



HAL
open science

Nucléation de fissure en présence de couplages thermiques et thermoporomécaniques

Yassine Aderkaoui

► **To cite this version:**

Yassine Aderkaoui. Nucléation de fissure en présence de couplages thermiques et thermoporomécaniques. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. École des Ponts ParisTech, 2022. Français. NNT : 2022ENPC0010 . tel-03968105

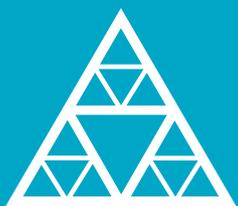
HAL Id: tel-03968105

<https://pastel.hal.science/tel-03968105v1>

Submitted on 1 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts
ParisTech

THÈSE DE DOCTORAT
de l'École des Ponts ParisTech

Nucléation de fissure en présence de couplages thermiques et thermoporomécaniques

École doctorale SIE

Structures et matériaux

Thèse préparée au Laboratoire Navier

Soutenance le 30/03/2022, par
Yassine ADERKAOUI

Composition du jury:

Benoît, BARY
Professeur, CEA

Rapporteur

Laurent, JEANNIN
Professeur, Storengy

Rapporteur

Véronique, LAZARUS
Professeure, ENSTA

Examineur

Darius, SEYEDI
Professeur, Université Paris-Saclay, CEA

Examineur

Albert, GIRAUD
Professeur, Université de Lorraine

Examineur

Xavier, CHATEAU
Directeur de recherche, Ecole des Ponts ParisTech

Examineur

Luc, DORMIEUX
Directeur de recherche, École des Ponts ParisTech

Directeur de thèse

Eric, LEMARCHAND
Professeur, École des Ponts ParisTech

Co-directeur de thèse

Remerciements

Ce travail constitue l'aboutissement de trois années de travail sur un sujet qui a attiré ma curiosité au début et qui a fini par me passionner par sa richesse et par l'intérêt suscité par les différentes personnes que j'ai eu la chance de côtoyer.

C'est un grand honneur pour moi de pouvoir remercier Laurent Jeannin et Benoit Bary, qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que Véronique Lazarus, qui a présidé mon jury de thèse. Leurs commentaires sur mon travail ont donné une autre saveur aux résultats que j'ai obtenus au cours des trois ans de ma thèse.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon encadrement pour m'avoir accompagné pendant cette expérience : Luc Dormieux pour m'avoir fait confiance pour ce projet et m'avoir confié ce sujet, vous êtes une source d'inspiration pour moi, Eric Lemarchand merci pour l'intérêt et l'attention que tu a porté aux résultats et réflexions que j'ai proposées ainsi que tes conseils précieux. Merci pour le temps que vous m'avez accordé pour la relecture de ce manuscrit.

Je remercie bien sûr tous les membres de l'équipe Multi-échelles du laboratoire Navier pour leur accueil et leur bienveillance. Ghazi merci pour ton attention, tu as veillé à ce que mon séjour au sein de l'équipe soit le plus agréable possible. Merci Denis d'avoir fait partie de mon comité de suivi, tu as su me donner la confiance qu'il me fallait pour aller jusqu'au bout, et tous les autres pour avoir participé à créer cette bonne ambiance pendant ces trois années.

Pendant cette thèse, j'ai pris un réel plaisir à discuter des différentes thématiques de recherche des doctorants et post-doctorants du laboratoire. Amal, Antoine, Elodie, Jonas nos conversations m'ont vraiment passionnées et m'ont ouvert l'esprit sur des sujets captivants. Merci à toute l'équipe de foot du mercredi: Sophie, Siavash, Benjamin, Hassan, Hussein, Rawaz et tous les autres pour les moments de décompression et de bonne humeur.

Un grand merci à mes collègues et amis doctorants: Iliass, Nihal, Insaf et Khadija, nous avons passé des moments inoubliables à discuter de nos travaux et partager nos problèmes dans l'espoir de trouver des solutions. Je n'oublierais jamais nos moments

de convivialité et de détente pendant les pauses café. Merci à tous mes amis et ma famille pour leur soutien inconditionnel depuis toujours : mes amis Amine et Adil pour les soirées et voyages qui m'ont permis de souffler un peu, ma sœur et mes parents, qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans mes choix. Je ne serais pas la personne que je suis sans eux et ils ont ma gratitude éternelle.

Enfin, du fond du cœur, je remercie ma chérie pour le beau voyage, le soutien et l'amour qu'elle m'a apporté tout au long de cette thèse. Chaimae, tu m'as donné la force et le courage pour aller jusqu'au bout. Un grand merci à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à ce travail, sans vous ce manuscrit ne serait pas ce qu'il est maintenant.

Nucléation de fissure en présence de
couplages thermiques et
thermoporomécaniques

Résumé

Dans ce document, nous abordons la problématique de la nucléation de fissure dans les matériaux lorsque le chargement est d'origine thermique. Dans un premier temps, le couplage thermoélastique est présenté, notamment dans le cadre de l'analyse du choc thermique. On élargit ensuite le spectre de l'analyse proposée au cadre des couplages thermo-poroélastiques. La démarche présentée est enfin appliquée à la problématique industrielle de la nucléation potentielle de fissures induite par le dégagement de chaleur des colis de déchets radioactifs. L'idée principale consiste à traduire la nucléation à travers un bilan entre l'état juste avant la nucléation et l'état défini par la fissure nucléée stable. Cette stratégie permet de s'affranchir de la modélisation d'un endommagement progressif conduisant à la formation de la fissure stable. Le critère d'évaluation de la nucléation de fissure adopté est le critère énergétique proposé par T. Carlioz [10] qui porte sur la grandeur énergétique du taux de restitution d'énergie incrémental. Sur le plan thermodynamique, la nucléation d'une fissure est abordée dans le cadre d'une évolution adiabatique non-drainée, cohérent avec le caractère brutal de ce phénomène. Dans cette logique, l'énergie interne apparaît comme la grandeur pertinente pour effectuer le bilan d'énergie potentielle sur lequel s'appuie le calcul du taux de restitution d'énergie incrémental. Plusieurs illustrations de la démarche proposée sont présentées tout au long de ce mémoire, en particulier dans le cadre de l'analyse d'un chargement lié à un choc thermique. L'application au dégagement de chaleur des colis de déchets radioactifs dans l'environnement immédiat des alvéoles de stockage propose une analyse critique de la potentielle nucléation de fissure selon que l'on considère un critère de nucléation s'appuyant, en présence de couplages thermo-poroélastiques, sur un état de traction dans la configuration initiale défini en contrainte totale ou en contrainte effective.

Mots-clés : Thermoporumécanique, Nucléation de fissure, Mécanique de la rupture, Argilite du Callovo-Oxfordian, Pressurisation thermique.

Crack nucleation in the presence of
thermal and thermoporomechanical
couplings

Abstract

In this work, we address the problem of crack nucleation in materials when the loading is of thermal origin. First, thermoelastic coupling is presented, especially in the context of thermal shock analysis. The spectrum of the proposed analysis is then extended to the framework of thermo-poroelastic couplings. The approach presented is finally applied to the industrial problem of the potential nucleation of cracks induced by the release of heat from radioactive waste deposit. The main idea is to describe the crack nucleation through a balance between the state just before the nucleation and the state defined by the appearance of a stable nucleated crack. This strategy allows to avoid the modeling of a progressive damage leading to the formation of the crack. The criterion used for the crack nucleation is the energy criterion proposed by T. Carlioz [10] which relates to the incremental energy released rate. From a thermodynamic point of view, the nucleation of a crack is approached within the context of a non-drained adiabatic evolution, consistent with the brutal aspect of this phenomenon. In accordance to this perspective, the internal energy appears to be the relevant quantity to establish a potential energy balance on which the calculation of the incremental energy released rate is based. Several illustrations of the proposed approach are presented throughout this thesis, in particular in the context of the analysis of a loading related to a thermal shock. The application to the heat release of radioactive waste deposit in the immediate environment of storage cells, in the presence of thermo-poroelastic couplings, proposes a critical analysis of the possible crack nucleation depending on whether one considers a nucleation criterion based on a tensile state defined in total stress or in effective stress.

Keywords : Thermoporomechanics, Crack nucleation, Fracture mechanics, Callovo-Oxfordian claystone, Thermal pressurization.

Table des matières

1	Contexte et Objectifs	19
1.1	Contexte Industriel	20
1.1.1	Industrie nucléaire et déchets radioactifs	20
1.1.2	Projet Cigéo	22
1.1.3	Les différentes phases du stockage	24
1.1.4	Objectif du travail	25
1.2	Organisation du manuscrit	26
2	Critère de nucléation énergétique	29
2.1	Introduction	30
2.2	Modélisation de la fissure	31
2.3	Modélisations de la nucléation de fissure	32
2.3.1	Modèle d'endommagement local et gradient d'endommagement	32
2.3.2	Critère de nucléation mixte	34
2.3.3	Formulation du critère énergétique	37
2.4	Thermodynamique de la nucléation	39
2.4.1	Formalisme du cadre thermodynamique macroscopique	40
2.4.2	Sollicitations thermomécaniques	40
2.4.3	Tenseur d'élasticité adiabatique et énergie interne de la fissure	46
2.5	Conclusions	54
3	Application du critère énergétique	57
3.1	Objectifs	58

3.2	Méthodologie et utilisation du critère énergétique	59
3.3	Approches variationnelles pour la nucléation de fissure	73
3.3.1	Principe de minimum de l'énergie et encadrement du taux de restitution incrémental d'énergie	74
3.3.2	Principe de superposition	78
3.4	Approche par mécanique linéaire de la rupture	83
3.4.1	Introduction	83
3.4.2	Lien entre le taux incrémentale de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte	84
3.4.3	Méthode de détermination des facteurs d'intensités de contraintes	92
3.4.4	Méthode itérative	97
3.5	Conclusions	102
4	Nucléation en présence de couplage thermo-élastique	105
4.1	Introduction	106
4.2	Nucléation de fissure sous choc thermique	107
4.2.1	Représentation du problème	107
4.2.2	Variation de la température	109
4.2.3	État de contrainte avant nucléation	109
4.2.4	Nucléation de fissure - Différentes approches de résolution . .	111
4.2.5	Influence du chargement thermique sur la nucléation	125
4.2.6	Influence de l'espacement entre les fissures	129
4.3	Système de fissures parallèles - nucléation vs. propagation	132
4.3.1	Présentation des deux scénarios envisagés	132
4.3.2	Conclusions	142
5	Nucléation de fissure en présence de couplage thermo-hydro-mécanique	145
5.1	Introduction	146
5.2	Thermodynamique de la nucléation en thermo-poro-élasticité saturée	147
5.2.1	Équations d'états thermoporoélastiques	147

5.2.2	Énergie interne totale d'un milieu poreux en conditions non-drainées	149
5.2.3	Variation de l'énergie interne dans la fissure	154
5.3	Conclusions	166
6	Nucléation de fissure dans un contexte thermo-hydro-mécanique	169
6.1	Introduction	171
6.2	Couplages Thermo-hydro-mécaniques en milieu poreux	172
6.2.1	Équations constitutives des transferts	172
6.2.2	Analyse temporelle des phénomènes de diffusion dans les argilites	174
6.3	Modélisation à long terme du problème de stockage de déchets radioactifs	175
6.3.1	Architecture du stockage	176
6.3.2	État de référence et paramètres thermoporomécaniques	179
6.4	Analyse thermique du champ proche	180
6.4.1	Sollicitations thermiques des déchets	180
6.4.2	Évolution de la température dans l'argilite	182
6.5	Comportement thermo-poro-mécanique du stockage à long terme	187
6.5.1	Un modèle analytique simplifié	188
6.5.2	Modélisation numérique	198
6.6	Nucléation de fissure dans la zone de stockage	204
6.6.1	modélisation de la fissuration	204
6.7	Conclusions	210
7	Conclusions et perspectives	213
7.1	Conclusions	213
7.2	Perspectives	217
A	Représentation de l'objet fissure	219
A.1	Représentation idéalisée et Potentiels d'Airy	219
A.2	Représentation elliptique de la fissure	224

B	Problème d'Eshelby généralisé	227
B.1	Composantes du tenseur de Hill pour une inclusion sphéroïdale	228
C	Solution de Diffusion thermique	231
C.1	Milieu semi-infini	231
C.2	Sphère de rayon R dans un milieu infini	233
C.3	Cylindre de rayon R dans un milieu infini	234
D	Solution du modèle analytique simplifié	237
E	Tableaux fonctions de forme	239
	Bibliographie	241

Table des figures

1-1	Bilan des stocks de matières radioactives (en tML, excepté pour les combustibles usés de la défense nationale en tonnes d'assemblages) . . .	21
1-2	Illustration de l'installation souterraine de Cigéo[24]	23
1-3	Illustration d'une Alvéole de stockage	23
1-4	Chronogramme des phénomènes majeurs affectant le stockage [24] . . .	25
2-1	Représentations géométriques de l'objet fissure	31
2-2	Allure du taux de restitution d'énergie pour une nucléation de fissure stable	38
2-3	Représentation du milieu fissuré Ω_0	41
2-4	Chemin d'évolution pendant la nucléation de fissure	50
2-5	Élévation de la température à l'intérieur de la fissure en fonction de son épaisseur ϵ (pour un matériau donné)	53
3-1	Représentation du délaminage comme nucléation de fissure en mode I	61
3-2	Problème de délaminage d'une poutre par chargement ponctuel . . .	62
3-3	Distribution de chargement le long de la poutre	63
3-4	$G_{inc}(\ell)$ pour les deux types de chargement ($EI = 1$ U.A.)	65
3-5	Représentation de la nucléation de fissure par dilatation différentielle	66
3-6	Évolution de la température en fonction du rapport t/τ_c le long de l'axe Ox	68
3-7	Représentation FEM de la nucléation de fissure par dilatation différentielle	69

3-8	Taux de restitution incrémental d'énergie en fonction de la taille de fissure et du temps de diffusion thermique	71
3-9	Taille de fissure stable en fonction du temps de diffusion critique	72
3-10	Illustration du principe de superposition pour déterminer le taux de restitution d'énergie incrémental	80
3-11	Modélisation du creusement de puits	87
3-12	distribution du champ de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ sur la paroi en fonction de l'angle θ et le coefficient d'anisotropie κ	88
3-13	Modélisation de la nucléation de fissure en mode I	89
3-14	$G_{inc}(\ell)$ en fonction de $\lambda = \ell/R$ pour différents rapport d'anisotropie κ	91
3-15	Variation de la longueur de nucléation et du chargement critique en fonction de l'anisotropie de la compression	92
3-16	Délaminage d'une plaque en flexion	93
3-17	Problèmes de référence pour le délaminage	94
3-18	Fonctions de forme pour un rapport $\frac{H}{W} < 1.5$ [27]	95
3-19	Nucléation de fissure par délaminage	96
3-20	Milieu semi-infini contenant une fissure au bord soumise à une distribution de pression quelconque	98
3-21	Problèmes de référence pour la résolution de fissuration à la surface	99
3-22	Rapport q^n/P le long de la fissure pour différents pas d'itération pour un chargement ponctuel en $b = a/2$	100
3-23	Milieu semi-infini contenant une fissure au bord soumise à une distribution de pression $\sigma(x)$	101
4-1	Exemples de fissures créées par choc thermique	106
4-2	Représentation du problème du choc thermique	107
4-3	Nucléation de fissure sous choc thermique	112
4-4	Allure de $G_{inc}(\ell)$ par approche variationnelle en déplacement	115
4-5	Illustration de la reformulation du problème de choc thermique par superposition	117

4-6	Représentation du chargement ponctuelle à une distance d de l'origine de la fissure	117
4-7	Allure de $G_{inc}(\ell)$ pour différents rapports $\frac{L}{H}$	119
4-8	Comparaison du $G_{inc}(\ell)$ obtenu pour différents rapports $\frac{L}{H}$ et celui obtenu par méthode itérative	121
4-9	Procédure de résolution par éléments finis	122
4-10	Représentation FEM de la géométrie du problème (Cast3M)	123
4-11	Taux de restitution d'énergie incrémental pour le choc thermique obtenu par différentes méthodes	124
4-12	Histogramme du temps critique de nucléation t_c obtenu pour les différentes méthodes utilisées	125
4-13	Effets de la température imposée sur la nucléation de fissure	126
4-14	Variation de la température imposée au niveau de la paroi en fonction du temps pour différents temps caractéristiques de chargement	128
4-15	Effets de la vitesse du choc température imposée sur la température	130
4-16	Effet de la vitesse de chargement du choc thermique sur la nucléation de fissure	131
4-17	Effet de l'espacement des fissures sur la nucléation	132
4-18	Schéma représentant les deux scénarios de l'évolution du milieu avec la progression de la diffusion thermique	133
4-19	Évolution du taux de restitution d'énergie en fonction du front thermique	134
4-20	Représentation du scénario de nucléation d'une nouvelle fissure de longueur ℓ_1	135
4-21	Représentation de la deuxième nucléation	136
4-22	Évolution du taux de restitution d'énergie incrémental en fonction du front thermique	138
4-23	Évolution du chargement critique de nucleation et propagation en fonction de l'espacement entre les fissure	139

4-24	Évolution du chargement critique de nucleation et propagation en fonction de l'espacement entre les fissure pour deux tailles de fissure initiale différentes	140
5-1	Problème d'Eshelby post-nucléation en conditions adiabatique et non-drainée	159
5-2	Évolutions du fluide à l'intérieur de la fissure dans le diagramme de changement de phase de l'eau	162
6-1	Organisation de la zone de stockage C [24]	176
6-2	Représentation géométrique du stockage de déchets radioactifs	178
6-3	Émission thermique de colis de déchets C au cours du temps [24]	181
6-4	Modélisation du système de stockage symétrisé	183
6-5	Évolution de la température du milieu dans le temps	184
6-6	Représentation de la variation de température au voisinage de colis de stockage au cours du temps	185
6-7	Évolution de la température maximale atteinte pour différents espacements de colis	185
6-8	Modélisation simplifiée de la disposition périodique des colis sphériques	188
6-9	Comparaison entre les deux variations de température pour la solution transitoire et stationnaire	189
6-10	Schéma d'une galerie de stockage sphérique avec le plan de symétrie entre 2 alvéoles	192
6-11	Représentation de la variation de de la contrainte totale et de la pression le long de la médiatrice pour différentes valeurs de η	193
6-12	Représentation de la variation de de la contrainte effective le long de la médiatrice pour différentes distance de η	194
6-13	Variation relative de la contrainte totale en compression in-situ par rapport à la contrainte totale en conditions non-confinée	195
6-14	Représentation de la variation de de la contrainte effective ainsi que la zone de transition en compression	196

6-15	Géométrie symétrisée du stockage	198
6-17	Variation de la température en fonction de x depuis la source de chaleur pour les deux résolutions numérique et théorique	201
6-18	Comparaison entre les variations de la pression et de la contrainte horizontale totale le long du plan de symétrie entre les alvéoles pour les deux résolutions numérique et théorique	202
6-19	Variation de la température le long du plan de symétrie entre deux alvéoles ($\eta = 2$) pour les deux résolutions numérique et théorique	203
6-20	Variation du taux de restitution d'énergie incrémental $G_{inc}(\ell, t)$ à différents instants pour une configuration géométrique définie par $\eta = 1.35$	206
6-21	courbes de $G_{inc}(\ell)$ à l'instant critique de nucléation pour différentes valeurs de η	207
6-22	Paramètres de nucléation en fonction de l'espacement	208
A-1	Repère local au niveau de la pointe de fissure	220
A-2	Fissure chargée d'une distribution de pression $p(r)$	221
A-3	Représentation de la singularité de contrainte radiale d'une fissure en traction dans un milieu infini	223
A-4	Problème inclusionnaire d'Eshelby	225
B-1	Problème d'Eshelby généralisé	227

Liste des tableaux

4.1	Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 0.5$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]	118
4.2	Longueur de fissure ℓ_c et longueur de diffusion critique l_t pour différents rapports $\frac{L}{H}$	119
4.3	Convergence du calcul numérique pour le problème de nucléation de fissure par choc thermique	123
6.1	Paramètres poromécaniques mesurées par différents auteurs [70], [53], [52] et [2] pour un état de compression $\sigma = 14 MPa$ et une pression de fluide $p = 4 MPa$	180
6.2	Convergence du calcul numérique pour la nucléation de fissure entre les alvéoles de stockage	205
E.1	Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 1.25$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]	239
E.2	Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 1.00$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]	239
E.3	Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 0.75$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]	240
E.4	Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 0.5$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]	240

Chapitre 1

Contexte et Objectifs

Contents

1.1	Contexte Industriel	20
1.1.1	Industrie nucléaire et déchets radioactifs	20
1.1.2	Projet Cigéo	22
1.1.3	Les différentes phases du stockage	24
1.1.4	Objectif du travail	25
1.2	Organisation du manuscrit	26

1.1 Contexte Industriel

1.1.1 Industrie nucléaire et déchets radioactifs

L'industrie nucléaire française voit le jour en 1955 avec la mise en place du premier réacteur nucléaire à Uranium naturel graphite gaz par le Commissariat à l'énergie atomique (CEA) qui est un organisme gouvernemental chargé de mettre en oeuvre des programmes de recherche liés à l'énergie nucléaire.

De nos jours, la France compte plus de 58 réacteurs répartis sur 19 sites nucléaires qui produisent environ 405 TWh d'énergie nucléaire chaque année, dont 77% de la production d'électricité française. Cette source d'énergie, considérée comme la principale source d'énergie produite et consommée en France, produit des déchets radioactifs qui sont des substances radioactives pour lesquelles aucune utilisation ultérieure n'est prévue ou envisagée pour le moment. Les secteurs économiques qui contribuent le plus à la production de ces déchets radioactifs sont les secteurs de l'électronucléaire, de la recherche et de la défense, avec l'équivalent de 2Kg de déchets radioactifs par personne chaque année¹.

Par ailleurs, les déchets radioactifs ne sont pas tous égaux, ils contiennent en général un mélange de radionucléides (isotopes radioactifs comme le césium, plutonium, etc.) et d'autres composants en fonction de leur origine. Un système de classification permet d'identifier les différents types de déchets en fonction de deux caractéristiques: le niveau de radioactivité et la période d'activité.

La première caractéristique mesure le niveau de radiation émis par les radionucléides, qui correspond au nombre de désintégrations de noyaux qui se produisent par seconde exprimé en Becquerels par gramme (Bq/g).

On distingue quatre niveaux de radioactivité: une très faible activité (VL) pour une radioactivité inférieure à 100 Bq/Kg, une faible activité (FL) pour une activité comprise entre quelques centaines à un million de Becquerels par gramme, une moyenne activité (MA) lorsque l'activité est de l'ordre d'un million à un milliard de Becquerels

1. <https://international.andra.fr/radioactive-waste-france/what-radioactive-waste/radioactive-waste>

Catégorie de matière	À fin 2019	Évolution 2019-2018	Part étrangère	
Uranium naturel	extrait de la mine	38 100	+2 200	
	enrichi	3 440	+110	
	appauvri	321 000	+3 000	
Uranium issu du retraitement des combustibles usés ¹	enrichi	0	-	
	sortie de retraitement	32 700	+1 100	8 %
Combustibles à base d'oxyde d'uranium (UNE, URE)	avant utilisation	419	+143	
	en cours d'utilisation	4 160	-200	
	usés	11 900	-100	négligeable
	rebuts	0	-	
Combustibles à base d'oxyde mixte (MOX, RNR)	avant utilisation	16	+16	
	en cours d'utilisation	348	-76	
	usés	2 270	+130	
	rebuts ²	299	+17	
Combustibles des réacteurs de recherche	avant utilisation	0,01	-0,01	
	en cours d'utilisation	1	+0,10	
	usés	60	-	2 %
Plutonium	58	+2	26 %	
Thorium	8 570	+2		
Matières en suspension	5	-		
Autres matières ³	70	-		
Combustibles de la Défense nationale	198 tonnes	+4 tonnes		

FIGURE 1-1 – Bilan des stocks de matières radioactives (en tML, excepté pour les combustibles usés de la défense nationale en tonnes d'assemblages)

par gramme et une haute activité (HA) lorsque l'activité est de l'ordre de plusieurs milliards de Becquerels par gramme.

Une faible quantité de déchets radioactifs présente une haute activité soit 0.2% du volume de déchets pris en charge par l'Andra, soit environ $4000m^3$ en 2019².

La deuxième caractéristique représente le temps nécessaire pour que l'activité initiale d'une quantité d'un radionucléide donné soit divisée par deux, on distingue: des déchets à durée de vie très courte (VTC) avec une période inférieure à 100 jours, des déchets à durée de vie inférieure ou égale à 31 ans (VC) et des déchets dit à vie longue (VL) dont la période est supérieure à 31 ans.

On considère que la radioactivité diminue considérablement après dix demi-vies soit l'équivalent pour un déchet à vie courte à 300 ans, tandis que pour des déchets à vie longue leur durée de vie peut atteindre des milliers d'années.

2. https://inventaire.andra.fr/sites/default/files/documents/pdf/fr/andra_essentiels_2021_in_web.pdf

La question de la gestion de ces déchets radioactifs est donc centrale. Elle a été confiée à l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (ANDRA) dans le cadre du projet français Cigéo.

1.1.2 Projet Cigéo

Le projet Cigéo est conçu pour stocker les déchets hautement radioactifs et à durée de vie longue produits par l'ensemble des installations nucléaires actuelles, jusqu'à leur démantèlement, et par le traitement des combustibles usés utilisés dans les centrales nucléaires. Le stockage de ces déchets radioactifs dans des centres dédiés et adaptés à leur nature permet de protéger l'homme et l'environnement et permet de les isoler le temps de diminuer leur radioactivité. En fonction du niveau de radioactivité, les centres de stockages peuvent être soit en surface ou à faible profondeur entre 15 et 200 mètres sous terre ou en profondeur à environ 500 mètres sous terre. Pour les déchets à haute radioactivité et à vie longue (HA/MA-VL), qui représentent environ 10% des déchets radioactifs, un stockage profond est nécessaire.

C'est dans ce cadre que s'inscrit le projet Cigéo mis en place par l'Andra qui est un centre industriel de stockage géologique profond pour les déchets (HA/MA-VL) situé dans l'Est de la France, à la limite du département de la Meuse et de la Haute-Marne. Les recherches géologiques ont permis d'identifier ce site comme emplacement favorable à l'implantation du stockage profond sur une superficie d'environ 250km² au sein de laquelle la formation hôte de l'argilite du Callovo-Oxfordien à une profondeur de 525m présente les propriétés adéquates pour répondre aux trois grandes fonctions de sûreté prévues [24]:

- S'opposer à la circulation de l'eau dans l'installation de stockage.
- Confiner la radioactivité.
- Isoler les déchets de l'homme et de la biosphère pour que la sûreté du stockage ne soit pas affectée de façon significative par les phénomènes d'érosion climatique ou par les activités humaines banales.

Les déchets sont stockés sous forme de colis dans des alvéoles (Figure 1-3) creusées dans le Callovo-Oxfordien suivant les directions des contraintes principales majeures

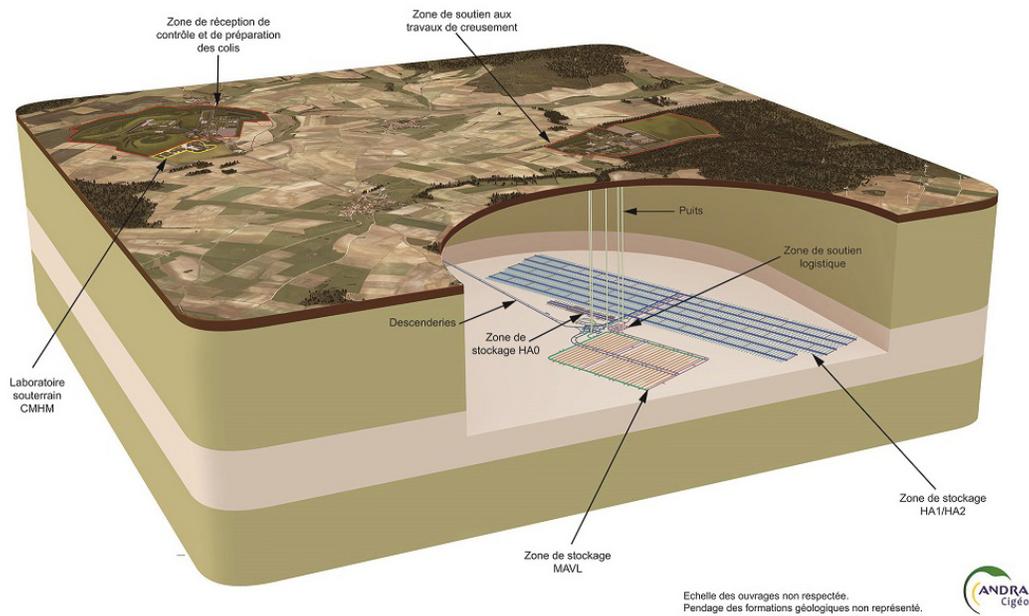


FIGURE 1-2 – Illustration de l’installation souterraine de Cigéo[24]

et mineures et desservis par des galeries d’accès. La liaison entre la surface et l’installation souterraine se fait par deux descenderies et des puits verticaux (Figure 1-2).

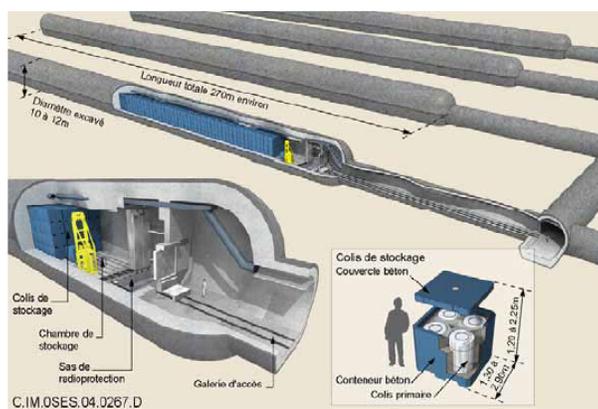


FIGURE 1-3 – Illustration d’une Alvéole de stockage

1.1.3 Les différentes phases du stockage

Afin d'assurer un enfouissement en toute sécurité des déchets radioactifs, une connaissance approfondie du comportement de la roche hôte sous différentes sollicitations physico-chimiques pendant tout le long de la période d'exploitation est nécessaire. On peut distinguer plusieurs phases chronologiques caractérisées par différents phénomènes prépondérant pendant la durée de vie du site (Figure 1-4):

Phase initiale antérieure à la construction du site qui caractérise l'état de contrainte in-situ antérieur à toute perturbation.

Phase d'excavation caractérisée par des sollicitations mécaniques: lié à la redistribution des contraintes après excavation et mise en place du soutènement, et hydrique: séchage de la paroi excavée dû à la ventilation.

Ces sollicitations sont à l'origine d'endommagement de la roche hôte et de l'apparition de réseau de fractures dans la zone proche des parois nommée EDZ. En l'absence d'auto-colmatage de la roche, la perméabilité de l'EDZ peut devenir 6 fois plus grande que la perméabilité initiale [66].

Phase d'installation et de stockage caractérisée d'une part par un couplage hydro-mécanique représenté par une ressaturation de la zone EDZ et bouchons qui engendre une pression sur la zone endommagée qui favorise le colmatage des fissures et diminue la perméabilité de l'EDZ, et d'autre part la sollicitation thermique aura tendance à sécher le champs proche. Le couplages entre la ressaturation et le gradient de température a un effet significatif sur le comportement de l'EDZ. La roche à proximité des colis est soumise à l'effet de cycles de ressaturation/dessaturation.

Phase de post-exploitation la roche est totalement saturée et le flux thermique est décroissant en fonction du temps, cette période prend des centaines d'années voire des milliers avant de s'estomper. Les processus majeurs comprennent le scellement de la roche, la dégradation des colis et les effets chimiques et biologiques à long terme.

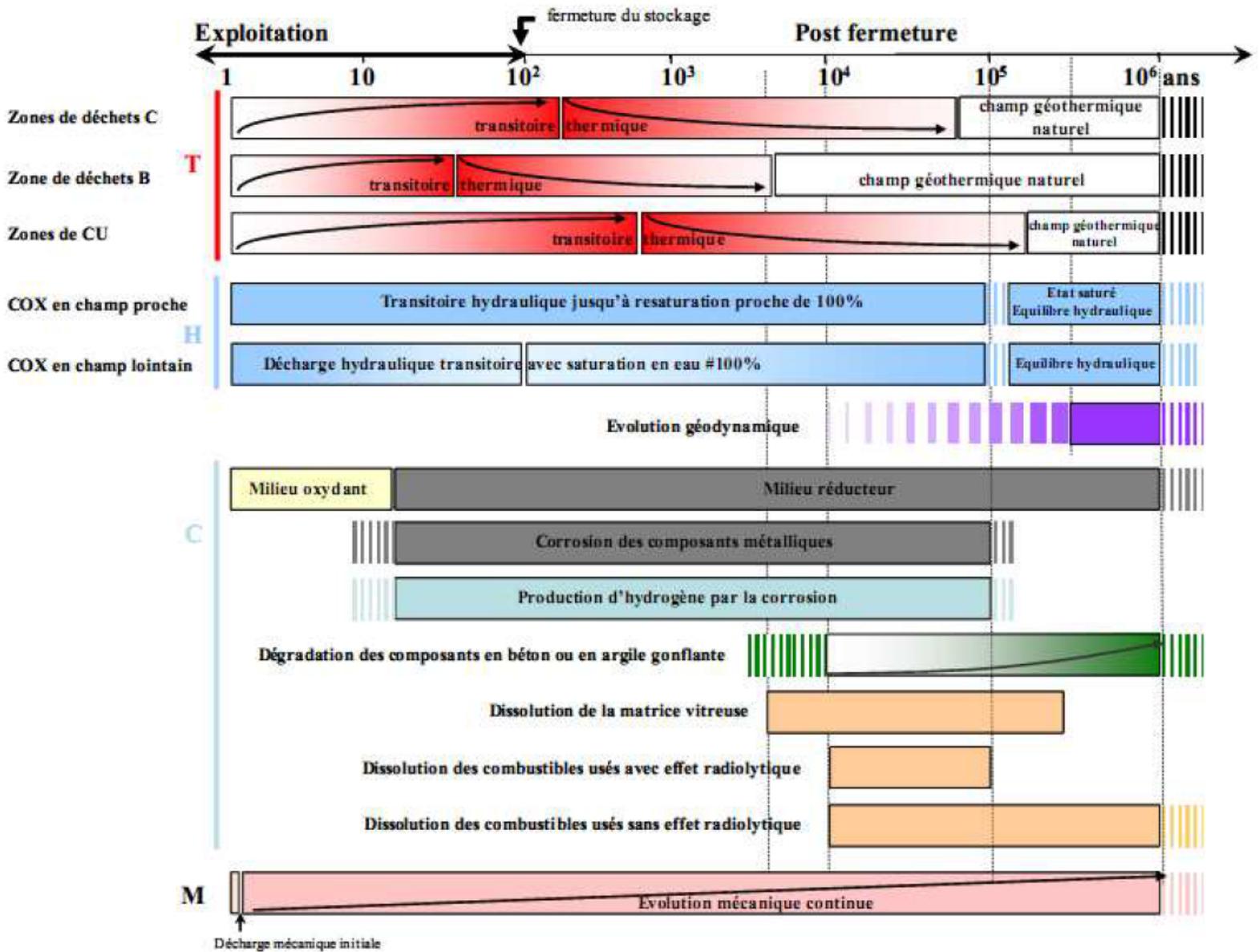


FIGURE 1-4 – Chronogramme des phénomènes majeurs affectant le stockage [24]

1.1.4 Objectif du travail

On s'intéresse dans ce travail à la phase d'exploitation du réseau de stockage c'est à dire le comportement à long terme des dispositifs de stockage après dépôt et scellement des alvéoles. Durant cette phase, la roche est soumise à différentes sollicitations thermo-hydro-mécanique qui peuvent jouer un rôle majeur dans l'apparition d'insta-

bilités et de fissures qui risque de favoriser la migration des radionucléides.

L'effet le plus marqué du dégagement thermique des déchets radioactifs est l'élévation de la température dans le massif rocheux. Par conséquent, des contraintes thermomécaniques apparaissent, les pressions des phases fluides augmentent et des réactions chimiques altèrent les propriétés de la roche et des barrières ouvragées. La phase de refroidissement qui s'en suit peut aussi induire des phénomènes de contraction et donc de fissuration thermique.

En se référant aux travaux antérieurs portant sur la caractérisation in situ et la compréhension globale des phénomènes intervenant pendant la phase d'exploitation du stockage, ainsi que les travaux portant sur l'endommagement et la fissuration des matériaux, on se propose dans ce travail de traiter la problématique de nucléation de fissure d'origine thermique en partant d'une analyse théorique du processus de nucléation pour aboutir à une analyse concrète de la problématique industrielle de l'Andra.

1.2 Organisation du manuscrit

Ce travail a pour objectif d'étudier le phénomène de nucléation de fissure en tirant profit du double critère énergétique proposé par T. Carlioz [10], avec comme finalité d'aborder la problématique industrielle de l'ANDRA du stockage de déchets radioactifs et des risques de nucléation de fissures liée au dégagement de chaleur après fermeture du stockage.

Le **chapitre 2** est tout d'abord dédié à la présentation du cadre thermodynamique adapté au phénomène de la nucléation qui est interprété dans le cadre d'une évolution adiabatique et que le comportement du milieu non-fissuré reste réversible. Cette représentation permet de rendre compte, de manière analytique, de l'élévation de température à l'intérieur de la fissure suite à la nucléation. Dans ce contexte, nous présenterons le double critère énergétique [10]: ce dernier réunit deux conditions complémentaires de nucléation et de stabilité, qui permettent de s'assurer, à partir de la variation du taux incrémental de restitution de l'énergie G_{inc} , de la nucléation d'une

fissure stable et de déterminer sa taille ℓ ainsi que le chargement critique capable de le nucléer.

Le **chapitre 3** propose différentes approches de la mécanique linéaire qui permettent d'accéder à la grandeur incrémentale du taux de restitution de l'énergie pour des fissures stables de longueur finie. Une approche directe plus simple mais coûteuse en temps de calcul, consiste à résoudre explicitement les deux problèmes sain et fissuré pour calculer la variation de leurs énergies potentielles puis en déduire le taux incrémental de restitution de l'énergie. Une autre méthode de résolution par approche variationnelle fournit une approximation analytique du G_{inc} en proposant un encadrement de cette grandeur. Finalement une approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture, à partir du lien entre le taux incrémental de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes, permet de valoriser les méthodes de détermination des facteurs d'intensité de contrainte pour traiter la nucléation de fissure. Avec ces outils capables de gérer la problématique de nucléation de fissure, nous avons proposé plusieurs exemples qui mettent en oeuvre ces méthodes afin d'illustrer le fonctionnement de chacune et discuter de leurs efficacité et domaine de validité.

Le **chapitre 4** aborde la problématique du choc thermique et de l'apparition de réseaux de fissures induites par une chute brutale de température. On se propose de traiter cette problématique comme une nucléation de fissures en utilisant le critère énergétique avec les différents outils présentés dans le Chapitre 3. L'étude s'étendra plus loin puisqu'elle couvrira l'évolution dans le temps de ce réseau de fissures nucléées en mettant en compétition les processus de propagation de fissures existantes et de nucléation de nouvelles fissures dans le milieu.

Le **chapitre 5** se présente comme une extension du chapitre 2 dans le cadre thermodynamique de la nucléation de fissure dans un milieu poreux saturé. La nucléation brutale d'une fissure avec la présence d'une phase fluide suggère, en plus d'une évolution adiabatique, une évolution non-drainée du fluide. Cette considération permet de ramener l'expression de la variation de l'énergie interne au cours du processus de nucléation dans un cadre thermo-poro-élastique à l'évaluation d'une énergie interne introduisant un tenseur d'élasticité adiabatique non-drainé. Par la suite une attention

particulière a été portée sur la représentation de la fissure, comme une zone tridimensionnelle saturée par un fluide sous pression ou sèche, ainsi que des conséquences de cette représentation sur l'évaluation de la nucléation et de l'élévation de température à l'intérieur de la fissure.

Le **chapitre 6** constituera l'aboutissement des chapitres précédents. On propose une analyse détaillée de la problématique industrielle de stockage des déchets exothermiques, particulièrement lors de l'évolution à long terme après le dépôt et la fermeture du stockage. Puis, nous examinerons les risques de nucléation de fissures en mode I entre les alvéoles de stockage dans le but de dégager un espacement de sûreté entre ces alvéoles.

Finalement le **chapitre 7** présentera les principales conclusions de ce travail et l'ouvrira vers un certain nombre de perspectives.

Chapitre 2

Critère de nucléation énergétique

Contents

2.1	Introduction	30
2.2	Modélisation de la fissure	31
2.3	Modélisations de la nucléation de fissure	32
2.3.1	Modèle d'endommagement local et gradient d'endommagement	32
2.3.2	Critère de nucléation mixte	34
2.3.3	Formulation du critère énergétique	37
2.4	Thermodynamique de la nucléation	39
2.4.1	Formalisme du cadre thermodynamique macroscopique	40
2.4.2	Sollicitations thermomécaniques	40
2.4.3	Tenseur d'élasticité adiabatique et énergie interne de la fissure	46
2.5	Conclusions	54

2.1 Introduction

La fracturation dans les matériaux est souvent à l'origine de défaillances qui peuvent compromettre la stabilité et la sûreté des structures. D'où l'importance d'une connaissance approfondie de la mécanique de la rupture qui permet de comprendre et prévenir ces mécanismes de fissuration afin de garantir une intégrité à ces structures. L'étude de la rupture des matériaux fragiles, ayant une capacité de déformation plastique faible sous chargement quasi-statique, a vu le jour avec les travaux de Griffith [35]. Cette théorie se base sur le principe d'une compétition entre l'énergie de création de nouvelles surfaces et l'énergie potentielle de la structure. Elle prédit alors l'initiation de la fissure lorsque le taux de restitution d'énergie est égal à la tenacité du matériau. Cependant cette théorie présente des limitations liées à l'effet d'échelle puisqu'elle n'introduit pas de longueur interne de fissuration. En effet, il a été montré que le chargement critique d'initiation d'une fracture dans une structure de taille L est proportionnel à $1/\sqrt{L}$ [48]. Nous attendons alors, pour une structure de taille $L \rightarrow 0$, que le chargement critique d'initiation de fissure soit infini, ce qui est inconsistent avec les observations expérimentales. Cela a mené plusieurs chercheurs, notamment avec les contributions d'Irwin [41], Erdogan et Sih [37] et de Rice [61], à formuler des critères de fissuration locaux basés sur l'évaluation de la singularité du champ de contrainte en pointe de fissure. En particulier les travaux d'Irwin [41] ont permis de faire le lien entre le taux de restitution d'énergie classiquement introduit dans les critères de propagation de fissure de type Griffith et les facteurs d'intensité de contrainte. Cependant cette approche reste incomplète puisqu'elle ne permet pas d'expliquer la formation de fissure pour une distribution régulière des contraintes. Par la suite, plusieurs approches ont alors été proposées dans le but de surmonter ces difficultés: des modèles de zones cohésives [6], [16], [21], ou bien en introduisant les non-linéarités du matériau [34], ou encore des approches se basant sur un double critère combinant le taux de restitution d'énergie et la résistance du matériau [48]. Ce n'est que récemment avec les travaux de Francfort & Marigo [30] ou encore Bourdin & al. [8] et Chambolle & al. [14] qu'une formulation variationnelle de la rupture fragile

appelé aussi modèle à champ de phase, a été proposée.

Dans ce travail, on étudie la nucléation de fissure stable dans les matériaux fragiles en utilisant une approche énergétique, proposé par T. Carlioz [10]. Elle consiste à s'affranchir de l'évaluation du processus conduisant à la nucléation pour ne s'intéresser qu'aux deux états initial et final du processus.

2.2 Modélisation de la fissure

Avant d'aborder la nucléation de fissure stable dans le cadre d'approches énergétiques faisant intervenir des bilans d'équilibre thermodynamiques, il convient de définir l'objet fissure étudié et de proposer une modélisation pertinente de celle-ci.

Une fissure est le résultat d'une rupture caractérisée par la séparation irréversible du milieu en deux parties distinctes. On définit alors la fissure comme étant le domaine géométrique tridimensionnel de séparation au sein de cette structure, caractérisé par une dimension très faible devant les deux autres. Par ailleurs la nature géométrique de la fissure reste assez complexe et difficile à représenter. On retient deux grandes familles de représentation qui permettent d'appréhender la nature de cet objet (Figure 2-1).

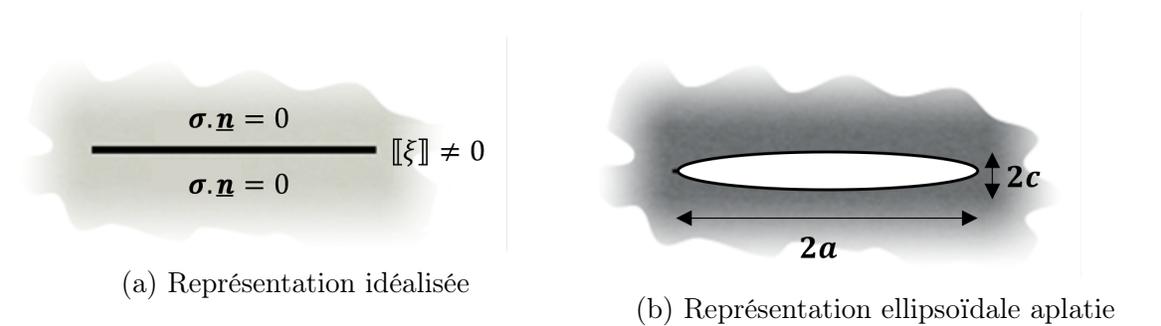


FIGURE 2-1 – Représentations géométriques de l'objet fissure

- Une représentation idéalisée (Figure 2-1a) proposée initialement par Griffith dans [35] qui modélise la fissure comme une surface de discontinuité dans le milieu, où les deux faces de cette fissure sont libres de contrainte et animées de deux cinématiques différentes, tout en respectant la condition de non pénétra-

tion. L'ouverture de la fissure correspond dans ce cas au saut de déplacement le long de la surface. On écrit alors en tout point appartenant au deux surfaces de la fissure:

$$[[\xi]].n \geq 0 \quad ; \quad \underline{T} = \underline{\sigma}.n = \underline{0} \quad (2.1)$$

La présentation détaillée de cette modélisation est donnée en Annexe [A.1](#).

- Une deuxième approche considère un domaine géométrique généralement représenté par une ellipse en deux dimensions et un ellipsoïde en trois dimensions, de grande taille caractéristique, son grand axe $2a$, et de petite taille caractéristique, son petit axe $2c$ ([2-1b](#)). La fissure s'interprète alors dans le passage à la limite de $X = \frac{c}{a} \rightarrow 0$ où X désigne le rapport d'aspect. Cette représentation permet entre autre de s'affranchir des difficultés liées aux singularités de contrainte en pointe de fissure dans le cas de représentations idéalisées Annexe [A.2](#).

2.3 Modélisations de la nucléation de fissure

On s'attache ici à présenter de façon non-exhaustive les principales familles de modélisation de la nucléation de fissure proposées dans la littérature.

2.3.1 Modèle d'endommagement local et gradient d'endommagement

Le principe de ce modèle consiste à approcher la zone de fissuration à une échelle inférieure comme étant une zone d'épaisseur non nulle endommagée suite à des processus microstructuraux qui altèrent la microstructure du milieu, que ce soit par microfissuration ou encore par accroissement des microvides existants.

Lemaître & Chaboche [\[51\]](#) propose une approche macroscopique reposant sur une variable macroscopique d'endommagement notée d .

La densité volumique de l'énergie libre se met sous la forme:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

où le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(d)$ est une grandeur décroissante de d qui passe de \mathbb{C}_0 à 0 pour une variable d allant de 0 à 1. Cette variable d'endommagement trouvera plus tard un support micromécanique [39][13].

Une combinaison du premier principe et du second principe de la thermodynamique dans un cadre isotherme conduit à l'expression de la dissipation en fonction de l'énergie libre de la forme:

$$D = - \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \quad (2.3)$$

Par conséquent, la force thermodynamique associée à l'endommagement définie par: $F(d) = - \frac{\partial \psi}{\partial d} = - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \boldsymbol{\varepsilon}$ permet d'adopter le critère d'endommagement suivant défini par une borne supérieure g_c introduite comme constante caractéristique du matériau:

$$\dot{d} \begin{cases} = 0 & \text{Si} & - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \boldsymbol{\varepsilon} < g_c \\ \geq 0 & \text{Si} & - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \boldsymbol{\varepsilon} = g_c \end{cases} \quad (2.4)$$

Toutefois, les équations obtenues à l'issue d'une approche thermodynamique rigoureuse sont mathématiquement mal posées puisqu'il est possible de trouver une infinité de solutions indépendantes qui ne sont pas stables [58]. Cela découle du fait que la localisation du champ d'endommagement dans des régions de taille infinitésimale prédit la rupture de la structure sans aucune dissipation d'énergie [3].

Méthodes régularisées

Dans le but d'éviter les limitations inhérentes aux modèles locaux une méthode consiste à présenter le problème sous forme variationnelle [30] en introduisant un critère de stabilité d'un état d'équilibre à partir de la stationnarité d'une intégrale

appelée énergie totale $\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}, d)$ définie par:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}, d) = E_p(\boldsymbol{\xi}, d) + \int_{\Omega} g_c d dV \quad (2.5)$$

où E_p est l'énergie potentielle classique calculée à partir de l'énergie libre ψ . Ainsi Francfort & Marigo [29] suggèrent de s'intéresser non seulement aux évolutions vérifiant la stationnarité de \mathcal{P} mais aussi à son minimum par rapport au déplacement cinématiquement admissible et à la distribution de l'endommagement dans le milieu. Afin de régulariser les problèmes d'une approche locale, ils introduisent un terme supplémentaire en gradient d'endommagement dans la fonctionnelle \mathcal{P} .

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}, d) = E_p(\boldsymbol{\xi}, d) + \int_{\Omega} \left(g_c d + \frac{1}{2} E_0 \ell^2 \nabla d \cdot \nabla d \right) dV \quad (2.6)$$

Celui-ci permet de pénaliser les champs d'endommagement dans des zones spatiales trop petites par rapport à une longueur interne ℓ ce qui permet de limiter la localisation de l'endommagement du point de vue de la minimisation. Cette formulation proposée par Pham et Marigo [59] dite à gradient d'endommagement bien que proposée dans un cadre mathématique, plutôt que physique, fournit des résultats très intéressants dans différents domaines [65], [7], [54] et confrontée avec succès par rapport aux observations expérimentales.

2.3.2 Critère de nucléation mixte

Une autre stratégie pour aborder la nucléation de fissure est celle proposée par D. Leguillon [48] avec le double critère (critère mixte). Cette approche permet de statuer à partir d'un site préférentiel, sur la nucléation d'une fissure de longueur ℓ . Elle se base sur la combinaison de deux conditions: l'une en contrainte et l'autre énergétique permettant de prédire le chargement critique de nucléation ainsi que la taille d'initiation de la nucléation.

Condition énergétique La première condition dite énergétique se base sur le critère de Griffith [35], le principe de cette théorie repose sur un équilibre entre l'énergie potentielle du milieu qui décroît à chaque incrément de fissure et l'énergie de création de nouvelles surfaces représentée par la grandeur $G_c \delta S$, où G_c est défini comme l'énergie de fissuration par unité de surface, introduite comme une constante du matériau, et δS la surface de fissure créée. Le principe de conservation de l'énergie d'un système mécanique lors d'un scénario de fissuration s'écrit sous la forme:

$$\delta E_p + \delta E_c + G_c \delta S = 0$$

où δE_p représente la variation de l'énergie potentielle du milieu et δE_c la variation de l'énergie cinétique. Étant donnée une variation positive ou nulle de l'énergie cinétique ($\delta E_c \geq 0$), on définit le taux de restitution d'énergie $G = -\frac{\delta E_p}{\delta S}$ lorsque l'incrément de surface de fissure $\delta S \rightarrow 0$. Ce dernier doit vérifier la relation:

$$G = -\frac{\partial E_p}{\partial S} \geq G_c \quad (2.7)$$

Partant d'un état initial sain ne contenant pas de fissure et caractérisé par une énergie potentielle notée E_p^0 , la nucléation d'une fissure de longueur ℓ pour un chargement constant est contrôlée par la variation de l'énergie potentielle entre les deux configurations initiale et finale du problème $\Delta E_p = E_p(\ell) - E_p^0$. Cette variation de l'énergie potentielle est représentée par la grandeur énergétique incrémentale G_{inc} définie dans [48] par:

$$G_{inc}(\ell) = -\frac{E_p(\ell) - E_p^0}{\ell} \quad (2.8)$$

Cette grandeur énergétique est similaire au taux de restitution d'énergie classiquement utilisé dans la théorie de Griffith et porte à ce titre le nom de taux de restitution d'énergie incrémental. Elle correspond à la force thermodynamique associée à la création de nouvelles surfaces dans le milieu. La nucléation de fissure est donc possible si le taux de restitution d'énergie incrémental est égal à l'énergie nécessaire pour la création de nouvelles surfaces, c'est à dire l'énergie critique G_c .

Le critère énergétique s'écrit alors:

$$G_{inc}(\ell) = G_c \quad (2.9)$$

Condition en contrainte Le critère en contrainte porte sur la comparaison entre le champ de contrainte dans la configuration de référence et la limite de résistance du matériau constitutif considéré. La nucléation d'une fissure dans un site préférentiel est possible si le champ de contrainte de Cauchy $\sigma(\underline{X})$ dans cette zone est tel qu'il existe une composante en traction supérieure à la résistance limite en traction σ_c , soit:

$$\sigma \geq \sigma_c \quad (2.10)$$

Formulation du critère mixte

Une condition nécessaire et suffisante pour la nucléation d'une fissure de taille ℓ est obtenue lorsque les deux conditions présentées sont toutes les deux satisfaites. Soit ℓ^* la longueur de fissure nucléée, on écrit dans ce cas le critère mixte:

$$\forall \ell < \ell^* \quad : \quad \sigma(\ell) \geq \sigma_c \quad ; \quad G_{inc}(\ell^*) = G_c \quad (2.11)$$

Ce critère permet à la fois de déterminer la longueur de nucléation ℓ^* ainsi que le chargement critique qui amorce l'initiation de cette fissure. Il a été confronté avec succès à plusieurs cas expérimentaux qui mettent en évidence sa capacité à surmonter les limitations des approches en contraintes (la singularité de contraintes au voisinage d'un coin anguleux [50]) et celles des approches énergétiques (l'effet de taille pour le critère énergétique [57] , [60]).

La mise en oeuvre de ce critère repose sur l'utilisation des outils de la mécanique linéaire puisqu'on suppose qu'à l'état initial et final fissuré, le comportement du milieu ne change pas et que l'unique différence est l'apparition de la fissure présentée comme zone de discontinuité de déplacement. Il est important de préciser que le critère mixte suppose que l'emplacement de la fissure qui va nucléer dans le milieu est connu

préalablement, ce qui nécessite de clarifier la représentation du champ de contrainte dans la configuration de référence (avant nucléation). Cette étape peut cependant être facilitée lorsque les géométries considérées présentent des coins anguleux.

2.3.3 Formulation du critère énergétique

Le critère énergétique, proposé initialement par T. Carlioz dans [10], s'inscrit dans la même cadre que celui du critère mixte. Il consiste à s'affranchir de l'évaluation progressive conduisant à la nucléation en ne s'intéressant qu'aux deux instants initial et final de la nucléation à travers la seule définition du taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc} , défini en (2.8).

Carlioz défend que la nucléation d'une fissure de taille finie n'est possible que lorsque celle-ci apparaît de manière brutale depuis un état sain. Dans cette optique, le critère énergétique (2.9) présenté dans le critère mixte n'est pas suffisant pour assurer la stabilité de la fissure puisqu'il ne représente qu'une condition d'initiation. Afin de limiter toute propagation supplémentaire au-delà de cette longueur d'initiation pour un chargement constant, il est obligatoire de vérifier la condition de non-propagation ($\dot{\ell} = 0$) pour des tailles supérieures à celle de la nucléation. Cette condition peut être explicitée sous la forme:

$$\forall \ell \geq \ell_c : \frac{dG}{d\ell}(\ell) \leq 0 \quad (2.12)$$

En considérant que la longueur de nucléation ℓ_c est la plus petite longueur vérifiant (2.9), et que $G_{inc}(0) = 0$, on peut montrer par application du théorème des accroissements finis que la dérivée du taux de restitution d'énergie incrémental est positive en ℓ_c , et on écrit:

$$\frac{dG_{inc}}{d\ell}(\ell_c) = \frac{G_c - G_{inc}(\ell_c)}{\ell_c} \geq 0 \quad (2.13)$$

La combinaison de (2.9) et de (2.13) permet d'établir dans le cas d'une fissure stable les deux conditions nécessaire et suffisante du double critère énergétique (Carlioz, [10]):

$$\begin{cases} G_{inc}(\ell_c) = G_c \\ \frac{dG_{inc}}{d\ell}(\ell_c) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

En conséquence, si le taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc} présente un maximum en ℓ_c et que ce maximum correspond à G_c , on peut dire que nous avons une nucléation de fissure stable de taille ℓ_c pour le chargement constant appliqué. Ces deux conditions permettent à la fois de déterminer la taille de nucléation et le chargement critique pour lequel cette fissure apparaît.

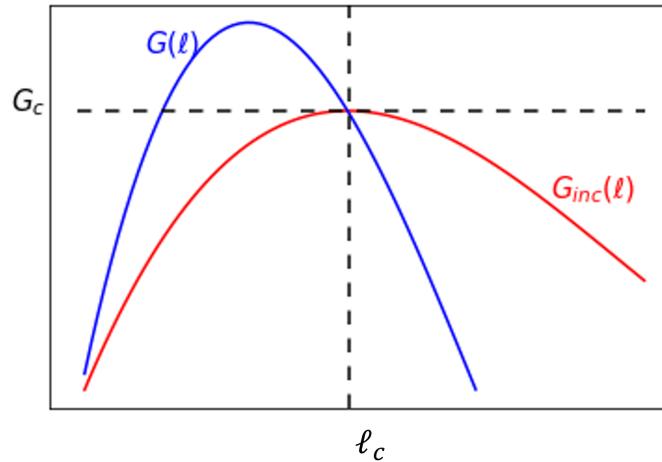


FIGURE 2-2 – Allure du taux de restitution d'énergie pour une nucléation de fissure stable

Stabilité de la nucléation

Il faut préciser que le critère énergétique (2.14) n'est valable que dans le cas de problèmes de fissures stables, vérifiant:

$$\forall \ell > \ell_c \quad ; \quad \frac{dG}{d\ell}(\ell) \leq 0 \quad (2.15)$$

Dans le cas où on ne peut statuer sur la stabilité en $\ell > \ell_c$, une condition supplémentaire portant sur $\frac{d^2 G_{inc}}{d\ell^2}$ est nécessaire pour assurer la stabilité en ℓ_c qui s'écrit de la forme:

$$\frac{d^2 G_{inc}}{d\ell^2} = \frac{1}{\ell} \frac{dG}{d\ell} - \frac{2}{\ell^2} (G - G_{inc}) < 0 \quad (2.16)$$

Critère énergétique

En tenant compte des considérations établies dans la section précédente, deux cas de figure sont envisageables:

- Le taux de restitution d'énergie $G_{inc}(\ell)$ présente un maximum en G_c . Dans ce cas la nucléation est stable, les conditions (2.14) permettent de déterminer la longueur et le chargement critique.
- Le taux de restitution d'énergie $G_{inc}(\ell)$ ne présente pas de maximum en G_c . Dans ce cas, on ne peut plus parler de longueur de nucléation stable. Le critère mixte (2.11) permet d'évaluer le chargement critique pour lequel la propagation instable est amorcée.

Dans la suite, on propose une démonstration rigoureuse de la condition d'initiation (2.9) partant d'une écriture du bilan thermodynamique de la nucléation.

2.4 Thermodynamique de la nucléation

Le phénomène de nucléation correspond à la propagation brutale d'une fissure de manière dynamique et sous chargement constant. Dans ce sens, le temps caractéristique t_{nucl}^{car} de cette propagation entre l'instant où un premier incrément de fissure est apparu et la fin de la propagation correspondant à la formation d'une fissure stable est faible devant celui des autres phénomènes agissant sur la structure t_{Macro}^{car} , soit:

$$t_{nucl}^{car} \ll t_{Macro}^{car} \quad (2.17)$$

Cette considération légitimise le choix d'un cadre thermodynamique qui néglige les échanges thermiques dissipatifs entre la zone où la fissure est apparue et le milieu

sain pendant la nucléation. En d'autres termes, le cadre thermodynamique adapté à l'étude du phénomène de nucléation est celui d'une évolution adiabatique.

2.4.1 Formalisme du cadre thermodynamique macroscopique

On se propose dans cette partie de reprendre le cadre thermodynamique correspondant au phénomène de nucléation [11] dans un cadre généralisé incluant à la fois des efforts mécaniques extérieurs et un apport thermique en chaleur. Ce cadre représente bien le contexte industriel du stockage des déchets exothermiques où la présence de transferts thermiques est une partie inhérente du problème.

Nous allons montrer en particulier que l'écriture du critère de nucléation dans le cadre de l'hypothèse d'adiabaticité de nucléation de fissure reste valable malgré la présence continue des phénomènes thermiques dans le milieu. L'intérêt de cet exercice consiste à renforcer les bases théoriques sur lesquelles repose le critère énergétique [10] tout en justifiant l'utilisation du tenseur d'élasticité adiabatique pour traiter le phénomène de nucléation dans un milieu en présence ou non d'échanges de chaleur, indépendamment du caractère adiabatique de la nucléation elle-même.

2.4.2 Sollicitations thermomécaniques

On considère Ω_0 un milieu contenant une fissure $\mathcal{F}(\ell)$ caractérisée par sa taille ℓ . Cette dernière représente une longueur en 2D et une surface en 3D. On rappelle que la zone fissurée est une zone physique réelle d'épaisseur finie non nulle qui pour des raisons de simplicité a été omise de la représentation géométrique, il est donc possible d'introduire des densités volumiques pour les grandeurs thermodynamiques impliquées.

Soit Ω_{bulk} la partie complémentaire de $\mathcal{F}(\ell)$ dans Ω_0 tel que:

$$\Omega_0 = \Omega_{bulk} \cup \mathcal{F}(\ell) \tag{2.18}$$

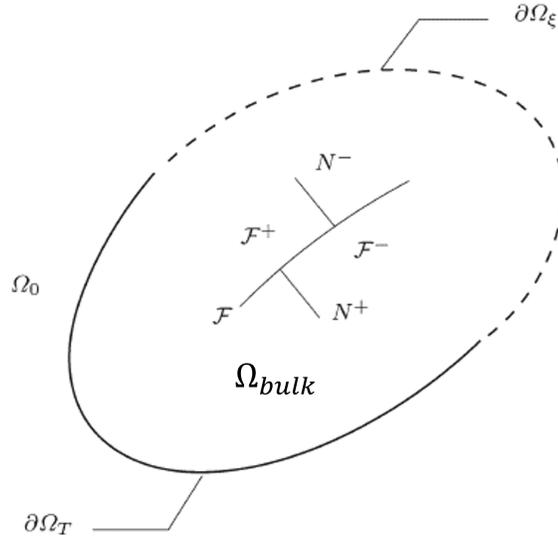


FIGURE 2-3 – Représentation du milieu fissuré Ω_0

Le milieu Ω_0 est soumis à deux types de chargement:

Sollicitations Mécaniques : On considère que le contour $\partial\Omega_0$ est indépendant de ℓ et se décompose en deux parties complémentaires:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_\xi \quad (2.19)$$

où $\partial\Omega_T$ correspond à la partie définie par des conditions aux limites en contrainte et $\partial\Omega_\xi$ à celle définie par un déplacement imposé.

- Forces volumiques \underline{f}_v
- Vecteur Contrainte sur $\partial\Omega_T$: $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \lambda_T(t) \underline{T}^0$
- Déplacement imposé sur $\partial\Omega_\xi$: $\underline{\xi} = \lambda_\xi(t) \underline{\xi}^0$

tels que $\lambda_T(t)$ et $\lambda_\xi(t)$ sont des fonctions scalaires du temps.

Sollicitations Thermiques :

- Contribution volumique $r(\underline{x}, t)$, qui correspond à la chaleur fournie à distance

au milieu et de la production locale de chaleur par réaction chimique ou nucléaire.

— Flux thermique surfacique sur $\partial\Omega$: $\underline{q} \cdot \underline{n} = \underline{q}^d \cdot \underline{n}$

Partant du premier principe de la thermodynamique qui stipule que l'énergie mécanique, représentée par la puissance des efforts mécaniques extérieurs P_e , et l'apport en chaleur $\overset{\circ}{Q}$ fourni au milieu Ω_{bulk} se transforment en une énergie interne U et en énergie cinétique K :

$$\dot{U} + \dot{K} = P_e + \overset{\circ}{Q} \quad (2.20)$$

où la puissance des efforts mécaniques extérieurs se décompose de la forme suivante:

$$P_e = \int_{\Omega} \underline{f}_v \cdot \dot{\underline{\xi}} dV + \lambda_T(t) \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^0 \cdot \dot{\underline{\xi}} dS + \dot{\lambda}_{\xi}(t) \int_{\partial\Omega_{\xi}} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^0 dS \quad (2.21)$$

et $\overset{\circ}{Q}$ l'apport en chaleur au milieu se met sous la forme [62]:

$$\overset{\circ}{Q} = \int_{\Omega} r(\underline{x}, t) dV - \int_{\partial\Omega} \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) dS \quad (2.22)$$

En supposant la linéarité du problème, il est possible de décomposer la vitesse de déplacement ainsi que la densité d'entropie en tout point du milieu comme la somme d'une contribution du chargement \mathcal{C} à géométrie fixe $(\cdot)_{|\ell}$ et d'une contribution liée à l'évolution de la taille de fissure ℓ à chargement extérieur constant $(\cdot)_{|\mathcal{C}}$.

On écrit dans ce cas la décomposition en dérivée partielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{\underline{\xi}} = \dot{\underline{\xi}}_{|\ell} + \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \ell} \dot{\ell} \\ \dot{s} = \dot{s}_{|\ell} + \frac{\partial s}{\partial \ell} \dot{\ell} \end{cases} \quad (2.23)$$

De manière similaire, on décompose les grandeurs énergétiques intervenant dans l'équation (2.20) comme la somme des deux contributions de propagation et de char-

gement (2.24), (2.25) et (2.27).

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \ell} \dot{\ell} + \dot{U}|_{\ell} \\ \dot{K} = \frac{\partial K}{\partial \ell} \dot{\ell} + \dot{K}|_{\ell} \end{cases} \quad (2.24)$$

L'hypothèse d'adiabaticité au niveau de la fissure $\mathcal{F}(\ell)$ implique qu'il n'y a pas d'échange thermique lié à la variation de géométrie ℓ .

$$\overset{\circ}{Q}|_{\mathcal{F}} = 0$$

On écrit alors:

$$\overset{\circ}{Q} = \overset{\circ}{Q}|_{\ell} \quad (2.25)$$

En introduisant le travail des efforts mécaniques extérieurs exprimé par la relation suivante:

$$\Phi = \int_{\Omega_0} \underline{f}_v \cdot \underline{\xi} dV + \lambda_T(t) \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^0 \cdot \underline{\xi} dS \quad (2.26)$$

On décompose la puissance des efforts mécaniques extérieurs sous la forme:

$$P_e = \frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \dot{\ell} + P_{e|\ell} \quad (2.27)$$

A géométrie fixée, le principe des puissances virtuelles permet de relier la puissance des efforts extérieurs et l'énergie cinétique à la puissance des efforts intérieurs exprimés en terme de contraintes de Cauchy:

$$\dot{K}|_{\ell} = P_{e|\ell} - \int_{\Omega_{bulk}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{\ell} dV \quad (2.28)$$

Partant de l'expression de la dissipation d'énergie exprimée en densité volumique d'énergie interne à partir de l'inégalité de Clausius-Duheim [62]:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho(T\dot{s} - \dot{u}) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\text{grad}}T \geq 0 \quad (2.29)$$

A partir de la relation (2.29), on introduit les deux dissipations Φ_1 et Φ_2 qui sont respectivement la dissipation intrinsèque et dissipation thermique par unité de volume

$$\begin{cases} \Phi_1 = \sigma : \dot{\epsilon} + \rho(T\dot{s} - \dot{u}) \\ \Phi_2 = -\frac{q}{T} \cdot \underline{grad}T \end{cases} \quad (2.30)$$

Du fait de la réversibilité thermodynamique de l'évolution de Ω_0 à ℓ fixée, les deux termes de dissipation sont nuls [62], on écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \Phi_{1|\ell} = \sigma : \dot{\epsilon}_{|\ell} + \rho(T\dot{s}_{|\ell} - \dot{u}_{|\ell}) = 0 \\ \Phi_{2|\ell} = -\frac{q}{T} \cdot \underline{grad}T = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

En combinant (2.31) avec l'inégalité de Clausius-Duheim (2.29) pour une dissipation nulle, on relie l'apport en chaleur $\overset{\circ}{Q}$ à la variation d'entropie volumique par la relation suivante:

$$\int_{\Omega_{bulk}} T\dot{s}_{|\ell} dV = \overset{\circ}{Q}_{|\ell} \quad (2.32)$$

En combinant les relations (2.20), (2.28), (2.32) et (2.32) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial \ell}(U + K - \Phi)_{|\mathcal{E}} = 0 \quad (2.33)$$

La relation (2.33) est conforme au résultat annoncé dans [10]. Elle généralise la propriété de conservation d'énergie de la zone complémentaire de la fissure Ω_{bulk} au cours du processus de nucléation dans le cas de sollicitations extérieurs mécanique et thermique.

A partir de la décomposition (2.18) du milieu en zone saine et zone fissurée, l'expression de l'énergie interne totale peut s'écrire sous la forme [10]:

$$U = U_{bulk} + U_{\mathcal{F}} \quad (2.34)$$

où U_{bulk} et $U_{\mathcal{F}}$ correspondent respectivement à l'énergie interne de la partie complémentaire Ω_{bulk} et celle de la fissure \mathcal{F} .

La relation de conservation d'énergie (2.33) se réécrit sous la forme:

$$-\frac{\partial}{\partial \ell}(U_{bulk} + K - \Phi)|_{\mathcal{C}} = \frac{\partial U_{\mathcal{F}}}{\partial \ell}|_{\mathcal{C}} \quad (2.35)$$

où le terme $E_p = U_{bulk} - \Phi$ représente l'énergie potentielle.

En intégrant l'expression pendant tout le processus de nucléation, ℓ allant de 0 à ℓ_c , où ℓ_c représente la surface créée, la variation d'énergie potentielle de la zone saine Ω_{bulk} s'exprime en fonction de la variation de l'énergie interne¹ U^{FD} nécessaire à la nucléation et de l'énergie cinétique à l'instant final:

$$U^{FD} = U_{\mathcal{F}}(\ell_c) - U_{\mathcal{F}}(0) \quad (2.36)$$

$$E_p(0) - E_p(\ell_c) = U^{FD} + K(\ell_c) \quad (2.37)$$

Partant du fait que l'énergie cinétique est une quantité positive, une condition nécessaire pour la nucléation s'écrit:

$$E_p(0) - E_p(\ell_c) \geq U^{FD} \quad (2.38)$$

On suppose que l'énergie interne de nucléation est liée à la notion de dissipation suite à la création de la nouvelle surface ℓ selon la relation:

$$U^{FD} = \ell G_c \quad (2.39)$$

où G_c est introduite comme constante caractéristique du matériau. La condition nécessaire de nucléation devient:

$$\frac{E_p(0) - E_p(\ell_c)}{\ell_c} \geq G_c \quad (2.40)$$

1. Full Damage

Par conséquent, la plus petite longueur de nucléation vérifiant la relation (2.40) est celle vérifiant l'égalité $G_{inc}(\ell_c) = G_c$. Celle-ci correspond à une énergie cinétique de la nucléation nulle ($K(\ell_c) = 0$), on considère, dans ce cas, que le processus de nucléation ne met pas en mouvement la structure.

On retrouve alors la condition nécessaire à la nucléation du critère énergétique (2.14) établie dans le cadre d'une approche thermodynamique adiabatique de la nucléation, où l'énergie potentielle est exprimée en fonction de l'énergie interne U_{bulk} et non de l'énergie libre Ψ classiquement utilisée dans le formalisme isotherme. Cela découle du fait que le phénomène de nucléation est interprété dans un contexte d'évolution adiabatique, c'est à dire que la création de nouvelles surfaces est accompagnée d'une augmentation de la température en l'absence d'échange de chaleur entre la fissure et le 'bulk'.

2.4.3 Tenseur d'élasticité adiabatique et énergie interne de la fissure

Le comportement réversible de Ω_0 à géométrie constante se traduit par une dissipation intrinsèque nulle (2.31). Celle-ci se réécrit classiquement en fonction des variables d'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de température T en fonction de la densité d'énergie libre par transformation de Legendre de la densité d'énergie interne $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$:

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - s dT - d\psi = 0 \quad (2.41)$$

Soit:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right) d\varepsilon_{ij} - \left(s + \frac{\partial\psi}{\partial T}\right) dT = 0 \quad (2.42)$$

En l'absence de liaisons internes sur les évolutions des variables d'état, on obtient les deux équations d'état:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_T \quad ; \quad s = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} \quad (2.43)$$

Dans le cas où l'on considère des évolutions adiabatiques, l'énergie interne $u(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = \psi + T s$ apparaît comme le potentiel naturel pour la formulation des équations d'état de la thermoélasticité. En effectuant le changement de variable $\psi = u - T s$ dans (2.41), on obtient:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) d\varepsilon_{ij} + \left(T - \frac{\partial u}{\partial s}\right) ds = 0 \quad (2.44)$$

de sorte que les équations d'état s'écrivent:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_s \quad ; \quad T = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{\varepsilon_{ij}} \quad (2.45)$$

La différentiation de ces équations (2.45) en se limitant à un développement limité à l'ordre 2 par rapport aux variables d'état $(\boldsymbol{\varepsilon}, s)$ permet d'obtenir les équations d'état suivantes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_s = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{(s - s^0)}{c} \mathbf{k} \\ T = \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}} = T^0 + \frac{1}{c} ((s - s^0) - \mathbf{k} : \boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases} \quad (2.46)$$

où :

- \mathbb{C}_{ad} [Pa]: Tenseur d'élasticité adiabatique, il est relié au tenseur d'élasticité isotherme \mathbb{C}^θ par la relation:

$$\mathbb{C}_{ad} = \mathbb{C}^\theta + \frac{1}{c} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad (2.47)$$

- $\mathbf{k} = \mathbb{C}^\theta : \boldsymbol{\alpha}$ [Pa.K⁻¹]: tenseur des contraintes thermiques, avec $\boldsymbol{\alpha}$ tenseur des coefficients de dilatation thermique linéique. Pour une température de référence T_0 , la grandeur $T_0 \mathbf{k}$ peut s'interpréter comme la chaleur latente de déformation de l'unité de volume de matière.
- c [Pa.K⁻¹]: correspond à la grandeur associée à la capacité calorifique à déformation nulle définie par $T_0 c$.

L'expression de la densité volumique d'énergie interne u s'expriment finalement en fonction des variables d'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et d'entropie s pour un comportement

élastique linéaire réversible sous la forme:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = u^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} + T^0(s - s^0) + \frac{(s - s^0)^2}{2c} - \frac{(s - s^0)}{c} \mathbf{k} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.48)$$

Perturbation de la nucléation de fissure

On définit dans un premier temps l'évolution du milieu entre l'état de référence défini par $(\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0, T = T^0, \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ et $s = s^0)$ et l'état $(\boldsymbol{\sigma}^i, T^i)$ juste avant nucléation par les équations d'états (2.46) suivante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon}^i - \frac{(s^i - s^0)}{c} \mathbf{k} \\ T^i = T^0 + \frac{1}{c} ((s^i - s^0) - \mathbf{k} : \boldsymbol{\varepsilon}^i) \end{cases} \quad (2.49)$$

où $(\boldsymbol{\varepsilon}^i, s^i)$ désignent les variables d'état dans la configuration atteinte juste avant la nucléation.

Sous l'hypothèse de linéarité du problème, la nucléation d'une discontinuité dans le milieu est associée à une perturbation des variables d'état. Soient $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ la perturbation du champ de déformation et δs la perturbation de l'entropie, les variables d'état dans la nouvelle configuration sont définies par le couple $(\boldsymbol{\varepsilon}^i + \delta\boldsymbol{\varepsilon}, s^i + \delta s)$.

En introduisant les expressions de (2.49) dans les équations d'état de la nouvelle configuration on obtient:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbb{C}_{ad} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\delta s}{c} \mathbf{k} \\ T = T^i + \frac{1}{c} (\delta s - \mathbf{k} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases} \quad (2.50)$$

On définit alors la perturbation de la température $\delta T = T - T^i$ comme la différence entre la température finale T et la température atteinte avant nucléation T^i . La

deuxième partie de l'équation (2.50) permet d'écrire l'expression de cette perturbation de température en fonction des perturbations de déformation et d'entropie de la forme:

$$\delta T = \frac{1}{c}(\delta s - \mathbf{k} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.51)$$

L'expression de l'énergie interne du milieu (2.48) se réécrit de manière plus compacte en faisant intervenir uniquement les variables d'états liées à la perturbation $(\delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta s)$ en prenant comme état de référence l'état d'équilibre avant nucléation d'indice (i) . On écrit alors l'expression de l'énergie interne:

$$u(\delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta s) = u^i + \boldsymbol{\sigma}^i : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{ad} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + T^i \delta s + \frac{\delta s^2}{2c} - \frac{\delta s}{c} \mathbf{k} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.52)$$

Énergie interne de la zone saine

L'hypothèse d'adiabaticité de la nucléation entre l'état de référence (i) avant nucléation à l'état final (celui de la nucléation), représentée par une dissipation nulle dans le milieu sain et exprimée par la relation d'isentropie ($\delta s = 0$) permet de simplifier l'expression de l'énergie interne (2.52) d'un volume n'appartenant pas à la zone fissurée, soit:

$$u = u^i + \boldsymbol{\sigma}^i : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{ad} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.53)$$

Il est par ailleurs possible d'accéder à l'élévation de température dans le milieu non-fissuré noté δT^{bulk} à partir de l'expression (2.51) qui relie la variation de température δT^{bulk} à la perturbation du champ de déformation selon:

$$\delta T^{bulk} = -\frac{1}{c} \mathbf{k} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.54)$$

Énergie interne de la zone fissurée

On considère que le phénomène de nucléation d'une fissure macroscopique à l'intérieur du milieu se traduit par un endommagement total de la microstructure du domaine occupé par la zone fissurée. Une manière de représenter cet endommagement

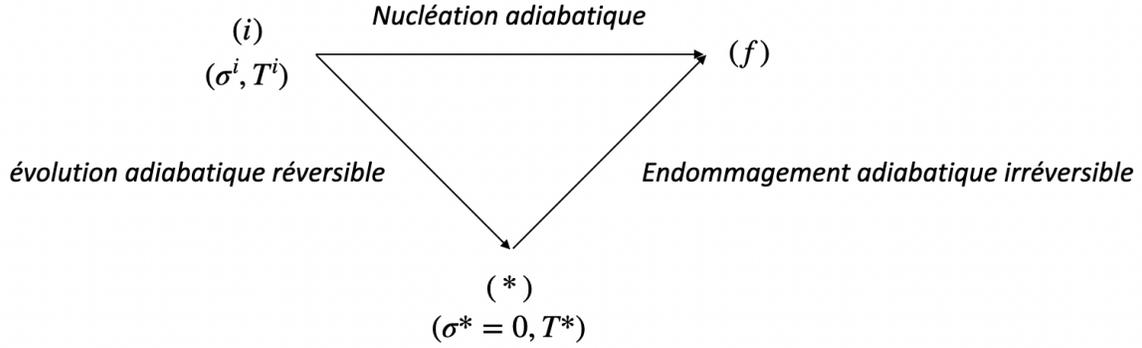


FIGURE 2-4 – Chemin d'évolution pendant la nucléation de fissure

asymptotique consiste à supposer le chemin d'évolution figure (2-4). La nucléation se traduit par une première évolution réversible depuis son état initial (i) à un état intermédiaire non précontraint (*), suivie par une évolution irréversible conduisant à un endommagement total de la microstructure du domaine occupé par la zone fissurée.

Évolution réversible de la nucléation

On rappelle que l'évolution du système depuis la configuration initiale (i) à celle intermédiaire (*) pendant la nucléation se fait de manière adiabatique réversible, elle est donc isentropique $s^* = s^i$. Combiné à la nullité de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^*$ dans la zone fissurée dans les équations d'état (2.49), il est possible d'expliciter l'expression de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ et de la température T^* intermédiaires en introduisant le tenseur de souplesse isotherme \mathbb{S}_{iso} :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^* &= -\mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k} (T^* - T^i) \\ T^* - T^i &= \frac{1}{c + \mathbf{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k}} \boldsymbol{\sigma}^i : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k} \end{cases} \quad (2.55)$$

L'expression (2.48) de la densité d'énergie interne dans la fissure $u_{\mathcal{F}}^*$ se réécrit de la forme:

$$u_{\mathcal{F}}^* = u^i - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^i : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^i + \frac{(\boldsymbol{\sigma}^i : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k})^2}{2(c + \mathbf{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k})} \quad (2.56)$$

Évolution irréversible de la zone fissurée pendant la nucléation

L'évolution d'endommagement irréversible correspond à une apparition de la fissure. On représente cette zone fissurée comme un milieu tridimensionnel où le tenseur d'élasticité et le tenseur de contraintes thermiques sont nuls.

L'expression (2.51) de la perturbation de température devient alors:

$$T^{\mathcal{F}} - T^* = \frac{\delta s^{cr}}{c_{\mathcal{F}}} \quad (2.57)$$

où $\delta s^{cr} = s^{\mathcal{F}} - s^i$ correspond à la perturbation d'entropie par unité de volume créée par la nucléation, et $c_{\mathcal{F}}$ correspond à la capacité calorifique de la zone fissurée endommagée qui se met sous la forme:

$$c_{\mathcal{F}} = c + \mathbf{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k}$$

Cette expression correspond bien à la capacité calorifique macroscopique obtenu à l'issue d'une approche micromécanique par homogénéisation du processus de fissuration [10] lorsque l'on se place à l'état totalement endommagé $\mathbb{C}^{hom} = 0$ pour une densité de microfissures nulle $f = 0$.

$$c_{\mathcal{F}} = (1 - f) c + \mathbf{k} : \mathcal{S} : \mathbf{k}$$

où $\mathcal{S} = (1 - f)\mathbb{S}_{iso} - \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_{iso}$

De manière générale l'élévation de température à l'intérieur de la fissure s'écrit en fonction de la température initiale:

$$\delta T^{\mathcal{F}} = T^{\mathcal{F}} - T^i = \frac{(\delta s^{cr} + \boldsymbol{\sigma}^i : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k})}{c + \mathbf{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k}} \quad (2.58)$$

En utilisant l'expression de la densité volumique de l'énergie interne (2.52), la variation d'énergie interne dans la fissure $\delta u^{\mathcal{F}}$ pendant l'évolution irréversible d'endom-

magement de la nucléation est reliée à la perturbation d'entropie créée par:

$$u_{\mathcal{F}}^f = u_{\mathcal{F}}^* + T^* \delta s^{cr} + \frac{\delta s^{cr2}}{2c_{\mathcal{F}}} \quad (2.59)$$

En introduisant l'expression (2.56) de la densité volumique d'énergie interne à l'instant transitoire $u_{\mathcal{F}}^*$, on obtient la variation de l'énergie interne du processus de nucléation en fonction de la variation d'entropie créée et des conditions à l'état initial (i):

$$\begin{aligned} \delta u_{\mathcal{F}} &= u_{\mathcal{F}}^f - u^i \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^i : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^i + T^i \delta s^{cr} + \frac{(\delta s^{cr} + \boldsymbol{\sigma}^i : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k})^2}{2(c + \mathbf{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbf{k})} \end{aligned} \quad (2.60)$$

On rappelle que l'énergie interne est reliée à la dissipation associée à la création de nouvelles surfaces par la relation (2.39), ce qui permet de relier la densité volumique de l'énergie interne à G_c en introduisant la surface de la fissure $S^{\mathcal{F}} = \epsilon \ell$, où ϵ représente l'épaisseur de la fissure et on écrit:

$$\delta u_{\mathcal{F}} = \frac{G_c}{\epsilon} \quad (2.61)$$

On suppose pour des raisons de simplicité d'écriture que la contribution de l'état de contrainte initial dans (2.60) est négligeable par rapport à celle de l'entropie créée sur la dissipation d'énergie pendant la nucléation.

La combinaison des relations (2.58) et (2.60) permet d'accéder à l'augmentation de la température à l'intérieur de la fissure:

$$\delta T^{\mathcal{F}} = T^i \left(\sqrt{1 + \frac{2G_c}{\epsilon c_{\mathcal{F}} T^i{}^2}} - 1 \right) \quad (2.62)$$

Cette expression de l'élévation de température à l'intérieur de la fissure a été établie dans [10] par une approche d'endommagement totale de la zone fissurée.

On constate que la perturbation de température est une fonction de l'inverse de la racine de l'épaisseur, c'est à dire que plus l'épaisseur de la fissure est faible plus

l'élévation de la température est importante. Cette remarque se présente de manière plus claire dans l'expression de la température finale à l'intérieur de la fissure qui s'écrit:

$$T^{\mathcal{F}} = T^i + \delta T^{\mathcal{F}} = \sqrt{T^i{}^2 + \frac{2G_c}{\epsilon c_{\mathcal{F}}}} \quad (2.63)$$

On précise que l'épaisseur de la fissure n'est pas une longueur qui tend asymptotiquement vers 0 ($\epsilon \rightarrow 0$), ce qui correspondrait à une température infinie, mais plutôt à une épaisseur qui respecte la représentation de la fissure comme le passage à la limite du rapport $\frac{\epsilon}{\ell} \rightarrow 0$.

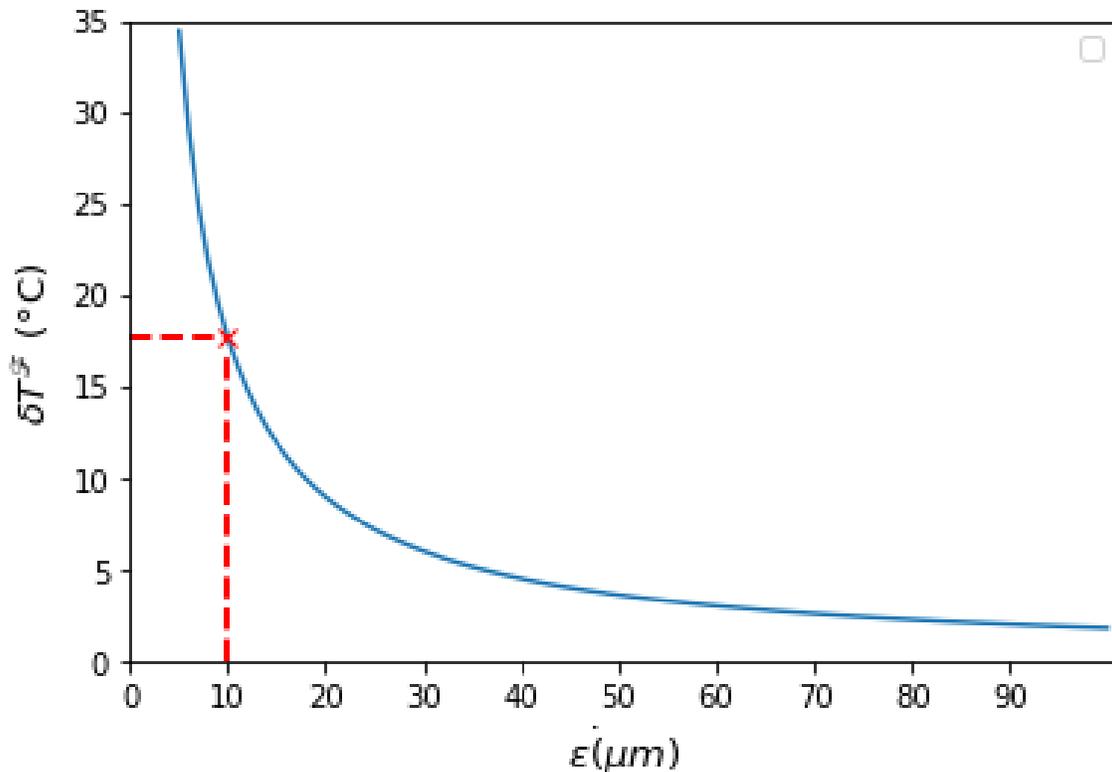


FIGURE 2-5 – Élévation de la température à l'intérieur de la fissure en fonction de son épaisseur ϵ (pour un matériau donné)

On trace sur la Figure (2-5), la variation de la température $\delta T^{\mathcal{F}}$ à l'intérieur de la fissure en fonction de son épaisseur. Pour des paramètres thermoélastiques et de rupture d'une roche argileuse suivants:

$$c = 10^3 \text{ J.K}^{-2}.\text{m}^{-3} \quad ; \quad G_c = 50 \text{ Pa.m}$$

Pour une épaisseur de fissure de l'ordre de $\epsilon \simeq 10 \mu m$, on obtient une estimation de l'ordre de grandeur de cette perturbation de température $\delta T^{\mathcal{F}} \simeq 17.7^{\circ}C$ qui représente une élévation de température non négligeable suite à la nucléation. Celle-ci doit par conséquent être prise en compte lors de l'étude de l'évolution post-nucléation du comportement du milieu. Ce résultat correspond bien à la réalité du phénomène de nucleation de fissure où des augmentations de température sont susceptibles d'avoir lieu comme celles observées expérimentalement lors de la propagation de fissure [40]. En particulier, ce dernier commentaire est conforme à l'hypothèse d'une évolution adiabatique attachée au processus de nucléation de fissure, contrairement au cadre d'analyse isotherme habituel, qui suppose, par définition, une nucléation à température constante.

2.5 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons exposé quelques unes des approches proposées dans la littérature pour aborder la thématique de nucléation de fissure, en particulier (section 2.3.1) les modèles à gradient d'endommagement [29] et (section 2.3.2) le critère mixte [48]. Dans le prolongement des travaux de Leguillon [48], Carlioz [10] a proposé un critère purement énergétique pour appréhender la nucléation d'une fissure stable. Les principaux résultats de son travail ont été présentés à la section 2.3.3.

Ce critère se présente sous la forme de deux conditions complémentaires: une première condition nécessaire pour la nucléation, similaire à celle proposée dans le critère mixte de Leguillon, portant sur l'équilibre entre le taux de restitution d'énergie incrémental et l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces, à laquelle vient s'ajouter une deuxième condition de stabilité de la fissure initiée qui porte sur le maximum de ce taux de restitution d'énergie incrémental évalué à partir de sa dérivée première. La combinaison de ces deux conditions permet de s'assurer de la nucléation d'une fissure dont la taille ℓ_c peut être déterminée simultanément au chargement critique capable de la nucléer. Ce double critère purement énergétique est en compatibilité avec la théorie de Griffith qui met en jeu la compétition entre l'énergie

potentielle du milieu et celle de la création de nouvelle surface, tout en s'affranchissant des limitations de celle-ci.

Bien que ce double critère permette de prédire la taille et le chargement critique de nucléation, il ne peut néanmoins pas prédire l'emplacement de la fissure et nécessite une connaissance antérieure du site préférentiel de la nucléation qui peut s'obtenir à partir d'une analyse de contrainte du milieu dans les conditions de chargement précédent la nucléation, comme par exemple l'existence de zone de traction pour une nucléation de fissure en mode I ou un cisaillement pour le mode II.

Par la suite (section 2.4), nous avons établi le formalisme du cadre thermodynamique approprié pour traiter de la nucléation de fissure en présence de sollicitations mécaniques et thermiques. Ce formalisme s'appuie notamment sur l'analyse de la nucléation dans le cadre d'une évolution adiabatique. On précise en particulier l'expression de la condition nécessaire de nucléation établie dans la formulation du critère énergétique où le taux de restitution d'énergie incrémental est calculé à partir de l'énergie interne et non de l'énergie libre du milieu.

L'interprétation de la nucléation de fissure en conditions adiabatiques représente, selon nous, un angle d'étude assez peu exploré contrairement aux considérations classiques d'évolutions isothermes. Cette hypothèse de travail semble pourtant plus conforme à l'intuition physique (ex: brutalité du phénomène de nucléation). Elle permet en particulier de rendre compte de l'élévation de température observée expérimentalement lors d'essais de fracturation. Par nature, cette observation échappe complètement aux modélisations isothermes. On retrouve effectivement, pour des structures dont le comportement est thermoélastique réversible que la nucléation d'une fissure en conditions adiabatiques est accompagnée d'une élévation de la température à l'intérieur de la fissure. L'approche proposée a permis d'établir une formulation analytique de l'élévation de température proportionnelle à l'inverse de la racine carré de son épaisseur (2.63). Pour une épaisseur de l'ordre de $10 \mu m$, l'élévation de la température peut atteindre des valeurs de l'ordre d'une dizaine de degrés ($17^\circ C$ pour le jeu de données numériques considérés). Cette température, jusque là emmagasinée à l'intérieur de la fissure en raison de la condition d'adiabaticité, va diffuser dans le

milieu à la fin de la nucléation et devra a priori être prise en compte dans l'évolution thermoélastique du système après nucléation.

Chapitre 3

Application du critère énergétique

Contents

3.1	Objectifs	58
3.2	Méthodologie et utilisation du critère énergétique	59
3.3	Approches variationnelles pour la nucléation de fissure	73
3.3.1	Principe de minimum de l'énergie et encadrement du taux de restitution incrémental d'énergie	74
3.3.2	Principe de superposition	78
3.4	Approche par mécanique linéaire de la rupture	83
3.4.1	Introduction	83
3.4.2	Lien entre le taux incrémentale de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte	84
3.4.3	Méthode de détermination des facteurs d'intensités de contraintes	92
3.4.4	Méthode itérative	97
3.5	Conclusions	102

3.1 Objectifs

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre en pratique le critère de nucléation énergétique présenté dans le chapitre 2 et défini par la relation (2.14) dans le cadre de problèmes de fissuration en thermoélasticité linéaire.

L'objectif est de présenter différentes approches de la mécanique linéaire qui permettent d'accéder à la grandeur incrémentale du taux de restitution d'énergie pour des fissures stables de longueur finie.

On rappelle que le G_{inc} défini par la relation (2.8), contrairement au taux de restitution d'énergie classique G , ne fait intervenir que les deux états initial et final du processus de nucléation à partir de la variation de leurs énergies potentielle sans se préoccuper des instants intermédiaires de propagation progressive.

Dans cette perspective, nous proposons tout d'abord d'explicitier la méthodologie d'utilisation du critère énergétique à partir de l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental et des différentes typologies de problèmes capables d'être traités, puis de présenter dans un deuxième temps les différentes approches de résolution permettant d'accéder à ce taux pour enfin proposer quelques applications des schémas de résolution suggérés dans le cas de problèmes de fissuration en élasticité linéaire.

3.2 Méthodologie et utilisation du critère énergétique

Le critère de nucléation énergétique (2.14) permet de déterminer le chargement critique qui engendre la création de la fissure stable ainsi que son extension finale ℓ_c . On parle dans ce cas de nucléation de fissure stable, qui correspond à la situation où le $G_{inc}(\ell_c)$ atteint un maximum en G_c .

On rappelle l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental en fonction de la variation de l'énergie potentielle entre l'état sain et fissuré:

$$G_{inc} = \frac{E_p^0 - E_p(\ell)}{\ell} \quad (3.1)$$

En reprenant l'hypothèse d'adiabaticité du phénomène de nucléation, on exprime l'énergie potentielle du milieu comme la différence entre l'énergie interne U et le travail virtuel des efforts donnés Φ , en fonction des variables d'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et d'entropie s :

$$E_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s) = U(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s) - \Phi(\underline{\xi}) \quad (3.2)$$

où l'énergie interne est reliée à l'énergie libre par la relation $U = \Psi + Ts$, et peut s'écrire sous la forme:

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s) = W^{ad}(\boldsymbol{\varepsilon}) + X(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s) + Y(\Delta s) \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{ad}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ X(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s) = \int_{\Omega} \frac{\Delta s}{c} \mathbf{k} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ Y(\Delta s) = T^0 \Delta s + \frac{\Delta s^2}{2c} \end{array} \right.$$

Le terme W^{ad} s'apparente à une énergie élastique en condition adiabatique. Par rapport à l'élasticité isotherme, le tenseur d'élasticité adiabatique \mathbb{C}^{ad} remplace le tenseur d'élasticité isotherme \mathbb{C}^θ selon (2.47). Le terme $X(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s)$ représente le terme de couplage entre la déformation et la variation d'entropie. Enfin, le dernier terme énergétique $Y(\Delta s)$ dépend uniquement de la variation d'entropie.

En conditions adiabatiques réversibles (i.e. isentropiques), on peut ainsi proposer une expression de l'énergie interne $U(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s = 0)$ qui dépend uniquement de la composante élastique sous la forme:

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s = 0) = W^{ad}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.4)$$

Une première approche permettant de déduire le $G_{inc}(\ell)$ consiste à résoudre de manière complète les deux problèmes initial et fissuré, c'est-à-dire trouver les couples contrainte/déformation solutions des deux problèmes de manière explicite puis en intégrant ces champs suivant les relations (2.26) et (3.4) exprimer la variation de l'énergie potentielle pour différentes tailles de fissure. Cette méthode bien que directe bénéficie de la simplicité du calcul thermoélastique linéaire, qui est facilement implémenté dans des résolutions numériques par éléments finis.

Dans le but d'explicitier davantage cette approche directe, nous proposons d'appliquer le critère de nucléation pour traiter quelques exemples de nucléation de fissure stable. Un premier exemple de nucléation de fissure en mode I par délaminage d'une poutre soumise à un chargement mécanique initialement proposé par [10] est considéré. Un deuxième exemple de nucléation de fissure en cisaillement (mode II) par dilatation thermique différentielle est ensuite présenté.

Délaminage d'une poutre en mode I

On considère une poutre élancée, encastree en son extrémité gauche et soumise à un chargement en traction des deux faces supérieure et inférieure.

L'objectif étant d'évaluer le phénomène de délaminage de la poutre de manière similaire à une ouverture de fissure en mode I, nous proposons d'utiliser le critère de nucléation énergétique afin de prédire la taille de cette ouverture ainsi que le chargement critique qui l'engendre.

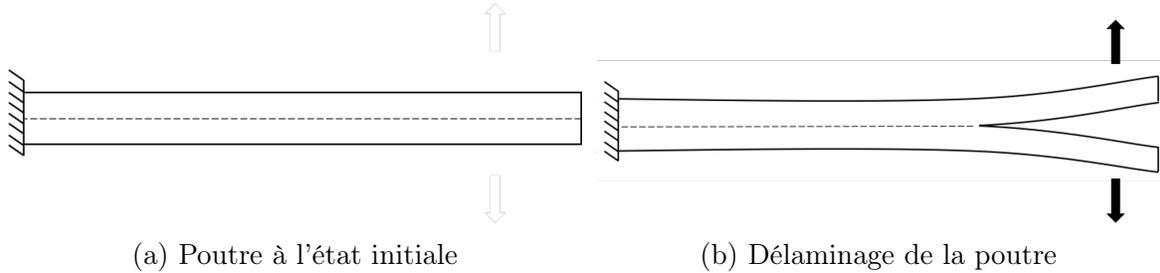


FIGURE 3-1 – Représentation du délaminage comme nucléation de fissure en mode I

En l'absence d'échange thermique dans le milieu, l'énergie interne dépend uniquement de la déformation élastique $U = W(\boldsymbol{\varepsilon})$, l'expression de l'énergie potentielle (3.2) se met sous la forme:

$$E_p(\boldsymbol{\varepsilon}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \Phi(\boldsymbol{\xi})$$

La relation de Clapeyron reliant le travail des efforts extérieurs à l'énergie élastique permet de simplifier l'expression de l'énergie potentielle qui devient:

$$E_p(\boldsymbol{\varepsilon}) = -W(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.5)$$

Dans le cas présent, l'énergie élastique se réduit (dans le cadre des hypothèses de Navier-Bernoulli) à l'énergie élastique de flexion qui s'écrit en fonction du moment fléchissant $M(x)$:

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^L M(x)^2 dx \quad (3.6)$$

où EI désigne l'inertie en flexion de la poutre considérée

Traction concentrée à l'extrémité On s'intéresse au cas où le chargement est défini par 2 forces concentrées (par unité de longueur selon \underline{e}_z) d'intensité égale et de direction opposée (selon \underline{e}_y) appliquées aux points $(0, H)$ et $(0, -H)$ de la poutre. La

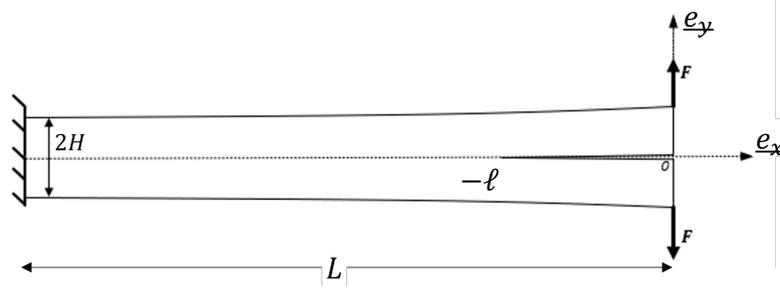


FIGURE 3-2 – Problème de délaminage d'une poutre par chargement ponctuel

symétrie du problème par rapport l'axe \underline{e}_x permet de se restreindre à une moitié de la poutre ($y > 0$). Soit ℓ la longueur de la fissure stable dans la configuration finale, il s'agit d'une inconnue du problème dont l'existence n'est pas encore assurée à ce stade du calcul. On applique les conditions de symétrie suivantes:

$$x < -\ell : \quad \begin{cases} T_x = 0 \\ \xi_y = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\forall y = 0 \quad ,$$

$$-\ell < x < 0 : \quad T_x = T_y = 0 \quad (3.8)$$

Et les conditions aux limites:

$$x = -L : \quad \xi_x = \xi_y = 0 \quad (3.9)$$

$$x = 0 : \quad T_x = T_y = 0 \quad (3.10)$$

$$y = H ; x < 0 : \quad T_x = T_y = 0 \quad (3.11)$$

$$(x, y) = (0, H) : \quad T_x = 0 \quad ; \quad T_y = F \quad (3.12)$$

A partir des expressions (3.5) et (3.6), il est possible d'établir l'expression de la variation de l'énergie potentielle sous la forme analytique suivante:

$$\Delta E_p = E_p(\ell) - E_p(0) = \frac{-1}{2EI} \int_{-\ell}^0 M^+(s)^2 ds = -\frac{F^2}{2EI} \frac{\ell^3}{3} \quad (3.13)$$

On obtient donc l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental:

$$G_{inc} = -\frac{\Delta E_p}{\ell} = \frac{F^2}{6EI}\ell^2 \quad (3.14)$$

On constate que pour un chargement ponctuel à l'extrémité d'une poutre encastree, la fonction $G_{inc}(\ell)$ est une fonction strictement croissante pour ($\ell > 0$) et donc ne présente pas la possibilité d'une nucléation stable. Le chargement critique pour lequel une fissure s'amorce est défini par la valeur $F_c = \frac{6EI G_c}{\ell}$. Lorsque $F = F_c$, le critère énergétique suggère donc que la propagation est instable pour le mode de chargement considéré et qu'il n'est donc pas possible de nucléer une fissure stable dans ce mode de chargement. Ce cas de chargement illustre une situation pour laquelle l'application du critère énergétique ne permet pas d'identifier une nucléation de fissure stable. C'est précisément le mode de chargement qui est ici incriminé.

Distribution de chargement le long de la poutre On propose à présent un nouveau mode de chargement cette fois-ci le long de l'axe e_x , qui permet de solliciter la poutre d'une part en traction de manière à enclencher une ouverture en mode I, et d'autre part de mettre une zone en compression de manière à créer des conditions de stabilisation en aval (Figure 3-3).

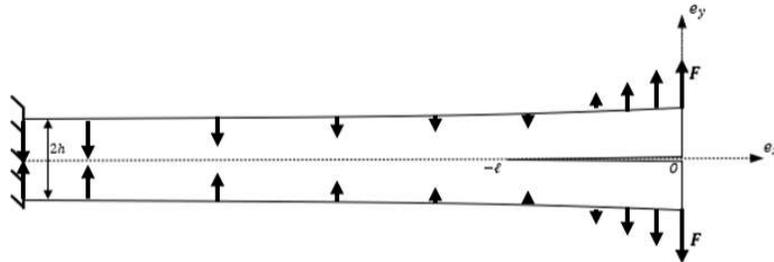


FIGURE 3-3 – Distribution de chargement le long de la poutre

Le chargement considéré est défini par une densité de force appliquée en $y = \pm H$ de la forme:

$$\underline{f}^{\pm}(x) = \pm F \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) \underline{e}_y \quad (3.15)$$

où $\lambda \in [0, L]$ est un paramètre homogène à une longueur qui définit la zone en traction ($x > -\lambda$) et celle en compression ($x < -\lambda$), et F l'intensité du chargement exprimé en (N/m).

Tirant profit une nouvelle fois des symétries, on applique les conditions aux limites suivantes:

$$x = -L : \quad \xi_x = \xi_y = 0 \quad (3.16)$$

$$x = 0 : \quad T_x = T_y = 0 \quad (3.17)$$

$$y = H : \quad \begin{cases} T_x = 0 \\ T_y = f^+(x) \end{cases} \quad (3.18)$$

Un calcul similaire à celui effectué pour le premier mode de chargement conduit à une expression de G_{inc} de la forme:

$$G_{inc}(\ell) = \frac{F^2}{2520EI} \ell^4 \left(5\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 - 35\left(\frac{\ell}{\lambda}\right) + 63\right) \quad (3.19)$$

On trace la variation de $G_{inc}(\ell)$ pour les deux types de chargement. Comme mentionné précédemment, le chargement concentré à l'extrémité ne présente pas de nucléation stable la courbe bleu est monotone croissante, tandis que pour la distribution de chargement donné en (3.15) (courbe en rouge), le G_{inc} présente bien un maximum, qui pour un chargement critique que nous allons expliciter par la suite, atteint le seuil critique de création de fissure G_c .

Le maximum de $G_{inc}(\ell)$ obtenu à partir de la relation (3.19), dans le cadre des hypothèses de Navier-Bernoulli, et de la résolution numérique pour une poutre élancée de dimensions $L = 10\text{m}$ et $H = 0.01\text{m}$ permet de retrouver, pour une valeur unitaire de EI , une longueur critique de la fissure nucléée $\ell_c \simeq 2.59 \lambda$ indépendante de l'intensité du chargement. Ce qui veut dire que l'extension de la fissure nucléée traverse la zone de traction délimitée par $x = -\lambda$ pour s'arrêter dans la zone comprimée de

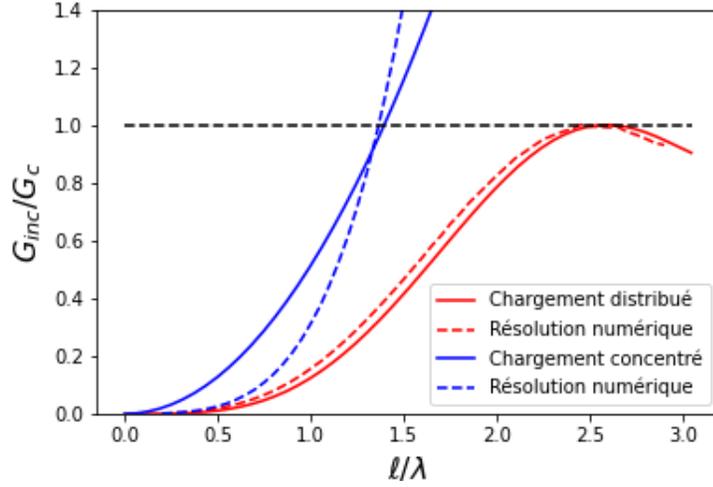


FIGURE 3-4 – $G_{inc}(\ell)$ pour les deux types de chargement ($EI = 1$ U.A.)

la poutre. D'où l'intérêt de ce mode de chargement qui met en oeuvre la compression de la partie $x < -\lambda$ de la poutre afin de contrôler la stabilité de la fissure amorcée. Dans le cas où la partie sollicitée en traction est assez grande par rapport à la longueur de la poutre $\lambda > \frac{L}{2.59}$, la zone de compression à l'aval est trop limitée pour stabiliser le processus de nucléation. Le maximum de $G_{inc}(\ell)$ ne se situe pas dans la structure et donc la fissure amorcée n'est pas stable et traverse toute la poutre.

Le chargement critique pour lequel la fissure nucléée s'obtient lorsque le $G_{inc}(\ell_c)$ exprimé par la relation (3.19) atteint le seuil G_c . Ainsi l'expression de l'intensité du chargement critique F_c s'écrit:

$$F_c \simeq 3.08 \frac{\sqrt{EIG_c}}{\lambda^2} \quad (3.20)$$

On montre que cette distribution de chargement critique est équivalente à un moment résultant critique indépendant de la taille de fissure de la forme:

$$M_c \simeq 12.22 \sqrt{EIG_c} \quad (3.21)$$

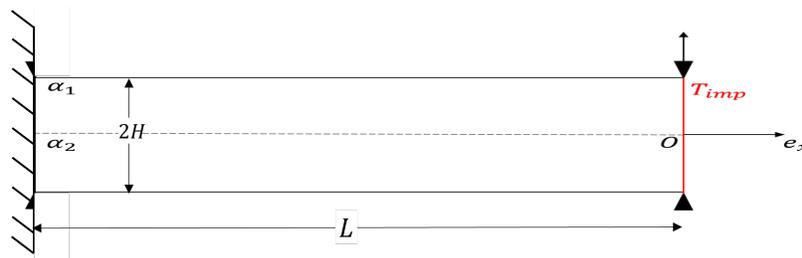
Il est important de préciser que ces résultats sont proposés dans le cas d'une poutre

élancée c'est-à-dire que le rapport $\frac{H}{L} \ll 1$, ce qui permet de restreindre l'expression de l'énergie élastique de la poutre à l'énergie de flexion (3.6) et ainsi établir une expression analytique du taux de restitution d'énergie incrémental indépendante de la longueur L de la poutre. D'un autre côté, pour des rapports d'élanement $\frac{H}{L}$ proches de 1, la présence d'effets de bord est susceptible d'intervenir lors de l'évaluation de la nucléation de fissure en mode I et sera abordée plus en détail dans la Section 3.4.3.

Délaminage d'une poutre en mode II

Nous proposons dans cette partie d'étudier la possible nucléation de fissure stable en mode II sous chargement purement thermique.

On considère une poutre biphasique composée de deux matériaux homogènes isotropes de coefficients de dilatation thermique linéique différents α_i , tels que le coefficient de dilatation thermique de la partie supérieure (α_1) et celui de la partie inférieure (α_2) vérifient la relation d'ordre $\alpha_1 > \alpha_2$.



(a) État initial



(b) Nucléation de fissure

FIGURE 3-5 – Représentation de la nucléation de fissure par dilatation différentielle

On suppose que le contact entre les deux matériaux est supposé parfaitement adhérent le long de l'axe horizontal (Ox) et que la poutre est encastree en son extrémite gauche en $x = -L$ et libre de contrainte en $x = 0$, et on impose au niveau de la paroi en ($x = 0$) une variation de température $\Delta T > 0$ par rapport à la configuration de référence, tout en gardant les autres bords à flux thermique libre (Figure 3-5a).

En raison de l'hétérogénéité du coefficient de dilatation thermique (α_i), l'évolution du gradient thermique suivant l'axe horizontal entraîne une dilatation thermique différentielle entre les deux milieux ce qui est susceptible de nucléer une fissure en cisaillement le long de l'interface entre les deux sous-domaines partant de l'origine O (Figure 3-5b). L'objectif est de prédire, pour une température imposée, les conditions de nucléation stable. On pourra en particulier évaluer le temps de diffusion thermique critique à partir duquel le processus de nucléation est enclenché ainsi que la longueur de fissure stable atteinte.

On propose une résolution numérique du problème par éléments finis (Figure 3-7) en utilisant le code de calcul éléments finis CAST3M, pour accéder à l'évolution de la variation de la température dans le milieu ainsi que la solution en contrainte et déformations du problème thermoélastique.

Diffusion thermique On impose une variation de température $\Delta T = 15$ °C en $x = 0$ avec un flux libre partout ailleurs. La diffusion thermique dans le milieu est contrôlée par l'équation de la chaleur (6.6) présentée en détail dans le chapitre 5. Les paramètres de diffusion thermique sont supposés homogènes dans tout le milieu équivalents à ceux d'une roche naturelle:

<i>Conductivité thermique</i>	$\lambda = 2.5 \text{ W.m}^{-1} .\text{K}^{-1}$
<i>Masse volumique</i>	$\rho = 2700 \text{ Kg.m}^{-3}$
<i>Capacité thermique massique</i>	$C = 835 \text{ J.Kg}^{-1} .\text{K}^{-1}$

On définit le temps caractéristique de diffusion par la relation:

$$\tau_c = \frac{L^2}{k_t} = \frac{L^2}{\lambda/\rho C} \quad (3.22)$$

où L correspond à la taille de la structure et $k_t = \frac{\lambda}{\rho C}$ la diffusivité thermique du milieu. A titre indicatif, le temps caractéristique de diffusion thermique pour une poutre de longueur ($L = 10m$) est de l'ordre de $\tau_c \simeq 3 \text{ ans}$.

On trace (Figure 3-6) l'évolution de la variation de température en fonction du rapport (t/τ_c) à différentes distances de la source thermique. On observe que la variation de la température atteint un état d'équilibre après environ $t \simeq 3\tau_c \simeq 9 \text{ ans}$.

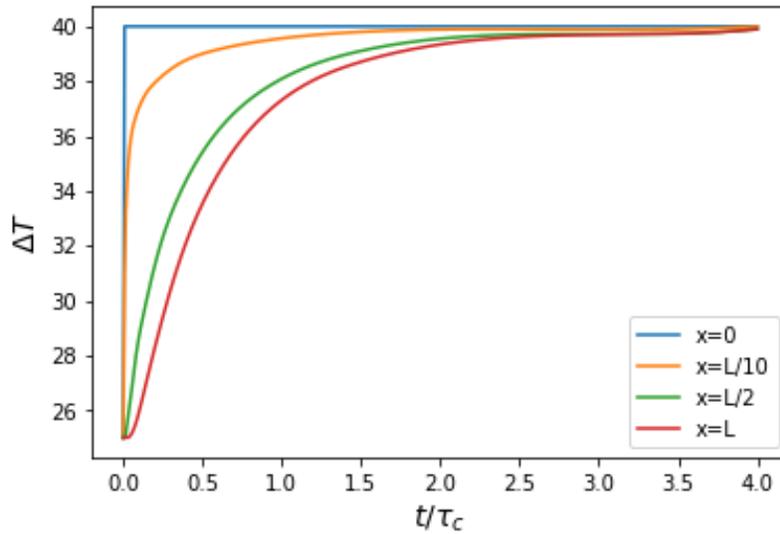
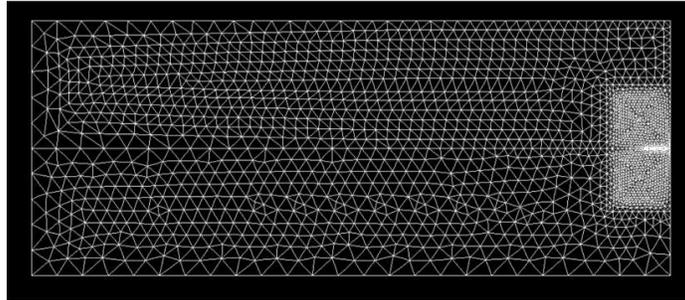


FIGURE 3-6 – Évolution de la température en fonction du rapport t/τ_c le long de l'axe Ox

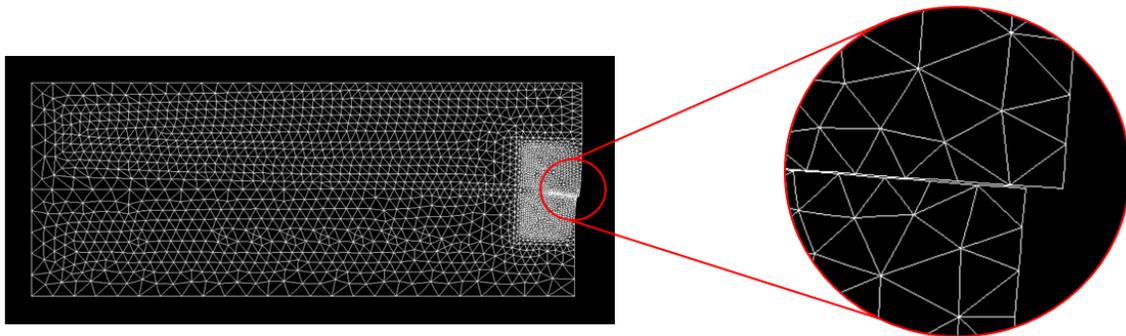
Nucléation de fissure Il est nécessaire tout d'abord d'apporter quelques clarifications par rapport à la modélisation numérique. En effet on considère que la résolution du problème fissuré se fait en thermoélasticité linéaire classique puisque nous supposons qu'en dehors de la fissure le milieu se comporte de manière réversible. Dans ce cas il suffit uniquement d'introduire l'objet fissure comme étant une discontinuité géométrique de taille ℓ libre de contrainte au niveau de l'interface entre les deux sous-domaines partant de l'origine O jusqu'à $x = -\ell$ (Figure 3-5b) tout en respectant la condition de non-pénétration des deux surfaces explicitée par la positivité du saut de déplacement entre ces deux interfaces. Pour des raisons de coût de calcul, on choisit

un maillage adaptatif qui dépend de la taille de la fissure. Au voisinage de la fissure le maillage est assez fin et plus on s'éloigne de la fissure plus le comportement du milieu est peu influencé par la fissure d'où le choix d'un maillage assez grossier.

Le processus de nucléation en mode II qui nous intéresse est celui contrôlé par la



(a) État initial



(b) État final de Nucléation de fissure

FIGURE 3-7 – Représentation FEM de la nucléation de fissure par dilatation différentielle

dilatation thermique différentielle entre les deux matériaux. Le comportement élastique de la structure ne joue pas de rôle spécifique dans ce processus c'est pourquoi on considère, en déformations planes, la poutre ayant des propriétés élastiques homogènes isotropes, avec un module de Young $E = 5.5 \text{ GPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ uniformes. Les valeurs numériques des coefficients de dilatation thermique linéiques sont prises égales à $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\alpha_2 = 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

On rappelle que le contact entre les deux matériaux est supposé parfaitement adhérent le long de l'axe horizontal (Ox) et que la poutre est encastree en son extrémité gauche en $x = -L$ et libre de contrainte en $x = 0$. En gardant la variation de température similaire dans les deux configurations initiale et finale, on résume la différence des conditions aux limites entre les deux configurations de la manière suivante:

— Pour la configuration initiale:

$$\text{Configuration non-fissurée} \quad -L < x < 0 : \quad \text{Adhérence parfaite}$$

— Pour la configuration finale:

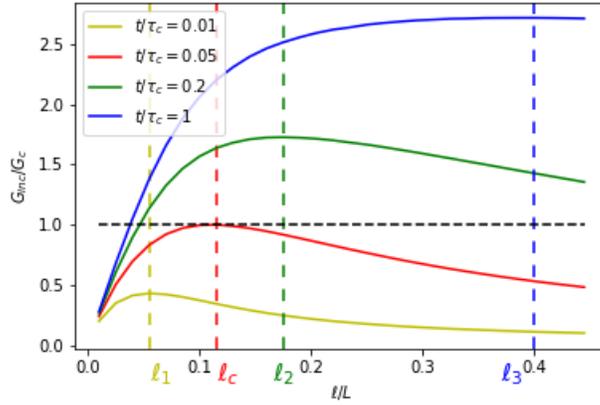
$$\text{Configuration finale fissurée} \quad \begin{cases} -L < x < -\ell & : \quad \text{Adhérence parfaite} \\ -\ell < x < 0 & : \quad T_x = T_y = 0 \quad \text{et} \quad \llbracket \xi_y \rrbracket \geq 0 \end{cases}$$

L'intégration de l'énergie potentielle à partir des champs de contrainte et de déformation (3.2) pour plusieurs tailles de fissure permet de déduire la variation du taux de restitution d'énergie incrémental $G_{inc}(\ell)$ pour chaque instant t .

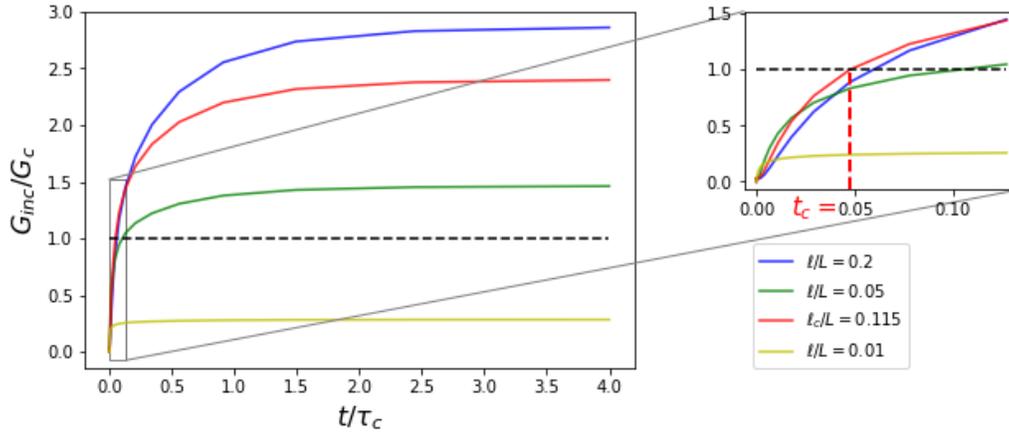
Les résultats numériques obtenus, représentés sur la Figure (3-8a), montrent que l'allure du taux de restitution d'énergie incrémental présente un maximum pour des temps de diffusion thermique transitoires inférieures à $t/\tau_c \leq 1$. Au delà, le régime permanent commence à s'établir, comme nous pouvons le voir sur la figure (3-6) avec un faible gradient thermique entre le point d'application du chargement thermique $x = 0$ et l'extrémité opposée de la poutre ($T(x = 0) - T(x = L) \leq 2 \text{ }^\circ\text{C}$). Dans ce cas, le $G_{inc}(\ell)$ n'atteint pas de maximum pour des tailles de fissure inférieures à la longueur de la poutre $\ell < L$. Cela signifie que la nucléation d'une fissure stable en mode II n'est possible que pendant la phase transitoire de la diffusion thermique. De plus, pour le chargement thermique considéré ($T_{imp} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$) et les propriétés thermoélastiques considérées pour le calcul, un matériau pour lequel le G_c est supérieur à $10 \text{ Pa}\cdot\text{m}$ ne pourra pas être le siège d'une nucléation de fissure en mode II.

On choisit par la suite, une valeur numérique du taux de restitution d'énergie critique pour une roche fragile de l'ordre de $G_c = 4 \text{ Pa}\cdot\text{m}$.

La figure (3-8a) montre que la nucléation de fissure stable survient après un temps



(a) Variation de G_{inc} en fonction du rapport l/L pour plusieurs temps de diffusion



(b) Variation de G_{inc} en fonction du rapport t/τ_c pour plusieurs tailles de fissure

FIGURE 3-8 – Taux de restitution incrémental d'énergie en fonction de la taille de fissure et du temps de diffusion thermique

critique $t_c \simeq 0.05 \tau_c$ équivalent à 8 h, et la taille de cette fissure $l_c = 0.115 L$.

On trace sur la figure (3-8b) l'évolution du taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc} en fonction du temps. On remarque que G_{inc} augmente avec le temps pendant la phase transitoire avant de se stabiliser en régime thermique permanent. Lorsque celui-ci atteint le seuil critique G_c , le processus de nucléation peut être amorcé.

On rappelle qu'il existe un unique couple (l_c, t_c) , taille de fissure nucléée et temps critique, solution du problème de la nucléation pour un chargement donné et pour des caractéristiques représentatives du matériau.

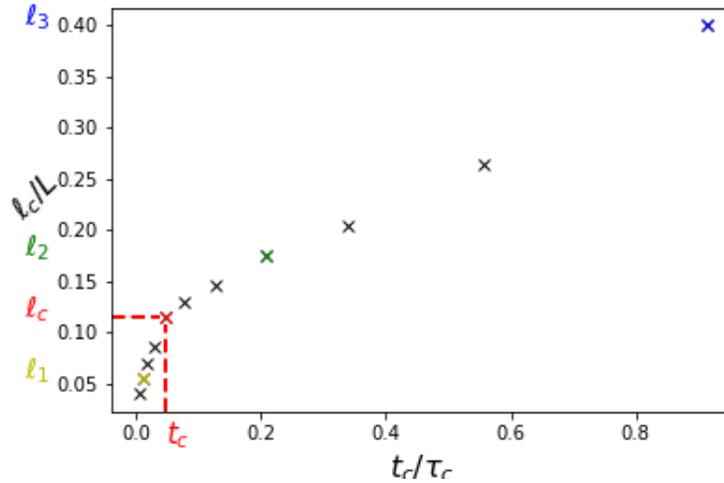


FIGURE 3-9 – Taille de fissure stable en fonction du temps de diffusion critique

La figure (3-9) représente la courbe normalisée qui traduit la relation existant entre la taille de fissure stable nucléée l_c et le temps critique de cette nucléation t_c pour le chargement considéré et les propriétés thermoélastiques du matériau. Ainsi pour un taux de restitution critique G_c donné, le couple solution de la nucléation appartient à cette courbe. Notamment pour le taux de restitution critique $G_c = 4 Pa.m$, le couple (l_c, t_c) est celui présenté par le point en rouge sur la figure 3-9.

On observe que l_c est une fonction croissante du temps de nucléation avec une phase d'augmentation rapide au début de la diffusion thermique puis une évolution plus lente lorsque le phénomène de diffusion thermique concerne une longueur plus importante.

Une conclusion intéressante à partir de ces observations découle d'une analyse du phénomène de nucléation pour deux milieux ayant les mêmes caractéristiques thermoélastique mais avec des taux de restitution critiques différents dénotés G_c^1 pour le matériau (1) et G_c^2 pour le matériau (2) vérifiant la relation d'ordre $G_c^2 > G_c^1$.

La figure (3-8a) montre que si une nucléation de fissure stable est possible, nous avons $l_c^2 > l_c^1$. Ce qui veut dire que le milieu le plus résistant (2) nucléé une fissure de taille plus grande que celui dont le taux de restitution critique est plus faible (1). Ce résultat semble contre-intuitif mais il trouve une signification dans l'interprétation de la dépendance entre la taille de fissure nucléée et l'instant de nucléation évoquée pré-

cédemment. En effet, la figure (3-9) montre que les deux nucléations ne surviennent pas au même moment et que l'instant de nucléation dans (2) est supérieur à celui de (1) $t_c^2 > t_c^1$. Dans ce sens il est tout à fait possible d'envisager une propagation de la fissure ℓ_c^1 de l'instant t_c^1 à t_c^2 de manière à ce que la fissure finale de le matériau (1) soit plus grande que celle du matériau (2) plus résistant.

A partir de ces deux applications, nous avons montré qu'il était possible d'avoir recours à une résolution directe du problème de nucléation soit à partir de la solution exacte soit par résolution numérique à l'aide de calcul EF. Il est cependant clair que nous ne pouvons pas toujours avoir accès à la solution exacte du problème sous la forme d'un couple associant les champs de contrainte et déformation, surtout lorsqu'on s'intéresse à des problèmes à géométrie finie et contenant des fissures. On peut également devoir faire face au problème du coût de temps de calcul pour la résolution numérique dans certains cas où la taille caractéristique de la fissure est trop faible par rapport aux dimensions de la structure, en plus du nombre important de calculs paramétriques pour plusieurs tailles de fissure pour obtenir la variation du $G_{inc}(\ell)$. Dans la partie suivante, on se propose à partir d'une analyse duale du principe de minimum d'énergie de fournir un encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental $G_{inc}(\ell)$ de la solution exacte en tirant profit des approches variationnelles en déplacement et en contraintes dans le cadre de la thermoélasticité.

3.3 Approches variationnelles pour la nucléation de fissure

Nous proposons dans un premier temps de mettre en oeuvre les principes de minimisation de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire qui conduisent à la détermination de bornes inférieure et supérieure encadrant la valeur du $G_{inc}(\ell)$. Cet encadrement permettra par la suite de proposer un encadrement du couple, taille de fissure stable et chargement critique, solution du problème de nucléation. La qualité de cette approximation dépend évidemment du choix des sous-espaces de champs

cinématiquement (respectivement statiquement) admissibles.

3.3.1 Principe de minimum de l'énergie et encadrement du taux de restitution incrémental d'énergie

On se place dans le cadre d'un comportement thermoélastique, où l'on définit le domaine d'étude Ω comme un milieu bidimensionnel. Pour simplifier les écritures, le contour du domaine (Ω) se décompose en une frontière ($\partial\Omega_\xi$) où le déplacement est prescrit, et une frontière ($\partial\Omega_T$) où le vecteur contrainte est donné tel que ($\partial\Omega = \partial\Omega_\xi \cup \partial\Omega_T$ et $\partial\Omega_\xi \cap \partial\Omega_T = \emptyset$).

Principe du minimum de l'énergie potentielle

Le principe du minimum de l'énergie potentielle stipule que parmi l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles, il existe une unique solution du problème qui minimise l'énergie potentielle.

Pour un niveau de chargement donné, on note $\underline{\xi}^{sol}$ le champ de déplacement solution du problème, qui est relié au champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{sol}$ par une loi de comportement thermoélastique (2.46).

Soit $\underline{\xi}'$ un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible et $\boldsymbol{\varepsilon}'$ son tenseur de déformation linéarisé associé. On considère la décomposition suivante:

$$\underline{\xi}' = \underline{\xi}^{sol} + \underline{\delta\xi} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}^{sol} + \boldsymbol{\delta\varepsilon} \quad (3.23)$$

Étant donné que les deux champs de déplacement $\underline{\xi}^{sol}$ et $\underline{\xi}'$ sont cinématiquement admissibles, ils vérifient les conditions aux limites sur la frontière ($\partial\Omega_\xi$) et on écrit:

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega_\xi) \quad \underline{\delta\xi} = 0 \quad (3.24)$$

A partir de l'expression de l'énergie interne (2.48), de la loi de comportement (2.46) ainsi que la décomposition (3.23), on exprime l'énergie interne virtuelle associée au

champ de déplacement $\underline{\xi}'$ par la relation:

$$U(\underline{\xi}', \Delta s) = U(\underline{\xi}^{sol}, \Delta s) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{sol} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} : \mathbb{C}^{ad} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} dV \quad (3.25)$$

Dans un deuxième temps, on exprime¹ le travail virtuel des efforts extérieurs virtuel à partir de l'expression (2.26):

$$\Phi(\underline{\xi}') = \Phi(\underline{\xi}^{sol}) + \int_{\partial\Omega_T} \underline{T} \cdot \underline{\delta\xi} dS \quad (3.26)$$

(3.26) peut être reformulée, en utilisant la condition aux limites (3.24) et en appliquant le T.T.V avec le champ $\underline{\delta\xi}$, sous la forme suivante:

$$\Phi(\underline{\xi}') = \Phi(\underline{\xi}^{sol}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{sol} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} dV \quad (3.27)$$

En combinant (3.25) et (3.27), et en rappelant que le tenseur d'élasticité adiabatique est défini positif², on retrouve l'expression du principe de minimum de l'énergie potentielle exprimée sur l'énergie interne ($E_p = U - \Phi$).

$$(\forall \underline{\xi}' \text{ C.A.}) \quad E_p(\underline{\xi}', \Delta s) \geq E_p(\underline{\xi}^{sol}, \Delta s) \quad (3.28)$$

Principe du minimum de l'énergie complémentaire

De manière analogue à l'approche en déplacement, le principe du minimum de l'énergie complémentaire consiste à établir que la solution en contrainte du problème minimise une fonctionnelle énergétique exprimée sur l'argument $\boldsymbol{\sigma}$.

On commence par définir l'énergie complémentaire E_c définie sur l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles comme la différence de deux fonctionnelles énergétiques.

$$E_c(\boldsymbol{\sigma}, \Delta s) = U^*(\boldsymbol{\sigma}, \Delta s) - \Phi^*(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.29)$$

1. Les forces à distances étant négligées.

2. $\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta\varepsilon} : \mathbb{C}^{ad} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} dV > 0$

tel que $U^*(\boldsymbol{\sigma}, \Delta s) = \int_{\Omega_0} u^*(\boldsymbol{\sigma}(\underline{X}), \Delta s(X)) d\Omega$ correspond à la transformée de Legendre de l'énergie interne par rapport à la déformation avec:

$$u^*(\boldsymbol{\sigma}, \Delta s) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + u(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta s) \quad (3.30)$$

et

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \Delta s) \quad (3.31)$$

Et Φ^* désigne la fonctionnelle du travail virtuel des déplacements donnés.

$$\Phi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\partial\Omega_\xi} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}^d dS \quad (3.32)$$

On reprend la notation du champ de contrainte solution du problème $\boldsymbol{\sigma}^{sol}$ et on considère un champ de contrainte statiquement admissible de la forme ($\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^{sol} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}$). Nous avons alors la condition aux limites:

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega_T) \quad \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad (3.33)$$

Il est facile de montrer à partir de la convexité de la densité de l'énergie interne que u^* est une fonction convexe par rapport à $\boldsymbol{\sigma}'$. En vertu de la relation (3.31) nous avons l'inégalité suivante:

$$U^*(\boldsymbol{\sigma}', \Delta s) - U^*(\boldsymbol{\sigma}^{sol}, \Delta s) \geq \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{sol} d\Omega \quad (3.34)$$

Dans un deuxième temps en introduisant la relation (3.33), la variation de la fonctionnelle Φ^* donne:

$$\Phi^*(\boldsymbol{\sigma}') - \Phi^*(\boldsymbol{\sigma}^{sol}) = \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot \underline{\xi}^d dS \quad (3.35)$$

En appliquant le théorème des travaux virtuels et en combinant les expressions (3.34) et (3.35) ainsi que l'expression de l'énergie complémentaire (3.29), on exprime le

principe de minimum de l'énergie complémentaire.

$$(\forall \boldsymbol{\sigma}' \text{ S.A.}) \quad E_c(\boldsymbol{\sigma}', \Delta s) \geq E_c(\boldsymbol{\sigma}^{sol}, \Delta s) \quad (3.36)$$

Conjonction des deux théorèmes et encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental

Pour le couple $(\boldsymbol{\sigma}^{sol}, \boldsymbol{\varepsilon}^{sol})$ solution du problème, on rappelle que l'on vérifie:

$$E_p(\boldsymbol{\varepsilon}^{sol}, \Delta s) + E_c(\boldsymbol{\sigma}^{sol}, \Delta s) = 0 \quad (3.37)$$

A partir des deux inégalités (3.28) et (3.36) de minimisation des énergies potentielle et complémentaire, ainsi que la relation de complémentarité (3.37) on obtient l'encadrement de l'énergie potentielle suivant:

$$(\forall \underline{\xi}' \text{ C.A.})(\forall \boldsymbol{\sigma}' \text{ S.A.}) \quad -E_c(\boldsymbol{\sigma}', \Delta s) \leq E_p(\underline{\xi}^{sol}, \Delta s) \leq E_p(\underline{\xi}', \Delta s) \quad (3.38)$$

A partir de cet encadrement de l'énergie potentielle, il est possible dès à présent de proposer un encadrement de G_{inc} .

On associe chaque variable à un exposant indiquant la configuration étudiée, où l'indice (0) représente la configuration avant nucléation et (f) la configuration fissurée. On obtient donc pour tous champs de contraintes virtuels $\boldsymbol{\sigma}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^f$ statiquement admissibles et pour tout champs de déplacement $\underline{\xi}^0$ et $\underline{\xi}^f$ cinématiquement admissibles, les deux inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} (\forall \underline{\xi}^0 \text{ C.A.})(\forall \boldsymbol{\sigma}^0 \text{ S.A.}) \quad & -E_c(\boldsymbol{\sigma}^0, \Delta s) \leq E_p^0 \leq E_p(\underline{\xi}^0, \Delta s) \\ (\forall \underline{\xi}^f \text{ C.A.})(\forall \boldsymbol{\sigma}^f \text{ S.A.}) \quad & -E_c(\boldsymbol{\sigma}^f, \Delta s) \leq E_p^f \leq E_p(\underline{\xi}^f, \Delta s) \end{aligned}$$

A partir de l'expression de G_{inc} (3.1), on établit finalement l'encadrement:

$$-\frac{1}{\ell}(E_p^f + E_c^0) \leq G_{inc} \leq \frac{1}{\ell}(E_p^0 + E_c^f) \quad (3.39)$$

La valeur de G_{inc} associée aux couples solutions $(\underline{\sigma}^i, \underline{\xi}^i)$ pour les configurations avant ($i = 0$) et après ($i = f$) nucléation d'une fissure stable peut donc être encadrée à partir des choix effectués sur les champs virtuels respectivement cinématiquement et statiquement admissibles.

3.3.2 Principe de superposition

Dans le cadre d'un comportement linéaire, le principe de superposition autorise la résolution du problème de nucléation de fissure en se ramenant à la résolution d'un problème auxiliaire. La perturbation créée par la nucléation de fissure est une contribution additionnelle qui vient s'ajouter à la solution initiale du milieu non fissuré. On considère un niveau de chargement donné caractérisé par: une densité de force volumique f_v , un vecteur contrainte \underline{T}^d imposé sur $(\partial\Omega_T)$, un déplacement imposé $\underline{\xi}^d$ sur $(\partial\Omega_\xi)$ ainsi qu'une sollicitation thermique représentée par une variation d'entropie Δs et d'un état de précontrainte $\underline{\sigma}^p$.

A partir de ce chargement, on définit le couple $(\underline{\sigma}^f, \underline{\xi}^f)$ solution du problème fissuré (Figure (3-10a)), qui vérifie dans le cadre de la thermoélasticité l'équation d'équilibre, les conditions au limites sur le bord $(\partial\Omega)$ ainsi que les conditions aux limites sur la surface de la fissure $(\partial\mathcal{F})$ (relations 2.1).

On a donc le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\sigma}^f) + \rho \underline{f}_v = \underline{0} \\ \underline{\varepsilon}^f = \frac{1}{2}(\underline{grad}(\underline{\xi}^f) + {}^t\underline{grad}(\underline{\xi}^f)) \\ \underline{\sigma}^f = \underline{\sigma}^p + \mathbb{C}^{ad} : \underline{\varepsilon}^f - \frac{\Delta s}{c} \underline{k} \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_T) \quad \underline{\sigma}^f \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_\xi) \quad \underline{\xi}^f = \underline{\xi}^d \\ (\forall \underline{x} \in \partial\mathcal{F}) \quad \underline{\sigma}^f \cdot \underline{n} = 0 \quad ; \quad \llbracket \underline{\xi}^f \rrbracket \cdot \underline{n} \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.40)$$

On décompose la solution du problème fissuré sous la forme suivante:

$$\underline{\sigma}^f = \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}^{aux} \quad ; \quad \underline{\xi}^f = \underline{\xi}^0 + \underline{\xi}^{aux} \quad (3.41)$$

où le couple $(\underline{\sigma}^0, \underline{\xi}^0)$ correspond au couple solution du problème initial en l'absence de fissure (Figure (3-10b)) que l'on résume par le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\sigma}^0) + \rho \underline{f}_v = \underline{0} \\ \underline{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}(\underline{grad}(\underline{\xi}^0) + {}^t \underline{grad}(\underline{\xi}^0)) \\ \underline{\sigma}^0 = \underline{\sigma}^p + \mathbb{C}^{ad} : \underline{\varepsilon}^0 - \frac{\Delta s}{c} \underline{k} \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_T) \quad \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_\xi) \quad \underline{\xi}^0 = \underline{\xi}^d \end{array} \right. \quad (3.42)$$

On précise qu'au niveau de la zone $(\partial\mathcal{F})$ où la fissure est censée apparaître dans le milieu sain, nous avons continuité du vecteur contrainte et un saut de déplacement nul:

$$(\forall \underline{x} \in \partial\mathcal{F}) \quad \llbracket \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n} \rrbracket = \underline{0} \quad ; \quad \llbracket \underline{\xi}^0 \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.43)$$

A partir de la décomposition (3.41), on arrive à montrer à partir de la combinaison des relations (3.40) et (3.42) que le couple $(\underline{\sigma}^{aux}, \underline{\xi}^{aux})$ est bien le couple solution d'un problème auxiliaire (Figure 3-10c) défini uniquement par un chargement au niveau de la fissure équivalent à l'opposé du vecteur contrainte initial. On exprime ici la continuité du vecteur contrainte avant l'apparition de la fissure. Le problème auxiliaire se résume donc au système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{div}(\underline{\sigma}^{aux}) = \underline{0} \\ \underline{\varepsilon}^{aux} = \frac{1}{2}(\underline{grad}(\underline{\xi}^{aux}) + {}^t \underline{grad}(\underline{\xi}^{aux})) \\ \underline{\sigma}^{aux} = \mathbb{C}^{ad} : \underline{\varepsilon}^{aux} \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_T) \quad \underline{\sigma}^{aux} \cdot \underline{n} = \underline{0} \\ (\forall \underline{x} \in \partial\Omega_\xi) \quad \underline{\xi}^{aux} = \underline{0} \\ (\forall \underline{x} \in \partial\mathcal{F}) \quad \underline{\sigma}^{aux} \cdot \underline{n} = -\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n} \quad ; \quad \llbracket \underline{\xi}^{aux} \rrbracket \cdot \underline{n} \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

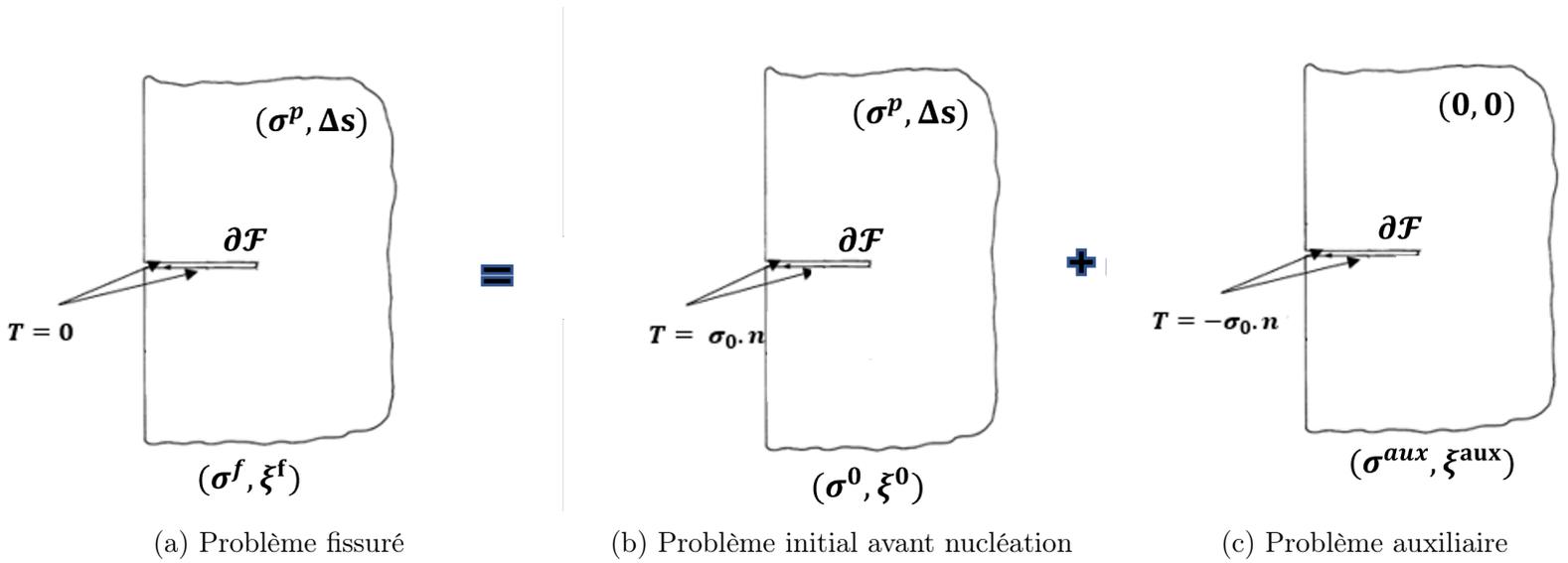


FIGURE 3-10 – Illustration du principe de superposition pour déterminer le taux de restitution d'énergie incrémental

Expression du taux de restitution d'énergie incrémental dans le cas d'une fissure débouchante

Il est facile de montrer à partir du principe de superposition que la variation de l'énergie potentielle entre l'état initial (0) et final (f) est égale à l'énergie potentielle du problème auxiliaire.

La relation (3.25) permet d'exprimer la variation entre l'énergie interne du problème fissuré et celle du problème initial en fonction de l'énergie interne du problème auxiliaire de la forme:

$$U^f - U^0 = U^{aux} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{aux} dV \quad (3.45)$$

où U^{aux} est l'énergie interne du problème auxiliaire définie par:

$$U^{aux} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{aux} : \mathbb{C}^{ad} : \boldsymbol{\varepsilon}^{aux} dV \quad (3.46)$$

Le déplacement du problème auxiliaire étant nul sur $\partial\Omega_\varepsilon$ il est possible de réécrire le terme de droite de (3.45) de la forme suivante.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{aux} dV &= \int_{\partial\Omega_T} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}^{aux} dS + \int_{\partial\mathcal{F}} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}^{aux} dS \\ &= \int_{\partial\Omega_T} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}^{aux} dS - \Phi^{aux} \end{aligned} \quad (3.47)$$

où l'intégrale sur la surface de la fissure n'est autre que le travail des efforts extérieurs du problème auxiliaire Φ^{aux} qui s'écrit:

$$\Phi^{aux} = \int_{\partial\mathcal{F}} (-\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}^{aux} dS \quad (3.48)$$

D'autre part on obtient à partir de l'expression (3.27) de la variation du travail des efforts extérieurs la relation:

$$\Phi^f - \Phi^0 = \int_{\partial\Omega_T} (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \underline{n}) \cdot (\underline{\xi}^f - \underline{\xi}^0) dS \quad (3.49)$$

Ce qui permet d'obtenir finalement en combinant les expressions (3.45), (3.47), (3.49) la relation entre les énergies potentielles de la forme:

$$E_p^f - E_p^0 = E_p^{aux} \quad (3.50)$$

A partir de la relation (3.2) de l'énergie potentielle et du fait de l'adiabaticité de la nucléation ($s^f = s^0$), on exprime l'énergie potentielle du milieu fissuré de la forme:

$$E_p(\varepsilon^f, s^0) = U(\varepsilon^f, s^0) - \Phi(\varepsilon^0 + \delta\varepsilon) \quad (3.51)$$

L'expression du taux de restitution incrémental devient:

$$G_{inc}(\ell) = -\frac{E_p(\ell) - E_p^0}{\ell} = -\frac{E_p^{aux}(\ell)}{\ell} \quad (3.52)$$

Ce résultat confirme l'intérêt de cette décomposition, qui permet de reformuler le problème de manière à localiser les sollicitations qui entraînent la nucléation au niveau de la fissure et ainsi s'affranchir d'une double résolution du problème initial (Figure 3-10b) et final (Figure 3-10a) et ne traiter que le problème auxiliaire (Figure 3-10c). Il est important de rappeler qu'il reste toujours nécessaire d'explicitier la distribution du vecteur contrainte initial $\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n}$ le long de la fissure afin de poser les conditions aux limite du problème auxiliaire. On retrouve ici la nécessité d'anticiper la localisation de la future fissure, en lien avec la présence de contraintes de traction localisées pour une ouverture de fissure en mode I.

Encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental par champs de perturbation A partir du principe de superposition, il est donc possible de reformuler la relation (3.39) en considérant une résolution de problèmes auxiliaires chargés uniquement sur la fissure. On écrit dans ce cas pour tout champ de déplacement $\underline{\delta\xi}'$ cinématiquement admissible ($\underline{\delta\xi}' = -\underline{\xi}^0$ sur la fissure et $\underline{\delta\xi}' = \underline{0}$ ailleurs) et pour tout champ de contrainte $\underline{\delta\sigma}'$ statiquement admissible ($\underline{\delta\sigma}' \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n}$ sur la fissure et $\underline{\delta\sigma}' \cdot \underline{n} = \underline{0}$ ailleurs) la relation suivante:

$$(\forall \underline{\delta\xi}' \in C.A.) (\forall \underline{\delta\sigma}' \in S.A.) \quad - \frac{E_p^{aux1}(\underline{\delta\xi}')}{\ell} \leq G_{inc} \leq \frac{E_c^{aux2}(\underline{\delta\sigma}')}{\ell} \quad (3.53)$$

avec

$$E_p^{aux1}(\underline{\delta\xi}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\delta\varepsilon}' : \mathbb{C}^{ad} : \underline{\delta\varepsilon}' dV - \int_{\partial\mathcal{F}} (-\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\delta\xi}' dS$$

$$E_c^{aux2}(\underline{\delta\sigma}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\delta\sigma}' : \mathbb{S}^{ad} : \underline{\delta\sigma}' dV - \int_{\partial\mathcal{F}} (\underline{\delta\sigma}' \cdot \underline{n}) \cdot (-\underline{\xi}^0) dS$$

$$G_{inc} = - \frac{E_p^{aux}(\underline{\delta\xi})}{\ell}$$

Nous proposons dans cette partie une approximation du taux de restitution d'énergie incrémental par principes de minimisation de l'énergie potentielle et de l'énergie

complémentaire. L'approche variationnelle en déplacement fournit une borne inférieure du G_{inc} , et l'approche variationnelle en contrainte fournit une borne supérieure. Le choix pertinent de ces champs virtuels, respectivement cinématiquement et statiquement admissibles, permet d'encadrer avec précision le taux de restitution d'énergie incrémental. Par la suite nous avons montré que, dans le cadre d'un comportement linéaire, le principe de superposition ramène la résolution du problème de nucléation de fissure à la résolution d'un unique problème auxiliaire. Cette résolution se différencie de la double résolution classique par une localisation des sollicitations qui entraînent la nucléation au niveau de la fissure. En particulier, Les champs de perturbation virtuels pour l'encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental sont asymptotiquement nul loin de de la fissure.

Dans la partie suivante, on propose une nouvelle méthode de calcul du taux de restitution d'énergie incrémental en lien avec la mécanique linéaire de la rupture.

3.4 Approche par mécanique linéaire de la rupture

3.4.1 Introduction

Pour traiter la problématique de la nucléation de fissure, il est possible de valoriser les résultats de la mécanique linéaire de la rupture. Cette dernière s'appuie sur la détermination des facteurs d'intensité de contrainte intervenant dans l'expression des champs locaux $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ singuliers en pointe de fissure.

Dans cette perspective, nous proposons d'explorer le lien entre le taux de restitution d'énergie incrémental et les facteurs d'intensité de contrainte. Différentes méthodes de détermination de ces facteurs d'intensité de contrainte peuvent être valorisées pour produire des mesures quantitatives du scénario de nucléation de fissure.

3.4.2 Lien entre le taux incrémentale de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte

Commençons par rappeler les expressions du taux de restitution d'énergie $G(\ell)$ sous sa forme usuelle ainsi que celle du taux de restitution d'énergie incrémental en fonction de l'énergie potentielle:

$$\begin{aligned}
 - \text{Taux de restitution d'énergie} & & G(\ell) &= -\frac{\partial E_p}{\partial \ell} \\
 - \text{Taux de restitution d'énergie incrémental} & & G_{inc}(\ell) &= -\frac{E_p(\ell) - E_p^0}{\ell}
 \end{aligned}$$

En remarquant que l'on peut écrire:

$$E_p(\ell) - E_p^0 = \int_0^\ell \frac{\partial E_p}{\partial u} du$$

Il est possible d'établir une relation entre G et G_{inc} de la forme:

$$G_{inc}(\ell) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell G(u) du \quad (3.54)$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope et homogène, pour des processus quasi-statiques en géométrie plane, le taux de restitution de l'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte³ en pointe de fissure sont reliés par la formule d'Irwin [41]:

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^3 \quad (3.55)$$

En combinant (3.54) et (3.55), il est donc possible de relier le taux de restitution d'énergie incrémental aux carrés des facteurs d'intensité de contrainte. Dans le cas d'une nucléation de fissure en mode I, on obtient:

$$G_{inc}(\ell) = \frac{1}{\ell} \frac{1 - \nu^2}{E} \int_0^\ell K_I^2(u) du \quad (3.56)$$

3. en $MPa\sqrt{m}$

C'est précisément cette relation qui établit un point de jonction entre les résultats de la mécanique linéaire de la rupture (connaissance des facteurs d'intensité de contrainte associés aux champs locaux singuliers) et le critère de nucléation énergétique, qui par nature ne fait intervenir que les grandeurs énergétiques globales.

L'expression du critère d'Irwin pour la propagation d'une fissure en mode I s'écrit:

$$\begin{cases} K_I < K_{Ic} & : & \dot{\ell} = 0 \\ K_I = K_{Ic} & : & \dot{\ell} > 0 \end{cases}$$

où K_{Ic} est la ténacité du matériau [MPa. \sqrt{m}].

En mode I, (3.55) fournit le lien existant entre l'énergie critique G_c et la ténacité K_{Ic} :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{E G_c}{1 - \nu^2}} \quad (3.57)$$

Plusieurs méthodes pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte sont disponibles dans la littérature. On trouve des expressions analytiques et semi-analytiques pour des problèmes de fissures contenues dans des milieux infinis soumis à des chargements plus ou moins simples [67]. Dans le cas de géométries finies, il existe plusieurs procédés permettant de déterminer les facteurs d'intensité de contrainte par méthode de collocation [36],[27], ou bien à l'aide de fonctions de poids [9], [26] ou encore par principe de superposition à l'aide de la fonction de Green [28]. Du point de vue purement mécanique, on peut tirer profit de la modélisation par éléments finis ou par éléments finis de frontière (BEM).

Dans la section suivante, après avoir traité à titre d'illustration le cas du délaminage d'une poutre, nous proposons une résolution explicite du facteur d'intensité de contraintes dans le but de traiter la problématique de nucléation de fissure dans un milieu en compression contenant une cavité cylindrique.

Délaminage d'une poutre

Reprenons d'abord rapidement l'application traitée à la section 3.2. Il est possible de retrouver l'expression du taux de restitution d'énergie (3.14) à partir de la relation (3.56) et de l'expression du facteur d'intensité de contrainte d'une double poutre encastrée (DCB) qui s'écrit sous la forme:

$$K_I = C \frac{F\ell}{\sqrt{2BI}} \quad ; \quad C = \begin{cases} 1 & \text{en contraintes planes} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (3.58)$$

Après intégration, on retrouve bien l'expression de G_{inc} dans (3.14) pour une épaisseur unitaire ($B = 1$).

$$G_{inc} = \frac{1}{\ell} \frac{1}{E'} \int_0^\ell K_I^2(u) du = \frac{F^2}{6EI} \ell^2 \quad (3.59)$$

Stabilité forage d'un puits de forage et nucléation de fissure

Le creusement de puits dans la roche engendre une redistribution des contraintes autour de la paroi du puits ce qui peut mener à des instabilités et des risques de fissuration. Notamment avec l'apparition de fissures en traction (mode I) par chargement compressif ou encore l'ovalisation du puits "wellbore breakouts" (mode II). Les travaux de L. Jeannin [45] proposent une analyse de ces mécanismes de fracturation, en particulier l'apparition de fissures en traction lors d'une compression uniaxiale. Dans cette partie, on aborde cette problématique de stabilité du puits du point de vue de la nucléation de fissure exclusivement en mode I en utilisant l'approche proposée en Section 3.4 qui met à profit des résultats de la mécanique linéaire de la rupture, pour évaluer l'effet de l'anisotropie du chargement sur la nucléation de ces fissures.

Redistribution du champ de contraintes après forage On modélise le puits comme un cylindre de section circulaire de rayon R , plongé dans la roche représentée

comme une matrice solide homogène dont le comportement est supposé élastique linéaire isotrope (Figure 3-11). Le cylindre étant considéré infini on se place dans les conditions de résolution en déformations planes.

Loin du forage, le milieu se trouve dans un état de compression défini par un état de contrainte biaxial de composantes horizontale mineure $\sigma_{xx}^\infty < 0$ et majeure $\sigma_{yy}^\infty < 0$, vérifiant:

$$\sigma_{yy}^\infty \leq \sigma_{xx}^\infty \quad (3.60)$$

On introduit le coefficient d'anisotropie de compression $\kappa = \frac{\sigma_{xx}^\infty}{\sigma_{yy}^\infty} \in [0, 1]$. Les deux états limites correspondent à $\kappa = 0$ lorsque l'état de compression est uniaxiale suivant y (abordé dans [45]) et $\kappa = 1$ pour une compression isotrope.

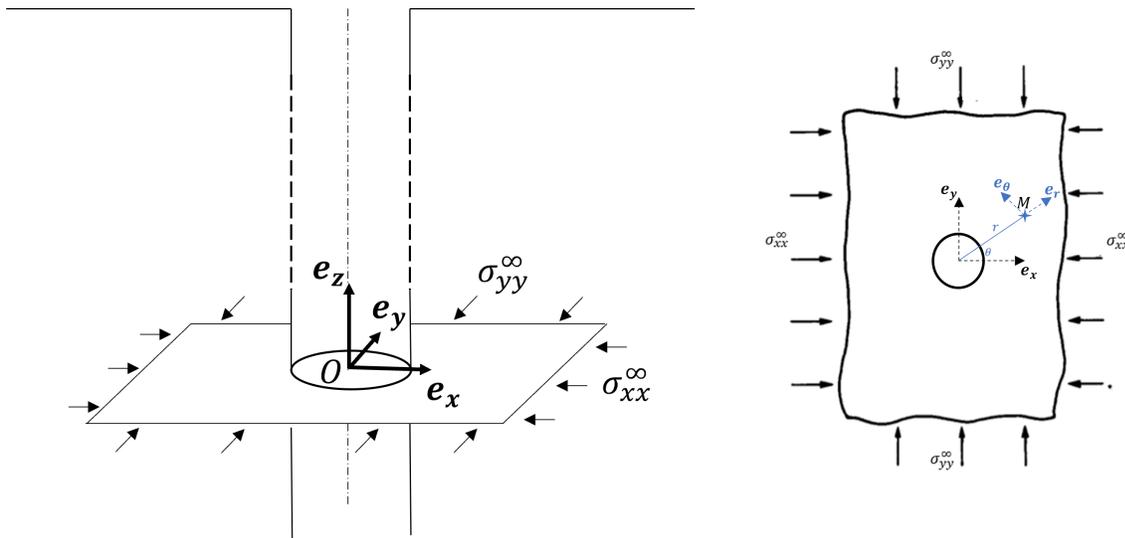


FIGURE 3-11 – Modélisation du creusement de puits

Le but de cette étude n'ayant pas pour objet l'évaluation de l'effet d'une pression interne, on se limite au cas où celle-ci est nulle. Néanmoins il est possible de traiter le cas où la paroi du cylindre est soumise à une pression en se ramenant par principe de superposition à un problème auxiliaire soumis à un nouveau champ de contrainte à l'infini ajusté pour gérer cette composante de pression. Le contrôle de cette pression représente alors un moyen efficace pour limiter, voire annuler, les risques de nucléation. L'expression du champ de contraintes en coordonnées polaires, normalisée par la

compression majeure $\sigma_{yy}^\infty < 0$, est donnée dans [42]:

$$\begin{aligned} 2\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{yy}^\infty} &= (1 + \kappa)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - (1 - \kappa)\left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ 2\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{yy}^\infty} &= (1 + \kappa)\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + (1 - \kappa)\left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ 2\frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_{yy}^\infty} &= (1 - \kappa)\left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.61)$$

d'où sur la paroi $r = R$, la seule composante non-nulle du champ de contrainte:

$$\left|\frac{\sigma_{\theta\theta}(R, \theta)}{\sigma_{yy}^\infty}\right| = 2(\kappa - 1)\cos(2\theta) - (1 + \kappa) \quad (3.62)$$

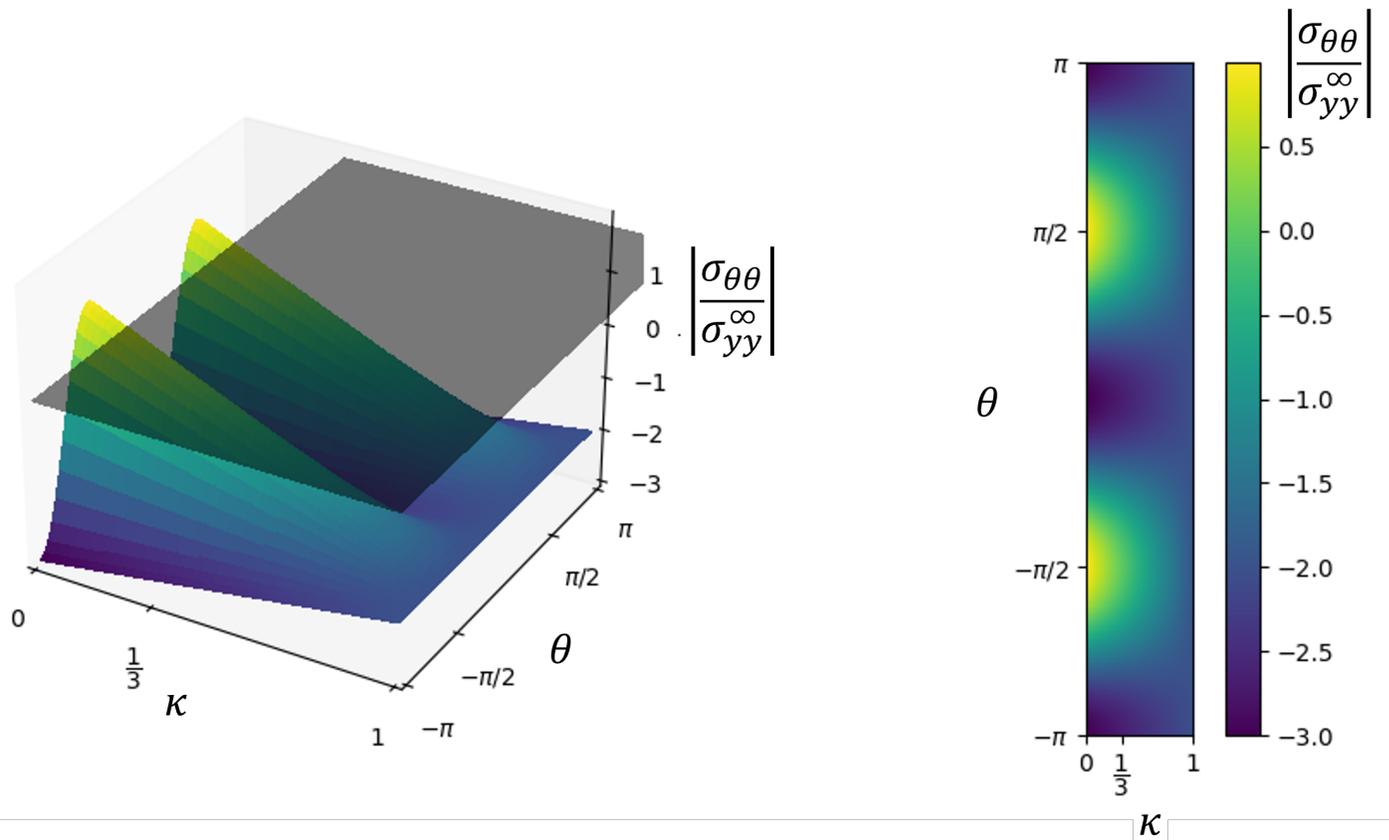


FIGURE 3-12 – distribution du champ de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ sur la paroi en fonction de l'angle θ et le coefficient d'anisotropie κ

La figure (3-12) trace la variation de la contrainte orthoradiale sur la paroi en

fonction de la position définie par l'angle de rotation θ et du coefficient d'anisotropie κ . On retrouve un état de contrainte en traction maximal en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ pour tout $\kappa < \frac{1}{3}$. La zone de traction est maximale pour une compression uniaxiale ($\kappa = 0$) et tend à disparaître lorsque le coefficient d'anisotropie $\kappa \rightarrow \frac{1}{3}$.

A partir de ce constat, il est naturel de considérer, pour un $\kappa \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, le mécanisme de nucléation qui suggère l'apparition de deux fissures en mode I opposées partant respectivement de la paroi du puits en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ suivant l'axe vertical (Figure 3-13).

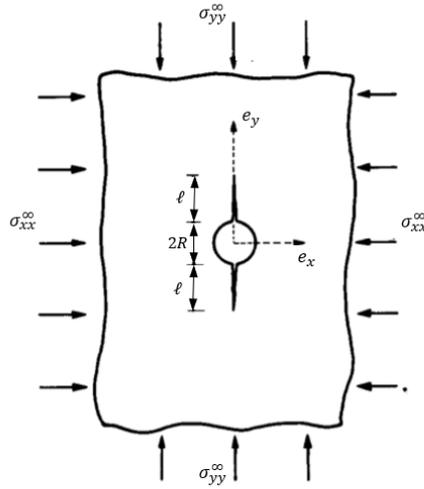


FIGURE 3-13 – Modélisation de la nucléation de fissure en mode I

Compression uniaxiale

On considère dans cette partie le cas d'une compression uniaxiale suivant l'axe \underline{e}_y ($\kappa = 0$), le champ de contrainte lointain s'écrit de la forme $\boldsymbol{\sigma}^\infty = \sigma_{yy}^\infty \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$. Dans cette situation, l'expression du facteur d'intensité de contrainte K_I du milieu fissuré, donné dans [63], s'écrit:

$$K_I(\ell) = -\frac{1.1\sqrt{\lambda}}{(1+\lambda)^{3.3}} \sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi R} \quad (3.63)$$

avec $\lambda = \frac{\ell}{R}$.

A partir de l'expression (3.56) qui relie G_{inc} et K_I par intégration sur la longueur de fissure, on obtient l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental explicité dans [45]:

$$G_{inc}(\lambda) = \Gamma \left(\frac{0.0475}{\lambda} \left(1 - \frac{(1 + 5.6 \lambda)}{(1 + \lambda)^{5.6}} \right) \right) \quad (3.64)$$

avec :

$$\Gamma = \frac{\pi R \sigma_{yy}^{\infty 2} (1 - \nu^2)}{E} \quad (3.65)$$

La condition de stabilité dans le critère énergétique (2.14), $\frac{dG_{inc}(\lambda)}{d\lambda} = 0$ prédit une taille de fissure de l'ordre de $\ell_c \simeq R/3$. Le chargement critique $\sigma_{yy}^{\infty*}$ est déduit de la condition d'initiation :

$$G_{inc} = G_c \quad : \quad \sigma_{yy}^{\infty*} = -2.294 \sqrt{\frac{G_c E'}{R}} \quad \text{avec} \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.66)$$

Compression anisotrope

Dans le cas plus général où la contrainte en compression suivant l'axe \underline{e}_x est non nulle ($\kappa \neq 0$), l'expression du facteur d'intensité de contrainte s'écrit [63]⁴:

$$K_I(\ell) = -\sqrt{\lambda} \left(\frac{1.1(1 - 2.1\kappa)}{(1 + \lambda)^{3.3}} - \kappa \right) \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi R} \quad (3.67)$$

En combinant (3.56) et (3.67), l'expression de $G_{inc}(\ell)$ est donnée par:

$$G_{inc}(\lambda) = \Gamma \left(\frac{1}{2} \kappa^2 \lambda - \frac{0.67\kappa(1.1 - 2.31\kappa)}{\lambda} \left(1 - \frac{1 + 2.3\lambda}{(1 + \lambda)^{2.3}} \right) + (1.1 - 2.31\kappa)^2 \left(\frac{0.04}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{(1 + \lambda)^{4.6}} \right) - \frac{0.18}{(1 + \lambda)^{5.6}} \right) \right) \quad (3.68)$$

L'expression analytique du taux de restitution d'énergie incrémental pour un chargement en compression anisotrope en fonction du rapport κ permet dans un premier temps d'accéder à la longueur de nucléation et à l'état de compression critique de nucléation pour différentes configurations d'anisotropie et dans un deuxième temps

4. On retrouve 3.63 en prenant $\kappa = 0$

de statuer sur le rapport critique d'anisotropie à partir duquel le phénomène de nucléation survient.

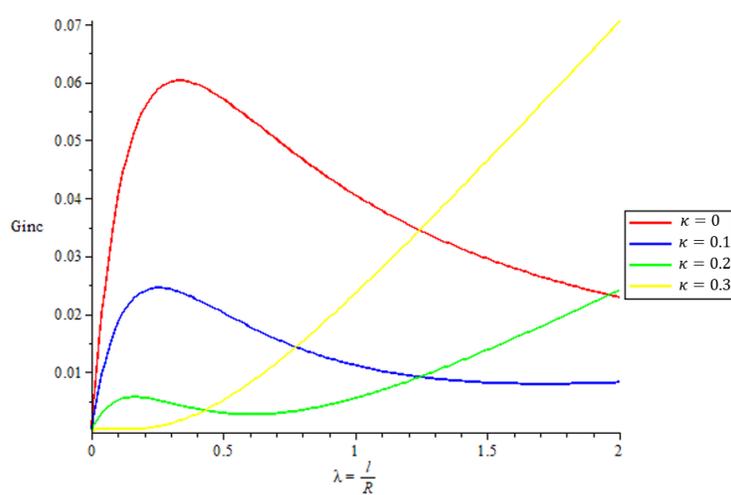
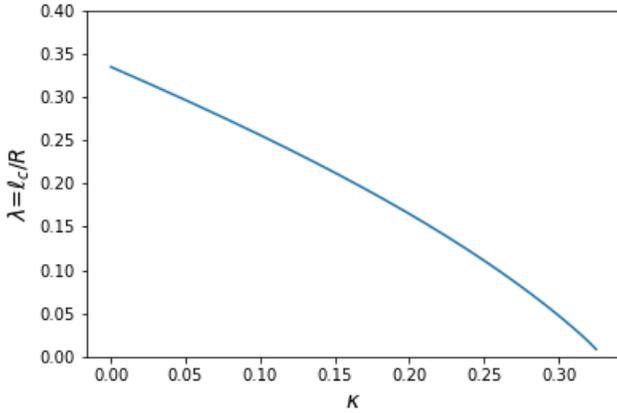


FIGURE 3-14 – $G_{inc}(\ell)$ en fonction de $\lambda = \ell/R$ pour différents rapport d'anisotropie κ

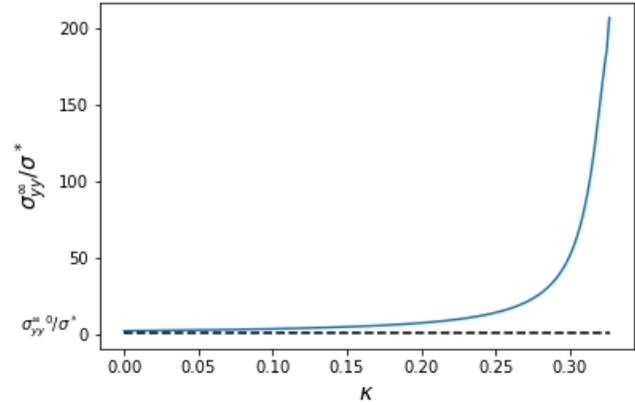
On observe Figure (3-14), conformément à l'analyse en contrainte (cf. Figure 3-12) qui stipule que nous avons une zone de traction en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ pour tout $\kappa \leq 1/3$, que le taux de restitution de l'énergie incrémental pour une fissure en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ présente bien un maximum c'est à dire une nucléation stable pour tout $\kappa \leq 1/3$. De plus, on retrouve que le $G_{inc}(\ell_c)$ diminue lorsque le coefficient d'anisotropie κ augmente. La composante de compression horizontale σ_{xx}^∞ apparaît donc comme un facteur limitant de la nucléation puisqu'elle réduit la valeur de G_{inc} pour $\kappa \leq 1/3$ et empêche toute nucléation lorsque la zone de traction disparaît pour $\kappa \geq 1/3$.

On constate sur la Figure (3-15a) que la méthode gère bien la décroissance de la longueur de nucléation de fissure en fonction de l'anisotropie du champ lointain. La situation la plus critique est définie par $\kappa = 0$. Elle correspond à une longueur de fissure maximale $\ell_c \simeq \frac{R}{3}$; pour $\kappa \rightarrow \frac{1}{3}$, la taille de fissure nucléée $\ell_c \rightarrow 0$.

La courbe 3-15b trace la variation de la contrainte critique de nucléation, normalisée par le coefficient $\sigma^* = -\sqrt{\frac{G_c E'}{R}}$. Le chargement critique est une fonction croissante de κ partant d'une valeur minimale, annoncée pour une compression uniaxiale (3.66), vers une valeur infinie pour $\kappa = \frac{1}{3}$.



(a) longueur de nucléation en fonction du rapport d'anisotropie



(b) Compression critique de nucléation en fonction du rapport d'anisotropie

FIGURE 3-15 – Variation de la longueur de nucléation et du chargement critique en fonction de l'anisotropie de la compression

3.4.3 Méthode de détermination des facteurs d'intensités de contraintes

Le lien établi entre le taux de restitution d'énergie incrémental et le facteur d'intensité de contrainte (3.56) permet de mettre à profit les différents travaux dédiés à l'identification des facteurs d'intensité de contrainte dans le cadre de la problématique de nucléation de fissure.

Nous proposons dans cette partie de traiter des problématiques de nucléation de fissure en mode I sous chargement complexe en se ramenant par superposition à la combinaison de solutions de facteurs d'intensité de contrainte proposés dans [26] pour caractériser le comportement d'un milieu fissuré. T. Fett avance que l'information fournie par le facteur d'intensité des contraintes K_I et le 'T-stress', qui représente le premier terme régulier du champ de contrainte (A.1), est suffisante pour décrire l'état du milieu en pointe de fissure. En utilisant différentes méthodes de résolution [67], [36], [9],[28], cet auteur propose un panel de solutions pour ces deux grandeurs pour différents types de géométries et chargements complexes sous forme de graphes, tableaux de valeurs et fonctions analytiques approchées [27].

Illustration - Fissure dans une plaque en flexion

A titre d'illustration, nous proposons de traiter un problème similaire à celui du délaminage d'une poutre (Section 3.2), où on considère l'apparition d'une fissure dans une plaque finie (Figure 3-16) de longueur W et de hauteur $2H$, soumise à une distribution de chargement en flexion de la forme:

$$f^{\pm} = \pm F \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (3.69)$$

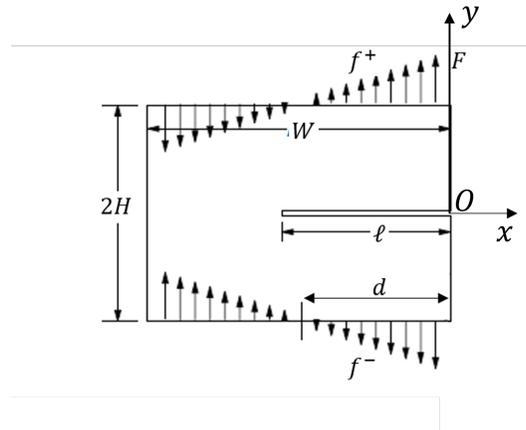


FIGURE 3-16 – Délaminage d'une plaque en flexion

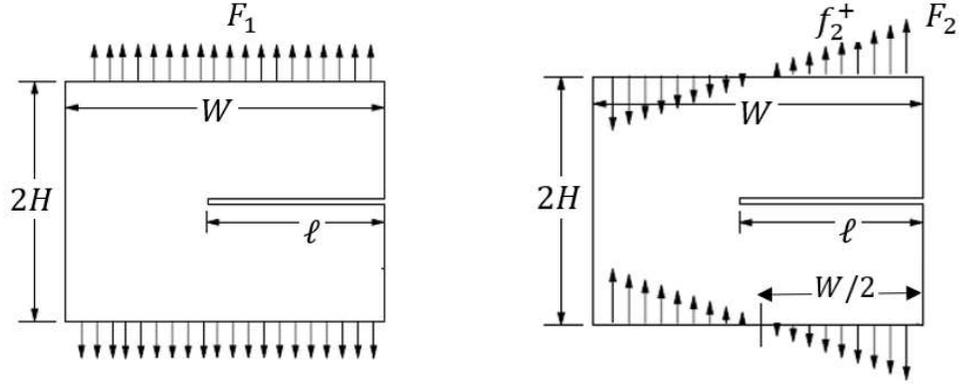
On se place en déformations planes et on considère les conditions aux limites suivantes:

$$y = \pm H : \quad \begin{cases} T_x = 0 \\ T_y = \pm F \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \quad (3.70)$$

$$-\ell < x < 0 \quad ; \quad y = 0 : \quad T_x = T_y = 0 \quad (3.71)$$

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = -W : \quad T_x = T_y = 0 \quad (3.72)$$

Dans ces conditions de chargement, on ne dispose pas d'une expression explicite du facteur d'intensité de contrainte. Pour contourner cette difficulté on se ramène par superposition à deux situations de chargement (Figure 3-17) pour lesquelles l'expression analytique du facteur d'intensité de contrainte est connue..



(a) Traction uniforme d'intensité F_1 (b) Distribution de chargement de la forme $f_2 = F_2(1 + \frac{2x}{W})$

FIGURE 3-17 – Problèmes de référence pour le délaminage

Le problème (a) correspond à chargement uniforme en traction F_1 le long des bords $y = \pm H$, et le problème (b) correspond à un chargement en flexion de la forme $F_2(1 + \frac{2x}{W})$.

Les facteurs d'intensité de contrainte pour ces deux configurations sont explicités dans [27] par la relation :

$$K_I = F_i \sqrt{\pi \ell} \quad f_b^{(i)}(\ell) \quad (3.73)$$

L'indice i indique le problème considéré avec $i = a, b$ et $f_b^{(i)}$ correspond à la fonction de forme explicitée pour un rapport $\frac{H}{W} \geq 1.5$ sous la forme ($\alpha = \ell/W$) :

$$f_b^{(a)}(\alpha) = \frac{1.1215}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{12}\alpha + \frac{1}{8}\alpha^2 + 5\alpha^2(1-\alpha)^6 + \frac{3}{8}e^{-6.1342\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right)$$

$$f_b^{(b)}(\alpha) = \frac{1.1215}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - 0.23566(1-\alpha) + \frac{1}{50}(1-\alpha)^2 + 3\alpha^2(1-\alpha)^7 + 0.229e^{-7.52\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right)$$

Pour un rapport $\frac{H}{W} < 1.5$, les expressions analytiques ne sont pas connues mais on dispose d'un certain nombre de points pour caractériser les facteurs d'intensité de contraintes des deux problèmes de référence présentés sur la figure (3-18). La superposition de ces deux problèmes pour un choix judicieux des intensités F_a et F_b permet de définir le chargement initial (3.69).

	$H/W=1.5$	1.25	1.00	0.75	0.5	0.4	0.3	0.25
$\alpha=0$	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215
0.1	1.0170	1.0172	1.0174	1.0182	1.0352	1.0649	1.1455	1.2431
0.2	0.9800	0.9799	0.9798	0.9877	1.0649	1.1625	1.3619	1.5358
0.3	0.9722	0.9723	0.9729	0.9840	1.0821	1.2134	1.4892	1.7225
0.4	0.9813	0.9813	0.9819	0.9915	1.0819	1.2106	1.5061	1.7819
0.5	0.9985	0.9986	0.9989	1.0055	1.0649	1.1667	1.4298	1.7013
0.6	1.0203	1.0203	1.0204	1.0221	1.0496	1.1073	1.2898	1.5061
0.7	1.0440	1.0441	1.0441	1.0442	1.0522	1.0691	1.1498	1.2685
0.8	1.0683	1.0683	1.0683	1.0690	1.0691	1.0734	1.0861	1.1201
1.0	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215

(a) Fonction géométrique $f_b^{(a)}(1 - \frac{\alpha}{W})^{3/2}$ du problème (a) de traction

a/W	$H/W=1.5$	1.25	1.00	0.75	0.5	0.4
0	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215
0.2	0.7561	0.7561	0.7562	0.7628	0.8279	0.9130
0.3	0.6583	0.6583	0.6589	0.6677	0.7444	0.8475
0.4	0.5861	0.5861	0.5865	0.5930	0.6567	0.7505
0.5	0.5293	0.5293	0.5296	0.5332	0.5717	0.6388
0.6	0.4842	0.4842	0.4842	0.4852	0.5022	0.5367
0.7	0.4481	0.4479	0.4478	0.4478	0.4514	0.4621
0.8	0.4203	0.4188	0.4191	0.4185	0.4180	0.4185
1.0	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374

(b) Fonction géométrique $f_b^{(a)}(1 - \frac{\alpha}{W})^{3/2}$ du problème (b) de flexion

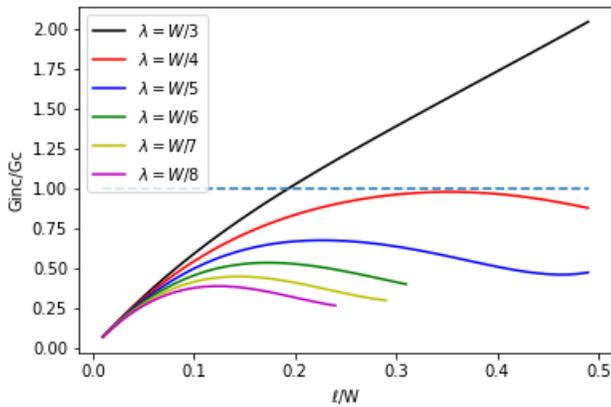
FIGURE 3-18 – Fonctions de forme pour un rapport $\frac{H}{W} < 1.5$ [27]

On retrouve finalement l'expression du facteur d'intensité de contrainte du problème (cf. Figure 3-16) qui se met sous la forme:

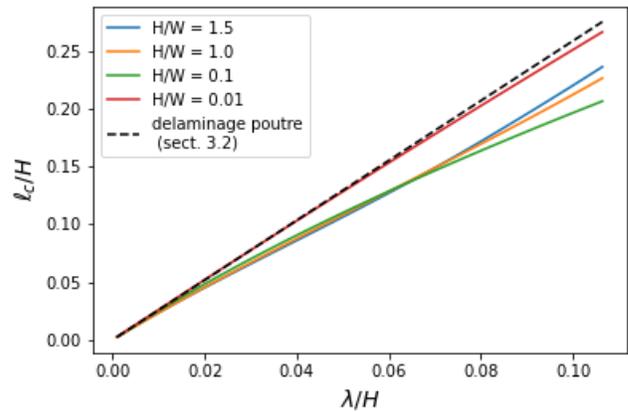
$$K_I(\ell) = F\sqrt{\pi\ell} \left(\frac{W}{2\lambda} f_b^{(a)}(\ell) + \left(1 - \frac{W}{2\lambda}\right) f_b^{(b)} \right) \quad (3.74)$$

A partir des relations (3.56) et (3.74), on trace la loi d'évolution $G_{inc}(\ell)$ (Figure 3-19a) pour différentes valeurs du paramètre de chargement λ . Celui ci est introduit dans l'expression du chargement (3.69) et définit la zone de traction dans la poutre ($x > -\lambda$) et celle en compression ($x < -\lambda$).

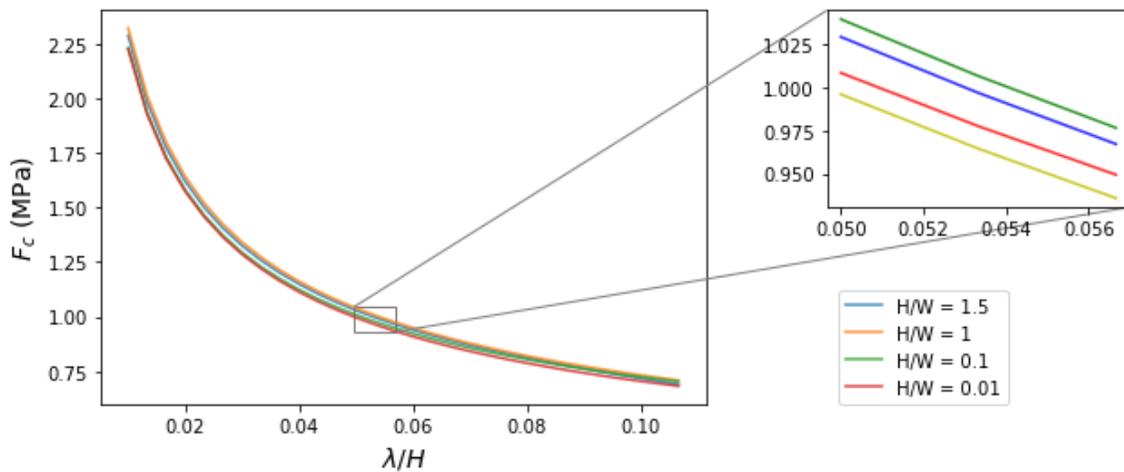
On observe (Figure 3-19a) qu'il est possible de nucléer des fissures stables pour tout $\lambda \leq \frac{W}{4}$ mais que cette nucléation n'est plus stable pour une zone de traction de l'ordre de $\frac{W}{3}$. On observe aussi que la longueur de fissure nucléée augmente avec la



(a) $G_{inc}(\ell)$ pour différentes zones de traction λ



(b) Évolution de ℓ_c en fonction de la zone de traction pour différents élancements $\frac{H}{W}$



(c) Évolution du chargement critique en fonction de la zone de traction pour différents élancements $\frac{H}{W}$

FIGURE 3-19 – Nucléation de fissure par délaminage

zone de traction, comme le montre la figure (3-19b). De plus, on parvient à retrouver la relation proportionnelle entre ℓ_c et λ ($\ell_c \simeq 2.59 \lambda$) obtenue dans la section (3.2) pour le délaminage d'une poutre et cela pour des élancements très grands (rapport $H/W \rightarrow 0$). Plus cet élancement est faible, plus la longueur de fissure nucléée est inférieure à celle proposée avec la théorie des poutres notamment pour des distances de traction λ grandes (Figure 3-19b). L'écart entre ces deux approches peut être expliqué par la présence d'un effet de bord pour l'approche s'appuyant sur la mécanique linéaire de la rupture, qui a tendance à freiner la nucléation.

Cette conclusion peut être davantage expliquée à partir d’une comparaison entre la démarche adoptée par chacune de ces méthodes pour estimer l’énergie potentielle du milieu. Pour le délaminage de la poutre (section 3.2), la variation de l’énergie potentielle du milieu se réduit à l’énergie élastique de flexion localisée au niveau de la fissure indépendamment de la longueur de la structure (3.13). En revanche, l’évaluation du taux de restitution d’énergie incrémental à partir du facteur d’intensité de contrainte (3.74) préserve une dépendance par rapport à la taille de la structure. L’intensité du chargement critique de nucléation quant à lui est bien une fonction décroissante de λ (Figure 3-19c), ce qui correspond aux conclusions de la section (3.2). La variation de l’élancement de la plaque, pour une largeur maintenue constante, n’impacte pas significativement l’intensité du chargement de nucléation.

On peut conclure que la stratégie employée dans cette partie est manifestement efficace pour explorer la problématique de nucléation de fissure. Elle permet d’aborder des situations de chargements appliqués sur les bords extérieurs ou encore se ramener par superposition à des situations de fissure chargée. Elle repose cependant sur l’existence d’un catalogue de solutions analytiques dans des cas qui peuvent être trop particuliers. On présente dans la section suivante une méthode alternative capable de traiter des situations plus complexes.

3.4.4 Méthode itérative

L’approche de résolution itérative [37] est une méthode de résolution efficace pour déterminer les facteurs d’intensité de contraintes dans diverses configurations de géométrie et de chargement. Elle permet en particulier de résoudre des problématiques de fissures à la surface soumises à une distribution quelconque du vecteur contrainte (3-20) à partir de la combinaison successive des solutions de problèmes de référence connus.

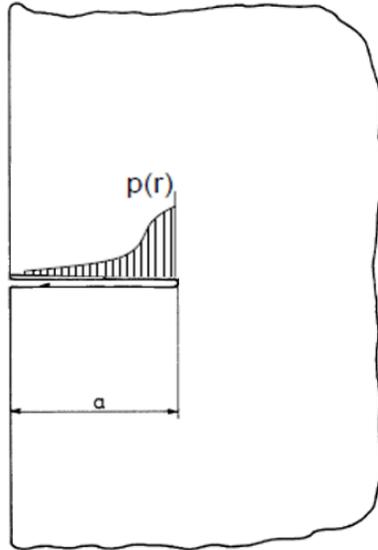


FIGURE 3-20 – Milieu semi-infini contenant une fissure au bord soumise à une distribution de pression quelconque

Procédure itérative pour une fissure débouchante

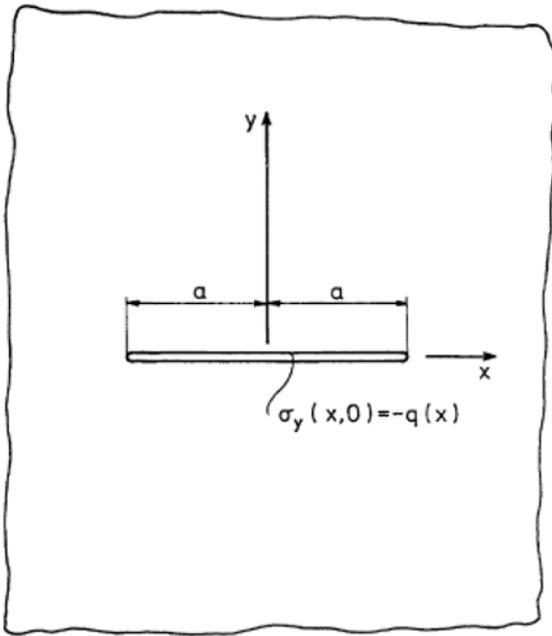
Cette procédure se base sur le principe de résolution successive de deux problèmes de référence (Figure 3-21):

- le problème (A) étant un milieu infini contenant une fissure soumise à une distribution de contrainte $\sigma_y(x, 0)$
- le problème (B) celui d'un demi-espace chargé sur sa surface $\sigma_x(0, y)$.

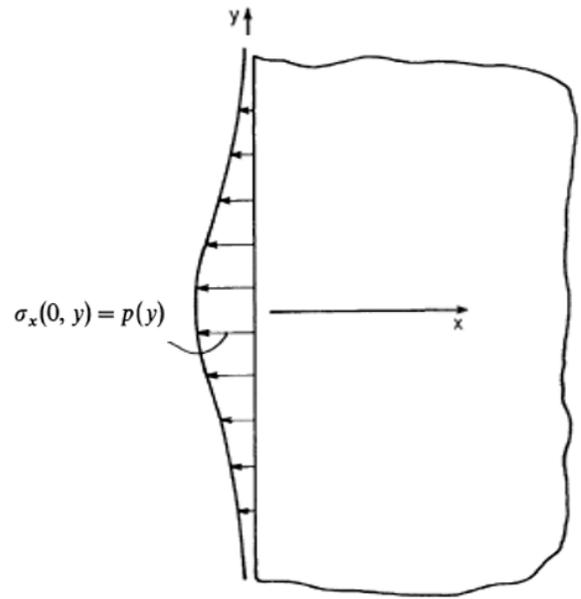
Le principe consiste à superposer les deux systèmes linéaires de façon itérative. A l'itération n , la solution du problème (A_n) obtenue pour un chargement sur la fissure défini par $\sigma(x, 0) = -q^{(n)}(x)$ est combinée à celle du problème (B_n) chargé en son bord avec $\sigma_y(x, 0) = -p^{(n)}(y)$ selon le scénario suivant:

- $q^{(0)}(x) = \sigma(x)$ chargement initial du problème.
- $p^{(n)}(y) = \sigma_{xA}^{(n)}(0, y)$ solution de (A_n)
- $q^{(n)}(x) = \sigma_{yB}^{(n-1)}(x, 0)$ solution de (B_{n-1})

La superposition de toutes les itérations permet de retrouver un milieu semi-infini



(a) Problème A: fissure dans un milieu infini



(b) Problème B: milieu semi-infini chargé au bord

FIGURE 3-21 – Problèmes de référence pour la résolution de fissuration à la surface

contenant une fissure dont le bord est soumis à la contrainte:

$$\sigma_y(x, 0) = -\sigma(x) + q^n(x) \quad (3.75)$$

où le nombre n d'itérations doit être assez grand pour que $q^n(x) \ll \sigma(x)$. En pratique, une dizaine d'itérations ($n = 10$) est suffisante.

Application pour un chargement ponctuel

Pour un chargement ponctuel en pression (resp. en cisaillement) d'intensité P (resp. Q) de la forme $\sigma_y(x) = P \delta(x - b)$ (resp. $\tau(x) = Q \delta(x - b)$) sur la fissure à une distance ($b < a$), l'expression du facteur d'intensité de contrainte en mode I est donné par la relation [37]:

$$k_1 = \frac{2}{\pi} \frac{Pa^{1/2}}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \left[1 + f\left(\frac{b}{a}\right) \right] \quad (3.76)$$

Dans le cas du cisaillement, on a le facteur d'intensité de contrainte en mode II:

$$k_2 = \frac{2}{\pi} \frac{Qa^{1/2}}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \left[1 + f\left(\frac{b}{a}\right) \right] \quad (3.77)$$

où la fonction $f\left(\frac{b}{a}\right)$ est définie par:

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^1 \frac{s(\xi)d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}$$

$$s(\xi) = \sum_1^n s^i(\xi) \quad \text{et} \quad s^i(\xi) = \frac{1}{P}(a^2 - b^2)^{1/2} q^n(x)$$

A titre d'illustration, pour une force ponctuelle P appliquée au milieu de la fissure $\ell/2$, on trace le rapport q^n/P en fonction de n nombre d'itérations (Figure 3-22).

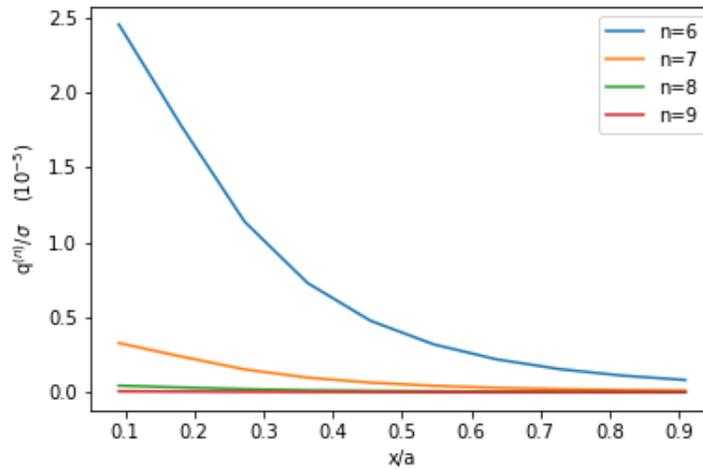


FIGURE 3-22 – Rapport q^n/P le long de la fissure pour différents pas d'itération pour un chargement ponctuel en $b = a/2$

Le processus itératif converge assez rapidement avec un rapport ($\frac{q^n}{P} \sim 10^{-5}$) après 6 itérations, ce qui permet de réécrire (3.75) sous la forme:

$$\sigma_y(x, 0) = -\sigma(x) \quad (3.78)$$

Une interpolation numérique de la fonction $f(c = \frac{b}{a})$ est proposée par [37]:

$$f(c) = (1 - c^2)(0.2945 - 0.3912c^2 + 0.7685c^4 - 0.9942c^6 + 0.5094c^8) \quad (3.79)$$

Expression du facteur d'intensité à partir du problème de Green

La stratégie abordée dans cette partie pour explorer la problématique de nucléation d'une fissure chargée est basée sur la résolution d'un problème de Green défini par l'application d'une force ponctuelle à une distance donnée sur la fissure. On montre alors qu'il est possible, en additionnant les contributions de toutes les forces ponctuelles, de se ramener à n'importe quelle distribution de chargement sur la fissure. L'intérêt de cette méthode, par rapport à la stratégie précédente (section 3.4.3), réside alors dans sa capacité à traiter un large panel de problèmes de nucléation de fissure avec des distributions de chargements complexes. Toujours est-il que la fissure étudiée doit être débouchante dans un milieu semi-infini.

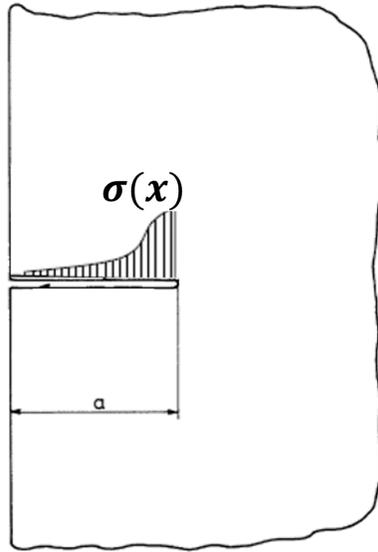


FIGURE 3-23 – Milieu semi-infini contenant une fissure au bord soumise à une distribution de pression $\sigma(x)$

On considère une distribution de pression appliquée sur une fissure de taille a de la forme:

$$P = -\sigma(x) \quad ; \quad 0 < x < a$$

Pour un chargement concentré de la forme $dP = \sigma(x)dx$ situé à une distance dx de l'extrémité débouchante de la fissure, le facteur d'intensité de contrainte dk_1 est donné par (3.76) sous la forme:

$$dk_1 = \frac{2}{\pi} a^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma(x) dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + f\left(\frac{x}{a}\right)\right) \quad (3.80)$$

La contribution totale de la distribution de pression sur la fissure de longueur a s'obtient alors à partir de l'équation (3.80):

$$K_1 = \int_0^a dk_1 = \frac{2}{\pi} a^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a \sigma(x) \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^a \sigma(x) \frac{f\left(\frac{x}{a}\right) dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (3.81)$$

On remarque que le premier terme de gauche constitue le facteur d'intensité de contrainte d'une fissure de taille $2a$ soumise à la même distribution de pression dans un milieu infini, tandis que le second terme est un terme correctif lié à la présence du bord libre en $x = 0$.

Ce résultat représente un outil important pour la résolution de problèmes de nucléation de fissure dans un milieu semi-infini puisqu'il permet d'accéder au taux de restitution d'énergie incrémental pour n'importe quelle distribution de chargement appliquée sur la fissure (3.56). Précisons cependant que cette méthode ne concerne pas uniquement les cas de fissure chargées mais permet de traiter tous les types de chargement extérieur appliqué. On rappelle effectivement qu'il est possible de se ramener par superposition à la résolution unique d'un problème auxiliaire qui a l'avantage d'être chargé uniquement au niveau de la fissure par l'opposé du vecteur contrainte initial.

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes stratégies théorique et numérique susceptibles d'être utilisées en lien avec le critère de nucléation de fissure. L'approche directe est la plus simple. Elle consiste à résoudre explicitement les deux problèmes

sain et fissuré puis calculer la variation de leurs énergies potentielles. Cependant cette résolution est généralement complexe et nécessite une résolution numérique, par éléments finis par exemple.

Une seconde méthode de résolution par approche variationnelle fournit une approximation analytique du G_{inc} par un encadrement de cette grandeur avec pour borne inférieure un taux de restitution d'énergie obtenu par une approche variationnelle en déplacement et une borne supérieure par une approche variationnelle en contrainte (3.39).

Finalement une approche s'appuyant sur les résultats de la mécanique linéaire de la rupture a été présentée. Elle permet de valoriser différentes méthodes de détermination des facteurs d'intensité de contrainte pour traiter la nucléation de fissure à partir du critère énergétique. Elles s'appuient sur la relation d'Irwin (3.55) entre les facteurs d'intensité de contrainte $K_\alpha(\ell)$ et le taux de restitution d'énergie $G(\ell)$. On en déduit alors l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc} (3.56). Parmi ces méthodes, on cite la méthode itérative [37], qui fournit l'expression du facteur d'intensité de contrainte pour une fissure chargée d'une distribution de pression quelconque dans un milieu semi-infini (3.81). On montre en particulier qu'il est possible, par superposition, de traiter n'importe quel problème de fissure débouchante dans un milieu semi-infini à l'aide de la résolution du problème auxiliaire associé. Quelques illustrations de ces stratégies ont été présentées afin de mieux cerner leur efficacité et leur domaine de validité.

Ces différentes méthodes seront appliquées dans le prochain chapitre pour aborder la problématique de nucléation de fissure sous choc thermique.

Chapitre 4

Nucléation en présence de couplage thermo-élastique

Contents

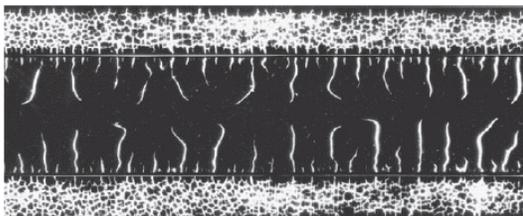
4.1	Introduction	106
4.2	Nucléation de fissure sous choc thermique	107
4.2.1	Représentation du problème	107
4.2.2	Variation de la température	109
4.2.3	État de contrainte avant nucléation	109
4.2.4	Nucléation de fissure - Différentes approches de résolution	111
4.2.5	Influence du chargement thermique sur la nucléation	125
4.2.6	Influence de l'espace entre les fissures	129
4.3	Système de fissures parallèles - nucléation vs. propagation	132
4.3.1	Présentation des deux scénarios envisagés	132
4.3.2	Conclusions	142

4.1 Introduction

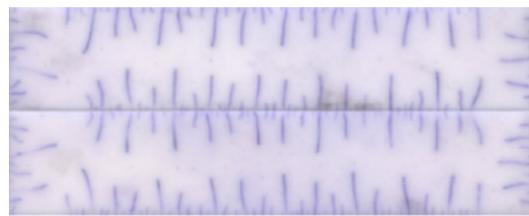
L'apparition d'un réseau de fissures de surface induites par la contraction dans les matériaux (Figure 4-1) est un phénomène couramment rencontré dans plusieurs disciplines de la mécanique. Dans le domaine du génie civil par exemple, le séchage des bétons peut être l'origine de ce type de fissures [4]; on observe aussi ce phénomène lors d'une chute brutale de température dans les verres et céramiques [1], [64] ou encore dans le domaine de la géophysique avec des applications de stockage de gaz dans des cavités salines [32].

On s'intéresse dans ce chapitre aux scénarios de fissuration d'origine thermique. Dans la littérature, plusieurs modèles abordent cette problématique d'initiation de fissures [49], [43] ou de modélisation d'un endommagement [65], [8]. On se propose de manière similaire à [44] de traiter la problématique de nucléation de fissures sous choc thermique en utilisant le critère énergétique. L'originalité du travail consiste à utiliser les différents outils présentés au Chapitre 3 pour retrouver des résultats comparables à ceux exposés dans [44].

La section 4.3 proposera un prolongement de cette problématique. Nous nous intéresserons à l'évolution dans le temps de ce réseau de fissures nucléées en mettant en compétition les processus de propagation de fissures existantes et de nucléation de nouvelles fissures dans le milieu. Cette analyse conduira à l'identification d'un paramètre d'espacement des fissures à partir duquel on pourra distinguer différents scénarios.



(a) Fissures dans une plaques vitrocéramiques suite à un choc thermique [1]



(b) Schéma de fissures dans une plaque céramique suite à un choc thermique [47]

FIGURE 4-1 – Exemples de fissures créées par choc thermique

4.2 Nucléation de fissure sous choc thermique

On se place dans le cadre de l'analyse de la nucléation de fissures dans les structures excavées. La chute de température brutale au niveau de la paroi d'un puits ou d'une cavité souterraine est généralement associée à l'apparition d'un réseau de fissures de surface. Dans cette partie, nous valoriserons le double critère énergétique pour aborder cette problématique de nucléation de fissures, en mettant en oeuvre les différentes approches de résolution exposées dans le Chapitre 3. La taille des fissures nucléés ainsi que le temps de diffusion thermique critique où celles-ci apparaissent sont identifiés pour chacune des approches considérées. Une analyse critique est ensuite proposée.

4.2.1 Représentation du problème

On considère une représentation bidimensionnelle du problème du choc thermique. On traite l'apparition d'un système de fissures parallèles et équidistantes espacées entre elles d'une distance $2L$ dans un milieu semi-infini.

On se place dans le cadre des déformations planes et on se ramène par périodicité à l'étude de la nucléation d'une fissure unique de taille ℓ dans une bande semi-infinie d'épaisseur $2L$ définie pour $y \geq 0$ qui constitue une cellule de base du problème (Figure 4-2).

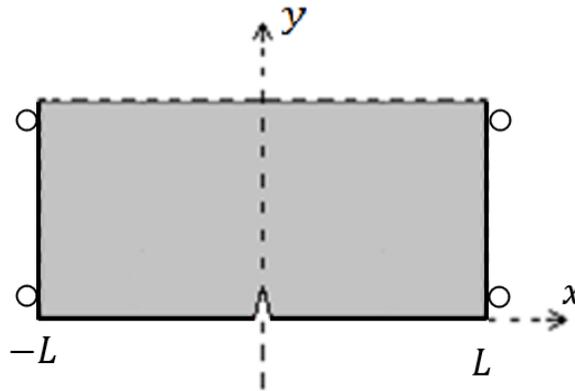


FIGURE 4-2 – Représentation du problème du choc thermique

Conditions initiales Le milieu est supposé thermoélastique homogène isotrope sujet à un état de contrainte de référence en compression uniforme qui correspond à l'état de contrainte qui règne au voisinage de la paroi de la cavité souterraine à une profondeur donnée, généré par la poussée des terres due au poids de la roche. On suppose que cet état de contrainte est constant et uniforme $\boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma_{xx}^0 (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{yy}^0 (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \sigma_{zz}^0 (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$, avec $\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0 < 0$ et $\sigma_{zz}^0 = \nu(\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0)$ en déformations planes.

La température initiale T_0 est considérée uniforme dans tout le milieu.

$$\forall (x, y) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+ \quad : \quad T(t = 0) = T_0 \quad (4.1)$$

Conditions aux limites thermo-mécaniques Exploitant la symétrie géométrique du problème, on se limite à la moitié du domaine définie par $(0 \leq x \leq L)$. On impose dans ce cas un déplacement horizontal nul sur les bords $x = L$ et $(x = 0 ; y > \ell)$. On considère que la paroi inférieure $y = 0$ est soumise à une pression uniforme p_0 .

$$\begin{aligned} x = 0 \quad , \quad y \geq \ell : & \quad \begin{cases} \xi_x = 0 \\ T_y = 0 \end{cases} \\ x = L \quad , \quad y \geq 0 : & \quad \begin{cases} \xi_x = 0 \\ T_y = 0 \end{cases} \\ y = 0 : & \quad \begin{cases} T_x = 0 \\ T_y = p_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

On considère que la surface de la fissure est libre de contrainte.

$$x = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq \ell : \quad T_x = T_y = 0 \quad (4.3)$$

Un choc thermique est réalisé en imposant une température $T^{imp} < T_0$ ($\Delta T^0 = T^{imp} - T_0 < 0$) au niveau de la paroi inférieure et maintenue constante au cours du temps, tandis que les autres bords sont maintenus à flux thermique nul.

$$\begin{aligned}
y = 0 : \quad & T(x, 0) = T^{imp} \\
x = (0, L) : \quad & \phi(x, y) \cdot \mathbf{e}_y = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2.2 Variation de la température

La résolution de l'équation de la chaleur (C.3) pour les conditions initiales (4.1) et aux limites (4.4) est présentée en détail dans l'annexe C. Elle aboutit à l'expression de la variation de température en temps et en espace sous la forme:

$$\Delta T(y, t) = \Delta T^0 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k_t t}}\right) = \Delta T^0 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{l_t}\right) \tag{4.5}$$

où $k_t = \frac{\lambda_T}{\rho C}$ est la diffusivité thermique du milieu, λ_T sa conductivité thermique, ρ sa densité volumique et C sa capacité thermique massique.

On définit dans (4.5) la longueur caractéristique l_t du front de diffusion thermique à l'instant t .

$$l_t = 2\sqrt{k_t t} \tag{4.6}$$

4.2.3 État de contrainte avant nucléation

Nous avons montré par superposition (Section 3.3.2), qu'une manière d'aborder la nucléation consiste à reformuler le problème de manière à localiser les sollicitations qui entraînent la nucléation au niveau de la fissure uniquement. Il suffit alors d'explicitier la distribution du vecteur contrainte initial avant nucléation le long de la fissure: soit le vecteur contrainte $-\boldsymbol{\sigma}^i \cdot (-\mathbf{e}_x)$ en ($x = 0$ et $0 \leq y \leq \ell$).

On définit alors le problème avant nucléation à partir de l'état de contrainte de référence uniforme $\boldsymbol{\sigma}^0$, les conditions aux limites mécaniques explicitées en (4.2) en plus des conditions de symétrie en ($x = 0$ et $0 \leq y \leq \ell$) avant apparition de la fissure et d'une distribution de température donnée par (4.5).

Les données du problème étant indépendantes de x , on considère que le champ de

déplacement solution du problème se met sous la forme:

$$\underline{\xi}^i = \xi^i(y) \underline{e}_y \quad (4.7)$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^i$ associé au champ de déplacement $\underline{\xi}^i$ est explicité à partir de la loi de comportement thermoélastique suivante:

$$\boldsymbol{\sigma}^i(y) = \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda \frac{d\xi^i}{dy}(y) \mathbf{1} + 2\mu \frac{d\xi^i}{dy}(y) (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) - \boldsymbol{\kappa} \Delta T(y) \quad (4.8)$$

où (λ, μ) sont les coefficients élastiques de Lamé et $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{1}$ est le tenseur des contraintes thermiques. La résolution de l'équation d'équilibre $\underline{div}(\boldsymbol{\sigma}^i) = \underline{0}$ avec les conditions aux limites (4.2) permet d'expliciter la composante horizontale du champ de contrainte solution en fonction des conditions initiales et de la solution du champ de température (4.5), elle s'écrit:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^i(y, t) &= \sigma' - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \kappa \Delta T(y, t) \\ &= \sigma' - \frac{E \alpha}{1 - \nu} \Delta T(y, t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

où (E, ν) sont le module de Young et le coefficient de Poisson et α le coefficient de dilatation thermique linéique, σ' est une fonction des conditions initiales et s'écrit:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_{xx}^0 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (p_0 + \sigma_{yy}^0) \\ &= \sigma_{xx}^0 - \frac{\nu}{1 - \nu} (p_0 + \sigma_{yy}^0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

On remarque que l'existence d'une traction horizontale dans le milieu est effectivement associée à une variation de température négative $\Delta T < 0$. Il est donc possible d'envisager une nucléation de fissure en mode I dans le cadre d'une situation physique associée à un choc thermique négatif.

4.2.4 Nucléation de fissure - Différentes approches de résolution

Approche variationnelle

L'évaluation du taux de restitution d'énergie incrémental peut être réalisée dans le cadre de l'approche variationnelle en déplacement ou en contrainte. On propose ici une approche variationnelle en déplacement s'appuyant sur le théorème du minimum de l'énergie potentielle dont la mise en oeuvre a été présentée à la section (3.3). On propose de revisiter la résolution proposée dans [44] en valorisant les résultats établis dans la section 3.3.2 s'appuyant sur la détermination du G_{inc} à partir d'un problème auxiliaire (3.52).

On a vu (Section 3.3.2) que le principe de superposition permet de ramener le problème de nucléation à la résolution d'un problème auxiliaire défini par le système d'équation (3.44) chargé uniquement au niveau de la fissure par l'opposé du vecteur contrainte initial avant nucléation $-\sigma^i \cdot \underline{n}$ (Figure 4-3).

On considère le problème auxiliaire (Figure 4-3b) dans lequel la fissure, définie en $x = 0$ et $0 \leq y \leq \ell$, est chargée par le vecteur contrainte $\underline{T} = -\sigma^i \cdot (-\underline{e}_x) = T_x \underline{e}_x + T_y \underline{e}_y$.

A partir de l'expression de la composante σ_{xx}^i donné en (4.9) et puisque la composante $\sigma_{xy}^i = 0$, le vecteur contrainte \underline{T} s'écrit:

$$\underline{T} = \begin{cases} T_x = \sigma' - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \kappa \Delta T(y, t) \\ T_y = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

On considère $\underline{\delta\xi}$ le déplacement du problème auxiliaire que l'on cherche sous la forme:

$$\begin{cases} \underline{\delta\xi} = \underline{0} & (y \geq \ell) \\ \underline{\delta\xi} = f(X)g(Y) \underline{e}_x & (y \leq \ell) \end{cases} \quad \text{avec} \quad X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{\ell} \quad (4.12)$$

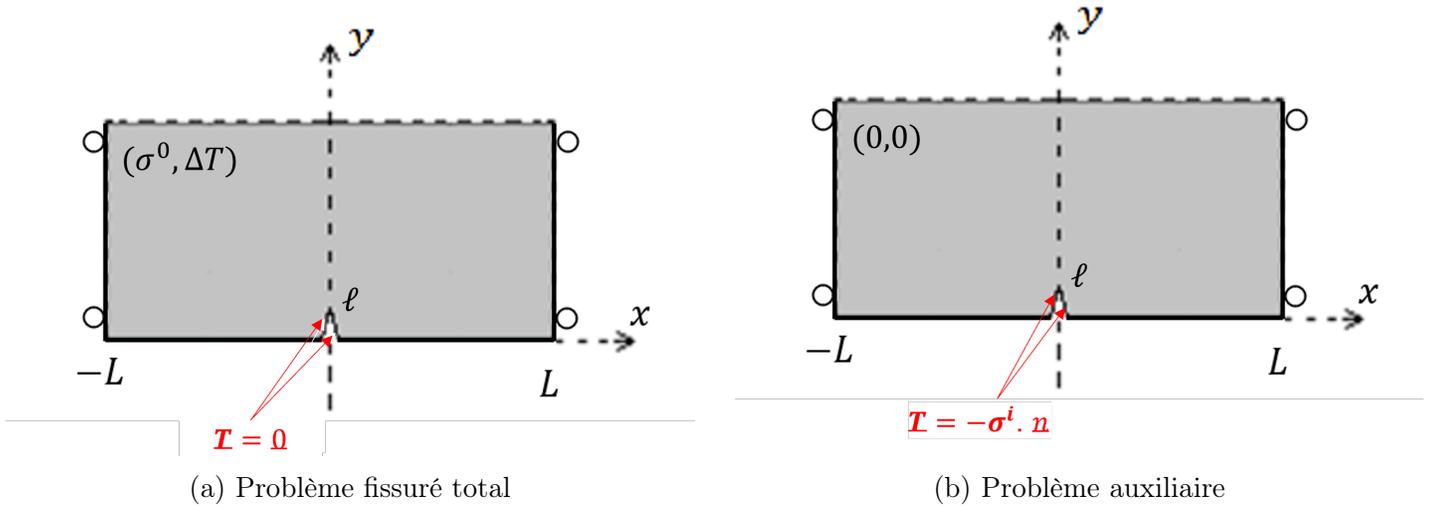


FIGURE 4-3 – Nucléation de fissure sous choc thermique

où les fonctions $f(\frac{x}{L})$ et $g(\frac{y}{\ell})$ vérifient les conditions $f(\pm 1) = 0$ et $g(1) = 0$ pour assurer que le champ $\underline{\delta\xi}$ est cinématiquement admissible, et $f(X)$ est une fonction impaire par symétrie.

L'approche variationnelle consiste à retrouver les expressions de $f(X)$ et $g(Y)$ qui minimisent l'énergie potentielle du problème auxiliaire:

$$E_p^{aux}(f, g) = U^{aux}(f, g) - \Phi^{aux}(f, g) \quad (4.13)$$

où $U^{aux}(f, g)$ correspond à l'énergie interne du problème auxiliaire donné par la relation (3.46) et se met sous la forme:

$$\begin{aligned} U^{aux}(f, g) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\delta\varepsilon} : \mathbb{C}^{ad} : \underline{\delta\varepsilon} \, d\Omega \\ &= 2 \frac{\ell}{L} \int_0^1 \left(\left(\frac{\lambda^{ad}}{2} + \mu^{ad} \right) G_0 f'(X)^2 + \frac{\mu^{ad}}{2} \frac{L^2}{\ell^2} G_1 f(X)^2 \right) dX \end{aligned} \quad (4.14)$$

et $\Phi^{aux}(f, g)$ est le travail des efforts extérieurs donné par la relation (3.48) qui se réduit au travail de l'opposé du vecteur contrainte défini en (4.11) appliqué sur les

bords de la fissure:

$$\Phi^{aux}(f, g) = \int_{\partial\Omega_T} (\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \underline{e}_x) \cdot \underline{\delta\xi} dS = 2 f(0^+) \ell \sigma^{0,th} G_2\left(\frac{\ell}{l_t}\right) \quad (4.15)$$

où $\sigma^{0,th} = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \kappa \Delta T^0$

et:

$$\begin{cases} G_2 = \int_0^1 g(Y) \left(\frac{\sigma'}{\sigma^{0,th}} + \operatorname{erfc}\left(\frac{\ell Y}{l_t}\right) \right) dY \\ G_1 = \int_0^1 g(Y)^2 dY \\ G_0 = \int_0^1 g'(Y)^2 dY \end{cases} \quad (4.16)$$

La fonction $f(X)$ qui minimise l'énergie potentielle correspond à la solution de l'équation d'Euler-Lagrange suivante:

$$f''(X) - \beta^2 \left(\frac{L}{\ell}\right) f(X) = 0 \quad (4.17)$$

Elle se met finalement sous la forme:

$$f(X) = A \left(\exp\left(\beta \frac{L}{\ell} X\right) - \exp\left(\beta \frac{L}{\ell} (2 - X)\right) \right) \quad (4.18)$$

où β est un paramètre adimensionnel défini par:

$$\beta = \sqrt{\frac{G_1}{G_0} \frac{\mu^{ad}}{\lambda^{ad} + 2\mu^{ad}}}$$

Pour simplifier le calcul, on considère que la fonction $g(Y)$ appartient à la classe de fonction de la forme [44]:

$$g(Y) = (1 - Y)^\alpha \quad (4.19)$$

qui vérifie trivialement la condition $g(1) = 0$. Les coefficients A et α sont des constantes obtenues en minimisant E_p^{aux} .

L'expression de l'énergie potentielle du problème auxiliaire s'écrit finalement:

$$E_p^{aux} = -\frac{G_2^2}{G_1} \frac{\beta}{\mu^{ad}} \ell^2 \sigma^{0,th^2} \tanh\left(\beta \frac{L}{\ell}\right) \quad (4.20)$$

A partir de la relation (3.52), on exprime le taux de restitution d'énergie incrémental:

$$G_{inc}(\ell) = \frac{G_2^2}{G_1} \frac{\beta}{\mu^{ad}} \ell \sigma^{0,th^2} \tanh\left(\beta \frac{L}{\ell}\right) \quad (4.21)$$

Résultats On considère le milieu comme étant une roche de sel caractérisée par les paramètres thermoélastiques suivants:

- Module de Young $E = 27$ GPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- Coefficient de dilatation thermique $\alpha = 3.2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$
- Diffusivité thermique $k_t = 3.10^{-6} m^2.s^{-1}$
- Taux de restitution d'énergie critique $G_c = 8.42$ Pa.m

On considère, dans un premier temps, que l'état de compression in-situ correspond à une compression horizontale $|\sigma_{xx}^0| = 14.5$ MPa et que la composante verticale ainsi que la pression appliquée à la paroi sont nulles $\sigma_{yy}^0 = -p_0 = 0$. La contrainte équivalente vérifie donc $|\sigma'| = |\sigma_{xx}^0| = 14.5$ MPa. On suppose ensuite une chute de température au niveau de la paroi de l'ordre de $\Delta T^0 = -15^\circ C$, qui correspond à une contrainte thermique de l'ordre de $\sigma^{0,th} = 18.5$ MPa.

L'optimisation numérique de la constante α définie dans (4.19) et qui minimise l'énergie potentielle du milieu conduit à une valeur de l'ordre de $\alpha \simeq 0.81$ (pour les données numériques proposées).

Le graphe (4-4) trace la variation du taux de restitution d'énergie incrémental en fonction de la taille de fissure nucléée. On retrouve, conformément à [44], que ce dernier admet un maximum. Ce qui veut dire qu'une nucléation de fissure stable est possible et que celle ci survient à l'instant défini par la longueur critique de diffusion $l_t = 0.263$ m, soit 1h36min après application du choc thermique. La longueur de fissure nucléée est estimée à $\ell_c \simeq 0.048$ m avec un rapport $\frac{\ell_c}{l_t} = 0.18$.

Dans le cas où la pression appliquée au niveau de la paroi est non nulle $p_0 = 3$ MPa,

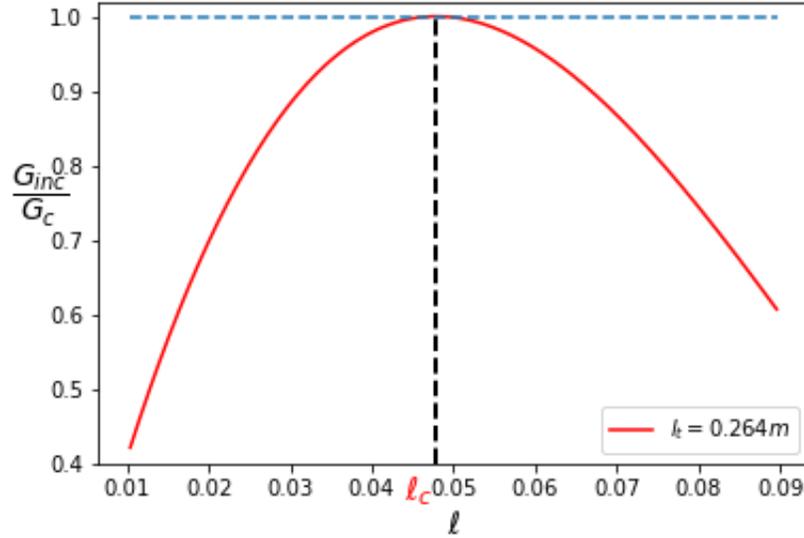


FIGURE 4-4 – Allure de $G_{inc}(\ell)$ par approche variationnelle en déplacement

la longueur de nucléation est estimée à $\ell_c = 0.0275\text{m}$, 18min après l’application du choc thermique.

Dans le cas où le milieu est sujet à un état de contrainte isotrope $|\sigma_{xx}^0| = |\sigma_{yy}^0| = 14.5$ MPa, la nucléation de fissure survient après 20 secondes de l’application du choc thermique, pour une taille de fissure de l’ordre de $\ell_c = 0.015\text{m}$.

On peut conclure que la présence d’un chargement compressif selon e_y , que ce soit par une pression p_0 au niveau de la paroi ou d’une précontrainte σ_{yy}^0 , précipite le temps d’apparition de la fissure et réduit sa longueur.

En effet, la présence des composantes de pression ou de précontrainte verticale non nulles dans l’expression (4.10) de σ' augmente l’intensité de l’état de traction horizontale σ_{xx}^i , ce qui favorise la nucléation d’une fissure en mode I. Cette contraction d’origine mécanique reprend alors une partie de la contraction nécessaire à la nucléation, jusque-là supportée par la diffusion thermique via la contrainte thermique dans (4.9). Puisque l’effet de la diffusion thermique sur la nucléation de fissure devient moindre en présence d’une compression verticale, il est naturel que le temps d’apparition de fissure soit plus rapide.

D’un autre côté, l’apparition rapide d’une fissure limite la zone d’influence thermique

au voisinage de la paroi. Cette influence est représentée par la fonction d'erreur complémentaire $erfc\left(\frac{y}{l_t}\right)$ où l_t est la longueur caractéristique de diffusion (4.5). Lorsque la distance de la paroi est supérieure à front de diffusion thermique $y \geq l_t$, la variation de la température est faible. C'est exactement cette fonction qui définit la distribution de la perturbation de contrainte thermique horizontal le long de l'axe y (4.9). Si l'intensité de la traction contrôle l'instant de la nucléation, c'est la distribution de cette traction le long de l'axe e_y qui définit la taille de la fissure nucléée. En d'autres termes, lorsque la nucléation de fissure survient rapidement, le front de diffusion thermique localise la zone de traction à des distances plus faibles, ce qui réduit la longueur de la fissure nucléée.

Approche par Mécanique Linéaire de la Rupture

On explore dans cette partie le même problème de nucléation de fissure sous choc thermique en utilisant la stratégie proposée à la Section 3.4 basée sur la Mécanique Linéaire de la Rupture. Cette approche met en valeur le lien qui existe entre le taux de restitution d'énergie incrémental et le facteur d'intensité de contraintes exprimé par la relation (4.22) en déformations planes. Les résultats classiques de la mécanique de la rupture sur la détermination du facteur d'intensité de contrainte K_I sont exploités pour accéder à la détermination du taux de restitution d'énergie incrémental. On rappelle que ce dernier est obtenu à partir de la relation:

$$G_{inc}(\ell) = \frac{1}{\ell} \frac{1 - \nu^2}{E} \int_0^\ell K_I^2(u) du \quad (4.22)$$

Approximation du facteur d'intensité de contraintes On montre qu'il est possible par superposition de reformuler le problème auxiliaire du choc thermique (Figure 4-3b) de manière à introduire le chargement $\sigma^i \cdot \underline{n}$ explicité dans (4.11) sur les bords $x = \pm L$. La décomposition présentée sur la figure (4-5) montre que le problème (P_2) n'est autre que le problème total fissuré (Figure 4-21a). En particulier, le facteur d'intensité de contrainte $K_I(\ell)$ du problème de choc thermique est équivalent à celui du problème (P_2).

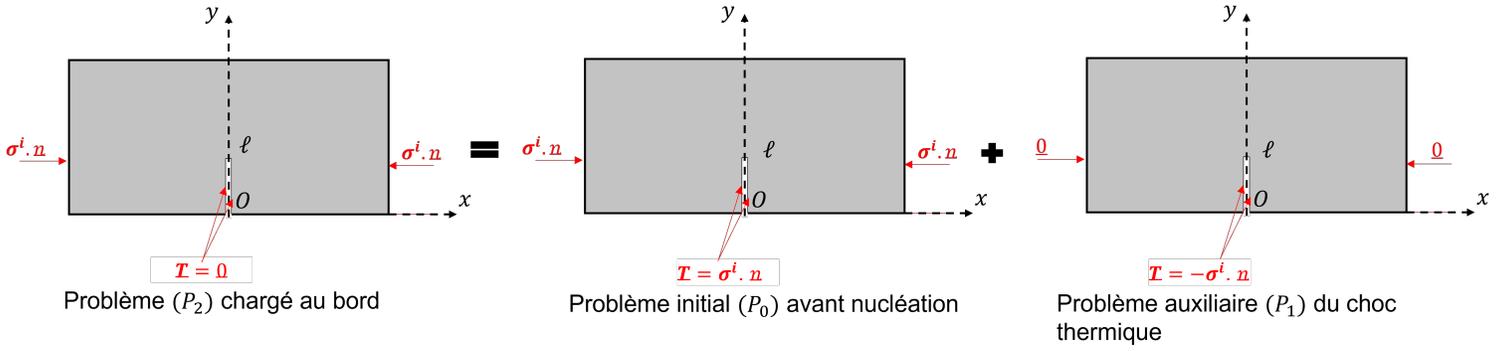


FIGURE 4-5 – Illustration de la reformulation du problème de choc thermique par superposition

Une approximation de facteur d'intensité de contrainte $K_I(\ell)$ peut être obtenue à partir d'une intégration des facteurs d'intensité de contrainte dk_I de toutes les charges ponctuelles $d\sigma$ qui composent la distribution du chargement $\underline{T} = \sigma^i \cdot \underline{n}$.

L'expression du facteur d'intensités de contraintes pour une charge ponctuelle ap-

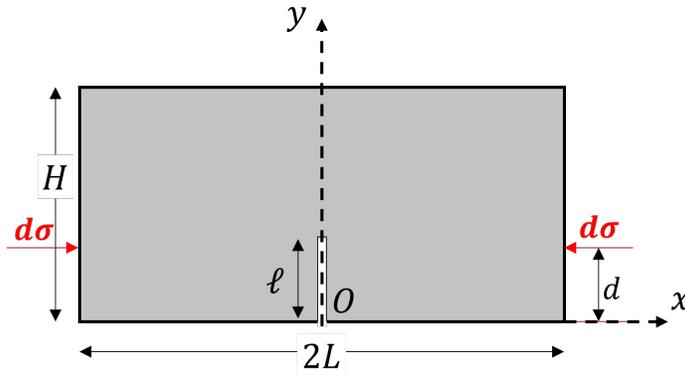


FIGURE 4-6 – Représentation du chargement ponctuelle à une distance d de l'origine de la fissure

pliquée à une distance d de l'origine (Figure 4-6) est donné dans [27] sous la forme suivante:

$$dk_I = d\sigma F(\ell, d)\sqrt{\pi\ell} \quad (4.23)$$

où $F(\ell, d)$ correspond à la fonction de forme. On retrouve dans ce sens, dans [27], des estimations de la fonction de forme $F(\ell, d)$ qui intervient dans l'expression de K_I en fonction de la taille de fissure ℓ et de la position du chargement d (Tableau 4.1).

Pour une géométrie de longueur $2L$ et de hauteur H chargée d'une distribution de contrainte $\sigma(y)$ appliquée sur les parois latérales $x = \pm L$, le facteur d'intensité de contraintes est obtenu par intégration suivant l'expression:

$$K_I(\ell) = F(\ell, H)\sqrt{\pi\ell} \sigma(H) - \int_0^H F(\ell, y)\sqrt{\pi\ell} \frac{d\sigma(y)}{dy} dy \quad (4.24)$$

Une interpolation à partir des points fournis par le tableau (4.1) permet d'obtenir une fonction continue du facteur d'intensité de contrainte qui, par intégration de son carré sur toute la longueur de la fissure (relation 4.22), permet d'expliciter la variation du taux de restitution d'énergie incrémental.

Résultats En reprenant le jeu de données numériques utilisées dans la section (4.2.4), on trace sur la Figure (4-7) l'allure du taux de restitution d'énergie incrémental pour différents rapports de taille $\frac{L}{H}$. Les tableaux des fonctions géométriques de forme pour les différents rapports de taille $\frac{L}{H}$ sont donnés en annexe E.

On observe, pour une même longueur L , que la taille de la fissure nucléée ℓ_c varie entre 0.03 à 0.046 m pour des hauteurs H telles que $L/H \in [0.5, 1.25]$.

Le tableau (4.2) résume les résultats de la nucléation en terme de longueur de fissure nucléée ℓ_c , de temps critique de nucléation représenté par la longueur critique de diffusion l_t et du rapport ℓ_c/l_t .

ℓ/H	d/H=0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.3	0	1.296	1.862	1.961	1.847
0.4	0	1.479	2.242	2.422	2.323
0.5	0	1.676	2.752	3.126	3.007
0.6	0	2.193	3.575	4.249	4.146
0.7	0	3.190	5.240	6.307	6.386

TABLE 4.1 – Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 0.5$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]

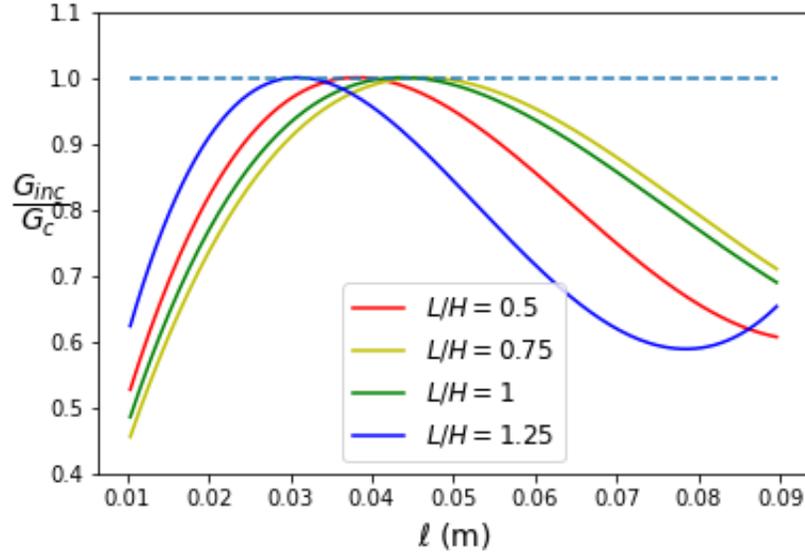


FIGURE 4-7 – Allure de $G_{inc}(\ell)$ pour différents rapports $\frac{L}{H}$

L/H	ℓ_c	l_t	ℓ_c/l_t
0.5	0.038	0.566	0.067
0.75	0.046	0.588	0.078
1	0.044	0.604	0.072
1.25	0.031	0.367	0.084

TABLE 4.2 – Longueur de fissure ℓ_c et longueur de diffusion critique l_t pour différents rapports $\frac{L}{H}$

La difficulté de cette méthode pour traiter la nucléation sous choc thermique réside dans le fait que les données numériques dont on dispose sont très limitées. Dans ce cas on ne dispose que d'une vingtaine de points pour interpoler une fonction à deux variables (ℓ, d) . L'autre difficulté concerne la taille de la fissure. Comme nous allons le montrer par la suite, le phénomène de nucléation survient pour des tailles de fissure largement inférieures à la taille du domaine soit $(\frac{\ell}{W} < 0.3)$. Cela signifie que l'interpolation de la fonction de forme qui nous intéresse est en dehors de l'intervalle de points fournis dans le tableau (4.1). Pour y remédier, il faudrait reprendre le protocole d'identification du K_I proposé par l'auteur, et augmenter le nombre de points pour améliorer l'interpolation associée.

Ce constat nous pousse à explorer un autre moyen de détermination du facteur

d'intensité de contrainte susceptible en particulier de pallier les insuffisances évoquées précédemment. L'idée consiste à s'appuyer sur la solution exacte de problèmes connus.

Méthode itérative Comme nous l'avons vu dans la section (3.4.4), le procédé de résolution itératif est particulièrement attractif pour traiter les situations de fissures chargées. Celui-ci propose une expression analytique du facteur d'intensité de contrainte K_I d'un milieu semi-infini contenant une fissure débouchante chargée (3.81). On reprend l'expression du facteur d'intensité de contrainte en mode I pour la distribution du chargement $\sigma(y)$ donnée par (4.9):

$$K_I(a) = \frac{2}{\pi} a^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a \sigma(y) \frac{dy}{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^a \sigma(y) \frac{f(\frac{y}{a}) dy}{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.25)$$

où la fonction de forme $f(y/a)$ est donnée par (3.79). On précise que cette méthode suppose un milieu semi-infini ($L \rightarrow \infty$), c'est-à-dire qu'elle ne prend pas en compte dans la résolution les effets de bords ni même l'effet des autres fissures. Cette approche reste valable, comme nous allons le montrer par la suite, dans le cas où le demi-espacement entre les fissures L est assez grand et qu'il est effectivement possible de négliger les interactions au profit du chargement thermique.

Résultats Sur la figure 4-8, on compare le G_{inc} obtenu par approximation du facteur d'intensité de contraintes depuis les tableaux (4.1) pour les rapports d'élanement disponibles, allant de $\frac{L}{H} = 1.25$ à $\frac{L}{H} = 0.5$ pour une même longueur L (courbes discontinues), et celui obtenue par approche itérative (courbe continue rouge) qui correspond à un milieu semi-infini. La longueur de nucléation critique obtenue par approche itérative est de l'ordre de $\ell_c = 0.058$ m et la longueur de diffusion critique est $l_t = 0.34$ m, pour un rapport $\frac{\ell_c}{l_t} \simeq 0.17$.

La limitation de la résolution par approximation du facteur d'intensité de contraintes à des rapports $\frac{\ell}{H} \geq 0.3$ (cf. section 4.2.4) ne permet pas de comparer exactement les deux méthodes puisqu'on ne peut pas se placer dans le cas d'une fissure dans milieu semi-infini où $\ell \ll L, H$. Néanmoins on peut observer que la longueur de fissure nucléée, obtenue par approximation, évolue dans le bon sens de la longueur de

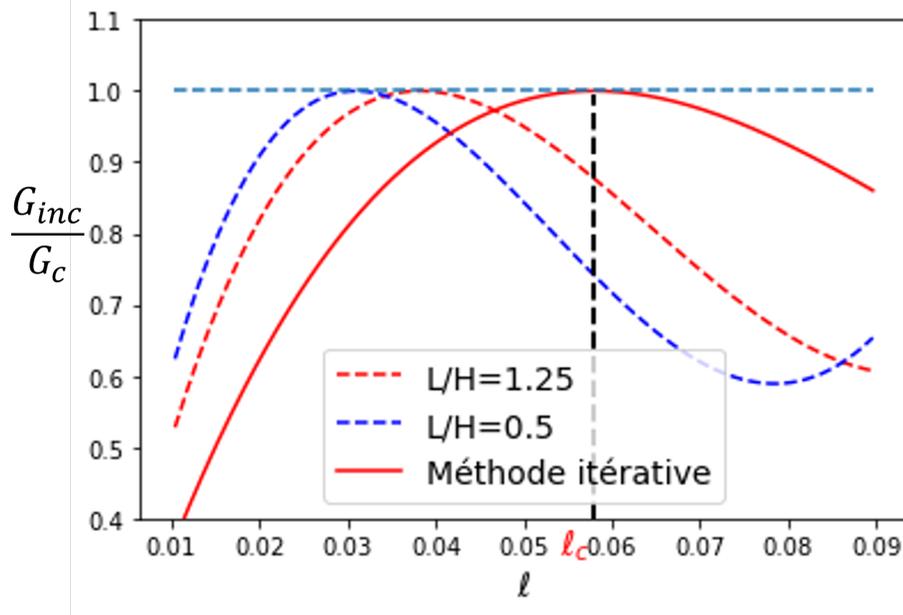


FIGURE 4-8 – Comparaison du $G_{inc}(\ell)$ obtenu pour différents rapports $\frac{L}{H}$ et celui obtenu par méthode itérative

nucléation l_c obtenue par la méthode itérative lorsqu'on augmente la hauteur H de $0.8L$ à $2L$. Une comparaison plus efficace nécessiterait alors d'étendre le protocole d'identification des K_I proposée par l'auteur à des rapports $\frac{\ell}{H} \ll 1$.

Résolution numérique

La dernière méthode de résolution utilisée, plus directe, est de nature numérique. Elle s'appuie sur la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis. Le principe de cette approche consiste à définir une géométrie contenant une fissure de taille ℓ libre de contrainte représentée par une discontinuité de déplacement. En faisant varier la longueur de la fissure de manière incrémentale, on calcule pour chaque incrément de fissure ℓ , le taux de restitution d'énergie incrémental suivant la relation (3.52).

Par la suite, on applique les conditions aux limites définies par les relations (4.2) et sur la fissure on applique le vecteur contrainte solution du problème initial (4.11).

Afin de capter au mieux la singularité du champ de contrainte, il importe de raffiner le maillage en pointe de fissure (Figure 4-10). Il en résulte un temps de calcul significatif. Il est possible de réduire considérablement ce dernier en adoptant une densité de

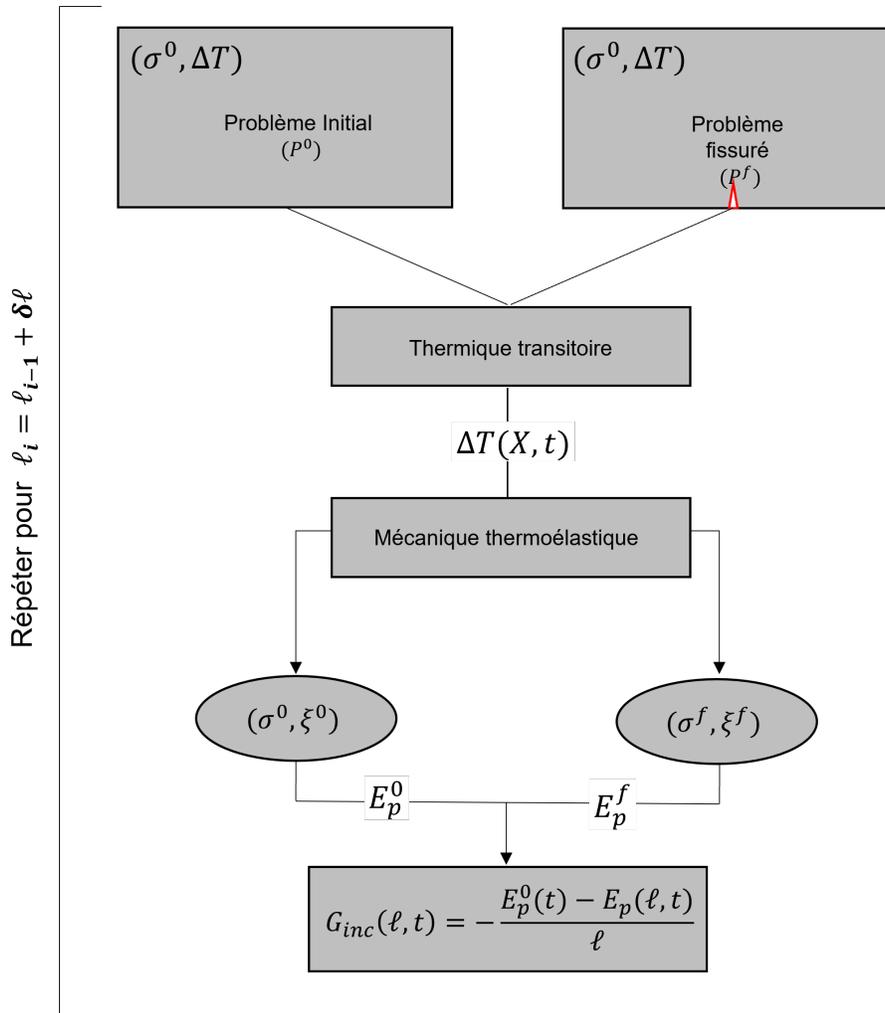


FIGURE 4-9 – Procédure de résolution par éléments finis

maillage adaptatif en fonction de l'incrément de ℓ considéré. La résolution numérique du problème de choc thermique pour le matériau utilisé avec une densité de maillage au niveau de la fissure de l'ordre de $\sim \ell/30$ et un nombre d'incrément de fissure $n = 30$, le temps de calcul est de l'ordre de 30min pour un ordinateur standard ¹ (Tableau (4.3)) .

Résultats et discussion

La figure (4-11) montre l'allure du $G_{inc}(\ell)$ obtenue pour les différentes méthodes pour le niveau de chargement critique l_t de chacune.

1. Intel i5-2400 CPU 3.10 GHz

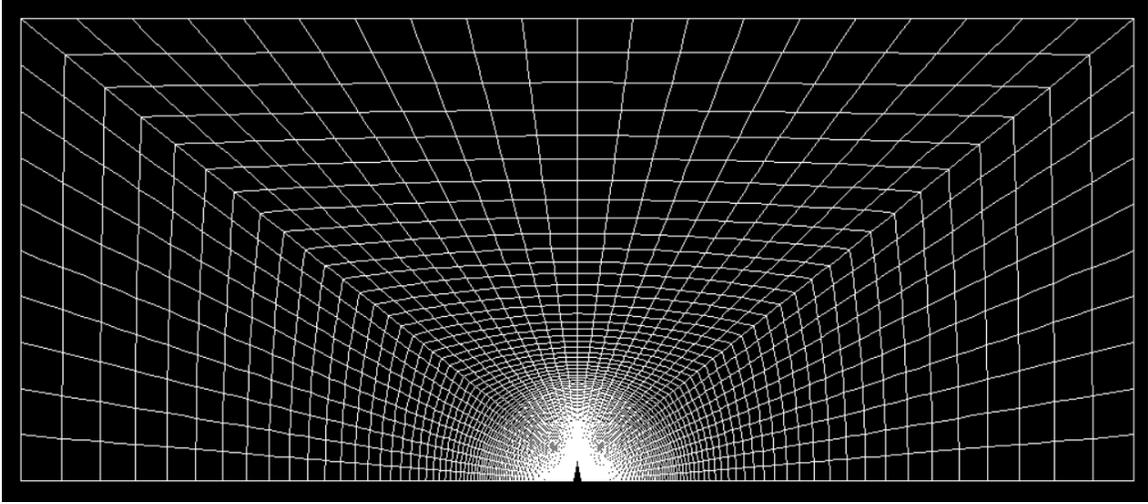


FIGURE 4-10 – Représentation FEM de la géométrie du problème (Cast3M)

- La résolution du problème par approche variationnelle propose une fissure de taille $\ell_{var}^* \sim 0.048 m$ pour une longueur thermique de nucléation $l_t \sim 0.263 m$ soit un rapport $\ell_{var}^* \simeq 0.18l_t$, soit 1h36min après application du choc thermique².
- La méthode itérative produit une longueur de fissure nucléée $\ell_{iter}^* \simeq 0.17l_t$ équivalente à une longueur de $0.058 m$. L'apparition de cette fissure survient pour une longueur caractéristique thermique $l_t \simeq 0.34 m$, soit environ 2h40min après application du choc thermique.
- La résolution numérique fournit un couple solution $\ell_{num}^* \simeq 0.043 m$ et $l_t = 0.230 m$ pour un rapport $\ell_{num}^*/l_t \simeq 0.18$, soit 1h13min après application du choc thermique.
- Finalement, l'estimation du taux de restitution d'énergie incrémental par ap-

2. $t_c = \frac{l_t^2}{4k_t}$

Densité	$\ell/20$	$\ell/30$	$\ell/100$
Nombre de Noeuds	67 397	171 000	1 000 000
Variation G_{inc}/G_{inc}^*	0.9983	1.0004	1
temps de calcul	10min	30min	12h

TABLE 4.3 – Convergence du calcul numérique pour le problème de nucléation de fissure par choc thermique

proximation du facteur d'intensité de contraintes en mode I (4.2.4) confirme le scénario de nucléation stable de fissure (courbe jaune Figure (4-11)) avec une longueur critique de nucléation $\ell_I^* \simeq 0.038 \text{ m}$ pour une longueur de diffusion $l_t \simeq 0.566 \text{ m}$ soit un rapport $\ell_I^*/l_t \simeq 0.067$, soit 7h22min après application du choc thermique.

L'histogramme proposé sur la Figure (4-12) rassemble les résultats obtenus sur la mesure du temps critique de nucléation pour chacune des méthodes utilisées. On observe que le temps critique de nucléation obtenue par approximation du facteur d'intensité de contrainte en utilisant les données du tableaux (4.1) se démarque des autres résolutions mais reste toutefois pertinente. Les limitations déjà évoquées pour cette approche (Section 4.2.4) justifient certainement l'écart observé par rapport aux autres méthodes.

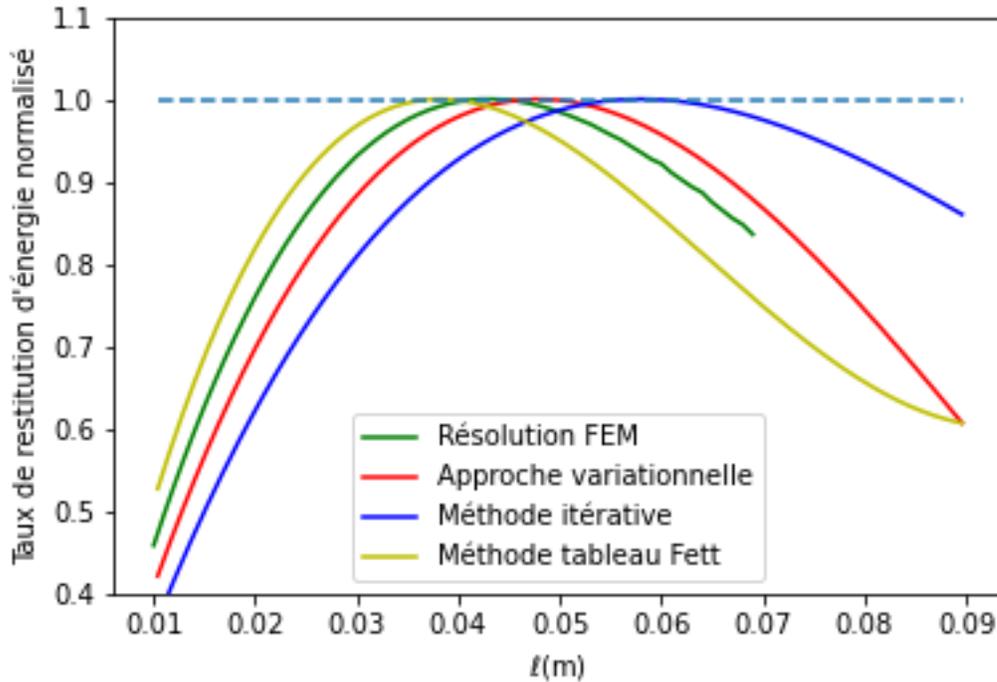


FIGURE 4-11 – Taux de restitution d'énergie incrémental pour le choc thermique obtenu par différentes méthodes

On considère que la résolution numérique par éléments finis est la solution de référence. La méthode approximative de K_I , par interpolation basée sur les tableaux

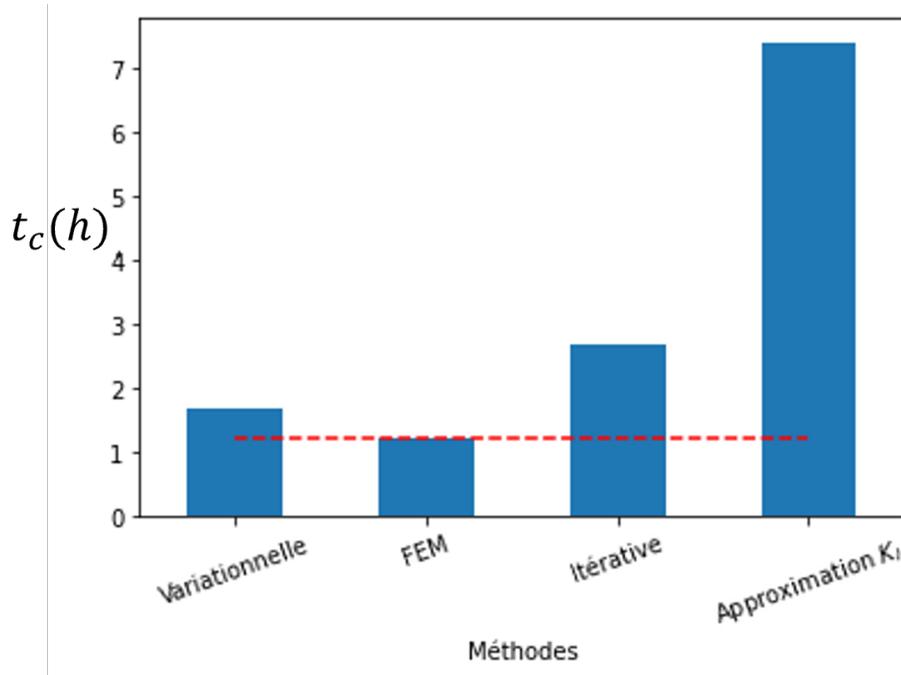


FIGURE 4-12 – Histogramme du temps critique de nucléation t_c obtenu pour les différentes méthodes utilisées

(4.1) donnés dans [27], est clairement la moins bonne puisqu'elle surestime significativement l'instant de nucléation. Les approches variationnelle et itérative donnent des résultats très proches de la solution de référence. On remarque en particulier que l'approche variationnelle vérifie bien son statut de borne inférieure $G_{inc}^{var}(\ell, t) < G_{inc}^{num}(\ell, t)$ comme annoncé dans la Section 3.3 avec l'encadrement (3.53). L'approche itérative est légèrement moins efficace que l'approche variationnelle mais représente, pour ce problème de choc thermique avec une distribution de chargement sur la fissure, la méthode la plus facile et la plus efficace à utiliser.

4.2.5 Influence du chargement thermique sur la nucléation

L'intérêt de présenter une résolution analytique, bien qu'elle soit a priori moins précise qu'une résolution par éléments finis, réside dans sa capacité à réaliser une analyse paramétrique du problème. On se propose dans cette partie d'analyser l'effet de l'intensité et de la vitesse du chargement thermique appliqué sur la nucléation de fissure à partir de la solution analytique variationnelle en déplacement (4.21) et de la

solution par méthode itérative.

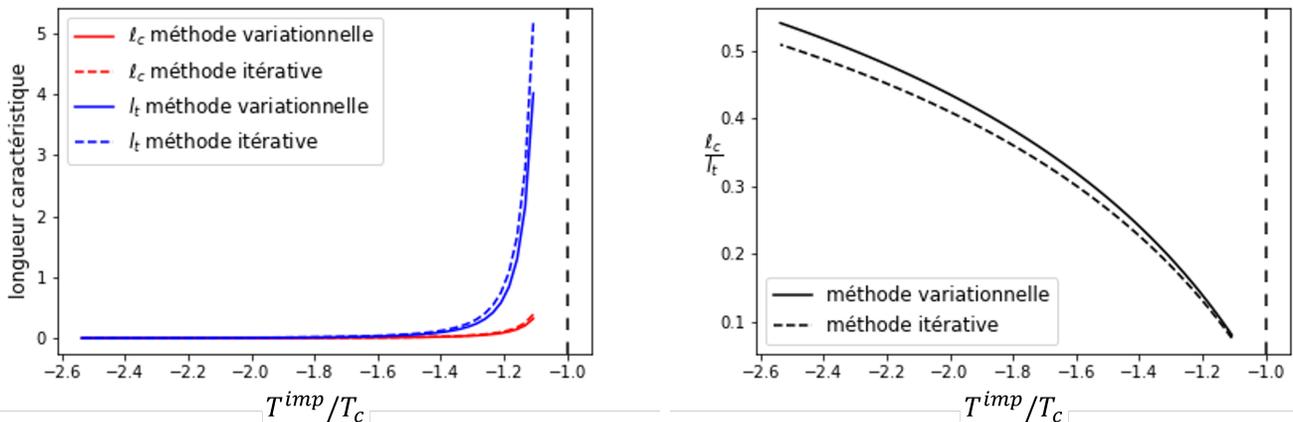
Effet de l'intensité du choc thermique

On s'intéresse dans un premier temps à l'effet de l'intensité de la température imposée sur la paroi. On rappelle que la nucléation d'une fissure en mode I est associée à un état local de traction. On note dans ce cas T_c la température imposée critique à partir de laquelle la contrainte horizontale (4.11) entre en traction, elle est donnée par:

$$T_c = T^0 + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\sigma'}{\kappa} \quad (4.26)$$

où $\sigma' = \sigma_{xx}^0 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(p_0 + \sigma_{yy}^0)$ pour un état de compression initial dans la configuration de référence.

A partir de l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental (4.21), il est possible d'évaluer l'effet de l'intensité du chargement sur la nucléation et plus précisément sur la taille de la fissure nucléée ainsi que la longueur de diffusion associée.



(a) Longueurs de nucléation l_c et de diffusion thermique l_t en fonction de la température imposée normalisée (b) Variation du rapport l_c/l_t en fonction de la température imposée normalisée

FIGURE 4-13 – Effets de la température imposée sur la nucléation de fissure

On trace sur la Figure (4-13a) la variation de la longueur de nucléation l_c et la

longueur critique de diffusion l_t en fonction de la température imposée normalisée $\frac{T^{imp}}{T_c}$ à l'aide de l'approche variationnelle et la méthode itérative. On constate que $T^{imp} < T_c$ est une condition nécessaire de nucléation de fissure stable. Pour une température imposée proche de T_c par la gauche ($T^{imp} \rightarrow T_c^-$), la taille de la fissure nucléée ainsi que le temps de diffusion divergent. En d'autres termes, plus la température imposée est proche de la température minimale T_c (qui engendre une zone de traction) plus le front de diffusion thermique est la taille de la fissure nucléée sont infinis. Ce résultat semble à première vue contre-intuitif mais trouve une explication dans le fait que la longueur de la fissure nucléée est comparable à la longueur de la zone de traction qui est définie à partir du chargement imposé et de la longueur de diffusion thermique l_t . En d'autres termes, lorsque la longueur de diffusion thermique critique de nucléation l_t diverge pour des chargements faibles, la longueur de la fissure diverge de manière similaire à la zone de traction créée. Ce qui veut dire qu'on est en mesure de nucléer une fissure de grande taille pour des chargements faibles $T^{imp} \lesssim T_c$ mais à des instants de diffusion quasi-infinis. Dans ce cas l'énergie mobilisée par le milieu est suffisamment importante pour créer une fissure de plus grande taille.

D'un autre côté, pour des intensités de température imposée très importantes, la fissure est de petite taille et apparaît immédiatement pour des temps de diffusion très faibles. La figure (4-13b) confirme les éclaircissements apportés puisqu'on observe que le rapport l_c/l_t décroît lorsque la température imposée s'approche de T_c .

Les deux méthodes utilisées présentent des résultats très proches comme nous l'avons montré dans la section précédente, avec une légère surestimation de la longueur de diffusion critique obtenue par méthode itérative.

Effet de la vitesse de chargement

Le choc thermique correspond à un transfert rapide de la température vers le milieu étudié. On a considéré jusqu'à présent que ce transfert est instantané c'est-à-dire qu'à l'instant initial à $t = 0$ la température au niveau de la paroi passe de $T = T^0$ à $T = T^{imp}$, tandis qu'en situation réelle ce transfert thermique est progressif. On s'intéresse dans cette partie à cette vitesse de chargement et son effet sur la nucléation

de fissure. Pour cela, on remplace la condition aux limites en température constante imposée en $y = 0$ par une condition aux limites variable de la forme:

$$T^{imp}(t) = T_0^{imp}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (4.27)$$

où τ correspond au temps caractéristique du transfert de température. Le choc thermique instantané à la paroi correspond au cas asymptotique $\tau \rightarrow 0$ associé un transfert "immédiat" avec $T^{imp}(t) = T_0^{imp}$.

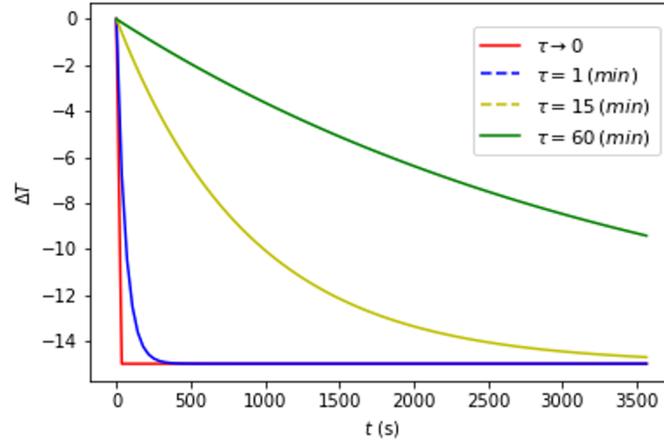


FIGURE 4-14 – Variation de la température imposée au niveau de la paroi en fonction du temps pour différents temps caractéristiques de chargement

L'expression de la variation de température dans un milieu semi-infini à la température initiale $T^0 = 0$ et soumis à une température variable $F(t)$ est donnée dans l'annexe (D) par la relation (C.4) qui s'écrit:

$$T(y, l_t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{k_t t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{y^2}{4k_t u}\right) e^{-u^2} du \quad (4.28)$$

Pour une température variable de la forme (4.27), la variation de température le

long de l'axe vertical devient:

$$\Delta T(y, l_t) = T_0^{imp} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{l_t}\right) - T_0^{imp} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{l_t}}^{\infty} e^{-\left(u^2 + \frac{l_t - \frac{y}{u}}{4k_t\tau}\right)} du \quad (4.29)$$

On observe sur la Figure 4-15 que la variation de la température pour des temps de transfert $\tau > 0$ est légèrement retardée par rapport au chargement instantané. Ce retard est quantifié par le terme de droite dans l'expression (4.29), qui est une quantité positive (pour $T_0^{imp} < 0$). On remarque que cette différence est localisée au niveau de la paroi et se produit pour des instants ultérieurs au moment où la température à la paroi atteint la température imposée.

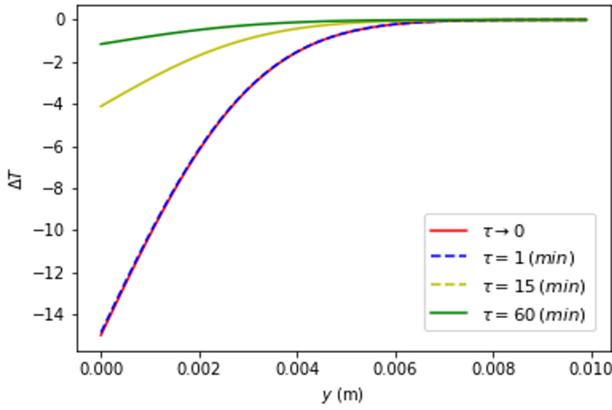
Les figures (Figure 4-16) montrent l'évolution de la longueur de nucléation ℓ_c ainsi que la distance du front thermique l_t atteinte pour un chargement progressif allant de $\tau = 1 h$ à des valeurs proches de $\tau \rightarrow 0$. Pour une vitesse de chargement faible, c'est-à-dire pour un refroidissement lent, la nucléation de fissure est retardée et la taille de fissure est plus importante. Ce résultat correspond bien à celui établi pour une intensité du choc thermique plus faible puisqu'une vitesse de chargement lente est équivalente à une intensité thermique à un instant t plus faible (Figure 4-15b).

On remarque aussi qu'à partir d'une vitesse équivalente à un temps caractéristique inférieur à $\tau < 16$ minutes, la vitesse du choc thermique n'intervient pas sur le phénomène de nucléation puisque la taille de la fissure nucléée ainsi que l'instant de nucléation atteignent un seuil constant.

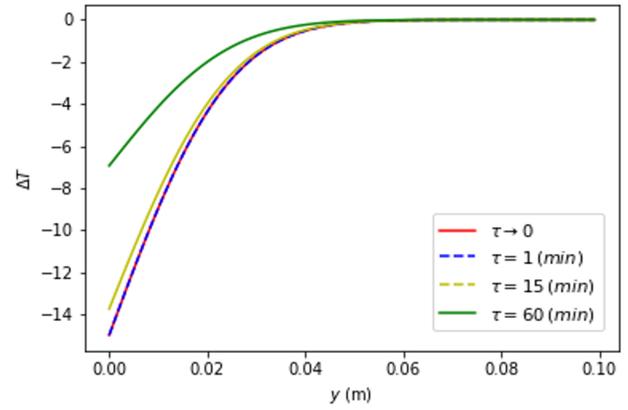
4.2.6 Influence de l'espacement entre les fissures

La fissuration sous choc thermique à la surface d'un milieu semi-infini est associée à l'apparition d'un système de fissures périodiques parallèlement disposées. L'espacement entre ces fissures est considéré jusque-là comme une donnée du problème. Elle représente cependant en pratique une variable importante qui intervient sur le phénomène de nucléation. On propose donc ici d'y apporter un éclairage.

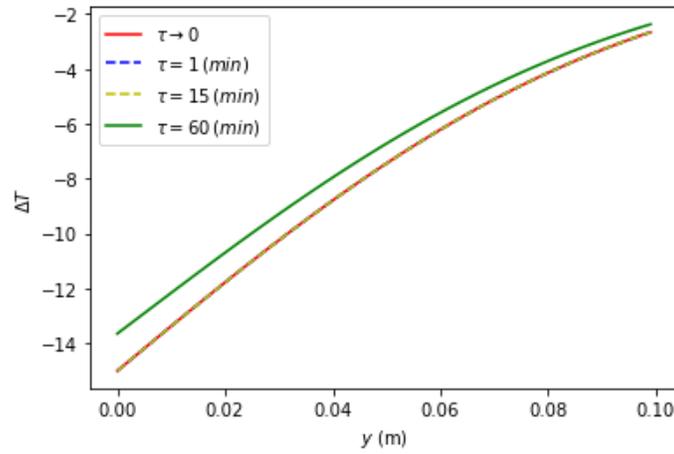
Comme on l'a vu dans les sections précédentes, la solution d'un problème de nuclé-



(a) Variation de la température le long de y à l'instant $t = 1 \text{ s}$



(b) Variation de la température le long de y à l'instant $t = 1 \text{ min}$

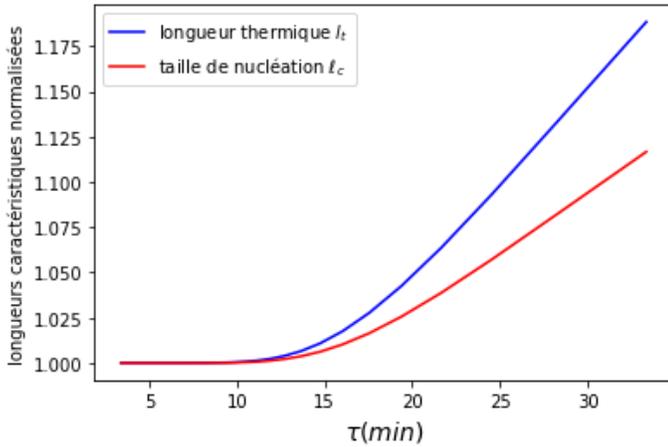


(c) Variation de la température le long de y à l'instant $t = 15 \text{ min}$

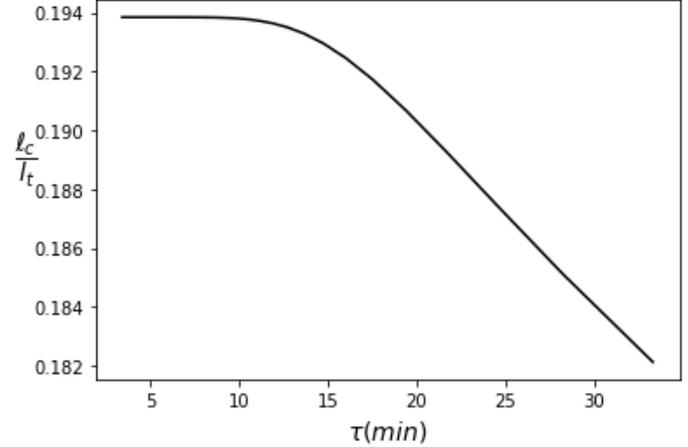
FIGURE 4-15 – Effets de la vitesse du choc température imposée sur la température

tion de fissures de même taille ℓ_c espacées d'une demi-distance L_c dans un milieu semi-infini soumis à un choc thermique à l'instant t_{t_c} correspond à la détermination du triplet (ℓ_c, t_{t_c}, L_c) .

On dispose d'ores et déjà de deux équations issues du double critère énergétique qui permettent de résoudre partiellement le système à 3 inconnues. On présente sur les graphes (4-17) une analyse paramétrique du problème en fonction de l'espacement entre les fissures en utilisant la méthode variationnelle (Section 4.2.4). On montre en particulier qu'il existe un seuil $L_c \simeq 0.2668 \text{ m}$ au dessus duquel le paramètre d'espacement L n'intervient que légèrement sur la nucléation et cela revient au fait que



(a) variation des longueurs caractéristiques de la nucléation en fonction du temps caractéristique du transfert



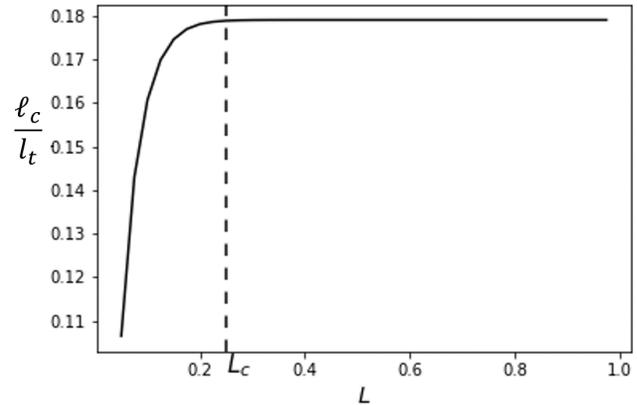
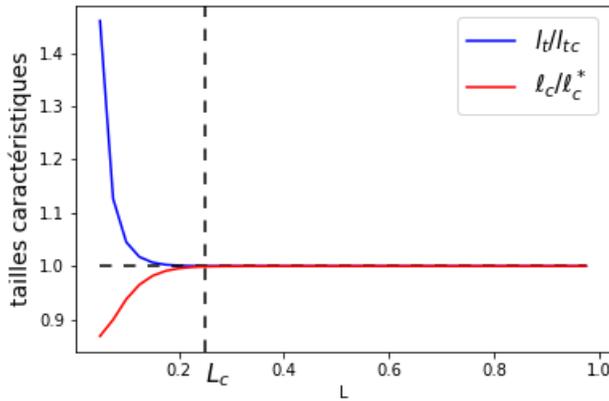
(b) variation du rapport l_c/l_t en fonction du temps caractéristique du transfert

FIGURE 4-16 – Effet de la vitesse de chargement du choc thermique sur la nucléation de fissure

la disposition des fissures est assez éloignée pour supposer que la nucléation d'une fissure se fait dans un milieu infini. Plus la densité de ces fissures est grande plus leur taille diminue, et plus le temps caractéristique de la nucléation est important.

Cette analyse permet de représenter le comportement du milieu dans le cas de nucléation fictives qui pourraient survenir si l'espacement entre les fissures est contrôlé. Cependant, on rappelle que la solution du problème de nucléation est le triplet (l_c, l_{t_c}, L_c) qui correspond au premier instant où la nucléation est capable de se réaliser. La première nucléation qui survient correspond à l'instant critique associé à la longueur thermique critique $l_{t_c} \simeq 0.263 m$. Cette dernière correspond à la nucléation d'une fissure unique de taille $l_c \simeq 0.048 m$ dans un milieu infini. On précise que pour des espacements supérieurs à $L_c > 0.2668 m$ l'effet de taille de la structure n'influence que légèrement la nucléation, ce qui reviendrait à proposer une première nucléation d'un système de fissure espacées d'une distance $L_c = 0.2668 m$.

Ce résultat conduit à s'interroger sur l'évolution de ce système de fissures parallèles tout au long de l'évolution du front thermique. La section suivante traitera de cette évolution en mettant en compétition plusieurs phénomènes susceptibles de se produire.



(a) variation de la longueur de nucléation et de la longueur caractéristique du front thermique, normalisées en fonction de l'espacement L

(b) variation du rapport ℓ/l_t en fonction de l'espacement L

FIGURE 4-17 – Effet de l'espacement des fissures sur la nucléation

4.3 Système de fissures parallèles - nucléation vs. propagation

On rappelle que la nucléation de fissures survient pendant la phase transitoire de la diffusion thermique, ce qui laisse à penser que cette configuration de fissures est susceptible d'évoluer au fur et à mesure que le front thermique traverse le milieu. On considère dans ce cas deux phénomènes principaux qui interviennent dans cette évolution. Dans un premier cas, les fissures existantes peuvent se propager de manière quasi-statique (Figure 4-18b). Dans un second cas, de nouvelles fissures nucléent entre les fissures existantes (Figure 4-18c).

4.3.1 Présentation des deux scénarios envisagés

Propagation de fissures existantes

L'évaluation de la propagation quasi-statique des fissures nucléées de taille ℓ_0 à un instant donné du chargement, où l_t la longueur caractéristique de diffusion thermique est supérieure à la longueur critique de nucléation l_{t_0} , se fait à l'aide du critère de

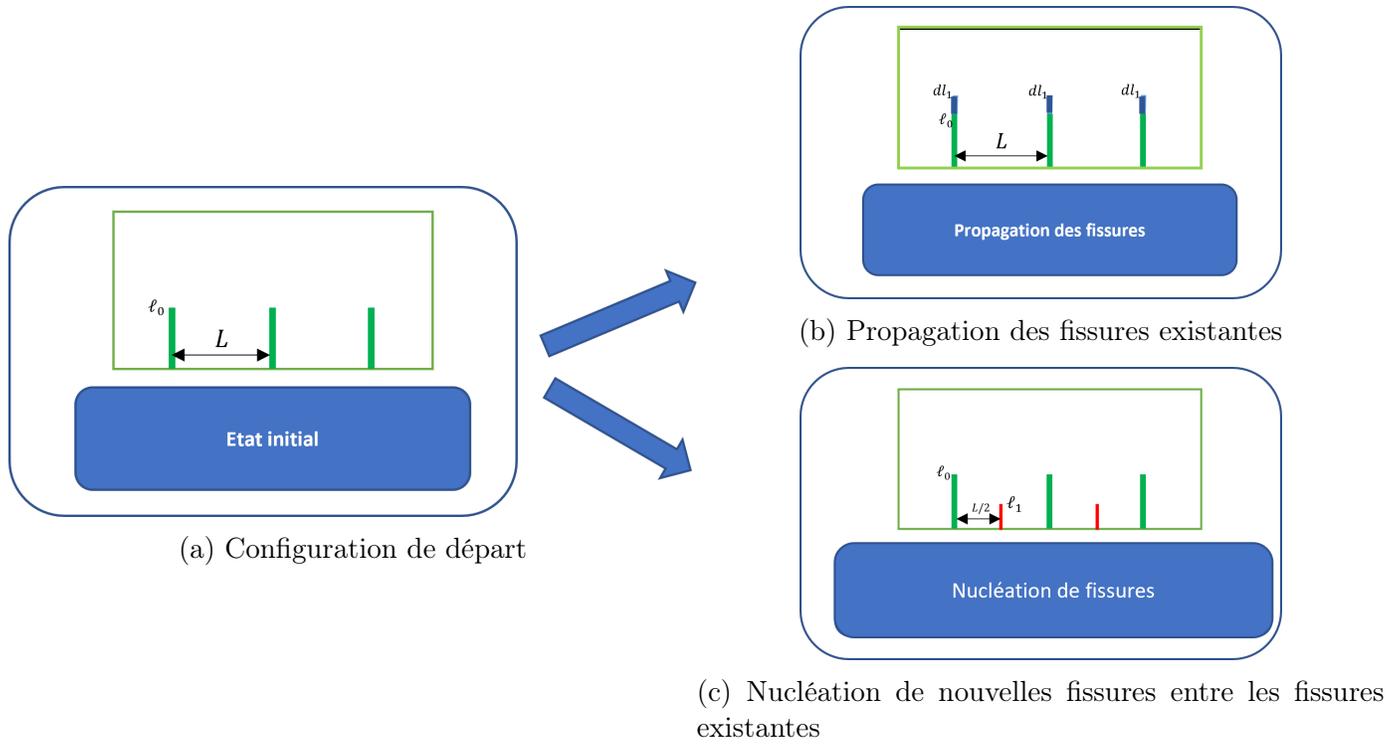


FIGURE 4-18 – Schéma représentant les deux scénarios de l'évolution du milieu avec la progression de la diffusion thermique

propagation énergétique classique (2.7); c'est-à-dire que nous avons propagation si le taux de restitution d'énergie $G(\ell_0 + \ell_p)$ dépasse le seuil critique G_c .

Nous avons établi dans la section (4.2.4) l'expression analytique de l'énergie potentielle du problème auxiliaire (4.20) qui permet de calculer le taux de restitution d'énergie par la relation.

$$G(\ell_0 + \ell_p) = -\frac{\partial E_p^{aux}}{\partial \ell_p}(\ell_0 + \ell_p) \quad (4.30)$$

On rappelle que le paramètre de chargement $dl_t = l_t - l_{t_0}$ intervient dans le terme G_2 de l'expression de l'énergie potentielle (4.16) qui apparaît comme une fonction croissante de l_t . Cela signifie que l'énergie potentielle (4.20) croît avec le gradient thermique qui traverse le milieu, ce qui rend tout à fait possible la propagation des fissures existantes.

Le graphe (4-19) représente l'évolution du taux de restitution d'énergie pour la propagation d'une fissure existante à différents instants de la diffusion thermique transitoire après la nucléation. On remarque que la propagation des fissures existantes est possible mais pas immédiate puisque qu'on observe que la propagation, qui vérifie le critère (4.30), ne s'enclenche qu'à partir de $t \simeq 1.69 t_0$. Dès que la courbe du taux de restitution d'énergie passe en dessous du G_c la propagation s'arrête ce qui permet de déterminer la nouvelle longueur de la fissure.

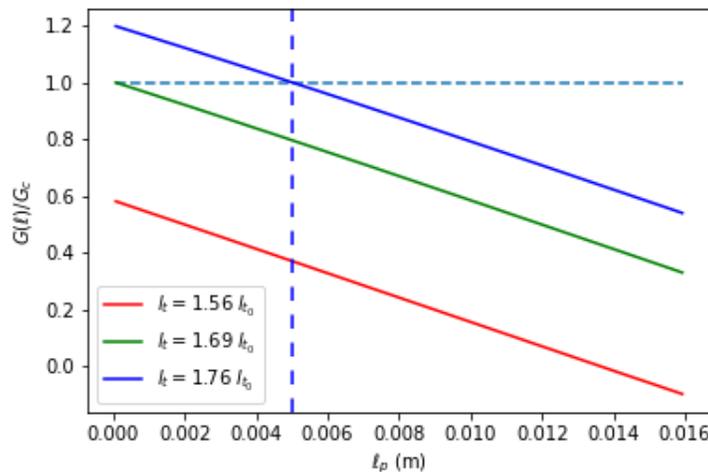


FIGURE 4-19 – Évolution du taux de restitution d'énergie en fonction du front thermique

Nucléation de nouvelles fissures

Le deuxième scénario auquel nous nous intéressons est celui de la nucléation de nouvelles fissures de taille ℓ_1 entre les fissures déjà existantes (Figure 4-18c). La schématisation de ce nouveau problème est représentée sur la figure (4-20). On se restreint par symétrie au demi-domaine $x > 0$, cependant il est important de préciser qu'une fissure équivalente nucléée en $x = -L$ ce qui signifie que la variation de l'énergie potentielle que nous allons déterminer pour ce demi-domaine constitue bien toute l'énergie allouée à la nucléation de cette nouvelle fissure³.

3. Elle ne doit donc pas être multipliée par deux pour couvrir tout le domaine d'étude.

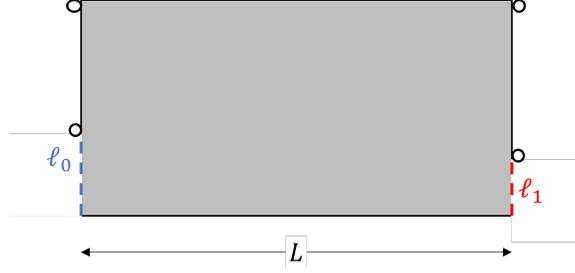


FIGURE 4-20 – Représentation du scénario de nucléation d’une nouvelle fissure de longueur ℓ_1

Pour résoudre ce problème, nous avons mis en oeuvre une approche variationnelle basée sur la minimisation de l’énergie potentielle du problème auxiliaire, qui a prouvé son efficacité ainsi qu’une bonne précision des résultats dans le cadre d’un scénario d’une première nucléation de fissure dans un milieu sain.

La différence majeure entre les deux problèmes réside dans le couplage dû à la fissure existante ℓ_0 sur la nucléation de la nouvelle fissure ℓ_1 . Cet effet se quantifie sur le problème auxiliaire par l’apparition d’un terme additionnel de perturbation dans le vecteur contrainte appliqué sur la nouvelle fissure. On déduit, à partir de la solution de l’état initial σ^i (4.7) et de la solution en déplacement ξ_0 du premier problème auxiliaire établie dans (4.12), la composante horizontale du champ de contrainte du problème de référence avant la deuxième nucléation:

$$\sigma_{xx}^1(x, y) = \sigma^0 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \kappa \Delta T(y, l_t) + \frac{\lambda + 2\mu}{L} f_0'\left(\frac{x}{L}\right) g_0\left(\frac{y}{\ell_0}\right) \quad (4.31)$$

Le nouveau problème auxiliaire se résume à l’application de l’opposé du vecteur contrainte (4.31) sur la fissure ℓ_1 (4-21).

On considère alors ξ_1 le déplacement solution du nouveau problème auxiliaire de la forme:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 & (y \geq \ell_1) \\ \xi_1 = f_1\left(\frac{x}{L}\right) g_1\left(\frac{y}{\ell_1}\right) \mathbf{e}_x & (y \leq \ell_1) \end{cases} \quad (4.32)$$

avec ξ_1 cinématiquement admissible pour $g_1(1) = 0$.

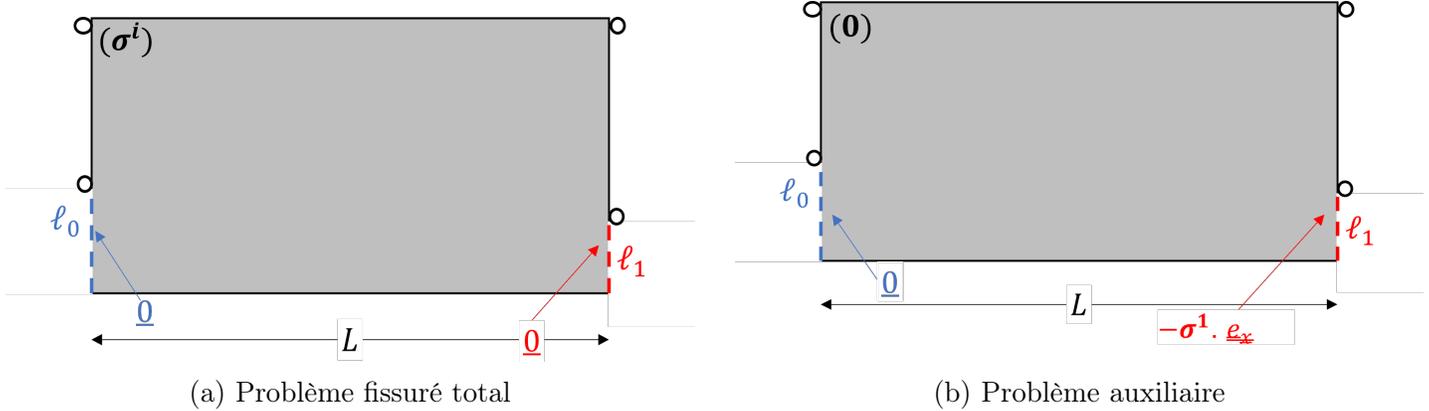


FIGURE 4-21 – Représentation de la deuxième nucléation

Le choix des fonctions $f_1(X)$ et $g_1(Y)$ se fait de manière à minimiser l'énergie potentielle qui s'écrit sous la forme:

$$E_p^{aux} = U^{aux}(f_1, g_1) - \Phi^{aux}(f_1, g_1) \quad (4.33)$$

où:

$$U^{aux} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_1 : \mathbf{C}^{ad} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 d\Omega \quad (4.34)$$

$$\Phi^{aux} = \int_0^{\ell_1} \sigma_{xx}^1(L, y) \xi_1(L, y) dy \quad (4.35)$$

En injectant l'expression du déplacement (4.32) dans les expressions de U_0 et U_1 on obtient les relations suivantes:

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\ell_1}{L} \int_0^1 \left[(\lambda + 2\mu) f_1'(X)^2 H_0 + \mu \left(\frac{L}{\ell_1}\right)^2 f_1(X)^2 H_1 \right] dX \quad (4.36)$$

$$U_1 = \ell_1 f_1(1) H_2(\ell_0, \ell_1, l_t) \quad (4.37)$$

où l'on définit:

$$H_0 = \int_0^1 g_1(Y)^2 dY \quad \text{et} \quad H_1 = \int_0^1 g_1'(Y)^2 dY$$

$$H_2(\ell_0, \ell_1, l_t) = \int_0^1 \left(\sigma^0 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \kappa \Delta T(\ell_1 Y, l_t) + \frac{\lambda + 2\mu}{L} f_0'(1) g_0\left(\frac{\ell_1 Y}{\ell_0}\right) \right) g_1(Y) dY$$

On retrouve dans l'expression de H_2 le terme supplémentaire qui correspond à la per-

turbation induite par la fissure ℓ_0 qui vient s'ajouter au chargement thermique initial. On remarque effectivement que plus l'espacement entre les fissures est important plus ce terme tend vers une valeur négligeable. Cela revient à limiter la perturbation du déplacement au domaine localisé autour de la fissure ℓ_0 .

Minimiser E_p^{aux} par rapport à f_1 revient à minimiser la fonctionnelle U_0 par rapport à f_1 . Par application de la formule d'Euler-Lagrange, la fonction qui minimise U_0 est la solution de l'équation différentielle:

$$f''(X) - \beta_1^2 \left(\frac{L}{\ell_1} \right)^2 f(X) = 0 \quad (4.38)$$

où

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{H_1}{H_0} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}$$

La solution générale de cette équation peut s'écrire sous la forme:

$$f(X) = A_1 \exp\left(\beta_1 \frac{L}{\ell_1} X\right) + A_2 \exp\left(\beta_1 \frac{L}{\ell_1} (2 - X)\right) \quad (4.39)$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes à déterminer par minimisation de $E_p(A_1, A_2) = U_0 + U_1$ qui est une fonction polynomiale du deuxième degré à deux variables indépendantes.

L'estimation de l'énergie potentielle s'écrit finalement de manière satisfaisante sous la forme:

$$E_p^{aux} = -\frac{1}{2} \ell_1^2 \frac{H_2^2}{H_1} \frac{\beta_1}{\mu} \frac{1}{\tanh\left(\beta_2 \frac{L}{\ell_1}\right)} \quad (4.40)$$

On en déduit l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental pour la nucléation de la nouvelle fissure par application de la relation (3.52):

$$G_{inc}(\ell_1) = \frac{1}{2} \ell_1 \frac{H_2^2}{H_1} \frac{\beta_1}{\mu} \frac{1}{\tanh\left(\beta_2 \frac{L}{\ell_1}\right)} \quad (4.41)$$

On trace (Figure 4-22) la variation du taux de restitution d'énergie incrémental de la nouvelle fissure pour différentes distances parcourues par le processus de diffusion

thermique ($l_t = l_{t_0} + dl_t > 0$). A l'aide du double critère énergétique de nucléation de fissure, on retrouve qu'il est bel est bien possible de nucléer de nouvelles fissures puisque le $G_{inc}(\ell_1^*)$ atteint un maximum au seuil critique G_c pour une distance caractéristique de diffusion de l'ordre de $l_t \simeq 1.91 l_{t_0}$.

Une comparaison entre les deux scénarios de propagation et de nouvelle nucléation pour les conditions géométriques imposées, soit un espacement initial entre les fissures initial $L_c = 0.2668\text{m}$, montre que l'instant où la propagation est enclenchée correspond à la distance de diffusion thermique $l_t^{prop} \simeq 1.69 l_{t_0}$, tandis que la nucléation est amorcée à partir de $l_t^{nucl} \simeq 1.91 l_{t_0}$, le phénomène de propagation est donc dominant sur la nucléation.

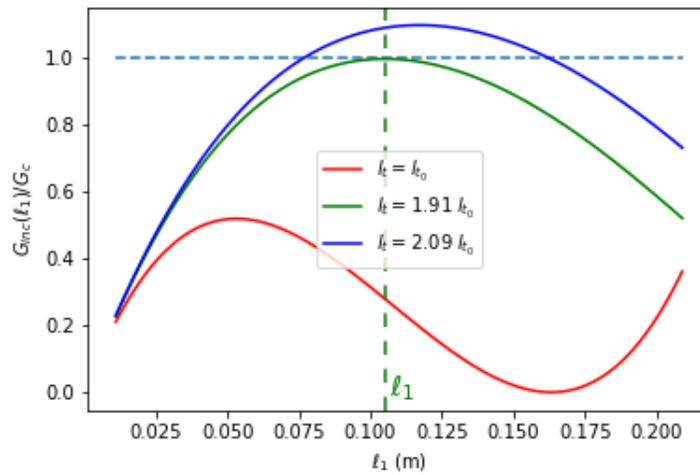


FIGURE 4-22 – Évolution du taux de restitution d'énergie incrémental en fonction du front thermique

On montre cependant qu'il est possible d'avoir un régime d'évolution différent, c'est-à-dire une dominance du phénomène de nucléation de nouvelles fissures sur la propagation des fissures existantes.

On observe en effet, sur la Figure (4-23), que l'on rencontre cette situation pour un espacement $L \in [0.1\text{ m}, 0.2\text{ m}]$ où le temps critique de nucléation est inférieur à celui de la propagation.

On résume les quatre domaines d'évolution représentés sur la figure (4-23) pour une

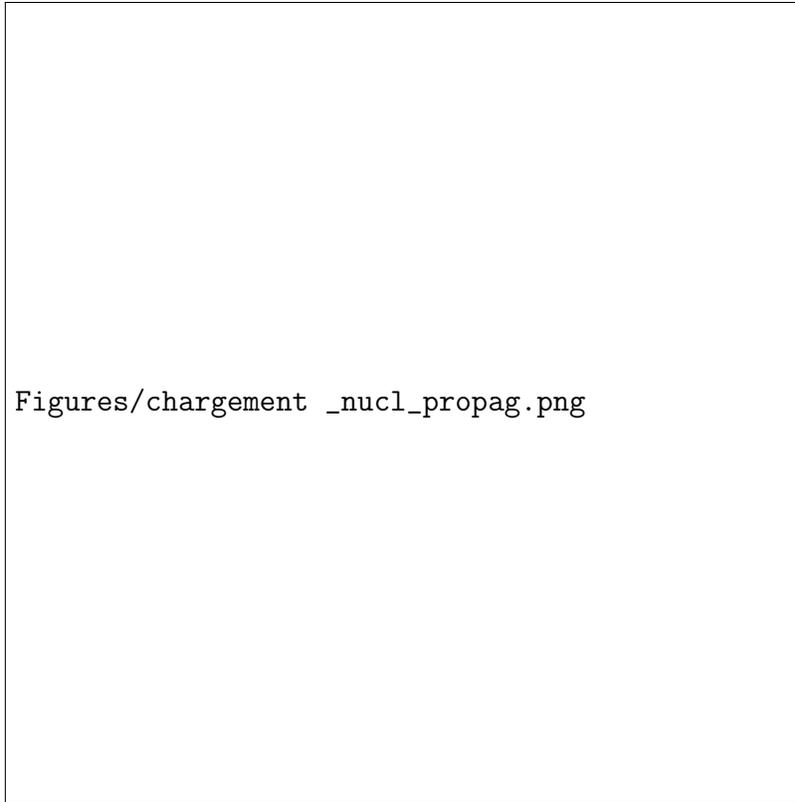


FIGURE 4-23 – Évolution du chargement critique de nucleation et propagation en fonction de l'espacement entre les fissure

taille de fissure initiale ℓ_0 comme suit:

- Pour un espacement $L \in [0, 0.047 m]$: un premier domaine où aucun processus n'est possible.
- Pour $L \in [0.047 m, 0.1 m]$: un second domaine où nous avons propagation des fissures existantes. Plus les fissures sont denses, plus le front thermique d'amorçage de la propagation est important. Dans cette phase, la condition de nucléation de nouvelles fissures n'est pas atteinte puisque le relâchement des contraintes entre les fissures existantes empêche toute nucléation.
- Pour un espacement $L \in [0.1 m, 0.2 m]$: un troisième domaine correspondant à la nucléation de nouvelles fissures où l'énergie nécessaire pour nucléer est inférieure à celle nécessaire pour propager les fissures existantes.
- Pour $L > 0.2 m$: un dernier domaine où la propagation des fissures existantes est dominante.

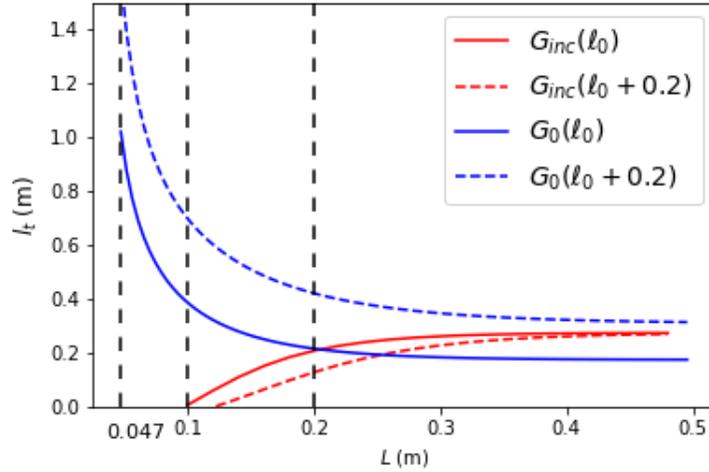


FIGURE 4-24 – Évolution du chargement critique de nucleation et propagation en fonction de l’espacement entre les fissure pour deux tailles de fissure initiale différentes

En pratique, la nucléation de fissures initiales ℓ_0 survient pour un espacement $L > 0.2 \text{ m}$ (Section 4.2.6). Ce qui conduit, d’après le raisonnement tenu, à la propagation de ces dernières. Cependant, cette propagation n’est pas définitive puisque l’évolution de la taille de ces fissures nécessite une consommation d’énergie croissante. Dans ce sens, on observe sur la figure (4-24), à espacement L constant, que la courbe de propagation (bleu) est plus importante lorsque la taille la fissure est grande ($G_0(\ell_0 + d\ell) > G_0(\ell_0)$).

Autrement dit, après un certain incrément de propagation, la nouvelle courbe de propagation passe au dessus de la courbe de nucléation (rouge) ce qui enclenche la nucléation de nouvelles fissures ℓ_1 .

Cette nouvelle nucléation de fissures entre les fissures existantes réduit la taille de la structure de moitié $L_1 = L/2$. Si ce nouvel espacement est supérieur au seuil limite de nucléation (dans ce cas $L_1 > 0.1$), une troisième nucléation est susceptible d’avoir lieu et l’espacement est encore une fois divisé par deux et cela continue jusqu’à atteindre le seuil limite où la nucléation n’est plus possible. Dans ce cas, c’est la propagation de fissures qui reprend la main, lorsque l’espacement n’est pas trop serré $L_i > 0.047$. Dans le cas inverse, plus aucun phénomène n’est amorcé.

L'évolution du problème de choc thermique envisagée à l'issue de cette étude sous entend une série de nucléations et propagations de fissures successives. Un premier système de fissures équidistantes et de même taille apparaît dans le milieu pendant la phase transitoire. Ces fissures se propagent pendant un certain temps (dépend de la compétition d'énergie entre nucléation et propagation) avant de s'arrêter pour laisser place à la nucléation de nouvelles fissures entre les fissures existantes. On suppose que ces nouvelles fissures peuvent se propager à leur tour avant de s'arrêter pour laisser place à une nouvelle nucléation. Ce cycle de nucléation/propagation a pour effet de réduire l'espacement entre les fissures puisqu'à chaque nucléation l'espacement est divisé par deux. Ce cycle s'arrête lorsque l'espacement atteint une taille limite où la nucléation n'est plus possible. Un ordre de grandeur de cet espacement limite correspond à la longueur de la fissure nucléée $L_c \simeq \ell_c$.

En se basant sur l'analyse thermodynamique de la section (2.4), la nucléation d'une fissure s'accompagne d'une élévation de température à l'intérieur de la fissure. La diffusion de cette quantité de chaleur dans le milieu après une première nucléation s'oppose aux évolutions de fissures proposées dans la section précédente puisque celle-ci ralentit le refroidissement par choc thermique imposé.

On propose une estimation de cet élévation de température à partir de l'expression (2.63), où l'épaisseur de la fissure correspond au saut de la perturbation de déplacement en $x = 0$. Cette perturbation de déplacement est donnée pour la résolution variationnelle (Section 4.2.4) par l'expression (4.12). L'épaisseur de la fissure s'écrit sous la forme:

$$\epsilon = 2 f(0^+) = -4 \frac{G_2}{G_1} \frac{\beta}{\mu^{ad}} \ell_c \sigma^{0,th} \frac{1 - e^{2\beta L/\ell_c}}{1 + e^{2\beta L/\ell_c}} \quad (4.42)$$

Pour les paramètres numériques du problème (section 4.2.4) et en fonction des résultats de la première nucléation (section 4.2.4), cette épaisseur est de l'ordre de $\epsilon \simeq 22,5 \mu m$. Ce qui conduit à une élévation de la température à l'intérieur de la fissure de l'ordre de $\delta T \simeq 1, 29^\circ C$ ce qui n'est pas négligeable pour un choc thermique $T^0 = -15^\circ C$.

4.3.2 Conclusions

On montre dans ce chapitre qu'il est possible de traiter la problématique de nucléation de fissures en mode I au niveau des parois d'un milieu sous choc thermique à l'aide du double critère énergétique développé dans [10]. On est donc en mesure de prédire l'instant exact d'apparition de ces fissures ainsi que leur configuration dans la structure. Plusieurs méthodes de résolution analytiques sont alors utilisables et permettent de fournir des résultats satisfaisants et comparables à ceux obtenus numériquement.

On retrouve alors pour un choc thermique, caractérisé par une température imposée suffisante pour mettre le milieu en traction, la possibilité de nucléation d'un réseau de fissures orthogonales à la paroi, parallèles et équidistantes entre elles. Cette nucléation ne survient pas immédiatement lors de l'application de la température mais pendant la phase transitoire de la diffusion thermique avant établissement du régime permanent, le rapport entre la taille des fissures et la taille caractéristique du front thermique est de l'ordre de $\frac{\ell}{l_t} \simeq 0.18$ pour une variation de température imposée de $\Delta T = -15^\circ\text{C}$ pour le jeu de données considéré pour ce problème. Une analyse effectuée sur la vitesse du transfert du choc thermique dans le milieu montre que celle-ci n'affecte pas de manière visible la nucléation si le temps de transfert est inférieur à une valeur critique, ici 16 min (Figure 4-16b).

Finalement, on montre que le paramètre géométrique d'espacement entre les fissures joue un rôle important sur la nucléation puisque celui-ci contrôle la quantité d'énergie du milieu allouée à chaque fissure. Plus les fissures sont rapprochées, plus l'intensité du chargement nécessaire est importante, et plus la taille des fissures nucléées est faible.

Une attention particulière a été portée sur l'évolution de ces fissures en lien avec la diffusion thermique, puisqu'on le rappelle la nucléation survient pendant la phase transitoire. On considère dans ce cas deux scénarios d'évolution possibles: une propagation des fissures existantes, ou bien, la nucléation de nouvelles fissures entre les fissures existantes. On montre à l'aide du critère de propagation quasi-statique des

fissures et du double critère énergétique de nucléation que les deux scénarios considérés sont possibles et qu'il existe des phases, contrôlées par le paramètre d'espacement, où la nucléation est dominante et d'autres où la propagation domine. On identifie un état stable lorsque les fissures sont trop rapprochées de sorte qu'aucune nucléation ou propagation n'est possible (Figure 4-23).

De toute évidence, les deux scénarios étudiés dans ce travail ne constituent pas l'ensemble des évolutions possibles du système puisqu'il peut être question d'évolution individuelle d'une seule fissure ou partielle d'un sous-groupe de fissures ou encore une bifurcation de certaines fissures par rapport aux autres [1]. L'objectif n'est donc pas de prédire de manière exact l'évolution du système de fissures qui apparaissent dans un milieu sous choc thermique mais de proposer des explications aux systèmes de fissures observés expérimentalement (Figure 4-18a) grâce à la formulation du double critère énergétique pour la nucléation et sa compétition avec la propagation quasi-statique de fissures. L'analyse proposée présente donc des résultats intéressants qu'il conviendrait d'approfondir dans des travaux ultérieurs, notamment par confrontation direct avec des observations expérimentales.

Chapitre 5

Nucléation de fissure en présence de couplage thermo-hydro-mécanique

Contents

5.1	Introduction	146
5.2	Thermodynamique de la nucléation en thermo-poro-élasticité saturée	147
5.2.1	Équations d'états thermoporoélastiques	147
5.2.2	Énergie interne totale d'un milieu poreux en conditions non-drainées	149
5.2.3	Variation de l'énergie interne dans la fissure	154
5.3	Conclusions	166

5.1 Introduction

L'étude de la nucléation de fissures dans un milieu poreux, saturé par un fluide sous pression, nécessite d'être abordée dans un contexte de couplages thermo-poro-mécaniques, qui mettent en jeu des couplages entre les variables d'état de déformation, de pression et de température.

De façon analogue à l'étude de la nucléation de fissure en thermoélasticité (Chapitre 4), il convient de préciser le cadre thermodynamique de la nucléation adapté au couplage thermo-poro-élastique dans un milieu poreux saturé. D'un point de vue macroscopique, on rappelle que le caractère brutal de la nucléation suppose que le temps caractéristique de la nucléation est petit par rapport à celui de la diffusion thermique. Le processus de nucléation d'une fissure doit donc être abordé en conditions adiabatiques. Suivant le même raisonnement, le temps caractéristique de la nucléation est petit devant le temps caractéristique du transport de la masse fluide, en particulier pour les milieux poreux peu perméables (ex: matériaux argileux). Cela signifie qu'aucun échange de masse fluide ne se produit pendant la nucléation c'est à dire que l'évolution de la phase fluide pendant la nucléation est non-drainée.

Soit $\frac{m_f}{|\Omega_0|}$, la masse d'eau par unité de volume Ω_0 , l'évolution non-drainée est définie par la relation:

$$\frac{m_f}{|\Omega_0|} = \frac{m_{f_0}}{|\Omega_0|} \quad (5.1)$$

En utilisant $m_f = \rho_f |\Omega_f|$ ($m_{f_0} = \rho_f^0 |\Omega_{f_0}|$), on a encore:

$$\rho_f \phi = \rho_f^0 \phi^0 \quad (5.2)$$

On propose donc de préciser dans le cadre des évolutions adiabatiques non-drainées les équations d'état thermo-poro-élastiques à la base de la formulation du critère énergétique pour les milieux poreux saturés. Une attention particulière sera portée notamment à l'écriture de la variation d'énergie interne impliquée dans l'expression du critère énergétique.

Dans un deuxième temps, nous allons utiliser la solution de la déformation à l'intérieur de la fissure proposée par le problème inclusionnaire d'Eshelby, pour tenter d'accéder à l'élévation de la température ainsi que la chute de pression à l'intérieur de cette dernière à partir de l'expression de la variation de l'énergie interne qui est reliée à l'énergie de création de nouvelle surface par la relation (2.39).

5.2 Thermodynamique de la nucléation en thermo-poro-élasticité saturée

On s'intéresse dans cette section au cadre thermodynamique de la nucléation d'une fissure dans un milieu thermo-poro-élastique saturé, pour lequel la pression du fluide apparaît comme une nouvelle variable d'état qui s'ajoute aux variables de déformations ($\boldsymbol{\varepsilon}$) et de température (T) introduit dans le cas sec.

5.2.1 Équations d'états thermoporoélastiques

Squelette solide

Le comportement intrinsèque réversible du squelette solide (s) se traduit par une dissipation intrinsèque nulle exprimée en fonction de l'enthalpie libre solide $G_s(\boldsymbol{\varepsilon}, p, T) = \psi_s - p\phi$ par la relation [19]:

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \phi dp - s_s dT - dG_s = 0 \quad (5.3)$$

Soit:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial G_s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) d\varepsilon_{ij} - \left(\phi + \frac{\partial G_s}{\partial p}\right) dp - \left(s_s + \frac{\partial G_s}{\partial T}\right) dT = 0 \quad (5.4)$$

En l'absence de liaisons internes sur les évolutions des variables d'état, on obtient les trois équations d'état:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial G_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{p,T} \quad ; \quad \phi = \left(-\frac{\partial G_s}{\partial p} \right)_{\varepsilon_{ij},T} \quad ; \quad s_s = \left(-\frac{\partial G_s}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij},p} \quad (5.5)$$

La différentiation des équations (5.5) en se limitant à un développement limité à l'ordre 2 par rapport aux variables d'état (ε, p, T) permet d'obtenir les équations d'état:

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{dr,\theta} : d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} dp - \mathbf{k} dT \\ d\phi = \mathbf{b} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{dp}{N} + l_s dT \\ ds_s = \mathbf{k} : d\boldsymbol{\varepsilon} + l_s dp + c_s dT \end{cases} \quad (5.6)$$

où :

- $\mathbf{b} = -\partial^2 G_s / \partial \varepsilon \partial p$ est le tenseur des coefficients de Biot qui relie linéairement la variation de la porosité à la déformation en conditions de température et pression maintenues constante $dT = dp = 0$
- $\mathbf{k} = -\partial^2 G_s / \partial T \partial \varepsilon = \mathbb{C} : \boldsymbol{\alpha}$ est le tenseur des contraintes thermiques, où $\boldsymbol{\alpha}_s$ est le tenseur des coefficients de dilatation thermique linéique. La grandeur $T_0 \mathbf{k}$ s'interprète comme la chaleur latente du squelette solide par unité de déformation à température et pression constantes.
- $\frac{1}{N} = -\partial^2 G_s / \partial p^2$ est l'inverse du module de Biot drainé qui relie la variation de pression à la variation de porosité pour $dT = d\varepsilon = 0$
- $l_s = -\partial^2 G_s / \partial T \partial p$ est le coefficient de couplage pression température, la grandeur $l_s T_0$ peut s'interpréter comme la chaleur latente de pression, c'est à dire la quantité chaleur par unité de pression échangée avec l'extérieur du solide pour $dT = d\varepsilon = 0$.
- $c_s = -\partial^2 G_s / \partial T^2$ et $T^0 c_s$ s'interprète comme la capacité calorifique volumique à pression et déformation constante.

Phase fluide

S'agissant de la phase fluide, la formulation des équations constitutives en fonction de la masse volumique du fluide ρ_f et de la densité volumique d'entropie massique du fluide $s_{f,m}$ dérivent de l'équation d'état du fluide en fonction de l'enthalpie libre massique $g_{f,m}$ [19]:

$$\frac{dp}{\rho_f} - s_{f,m}dT - dg_{f,m} = 0 \quad (5.7)$$

En se limitant encore une fois à un développement limité d'ordre 2 par rapport aux variables $(p, s_{f,m})$ de l'enthalpie massique libre, on aboutit à la formulation des équations d'états qui s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial g_{f,m}}{\partial p} = \frac{1}{\rho_f^0} + \frac{3\alpha_f}{\rho_f^0}\tau - \frac{p-p^0}{\rho_f^0 K_f} \\ s_{f,m} = -\frac{\partial g_{f,m}}{\partial T} = s_{f,m}^0 + c_{f,m}\tau - \frac{3\alpha_f}{\rho_f^0}(p-p_0) \end{cases} \quad (5.8)$$

où K_f est le module de compression du fluide, α_f le coefficient de dilatation thermique linéique du fluide et $c_f = \rho_f \phi c_{f,m}$ où $T^0 c_f$ s'interprète comme la capacité calorifique volumique à pression constante de la phase fluide.

Pour une évolution non drainée du fluide, qui satisfait la conservation de la masse fluide (5.2), les équations d'état du fluide (5.8) se simplifient:

$$\begin{cases} \phi - \phi_0 = 3\alpha_f \phi_0 \tau - \frac{\phi_0}{K_f}(p - p_0) \\ s_f - s_f^0 = c_f \tau - 3\alpha_f \phi_0 (p - p_0) \end{cases} \quad (5.9)$$

5.2.2 Énergie interne totale d'un milieu poreux en conditions non-drainées

L'objectif de cette section consiste à préciser l'expression de l'énergie interne, quantité essentielle pour le critère de nucléation énergétique, dans le cadre des évolu-

tions non-drainées du milieu poreux.

Par transformation de Legendre, il est possible de relier la densité volumique lagrangienne de l'énergie interne totale du milieu à la densité volumique lagrangienne d'enthalpie libre ($u = G + p\phi + Ts$), où $s = s_s + s_f$ correspond à la densité volumique d'entropie totale du milieu poreux.

La combinaison des équations d'état du squelette solide (5.6) avec celles de la phase fluide en conditions non-drainées (5.9) permet d'exprimer la densité volumique d'entropie totale en fonction des variables d'états $(\boldsymbol{\varepsilon}, p, T)$ et permet de fournir une liaison entre ces variables qui traduit le caractère non-drainé, soit:

$$p - p_0 = -M(\mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon} + L\tau) \quad (5.10)$$

et

$$\begin{aligned} s - s_0 &= \mathbf{k} : \boldsymbol{\varepsilon} + L(p - p_0) + c\tau \\ &= (\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) : \boldsymbol{\varepsilon} + (c - ML^2)\tau \end{aligned} \quad (5.11)$$

où M est le module de Biot non-drainé défini par:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi_0}{K_f}$$

$L = l_s - 3\phi_0\alpha_f$ est le coefficient de couplage thermoporeux et $c = c_s + c_f$ s'interprète comme la capacité calorifique volumique totale. L'expression de la densité volumique lagrangienne d'énergie interne du milieu poreux se présente comme la somme de l'énergie interne du squelette solide et celle de la phase fluide et s'écrit en fonction des variables d'état $(\boldsymbol{\varepsilon}, p, T)$:

$$u = u^0 + \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \tau\mathbf{k} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{(p - p_0)^2}{2M} + T(s - s^0) - \frac{c}{2}\tau^2 \quad (5.12)$$

Soit la configuration de référence (0) définie par un état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_0$, de pression p_0 et de température T_0 , la loi de comportement thermoporoélastique juste

avant nucléation d'une fissure s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbb{C}^{dr,\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}^i - \mathbf{b}(p^i - p_0) - \mathbf{k}(T^i - T_0) \quad (5.13)$$

En tirant profit de la linéarité du problème, il est possible de définir l'état post-nucléation en introduisant des champs perturbés par rapport à l'état avant nucléation (i). Les variables d'état se mettent donc sous la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^i + \boldsymbol{\delta\varepsilon} \\ s &= s^i + \delta s \\ p &= p^i + \delta p \end{cases} \quad (5.14)$$

où les $\boldsymbol{\delta\varepsilon}$, δs et δp représentent les variables de perturbation.

En introduisant ces perturbations, on réécrit les équations d'état (5.6) et (5.11) du milieu poreux après nucléation sous la forme:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbb{C}^{dr,\theta} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} - \mathbf{b}\delta p - \mathbf{k}\delta T \\ \delta p &= -M(\mathbf{b} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} + L\delta T) \\ \delta s &= \mathbf{k} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} + L\delta p + c\delta T \end{cases} \quad (5.15)$$

Anticipant la formulation du critère de nucléation en conditions adiabatiques non-drainées, il est intéressant de reformuler ces équations en introduisant le tenseur d'élasticité adiabatique non-drainée $\mathbb{C}^{u,ad}$

$$\mathbb{C}^{u,ad} = \mathbb{C}^{dr} + M\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \frac{1}{c - ML^2}(\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) \otimes (\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) \quad (5.16)$$

On obtient alors l'expression du comportement thermoélastique du milieu poreux sous la forme:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} - \frac{\delta s}{c - ML^2}(\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) \quad (5.17)$$

Les équations d'état sont compatibles avec une densité volumique lagrangienne d'éner-

gie interne de la forme:

$$u = u^i + \boldsymbol{\sigma}^i : \boldsymbol{\delta\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta\varepsilon} : \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} + T^i \delta s + \frac{1}{2} \frac{\delta s^2}{c - ML^2} - \frac{\delta s}{c - ML^2} (\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) : \boldsymbol{\delta\varepsilon} \quad (5.18)$$

En exprimant dans ces conditions (adiabatiques non-drainées) les variations de pression δp et de température δT en fonction des seules variables d'état $\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ et δs , on obtient:

$$\begin{cases} \delta p = -\frac{M}{c - ML^2} ((c\mathbf{b} - L\mathbf{k}) : \boldsymbol{\delta\varepsilon} + L \delta s) \\ \delta T = -\frac{1}{c - ML^2} ((\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) : \boldsymbol{\delta\varepsilon} - \delta s) \end{cases} \quad (5.19)$$

Il est remarquable de constater que cette expression de l'énergie interne est analogue à celle obtenue dans l'analyse thermoélastique effectuée dans le chapitre (2) (Eq. (2.52)) en adoptant les règles de correspondance suivantes:

- $\mathbb{C}^{ad} \rightarrow \mathbb{C}^{u,ad}$
- $\mathbf{k} \rightarrow (\mathbf{k} - ML\mathbf{b})$
- $c \rightarrow c - ML^2$

Variation de l'énergie interne du milieu sain à la suite d'une nucléation de fissure

On rappelle que, dans l'analyse de la nucléation de fissure que l'on propose, le domaine d'étude se décompose en une zone saine, le 'bulk' (Ω_{bulk}) et une zone fissurée ($\Omega_{\mathcal{F}}$). Cette décomposition établie dans le Chapitre 2 a montré que la variation d'énergie interne¹ qui intervient dans l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc} est celle du milieu sain (2.40). C'est précisément ce constat qui justifie la stratégie s'appuyant sur l'introduction des champs de perturbation définis dans le milieu sain pour caractériser le bilan d'énergie interne.

On rappelle que la zone saine est soumise à une évolution adiabatique réversible durant le processus de nucléation. Son évolution est donc isentropique ($\delta s = 0$). A partir

1. On verra dans la suite comment la variation d'énergie interne dans le domaine associé à la fissure qui nucléée intervient dans l'expression de l'énergie interne

de l'expression de la densité de l'énergie interne (5.18), on écrit donc la variation isentropique de la densité d'énergie interne du 'bulk' pendant la nucléation:

$$\delta u = u - u^i = \boldsymbol{\sigma}^i : \boldsymbol{\delta \varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta \varepsilon} : \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta \varepsilon} \quad (5.20)$$

Pour une fissure libre de contrainte, la variation de l'énergie potentielle entre l'état final fissuré et celui avant nucléation de fissure se résume uniquement à la variation de l'énergie interne puisque le travail des efforts extérieurs reste constant. Ce qui permet d'écrire l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental sous la forme:

$$\begin{aligned} G_{inc} &= -\frac{1}{\ell} \int_{\Omega_{bulk}} \delta u \, d\Omega \\ &= -\frac{1}{\ell} \int_{\Omega_{bulk}} \left(\boldsymbol{\sigma}^i : \boldsymbol{\delta \varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta \varepsilon} : \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.21)$$

Par ailleurs, la variation de la température et la variation de pression dans le milieu sain dans le processus de nucléation de fissure peuvent être exprimées en fonction de la perturbation de la déformation dans le milieu sain en fonction des propriétés thermoporoélastiques de ce dernier à partir des relations (5.19) dans le cas $\delta s = 0$. Ces champs perturbés sont définis dans un environnement proche de la fissure puisque la perturbation de déformation est évanescence loin de la fissure, et on écrit:

$$\begin{cases} \delta T^{bulk} &= -\frac{1}{c - ML^2} (\mathbf{k} - ML\mathbf{b}) : \boldsymbol{\delta \varepsilon} \\ \delta p^{bulk} &= -\frac{M}{c - ML^2} (c\mathbf{b} - L\mathbf{k}) : \boldsymbol{\delta \varepsilon} \end{cases} \quad (5.22)$$

Finalement il suffit de déterminer la perturbation de déformation suite à la nucléation qui est la solution du problème thermoporoélastique défini par les équations d'état (5.15), les conditions initiales ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^i, p = p^i, T = T^i$) et les conditions aux limites du problème, pour accéder au taux de restitution d'énergie incrémental donné en (5.21).

5.2.3 Variation de l'énergie interne dans la fissure

L'expression de la variation d'énergie interne à l'intérieur de la fissure de longueur ℓ correspond à l'énergie de création de nouvelle surface $U^{FD} = \ell G_c$. Le caractère adiabatique de la nucléation indique que la quantité de chaleur créée dans la fissure ne diffuse pas dans le reste du milieu ce qui engendre une élévation de la température qui peut contribuer à augmenter la pression du fluide. En parallèle, le caractère non-drainé de l'évolution hydrique est susceptible d'entraîner une baisse de la pression du fluide lorsque la fissure nucléée. Cette pression de fluide, si elle existe, joue un rôle déterminant sur le scénario de nucléation.

L'objectif de cette section est donc de proposer une détermination de cette élévation de température ainsi que la pression finale du fluide occupant le domaine fissuré à la fin du processus de nucléation. Dans la suite, on aborde en particulier cette question envisageant deux scénarios possibles pour la gestion de la pression du fluide dans la fissure nucléée.

Fissure sèche

Une première stratégie de modélisation consiste à supposer que la fissure nucléée est sèche, c'est-à-dire que la pression du fluide occupant l'espace poreux de la fissure avant nucléation y est nulle. On peut justifier ce choix en rappelant que la nucléation est un mécanisme brutal pour lequel on peut supposer que le fluide, saturant initialement le domaine poreux remplacé par la fissure, n'a pas le temps 'd'envahir' la fissure. C'est le point de vue défendu par Carlioz [10].

En reprenant le même raisonnement que celui effectué dans le cas thermoélastique avec une fissure qui n'est plus capable de reprendre les efforts mécaniques. On retrouve alors en combinant les équations d'états (5.15) à l'état final de la nucléation et à la liaison non drainée (5.11), l'expression de la densité de l'énergie interne (5.12) à l'intérieur de la fissure en fonction de la densité d'entropie créée, notée δs^{cr} :

$$u^{FD} = u^{\mathcal{F}} - u^i = -\frac{1}{2} \frac{c - ML^2}{Mc} (p^i)^2 + (cT^i + Lp^i) \frac{\delta s^{cr}}{c} + \frac{(\delta s^{cr})^2}{2c} \quad (5.23)$$

On remarque que cette relation est similaire à celle obtenue dans le cas thermoélastique (2.60) avec un terme résiduel qui introduit la pression initiale que l'on note $u^{res} = \frac{1}{2} \frac{c - ML^2}{Mc} (p^i)^2$. On rappelle que la variation d'énergie interne dans la fissure correspond à l'énergie dissipée par la nucléation (2.61) qui introduit l'information géométrique d'épaisseur de fissure notée ϵ . A partir de la relation qui relie la densité d'entropie créée à la variation de température dans la fissure, il est possible d'expliquer cette perturbation de température en fonction de la constante du matériau G_c et de l'épaisseur de la fissure sous la forme:

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{F}} &= T^i + \delta T^{\mathcal{F}} \\ &= \left(T^i + \frac{L}{c} p^i \right) \sqrt{1 + \frac{2c(G_c/\epsilon + u^{res})}{(cT^i + Lp^i)^2}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

On retrouve en particulier la même relation d'élévation de la température que celle obtenue dans le cas thermoélastique (2.63) lorsque la pression initiale du fluide est nulle.

Estimation numérique de l'élévation de température dans la fissure sèche

On considère un état initial avant nucléation caractérisé par une pression $p^i = 25$ MPa et une température $T^i = 0^\circ\text{C}$ (dans le cas d'une pressurisation). A titre d'illustration, on considère une argilite définie par les paramètres thermoporoélastiques suivants:

$$\begin{aligned} M &= 10 \text{ GPa} & ; & & L &= -1.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \\ c &= 10^3 \text{ J.K}^{-2} \cdot \text{m}^{-3} & ; & & G_c &= 50 \text{ Pa.m} \end{aligned}$$

Pour une épaisseur de la fissure de l'ordre de $\epsilon \simeq 10 \mu\text{m}$, l'élévation de la température est de $\delta T^{sec} = 17.8^\circ\text{C}$. Cette perturbation de température suite à la nucléation dans le cas d'un milieu poreux saturé ne diffère pas de l'élévation de température pour un milieu thermoélastique sec.

Conclusion Une fissure nucléée sèche suppose que la phase fluide du milieu poreux ne joue pas de rôle significatif dans la nucléation, comme proposé dans le travail de

T. Carlioz [10]. Dans ce cas, le taux de restitution d'énergie incrémental s'obtient à partir du tenseur d'élasticité adiabatique non-drainé (5.21). On retrouve aussi que l'élévation de la température suite à la nucléation est proche de celle obtenue dans le cas thermoélastique sec.

Fissure saturée

On considère à présent que la fissure nucléée est saturée par le fluide qui existait dans la zone fissurée avant nucléation. Ce fluide est sous pression finale² $p^{\mathcal{F}}$ non nulle. L'état de contrainte à l'intérieur de la fissure après nucléation est donc caractérisé par la pression du fluide appliquée et se met sous la forme:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{F}} = -p^{\mathcal{F}} \boldsymbol{\delta} \quad (5.25)$$

Taux de restitution d'énergie incrémental

A partir de l'expression de l'énergie interne du milieu sain (5.20) à laquelle on retranche le travail du chargement appliqué par le fluide sur la fissure, l'expression du taux de restitution d'énergie incrémental devient:

$$G_{inc} = -\frac{1}{\ell} \int_{\Omega_{bulk}} \left((\boldsymbol{\sigma}^i + p^{\mathcal{F}} \boldsymbol{\delta}) : \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} \right) d\Omega \quad (5.26)$$

La pression finale du fluide à l'intérieur de la fissure joue un rôle similaire à celui de l'état de contrainte initial. Elle contribue à la mesure du G_{inc} sous la forme d'un travail virtuel dans la cinématique associée au champ de déformation perturbé $\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon}$. L'ouverture d'une fissure en mode I élargit le volume alloué au fluide à l'intérieur de la fissure, ce qui a tendance à diminuer la pression finale du fluide $p^{\mathcal{F}}$ par rapport à la pression initiale p^i . Néanmoins cette pression reste une inconnue du problème qu'il convient de déterminer.

2. C'est-à-dire la pression du fluide saturant la fissure nucléée

Densité d'énergie interne de la fissure

On rappelle l'expression de la densité volumique lagrangienne de l'énergie interne du fluide faisant intervenir la variation de pression, de température et de densité volumique lagrangienne d'entropie:

$$u_f = u_f^i + T^i(s_f - s_0) - p^i(\phi - \phi_0) + \frac{1}{2}(T - T^i)(s_f - s_0) - \frac{1}{2}(p - p^i)(\phi - \phi_0) \quad (5.27)$$

L'équation d'état du fluide associée à une évolution non-drainée (5.9) pendant la nucléation permet de relier la variation de la pression à la variation de la porosité lagrangienne et à la perturbation de température $\delta T^{\mathcal{F}}$ suivant la relation:

$$\delta p^{\mathcal{F}} = -K_f \left(\frac{\phi - \phi^0}{\phi^0} - 3\alpha_f \delta T^{\mathcal{F}} \right) \quad (5.28)$$

En se référant au comportement thermoporoélastique tangent de la zone fissurée avant nucléation (5.10), il est possible de relier la perturbation de pression à la perturbation de déformation $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}}$ et de température $\delta T^{\mathcal{F}}$:

$$\delta p^{\mathcal{F}} = -M(\mathbf{b} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} + L \delta T^{\mathcal{F}}) \quad (5.29)$$

En plus de l'équation d'état exprimant la densité volumique lagrangienne d'entropie (5.11) à l'état ultime où le tenseur de contraintes thermiques est nul, on obtient la densité volumique lagrangienne d'entropie créée:

$$\delta s^{cr} = c \delta T^{\mathcal{F}} + L \delta p^{\mathcal{F}} \quad (5.30)$$

Il est donc possible de réécrire la densité d'énergie interne de fissuration (5.12) sous la forme:

$$u^{FD} = u^{\mathcal{F}} - u^i = \frac{1}{2} \frac{c - ML^2}{Mc} \delta p^{\mathcal{F}} (p^i + p^{\mathcal{F}}) + (cT^i + Lp^i) \frac{\delta s^{cr}}{c} + \frac{(\delta s^{cr})^2}{2c} \quad (5.31)$$

où on rappelle que $p^{\mathcal{F}} = p^i + \delta p^{\mathcal{F}}$ est la pression finale dans la fissure.

L'expression (5.31) de la densité volumique d'énergie interne dans la fissure formulée à partir de la densité volumique d'entropie créée, correspond à la densité d'énergie dissipée lors de la nucléation. On remarque effectivement qu'il est possible de retrouver l'expression exacte de la même quantité d'énergie pour une fissure à l'état sec dans un milieu poreux saturé lorsque la pression finale du fluide dans la fissure est nulle (5.23), ou encore celle d'une nucléation dans un milieu sec dont le comportement est thermoélastique (2.60).

On retrouve également dans (5.31) des termes résiduels liés à la pression du fluide avant nucléation p^i et à la pression finale du fluide saturant la fissure $p^{\mathcal{F}}$ qui demeure une inconnue du problème.

Lorsque la fissure de longueur ℓ nucléée dans un domaine dont la taille caractéristique est grande devant ℓ , on peut supposer le domaine sain entourant la fissure comme infini. Dans ce cas, en adoptant une représentation morphologique ellipsoïdale pour la fissure (A.2), on peut tirer partie de la solution du problème de l'hétérogénéité d'Eshelby [25] pour fournir une relation supplémentaire entre la déformation uniforme à l'intérieur de la fissure et la pression du fluide saturant la fissure.

Problème inclusionnaire d'Eshelby

On considère une fissure (\mathcal{F}) ellipsoïdale de type 'oblate sphéroïde' de diamètre ℓ et d'ouverture ϵ telle que le rapport d'aspect $X = \frac{\epsilon}{\ell} \ll 1$. Elle est plongée dans un domaine infini (\mathbb{R}^3) dont le comportement est celui du milieu poreux sain. En particulier, la taille caractéristique de l'espace poreux de ce dernier est au moins d'un ordre de grandeur inférieur à la taille caractéristique de la fissure.

Le comportement du domaine infini, avant perturbation, est caractérisé par le couple $(\boldsymbol{\sigma}^i, \boldsymbol{\varepsilon}^i)$ qui correspond à un chargement en déplacement à l'infini de la forme:

$$\underline{\underline{\xi}} \xrightarrow{\infty} \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \underline{\underline{z}}$$

En introduisant la perturbation de déplacement après nucléation $\underline{\underline{\delta\xi}} = \underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}^i$, le déplacement prescrit à l'infini impose que la perturbation de déplacement $\underline{\underline{\delta\xi}} \rightarrow 0$

lorsque $\mathbf{z} \rightarrow \infty$. La fissure (\mathcal{F}) contient un fluide à la pression uniforme $p^{\mathcal{F}}$, le champ de contrainte hétérogène s'écrit:

$$\begin{cases} (\mathcal{F}) : & \boldsymbol{\sigma} = -p^{\mathcal{F}} \boldsymbol{\delta} \\ (\mathbb{R}^3/\mathcal{F}) : & \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (5.32)$$

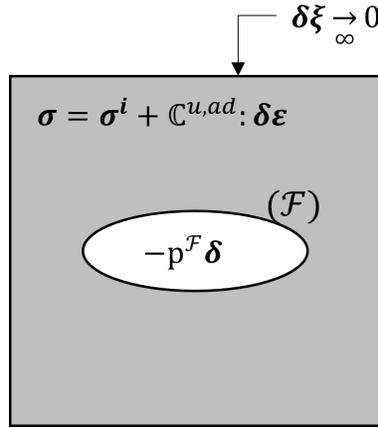


FIGURE 5-1 – Problème d'Eshelby post-nucléation en conditions adiabatique et non-drainée

L'expression de la perturbation de déformation dans la fissure solution du problème d'Eshelby généralisé (Annexe B) est donnée par:

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} = (\mathbb{I} - \mathbb{P}^{u,ad} : \mathbb{C}^{u,ad})^{-1} : \mathbb{P}^{u,ad} : (\boldsymbol{\sigma}^i + p^{\mathcal{F}} \boldsymbol{\delta}) \quad (5.33)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre 4 et $\mathbb{P}^{u,ad}$ le tenseur de Hill d'une fissure ellipsoïdale plongée dans une matrice d'élasticité $\mathbb{C}^{u,ad}$.

En combinant (5.33) avec l'expression de la perturbation de pression à l'intérieur de la fissure donnée dans (5.28) et de la variation de l'entropie (5.30) on peut exprimer la perturbation de déformation en fonction de la seule entropie créée.

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} = \mathbb{T} : (\boldsymbol{\sigma}^i + p^i \boldsymbol{\delta}) - (\mathbb{T} : \boldsymbol{\delta}) \frac{ML}{c - ML^2} \delta s^{cr} \quad (5.34)$$

où on introduit le tenseur \mathbb{T} défini par:

$$\mathbb{T} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{P}^{u,ad} : \left(\mathbb{C}^{dr,\theta} + \frac{1}{c - ML^2} \mathbf{k} \otimes (\mathbf{k} - 2ML\mathbf{b}) \right) \right)^{-1} : \mathbb{P}^{u,ad} \quad (5.35)$$

Sous l'hypothèse d'un milieu poreux thermoélastique isotrope dont la matrice solide peut être supposée rigide, le tenseur des coefficients de Biot vérifie $\mathbf{b} = \boldsymbol{\delta}$. Le tenseur \mathbb{T} pour un ellipsoïde infiniment aplati ($X \rightarrow 0$) au premier ordre en X vérifie:

$$\mathbb{T}_{3333} = \frac{c - ML^2}{Mc} + O(X) \quad ; \quad \mathbb{T}_{33ii} = O(X) \quad (i = 1, 2) \quad (5.36)$$

L'expression de la perturbation de déformation à l'intérieur de la fissure s'écrit dans ce cas:

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} = \left(\frac{c - ML^2}{Mc} (\sigma_{33}^i + p^i) - \frac{L}{c} \delta s^{cr} \right) (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + O(X) \quad (5.37)$$

Pour les hypothèses retenues, (5.37) permet finalement de déduire les perturbations de pression (5.29) et de température (5.30) suivantes:

$$\begin{cases} \delta T^{\mathcal{F}} = \frac{L}{c} (\sigma_{33}^i + p^i) + \frac{\delta s^{cr}}{c} + O(X) \\ p^{\mathcal{F}} = -\sigma_{33}^i + O(X) \end{cases} \quad (5.38)$$

On constate que la température à l'intérieur de la fissure dépend premièrement de l'entropie créée suite au processus de nucléation, que l'on retrouve dans la relation (2.58) du cas thermoélastique, à laquelle s'ajoute la contribution de la contrainte effective de Terzaghi du milieu avant nucléation.

Cependant la pression du fluide à l'intérieur de la fissure ne dépend pas du processus de nucléation à l'ordre $O(X^0)$ puisque celle-ci ne dépend pas de l'entropie créée mais uniquement de la contrainte initiale avant nucléation. En d'autres termes, la perturbation de la pression du fluide suite à la nucléation est égale à l'opposée de la contrainte effective $\delta p^{\mathcal{F}} = -(\sigma_{33}^i + p^i)$. Ce qui explique la dépendance de la tempé-

rature finale à l'intérieur de la fissure à la contrainte effective de Terzaghi qui n'est autre que la perturbation de pression $\delta p^{\mathcal{F}}$.

Si l'on se limite à la nucléation de fissure en mode I, l'état de contrainte effective avant nucléation en traction dans la direction normale au plan de la fissure induit une chute de pression dans la fissure ainsi qu'une élévation supplémentaire de température. Ce résultat pour le moins surprenant, milite pour une analyse plus fine de l'évolution de la pression du fluide au cours du processus de nucléation.

Discussion Revenons dans un premier temps sur l'expression du fluide dans la fissure donnée en (5.38). Pour interpréter ce résultat, il est instructif de s'intéresser à l'expression de la perturbation de la déformation à l'intérieur de la fissure donnée en (5.33) qui s'annule au premier ordre de X . Ce résultat, similaire à celui retrouvé dans [23] en négligeant les effets thermiques, est contradictoire avec le mécanisme de nucléation de fissure. En l'absence d'une variation de l'énergie interne par rapport à l'état initial, le phénomène de nucléation, évalué à partir d'un équilibre entre l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces et l'énergie disponible, ne peut pas avoir lieu. De plus dans [23], les auteurs affirment qu'un taux de restitution d'énergie suffisant pour nucléer une fissure doit être associé à une perturbation de la déformation à l'intérieur de la fissure de l'ordre de $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} = O\left(\frac{1}{X}\right)$.

Ce résultat jette le trouble sur une représentation de la fissure nucléée par une fissure saturée par un fluide sous pression en équilibre thermodynamique avec le fluide saturant le milieu poreux sain. Pour un scénario de nucléation de fissure en mode I, l'état de contrainte avant nucléation est considéré en traction $\sigma_{33}^i > 0$. D'après (5.38), si la fissure nucléée (c'est-à-dire la configuration finale du processus de nucléation) est saturée par le fluide à la pression $p^{\mathcal{F}}$, celle-ci est négative ce qui n'est pas physiquement admissible en conditions saturées. Cette configuration ne peut donc pas être atteinte. Ce constat milite pour une analyse plus précise du scénario de nucléation de fissure dans laquelle on retient une définition des efforts intérieurs de la forme $\boldsymbol{\sigma}^{\mathcal{F}} = -p^{\mathcal{F}} \boldsymbol{\delta}$. On s'appuie pour cela sur le diagramme de l'eau présenté sur la figure (5-2). En effet une évaporation du fluide est censée avoir lieu à pression de cavitation ($p_v \simeq 3.2 \text{ kPa}$

à 25°C). Par conséquent, la gestion de la pression fluide à l'intérieur de la fissure ne peut se faire indépendamment d'une analyse de l'évolution du système dans lequel elle agit, notamment avec l'aspect du changement de phase.

Une modélisation de ce mécanisme de fissuration par théorie d'endommagement a été

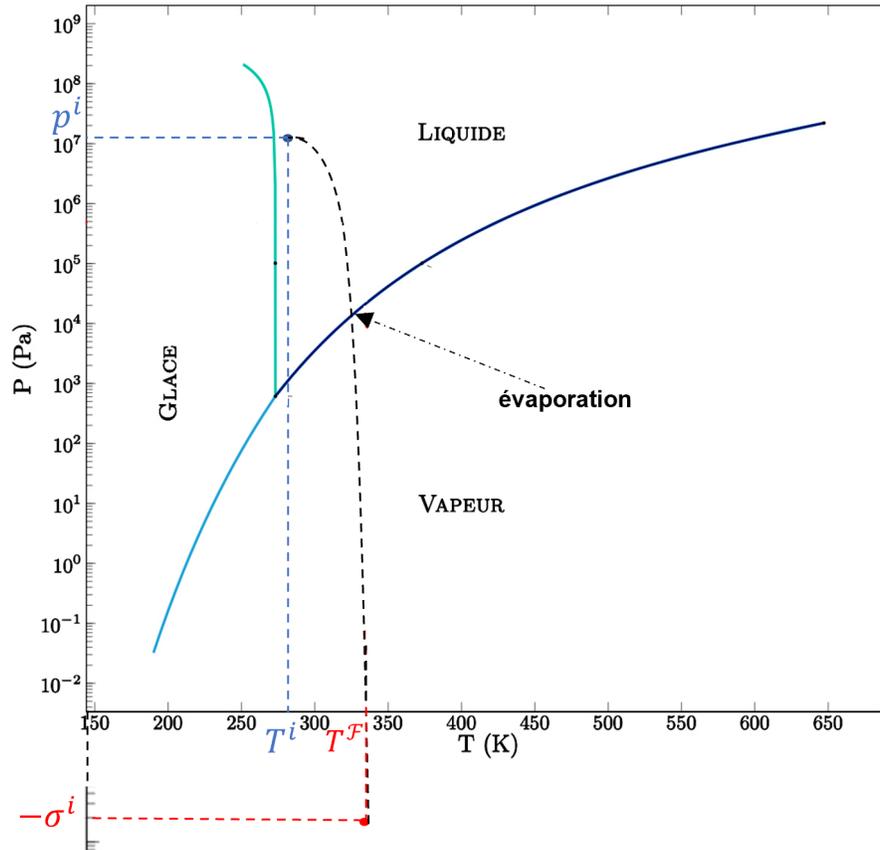


FIGURE 5-2 – Évolutions du fluide à l'intérieur de la fissure dans le diagramme de changement de phase de l'eau

proposée dans [23] pour suivre l'évolution du système pendant la nucléation. Cette modélisation montre que la présence d'une phase fluide saturée dans le volume de la fissure, représentée par son module de biot M , contrôle la stabilité de l'endommagement. Si celui-ci est inférieur à un seuil critique $M < M_{cr}$, la forte compressibilité du fluide conduit à une instabilité de l'endommagement similaire au cas sec. Par contre si $M > M_{cr}$: le processus d'endommagement est stable tant que la pression n'a pas atteint la pression de cavitation. L'évaporation survient alors à l'instant où la pression du fluide atteint cette pression de cavitation, ce qui conduit à une chute de la rigidité

du fluide qui devient plus compressible. A ce moment, le rôle du fluide devient négligeable et le mécanisme d'endommagement devient instable. On peut conclure que la présence d'un fluide saturant la fissure avec une compressibilité suffisamment faible retarde la rupture fragile du milieu. Par la suite lorsque la pression fluide atteint la pression de cavitation, un changement de phase ramène l'étude de la nucléation à celle d'un cas sec où aucune pression fluide n'agit sur la fissure.

Le scénario d'une fissure saturée apporte un éclairage sur la gestion du fluide qui occupait initialement (avant nucléation) l'espace poreux dans lequel la fissure se forme. Sa compressibilité peut retarder la nucléation mais la fissure est bien sèche dans son état nucléé stable. La proposition de T. Carlioz [10] reste alors valable si l'on suppose que la fissure est instantanément saturée par le fluide.

En dehors des situations de très faible compressibilité du fluide ($M > M_{cr}$), le rôle mécanique du fluide est donc négligeable si l'on prend en compte sa vaporisation pour $p = p_v$. Cependant, du point de vue thermodynamique, le changement de phase liquide \rightarrow vapeur est caractérisé par un coût énergétique significatif qu'il convient d'intégrer dans l'analyse du processus de nucléation considérant la fissure (provisoirement) saturée par le fluide.

Variation de l'énergie interne avec changement de phase

La gestion de la cavitation du fluide saturant la fissure lors de la nucléation a été abordée dans le paragraphe précédent du côté de l'évolution de la pression du fluide. On souhaite à présent poser le début d'une réflexion portant sur le bilan d'énergie dans la fissure en lien avec l'évaporation du fluide dans la fissure au moment où sa pression atteint la pression de cavitation.

Ce changement d'état liquide \rightarrow vapeur se présente comme un transfert thermique réversible du système lors du passage de la masse du fluide de l'état liquide à l'état vapeur. Cette quantité de chaleur se traduit par une enthalpie massique de changement d'état ou chaleur latente de vaporisation ℓ_v qui est fonction de la température et s'exprime en $J.kg^{-1}$.

$$Q_v = m \Delta H_{\ell \rightarrow v}(T) = m \ell_v \quad (5.39)$$

où m correspond à la masse du liquide $m = \rho_f^0 \phi^0 V_0$ dans la configuration de référence définie par la température T .

De même, la variation d'entropie associée au changement de phase est reliée à la quantité de chaleur échangée par la relation:

$$\Delta S = \frac{Q_v}{T} \quad (5.40)$$

Le bilan entropique de la nucléation correspond alors à l'entropie de création de nouvelles surfaces δs^{cr} et de l'entropie de changement de phase (5.40) fonction de la chaleur latente de vaporisation, définie dans (5.39), et de la température T à l'instant du changement d'état, et on écrit:

$$\delta s^{\mathcal{F}} = \delta s^{cr} + \rho_f^0 \phi^0 \frac{\ell_v}{T} \quad (5.41)$$

Le lien entre la variation de densité volumique d'énergie interne $\delta u^{\mathcal{F}}$ et la variation d'entropie $\delta s^{\mathcal{F}}$ à l'intérieur de la fissure est donné par la relation (5.23), et s'écrit sous la forme:

$$\delta u^{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2} \frac{c - ML^2}{Mc} (p^i)^2 + (cT^i + Lp^i) \frac{\delta s^{\mathcal{F}}}{c} + \frac{(\delta s^{\mathcal{F}})^2}{2c} \quad (5.42)$$

Finalement, cette densité d'énergie interne se réécrit, dans le cas d'un changement d'état, en fonction de la variation de la densité volumique d'énergie interne de création de nouvelles surfaces pour une fissure sèche $u^{FD}(\delta s^{cr})$ donnée par la relation (5.23) et la densité d'énergie interne relative au changement de phase caractérisé par la chaleur latente de vaporisation, et on écrit:

$$u^{FD} = u_{sec}^{FD}(\delta s^{cr}) + u^{vap} \quad (5.43)$$

où u^{vap} est la densité volumique d'énergie interne de l'évaporation définie par:

$$u^{vap} = \rho_f^0 \phi^0 \frac{\ell_v}{T} \left(T^i + \frac{L}{c} p^i + \frac{1}{2c} \rho_f^0 \phi^0 \frac{\ell_v}{T} + \frac{\delta s^{cr}}{c} \right)$$

La prise en compte d'un changement de phase liquide \rightarrow vapeur dans le processus de nucléation de fissure modifie donc l'expression de l'énergie interne dans la fissure. Par rapport au cas sec, celle-ci est augmentée d'un terme en fonction de la chaleur latente de vaporisation. Ce résultat suggère donc une nouvelle définition de l'énergie critique, notée G_c^* , telle que:

$$G_c^* = G_c + \epsilon u^{vap} > G_c \quad (5.44)$$

où G_c est l'énergie critique usuelle ($G_c = \epsilon u^{FD}$). On obtient ainsi une énergie critique $G_c^* > G_c$, ce qui signifie que l'énergie apportée au système est partiellement consommée par le changement de phase liquide \rightarrow vapeur lors de la nucléation d'une fissure. Cette proposition suggère donc que la nucléation d'une fissure dans un milieu poreux se produit pour un niveau de chargement plus important si celui-ci est saturé par un fluide par rapport au cas sec.

On rappelle que la chaleur latente de vaporisation est une fonction de la température, pour une température $T = 24^\circ C$ on a $\ell_v = 2545.64 \text{ KJ.kg}^{-1}$. En utilisant les paramètres thermoporoélastiques d'une argilite donnée dans la section (5.2.3) avec une porosité de l'ordre de $\phi_0 = 0.16$, l'évaporation partielle de 1% de la fraction massique de l'eau liquide présente dans la fissure, d'épaisseur $\epsilon \simeq 10 \mu m$, est associée à une consommation d'énergie de l'ordre de 40 Pa.m. Il s'agit donc d'une contribution tout à fait comparable à la constante matériau de l'argilite $G_c \sim 50 \text{ Pa.m}$, dont la pertinence reste à évaluer dans le cadre d'essais dédiés. En conclusion, la présence d'une phase fluide saturant le volume où la fissure va nucléer n'intervient pas sur l'état final de la nucléation puisqu'une partie de ce fluide s'évapore pendant le processus. Il est raisonnable alors de représenter la fissure nucléée comme une fissure sèche. L'analyse thermodynamique du processus d'évaporation du liquide dans le mé-

canisme de nucléation semble jouer un rôle plus déterminant puisqu’il consomme une partie de l’énergie disponible pour la nucléation. Elle conduit à la définition d’une énergie critique $G_c^* > G_c$.

5.3 Conclusions

Le caractère brutal de la nucléation de fissures dans un milieu poreux saturé permet de supposer en plus d’une évolution adiabatique, une évolution non-drainée de la phase fluide. En effet, il est raisonnable de considérer que le temps caractéristique du transport de fluide est grand devant le temps de nucléation, en particulier pour les milieux poreux peu perméables. Dans le cadre d’un comportement thermoporoélastique réversible, cette considération nous permet de ramener l’évaluation de l’énergie interne élastique à son expression dans le cas sec en considérant le tenseur d’élasticité adiabatique non-drainé (5.20).

Une attention particulière a été portée à la représentation de la fissure et des conséquences de cette représentation sur l’évaluation de la nucléation. Dans un premier temps nous avons considéré une fissure nucléée sèche libre de contrainte. L’évaluation de la nucléation à l’aide du double critère énergétique dans ce cas est similaire au cas thermoélastique où le taux de restitution d’énergie incrémental est égal au rapport entre la variation de l’énergie interne du milieu et la taille de la fissure (5.21).

La deuxième représentation consiste à supposer que la fissure nucléée est saturée par le fluide, à la pression $p^{\mathcal{F}}$ (> 0), qui saturait l’espace poreux avant nucléation (à la pression p^i). L’estimation de cette pression dans l’état final a été approchée par la solution du problème inclusionnaire d’Eshelby pour une fissure ellipsoïdale aplatie. Ce raisonnement conduit à une variation nulle de l’énergie potentielle entre l’état initial et celui perturbé, qui traduit l’absence de nucléation de fissure, puisque l’état de contrainte dans la fissure est identique à celui défini dans la configuration de référence. Dit autrement, la fissure nucléée dans son état final ne peut pas être saturée par le fluide à la pression $p^{\mathcal{F}}$. Ce résultat surprenant trouve son explication dans l’analyse

fine de l'évolution du fluide au cours du processus de nucléation. On a montré que la chute de pression dans la fissure associée à la nucléation entraîne l'évaporation du fluide lorsqu'on atteint la pression de cavitation, ce qui nous ramène finalement à une représentation d'une fissure sèche. Du point de vue énergétique, le changement d'état qui se produit est accompagné d'une consommation d'une partie de l'énergie interne ce qui milite pour un retard du processus de nucléation par rapport au cas sec. A partir du nouveau bilan énergétique, la condition d'initiation de la fissure introduit une énergie de création de fissure G_c^* caractérisée par la constante matériau G_c et l'énergie de vaporisation caractérisée par la chaleur latente de vaporisation ℓ_v . Cette proposition se présente comme un complément aux réflexions présentées dans [23] sur la gestion thermodynamique du fluide au cours de la nucléation vers un état final où la fissure peut être interprétée comme une fissure sèche. L'analyse mérite encore d'être approfondie, notamment pour clarifier un certain nombre de point tels que la fraction de fluide évaporée, la température de changement d'état et la température finale... Il serait intéressant, à ce titre, de pouvoir tester cette conclusion sur des essais standards de type flexion 3 points sur des éprouvettes de milieu poreux sèches et saturées.

En l'absence de données précises, on suppose dans la suite qu'une fissure nucléée est sèche et on laisse de côté le temps de l'analyse proposée la prise en compte de l'évaporation dans le bilan thermodynamique de sorte que le critère de nucléation s'exprime bien sur l'énergie critique G_c du matériau étudié. On gardera toutefois à l'esprit que la prise en compte de l'évaporation dans le bilan énergétique conduit simplement à exprimer le critère sur $G_c^*(> G_c)$. Cette stratégie se place du côté de la sécurité.

Chapitre 6

Nucléation de fissure dans un contexte thermo-hydro-mécanique

Contents

6.1	Introduction	171
6.2	Couplages Thermo-hydro-mécaniques en milieu poreux	172
6.2.1	Équations constitutives des transferts	172
6.2.2	Analyse temporelle des phénomènes de diffusion dans les argilites	174
6.3	Modélisation à long terme du problème de stockage de déchets radioactifs	175
6.3.1	Architecture du stockage	176
6.3.2	État de référence et paramètres thermoporomécaniques	179
6.4	Analyse thermique du champ proche	180
6.4.1	Sollicitations thermiques des déchets	180
6.4.2	Évolution de la température dans l'argilite	182
6.5	Comportement thermo-poro-mécanique du stockage à long terme	187
6.5.1	Un modèle analytique simplifié	188

6.5.2	Modélisation numérique	198
6.6	Nucléation de fissure dans la zone de stockage	204
6.6.1	modélisation de la fissuration	204
6.7	Conclusions	210

6.1 Introduction

On propose dans ce chapitre une application de la stratégie d'analyse de la nucléation de fissure en présence de couplages thermo-poroélastiques susceptibles d'être observée dans le cadre du projet de stockage des déchets radioactifs à Bure (Projet ANDRA/CIGEO). En particulier, on s'intéresse à la possibilité d'une nucléation de fissure en mode I dans le domaine géométrique délimité par 2 alvéoles de stockage pendant la phase d'exploitation. Parmi les phénomènes agissant durant cette phase du stockage, on souligne la dominance des sollicitations thermiques liées aux dégagements de chaleur issus des déchets exothermiques. Contrairement à l'étude conduite dans le chapitre 4 pour la nucléation de fissure lors une chute de température ($\Delta T < 0$), on s'intéresse ici à un chargement thermique défini par une augmentation de la température ($\Delta T > 0$). En l'absence de couplage poromécanique, on pourrait d'emblée conclure à l'absence de nucléation de fissure d'origine thermique pour un matériau homogène, de surcroît dans un état de compression initiale. C'est précisément ce couplage qui permet d'envisager une nucléation de fissure puisque les dilatations thermiques différentielles entre les phases solide et liquide génèrent une pressurisation thermique du fluide susceptible de réaliser les conditions nécessaires pour la nucléation de fissure. Le présent chapitre sera conduit dans ce cadre d'analyse. On cherchera dans la suite à prendre position sur la possibilité d'une nucléation de fissure selon que l'on adopte un critère en contrainte totale ou en contrainte effective. L'objectif de cette partie est donc d'évaluer les risques de nucléation de fissure dans le but de se positionner sur la définition d'une charge thermique limite ou encore sur l'espacement minimal entre les colis pour assurer une stabilité de la roche au sens du double critère énergétique.

6.2 Couplages Thermo-hydro-mécaniques en milieu poreux

6.2.1 Équations constitutives des transferts

Les couplages et interactions des phénomènes de transfert constituent un aspect important pour l'étude du comportement des milieux géologiques à long terme. Les phénomènes de transfert majeurs étudiés dans cette partie sont les phénomènes de transferts thermo-hydrauliques régis par les lois de diffusions macroscopiques, en conditions isotropes, suivantes:

- Loi de Darcy pour l'écoulement fluide, reliant le débit volumique du fluide \underline{q}_H [$m.s^{-1}$] au gradient de pression:

$$\underline{q}_H = -\frac{\lambda_H}{\mu} \underline{\text{grad}} p$$

où λ_H : perméabilité intrinsèque (m^2)

μ viscosité dynamique ($Pa.s$)

- Loi de Fourier pour la diffusion de chaleur, reliant la densité de flux de chaleur \underline{q}_T [$W.m^{-2}$] au gradient de température:

$$\underline{q}_T = -\lambda_T \underline{\text{grad}} T$$

(λ_T : conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$)

Dans le cadre d'un couplage thermo-hydro-mécanique, les équations de conservation de ces transferts sont couplées et se mettent sous les formes généralisées (6.1), (6.2) et (6.3) précisées dans le cadre de la mécanique des milieux poreux [18] qui font intervenir les dérivées temporelles des variables d'état du système (ϵ, p, T):

- Hydraulique:

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + l_s \frac{\partial T}{\partial t} + b \frac{\partial(\text{tr } \epsilon)}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\lambda_H}{\mu} \underline{\text{grad}} p \right) \quad (6.1)$$

où:

M : Module de Biot (Pa)

l_s : coefficient de couplage pression température (K^{-1})

b : coefficient de biot

— Thermique:

$$l_s T_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + 3\alpha_0 K_0 T_0 \frac{\partial \text{tr}(\varepsilon)}{\partial t} = \text{div}(\lambda_T \underline{\underline{\text{grad}}} T) + Q_T \quad (6.2)$$

où:

ρc : capacité calorifique ($J.m^{-3}.K^{-1}$)

α_0 : coefficient de dilatation thermique drainé (K^{-1})

K_0 : module de compression drainé du milieu poreux (Pa)

Q_T : puissance thermique produite (W)

— Équilibre mécanique:

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \quad (6.3)$$

En thermo-poro-élasticité:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \mathbf{C}^{dr,\theta} : \underline{\varepsilon} - \mathbf{b}(p - p_0) - \boldsymbol{\kappa}(T - T_0) \quad (6.4)$$

en conditions adiabatiques non-drainées:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \mathbf{C}^{u,ad} : \underline{\varepsilon} \quad (6.5)$$

où:

$\underline{\sigma}_0$: contrainte initiale (Pa)

T_0 : température initiale (K)

p_0 : pression initiale (Pa)

$\mathbf{C}^{dr,\theta}$: tenseur d'élasticité isotherme drainé

$\mathbf{C}^{u,ad}$: tenseur d'élasticité adiabatique non-drainé défini en (5.16)

$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}$: tenseur des coefficients de dilatation thermiques linéiques.

On montre qu'il est possible de réduire l'équation de conservation thermique (6.2) dans le cas de géomatériaux et milieux géologiques à une équation découplée puisque

les termes traduisant le couplage mécanique ($3\alpha_0 K_0 \text{tr}(\varepsilon) \simeq 10^{-1} J.m^{-3}.K^{-1}$) et hydraulique ($l_s p_0 \simeq 1 J.m^{-3}.K^{-1}$) sont négligeables par rapport à la capacité calorifique des roches [33] qui est de l'ordre de ($\rho c \simeq 10^6 J.m^{-3}K^{-1}$).

Le transfert thermique est dans ce cas découplé du comportement hydromécanique et peut être traité de manière séparée de façon à déterminer le champ de température. En revanche, le transfert hydraulique et le comportement mécanique peuvent être entièrement couplés.

6.2.2 Analyse temporelle des phénomènes de diffusion dans les argilites

L'équation de conduction de chaleur découplée se met sous la forme suivante:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \Delta T + Q(t) \quad (6.6)$$

On considère dans la suite les ordres de grandeurs suivants pour les caractéristiques thermiques de l'argilite du Callovo-Oxfordien [24] :

ρC : capacité calorifique ($\simeq 2.3 \cdot 10^6 Jm^{-3}K^{-1}$)

λ_T : conductivité thermique ($\simeq 1.9 - 2.7 Wm^{-1}K^{-1}$)

$\kappa_T = \frac{\lambda_T}{\rho C}$: diffusivité thermique

Le temps caractéristique thermique τ_T dépend de la diffusivité thermique κ_T et de la taille du système notée d :

$$\tau_T = \frac{d^2}{\kappa_T} = \frac{d^2}{\lambda_T/\rho C}$$

Le temps caractéristique τ_H de la diffusion hydraulique (6.1) dépend de la perméabilité intrinsèque λ_H , la viscosité μ et du module de Biot M selon la relation:

$$\tau_H = \frac{d^2}{\kappa_H} = \frac{d^2}{\lambda_H/\mu} \frac{1}{M}$$

Pour une argilite saine, on donne les valeurs numériques suivante [24]:

$$\lambda_H \simeq 5 \cdot 10^{-20} - 5 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2 \quad ; \quad \mu \simeq 10^{-3} \text{ Pa.s} \quad ; \quad M \simeq 5500 \text{ MPa}$$

Le rapport entre les deux temps caractéristiques hydraulique et thermique τ_H/τ_T permet d'envisager une chronologie entre les deux phénomènes de diffusion. En supposant un état de la roche non endommagé, où la perméabilité hydraulique intrinsèque est de l'ordre de 10^{-21} m^2 , le temps caractéristique des phénomènes hydrauliques est supérieur au temps caractéristique des phénomènes thermiques.

$$\frac{\tau_H}{\tau_T} = \frac{10^{-19}}{\lambda_H} \simeq 10^2$$

Cette considération peut être traduite par le fait que l'évolution de la phase fluide pendant la diffusion thermique est non-drainée. Cependant si on prend en considération l'état endommagé de la roche à proximité des parois des alvéoles (EDZ) avant son colmatage, la perméabilité hydraulique est nettement plus grande (~ 5 à 6 ordres de grandeur). Dans ce cas le rapport entre les temps caractéristiques $\frac{\tau_H}{\tau_T}$ ne permet plus de se placer dans un cadre d'évolution non-drainée, et que la ressaturation progressive de la zone proche des alvéoles se fait en même temps que la diffusion thermique.

6.3 Modélisation à long terme du problème de stockage de déchets radioactifs

On se place à présent plus particulièrement dans le contexte du stockage des déchets radioactifs dont la gestion scientifique a été confiée à l'ANDRA. On cherche à traiter en particulier la problématique du risque de nucléation de fissures dans l'argilite du Callovo-Oxfordien après dépôts et fermeture des alvéoles de stockage (Figure 1-3). En effet le stockage de déchets radioactifs à haute activité (particulièrement exothermiques) produit des élévations de températures conséquentes dans le massif de stockage (de l'ordre de 100°C). Le couplage entre le gradient de température et

le comportement hydromécanique de la roche légitimise la question de la potentielle nucléation de fissures en traction.

On propose tout d'abord de modéliser les phénomènes de couplage THM dans le massif pendant la période d'émission thermique dans le but de dégager des zones susceptibles de se mettre en traction. On pourra par la suite étudier, à partir du double critère énergétique, la possibilité de nucléation de fissure d'origine thermique.

6.3.1 Architecture du stockage

La disposition des zones de stockage de déchets à haute activité retenue par l'ANDRA est sous forme d'un maillage rectangulaire orienté parallèlement à la contrainte horizontale majeure (Figure 6-1). L'espacement entre deux alvéoles a été déterminé suivant un dimensionnement thermique de manière à ce que deux alvéoles de 12 mètres de diamètre soient séparées d'une distance égale à au moins 5 fois le diamètre [24].

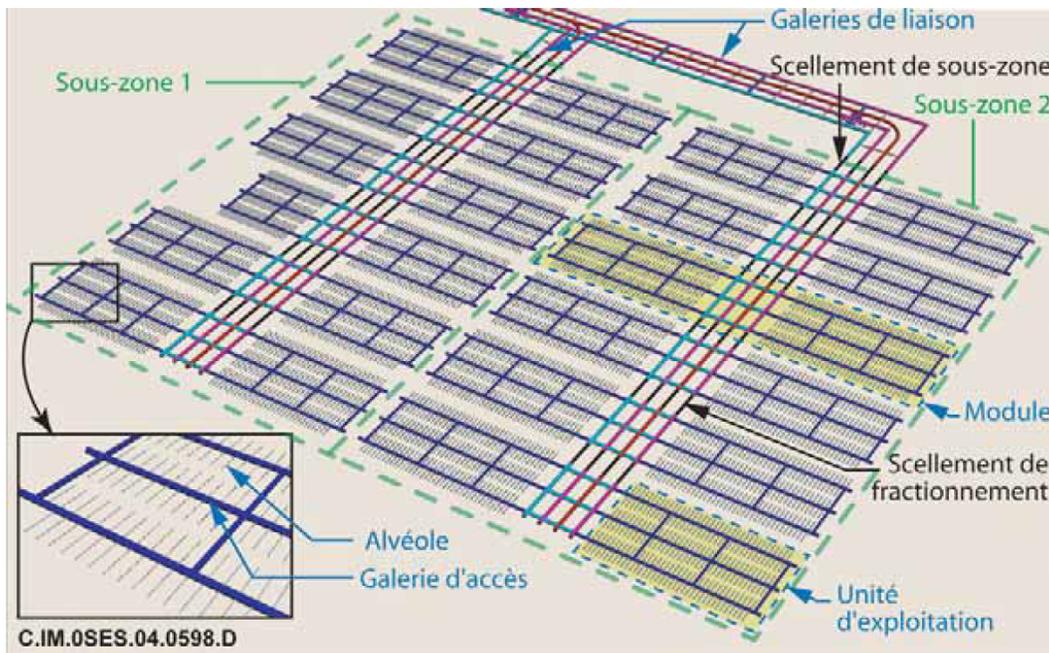


FIGURE 6-1 – Organisation de la zone de stockage C [24]

A partir de cette architecture, il existe deux approches complémentaires de modélisation du stockage.

Approche globale

Une première approche dite globale visant à étudier le stockage dans son ensemble à partir de l'analyse du champ lointain. En effet, à une distance suffisamment éloignée, la zone de stockage est considérée comme une source homogène de chaleur équivalente à l'ensemble des déchets (Figure 6-2a). Le massif est considéré comme étant saturé et est faiblement impacté par les perturbations du stockage

L'évolution de la température résultante est caractérisée par un échauffement, suivie d'un refroidissement; qui dépendent de la diffusivité thermique du massif, de la quantité de déchets dans le stockage et de la vitesse de décroissance de l'émission thermique. L'évolution de la pression des pores reflète celle de la température: elle se caractérise par une phase de surpression qui varie entre 35 à 65 ans [55], suivie d'une dissipation lente.

Quant au comportement mécanique global à partir de l'état de référence défini au moment de la fermeture du stockage, il est principalement régi par le chargement thermique imposé. Ce qui conduit à une élévation de la contrainte de compression en particulier dans le stockage, ainsi que le soulèvement du stockage par dilatation thermique [38][17]. Une estimation du soulèvement maximal au centre du stockage est donné dans [33] de l'ordre de 23 cm. De plus les contraintes déviatoriques restent modérées ce qui exclut tout risque d'endommagement lointain. En présence de contrainte initial de compression, plusieurs études [38], [17] et [33] ont conclu que la contraction thermique n'est pas en mesure de créer des fracturations dans le massif. De plus, il est possible de réduire l'intensité de cette contraction en augmentant la profondeur du stockage.

Cette modélisation a pour but essentiel le dimensionnement de la structure de manière à assurer la sûreté globale du stockage, cependant elle n'est pas suffisante et nécessite une étude complémentaire approfondie du comportement local proche de la zone de stockage.

Approche locale

Une approche locale s'intéresse au comportement du champ proche au voisinage immédiat des galeries. Cette modélisation met en jeu de forts couplages thermo-poro-mécaniques engendrés par les diverses perturbations thermiques et hydrauliques des alvéoles au fil du temps. Plus on s'éloigne de la zone perturbée plus ces perturbations diminuent et on retrouve l'état initial de la roche en température, pression et contrainte.

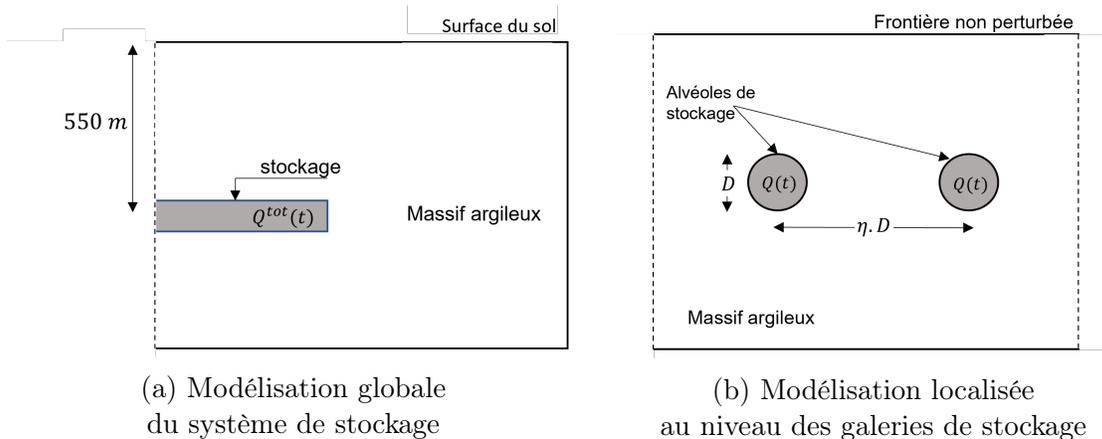


FIGURE 6-2 – Représentation géométrique du stockage de déchets radioactifs

C'est dans le cadre de cette approche locale que l'on souhaite se placer pour aborder la problématique de la nucléation de fissure au voisinage des galeries, en particulier dans la zone de forte interaction entre les alvéoles de stockage. On considère la représentation en 2D symétrisée (Figure 6-2b) d'une alvéole de stockage représentée par un cylindre infini de rayon R plongé dans le massif argileux du Callovo-Oxfordien. On considère que l'espacement entre deux alvéoles adjacentes est caractérisé par la donnée du paramètre η . Ce dernier est défini tel que ηR (avec $\eta > 1$) est la demi-distance entre les centres des alvéoles.

6.3.2 État de référence et paramètres thermoporomécaniques

Sollicitations mécaniques

L'état initial de la roche du Callovo-Oxfordien située à environ 500m de profondeur correspond à un état de contrainte horizontal anisotrope avec un rapport d'anisotropie ($\sigma_H/\sigma_h \sim 1.2$) issu de [24],[68] et une composante verticale $\sigma_v \simeq \sigma_h$ de l'ordre de:

$$|\sigma_v| = 12.7 \text{ MPa} \quad ; \quad |\sigma_h| = 12.4 \text{ MPa} \quad ; \quad |\sigma_H| = 14.8 \sim 16.2 \text{ MPa}$$

Les paramètres élastiques mesurés dans [24], [31] et [15] proposent un module de Young E entre 4 GPa à 5.6 GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

Sollicitations hydrauliques

Le massif du Callovo-Oxfordien initialement saturé est soumis à une pression constante équivalente à la pression hydrostatique de l'eau à une profondeur d'environ 550m. La pression initiale des pores est de l'ordre de 4.9 MPa à 5.5 MPa. La perméabilité hydraulique du COx à l'état initial sain est fournie à partir des données expérimentaux [20], [71] et [52] pour une valeur moyenne de $4.18 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$. Suite à la création des galeries, une zone fortement endommagée se forme à proximité des parois qui entraîne localement une très forte augmentation de la perméabilité de l'ordre de 5 à 6 ordres de grandeur par rapport au matériau initialement sain [66] [20]. Lors de l'excavation, une décharge hydraulique instantanée se produit au niveau du champ proche. Ce phénomène est accompagné d'une désaturation progressive par la ventilation des galeries en phase d'exploitation. A la suite de la fermeture des galeries, après la phase d'exploitation, une ressaturation progressive du champ proche devrait permettre à l'argilite de recouvrer sa perméabilité initiale et de refermer les fractures de l'EDZ par phénomène d'autocolmatage [5].

Modélisation thermoporomécanique

Dans le but de mettre en valeur la démarche présentée dans le chapitre 5 pour la nucléation de fissure en milieu poreux, on considère que l'argilite est dotée d'un comportement thermoporoélastique. Conscient du fait que cette modélisation est loin de rendre compte de tous les phénomènes susceptibles de se produire pendant la durée de vie du stockage (comportement viscoplastique, fluage...), elle reste néanmoins un moyen efficace pour aborder le phénomène de nucléation de fissure notamment les fissures en mode I.

Propriétés thermoporoélastiques Les propriétés poromécaniques de l'argilite du Callovo-Oxfordien utilisées dans la suite de ce travail issues de campagnes expérimentales sont présentées dans le Tableau 6.1.

Paramètres	Φ_0 (%)	K_s (GPa)	K_f (GPa)	K_d (GPa)	b	M (GPa)
Valeurs	16.1	21.73	2.2	2.1	0.91	2.15

TABLE 6.1 – Paramètres poromécaniques mesurées par différents auteurs [70], [53], [52] et [2] pour un état de compression $\sigma = 14 \text{ MPa}$ et une pression de fluide $p = 4 \text{ MPa}$

Les coefficients de dilatation thermique de la phase solide et fluide sont estimés respectivement dans [46] à $\alpha_s = 1.23 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ et $\alpha_f = 2.6 \cdot 10^{-4} K^{-1}$. Le couplage thermo-hydraulique est caractérisé par le coefficient de pressurisation thermique [2] estimé à $\Lambda = -l_s M \simeq 0.15 \text{ MPa} \cdot K^{-1}$.

6.4 Analyse thermique du champ proche

6.4.1 Sollicitations thermiques des déchets

En plus de la distribution initiale de température par gradient géothermique qui est équivalente à une température constante de l'ordre de 23°C , le massif est soumis à un flux de chaleur après la mise en place des colis de déchets radioactifs. La principale caractéristique de ces déchets, outre leur émission gamma, est le dégagement

de chaleur accompagnant la désintégration radioactive. On distingue deux grandes catégories de déchets:

déchets C (vitrifiés) Ce sont les déchets à haute activité issus du retraitement des combustibles usés qui sont calcinés et dissous à haute température dans une matrice en verre borosilicaté. L'ensemble est ensuite coulé dans des fûts en acier inoxydable pour constituer les colis.

Déchets B Ce sont principalement des déchets de moyenne activité et à vie longue formés de déchets de structures diverses. Ils sont conditionnés dans des fûts en béton ou en acier.

On s'intéresse aux colis de type C à haute activité où la puissance thermique (Figure 6-3) passe de $2.5kW$ au moment de la vitrification à environ $300W$ après 100 ans, et continue de décroître avant d'atteindre des valeurs que l'on peut considérer négligeables au delà d'une centaine de milliers d'années.

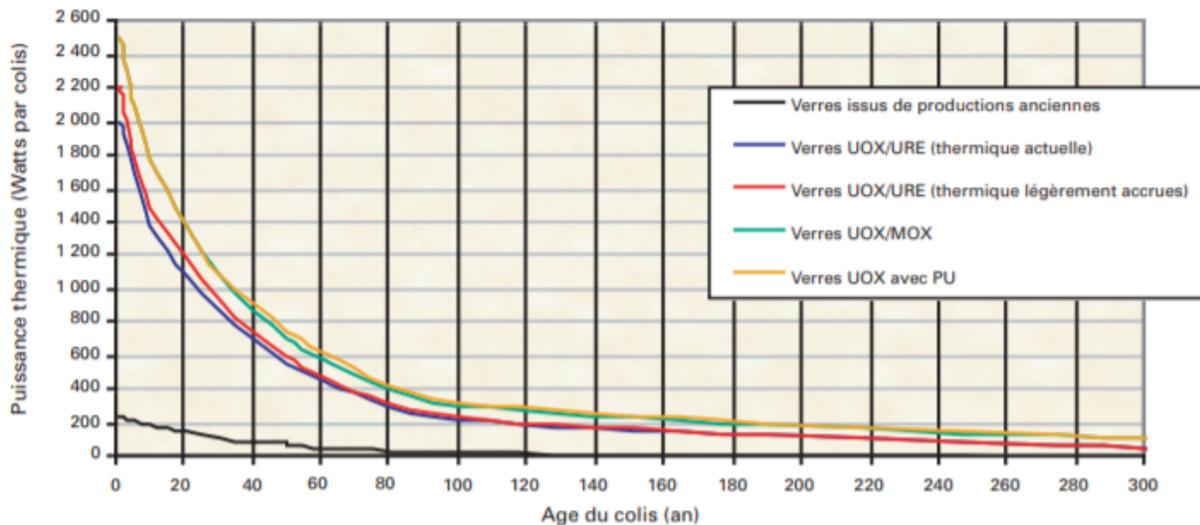


FIGURE 6-3 – Émission thermique de colis de déchets C au cours du temps [24]

6.4.2 Évolution de la température dans l'argilite

On se place dans le cadre d'une modélisation plane perpendiculaire à l'axe de l'alvéole de stockage (Figure 6-2b). Dans le cadre d'une modélisation simplifiée, le milieu argileux est considéré dans le plan comme un milieu homogène isotrope de conductivité thermique $\lambda_T = 1.9 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ et de capacité calorifique $\rho c = 2.85.10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$. Celui-ci est soumis à un flux de chaleur au niveau de la paroi circulaire de rayon R de l'alvéole équivalent à la puissance dégagée par le colis. La relation qui relie le flux thermique par unité de surface Φ et la puissance dégagée $Q(t)$ est:

$$\Phi(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2}$$

On simule la loi horaire de l'évolution de la puissance thermique dégagée par les colis (Figure 6-3) sous la forme exponentielle décroissante suivante:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (6.7)$$

où la valeur initiale de la puissance thermique est $Q_0 = 2.5\text{kW}$ et $\tau \simeq 30$ ans représente la demi durée de vie du colis qui correspond au temps nécessaire pour réduire de moitié la puissance thermique du combustible.

Le transfert thermique étant découplé du comportement hydromécanique, il est possible d'accéder à la variation de la température du stockage par résolution de l'équation de diffusion thermique (6.6).

On applique les conditions aux limites et de symétrie suivantes (Figure 6-4):

$$\left\{ \begin{array}{ll} y \rightarrow \infty & : \quad T(x, y) = T^0 \\ (x, y) \in (\mathcal{C}) & : \quad \mathbf{q}(x, y) \cdot \mathbf{n} = \Phi(t) \\ x = \eta R & : \quad \mathbf{q}(x, y) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ x = 0 ; y > R & : \quad \mathbf{q}(0, y) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ y = 0 ; x > R & : \quad \mathbf{q}(x, 0) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

On dispose de la solution analytique de la variation de température pour une alvéole de stockage cylindrique de rayon R dans un milieu infini, donnée en (C.13). Cette expression de la température peut être valable pour des espacements, définis par le paramètre η , suffisamment grands pour négliger l'effet de l'interaction entre les sollicitations thermiques de chaque alvéole. Elle présente l'avantage de discuter l'effet des différents paramètres sur la réponse thermique locale mais elle ne permet pas, par construction, d'analyser les effets d'interaction entre les sources de chaleur. Or, c'est précisément à cette question que l'on souhaite apporter un éclairage, en particulier sur la possible nucléation de fissure entre les alvéoles. Pour y remédier, on a donc recours à une résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique (6.6) avec les conditions aux limites données en (6.8) pour un cylindre de rayon $R = 1\text{m}$ dans rectangle de dimensions $(L, \eta R)$ où $L = 10 R$.

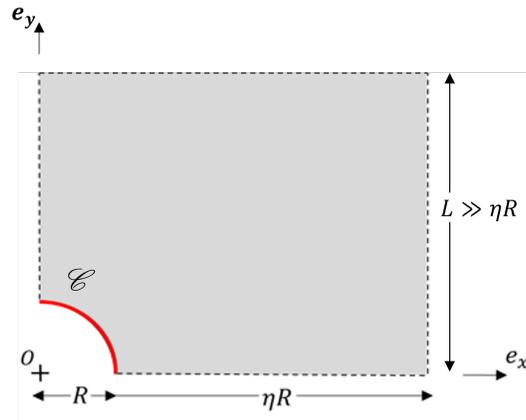


FIGURE 6-4 – Modélisation du système de stockage symétrisé

Pour un espacement entre deux alvéoles défini par $\eta = 5$ (c'est-à-dire pour une distance entre les centres des alvéoles égale à $10\times$ leur rayon), l'évolution de la température dans le massif atteint un maximum au niveau de la paroi du stockage de l'ordre de $T \simeq 60^\circ\text{C}$ après une vingtaine d'années, puis se refroidit progressivement jusqu'à retrouver son état initial après 100-1000 ans (Figure 6-6).

On trace (Figure 6-6b) la variation de la température à différentes distances horizontales depuis la paroi de l'alvéole ($x = R$, $x = 2R$ et $x = 5R$) (Figure 6-6a) en

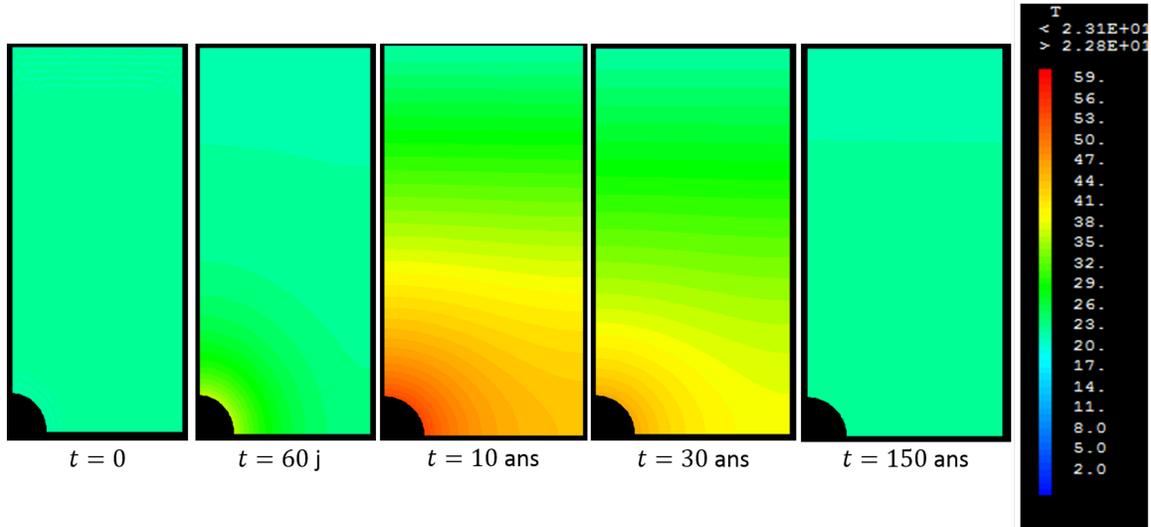
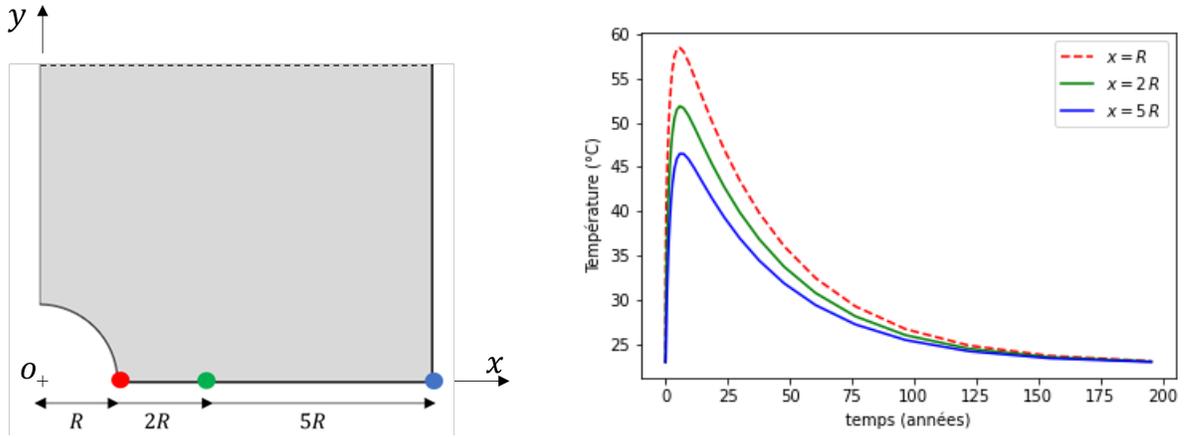


FIGURE 6-5 – Évolution de la température du milieu dans le temps

fonction du temps. On observe une première phase d'échauffement qui atteint un pic de température dans le massif après $t_c \simeq 7$ ans avec un maximum atteint au niveau de la paroi du colis de l'ordre de 60°C , suivie d'une phase de refroidissement lente pour retrouver finalement la température d'équilibre initiale après 200 ans. Le graphe (6-7) montre l'effet de l'espacement η entre les alvéoles sur la variation de température. On trace le profil de la température le long de l'axe horizontal entre les deux sources de chaleur pour deux espacements géométriques différents $\eta = 5$ et $\eta = 4$. A l'instant t_c correspondant au pic de température, on observe que le champ de température est plus important lorsque les sources de chaleur sont proches, en d'autres termes, le champ de température augmente lorsque l'interaction entre les sources est plus forte. Cette observation découle du fait que la sollicitation thermique appliquées (6.7) est représentée par un flux de chaleur $\Phi(t)$ au niveau de la paroi des alvéoles.

A partir de l'analyse thermique réalisée, il convient de caractériser l'évolution du champ de température dans le massif argileux par deux paramètres principaux: par son intensité, qui correspond à l'intensité de la température atteinte en un point du domaine, et par l'instant t_c où cette température est maximale. L'intensité du champ de température en un instant donné détermine le champ de contrainte thermique auquel est soumis le massif. Celle-ci est contrôlée par la puissance thermique des colis



(a) Localisation des points d'extraction de température (b) Variation de la température au cours du temps

FIGURE 6-6 – Représentation de la variation de température au voisinage de colis de stockage au cours du temps

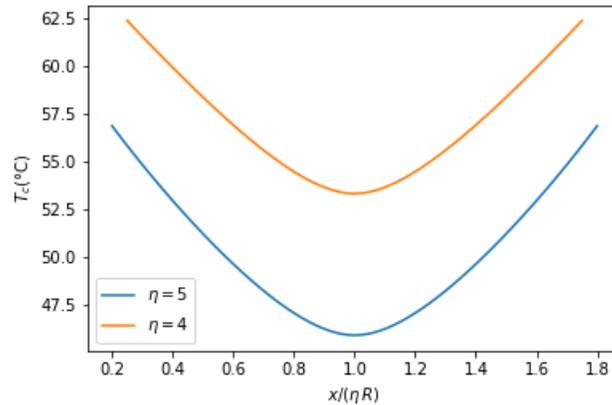


FIGURE 6-7 – Évolution de la température maximale atteinte pour différents espacements de colis

radioactifs stockés Q_0 , par leur demi-durée de vie τ (6.7) et par l'espacement géométrique entre les alvéoles η . Ainsi, il est possible de réduire la contrainte thermique dans le massif soit en réduisant la puissance des colis (volume moindre des déchets dans chaque colis), soit en réduisant la durée de vie des déchets avant leur stockage ou finalement en choisissant d'augmenter l'espacement entre les alvéoles.

Le deuxième paramètre est l'instant t_c où la température atteint son pic. En effet, la nature décroissante de la puissance thermique (6-3) par désintégration radioactive

fait que le champ de température dans le massif comporte une phase de surchauffe suivie d'un retour à l'état naturel par refroidissement. Cette phase de refroidissement envisage une configuration où la variation de température est négative ($\Delta T < 0$), elle pourrait alors évoquer une possibilité de nucléation de fissure par traction de la contrainte thermique similaire à celle abordée dans le chapitre 4 par choc thermique. Cependant cette variation négative de la température est lente par rapport à un choc thermique, elle est aussi de nature à réduire le gradient thermique dans le massif rocheux pour retrouver un champ de température avant le stockage non perturbé. Dans ce sens, une nucléation de fissure pendant la phase de refroidissement n'est pas envisagée. D'un autre côté, la phase d'échauffement atteint son maximum à l'instant t_c . Celui-ci définit le lieu et l'intensité de la contrainte d'origine thermique maximale atteinte dans le milieu. Il faut rappeler cependant que cette contrainte thermique ne va pas dans le sens de la traction puisqu'elle est négative ($\Delta T > 0$). D'un point de vue thermique, l'instant t_c correspond à la situation la moins favorable pour la nucléation, mais ce n'est précisément pas dans ce contexte purement thermoélastique que nous abordons la problématique puisque la présence d'un couplage thermo-poroélastique impose de reprendre l'analyse. D'où l'intérêt de déterminer cet instant critique t_c dans le but d'instaurer une chronologie des phénomènes agissent simultanément sur la structure, notamment les phénomènes hydriques. Dans le cas d'une surchauffe rapide par rapport au temps caractéristique de la diffusion hydraulique ($t_c \ll \tau_H$), l'analyse section 6.2.2 montre qu'il est possible de considérer que l'évolution de la phase fluide pendant la diffusion thermique est non-drainée. Le couplage thermoporo-mécanique prédit alors une surpression thermique. Tandis que pour une surchauffe lente ($t_c \gg \tau_H$), la phase fluide est susceptible de diffuser dans le massif pour un effet moindre de la surpression thermique. L'instant t_c est contrôlé par les paramètres de diffusion thermique notamment la diffusivité thermique de l'argilite (κ) et par la demi-durée de vie des radionucléides (τ). Ainsi plus les déchets radioactifs se désintègrent rapidement plus la diffusion thermique se fait en condition non-drainée. Nous avons deux effets opposés pour la durée de vie des déchets. L'intensité de la température est proportionnelle à la durée de vie des déchets, tandis que la présence de

surpression est inversement proportionnelle à τ .

En résumé, l'analyse de la nucléation de fissure en mode I entre les alvéoles sera abordée par surpression thermique pendant la phase de surchauffe du stockage dans un contexte de couplage thermoporoélastique. La phase de refroidissement étant lente et de nature à réduire le gradient thermique dans le milieu, le risque de nucléation de fissure pendant cette phase n'est pas envisagé.

6.5 Comportement thermo-poro-mécanique du stockage à long terme

L'objectif de la modélisation du comportement thermo-poro-mécanique du stockage est de dégager les zones susceptibles de s'endommager par nucléation de fissures en mode I suite aux sollicitations thermiques des déchets.

Dans cette perspective, on se propose de porter une attention particulière sur l'aspect poreux du stockage, notamment la présence d'une pression de fluide et de son couplage avec la thermique et la mécanique. On évoque dans ce cas la contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}^{eff} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}p$ comme étant la contrainte qui reprend l'effet de la pression du fluide dans la structure. La suite propose d'analyser la différence entre cette contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$ et la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ dans le but de mettre en évidence d'éventuelles zones de traction selon le choix de la contrainte sur laquelle on choisit d'exprimer le critère de nucléation.

La modélisation du comportement local à long terme du stockage fait intervenir des couplages thermo-poro-mécaniques forts dans le sens thermique \rightarrow mécanique et hydraulique \rightarrow mécanique lorsque la perméabilité est assez élevée. La résolution de ce type de problème se traite de manière rigoureuse par des calculs numériques par éléments finis en résolvant les équations de diffusions thermique et hydraulique en régime transitoire couplées aux équations d'équilibre mécanique. On propose dans cette partie de commencer par une résolution simplifiée à partir d'une expression approchée

du champ de température offrant la possibilité de réaliser des calculs analytiques dans le but d'évaluer l'effet des différents couplages sur le comportement étudié. Puis d'enrichir les conclusions obtenues par une résolution numérique par éléments finis du problème de couplage THM.

6.5.1 Un modèle analytique simplifié

Cette analyse se présente comme une première approximation du comportement de l'argilite sans interaction entre les colis pour une géométrie idéalisée, dont l'intérêt est essentiellement de proposer un cadre d'analyse paramétrée.

Hypothèses de résolution

On considère une zone de stockage composée de sphères de rayon R équidistantes, espacées d'une demi-distance ηR . On suppose que les sources de chaleur agissent de manière similaire sur le milieu. La périodicité (Figure 6-8) permet de ramener l'étude à une seule source de chaleur agissant sur l'argilite. Afin de proposer une solution

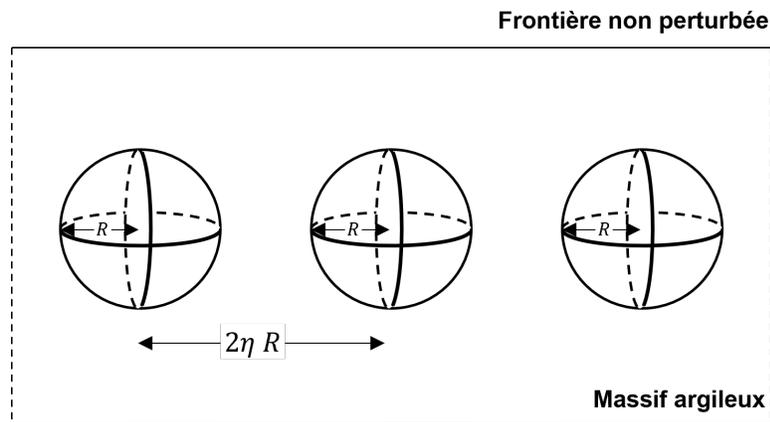


FIGURE 6-8 – Modélisation simplifiée de la disposition périodique des colis sphériques

analytique, on suppose de plus que l'espacement entre les alvéoles est suffisamment grand ($\eta > \eta_c$) pour négliger leur interaction. On se place ainsi dans le cas d'une symétrie sphérique d'origine O centre de l'alvéole de stockage, et on définit r comme la distance à l'origine. Pour ce premier calcul, on considère que le matériau argilite est totalement saturé et que l'évolution est non-drainée.

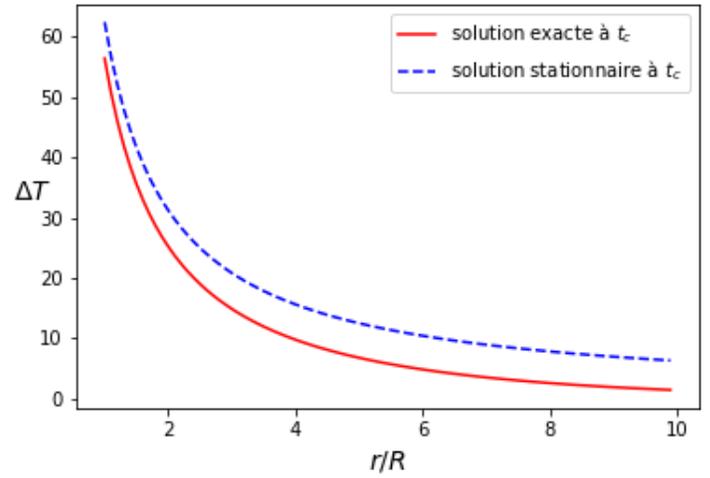
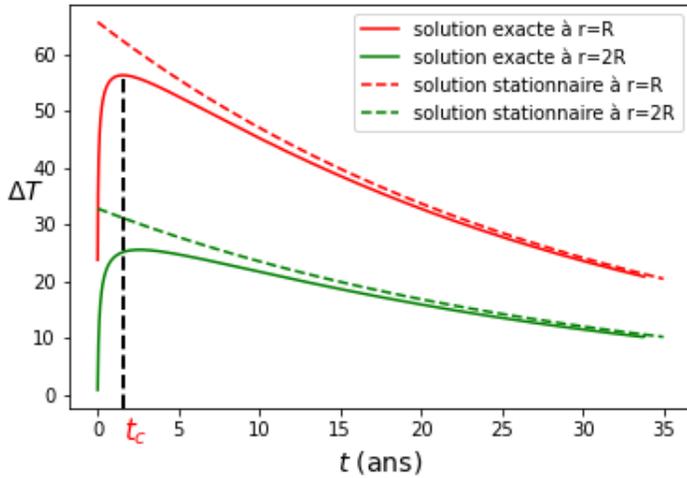
L'équation de diffusion thermique (6.6) en coordonnées sphériques s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda_T}{\rho C} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le champ de température solution de cette équation de diffusion thermique dans la configuration géométrique considérée soumise à un flux thermique à la paroi de la sphère est donné en annexe C par l'expression (C.10). Pour des raisons de simplicité lors de la résolution mécanique, on considère que la variation de température à un instant donné se met sous la forme simplifiée suivante:

$$T(r, t) = \frac{\Phi(t) R^2}{\lambda r} \quad (6.9)$$

qui correspond au comportement asymptotique du champ de température solution, en fonction de la distance radiale r et du flux thermique imposé $\Phi(t)$ en $r = R$.



(a) Comparaison entre les deux variations de température en fonction du temps à deux distance R et $2R$ de la source de chaleur

(b) Comparaison entre les deux variations de température en fonction de r à l'instant critique t_c

FIGURE 6-9 – Comparaison entre les deux variations de température pour la solution transitoire et stationnaire

Les Figures (6-9) proposent une comparaison entre la variation du champ de température solution de l'équation de diffusion en régime transitoire (C.10) et la solution

en régime stationnaire explicitée par l'expression (6.9). On observe Figure (6-9a) que la variation du champ de température solution du problème transitoire converge bien vers la solution asymptotique stationnaire(6.9) lorsque le temps est suffisamment grand ($t > 10$ ans). A l'instant t_c correspondant au pic de température, la comparaison entre ces deux champs de température en fonction de la distance r de la source de chaleur est présentée sur la figure (6-9b). On observe que l'expression simplifiée de la variation de température surestime légèrement le champ de température à l'instant t_c , mais l'allure de celle-ci reste néanmoins proche de celle de la solution exacte notamment au voisinage de la source de chaleur. C'est précisément sur la base de ce constat que l'on choisit de retenir la solution stationnaire, plus simple, pour définir le champ de température utilisé dans le calcul thermoporoélastique.

Conditions initiales et conditions aux limites

Dans la configuration de référence, le comportement de l'argilite est défini par un état de contrainte en compression isotrope $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \boldsymbol{\delta}$ ($\sigma_0 < 0$) et une pression interstitielle du fluide $p = p_0$. Le champ de température est donné par l'expression (6.9).

Loin de l'alvéole de stockage l'état du milieu étant non perturbé, le vecteur contrainte appliqué sur le bord lointain est équivalent à $\underline{T} = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \underline{n}$. On suppose en plus une pression de gonflement dans le bouchon d'argilite envisagée de l'ordre de 4 à 7 MPa. On écrit les deux conditions aux limites:

$$\begin{cases} r \rightarrow \infty & : & \underline{T} = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \underline{e}_r \\ r = R & : & \underline{T} = p_{int} \underline{e}_r \end{cases} \quad (6.10)$$

Résultats et discussion

Les symétries du problème conduisent à rechercher le champ de déplacement solution sous la forme:

$$\underline{\xi} = \xi_r(r) \underline{e}_r \quad (6.11)$$

Le système d'équations à résoudre comporte l'équation d'équilibre (6.3) en utilisant la loi de comportement thermoporoélastique en condition non-drainée (6.5), et l'équation de diffusion hydraulique qui se simplifie sous l'hypothèse du caractère non-drainé de l'argilite sous la forme d'une équation d'état (5.10) reliant la pression à la déformation et la température.

$$\begin{aligned} \underline{div} \boldsymbol{\sigma} &= \underline{0} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ p &= p_0 - M(\mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + L(T(r) - T_0)) \end{aligned}$$

A partir de l'expression de la variation de température dans le milieu donnée par (6.9) il est possible de résoudre le système d'équations et on obtient l'expression du champ de déplacement solution en coordonnées sphériques de la forme:

$$\xi_r(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r^2} + A_3 \quad (6.12)$$

où A_1 et A_2 et A_3 des coefficients définis à partir des conditions aux limites et du chargement thermique explicités en annexe (D). On montre en particulier que $A_1 = 0$ pour satisfaire la condition aux limites loin du stockage.

On propose de porter une attention particulière au comportement le long du plan médiane entre les deux sources thermiques, soit la droite appartenant au plan orthogonale au plan du stockage (Oxy), et éloignée de la demi-distance ηR (droite en rouge sur la Figure. 6-10). On s'intéresse alors aux champs de contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ et effectif $\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}p$ et leurs projections dans le plan (Oxy).

Milieu non confiné ($\sigma_0 = 0$) Dans un premier temps, on considère le milieu comme étant exempt de précontrainte ($\sigma_0 = 0$) ainsi qu'une pression nulle appliquée sur la paroi de la sphère ($p_{int} = 0$). La variation positive de température $\Delta T > 0$ induit une contrainte thermique de compression ($\boldsymbol{\sigma}^{th} = -\boldsymbol{\kappa} \Delta T > 0$) qui crée une zone de compression au voisinage de la source thermique (Figure 6-11a). On montre que la contrainte totale horizontale est bien en compression ($\sigma_{xx} < 0$) à différentes

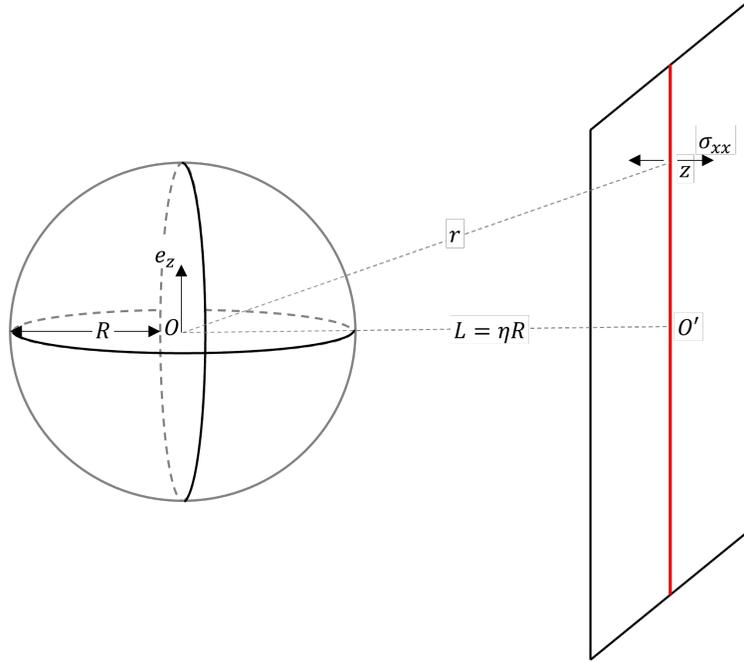


FIGURE 6-10 – Schéma d'une galerie de stockage sphérique avec le plan de symétrie entre 2 alvéoles

distance de la source de chaleur. Celle-ci est maximale au voisinage de la paroi ($\eta = 1$) et diminue plus on s'éloigne de la source de chaleur pour converger vers son état non perturbé.

La figure (6-11b) trace la variation de la pression du fluide le long de la médiatrice entre les deux sources thermiques. On observe que le milieu est en surpression, engendrée par l'élévation de température, et que cette pression est décroissante en z de valeur maximale atteinte en $z = 0$, de l'ordre de 30 MPa pour $\eta = 1$. La variation de la pression s'exprime analytiquement sous la forme:

$$\Delta p = \frac{K_1}{r} \Delta \alpha + \frac{K_2}{r} \alpha_s \quad (6.13)$$

où K_1 et K_2 sont des coefficients dépendant des paramètres thermo-poro-mécaniques. L'écriture détaillée de K_1 et K_2 est fournie en annexe. Dans le premier terme K_1 de l'expression (6.13), on retrouve le rôle joué par la différence des dilatations thermiques entre les deux phases solide et fluide ($\Delta \alpha = \alpha_f - \alpha_s$) dans le mécanisme de pressurisation thermique. Cette surpression est de l'ordre de 26 MPa. Cependant, on

retrouve également un terme de surpression supplémentaire qui ne fait intervenir que la dilatation thermique du solide. La présence de ce terme est imputable à la non uniformité du champ de température dans le massif. Pour une dilatation thermique différentielle nulle ($\Delta\alpha = 0$), soit un même coefficient de dilatation thermique pour les deux phases, la surpression est de l'ordre de 4 MPa ($\sim 13\%$ de la surpression thermique).

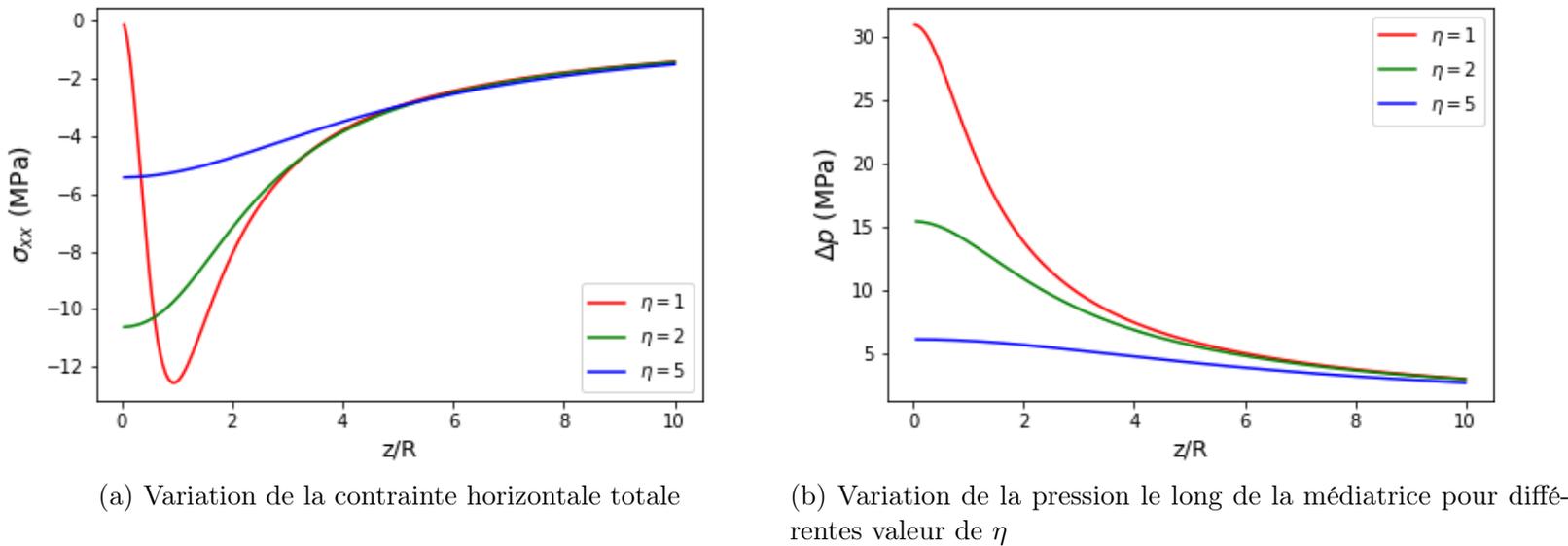


FIGURE 6-11 – Représentation de la variation de de la contrainte totale et de la pression le long de la médiane pour différentes valeurs de η .

On trace sur la figure (6-12) la variation de la contrainte effective horizontale $\sigma_{xx}^{eff} = \sigma_{xx} + b p$ (avec $b = 0.91$) le long de l'axe vertical à une distance ηR de la source de chaleur. Contrairement au champ de contrainte total (Figure 6-11a) qui est en compression ($\simeq 12$ MPa), on observe que la contrainte effective se met en traction à des distances de la paroi pouvant atteindre $\eta_c R$ de l'ordre de $\eta_c \simeq 11$. C'est le terme de surpression ($\simeq 30$ MPa), supérieur à l'état de compression, qui met en traction la contrainte effective.

On peut dans ce cas conclure que le choix d'un critère de nucléation en contrainte totale ne permet pas d'envisager une nucléation de fissure en mode I puisqu'il n'existe pas de zone de contrainte totale en traction. Par contre, le résultat obtenu indique qu'il

est possible d'identifier des zones de contrainte effective en traction dans le matériau hôte. Cela signifie que si l'on adopte un critère de nucléation sur la contrainte effective, on peut envisager un scénario de nucléation de fissure en mode I basée sur le double critère énergétique.

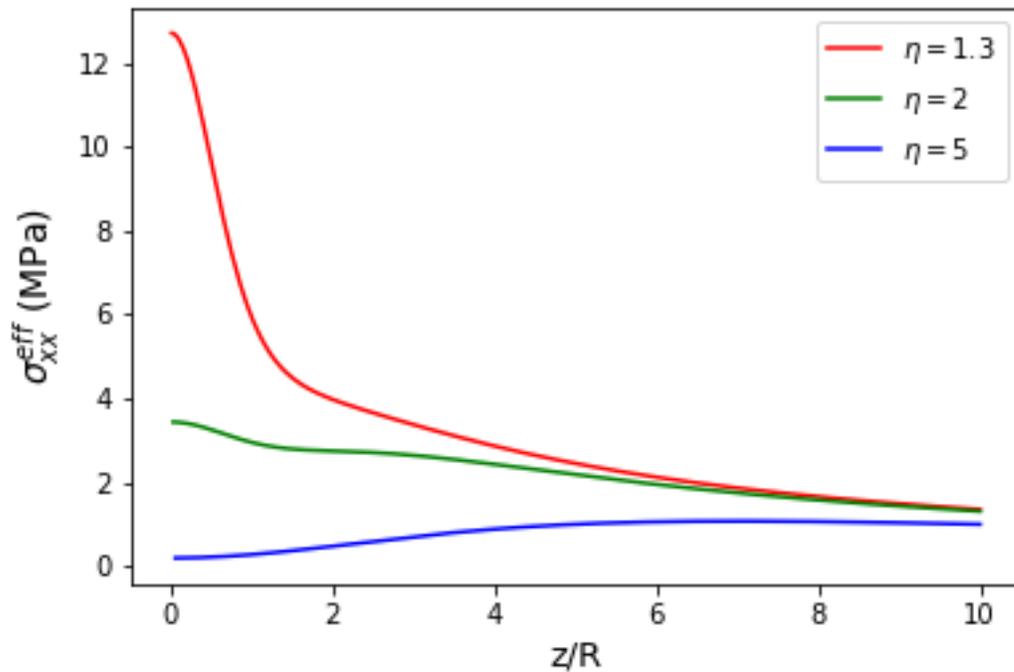


FIGURE 6-12 – Représentation de la variation de la contrainte effective le long de la médiatrice pour différentes distance de η .

État de compression in-situ Après avoir mis en évidence le lien entre le chargement thermique et l'existence potentielle d'une contrainte effective en traction, on souhaite se rapprocher de la situation réelle du stockage en tenant compte d'un état de contrainte de confinement non nulle $\sigma_0 < 0$ isotrope de l'ordre de 12.5 MPa.

La contrainte totale le long de la droite médiatrice est en compression puisque l'état de confinement non nul vient se rajouter à la compression d'origine thermique, on atteint des valeurs maximales compressives de l'ordre de 25 MPa. Pour mettre en évidence l'effet de cette état de compression in-situ, on trace le long de la droite médiatrice, la

variation relative de la contrainte totale σ_{xx} par rapport au champ de contrainte en condition non-confinée σ^{nc} (Figure 6-13). On observe que le rapport $\frac{\sigma}{\sigma^{nc}} > 1$ et croissant en z . Le fait que l'état de contrainte converge, lorsque l'on s'éloigne de la source thermique, vers un état non perturbé justifie le rapport croissant puisque $\sigma^{nc} \rightarrow 0$. Dans la zone proche de la source thermique, l'état de contrainte totale atteint le double de la contrainte en condition non-confinée. L'évaluation de la pression du fluide, pour

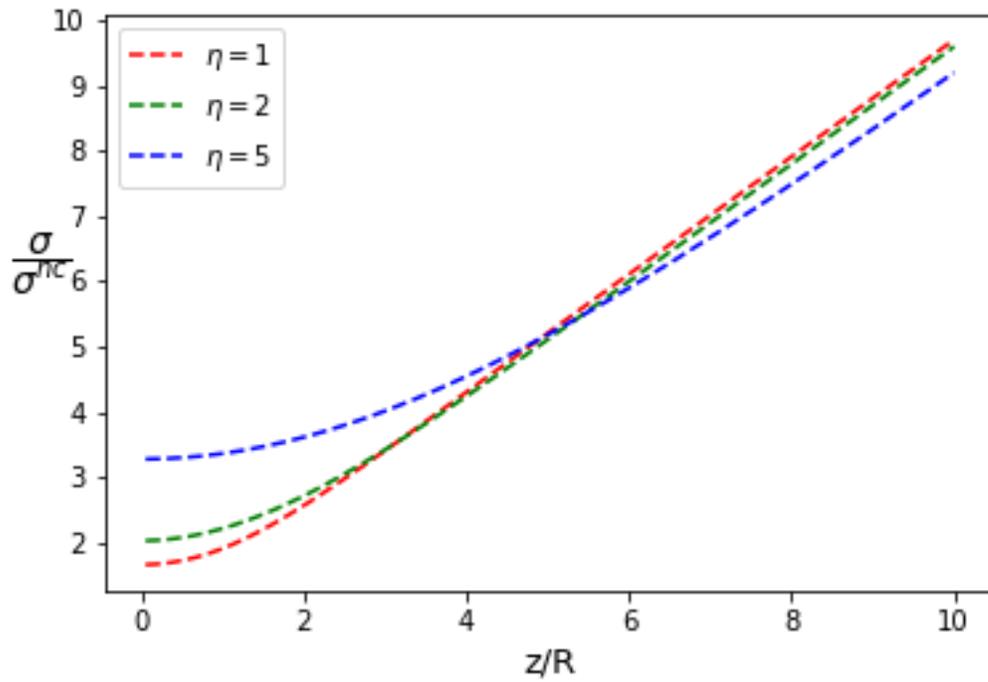
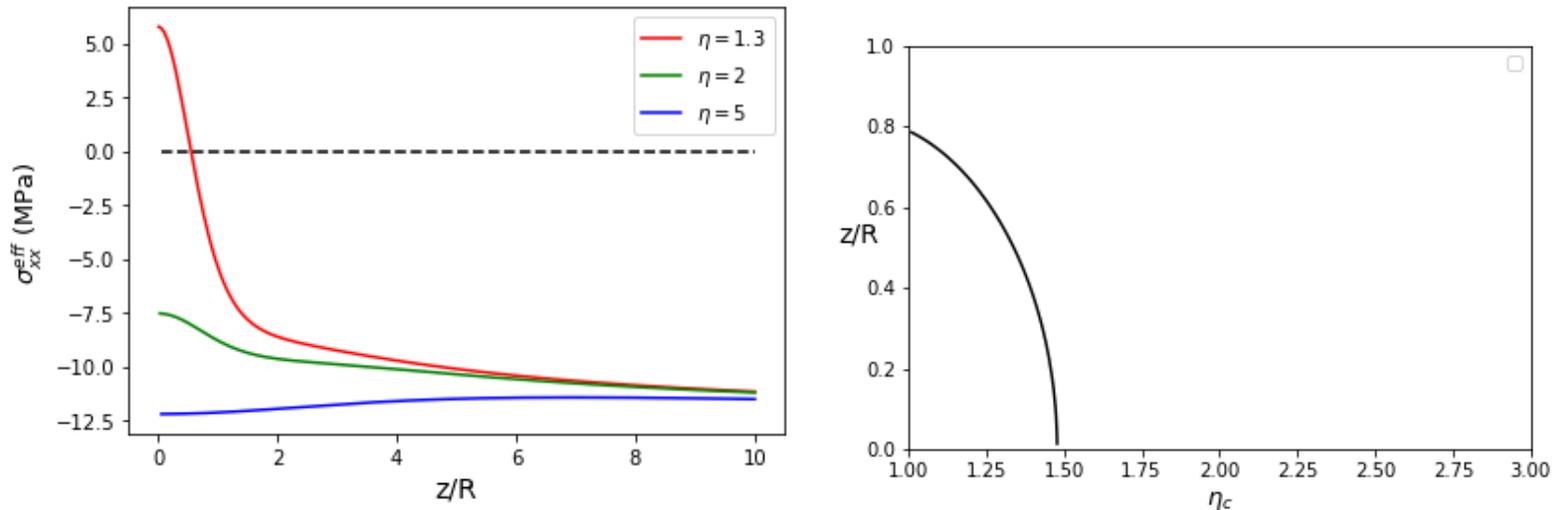


FIGURE 6-13 – Variation relative de la contrainte totale en compression in-situ par rapport à la contrainte totale en conditions non-confinée

un champ de déplacement solution qui s'écrit sous la forme (6.12), ne dépend pas de l'état de contrainte initial σ_0 . L'expression analytique de cette pression donnée en (6.13) reste inchangée. On conclut dans ce cas que la contrainte effective diminue en raison de la contrainte initiale σ_0 . On trace sur la figure (6-14a) la variation de cette contrainte effective en fonction de la hauteur z sur la droite médiatrice. On observe effectivement que la zone de traction est maximale en $z = 0$ et s'annule à partir d'une hauteur $z > \eta_c R$, η_c étant le paramètre d'espacement qui définit la distance maximale de la zone de traction. Le graphe (6-14b) montre en particulier la localisation de

cette zone traction en fonction du paramètre d'espacement η_c . Cette zone de traction diminue plus on s'éloigne de la source avant de disparaître en $\eta_c = 1.39$.



(a) Variation de la contrainte effective

(b) Emplacement de la zone de traction en contrainte effective

FIGURE 6-14 – Représentation de la variation de de la contrainte effective ainsi que la zone de transition en compression

On peut également noter que l'application d'une pression non nulle sur la paroi de la galerie (qui correspond à la pression de gonflement du bouchon argileux par ressaturation) réduit légèrement l'intensité ainsi que la zone de traction de la contrainte effective. Pour une pression de gonflement envisagée par l'ANDRA de l'ordre de $p_{int} = 7$ MPa, la zone de traction disparaît à partir de $\eta_c = 1.28$.

Conclusions

On a considéré dans cette partie un cadre morphologique simplifié du stockage qui permet de proposer une analyse paramétrée simplifiée. On a conclu dans un premier temps que le champ de contrainte totale dans le milieu est gouverné par la contrainte de compression initiale présente dans le massif $\sigma_0 < 0$, et par une contrainte thermique $\sigma^{th} < 0$ liée à l'élévation de la température suite au stockage des déchets exothermiques. De toute évidence, dans le cadre simplifié proposé ici une nucléation de fissure en mode I d'origine thermique est impossible si l'on raisonne sur les contraintes totales puisque celles-ci sont compressives en tout point.

Les conclusions sont différentes si le critère de nucléation de fissure porte sur la contrainte effective $\sigma + b p \delta$. En effet, le chargement thermique est susceptible d'induire un état de contrainte effective en traction à cause du mécanisme de pressurisation thermique en conditions non-drainées. En particulier, nous avons montré que cette surpression est composée d'un terme qui reprend l'effet de la dilatation thermique différentielle entre les deux phases fluide et solide, en plus d'un terme supplémentaire faisant intervenir uniquement la dilatation thermique du solide. La présence de cette surpression supplémentaire non négligeable correspond à plus de $\sim 13\%$ de la surpression thermique totale pour les valeurs numériques considérées. Lorsque cette surpression dépasse la contrainte totale, nous avons une traction en contrainte effective qui est maximale sur le plan horizontale du stockage. L'absence d'un état de précontrainte initiale $\sigma_0 = 0$ représente l'état le plus défavorable avec une surpression thermique nettement supérieure à l'état de contrainte totale. Tandis qu'un état initiale en compression $\sigma_0 < 0$ réduit l'intensité de la contrainte effective, et met en évidence l'existence une distance limite de traction $\eta_c R$ de la source de chaleur. Pour les valeurs numériques considérées et un état de compression in-situ $\sigma_0 = -12.5$ MPa, celle-ci est de l'ordre de $\eta_c = 1,39$ sans pression interne de gonflement sur la paroi de la source et de l'ordre de $\eta_c = 1.28$ avec une pression $p_{int} = 7$ MPa.

Les résultats présentés suggèrent donc qu'un scénario de nucléation d'une fissure verticale en mode I entre deux alvéoles de stockage est envisageable pendant la phase de réchauffement si l'on adopte un critère de nucléation en contrainte effective. Dans ce cas, le mécanisme de pressurisation est le principal moteur de cette nucléation. Cette pressurisation dépend notamment de l'intensité du flux thermique imposé. Plus celui-ci est important plus la surpression engendrée est grande et donc une traction effective élevée. La surpression est aussi reliée à la configuration géométrique du stockage, où l'accroissement de l'espacement entre les alvéoles milite contre la nucléation de fissure.

L'analyse théorique proposée repose cependant sur une gestion des effets d'interactions qui mérite une analyse plus fine. On propose dans la section suivante de dépasser cette limitation en développant une stratégie numérique basée sur l'utilisation du code éléments finis Cast3M (CEA). En particulier, on gère proprement la périodicité des

alvéoles de stockages dans le but de rendre compte de l'interaction des champs issus de deux sources voisines.

6.5.2 Modélisation numérique

Afin d'enrichir les conclusions obtenues dans la partie précédente, nous nous proposons de mener une résolution THM par éléments finis du comportement local entre deux alvéoles de stockage cylindriques supposées infinies.

On considère alors le stockage dans le cadre d'une modélisation en déformations planes plane comme un rectangle de dimensions $(L, \eta R)$ où $L = 10 R$, et on représente les alvéoles de stockage par des cercles de rayon $R \sim 1 \text{ m}$. On reprend alors la même configuration de référence établie dans la section précédente définie par un état de contrainte en compression $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ et une pression du fluide $p = p_0$ ainsi que la température initiale $T = T_0$.

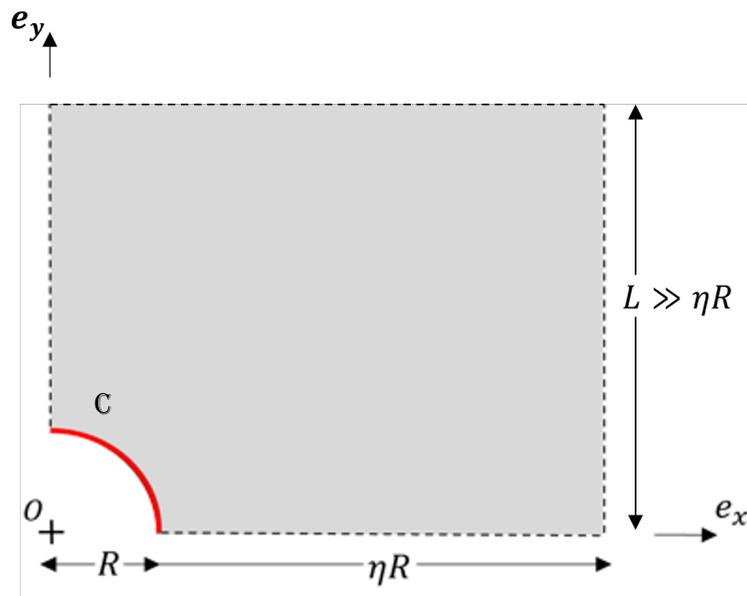


FIGURE 6-15 – Géométrie symétrisée du stockage

Conditions aux limites thermiques On reprend les conditions aux limites thermiques exposées dans (6.8) où l'on considère que le milieu est soumis à un flux de chaleur variable de la forme exponentielle décroissante (6.7), et d'une température

imposée dans la zone lointaine équivalente à la température initiale $T_0 = 23^\circ\text{C}$ en l'absence de perturbation.

Conditions aux limites hydrauliques On considère que la diffusion hydraulique est couplée avec le comportement thermomécanique de la roche. Ainsi l'évolution de la phase fluide, caractérisée par la pression du fluide, obéit à l'équation de diffusion hydraulique (6.1). A l'instant initial, la pression du fluide est supposée uniforme dans tout le milieu $p_0 = 5 \text{ MPa}$. Celle-ci est maintenue constante dans la zone lointaine au stockage $y = L$.

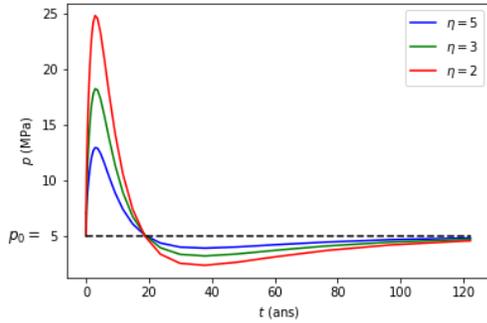
Conditions aux limites mécaniques Les conditions de symétrie par périodicité imposent un déplacement latéral nul au niveau de l'axe entre les alvéoles $x = \eta R$ et en $x = 0$ en plus d'un déplacement vertical nul en $y = 0$. Au niveau de la zone de stockage (\mathcal{C}) on impose une pression de gonflement p_{int} et on considère que la zone lointaine n'est pas perturbée.

$$\begin{aligned}
 y = L : & \quad \underline{T} = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \underline{e}_y \\
 (x, y) \in (\mathcal{C}) : & \quad \underline{T} = p_{int} \cdot \underline{e}_r \\
 x = \eta R : & \quad \xi_x = 0 \\
 x = 0 ; y > R : & \quad \xi_x = 0 \\
 y = 0 ; x > R : & \quad \xi_y = 0
 \end{aligned}$$

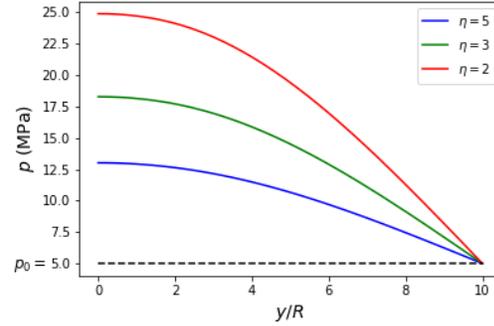
Résultats et discussion La résolution numérique est réalisée en régime transitoire thermique et hydraulique en tenant compte du couplage thermo-hydro-mécanique. Les Figures (6-16) représentent les principaux résultats obtenus pour différentes configurations géométriques définies par $\eta = 2, 3$ et 5 . On trace notamment l'évolution de la pression du fluide au milieu des deux alvéoles en fonction du temps (Figure 6-16a). On retrouve la phase de surpression par pressurisation thermique attendue lors de l'échauffement suivie d'une phase de décroissance avant de retrouver une pression initiale après des centaines d'années. Quelque soit l'espacement entre les alvéoles (caractérisé par η), la pression est maximale pour un temps critique $t^* \sim 3$ ans pour les

données considérées. Elle atteint des valeurs de l'ordre de 25 MPa lorsque $\eta = 2$, et diminue lorsqu'on éloigne les alvéoles.

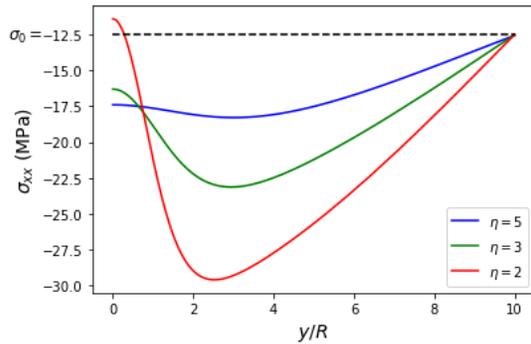
La pression maximale atteint des valeurs de l'ordre de 25 (MPa) pour $\eta = 2$ après $t^* \simeq 3$ ans.



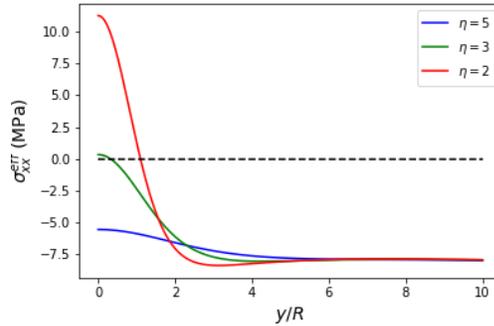
(a) Variation de la pression entre deux alvéoles $y = 0$ en fonction du temps



(b) Variation de la pression maximale le long de la médiane entre deux alvéoles à l'instant t_c



(c) Contrainte horizontale totale le long de la médiane entre deux alvéoles



(d) Contrainte effective horizontale le long de la médiane entre deux alvéoles

FIGURE 6-16 – Résultats de la modélisation numérique du stockage

Les figures (6-16b), (6-16c) et (6-16d) tracent l'évolution respective de la pression p , la contrainte horizontale totale σ_{xx} et la contrainte effective σ_{xx}^{eff} le long de l'axe de symétrie entre les alvéoles à l'instant critique t^* . On retrouve des conclusions similaires à celles proposées dans la résolution analytique, notamment la dominance d'un état de contrainte totale en compression et la présence d'une contrainte effective en traction lorsque la surpression est plus importante que la contrainte totale. Cette traction est maximale sur le plan de symétrie entre deux alvéoles, et disparaît lorsque

la configuration géométrique est supérieure à $\eta_c \simeq 3$. En d'autres termes, la contrainte effective n'est pas en traction pour un espacement entre les alvéoles de l'ordre de $6R$ (~ 6 m).

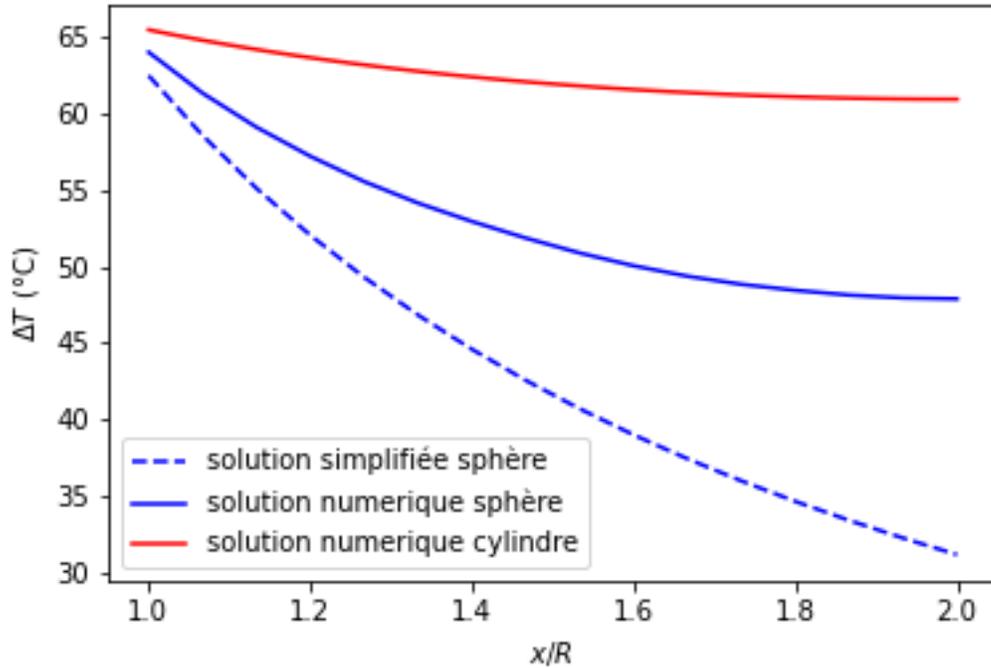


FIGURE 6-17 – Variation de la température en fonction de x depuis la source de chaleur pour les deux résolutions numérique et théorique

La différence notable entre les deux résolutions réside dans l'intensité de la contrainte effective et de la taille maximale où celle-ci est en traction $\eta_c \simeq 3$ pour la résolution numérique et $\eta_c = 1.28$ pour la modélisation simplifiée. Cette observation confirme l'importance de la représentation géométrique des alvéoles et de la bonne gestion de l'interaction des champs issus des deux sources thermiques puisqu'elle augmente, pour un espacement donné, la probabilité de créer une zone de traction en contrainte effective. Dans le but de mettre en évidence ces effets, il est utile de confronter ces résultats avec les résultats analytiques obtenues à la section 6.5.1. Pour cela on se place, en régime transitoire, à l'instant t_c où la température au niveau de la paroi des alvéoles de stockages est maximale. En considérant une configuration géométrique définie par $\eta = 2$, on trace (Figure 6-17) les variations de la température le long de

l'axe horizontal x obtenues par résolution numérique transitoire, pour des sources de chaleur sphériques de rayon R en 3D et cylindriques dans le plan. On observe que l'évolution de la température, décroissante en $\frac{1}{x}$, pour la modélisation simplifiée (6.9) sous-estime le champ de température réel en présence de deux sources de chaleur. En effet, pour une même géométrie sphérique (les courbes en bleu), l'interaction entre deux sources de chaleur espacées de $4R$ augmente l'intensité de la température lorsque l'on s'approche du plan médian $x = 2R$. Le choix d'une géométrie cylindrique pour les sources de chaleur, plus proche de la représentation réelle des alvéoles, augmente encore plus l'intensité de la température lorsque l'on s'approche du plan médian.

A contrario, les intensités de la contrainte thermique et de la surpression sont nettement plus importantes dans la modélisation numérique (plus respectueuse des conditions in-situ) (Figures 6-18).

On retrouve aussi (Figure 6-18b) que la contrainte totale en $y = 0$ est plus faible lorsque l'on se place en condition de symétrie par périodicité (résolution numérique).

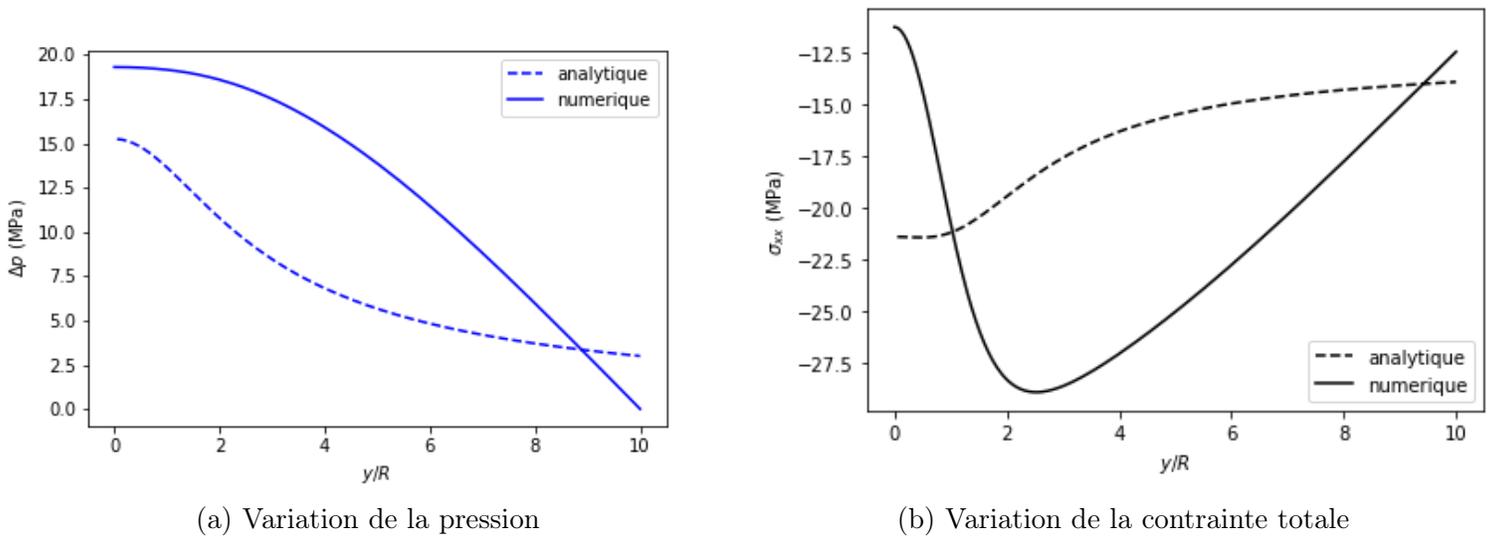


FIGURE 6-18 – Comparaison entre les variations de la pression et de la contrainte horizontale totale le long du plan de symétrie entre les alvéoles pour les deux résolutions numérique et théorique

La présence d'une surpression plus importante à cause d'un échauffement par deux sources de chaleur en plus d'une contrainte totale plus faible en $y = 0$ conduisent à l'apparition d'une traction en contrainte effective plus intense pour des espacements

η plus grands (Figure 6-19). On conclut donc que la prise en compte de manière plus

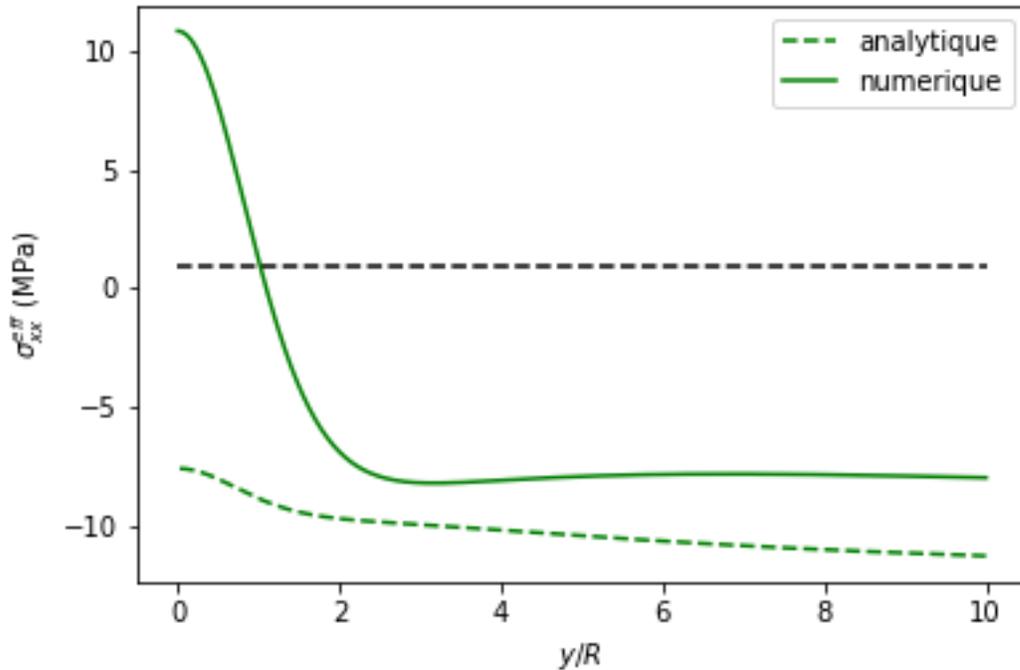


FIGURE 6-19 – Variation de la température le long du plan de symétrie entre deux alvéoles ($\eta = 2$) pour les deux résolutions numérique et théorique

rigoureuse de la distribution périodique des alvéoles de stockage de forme cylindrique (en déformations planes) et de l'interaction entre ces sources thermiques conduit à la présence d'une contrainte effective en traction beaucoup plus avancé.

On rappelle que l'existence d'une zone en traction représente un pré-requis à tout scénario de nucléation. Toute l'analyse conduite jusqu'à présent montre que l'utilisation d'un critère en contrainte effective permet d'envisager un scénario de nucléation de fissures verticales entre les alvéoles de stockage en $y = 0$. Il ne reste à présent qu'à évaluer la possibilité de cette nucléation à l'aide du critère énergétique et de déterminer éventuellement la taille des fissures et l'instant de leur apparition dans les conditions définies.

6.6 Nucléation de fissure dans la zone de stockage

6.6.1 modélisation de la fissuration

L'analyse de la nucléation s'appuie sur la considération d'un état avant et d'un état après nucléation pour déterminer le taux de restitution d'énergie incrémental (5.2). Sur la base de l'analyse réalisée dans les sections précédentes, la modélisation du milieu fissuré consiste à introduire une discontinuité géométrique de taille ℓ en $y = 0$ le long de l'axe vertical entre les deux sources de chaleur représentés par des cercles de rayon R en déformations planes (fidèle à la géométrie cylindrique réelle) et espacées entre elles d'une distance $L = \eta D$.

Le problème initial est défini de manière similaire à celui présenté dans la section 6.5.2 de la résolution numérique. L'état fissuré correspond à l'introduction d'une fissure caractérisée par un déplacement libre en $y \in [0, \ell]$ en vérifiant à tout instant la condition de non pénétration des deux surfaces de la fissure ($[[\xi]] \cdot \underline{n} \geq 0$). Les conditions aux limites mécaniques s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 y \rightarrow \infty : & \quad \underline{T} = \underline{\sigma}_0 \cdot \underline{e}_y \\
 (x, y) \in (\mathcal{C}) : & \quad \underline{T} = p_{int} \cdot \underline{e}_r \\
 x = \eta R ; 0 < y < \ell : & \quad \underline{T} = \underline{0} \\
 x = \eta R ; \ell < y < L : & \quad \xi_x = 0 \\
 x = 0 ; y > R : & \quad \xi_x = 0 \\
 y = 0 ; R < x < \eta R : & \quad \xi_y = 0
 \end{aligned}$$

On rappelle que le critère de nucléation énergétique utilisé stipule que nous avons une nucléation de fissure si l'énergie emmagasinée dans le milieu est suffisante pour créer de nouvelles surfaces et que celles-ci sont stables. En d'autres termes, le taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc} doit atteindre l'énergie critique G_c en son maximum (2.14). Ce taux de restitution d'énergie incrémental dépend notamment de la géométrie et du chargement du problème. Pour notre calcul transitoire, $G_{inc}(\ell, t)$ est une fonction du temps t et de la taille de la fissure ℓ . Pour cela, il est nécessaire

de résoudre les deux problèmes avant nucléation (i) et après nucléation (\mathcal{F}) à chaque pas de temps t et pour chaque incrément de taille de fissure ℓ .

L'expression du G_{inc} est donnée en fonction de l'état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^i$ solution du problème avant nucléation et de la perturbation de déformation $\boldsymbol{\delta\varepsilon} = \boldsymbol{\delta\varepsilon}^{\mathcal{F}} - \boldsymbol{\delta\varepsilon}^i$ selon l'expression (5.21) que l'on réécrit sous la forme:

$$G_{inc}(\ell, t) = -\frac{1}{\ell} \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}^i(t) : \boldsymbol{\delta\varepsilon}(\ell, t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta\varepsilon}(\ell, t) : \mathbb{C}^{u,ad} : \boldsymbol{\delta\varepsilon}(\ell, t) \right) d\Omega \quad (6.14)$$

L'analyse de la convergence du calcul numérique (Tableau 6.2) montre que le choix d'une densité de maillage de l'ordre de $\ell/30$ au niveau de la fissure est suffisante pour avoir une bonne précision des résultats.

Densité	$\ell/20$	$\ell/30$	$\ell/40$
Nombre de Noeuds	5 797	21 923	100 000
Variation G_{inc}/G_{inc}^*	0.9485	1.0043	1
temps de calcul	30min	2h30min	10h

TABLE 6.2 – Convergence du calcul numérique pour la nucléation de fissure entre les alvéoles de stockage

Nucléation d'une fissure dans un état non confiné ($\sigma_0 = 0$)

On considère, dans un premier temps, la situation la plus défavorable qui correspond à un état non confiné du milieu ($\sigma_0 = 0$). Nous avons montré (Section 6.5.1) que cette situation maximise la traction en contrainte effective dans le stockage.

Le calcul du taux de restitution d'énergie incrémental à chaque pas de temps et de taille de fissure permet de tracer la Figure (6-20). Elle montre l'évolution de $G_{inc}(\ell, t)$ pendant la phase transitoire du stockage pour une configuration géométrique définie par $\eta = 1.35$. On observe que la courbe de $G_{inc}(\ell)$ augmente au cours du temps jusqu'à atteindre un maximum en $t^* \simeq 3$ ans avant de s'affaiblir progressivement. Cette évolution correspond bien aux phases de réchauffement et refroidissement du chargement thermique. De plus, on observe que le taux de restitution d'énergie incrémental

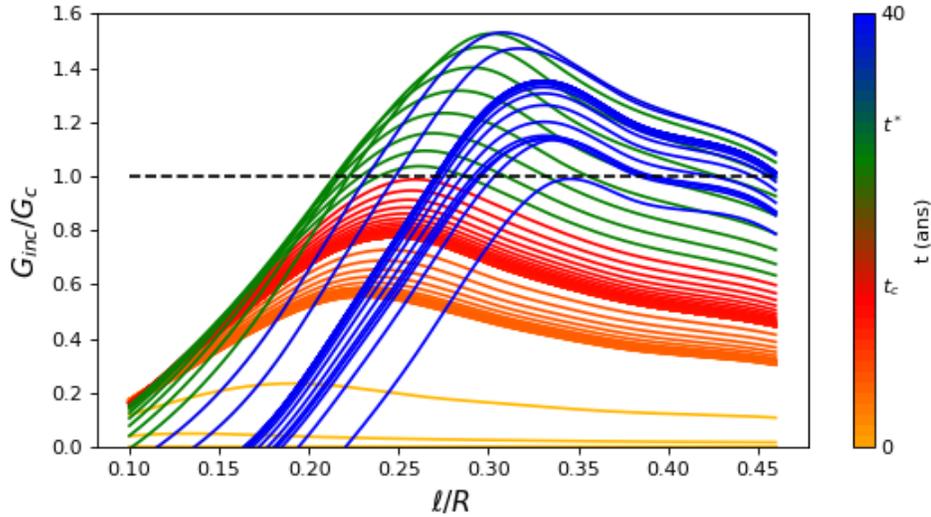


FIGURE 6-20 – Variation du taux de restitution d'énergie incrémental $G_{inc}(\ell, t)$ à différents instants pour une configuration géométrique définie par $\eta = 1.35$

présente bien un maximum ce qui implique qu'une nucléation de fissure est possible. Pour une valeur numérique du seuil critique $G_c = 26 \text{ Pa.m}$, une fissure de taille $\ell_c \simeq 0.26 R$ nucléée après environ $0.1 t^*$ soit $t_c \simeq 75$ jours du début du dégagement de chaleur par les colis.

On étudie par la suite l'effet de l'espacement entre les alvéoles de stockage sur la nucléation en faisant varier le paramètre d'espacement η . On trace figure (6-21) la courbe de $G_{inc}(\ell)$ à l'instant t_c où celles-ci atteignent le seuil critique G_c . On observe que la nucléation de fissure est possible pour des valeurs d'espacement allant jusqu'à $\eta = 1.45$. Aucune nucléation de fissure n'est possible au delà de cet espacement pour la valeur de G_c considérée. Cette observation est confirmée par le graphe (figure (6-22b)) qui trace l'évolution de l'instant critique de nucléation $t_c(\eta)$ en fonction du paramètre d'espacement η . On observe en particulier que t_c est croissant avec le paramètre d'espacement η tout en restant inférieur au pic de chaleur $t_c \leq t^*$.

L'instant critique t_c où la nucléation de fissure survient dépend de la diffusion thermique dans le stockage définie par son pic thermique t^* . La nucléation est de ce fait retardée lorsque les sources de chaleur sont éloignées. Cette conclusion est compatible avec l'analyse thermique conduite dans la section (6.4) qui relie l'intensité du champ

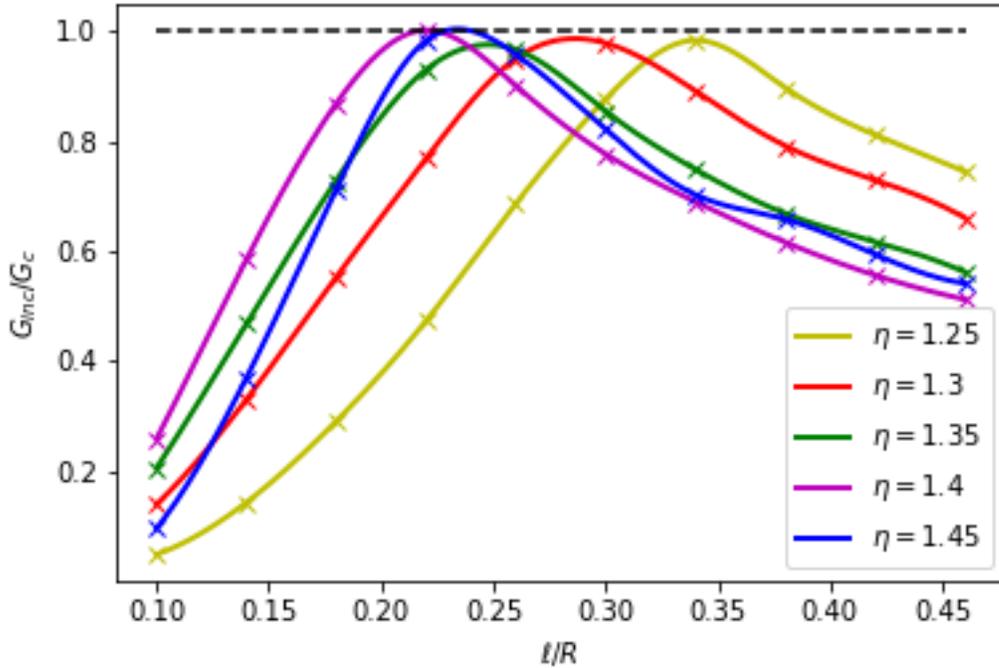
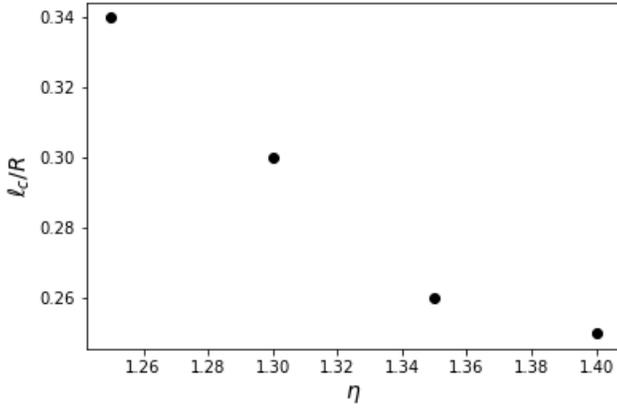


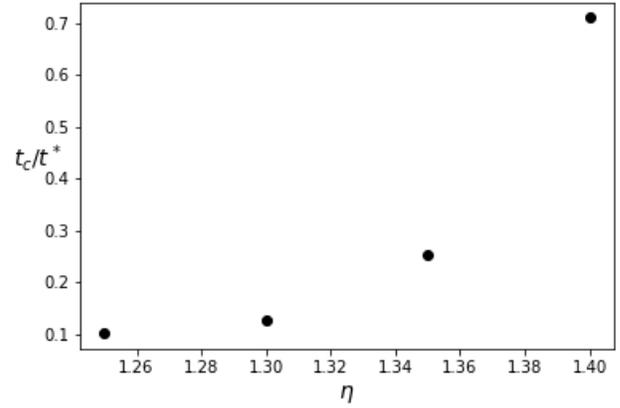
FIGURE 6-21 – courbes de $G_{inc}(\ell)$ à l’instant critique de nucléation pour différentes valeurs de η

thermique à l’espacement géométrique entre les alvéoles. Lorsque cet espacement est faible, l’intensité de la variation de température est plus grande ce qui implique un taux de restitution d’énergie plus important et ainsi une nucléation plus rapide. Au delà d’un espacement de $1.45 R$ la nucléation de fissure n’est plus possible puisque le taux de restitution d’énergie incrémental n’atteint jamais le seuil d’initiation G_c . La taille de fissure ℓ_c diminue plus les alvéoles de stockage sont éloignées les unes des autres. Avec des tailles de fissure allant de $\ell_c \simeq 0.34 R$ pour $\eta = 1.25$ jusqu’à $\ell_c \simeq 0.24 R$ pour $\eta = 1.4$ (Figure 6-22a).

On conclut qu’en l’absence d’un état de confinement, si la disposition des alvéoles de stockage est suffisamment dense ($< 1.45 R$), on prédit une nucléation de fissure entre ces alvéoles. Cette nucléation survient pendant la phase d’échauffement du milieu, avec des tailles de fissures de l’ordre de $0.34 R$ pour les valeurs numériques considérées.



(a) Variation de la longueur de nucléation pour différents espacements η



(b) temps critique de nucléation pour différents espacements η

FIGURE 6-22 – Paramètres de nucléation en fonction de l'espacement

En présence d'un état de confinement in-situ

Un moyen de s'opposer à cette nucléation de fissure consiste à réduire l'intensité de la contrainte effective. Nous avons montré dans l'analyse du comportement thermo-poro-mécanique (6.5.1) qu'un état initial de contrainte en compression limite la présence d'une contrainte effective en traction au voisinage proche des sources de chaleur. A partir de cette conclusion, on s'attend à ce que la prise en compte de l'état de compression initial in-situ empêche tout mécanisme de nucléation.

Une résolution numérique du problème de nucléation dans ces conditions proches de la situation réelle montre, en présence d'un état de contrainte en compression in-situ ($\sigma_0 = 12.5$ MPa), que le taux de restitution d'énergie incrémental n'atteint jamais le seuil de nucléation de fissure. Il est en particulier évanescent $G_{inc} \rightarrow 0$. Cette observation tient son origine dans le fait que le champ de déformation perturbé entre l'état final et initial est asymptotiquement nulle $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} - \boldsymbol{\varepsilon}^i \simeq 10^{-16}$. En effet la relation proportionnelle entre le taux de restitution d'énergie incrémental et le taux de perturbation de déformation explicitée dans (6.14) montre qu'un état de déformation en condition fissurée équivalent à l'état de déformation non fissurée ($\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{F}} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}^i$) n'est pas associé à une restitution d'énergie assez grande pour nucléer une fissure.

L'analyse proposée dans ce cas suggère que l'état de contrainte in-situ en compression exclu le risque de nucléation de fissure pour l'intensité de flux de chaleur considéré $\Delta T^{max} \simeq 60^\circ\text{C}$. D'autre part, la configuration géométrique réelle du stockage envisage un espacement entre les alvéoles au moins 5 fois le diamètre des alvéoles ($\eta = 5$) qui est suffisamment éloigné pour réduire l'interaction entre les alvéoles et réduire encore plus le risque de nucléation.

Le stockage en profondeur de déchets exothermique est confronté à un risque de nucléation de fissure en mode I. Celui-ci est accentué par l'intensité du dégagement de chaleur, représenté par l'élévation du champ de température dans le massif, et par l'interaction entre les différentes alvéoles de stockage disposées périodiquement. Dans le cas d'une roche hôte saturée avec une faible perméabilité hydraulique, la surpression thermique est l'élément moteur d'une possible nucléation de fissure entre les alvéoles de stockage dans le cadre d'un critère en contrainte effective. Cette piste est confirmée grâce au critère énergétique qui prédit une nucléation de fissure dans certaines conditions de chargement et d'espacement pendant la phase transitoire de l'échauffement.

Par la suite, l'évolution du chargement thermique entre l'instant de nucléation et le pic de température peut envisager une propagation stable de la fissure nucléée. Cependant une gestion précise du couplage entre la diffusion thermique et la ressaturation de la fissure supposée sèche est nécessaire pour se prononcer sur l'évolution de la fissure. D'un autre côté, la diffusion de la température emmagasinée à l'intérieur de la fissure suite à la nucléation est favorable à la propagation de la fissure. En effet, contrairement à la problématique du choc thermique (Chapitre 4) où le moteur de la propagation est une contraction par chute de température, l'élévation de la température à l'intérieur de la fissure dans le cas de la problématique du stockage de déchets exothermique en milieu poreux est favorable à l'évolution de la fissure.

Il est important de souligner que l'on a écarté, pour des raisons de simplification, la prise en compte de l'état endommagé de l'argilite autour des alvéoles. Il est évident que la prise en compte de cet endommagement est susceptible de modifier

significativement la cadre d'analyse, notamment sur la comparaison des temps caractéristiques des phénomènes thermique et hydraulique. Nul doute qu'il conviendrait de mener une étude détaillée dans l'esprit de celle présentée. Néanmoins, il semble raisonnable d'anticiper que la présence d'une zone fracturée autour des alvéoles milite contre la nucléation de fissure. En effet la perméabilité élevée de la roche conduit à une ressaturation progressive du champ proche ce qui réduit la surpression thermique.

6.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons cherché à étudier les risques de nucléation de fissure dans le contexte du projet industriel de stockage de déchets radioactifs. En particulier on s'est intéressé à la phase post-fermeture dominée par des sollicitations thermiques liées aux dégagement de chaleur des déchets. Après avoir précisé le cadre d'analyse thermo-hydro-mécanique couplée, nous avons présenté une stratégie de modélisation local au voisinage des galeries.

Les phénomène de transfert thermique étant découplé du comportement hydro-mécanique, il est possible d'analyser le champ de température dans le massif rocheux de manière dissociée des autres variables d'état. On retrouve que la puissance thermique dégagée par les déchets suppose une sollicitation thermique en flux décroissant au niveau des paroi de chaque alvéole de stockage ce qui engendre une phase de surchauffe du champ de température suivit d'un retour à l'état naturel par refroidissement progressif. L'intensité de ce champ de température est contrôlé principalement par la puissance thermique des déchets stockés, leur vitesse de désintégration et par la disposition géométrique des alvéoles. Après avoir établi la distribution du champ de température dans le milieu, une analyse thermo-poro-mécanique a été conduite dans le but de dégager les zones susceptibles de s'endommager par nucléation de fissure en mode I. Une première modélisation simplifiée du stockage a permis de proposer un support d'analyse théorique qui révèle que le chargement thermique est susceptible d'induire un état de contrainte effective en traction à cause du mécanisme de pressurisation thermique. Cette pressurisation thermique reprend l'effet de la dilatation

thermique différentielle entre les deux phases fluide et solide et un effet supplémentaire non négligeable lié à la non uniformité du champ de température qui dépend de la dilatation thermique solide uniquement. Par la suite, cette modélisation a été enrichies numériquement en considérant une représentation plus complète et rigoureuse du stockage.

En l'absence de couplages poromécaniques, l'état de compression in-situ couplé aux contraintes thermiques de compression en présence d'un échauffement interdit tout scénario de nucléation de fissure en mode I. La prise en compte des couplages poromécaniques pose la question de l'écriture du critère en contrainte totale ou en contrainte effective. En contrainte totale, le rôle de l'état de compression initial et des contraintes thermiques est inchangé, de sorte que la nucléation de fissure n'est pas envisagée. En contrainte effective, par contre, on a montré qu'il était possible de mettre en évidence des zones de traction dans l'environnement des alvéoles de stockage. La pressurisation thermique apparaît comme le moteur de cette mise en traction puisque son intensité (composante de traction) est susceptible de dominer sur toute les contributions compressives, selon l'intensité du chargement thermique et l'espacement entre les alvéoles. On identifie en particulier une localisation potentielle d'une fissuration verticale au niveau du plan de symétrie entre deux alvéoles adjacentes. La modélisation numérique (sous Cast3M) a permis de mieux appréhender l'effet d'interaction entre les sources de chaleur en mettant en avant une plus grande intensité de la contrainte effective en traction. L'évaluation de la nucléation de fissure à l'aide du double critère énergétique prédit finalement l'apparition d'une fissure pendant la phase d'échauffement du milieu (phase transitoire) avec des tailles de fissures de l'ordre de $0.24 - 0.34 R$ pour les données numériques considérées. Nous avons montré que cette nucléation est possible dans certaines conditions de chargement en l'absence d'un état de contrainte de confinement in-situ et pour un espacement entre les alvéoles ne dépassant pas $1.45 D$. En revanche, la prise en compte de l'état de compression in-situ semble interdire tout scénario de nucléation de fissure même en contrainte effective. En particulier, on peut conclure à l'issue de ce travail que les conditions réelles du stockage en terme de chargement thermique avec une température maximale ne dépassant pas 90°C et

de configuration géométrique avec un espacement de l'ordre de $5D$, sont suffisamment sécuritaires pour éviter toute nucléation de fissure en mode I sous l'action du chargement thermique issu des déchets exothermiques.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

7.1 Conclusions

Le travail proposé s’inscrit dans le contexte du projet industriel de stockage en profondeur des déchets radioactifs à Bure (projet CIGEO/ANDRA), avec comme objectif d’étudier le comportement à long terme du site. En particulier, il aborde les risques de nucléation de fissures dans la roche hôte liés au dégagement de chaleur des déchets après fermeture du stockage. Partant d’une formulation purement énergétique du critère de nucléation de fissure proposée par T. Carlioz [10], nous nous sommes intéressés dans un premier temps au cadre thermodynamique approprié pour traiter la problématique de nucléation. Celui-ci se réfère à une évolution adiabatique pour un matériau thermoélastique (chapitre 2) et à une évolution adiabatique non-drainée pour un milieu poreux saturé par un fluide (chapitre 5). En effet, compte tenu du caractère brutal de la nucléation, il semble judicieux de considérer ce cadre plutôt qu’une évolution isotherme classiquement utilisée. Cette étude a permis de mettre en place une formulation simple mais rigoureuse de l’expression du taux de restitution d’énergie incrémental G_{inc} qui met en oeuvre la variation de l’énergie interne entre l’état final où la fissure a nucléé et l’état initial avant nucléation. On montre alors que pour un comportement thermoélastique cette variation d’énergie interne n’est autre que l’énergie élastique du champ perturbé exprimée à l’aide du tenseur d’élasticité

adiabatique (2.53), tandis que pour un milieu poreux dont le comportement est thermoporoélastique, elle s'exprime par le tenseur d'élasticité adiabatique non-drainée (5.20).

Un résultat important de cette première partie est l'accès à l'expression analytique de l'élévation de la température à l'intérieure de la fissure suite à la nucléation en fonction des propriétés du matériau et de l'épaisseur de la fissure (2.63) pour le cas thermoélastique et (5.24) pour le milieu poreux saturé. Cette expression découle de la représentation de la fissure comme une zone macroscopique tridimensionnelle appartenant au domaine d'étude dans un état d'endommagement asymptotique ultime qui n'est plus capable de reprendre les efforts mécaniques. Néanmoins des éclaircissements doivent être apportés à cette représentation dans le cas d'un milieu poreux saturé notamment avec la présence initiale de fluide dans la zone fissurée. Dans un premier temps nous avons considéré une fissure nucléée sèche libre de contrainte. L'évaluation de la nucléation à l'aide du double critère énergétique dans ce cas est similaire au cas thermoélastique où le taux de restitution d'énergie incrémental est égal au rapport entre la variation de l'énergie interne du milieu et la taille de la fissure (5.21). La deuxième représentation consiste à supposer que la fissure nucléée est saturée par le fluide, à une pression $p^{\mathcal{F}}$ (> 0), qui saturait l'espace poreux avant nucléation. L'estimation de cette pression dans l'état final a été approchée par la solution du problème inclusionnaire d'Eshelby pour une fissure ellipsoïdale aplatie. Ce raisonnement a permis de conclure qu'une fissure nucléée dans son état final ne peut pas être saturée par le fluide. Nous avons montré que la chute de pression dans la fissure associée à la nucléation lorsque l'état de contrainte est en traction ($\sigma > 0$) entraîne l'évaporation du fluide lorsqu'on atteint la pression de cavitation, ce qui nous ramène finalement à une représentation d'une fissure sèche. Du point de vue énergétique, le changement d'état qui se produit est accompagné d'une consommation d'une partie de l'énergie interne destinée initialement à la création de la fissure ce qui milite pour un retard du processus de nucléation par rapport au cas sec.

A la suite de cette étude théorique de la nucléation de fissure, nous avons présenté dans le Chapitre 3 différentes stratégies pour mettre en pratique le critère de nuclé-

tion énergétique accompagnées d'illustrations de problématiques de fissurations afin de cerner au mieux leur efficacité et leur domaine de validité. La première approche consiste à résoudre explicitement les deux problèmes sain et fissuré, ou se ramener par superposition à la résolution d'un problème auxiliaire unique, pour déduire le taux de restitution d'énergie incrémental. Cependant cette résolution est généralement complexe et nécessite une résolution numérique, par éléments finis par exemple. Une seconde méthode de résolution par approche variationnelle fournit une approximation analytique du G_{inc} par un encadrement de cette grandeur avec pour borne inférieure un taux de restitution d'énergie obtenu par une approche variationnelle en déplacement et une borne supérieure par une approche variationnelle en contrainte. Finalement une approche s'appuyant sur les résultats de la mécanique linéaire de la rupture a été présentée. Elle permet de valoriser différentes méthodes de détermination des facteurs d'intensité de contrainte pour traiter la nucléation de fissure. Parmi ces méthodes, on utilise la méthode itérative [37] qui fournit l'expression du facteur d'intensité de contrainte pour une fissure chargée d'une distribution de pression quelconque. Ces méthodes s'appuient sur la relation entre les facteurs d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie incrémental (3.56) en mode I.

La comparaison entre ces différentes stratégies a été abordée dans le contexte de la problématique de nucléation de fissures en mode I sous choc thermique dans le Chapitre 4. Les différentes approches sont en mesure de prédire l'instant exact d'apparition de ces fissures ainsi que leur configuration dans la structure. Si l'on considère que la résolution numérique par éléments finis est la solution de référence, on retrouve que l'approche variationnelle en déplacement est la plus efficace et vérifie bien son statut de borne inférieure du taux de restitution d'énergie incrémental, l'approche itérative est légèrement moins efficace que l'approche variationnelle mais représente la méthode la plus facile et la plus efficace à utiliser. Par la suite, Une attention particulière a été portée sur l'évolution de ces fissures nucléées en lien avec la diffusion thermique, puisque la nucléation des fissures survient pendant la phase transitoire. On considère dans ce cas deux scénarios d'évolution possibles: une propagation des fissures existantes, ou bien, la nucléation de nouvelles fissures entre les fissures exis-

tantes. On montre à l'aide du critère de propagation quasi-statique des fissures et du double critère énergétique de nucléation que les deux scénarios considérés sont possibles et qu'il existe des phases, contrôlées par le paramètre d'espacement, où la nucléation est dominante et d'autres où la propagation domine. On identifie un état stable lorsque les fissures sont trop rapprochées de sorte qu'aucune nucléation ou propagation n'est possible.

Finalement, le travail réalisé aboutit à l'étude des risques de nucléation de fissure dans le contexte du projet industriel de stockage de déchets radioactifs. On montre à partir d'une analyse thermo-poro-mécanique du comportement local proche de la zone de stockage qu'une nucléation de fissure verticale en mode I entre les alvéoles de stockages est envisageable par traction de la contrainte effective. La pressurisation thermique, pendant l'échauffement du stockage, apparaît comme le moteur de cette mise en traction puisque son intensité est susceptible de dominer sur toute les contributions compressives, selon l'intensité du chargement thermique et l'espacement entre les alvéoles. L'évaluation de la nucléation de fissure à l'aide du double critère énergétique prédit finalement l'apparition d'une fissure pendant la phase d'échauffement du milieu (phase transitoire) avec des tailles de fissures de l'ordre de $0.24 - 0.34 R$ pour les données numériques considérées. Nous avons montré que cette nucléation est possible dans certaines conditions de chargement en l'absence d'un état de contrainte de confinement in-situ et pour un espacement entre les alvéoles ne dépassant pas $1.45 D$. En revanche, la prise en compte de l'état de compression in-situ semble interdire tout scénario de nucléation de fissure même en contrainte effective. En particulier, on peut conclure à l'issue de ce travail que les conditions réelles du stockage en terme de chargement thermique de configuration géométrique avec un espacement de l'ordre de $5 D$, sont suffisamment sécuritaires pour éviter toute nucléation de fissure en mode I sous l'action du chargement thermique issu des déchets exothermiques.

7.2 Perspectives

Le travail proposé fournit les bases théoriques ainsi que les outils capable d'aborder diverses problématiques de nucléation de fissure notamment pour les fissures en mode I et II. Le choix de ces types de fissures ne représente pas une limitation du critère, il serait donc intéressant de se tourner vers des applications qui font intervenir d'autres types de fissures fermées en mode III ou encore des fissures en mode mixte afin d'élargir les résultats proposés.

Conscient des difficultés que peut présenter une approche expérimentale pour la nucléation de fissure stable, elle en reste cependant un moyen puissant pour valider le critère énergétique que ce soit pour quantifier les temps caractéristiques de la nucléation, la taille des fissures et le chargement critique ou encore pour évaluer l'élévation de température suite à la nucléation.

Un autre point que nous avons abordé et qui nécessite d'avantage d'éclaircissement est celui de la cavitation lors de la nucléation en milieu saturée (Section 5.2.3). Il serait intéressant d'aborder cette problématique à une échelle plus fine dans le but d'évaluer la fraction massique de l'eau liquide qui est susceptible de s'évaporer en plus de l'évolution du taux de restitution critique G_c^* dans ce cas. Ce travail peut être accompagné par une campagne expérimentale visant à caractériser la nouvelle constante matériau de création de nouvelles surfaces pour un milieu saturée.

Le chapitre 4 (section 4.3) propose une évaluation de l'évolution du système de fissures existant lors d'un choc thermique à partir d'une compétition entre la nucléation de nouvelles fissures et la propagation de fissures existantes. Cette analyse peut être approfondie d'avantage en considérant d'autres scénarios d'évolution comme la bifurcation de certaines fissures ou encore la nucléation de fissures individuelles.

Finalement la problématique de stockage en profondeur des déchets radioactives présente plusieurs opportunités d'approfondissement qui peuvent s'inscrire dans le cadre des remarques évoquées précédemment d'évaporation partielle ce qui conduirait à un retardement de la nucléation ou encore la prise en compte de l'élévation de la température lors de l'apparition d'éventuelles fissures. Il est intéressant aussi d'enrichir le

modèle de comportement à long terme de l'argilite de manière à prendre en compte d'autres phénomènes qui peuvent influencer la nucléation comme le fluage ou encore aborder l'aspect physico-chimique d'une diffusion de radionucléides sur la nucléation.

Annexe A

Représentation de l'objet fissure

A.1 Représentation idéalisée et Potentiels d'Airy

Pour les problèmes plans, une méthode classique pour étudier les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure consiste à s'appuyer sur l'utilisation du potentiel de contrainte d'Airy et fait appel à des fonctions analytiques. Dans le cas d'une représentation plane idéalisée de l'objet fissure, l'état de contrainte local au voisinage de la pointe est relié au potentiel d'Airy Φ par les relations suivantes, dans un système de coordonnées cylindriques ayant comme origine la pointe de fissure (Figure A-1):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \quad (\text{A.1})$$

En l'absence de forces à distance, ce champs de contrainte vérifie automatiquement les conditions d'équilibre locales:

$$\underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} = \underline{0} \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire isotrope, il suffit que la fonction d'Airy soit biharmonique pour vérifier simultanément l'équilibre et la compatibilité



FIGURE A-1 – Repère local au niveau de la pointe de fissure

géométrique:

$$\Delta\Delta\Phi = 0 \quad (\text{A.3})$$

L'expression de la solution de l'équation (A.3) pour des structures fissurées a été proposée par Williams dans [69] sous la forme de développement en séries en puissance de r qui se met sous la forme:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+\frac{3}{2}} \alpha_n \left[\cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta - \frac{2n+3}{2n-1} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta \right] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2} [\beta_n \cos(n+2)\theta + \gamma_n \cos n\theta] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où les coefficients α_n , β_n et γ_n sont des fonctions du chargement appliqué et de la taille caractéristique de la fissure.

- Pour une fissure libre de contraintes, l'expression (A.4) se simplifie par la condition ($\gamma_n = -\beta_n$) de sorte que la fonction d'Airy s'écrit:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+\frac{3}{2}} \alpha_n \left[\cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta - \frac{2n+3}{2n-1} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta \right] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2} \beta_n [\cos(n+2)\theta - \cos n\theta] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

- Dans le cas d'une fissure chargée par une distribution de pression $p(r)$ (Figure A-2). Une expansion sous forme de série de puissance de r de la pression $p(r)$ permet de simplifier l'expression de la fonction d'Airy en ajustant les termes de même puissance de r afin de satisfaire les conditions aux bords de la fissure. On retrouve alors la relation reliant les coefficients β_n et γ_n au chargement appliqué.

$$\gamma_n = (-1)^{n+1} \frac{p_n}{(n+1)(n+2)} - \beta_n$$

Ce qui permet de simplifier l'expression de la fonction d'Airy sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+\frac{3}{2}} \alpha_n \left[\cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta - \frac{2n+3}{2n-1} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta \right] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2} \left\{ \beta_n [\cos(n+2)\theta - \cos n\theta] + (-1)^{n+1} \frac{p_n}{(n+1)(n+2)} \cos n\theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

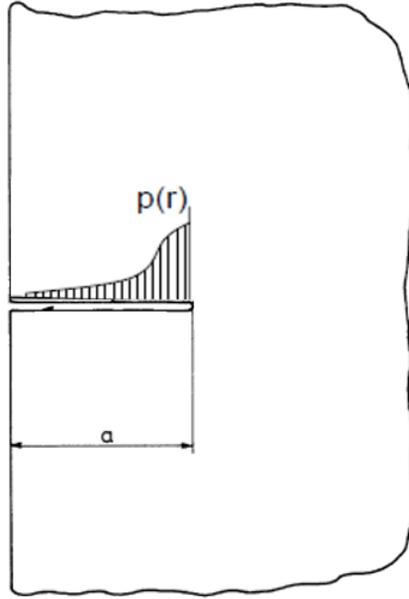


FIGURE A-2 – Fissure chargée d'une distribution de pression $p(r)$

A partir de cette définition de Φ , il est possible d'accéder au champ de contraintes à partir des relations présentées en (A.1). C'est surtout le terme singulier associé à la puissance ($r^{3/2}$) de la fonction d'Airy qui traduit la singularité de contraintes au voisinage de la pointe de fissure. Ce terme est d'ailleurs de nature géométrique et ne fait pas intervenir les actions de type pression susceptibles d'être considérées sur la fissure et s'écrit dans le repère polaire locale à la fissure [56]:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \left(-\cos \frac{3\theta}{2} + 5\cos \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left(3\sin \frac{3\theta}{2} - 5\sin \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left(3\cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \left(\cos \frac{3\theta}{2} + 3\cos \frac{\theta}{2} \right) - 3K_{II} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad \text{en déformations planes}$$

où on introduit la notion de facteurs d'intensité des contraintes $K_{I,II}$ ($MPa\sqrt{m}$) [41]. K_I est associé à une ouverture de fissure en mode I et K_{II} à un glissement en mode II. Ces facteurs d'intensité de contrainte mesure la singularité de contrainte en pointe de fissure, et sont définis de la façon suivante:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (\text{A.7})$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{r\theta}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (\text{A.8})$$

Fissure en mode I

On considère un milieu contenant une fissure en ($y = 0$ et $|x| < a$) et soumis à une traction dans la direction Oy à l'infini. L'état de contrainte lointain $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ est défini par: $\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$ et $\sigma_{yy}^\infty = \sigma_\infty$ ($\sigma_\infty > 0$).

La représentation idéalisée de la fissure impose les conditions de discontinuité du vecteur déplacement et de vecteur contrainte nulle. On écrit alors pour ($y = 0^+$ et $|x| < a$): $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ et $[[\xi_y]] > 0$.

La solution en déplacement du problème le long de la fissure est donnée dans [22] et s'écrit:

$$y = 0^+ ; |x| < a : \underline{\xi} = \frac{\sigma_\infty(1 - \nu^2)}{E} (-x \mathbf{e}_x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \mathbf{e}_2) \quad (\text{A.9})$$

Le saut de déplacement à travers la fissure s'écrit:

$$|x| < a : \llbracket \xi \rrbracket = 4(1 - \nu^2) \frac{\sigma_\infty}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \underline{e}_y \quad (\text{A.10})$$

De même le champ de contrainte dans le plan s'écrit:

$$\sigma_{xx} = \sigma_\infty \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (\text{A.11})$$

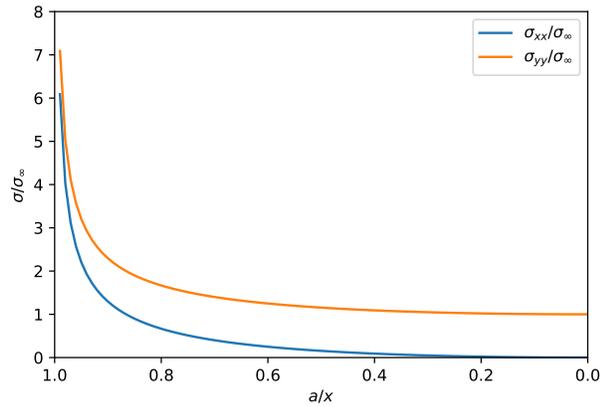
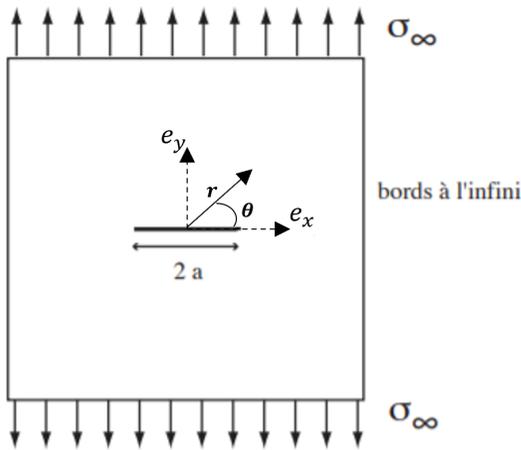
$$y = 0; |x| > a : \sigma_{yy} = \sigma_\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (\text{A.13})$$

On retrouve la singularité de contrainte en pointe de fissure $x \rightarrow a$ (Figure A-3b).

Le facteur d'intensité de contrainte défini par la relation (A.7) devient:

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (\text{A.14})$$



(a) Fissure de Griffith dans un milieu infini en traction à l'infini

(b) Composante radiale $\sigma_{rr}(r, 0)$ au voisinage de la fissure

FIGURE A-3 – Représentation de la singularité de contrainte radiale d'une fissure en traction dans un milieu infini

A.2 Représentation elliptique de la fissure

Une alternative pour la représentation idéalisée d'une fissure de Griffith en 2D est la description de la fissure comme une ellipse aplatie (Figure 2-1b) dont l'équation dans le plan Oxy s'écrit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad (\text{A.15})$$

Avec $X = \frac{c}{a} \rightarrow 0$ désigne le rapport d'aspect.

Approche de type Eshelby

Dans le cadre de cette représentation, la fissure peut être interprétée comme une hétérogénéité qui ne reprend pas les contraintes mécaniques avec un tenseur d'élasticité nul. Cette considération permet d'utiliser les résultats du problème inclusionnaire d'Eshelby [25] pour accéder à la déformation à l'intérieur de la fissure dans le cadre de conditions aux limites uniformes en déplacement.

On considère un milieu infini élastique linéaire isotrope soumis à une déformation uniforme \mathbf{E} à l'infini et contenant une fissure elliptique notée I et.

$$\underline{\xi} \rightarrow \mathbf{E} \cdot \underline{z} \quad ; \quad |\underline{z}| \rightarrow \infty \quad (\text{A.16})$$

Le tenseur de déformation à l'intérieur de l'ellipse I est uniforme et s'écrit sous la forme suivante [25]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = (\mathbb{I} + \mathbb{P}^I : (\mathbb{C}^I - \mathbb{C}_0))^{-1} : \mathbf{E} \quad (\text{A.17})$$

où \mathbb{P} représente le tenseur de Hill d'un ellipsoïde dans un milieu infini fonction des propriétés élastiques définies par le tenseur d'élasticité \mathbb{C}_0 . L'expression explicite de \mathbb{P} pour une inclusion elliptique est présentée dans l'annexe B.

Le tenseur d'élasticité de la fissure étant nul ($\mathbb{C}^I = 0$), l'équation (A.17) devient:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = (\mathbb{I} - \mathbb{P}^I : \mathbb{C}_0)^{-1} : \mathbf{E} \quad (\text{A.18})$$

Solution d'une fissure en mode I

On reprend le chargement présenté dans la section (A.1) où le milieu est soumis à une traction $\boldsymbol{\sigma}^\infty = \sigma_\infty \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$ ($\sigma_\infty > 0$). Afin d'exploiter le résultat présenté dans la section précédente pour un problème d'Eshelby, il est nécessaire de chercher le champ de déformation \mathbf{E} qui correspond au tenseur de déformation à l'infini associé au champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^\infty$. Celui-ci est donné par l'équation d'état de l'élasticité linéaire en déformations planes:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\infty = \mathbb{C}_0^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^\infty = (1 - \nu^2) \frac{\sigma_\infty}{E} \left(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \right) \quad (\text{A.19})$$

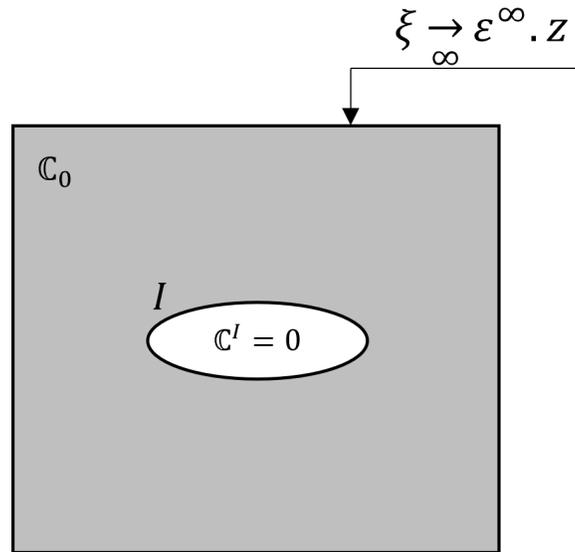


FIGURE A-4 – Problème inclusionnaire d'Eshelby

A partir de l'équation (A.18) et en remplaçant \mathbf{E} par l'expression du tenseur de déformation associée à la contrainte appliquée à l'infini (A.19), on écrit, à partir de l'expression du tenseur de Hill pour une ellipse, l'expression du champ de déformation à l'intérieur de la fissure sous la forme:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = (1 - \nu^2) \frac{\sigma_\infty}{E} \left(\left(\frac{2}{X} + 1 \right) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \right) \quad (\text{A.20})$$

Par ailleurs, le champ de déplacement le long de la fissure étant donné par la

relation $\underline{\xi}^I = \underline{\varepsilon}^I \cdot \underline{z}$, en introduisant l'équation de l'ellipse (A.15) on retrouve:

$$\xi_x = -(1 - \nu^2) \frac{\sigma_\infty}{E} x \quad (\text{A.21})$$

$$\xi_y = \pm(1 - \nu^2) \frac{\sigma_\infty}{E} \sqrt{a^2 - x^2} (2 + X) \quad (\text{A.22})$$

Étant donné le rapport d'aspect $X \ll 1$, le saut de déplacement le long de la fissure est défini par la relation suivante:

$$[[\underline{\xi}]] = \lim_{X \rightarrow 0} (\underline{\xi}(x, X\sqrt{a^2 - x^2}) - \underline{\xi}(x, -X\sqrt{a^2 - x^2})) \quad (\text{A.23})$$

Ce qui donne l'expression du saut de déplacement à travers la fissure, similaire à celle obtenu par la fissure de Griffith.

$$[[\underline{\xi}]] = 4(1 - \nu^2) \frac{\sigma_\infty}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \underline{e}_y \quad (\text{A.24})$$

Par ailleurs, la continuité du vecteur contrainte à travers la surface de la fissure ∂I libre de contraintes annule les composantes normale et tangentielle du champ de contraintes $\sigma_{nm} = \sigma_{nt} = 0$. La composante non nulle restante s'écrit:

$$\sigma_{tt} = \frac{E}{1 - \nu^2} \underline{t} \cdot \underline{\varepsilon}^I \cdot \underline{t}$$

En pointe de fissure $x = a$ et $y = 0$, nous avons $\underline{t} = \underline{e}_y$, on obtient:

$$\sigma_{yy} = \sigma_\infty \left(\frac{2}{X} + 1 \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0 \quad (\text{A.26})$$

On retrouve bien la singularité de la contrainte normale à la fissure lorsque le rapport d'aspect tend vers 0, mais contrairement à la fissure de Griffith la contrainte tangentielle est nulle.

Annexe B

Problème d'Eshelby généralisé

On considère un milieu infini homogène obéissant à un comportement élastique linéaire, et \mathbb{C} désigne le tenseur d'ordre 4 d'élasticité. On considère que le milieu est soumis à un état de contrainte initial homogène noté τ .

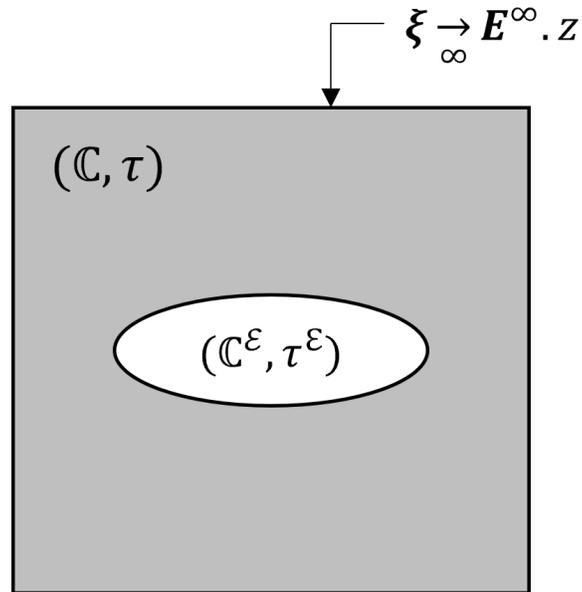


FIGURE B-1 – Problème d'Eshelby généralisé

La loi de comportement du milieu s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.1})$$

A l'intérieur de ce milieu est plongée une inclusion ellipsoïdale (respectivement elliptique en déformation planes) \mathcal{E} . L'équation constitutive de l'inclusion, de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^{\mathcal{E}}$ et soumise à une contrainte initiale uniforme $\boldsymbol{\tau}^{\mathcal{E}}$ s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}^{\mathcal{E}} \quad (\text{B.2})$$

Pour une déformation asymptotique \boldsymbol{E}^{∞} prescrite à l'infini (Figure B-1), le champ de déformation à l'intérieur de l'ellipsoïde est uniforme et s'écrit [22]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{E}} = (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^{\mathcal{E}} - \mathbb{C}))^{-1} : (\boldsymbol{E}^{\infty} - \mathbb{P} : (\boldsymbol{\tau}^{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\tau})) \quad (\text{B.3})$$

où \mathbb{P} est le tenseur de Hill pour un ellipsoïde plongée dans un milieu infini d'élasticité \mathbb{C} .

B.1 Composantes du tenseur de Hill pour une inclusion sphéroïdale

Pour des propriétés élastiques du milieu définies par un coefficient de Poisson ν et un module de Young E , les composantes du tenseur de Hill pour une inclusion sphéroïdale de rapport d'aspect $X = \frac{c}{a}$ sont données dans [22].

En introduisant, pour des raisons pratiques, le tenseur P'_{ijkl} tel que:

$$P'_{ijkl} = (\nu - 1)(1 - X^2)^{5/2} P_{ijkl} E \quad (\text{B.4})$$

On obtient les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
P'_{1111} &= \frac{X(1+\nu)}{16} \left(- (4X^2(4\nu-1) - 16\nu + 13) \operatorname{arccos}(X) \right. \\
&\quad \left. + X\sqrt{1-X^2}(2X^2(8\nu-5) - 16\nu + 19) \right) \\
P'_{3333} &= \frac{(1+\nu)}{2} \left((1-4\nu+4X^2(\nu-1))X \operatorname{arccos}(X) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{1-X^2}(X^2(5-4\nu) - 2 + 4\nu) \right) \\
P'_{1122} &= \frac{X(1+\nu)}{16} \left((1-4X^2) \operatorname{arccos}(X) + X\sqrt{1-X^2}(1+2X^2) \right) \\
P'_{1133} &= -\frac{X(1+\nu)}{4} \left(- (1+2X^2) \operatorname{arccos}(X) + 3X\sqrt{1-X^2} \right) \\
P'_{1212} &= -\frac{X(1+\nu)}{16} \left(\operatorname{arccos}(X)(4X^2(2\nu-1) + 7 - 8\nu) \right. \\
&\quad \left. + X\sqrt{1-X^2}(8\nu-9 + 2X^2(3-4\nu)) \right) \\
P'_{1313} &= \frac{(1+\nu)}{4} \left(\operatorname{arccos}(X)(X^3(1+\nu) + (2-\nu)X) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{1-X^2}((1-\nu)(X^4+2) + 3X^2\nu) \right)
\end{aligned}$$

L'expansion en série de X en $X = 0$ de \mathbb{P} pour un sphéroïde aplati se simplifie sous la forme:

$$\begin{aligned}
P_{1111} &= X \frac{(1+\nu)\pi(16\nu-13)}{32E(\nu-1)} \\
P_{3333} &= -\frac{(1+\nu)}{4E(\nu-1)} (4(1-2\nu) + \pi X(4\nu-1)) \\
P_{1122} &= X \frac{\pi(1+\nu)}{32E(\nu-1)} \\
P_{1133} &= X \frac{\pi(1\nu)}{8E(\nu-1)} \\
P_{1212} &= X \frac{\pi(1+\nu)(8\nu-7)}{32E(\nu-1)} \\
P_{1313} &= \frac{(1+\nu)}{2E} \left(1 - \pi X \frac{2-\nu}{4(1-\nu)} \right)
\end{aligned}$$

Annexe C

Solution de Diffusion thermique

Nous allons dans cette annexe rappeler les résultats analytiques en température solutions de l'équation de diffusion thermique démontré dans [12] pour les deux types de conditions aux limites et pour des géométries différentes. Le transfert thermique par conduction dans un solide qui n'émet pas de chaleur est gouvernée par l'équation différentielle de la température:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{C.1})$$

Où κ (m^2s^{-1}) est le coefficient de diffusivité thermique.

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho C}$$

Dans le cas où une chaleur est émise par le solide, l'équation (C.1) est remplacé par:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} + Q \quad (\text{C.2})$$

C.1 Milieu semi-infini

On examine tout d'abord les solutions pour un milieu semi-infini délimité par le plan $x = 0$ et qui s'étend jusqu'à l'infini en direction de $x > 0$.

Condition au limite en température imposée

Soit $T_0(x)$ la température initial dans le milieu, qui n'est pas forcément uniforme. et $T(0, t)$ la température imposée sur la paroi en $x = 0$ L'équation (C.1) se simplifie dans le cas d'un flux linéaire de la forme:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.3})$$

L'expression du champ de température solution de l'équation différentielle s'écrit dans chaque cas:

Pour une température imposée constante:

$$\begin{cases} T_0(x) = 0 \text{ }^\circ\text{C} \\ T(0, t) = T_s \end{cases} : \quad T(x, t) = T_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$$

Pour le cas général d'une température imposée variable avec le temps, on a:

$$\begin{cases} T_0(x) = 0 \text{ }^\circ\text{C} \\ T(0, t) = F(t) \end{cases} : \quad T(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{x^2}{4\kappa u^2}\right) e^{-u^2} du \quad (\text{C.4})$$

Pour une température initiale non uniforme et une température imposée nulle:

$$\begin{cases} T_0(x) = f(x) \\ T(0, t) = 0 \end{cases} : \quad T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{\infty} f(x') \left(e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\kappa t}} \right) dx'$$

Finalement il est possible de combiner les deux solutions pour une température imposée et une température initiale donnée pour accéder à la solution en température du problème.

Condition au limite en flux imposée

Dans le cas d'une condition au limite en flux imposée $q(0, t) = \phi(t)$ on a:

$$T(x, t) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^t \phi(t - \tau) e^{-\frac{x^2}{4\kappa\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

C.2 Sphère de rayon R dans un milieu infini

On considère une géométrie représentée par un milieu infini contenant une sphère de rayon R . Pour cette géométrie la diffusion thermique est radiale et régit par l'équation de diffusion en coordonnées sphériques de la forme:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{C.5})$$

Par changement de variable $u = rT$, l'équation devient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (\text{C.6})$$

La solution de la variation de température dans le domaine $r > a$ pour une température initial $f(r)$ et une température imposée sur la paroi de la sphère $F(t)$ s'écrit:

$$T(r, t) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi\kappa t}} \int_a^\infty r' f(r') \left(e^{-\frac{(r-r')^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(r+r'-2a)^2}{4\kappa t}} \right) dr' + \frac{2a}{r\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r-a}{2\sqrt{\kappa t}}}^\infty F \left(t - \frac{(r-a)^2}{4\kappa u^2} \right) e^{-u^2} du$$

Pour un flux de chaleur à la paroi de la sphère de la forme:

$$\forall t > 0 \quad ; \quad \Phi(t) = \Phi_0 e^{-t/t^\infty} \quad (\text{C.7})$$

Il est possible d'envisager une résolution par transformée de Laplace, on pose:

$$\Theta(p) = \mathcal{L}\{T\}(p) = \int_0^\infty T(t) e^{-pt} dt \quad (\text{C.8})$$

La solution dans l'espace de Laplace s'écrit:

$$\Theta = \frac{\Phi_0 R^2 t^\infty}{\lambda} \frac{e^{q(R-r)}}{r(1+qR)(1+pt^\infty)} \quad (\text{C.9})$$

Le calcul de la transformée de Laplace inverse conduit finalement à l'expression

suivante du champ de température:

$$T(r, t) = \frac{\Phi(t)R^2}{\lambda r} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{r/R - 1}{2} \sqrt{\frac{t^*}{t}}\right) - \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{t^*}} + \frac{r/R - 1}{2} \sqrt{\frac{t^*}{t}}\right) \right) e^{(r/R-1)} e^{t/t^*} \right) \quad (\text{C.10})$$

où $t^* = \frac{R^2}{\kappa}$. Asymptotiquement pour des temps $t \ll \tau_T$, le régime thermique est permanent et le champ de température vérifie:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\Phi R^2}{\lambda r} \quad (\text{C.11})$$

C.3 Cylindre de rayon R dans un milieu infini

La résolution par transformée de Laplace est une méthode classique pour résoudre l'équation de diffusion dans le cas d'un cylindre circulaire de rayon R dans un milieu infini. Si on se place dans le cas d'un chargement thermique ainsi que pour une température initiale indépendants de la composantes verticale z le long du cylindre et par invariance par rotation θ , il est possible d'écrire l'équation de diffusion de la forme:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{C.12})$$

La solution en variation de la température pour un flux de chaleur Q constant appliqué au niveau du cylindre s'écrit:

$$T(r, t) = -\frac{2Q}{\pi\lambda} \int_0^\infty (1 - e^{-\kappa u^2 t}) \frac{J_0(ur)Y_1(ua) - Y_0(ur)J_1(ua)}{u^2(J_1^2(ua) + Y_1^2(ua))} du \quad (\text{C.13})$$

Où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel à l'ordre 0, définies pour tout réel v par les relations:

$$J_v(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2}z\right)^{v+2r}}{r! \Gamma(v+r+1)} \quad (\text{C.14})$$

$$Y_v(z) = \frac{J_v(z) \cos(v\pi) - J_{-v}(z)}{\sin(v\pi)} \quad (\text{C.15})$$

Annexe D

Solution du modèle analytique simplifié

On considère un milieu poreux saturé infini à température initiale nulle contenant une source de chaleur sphérique de rayon R qui émet un flux thermique constant Φ_0 .

L'équation de diffusion thermique en régime permanent s'écrit en coordonnées sphériques:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

La variation de température en régime permanent en coordonnée sphérique s'écrit:

$$T(r) = \frac{\Phi_0 R^2}{\lambda_T r} \quad (\text{D.1})$$

Le milieu est doté d'un comportement thermoporoélastique homogène isotrope de tenseur d'élasticité isotherme drainé $\mathbf{C}(k_d, \mu)$ caractérisé par la loi de comportement:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}(p - p_0) - \boldsymbol{\kappa}(T - T_0) \quad (\text{D.2})$$

où $k_d = k_s(1 - b)$ avec k_s est le module de compressibilité du squelette solide. On suppose en plus que l'évolution est non-drainé. L'expression de la variation de la

pression s'écrit:

$$p = p_0 - M(\mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon} + L(T - T_0)) \quad (\text{D.3})$$

où $L = -3\bar{\alpha}$ Les symétries du problème conduisent à rechercher le champ de déplacement solution sous la forme:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_r(r) \mathbf{e}_r \quad (\text{D.4})$$

Le champ de déformation solution de l'équation d'équilibre s'écrit en coordonnées sphérique:

$$\xi_r(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r^2} + A_3 \quad (\text{D.5})$$

où A_1 et A_2 et A_3 des coefficients définis à partir des conditions aux limites et du chargement thermique.

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = \frac{R^3}{4\lambda_T} \frac{6R\mu\Phi_0(MLb - \kappa) + \lambda_T\sigma_0(3k_d + 4\mu)}{\mu(3(k_d + Mb^2) + 4\mu)}$$

$$A_3 = -\frac{3}{2} \frac{R^2\Phi_0}{\lambda_T} \frac{MLb - \kappa}{3(k_d + Mb^2) + 4\mu}$$

La variation de pression se met sous la forme:

$$\Delta p = \frac{K_1}{r} \Delta\alpha + \frac{K_2}{r} \alpha_s \quad (\text{D.6})$$

Avec

$$K_1 = \frac{3R^2\Phi_0}{\lambda_T} \frac{\phi_0 M(3k_d + 4\mu)}{3(Mb^2 + k_d) + 4\mu}$$

$$K_2 = \frac{12R^2\Phi_0}{\lambda_T} \frac{Mb\mu}{3(Mb^2 + k_d) + 4\mu}$$

Annexe E

Tableaux fonctions de forme

ℓ/H	d/H=0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.3	0	1.049	1.643	1.859	1.637
0.4	0	1.245	1.990	2.318	2.103
0.5	0	1.546	2.538	2.968	2.825
0.6	0	2.054	3.472	4.080	4.034
0.7	0	3.138	5.274	6.191	6.327

TABLE E.1 – Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 1.25$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]

ℓ/H	d/H=0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.3	0	1.056	1.668	1.871	1.656
0.4	0	1.280	2.009	2.296	2.112
0.5	0	1.568	2.599	2.982	2.824
0.6	0	2.139	3.483	4.101	4.035
0.7	0	3.207	5.229	6.280	6.353

TABLE E.2 – Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 1.00$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]

ℓ/H	d/H=0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.3	0	1.100	1.697	1.864	1.681
0.4	0	1.302	2.038	2.295	2.135
0.5	0	1.614	2.612	3.012	2.842
0.6	0	2.129	3.435	4.099	4.043
0.7	0	3.174	5.209	6.284	6.357

TABLE E.3 – Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 0.75$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]

ℓ/H	d/H=0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.3	0	1.296	1.862	1.961	1.847
0.4	0	1.479	2.242	2.422	2.323
0.5	0	1.676	2.752	3.126	3.007
0.6	0	2.193	3.575	4.249	4.146
0.7	0	3.190	5.240	6.307	6.386

TABLE E.4 – Fonction de forme $F(\ell, d)$ pour $L/H = 0.5$ en fonction de la taille de fissure ℓ et de l'emplacement du chargement d [27]

Bibliographie

- [1] H.-A. Bahr, H.-J. Weiss, U. Bahr, M. Hofmann, G. Fischer, S. Lampenscherf, and H. Balke. Scaling behavior of thermal shock crack patterns and tunneling cracks driven by cooling or drying. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(9):1411–1421, Sept. 2010.
- [2] M. Belmokhtar, P. Delage, S. Ghabezloo, A.-M. Tang, H. Menaceur, and N. Conil. Poroelasticity of the callovo-oxfordian claystone. *Rock Mechanics & Rock Engineering*, 50(4), 2017.
- [3] A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. In *Bifurcation and stability of dissipative systems*, pages 1–44. Springer, 1993.
- [4] J. Bisschop and F. K. Wittel. Contraction gradient induced microcracking in hardened cement paste. *Cement and Concrete Composites*, 33(4):466–473, 2011.
- [5] J. Bluthé. *Modélisation couplée et simulation numérique des phénomènes de colmatage des argilites*. PhD thesis, Paris Est, 2019.
- [6] R. d. Borst, M. A. Gutiérrez, G. N. Wells, J. J. Remmers, and H. Askes. Cohesive-zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1):289–315, 2004.
- [7] B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, and P. Sicsic. Morphogenesis and propagation of complex cracks induced by thermal shocks. *Physical review letters*, 112(1):014301, 2014.
- [8] B. Bourdin, C. Maurini, and M. Knepley. Secondary thermal cracks in eggs: A variational approach. *Transactions-Geothermal Resources Council*, 34:1, 2010.
- [9] H. Bueckner. Novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, 50(9), 1970.
- [10] T. Carlioz. *Nucléation et propagation de fissures en conditions anisotropes*. phd-thesis, Université Paris-Est, Dec. 2017.
- [11] T. Carlioz, L. Dormieux, and E. Lemarchand. Thermodynamics of crack nucleation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, pages 1–17, 2020.
- [12] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. Conduction of heat in solids. Technical report, Clarendon Press,, 1959.

- [13] P. P. Castañeda and J. R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12):1919–1951, 1995.
- [14] A. Chambolle, A. Giacomini, and M. Ponsiglione. Crack initiation in brittle materials. *Archive for rational mechanics and analysis*, 188(2):309–349, 2008.
- [15] R. Charlier, F. Collin, B. Pardoën, J. Talandier, J.-P. Radu, and P. Gerard. An unsaturated hydro-mechanical modelling of two in-situ experiments in callovo-oxfordian argillite. *Engineering geology*, 165:46–63, 2013.
- [16] M. Charlotte, J. Laverne, and J.-J. Marigo. Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 25(4):649–669, 2006.
- [17] B. Come. Un exemple d’application des mesures du comportement des roches à température élevée: l’évaluation de la «charge thermique admissible» en formations géologiques pour l’évacuation de déchets radioactifs de haute activité. *Revue française de géotechnique*, (27):51–65, 1984.
- [18] O. Coussy. Mécanique des milieux poreux. technip, paris, 1991. *English, Mechanics of Porous Continua*. Wiley, Chichester, 1995.
- [19] O. Coussy. *Poromechanics*. John Wiley & Sons, 2004. Google-Books-ID: Nm_RNf7paz4C.
- [20] R. de La Vaissière, G. Armand, and J. Talandier. Gas and water flow in an excavation-induced fracture network around an underground drift: a case study for a radioactive waste repository in clay rock. *Journal of Hydrology*, 521:141–156, 2015.
- [21] G. Del Piero, G. Lancioni, and R. March. A diffuse cohesive energy approach to fracture and plasticity: the one-dimensional case. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 8(2):109–151, 2013.
- [22] L. Dormieux and D. Kondo. *Micromechanics of fracture and damage*, volume 1. John Wiley & Sons, 2016.
- [23] L. Dormieux, E. Lemarchand, T. Carlioz, and L. Jeannin. Crack nucleation in saturated porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 44(5):553–574, 2020.
- [24] A. Dossier. Argile: Evolution phénoménologique du stockage géologique. *Collection «Les rapports», Andra (France)*, 2005.
- [25] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, 241(1226):376–396, 1957.
- [26] T. Fett. *Stress intensity factors and weight functions*. Computational Mechanics Publications, 1997.
- [27] T. Fett. *Stress intensity factors-t-stresses-weight functions*. 2008.
- [28] T. Fett, G. Rizzi, and H.-A. Bahr. Green’s functions for the t-stress of small kink and fork cracks. *Engineering fracture mechanics*, 73(10):1426–1435, 2006.

- [29] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *European Journal of mechanics series a solids*, 12:149–149, 1993.
- [30] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1319–1342, 1998.
- [31] A. Gens, J. Vaunat, B. Garitte, and Y. Wileveau. In situ behaviour of a stiff layered clay subject to thermal loading: observations and interpretation. *Géotechnique*, 57(2):207–228, 2007.
- [32] A. Ghassemi and S. Tarasovs. Analysis of fracture propagation under thermal stress in geothermal reservoirs. In *Proceedings world geothermal congress*, 2015.
- [33] M. GHOREYCHI. Phénomènes couplés autour des cavités de stockage de déchets nucléaires. In *Mécanique et géotechnique:(Jubilé scientifique de Pierre Habib)*, pages 59–75, 1998.
- [34] K. Gou, M. Mallikarjuna, K. Rajagopal, and J. Walton. Modeling fracture in the context of a strain-limiting theory of elasticity: a single plane-strain crack. *International Journal of Engineering Science*, 88:73–82, 2015.
- [35] A. A. Griffith and G. I. Taylor. VI. the phenomena of rupture and flow in solids. 221(582):163–198, Jan. 1921. Publisher: Royal Society.
- [36] B. Gross. *Stress-intensity Factors for a Single-edge-notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function*. National Aeronautics and Space Administration, 1964.
- [37] R. J. Hartranft and G. C. Sih. Alternating method applied to edge and surface crack problems. In G. C. Sih, editor, *Methods of analysis and solutions of crack problems: Recent developments in fracture mechanics Theory and methods of solving crack problems*, Mechanics of fracture, pages 179–238. Springer Netherlands, Dordrecht, 1973.
- [38] D. Hodgkinson and P. Bourke. Initial assessment of the thermal stresses around a radioactive waste depository in hard rock. *Annals of nuclear Energy*, 7(10):541–552, 1980.
- [39] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Overall moduli of solids with microcracks: load-induced anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(2):155–171, 1983.
- [40] D. HUY, H. D. BUI, N. Q. SON, et al. Etude expérimentale de la dissipation dans la propagation de fissure par thermographie infrarouge. 1981.
- [41] G. R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. 24:351–369, 1957.
- [42] J. C. Jaeger and N. G. Cook. *Fundamentals of rock mechanics*, methuen & co. Ltd., London, 513, 1969.
- [43] E. Jagla. Stable propagation of an ordered array of cracks during directional drying. *Physical Review E*, 65(4):046147, 2002.

- [44] L. Jeannin, L. Dormieux, and T. Carlioz. Nucleation of thermal cracks at the wall of a rock mass. *Mechanics Research Communications*, 97:57–62, Apr. 2019.
- [45] L. Jeannin, L. Dormieux, E. Lemarchand, and T. Carlioz. Analysis of fracture nucleation around wellbores. 2021.
- [46] Y. Jia, H. Bian, G. Duveau, K. Su, and J.-F. Shao. Numerical modelling of in situ behaviour of the callovo–oxfordian argillite subjected to the thermal loading. *Engineering geology*, 109(3-4):262–272, 2009.
- [47] C. Jiang, X. Wu, J. Li, F. Song, Y. Shao, X. Xu, and P. Yan. A study of the mechanism of formation and numerical simulations of crack patterns in ceramics subjected to thermal shock. *Acta Materialia*, 60(11):4540–4550, 2012.
- [48] D. Leguillon. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(1):61–72, Jan. 2002.
- [49] D. Leguillon. A simple model of thermal crack pattern formation using the coupled criterion. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(6):538–546, 2013.
- [50] D. Leguillon and Z. Yosibash. Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius. *International Journal of Fracture*, 122(1):1–21, July 2003.
- [51] J. Lemaître and J. Chaboche. Endommagement. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1988.
- [52] H. Menaceur, P. Delage, A.-M. Tang, and N. Conil. The thermo-mechanical behaviour of the callovo-oxfordian claystone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 78:290–303, 2015.
- [53] M. Mohajerani. *Etude expérimentale du comportement thermo-hydro-mécanique de l’argilite du Callovo-Oxfordien*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2011.
- [54] T. T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, and C. Chateau. Initiation and propagation of complex 3d networks of cracks in heterogeneous quasi-brittle materials: Direct comparison between in situ testing-microct experiments and phase field simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 95:320–350, 2016.
- [55] M. OULD AMY and G. Rousset. Thermo-hydro-mechanical modelling of an underground radioactive wastes disposal. In *European conference on numerical methods in geotechnical engineering*, pages 171–179, 1994.
- [56] V. V. Panasiuk, L. T. Berezhnitskiy, and S. Y. Kovchik. *Propagation of an Arbitrarily Oriented Rectilinear Crack During Extension of a Plate*. National Aeronautics and Space Administration, 1965.
- [57] A. Parvizi, K. W. Garrett, and J. E. Bailey. Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*, 13(1):195–201, Jan. 1978.
- [58] K. Pham and J.-J. Marigo. Approche variationnelle de l’endommagement: II. les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4):199–206, 2010.
- [59] K. Pham and J.-J. Marigo. From the onset of damage to rupture: construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(2):147–171, 2013.

- [60] D. Quesada, D. Leguillon, and C. Putot. Multiple failures in or around a stiff inclusion embedded in a soft matrix under a compressive loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(4):668–679, July 2009.
- [61] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. 1968.
- [62] J. Salençon. Thermoelasticity. In J. Salençon, editor, *Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts Thermoelasticity*, pages 295–359. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [63] C. G. Sammis and M. F. Ashby. The failure of brittle porous solids under compressive stress states. 34(3):511–526, 1986.
- [64] Y. Shao, X. Xu, S. Meng, G. Bai, C. Jiang, and F. Song. Crack Patterns in Ceramic Plates after Quenching. *Journal of the American Ceramic Society*, 93(10):3006–3008, 2010. _eprint: <https://ceramics.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1551-2916.2010.03971.x>.
- [65] P. Sicsic, J.-J. Marigo, and C. Maurini. Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem: a gradient damage modeling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 63:256–284, 2014.
- [66] C.-F. Tsang, F. Bernier, and C. Davies. Geohydromechanical processes in the excavation damaged zone in crystalline rock, rock salt, and indurated and plastic clays—in the context of radioactive waste disposal. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 42(1):109–125, 2005.
- [67] L. A. Wigglesworth. Stress distribution in a notched plate. 4(1):76–96, 1957. Publisher: London Mathematical Society.
- [68] Y. Wileveau, F. Cornet, J. Desroches, and P. Blumling. Complete in situ stress determination in an argillite sedimentary formation. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 32(8-14):866–878, 2007.
- [69] M. L. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. 19(4):526–528, Dec. 1952. Conference Name: West Coast Conference of the Applied Mechanics Division Meeting Name: West Coast Conference of the Applied Mechanics Division Number: 4 Place: Los Angeles, CA Publisher: American Society Mechanical Engineers.
- [70] C. Zhang and T. Rothfuchs. Experimental study of the hydro-mechanical behaviour of the callovo-oxfordian argillite. *Applied Clay Science*, 26(1-4):325–336, 2004.
- [71] C.-L. Zhang. Experimental evidence for self-sealing of fractures in claystone. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 36(17-18):1972–1980, 2011.