effects of the relative position of the microstructure s on the accuracy of the first-gradient model (dashed lines) and of the proposed strain-gradient model (solid lines), for $\eta = 1/20$. The accuracy is measured for both the approximate displacement fields (a) and the approximate strain fields (b).

Moreover, on the considered range of junction thickness ρ , the amplitude of the $\delta(\mathbf{u}^{SG})$ fluctuations due to s become larger when ρ decrease but remains limited, in comparison with the error of the first-gradient model $\delta(\mathbf{u}^C)$. The effects of ρ on the accuracy of the models will be further explored in the following section.

Similar observations can be made on Figure II.13b about the errors $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^{SG})$ and $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^C)$ relative to the strain field. The gap between these two accuracy measures is less pronounced and the maximum of $\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^{SG})$ is now reached for $s = 0.20$.

II.5.6 Influence of the scale separation

This second set of comparisons is focused on the influence of the scale separation and the junction thickness on the accuracy of the proposed strain-gradient model. A wide range of scale ratios is thus explored, $\eta = \frac{1}{N}$ for $N \in \{10; 20; 40; 50; 60\}$, as well as 8 values of the junction thickness ρ ranging from 10^{-1} to 10^{-4} . For the microstructure position, only two cases are considered in order to limit the number of investigated (ρ, η, s) triplets. The first value $s = 0.00$ is retained as it has been identified as the most favourable case in terms of accuracy of \mathbf{u}^{SG} and $\boldsymbol{\varepsilon}^{SG}$ while the second value $s = 0.05$ represents the case where the microstructure position is unfavourable. This second value is a compromise as it corresponds to a rather unfavourable case for both \mathbf{u}^{SG} and $\boldsymbol{\varepsilon}^{SG}$.

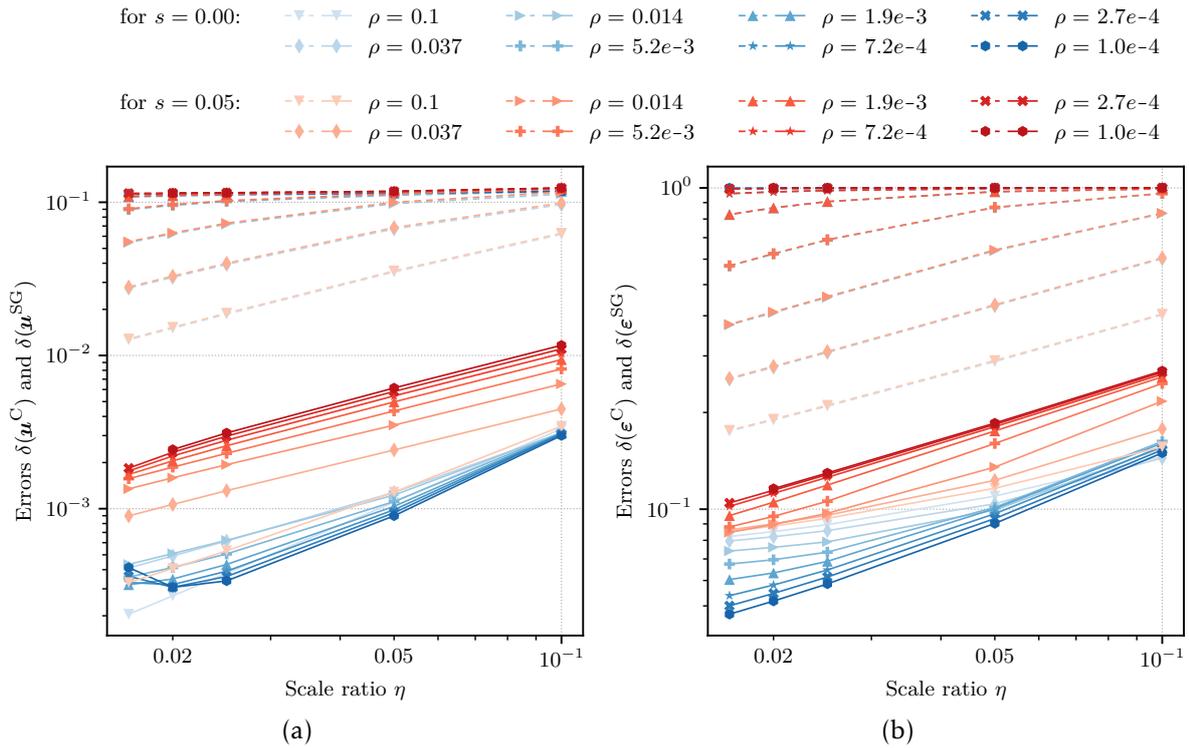


Figure II.14 – Approximation error, in terms of displacement field (left) and strain field (right), as a function of the scale ratio η , for the first-gradient model (dotted lines) and for the proposed strain-gradient model (solid lines). Two cases of microstructure relative position are represented: $s = 0$ (red lines) and $s = 0.1$ (blue lines).

Trends when $\eta \rightarrow 0$ In Figure II.14 the L_2 errors are plotted as functions of the scale ratio η for both the first-gradient approximate solution and the strain-gradient one. The results for $s = 0.00$ are shown in shades of blue and those for $s = 0.05$ are shown in shades of red.

The displacement errors plotted in Figure II.14a reveal a significant gap between the first-gradient and the strain-gradient model. Indeed, in most cases, the difference is larger than one decade and may reach two decades for some of the investigated parameters.

More precisely, when $\eta \rightarrow 0$ with rather thick junctions ($\rho \geq 3 \times 10^{-2}$), we observe a steady decrease of the error of the first-gradient model $\delta(\underline{u}^C)$. The rate of this decrease is η^1 which corresponds to a classical result for a fixed ρ [Jikov *et al.*, 1994]. When junctions become thinner, the decrease of $\delta(\underline{u}^C)$ is delayed and becomes visible only if η is sufficiently low revealing the influence of floppy modes on the homogenized response.

Regarding the strain-gradient model, for $s = 0.05$ the error $\delta(\underline{u}^{SG})$ decreases steadily when $\eta \rightarrow 0$ as well. The rate of decrease is similar to the one observed for the first-gradient model but with an amplitude one decade lower. In this case, thinner junctions lead to slightly higher values of $\delta(\underline{u}^{SG})$ but this does not change the rate. For $s = 0.00$ as well, $\delta(\underline{u}^{SG})$ decreases almost steadily when $\eta \rightarrow 0$ and the rate is also close to η^1 . Recall that the clamped boundary conditions of this benchmark problem create boundary layers and fall out assumptions made in [Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000] for deriving a higher-order convergence result. Furthermore, there is a slight deviation from this trend: a small increase occurs when both

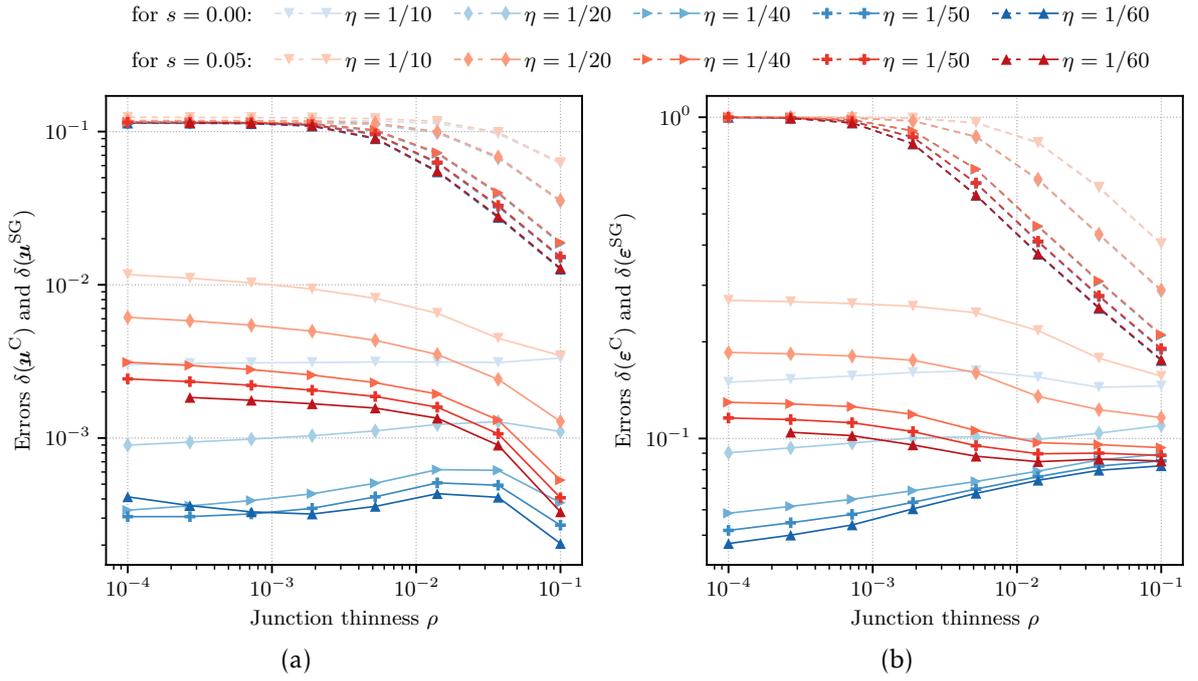


Figure II.15 – Approximation error, in terms of displacement field (left) and strain field (right), as a function of the junction thinness ρ for both the first-gradient model reconstruction (dotted lines) and the proposed one (solid lines).

η and ρ are small and $s = 0.00$. Indeed, a deterioration of the full-scale solution probably occurs when $\rho \rightarrow 0$ and $\eta \rightarrow 0$, considering the size of the mesh (more than 1 million nodes), the significant contrast between the smallest elements which are inside the junctions and the largest elements in the triangles and the fact that the structure is loaded in a floppy mode. This deterioration of the reference solution is perceptible only in the case of the strain-gradient approximate solution and for $s = 0.00$ because in this case the error is quite small ($\leq 5 \times 10^{-4}$).

Focusing on the strain field, Figure II.14b shows again the difference of accuracy between the two models. Similar trends can be noted for the two errors $\delta(\epsilon^C)$ and $\delta(\epsilon^{SG})$ even though they are less clear than for the displacement errors. For the first-gradient model with thick junctions, the strain error $\delta(\epsilon^C)$ steadily decreases at a classical rate of $\eta^{\frac{1}{2}}$ [Jikov *et al.*, 1994]. The junction thinness has the same effect on the first-gradient error $\delta(\epsilon^C)$ and delays the emergence of the asymptotic trend. Steady decreases are also observed for the strain error resulting from the strain-gradient model $\delta(\epsilon^{SG})$. However the rate of decrease is less clear. For thin junctions, it is close to $\eta^{\frac{1}{2}}$.

Trends when $\rho \rightarrow 0$ Now, our attention is turned to the effect of the junction thinness ρ . The errors are plotted in Figure II.15 as functions of this parameter for both models. The same organization is used as for Figure II.14.

When considering the first-gradient model, Figure II.15a shows that the displacement error $\delta(\underline{u}^C)$ increases significantly as ρ decreases until reaching a rather high plateau ($\delta(\underline{u}^C) \approx$

1×10^{-1}) beyond a ρ -threshold that depends on η .

In contrast, with the proposed strain-gradient model, the displacement error $\delta(\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}})$ varies only slightly when $\rho \rightarrow 0$. The junction thinness has less influence on $\delta(\underline{\mathbf{u}}^{\text{SG}})$ than the two other parameters, η and s . Remarkably, for $s = 0$, the error estimate is improved when junctions become thin whereas for $s = 0.05$ the error increases moderately and remains limited for thin junctions. Focusing on the strain field, Figure II.15b shows similar patterns for the strain errors $\delta(\epsilon^{\text{C}})$ and $\delta(\epsilon^{\text{SG}})$.

This comparison campaign shows that, for this metamaterial, the accuracy of the first-gradient model deteriorates quickly when $\rho \rightarrow 0$, even with a pronounced scale separation ($\eta = 1/60$). It also reveals that the proposed strain-gradient model is robust with respect to the junction thinness. Indeed, this model gives an approximate solution that is much more accurate than the one obtained with the first-gradient model whatever the junction thinness is.

II.6 Controlling displacement and strain concentration inside thin junctions

All developments in the present paper are achieved in the framework of linear elasticity which assumes small displacements as well as small strains at both macroscopic and microscopic scales. As strain-gradient effects become significant only when junctions are thin, maximum displacements and strains inside junctions may become singular. Hence, their asymptotic behaviour when $\rho \rightarrow 0$ is investigated in this section. First, the behaviour of corrector fields is presented and asymptotic trends are obtained numerically. Second, these trends are compared to the full-scale solution from Section II.5, confirming predictions from the homogenized solution. Finally, an asymptotic regime for ρ and η is identified, ensuring that strains, as well as displacements, remain bounded while strain-gradient effects remain significant.

II.6.1 Prediction of the homogenized model

Expected scaling of strains in a wedge for a prescribed displacement at the tip As already pointed out in Section II.4.1, for a prescribed force resultant at the tip of a wedge, the maximum strain scales as ρ^{-1} (Figure II.6). Computing the corresponding strain energy inside the wedge indicates that the corresponding stiffness scales as $1/|\log \rho|$. Consequently, a prescribed displacement at the tip of the wedge will generate a strain scaling as $1/|\rho \log \rho|$. Reasoning similarly, a couple prescribed at the tip generates a strain scaling as ρ^{-2} . The corresponding stiffness scales as ρ^2 . Hence, for a rotation prescribed at the tip, the strain will scale as $\rho^0 = 1$.

First-order correctors Figures II.16 shows the maximum displacement inside the unit cell for each unit macroscopic strain \mathbf{E} . It appears that for a wide range of junction thinness ρ and for all components of \mathbf{E} , the maximum displacement remains bounded of the order

of 3. This is in agreement with the loading of the corresponding auxiliary problem (II.8). Indeed, the latter is equivalent to a prescribed displacement $\mathbf{E} \cdot \underline{\mathbf{y}}$ applied on the unit cell boundary, up to periodic boundary conditions. Hence triangles and rhombi are loaded by imposed displacement at their tips. Compatible displacements in all polygons generate a quasi rigid motion of the solids and correspond to a floppy mode, whereas, incompatible displacements inside at least one polygon corresponds to a stiff mode. This explains the scalings of the maximum strain inside the unit cell plotted for each component of \mathbf{E} as a function of ρ in Figure II.17. As E_{11} and E_{12} are floppy modes, junctions are only loaded by relative rotations and the maximum strain remains bounded for all ρ . Conversely, for the stiff mode E_{22} , incompatible prescribed displacements generate a maximum strain inside junction scaling as $1/|\rho \log \rho|$.

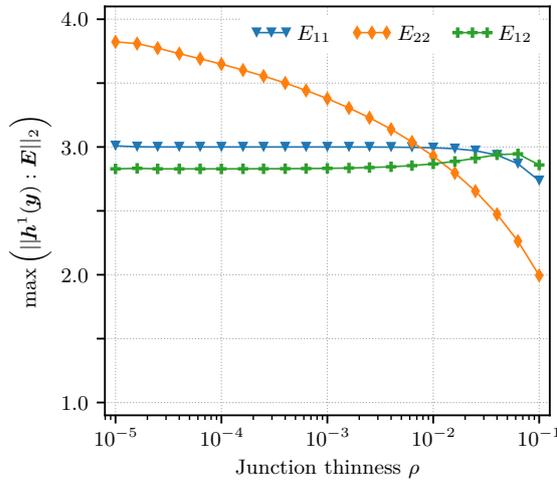


Figure II.16 – Maximum displacement on \mathcal{Y} of the corrector \mathbf{h}^1 produced by each unit macroscopic strain component as a function of the junction thickness ρ .

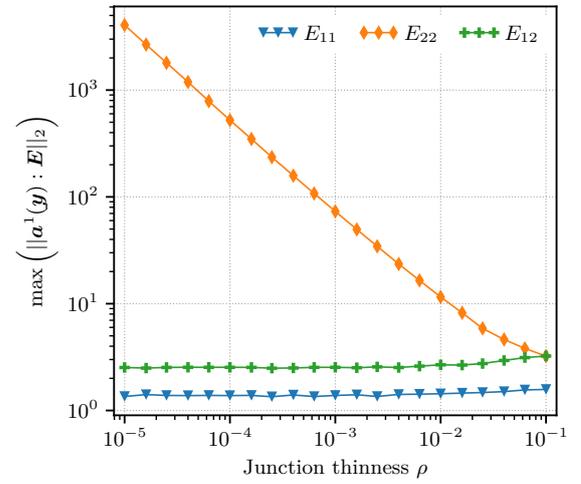


Figure II.17 – Maximum strain on \mathcal{Y} of the corrector \mathbf{a}^1 produced by each unit macroscopic strain component as a function of the junction thickness ρ .

Second-order correctors A similar analysis is conducted for the strain-gradient correctors which were retained in Section II.4.3 for our strain-gradient homogenized model: K_{111} , K_{112} and K_{121} . Again, Figure II.18 shows that the displacement correctors remain bounded⁸. The loading of the second-order auxiliary problem (II.19) is more complex. Nevertheless, let us point out that for floppy modes, the body load in (II.19) almost vanishes when $\rho \rightarrow 0$. Hence, the dominating load is the prescribed strain \mathbf{p}^1 . The latter enforces incompatible relative motion of the triangles and rhombi in relation with each components of the strain-gradient. As we have only retained stiff strain-gradient modes in the homogenized model, the maximum strain inside the unit cell scales as $1/|\rho \log \rho|$, as pictured in Figure II.19.

Homogenized solution Considering now the expansions of the displacement (II.24) and the strain (II.25) we can already conclude that if the pantographic material is loaded on a stiff

8. For K_{111} and $\rho < 10^{-4}$, a small numerical discrepancy is observed.

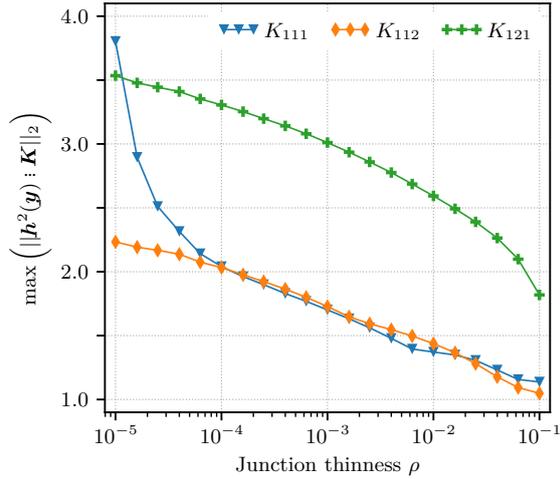


Figure II.18 – Maximum displacement on \mathcal{Y} of the corrector \mathbf{h}^2 produced by each significant strain-gradient component as a function of the junction thickness ρ .

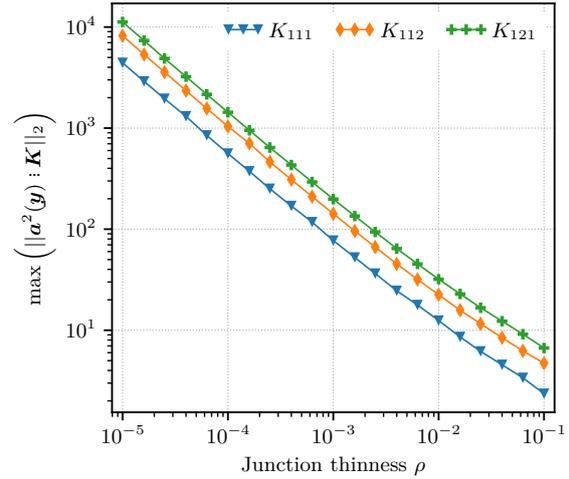


Figure II.19 – Maximum strain on \mathcal{Y} of the corrector \mathbf{a}^2 produced by each significant strain-gradient component as a function of the junction thickness ρ .

mode, the total displacement will remain bounded but the maximum strain inside junction will diverge as $1/|\rho \log \rho|$. The analysis is different when the pantographic material is loaded on a floppy mode. Again, following expansion (II.24), the displacement will remain bounded when $\rho \rightarrow 0$. However, there will be two competing contributions in the expansion of the strain (II.25): the first-gradient term will remain of order 1 and the strain-gradient term will scale as $\frac{\eta}{|\rho \log \rho|}$.

II.6.2 Maximum displacement and strain in full scale simulations

The predictions from the homogenization regarding maximum displacement and strain are now compared to the full-scale simulations conducted in Section II.5 as a function of η , ρ and for two relative positions of the microstructure s .

As expected, the maximum displacement is always measured in the vicinity of the boundary where the displacement is applied (Figure II.12) and is very close to its amplitude u^d . Furthermore, Figure II.20 shows the maximum strain normalized with the applied displacement u^d as a function of ρ . Two ranges of junction thickness may be distinguished. For rather thick junctions, the maximum strain is around ⁹ 0.3 and is independent of η as well as s . This is when the first-order corrector is dominating in the expansion of the strain (II.25). The maximum is then located rather in the middle of the domain, corresponding to locations where E_{11} is maximum. Conversely, for rather thin junctions, the maximum strain follows the scaling law $\frac{\eta}{|\rho \log \rho|}$, again for both microstructure relative position s . The maximum location is close to the boundaries where the strain-gradient K_{111} is maximum. We conclude that the smaller is the scale ratio, the broader is the range of junction thickness where the strain remains bounded.

9. The fact that the maximum strain (0.3) is below the average strain (1.0) is possible because the pantographic material contains voids.

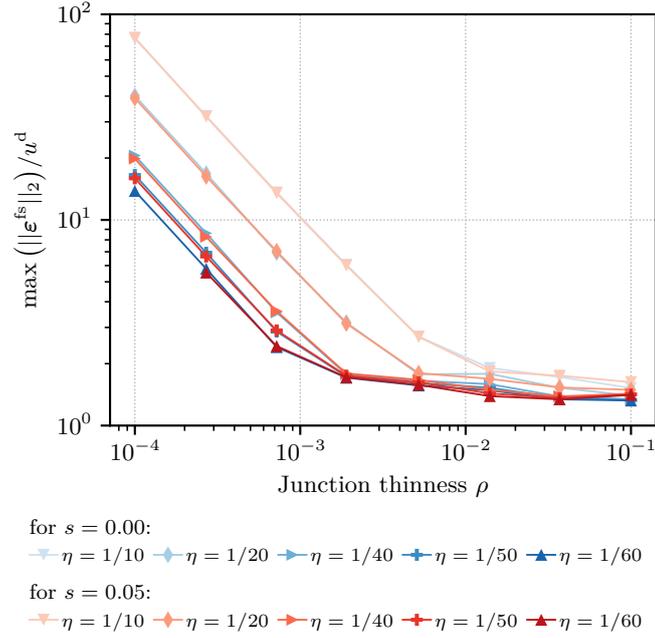


Figure II.20 – Maximum strain normalized with u^d in the full-scale benchmark problem as a function of ρ for several scale ratios η .

II.6.3 Asymptotic regime ensuring bounded strains and displacements

Up to now, the influence of two small parameters on the effective behaviour of the pantographic material were investigated independently. We have just shown that, as long as $\eta \lesssim |\rho \log \rho|$, the asymptotic expansion of the strain indicates, and Figure II.20 confirms, that the maximum strain will remain bounded. This suggests a natural choice of asymptotic regime ensuring that both displacement and strain remain bounded:

$$\eta \sim |\rho \log \rho| \quad (\text{II.54})$$

There remains to check if this scaling preserves strain-gradient effects at the macroscopic scale. Recall that we have shown in Section II.4.2 that the three intrinsic lengths retained in our strain-gradient homogenized model scale as $\ell^\rho \propto \frac{\eta}{\rho \sqrt{|\log \rho|}}$. Introducing the chosen scaling (II.54) between η and ρ yields

$$\ell^\rho \propto \sqrt{|\log \rho|}. \quad (\text{II.55})$$

Figure II.21 presents the three intrinsic lengths computed from the numerical homogenization taking into account (II.54). It appears clearly that they remain of the same order as the typical size of the domain.

Finally, it is of interest to have an estimate of the loads the pantographic material made of compliant junctions may carry with this specific scaling. As already mentioned in Section II.4.1 the first gradient \mathbf{C}^ρ scales as ρ^2 for a floppy mode. Furthermore, in Section II.4.3 we showed that $\mathbf{D}^{*\rho}$ scales as $1/|\log \rho|$. Hence, its corresponding strain-gradient energy scales as $\eta^2 \mathbf{D}^{*\rho} \propto \rho^2 |\log \rho|$. We conclude that, when the pantographic material is loaded on

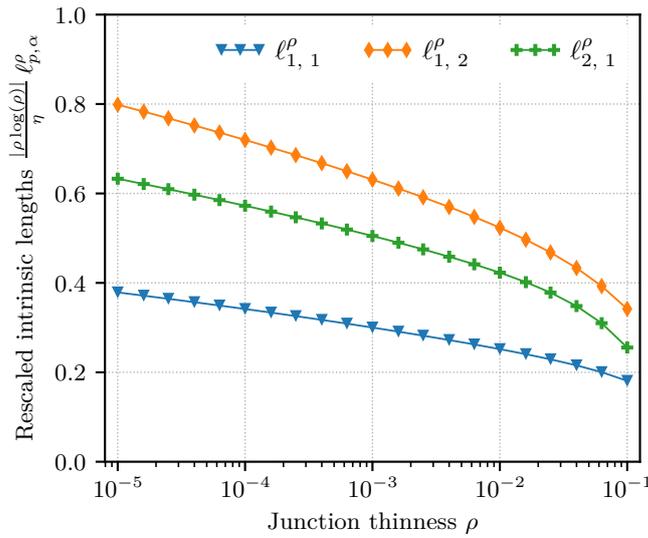


Figure II.21 – Intrinsic lengths assuming $\eta = |\rho \log \rho|$.

a floppy mode, applied loads $\underline{\mathbf{F}}$ must scale as $E\rho^2 |\log \rho|$, where E is the Young modulus of the constitutive material, so that the displacement remains of order 1. This scaling of the load may look rather stringent, it is nevertheless typical of the bending energy in slender structures such as beams and plates.

II.7 Conclusion

In this paper, an architected metamaterial called pantographic material made of polygons connected by compliant junctions was investigated. Contrary to architected materials where junctions are assumed to be perfect and which can thus be described by a discrete modelling, the structure we consider is made of a single and continuous linear elastic material. This enables simple fabrication, favouring thus a future experimental campaign. It also enables to study the effects of some modification of the internal geometry, favouring thus a future topology optimization, for instance for generating meta-materials featuring the strongest strain-gradient effects [Calisti *et al.*, 2021]. Contrary also to structures based on very slender elements, which can still be described by a discrete modelling, the structure we consider contains only very localized thin parts: the junctions. It is then less subject to local buckling, a phenomenon that drastically reduces the practical use of structures based on slender bars. The counterpart is the need for a tool for computing the higher-order contributions in the elastic energy when the structure cannot be described by a discrete modelling.

To that aim, a homogenization scheme based on higher-order contributions from the two-scale asymptotic expansion was suggested. When applied to the pantographic material made of compliant junctions, two scalings of the first-gradient homogenized stiffnesses come out as functions of the junction thickness ρ , stiff modes scaling as $\frac{1}{|\log \rho|}$ whereas floppy modes scaling as ρ^2 . This motivated the introduction of higher-order terms of the asymptotic

expansion. Whereas the second-order homogenized tensor may not be positive in general, it appeared that keeping significant contributions from the gradient of the eigenstrains of the first-order homogenized tensor ensures the positivity and the well-posedness of the proposed homogenized model.

The predictions from the homogenization scheme were investigated in detail and validated against full-scale numerical simulations. For a fixed junction thinness, convergence rates predicted by the classical homogenization theory were retrieved. However, when junctions are becoming thinner the convergence is delayed and the classical homogenization scheme yields irrelevant predictions. On the contrary, the strain-gradient homogenization scheme that we propose delivers very good error estimates for either thin or thick junctions for a boundary value problem with a clamped boundary, which is known to challenge higher-order homogenized models.

Furthermore, we have checked that the relative position of the unit cell does not have a significant influence on the quality of the prediction. Our results suggest that, even when the junction thickness tends to zero, the influence of the relative position of the microstructure on the accuracy of the proposed strain-gradient type approximate solution remains limited. Consequently, for microstructures that lead to significant strain-gradient effects, it seems unnecessary to muffle the influence of the microstructure relative position with a costly operation of averaging over all its possible values in the definition of the strain-gradient model.

Even if the strain inside the junctions tends to infinity as their thinness tends to zero, we showed that the choice of a proper scaling for the scale ratio and the junction thinness ensures that both displacement and strain remain small in the whole pantographic material while strain-gradient effects remain significant. This comforts the idea that a linear elastic regime exists for reasonable loadings. Recall that, we cannot exclude bifurcations because the analysis was only achieved in the linearised framework. Nevertheless, we recently conducted experimental tensile tests on laser-cut samples. They confirmed the existence of a linear regime with significant strain-gradient effects.

Finally, our full-scale numerical simulations has shown the limitation of such numerical simulations for studying the behaviour of microstructured materials when they lead to strain-gradient effective behaviours. Indeed such behaviours appear only when the first-gradient stiffness tensor is almost degenerate which needs the presence of very compliant parts inside the unit cell. These parts must be very finely meshed. As, on the other hand, homogenization takes sense only when the number of unit cells is very large, we get a huge number of degrees of freedom and a poorly conditioned system. We are thus quickly limited both in the number of cells and in the thinness of junctions. This observation emphasizes the need for a trustful macroscopic model, that is, the need for a safe upscaling method. We have suggested here a projection method and validated it on a benchmark problem. However, we know that this method may fail [Jakabčín et Seppecher, 2020] for some microstructures which need to be described by an enriched continuum model. Future works should then establish sufficient hypotheses for ensuring that our projection method provides a good approximation of the

II. SCHÉMA D'HOMOGENÉISATION D'ORDRE SUPÉRIEUR POUR L'ÉLASTICITÉ DE SECOND GRADIENT

global displacement of a microstructured material.

Chapitre III

Application du schéma d'homogénéisation à deux microstructures auxétiques

III.1	Introduction	46
III.2	Étude de la microstructure « carrés auxétiques »	48
III.2.1	Présentation de la microstructure	48
III.2.2	Élasticité du premier ordre	51
III.2.3	Élasticité du second ordre	55
III.2.4	Synthèse et discussion : Modélisation du comportement élastique effectif	63
III.3	Étude de la microstructure <i>triangles auxétiques</i>	64
III.3.1	Présentation de la microstructure	64
III.3.2	Adaptation du schéma d'homogénéisation pour une microstructure non centro-symétrique	67
III.3.3	Résultats : Élasticité du premier ordre	69
III.3.4	Élasticité du second ordre : tenseurs d'élasticité D et B	73
III.3.5	Analyse de l'opérateur d'élasticité complet	76
III.3.6	Synthèse	87
III.4	Conclusion partielle et perspectives	88

III.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons utiliser le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur présenté et validé dans la partie précédente pour étudier deux autres microstructures qui sont en apparence similaires. L'objectif de cette étude numérique est de vérifier si l'une et l'autre permettent d'obtenir des effets de second gradient visibles à l'échelle macroscopique. Nous allons constater que ces microstructures engendrent des comportements élastiques macroscopiques de nature très différentes : seulement pour l'une des deux microstructures, le matériau architecturé présente des effets de second gradient. Le cadre de travail est le même que celui du chapitre précédent : les deux microstructures sont périodiques, planes et constituées d'un seul matériau au comportement élastique, linéaire et isotrope ; l'homogénéisation est réalisée avec l'hypothèse des petites perturbations.

Les deux microstructures se composent de carrés, pour l'une, et de triangles équilatéraux, pour l'autre, reliés entre eux par de fines jonctions au niveau de leurs sommets, comme illustré Figure III.1. Ces géométries sont couramment appelées *rotating squares* et *rotating triangles*. Nous les appellerons, dans ce manuscrit, microstructure « carrés auxétiques » et microstructure « triangles auxétiques ». L'utilisation de ces microstructures pour l'obtention d'un comportement élastique particulier a été proposée pour la première fois par [Grima et Evans \[2000\]](#). Dans cet article, ces microstructures sont présentées comme un moyen d'obtenir un comportement effectif auxétique (coefficient de Poisson apparent $\nu < 0$). Plus précisément, dans le cas idéalisé où l'on suppose que les polygones sont rigides et que les jonctions se comportent comme des pivots élastiques, on obtient avec ces deux microstructures un coefficient de Poisson égal à -1 (Figure III.2). Cela est vrai quel que soit le degré de déploiement de la microstructure (angle formé par deux carrés ou triangles adjacents). Le caractère auxétique est moins prononcé lorsque les carrés ont une raideur finie [[Grima et al., 2007](#)]. Avec les géométries de microstructures que nous proposons, le coefficient de Poisson tend vers -1 lorsque les jonctions deviennent fines.

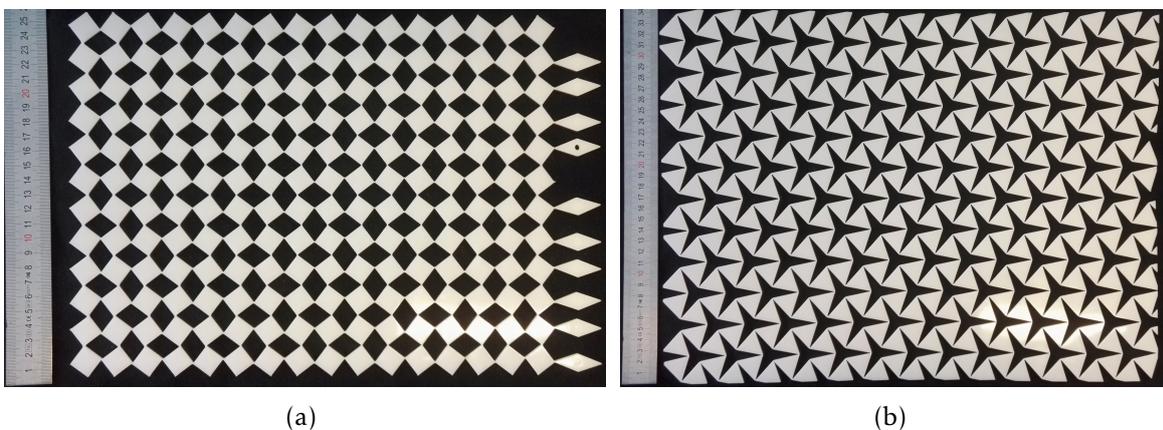


FIGURE III.1 – Illustration des deux microstructures étudiées dans ce chapitre : (a) *carrés auxétiques*, et (b) *triangles auxétiques*. Photographies d'échantillons fabriqués par découpe laser.

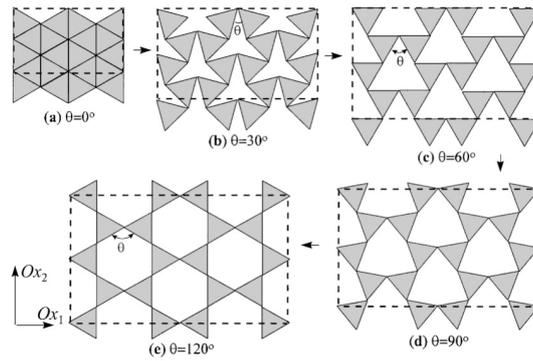


FIGURE III.2 – Illustration du comportement auxétique particulier ($\nu = -1$) obtenu avec la microstructure *triangles auxétiques*, dans le cas idéalisé. Soumise à un chargement uniaxial dans la direction Ox_1 , la microstructure se déploie et l'on observe une dilatation isotrope. Illustration extraite de [Grima et Evans, 2000].

Dans le cadre de ces travaux, ce comportement auxétique particulier ($\nu \simeq -1$) est intéressant car il correspond à un mode mou de dilatation isotrope. Ainsi, ces microstructures sont de bonnes candidates pour l'obtention d'un milieu architecturé sensible au gradient de dilatation isotrope. Il s'agit de la principale motivation du choix de ces deux microstructures. Un modèle d'élasticité de second gradient particulier, dans lequel les seuls effets de second gradient présents sont dus à l'inhomogénéité de l'état de dilatation, a été proposé et étudié de façon théorique [Eremeyev et al., 2021]. Par contre, cette étude théorique ne s'accompagne pas d'exemples de milieux architecturés se comportant ainsi. Le travail proposé ici peut apporter un complément pratique à ces travaux théoriques. Enfin, ces microstructures semblent être pertinentes si l'on veut concevoir un milieu architecturé qui présente des effets élastiques de second gradient même en grandes transformations. Il semble en effet possible de conserver le mode mou de dilatation isotrope lors du déploiement de la microstructure.

Ces microstructures ont fait l'objet de nombreux travaux qui s'intéressent à leur caractère auxétique [Kolken et Zadpoor, 2017; Grima et Evans, 2006; Grima et al., 2007; Taylor et al., 2014; Shan et al., 2015; Mizzi et al., 2020]. Par ailleurs, de nombreuses variations de ces géométries ont été proposées, avec d'autres formes des polygones [Grima et al., 2005, 2012; Grima-Cornish et al., 2021], différentes formes de jonctions [Velásquez et al., 2021; Sorrentino et al., 2021] ou encore des microstructures hiérarchiques [Dudek et al., 2017; Tang et Yin, 2017]. Dans [Agnelli et al., 2019], une procédure d'optimisation topologique visant à obtenir un comportement auxétique a abouti à une microstructure semblable à la microstructure *carrés auxétiques* présentée ici.

Plus récemment, des essais élémentaires réalisés sur des échantillons de microstructure de type *carrés auxétiques* ont mis en évidence l'existence d'une longueur interne qui a une forte influence sur le comportement élastique macroscopique [Coulais et al., 2018; Kadic et al., 2018]. Cela a soulevé la question de la possibilité de définir un milieu homogène équivalent, sur la base d'un milieu généralisé, capable de rendre compte de l'existence de cette longueur interne.

La description des transformations admissibles lorsque l'on utilise ces matériaux architecturés qui ont un mode mou de déformation peut s'avérer difficile et des travaux sont menés dans cette direction [Zheng *et al.*, 2021; Czajkowski *et al.*, 2021]. En particulier, pour les microstructures qui engendrent un mode mou de dilatation isotrope comme celles considérées ici, Czajkowski *et al.* [2021] proposent d'utiliser une transformation conforme pour décrire la réponse cinématique visible à l'échelle macroscopique. Un modèle d'élasticité dans lequel intervient le gradient de dilatation est construit à partir de cette hypothèse cinématique. Ce modèle est utilisable en grandes transformations et cette approche a l'avantage d'aboutir à une description simple du milieu effectif qui n'implique que des grandeurs scalaires. On observe deux limites à ces travaux :

- Les modules d'élasticité ne sont pas définis de manière explicite ;
- Ce qui est présenté laisse penser que le gradient de dilatation a une influence similaire pour les deux microstructures que nous considérons.

L'application du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur présentée dans ce chapitre permet de compléter ces résultats. Puisque l'homogénéisation permet de faire un lien direct entre la microstructure continue et le comportement effectif, nous pouvons observer l'influence de la finesse des jonctions sur les raideurs associées à la dilatation (isotrope) et au gradient de dilatation. De plus, nous allons constater que des effets de second gradient marqués liés au gradient de dilatation sont présents dans le cas de la microstructure *carrés auxétiques* mais absents dans l'autre cas.

Les microstructures *carrés auxétiques* puis *triangles auxétiques* sont respectivement étudiées Section III.2 et Section III.3. Dans les deux cas nous suivons une approche similaire à celle employée pour la microstructure de pantographe. Pour les deux microstructures, le schéma d'homogénéisation est appliqué pour un ensemble de configurations plus ou moins déployées, en faisant varier la finesse des jonctions, afin d'observer l'influence de ces deux paramètres sur le comportement élastique macroscopique.

III.2 Étude de la microstructure « carrés auxétiques »

III.2.1 Présentation de la microstructure

Géométrie de la microstructure carrée La microstructure « carrés auxétiques » se compose de carrés tous identiques reliés entre eux par leurs sommets, par de fines jonctions. L'orientation de chaque carré par rapport aux carrés adjacents est mesurée par l'angle d'ouverture θ . La figure III.3 représente cette microstructure pour trois valeurs de l'angle θ : 5° , 25° et 45° . On s'intéresse à des configurations de la microstructure telles que $\theta \in]0; 45^\circ]$. Plus cet angle est grand, plus la microstructure est déployée. Le cas limite $\theta = 45^\circ$ correspond à une configuration particulière dans laquelle les carrés forment un damier. De ce fait, nous appellerons *configuration damier* cette configuration. La géométrie de la microstructure dépend de trois paramètres indépendants : la longueur des côtés des carrés a , l'angle d'ouverture θ et la finesse de jonction ρ , un nombre sans dimension. Ces mesures sont représentées Figure III.4.

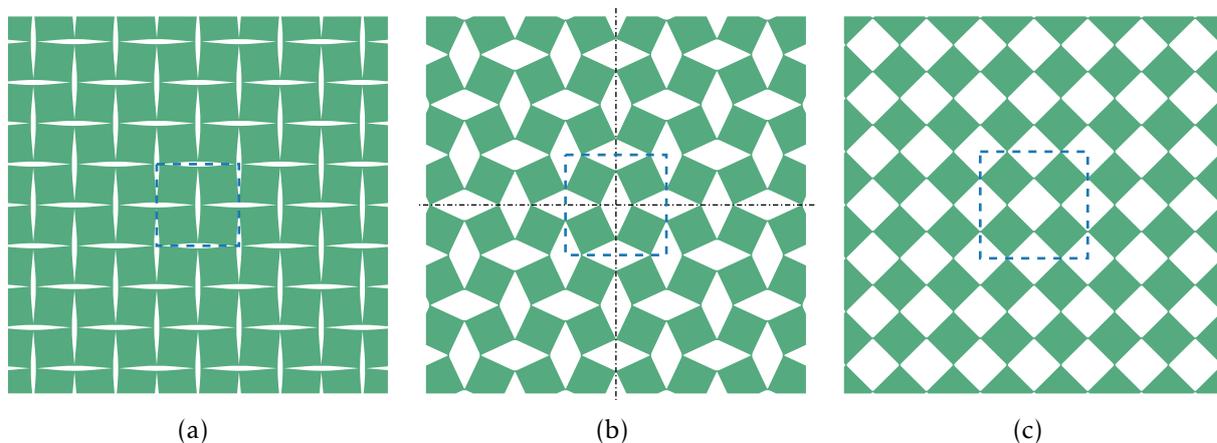


FIGURE III.3 – Géométrie de la microstructure des carrés auxétiques dans trois configurations : (a) $\theta = 5^\circ$ microstructure presque complètement rétractée ; (b) $\theta = 25^\circ$, configuration intermédiaire ; (c) $\theta = 45^\circ$ microstructure complètement déployée, configuration damier. Contour d'une cellule de base représenté en bleu et deux plans de symétrie de la microstructure représentés sur (b).

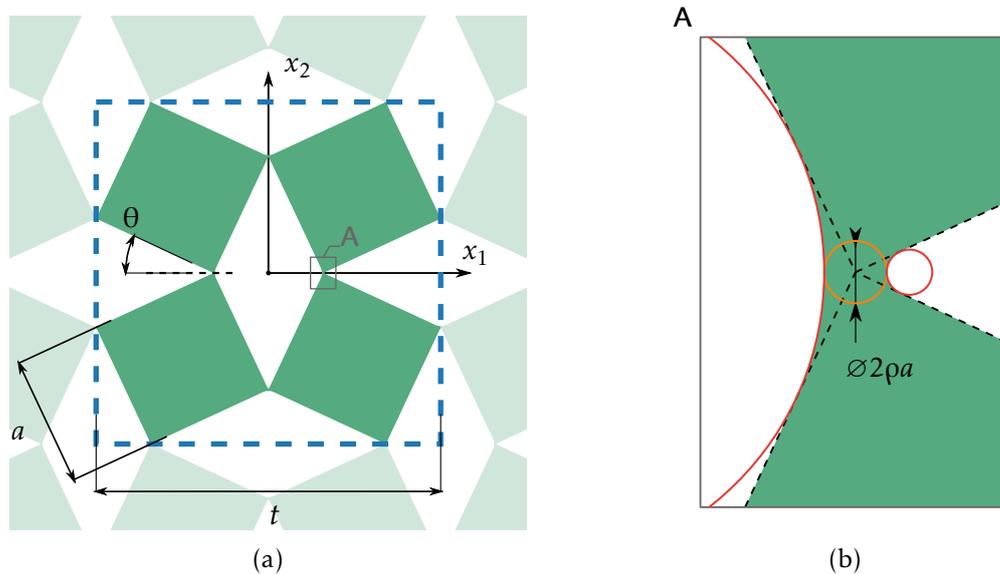


FIGURE III.4 – Modélisation géométrique de la microstructure carrés auxétiques. (a) Cellule unitaire et (b) construction géométrique des jonctions.

Les jonctions, situées aux sommets des carrés, sont construites en employant le même procédé de construction géométrique que pour la microstructure de pantographe. La Figure III.4b illustre la construction géométrique d'une jonction. Du fait de la présence de ces jonctions, la microstructure est un solide élastique connexe. La finesse de jonction ρ correspond au rapport entre le rayon du cercle inscrit dans chaque jonction (en orange Figure III.4b) et la largeur des carrés a .

Cellule de base La cellule de base, utilisée pour modéliser cette microstructure périodique et appliquer le schéma d'homogénéisation, est un carré de côté t . Sa géométrie est représentée Figure III.4a. La longueur t s'exprime en fonction des paramètres géométriques de la microstructure :

$$t = 2a(\cos \theta + \sin \theta) = 2a \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right), \text{ pour } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{III.1})$$

Plus la microstructure est déployée, plus la cellule de base est large. En effet, t est une fonction croissante de θ et varie entre $2a$ pour $\theta \rightarrow 0^\circ$ et $2\sqrt{2}a$ pour $\theta = 45^\circ$.

Matériau constitutif La microstructure est constituée d'un matériau homogène doté d'un comportement élastique, linéaire et isotrope. Le reste de l'espace est vide, il n'y a pas de matrice souple autour de cette microstructure raide. Pour l'étude numérique, les valeurs suivantes sont utilisées : module de Young $E = 1 \text{ MPa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le choix d'un module de Young unitaire est sans conséquence sur les résultats puisque l'homogénéisation est réalisée dans le cadre de l'élasticité linéarisée.

Symétrie matérielle Cette microstructure est D_4 -invariante et donc centro-symétrique. En effet, les plans (1, 3) et (2, 3) (repère représenté Figure III.4a) sont deux plans de symétrie et la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe \underline{e}_3 laisse le milieu périodique invariant. Par conséquent, on prévoit que le milieu périodique obtenu avec cette microstructure est orthotrope à l'échelle macroscopique et que les directions 1 et 2 sont indiscernables dans le comportement élastique effectif. Les invariances possibles pour un milieu modélisé en 2-D et leurs conséquences sur les tenseurs d'élasticité, en élasticité linéaire de second gradient, sont décrites dans [Auffray et al. \[2015\]](#).

Étude paramétrique On considère un ensemble de configurations de la microstructure paramétrées par ρ et θ pour l'étude numérique du comportement élastique macroscopique de ce milieu architecturé. Pour la finesse de jonctions ρ , les valeurs considérées vont de 1×10^{-6} à 4×10^{-2} . Pour l'angle d'ouverture θ , les onze valeurs choisies sont uniformément réparties entre 5° et 45° . On considère que les carrés sont de taille unitaire ($a = 1 \text{ mm}$), quel que soit l'angle d'ouverture θ . Par conséquent, la taille de la cellule t varie en fonction de θ .

Dans le cas idéalisé d'une collection de solides rigides, c'est à dire à la limite $\rho \rightarrow 0$, tant que $\theta < 45^\circ$, l'angle d'ouverture θ augmente uniformément lorsque la microstructure est soumise à une dilatation macroscopique isotrope. Dans le cas présent, une telle transformation

engendre des déformations dans les jonctions. Les travaux présentés sont fait avec l'hypothèse des petites perturbations : nous étudions chaque configuration (ρ, θ) de manière isolée, en supposant que la microstructure est à chaque fois au repos.

L'objectif de cette étude paramétrique est double. On cherche d'une part à observer l'évolution du comportement homogène équivalent lorsque les jonctions sont amincies et que l'on tend vers la configuration asymptotique où les jonctions sont infiniment minces ($\rho \rightarrow 0$), comme cela a été fait précédemment pour la microstructure de pantographe. D'autre part, cette étude paramétrique vise à observer les variations du comportement élastique macroscopique en fonction du degré de déploiement de la microstructure (angle θ).

Pour mener cette étude, nous appliquons la procédure présentée en détail dans le chapitre précédent. Les valeurs numériques des tenseurs d'élasticité du premier ordre \mathbf{C} et du second ordre \mathbf{D} sont calculées numériquement pour chaque couple de paramètres (ρ, θ) . Nous aborderons d'abord le cas de l'élasticité du premier ordre, en particulier pour vérifier l'existence d'un mode mou, puis le cas des effets élastiques du second ordre. Les résultats sont présentés et analysés d'une manière similaire à ce qui a été réalisé pour la microstructure de pantographe.

III.2.2 Élasticité du premier ordre

Nous nous intéressons pour commencer aux raideurs effectives de premier ordre, représentées par le tenseur d'élasticité \mathbf{C} . Les valeurs numériques de ces raideurs sont calculées à l'aide du premier problème auxiliaire (II.8) avec, pour rappel :

$$\mathbf{C} = \left\langle \mathbf{a}^{1\top} : \mathbf{c} : \mathbf{a}^1 \right\rangle \quad (\text{III.2})$$

Comme la cellule unitaire est soumise à des déformations macroscopiques uniformes dans ce problème auxiliaire, nous observerons les réponses de la microstructure à de telles sollicitations.

III.2.2.1 Raideurs propres et déformations propres

Avant tout, définissons trois modes de déformation macroscopique particuliers. Ils sont définis par les déformations unitaires \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 qui leur sont associées :

$$[\mathbf{E}^1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{E}^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{E}^3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Ces modes de déformation sont illustrés Figure III.5 pour des déformations uniformes.

Le mode de déformation \mathbf{E}^1 correspond à la dilatation (ou contraction) isotrope, \mathbf{E}^2 est un cisaillement simple, dans les directions \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 , et le mode de déformation \mathbf{E}^3 est une autre déformation de cisaillement simple, que nous appellerons « contre-dilatation ». Les directions de déformations pour \mathbf{E}^3 sont tournées de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à celles de \mathbf{E}^2 . Ainsi, les

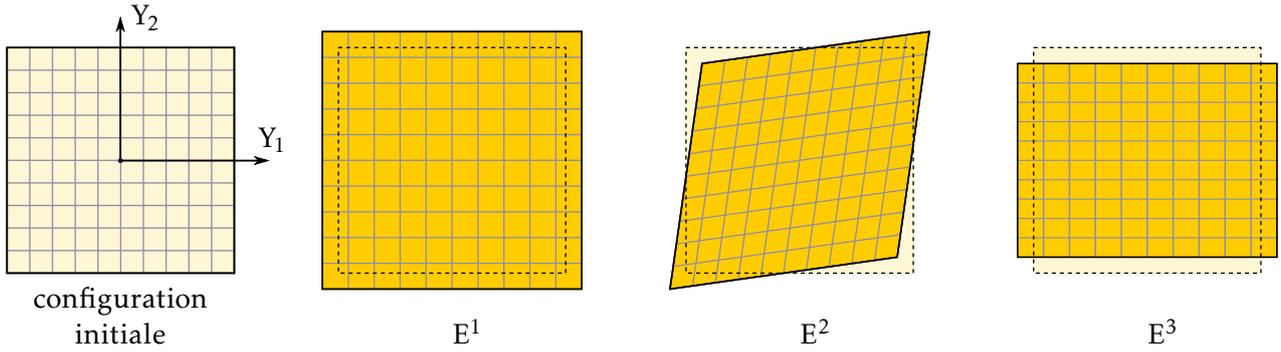


FIGURE III.5 – Transformation d'un carré muni d'une grille pour chacun des trois modes de déformation \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 . Dans chaque cas, la déformation \mathbf{E} est homogène. La configuration initiale est représentée en jaune clair avec un contour en pointillés. Amplitude des déformations : 0.2.

déformations unitaires $\{\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3\}$ forment une base orthonormée de l'espace des tenseurs de déformations linéarisées, notée \mathcal{B}^1 .

On considère que l'état de déformation au point \mathbf{Y} correspond au mode \mathbf{E}^i si $\mathbf{E}(\mathbf{Y})$ est proportionnel à \mathbf{E}^i . Dans cette section, nous nous intéresserons en particulier à des sollicitations uniformes dans chacun de ces modes.

Prévision théorique Du fait des invariances de la microstructure (sa classe de symétrie est D_4), il est prévu que le tenseur d'élasticité \mathbf{C} contienne uniquement 3 coefficients indépendants et que son expression matricielle dans la base canonique soit de la forme

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ & c_{11} & 0 \\ \text{sym.} & & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.4})$$

Si \mathbf{C} s'exprime sous la forme (III.4) dans la base canonique, alors nécessairement les déformations propres correspondent aux modes \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 et les raideurs propres associées sont respectivement $C_1 = c_{11} + c_{12}$, $C_2 = c_{33}$ et $C_3 = c_{11} - c_{12}$.

Résultats numériques Les déformations propres sont calculées à partir des valeurs numériques de \mathbf{C} pour chaque couple (ρ, θ) . Ces déformations propres, obtenues numériquement, correspondent effectivement aux modes de déformation \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 quelles que soient les valeurs des paramètres ρ et θ . Par conséquent, le tenseur d'élasticité \mathbf{C} est diagonalisé dans la base \mathcal{B}^1 :

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{E}^1 + C_2 \mathbf{E}^2 \otimes \mathbf{E}^2 + C_3 \mathbf{E}^3 \otimes \mathbf{E}^3 \quad (\text{III.5})$$

Les trois raideurs propres C_1 , C_2 et C_3 sont distinctes. Elles sont respectivement associées au mode de dilatation isotrope \mathbf{E}^1 , au mode de cisaillement pur \mathbf{E}^2 et au mode de contre-dilatation \mathbf{E}^3 .

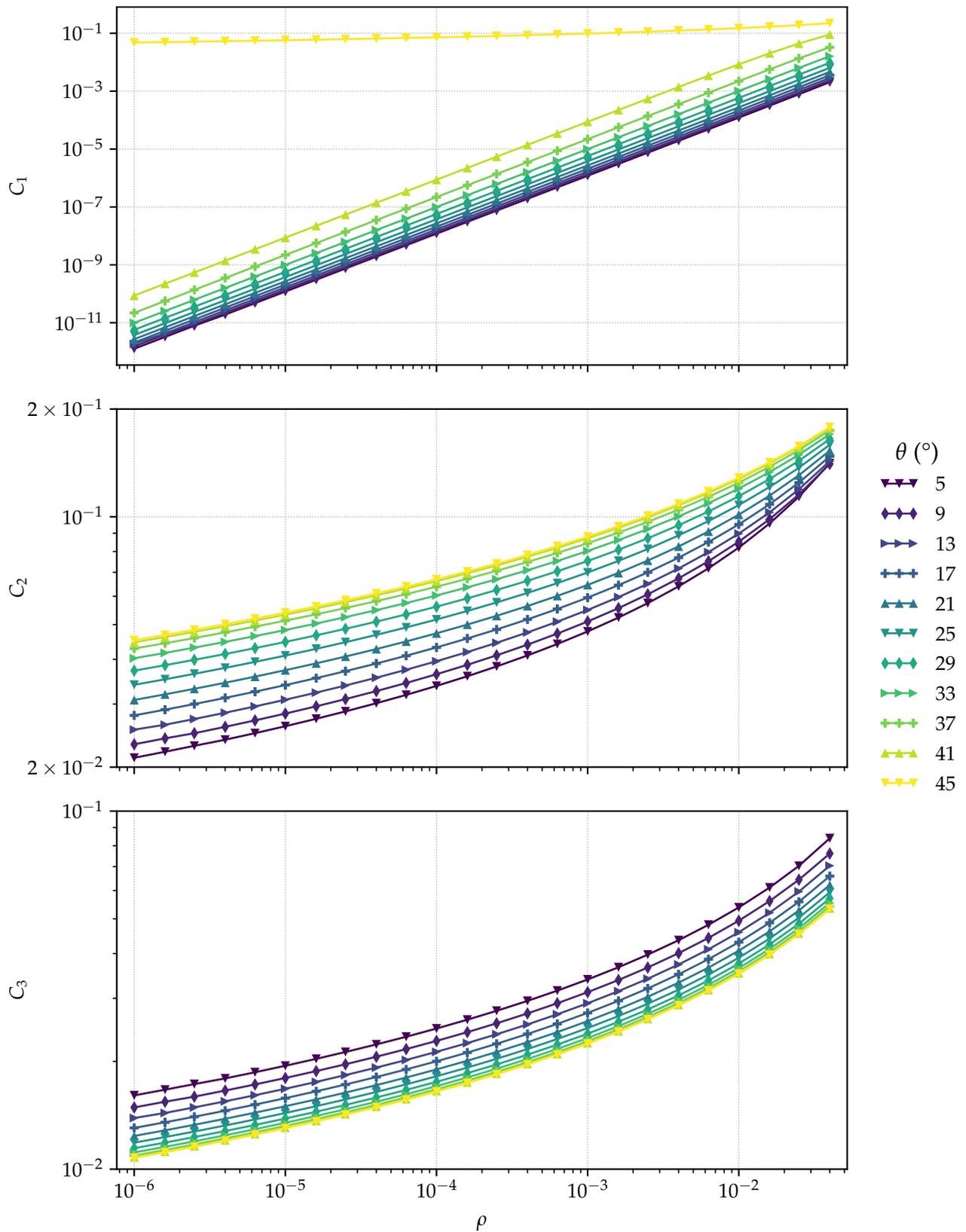


FIGURE III.6 – Évolution des raideurs propres de premier ordre en fonction de la finesse de jonction ρ pour la microstructure *carrés auxétiques*. Les couleurs indiquent l'angle d'ouverture θ de chaque configuration. Les déformations propres associées à C_1 , C_2 et C_3 correspondent respectivement aux modes de dilatation isotrope \mathbf{E}^1 , de cisaillement \mathbf{E}^2 et de contre-dilatation \mathbf{E}^3 .

La Figure III.6 représente l'évolution des trois raideurs propres en fonction de la finesse des jonctions ρ pour chaque angle d'ouverture θ . On observe deux régimes asymptotiques (lorsque $\rho \rightarrow 0$) significativement différents selon la valeur de l'angle d'ouverture θ .

Cas général : $\theta < 45^\circ$ Pour l'ensemble des configurations partiellement déployées ($\theta < 45^\circ$), les tendances observées sont similaires et la Figure III.6 révèle la présence d'un mode mou de déformation. Ce mode de déformation à très faible énergie correspond au mode de dilatation \mathbf{E}^1 . En effet, la raideur propre C_1 tend vers 0 beaucoup plus rapidement que les deux autres raideurs propres quand $\rho \rightarrow 0$. La tendance asymptotique est en ρ^2 pour la raideur du mode mou C_1 alors qu'elle est proche de $\frac{1}{|\log(\rho)|}$ pour les raideurs propres des modes raides C_2 et C_3 . Le mode mou peut être identifié sans ambiguïté dès que la finesse de jonction ρ est raisonnablement faible : l'écart entre la raideur C_1 et les raideurs C_2 et C_3 est déjà de l'ordre d'une décade, quel que soit $\theta < 45^\circ$, lorsque $\rho = 1 \times 10^{-2}$.

Cas particulier : $\theta = 45^\circ$ Lorsque la microstructure *carrés auxétiques* est dans la configuration damier ($\theta = 45^\circ$), quelle que soit la finesse de jonction ρ , les trois raideurs propres sont du même ordre de grandeur. Par conséquent, la dilatation isotrope \mathbf{E}^1 n'est plus un mode mou. Les variations des raideurs propres C_2 et C_3 en fonction de l'angle d'ouverture θ sont progressives y compris lors du passage à la configuration damier. À l'inverse, le passage à la configuration damier engendre un changement brusque pour la raideur propre C_1 liée à la dilatation isotrope. Pour $\theta = 45^\circ$, la décroissance de C_1 lorsque $\rho \rightarrow 0$ est beaucoup plus lente que la décroissance en ρ^2 observée dans les configurations où $\theta < 45^\circ$. Le régime de décroissance devient similaire à ceux observés pour les deux autres raideurs propres (de l'ordre de $\frac{1}{|\log(\rho)|}$). Il n'y a donc pas de mode de déformation macroscopique \mathbf{E} à très faible énergie dans cette configuration particulière.

III.2.2.2 Origine microscopique des différences de raideurs

Observons maintenant la réponse de la microstructure *carrés auxétiques* à une déformation macroscopique uniforme dans chacun des modes \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 . Cela permet comprendre l'origine des forts contrastes entre les raideurs effectives de premier ordre.

On considère trois sollicitations macroscopiques. Elles correspondent à une déformation macroscopique unitaire et uniforme dans chacun des modes \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 (dilatation, cisaillement et contre-dilatation). On choisit une microstructure partiellement déployée ($\theta = 25^\circ$) avec des jonctions relativement fines ($\rho = 0.01$). L'échantillon observé correspond à une cellule de base. On se place à l'échelle de la microstructure pour observer les déplacements et les déformations engendrés par ces sollicitations. Les déplacements sont donc normalisés par la taille de cellule t .

La réponse de la microstructure à chaque sollicitation \mathbf{E}^i est définie par le champ de déplacement total $\underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{E}^i}$:

$$\underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{E}^i} = \mathbf{E}^i \cdot \underline{\mathbf{y}} + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^i, \quad (\text{III.6})$$

conformément à la formule (II.40) établie lors de l'étude de la microstructure de pantographe, à partir de l'approximation (II.24). Puisque les champs de déformation macroscopique \mathbf{E}^i sont uniformes, seul le premier localisateur de déplacement \mathbf{h}^1 apparait. Le champ de déformation totale associé à $\underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{E}^i}$ est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{E}^i} = \nabla_y^s \underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{E}^i} = \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^i \quad (\text{III.7})$$

La figure III.7 illustre la réponse de l'échantillon de microstructure à chacune de ces sollicitations macroscopiques de premier gradient. Elle représente la norme du champ de déformation $\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{E}^i}\|_2$ sur la configuration déformée.

Analyse On constate que la dilatation uniforme génère peu de déformations dans la microstructure. Les carrés pivotent les uns par rapport aux autres pour accommoder cet état de déformation macroscopique, à la manière d'une collection de solides rigides. Par conséquent, les déformations sont localisées dans un voisinage restreint autour des jonctions. À l'inverse, les sollicitations de cisaillement \mathbf{E}^2 et de contre-dilatation \mathbf{E}^3 uniformes engendrent des déformations significatives dans de larges zones des carrés. De manière générale, ces deux phénomènes sont visibles quel que soit $\theta < 45^\circ$ et la différence de comportement subsiste quand $\rho \rightarrow 0$. En effet, y compris lorsque les jonctions sont très fines, on observe que les pointes des carrés, au voisinage des jonctions, subissent des déformations nettement plus grandes lors des sollicitations \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 . Cela explique que la dilatation isotrope \mathbf{E}^1 apparaisse comme un mode mou à l'échelle macroscopique lorsque $\theta < 45^\circ$.

Cas particulier $\theta = 45^\circ$ Dans le cas de la configuration damier $\theta = 45^\circ$, la réponse de la microstructure à la sollicitation de dilatation \mathbf{E}^1 diffère significativement de ce qui est représenté Figure III.7a pour une configuration partiellement déployée¹. Nous pouvons aisément comprendre ce qu'il se passe dans cette configuration particulière : à cause de l'alignement des jonctions sur un réseau carré (visible Figure III.3c), la dilatation macroscopique imposée ne peut plus être accommodée à l'aide de rotations relatives des éléments carrés. Par conséquent, les pointes des carrés sont mises en tension et subissent des déformations significatives. Cela aboutit à une raideur effective C_1 nettement plus élevée dans cette configuration $\theta = 45^\circ$, comparable aux deux autres raideurs propres C_2 et C_3 . Pour les sollicitations en cisaillement et en contre-dilatation (\mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3) la microstructure en configuration damier se comporte d'une manière similaire à ce qui est présenté pour $\theta = 25^\circ$ Figures III.7b et III.7c.

III.2.3 Élasticité du second ordre

À présent, intéressons-nous au tenseur d'élasticité du second ordre \mathbf{D} et à sa projection \mathbf{D}^* . On se restreint aux configurations paramétrées par (θ, ρ) telles que la microstructure est partiellement déployée ($\theta < 45^\circ$) afin qu'il y ait un mode mou de déformation macroscopique, en l'occurrence la dilatation isotrope \mathbf{E}^1 .

1. Cela pourrait être illustré par une figure placée en annexe dans la version définitive du manuscrit.

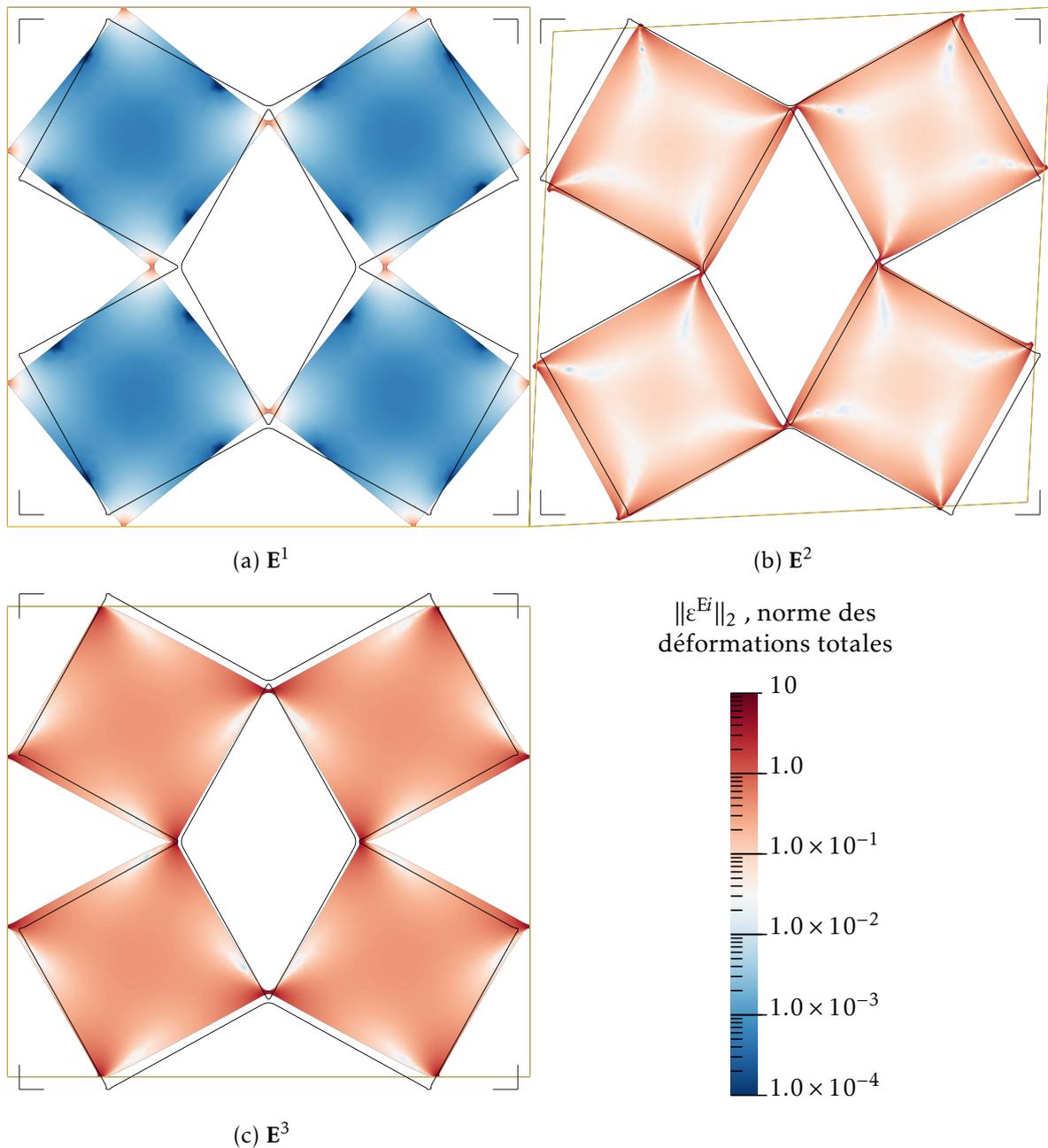


FIGURE III.7 – Champs de déformation générés dans la microstructure carrés auxétiques par chaque sollicitation de déformation macroscopique uniforme : E^1 , E^2 et E^3 . Les champs sont représentés sur la configuration déformée (déplacements réduits par un facteur 0.07 pour l'illustration). Paramètres géométriques : $\theta = 25^\circ$, $\rho = 0.01$. Sont également représentés : le contour de la microstructure dans la configuration initiale (en noir) ; les coins du domaine carré correspondant à l'échantillon dans la configuration initiale (en noir) et le contour de ce domaine déformé par la transformation macroscopique (en jaune).

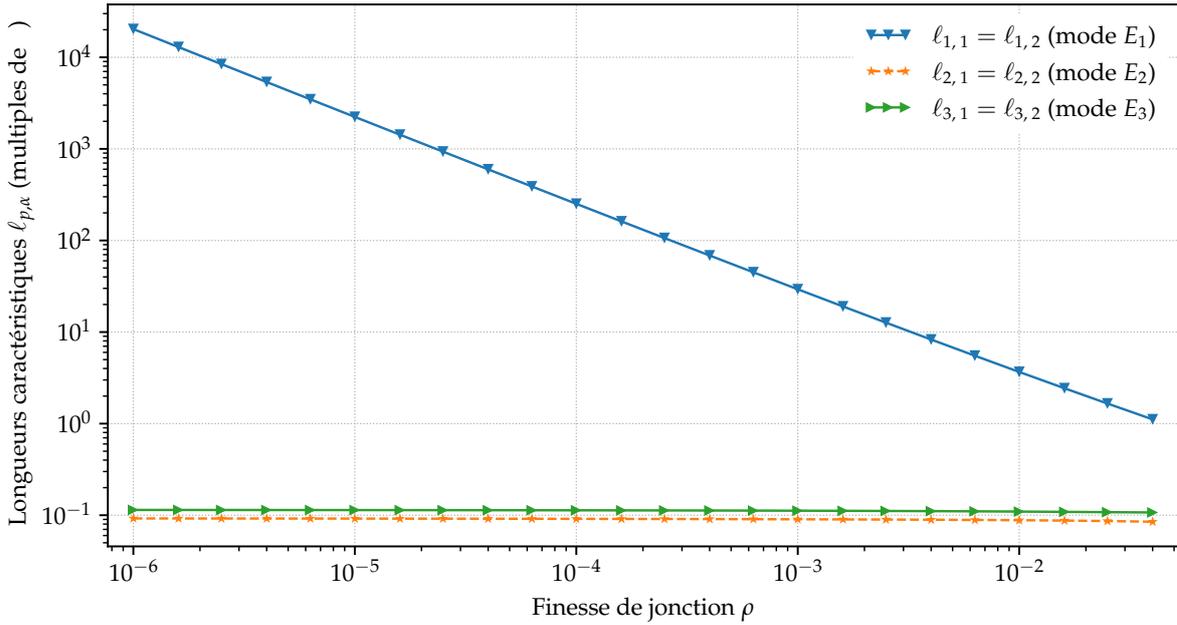


FIGURE III.8 – Longueurs intrinsèques calculées avant projection du tenseur de raideur de second gradient \mathbf{D} , pour $\theta = 25^\circ$. Les longueurs $\ell_{2,\alpha}$ sont complexes. Dans ce cas, le module est tracé avec des marqueurs \star et un trait pointillé.

Pour analyser la contribution du gradient de déformation macroscopique \mathbf{K} dans la densité d'énergie élastique homogénéisée, nous appliquons une méthode similaire à celle employée pour la microstructure de pantographe. La microstructure *carrés auxétiques* étant centro-symétrique, il n'y a pas de couplage avec la déformation macroscopique \mathbf{E} à prendre en compte.

III.2.3.1 Projection de \mathbf{D}

Longueurs caractéristiques avant projection Tout d'abord, les longueurs caractéristiques $\ell_{p,\alpha}$, définies par l'équation (II.44), sont calculées à partir du tenseur \mathbf{D} non projeté. Du fait de la D_4 -invariance de la microstructure, les deux longueurs $\ell_{p,1}$ et $\ell_{p,2}$ sont égales pour chaque mode de déformation E^p :

$$\ell_{p,1} = \ell_{p,2} = \eta \sqrt{\frac{(\mathbf{E}^p \otimes \mathbf{e}_1)^T : \mathbf{D} : (\mathbf{E}^p \otimes \mathbf{e}_1)}{C_p}}. \quad (\text{III.8})$$

Les valeurs obtenues numériquement sont conformes à ce résultat théorique.

La Figure III.8 représente l'évolution en fonction de ρ de ces longueurs caractéristiques, comptées en multiples de η , pour un angle d'ouverture de $\theta = 25^\circ$. Exprimer ces longueurs caractéristiques en multiples de η est équivalent à comparer ces longueurs caractéristiques à la taille de la cellule. On constate que, plus les jonctions sont fines, plus les longueurs $\ell_{1,\alpha}$ associées au mode mou \mathbf{E}^1 sont grandes par rapport à la taille de la cellule. À l'inverse, les longueurs $\ell_{3,\alpha}$ et le module des longueurs $\ell_{2,\alpha}$, qui sont complexes, demeurent nettement inférieures à la taille d'une cellule, quelle que soit la finesse des jonctions.

Étant donné ces observations, les deux modes de gradient de déformation associés au mode mou \mathbf{E}^1 sont conservés lors de la projection du tenseur d'élasticité de second ordre. Cette fois, contrairement au cas de la microstructure de pantographe, il n'y a pas de mode de second gradient qui est associé à un mode mou et pour lequel la longueur caractéristique est négligeable par rapport à la taille d'une cellule. Par ailleurs, ces résultats confirment également la pertinence de cette projection qui exclut de la densité d'énergie élastique les modes de gradient de déformation associés à des modes raides.

Modes de gradient de dilatation \mathbf{K} Deux modes de gradient de déformation sont définis : \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 . Ils sont tous deux associés au mode mou de dilatation isotrope \mathbf{E}^1 . Le mode \mathbf{K}^1 correspond à la variation dans la direction \underline{e}_1 de l'amplitude d'une déformation proportionnelle à la dilatation isotrope \mathbf{E}^1 . Le mode \mathbf{K}^2 correspond à une variation de déformation similaire, cette fois dans la direction \underline{e}_2 . Les gradients de déformation unitaires associés à ces deux modes sont également notés \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 :

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{E}^1 \otimes \underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \otimes \underline{e}_1 \quad \mathbf{K}^2 = \mathbf{E}^1 \otimes \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \otimes \underline{e}_2 \quad (\text{III.9})$$

soit, en notation vectorielle :

$$[\mathbf{K}^1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{K}^2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Ces gradients de déformation particuliers sont illustrés Figure III.9.

Le sous-espace engendré par \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 est noté $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$ et correspond à l'ensemble des gradients de dilatation isotrope.

Projection de \mathbf{D} Le tenseur d'élasticité de second gradient \mathbf{D} est projeté sur le sous-espace vectoriel $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$ en suivant la règle de projection (II.45). Cette projection permet de conserver uniquement les contributions de second gradient qui correspondent à un gradient de dilatation isotrope (mode \mathbf{E}^1) dans la densité d'énergie élastique homogénéisée.

La forme du tenseur d'élasticité de second ordre attendue dans le cas d'un milieu orthotrope (D_4 -invariant) est donnée par [Auffray et al. \[2015\]](#). On en déduit que le tenseur d'élasticité projeté \mathbf{D}^* doit s'exprimer ainsi :

$$\mathbf{D}^* = D_1^* (\mathbf{K}^1 \otimes \mathbf{K}^{1T} + \mathbf{K}^2 \otimes \mathbf{K}^{2T}) \quad (\text{III.11})$$

avec D_1^* l'unique raideur propre non nulle, de multiplicité deux. Cela signifie que les gradients de dilatation \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 sont associées à la même raideur D_1^* et sont découplés. Par

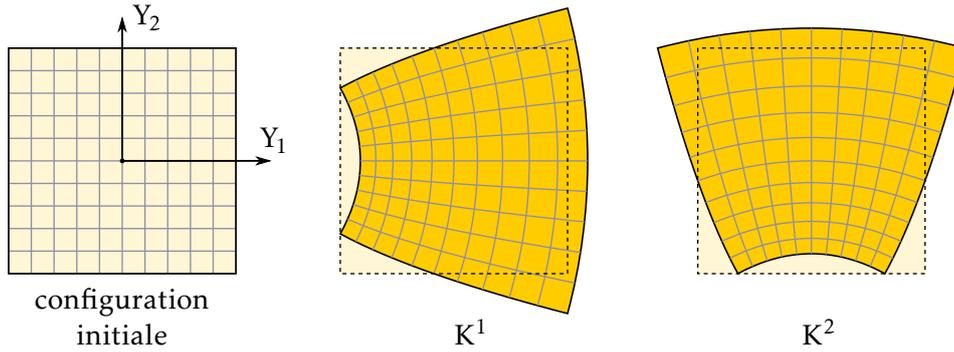


FIGURE III.9 – Déformée d'un carré soumis à un gradient de dilatation uniforme, \mathbf{K}^1 ou \mathbf{K}^2 . En supposant que le carré est de côté 2 mm, les configurations déformées représentées correspondent à des gradients \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 de norme 1 mm^{-1} : dans chaque cas, le niveau de dilatation varie linéairement entre -1.0 (contraction isotrope) et 1.0 . Les transformations sont choisies de sorte que la déformation et le déplacement soient nuls pour le point matériel au centre du carré.

conséquent, la raideur associée à un gradient de dilatation vaut D_1^* , quelle que soit la direction de variation.

Les résultats numériques obtenus sont conformes à la prévision III.11. Pour vérifier cela, on observe l'expression matricielle dans la base $\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$ de l'opérateur \mathbf{D}^* restreint à $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$. On vérifie que les termes extra-diagonaux sont négligeables et que les termes diagonaux sont presque égaux.

III.2.3.2 Réponse de la microstructure à un gradient macroscopique de dilatation isotrope

Considérons un échantillon de microstructure *carrés auxétiques* soumis à une cinématique macroscopique qui correspond à un gradient de dilatation uniforme.

Cet échantillon contient une cellule de base entière, au centre, et des parties des cellules situées à gauche et à droite de celle-ci. Les paramètres géométriques de la microstructure sont $\theta = 25^\circ$ et $\rho = 0.01$, comme dans le cas des sollicitations \mathbf{E}^i (Figure III.7).

La sollicitation macroscopique imposée est telle que le gradient de déformation macroscopique est uniforme et égal au gradient de dilatation unitaire \mathbf{K}^1 . La déformation macroscopique est donc proportionnelle à une dilatation isotrope (mode \mathbf{E}^1) avec une intensité qui varie linéairement dans la direction 1. Nous choisissons que la dilatation soit nulle au centre de la cellule de base entière. Les champs de déplacement total $\underline{\mathbf{u}}^K$ et de déformation totale $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^K$ induits par cette sollicitation macroscopique sont les suivants :

$$\underline{\mathbf{u}}^K = \frac{1}{2}\eta\widetilde{\mathbf{K}}^1 : (\underline{\mathbf{y}} \otimes \underline{\mathbf{y}}) + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : (\eta\mathbf{K}^1 \cdot \underline{\mathbf{y}}) + \mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}}) : (\eta\mathbf{K}^1) \quad (\text{III.12})$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^K = \nabla_y^s \underline{\mathbf{u}}^K = \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : (\eta\mathbf{K}^1 \cdot \underline{\mathbf{y}}) + \eta\mathbf{a}^2(\underline{\mathbf{y}}) : (\eta\mathbf{K}^1) \quad (\text{III.13})$$

Ces expressions sont issues de l'approximation (II.42). Les composantes de $\widetilde{\mathbf{K}}^1$ sont calculés à

partir des composantes de \mathbf{K}^1 à l'aide des relations (II.43) $\eta \mathbf{K}^1$ est le gradient de dilatation « perçu » par la microstructure, à l'échelle de la cellule de base, lorsque le gradient de dilatation est égal à \mathbf{K}^1 à l'échelle macroscopique. Une fois de plus, cela montre que les effets de second ordre, à l'échelle d'une cellule, vont tendre à disparaître lorsque le rapport d'échelle tend vers 0 à ρ fixé.

Dans les expressions précédentes, de façon un peu abusive, les champs macroscopiques non périodiques sont exprimés en fonction de la coordonnée \underline{y} . Il s'agit en fait de la position par rapport au repère associé à la cellule au centre de l'échantillon, sans périodicité.

La Figure III.10a illustre la réaction de l'échantillon à cette sollicitation macroscopique de gradient de dilatation. La séparation d'échelle choisie pour cette illustration est $\eta = 0.14$. Par conséquent, la déformation macroscopique varie linéairement entre $-0.14\mathbf{E}^1$ sur le bord gauche de l'échantillon et $0.14\mathbf{E}^1$ sur le bord droit. Pour avoir un élément de comparaison, la réponse du même échantillon à une dilatation macroscopique isotrope et uniforme égale à $0.14\mathbf{E}^1$ est représentée Figure III.10b.

Observations La sollicitation associée au gradient de dilatation \mathbf{K}^1 engendre des déformations significatives dans de larges zones de la microstructure. On observe encore un mouvement de rotation des carrés, comme dans le cas de la sollicitation de dilatation \mathbf{E}^1 . Cependant, l'amplitude de la rotation n'est pas uniforme. Pour compenser cela, les carrés doivent se déformer, en particulier dans les pointes au voisinage des jonctions.

Quelle que soit la finesse des jonctions, on observe que les zones dans lesquelles les déformations sont significatives sont bien plus étalées, autour de chaque jonction, dans le cas d'un gradient de dilatation \mathbf{K}^1 que dans le cas d'une dilatation uniforme \mathbf{E}^1 .

Par ailleurs, notons qu'une cinématique macroscopique associée à un gradient de dilatation dans la direction 2, \mathbf{K}^2 , induit une réponse semblable à celle représentée Figure III.10a pour un gradient de dilatation \mathbf{K}^1 . Il suffit de pivoter l'illustration III.10a de 90° pour observer la réponse d'un échantillon à une cinématique macroscopique associée au mode \mathbf{K}^2 .

Analyse Le champ de déformation observé Figure III.10a est très similaire au champ de déformation solution du second problème auxiliaire. En effet, le terme $\mathbf{a}^2(\underline{y}) \doteq (\eta \mathbf{K}^1)$ est prépondérant dans l'expression (III.13) du champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^K$, car la dilatation isotrope est un mode mou. Or la contribution principale dans la raideur D_1^* est liée à $\mathbf{a}^2(\underline{y}) \doteq (\eta \mathbf{K}^1)$. Ces illustrations permettent donc de comprendre pourquoi la raideur D_1^* , associée aux gradients de dilatation (\mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2), est grande par rapport à la raideur C_1 associée au mode mou \mathbf{E}^1 .

III.2.3.3 Raideur propre et longueur caractéristique associées à D^*

Raideur propre D_1^* La Figure III.11 représente l'évolution de la raideur propre de second ordre D_1^* en fonction de la finesse de jonction pour chaque configuration partiellement

2. Cela aboutit à : $\widetilde{\mathbf{K}}^1 = \underline{e}_1 \otimes (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \underline{e}_2 \otimes (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$.

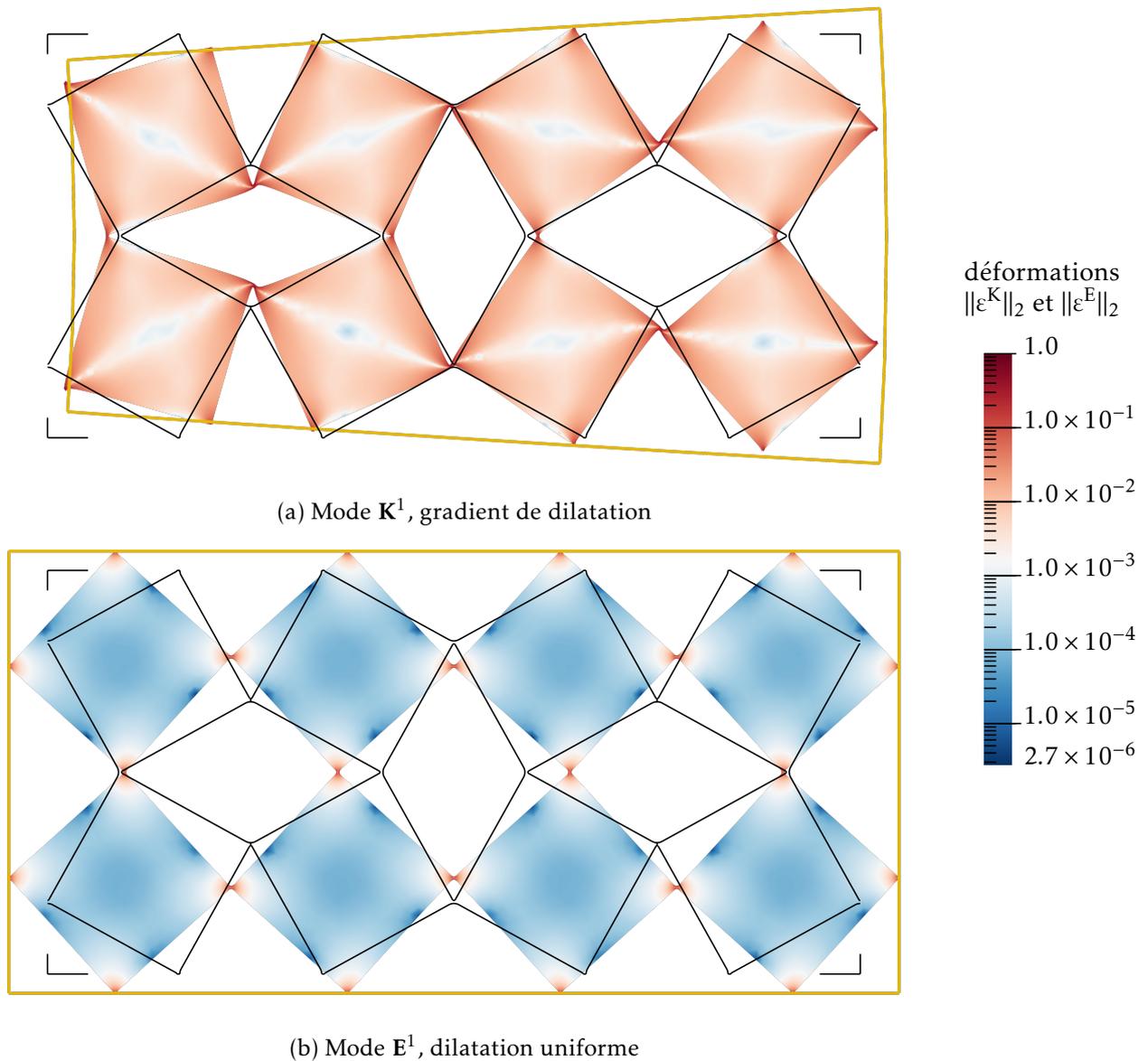


FIGURE III.10 – Réactions d’un échantillon de microstructure *carrés auxétiques* à : (a) un gradient de dilatation uniforme $\mathbf{K} = 0.14\mathbf{K}^1$ et (b) une dilatation uniforme $\mathbf{E} = 0.14\mathbf{E}^1$. La norme de la déformation associée au déplacement reconstitué (ε^K pour (a) et $\varepsilon^E = 0.14\varepsilon^{E1}$ pour (b)) est représentée sur la configuration déformée. Dans les deux cas, le facteur d’amplification des déplacements pour l’illustration est de 1. Les autres éléments visibles sur cette figure sont décrits Figure III.7.

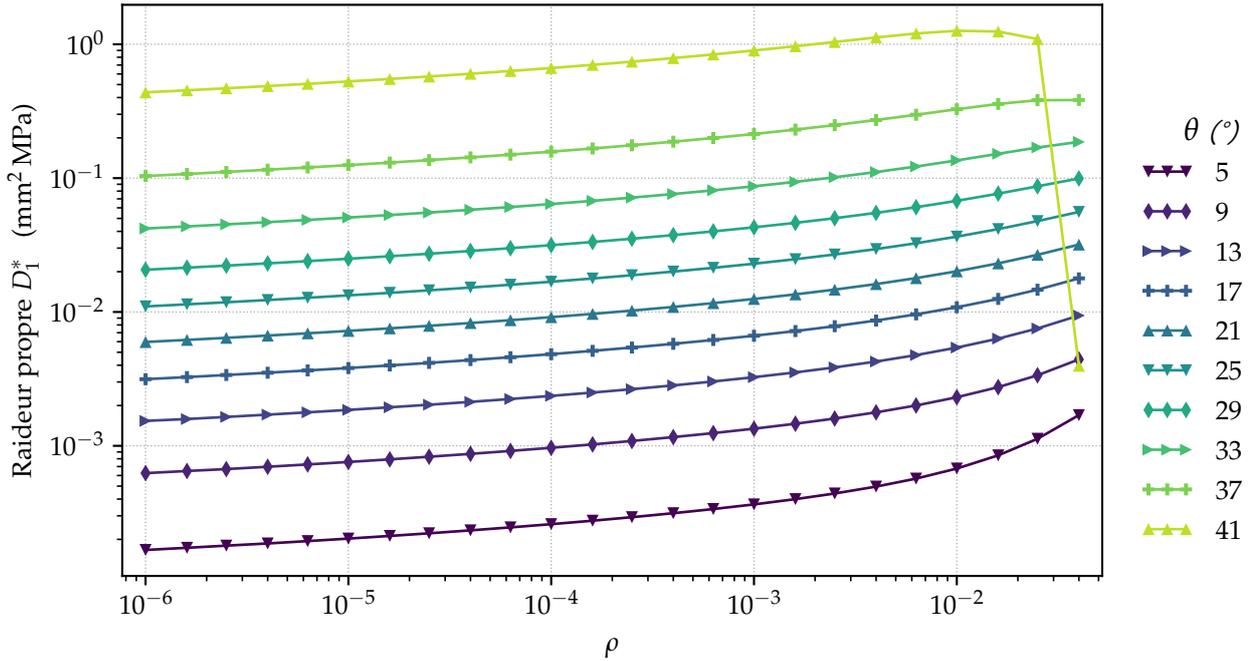


FIGURE III.11 – Évolution de la raideur propre de second gradient, après projection, en fonction de la finesse de jonction ρ , pour différentes configurations partiellement déployées.

déployée. Cette raideur de second ordre décroît lentement lorsque $\rho \rightarrow 0$, quel que soit l'angle d'ouverture $\theta < 45^\circ$. La vitesse de décroissance est nettement inférieure à celle de la raideur propre C_1 . Au contraire, l'allure des courbes tracées pour D_1^* est semblable à celle observée pour les modes raides de premier gradient (\mathbf{E}^2 , \mathbf{E}^3).

Du fait de cette différence de vitesse de décroissance, les effets de second ordre liés au gradient de dilatation macroscopique ont une contribution énergétique de plus en plus significative lorsque les jonctions deviennent fines.

Longueur caractéristique associée On définit la longueur caractéristique ℓ_1 :

$$\ell_1 = \eta \sqrt{\frac{D_1}{C_1}} \quad (\text{III.14})$$

Il s'agit d'une grandeur intrinsèque du milieu homogène équivalent de second gradient. Elle caractérise la sensibilité de ce milieu élastique à une variation du niveau de dilatation, indépendamment de la direction dans laquelle est cette variation.

La Figure III.12 présente l'évolution de ℓ_1 en fonction de ρ pour chaque configuration $\theta < 45^\circ$. Pour ce graphique, ℓ_1 est rapportée à la taille des carrés constitutifs a . Cela permet de compenser le fait que la taille de la cellule t varie en fonction de l'angle d'ouverture θ , si l'on garde constante la largeur des carrés a . Dans tous les cas, t et a sont du même ordre de grandeur.

La longueur caractéristique ℓ_1 devient grande en comparaison à la taille d'une cellule (de l'ordre de a) dès lors que les jonctions sont suffisamment fines. La longueur caractéristique ℓ_1 augmente lorsque $\rho \rightarrow 0$ avec un régime asymptotique de l'ordre de ρ^{-1} . Toutefois, la

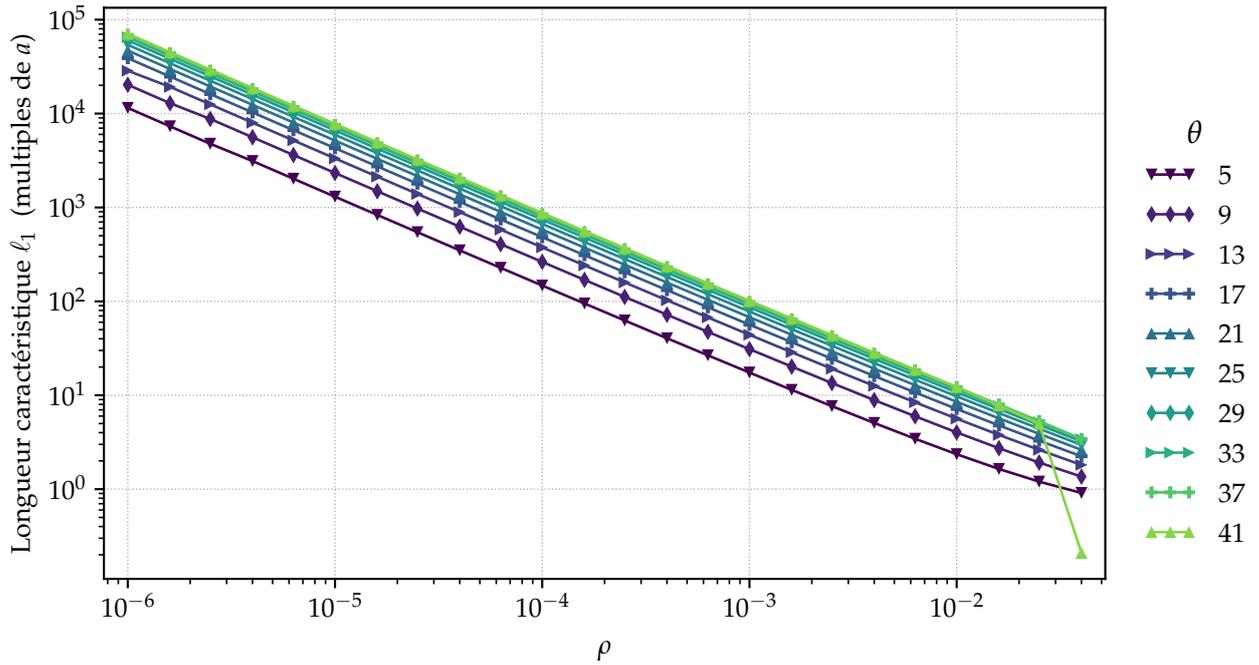


FIGURE III.12 – Évolution de la longueur caractéristique des effets de second gradient liés à la dilatation en fonction de la finesse de jonction ρ pour les différentes configurations partiellement déployées.

longueur caractéristique ℓ est plus faible lorsque la microstructure est dans une configuration peu déployée (faible valeur de l'angle d'ouverture θ). Les configurations proches de la configuration damier (θ proche de 45°) sont donc particulièrement propices à la manifestation d'effets de second gradient visibles à l'échelle macroscopique.

III.2.4 Synthèse et discussion : Modélisation du comportement élastique effectif

Vu les résultats du schéma d'homogénéisation, il semble judicieux d'utiliser un modèle de second gradient pour représenter le comportement effectif du milieu de carrés auxétiques lorsque la microstructure est dans une configuration partiellement déployée $\theta < 45^\circ$. On obtient un milieu élastique sensible au gradient de dilatation isotrope. La densité d'énergie élastique de déformation est :

$$W^{\text{hom}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + \eta^2 \mathbf{K}^T : \mathbf{D}^* : \mathbf{K}). \quad (\text{III.15})$$

Les effets de second gradient s'estompent lorsque la séparation d'échelle augmente. Par conséquent, lors du passage à la limite $\eta \rightarrow 0$, à microstructure fixée, les effets de second gradient disparaissent. À l'inverse, la finesse des jonctions ρ est un levier efficace pour augmenter l'intensité des effets élastique de second ordre. En effet, pour une séparation d'échelle η fixée, la longueur caractéristique ℓ_1 croît environ en ρ^{-1} lorsque $\rho \rightarrow 0$.

Dans le cas particulier de la configuration damier $\theta = 45^\circ$, nous ne prévoyons pas d'effets de second ordre significatif, quelle que soit la séparation d'échelle η . Dans le cadre de

cette méthode d'homogénéisation, le modèle le plus approprié est un milieu de Cauchy au comportement élastique linéaire et non dégénéré. Toutefois, des travaux récents ont montré que des phénomènes non standards, autre que des effets élastiques de second gradient, sont observables pour une telle microstructure en configuration damier [Rokoš *et al.*, 2019; Maraghechi *et al.*, 2020; Deng *et al.*, 2020]. En particulier, il existe dans cette configuration une transformation de la microstructure à très faible énergie qui n'est pas liée à une déformation macroscopique. L'utilisation d'un degré de liberté supplémentaire est une solution envisageable pour modéliser ce phénomène. Cependant, ce degré de liberté supplémentaire ne peut être capté avec le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur présenté ici.

III.3 Étude de la microstructure *triangles auxétiques*

III.3.1 Présentation de la microstructure

Description de la géométrie La microstructure *triangles auxétiques* se compose de triangles équilatéraux reliés les uns aux autres par de fines jonctions. Sa géométrie est paramétrée par trois grandeurs : la longueur des côtés des triangles a , l'angle d'ouverture θ et la finesse de jonction ρ , comme illustré Figures III.13 et III.15. Cette paramétrisation est similaire à celle utilisée pour la microstructure des carrés auxétiques. L'angle d'ouverture θ est compris entre 0° et 60° . Là encore, plus cet angle est grand, plus la microstructure est déployée. L'influence de l'angle d'ouverture sur la géométrie de la microstructure est illustrée Figure III.14. Dans la configuration $\theta = 60^\circ$, la microstructure est entièrement déployée. Les jonctions sont alignées et forment un réseau particulier, communément appelé réseau kagome (*kagome lattice* en anglais). Cette configuration est appelée configuration « kagome ».

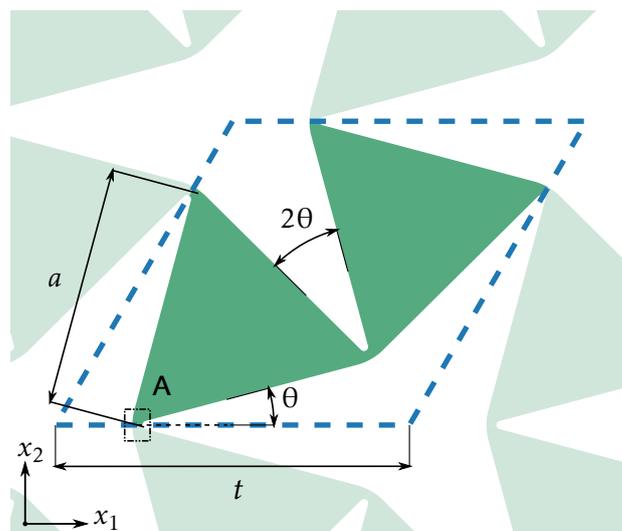


FIGURE III.13 – Modélisation géométrique de la microstructure *triangles auxétiques*. Le contour de la cellule de base est tracé en bleu.

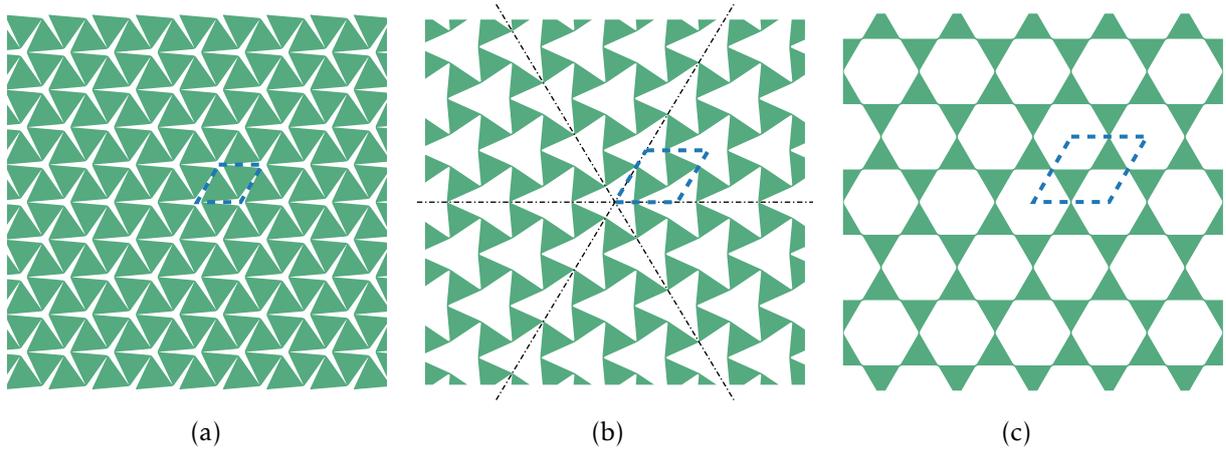


FIGURE III.14 – Microstructure *triangles auxétiques* dans trois configurations : (a) $\theta = 5^\circ$ microstructure presque entièrement fermée, (b) $\theta = 25^\circ$ configuration intermédiaire, (c) $\theta = 60^\circ$ microstructure complètement déployée. Le contour d'une cellule de base est représenté en bleu et les trois plans de symétries de la microstructure sont représentés sur (b).

Cellule de base La cellule de base utilisée pour modéliser cette microstructure est un losange de côté t . La géométrie et le contour d'une cellule de base sont représentés Figure III.13. La taille de la cellule t dépend des paramètres θ et a :

$$t = 2a \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \quad (\text{III.16})$$

Par contre, l'inclinaison des deux vecteurs de périodicité est constante : le premier est aligné sur la direction 1 et le second est incliné de 60° par rapport à cette direction.

Méthode de construction géométrique des jonctions Les jonctions entre les triangles sont construites de telle sorte que la géométrie de la microstructure varie de manière continue en fonction de l'angle d'ouverture θ . Il n'est pas possible d'utiliser la méthode de construction géométrique standard, employée pour la microstructure de pantographe et pour les carrés auxétiques, dans les configurations où $\theta \leq 30^\circ$. Dans ce cas, les bords de deux triangles adjacents forment un angle rentrant au niveau du sommet commun. Or, la méthode utilisée jusqu'à présent pour générer un contour de jonction arrondi à partir d'un secteur angulaire vide nécessite que l'angle vide soit saillant (mesure $< 180^\circ$). Par conséquent, une autre méthode de construction géométrique des jonctions est utilisée pour cette microstructure. Celle-ci est illustrée Figure III.15. La méthode est identique quel que soit l'angle d'ouverture ($\theta \leq 30^\circ$ ou $\theta > 30^\circ$). Avec cette méthode de construction, la position du cercle de rayon ρa inscrit dans une jonction dépend de l'angle θ . Il coïncide avec le sommet O des triangles seulement dans la configuration limite $\theta = 60^\circ$. Toutefois, cette construction géométrique est une solution satisfaisante puisque la position du cercle inscrit et des arcs de cercles \widehat{AB} et \widehat{CD} varient de façon continue en fonction de θ .

Le principe de la construction géométrique d'une jonction peut être décrit ainsi : on considère deux triangles adjacents (côtés tracés en noir Figure III.15) et l'on note O leur sommet commun. Deux arcs de cercle \widehat{AB} et \widehat{CD} (en rouge) sont utilisés pour arrondir les deux

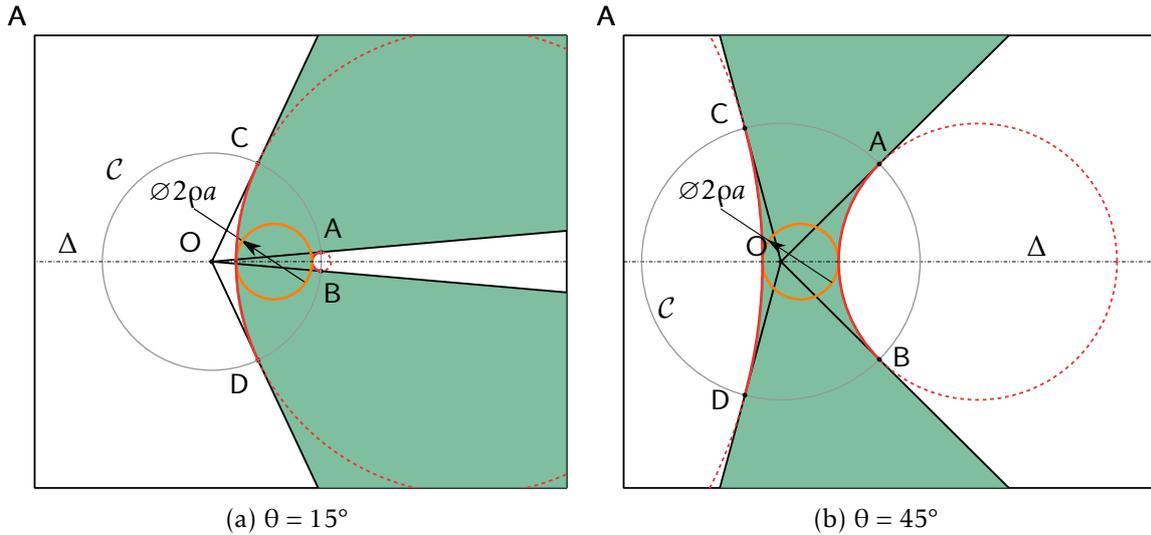


FIGURE III.15 – Méthode de construction géométrique des jonctions, lorsque $\theta \leq 30^\circ$ (a) et lorsque $\theta > 30^\circ$ (b).

angles vides formés par les côtés des triangles. Chaque arc de cercle est tangent aux deux côtés de triangles. Afin que la jonction ait la largeur souhaitée, on impose en plus à ces deux arcs de cercle d'être tangents à un cercle de rayon ρa (en orange) dont le centre appartient à la bissectrice Δ . On impose une dernière contrainte géométrique qui assure l'unicité de cette construction : les quatre points de raccordement entre les arcs de cercle et les segments de droite (A, B, C et D) doivent être sur un cercle \mathcal{C} centré sur O. Le rayon R du cercle \mathcal{C} peut s'exprimer en fonction des caractéristiques géométriques de la microstructure :

$$R = 2\rho a \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \cos(\theta)}{\sqrt{3}(1 - \sin(\theta)) - \cos(\theta)} \quad \text{si } \theta \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[\quad \text{et} \quad R = 2\sqrt{3}\rho a \quad \text{si } \theta = \frac{\pi}{6} \quad (\text{III.17})$$

Matériau constitutif Cette microstructure est constituée d'un unique matériau linéaire élastique isotrope. Sur ce point, la modélisation est exactement identique à celle présentée dans le cas de la microstructure *carrés auxétiques*. En particulier, nous choisissons $E = 1$ MPa et $\nu = 0.3$ pour les calculs numériques.

Symétrie matérielle La microstructure *triangles auxétiques* est invariante par rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ et d'axe \underline{e}_3 . De plus, elle possède trois plans de symétrie, représentés sur la Figure III.14b. Cette microstructure est donc D_3 -invariante. Il est important de noter que cette microstructure n'est pas centro-symétrique.

Étude paramétrique Nous souhaitons réaliser une étude paramétrique de cette microstructure, d'une façon similaire à ce qui a été présenté pour les carrés auxétiques. Les plages de valeurs considérées pour les paramètres ρ et θ sont : $\rho \in [1 \times 10^{-6}; 1 \times 10^{-1}]$ et $\theta \in [5^\circ, 60^\circ]$. La largeur des triangles est constante ($a = 1$ mm). Cependant, puisque la microstructure *triangles auxétiques* n'est pas centro-symétrique, le schéma d'homogénéisation doit être complété.

III.3.2 Adaptation du schéma d'homogénéisation pour une microstructure non centro-symétrique

Dans la partie précédente, le schéma d'homogénéisation a été présenté en faisant l'hypothèse que la microstructure est centro-symétrique. Cela a permis d'exposer dans un cadre simple le principe du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur proposé. Pour l'extension de ce schéma d'homogénéisation au cas des microstructures non centro-symétriques, nous conservons sa structure et son principe. Par contre, cette extension impose deux changements :

1. Les moyennes de la densité d'énergie élastique (II.29) et (II.35) contiennent des termes supplémentaires ;
2. Le critère de sélection des contributions du gradient de déformation qui sont incluses dans la densité d'énergie élastique homogénéisée doit être adapté.

L'hypothèse de la centro-symétrie de la microstructure a été introduite au moment des calculs de la densité d'énergie élastique macroscopique pour chaque ordre de troncature (Section II.3.3). Les problèmes auxiliaires et, par conséquent, les expressions des localisateurs \mathbf{h}^i et \mathbf{a}^i sont indépendants de cette hypothèse. La borne de Voigt, obtenue avec une troncature à l'ordre $p = 0$ du champ de déplacement (II.24) est, elle aussi, indépendante de cette hypothèse. Nous supposons désormais que la microstructure est non centro-symétrique.

Troncature au premier ordre, $p = 1$ L'approximation du champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}^\eta$ (II.27) qui correspond à une troncature à l'ordre $p = 1$ de la série (II.24) est inchangée. Rappelons l'expression du champ de déformation ε^η associé à cette approximation de $\underline{\mathbf{u}}^\eta$:

$$\varepsilon^\eta(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{Y}}) \simeq \mathbf{a}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}}) + \eta \mathbf{p}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}(\underline{\mathbf{Y}})$$

Sans l'hypothèse de centro-symétrie, les moyennes qui font intervenir un tenseur d'ordre impair et un tenseur d'ordre pair, comme $\langle \mathbf{a}^{1T} : \mathbf{c} : \mathbf{p}^1 \rangle$, ne s'annulent pas nécessairement. On rappelle que, en l'occurrence, le tenseur \mathbf{p}^1 défini (II.20) est d'ordre cinq et le localisateur \mathbf{a}^1 est d'ordre quatre. Ainsi, pour cet ordre de troncature, le calcul de la moyenne de l'énergie de déformation aboutit à :

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon^\eta : \mathbf{c} : \varepsilon^\eta \right\rangle \simeq \frac{1}{2} \left[\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{E} : \mathbf{B}^\sharp : \mathbf{K} + \eta^2 \mathbf{K}^T : \mathbf{D}^\sharp : \mathbf{K} \right], \quad (\text{III.18})$$

avec \mathbf{B}^\sharp le tenseur d'élasticité d'ordre cinq défini par :

$$\mathbf{B}^\sharp = \left\langle \mathbf{a}^{1T} : \mathbf{c} : \mathbf{p}^1 \right\rangle.$$

Ce tenseur d'élasticité \mathbf{B}^\sharp est associé à un couplage entre la déformation \mathbf{E} et le gradient de déformation \mathbf{K} .

Le raisonnement exposé précédemment s'applique également ici : avec cet ordre de troncature, l'erreur dans l'approximation du champ de déformation est d'ordre η . Par conséquent, seul le terme d'ordre η^0 de la densité d'énergie moyenne (III.18) est connu avec exactitude.

Pour cet ordre de troncature, la densité d'énergie élastique macroscopique qu'il est judicieux d'utiliser est donc :

$$W(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (\text{III.19})$$

Cela coïncide avec le résultat obtenu en faisant l'hypothèse de centro-symétrie. Le couplage entre les effets élastiques de premier et de second gradient, d'ordre η , n'apparaît pas.

Troncature au deuxième ordre, $p = 2$ Pour une troncature à l'ordre $p = 2$ de la série (II.24), la moyenne de la densité d'énergie élastique est calculée à partir de l'approximation (II.33) du champ de déformation et l'on obtient :

$$\left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^n : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}^n \right\rangle \simeq \frac{1}{2} \left[\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{E}^\top : \mathbf{B} : \mathbf{K} + \eta^2 \left(\mathbf{K}^\top : \mathbf{G} : \mathbf{K} + \mathbf{E} : \mathbf{H} : (\nabla_Y \mathbf{K}) \right) + 2\eta^3 \mathbf{K}^\top : \mathbf{J} : (\nabla_Y \mathbf{K}) + \eta^4 (\nabla_Y \mathbf{K})^\top : \mathbf{H}^\# : (\nabla_Y \mathbf{K}) \right] \quad (\text{III.20})$$

où :

$$\mathbf{B} = \left\langle \mathbf{a}^{1\top} : \mathbf{c} : \mathbf{a}^2 \right\rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \left\langle \mathbf{a}^{2\top} : \mathbf{c} : \mathbf{p}^2 \right\rangle \quad (\text{III.21})$$

Puisque l'erreur d'approximation est d'ordre η^2 pour le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^n$, Il n'est pas judicieux de conserver les termes d'ordre η^3 et η^4 dans l'expression de la densité d'énergie élastique moyenne (III.20). Après l'intégration par parties formelle du terme croisé $\mathbf{E} : \mathbf{G} : (\nabla_Y \mathbf{K})$, nous aboutissons à :

$$\left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^n : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}^n \right\rangle = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{E}^\top : \mathbf{B} : \mathbf{K} + \eta^2 \mathbf{K}^\top : \mathbf{D} : \mathbf{K} \right] + \mathcal{O}(\eta^3) \quad (\text{III.22})$$

Cela correspond à un comportement élastique de second gradient, avec couplage entre les effets élastiques de premier et de second gradient. Ce couplage est représenté par le tenseur d'élasticité de couplage \mathbf{B} .

Discrimination des contributions de second ordre significatives Dans ce schéma d'homogénéisation, nous suggérons de prendre en compte, dans la densité d'énergie élastique homogénéisée, uniquement les parties du gradient de déformation qui respectent deux conditions :

- (i) être associé à un mode mou de premier ordre,
- (ii) engendrer une contribution significative dans la densité d'énergie élastique macroscopique.

Afin de satisfaire la première condition, nous commençons par projeter le tenseur d'élasticité de second ordre \mathbf{D} et le tenseur d'élasticité de couplage \mathbf{B} sur le sous-espace vectoriel adéquat. Par exemple, dans le cas où il n'y a qu'un seul mode mou de premier ordre et que celui-ci est associé à la déformation propre $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, on projette sur le sous-espace engendré par $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_1; \boldsymbol{\varepsilon}_1 \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_2\}$. Les tenseurs d'élasticité projetés sont notés \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* .

Il faut ensuite identifier, parmi les modes de gradient de déformation liés à des modes mous de premier ordre, ceux qui ont une contribution significative dans la moyenne de la

densité d'énergie élastique (III.22) (condition ii). Cette identification est plus complexe que dans le cas d'une microstructure centro-symétrique. En effet, le couplage entre \mathbf{E} et \mathbf{K} doit être pris en compte et l'on ne peut se contenter d'observer les longueurs caractéristiques $\ell_{p,\alpha}$ définies à partir de \mathbf{C} et \mathbf{D} (II.44). Dans le cadre de l'étude de la microstructure *triangles auxétiques*, nous proposons une autre méthode pour mesurer l'importance de la contribution énergétique de chaque mode de gradient de déformation lié à un mode mou de premier ordre. Pour plus de clarté, cette méthode sera présentée au moment de son utilisation, section III.3.5.3.

L'étude des opérateurs d'élasticité sera menée en trois temps : nous nous intéresserons d'abord aux effets élastiques du premier ordre, liés à \mathbf{C} . Ensuite, nous observerons individuellement les tenseurs d'élasticité \mathbf{D} et \mathbf{B} . Enfin, nous analyserons l'opérateur d'élasticité complet qui contient \mathbf{C} , \mathbf{D} ainsi que le tenseur de couplage \mathbf{B} .

III.3.3 Résultats : Élasticité du premier ordre

III.3.3.1 Raideurs propres de \mathbf{C}

Prévision théorique du spectre de \mathbf{C} Puisque la microstructure *triangles auxétiques* est D_3 -invariante, le tenseur d'élasticité de premier ordre \mathbf{C} doit être de la forme suivante :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ & c_{11} & 0 \\ \text{sym.} & & c_{11} - c_{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.23})$$

Cela correspond à un comportement isotrope dans le cadre de l'élasticité classique (milieu de Cauchy). En effet, pour les effets élastiques de premier ordre, la D_3 -invariance du milieu périodique est suffisante pour que le comportement effectif soit isotrope [Auffray *et al.*, 2015]. On déduit de l'écriture matricielle (III.23) que \mathbf{C} est diagonalisable dans la base \mathcal{B}^1 . Comme \mathbf{C} dépend uniquement de deux coefficients scalaires indépendants, il y a nécessairement une raideur propre de multiplicité deux :

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{E}^1 \otimes \mathbf{E}^1 + C_2 \mathbf{E}^2 \otimes \mathbf{E}^2 + C_2 \mathbf{E}^3 \otimes \mathbf{E}^3 \quad (\text{III.24})$$

Les déformations propres correspondent aux modes \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 définis dans la sous-section III.2.2.1 et les raideurs propres sont : $C_1 = c_{11} + c_{22}$ et $C_2 = c_{11} - c_{22}$.

Résultats numériques Les résultats numériques sont conformes à la prévision de la forme diagonalisée de \mathbf{C} (III.24) pour l'ensemble des configurations (ρ, θ) . La Figure III.16 représente l'évolution des deux raideurs propres C_1 et C_2 en fonction de la finesse des jonctions ρ , pour chaque angle d'ouverture θ .

Cas général $\theta < 60^\circ$ Pour les configurations partiellement déployées, telles que $\theta < 60^\circ$, la Figure III.16 met en lumière l'existence d'un mode mou. Ce mode mou de premier ordre

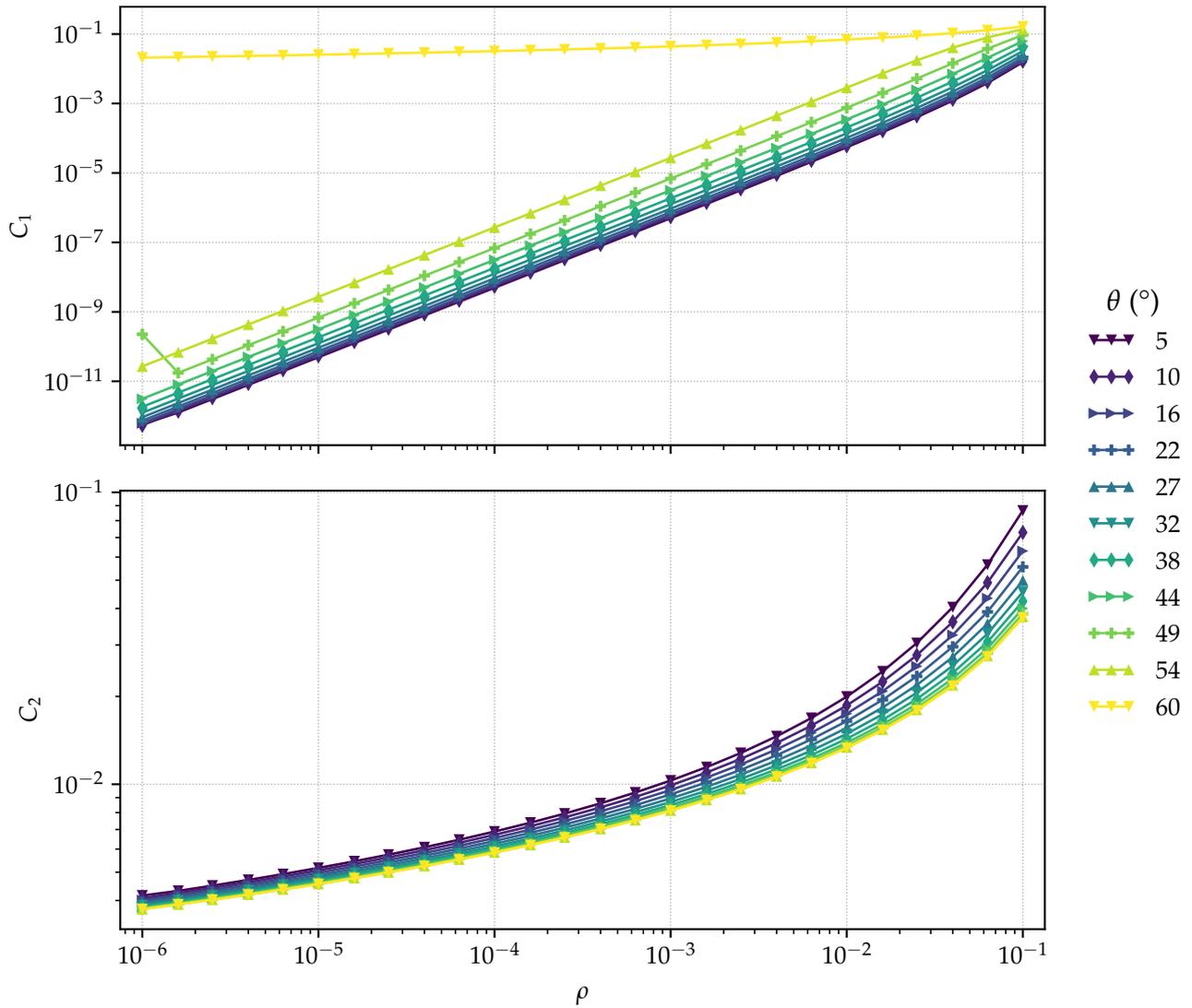


FIGURE III.16 – Évolution des raideurs propres de premier ordre en fonction de la finesse de jonction ρ pour la microstructure *triangles auxétiques*. Les déformations propres associées sont : la dilation isotrope E^1 pour C_1 , le cisaillement E^2 et la contre-dilatation E^3 pour C_2 .

correspond au mode de dilation isotrope E^1 . En effet, pour une valeur de l'angle d'ouverture θ fixée, la raideur C_1 décroît nettement plus vite que la raideur propre C_2 lorsque $\rho \rightarrow 0$. Quel que soit $\theta < 60^\circ$, la tendance asymptotique est en ρ^2 pour C_1 et de l'ordre de $\frac{1}{|\log(\rho)|}$ pour C_2 . Ces vitesses de décroissance sont donc similaires à celles observées pour la microstructure des carrés auxétiques. Par ailleurs, le contraste de raideur est plus marqué dans les configurations où l'angle d'ouverture est faible, en particulier lorsque les jonctions sont relativement larges. Par exemple, lorsque $\theta = 5^\circ$, une finesse de jonction de 6.3×10^{-2} suffit pour avoir un écart d'une décade entre C_1 et C_2 alors qu'il faut des jonctions beaucoup plus fines ($\rho < 6.3 \times 10^{-3}$) pour avoir un tel écart lorsque $\theta = 54^\circ$.

Configuration kagome, $\theta = 60^\circ$ On constate qu'il n'y a pas de mode mou associé à une déformation macroscopique uniforme lorsque la microstructure est complètement déployée

($\theta = 60^\circ$). On observe en effet sur la Figure III.16 que, dans cette configuration particulière, les deux raideurs propres C_1 et C_2 sont du même ordre de grandeur et décroissent à la même vitesse quand $\rho \rightarrow 0$ (régime de l'ordre $\frac{1}{|\log(\rho)|}$). En ce qui concerne la dilatation isotrope \mathbf{E}^1 , le comportement élastique de premier ordre change donc brutalement lorsque la microstructure triangulaire est complètement déployée. Plus les jonctions sont fines, plus cette variation de comportement est brusque lorsque θ tend vers 60° .

III.3.3.2 Réponse de la microstructure à des déformations macroscopiques uniformes

Observons à présent la réponse d'un échantillon de microstructure *triangles auxétiques* lorsqu'une déformation macroscopique uniforme est imposée. Nous procédons exactement de la même manière que dans le cas de la microstructure des carrés auxétiques.

Pour l'échantillon représenté, la microstructure est partiellement déployée. Les paramètres géométriques sont $\rho = 0.01$ et $\theta = 10.5^\circ$.

Les trois sollicitations considérées correspondent au mode de dilatation isotrope \mathbf{E}^1 , au mode de cisaillement \mathbf{E}^2 et au mode de contre-dilatation \mathbf{E}^3 . Pour rappel, chaque sollicitation de déformation uniforme dans le mode \mathbf{E}^i engendre, à l'échelle de la microstructure, le champ de déplacement \mathbf{u}^{E^i} et le champ de déformation ϵ^{E^i} définis par (III.6) et (III.7). La Figure III.17 illustre la réponse de l'échantillon de microstructure à ces trois sollicitations.

Observations On constate que les sollicitations en cisaillement \mathbf{E}^2 et en contre-dilatation \mathbf{E}^3 provoquent des déformations significatives dans des zones étendues de la microstructure. Plus précisément, l'amplitude des déformations décroît lentement lorsque l'on s'éloigne des jonctions. À l'inverse, on observe que la dilatation isotrope uniforme \mathbf{E}^1 génère dans la microstructure des déformations localisées au voisinage des jonctions. Dans ce troisième cas, l'intensité des déformations est faible en comparaison à celles engendrées par les sollicitations \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 . Cela explique que, à l'échelle macroscopique, la dilatation \mathbf{E}^1 soit un mode mou lorsque la microstructure est dans une configuration partiellement déployée $\theta < 60^\circ$.

Nous observons par ailleurs que la sollicitation \mathbf{E}^1 engendre des rotations relatives des triangles. L'amplitude de ces rotations est uniforme et, par conséquent, on observe un accroissement uniforme de l'angle d'ouverture θ . Ce phénomène se produit pour l'ensemble des configurations partiellement déployées, telles que $\theta < 60^\circ$.

De la même manière que les illustrations proposées ici pour $\theta < 10.5^\circ$, des illustrations similaires peuvent être construites pour une microstructure dans la configuration kagome ($\theta = 60^\circ$). Ces illustrations sont proposées dans l'annexe B.1. Dans ce cas, on observe des champs de déformation similaires pour les trois sollicitations macroscopiques. Les pointes de triangles sont fortement sollicitées y compris pour la sollicitation en dilatation isotrope \mathbf{E}^1 . Cela concorde avec les observations faites pour les courbes d'évolution des raideurs effectives C_1 et C_2 .

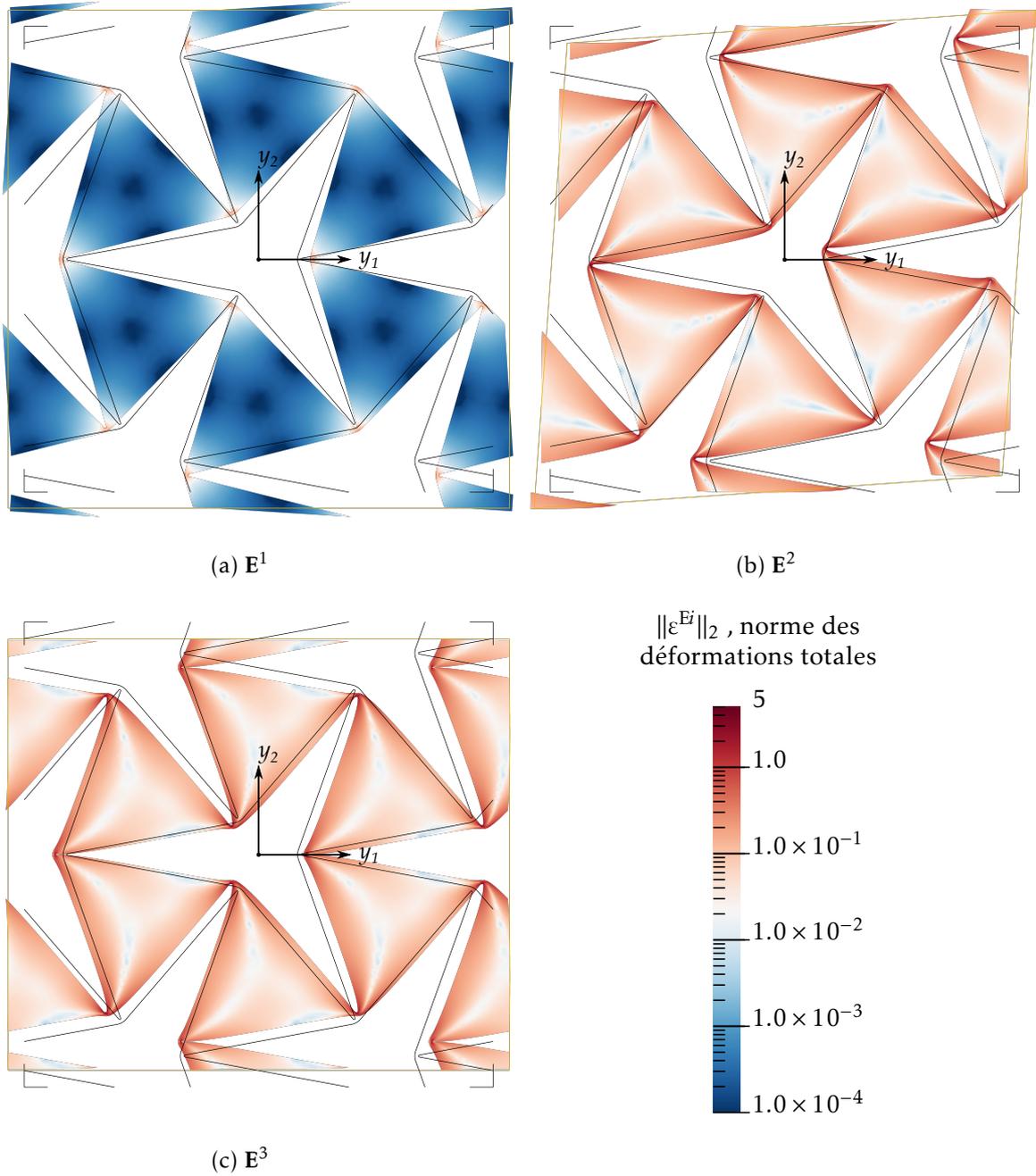


FIGURE III.17 – Déformations générées dans la microstructure *triangles auxétiques* par les trois sollicitations de déformation macroscopique uniforme (E^1 , E^2 et E^3). Pour la représentation des configurations déformées, les déplacements sont réduits d'un facteur 0.10.

III.3.4 Élasticité du second ordre : tenseurs d'élasticité \mathbf{D} et \mathbf{B}

Nous allons maintenant nous intéresser à l'élasticité de second ordre. Nous considérons donc l'expression (III.22) de la moyenne de la densité d'énergie élastique, obtenue avec une troncature à l'ordre $p = 2$ du champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}$.

Nous venons de voir que nous pouvons distinguer un mode mou de déformation macroscopique uniquement lorsque la microstructure *triangles auxétiques* est dans une configuration partiellement déployée, caractérisée par un angle d'ouverture $\theta < 60^\circ$. Par conséquent, nous écartons le cas particulier de la configuration kagome $\theta = 60^\circ$ pour la suite de cette étude.

Par ailleurs, dans les configurations non singulières telles que $\theta < 60^\circ$ le mode mou de déformation macroscopique est le mode de dilatation isotrope \mathbf{E}^1 . Nous nous intéresserons donc uniquement à des gradients de déformation macroscopique \mathbf{K} liés à la dilatation isotrope \mathbf{E}^1 . Cela est équivalent à $\mathbf{K} \in \text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$, avec \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 les deux modes de gradient de dilatation élémentaires définis par (III.9).

L'expression de la densité d'énergie élastique moyenne (III.22) est modifiée afin que seuls les gradients de dilatation $\mathbf{K} \in \text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$ aient une contribution énergétique non nulle. Pour cela, le tenseur d'élasticité de second ordre \mathbf{D} et le tenseur d'élasticité de couplage \mathbf{B} sont projetés sur le sous-espace vectoriel $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$. Les tenseurs d'élasticité projetés \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* sont définis par :

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{P} : \mathbf{D} : \mathbf{P} \qquad \mathbf{B}^* = \mathbf{B} : \mathbf{P} \qquad (\text{III.25})$$

où \mathbf{P} est l'opérateur de projection sur $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$: $\mathbf{P} = \mathbf{K}^1 \otimes \mathbf{K}^{1T} + \mathbf{K}^2 \otimes \mathbf{K}^{2T}$. Après cette projection, la densité d'énergie élastique moyenne (III.22) devient :

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon^{\eta} : \mathbf{c} : \varepsilon^{\eta} \right\rangle = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{E} : \mathbf{B}^* : \mathbf{K} + \eta^2 \mathbf{K}^T : \mathbf{D}^* : \mathbf{K} \right] + \mathcal{O}(\eta^3) \qquad (\text{III.26})$$

Pour commencer l'analyse des effets élastiques de second ordre, nous nous intéressons tout d'abord aux tenseurs d'élasticité de second ordre et de couplage projetés \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* .

Lors de la représentation sous forme matricielle des tenseurs d'élasticité \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* , seules leurs restrictions au sous-espace vectoriel $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$ sont représentées. Pour leurs expressions sous forme matricielle, nous utilisons la base \mathcal{B}^1 pour l'espace vectoriel des déformations macroscopiques et la base \mathcal{B}^2 pour le sous-espace vectoriel $\text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$.

III.3.4.1 Prévision théorique

Des travaux sur la description des tenseurs d'élasticité, pour l'élasticité de second gradient linéaire bi-dimensionnelle, ont permis d'établir les expressions simplifiées des matrices qui représentent le tenseur d'élasticité de second ordre \mathbf{D} et le tenseur de couplage \mathbf{B} dans le cas d'un matériau dont la classe de symétrie est D_3 [Auffray *et al.*, 2015]. Nous pouvons en déduire les expressions simplifiées des tenseurs projetés \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* dans le cas de cette microstructure *triangles auxétiques*. En effet, ces tenseurs doivent satisfaire les propriétés de symétries induites par la D_3 -invariance de la microstructure. Les matrices qui représentent

les tenseurs d'élasticité \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* doivent être de la forme :

$$[\mathbf{D}^*]_{\mathcal{B}^2} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{B}^*]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

En notation tensorielle, cela correspond à :

$$\mathbf{D}^* = d_1 \left(\mathbf{K}^1 \otimes \mathbf{K}^{1\top} + \mathbf{K}^2 \otimes \mathbf{K}^{2\top} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^* = b_1 \left(-\mathbf{E}^3 \otimes \mathbf{K}^{1\top} + \mathbf{E}^2 \otimes \mathbf{K}^{2\top} \right) \quad (\text{III.28})$$

Les tenseurs d'élasticité projetés \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* dépendent chacun uniquement d'un coefficient scalaire (d_1 et b_1).

Interprétation pour \mathbf{D}^* Nous remarquons que la forme du tenseur d'élasticité de second ordre projeté \mathbf{D}^* est identique à celle prévue dans le cas de la microstructure des carrés auxétiques (Section III.2.3.1). Aussi, l'expression de \mathbf{D}^* sous la forme (III.28) implique que la raideur associée à un gradient de dilatation $\mathbf{K} \in \text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$ est d_1 quelle que soit la direction de variation.

Interprétation pour \mathbf{B}^* Pour le tenseur de couplage \mathbf{B}^* , la prévision (III.28) implique trois faits remarquables : il n'y a pas de couplage entre les gradients de dilatation ($\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2$) et le mode mou de dilatation isotrope \mathbf{E}^1 . De plus, chacun des deux modes de gradient de dilatation \mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2 n'est couplé qu'à un seul mode raide de premier ordre : \mathbf{K}^1 est couplé avec \mathbf{E}^2 et \mathbf{K}^2 avec \mathbf{E}^3 . Enfin, l'intensité de ce couplage est la même pour ces deux gradients de dilatation.

III.3.4.2 Résultats numériques

L'application numérique du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur nous permet d'obtenir les valeurs des coefficients de \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* pour chaque configuration (ρ, θ) . Des valeurs numériques sont ensuite calculées pour les coefficients d_1 et b_1 . Nous choisissons les valeurs suivantes :

- pour d_1 : la moyenne des deux valeurs propres de la matrice $[\mathbf{D}^*]_{\mathcal{B}^2}$;
- pour b_1 : le coefficient $(3, 1)$ de la matrice $[\mathbf{B}^*]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)}$.

Les valeurs numériques de \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* sont en cohérence avec les symétries physiques attendues, pour la majorité des configurations (ρ, θ) considérées. Pour vérifier le respect de ces symétries, nous mesurons deux écarts définis par :

$$\delta(\mathbf{D}^*) = \frac{\|\mathbf{D}^{\text{ref}} - \mathbf{D}^*\|}{\|\mathbf{D}^{\text{ref}}\|} \quad \delta(\mathbf{B}^*) = \frac{\|\mathbf{B}^{\text{ref}} - \mathbf{B}^*\|}{\|\mathbf{B}^{\text{ref}}\|} \quad (\text{III.29})$$

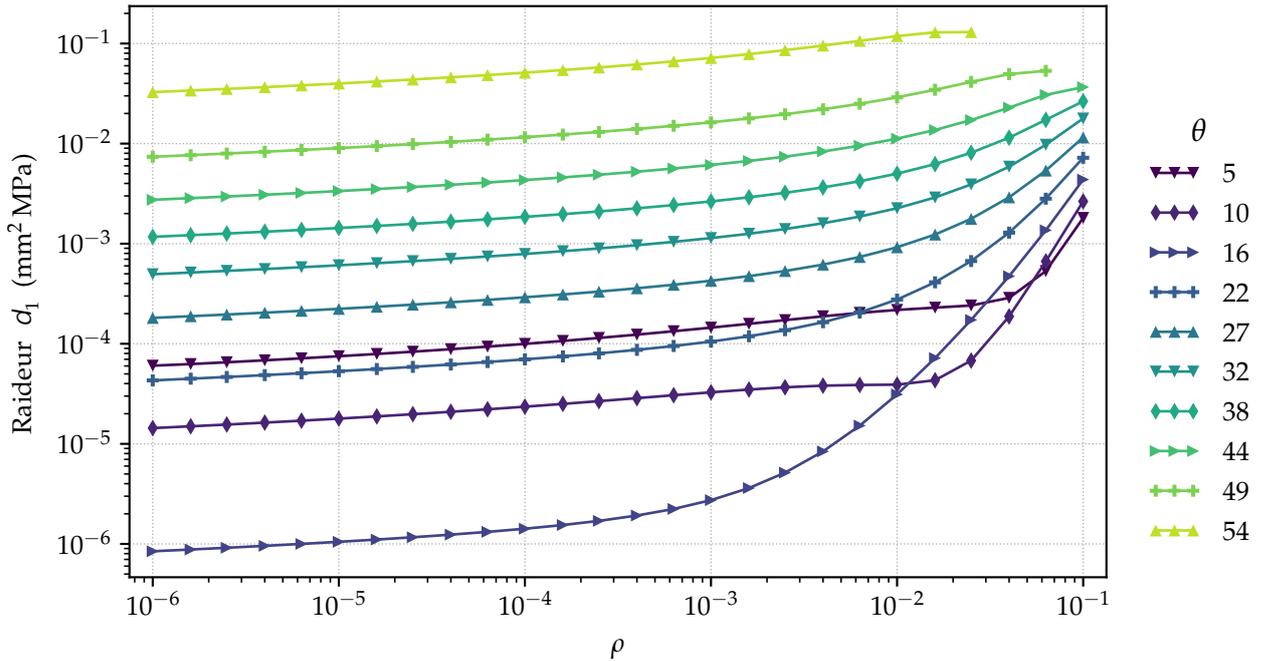


FIGURE III.18 – Évolution de la raideur effective de second ordre d_1 , obtenue après projection, en fonction de la finesse de jonction ρ .

avec $\mathbf{D}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix}$, en utilisant les valeurs numériques de d_1 et b_1 , et $\|\cdot\|$

désignant la norme de Frobenius³.

Dans la majorité des cas, les deux écarts $\delta(\mathbf{D}^*)$ et $\delta(\mathbf{B}^*)$ sont inférieurs à 0.1 %.

Le respect des symétries physiques par les tenseurs d'élasticité homogénéisés est un prérequis pour que les résultats obtenus avec un schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur soient acceptables. Par conséquent, les configurations (ρ, θ) pour lesquelles les écarts $\delta(\mathbf{D}^*)$ ou $\delta(\mathbf{B}^*)$ sont trop grands sont écartées pour la suite de cette étude. Il s'agit de cas où les jonctions sont très larges ($\rho \geq 4 \times 10^{-2}$, avec $\theta \geq 49^\circ$ ou $\theta = 5^\circ$). Des investigations supplémentaires seraient nécessaires pour ces configurations.

La Figure III.18 représente l'évolution des valeurs numériques de la raideur de second ordre d_1 en fonction de la finesse des jonctions ρ . La Figure III.19 présente, d'une façon similaire, les valeurs numériques obtenues pour la raideur de couplage b_1 .

Nous observons une tendance similaire pour les deux raideurs effectives d_1 et b_1 : dès lors que les jonctions sont suffisamment fines ($\rho \lesssim 1 \times 10^{-2}$), d_1 et b_1 décroissent lentement lorsque la finesse de jonction diminue, en comparaison à la décroissance observée pour la raideur de premier ordre C_1 . La décroissance de d_1 et b_1 , pour $\rho \rightarrow 0$ à θ fixé, est approximativement en $\frac{1}{|\log \rho|}$, comme pour la raideur effective de premier ordre C_2 .

Par ailleurs, l'angle d'ouverture θ a une forte influence sur les valeurs de d_1 et b_1 . En

3. La norme Frobenius d'une matrice M est définie par $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}(M^T \cdot M)}$.

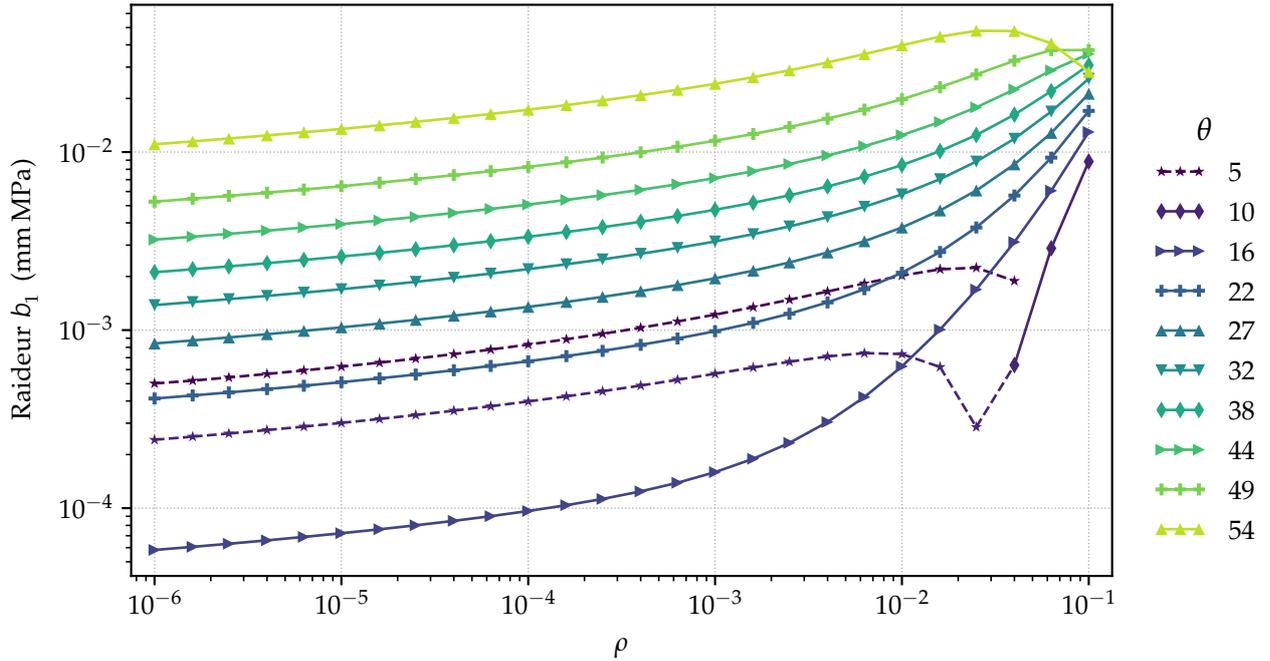


FIGURE III.19 – Évolution de la raideur effective de couplage b_1 , obtenue après projection, en fonction de la finesse de jonction ρ . Les marqueurs \star avec une ligne pointillée indiquent des valeurs négatives de b_1 . Dans ce cas, la valeur absolue de b_1 est représentée.

particulier, nous remarquons que la raideur de second ordre d_1 devient très faible quand θ se rapproche de 15° .

Interprétation A priori, ni le terme de couplage ni le terme quadratique de second ordre ne peuvent être négligés dans la densité d'énergie élastique moyenne (III.26), puisque ni b_1 ni d_1 ne décroissent plus rapidement que la raideur effective C_1 .

Si nous étions dans un cas où le couplage est nul, ou négligeable, nous concluons de nos observations de C_1 et de d_1 que le gradient de dilatation a une forte influence dans le comportement élastique effectif lorsque la séparation d'échelle est raisonnable. Cependant, comme les valeurs de b_1 sont du même ordre de grandeur que celles de d_1 , le couplage n'est pas négligeable pour cette microstructure. Nous devons donc le prendre en compte lors de l'évaluation de l'influence du gradient de dilatation dans le comportement élastique homogénéisé. Nous allons effectuer cette analyse dans la section qui suit.

III.3.5 Analyse de l'opérateur d'élasticité complet

On considère le milieu homogène équivalent de second gradient obtenu avec la troncature à l'ordre $p = 2$ du déplacement \underline{u} . Sa densité d'énergie élastique est définie par l'expression (III.26) obtenue après la projection de \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* :

$$W^*(\underline{\mathbf{Y}}) = W^*(\mathbf{E}(\underline{\mathbf{Y}}), \mathbf{K}(\underline{\mathbf{Y}})) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{E} : \mathbf{B}^* : \mathbf{K} + \eta^2 \mathbf{K}^T : \mathbf{D}^* : \mathbf{K} \right) \quad (\text{III.30})$$

Nous allons évaluer la pertinence de l'utilisation de ce modèle élastique pour la représentation du comportement macroscopique engendré par cette microstructure.

Définitions Pour mener cette étude, nous définissons pour ce modèle élastique une mesure de l'état de déformation ϵ et l'opérateur d'élasticité Λ qui lui est associé :

$$\epsilon(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{E}(\mathbf{Y}), \mathbf{K}(\mathbf{Y})\} \quad (\text{III.31})$$

ϵ est la déformation généralisée et décrit entièrement l'état de déformation en un point matériel de notre milieu. Λ est défini de sorte que la densité d'énergie élastique s'exprime, à l'aide produit contracté généralisé (\odot), par :

$$W^*(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \epsilon^\top \odot \Lambda \odot \epsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{E} : \mathbf{B}^* : \mathbf{K} + \eta^2 \mathbf{K}^\top : \mathbf{D}^* : \mathbf{K}) \quad (\text{III.32})$$

On se restreint à l'étude des déformations généralisées telles que la partie \mathbf{K} correspond à un gradient de dilatation isotrope, *i.e.* $\mathbf{K} \in \text{span}\{\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2\}$, les autres gradients de déformation ne contribuant pas à l'énergie (III.30). La famille constituée des vecteurs des deux bases \mathcal{B}^1 et \mathcal{B}^2 , notée $(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$, est une base de ce sous-espace vectoriel.

Écriture matricielle La représentation matricielle de l'opérateur Λ dans la base $(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$ est une matrice par blocs :

$$[\Lambda]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}]_{\mathcal{B}^1} & \eta [\mathbf{B}^*]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)} \\ \eta [\mathbf{B}^*]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)}^\top & \eta^2 [\mathbf{D}^*]_{\mathcal{B}^2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Nous pouvons, d'une manière similaire, utiliser la base \mathcal{B}^η définie par :

$$\mathcal{B}^\eta = (\mathcal{B}^1, \eta \mathcal{B}^2) = \left\{ \{\mathbf{E}^1, 0\}; \{\mathbf{E}^2, 0\}; \{\mathbf{E}^3, 0\}; \{0, \eta^{-1} \mathbf{K}^1\}; \{0, \eta^{-1} \mathbf{K}^2\} \right\} \quad (\text{III.34})$$

L'utilisation de cette base permet d'exclure η de la matrice représentant Λ . Ce choix, particulièrement approprié pour l'étude numérique de Λ , nous permet de diagonaliser cet opérateur d'élasticité une fois pour toute, indépendamment de la séparation d'échelle, puis de prendre en compte l'influence de η dans un second temps. L'expression matricielle de Λ devient :

$$[\Lambda]_{\mathcal{B}^\eta} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}]_{\mathcal{B}^1} & [\mathbf{B}^*]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)} \\ [\mathbf{B}^*]_{(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)}^\top & [\mathbf{D}^*]_{\mathcal{B}^2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

Le vecteur représentant une déformation généralisée $\epsilon = \{\mathbf{E}, \mathbf{K}\}$ dans la base \mathcal{B}^η est :

$$[\epsilon]_{\mathcal{B}^\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} : \mathbf{E}^1 \\ \mathbf{E} : \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{E} : \mathbf{E}^3 \\ \eta \mathbf{K}^\top : \mathbf{K}^1 \\ \eta \mathbf{K}^\top : \mathbf{K}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

III.3.5.1 Prévion analytique du spectre de Λ

En admettant que les tenseurs d'élasticité \mathbf{C} , \mathbf{D}^* et \mathbf{B}^* respectent les symétries physiques induites par la D_3 -invariance de la microstructure, l'expression de Λ dans la \mathcal{B}^n dépend uniquement des quatre coefficients scalaires introduits précédemment :

$$[\Lambda]_{\mathcal{B}^n} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_2 & 0 & 0 & b_1 \\ & & C_2 & -b_1 & 0 \\ \text{sym.} & & & d_1 & 0 \\ & & & & d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Comme les trois tenseurs d'élasticité (\mathbf{C} , \mathbf{D}^* , \mathbf{B}^*) s'expriment de façon très simple dans les bases \mathcal{B}^1 et \mathcal{B}^2 judicieusement choisies, nous obtenons aisément les expressions analytiques des valeurs propres de Λ et des vecteurs propres associés. Dans ce contexte d'élasticité de second gradient, ces éléments caractéristiques de Λ sont dénommés *raideurs propres* et *modes propres de déformation généralisée*.

Λ admet cinq raideurs propres non nulles, notées λ_i :

$$\lambda_1 = C_1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}(C_2 + d_1 - \Delta) \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{2}(C_2 + d_1 + \Delta) \quad (\text{III.38})$$

avec $\Delta = \sqrt{(C_2 - d_1)^2 + 4b_1^2}$. Chaque raideur propre λ_i est associée à un mode propre de déformation généralisée, représenté par la déformation généralisée ϵ^i . Les composantes des ϵ^i dans la base \mathcal{B}^n sont :

$$[\epsilon^1]_{\mathcal{B}^n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\epsilon^2]_{\mathcal{B}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\epsilon^3]_{\mathcal{B}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\epsilon^4]_{\mathcal{B}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau^{-1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [\epsilon^5]_{\mathcal{B}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

avec $\tau = \frac{C_2 - d_1 - \Delta}{2b_1}$.

Analyse Nous connaissons les tendances d'évolution des raideurs effectives C_1 , C_2 , d_1 et b_1 quand ρ tend vers zéro :

$$C_1 \sim \rho^2; \quad C_2 \sim \frac{1}{|\log(\rho)|}; \quad d_1 \sim \frac{1}{|\log(\rho)|} \quad \text{et} \quad b_1 \sim \frac{1}{|\log(\rho)|} \quad (\text{III.40})$$

Nous en déduisons que la raideur propre λ_4 est elle-aussi de l'ordre de $\frac{1}{|\log(\rho)|}$. Par contre, étant donné son expression analytique, il n'est pas possible de prévoir la tendance d'évolution en fonction de ρ de la raideur propre λ_2 .

Par ailleurs, la valeur du coefficient scalaire τ qui intervient dans les déformations généralisées ϵ^i est lié à l'intensité du couplage entre \mathbf{K}^1 et \mathbf{E}^2 entre \mathbf{K}^2 et \mathbf{E}^3 . Pour que le couplage soit significatif, il faut que τ soit proche de 1.

III.3.5.2 Résultats numériques

Les valeurs numériques des cinq raideurs propres sont calculées à partir des résultats du schéma d'homogénéisation pour chaque configuration (ρ, θ) . Pour cela, nous assemblons les matrices de \mathbf{C} , \mathbf{B}^* et \mathbf{D}^* obtenues numériquement, pour former la matrice qui représente l'opérateur d'élasticité complet $\mathbf{\Lambda}$ dans la base \mathcal{B}^n , puis nous diagonalisons cette matrice. Nous obtenons ainsi cinq valeurs numériques. Nous attribuons à λ_1 la valeur numérique pour laquelle le vecteur propre est le plus proche de $\epsilon^1 = \{\mathbf{E}^1, \mathbf{0}\}$. Les quatre autres valeurs propres sont ordonnées par ordre croissant puis respectivement attribuées à $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 .

Des valeurs numériques du coefficient τ sont également calculés à partir des résultats de cette diagonalisation numérique. Pour cela τ est défini comme une mesure du poids relatif des composantes liées aux modes raides (\mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3) dans le vecteur propre v associé à λ_2 :

$$\tau = \sqrt{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_4^2 + v_5^2}} \quad (\text{III.41})$$

Nous utilisons cette expression de τ car les vecteurs propres obtenus numériquement sont des combinaisons linéaires des vecteurs propres théoriques (III.39).

L'évolution des trois raideurs propres λ_1, λ_2 et λ_4 en fonction de ρ est représentée Figure III.20. Nous constatons que la raideur propre λ_2 est plus faible que la raideur propre λ_1 , qui correspond à la raideur C_1 du mode mou de dilatation isotrope. Il y a approximativement une décade d'écart entre ces deux raideurs. La décroissance de λ_2 quand $\rho \rightarrow 0$ est environ en ρ^2 , comme pour C_1 . Conformément à nos attentes, nous observons des valeurs plus grandes pour λ_4 et une décroissance nettement plus lente. Dans la majorité des configurations, les valeurs observées pour λ_4 sont comparables à celles de la raideur C_2 .

Enfin, nous pouvons constater que les valeurs numériques des cinq valeurs propres sont positives dans presque la totalité des configurations (ρ, θ) considérées, excepté deux configurations à $\rho = 1 \times 10^{-6}$.

Écarts relatifs entre les raideurs propres Les deux raideurs propres λ_4 et λ_5 issues du calcul numérique sont presque égales. Nous constatons en effet que l'écart relatif entre les valeurs de λ_4 et de λ_5 est inférieur à 0.1 % dans la majorité des configurations (ρ, θ) , sans jamais dépasser 1 %.

L'égalité entre les deux petites raideurs propres, λ_2 et λ_3 , est moins bien respectée par les résultats numériques. En effet, l'écart relatif $\left| \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2} \right|$ est grand ($\gtrsim 1\%$) pour de nombreuses configurations (Figure III.21). Toutefois, le fait que l'écart relatif soit grand pour des jonctions très fines est acceptable étant donné le fort contraste entre les deux petites raideurs propres (λ_2 et λ_3) et les deux grandes (λ_4 et λ_5).

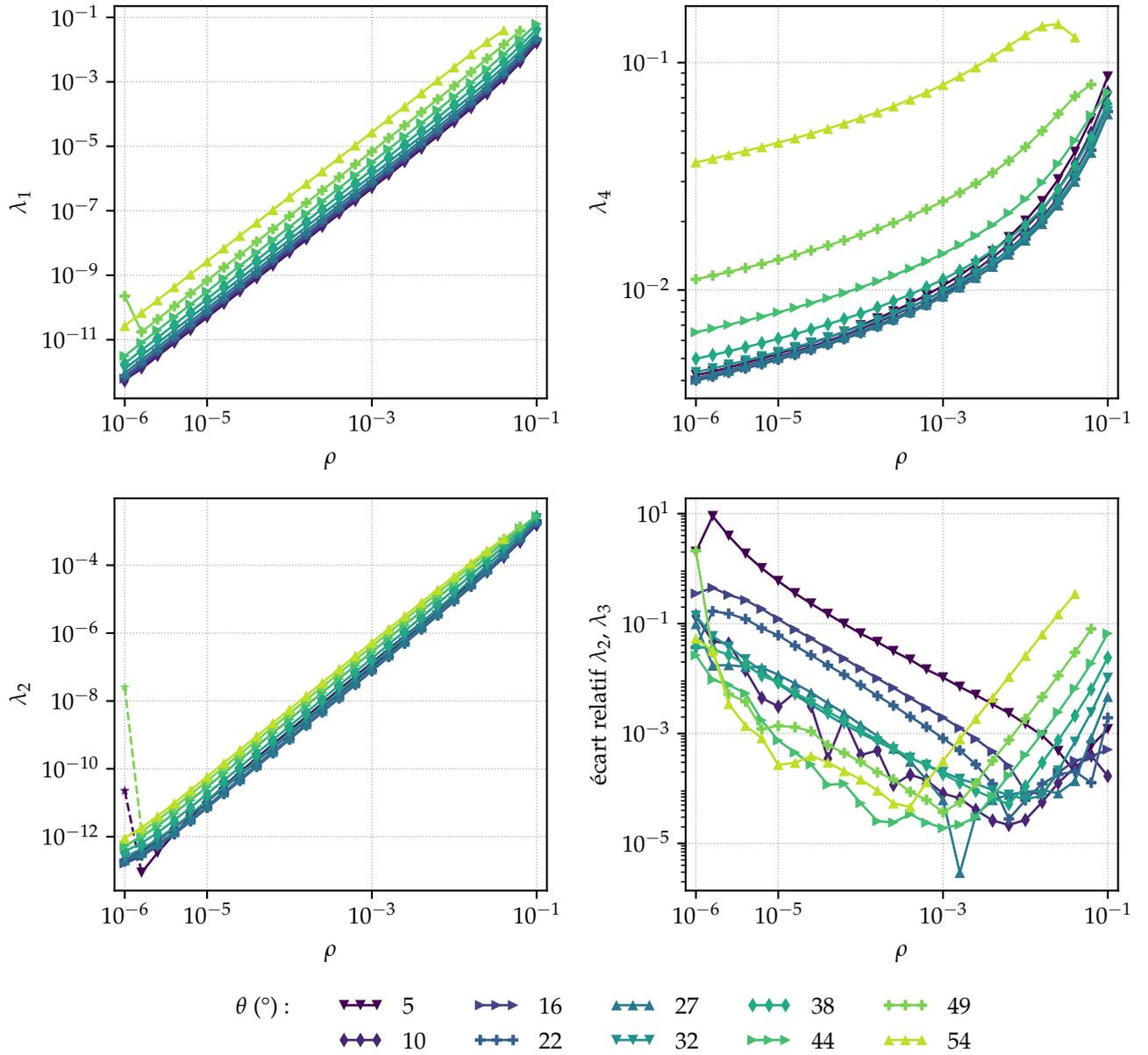


FIGURE III.20 – Évolution des raideurs propres λ_1 , λ_2 et λ_4 obtenues numériquement en fonction de la finesse de jonction ρ . Les mesures de l'écart relatif entre les deux raideurs propres faibles λ_2 et λ_3 sont également présentées (en bas à droite).

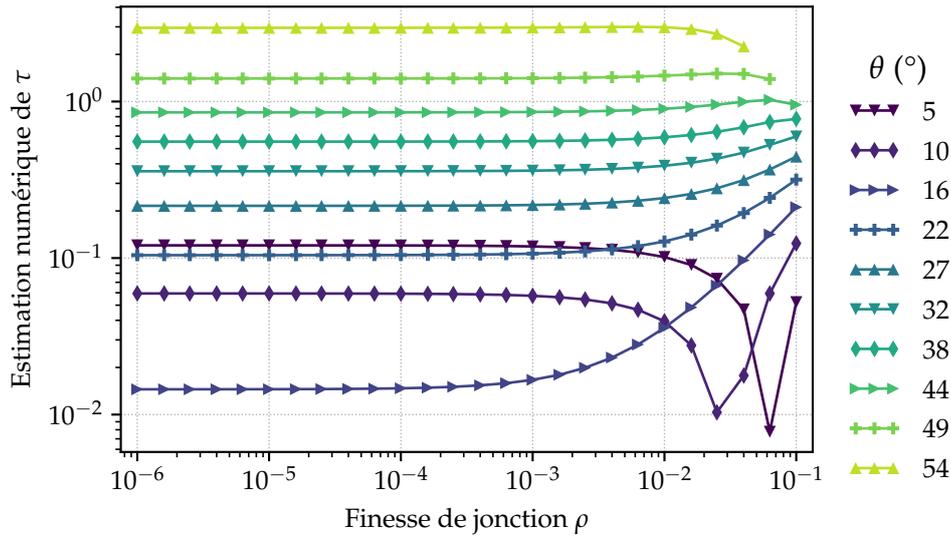


FIGURE III.21 – Évolution des valeurs numériques calculées pour le coefficient scalaire τ en fonction de la finesse de jonction ρ .

Observation des valeurs de τ La Figure III.21 présente l'évolution de l'estimation de τ en fonction de la finesse des jonctions. Des valeurs comparables à l'unité sont observées pour la majorité des configurations (ρ, θ) . Cela signifie que, dans ces cas-là, les modes propres de déformation généralisée associés aux raideurs faibles λ_2 et λ_3 font intervenir à la fois les gradients de dilatation (\mathbf{K}^1 et \mathbf{K}^2) et les modes raides de premier ordre (\mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3). Nous nous attendions à un tel résultat étant donné les valeurs significatives observées pour la raideur de second ordre d_1 et la raideur de couplage b_1 . Par ailleurs, nous remarquons que les valeurs de τ dépendent peu de ρ lorsque les jonctions sont assez fines.

III.3.5.3 Identification du modèle macroscopique équivalent

Nous allons maintenant voir que, du fait de ce couplage et du fait des ordres de grandeurs des différentes raideurs impliquées dans la densité d'énergie élastique homogénéisée, il n'existe pas de chargement et de plage de valeurs pour η et ρ pour lesquels ce milieu présente des effets de second gradient à l'échelle macroscopique. Une approche énergétique est utilisée : les ordres de grandeurs des énergies de déformation engendrées par différents types de sollicitation macroscopique seront comparés. L'objectif de ce raisonnement est de déterminer si le milieu emmagasine nettement plus d'énergie élastique lorsqu'il est soumis à une déformation macroscopique dans le mode \mathbf{E}^1 avec une amplitude variable plutôt qu'à une déformation uniforme dans ce mode. Le rapport entre ces deux énergies est lié à l'ordre de grandeur de la longueur intrinsèque associée à ce gradient de dilatation.

Expression de la densité d'énergie élastique homogénéisée Nous considérons que les raideurs propres λ_2 à λ_5 sont exactement deux à deux égales ($\lambda_2 = \lambda_3$ et $\lambda_4 = \lambda_5$). Il est ainsi possible de choisir des déformations propres associées qui s'expriment sous la forme (III.39).

Par ailleurs, nous définissons cinq mesures scalaires de l'état de déformation macroscopique :

$$E_1 = \mathbf{E} : \mathbf{E}^1 \quad E_2 = \mathbf{E} : \mathbf{E}^2 \quad E_3 = \mathbf{E} : \mathbf{E}^3 \quad K_1 = \mathbf{K}^T : \mathbf{K}^1 \quad K_2 = \mathbf{K}^T : \mathbf{K}^2 \quad (\text{III.42})$$

Le travail de diagonalisation effectué précédemment permet de simplifier l'expression de la densité d'énergie élastique homogénéisée. Celle-ci devient une somme de cinq termes quadratiques, impliquant ces mesures scalaires de l'état de déformation :

$$W^*(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left[C_1 E_1^2 + \frac{\lambda_2}{1 + \tau^2} (-\tau E_3 + \eta K_1)^2 + \frac{\lambda_2}{1 + \tau^2} (\tau E_2 + \eta K_2)^2 + \frac{\lambda_4}{1 + \tau^{-2}} \left(\frac{1}{\tau} E_3 + \eta K_1 \right)^2 + \frac{\lambda_4}{1 + \tau^{-2}} \left(-\frac{1}{\tau} E_2 + \eta K_2 \right)^2 \right] \quad (\text{III.43})$$

Afin que les *scalings* en ρ apparaissent explicitement dans les différents termes de W^* , nous introduisons les raideurs normalisées \tilde{C}_1 , $\tilde{\lambda}_2$ et $\tilde{\lambda}_4$:

$$\tilde{C}_1 = \frac{1}{\rho^2} C_1 \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{\rho^2} \lambda_2 \quad \tilde{\lambda}_4 = |\log(\rho)| \lambda_4 \quad (\text{III.44})$$

Au vu des résultats numériques, ces quantités sont quasiment constantes lorsque ρ varie (*i.e.* ce sont des $\mathcal{O}(\rho^0)$). L'expression (III.43) devient :

$$W^*(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \tilde{C}_1 E_1^2 + \rho^2 \frac{\tilde{\lambda}_2}{1 + \tau^2} [(-\tau E_3 + \eta K_1)^2 + (\tau E_2 + \eta K_2)^2] + \frac{1}{|\log(\rho)|} \frac{\tilde{\lambda}_4}{1 + \tau^{-2}} \left[\left(\frac{1}{\tau} E_3 + \eta K_1 \right)^2 + \left(-\frac{1}{\tau} E_2 + \eta K_2 \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{III.45})$$

Principe de minimum de l'énergie potentielle Soit un domaine Ω_x contenant le matériau architecturé *triangles auxétiques* et sur lequel est défini un problème d'élasticité. Une version homogénéisée de ce problème est construite, sur le domaine macroscopique Ω , en remplaçant le milieu périodique par le milieu homogène équivalent dont la densité d'énergie élastique est $W^*(\mathbf{U})$. Le chargement et les conditions aux limites cinématiques sont eux-aussi décrits de façon macroscopique. Ce problème d'élasticité macroscopique permet de déterminer une approximation macroscopique \mathbf{U} du champ de déplacement solution.

Le champ de déplacement \mathbf{U} , solution du problème d'élasticité macroscopique, est celui qui minimise l'énergie potentielle élastique. Il s'agit de la solution du problème de minimisation :

$$\min_{\widehat{\mathbf{U}} \in \text{CA}} \left(\int_{\Omega} W^*(\widehat{\mathbf{U}}) d\Omega - \mathcal{F}(\widehat{\mathbf{U}}) \right) \quad (\text{III.46})$$

avec :

- CA l'ensemble des champs de déplacements macroscopiques cinématiquement admissibles (*i.e.* suffisamment réguliers et respectant les conditions aux limites cinématiques);
- $\mathcal{F}(\widehat{\mathbf{U}})$ le travail des efforts extérieurs donnés dans le champ de déplacement $\widehat{\mathbf{U}}$. Son expression dépend de la nature des chargements exercés sur le milieu homogène équivalent (force, double force ...).

Cadre de travail Nous considérons que la séparation d'échelle est marquée ($\eta \ll 1$) et que les jonctions sont relativement fines ($\rho \ll 1$). Par ailleurs, les effets locaux qui peuvent exister au voisinage des zones d'application des chargements et au voisinage des bords du domaine macroscopique sont négligés.

Pour simplifier la présentation et sans perte de généralité, nous considérons que les chargements imposés génèrent uniquement des déformations macroscopiques dans les modes E^1 et E^3 et des gradients de dilatation K^1 . La partie de la densité d'énergie élastique de déformation qui implique ces modes de déformation est :

$$W_1(\widehat{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \left[\rho^2 \widetilde{C}_1 E_1^2 + \rho^2 \frac{\widetilde{\lambda}_2}{1 + \tau^2} (-\tau E_3 + \eta K_1)^2 + \frac{1}{|\log(\rho)|} \frac{\widetilde{\lambda}_4}{1 + \tau^{-2}} \left(\frac{1}{\tau} E_3 + \eta K_1 \right)^2 \right] \quad (\text{III.47})$$

Il faut noter que les mesures scalaires E_1 , E_3 et K_1 utilisées sont relatives au déplacement $\widehat{\mathbf{U}}$, même si cette dépendance est implicite dans cette équation et les suivantes.

Première classe de sollicitations macroscopiques

Un premier cas à considérer est le suivant. Le chargement imposé est tel que, sont visibles à l'ordre dominant : des déformations dans le mode raide E^3 , des déformations dans le mode mou E^1 et un gradient de dilatation K^1 . Cela correspond à :

$$E_1 = \mathcal{O}(1); \quad E_3 = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad K_1 = \mathcal{O}(1) \quad (\text{III.48})$$

Comme τ est de l'ordre de 1, ou plus petit, et que η est très petit devant 1, la déformation E_3 et le gradient K_1 ne peuvent pas se compenser de telle sorte que le terme en $\frac{1}{|\log(\rho)|}$ de (III.47) soit comparable à ceux en ρ^2 . Par conséquent, le terme dominant dans la densité d'énergie (III.47) sera lié à E_3 :

$$W_1(\widehat{\mathbf{U}}) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{|\log(\rho)|} \frac{\widetilde{\lambda}_4}{1 + \tau^2} E_3^2 \quad (\text{III.49})$$

Nous retrouvons le mode raide observé lors de l'analyse des effets élastiques de premier gradient, avec une raideur en $\frac{1}{|\log(\rho)|}$. On peut d'ailleurs vérifier que les valeurs numériques de la raideur apparente $\frac{\widetilde{\lambda}_4}{1 + \tau^2}$ sont presque égales à celles de la raideur propre C_2 . Cette contribution énergétique domine ; si bien qu'il n'est pas possible d'observer des effets de second gradient. Cela nous amène à considérer un second cas de chargement.

Seconde classe de sollicitations macroscopiques

Dans ce second cas, nous considérons que le chargement imposé engendre, à l'ordre dominant, des déformations dans le mode E^1 et des gradients de dilatation dans le dans le mode K^1 . L'état de déformation est donc tel que :

$$E_1 = \mathcal{O}(1); \quad K_1 = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad E_3 \ll E_1 \quad (\text{III.50})$$

Afin d'estimer le champ de déplacement solution $\underline{\mathbf{U}}$ et l'énergie élastique résultante de cette sollicitation, nous allons explorer deux familles de champs tests $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ cinématiquement admissibles.

La première famille de déplacements est telle que les déformations dans le mode raide \mathbf{E}^3 sont exactement nulles. On obtient la densité d'énergie élastique suivante :

$$W_1(\widehat{\underline{\mathbf{U}}}) = \frac{1}{2} \left[\rho^2 \widetilde{\mathbf{C}}_1 E_1^2 + \eta^2 \frac{1}{1 + \tau^2} \left(\rho^2 \widetilde{\lambda}_2 + \frac{1}{|\log(\rho)|} \tau^2 \widetilde{\lambda}_4 \right) \mathbf{K}_1^2 \right] \quad (\text{III.51})$$

soit sensiblement, avec l'hypothèse de jonctions fines ($\rho \ll 1$) :

$$W_1(\widehat{\underline{\mathbf{U}}}) \approx \frac{1}{2} \left[\rho^2 \widetilde{\mathbf{C}}_1 E_1^2 + \eta^2 \frac{1}{|\log(\rho)|} \frac{1}{1 + \tau^{-2}} \widetilde{\lambda}_4 \mathbf{K}_1^2 \right] \quad (\text{III.52})$$

Cette densité d'énergie élastique de déformation est similaire à celle obtenue pour la micro-structure en pantographe. Nous avons vu que dans le cas où le comportement macroscopique est régi par une telle densité d'énergie, avec un certain rapport entre ρ et η ($\eta \sim |\rho \log \rho|$), il est possible d'obtenir des effets de second gradient marqués (sous-section II.6.3). Toutefois, ce choix stricte $E_3 = 0$ tend à surestimer l'énergie élastique. Cela nous amène à considérer une seconde famille de champs de déplacements.

La seconde famille de champs tests $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ est telle que les déformations dans le mode raide \mathbf{E}^3 ne sont pas exactement nulles. Plus précisément, ces champs $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ sont tels que :

$$E_3 = -\eta \tau \mathbf{K}_1 \quad (\text{III.53})$$

Ce choix permet d'annuler le troisième terme quadratique de la densité d'énergie élastique (III.47) et donne :

$$W_1(\widehat{\underline{\mathbf{U}}}) = \frac{1}{2} \left[\rho^2 \widetilde{\mathbf{C}}_1 E_1^2 + \eta^2 \rho^2 (1 + \tau^2) \widetilde{\lambda}_2 \mathbf{K}_1^2 \right] \quad (\text{III.54})$$

Du fait de la séparation d'échelle ($\eta \ll 1$), la contribution du gradient de dilatation dans cette densité d'énergie élastique est très faible par rapport à la contribution de la dilatation (terme en E_1^2). Par conséquent, si le comportement macroscopique est régi par cette densité d'énergie élastique, alors il n'y aura pas d'effets élastiques de second gradient visibles à l'échelle macroscopique.

Dans le cadre de ce second cas de sollicitations macroscopiques, nous constatons que la seconde famille de champs $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ est énergétiquement bien plus optimale que la première. Afin de satisfaire le principe du minimum de l'énergie potentielle, à condition que la liaison cinématique (III.53) puisse être respectée, le champ solution $\underline{\mathbf{U}}$ aura plutôt la forme d'un champ de la seconde famille. Étant donné que η est faible, cette liaison cinématique $E_3 = -\eta \tau \mathbf{K}_1$ est très peu contraignante. En effet, cette déformation dans le mode raide \mathbf{E}^3 correspond à une très faible modification du champ de déplacement macroscopique, d'ordre η , presque invisible à l'échelle macroscopique. En admettant que l'on ne peut contrôler le champ de déplacement macroscopique à η près sur l'intégralité du domaine macroscopique, cette liaison cinématique sera naturellement satisfaite. Nous emploierons le terme de *micro-ajustement*

pour désigner le champ de déplacement qui correspond à cette légère sollicitation, d'ordre η , du mode raide \mathbf{E}^3 .

Pour obtenir des effets de second gradient marqués, il faudrait contrôler finement la cinématique macroscopique de manière à imposer $E_3 = 0$ partout, mais cela est impossible. En effet, il faudrait appliquer en dualité un chargement volumique extrêmement particulier, présentant des variations rapides par rapport à la taille d'une cellule. Cela n'est pas acceptable dans le cadre défini pour cette démarche d'homogénéisation.

Ce raisonnement nous amène à la conclusion suivante : Même si le chargement sollicite uniquement le mode mou \mathbf{E}^1 , avec des variations de l'amplitude de déformation E_1 , il n'y a pas d'effets de second gradient nettement visibles à l'échelle macroscopique.

III.3.5.4 Illustration de l'importance du micro-ajustement

Afin d'illustrer le phénomène de compensation d'un gradient de dilatation macroscopique par un micro-ajustement lié à un mode raide, les figures III.22a et III.22b représentent, à l'échelle de la microstructure, les déplacements et les déformations engendrés par deux états de déformation macroscopiques particuliers.

Le premier cas correspond à une situation où seule la déformation dans le mode \mathbf{E}^1 est non nulle et dont l'intensité varie linéairement dans la direction 1. L'état de déformation imposé se caractérise par un gradient de dilatation $\mathbf{K} = K_1 \mathbf{K}^1$ uniforme et par l'absence de déformation dans les modes \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 . À l'échelle de la microstructure, le champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}^{K_1}$ reconstruit pour cet état de déformation macroscopique est similaire à celui défini par (III.12) :

$$\underline{\mathbf{u}}^{K_1} = \eta K_1 \left[\frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{K}}^1 : (\underline{\mathbf{y}} \otimes \underline{\mathbf{y}}) + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : (\mathbf{K}^1 \cdot \underline{\mathbf{y}}) + \mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}^1 \right] \quad (\text{III.55})$$

Dans le second cas (Figure III.22b), on impose une déformation uniforme dans le mode \mathbf{E}^3 en plus du gradient de dilatation uniforme, afin de prendre en compte le micro-ajustement. Le champ de déplacement reconstruit qui traduit ce micro-ajustement est :

$$-\eta \tau K_1 \underline{\mathbf{u}}^{E^3} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{u}}^{E^3} = \mathbf{E}^3 \cdot \underline{\mathbf{y}} + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{E}^3 \quad (\text{III.56})$$

Par conséquent, le champ de déplacement reconstruit $\underline{\mathbf{u}}^{K_1 \text{m.a.}}$ induit par ce second état de déformation macroscopique, avec micro-ajustement, s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{K_1 \text{m.a.}} &= \underline{\mathbf{u}}^{K_1} - \eta \tau K_1 \underline{\mathbf{u}}^{E^3} \\ &= \eta K_1 \left[\frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{K}}^1 : (\underline{\mathbf{y}} \otimes \underline{\mathbf{y}}) - \tau \mathbf{E}^3 \cdot \underline{\mathbf{y}} + \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) : (\mathbf{K}^1 \cdot \underline{\mathbf{y}} - \tau \mathbf{E}^3) + \mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}}) : \mathbf{K}^1 \right] \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

Les deux illustrations de la Figure III.22 représentent la norme des champs de déformation associés aux champs de déplacement reconstruits, ces derniers étant rapportés à η : $\varepsilon_y(\underline{\mathbf{u}}^{K_1}/\eta)$ et $\varepsilon_y(\underline{\mathbf{u}}^{K_1 \text{m.a.}}/\eta)$. Pour la représentation de la déformée, les déplacements, toujours rapportés à η , sont multipliés par un facteur 0.05. Ces illustrations ont été produites pour une microstructure dont les paramètres géométriques sont $\rho = 0.01$ et $\theta = 38^\circ$, pour un gradient de dilatation unitaire ($K_1 = 1$). Le repère utilisé pour définir les champs macroscopiques, dont l'origine est au centre de l'échantillon, est également représentée sur les deux figures.

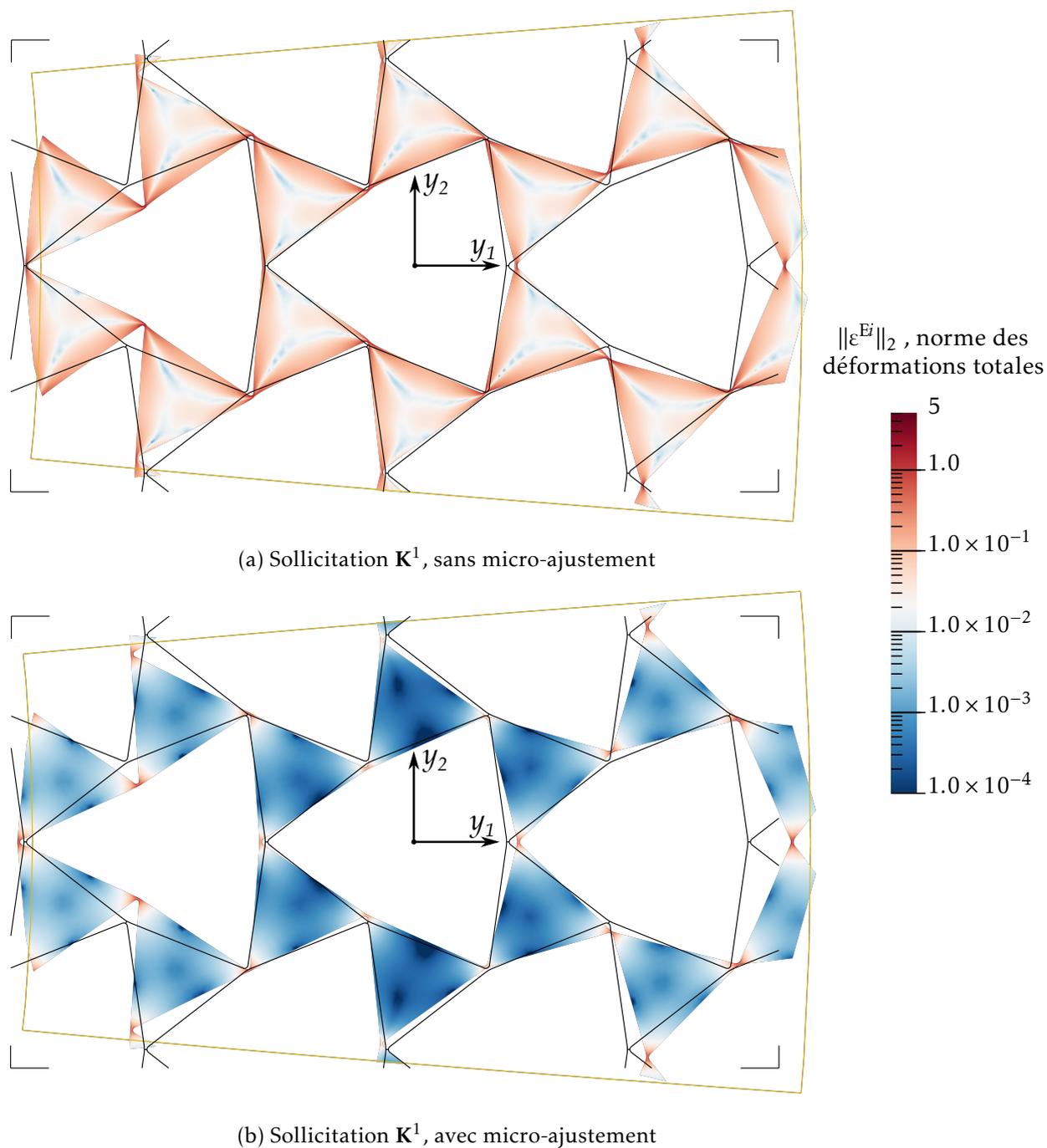


FIGURE III.22 – Déformée et champ de déformation induits, à l'échelle de la microstructure, par deux états de déformation macroscopiques correspondant à un gradient de dilatation \mathbf{K}^1 .

Observations Nous constatons que la déformée macroscopique (contour jaune) est sensiblement identique dans les deux cas. Par contre, à l'échelle de la microstructure les champs induits sont nettement différents. En effet, il apparait que la présence de ce micro-ajustement, lié à un mode raide, fait considérablement baisser l'intensité des déformations dans la microstructure.

Cette illustration du phénomène de micro-ajustement permet de comprendre l'influence significative du couplage à l'échelle macroscopique. Elle permet de se rendre compte qu'il est possible d'imposer un gradient de dilatation \mathbf{K}^1 sur cette microstructure à un coût énergétique très faible. Aussi, pour cette microstructure, on ne pourra pas observer d'effets de second gradient marqués à l'échelle macroscopique, y compris dans le mode mou \mathbf{E}^1 .

À titre de complément, des illustrations similaires construites pour un gradient de dilatation \mathbf{K}^2 sont proposées en Annexe B.2.

III.3.6 Synthèse

Cette étude numérique permet d'identifier la nature du comportement élastique obtenu à l'échelle macroscopique avec cette microstructure, et ce, pour toute une variété de configurations paramétrées par l'angle d'ouverture θ .

Dans le cas général, c'est-à-dire pour les configurations partiellement déployées ($\theta < 60^\circ$), le milieu architecturé doté de cette microstructure se comporte à l'échelle macroscopique comme un milieu de Cauchy au comportement élastique linéaire, isotrope et dégénéré. Les déformations dans les modes \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 ont un coût énergétique nettement plus élevé que les déformations dans le mode \mathbf{E}^1 . Le contraste de raideur croît rapidement quand les jonctions deviennent fines. Pour autant, cette microstructure ne donne pas lieu à des effets de second gradient visibles à l'échelle macroscopique, même pour les gradients de dilatation relatifs au mode mou \mathbf{E}^1 . Cela est dû au couplage entre ces gradients de dilatation et les modes raides \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 , car ce couplage permet l'existence de micro-ajustements.

Aussi, la densité d'énergie élastique homogénéisée qu'il convient d'utiliser est celle qui n'inclut que les effets élastiques du premier gradient :

$$\mathbf{W}^{\text{hom}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} = \frac{1}{2} (C_1 \mathbf{E}_1^2 + C_2 \mathbf{E}_2^2 + C_2 \mathbf{E}_3^2) \quad (\text{III.58})$$

Dans la configuration kagome, caractérisée par $\theta = 60^\circ$, les trois modes de déformation $\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2$ et \mathbf{E}^3 ont des raideurs comparables. Il n'y a plus de mode mou associé à une déformation macroscopique. Avec cette méthode d'homogénéisation, le milieu homogène équivalent auquel nous aboutissons est un milieu de Cauchy au comportement élastique isotrope et non dégénéré, y compris lorsque les jonctions sont très fines. Par contre, dans la configuration kagome, cette microstructure donne lieu à d'autres effets élastiques non-conventionnels (voir par exemple [Nassar *et al.*, 2020]). En particulier, il existe une transformation de la microstructure à très faible énergie qui n'est ni associée à un mouvement de corps rigide ni à une déformation macroscopique. Autrement dit, un mode mou existe également dans cette configuration sauf qu'il n'est pas associé à un gradient de déplacement macroscopique.

Par conséquent, il semble judicieux d'utiliser un autre modèle, avec un degré de liberté supplémentaire, pour représenter le comportement linéaire élastique effectif. Cette situation présente des similarités avec celle de la microstructure *carrés auxétiques* en configuration damier.

Par ailleurs, ces résultats numériques permettent de vérifier le caractère auxétique de cette microstructure. Pour les configurations partiellement déployées, le coefficient de Poisson apparent $\nu = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$ vaut presque -1 dès lors que les jonctions sont relativement fines ($\rho \lesssim 1 \times 10^{-2}$ pour les configurations étudiées). Le comportement élastique étant isotrope, l'existence du mode mou de dilatation isotrope E^1 est relié au fait que ν soit presque égal à -1 . Par contre, dans la configuration kagome, le coefficient de Poisson apparent est positif et vaut environ 0.68.

III.4 Conclusion partielle et perspectives

Dans cette partie, le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur est appliqué à deux microstructures qui ont une géométrie et un comportement élastique de premier gradient similaires. En effet, dans les deux cas, la dilatation isotrope est un mode mou de déformation macroscopique. Ce travail permet de déceler une différence significative de comportement entre ces deux microstructures : dans le cas de la microstructure *carrés auxétiques*, pour les configurations partiellement déployées, on obtient un milieu élastique qui présente des effets de second gradient pour certaines sollicitations. Ceux-ci sont liés au gradient de la dilatation isotrope. À l'inverse, dans le cas de la microstructure *triangles auxétiques*, nous prévoyons avec ce schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur l'absence d'effets de second gradient malgré l'existence du mode mou. Les variations de l'amplitude de la dilatation n'ont pas une contribution énergétique significative à cause d'un micro-ajustement permis par le couplage entre le gradient de dilatation et les modes raides de premier ordre.

Le fait que la microstructure *triangles auxétiques* puisse supporter un état de dilatation isotrope à amplitude variable à un coût énergétique faible peut être un atout pour certaines applications [Konaković *et al.*, 2016; Konaković-Luković *et al.*, 2018; Czajkowski *et al.*, 2021]. En particulier, il est plus facile d'accéder à une surface 3D quelconque, à courbure gaussienne non nulle, à partir d'une plaque de matériau architecturé si celui-ci est peu sensible aux variations de dilatation. Même si cela sort du cadre de ce travail, nos résultats permettent d'expliquer que la microstructure *triangles auxétiques* est appropriée pour de telles applications.

Pour la microstructure *carrés auxétiques* des effets de second gradient sont visibles pour l'ensemble des configurations partiellement déployées. De plus, dans le cas idéalisé d'une collection de solides rigides reliés par des jonctions élastiques, l'application d'une dilatation isotrope à l'échelle macroscopique se traduit par une augmentation uniforme de l'angle d'ouverture θ dans la microstructure. Cette microstructure est donc une bonne candidate si l'on souhaite construire, par homogénéisation, un modèle élastique de second gradient avec des grandes transformations dans le mode mou de dilatation isotrope [Eremeyev *et al.*,

2021; Czajkowski *et al.*, 2021]. Cette étude d'homogénéisation, réalisée avec l'hypothèse des petites perturbations pour un ensemble de configurations au repos paramétrées par θ , est une première étape dans cette voie.

Nous savons que certains des comportements élastiques non-conventionnels qui peuvent être observés dans les configurations entièrement déployées peuvent être décrits, à l'échelle macroscopique, dans le cadre de l'élasticité linéaire, à l'aide d'un degré de liberté supplémentaire. Or ces phénomènes ne peuvent pas être représentés avec un milieu de second gradient et nécessitent donc l'emploi d'un autre type de milieu généralisé. Cela invite à développer une variante du schéma d'homogénéisation proposé, avec laquelle il serait possible d'aboutir à un milieu homogène équivalent qui contient ce degré de liberté supplémentaire et qui permet de représenter ces phénomènes non-conventionnels. De la même manière, il faudrait alors évaluer la pertinence de l'implication des gradients de ce degré de liberté supplémentaire dans la densité d'énergie élastique homogénéisée. Ce travail a été entamé lors de ce doctorat mais l'étude numérique nécessite d'être poursuivie. En particulier, une confrontation à un calcul complet par éléments finis serait nécessaire pour confirmer le caractère prédictif de cet autre schéma d'homogénéisation. Cela soulève également la question de la transition entre le comportement de second gradient observé pour les configurations partiellement déployées, dans le cas des carrés auxétiques, et le comportement d'une nature différente observé dans les configurations damier et kagome. Cette question a été abordée, à travers une approche plus mathématique, dans [Jakabčín et Seppecher, 2020; Abdoul-Anziz *et al.*, 2021; Seppecher et Jakabčín, 2021].

Chapitre IV

Identification expérimentale de modules élastiques de second gradient

IV.1	Introduction	92
IV.2	Conception et fabrication d'échantillons de bande pantographique	96
IV.2.1	Microstructure de la bande pantographique	96
IV.2.2	Modèle homogénéisé	98
IV.2.3	Procédé de fabrication	101
IV.2.4	Caractérisation du matériau constitutif	103
IV.2.5	Conception des éprouvettes	108
IV.2.6	Imperfections et quantification de l'écart à la géométrie nominale	110
IV.3	Mise en évidence expérimentale d'une sensibilité au gradient d'élongation	113
IV.3.1	Dispositif expérimental	113
IV.3.2	Sollicitations mécaniques	114
IV.3.3	Mesures de déplacements par corrélation d'images numériques	116
IV.3.4	Description cinématique macroscopique	123
IV.3.5	Résultats	124
IV.4	Identification d'un comportement de second gradient équivalent	127
IV.4.1	Méthode	128
IV.4.2	Expérience numérique	130
IV.4.3	Résultats	134
IV.5	Application à une microstructure obtenue par optimisation topologique	139
IV.5.1	Synthèse d'une poutre périodique sensible au gradient d'extension	139
IV.5.2	Méthode	147
IV.5.3	Résultats	151
IV.6	Conclusion et perspectives	154

IV.1 Introduction

Tous les résultats présentés dans les deux chapitres précédents ont été obtenus de façon numérique. Il est important de confronter les résultats numériques obtenus à l'aide du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur à la réalité expérimentale. Cela permettra, d'une part, de vérifier l'existence des effets de second gradient prévus par l'homogénéisation pour certaines microstructures et, d'autre part, de comparer le modèle linéaire élastique de second gradient obtenu avec ce schéma d'homogénéisation au comportement observé lors d'essais mécaniques.

En effet, plusieurs facteurs peuvent engendrer un écart conséquent entre le modèle homogénéisé et le comportement réel observé lors d'essais mécaniques, voire même rendre impossible l'observation d'effets de second gradient malgré la prévision du schéma d'homogénéisation. Les principaux facteurs sont les suivants :

- *Imperfection géométrique des éprouvettes* : Quel que soit le procédé de fabrication utilisé pour la fabrication d'échantillons, on ne peut obtenir une microstructure dont la géométrie est exactement périodique. Si l'on considère la microstructure en pantographe, une variabilité dans la taille des jonctions ou un léger écart entre la position théorique et la position réelle d'une jonction pourraient bloquer l'établissement d'un mode mou et, par conséquent, modifier significativement le comportement visible à l'échelle macroscopique [Abdoul-Anziz et Seppecher, 2018b; Abdoul-Anziz *et al.*, 2019].
- *Non-linéarités matériau* : Dans le cas où la microstructure comporte de fines jonctions, comme c'est le cas pour la microstructure de pantographe, des phénomènes de concentration de déformation peuvent avoir lieu. Aussi, il est probable qu'au voisinage de ces singularités géométriques l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du matériau constitutif soit prise en défaut, même pour de faibles sollicitations macroscopiques. Ces non-linéarités (élasticité non linéaire, plasticité, endommagement, voire rupture) peuvent influencer de façon significative le comportement observé à l'échelle macroscopique. Elles peuvent réduire drastiquement la plage d'amplitude de sollicitations pour laquelle l'utilisation d'un modèle macroscopique élastique linéaire est pertinente.
- *Mode mou évanescant* : Il est possible qu'un mode de déformation macroscopique ne soit un mode mou que dans le cadre de l'élasticité linéarisée avec l'hypothèse des petites perturbations. La raideur de ce mode de déformation peut augmenter rapidement dès que l'on s'écarte de la configuration initiale, à cause du changement de géométrie de la microstructure sous l'effet du chargement imposé (non-linéarités géométriques). Il y a un risque que les effets de second gradient, prévus en conditions HPP, soient rapidement occultés lorsqu'on augmente l'intensité de la sollicitation.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au métamatériau pantographique, présenté Section II.2 et étudié numériquement Section II.4. Les travaux expérimentaux réalisés autour de cette microstructure ont trois objectifs :

- Vérifier que cette microstructure permet d'obtenir des effets élastiques de second gradient marqués, en quasi-statique. Identifier le régime de sollicitations pour lequel ces effets sont visibles et pour lequel on observe, à l'échelle macroscopique, un comportement élastique linéaire ;
- Concevoir un dispositif expérimental qui permet de mettre en évidence certains effets élastiques de second gradient, en quasi-statique, et établir une méthode de mesure des raideurs de second ordre associées ;
- Confirmer le caractère prédictif du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur pour cette microstructure.

Nous proposons d'étudier un effet de second gradient particulier prévu par l'homogénéisation : la sensibilité au gradient d'élongation (variation dans la direction 1 du niveau d'extension dans cette même direction). Étant donné que ce comportement non-conventionnel est en majeure partie dû aux bandes de pantographe contenues dans cette microstructure, nous nous limiterons à l'étude expérimentale de l'une de ces bandes. L'utilisation de cette microstructure plane, ainsi que l'étude d'une seule bande de pantographe, permettent d'avoir un cas d'étude simple pour le développement d'une méthode de mesure d'une raideur de second gradient. Jusqu'à présent, la majorité des travaux expérimentaux dans lesquels des effets de second gradient marqués sont mis en évidence en quasi-statique concernent un type de microstructures particulier : le pantographe en treillis. Plusieurs versions ont été fabriquées et soumises à des essais mécaniques, avec des pivots élastiques [dell'Isola *et al.*, 2016; dell'Isola *et al.*, 2019; Hild *et al.*, 2021] ou de réelles liaisons pivots entre les barres de la microstructure [Golaszewski *et al.*, 2019; Spagnuolo *et al.*, 2019; Barchiesi *et al.*, 2020]. dell'Isola *et al.* [2019] proposent une synthèse des travaux expérimentaux réalisés autour de cette microstructure particulière. Nous proposons, avec ces travaux expérimentaux, d'explorer une direction différente pour l'obtention d'effets élastiques de second gradient : l'utilisation de microstructures contenant de fines jonctions. Il faut noter qu'une étude expérimentale a déjà été menée sur une microstructure de pantographe similaire, constituée de poutres [Abdoul-Anziz et Seppecher, 2018b]. Cependant, elle ne permet pas de mettre en évidence des effets de second gradient significatifs, car le contraste géométrique (*i.e.* rapport entre la largeur des poutres et la taille d'une cellule) n'est pas suffisamment grand et les poutres qui constituent cette microstructure sont très sensibles au flambement.

Pour la fabrication d'échantillons de bandes pantographiques, nous utilisons le procédé de découpe laser. Nous souhaitons obtenir une double séparation d'échelle dans les échantillons de poutre pantographique fabriqués : il faut que l'échantillon contienne un certain nombre de cellules, pour que l'utilisation d'un modèle homogénéisé ait du sens et, de plus, que les jonctions soient fines par rapport à la taille d'une cellule pour que les effets de second gradient soient marqués. Pour l'étude expérimentale des comportements élastiques non standards obtenus avec des microstructures planes, comme celle étudiées ici, ou des pantographes en treillis, les échantillons sont en général fabriqués par des procédés de fabrication additive [dell'Isola *et al.*, 2019; Abdoul-Anziz, 2018; Poncelet *et al.*, 2018; Golaszewski *et al.*, 2019;

dell'Isola *et al.*, 2019; Czajkowski *et al.*, 2021] ou par découpe laser [Shan *et al.*, 2015; Rafsanjani et Pasini, 2016; Agnelli *et al.*, 2021; Zheng *et al.*, 2021]. Dans notre cas, le choix de la découpe laser est motivé par les raisons suivantes :

- La microstructure est plane ;
- Pour la machine utilisée, le rapport entre la largeur des détails géométriques réalisables et la taille maximale des pièces découpées est élevé ;
- Par rapport à la fabrication additive, le risque d'inhomogénéité du matériau constitutif semble réduit ;
- Une machine de découpe laser est disponible au laboratoire et les dimensions des échantillons qu'elle permet de fabriquer sont adaptées aux moyens techniques du laboratoire (machine d'essais, outils de mesure).

Nous proposons de réaliser deux essais de traction afin de mettre en évidence l'effet élastique de second gradient recherché et de mesurer les raideurs homogénéisées relatives à l'extension et au gradient d'extension. Le premier essai a été conçu pour générer une extension aussi uniforme que possible dans l'échantillon de bande pantographique et le second pour générer un fort gradient d'extension. Les deux éprouvettes utilisées contiennent le même échantillon de bande pantographique, mais leurs extrémités sont différentes afin d'appliquer des conditions aux limites particulières. Une technique de corrélation d'images numériques est employée pour mesurer les champs de déplacement et d'extension macroscopiques. Cela permet d'avoir des mesures en plusieurs points et d'observer d'éventuelles variations de ces champs au sein de l'échantillon. Enfin, pour estimer les raideurs du milieu homogène équivalent, on procède à un ajustement de solutions analytiques sur les mesures réalisées lors de ces deux essais.

La corrélation d'images numériques est une méthode de mesure souvent mise en œuvre pour l'observation de comportement élastiques non standards lors d'essais mécaniques sur des échantillons de matériaux architecturés ; citons par exemple [Hild *et al.*, 2021; Barchiesi *et al.*, 2021; Poncelet *et al.*, 2018; Maraghechi *et al.*, 2020; Barchiesi *et al.*, 2020; Agnelli *et al.*, 2021]. Elle permet, d'une part, de mettre en évidence des variations de champs cinématiques macroscopiques et d'autre part de réaliser des mesures à la fois à l'échelle macroscopique et à l'échelle microscopique [Hild *et al.*, 2021].

Il n'y a actuellement pas de méthode bien établie pour la mesure des propriétés élastiques homogénéisées d'un matériau architecturé décrit à l'échelle macroscopique par un milieu de second gradient. Nous relevons toutefois deux méthodes présentes dans la littérature. Une première méthode a été proposée par Réthoré *et al.* [2015] et mise en œuvre pour une microstructure en nid d'abeilles. Un essai de traction est réalisé sur un échantillon qui contient une fente inclinée en son centre, afin de générer de forts gradients de déformation. Les modules homogénéisés sont ensuite estimés en employant une méthode de recalage de modèle éléments finis (méthode FEMU, présentée par exemple par [David, 2014]), le champ de déplacement étant mesuré par corrélation d'images numériques. Par rapport à ces travaux, la méthode que nous proposons a trois avantages : elle permet d'observer nettement un

certain effet élastique de second gradient (lié au gradient d'élongation), de se limiter à l'étude d'une seule bande pantographique, et de mieux maîtriser les conditions aux limites. La seconde méthode, proposée par [Rosi *et al.*, 2018], est, pour la partie statique, similaire à celle proposée ici. Certains coefficients des tenseurs d'élasticité homogénéisés sont estimés par recalage d'une solution analytique sur les déplacements mesurés. Par contre, cette méthode n'est mise en œuvre que de façon numérique. Enfin, il semble préférable d'utiliser une microstructure qui mène à des effets de second gradients marqués pour valider une telle méthode d'identification de paramètres élastiques de second gradient. De ce fait, l'utilisation du métamatériau en pantographe est adéquate.

Dans un second temps, le dispositif expérimental et la méthode de mesure des modules élastiques seront mis en œuvre pour une autre microstructure, obtenue par optimisation topologique. Cela s'inscrit dans le cadre du projet ANR ArchiMathOS. Cette microstructure a été conçue en collaboration avec Valentin Calisti [Calisti, 2018] et Arthur Lebée, avec l'objectif d'obtenir une forte sensibilité à un gradient d'extension. Pour cela, les résultats d'optimisation topologique obtenus récemment par Calisti *et al.* [2021] ont été utilisés. Cette seconde étude expérimentale a pour objectifs de vérifier que cette microstructure permet en pratique d'obtenir cet effet typique d'un milieu de second gradient et de comparer les raideurs prévues par le schéma d'homogénéisation à celles mesurées.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : La section IV.2 présente le modèle homogénéisé d'une bande de pantographes puis aborde la conception et la fabrication des éprouvettes. En particulier, le comportement du matériau constitutif est brièvement étudié. Ensuite, la section IV.3 détaille la méthodologie des essais de traction puis présente les résultats de ces essais pour la bande de pantographes. Nous constaterons alors que cette microstructure permet, en pratique, d'obtenir des effets élastique de second gradient. Dans la section IV.4 la méthode d'identification des raideurs en extension de premier et de second ordres est décrite, validée numériquement, puis appliquée pour la bande pantographique. Nous comparerons les résultats obtenus aux prévisions de l'homogénéisation. Enfin, l'étude de la microstructure conçue par optimisation topologique est abordée Section IV.5.

IV.2 Conception et fabrication d'échantillons de bande pantographique

La bande pantographique que nous allons étudier est dotée d'une microstructure plane, périodique dans la direction longitudinale (Direction 1), comme illustrée Figure IV.1.

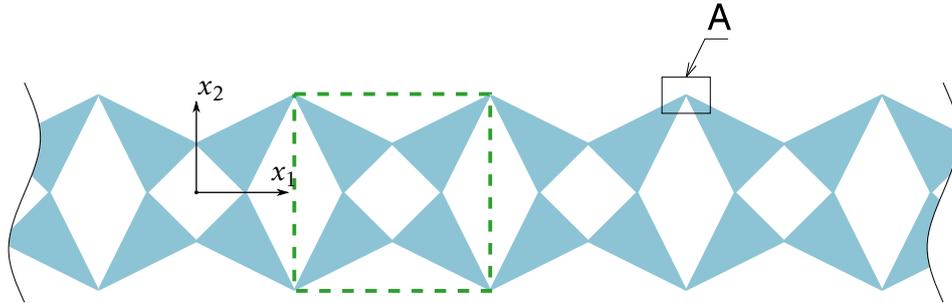


FIGURE IV.1 – Bande périodique architecturée à microstructure pantographique.

Pour la fabrication d'échantillons, la microstructure est extrudée dans la direction hors plan afin d'obtenir une bande d'épaisseur finie. Pour l'étude du comportement élastique, nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité plane avec l'hypothèse de contraintes planes. Les éprouvettes fabriquées étant minces, cette hypothèse de modélisation est *a priori* respectée dans la majeure partie de l'éprouvette, sauf dans les jonctions. C'est donc un choix plus judicieux que l'hypothèse de déformations planes.

Nous allons nous intéresser au comportement de cette bande uniquement pour des sollicitations en élongation (extension dans la direction longitudinale). Étant donné les études numériques réalisées sur la microstructure 2D, nous prévoyons que l'élongation uniforme soit un mode mou pour cette bande pantographique et que celle-ci soit sensible au gradient d'élongation.

Existence du mode mou d'élongation au-delà du cadre HPP En considérant la cinématique du modèle de solides rigides équivalent à la bande de pantographes (collection de solides rigides reliées par des liaisons pivots), il apparaît évident que le mode mou d'élongation est présent même en grandes déformations. Le risque d'évanescence du mode mou évoqué dans l'introduction n'est donc pas un problème dans le cas de la bande de pantographes.

IV.2.1 Microstructure de la bande pantographique

La microstructure de la bande pantographique se compose de triangles reliés en leurs sommets par de fines jonctions, le reste de l'espace restant vide (Figure IV.1). La cellule de base choisie pour l'étude de ce milieu périodique, encadrée en vert Figure IV.1, est un rectangle de longueur t dans la direction longitudinale. Sa géométrie est représentée Figure IV.2a. La géométrie de la microstructure dépend de deux paramètres indépendants : la longueur a et la finesse de jonction ρ , sans dimension. Par la suite, le terme contraste géométrique est

également employé pour faire référence à ρ . On suppose que la microstructure est constituée d'un matériau homogène, élastique linéaire isotrope.

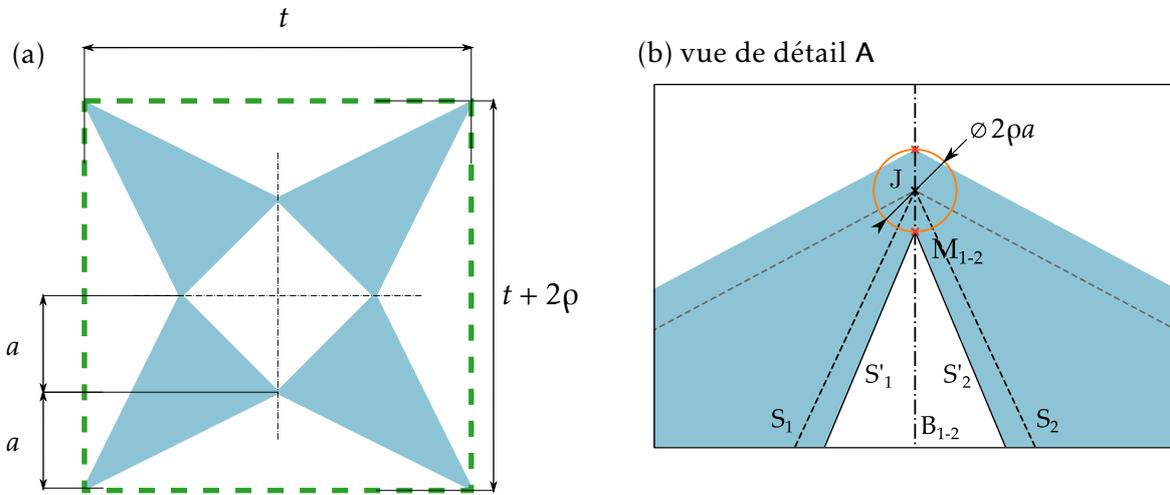


FIGURE IV.2 – (a) Géométrie de la cellule de base (b) Illustration de la construction géométrique des jonctions.

Construction géométrique des jonctions La méthode de construction des jonctions entre les triangles est différente de celle employée dans le cas de la microstructure 2D, présentée section II.2.1. Deux raisons motivent ce changement de méthode. D'une part, il est préférable d'avoir une géométrie nominale de jonction composée uniquement de segments de droite, sans arc de cercle, pour ce procédé de fabrication par découpe laser. Cela permet d'obtenir une meilleure qualité de découpe au niveau des jonctions. Les angles obtenus par découpe laser sont naturellement légèrement arrondis. Le risque de concentration de contraintes au niveau des angles rentrant est donc limité. D'autre part, la construction des jonctions sur les bords de la poutre (bords haut et bas Figure IV.2a) est impossible avec la méthode des arcs de cercles tangents sans adaptation.

La méthode employée pour obtenir une jonction de largeur non nulle entre deux triangles adjacents est illustrée Figure IV.2b. La géométrie de la microstructure est définie à partir d'un ensemble de triangles élémentaires identiques reliés entre eux par leurs sommets. On considère deux triangles élémentaires adjacents (en pointillés Figure IV.2b). Le sommet J qu'ils ont en commun correspond au centre géométrique d'une jonction. Les segments de droites S_1 et S_2 forment un secteur angulaire qui, après modification, formera une partie du contour de cette jonction. Le sommet de ce secteur angulaire, initialement en J , est déplacé le long de la bissectrice B_{1-2} jusqu'au point M_{1-2} . La distance de déplacement est égale à ρa et le sens de déplacement est choisi de manière à aboutir à une jonction de largeur strictement positive. Cette opération est effectuée pour chaque paire de côtés de triangles élémentaires similaire à la paire (S_1, S_2) . On obtient ainsi un ensemble de points analogues à M_{1-2} (en rouge Figure IV.2b). Ensuite, les contours de la microstructure sont construits en utilisant

des segments de droites dont les extrémités correspondent à ces points. Sur le schéma, S'_1 et S'_2 forment une partie du contour et remplacent S_1 et S_2 .

En plus de la finesse des jonctions ρ , la largeur des jonctions w est également utilisée par la suite pour décrire la géométrie de la microstructure. Elle correspond à la distance entre les deux sommets des secteurs angulaires qui définissent une jonction (en rouge Figure IV.2b). Sur la géométrie nominale, *i.e.* le modèle géométrique utilisé pour la découpe, la largeur nominale $w = 2\rho a = \rho t/2$ est identique pour l'ensemble des jonctions.

IV.2.2 Modèle homogénéisé

IV.2.2.1 Procédure d'homogénéisation

Choix du modèle Étant donné l'éclatement du milieu périodique qu'est la bande pantographique, il est pertinent de construire un milieu homogène équivalent en utilisant un modèle unidimensionnel (modèle de poutre). La variable d'espace macroscopique X , appelée position longitudinale, est scalaire et le domaine macroscopique, noté Ω , correspond à l'intervalle $[0;L]$. Pour cette modélisation, on considère que chaque point matériel de Ω a un unique degré de liberté : le déplacement macroscopique longitudinal (selon \underline{e}_1) $U(X)$. Deux mesures de l'état de déformation macroscopique sont définies : l'élongation macroscopique E et le gradient d'élongation macroscopique K , avec

$$E(X) = \frac{dU}{dX}(X) \quad \text{et} \quad K(X) = \frac{dE}{dX}(X). \quad (\text{IV.1})$$

Méthode d'homogénéisation Étant donné que l'on s'intéresse exclusivement au comportement en extension de cette bande de pantographes, il est possible de construire le milieu homogène équivalent en utilisant une partie des résultats obtenus avec le schéma d'homogénéisation présenté précédemment (Section II.3). Seuls deux changements mineurs doivent être effectués :

- La condition aux limites de périodicité sur les bords horizontaux de la cellule ($y_2 = \pm 0.5$) est remplacée par une condition aux limites de bords libres ;
- On ne considère que les sollicitations macroscopiques qui font intervenir uniquement le déplacement macroscopique dans la direction 1.

Notons qu'il serait envisageable de construire un schéma d'homogénéisation pour poutres périodiques permettant de prendre en compte à la fois l'extension, la flexion, le cisaillement ainsi que des dérivées d'ordres supérieures en se basant sur le schéma d'homogénéisation présenté précédemment. Toutefois, cela n'est pas nécessaire dans le cadre de ce travail expérimental.

Comportement élastique de second gradient Avec une troncature à l'ordre $p = 2$ du champ de déplacement total u , on obtient un milieu homogène équivalent qui est un milieu

de second gradient et dont le comportement élastique est linéaire et sans couplage, pour une raison de symétrie de la microstructure. La densité linéique d'énergie élastique de déformation est

$$W(X) = \frac{1}{2} \left(CE(X)^2 + DK(X)^2 \right) \quad (\text{IV.2})$$

C est la raideur en extension (raideur de premier gradient) et D est la raideur de second gradient associée aux variations du niveau d'extension.

Pour cet ordre de troncature $p = 2$, l'approximation du champ de déplacement total est :

$$\underline{\mathbf{u}}^h(X, \underline{\mathbf{y}}) \simeq U(X) + \eta E(X) \mathbf{h}^1(\underline{\mathbf{y}}) + \eta^2 K(X) \mathbf{h}^2(\underline{\mathbf{y}}) \quad (\text{IV.3})$$

Enfin, on définit la longueur intrinsèque du milieu de second-gradient équivalent ℓ :

$$\ell = t \sqrt{\frac{D}{C}} \quad (\text{IV.4})$$

Cette longueur caractéristique est un indicateur de la sensibilité de la bande architecturée aux variations longitudinales du niveau d'élongation. Elle doit être comparée à la longueur de la bande, L .

Pour l'application numérique du schéma d'homogénéisation, les deux raideurs C et D sont déterminées en utilisant l'outil développé pour un milieu plan périodique dans deux directions. Seules des modifications mineures sont faites dans le code de calcul pour prendre en compte le changement de conditions aux limites.

IV.2.2.2 Résultats de l'homogénéisation

L'homogénéisation de la bande de pantographes a été réalisée pour différentes valeurs de la finesse de jonction $\rho \in [1 \times 10^{-4}; 1 \times 10^{-1}]$. Les résultats présentés dans cette section sont calculés en élasticité plane, avec l'hypothèse de contraintes planes.

Pour les raideurs de premier et de second gradient C et D , les tendances asymptotiques lorsque $\rho \rightarrow 0$ sont identiques à celles observées dans le cas de la microstructure de pantographe 2D : décroissance en ρ^2 pour C et en $\frac{1}{|\log \rho|}$ pour D .

La Figure IV.3 présente la réponse de la microstructure à deux sollicitations macroscopiques élémentaires : une extension uniforme $U(X) = X$ ($E(X) = 1$, $K = 0$) et une extension variant linéairement dans la Direction 1 $U(X) = \frac{1}{2}X^2$ ($E(X) = X$, $K(X) = 1$). Cette seconde sollicitation correspond à un gradient d'extension uniforme. Le champ de déplacement total est calculé en utilisant l'approximation (IV.3) obtenue avec la troncature à l'ordre $p = 2$. La norme du champ de déformation correspondant est représentée sur la configuration déformée. On observe un comportement de la microstructure similaire à celui observé dans le cas du milieu en pantographe 2D : les pointes de triangles sont mises en flexion lorsque l'extension macroscopique n'est pas uniforme.

La Figure IV.4 présente l'évolution de la longueur intrinsèque ℓ , rapportée à t , en fonction de la finesse de jonction. Sur cette figure, la ligne pointillée représente la longueur caractéristique $\ell_{1,1}^0$ calculée dans le cas de la microstructure de pantographe 2D. La tendance pour

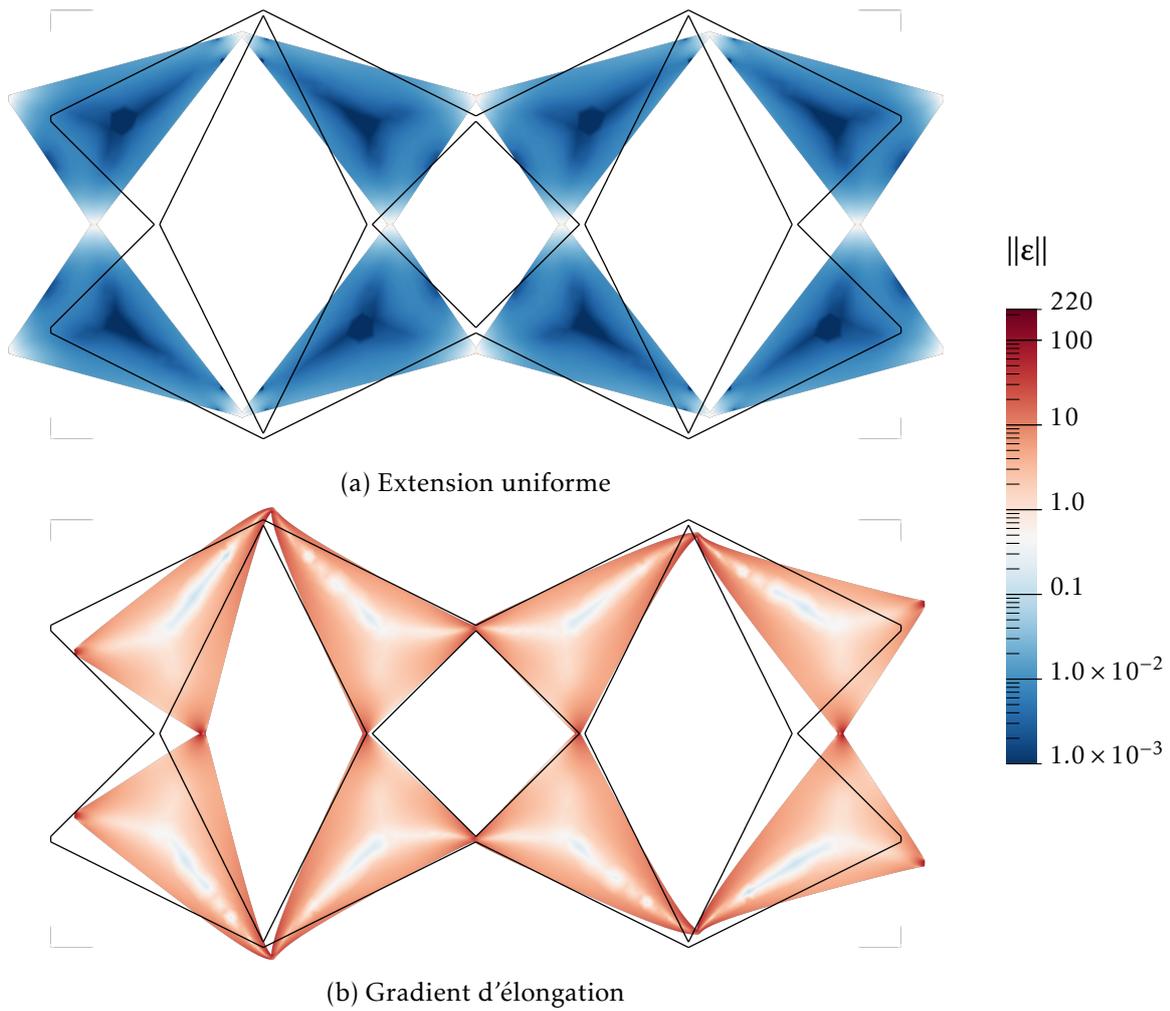


FIGURE IV.3 – Échantillon de bande de pantographes soumis à des sollicitations macroscopiques élémentaires : (a) Élongation uniforme , (b) Variation linéaire de l'élongation. Le champ représenté est la norme du champ de déformation totale $\|\epsilon\|$. Le contour de la configuration initiale est également représenté (trait noir). Pour la représentation de la déformée, le facteur d'amplification du déplacement est 0.1.

$\rho \rightarrow 0$ de la longueur intrinsèque pour la bande de pantographes est similaire à celle observée pour la microstructure 2D. Par contre, pour un contraste géométrique fixé, la longueur intrinsèque est légèrement plus faible dans le cas de la bande de pantographes.

Synthèse Ces résultats montrent que, comme prévu, la forte sensibilité aux variations d'extension dans la direction longitudinale est préservée lors du passage du milieu architecturé 2D à une bande de pantographes. Bien que la présence de bords libres dégrade légèrement le caractère marqué de cet effet de second gradient, on peut atteindre des valeurs de ℓ de l'ordre de quelques cellules avec un contraste géométrique ρ réaliste pour la fabrication d'échantillons.

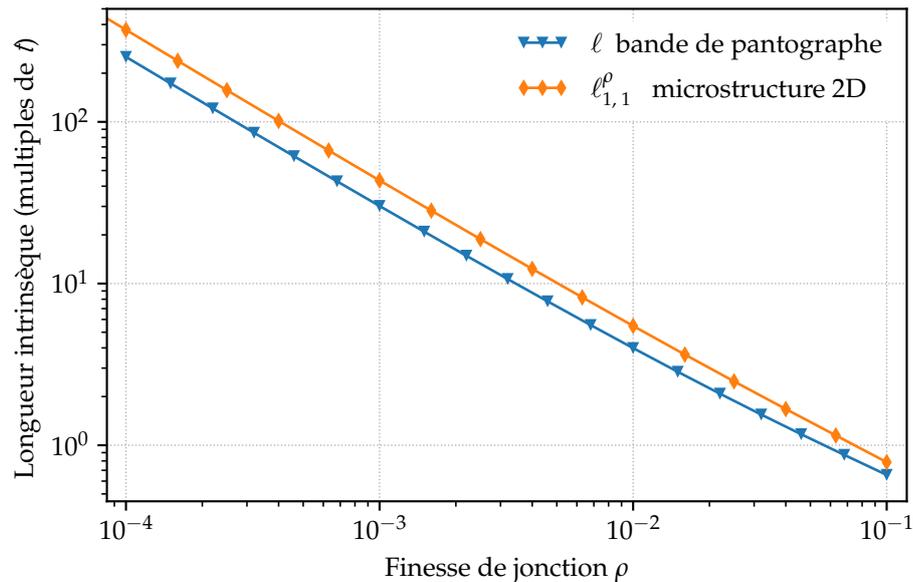


FIGURE IV.4 – Évolution de la longueur intrinsèque associée au gradient d'élongation en fonction de la finesse de jonction, pour la bande de pantographe et pour la microstructure en pantographe 2D.

IV.2.3 Procédé de fabrication

Les éprouvettes sont fabriquées par découpe laser. Pour cela, on utilise une machine de découpe laser Trotec Laser GmbH Speedy 360, équipée d'une source laser CO₂ d'une puissance de 120 W et d'un plateau de découpe de 810 mm × 500 mm.

Les contours de la pièce sont découpés en déplaçant la tête laser dans un plan horizontal, en suivant les trajets donnés en consignes à la machine (Figure IV.5a). Ces trajets correspondent à la géométrie nominale.

La puissance du faisceau laser est concentrée à l'aide d'une lentille placée dans la tête laser (Figure IV.5b). Le plan focal coïncide avec la surface de la plaque à découper et la tache focale formée par le faisceau laser dans ce plan est centrée sur le trajet de découpe. Il n'y a pas de correction des trajectoires de la tête laser pour tenir compte du diamètre de la tache focale. On utilise une lentille de focalisation dont la distance focale est relativement grande (2") afin que la géométrie des jonctions soit autant que possible uniforme dans l'épaisseur. En effet, l'utilisation d'une longue focale favorise la perpendicularité entre les chants coupés et la surface de la pièce.

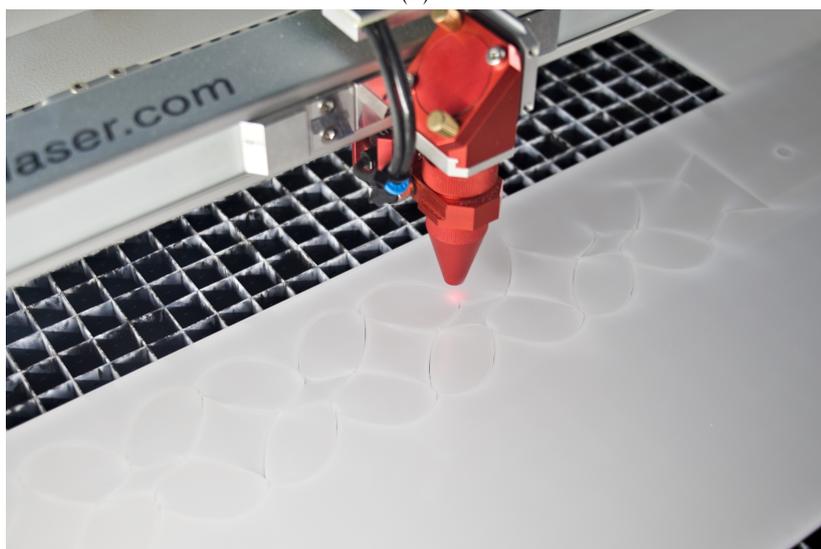
Les éprouvettes sont fabriquées à partir de plaques de polyoxyméthylène (couramment désigné sous le sigle POM) de 2 mm d'épaisseur.

On utilise une plaque de matériau constitutif relativement fine afin de limiter l'écart entre les géométries obtenues sur les deux faces des éprouvettes après la découpe. La bande de pantographe doit toutefois ne pas être trop fine, sinon du flambement hors plan, à l'échelle d'une cellule, peut se produire très tôt même lorsque la bande est sollicitée en extension. Cela signifie que deux triangles adjacents peuvent sortir du plan.

Ce thermoplastique est adéquat pour la fabrication de pièces par découpe laser : il permet



(a)



(b)

FIGURE IV.5 – (a) Photographie de la zone de travail de la machine de découpe laser. Les principaux éléments visibles sont : la tête laser (en rouge) qui renvoie le faisceau laser vers la plaque de POM à l'aide d'un miroir et le concentre à l'aide d'une lentille; le rail de déplacement de la tête laser sur l'axe X; la courroie permettant son déplacement sur l'axe Y et le plateau de découpe sur laquelle la plaque est posée. (b) Éprouvette en cours de fabrication par découpe laser. La microstructure découpée est celle étudiée ultérieurement (section IV.5), obtenue par optimisation topologique.

d'obtenir une bonne qualité géométrique (absence de bourrelets de matière resolidifiée, chants lisses) et une faible détérioration de la matière au niveau des bords. Cela est dû à la nature du mécanisme d'enlèvement de matière prédominant lors de la découpe. Dans le cas du POM, l'énergie apportée localement par le faisceau laser engendre la fonte du polymère puis provoque la vaporisation de la majorité du polymère fondu. On parle de découpe au laser par vaporisation [Powell, 1993].

Ce mécanisme de découpe est particulier et un seul autre polymère couramment utilisé se découpe de la même manière : le polyméthacrylate de méthyle, souvent désigné en utilisant l'abréviation PMMA ou le nom commercial Plexiglas®. Deux autres mécanismes d'enlèvement de matière peuvent intervenir lors de la découpe au laser de polymères : l'éjection de la matière fondue et la dégradation chimique [Powell, 1993]. Ils conduisent en général à des bords de coupe de moins bonne qualité géométrique et peuvent engendrer l'émission de gaz toxiques.

IV.2.4 Caractérisation du matériau constitutif

Un essai de traction a été réalisé afin d'observer et de caractériser le comportement mécanique du POM employé pour la fabrication des échantillons. L'estimation du module d'élasticité du matériau constitutif est nécessaire pour pouvoir comparer les résultats de l'homogénéisation aux mesures expérimentales. De plus, cet essai mécanique élémentaire nous aidera à distinguer l'influence du comportement du matériau constitutif de l'influence de la microstructure dans les phénomènes anélastiques, ou non-linéaire, observés à l'échelle du matériau architecturé.

Étant donné le périmètre de ces travaux, on se contente d'utiliser un modèle élastique linéaire isotrope pour représenter le comportement de ce matériau constitutif. Cet essai de traction nous permet d'estimer un module de Young. Nous n'avons pas cherché à estimer le coefficient de Poisson.

Pour les POM copolymères, la température de transition vitreuse T_g est de l'ordre de -60°C . Les essais mécaniques ont été réalisés à température ambiante. Nous avons donc sollicité ce matériau dans une zone de température assez éloignée de T_g , aussi bien lors des essais réalisés sur des échantillons de pantographes que lors de cet essai de caractérisation.

IV.2.4.1 Méthode

On a cherché à respecter autant que possible les recommandations de la norme ISO 527-2 lors de la réalisation de cet essai de traction.

Éprouvette On utilise une éprouvette en forme d'haltère (Figure IV.6) d'une largeur de 10 mm dans la partie centrale. L'ensemble des dimensions est donné dans le tableau IV.6. Cela correspond au type d'éprouvette normalisée 1A de l'ISO 527-2. L'éprouvette est découpée dans une plaque de POM de 2.0 mm d'épaisseur par découpe laser, de la même manière que les échantillons de bande pantographique.

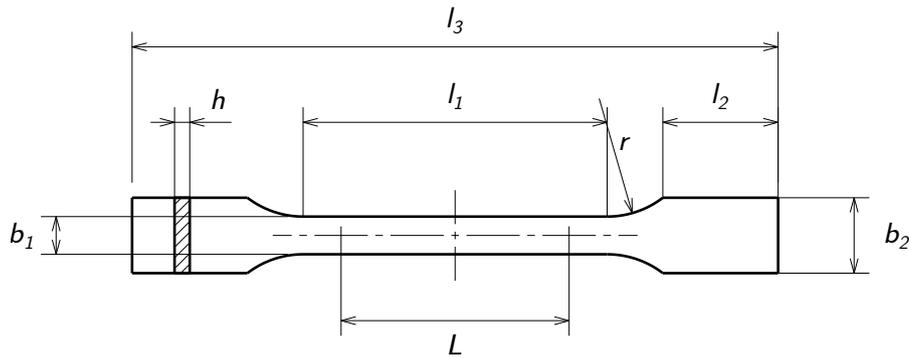


FIGURE IV.6 – Géométrie de l'éprouvette.

Dimension	Valeur nominale (mm)
h Épaisseur	2.0
l_1 Longueur de la partie étroite à faces parallèles	80
l_2 Longueur des talons	30
l_3 Longueur totale	170
b_1 Largeur de la partie étroite	10
b_2 Largeur aux extrémités	20
r Rayon	24

TABLE IV.1 – Dimensions nominales de l'éprouvette.

Dispositif expérimental On utilise une machine d'essai universelle pour réaliser cet essai de traction. Celle-ci est équipée d'un capteur de force d'une capacité de 2 kN. Un système standard est utilisé pour maintenir l'éprouvette. Il s'agit de mâchoires de traction autoserrantes à coins, à serrage manuel.

Sollicitations L'essai est réalisé à une vitesse constante de 0.05 mm min^{-1} dans un premier temps. Cette vitesse particulièrement faible a été choisie afin de limiter l'amplitude des phénomènes visqueux. Une fois que la déformation nominale est suffisamment grande ($\gtrsim 3\%$), la vitesse de déplacement de la traverse est augmentée à 1.0 mm min^{-1} dans le simple but de limiter la durée de l'essai. Plusieurs décharges partielles sont réalisées au cours de cet essai, pour différents niveaux de chargement.

Mesures de la déformation L'éprouvette est équipée d'une jauge de déformation unidirectionnelle. Celle-ci est collée de manière à mesurer la déformation longitudinale ε_1 de l'éprouvette dans la zone centrale. La déformation nominale ε_t est utilisée pour décrire l'évolution de la déformation longitudinale de l'éprouvette après rupture de la jauge de déformation. On utilise pour cela le déplacement de la traverse U_t enregistré au cours de l'essai :

$$\varepsilon_t = \frac{U_t}{L_0} \quad (\text{IV.5})$$

avec L_0 la longueur initiale de la partie de l'éprouvette entre les mors.

Une correction affine est appliquée afin d'avoir une mesure représentative de la déformation

de la zone centrale de l'éprouvette. Pour cela, on procède à une régression linéaire, par la méthode des moindres carrés, entre la déformation nominale et les mesures obtenues avec la jauge de déformation sur une partie de l'essai. Deux raisons justifient cette correction : d'une part, la section de l'éprouvette entre les mors n'est pas homogène et, d'autre part, il est probable qu'il y ait un écart entre le déplacement de la traverse et le déplacement de l'extrémité de l'éprouvette en particulier au début de l'essai.

On calcule les valeurs de la contrainte nominale σ à partir des mesures de la force de traction F exercée sur l'éprouvette au cours de l'essai :

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (\text{IV.6})$$

où A_0 est l'aire de la section transversale de l'éprouvette dans la configuration initiale.

Estimation du module de Young Le module d'élasticité en traction est mesuré à l'aide d'une régression linéaire, par la méthode des moindres carrés, sur un intervalle de déformation. Une première estimation est réalisée pour des déformations comprises entre $\varepsilon_1 = 0.05\%$ et $\varepsilon_2 = 0.25\%$, conformément aux recommandations de l'ISO 527. Toutefois, on sait que lors des essais de traction réalisés sur des bandes de pantographes le matériau constitutif est soumis à des niveaux de déformation au-delà de cet intervalle, en particulier au voisinage des jonctions. Par conséquent, on réalise une seconde estimation du module de Young, cette fois en utilisant un intervalle de déformation plus large : $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = [0.05\%; 1.0\%]$. Cela permet d'avoir une estimation du comportement élastique moyen pour cette gamme de déformation.

IV.2.4.2 Résultats

La Figure IV.7 montre l'évolution de la force de traction exercée sur l'éprouvette en fonction du temps. La rupture a eu lieu dans la partie centrale de l'éprouvette. Un amincissement

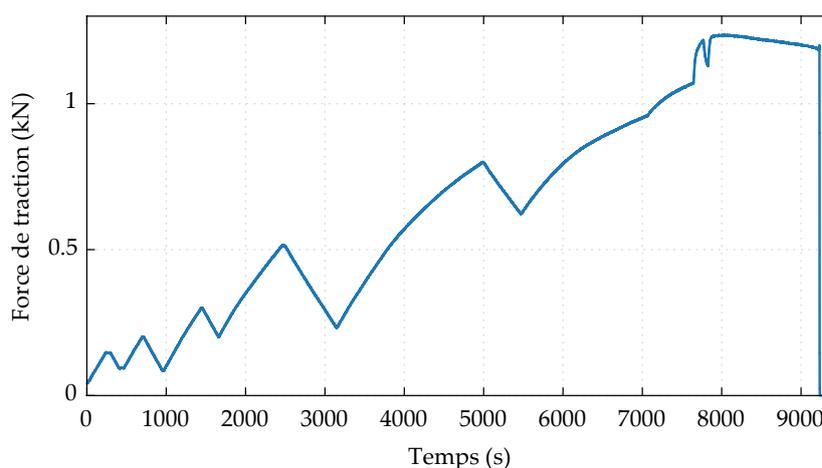


FIGURE IV.7 – Force de traction exercée sur l'éprouvette de POM lors de l'essai de traction.

d'une partie de cette zone de l'éprouvette est nettement visible avant la rupture, mais le niveau d'effort auquel ce phénomène de striction apparaît n'a pas été mesuré.

Les courbes de la Figure IV.8 représentent les variations de la contrainte nominale σ en fonction des deux mesures de la déformation longitudinale, celle obtenue à l'aide de la jauge de déformation (ε) et celle calculée à partir du déplacement de la traverse (ε_t). Il est délicat

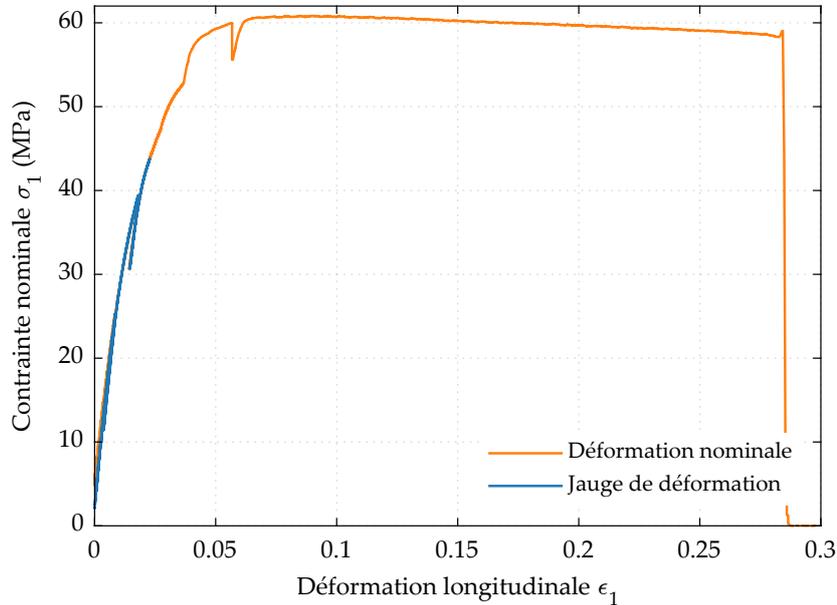


FIGURE IV.8 – Courbes de contrainte/déformation pour l'intégralité de l'essai de traction. Les deux mesures de la déformation longitudinale (ε et ε_t) sont représentées. La brusque variation de la courbe pour $\varepsilon_1 \approx$ est due à un changement de la vitesse d'essai.

de définir et d'estimer une limite d'élasticité pour des polymères thermoplastiques comme le POM que l'on utilise ici. On observe néanmoins un seuil apparent de viscoplasticité : le comportement mécanique semble dominé par de la viscoplasticité à partir d'un niveau de déformation d'environ 6 % alors qu'il s'apparente plutôt à un comportement visco-élastique pour des déformations inférieures à ce seuil. Il s'agit d'une estimation haute de la limite d'élasticité. En effet, des contributions anélastiques sont visibles avant, en particulier lors des cycles charge-décharge.

Du fait de la faible vitesse de déformation imposée, les effets visqueux sont relativement peu visibles lors des décharges élastiques, Figure IV.9. On observe une diminution du module d'élasticité calculé par régression linéaire pour chaque cycle décharge-recharge. Pour les trois régressions linéaires représentées Figure IV.9, les modules d'élasticité correspondant sont 3102 MPa, 2799 MPa et 2327 MPa. Cela est le signe d'un phénomène d'endommagement qui se manifeste même pour des niveaux de déformation relativement faibles, de l'ordre de 0.5 %.

Enfin, on observe un certain écart entre la courbe contrainte/déformation et la droite correspondant à la régression linéaire sur l'intervalle $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = [0.05\%; 1.0\%]$, Figure IV.10.

Les propriétés mécaniques du POM mesurées avec cet essai de traction sont rassemblées dans le Tableau IV.2

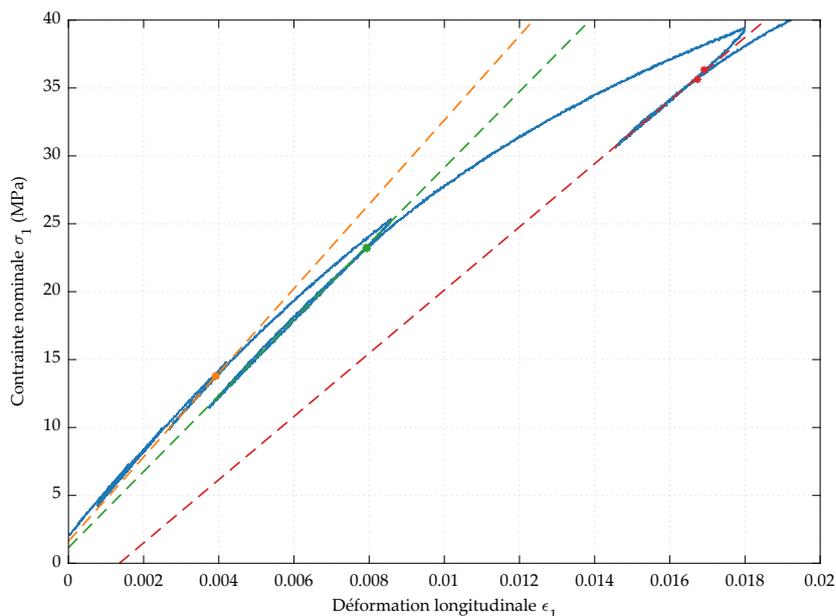


FIGURE IV.9 – Phases de décharges et de « recharges » lors de l'essai de traction. Les droites représentent les régressions linéaires réalisées pour chacune de ces phases.

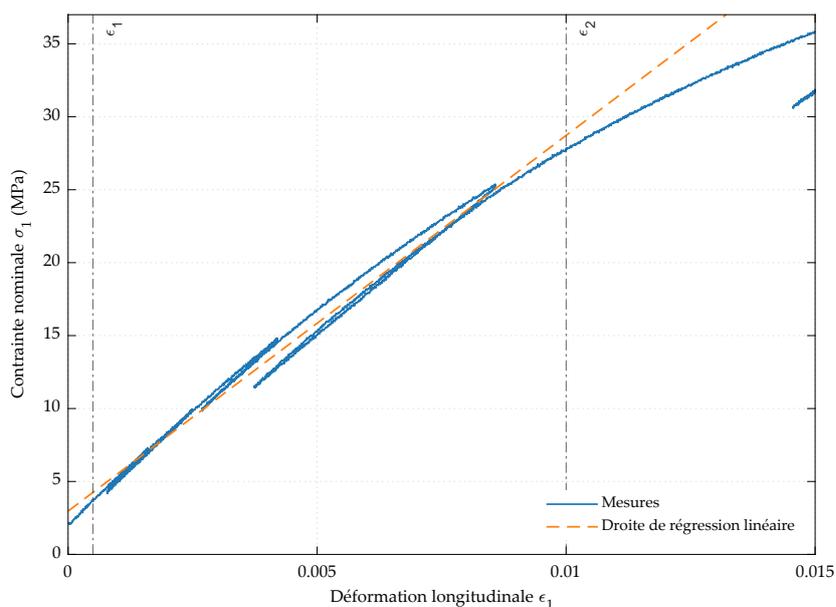


FIGURE IV.10 – Droite de régression linéaire utilisée pour l'estimation du module d'élasticité en traction sur l'intervalle $[\epsilon_1, \epsilon_2] = [0.05\%; 1.0\%]$.

Propriété mécanique	Valeur mesurée
Module de Young :	
pour $\epsilon_1 = 0.05\%$, $\epsilon_2 = 0.25\%$	3151 MPa
pour $\epsilon_1 = 0.05\%$, $\epsilon_2 = 1.0\%$	2575 MPa
Seuil apparent de viscoplasticité	6.5 %

TABLE IV.2 – Propriétés mécaniques du matériau constitutif (POM) estimées à partir de l'essai de traction.

IV.2.4.3 Bilan

Nous avons observé un comportement complexe lors de cet essai de traction. On peut considérer que les phénomènes de viscoplasticité sont négligeables devant la viscoélasticité dans la réponse du matériau employé tant que le niveau de déformation est inférieur à 6.5%. Nous comparerons la valeur absolue des déformations principales à ce seuil lors des essais sur les matériaux architecturés. Dorénavant, nous utiliserons comme valeur du module de Young du matériau constitutif le module d'élasticité calculé sur l'intervalle de déformation [0.05%; 1.0%] : 2575 MPa.

IV.2.5 Conception des éprouvettes

IV.2.5.1 Application des conditions aux limites d'encastrement fort et faible

Deux essais de traction sont réalisés pour mettre en évidence le comportement de second gradient et mesurer les raideurs C et D du milieu homogène équivalent. Ils se distinguent uniquement par les extrémités des éprouvettes, autour de l'échantillon de bande de pantographes.

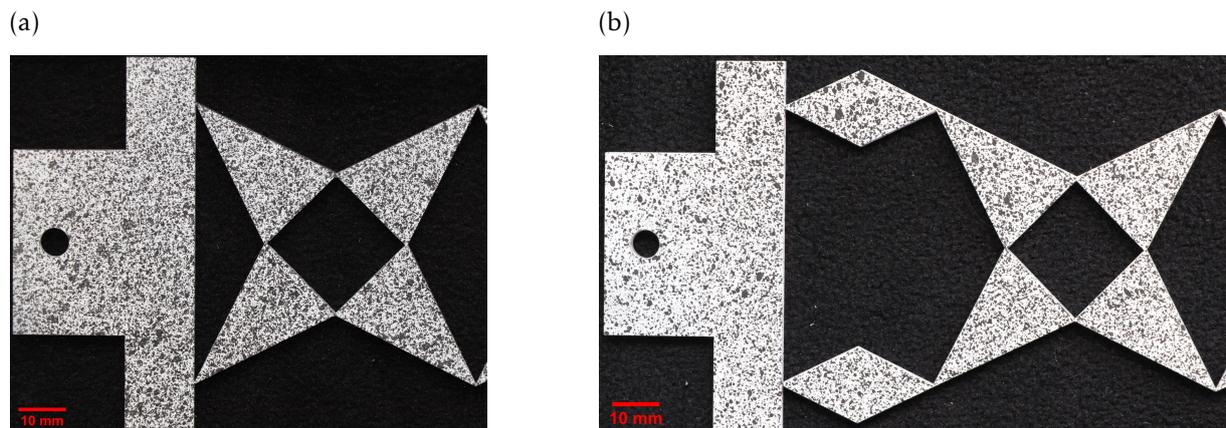


FIGURE IV.11 – Solutions employées pour imposer un déplacement à une extrémité d'une bande de pantographes : soit en bloquant l'extension à cette extrémité (a), soit en laissant libre l'extension (b).

Deux solutions différentes sont par conséquent employées pour imposer des conditions aux limites aux extrémités de l'échantillon. La première consiste à encasturer directement l'extrémité de la microstructure sur le talon (Figure IV.11a). Cela a pour conséquence de bloquer l'extension de la bande de pantographes à cette extrémité. On parle d'encastrement fort. La seconde solution employée a été conçue de manière à réaliser un encastrement faible, c'est-à-dire imposer un déplacement tout en laissant libre l'extension de la bande de pantographes à cette extrémité. Pour cela, les pointes des triangles situées sur le bord de la dernière cellule sont reliées au talon de l'éprouvette au moyen de losanges. On souhaite que ces losanges agissent comme des bielles horizontales. Par conséquent, des jonctions fines sont également présentes entre ces losanges et le talon de l'éprouvette (Figure IV.11b).

Le premier essai a pour but de générer une extension aussi uniforme que possible dans l'échantillon. Cela nous permet de mesurer la raideur de mode mou et d'observer si le mode mou peut effectivement s'établir malgré les incertitudes inhérentes à l'expérimentation (géométrie de l'éprouvette, alignement avec la machine d'essai...). Pour cela, un encastrement faible est utilisé aux deux extrémités de l'éprouvette.

Le second essai a pour but de générer un fort gradient d'élongation, nettement visible à l'échelle macroscopique, dans l'échantillon. Ainsi, nous pourrions vérifier si la bande de pantographes présente l'effet élastique de second gradient escompté et mesurer la raideur associée au gradient d'élongation. Pour cela un encastrement fort est utilisé à l'une des extrémités. À l'autre extrémité, un encastrement faible est utilisé, car cela est équivalent à considérer un échantillon deux fois plus grand avec un encastrement fort de chaque côté.

Nous utiliserons les notations C-C pour désigner le premier essai et S-C pour le second. Les lettres "C", pour *compliant*, et "S", pour *stiff*, font respectivement référence aux encastrements faible et fort.

IV.2.5.2 Choix motivé des dimensions

La géométrie des échantillons de bande de pantographes fabriqués dépend de trois paramètres indépendants :

- Le nombre de cellules unitaires, N ;
- Le contraste géométrique, ρ ;
- La taille de la cellule unitaire, t .

On utilise également la longueur utile de l'éprouvette $L = Nt$ et la largeur de jonction $w = \rho \frac{t}{2}$ pour décrire la géométrie des éprouvettes. La longueur utile correspond à la longueur de l'échantillon de bande pantographique, sans prendre en compte les parties auxiliaires de l'éprouvette. Il faut fixer les valeurs des trois paramètres (ρ, t, N) afin de définir la géométrie des échantillons de bande de pantographes.

On souhaite, d'une part, avoir un fort contraste géométrique ($\rho \ll 1$) afin d'observer un effet de second gradient marqué et, d'autre part, avoir une séparation d'échelle significative ($\eta = \frac{t}{L} \ll 1$). Il faut donc satisfaire, dans la mesure du possible, une double séparation d'échelle : $w = \rho \frac{t}{2} \ll t$ et $t \ll L$. Cependant, la fabrication des échantillons par découpe laser impose des contraintes géométriques :

- La précision du procédé de fabrication limite la finesse des jonctions. Pour cette forme de jonctions, la largeur nominale w doit être d'au moins 0.75 mm pour que les jonctions découpées soient d'une qualité géométrique satisfaisante (écart à la géométrie nominale et répétabilité).
- Les dimensions totales de l'éprouvette, talons compris, doivent être inférieures aux dimensions du plateau de découpe (810 mm \times 500 mm).

Il faut donc trouver un juste milieu pour que la double séparation soit respectée.

Les capacités du dispositif d'essai doivent également être prises en compte dans ce genre de raisonnement. Toutefois, dans le cas présent, les contraintes les plus critiques sont celles dues au procédé de fabrication.

Pour les échantillons de bande pantographique fabriqués et étudiés dans les travaux présentés, les valeurs suivantes ont été retenues :

- contraste géométrique $\rho = 0.025$;
- taille de cellule $t = 60$ mm ;
- nombre de cellules $N = 11$.

La largeur de jonction w est donc égale à la valeur minimale imposée, $w = 0.75$ mm. Le contraste géométrique a été privilégié et, par conséquent, la séparation d'échelle est relativement faible. Avec ce choix de valeurs, la longueur utile de l'éprouvette L est de 660 mm et la longueur intrinsèque ℓ vaut 113 mm, soit environ la longueur de deux cellules.

IV.2.6 Imperfections et quantification de l'écart à la géométrie nominale

Nous savons que les jonctions ont une influence majeure sur le comportement de ce matériau architecturé, en particulier lorsqu'il est sollicité dans son mode mou d'extension. La taille des jonctions est importante puisqu'elle va directement influencer sur la raideur en flexion de la jonction. La position relative des différentes jonctions est, elle aussi, importante. En effet, même dans le cas limite où les jonctions infiniment fines se comportent comme des pivots, un décalage d'une seule jonction par rapport à sa position théorique peut suffire pour bloquer le mode mou d'extension [Abdoul-Anziz et Seppecher, 2018b; Abdoul-Anziz *et al.*, 2019].

Avec des jonctions de cette taille ($w = 0.75$ mm), nous sommes à la limite des capacités du procédé de fabrication choisi. On peut donc s'attendre à un certain écart entre la géométrie réelle de la microstructure de pantographe découpée et sa géométrie nominale. Une étude succincte a été menée pour observer et quantifier cet écart. Celle-ci est focalisée sur deux points primordiaux : la forme des jonctions et leur largeur.

Méthode Un échantillon de bande de pantographes a été découpé de la même manière que les éprouvettes utilisées pour les essais de traction. Celui-ci contient seulement quatre cellules. La largeur nominale des jonctions est inchangée (0.75 mm).

Chacune des jonctions de cet échantillon a été photographiée deux fois en gros plan. La première photographie est prise pour la face recto de l'échantillon (celle sur le dessus lors de la découpe) et la seconde est prise pour la face verso. On a veillé à placer l'appareil photo perpendiculairement au plan de l'échantillon pour éviter autant que possible que la tranche de l'échantillon soit visible sur les photographies. Le matériel utilisé et les principaux réglages sont rapportés dans le Tableau IV.3.

Les jonctions ont ensuite été mesurées à partir de ces images, de manière numérique. On définit la largeur réelle d'une jonction comme la plus petite distance entre les deux bords de la microstructure au voisinage de cette jonction.

Matériel :	Appareil photo	Canon EOS 77D
	Objectif	EF-S 18-135mm f/3.5-5.6 IS USM
Réglages :	Longueur focale	135 mm (distance focale équivalente en 35 mm)
	Temps d'exposition	Entre 1/160 s et 1/80 s
	Ouverture	f/5.6
	Sensibilité	ISO 400
	Flash	Forcé
Logiciel :	Analyse d'images	ImageJ

TABLE IV.3 – Paramètres du dispositif utilisé pour l'observation et la mesure des jonctions obtenues par découpe laser.

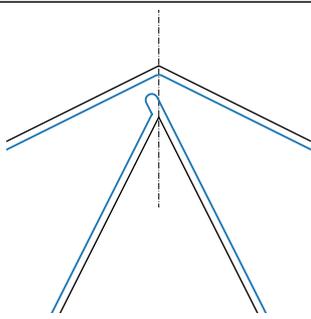
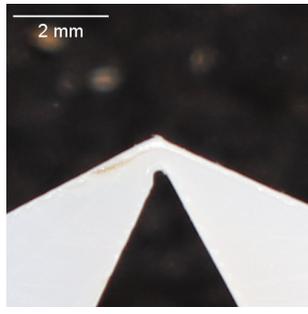
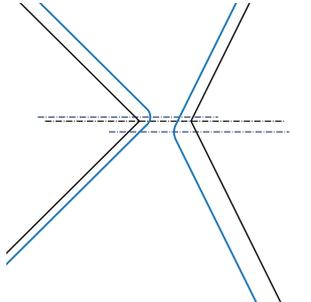
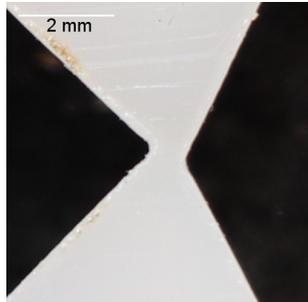
Type de défaut	Représentation schématique	Illustration
Type 1 : Dépassement		
Type 2 : Défaut d'alignement		

TABLE IV.4 – Les deux types de défauts observés pour les jonctions des échantillons de pantographe. Pour les représentations schématiques, la géométrie nominale est représentée en noir et le contour réel de la microstructure est représenté en bleu. Les lignes en pointillés correspondent aux bissectrices des secteurs angulaires formant la jonction.

Résultats : forme des jonctions En ce qui concerne la forme des jonctions, on observe deux types d'imperfections, présentées Tableau IV.4. Le premier se caractérise par un creux localisé et marqué, globalement aligné avec l'un des traits de coupe. Le second correspond à un défaut d'alignement des deux secteurs angulaires qui forment la jonction : alors que, sur la géométrie nominale, les bissectrices de ces deux secteurs angulaires sont confondues, on observe un écart entre celles-ci sur la géométrie réelle.

La présence de ces défauts s'explique facilement étant donné que l'on est proche des limites des performances de la machine, en termes de précision et de finesse des détails

découpés. Pour les défauts de type 1, cela semble indiquer que le faisceau laser a « dépassé » dans le prolongement d'un trait de coupe. Cela peut être dû à l'inertie de la machine. Les défauts de type 2 sont eux aussi probablement dus, au moins en partie, à un manque d'exactitude dans le positionnement du point d'impact du laser. Il y a sans doute, pour chaque contour découpé, un décalage spatial uniforme entre le parcours du laser et la géométrie nominale. Ce décalage, dû à l'erreur de positionnement de la tête laser au début de la découpe d'un contour, peut varier d'un contour à l'autre. Cela peut s'expliquer par un manque d'asservissement. Ces défauts pourraient également être dus à un mouvement de la plaque de POM et de l'éprouvette au fur et à mesure de la fabrication, car l'éprouvette n'est pas bridée sur le plateau de découpe. Toutefois, cette explication semble moins probable.

Résultats : largeur apparente des jonctions En termes de dimensions, la largeur moyenne des jonctions est de 0.69 mm toutes mesures confondues. Cette longueur sera notée \bar{w} par la suite. Étant donné le procédé de fabrication, on s'attend à ce que la jonction réelle soit plus mince que la géométrie nominale. En effet, la machine de découpe laser ne corrige pas la trajectoire de la tête de laser pour tenir compte de l'épaisseur du trait de coupe et c'est le centre du faisceau laser qui suit le contour de la géométrie nominale. Cependant, l'épaisseur de ce trait de coupe n'a pas été mesuré.

On observe que les jonctions sur les bords de bande ($y_2 = -0.5$ et $y_2 = 0.5$) sont dans l'ensemble plus fines que les jonctions à l'intérieur, Figure IV.12. Ces jonctions latérales ont la particularité d'être formées par deux pointes fines de triangles (angle de 37°) alors que les autres jonctions sont formées par deux pointes larges (72°). Cette différence significative peut expliquer l'écart de largeur observé entre ces deux catégories de jonctions.

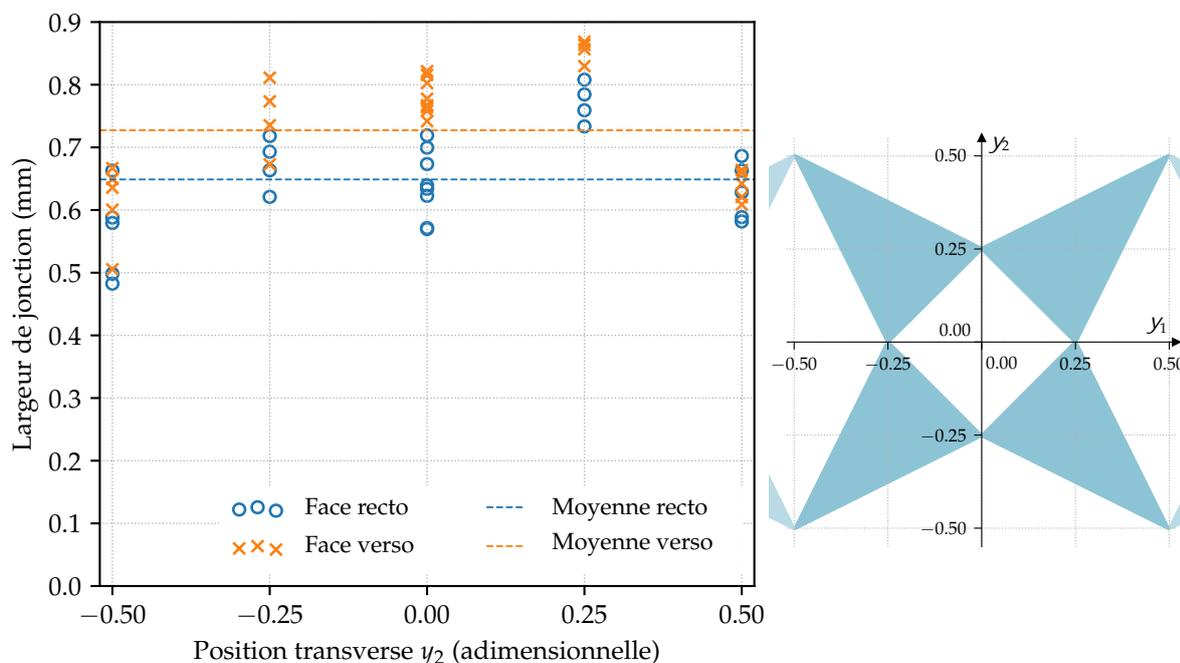


FIGURE IV.12 – Largeurs de jonctions mesurées, en fonction de la position transverse de la jonction. Les traits horizontaux représentent la largeur moyenne pour chaque face.

Par ailleurs, les jonctions sont en moyenne plus larges sur la face verso, avec une largeur moyenne de 0.73 mm (écart type : $\sigma = 0.094$ mm), que sur la face recto, où la largeur moyenne est de 0.65 mm ($\sigma = 0.079$ mm). On observe de plus une certaine régularité : pour quasiment toutes les jonctions, exceptées pour deux, la largeur mesurée sur la face verso est supérieure à celle mesurée sur la face recto. Cette tendance peut s'expliquer par la physique du procédé de fabrication et les réglages utilisés. On a réglé la puissance et la vitesse d'avancement de la machine de découpe laser de telle sorte que la puissance apportée par unité de longueur découpée soit juste suffisante pour que la découpe soit traversante. On peut supposer qu'une partie de l'énergie apportée par le faisceau laser est diffusée par la matière dans la partie supérieure de la plaque. Dans ce cas, il est probable qu'il y ait plus de matière enlevée dans la partie supérieure.

IV.3 Mise en évidence expérimentale d'une sensibilité au gradient d'élongation

Un essai de traction est réalisé sur une éprouvette de chaque type (C-C et S-C). Cette section présente tout d'abord les moyens matériels employés et les conditions de réalisation de ces essais. Ensuite, la méthode de corrélation d'images numériques utilisée pour réaliser des mesures cinématiques est présentée et la façon dont celle-ci est employée est exposée. Enfin, les grandeurs cinématiques utilisées pour décrire la réponse macroscopique des échantillons de bande de pantographes au cours de ces essais sont définies.

IV.3.1 Dispositif expérimental

Les deux essais de traction (C-C et S-C) sont réalisés dans des conditions similaires, au moyen d'une machine d'essai universelle MTS Adamel DY31. Lors de l'essai, la direction longitudinale de l'éprouvette coïncide avec la verticale.

À chaque extrémité de l'éprouvette, une liaison de type pivot est réalisée entre le talon de l'éprouvette et un accessoire de fixation, conçu pour cette machine d'essai, au moyen d'une vis (Figure IV.13). Les axes des trous circulaires faits dans les talons et dans lesquels passent ces vis sont contenus dans le plan de symétrie longitudinal de l'éprouvette. Au niveau de chaque talon, la face arrière de l'éprouvette est plaquée contre un plan de l'accessoire de fixation, à l'aide d'un écrou, en conservant un léger jeu. Cela vise à limiter les mouvements hors plan de l'éprouvette lors de l'essai sans toutefois exercer d'efforts extérieurs autres que la force de traction sur l'éprouvette.

La force de traction F exercée par la machine d'essai sur l'éprouvette est mesurée à l'aide d'une cellule de force, conçue pour être utilisée sur cette machine, d'une capacité de 100 N pour des mesures en traction. Pour une force étalon de 20 N, l'incertitude élargie est de ± 0.05 N (facteur d'élargissement $k = 2$). On considère que c'est une borne supérieure de l'incertitude de mesure sur l'intervalle 0–20 N. Enfin, la linéarité des mesures sur l'intervalle 0–20 N a été préalablement vérifiée.



FIGURE IV.13 – Dispositifs de liaisons entre les éprouvettes de bande architecturée et la machine d’essai.

Matériels pour la corrélation d’images numériques Des photographies d’une face de l’éprouvette sont prises au cours de l’essai avec une caméra Allied Vision Prosilica GT5400, à une fréquence d’une image par seconde. Ces images ont une résolution de 5472 px×620 px et une profondeur de couleur de 12 bits (soit 4096 niveaux de gris). La caméra est positionnée de manière que l’axe optique soit perpendiculaire au plan de l’éprouvette. On utilise un objectif ZEISS Planar T* 1.4/85, dont la longueur focale est de 85 mm. Une focale relativement grande est choisie afin de réduire l’influence d’éventuelles perturbations dues à des mouvements hors plan de l’éprouvette au cours de l’essai. Enfin, deux barres de LED d’une longueur de 1 m sont utilisées pour éclairer l’éprouvette et permettent d’obtenir une luminosité relativement uniforme sur toute l’étendue de l’éprouvette. L’homogénéité de l’éclairage de la zone observée est préférable pour la mesure de déplacements par la corrélation d’images numériques.

La figure IV.14 montre l’ensemble du dispositif expérimental spécifique développé pour l’étude du comportement mécanique en extension de la bande de pantographes.

IV.3.2 Sollicitations mécaniques

Les essais de traction sont réalisés en quasi-statique. Chacun est piloté en déplacement et la consigne de vitesse pour le déplacement de la traverse est de 1.57 mm min^{-1} . Cela correspond à une vitesse de déformation moyenne très faible de $0.26 \% \text{ min}^{-1}$, calculée pour la zone utile de l’éprouvette (partie périodique).

L’éprouvette est soumise à une succession de charges et décharges partielles, tout d’abord entre les niveaux de force limites $F_0 = 0.5 \text{ N}$ et $F_1 = 1 \text{ N}$ puis entre les niveaux de force limites $F_0 = 0.5 \text{ N}$ et $F_2 = 2 \text{ N}$. À chaque fois, quatre charges sont effectuées. Une charge jusqu’à $F_3 = 5 \text{ N}$ est ensuite réalisée afin d’observer le comportement de la bande de pantographes pour des niveaux d’extension plus importants. Des maintiens de la position de la traverse, d’une durée de 120 s, sont également effectués. L’enchaînement des sollicitations au cours d’un essai est représenté Figure IV.15.

Nous définissons deux phases d’essais :

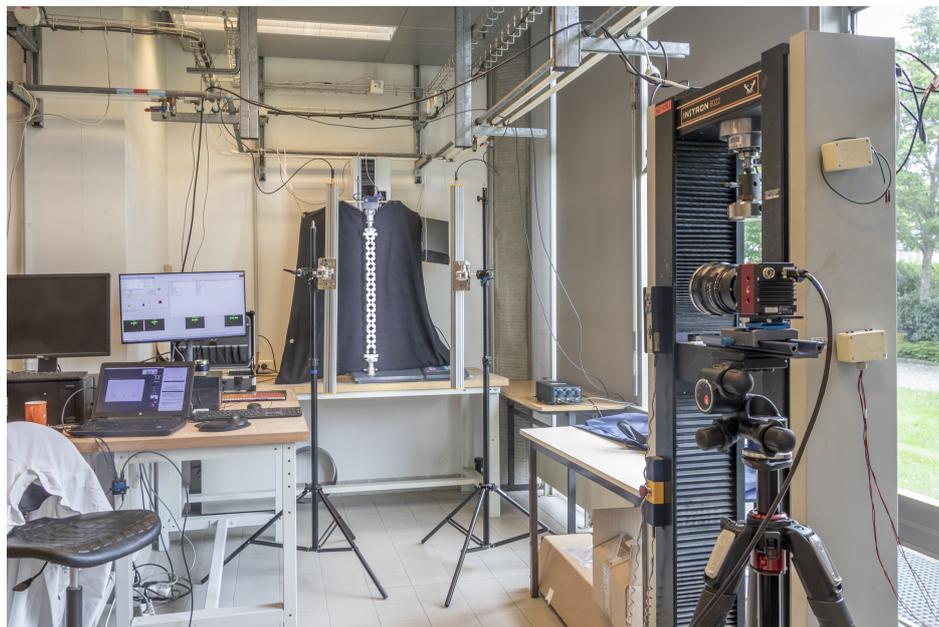


FIGURE IV.14 – Photographie du dispositif expérimental utilisé pour l'étude du comportement mécanique d'échantillons de bandes architecturées.

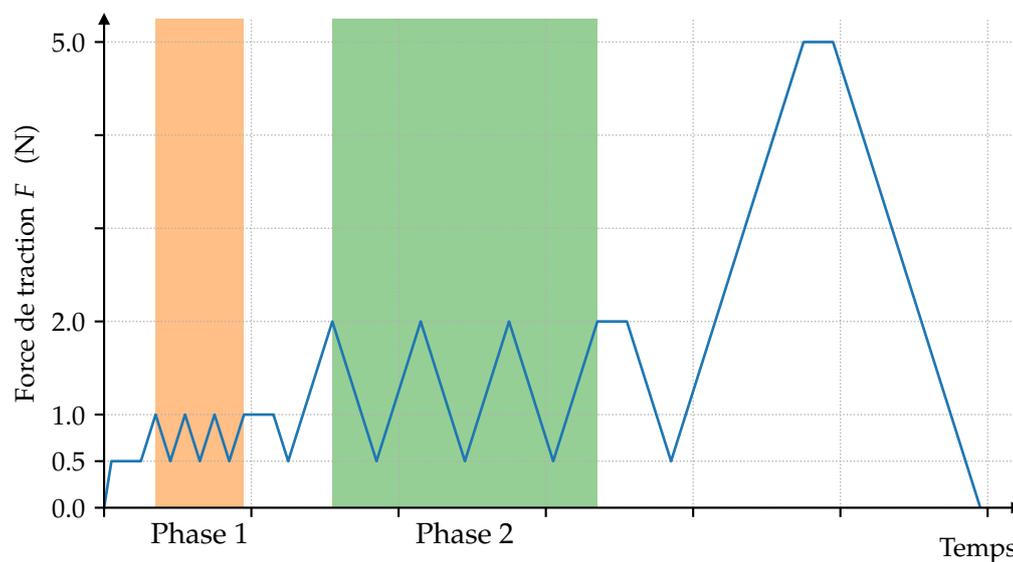


FIGURE IV.15 – Représentation schématique de la sollicitation en traction exercée sur les éprouvettes de bande pantographique au cours des deux essais de traction (C-C et S-C).

- La Phase 1 correspond à un ensemble de charges et de décharges partielles entre les niveaux de force F_0 et F_1 . Elle commence au début de la première décharge et se termine à la fin de la quatrième charge ;
- La Phase 2 est définie de façon similaire pour les cycles de charge-décharge entre F_0 et F_2 .

Les instants de prises de vue successifs sont notés $t_k, k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des instants t_k correspondant à la Phase 1 et celui correspondant à la Phase 2 sont respectivement notés T_1 et T_2 . Pour l'étude du comportement élastique de la poutre en pantographe et la comparaison aux prévisions de l'homogénéisation, on s'intéressera principalement à la réponse des deux éprouvettes (C-C et S-C) au cours de ces deux phases d'essai. De plus, t_{F1} et t_{F2} font respectivement référence aux derniers instants t_k des phases 1 et 2. À ces instants, la force de traction exercée sur l'éprouvette est presque égale aux niveaux de force F_1 et F_2 : $F(t_{F1}) \simeq 1 \text{ N}$ et $F(t_{F2}) \simeq 2 \text{ N}$. Les champs mesurés seront présentés pour ces deux instants t_{F1} et t_{F2} .

IV.3.3 Mesures de déplacements par corrélation d'images numériques

Une méthode de corrélation d'images numériques a été utilisée pour réaliser des mesures de déplacements lors de ces travaux expérimentaux. Dans ce qui suit, les principes généraux de cette méthode sont tout d'abord présentés. Ensuite, certains aspects de l'utilisation de cette technique de mesure pour l'étude de bandes de pantographe sont exposés : la préparation des éprouvettes, la définition des domaines d'étude et la discrétisation du champ de déplacement.

IV.3.3.1 Principe de la méthode

La corrélation d'images numériques (CIN, ou DIC pour *Digital Images Correlation*) est un technique de mesures de champs de déplacements à la surface d'un objet d'étude solide qui repose sur l'utilisation d'images enregistrées au cours d'un essai mécanique. Elle permet de déterminer la transformation subie par une région d'intérêt Ω (ROI), correspondant à une partie de la surface du solide sur lequel l'essai mécanique est réalisé, entre la configuration initiale et une configuration déformée. En appliquant cette méthode pour différentes images, prises à différents instants t_k , il est possible de suivre l'évolution du ROI au cours de l'essai.

La réalisation de mesures par CIN nécessite une certaine préparation des éprouvettes : il faut qu'une texture aléatoire soit visible sur la région d'intérêt. La taille caractéristique des éléments de cette texture doit être cohérente avec les valeurs des quantités que l'on cherche à mesurer et les caractéristiques du dispositif optique utilisé. La pratique la plus courante consiste à créer un *mouchetis* de peinture aléatoire sur la surface de l'échantillon, composé d'une multitude de taches noires sur un fond blanc ou inversement. Il est préconisé d'utiliser un mouchetis dont la taille caractéristique est de l'ordre de 2 px à 5 px [Jones *et al.*, 2018; Bornert *et al.*, 2013]. Dans certains cas, la microstructure naturellement visible à la surface de l'échantillon est suffisante.

Il existe une multitude de méthodes de corrélation d'images numériques. Toutes sont construites autour de l'hypothèse fondamentale de conservation des niveaux de gris (appelée également conservation du flot optique). Cela consiste à supposer que le niveau de gris visible au niveau d'un point matériel donné reste constant au cours de la transformation; plus précisément que ce niveau de gris est identique lors des deux prises de vue, pour la configuration initiale et la configuration déformée. On peut distinguer deux catégories d'approches : les approches dites locales et celles dites globales.

Les approches locales sont les plus anciennes, les premières méthodes ont été exposées dans les années 1980 [Burt *et al.*, 1982; Sutton *et al.*, 1983], et sont les plus répandues dans les logiciels de CIN. Pour mesurer le déplacement en un point donné, on considère une image centrée sur ce point puis l'invariance des niveaux de gris est utilisée pour apparier cette image et une partie de l'image prise dans la configuration déformée. Cette opération de corrélation est réalisée pour une multitude de points contenus dans Ω , indépendamment des mesures faites pour les autres points. On accède ainsi à un jeu de données discontinues : le champ de déplacement n'est mesuré qu'en ces points de mesures.

Les approches globales de corrélation d'images numériques, destinées à la mécanique des solides, sont apparues au cours des années 2000 [Hild et Roux, 2012]. Pour ces approches, l'hypothèse de départ est toujours la conservation des niveaux de gris mais, cette fois, on calcule une estimation de la transformation qui permet de passer de la configuration initiale à la configuration déformée en considérant l'intégralité de la région d'intérêt Ω . Aucun point de Ω n'est privilégié et l'on accède à une mesure du champ de déplacement définie sur l'intégralité de Ω . La réalisation de la corrélation à l'échelle de la région d'intérêt entière permet d'imposer *a priori* une certaine régularité pour le champ de déplacement recherché (continuité, par exemple) ou encore d'imposer le respect de certaines équations mécaniques.

Les méthodes de CIN ont été initialement développées pour la mesure de déplacements plans, en 2D. Il est maintenant possible, en utilisant plusieurs caméras lors de la captation d'images, de réaliser des mesures de déplacements en 3D (défini sur un ROI plan dans la configuration initiale, ou sur un ROI courbe). Les différentes variantes des méthodes de corrélation d'images numériques et les évolutions sont exposées par Hild et Roux [2012] et David [2014].

Pour ces travaux expérimentaux, une méthode de CIN globale, avec une modélisation éléments finis du champ de déplacement, est utilisée pour mesurer des déplacements en 2D. La suite de cette présentation se concentre sur cette approche.

Notations G indique les niveaux de gris sur l'image de référence, celle prise dans la configuration initiale, et g indique les niveaux de gris sur l'image correspondant à la configuration déformée. Soit \mathbf{X} la position d'un point matériel dans la configuration initiale et $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ la position de ce même point dans la configuration déformée. \mathbf{u} est le champ de déplacement recherché.

Problème de minimisation Le champ de déplacement \underline{u} est déterminé à l'aide d'un problème de minimisation. La fonction coût \mathcal{C} est une mesure du degré de similarité entre l'image de référence et l'image prise dans la configuration déformée, corrigée en tenant compte du déplacement \underline{u} des points matériels entre ces deux configurations :

$$\mathcal{C}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (G(\underline{X}) - g(\underline{X} + \underline{u}(\underline{X})))^2 d\underline{X} \quad (\text{IV.7})$$

Cet écart est calculé sur l'intégralité de la région d'intérêt Ω .

Pour que ce problème puisse être résolu numériquement, il est nécessaire de décomposer le champ \underline{u} pour avoir un nombre fini de degrés de liberté. L'une des possibilités, particulièrement répandue, est de représenter le champ de déplacement en utilisant l'ensemble des formes des nœuds d'un maillage représentant Ω :

$$\underline{u}(\underline{X}) = \mathbf{N} \cdot \underline{q} \forall \underline{X} \in \Omega \quad (\text{IV.8})$$

avec \mathbf{N} l'opérateur matriciel d'interpolation et \underline{q} le vecteur contenant les valeurs nodales. Cette paramétrisation du champ de déplacement \underline{u} est similaire à celle faite lors de simulations numériques par la méthode des éléments finis. Elle assure la continuité du champ de déplacement. C'est la solution retenue pour les études expérimentales présentées.

Résolution numérique Cette paramétrisation du champ de déplacement est injectée dans le problème de minimisation. Ainsi, la fonction coût (IV.7) dépend d'un nombre fini de paramètres scalaires à déterminer : les valeurs nodales. La méthode de Newton-Raphson est appliquée pour déterminer la solution de ce problème de minimisation de manière itérative.

Les méthodes de corrélation d'images numériques permettent de mesurer avec une justesse satisfaisante des déplacements inférieurs au pixel. L'incertitude type est généralement inférieure au dixième de pixel et peut être, dans de nombreux cas, de l'ordre du centième de pixel [Bornert *et al.*, 2013]. Cette incertitude type σ_u peut s'exprimer sous la forme d'une loi puissance :

$$\sigma_u = Ah^{-\alpha} \quad (\text{IV.9})$$

avec h la taille caractéristique du maillage, A un facteur scalaire de l'ordre de grandeur de l'unité et α un facteur variant entre 1 et 2 selon les configurations. On comprend donc qu'un compromis doit être fait : un maillage très fin du ROI Ω permet de capter des variations rapides du champ de déplacement et, à l'inverse, des éléments finis plutôt larges sont préférables pour réduire l'incertitude de mesure.

IV.3.3.2 Utilisation de la CIN pour cette campagne d'essais

On utilise la méthode globale de CIN présentée ci-dessus pour réaliser des mesures de déplacements lors des essais de traction réalisés sur les bandes de pantographe. On mesure, d'une part, un champ de déplacement pour la microstructure et, d'autre part, des champs de déplacement pour des parties auxiliaires des éprouvettes (losanges des encastremements faibles et talons).

L'acquisition des images au cours des essais de traction et les mesures par CIN sont réalisées avec le package **MATLAB** navDIC [Margerit, 2022] développé par Pierre Margerit.

Préparation des éprouvettes Un mouchetis est réalisé sur chaque éprouvette à l'aide de bombes de peinture : un fond blanc est appliqué puis une multitude de taches noires est réalisée, en contrôlant autant que possible la taille et la forme des taches. Des peintures mates sont utilisées afin d'éviter tout reflet qui pourrait perturber les mesures.

En ce qui concerne les mesures pour la microstructure, la région d'intérêt Ω est définie comme l'union de sous-domaines triangulaires, chacun modélisant un triangle constitutif de la microstructure, Figure IV.16. Au niveau de chaque jonction, l'intersection de ces sous-domaines se limite à un point (Figure IV.16c). Pour la discrétisation du champ de

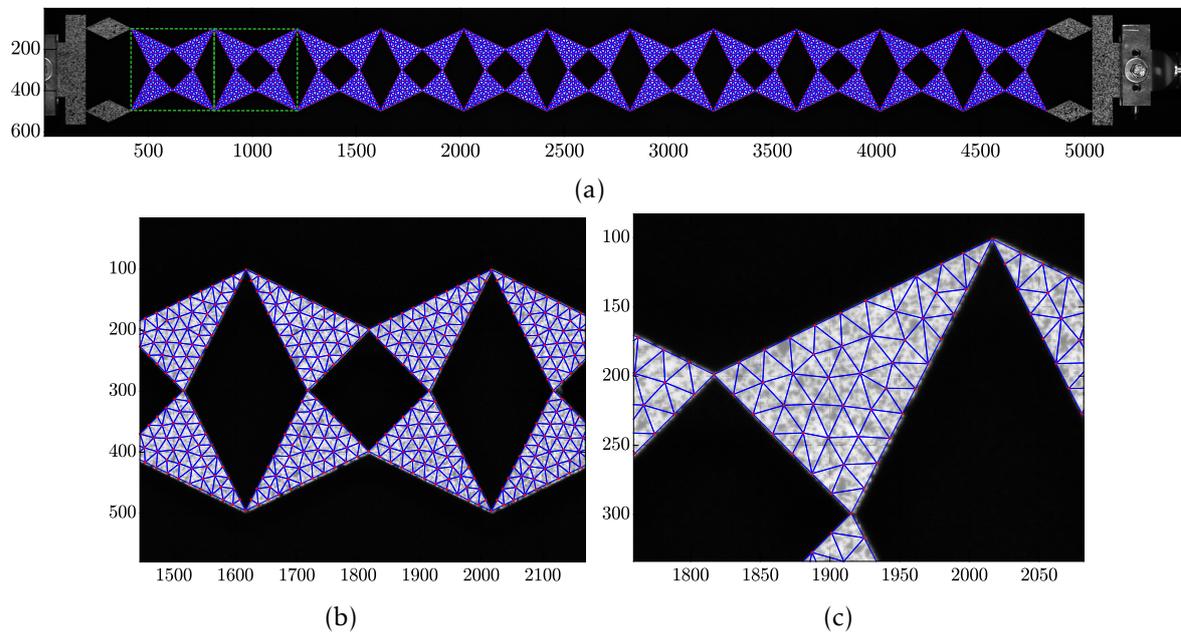


FIGURE IV.16 – ROI Ω (blanc transparent) et maillage utilisés pour la mesure du déplacement par CIN globale. Représentation sur la configuration initiale, au début de l'essai C-C, axes gradués en pixels. (a) : Image entière prise lors de l'essai. Les deux cellules unitaires les plus à gauche (C_1 et C_2) sont encadrées en vert. (b) : Vue resserrée sur une cellule unitaire. (c) : Vue resserrée sur un triangle de la microstructure. Le maillage du ROI est tel que ce triangle partage uniquement un nœud avec chaque triangle adjacent.

déplacement, le maillage est constitué d'éléments triangulaires dont la taille caractéristique est de $t/20$, t étant la largeur d'une cellule unitaire. Des fonctions de forme affines sont utilisées pour l'approximation du champ \underline{u} (Éléments finis de Lagrange bidimensionnels, triangulaires, de degré 1). On obtient ainsi une approximation du champ de déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t_k)$ définie sur Ω pour chaque instant de captation d'une image t_k , pour chacun des deux essais. Même si ce qu'il se passe précisément dans les jonctions n'est pas capté avec cette mesure, ce champ $\underline{u}(\underline{x}, t_k)$ offre une vision fine de la réponse de l'échantillon de bande de pantographe au chargement imposé.

Pour les mesures de déplacement au niveau des parties auxiliaires de l'éprouvette, la région d'intérêt sur laquelle les déplacements sont mesurés se compose de plusieurs sous-domaines disjoints. Elle peut se décomposer en deux parties : Ω_B est la partie observée à l'extrémité basse de l'éprouvette et Ω_H celle observée à l'extrémité haute, Figure IV.17. Dans le cas de l'essai C-C, Ω_B et Ω_H contiennent chacun deux sous-domaines qui correspondent aux losanges utilisés pour exercer l'encastrement faible. Tous les sous-domaines représentant un losange sont identiques à une translation près et leurs dimensions sont telles qu'il y a une marge entre leurs bords et les contours des losanges sur l'image initiale. Dans le cas de l'essai S-C, pour l'encastrement fort, on mesure le déplacement sur un domaine Ω_B rectangulaire qui correspond à une portion du talon rectangulaire. Ω_H contient lui aussi deux parties représentant les losanges. Comme pour la microstructure, on utilise des éléments finis de Lagrange triangulaires de degré 1 pour la discrétisation du champ de déplacement. Par contre, le maillage est plus grossier.

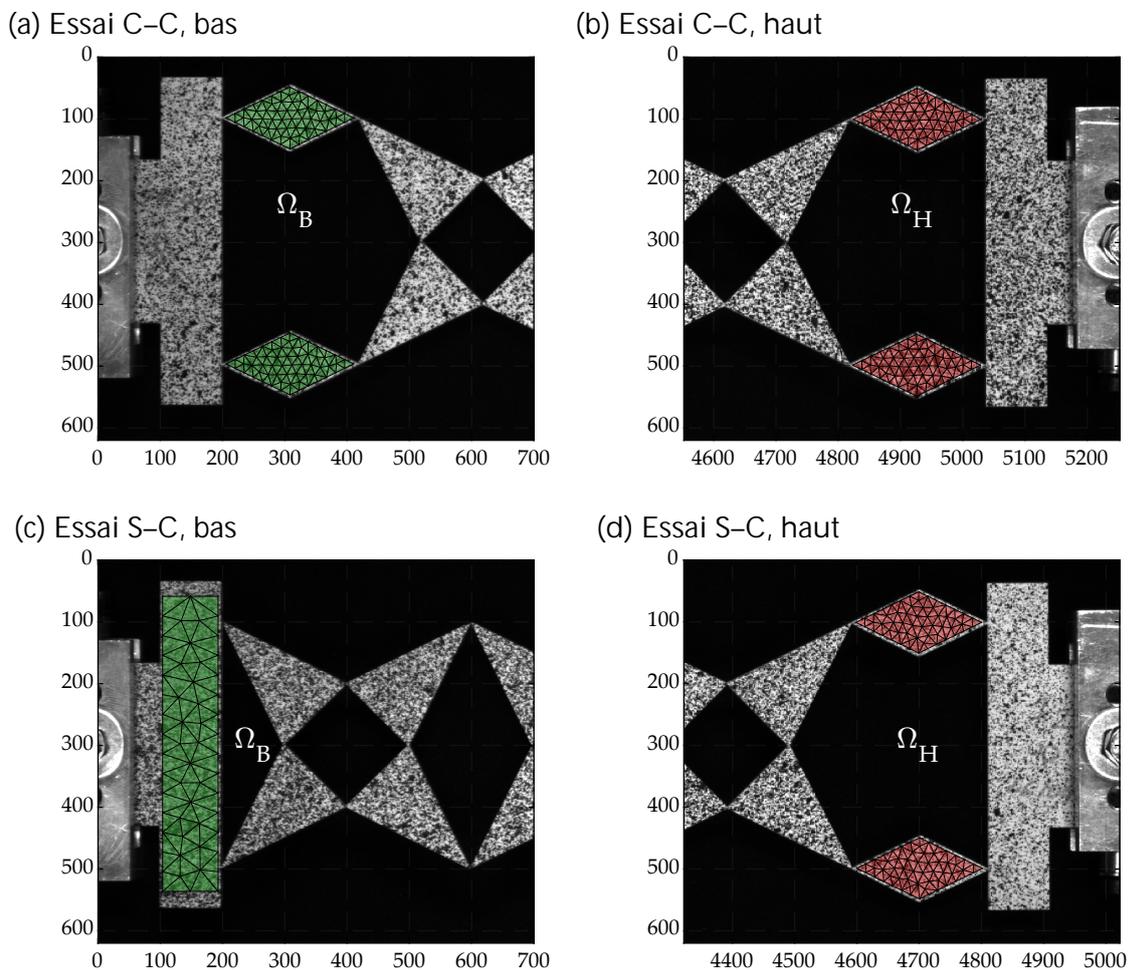


FIGURE IV.17 – ROI et maillages correspondant utilisés pour la mesure des déplacements aux extrémités des échantillons par CIN, pour chacun des deux essais C-C et S-C : Ω_B (vert) pour l'extrémité basse et Ω_H (rouge) pour l'extrémité haute. L'image en arrière-plan correspond à la configuration initiale.

Ces mesures de déplacement seront par la suite utilisées pour calculer l'allongement

global des éprouvettes au cours des essais.

IV.3.3.3 Ajustement du maillage sur la géométrie réelle de l'éprouvette

Ces paragraphes apportent quelques précisions à propos du maillage du ROI Ω : la génération de ce maillage et l'ajustement de celui-ci par rapport à la géométrie réelle de l'éprouvette. On souhaite que le maillage qui définit le ROI Ω coïncide relativement bien avec la microstructure visible sur l'image de référence utilisée pour la corrélation d'images numériques. Il s'agit de la première image prise pour chacun des essais. La méthode employée pour générer ce maillage est similaire pour les deux essais de traction.

Maillage nominal et ajustement basique Tout d'abord, un maillage périodique est généré. Il contient autant de carrés représentant des cellules que l'éprouvette et chaque sous-domaine triangulaire est maillé de manière identique, à des symétries et des translations près. Ensuite, ce maillage est ajusté à la géométrie de la microstructure visible sur l'image de référence à l'aide de transformations géométriques uniformes (homothétie et translation). Le maillage ainsi obtenu est appelé *maillage nominal*. Toutefois, on constate que ces transformations uniformes ne suffisent pas pour arriver à une bonne concordance entre le maillage et l'image de la microstructure : il y a pour certaines jonctions un décalage nettement visible entre le centre de la jonction identifié à l'œil-nu (sans construction géométrique) et le nœud du maillage correspondant à cette jonction. Il semble préférable de corriger ces décalages.

Méthode d'ajustement fin Afin de diminuer cet écart, on applique au maillage du ROI Ω une transformation géométrique non uniforme : il s'agit plus précisément d'une transformation affine par morceaux. Les coordonnées (en pixels) des centres de toutes les jonctions sont mesurées manuellement sur l'image de référence. Une triangulation de Delaunay est construite à partir de ces points puis est utilisée pour définir la transformation géométrique. Cette transformation est bilinéaire sur chaque triangle. Elle est définie de telle sorte que les points de cette triangulation (identifiés comme étant les centres des jonctions) coïncident avec les nœuds du maillage de Ω censés représenter ces jonctions. La transformation inverse est calculée puis appliquée à l'ensemble des nœuds du maillage de Ω . Cette méthode de correction reposant sur l'utilisation de points de contrôle et d'une transformation linéaire par morceaux est présentée par Goshtasby [1986]. Elle est appliquée en utilisant en partie des routines déjà implémentées dans MATLAB.

Résultats Cette seconde opération d'ajustement permet d'améliorer la concordance entre le maillage du ROI Ω utilisé pour la mesure d'un champ de déplacement sur l'ensemble de la microstructure et la géométrie initiale de la microstructure, visible sur l'image de référence, en particulier dans le cas de l'essai S-C. La figure IV.18 illustre cette amélioration dans le cas d'une jonction où cette correction est nettement visible. Les corrections faites lors de cet ajustement fin correspondent à une petite transformation du maillage : en considérant les deux ajustements faits sur les maillages utilisés respectivement pour les essais C-C et S-C,

l'amplitude maximale du déplacement d'un nœud est de 0.6 mm (soit environ 4 px) et la valeur maximale de la norme du tenseur de Green-Lagrange est de 1.6×10^{-2} (norme infinie).

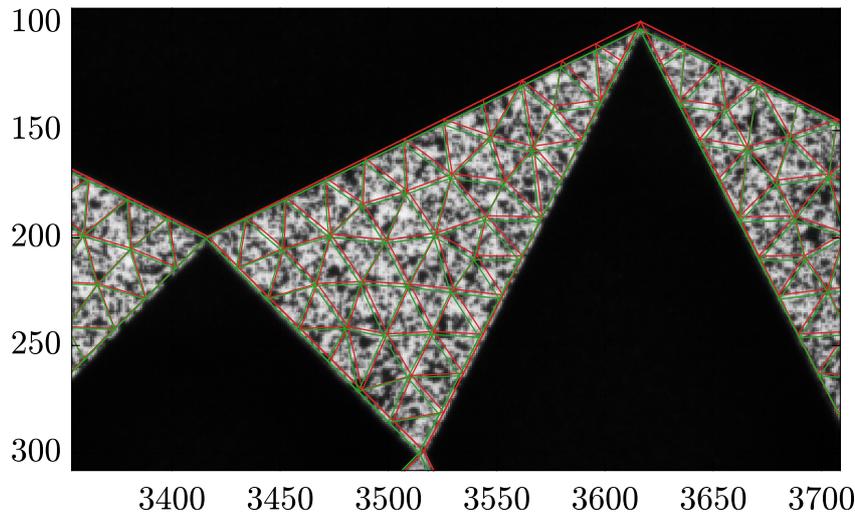


FIGURE IV.18 – Maillage nominal du ROI Ω (en rouge) et maillage obtenu après l'opération d'ajustement fin (en vert). Vue resserrée sur l'un des triangles constitutifs de la microstructure, dans le cas de l'essai C-C. L'image à l'arrière-plan est l'image de référence, prise au début de l'essai. L'amélioration de la concordance entre le maillage et l'image de la microstructure est particulièrement visible au voisinage de la jonction en haut à droite.

Observations On peut proposer plusieurs facteurs susceptibles d'être à la source de ce décalage entre la microstructure visible sur l'image de référence et le maillage nominal. Tout d'abord, il est probable que ce décalage non uniforme soit dû au poids propre de l'éprouvette. Les éprouvettes sont très souples en extension. Il est donc probable que les éprouvettes se déforment *un peu* sous leur propre poids. Par ailleurs, des défauts d'alignement entre le dispositif optique et l'éprouvette sont susceptibles d'engendrer un tel décalage entre l'image et le maillage nominal. Il s'agit, par exemple, d'un défaut de perpendicularité entre le plan de l'éprouvette et l'axe optique. L'expérience a été réalisée en veillant à ce que tout soit aligné aussi bien que possible afin de limiter les perturbations des mesures par des facteurs de ce type. Enfin, la distorsion optique, due à l'objectif, pourrait causer un écart entre l'image de la microstructure et le maillage nominal. Cette hypothèse semble peut probable étant donné la répartition spatiale et l'ordre de grandeur des écarts observés.

La principale limite de cette méthode d'ajustement est l'utilisation de positions des centres des jonctions relevées manuellement. Cela induit une certaine incertitude sur la définition du ROI Ω . Celle-ci n'est pas gênante pour cette étude, mais peut être un facteur limitant si l'on cherche à faire des observations à l'échelle de la microstructure (au voisinage des jonctions, par exemple). De plus, ce travail devient fastidieux quand le nombre de cellules augmente. La microstructure des bandes de pantographe se prête particulièrement bien à l'utilisation de cette méthode pour deux raisons : d'une part, on distingue facilement sur l'image de référence des zones géométriques particulières, les jonctions, pouvant être utilisées pour définir la transformation géométrique et, d'autre part, la triangulation de Delaunay couvre

l'ensemble du ROI Ω . Pour une autre microstructure, la mise en œuvre de cette méthode peut être plus compliquée. D'autres méthodes sont proposées dans la littérature pour obtenir un maillage de ROI représentant fidèlement la microstructure d'un échantillon de matériau architecturé. La solution proposée par Agnelli *et al.* [2021] consiste à construire directement le maillage à partir de l'image de référence. Il faut pour cela que le contour soit nettement visible sur l'image de référence. La microstructure étudiée section IV.5 illustre la difficulté d'employer cette méthode dans certains cas : la finesse et la forme des jonctions présentent dans cette microstructure font que l'emploi de cette méthode est particulièrement difficile. La méthode dite de *mesh backtracking* utilisée dans Hild *et al.* [2021] semble être un moyen efficace et relativement universel pour ajuster un maillage destiné à être utilisé pour de la corrélation d'images globale sur l'image de référence. Dans le cadre de ces travaux de thèse, l'utilisation de cette méthode aurait nécessité un temps d'implémentation numérique plus important, sans gain notable.

Les maillages ajustés sont utilisés pour la mesure des champs de déplacement pour les deux essais C-C et S-C. Étant donné l'ordre de grandeur des déplacements nodaux et du tenseur de Green-Lagrange, on considère que la transformation permettant de passer du maillage nominal au maillage ajusté est une transformation infinitésimale. Par conséquent, on considère que les champs de déplacement obtenus par corrélation d'images globale sont définis sur le maillage nominal.

IV.3.4 Description cinématique macroscopique

Une représentation simplifiée est utilisée pour rendre compte de la réponse des éprouvettes à l'échelle macroscopique au cours des essais. L'objectif est d'arriver à une représentation comparable à ce que l'on obtient avec le modèle macroscopique, défini Section IV.2.2.1. Cela implique de faire abstraction de la géométrie de la microstructure et des fluctuations à l'échelle des cellules présentes dans $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)$. On définit trois grandeurs cinématiques caractéristiques de la réponse macroscopique de l'éprouvette au cours d'un essai de traction :

- L'extension nominale ε_L ;
- Le champ de déplacement longitudinal U ;
- Le champ d'extension E .

Leurs valeurs sont déduites des champs de déplacement mesurés par corrélation d'images.

L'extension nominale ε_L permet de représenter l'allongement global de l'éprouvette au cours de l'essai. Elle est calculée à partir des déplacements moyens des domaines Ω_B et Ω_H situés aux extrémités des éprouvettes :

$$\varepsilon_L(t_k) = \frac{\Delta L_t}{L} \quad (\text{IV.10})$$

L est la longueur de référence de l'éprouvette et correspond à la distance entre les barycentres de Ω_B et Ω_H mesurée dans la configuration initiale. ΔL_t est l'accroissement de cette distance, mesurée dans la configuration déformée à l'instant t_k , par rapport à la configuration initiale.

Avec l'hypothèse des petites perturbations, ΔL_t correspond à la différence entre la moyenne du déplacement longitudinal sur Ω_H et la moyenne du déplacement longitudinal sur Ω_B .

À l'aide d'une opération de moyenne sur chaque cellule unitaire, on construit une estimation du déplacement longitudinal U à partir du champ de déplacement \underline{u} mesuré pour la microstructure. On obtient ainsi une représentation discrète de la cinématique macroscopique ; les fluctuations du déplacement à l'échelle d'une cellule ne sont plus visibles.

On commence pour cela par identifier un ensemble de cellules C_j dans l'éprouvette, chacune étant identique à la cellule unitaire \mathcal{Y} (Figure IV.2b). Elles sont rangées en ordre croissant en fonction de leur position sur l'axe de traction. Les contours des deux premières cellules C_1 et C_2 , les plus en bas lors de l'essai, sont représentés en vert sur la Figure IV.16. La partie du domaine Ω incluse dans la cellule C_j est notée Ω_j . Dans la configuration de référence, tous les sous-domaines Ω_j ont une aire égale, notée S . La position longitudinale initiale de la cellule C_j , notée X_j , est définie comme la coordonnée longitudinale du barycentre de C_j . Ce point est également le barycentre du sous-domaine Ω_j :

$$X_j = \frac{1}{S} \int_{\Omega_j} x_1 dx \quad (\text{IV.11})$$

On procède de manière similaire pour définir le déplacement longitudinal de chaque cellule, $U_j^C(t_k)$, en prenant la configuration initiale comme configuration de référence. On soustrait à ces mesures le déplacement longitudinal moyen mesuré sur Ω_B U_B afin de compenser d'éventuelles perturbations dues au système de fixation de l'éprouvette.

$$U_j^C(t_k) = \frac{1}{S} \int_{\Omega_j} u_1(\underline{x}, t_k) dx - U_B \quad (\text{IV.12})$$

On obtient un ensemble discret de déplacements de cellules $U_j^C(t_k), j \in \{1; 2; \dots; N\}$ pour chaque temps t_k . On identifie le déplacement longitudinal de l'éprouvette U en chaque position X_j au déplacement de la cellule C_j :

$$U(X_j, t_k) = U_j^C(t_k) \quad (\text{IV.13})$$

On aboutit ainsi à une estimation du déplacement longitudinal U en un nombre fini de positions X_j , pour chaque instant t_k .

Une estimation de l'extension longitudinale, $E(X, t_k)$, est également calculée par différences finies :

$$E(Y_j, t_k) = \frac{U(X_{j+1}) - U(X_j)}{t} \quad \text{avec : } Y_j = \frac{X_j + X_{j+1}}{2} \quad \forall j \in \{1; 2; \dots; N-1\} \quad (\text{IV.14})$$

On obtient ainsi, pour chaque instant t_k , $N-1$ mesures de l'extension E pour les positions longitudinales Y_j .

IV.3.5 Résultats

Comportement global Les courbes force - extension nominale représentées Figure IV.19 permettent de rendre compte de la réponse globale de l'éprouvette au cours des deux essais

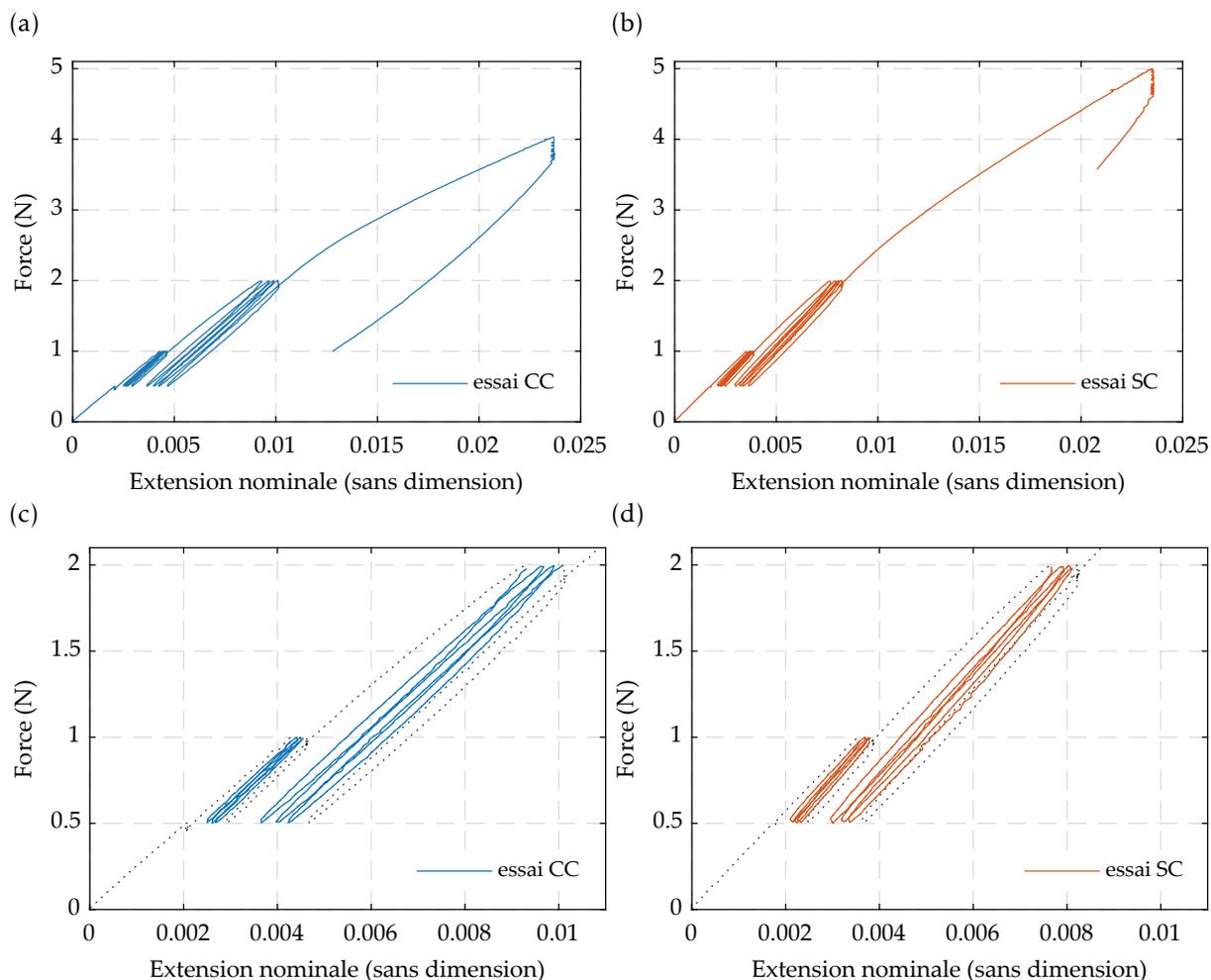


FIGURE IV.19 – Évolution de la force de traction exercée sur l'éprouvette en fonction de son extension nominale. (a) et (b) : Courbes force-extension pour l'intégralité de l'essai C-C (a) et de l'essai S-C (b). (c) et (d) : Vues resserrées sur les phases 1 et 2 des deux essais. Les courbes en couleur correspondent aux phases 1 et 2, les parties pointillées au reste de l'essai.

de traction. Elles mettent en évidence une différence de comportement due à l'encastrement fort.

En effet, on observe une différence de raideur globale : l'échantillon de pantographe apparaît plus raide lorsqu'on le sollicite en contraignant l'extension avec l'encastrement fort (essai S-C). Cette différence de comportement est visible dès le début de la charge et sur toute la durée de l'essai.

Par ailleurs, des phénomènes non élastiques sont nettement visibles dans le comportement global de ces échantillons. Leurs intensités sont similaires dans les deux configurations (essais C-C et S-C). Des boucles d'hystérésis sont visibles lors des cycles de charge-décharge. Elles sont dues à de la viscosité. On note également l'accumulation de déformations anélastiques. Ce phénomène peut être expliqué en utilisant un modèle de plasticité. Par conséquent, le modèle adéquat pour rendre compte du comportement observé lors de ces deux essais est un comportement de nature visco-élasto-plastique.

Nous observons maintenant plus particulièrement le comportement des deux échantillons (essais C–C et S–C) au cours des phases 1 et 2. Au sein d’une phase donnée les effets visco-plastiques sont négligeables devant les effets visco-élastiques. De plus, on peut considérer que le comportement visco-élastique observé sur une phase donnée est linéaire. Néanmoins, on ne peut négliger la présence de déformations anélastiques accumulées avant la phase observée. Ces observations justifient le choix du modèle utilisé pour la caractérisation du comportement élastique macroscopique : nous allons utiliser un modèle élastique linéaire de second gradient, avec un déplacement anélastique inconnu.

Champs cinématiques macroscopiques Les deux champs macroscopiques mesurés (U et E) sont significativement affectés par l’encastrement fort introduit en $X = 0$ lors de l’essai S–C. La Figure IV.20a représente les mesures $U(X_j, t_k)$ en fonction de la position initiale X pour les deux essais, en deux instants : pour la fin de la phase 1, où la force de traction est de 1 N, et pour la fin de la phase 2 où $F = 2$ N. La Figure IV.20b représente les mesures de l’extension $E(Y_j, t_k)$ également pour ces quatre configurations.

Les effets de l’encastrement fort ne sont pas confinés dans un voisinage proche de l’extrémité $X = 0$. Pour l’essai C–C, en première approximation, le déplacement croît de façon linéaire avec la position X sur l’ensemble de l’éprouvette. Au contraire, il apparaît nettement que pour l’essai S–C les mesures du déplacement U ne suivent pas cette tendance linéaire sur environ la première moitié de l’échantillon ($0 \text{ mm} \leq X \leq 300 \text{ mm}$). Cette différence de comportement est également nettement visible pour les mesures d’extension $E(Y_j)$ (Figure IV.20b). Aussi bien pour une force de traction de 1 N que de 2 N, les mesures d’extension sont globalement uniformes pour l’essai C–C. À l’inverse, pour l’essai S–C, les mesures d’extension E décroissent de manière progressive et significative lorsqu’on se rapproche de l’encastrement fort ($X = 0$).

La différence de raideur des deux éprouvettes due à la présence de l’encastrement fort s’observe également ici. Pour un même niveau de force, les déplacements sont plus faibles lors de l’essai S–C que lors de l’essai C–C (à l’extrémité $X = L$, écart relatif d’environ 10 % pour 1 N et d’environ 20 % pour 2 N).

Dans les deux cas et quel que soit le niveau de sollicitation, on observe une légère diminution de l’extension au voisinage des encastrements faibles ($X = 0$ et $X = L$ pour l’essai C–C, $X = L$ pour l’essai S–C). Il est probable que cela soit dû à un défaut de planéité des éprouvettes au début de l’essai (voir Sous-section IV.5.2.1 pour une discussion plus approfondie à ce sujet).

Bilan Un milieu de second gradient unidimensionnel, homogène et élastique linéaire semble approprié, et suffisant, pour rendre compte de la différence de comportement observé lors de ces deux essais. En effet, les allures des profils de déplacement et d’extension observés pour l’essai S–C correspondent à ce que l’on peut obtenir avec un tel milieu dans une configuration similaire, c’est-à-dire avec l’extension bloquée en $X = 0$ ($U = 0, E = 0$ en $X = 0$ et F imposée en $X = L$). De plus, dans le cas d’un encastrement faible en $X = 0$ ($U = 0, E$ libre),

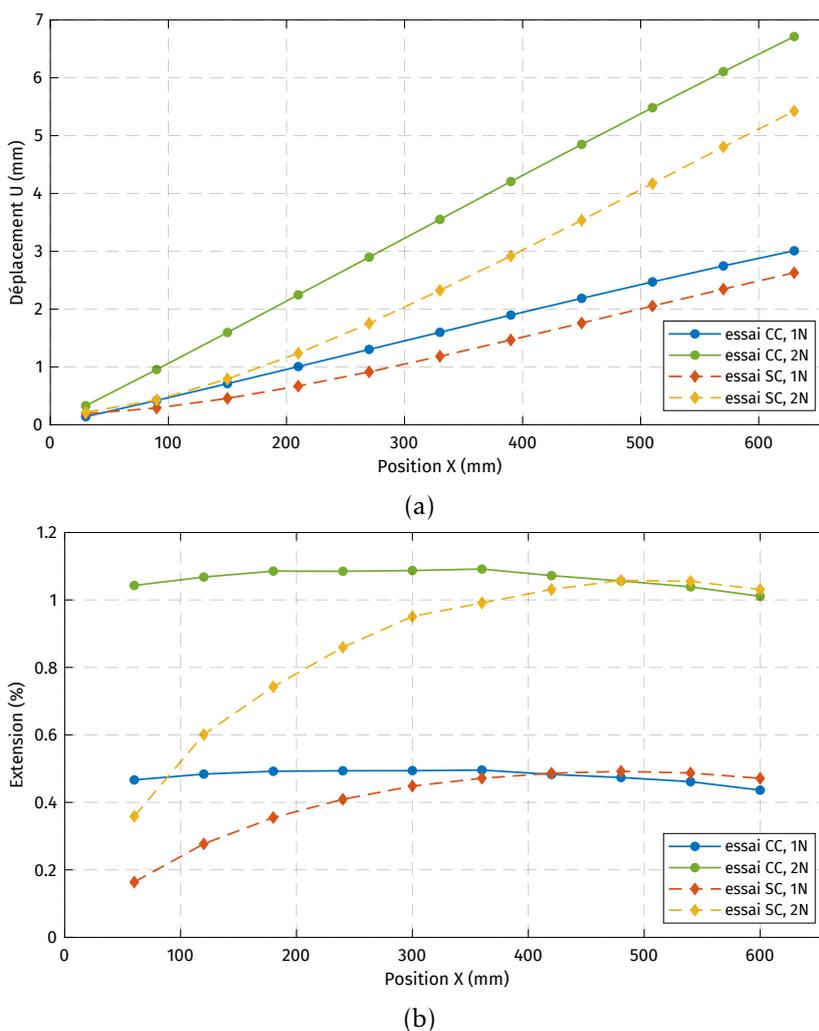


FIGURE IV.20 – Mesures du déplacement U (a) et de l'extension E (b) en fonction de la position initiale X . Les mesures sont représentées pour l'essai C-C (trait continu) et l'essai S-C (trait pointillé), pour un niveau de charge de 1 N et de 2 N.

on obtient avec un tel modèle un déplacement linéaire en fonction de la position X . Cela concorde avec l'allure linéaire observée pour le déplacement dans le cas de l'essai C-C.

IV.4 Identification d'un comportement de second gradient équivalent

On cherche à définir un milieu homogène équivalent représentatif du comportement macroscopique des échantillons de bandes de pantographes fabriqués. On utilise pour cela un modèle de milieu unidimensionnel homogène au comportement élastique, linéaire et de second gradient. Ce modèle est de même nature que celui obtenu par homogénéisation, défini dans la sous-section IV.2.2.1.

On se limite volontairement à un modèle élastique. Étant donné les observations faites précédemment, cela semble suffisant pour représenter avec une précision satisfaisante le

comportement des échantillons lors des phases 1 et 2 des deux essais. Lors des comparaisons entre la prévision de ce modèle et les mesures, un déplacement anélastique inconnu sera ajouté pour rendre compte d'une éventuelle accumulation de déformations anélastiques au cours de l'essai.

La caractérisation de ce milieu homogène équivalent consiste à déterminer les valeurs des raideurs C et D qui permettent d'obtenir un modèle représentatif. On réalise des estimations de ces raideurs pour chaque phase 1 et 2 des deux essais (C-C et S-C).

IV.4.1 Méthode

IV.4.1.1 Problèmes macroscopiques

Un problème macroscopique unidimensionnel équivalent est défini pour chacun des deux essais. Dans les deux cas, on considère un domaine $[0;L]$ occupé par le milieu unidimensionnel homogène défini précédemment. On note X la position longitudinale dans la configuration initiale. Une force longitudinale d'intensité F est exercée en $X = L$. Les champs solution de ce problème d'élasticité linéaire dépendent linéairement de F. La condition limite imposée en $X = 0$ dans le problème unidimensionnel dépend de l'essai modélisé.

Pour l'essai C-C, on impose uniquement un déplacement nul $U = 0$ en $X = 0$. En effet, les liaisons, entre la microstructure et les talons, utilisées pour les encastresments souples ont été spécifiquement conçues de sorte à n'imposer que le déplacement, sans contraindre l'extension à l'extrémité. Cet état de sollicitation ne fait intervenir que la partie du comportement élastique relative au premier gradient. Pour un chargement unitaire ($F = 1$ N) la solution en déplacement est :

$$U^{CC}(X) = \frac{1}{C}X$$

et correspond à une extension uniforme :

$$E^{CC}(X) = \frac{1}{C}$$

Dans le cas de l'essai S-C, l'encastrement imposé en bas de l'éprouvette $X = 0$ contraint le déplacement longitudinal mais également l'extension de la microstructure. En effet, les deux pointes des triangles adjacents au talon ne peuvent se rapprocher l'une de l'autre et le mode mou d'extension ne peut se mettre en place dès $X = 0$. Dans le problème unidimensionnel équivalent, il convient de représenter cet encastrement de l'éprouvette par une condition limite double en $X = 0$: $U = 0$ et $E = 0$. Cette fois, la raideur de second gradient du milieu unidimensionnel est visible dans sa réponse à cet état de sollicitation. Pour un chargement unitaire ($F = 1$ N) l'expression analytique de la solution en déplacement est :

$$U^{SC} = \frac{1}{C} \left\{ X + \ell \tanh\left(\frac{L}{\ell}\right) \left(\cosh\left(\frac{X}{\ell}\right) - 1 \right) - \ell \sinh\left(\frac{X}{\ell}\right) \right\}$$

On en déduit le champ d'extension solution :

$$E^{SC} = \frac{1}{C} \left\{ 1 + \tanh\left(\frac{L}{\ell}\right) \sinh\left(\frac{X}{\ell}\right) - \cosh\left(\frac{X}{\ell}\right) \right\}$$

IV.4.1.2 Ajustement du modèle

Des estimations des raideurs du milieu homogène équivalent sont obtenues par minimisation de l'écart entre les mesures faites lors d'un essai (C-C ou S-C) et la prévision du modèle macroscopique. Chaque estimation correspond à l'un des deux essais et à l'une des phases de cet essai (Phase 1 ou Phase 2). La méthode employée est similaire pour ces quatre configurations. Celle-ci est décrite simplement dans le cas de la Phase 1 de l'essai S-C.

L'ajustement du modèle est réalisé de deux manières similaires : soit en utilisant le déplacement U soit en utilisant l'extension E . Cela conduit à deux estimations pour chacune des phases d'essai. La minimisation de l'écart entre la prévision du modèle et les mesures est faite en employant la méthode des moindres carrés. On prend en compte l'ensemble des points de mesures (X_j lorsque le déplacement est utilisé, Y_j pour l'extension) et l'ensemble des instants de mesures compris dans cette phase d'essai ($t_k \in T_1$ dans le cas de la phase 1). En complément de la prévision du modèle élastique linéaire, un champ supplémentaire est introduit afin de capter les contributions anélastiques présentes dans les mesures. Il s'agit d'un champ de déplacement V lorsque le recalage du modèle est réalisé en utilisant le déplacement et d'un champ de déformation S lorsque l'extension est utilisée. Dans les deux cas, le champ V ou S est supposé constant au cours de la phase et, par conséquent, indépendant de la force de traction exercée.

Lorsque l'ajustement du modèle est fait sur les mesures de déplacement, les estimations des raideurs C et D sont obtenues par la minimisation suivante :

$$C, D, V_1, \dots, V_N = \underset{\widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t_k \in T_1} \sum_{j=1}^N (U(X_j, t_k) - F(t_k) \times U^{\text{SC}}(X_j, \widehat{C}, \widehat{D}) - \widehat{V}_j)^2 \right\} \quad (\text{IV.15})$$

où V_j correspond à la valeur du champ V en X_j . Dans ce cas, le champ V correspond à un champ de déplacement anélastique.

Lorsque l'ajustement est fait sur les mesures d'extension, les raideurs C et D optimales sont données par :

$$C, D, S_1, \dots, S_{N-1} = \underset{\widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t_k \in T_1} \sum_{j=1}^{N-1} (E(Y_j, t_k) - F(t_k) \times E^{\text{SC}}(X_j, \widehat{C}, \widehat{D}) - \widehat{S}_j)^2 \right\} \quad (\text{IV.16})$$

Dans ce cas, le champ S a le sens d'une déformation anélastique et $S_j = S(Y_j)$ peut s'interpréter comme la déformation anélastique moyenne entre les positions X_j et X_{j+1} .

Une méthode similaire est employée dans le cas de l'essai C-C. Par contre, cet essai ne permet d'estimer que la raideur de premier gradient C . Pour la Phase 1, les deux problèmes de minimisation sont :

$$C, V_1, \dots, V_N = \underset{\widehat{C}, \widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t_k \in T_1} \sum_{j=1}^N (U(X_j, t_k) - F(t_k) \times U^{\text{C}}(X_j, \widehat{C}) - \widehat{V}_j)^2 \right\}$$

lorsque l'ajustement est fait sur les mesures de déplacement $U(X_j)$ et

$$C, S_1, \dots, S_{N-1} = \underset{\widehat{C}, \widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_{N-1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t_k \in T_1} \sum_{j=1}^{N-1} (E(Y_j, t_k) - F(t_k) \times E^C(\widehat{C}) - \widehat{S}_j)^2 \right\}$$

lorsque l'ajustement est fait sur les mesures d'extension $E(Y_j)$.

IV.4.2 Expérience numérique

Pour mettre à l'épreuve la méthode de caractérisation proposée, celle-ci est appliquée en substituant des champs de déplacements obtenus par simulation numérique aux champs de déplacements normalement mesurés par corrélation d'image lors des essais de traction. Cette "expérience numérique" permet d'estimer le biais de mesure de cette méthode de caractérisation.

Lors de la caractérisation du comportement d'un matériau à partir d'essais mécaniques, il existe de nombreuses sources d'incertitudes. Dans notre cas, on peut distinguer en particulier :

- La géométrie de l'éprouvette, d'autant plus que le comportement macroscopique est très sensible à la géométrie des jonctions ;
- La précision des outils et méthodes de mesure, en particulier la corrélation d'images numériques ;
- Le risque de déplacement parasites, surtout hors plan ;
- La non-rectitude de l'éprouvette et du montage, ou un défaut de planéité de l'éprouvette. Comme nous sollicitons la bande pantographique dans le mode mou, les efforts exercés sont faibles et peuvent être insuffisants pour rectifier ces défauts au cours de la précharge ;
- La validité des hypothèses simplificatrices utilisées (contraintes planes, élasticité linéaire à l'échelle microscopique et macroscopique. . .) ;
- La validité de l'hypothèse de séparation d'échelle ;
- La méthode employée pour estimer les valeurs des propriétés mécaniques à partir des quantités mesurées.

Nous verrons que, malgré tout, le schéma d'homogénéisation est prédictif.

Cette "expérience numérique" présente l'intérêt d'isoler l'un des facteurs : la méthode employée pour calculer des estimations des raideurs en extension C et D à partir des champs de déplacements mesurés. La méthode proposée pour mesurer le comportement élastique de second gradient est nouvelle et nous proposons de la valider à l'aide d'un jumeau numérique. En plus, il est probable que le mode mou d'extension soit perturbé par des facteurs autres que l'encastrement fort lors des essais.

L'objectif de cette étude préliminaire est de vérifier la pertinence de cette méthode de caractérisation. On regardera pour cela si le biais de mesure est acceptable.

IV.4.2.1 Méthode

Pour mener cette expérience numérique, on réalise une simulation numérique pour chacun des deux essais de traction réalisés sur des bandes de pantographes. On considère une bande de pantographes contenant 11 cellules unitaires. Les jonctions font 0.75 mm de large alors que la cellule carrée fait 60 mm de côté. On note L la longueur totale de l'éprouvette ($L = 660$ mm). Un calcul complet est effectué par éléments finis. On adopte exactement le même cadre de travail que pour l'homogénéisation : la simulation est réalisée avec l'hypothèse des petites perturbations, en élasticité plane, avec l'hypothèse de contraintes planes et en supposant que le matériau constitutif (POM) se comporte de manière homogène, élastique, isotrope et linéaire. Pour la discrétisation du champ de déplacement, on utilise des éléments finis de Lagrange bidimensionnels, triangulaires, de degré 2. Le maillage utilisé pour ces simulations est particulièrement raffiné dans les jonctions.

Les conditions limites utilisées dépendent de l'essai simulé :

- Pour l'essai faible-faible (C-C) : $u_1 = 0$ sur les bords en $x_1 = 0$ et $u_1 = 1$ sur les bords en $x_1 = L$;
- Pour l'essai fort-faible (S-C) : $u_1 = u_2 = 0$ pour $x_1 = 0$ et $u_1 = 1$ pour $x_1 = L$;

Pour chacun des deux essais, le déplacement solution obtenu par ce calcul numérique est ensuite projeté sur un maillage plus grossier, similaire à ceux utilisés lors de la mesure des champs de déplacements par corrélation d'images. On obtient ainsi, par simulation numérique, un champ de déplacement semblable à ce que l'on obtiendra à partir d'essais mécaniques réels à l'aide de la corrélation d'images. Après cela, la méthode de caractérisation proposée est appliquée. Lors de cette expérience numérique, on retire du modèle les déplacements anélastiques V_j . Ceux-ci sont superflus compte tenu du cadre linéaire (HPP et élasticité linéaire) dans lequel les champs de déplacements ont été calculés.

Enfin, les raideurs de premier et de second gradient obtenues sont comparées à celles prévues par l'homogénéisation.

IV.4.2.2 Résultats

Les mesures des raideurs en extension C et D obtenues à l'aide de cette expérience numérique ainsi que celles obtenues par homogénéisation sont présentées Tableau IV.5. Les valeurs de la longueur caractéristique des effets de second gradient $\ell = \sqrt{\frac{D}{C}}$ sont également indiquées.

Tout d'abord, on observe que les mesures de la raideur de premier gradient C obtenues à partir des deux essais C-C et S-C sont quasiment identiques.

Par ailleurs, l'ajustement du modèle sur les mesures de déplacement ou sur son ajustement sur les mesures d'extension aboutissent à des valeurs de raideurs semblables. On remarque simplement que, pour l'estimation de la raideur D à partir de l'essai S-C, le biais de mesure est légèrement moindre quand l'extension est utilisée.

Enfin et surtout, on constate une forte similitude entre les raideurs C et D mesurées à l'aide de cette expérience numérique et les valeurs prévues par l'homogénéisation. Pour la

Méthode	C (N)	D (10^6 Nmm ²)	ℓ (mm)
Essai C–C :			
Ajustement sur U	148.4 (1.3 %)	–	–
Ajustement sur E	148.4 (1.3 %)	–	–
Essai S–C :			
Ajustement sur U	147.4 (0.5 %)	2.12 (13.6 %)	120 (6.3 %)
Ajustement sur E	148.1 (1.0 %)	2.02 (8.4 %)	117 (3.6 %)
Homogénéisation	146.6	1.87	113

TABLE IV.5 – Propriétés élastiques mesurées à partir de l’expérience numérique et obtenues par homogénéisation : raideurs en extension de premier et de second gradient (C, D) et longueur caractéristique des effets de second gradient (ℓ). Les valeurs entre parenthèses indiquent l’écart relatif par rapport aux valeurs issues de l’homogénéisation.

raideur en extension de premier gradient, l’écart relatif entre les mesures et la prévision de l’homogénéisation est extrêmement faible ($<2\%$). Pour les grandeurs liées au gradient d’extension, D et ℓ , on observe un biais de mesure non nul mais limité : l’écart relatif est de l’ordre de 10% .

On peut considérer que l’incertitude induite par ce biais de mesure pour D est acceptable. Malgré cela, le comportement de second gradient prévu par l’homogénéisation est en concordance avec le comportement non standard mis en évidence par l’encastrement fort. En effet, on constate que sur toute la longueur de l’éprouvette, l’écart est extrêmement faible entre les mesures des champs U et E issues du calcul complet et les prévisions construites à partir des résultats de l’homogénéisation. Les mesures du déplacement U, les prévisions des modèles ajustés et celles construites à partir des résultats d’homogénéisation sont représentées Figure IV.21, pour les deux essais simulés. De façon similaire les mesures et les prévisions de l’extension E sont représentées Figure IV.22.

Discussion Il n’est pas étonnant qu’il y ait un écart non nul entre les valeurs des raideurs issues de l’homogénéisation et celles obtenues à l’aide de cette méthode de caractérisation. En effet, l’encastrement fort peut engendrer des perturbations, autre qu’un gradient d’extension, et de telles couches limites ne sont pas prises en compte dans l’homogénéisation. L’homogénéisation est réalisée dans un cadre parfait, c’est-à-dire avec des conditions aux limites périodiques. De plus, la séparation d’échelle est relativement limitée lors de ces essais de traction. Il faut mettre ces observations en perspective avec les erreurs en norme L_2 mesurées lors de l’étude paramétrique réalisée pour valider le schéma d’homogénéisation.

IV.4.2.3 Bilan

Cette expérience numérique a permis d’estimer le biais de mesure de cette méthode de caractérisation. Nous savons maintenant que cette méthode permet d’estimer avec une

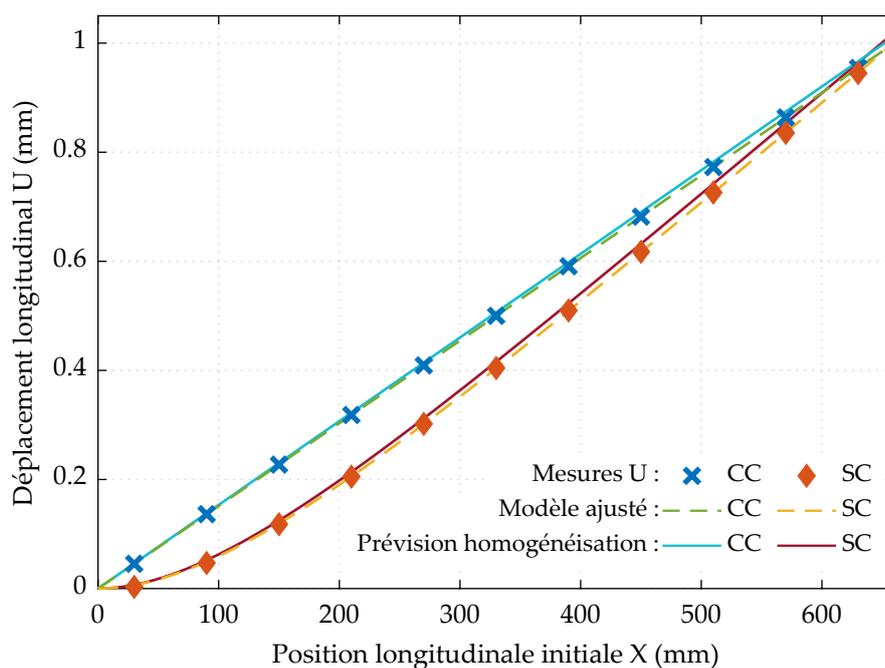


FIGURE IV.21 – Évolution du déplacement U en fonction de la position initiale X pour les deux essais simulés : faible-faible (C–C) et fort-faible (S–C). Sont représentées : les mesures du déplacement U, la prévision du modèle après ajustement (trait pointillé) et la prévision construite à partir des raideurs prévues par l’homogénéisation (trait continu).

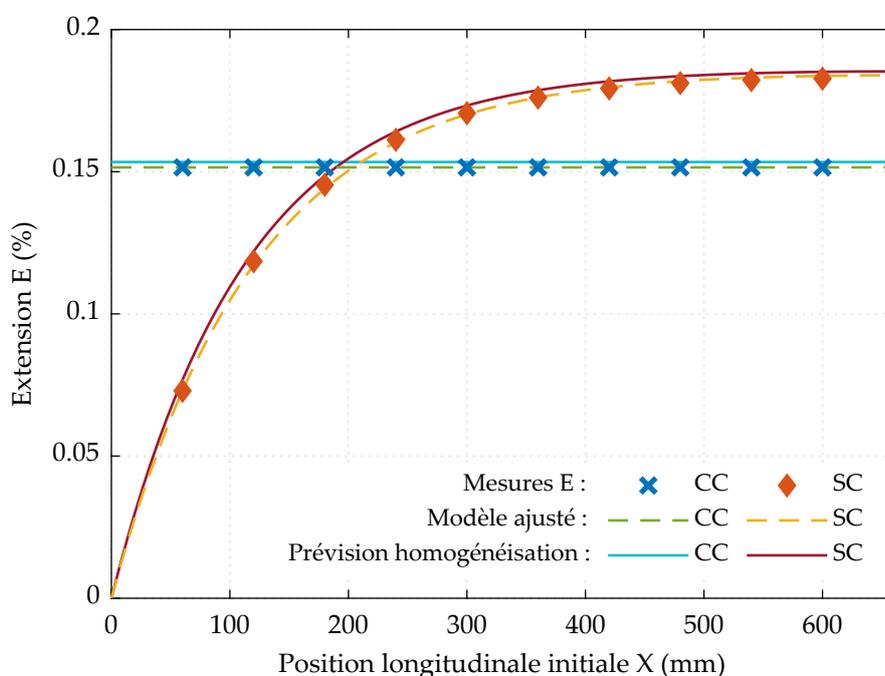


FIGURE IV.22 – Évolution de l’extension E en fonction de la position initiale X pour les deux essais simulés : faible-faible (C–C) et fort-faible (S–C). Le code graphique utilisé est identique à celui de la Figure IV.21.

incertitude acceptable les raideurs en extension C et D d'une bande de matériau architecturé à partir de deux essais de traction. L'incertitude sera au moins de l'ordre de 10 % pour la mesure de la raideur de second gradient. Étant donné la complexité de réalisation d'une telle mesure, c'est un biais qui est acceptable.

IV.4.3 Résultats

Cette section présente les résultats de la caractérisation des bandes de pantographes, fabriquées par découpe laser, à partir des deux essais de traction.

Qualité des prévisions Les prévisions des modèles ajustés, avec les paramètres obtenus par minimisation et incluant les champs anélastiques V et S, coïncident très bien avec les mesures expérimentales. Ceci est vrai quelle que soit la phase d'essai considérée (C-C ou S-C, Phase 1 ou 2) et la grandeur observée (U ou E). À titre d'exemple, les déplacements $U(X_j)$ mesurés pour chaque cellule C_j ainsi que les prévisions du modèle ajusté $(F(t_k)U^{SC}(X_j, C) + V(X_j))$ sont représentées dans un diagramme force-déplacement, pour les phases 1 et 2 de l'essai S-C, Figure IV.23. De façon similaire, les mesures et les prévisions du modèle ajusté, utilisées lors de la minimisation de l'écart en extension pour une phase donnée, sont représentées Figure IV.24, également pour les deux phases de cet essai.

Déformations anélastiques Nous constatons que les champs de correction anélastique V et S, utilisés pour les ajustements du modèle, sont faibles par rapport aux valeurs mesurées, respectivement pour le déplacement U et l'extension E. Les valeurs obtenues pour V et S sont, au maximum, de l'ordre de 20 % des mesures de U et E. Le modèle élastique utilisé est donc pertinent pour expliquer le comportement dominant observé au cours de ces phases d'essais.

Les déformations anélastiques obtenues pour les quatre minimisations faites pour l'extension sont représentées en fonction de la position X Figure IV.25. Aussi bien dans le cas de l'essai C-C que dans le cas de l'essai S-C, les tendances des courbes $S(X)$ sont semblables à celles observées pour les courbes d'extension $E(X)$ (courbes grisées Figure IV.25). Autrement dit, on obtient une valeur de déformation anélastique plus importante là où l'on mesure une extension plus grande lors des essais. Par ailleurs, on observe que les déformations anélastiques sont plus grandes à la fin de la Phase 2 ($F = 2N$) qu'à la fin de la Phase 1 ($F = 1N$). Ces deux observations semblent corroborer le sens mécanique donné aux champs S lors de leur introduction dans le modèle macroscopique : il est pertinent d'interpréter ces corrections constantes $S(Y_j)$ comme des déformations irréversibles dues à des phénomènes de plasticité qui ont lieu à l'échelle du matériau constitutif. Dans le cas des minimisations par rapport aux mesures de déplacement, le champ correctif V correspond à un champ de déplacement. Les taux de variation $\frac{V(X_{j+1})-V(X_j)}{X_{j+1}-X_j}$, calculés pour chaque configuration, sont presque identiques aux déformations S_j présentées précédemment. Par conséquent, il semble légitime de considérer que les variations au sein des échantillons de ces champs de déplacements V correspondent à l'accumulation de déformations plastiques.

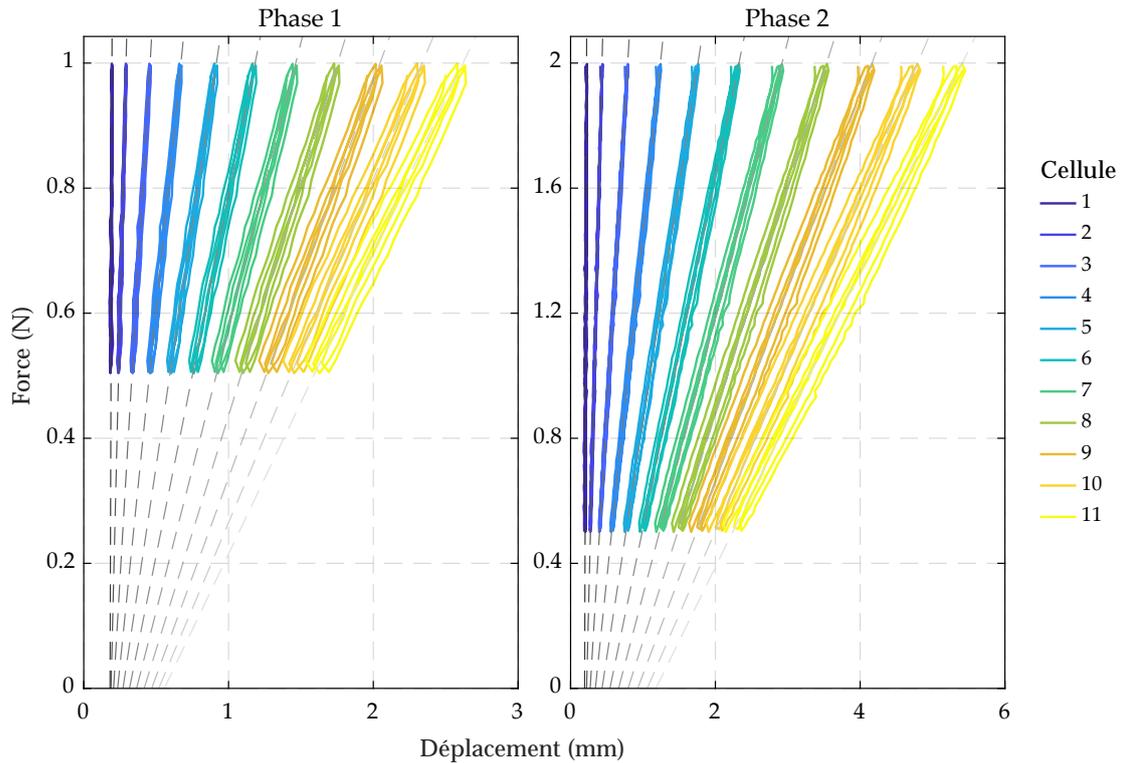


FIGURE IV.23 – Évolution de la force de traction en fonction du déplacement mesuré pour chaque cellule C_j au cours des phases 1 et 2 de l'essai S-C. Les droites pointillées en nuances de gris correspondent aux prévisions du modèle unidimensionnel ajusté, pour chaque cellule.

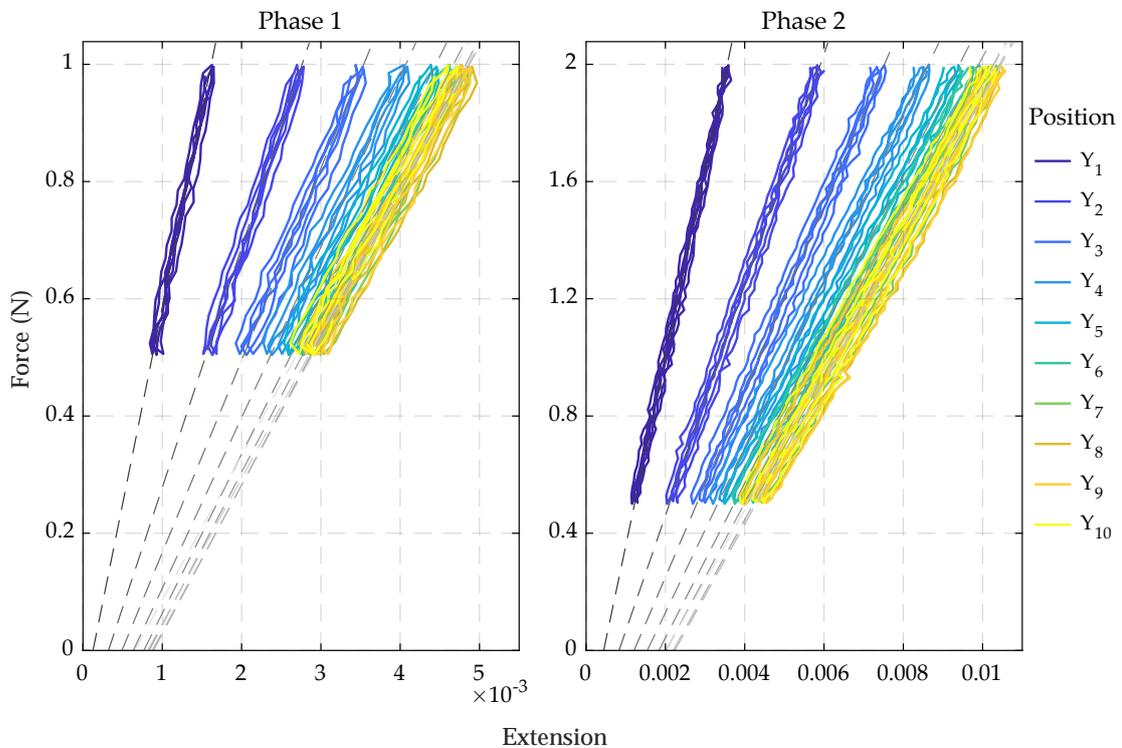


FIGURE IV.24 – Évolution de la force de traction en fonction de l'extension mesurée en Y_j pour les phases 1 et 2 de l'essai S-C. Les prévisions du modèle, ajusté sur les mesures d'extension d'une phase, sont également représentées pour chaque position Y_j (droites pointillées en nuances de gris).

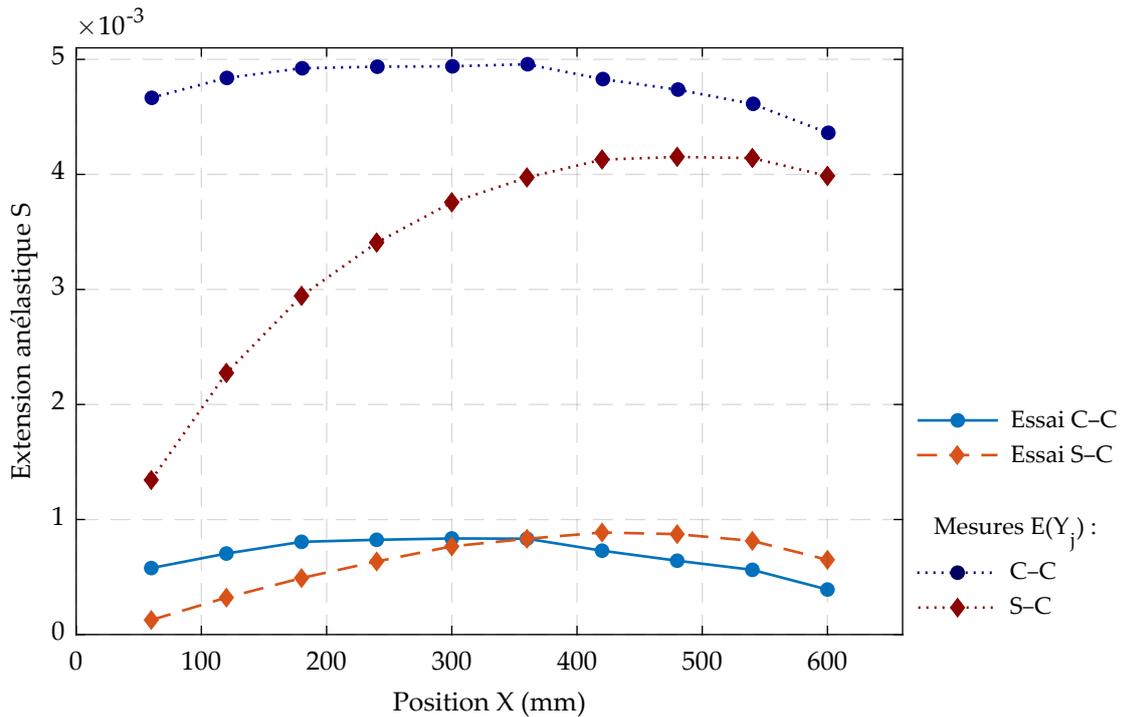


FIGURE IV.25 – Évolution des déformations anélastiques constantes $S_j = S(Y_j)$ en fonction de la position initiale X , pour la phase 1 des deux essais C–C et S–C. Les extensions mesurées à la fin de cette phase sont également représentés, afin de pouvoir estimer la proportion d’anélasticité.

Identification des paramètres élastiques Les estimations des raideurs C et D ainsi que les longueurs intrinsèques ℓ calculées à partir de ces valeurs sont présentées Tableau IV.6. Les propriétés élastiques (C , D , ℓ) obtenues par homogénéisation sont également indiquées. Afin de tenir compte du mieux possible de la géométrie réelle des échantillons de bande de pantographes, cette prévision est calculée pour une cellule de base où toutes les jonctions ont une largeur égale à la largeur moyenne mesurée $\bar{w} = 0.69\text{mm}$ (voir Sous-section IV.2.6).

Nous notons tout d’abord que, pour la raideur de premier gradient C , les estimations réalisées pour les deux essais et les deux phases aboutissent à des valeurs relativement proches. La moyenne sur les huit mesures est de 242 MPa et l’écart entre les valeurs extrêmes est de 8 MPa (3 %).

En ce qui concerne les propriétés relatives au gradient d’extension, les quatre estimations réalisées pour l’essai S–C aboutissent à des valeurs de la raideur D et de la longueur caractéristique ℓ relativement proches les unes des autres. Les écarts relatifs, calculés par rapport à la moyenne des quatre valeurs, sont compris entre –4 % et 6 % pour D et entre –1 % et 3 % pour ℓ .

Ces observations justifient l’utilisation d’un seul couple de valeurs (C, D), avec ce modèle élastique, pour représenter le comportement de ces échantillons de bande de pantographes lors des phases 1 et 2 de ces deux essais. Ce modèle, paramétré par C et D , apparaît comme un choix simple et suffisant pour avoir description relativement précise du comportement

Méthode	C (N)	D (10^6 Nmm ²)	ℓ (mm)
Essai C–C :			
Phase 1, ajustement sur U	246 (–0.5 %)	–	–
Phase 1, ajustement sur E	246 (–0.2 %)	–	–
Phase 2, ajustement sur U	241 (–3 %)	–	–
Phase 2, ajustement sur E	243 (–2 %)	–	–
Essai S–C :			
Phase 1, ajustement sur U	243 (–2 %)	4.06 (13 %)	129 (7 %)
Phase 1, ajustement sur E	243 (–2 %)	4.33 (20 %)	134 (10 %)
Phase 2, ajustement sur U	237 (–4 %)	3.93 (9 %)	129 (6 %)
Phase 2, ajustement sur E	238 (–4 %)	4.00 (11 %)	130 (7 %)
Homogénéisation (\bar{w})	247	3.60	121

TABLE IV.6 – Estimations des raideurs C et D et de la longueur caractéristique ℓ obtenues à partir des essais de traction. Les valeurs entre parenthèses indiquent l'écart relatif par rapport aux valeurs obtenues par homogénéisation, dans le cas d'une largeur de jonctions égale à \bar{w} .

élastique macroscopique de la bande de pantographe lors des quatre phases d'essai.

De plus, ces observations confirment que, pour la caractérisation du comportement élastique, l'ajustement du modèle sur les mesures de déplacement ou l'ajustement sur les mesures d'extension sont deux méthodes comparables. Aucune des deux ne semble sensiblement meilleure que l'autre.

Enfin, les paramètres élastiques identifiés à partir des essais de traction sont, en ordre de grandeur, comparables aux prévisions obtenues par homogénéisation. Pour la raideur de premier gradient C, la prévision obtenue par homogénéisation en utilisant la largeur nominale $w_n = 0.75$ mm lors de la modélisation géométrique de la microstructure est nettement plus élevée que les estimations issues des essais de traction. Pour $w_n = 0.75$ mm les prévisions sont $C = 293$ N et $D = 3.74 \times 10^6$ Nmm²; les écarts relatifs par rapport aux moyennes des mesures de C et D sont respectivement de 21 % et –8 %. Toutefois, cet écart chute drastiquement si l'on utilise la largeur de jonction moyenne mesurée \bar{w} lors du calcul d'homogénéisation. Pour la raideur de second gradient D, on note un écart relatif plus grand entre les estimations issues des essais de traction et les prévisions de l'homogénéisation (jusqu'à 20 %). L'écart entre la prévision et les mesures est plus faible pour la longueur intrinsèque ℓ , de l'ordre de 10 %. Il est important de noter que ℓ ne dépend pas du module de Young utilisé pour la prévision par homogénéisation, mais seulement de la largeur des jonctions. Cette dernière observation est donc un élément de validation de la prévision du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur.

Nous pouvons proposer plusieurs causes susceptibles d'engendrer l'écart entre les propriétés élastiques mesurées et la prévision obtenue avec le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur :

- Le choix de la largeur moyenne \bar{w} pour la modélisation de la microstructure : Ce n'est peut-être pas le choix le plus pertinent. C'est peut-être la largeur de la jonction la plus fine qui dicte le comportement de la bande de pantographes lorsqu'elle est soumise à un gradient d'extension. La question de la largeur la plus pertinente à utiliser (largeur minimale, maximale, moyenne arithmétique...) reste pour le moment une question ouverte.
- Le module de Young du matériau constitutif : La valeur du module de Young utilisée pour construire la prévision à partir des résultats d'homogénéisation conduit à une très bonne prévision de la raideur de premier gradient. Toutefois, n'oublions pas que l'estimation d'un module de traction pour un thermoplastique tel que le POM employé ici est délicate. Il y a donc une assez grande incertitude sur le module de Young utilisé pour cette prévision et celle-ci peut expliquer en partie l'écart entre les prévisions et les mesures de D. Par ailleurs, le matériau constitutif n'est pas sollicité de la même manière lorsque la bande de pantographes est soumise à une élongation uniforme ou à un gradient d'élongation. Par conséquent, là aussi, il est fort probable que la valeur la plus pertinente pour représenter le comportement élastique du matériau constitutif ne soit pas la même si l'on s'intéresse uniquement au cas d'une extension uniforme ou seulement au cas d'un gradient d'extension.

IV.5 Application à une microstructure obtenue par optimisation topologique

L'étude expérimentale de la bande de pantographes a permis de vérifier la pertinence de la méthode de caractérisation proposée : nous sommes en mesure de caractériser le comportement élastique en extension d'une poutre architecturée périodique sensible au gradient d'extension, en statique. Fort de cette première utilisation, nous proposons maintenant d'employer cette méthode pour l'étude d'une autre microstructure, conçue et étudiée dans le cadre du projet ANR ArchiMatHOS.

L'un des objectifs de ce projet de recherche est le développement d'un outil d'optimisation topologique permettant la synthèse de microstructures menant à un comportement élastique non standard. La microstructure à laquelle nous nous intéressons dans cette partie a été obtenue à l'aide de cet outil. Elle a été conçue en collaboration avec des membres du projet ANR ArchiMatHOS dont notamment Valentin Calisti [Calisti, 2018]. L'apport présenté ici est la fabrication d'échantillons et, surtout, la caractérisation de leur comportement élastique.

Cette section s'organise de la façon suivante : Dans un premier temps, la méthode de conception est brièvement expliquée puis la microstructure et le comportement en extension de la poutre périodique obtenue sont présentés. Ensuite, la sous-section IV.5.2 présente les modifications de la méthodologie expérimentale, par rapport à celle employée pour l'étude de la bande de pantographes et décrite précédemment (voir Sous-sections IV.3 et IV.4.1). On s'intéresse en particulier à la fabrication des éprouvettes. Enfin, les résultats expérimentaux sont présentés et comparés aux prévisions de l'homogénéisation dans la sous-section IV.5.3.

IV.5.1 Synthèse d'une poutre périodique sensible au gradient d'extension

IV.5.1.1 Conception de la microstructure

La démarche d'optimisation topologique Une démarche d'optimisation topologique a été menée pour synthétiser une microstructure permettant d'obtenir un matériau architecturé périodique particulièrement sensible à un certain type de sollicitation de second gradient. Ce travail a été réalisé dans le cadre de l'élasticité linéaire, avec l'hypothèse des petites perturbations, pour un matériau constitutif isotrope et pour une microstructure 2D.

La stratégie employée pour cette optimisation repose sur le concept de *dérivée topologique*. L'adaptation de cette approche pour l'optimisation du comportement équivalent élastique linéaire, en prenant en compte les effets second gradient, en statique, est le fruit de travaux récents. La construction d'une dérivée topologique dans ce contexte est présentée en détail par Calisti *et al.* [2021]. L'idée principale de cette méthode est de calculer la façon dont une inclusion infinitésimale de matériau, plus raide ou plus souple, à un endroit donné du domaine perturbe, c'est-à-dire améliore ou dégrade, le comportement élastique calculé par homogénéisation. Ce processus a été initialement proposé et employé pour l'optimisation du tenseur de raideur homogénéisé de premier gradient \mathbf{C} . Il est présenté et illustré à l'aide de plusieurs exemples numériques d'optimisation par Amstutz *et al.* [2010].

Le principe de fonctionnement du processus d'optimisation employé est le suivant :

- On considère un domaine \mathcal{Y} qui correspond à une cellule unitaire d'un milieu périodique 2D ou 3D. On suppose qu'il contient un mélange de deux matériaux constitutifs, au comportement élastique, linéaire et isotrope, l'un étant plus raide que le second. La fonction de niveau (*level set function*) ϕ indique la répartition des deux matériaux constitutifs dans le domaine \mathcal{Y} :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 & \text{matériau raide} \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{matériau souple} \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{frontière} \end{cases}$$

On note $J(\phi)$ la fonction coût que l'on cherche à minimiser. Celle-ci s'exprime comme une combinaison des propriétés élastiques obtenues par homogénéisation (coefficients des tenseurs de d'élasticité \mathbf{C} et \mathbf{D} par exemple). La fonction de niveau ϕ est la variable d'optimisation. Une répartition de matériaux initiale est choisie et l'on initialise ϕ_0 en conséquence.

- Le procédé d'optimisation est itératif. Soit ϕ_n la fonction de niveau obtenue lors de l'itération n . Elle correspond à une certaine configuration de la cellule unitaire. La dérivée topologique de la fonction coût, notée $D_T(J)$, est calculée en tout point du domaine \mathcal{Y} pour cette configuration. Cela requiert la résolution numérique des deux premiers problèmes auxiliaires définis pour l'homogénéisation d'ordre supérieur.
- Sous certaines conditions et en suivant certaines règles, une nouvelle fonction de niveau ϕ_{n+1} est construite à partir de ϕ_n et de $D_T(J)$:

$$\phi_{n+1} = \beta_n (\alpha_n \phi_n + (1 - \alpha_n) g_n)$$

avec g_n une fonction calculée à partir de la dérivée topologique $D_T(J)$ calculée pour ϕ_n et α_n et β_n deux coefficients calculés à partir de g_n et ϕ_n . L'idée est de modifier *légèrement* la répartition de la matière dans \mathcal{Y} , définie par ϕ_n de sorte à améliorer la valeur de la fonction coût. Il faut pour cela calculer les valeurs des tenseurs d'élasticité homogénéisés pour la cellule unitaire correspondant à la valeur actuelle de ϕ .

- En règle générale, l'écart entre les fonctions ϕ_n et g_n décroît au fur et à mesure des itérations. La mesure de cet écart est définie dans [Amstutz *et al.* \[2010\]](#). La nullité de cet écart est une condition suffisante d'optimalité : dans une telle configuration, on ne peut modifier la répartition de la matière dans la cellule unitaire sans dégrader le comportement macroscopique équivalent. On stoppe ce processus itératif lorsque la variation de J obtenue par le changement de configuration $\phi_n \rightarrow \phi_{n+1}$ est inférieure à un seuil fixé.
- Ce processus itératif, avec éventuellement des modifications de certains paramètres au cours des itérations, permet de faire émerger une microstructure qui correspond à un optimum local de la fonction coût J .

Fonction	Milieu périodique élastique sensible au gradient d'extension dans la Direction 1
Objectif	Minimiser le rapport des raideurs $-\frac{C_{1111}}{D_{111111}}$
Contraintes	Cellule unitaire carrée $[0; 1] \times [0; 1]$ 2 matériaux constitutifs, module de Young c et γc avec $\gamma \ll 1$ contraste géométrique $> \frac{1}{80}$
Variable	Répartition des deux matériaux ϕ

TABLE IV.7 – Exigences de conception pour l'optimisation topologique.

Pour cette étude, l'objectif est d'obtenir une forte sensibilité aux variations dans la Direction 1 de l'extension dans cette direction. On choisit pour cela la fonction coût, à minimiser, $J = -\frac{C_{1111}}{D_{111111}}$. Aucune contrainte n'est imposée, ni sur l'aire du domaine occupé par le matériau le plus raide, ni sur les valeurs des tenseurs d'élasticité homogénéisés. On choisit une cellule unitaire carrée $\mathcal{Y} = [0; 1] \times [0; 1]$. Par contre, nous ne souhaitons pas que la microstructure contienne des éléments trop fins (poutres ou jonctions) afin que nous puissions fabriquer des échantillons. Le seuil de contraste géométrique entre la largeur du plus fin élément et la largeur de la cellule est fixé à $\frac{1}{80}$. Cette valeur correspond au rapport entre la largeur des jonctions et la largeur de la cellule pour les échantillons de pantographes étudiés précédemment. Le processus d'optimisation a été appliqué pour diverses configurations. Les variations entre ces configurations se situent soit au niveau de la répartition initiale ϕ_0 soit au niveau des paramètres de l'algorithme d'optimisation, soit au niveau des règles de calcul employées. Notons que tous les ϕ_0 testées correspondent à une microstructure centro-symétrique. L'une des procédures aboutit à une microstructure facile à interpréter : la fonction de niveau fait clairement apparaître une géométrie et l'on peut pressentir comment cette microstructure se comporte lorsqu'elle est soumise à une extension uniforme E_{11} ou à un gradient d'extension K_{111} . Nous retenons celle-ci pour la suite de ce travail. Les éléments clés de cette optimisation topologique sont récapitulés Tableau IV.7.

Le matériau le plus souple est amené à être substitué par du vide. En effet, la configuration où la cellule ne contient qu'un seul matériau constitutif, celui de la microstructure, le reste de l'espace étant vide, est plus favorable pour obtenir des effets de second gradient marqués. De plus, elle correspond à ce que l'on est en mesure de fabriquer par découpe laser. Néanmoins, cette procédure d'optimisation est menée en supposant que deux matériaux constitutifs occupent l'intégralité de la cellule unitaire et l'on observe un comportement remarquable : pour certaines configurations, dans lesquelles de fines jonctions apparaissent dans la microstructure au cours de l'optimisation, l'augmentation du contraste de raideur entre les deux matériaux constitutifs au cours du processus permet de faire décroître la largeur de ces jonctions et cela se traduit par une baisse de la valeur de la fonction objectif $J = -\frac{C_{1111}}{D_{111111}}$. Il ne s'agit, pour le moment, que d'un constat fait à partir de quelques utilisations de cette méthode d'optimisation pour cette application. Pour l'heure, ce lien entre ce contraste de raideur et la finesse des jonctions n'a pas été étudié en détail ni formalisé. Cette relation a

été utilisée pour contrôler la largeur minimale des jonctions présentes dans la microstructure.

Post-traitement Un post-traitement est réalisé pour concevoir une microstructure à partir de la fonction de niveau ϕ retenue. Celui-ci peut être décomposé en quatre étapes majeures, présentées ci-dessous et illustrées par les figures IV.26 à IV.28 :

1. On réalise une partition du maillage représentant Ω en suivant l'isovaleur $\phi = 0$ (Figure IV.26). Les éléments à cheval sur cette isovaleur sont scindés en deux. On ne conserve que la partie du maillage correspondant au matériau raide et incluse dans le quart inférieur gauche de Ω (Figure IV.27a), pour des raisons de symétrie.
2. Le pourtour de ce maillage est lissé en appliquant un algorithme de lissage laplacien itératif (Figure IV.27b), à l'exception des parties du pourtour situées sur les bords du quart de cellule ($y_1 = 0$, $y_1 = 0.5$, $y_2 = 0$ ou $y_2 = 0.5$).
3. Dans un logiciel de CAO (CATIA V5), on modélise le pourtour de ce maillage à l'aide de primitives géométriques (segments de droites, arcs de cercles, B-spline) (Figure IV.28). Une attention toute particulière est portée sur les voisinages des jonctions afin que la géométrie soit assez fidèle au résultat de l'optimisation topologique.
4. Enfin, la géométrie de la microstructure sur l'ensemble de la cellule est générée à partir de la modélisation du quart de cellule, par des opérations de symétrie par rapport aux plans médians. Cette méthode de construction garantit que la microstructure périodique est *exactement* invariante par symétrie par rapport aux plans (1, 3) et (2, 3) (orthotropie). La microstructure est par conséquent centro-symétrique.

Résultat La figure IV.29 représente la cellule unitaire obtenue avec cette démarche d'optimisation topologique après post-traitement. La longueur d'une cellule dans la Direction 1 est de 60 mm. La géométrie de cette cellule unitaire est invariante par symétrie par rapport à l'un des deux plans médians (de normale \underline{e}_1 ou \underline{e}_2) et, par conséquent, la microstructure est centro-symétrique. On constate que cette microstructure comporte de fines jonctions. Dans le voisinage de ces jonctions, le contour de la microstructure ressemble à une courbe avec un point de rebroussement, comme une caustique. Les deux secteurs angulaires qui, de manière approchée, correspondent à l'espace vide autour d'une jonction sont particulièrement aigus. On distingue trois types de jonctions de forme et de largeur légèrement différentes (de 0.82 mm à 1.14 mm). On définit le contraste géométrique ρ comme le rapport entre la moitié de la largeur de jonction minimale et la longueur de la cellule : $\rho = \frac{0.82/2}{60} = 6.83e - 3$.

Cette microstructure discontinue dans la Direction 2 a naturellement émergée du procédé d'optimisation topologique. Son utilisation pour générer une poutre périodique semble donc tout à fait légitime.

Cette microstructure ressemble donc sur plusieurs aspects à la microstructure de pantographes classique précédemment étudiée. Les différences principales entre ces deux microstructures sont la forme des jonctions et leurs positions relatives.

On pressent que ces jonctions qui ressemblent à des points de rebroussements augmentent

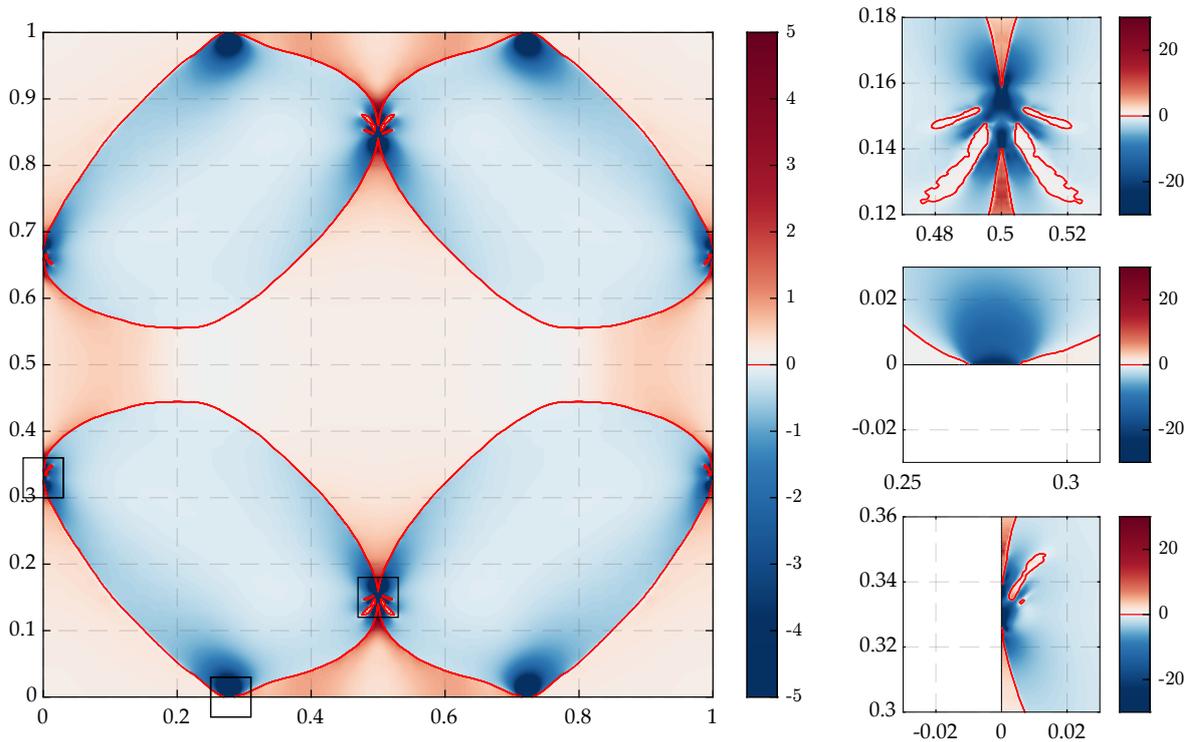


FIGURE IV.26 – Level-set résultante de l’optimisation topologique. Cellule entière (gauche) et vues resserrées sur trois jonctions (droite). Les courbes d’isovaleur $\phi = 0$ sont représentées en rouge.

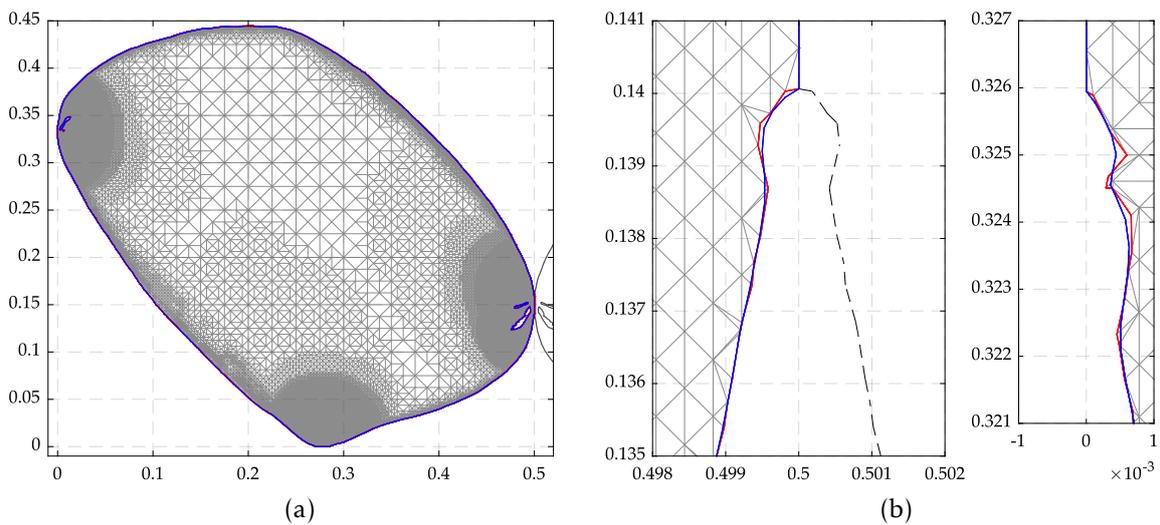


FIGURE IV.27 – (a) Maillage du quart de cellule obtenu après le découpage suivant l’isovaleur $\phi = 0$ (gris et contour rouge). Le contour du quart de cellule après l’opération de lissage est également représenté, en bleu. (b) Illustration de l’opération de lissage au voisinage de deux jonctions.

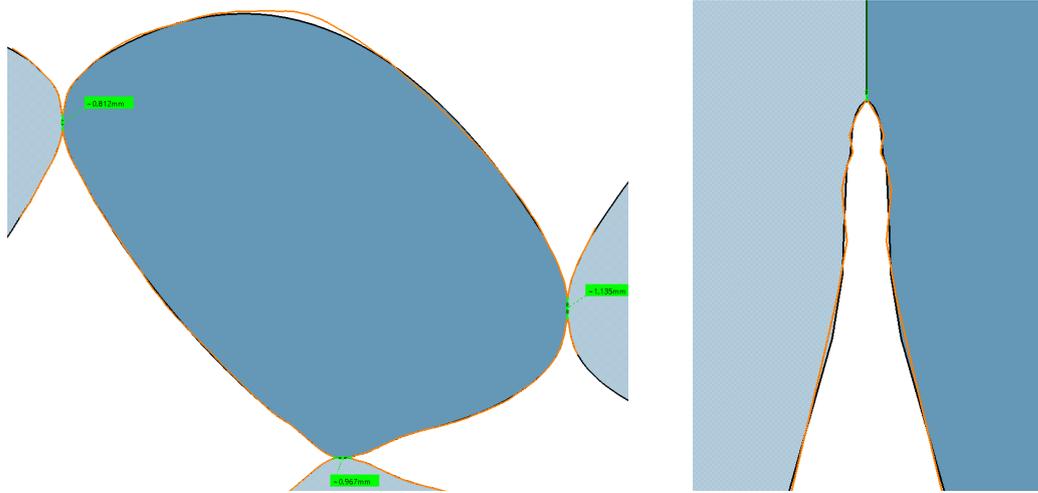


FIGURE IV.28 – Construction de la géométrie de la microstructure dans un logiciel de CAO. Les courbes oranges représentent le pourtour du domaine maillé issu de l’optimisation topologique, après lissage, et les courbes noires représentent la géométrie construite. À droite : vue resserrée au voisinage d’une jonction.

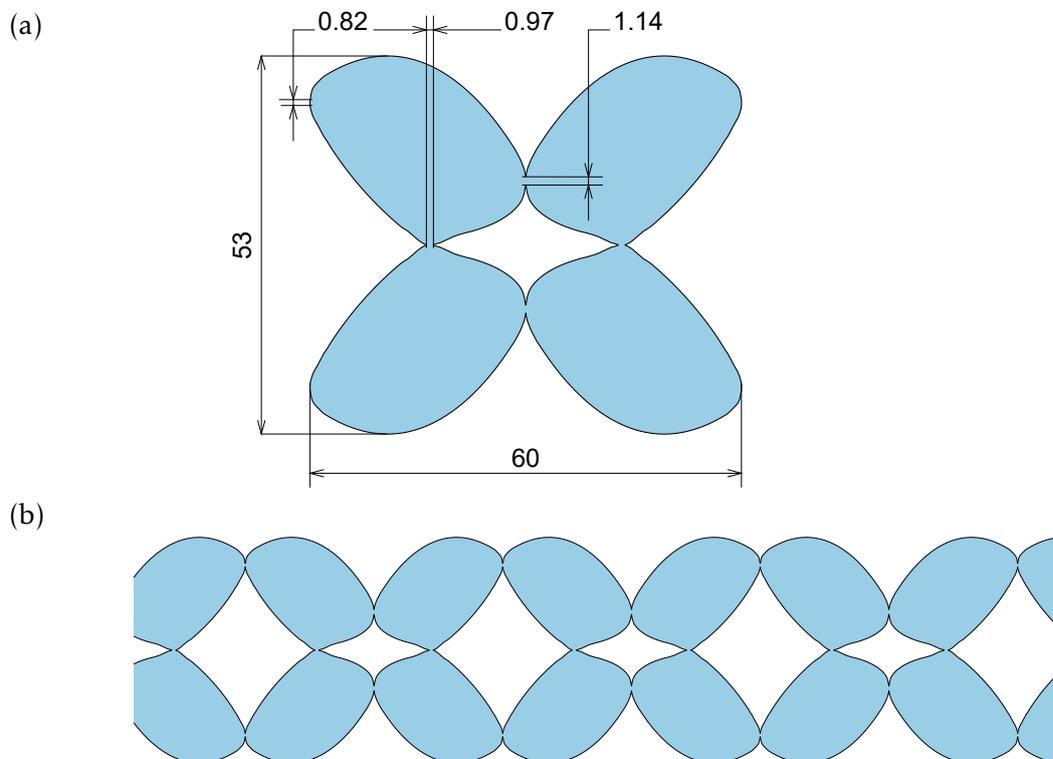


FIGURE IV.29 – (a) Cellule unitaire issue de la démarche d’optimisation topologique et (b) échantillon de poutre architecturée périodique obtenue par répétition de cette cellule.

Microstructure	C (N)	D (10^6 Nmm ²)	ℓ (mm)
issue de l'optimisation topologique	2957	49.7	130
pantographe classique	700.1	7.74	105

TABLE IV.8 – Raideurs en extension de premier et second gradients calculées par homogénéisation pour la microstructure obtenue par optimisation topologique et la microstructure de pantographe classique, pour des bandes architecturées de 4 mm d'épaisseur.

le risque que des phénomènes non linéaires aient lieu lors des essais, même pour un faible niveau de charge.

Cette cellule est propagée dans la Direction 1 pour former des poutres architecturées périodiques. Nous nous intéressons au comportement élastique de cette bande architecturée pour des sollicitations en élongation dans cette direction. La microstructure a été conçue pour que ces poutres soient particulièrement sensibles à un gradient d'élongation, c'est-à-dire une variation dans la Direction 1 de l'intensité de l'élongation. Nous allons vérifier la présence de ce comportement non standard, tout d'abord de manière numérique, par homogénéisation, puis de manière expérimentale.

IV.5.1.2 Homogénéisation

Nous utilisons le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur adapté aux bandes architecturées sollicitées en extension, présenté dans la sous-section IV.2.2.1, pour construire un milieu homogène équivalent.

Le tableau IV.8 présente les raideurs calculées de cette manière en supposant que l'épaisseur de la poutre architecturée est de 4 mm. La longueur caractéristique $\ell = \sqrt{\frac{D}{C}}$, qui permet de quantifier la sensibilité de la bande à un gradient d'extension, est aussi indiquée. Nous calculons également, avec le même protocole, les propriétés élastiques de la microstructure de pantographe classique, avec une cellule de 60 mm de côté et des jonctions de largeur 0.82 mm.

On constate que, à contraste géométrique et longueur de cellule égaux, le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur prévoit des effets de second gradient légèrement plus marqués pour la microstructure conçue à l'aide de l'optimisation topologique. Par ailleurs, la raideur en extension uniforme C est nettement plus grande pour la microstructure issue de l'optimisation topologique. On peut considérer que cette différence est à l'avantage de la microstructure optimisée. En effet, cela signifie que la bande réagit un peu moins comme une bande dont le comportement en extension est dégénéré (raideur C nulle) malgré la présence d'effets de second gradient marqués. De façon plus générale, en prenant un peu de recul, il n'est pas étonnant que l'optimisation topologique aboutisse à une microstructure pour laquelle la raideur de premier gradient C est faible. Déjà, pour la microstructure de pantographe classique, la stratégie pour faire apparaître des effets de second gradient marqués repose sur l'ouverture du noyau du tenseur de raideur C.

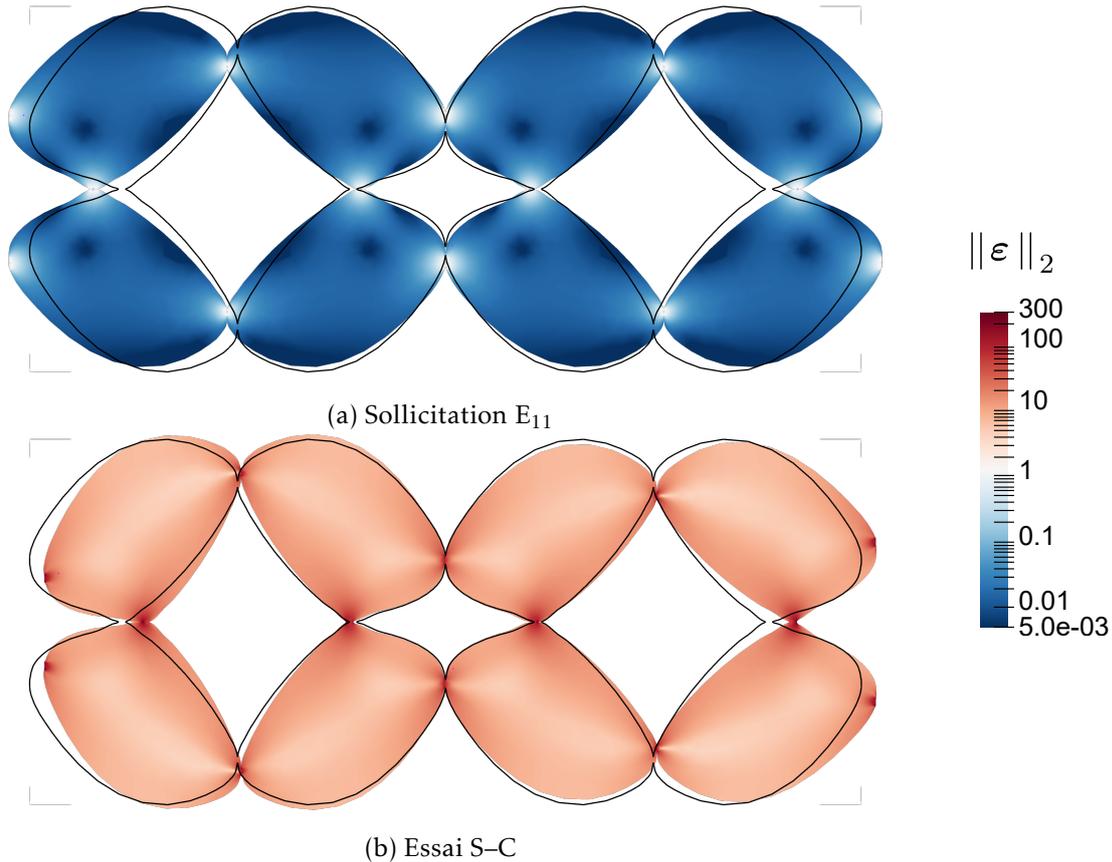


FIGURE IV.30 – Échantillon de poutre architecturée périodique soumis à des sollicitations macroscopiques élémentaires : (a) E_{11} : une extension uniforme (b) K_{111} : Une extension variant linéairement dans la Direction 1. Le champ représenté est la norme du champ de déformation totale $\|\epsilon\|_2$. Le contour de la configuration initiale est également représenté (trait noir). Les facteurs d'amplificateur du déplacement pour la représentation de la déformée sont : (a) 0.05 (b) 0.001 25.

La figure IV.30 présente la réponse d'un échantillon de bande architecturée pour deux sollicitations macroscopiques particulières :

- E_{11} : Extension macroscopique unitaire et uniforme, le déplacement macroscopique est $U(X) = X$;
- K_{111} : Gradient d'extension macroscopique unitaire et uniforme, $U(X) = \frac{1}{2}X^2$.

Les phénomènes observés sont similaires à ceux observés dans le cas de la microstructure de pantographes classique : lorsque la poutre périodique est exposée à un gradient d'extension macroscopique (sollicitation K_{111}) les niveaux de déformation induits dans la microstructure sont significatifs dans la quasi-totalité de la microstructure. À l'inverse, une extension macroscopique uniforme (sollicitation E_{11}) ne résulte qu'en des déformations très localisées au niveau des jonctions et d'intensité plus faible.

IV.5.2 Méthode

Des essais de traction sont réalisés sur des échantillons de la poutre périodique obtenue par optimisation topologique. Ceux-ci présentent de nombreuses similitudes avec les essais réalisés pour la microstructure de pantographe classique. Le moins de facteurs possibles ont été modifiés, mis à part la microstructure, afin de pouvoir comparer autant que possible ces deux séries d'essais et les résultats obtenus. Ensuite, la méthode de caractérisation définie précédemment est appliquée afin d'identifier le comportement en extension de cette bande de pantographes. Cette section présente principalement les changements par rapport à l'étude expérimentale précédente.

IV.5.2.1 Fabrication d'échantillons

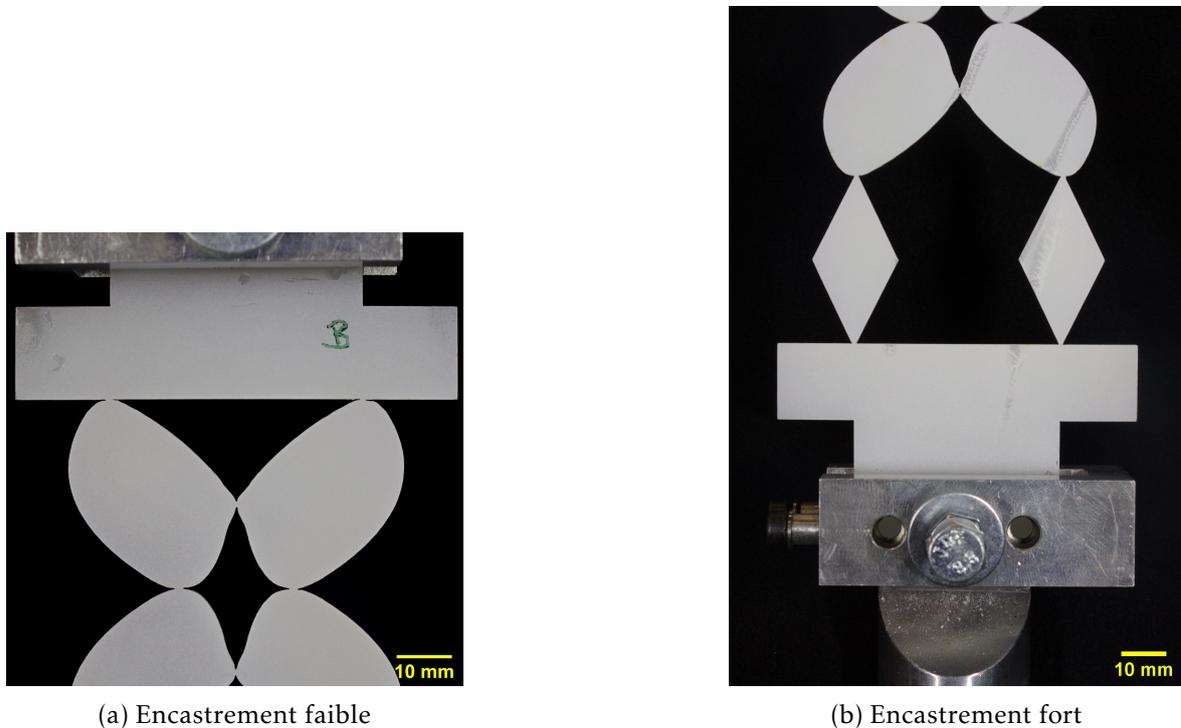


FIGURE IV.31 – Photographies des extrémités des éprouvettes dans le cas de la microstructure issue de l'optimisation topologique. Pour ces images, une peinture blanche a été appliquée sur les éprouvettes; lors des essais de traction un mouchetis de peinture est réalisé.

Les deux éprouvettes utilisées pour ces essais de traction sont fabriquées par découpe laser à partir de plaque de POM de 2 mm d'épaisseur. Les échantillons de bande périodique contiennent chacun onze cellules unitaires. Leur longueur est donc de $L = 11 \times t = 11 \times 60 = 660$ mm.

Les extrémités de ces deux éprouvettes, autour de l'échantillon de bande périodique, sont similaires à celles des éprouvettes de pantographe classique : Pour la première éprouvette, aux deux extrémités, des losanges sont utilisés pour relier l'échantillon de bande périodique à un talon, comme l'illustre la Figure IV.31a. Celle-ci sera utilisée pour l'essai à double

encastrement faible (C–C). Pour la seconde, à l’une des extrémités le bord d’une cellule unitaire est directement encasté sur le talon (c.f. Figure IV.31b). Cette éprouvette sera utilisée pour l’essai à encastrement fort d’un seul côté (S–C). Sur ces aspects, ces éprouvettes sont identiques à celles fabriquées pour la microstructure pantographique.

Géométrie réelle des jonctions Un contrôle visuel de la géométrie des éprouvettes, en particulier des jonctions, a été réalisé. Une étude quantitative à partir de photographies n’a pas été effectuée, car trop couteuse en temps. Nous constatons que la forme des jonctions coïncide bien avec la géométrie nominale. De plus, dans l’ensemble, la largeur des jonctions découpées semble relativement homogène.

La forme particulière des jonctions rend difficile la mesure de leur largeur au moyen d’un instrument de mesure mécanique (pied à coulisse). Par conséquent, nous utiliserons uniquement la géométrie nominale pour l’application du schéma d’homogénéisation, sans ajustement de la largeur des jonctions.

Utilisation d’éprouvettes doubles On observe un défaut majeur sur les échantillons découpés : ils ne sont pas plans. On constate une courbure non nulle dans la direction longitudinale. La figure IV.32a représente de manière schématique ce défaut. Ce gauchissement est dû à la découpe de la microstructure. En effet, les plaques de POM utilisées sont globalement planes.

Afin de compenser ce défaut de fabrication, on réalise les essais de traction sur des éprouvettes *doubles*. Celles-ci sont obtenues en assemblant dos à dos deux éprouvettes identiques (Figure IV.32b). Deux boulons sont installés à chaque extrémité pour les maintenir l’une contre l’autre. Toutefois, ces boulons ne sont pas complètement serrés : le léger jeu restant permet, dans une certaine mesure, à chacune des éprouvettes de s’aligner avec l’axe de traction au cours de l’essai.

IV.5.2.2 Sollicitations

Puisque la longueur de l’échantillon de poutre périodique est inchangée, on conserve la même vitesse d’essai : 1.57 mm min^{-1} .

L’enchaînement des phases de charge, décharge et maintien est inchangé. Toutefois, les seuils de force de traction sont multipliés par 2, afin de tenir compte du fait que ces éprouvettes "doubles" sont deux fois plus épaisses que celles utilisées pour la microstructure de pantographe classique. On distingue encore une Phase 1 et une Phase 2 pour les deux essais de traction. Les sollicitations imposées sont schématisées Figure IV.33.

IV.5.2.3 Mesures cinématiques

On utilise la même méthode de corrélation d’images pour mesurer un champ de déplacement \underline{u} pour plusieurs instants au cours de chaque essai. Le maillage utilisé pour la discrétisation de ce champ \underline{u} est adapté à cette nouvelle microstructure : Cette fois encore, un polygone maillé est utilisé pour représenter chaque quart de la cellule unitaire et ces

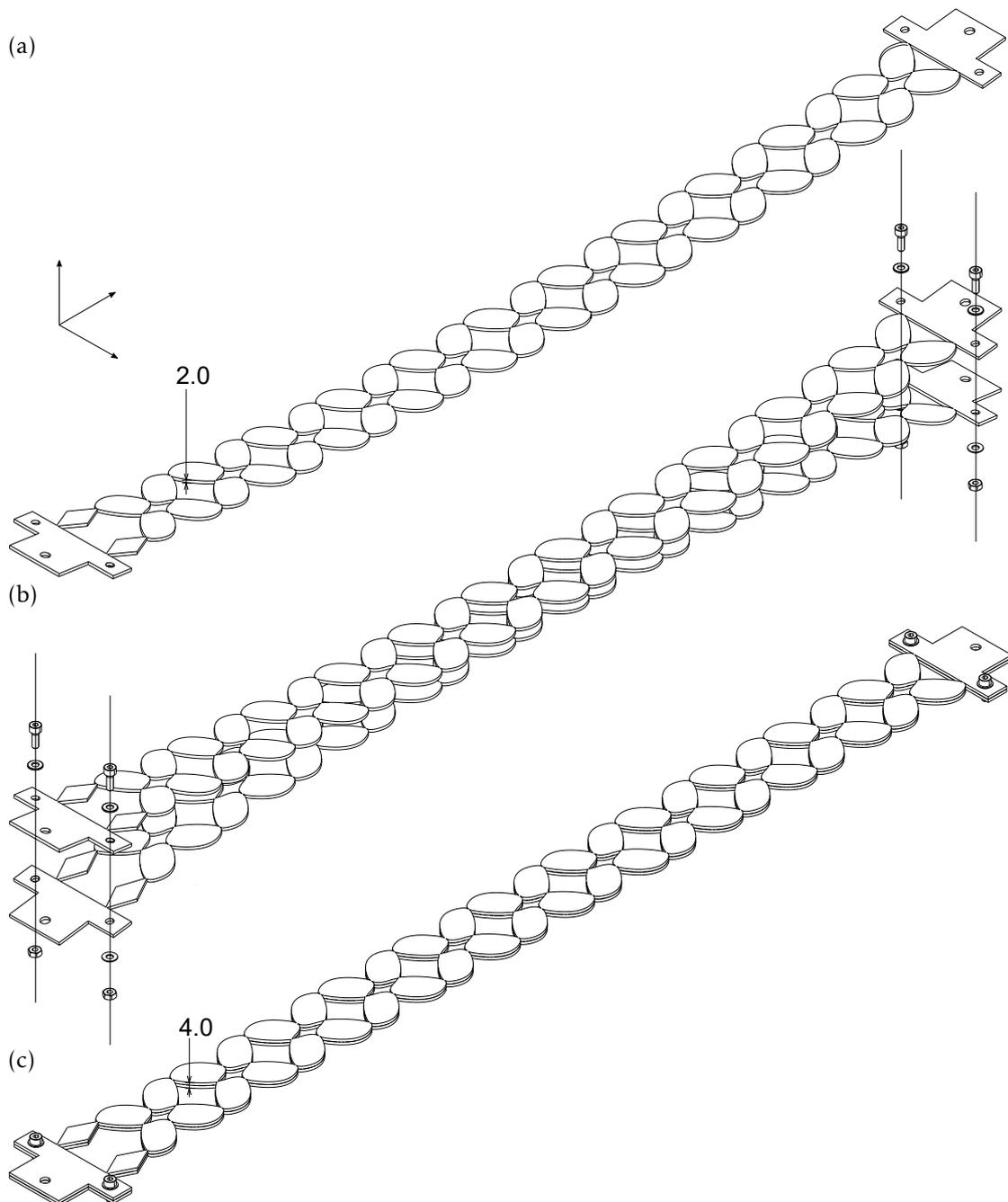


FIGURE IV.32 – Représentation schématique des échantillons de poutres périodiques fabriqués par découpe laser et utilisés pour les essais de traction (cas d'un essai S-C). (a) Gauchissement significatif observé sur les échantillons découpés pour cette microstructure. Épaisseur de chaque échantillon : 2 mm (b) Schéma de principe de l'assemblage mis en œuvre pour compenser ce défaut géométrique. (c) Éprouvette *double* obtenue et utilisée pour l'essai de traction, d'épaisseur 4 mm.

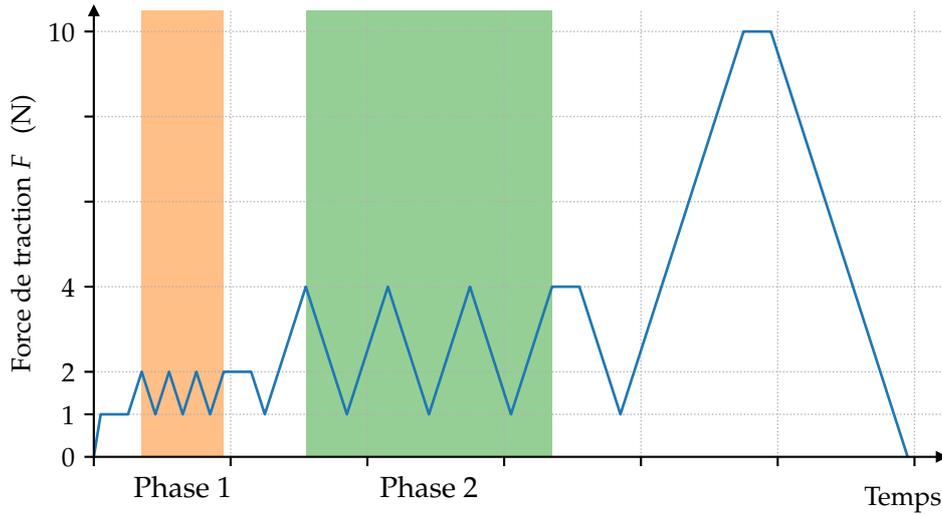


FIGURE IV.33 – Représentation schématique des sollicitations exercées au cours des deux essais de traction, dans le cas de la microstructure générée par optimisation topologique.

polygones sont reliés, au niveau de chaque jonction, seulement par un nœud commun. Le maillage utilisé pour la corrélation d'images est ajusté à la géométrie réelle de l'éprouvette, en utilisant la première image de chaque essai, en réalisant des transformations uniformes (translation, homothétie et rotation). Le maillage ajusté, dans le cas de l'essai S-C, est représenté Figure IV.34. Les maillages utilisés pour la mesure des déplacements des extrémités des éprouvettes sont similaires à ceux employés lors de l'étude précédente.

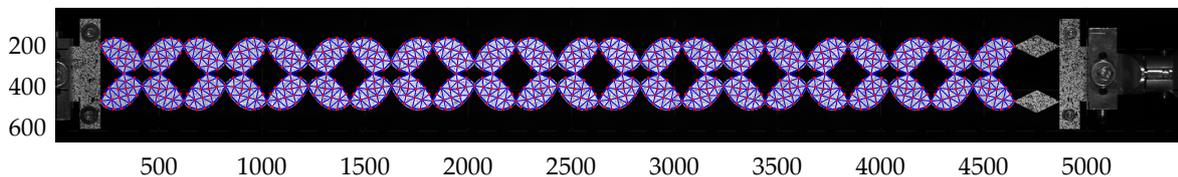


FIGURE IV.34 – ROI Ω (blanc transparent) et maillage utilisés pour la mesure du déplacement par CIN globale. Représentation sur la configuration initiale, au début de l'essai S-C.

Les valeurs des trois grandeurs cinématiques ε_L , U et E sont calculées d'une manière similaire à ce qui a été présenté précédemment.

IV.5.2.4 Caractérisation du comportement élastique en élongation

Nous appliquons maintenant la méthode développée et présentée précédemment pour estimer, à partir de deux essais de traction, les propriétés élastiques de cette bande architecturée issue d'une démarche d'optimisation topologique. Comme pour la microstructure pantographique, nous considérons deux phases des deux essais et, pour chaque phase, réalisons deux identifications des raideurs en élongation : l'une à partir des mesures de déplacement et l'autre à partir des mesures d'élongation. Nous obtenons ainsi huit estimations de la raideur en élongation de premier gradient C et quatre estimations de la raideur D relative au gradient d'élongation.

IV.5.3 Résultats

Raideur globale L'évolution de la force de traction en fonction de l'élongation mesurée au centre de l'échantillon, par corrélation d'images numérique, est représentée Figure IV.35, pour l'essai C-C et pour l'essai S-C. On observe une différence de raideur globale : l'échantillon de milieu architecturé apparaît plus raide lorsque l'on le sollicite en contraignant l'extension avec l'encastrement fort. Par ailleurs, on constate la présence de phénomènes anélastiques.

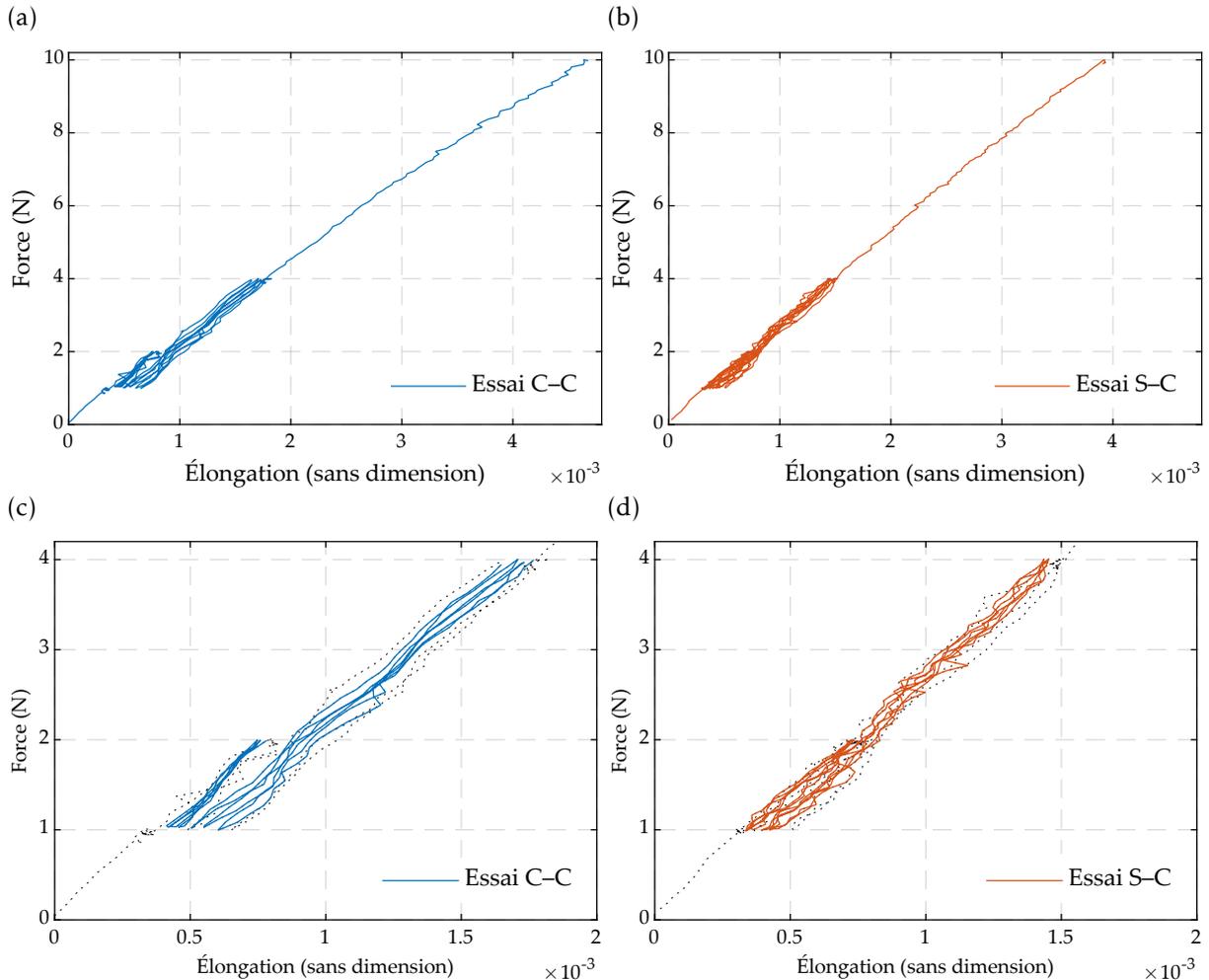


FIGURE IV.35 – Évolution de la force de traction exercée sur l'éprouvette en fonction de l'élongation $E(Y_5)$ mesurée par CIN. (a) et (b) : Courbes force-extension pour l'intégralité de l'essai C-C (a) et de l'essai S-C (b). (c) et (d) : Vues resserrées sur les phases 1 et 2 des deux essais. La courbe est en trait plein pour les phases 1 et 2, le reste de l'essai est tracé en pointillés.

Champs cinématiques macroscopiques Les deux champs macroscopiques mesurés (U et E) sont significativement affectés par la modification de la condition limite $X = 0$. La Figure IV.36a représente les mesures $U(X_j, t_k)$ en fonction de la position initiale X pour les deux essais, pour une force de traction de 2 N (temps t_{1E}) et de 4 N (temps t_{2E}). La

Figure IV.36b représente les mesures de l'extension $E(Y_j, t_k)$, également pour ces quatre configurations. On constate que cette microstructure permet bel et bien d'obtenir un comportement caractéristique d'un milieu de second gradient : une forte sensibilité au gradient d'élongation.

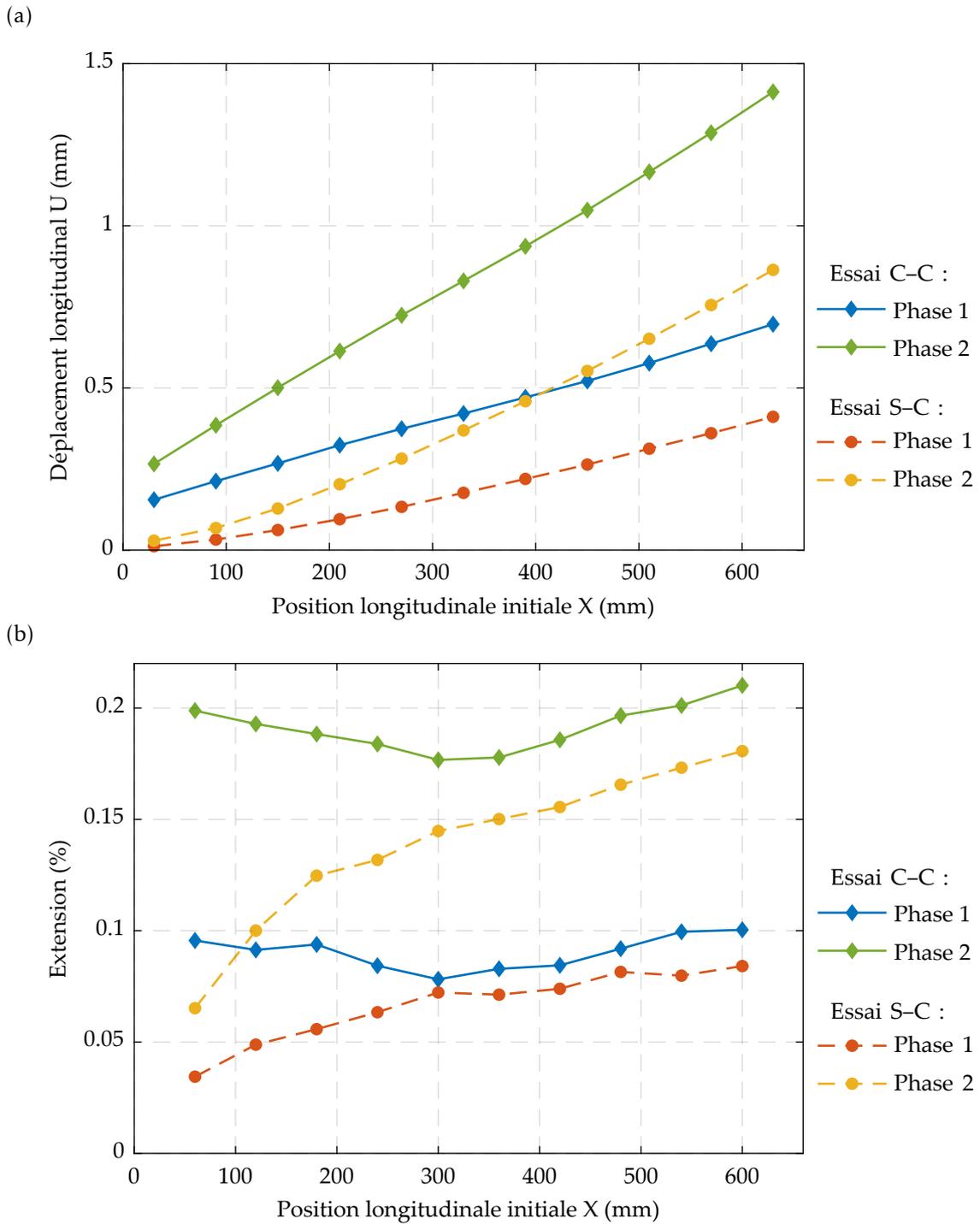


FIGURE IV.36 – Mesures du déplacement U (a) et de l’extension E (b) en fonction de la position initiale X. Les mesures sont représentées pour l’essai C-C (lignes continues) et l’essai S-C (pointillés), pour un niveau de charge de 2 N (fin de la Phase 1) et de 4 N (fin de la Phase 2).

Méthode	C (N)	D (10^6 Nmm ²)	ℓ (mm)
Essai C–C :			
Phase 1, ajustement sur U	2437 (–18 %)	–	–
Phase 1, ajustement sur E	2533 (–14 %)	–	–
Phase 2, ajustement sur U	2434 (–18 %)	–	–
Phase 2, ajustement sur E	2483 (–16 %)	–	–
Essai S–C :			
Phase 1, ajustement sur U	2591 (–12 %)	38.6 (–22 %)	122 (–6 %)
Phase 1, ajustement sur E	2468 (–17 %)	55.5 (12 %)	150 (16 %)
Phase 2, ajustement sur U	2587 (–12 %)	33.5 (–33 %)	114 (–12 %)
Phase 2, ajustement sur E	2473 (–16 %)	49.2 (–1 %)	141 (9 %)
Homogénéisation	2957	49.7	130

TABLE IV.9 – Propriétés élastiques du modèle de poutre homogène équivalente estimées à partir des deux essais de traction C–C et S–C : Raideurs en élongation de premier et de second gradients (C, D) et longueur caractéristique des effets de second gradient (ℓ). L'écart relatif par rapport aux valeurs prévues par homogénéisation est indiqué entre parenthèses.

Raideurs estimées Le tableau IV.9 présente les raideurs estimées à partir des deux essais et pour les deux phases de chargement.

Les différentes estimations de la raideur C sont relativement proches. On constate un écart sensible avec la prévision de l'homogénéisation. Cela peut s'expliquer par le fait que le calcul d'homogénéisation est fait en considérant la géométrie nominale de la microstructure. Or nous savons que les jonctions obtenues par découpe laser sont forcément plus fines que les jonctions de la géométrie nominale et que cet amincissement se traduit forcément par une chute de la raideur en extension C.

On constate que les estimations de la longueur caractéristique des effets de second sont relativement proches de la prévision de second gradient. On en déduit que le comportement de second gradient est relativement bien prédit par l'homogénéisation. Cela signifie également que la méthode de caractérisation proposée est efficace pour mesurer l'amplitude de la sensibilité au gradient d'extension obtenue avec une certaine microstructure.

IV.6 Conclusion et perspectives

Le procédé de fabrication proposé permet d'obtenir des échantillons de microstructure de pantographe avec des jonctions fines par rapport à la taille de la cellule et une assez grande séparation d'échelle. Des écarts à la géométrie nominale ont été constatés sur les échantillons fabriqués. Nous les avons qualifiés et les résultats obtenus montrent qu'ils n'empêchent pas l'établissement du mode mou et la manifestation de l'effet élastique de second gradient.

Les deux essais de traction réalisés sur des échantillons de bande de pantographes permettent de mettre en évidence une différence nette de comportement macroscopique,

induite par le blocage de l'élongation à l'une des extrémités. Nous proposons d'utiliser un modèle de poutre homogène au comportement élastique linéaire de second gradient pour représenter le comportement en extension de cette bande de pantographes. Ce modèle, issu d'une démarche d'homogénéisation, permet d'expliquer la différence de comportement observé lors des essais. Il est valide au moins pour des sollicitations comparables aux phases 1 et 2 des essais : c'est-à-dire des charges et des décharges, après une première charge de mise en place, pour un effort de traction inférieur à 2 N, avec une vitesse de déformation relativement faible.

Une méthode a été proposée pour la mesure des raideurs effectives relatives à l'élongation et au gradient d'élongation (C et D) à partir de ces deux essais de traction et a été mise en œuvre pour la bande pantographique. Les différentes estimations, réalisées pour les deux phases des deux essais, aboutissent à des valeurs similaires pour les raideurs C et D. Par conséquent, il est possible d'utiliser un seul couple de raideurs (C, D), c'est-à-dire un comportement macroscopique unique, pour décrire de manière satisfaisante le comportement élastique de la bande pantographique.

La prévision du schéma d'homogénéisation a été comparée aux propriétés élastiques mesurées. Cette comparaison à des données expérimentales confirme le caractère prédictif du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur. Toutefois, il est indispensable de prendre en compte un minimum l'écart entre la géométrie nominale et la géométrie réelle des bandes de pantographes découpées. Utiliser la largeur de jonctions moyenne, mesurée sur un échantillon, lors du calcul d'homogénéisation suffit pour obtenir une prévision satisfaisante.

Dans un second temps, tout ce processus expérimental a été mis en œuvre pour une autre microstructure issue d'une démarche d'optimisation topologique. Celle-ci a été conçue de sorte à présenter un effet de second gradient particulier : une forte sensibilité au gradient d'élongation.

Les principaux résultats de cette étude expérimentale sont les suivants :

- En pratique, les échantillons de bande architecturée fabriqués avec cette microstructure donnent effectivement lieu à des effets de second gradient. Cela illustre la pertinence de cette démarche d'optimisation topologique, réalisée dans le contexte des petites perturbations : il est possible d'obtenir une microstructure qui est fabricable et qui engendre, en pratique, l'effet élastique de second gradient recherché.
- La méthode expérimentale proposée pour la mise en évidence la sensibilité au gradient d'élongation et la mesure des raideurs effectives a été utilisée avec succès pour une autre microstructure.
- Les raideurs effectives et la longueur intrinsèque prévues à l'aide du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur sont relativement proches des propriétés élastiques mesurées lors de ces essais. Ces écarts peuvent entre autres s'expliquer par l'utilisation de la géométrie nominale pour l'homogénéisation, sans prise en compte de la taille réelle des jonctions. Cette confrontation à des mesures expérimentales confirme la

validité de la prévision du schéma d'homogénéisation pour cette microstructure dotée de jonctions aux formes particulières.

- À largeur de jonction comparable, nous obtenons une longueur intrinsèque ℓ plus grande avec cette microstructure issue de l'optimisation topologique qu'avec la microstructure pantographique ; l'écart relatif est de 24 % (c.f. Tableau IV.8). Simultanément, la raideur de premier gradient C est nettement plus grande (322 %) ; le comportement de premier gradient est donc moins dégénéré que dans le cas de la microstructure pantographique alors que, en général, on essaie de faire baisser les raideurs de premier gradient pour que les longueurs intrinsèques soient plus grandes.

Enfin, il est important de noter qu'une microstructure à fines jonctions émerge naturellement de la procédure d'optimisation topologique. Même s'il est vrai que ces jonctions sont d'une forme différente de celle utilisée pour la microstructure pantographique, cela corrobore l'idée que des microstructures contenant de fines jonctions et des vides sont un choix judicieux pour obtenir un comportement élastique de second gradient.

Les travaux présentés dans ce chapitre soulèvent également des questions dont, en particulier : la possibilité de caractériser des microstructures pour lesquelles il n'est pas possible d'isoler une bande et la possibilité de généraliser cette méthode pour d'autres gradients de déformation.

Chapitre V

Conclusion générale

V.1 Conclusion

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit nous ont permis d'évaluer la possibilité d'obtenir des effets de second gradient marqués, en statique, avec une famille de matériaux architecturés dotés de microstructures planes comportant de fines jonctions.

Tout d'abord, un schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur a été proposé, implémenté dans un outil numérique puis validé à l'aide d'une série de comparaisons à des calculs complets par éléments finis. Dans ce schéma d'homogénéisation la microstructure est décrite comme un milieu continu classique. Il peut donc être appliqué à une large gamme de microstructures et, en particulier, être utilisé dans des procédures d'optimisation topologique. La démarche proposée permet de détecter la capacité d'une microstructure à engendrer des effets de second gradient visibles à l'échelle macroscopique, pour certaines sollicitations statiques. Cette démarche permet également, dans un tel cas, de construire un milieu homogène élastique de second gradient. Afin que seules les contributions de second gradient qui ont du sens à l'échelle macroscopique soient prises en compte dans ce modèle, nous proposons d'effectuer une projection des tenseurs d'élasticité d'ordre supérieur.

Nous avons mis en œuvre cette approche pour trois microstructures d'une même famille ; la microstructure pantographique dans le chapitre II puis les microstructures *carrés auxétiques* et *triangles auxétiques* dans le chapitre III. Des études numériques paramétriques ont été menées. Nous avons prévu, à l'aide du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur, des effets de second gradients marqués pour deux de ces microstructures : la microstructure pantographique et la microstructure *carrés auxétiques*. Dans ces cas-là, la finesse des jonctions est un levier efficace pour obtenir des longueurs intrinsèques grandes par rapport à la taille de la cellule. Pour la microstructure *triangles auxétiques*, nous ne prévoyons pas d'effets de second gradient malgré la présence d'un mode mou de premier gradient. Ces effets sont absents à cause du couplage entre les modes raides de premier gradient et les modes de second gradient.

L'étude de la microstructure *triangles auxétiques* nous a permis de comprendre l'importance des modes raides dans le cas d'une microstructure non centro-symétrique. En effet, il

est indispensable de les prendre en compte pour ne pas surestimer les raideurs effectives de second gradient. Le découplage entre les modes de premier gradient et ceux de second gradient n'est pas garanti pour une microstructure non centro-symétrique. Par conséquent, les modes raides de premier gradient ne doivent pas être écartés avant une analyse complète des modes propres généralisés de déformation.

Nous avons vérifié, dans le chapitre IV, la possibilité d'obtenir en pratique un comportement élastique de second gradient avec une telle microstructure. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser une bande pantographique extraite de la microstructure étudiée dans le chapitre II et nous nous sommes intéressés à sa sensibilité au gradient d'élongation. Nous avons conçu deux essais de traction, avec des conditions aux limites adaptées, et une méthode de mesure des raideurs effectives. Les échantillons sont fabriqués par découpe laser ; cela permet d'obtenir des jonctions relativement fines par rapport à la taille de la cellule et un nombre important de cellules dans l'échantillon. Nous avons mis en évidence un comportement élastique non standard, qui peut être bien représenté avec un modèle élastique de second gradient à l'échelle macroscopique. Par ailleurs, les raideurs prévues par homogénéisation ont été comparées à celles mesurées. Nous avons ainsi vérifié le caractère prédictif du schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur. Nous avons enfin appliqué cette méthode expérimentale au cas d'une structure obtenue par optimisation topologique ; l'effet de second gradient demandé lors de la conception de cette microstructure a été effectivement observé lors des essais.

V.2 Perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit permettent de répondre aux objectifs fixés. Néanmoins, cette étude a été réalisée dans un cadre bien défini et plusieurs problématiques restent à explorer. Tout d'abord, d'un point de vue académique, les hypothèses mécaniques utilisées pourraient être étendues. L'étude de ces microstructures en grandes transformations est un axe de recherche pertinent. Un modèle homogénéisé valable en grandes transformations serait entre autres approprié pour la microstructure *carrés auxétiques*. Par ailleurs, nous avons vu que la prévision obtenue avec l'hypothèse des petites perturbations permet de représenter le comportement élastique observé lors de ces essais expérimentaux. Cependant, cela ne permet pas de prévoir les déformations anélastiques, inéluctables, si l'on sollicite la microstructure dans une plus large gamme de chargement. Une possibilité pour obtenir un modèle plus précis serait d'enrichir le comportement utilisé pour le matériau constitutif en tenant compte par exemple de phénomènes visqueux ou plastiques.

La seconde perspective proposée est le développement, sur un principe similaire, d'un schéma d'homogénéisation permettant de construire un modèle homogénéisé basé sur un milieu généralisé d'ordre supérieur (milieu micromorphe [d'Agostino *et al.*, 2020; Seppecher et Jakabčín, 2021; Biswas *et al.*, 2019] ou milieu de Cosserat [Duan *et al.*, 2018; Hütter, 2019]). Cela permettrait d'explorer d'autres comportements élastiques non standards. Un tel modèle serait également pertinent pour représenter le comportement de certaines microstructures

pour lesquelles un mode mou existe mais n'est associé ni à une déformation macroscopique ni à un déplacement macroscopique.

Enfin, force est de constater que, malgré les efforts déployés, il est difficile d'obtenir en pratique des effets de second gradient très visibles à l'échelle macroscopique avec cette famille de microstructures planes. En employant les moyens de fabrication actuellement disponibles, nous n'avons pas pu obtenir une longueur caractéristique plus grande que quelques cellules pour un échantillon contenant plus d'une dizaine de cellule. Nous proposons d'élargir l'espace de conception pour identifier des matériaux architecturés qui donnent lieu à des effets de second gradient plus marqués. Une famille de microstructure semble particulièrement intéressante : les plaques architecturées inspirées d'origami [Bertoldi *et al.*, 2017; Nassar *et al.*, 2017; Dang *et al.*, 2022]. Ces microstructures à plis présentent également un avantage en termes de facilité de fabrication. L'étude de telles microstructures requiert un travail numérique pour adapter le schéma d'homogénéisation à ce nouveau cadre de travail. Le code informatique du package HO-homog [Durand et Lebée, 2020] a été écrit de sorte à faciliter cette extension.

À un horizon plus lointain, il s'agirait d'identifier des applications pour de tels métamatériaux qui présentent un comportement élastique de milieu généralisé. Gageons que le monde industriel s'approprie ces travaux de recherche et que l'imagination créative des concepteurs trouvera des applications à ces métamatériaux.

Annexe A

Notations et conventions tensorielles

L'espace physique dans lequel sont les solides élastiques considérés est représenté par un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Un repère cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est utilisé ; $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ forment une base orthonormée directe. Lorsqu'on étudie des problèmes plans, ceux-ci sont définis dans le plan contenant les directions 1 et 2 et le repère cartésien utilisé est $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Les composantes des tenseurs sont toujours exprimées dans des base orthonormées directes.

Notations

Les grandeurs sont représentées en utilisant les conventions suivantes :

- Les scalaires sont représentés par des caractères non gras (η, ρ, \dots);
- les vecteurs sont soulignés ($\underline{x}, \underline{u}, \dots$);
- les tenseurs d'ordre supérieur ou égal à 2 sont simplement en gras : ($\sigma, \mathbf{E}, \mathbf{C}, \dots$).

Lorsque les équations sont écrites en composantes, des indices grecs ($\alpha, \beta, \dots = 1, 2$) sont utilisés pour les tenseurs définis dans le plan. Nous utilisons dans tout le manuscrit, sauf mention contraire, la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon.

Opérations tensorielles

Transposition L'opération de transposition $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^\top$, pour un tenseur \mathbf{A} d'ordre quelconque, est définie par :

$$(\mathbf{A}^\top)_{ij\dots pq} = A_{qp\dots ji}$$

Produit contracté Nous notons \cdot le produit contracté, $:$ le produit doublement contracté, $;$ le produit triplement contracté et $;$ le produit contracté quatre fois. La convention adoptée correspond à des sommations successives sur les indices les plus proches de l'opérateur.

Par exemple, pour un tenseur \mathbf{A} d'ordre 4 et un tenseur \mathbf{B} d'ordre 2 :

$$(\mathbf{A} : \mathbf{B})_{ij} = A_{ijkl} B_{lk}$$

La norme d'un tenseur \mathbf{A} est définie par :

$$\|\mathbf{A}\| = \left(A_{ij\dots pq} A_{ij\dots kl} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous notons $\|\mathbf{A}\|_2$ la norme L^2 d'un champ de tenseur \mathbf{A} défini sur un domaine Ω . Si \mathbf{B} est un champ vectoriel \mathbf{B} et \mathbf{C} un champ de tenseur d'ordre 2, leurs normes L^2 sont définies par :

$$\|\mathbf{B}\|_2 = \left(\int_{\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{C}\|_2 = \left(\int_{\Omega} \mathbf{C}^T : \mathbf{C} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.1})$$

Opérateurs de dérivation

L'opérateur de dérivation est noté ∇ . Si nécessaire, le système de coordonnées par rapport auquel la dérivée est calculée est indiqué en indice : $\nabla_{\mathbf{x}}$, $\nabla_{\mathbf{y}}$ ou $\nabla_{\mathbf{Y}}$.

- En notation indicielle, la dérivée partielle d'un champ scalaire V par rapport aux coordonnées \mathbf{x} est notée $\partial_{x_i} V$ ou, plus simplement, $V_{,i}$;
- Le gradient d'un champ de tenseur \mathbf{T} , d'ordre quelconque, par rapport aux coordonnées \mathbf{x} est noté $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{T}$;
- Pour un champ vectoriel \mathbf{v} , nous notons $\nabla^s \mathbf{v}$ la partie symétrique du gradient. En notation indicielle, cela donne :

$$\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} v_j) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

- L'opérateur divergence est noté \mathbf{div} . La divergence d'un champ de tenseur \mathbf{T} d'ordre 2 est définie par :

$$\left(\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \right)_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = T_{ij,j}$$

Représentation matricielle

Par comodité, nous utilisons dans certains cas une représentation matricielle des tenseurs d'élasticité et une représentation vectorielle des mesures de déformation et des contraintes. Nous définissons ces notations dans le cadre de l'élasticité plane.

Les représentations vectorielles d'un tenseur \mathbf{E} d'ordre 2 symétrique et d'un tenseur \mathbf{K} d'ordre 3, tel que $K_{ijk} = K_{jik}$, sont définies par :

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \sqrt{2} E_{12} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{111} \\ K_{221} \\ \sqrt{2} K_{121} \\ K_{112} \\ K_{222} \\ \sqrt{2} K_{122} \end{bmatrix}$$

Les règles d'écriture sous forme vectorielle ou matricielle pour des tenseurs d'ordre supérieur à 3 sont choisies de façon à être cohérente avec les deux règles présentées ci-dessus.

En particulier, avec ces conventions, les représentations matricielles des tenseurs d'élasticité du premier ordre \mathbf{C} et du second ordre \mathbf{D} sont :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \text{Sym.} & & 2C_{1212}^{\text{hom}} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{111111} & D_{111122} & \sqrt{2}D_{111121} & D_{111211} & D_{111222} & \sqrt{2}D_{111221} \\ & D_{221122} & \sqrt{2}D_{221121} & D_{221211} & D_{221222} & \sqrt{2}D_{221221} \\ & & 2D_{121121} & \sqrt{2}D_{121211} & \sqrt{2}D_{121222} & 2D_{121221} \\ & & & D_{112211} & D_{112222} & \sqrt{2}D_{112221} \\ & \text{Sym.} & & & D_{222222} & \sqrt{2}D_{222221} \\ & & & & & 2D_{122221} \end{bmatrix}$$

Ces conventions d'écriture matricielle sont utilisées dans le package Python HO_homog [Durand et Lebée, 2020] et, sauf indication contraire, dans ce manuscrit.

Annexe B

Illustrations complémentaires pour la microstructure *triangles auxétiques*

B.1 Sollicitations de premier gradient dans une configuration kagome

En complément des illustrations proposées dans le corps de texte pour un angle d'ouverture de $\theta = 10.5^\circ$, les champs de déplacement et de déformation générés par les sollicitations de déformation macroscopique uniforme \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 et \mathbf{E}^3 sont ici présentés dans le cas de la configuration kagome ($\theta = 60^\circ$). La finesse de jonctions ρ est de 0.1.

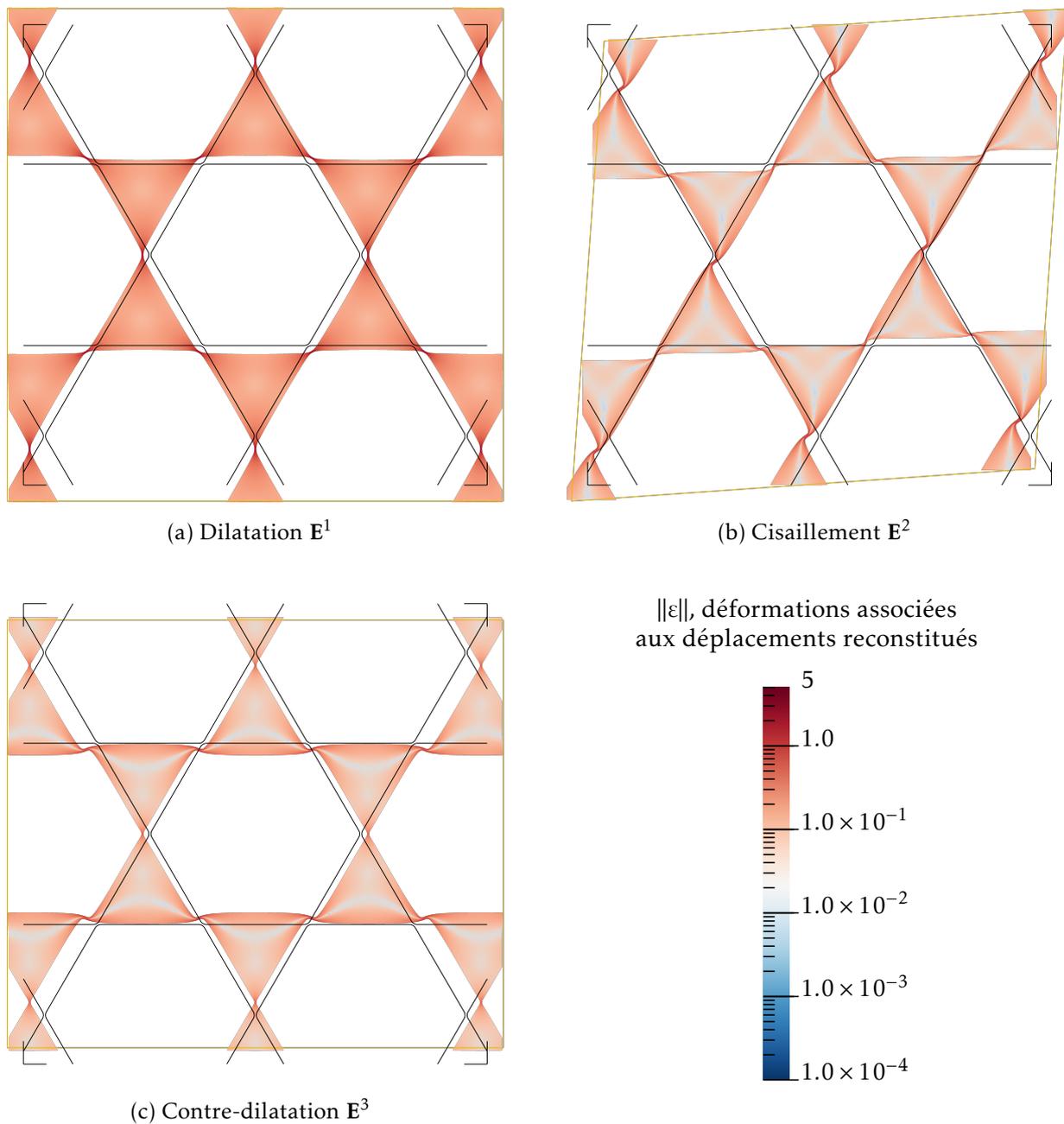
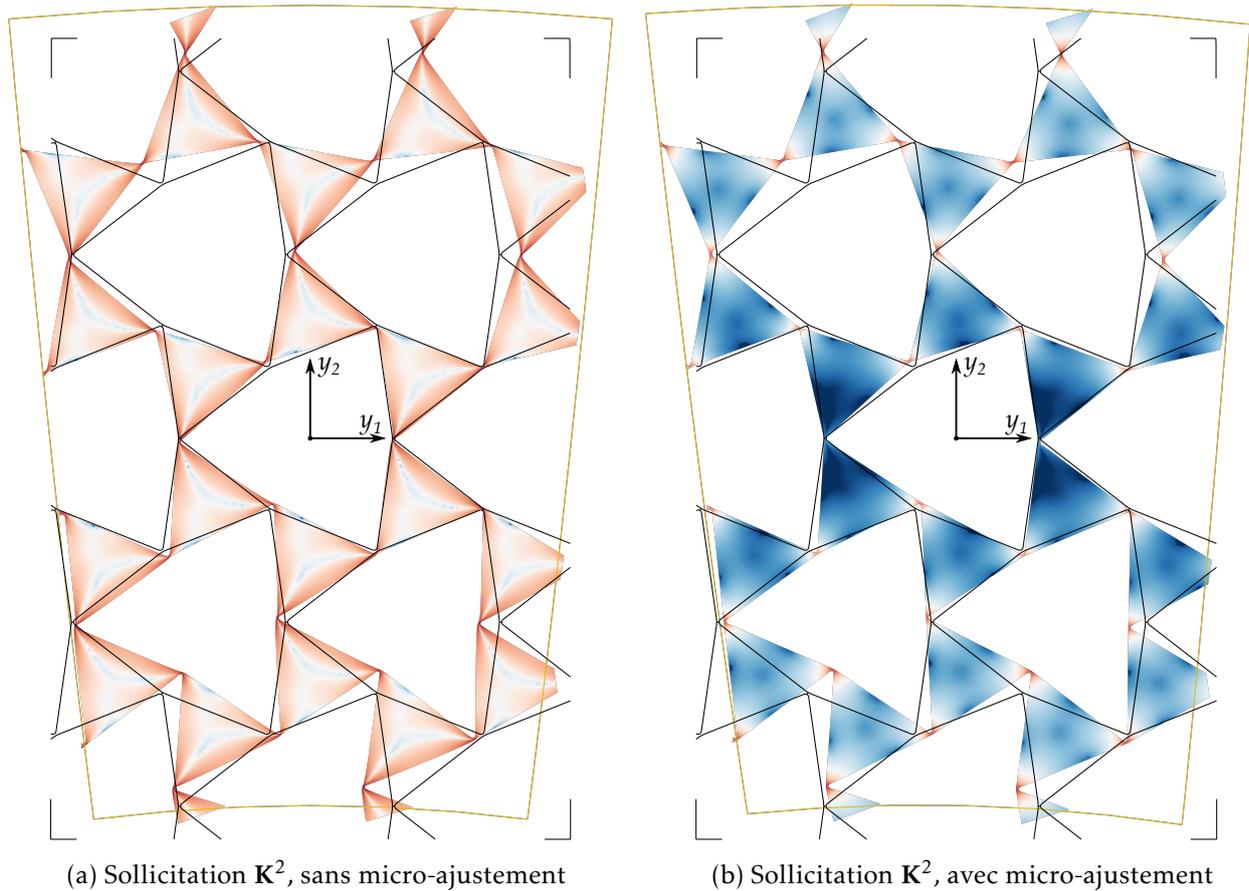


FIGURE B.1 – Déformation d’un échantillon de la microstructure *triangles auxétiques*, en configuration kagome, pour trois sollicitations macroscopiques élémentaires de premier gradient. Les déplacements sont réduits d’un facteur 0.1 pour l’illustration.

B.2 Micro-ajustement dans le cas d'un gradient de dilatation \mathbf{K}^2

Paramètres utilisés pour l'illustration :

- Paramètres géométriques de la microstructure : $\rho = 0.01$ et $\theta = 38^\circ$;
- Facteur de réduction des déplacements pour la représentation des configurations déformées : 0.05.



$\|\varepsilon\|$, déformation du déplacement reconstitué

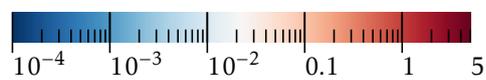


FIGURE B.2 – Déformée et champ de déformation induits, à l'échelle de la microstructure, par deux états de déformation macroscopiques correspondant à un gradient de dilatation \mathbf{K}^2 .

Annexe C

Construction du modèle du milieu de second gradient élastique linéaire

Nous proposons, dans cette partie, une construction d'un modèle de milieu de second gradient, au comportement élastique linéaire, à partir du principe du minimum de l'énergie potentielle. Nous traitons le cas où il n'y a pas de couplage entre les effets élastiques de premier gradient et ceux de second gradient, dans le contexte des petites perturbations et en conditions isothermes.

Divergence surfacique Pour mener à bien cette construction, nous introduisons un opérateur de divergence surfacique. Soit une surface Σ , suffisamment régulière, pouvant être décrite par une paramétrisation $(\omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbf{p})$ dont les paramètres sont notés (ξ_1, ξ_2) . Soient $\underline{\mathbf{a}}_1$ et $\underline{\mathbf{a}}_2$ deux vecteurs tangents en un point de Σ définis par : $\underline{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi_\alpha}$. Pour un champ de tenseur \mathbf{B} d'ordre 2, la divergence surfacique sur Σ , notée $\text{div}_\Sigma(\mathbf{B})$, est le champ de tenseur d'ordre 1 défini sur Σ qui est tel que :

$$\text{div}_\Sigma(\mathbf{B}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\sqrt{a} \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{a}}_\alpha^* \right) \quad (\text{C.1})$$

avec $(\underline{\mathbf{a}}_1^*, \underline{\mathbf{a}}_2^*)$ la base duale à $(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2)$ et $a = \det \left((a_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \{1, 2\}} \right)$ où $a_{\alpha\beta} = \underline{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}_\beta$. $\text{div}_\Sigma(\mathbf{B})$ est indépendant de la paramétrisation choisie.

C.1 Construction du modèle du milieu de second gradient

On considère un domaine matériel volumique Ω délimité par sa frontière $\partial\Omega$. On suppose que la surface $\partial\Omega$ est deux fois continûment différentiable, afin de simplifier la construction du modèle, comme cela est suggéré dans [Forest, 2006]. L'existence de courbes et de points singuliers sur $\partial\Omega$, correspondant à des arêtes et des sommets, peut être prise en compte dans la construction du modèle du milieu de second gradient. Ce cas plus général est traité, par exemple, dans [Germain, 1973b]. La surface $\partial\Omega$ est décomposée en deux parties

complémentaires :

$$\partial\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^f$$

Des conditions limites cinématiques sont imposées sur $\partial\Omega^u$ et des efforts surfaciques sont exercés sur $\partial\Omega^f$.

Les degrés de liberté du modèle du milieu de second gradient sont les déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, comme dans la théorie des milieux continus de Cauchy. Le tenseur des déformations linéarisées ε est une première mesure de déformation utilisée. C'est le tenseur d'ordre 2 symétrique donné par :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{soit :} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

L'expression de la densité volumique d'énergie élastique de déformation est enrichie en prenant en compte une seconde mesure de l'état de déformation du milieu : le gradient de déformation, noté κ . Ce tenseur d'ordre 3 est défini par :

$$\kappa(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{soit :} \quad \kappa_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$$

Principe du minimum de l'énergie potentielle: *Le champ de déplacements \mathbf{u} solution du problème d'élasticité défini sur le domaine volumique Ω est tel que :*

$$\mathbf{u} = \underset{\hat{\mathbf{u}} \in \text{CA}}{\text{argmin}} \left\{ \mathcal{P}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} w(\hat{\varepsilon}, \hat{\kappa}, \mathbf{y}) \, d\Omega - \int_{\Omega} w_V^e(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{y}) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega^f} w_S^e(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{y}) \, dS \right\}$$

où :

$w(\hat{\varepsilon}, \hat{\kappa}, \mathbf{y})$ est la densité volumique d'énergie élastique de déformation ;

$w_V^e(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{y})$ est le travail virtuel des efforts extérieurs volumiques dans le champ de déplacements virtuel $\hat{\mathbf{u}}$;

$w_S^e(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{y})$ est le travail virtuel des efforts extérieurs surfaciques ;

CA est l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles.

Pour le milieu de second gradient, l'ensemble CA des champs de déplacements cinématiquement admissibles est :

$$\text{CA} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^2(\Omega) \text{ tels que : } \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial\Omega^u \text{ et } (\mathbf{u} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{n} = \underline{\varphi}^d \text{ sur } \partial\Omega^u \right\} \quad (\text{C.2})$$

On note CA^0 l'espace vectoriel associé :

$$\text{CA}^0 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^2(\Omega) \text{ tel que : } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega^u \text{ et } (\mathbf{u} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega^u \right\} \quad (\text{C.3})$$

Il correspond à l'espace des champs de déplacements virtuels.

$\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^2(\Omega)$ signifie que \mathbf{u} est un champ au moins deux fois continument différentiable par morceaux sur le domaine Ω .

La stationnarité de la fonctionnelle de l'énergie potentielle \mathcal{P} en \mathbf{u} impose :

$$\mathcal{P}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) - \mathcal{P}(\mathbf{u}) = 0 + o(\delta\mathbf{u}) \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \text{CA}^0 \quad (\text{C.4})$$

Soit, en notant $\mathcal{D}(\delta \underline{\mathbf{u}})$ la partie linéaire en $\delta \underline{\mathbf{u}}$ de la différence :

$$\mathcal{D}(\delta \underline{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \quad (\text{C.5})$$

On choisit d'exprimer la densité volumique d'énergie élastique de déformation sous la forme :

$$\begin{aligned} w(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \underline{\boldsymbol{y}}) &= \frac{1}{2} (\text{}^T \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \text{}^T \underline{\boldsymbol{\kappa}} : \mathbf{D} : \underline{\boldsymbol{\kappa}}) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{lk} + \kappa_{ijk} D_{ijklmn} \kappa_{nml}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où \mathbf{C} est le *tenseur d'élasticité du premier ordre*, semblable à celui utilisé dans le modèle de Cauchy, et \mathbf{D} est un second tenseur caractéristique du comportement du matériau, d'ordre 6, appelé *tenseur d'élasticité du second ordre*. Le gradient des déformations $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ est ainsi introduit dans la loi de comportement du modèle de second gradient. On peut noter que le choix d'une expression de cette densité d'énergie est analogue au choix de la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs qui doit être fait lors de la construction d'un modèle mécanique par la méthode des puissances virtuelles.

Une interprétation mécanique de l'intervention de $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ dans l'expression de l'énergie élastique de déformation est la suivante : une certaine régularité de l'état de déformation est exigée par le matériau. Des variations rapides du champ de déformations $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans Ω provoquent une frustration du matériau et il y a maintenant un prix énergétique à payer pour les obtenir. Une analyse dimensionnelle met en évidence l'existence d'une famille de longueurs caractéristiques intrinsèques au matériau modélisé par un milieu de second gradient, définies par :

$$\ell^{ijk} = \sqrt{\frac{D_{ijkkji}}{C_{ijji}}} \quad (\text{C.7})$$

sans sommation sur les indices.

Pour un mode de déformation donné, plus la longueur caractéristique correspondante est grande, plus les effets de second gradient sont susceptibles d'être importants par rapport au comportement de Cauchy. Ces longueurs caractéristiques internes constituent une base de comparaison pour déterminer si un état de déformation entraîne des effets de second gradient significatifs dans le milieu matériel. En effet, une variation du champ de déformations $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ peut être qualifiée de rapide lorsqu'une composante du gradient du champ de déformations est grande par rapport à l'inverse de la longueur caractéristique du matériau correspondant à ce mode de déformation.

Nous faisons l'hypothèse d'un matériau présentant une centro-symétrie afin d'assurer le découplage entre les deux mesures de l'état de déformation $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$. Les grandeurs duales des déformations linéarisées $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et du gradient des déformations $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ sont le tenseur des contraintes $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et le tenseur dit des *hyper-contraintes* $\underline{\boldsymbol{\pi}}$. $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\boldsymbol{\pi}}$ sont respectivement des tenseurs d'ordre 2 et 3 et sont définis par la loi de comportement du milieu de second gradient :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}}) \quad \text{soit : } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{lk} \quad (\text{C.8})$$

$$\boldsymbol{\pi}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{D}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\kappa}(\underline{\mathbf{x}}) \quad \text{soit : } \pi_{ijk} = D_{ijklmn} \kappa_{nml} \quad (\text{C.9})$$

Par ailleurs, nous définissons le travail virtuel des efforts volumiques à partir des forces de volume $\underline{\mathbf{f}}$ et des *doubles forces* de volume \mathbf{g} représentées par un tenseur d'ordre 2 symétrique :

$$\int_{\Omega} w_V^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + g_{ij} \delta \varepsilon_{ji}) d\Omega \quad (\text{C.10})$$

Notons que d'autres efforts volumiques, en dualité avec d'autres grandeurs cinématiques, pourraient être introduits dans le modèle.

Comme le travail de l'effort volumique \mathbf{g} est exprimé par une double contraction avec un tenseur symétrique (ε) nous faisons l'hypothèse que \mathbf{g} est un tenseur symétrique. En effet, sa partie antisymétrique ne travaillerait pas. De plus, nous supposons que le champ \mathbf{g} est suffisamment régulier sur Ω pour les opérations de dérivations effectuées. Le champ \mathbf{g} peut aussi être interprété comme une distribution de précontraintes.

Le développement de $\mathcal{D}(\delta \underline{\mathbf{u}})$ donne :

$$\int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \delta \varepsilon_{lk} + \kappa_{ijk} D_{ijklmn} \delta \kappa_{nml}) d\Omega - \int_{\Omega} w_V^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\partial\Omega^f} w_S^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) dS = 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0$$

Soit :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \pi_{ijk} \delta \kappa_{ijk} - (f_i \delta u_i + g_{ij} \delta \varepsilon_{ij})) d\Omega - \int_{\partial\Omega^f} w_S^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) dS = 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \quad (\text{C.11})$$

L'intégration par partie du second terme de la puissance virtuelle des efforts intérieurs permet de réduire l'ordre de dérivation de $\delta \underline{\mathbf{u}}$ et donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \pi_{ijk} \delta \kappa_{ijk} d\Omega &= \int_{\Omega} \pi_{ijk} (\delta \varepsilon_{ij})_{,k} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} -\pi_{ijk,k} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \pi_{ijk} n_k \delta \varepsilon_{ij} dS \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

où $\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}})$ est le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$ en tout point $\underline{\mathbf{x}}$ de cette surface.

Grâce à la symétrie de \mathbf{D} , $\boldsymbol{\pi}$ est symétrique par rapport aux deux premiers indices. Par conséquent, $\delta \varepsilon_{ij}$ est assimilable à $\delta u_{i,j}$ dans l'expression précédente. De plus, on décompose $\delta u_{i,j}$ en une composante normale et deux composantes tangentielles sur $\partial\Omega$.

Étant donné l'hypothèse de régularité de la surface $\partial\Omega$, elle peut être décrite par une paramétrisation à deux paramètres (ξ_1, ξ_2) :

$$\begin{aligned} \text{Surface } \partial\Omega \text{ paramétrée par : } \underline{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_\alpha) \mapsto \underline{\mathbf{p}}(\xi_\alpha) \end{aligned}$$

La surface $\partial\Omega$ admet donc en tout point deux vecteurs tangents $\underline{\mathbf{a}}_1$ et $\underline{\mathbf{a}}_2$:

$$\underline{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\partial \underline{\mathbf{p}}}{\partial \xi_\alpha} = a_{\alpha j} \underline{\mathbf{e}}_j$$

et un vecteur normal, indépendant de la paramétrisation choisie, défini par :

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\underline{\mathbf{a}}_1 \wedge \underline{\mathbf{a}}_2}{\|\underline{\mathbf{a}}_1 \wedge \underline{\mathbf{a}}_2\|}$$

$(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{n}})$ forme une base de l'espace physique tridimensionnel auquel Ω appartient et on note $(\underline{\mathbf{a}}_1^*, \underline{\mathbf{a}}_2^*, \underline{\mathbf{n}})$ la base duale.

Ainsi, on peut décomposer le gradient de $\delta \underline{\mathbf{u}}$ sur $\partial\Omega$:

$$\delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{V}}_x = (\delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{V}}_x \cdot \underline{\mathbf{n}}) \otimes \underline{\mathbf{n}} + \frac{\partial \delta \underline{\mathbf{u}}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \underline{\mathbf{a}}_\alpha^* \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{C.13})$$

Soit, en écriture indicielle :

$$\delta u_{i,j} = \delta u_{i,n} n_j + \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_\alpha} a_{\alpha j}^* \quad (\text{C.14})$$

en notant

$$\delta u_{i,n} = \delta \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{V}}_x \cdot \underline{\mathbf{n}} = \delta u_{i,j} n_j$$

Pour cette paramétrisation de la surface $\partial\Omega$, l'élément d'aire dS est égal à :

$$dS = \det(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{n}}) d\xi_1 d\xi_2 = J(\xi_\alpha) d\xi_\alpha \quad (\text{C.15})$$

avec

$$J(\xi_\alpha) = \det(\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{n}})$$

On peut montrer que $J(\xi_\alpha) = \sqrt{a} = \sqrt{\det(a_{\alpha\beta})}$, en reprenant les notations adoptées pour la définition (C.1).

On utilise cette paramétrisation en ξ_α pour développer le terme de bord résultant de l'intégration par partie précédente. Pour cela, on injecte les expressions (C.14) et (C.15) dans l'équation (C.12) et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \pi_{ijk} \delta \kappa_{ijk} d\Omega &= \int_{\Omega} -\pi_{ijk,k} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} \pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} J(\xi_\alpha) d\xi_\alpha + \int_{\partial\Omega} \pi_{ijk} n_k \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_\alpha} a_{\alpha j}^* J(\xi_\alpha) d\xi_\alpha \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Les conditions limites cinématiques imposent :

$$\delta u_{i,n} = 0 \quad \text{et} \quad \delta u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^u$$

Par conséquent :

$$\int_{\partial\Omega} \pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} J(\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \int_{\partial\Omega^f} \pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} J(\xi_\alpha) d\xi_\alpha$$

Et comme δu_i est identiquement nul sur $\partial\Omega^u$, ses dérivées tangentielles sont nulles :

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_\alpha}(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(0) \Big|_{\underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega^u} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega^u$$

Ensuite, avec une seconde intégration par partie du terme en $\frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_\alpha}$ on a :

$$\int_{\Omega} \pi_{ijk} \delta \kappa_{ijk} d\Omega = \int_{\Omega} -\pi_{ijk,k} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\partial \Omega^f} \left[\pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} J - \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\pi_{ijk} n_k a_{\alpha j}^* J) \delta u_i \right] d\xi_\alpha$$

On reconnaît l'expression de la divergence surfacique de $\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}}$ sur $\partial \Omega$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\pi_{ijk} n_k a_{\alpha j}^* J) \delta u_i = (\operatorname{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})) \cdot \mathbf{e}_i J \delta u_i = \operatorname{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i J \delta u_i$$

$\operatorname{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i$ désigne la composante selon \mathbf{e}_i de la divergence.

En injectant l'expression développée du terme $\pi_{ijk} \delta \kappa_{ijk}$ dans l'équation (C.11), la stationnarité de l'énergie potentielle est exprimée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\delta \underline{\mathbf{u}}) &= 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} - \pi_{ijk,k} - g_{ij}) \delta \varepsilon_{ij} - f_i \delta u_i] d\Omega - \int_{\partial \Omega^f} w_S^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) dS \\ &+ \int_{\partial \Omega^f} [\pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} - \operatorname{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i \delta u_i] J d\xi_\alpha = 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Enfin, à l'aide d'une dernière intégration par partie du terme volumique en $\delta \varepsilon_{ij}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{\Omega} -[\tau_{ij,j} - f_i] \delta u_i d\Omega - \int_{\partial \Omega^f} w_S^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) dS \\ + \int_{\partial \Omega^f} (\pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} + [\tau_{ij} n_j - \operatorname{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i] \delta u_i) dS = 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

On introduit un champ de tenseurs d'ordre 2 $\boldsymbol{\tau}$, appelé *contrainte effective*, tel que :

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \pi_{ijk,k} + g_{ij} \quad (\text{C.19})$$

On étudie séparément l'intégrale de volume puis l'intégrale sur la surface $\partial \Omega^f$ grâce à l'utilisation d'un sous-espace vectoriel particulier de CA^0 .

L'intégrale de volume conduit aux équations de champs d'équilibre du modèle du second gradient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\delta \underline{\mathbf{u}}) &= 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} -(\tau_{ij,j} - f_i) \delta u_i d\Omega &= 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \text{ tels que } \delta \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega \\ \Rightarrow \tau_{ij,j} - f_i &= 0 \quad \text{sur } \Omega \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour étudier l'intégrale de contour et ainsi obtenir les conditions limites statiques nécessaires pour assurer l'équilibre statique. Comme $\tau_{ij,j} - f_i = 0$ à l'intérieur du domaine Ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\delta \underline{\mathbf{u}}) &= 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \\ \Leftrightarrow \int_{\partial \Omega^f} (\pi_{ijk} n_k n_j \delta u_{i,n} + [\tau_{ij} n_j - \operatorname{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i] \delta u_i) dS - \int_{\partial \Omega^f} w_S^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) dS &= 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

La forme la plus générale du travail virtuel des efforts extérieurs surfaciques apparait en observant les dépendances en $\delta \underline{\mathbf{u}}$ des deux autres termes à annuler. Ainsi, nous introduisons deux efforts extérieurs surfaciques : la *force* \mathbf{T}^d et la *double force* $\boldsymbol{\mu}^d$ qui est en dualité de $\delta u_{i,n}$. Les conditions limites statiques sont définies en fixant les valeurs des champs \mathbf{T}^d et $\boldsymbol{\mu}^d$ sur Ω^f . L'expression du travail virtuel des efforts extérieurs surfaciques est :

$$\int_{\partial\Omega^f} w_S^e(\delta \underline{\mathbf{u}}) dS = \int_{\partial\Omega^f} T_i^d \delta u_i + \mu_i^d \delta u_{i,n} dS \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \quad (\text{C.22})$$

Finalement, l'équation (C.21) devient :

$$\int_{\partial\Omega^f} (\pi_{ijk} n_k n_j - \mu_i^d) \delta u_{i,n} dS + \int_{\partial\Omega^f} [\tau_{ij} n_j - \text{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i - T_i^d] \delta u_i dS = 0 \quad \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \in CA^0 \quad (\text{C.23})$$

et nous aboutissons à l'expression des conditions limites statiques :

$$\Leftrightarrow \tau_{ij} n_j - \text{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})_i = T_i^d \quad \text{et} \quad \pi_{ijk} n_k n_j = \mu_i^d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^f \quad (\text{C.24})$$

avec $\underline{\mathbf{n}}$ le vecteur normal sortant à $\partial\Omega^f$, et ξ_α les deux variables utilisées pour la paramétrisation de la surface $\partial\Omega^f$.

C.2 Récapitulatif

Avec ce modèle élastique linéaire de second gradient, un problème d'élasticité tridimensionnel est défini par les équations suivantes :

- Équations d'équilibre :

$$\underline{\text{div}}_x \boldsymbol{\tau} + \underline{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \tau_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (\text{C.25})$$

avec

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \underline{\text{div}}_x \boldsymbol{\pi} + \mathbf{g} \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \pi_{ijk,k} + g_{ij} \quad (\text{C.26})$$

- Équations de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (\text{C.27})$$

et

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{D}(\underline{\mathbf{x}}) : \boldsymbol{\kappa} \quad \pi_{ijk} = D_{ijklmn} \kappa_{nml} \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (\text{C.28})$$

Le comportement élastique pouvant être hétérogène.

- Équations de compatibilité cinématique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_x^s \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (\text{C.29})$$

et

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} \quad \kappa_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (\text{C.30})$$

- Conditions limites :

En déplacement :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}} &= \underline{\mathbf{u}}^d \quad \text{et} \quad (\nabla_x \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\boldsymbol{\varphi}}^d \quad \text{sur } \partial\Omega^u \quad (\text{C.31}) \\ \text{soit} \quad u_i &= u_i^d \quad \text{et} \quad u_{i,n} = u_{i,j} n_j = \varphi_i^d \end{aligned}$$

En efforts :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \text{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}}) &= \underline{\mathbf{T}}^d \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\pi} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) = \underline{\boldsymbol{\mu}}^d \quad \text{sur } \partial\Omega^u \quad (\text{C.32}) \\ \text{soit} \quad \tau_{ij} n_j - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\pi_{ijk} n_k a_{\alpha j}^*) &= T_i^d \quad \text{et} \quad \pi_{ijk} n_k n_j = \mu_i^d \end{aligned}$$

- Régularité :

- Le champ de déplacements $\underline{\mathbf{u}}$ et son premier gradient $\nabla_x \underline{\mathbf{u}}$ sont continus sur Ω .
- Soit Σ une surface incluse dans le domaine Ω suffisamment régulière, de normale $\underline{\mathbf{n}}$ et pouvant être chargée par des distributions de forces $\underline{\mathbf{t}}$ et de doubles forces $\underline{\mathbf{r}}$ concentrées sur Σ . À la traversée de la surface Σ les champs de contraintes doivent respecter les conditions de saut :

$$[[\boldsymbol{\tau} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \text{div}_S(\boldsymbol{\pi} \cdot \underline{\mathbf{n}})]] + \underline{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Sigma \quad (\text{C.33})$$

et

$$[[\boldsymbol{\pi} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})]] + \underline{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad [[\pi_{ijk} n_k n_j]] + r_i = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Sigma \quad (\text{C.34})$$

en utilisant les notations définies précédemment.

Bibliographie

Les pages de citation sont indiquées après chaque référence.

- ABDOUL-ANZIZ, H. (2018). *Homogénéisation de composites élastiques périodiques à fort contraste : Conception de métamatériaux de second gradient*. (Thèse de doctorat). Université de Toulon. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02023850> [14, 93]
- ABDOUL-ANZIZ, H., L. JAKABČIN et P. SEPPECHER (2021). Homogenization of an elastic material reinforced by very strong fibres arranged along a periodic lattice. *Proc. R. Soc. A.*, 477(2246), 20200620. <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0620> [12, 89]
- ABDOUL-ANZIZ, H. et P. SEPPECHER (2018a). Homogenization of periodic graph-based elastic structures. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* [12]
- ABDOUL-ANZIZ, H. et P. SEPPECHER (2018b). Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*. <https://doi.org/10.2140/memocs.2018.6.213> [3, 12, 14, 92, 93, 110]
- ABDOUL-ANZIZ, H., P. SEPPECHER et C. BELLIS (2019). Homogenization of frame lattices leading to second gradient models coupling classical strain and strain-gradient terms. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24(12), 3976–3999. <https://doi.org/10.1177/1081286519855431> [92, 110]
- AGNELLI, F., A. CONSTANTINESCU et G. NIKA (2019). Design and testing of 3D-printed micro-architected polymer materials exhibiting a negative Poisson's ratio. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00851-6> [47]
- AGNELLI, F., P. MARGERIT, P. CELLI, C. DARAIO et A. CONSTANTINESCU (2021). Systematic two-scale image analysis of extreme deformations in soft architected sheets. *International Journal of Mechanical Sciences*, 194, 106205. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106205> [94, 123]
- D'AGOSTINO, M. V., G. BARBAGALLO, I.-D. GHIBA, B. EIDEL, P. NEFF et A. MADEO (2020). Effective Description of Anisotropic Wave Dispersion in Mechanical Band-Gap Metamaterials via the Relaxed Micromorphic Model. *J Elast*, 139(2), 299–329. <https://doi.org/10.1007/s10659-019-09753-9> [1, 158]
- ALBERDI, R., J. ROBBINS, T. WALSH et R. DINGREVILLE (2021). Exploring wave propagation in heterogeneous metastructures using the relaxed micromorphic model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 155, 104540. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104540> [1]

- ALIBERT, J.-J., P. SEPPECHER et F. DELL'ISOLA (2003). Truss Modular Beams with Deformation Energy Depending on Higher Displacement Gradients. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 8(1), 51–73. <https://doi.org/10.1177/1081286503008001658> [12, 14]
- ALLAIRE, G., M. BRIANE et M. VANNINATHAN (2016). A comparison between two-scale asymptotic expansions and Bloch wave expansions for the homogenization of periodic structures. *SeMA Journal : Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 73(3), 237–259. <https://doi.org/10.1007/s40324-016-0067-z> [11, 12]
- ALLAIRE, G. et T. YAMADA (2018). Optimization of dispersive coefficients in the homogenization of the wave equation in periodic structures. *Numer. Math.*, 140(2), 265–326. <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0972-4> [11]
- ALNÆS, M., J. BLECHTA, J. HAKE, A. JOHANSSON, B. KEHLET, A. LOGG, C. RICHARDSON, J. RING, M. E. ROGNES et G. N. WELLS (2015). The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100). <https://doi.org/10.11588/ans.2015.100.20553> [32]
- AMEEN, M. M., R. H. J. PEERLINGS et M. G. D. GEERS (2018). A quantitative assessment of the scale separation limits of classical and higher-order asymptotic homogenization. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 71, 89–100. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.02.011> [11, 23]
- AMSTUTZ, S., S. M. GIUSTI, A. A. NOVOTNY et E. A. DE SOUZA NETO (2010). Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 84(6), 733–756. <https://doi.org/10.1002/nme.2922> [2, 10, 139, 140]
- ASHBY, M. (2013). Designing architected materials. *Scripta Materialia*, 68(1), 4–7. <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.04.033> [1]
- AUFFRAY, N., R. BOUCHET et Y. BRÉCHET (2010). Strain gradient elastic homogenization of bidimensional cellular media. *International Journal of Solids and Structures*, 47(13), 1698–1710. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.03.011> [11]
- AUFFRAY, N., J. DIRRENBARGER et G. ROSI (2015). A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 69–70, 195–206. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.036> [50, 58, 69, 73]
- AURIAULT, J.-L. et G. BONNET (1985). Dynamique des composites élastiques périodiques. *Archives of Mechanics*, 37, 269–284. [11]
- BAKHVALOV, N. S. et G. P. PANASENKO. (1989). *Homogenisation : averaging processes in periodic media : mathematical problems in the mechanics of composite materials*. Numéro v. 36 de Mathematics and its applications. Soviet series. Dordrecht ; Boston : Kluwer Academic Publishers. [11]
- BARCIESI, E., S. R. EUGSTER, F. DELL'ISOLA et F. HILD (2020). Large in-plane elastic deformations of bi-pantographic fabrics : asymptotic homogenization and experimental validation. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 25(3), 739–767. <https://doi.org/10.1177/1081286519891228> [93, 94]

- BARCHIESI, E., F. DELL'ISOLA et F. HILD (2021). On the validation of homogenized modeling for bi-pantographic metamaterials via digital image correlation. *International Journal of Solids and Structures*, 208–209, 49–62. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.036> [94]
- BENDSØE, M. P. et O. SIGMUND. (2004). *Topology optimization : theory, methods, and applications* (2. ed., corrected printing éd.). Engineering online library. Berlin, Heidelberg : Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6> [10]
- BERTOLDI, K., V. VITELLI, J. CHRISTENSEN et M. VAN HECKE (2017). Flexible mechanical metamaterials. *Nat Rev Mater*, 2(11), 17066. <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.66> [1, 12, 159]
- BISWAS, R., L. H. POH et A. S. SHEDBALE (2019). A micromorphic computational homogenization framework for auxetic tetra-chiral structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, p. 103801. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.103801> [158]
- BONNET, M. et R. CORNAGGIA (2017). Higher order topological derivatives for three-dimensional anisotropic elasticity. *ESAIM : M2AN*, 51(6), 2069–2092. <https://doi.org/10.1051/m2an/2017015> [11]
- BONNET, M., R. CORNAGGIA et B. B. GUZINA (2018). Microstructural Topological Sensitivities of the Second-Order Macroscopic Model for Waves in Periodic Media. *SIAM J. Appl. Math.*, 78(4), 2057–2082. <https://doi.org/10.1137/17M1149018> [11]
- BORNERT, M., F. HILD, J.-J. ORTEU et S. ROUX (2013). Digital Image Correlation. In *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics* chapitre 6, 157–190. John Wiley & Sons, Ltd [5, 116, 118]
- BOUTIN, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33(7), 1023–1051. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00089-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00089-5) [11, 20]
- BURT, P. J., C. YEN et X. XU (1982). LOCAL CORRELATION MEASURES FOR MOTION ANALYSIS, A COMPARATIVE STUDY. Dans *Proceedings - IEEE Computer Society Conference on Pattern Recognition and Image Processing*, 269–274 P 269. [117]
- CALISTI, V. (2018). *Synthèse de microstructures par optimisation topologique, et optimisation de forme d'un problème d'interaction fluide-structure*. (These en préparation). Université de Lorraine. <https://www.theses.fr/s282898> [7, 95, 139]
- CALISTI, V., A. LEBÉE, A. A. NOVOTNY et J. SOKOLOWSKI (2021). Sensitivity of the Second Order Homogenized Elasticity Tensor to Topological Microstructural Changes. *J Elast*, 144(2), 141–167. <https://doi.org/10.1007/s10659-021-09836-6> [2, 42, 95, 139]
- CAMAR-EDDINE, M. et P. SEPPECHER (2003). Determination of the Closure of the Set of Elasticity Functionals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 170(3), 211–245. <https://doi.org/10.1007/s00205-003-0272-7> [3, 10]
- CELLI, P., C. MCMAHAN, B. RAMIREZ, A. BAUHOFFER, C. NAIFY, D. HOFMANN, B. AUDOLY et C. DARAIIO (2018). Shape-morphing architected sheets with non-periodic cut patterns. *Soft Matter*, 14(48), 9744–9749. <https://doi.org/10.1039/C8SM02082E> [12]

- CLAUSEN, A., F. WANG, J. S. JENSEN, O. SIGMUND et J. A. LEWIS (2015). Topology Optimized Architectures with Programmable Poisson's Ratio over Large Deformations. *Advanced Materials*, 27(37), 5523–5527. <https://doi.org/10.1002/adma.201502485> [1]
- CORNAGGIA, R. et C. BELLIS (2020). Tuning effective dynamical properties of periodic media by FFT-accelerated topological optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(14), 3178–3205. <https://doi.org/10.1002/nme.6352> [11]
- COSSERAT, E. M. P. et F. COSSERAT. (1909). *Théorie des corps déformables*. Paris, France : A. Hermann et fils [2, 10]
- COULAIS, C., C. KETTENIS et M. VAN HECKE (2018). A characteristic length scale causes anomalous size effects and boundary programmability in mechanical metamaterials. *Nature Phys*, 14(1), 40–44. <https://doi.org/10.1038/nphys4269> [47]
- COUTRIS, N., L. L. THOMPSON et S. KOSARAJU (2020). Asymptotic homogenization models for pantographic lattices with variable order rotational resistance at pivots. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 134, 103718. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.103718> [12]
- CZAJKOWSKI, M., C. COULAIS, M. VAN HECKE et D. Z. ROCKLIN (2021). Conformal Elasticity of Mechanism-Based Metamaterials. *arXiv :2103.12683 [cond-mat]* [12, 48, 88, 89, 94]
- DANG, X., F. FENG, P. PLUCINSKY, R. D. JAMES, H. DUAN et J. WANG (2022). Inverse design of deployable origami structures that approximate a general surface. *International Journal of Solids and Structures*, 234–235, 111224. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111224> [159]
- DAVID, C. (2014). *Identification de paramètres mécaniques de matériaux composites à partir de corrélation d'images numériques multi-échelles*. (Thèse de doctorat). Ecole des Mines d'Albi-Carmaux. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01149238> [94, 117]
- DENG, B., S. YU, A. E. FORTE, V. TOURNAT et K. BERTOLDI (2020). Characterization, stability, and application of domain walls in flexible mechanical metamaterials. *Proc Natl Acad Sci USA*, 117(49), 31002–31009. <https://doi.org/10.1073/pnas.2015847117> [64]
- DUAN, S., W. WEN et D. FANG (2018). A predictive micropolar continuum model for a novel three-dimensional chiral lattice with size effect and tension-twist coupling behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 121, 23–46. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.07.016> [158]
- DUDEK, K. K., R. GATT, L. MIZZI, M. R. DUDEK, D. ATTARD, K. E. EVANS et J. N. GRIMA (2017). On the dynamics and control of mechanical properties of hierarchical rotating rigid unit auxetics. *Sci Rep*, 7(1), 46529. <https://doi.org/10.1038/srep46529> [47]
- DURAND, B. et A. LEBÉE (2020). HO_homog. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.4067100>. <https://zenodo.org/record/4067100> [6, 24, 159, 163]
- DURAND, B., A. LEBÉE, P. SEPPECHER et K. SAB (2022). Predictive strain-gradient homogenization of a pantographic material with compliant junctions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, p. 104773. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104773> [6, 10]

- EHLERS, W. et S. BIDIER (2020). Cosserat Media. In H. Altenbach et A. Öchsner (dir.), *Encyclopedia of Continuum Mechanics* 436–446. Berlin, Heidelberg : Springer [2]
- EREMEYEV, V. A., A. CAZZANI et F. DELL’ISOLA (2021). On nonlinear dilatational strain gradient elasticity. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 33(4), 1429–1463. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-00993-6> [47, 88]
- FLAMANT (1892). Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 114, 1465–1468. [25]
- FOREST, S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Presses des MINES. [2, 169]
- FOREST, S. et K. SAB (2012). Stress gradient continuum theory. *Mechanics Research Communications*, 40, 16–25. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.12.002> [2]
- GAMBIN, B. et E. KRÖNER (1989). Higher-Order Terms in the Homogenized Stress-Strain Relation of Periodic Elastic Media. *physica status solidi (b)*, 151(2), 513–519. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221510211> [11]
- GERMAIN, P. (1973a). La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus Première partie : Théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12(2), 235–274. [2]
- GERMAIN, P. (1973b). The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2 : Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, 25(3), 556–575. <https://doi.org/10.1137/0125053> [2, 11, 169]
- GEUZAIN, C. et J.-F. REMACLE (2009). Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 79(11), 1309–1331. <https://doi.org/10.1002/nme.2579> [24, 32]
- GOLASZEWSKI, M., R. GRYGORUK, I. GIORGIO, M. LAUDATO et F. D. COSMO (2019). Metamaterials with relative displacements in their microstructure : technological challenges in 3D printing, experiments and numerical predictions. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 31(4), 1015–1034. <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0692-0> [93]
- GOLOGANU, M., J.-B. LEBLOND, G. PERRIN et J. DEVAUX (1997). Recent Extensions of Gurson’s Model for Porous Ductile Metals. In P. Suquet (dir.), *Continuum Micromechanics*, International Centre for Mechanical Sciences 61–130. Vienna : Springer [11]
- GOSHTASBY, A. (1986). Piecewise linear mapping functions for image registration. *Pattern Recognition*, 19(6), 459–466. [https://doi.org/10.1016/0031-3203\(86\)90044-0](https://doi.org/10.1016/0031-3203(86)90044-0) [121]
- GRIMA, J. N., A. ALDERSON et K. E. EVANS (2005). Auxetic behaviour from rotating rigid units. *phys. stat. sol. (b)*, 242(3), 561–575. <https://doi.org/10.1002/pssb.200460376> [47]
- GRIMA, J. N., E. CHETCUTI, E. MANICARO, D. ATTARD, M. CAMILLERI, R. GATT et K. E. EVANS (2012). On the auxetic properties of generic rotating rigid triangles. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2139), 810–830. <https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0273> [47]

- GRIMA, J. N. et K. E. EVANS (2000). Auxetic behavior from rotating squares. *Journal of Materials Science Letters*, 19(17), 1563–1565. <https://doi.org/10.1023/A:1006781224002> [23, 46, 47]
- GRIMA, J. N. et K. E. EVANS (2006). Auxetic behavior from rotating triangles. *J Mater Sci*, 41(10), 3193–3196. <https://doi.org/10.1007/s10853-006-6339-8> [47]
- GRIMA, J. N., V. ZAMMIT, R. GATT, A. ALDERSON et K. E. EVANS (2007). Auxetic behaviour from rotating semi-rigid units. *phys. stat. sol. (b)*, 244(3), 866–882. <https://doi.org/10.1002/pssb.200572706> [46, 47]
- GRIMA-CORNISH, J. N., D. ATTARD, J. N. GRIMA et K. E. EVANS (2021). Auxetic Behavior and Other Negative Thermomechanical Properties from Rotating Rigid Units. *physica status solidi (RRL) – Rapid Research Letters*, n/a(n/a), 2100322. <https://doi.org/10.1002/pssr.202100322> [47]
- GRÉDIAC, M., F. HILD et A. PINEAU (dir.) (2013). *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Hoboken, NJ USA : John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9781118578469> [5]
- HILD, F., A. MISRA et F. DELL’ISOLA (2021). Multiscale DIC Applied to Pantographic Structures. *Exp Mech*, 61(2), 431–443. <https://doi.org/10.1007/s11340-020-00636-y> [93, 94, 123]
- HILD, F. et S. ROUX (2012). Comparison of Local and Global Approaches to Digital Image Correlation. *Exp Mech*, 52(9), 1503–1519. <https://doi.org/10.1007/s11340-012-9603-7> [2, 117]
- HÜTTER, G. (2019). On the micro-macro relation for the microdeformation in the homogenization towards micromorphic and micropolar continua. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 127, 62–79. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2019.03.005> [158]
- DELL’ISOLA, F., E. TURCO, A. MISRA, Z. VANGELATOS, C. GRIGOROPOULOS, V. MELISSINAKI et M. FARSARI (2019). Force–displacement relationship in micro-metric pantographs : Experiments and numerical simulations. *Comptes Rendus Mécanique*, 347(5), 397–405. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.03.015> [93]
- DELL’ISOLA, F., I. GIORGIO, M. PAWLIKOWSKI et N. L. RIZZI (2016). Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices : heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2185), 20150790. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0790> [3, 12, 93]
- DELL’ISOLA, F., P. SEPPECHER, M. SPAGNUOLO, E. BARCHIESI, F. HILD, T. LEKSZYCKI, I. GIORGIO, L. PLACIDI, U. ANDREAUS, M. CUOMO, S. R. EUGSTER, A. PFAFF, K. HOSCHKE, R. LANGKEMPER, E. TURCO, R. SARIKAYA, A. MISRA, M. DE ANGELO, F. D’ANNIBALE, A. BOUTERF, X. PINELLI, A. MISRA, B. DESMORAT, M. PAWLIKOWSKI, C. DUPUY, D. SCERRATO, P. PEYRE, M. LAUDATO, L. MANZARI, P. GÖRANSSON, C. HESCH, S. HESCH, P. FRANCIOSI, J. DIRRENBERGER, F. MAURIN, Z. VANGELATOS, C. GRIGOROPOULOS, V. MELISSINAKI, M. FARSARI, W. MULLER, B. E. ABALI, C. LIEBOLD, G. GANZOSCH, P. HARRISON,

- R. DROBNICKI, L. IGUMNOV, F. ALZHRANI et T. HAYAT (2019). Advances in pantographic structures : design, manufacturing, models, experiments and image analyses. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 31(4), 1231–1282. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00806-x> [12, 93, 94]
- JAKABČIN, L. et P. SEPPECHER (2020). On periodic homogenization of highly contrasted elastic structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 144, 104104. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104104> [12, 43, 89]
- JIKOV, V. V., S. M. KOZLOV et O. A. OLEINIK. (1994). *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-84659-5> [10, 36, 37]
- JONES, E., M. IADICOLA, R. BIGGER, B. BLAYSAT, C. BOO, M. GREWER, J. HU, A. JONES, M. KLEIN, P. LAVA, M. PANKOW, K. RAGHAVAN, P. REU, T. SCHMIDT, T. SIEBERT, M. SIMONSEN, A. TRIM, D. TURNER, A. VIEIRA et T. WEIKERT (2018). *A Good Practices Guide for Digital Image Correlation*. Rapport technique, International Digital Image Correlation Society [116]
- KADIC, M., T. BÜCKMANN, N. STENGER, M. THIEL et M. WEGENER (2012). On the practicability of pentamode mechanical metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, 100(19), 191901. <https://doi.org/10.1063/1.4709436> [1]
- KADIC, M., T. FRENZEL et M. WEGENER (2018). Mechanical metamaterials : When size matters. *Nature Physics*, 14(1), 8–9. <https://doi.org/10.1038/nphys4287> [47]
- KADIC, M., G. W. MILTON, M. VAN HECKE et M. WEGENER (2019). 3D metamaterials. *Nat Rev Phys*, 1(3), 198–210. <https://doi.org/10.1038/s42254-018-0018-y> [1, 10]
- KOLKEN, H. M. A. et A. A. ZADPOOR (2017). Auxetic mechanical metamaterials. *RSC Adv.*, 7(9), 5111–5129. <https://doi.org/10.1039/C6RA27333E> [47]
- KONAKOVIĆ, M., K. CRANE, B. DENG, S. BOUAZIZ, D. PIKER et M. PAULY (2016). Beyond developable : computational design and fabrication with auxetic materials. *ACM Transactions on Graphics*, 35(4), 1–11. <https://doi.org/10.1145/2897824.2925944> [88]
- KONAKOVIĆ-LUKOVIĆ, M., J. PANETTA, K. CRANE et M. PAULY (2018). Rapid deployment of curved surfaces via programmable auxetics. *ACM Trans. Graph.*, 37(4), 106 :1–106 :13. <https://doi.org/10.1145/3197517.3201373> [88]
- KOUZNETSOVA, V., M. G. D. GEERS et W. a. M. BREKELMANS (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8), 1235–1260. <https://doi.org/10.1002/nme.541> [11]
- LEE, E. H. et W. H. YANG (1973). On Waves in Composite Materials with Periodic Structure. *SIAM J. Appl. Math.*, 25(3), 492–499. <https://doi.org/10.1137/0125049> [11]
- LOGG, A., G. N. WELLS et J. HAKE (2012). DOLFIN : a C++/Python finite element library. In A. Logg, K.-A. Mardal, et G. Wells (dir.), *Automated Solution of Differential Equations by*

- the Finite Element Method : The FEniCS Book*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering 173–225. Berlin, Heidelberg : Springer [24, 32]
- MARAGHECHI, S., J. P. M. HOEFNAGELS, R. H. J. PEERLINGS, O. ROKOŠ et M. G. D. GEERS (2020). Experimental full-field analysis of size effects in miniaturized cellular elastomeric metamaterials. *Materials & Design*, 193, 108684. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108684> [64, 94]
- MARGERIT, P. (2022). navDIC_v0 : an Open Source Matlab DIC App. Beta version. https://github.com/MargeritPierre/navDIC_v0 [119]
- MEZA, L. R., S. DAS et J. R. GREER (2014). Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices. *Science*, 345(6202), 1322–1326. <https://doi.org/10.1126/science.1255908> [1]
- MICHELL, J. H. (1899). On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid, with application to the Theory of Plates. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-31(1), 100–124. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-31.1.100> [25]
- MINDLIN, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16, 51–78. <https://doi.org/10.1007/BF00248490> [2, 10, 11]
- MINDLIN, R. D. (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1(4), 417–438. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(65\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90006-5) [2]
- MINDLIN, R. D. et N. N. ESHEL (1968). On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4(1), 109–124. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-X) [2]
- MIZZI, L., E. SALVATI, A. SPAGGIARI, J.-C. TAN et A. M. KORSUNSKY (2020). Highly stretchable two-dimensional auxetic metamaterial sheets fabricated via direct-laser cutting. *International Journal of Mechanical Sciences*, 167, 105242. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105242> [47]
- MONCHIET, V., N. AUFRAY et J. YVONNET (2020). Strain-gradient homogenization : A bridge between the asymptotic expansion and quadratic boundary condition methods. *Mechanics of Materials*, 143, 103309. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103309> [11]
- NASSAR, H., H. CHEN et G. HUANG (2020). Microtwist elasticity : A continuum approach to zero modes and topological polarization in Kagome lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 144, 104107. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104107> [87]
- NASSAR, H., Q. C. HE et N. AUFRAY (2015). Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 77, 158–178. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.12.011> [11]
- NASSAR, H., A. LEBÉE et L. MONASSE (2017). Curvature, metric and parametrization of origami tessellations : theory and application to the eggbox pattern. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 473(2197), 20160705. <https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0705> [159]

- PEERLINGS, R. H. J. et N. A. FLECK (2001). Numerical analysis of strain gradient effects in periodic media. *J. Phys. IV France*, 11(PR5), Pr5–160. <https://doi.org/10.1051/jp4:2001519> [11]
- PIDERI, C. et P. SEPPECHER (1997). A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium. *Continuum Mech Thermodyn*, 9(5), 241–257. <https://doi.org/10.1007/s001610050069> [12]
- PONCELET, M., A. SOMERA, C. MOREL, C. JAILIN et N. AUFRAY (2018). An experimental evidence of the failure of Cauchy elasticity for the overall modeling of a non-centrosymmetric lattice under static loading. *International Journal of Solids and Structures*, 147, 223–237. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.028> [93, 94]
- POWELL, J. (1993). Cutting Non-metals. In J. Powell (dir.), *CO2 Laser Cutting* 91–115. London : Springer London [103]
- RAFSANJANI, A. et D. PASINI (2016). Bistable auxetic mechanical metamaterials inspired by ancient geometric motifs. *Extreme Mechanics Letters*, 9, 291–296. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2016.09.001> [94]
- REIS, P. M., H. M. JAEGER et M. VAN HECKE (2015). Designer Matter : A perspective. *Extreme Mechanics Letters*, 5, 25–29. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.09.004> [1]
- ROKOŠ, O., M. M. AMEEN, R. H. J. PEERLINGS et M. G. D. GEERS (2019). Micromorphic computational homogenization for mechanical metamaterials with patterning fluctuation fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 123, 119–137. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.08.019> [64]
- ROSI, G. et N. AUFRAY (2016). Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework. *Wave Motion*, 63, 120–134. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2016.01.009> [1, 3, 11]
- ROSI, G., L. PLACIDI et N. AUFRAY (2018). On the validity range of strain-gradient elasticity : A mixed static-dynamic identification procedure. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 69, 179–191. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.12.005> [95]
- RÉTHORÉ, J., C. KALTENBRUNNER, T. B. T. DANG, P. CHAUDET et M. KUHN (2015). Gradient-elasticity for honeycomb materials : Validation and identification from full-field measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 72, 108–117. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.07.015> [94]
- SANTOSA, F. et W. W. SYMES (1991). A Dispersive Effective Medium for Wave Propagation in Periodic Composites. *SIAM J. Appl. Math.*, 51(4), 984–1005. <https://doi.org/10.1137/0151049> [11]
- SEPPECHER, P., J.-J. ALIBERT et F. D. ISOLA (2011). Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions. *J. Phys. : Conf. Ser.*, 319, 012018. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/319/1/012018> [3]

- SEPPECHER, P. et L. JAKABČIN (2021). Asymptotic comparison of the strain-gradient and micromorphic models when loading forces are widely spread. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03432329> [89, 158]
- SHAN, S., S. H. KANG, Z. ZHAO, L. FANG et K. BERTOLDI (2015). Design of planar isotropic negative Poisson's ratio structures. *Extreme Mechanics Letters*, 4, 96–102. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.05.002> [1, 47, 94]
- SMYSHLYAEV, V. P. et K. D. CHEREDNICHENKO (2000). On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6), 1325–1357. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00090-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00090-3) [3, 11, 12, 20, 23, 36]
- SORRENTINO, A., D. CASTAGNETTI, L. MIZZI et A. SPAGGIARI (2021). Rotating squares auxetic metamaterials with improved strain tolerance. *Smart Mater. Struct.*, 30(3), 035015. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/abde50> [47]
- SPAGNUOLO, M., P. PEYRE et C. DUPUY (2019). Phenomenological aspects of quasi-perfect pivots in metallic pantographic structures. *Mechanics Research Communications*, 101, 103415. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.103415> [93]
- SUTTON, M., W. WOLTERS, W. PETERS, W. RANSON et S. MCNEILL (1983). Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3), 133–139. [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(83\)90064-1](https://doi.org/10.1016/0262-8856(83)90064-1) [117]
- TANCOGNE-DEJEAN, T., M. DIAMANTOPOULOU, M. B. GORJI, C. BONATTI et D. MOHR (2018). 3D Plate-Lattices : An Emerging Class of Low-Density Metamaterial Exhibiting Optimal Isotropic Stiffness. *Adv. Mater.*, 30(45), 1803334. <https://doi.org/10.1002/adma.201803334> [1]
- TANG, Y. et J. YIN (2017). Design of cut unit geometry in hierarchical kirigami-based auxetic metamaterials for high stretchability and compressibility. *Extreme Mechanics Letters*, 12, 77–85. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2016.07.005> [47]
- TAYLOR, M., L. FRANCESCONI, M. GERENDÁS, A. SHANIAN, C. CARSON et K. BERTOLDI (2014). Low Porosity Metallic Periodic Structures with Negative Poisson's Ratio. *Advanced Materials*, 26(15), 2365–2370. <https://doi.org/10.1002/adma.201304464> [47]
- THE MATHWORKS, INC. (2021). MATLAB (R2021b). The MathWorks, Inc. <https://fr.mathworks.com/products/matlab.html> [119, 121]
- THOMSEN, C. R., F. WANG et O. SIGMUND (2018). Buckling strength topology optimization of 2D periodic materials based on linearized bifurcation analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339, 115–136. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.031> [10]
- TRIANAFYLLIDIS, N. et S. BARDENHAGEN (1996). The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(11), 1891–1928. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(96\)00047-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(96)00047-6) [11]

- VELÁSQUEZ, M. B., L. FRANCESCONI et M. TAYLOR (2021). Design of low-porosity auxetic tessellations with reduced mechanical stress concentrations. *Extreme Mechanics Letters*, 48, 101401. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2021.101401> [47]
- VONDŘEJC, J., E. ROHAN et J. HECZKO (2017). Shape optimization of phononic band gap structures using the homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures*, 113–114, 147–168. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.01.038> [11]
- WANG, F., O. SIGMUND et J. S. JENSEN (2014). Design of materials with prescribed nonlinear properties. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 69, 156–174. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.05.003> [10]
- WILLIS, J. R. (1980). Polarization approach to the scattering of elastic waves—I. Scattering by a single inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 28(5), 287–305. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(80\)90021-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(80)90021-6) [11]
- YEO, J., G. S. JUNG, F. J. MARTÍN-MARTÍNEZ, S. LING, G. X. GU, Z. QIN et M. J. BUEHLER (2018). Materials-by-Design : computation, synthesis, and characterization from atoms to structures. *Phys. Scr.*, 93(5), 053003. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aab4e2> [1]
- ZHENG, Y., I. NILOY, P. CELLI, I. TOBASCO et P. PLUCINSKY (2021). A continuum field theory for the deformations of planar kirigami. *arXiv :2108.00336 [cond-mat]* [12, 48, 94]
- ZHU, B., M. SKOURAS, D. CHEN et W. MATUSIK (2017). Two-Scale Topology Optimization with Microstructures. *ACM Trans. Graph.*, 36(5), 1–16. <https://doi.org/10.1145/3095815> [10]